

Вячеслав Седых

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
ТЕОРИИ  
КАТАСТРОФ**



Вячеслав Седых

# Математические методы теории катастроф

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2021

УДК 514  
ББК 22.16  
С28

Издано при поддержке  
Фонда развития теоретической  
физики и математики «БАЗИС»

*Седых В. Д.*

Математические методы теории катастроф

Электронное издание

М. : МЦНМО, 2021

223 с.

ISBN 978-5-4439-3622-2

При решении задач теории катастроф широко используются разнообразные методы теории особенностей гладких отображений. Целью данной книги является ознакомление читателей с основными идеями, методами и результатами теории особенностей, а также с её приложениями в теории катастроф (бифуркации положений равновесия динамических систем, кризисы рынков, особенности световых каустик и эквидистант гладких поверхностей, распространение возмущений, оптимизация управляемых систем). Полученные знания дадут возможность использовать на практике современные математические методы исследования сложнейших процессов, происходящих в природе и в различных областях человеческой деятельности.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: студентов, инженеров, научных работников, преподавателей.

Подготовлено на основе книги: *Седых В. Д.* Математические методы теории катастроф. — М. : МЦНМО, 2021. — 224 с. — ISBN 978-5-4439-1622-4.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.  
Тел. (495) 241-74-83

[www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru)

ISBN 978-5-4439-3622-2

© В. Д. Седых, 2021.

© МЦНМО, 2021.

# Содержание

Предисловие . . . . .	5
§ 1. Понятие общего положения . . . . .	7
§ 2. Динамические системы. . . . .	17
§ 3. Бифуркации положений равновесия . . . . .	24
§ 4. Гладкие многообразия . . . . .	30
§ 5. Особенности гладких отображений . . . . .	35
§ 6. Складка, сборка и зонтик Уитни . . . . .	43
§ 7. Модель Зимана краха фондовой биржи . . . . .	51
§ 8. Теорема Вейерштрасса — Мальгранжа . . . . .	56
§ 9. Теорема трансверсальности Тома . . . . .	62
§ 10. Простейшие инварианты особенностей . . . . .	72
§ 11. Устойчивость гладких отображений . . . . .	78
§ 12. Гомотопический метод Тома . . . . .	85
§ 13. Версальные деформации. . . . .	94
§ 14. Устойчивые особенности коранга 1. . . . .	105
§ 15. <i>ADE</i> -классификация Арнольда . . . . .	110
§ 16. Эволюты, световые каустики и эквидистанты. . . . .	118
§ 17. Особенности каустик . . . . .	123
§ 18. Особенности фронтов . . . . .	146
§ 19. Распространение возмущений . . . . .	164
§ 20. Строение особенностей каустик и фронтов. . . . .	171
§ 21. Парусник . . . . .	190
Литература . . . . .	219



## Предисловие

Ни одно исследование нельзя считать наукой без математического доказательства.

Леонардо да Винчи

*Катастрофа* — это скачкообразное изменение состояния объекта, возникающее в результате плавного изменения внешних условий. Состояние объекта часто описывается гладкими отображениями, т. е. наборами дифференцируемых функций нескольких переменных. Эти отображения могут, в свою очередь, зависеть от дополнительных параметров. При непрерывном изменении параметров свойства отображения могут резко меняться. Теория катастроф изучает подобные явления.

Как самостоятельная наука теория катастроф сформировалась во второй половине двадцатого века благодаря пионерским работам Хасслера Уитни, Рене Тома, Кристофера Зимана, Джона Мазера, Владимира Игоревича Арнольда и многих других замечательных математиков. В её основе лежит теория особенностей гладких отображений — область современной математики, находящаяся на стыке многих её разделов, как классических, так и новейших. Использование методов теории особенностей привело к решению многих задач теории катастроф в таких сугубо прикладных областях, как теория бифуркаций положений равновесия динамических систем, геометрическая и волновая оптика, теория оптимального управления и другие.

Теории особенностей гладких отображений и её приложениям посвящены многочисленные издания разных уровней сложности (см., например, [8], [18], [31]). Чтение части из них требует довольно глубоких знаний в весьма абстрактных областях математики. А между тем идеи, которыми изобилуют эти замечательные книги, могут быть очень полезными инженерам и другим специалистам, использующим математические методы в своей повседневной работе. Настоящее издание не содержит доказательств фундаментальных результатов теории катастроф. Основное внимание уделяется именно методам, при помощи которых эти результаты доказываются.

В книге приводятся разнообразные примеры практического использования методов исследования, разработанных основателями теории катастроф. При этом все необходимые понятия подробно объясняются по ходу изложения вплоть до строгих определений многих из них. Все утверждения теории особенностей гладких отображений, используемые в книге, снабжены чёткими формулировками. Предполагается, конечно, что читатель обладает знаниями стандартных математических курсов, читаемых студентам высших технических учебных заведений, обучающихся по специальностям с расширенной математической подготовкой.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: инженеров, научных работников, преподавателей. Она может быть полезной и профессиональным математикам, особенно тем, кто работает в различных прикладных областях. Автор надеется, что книга будет востребована и студентами, интересующимися современной математикой. Чтение книги позволит им составить первое впечатление о теории катастроф, её методах и задачах, которые решаются этими методами.

Автор выражает глубокую благодарность И. А. Богаевскому, С. М. Гусейн-Заде и М. Э. Казаряну за многочисленные обсуждения рукописи этой книги. Их замечания позволили значительно улучшить её первоначальную версию.

## §1. Понятие общего положения

Изучая то или иное свойство объектов, встречающихся на практике, надо всегда помнить, что величины, характеризующие эти объекты, обычно определяются весьма приближенно. Поэтому в первую очередь следует изучать объекты, находящиеся в состоянии, которое со времен Пуанкаре принято называть «общим положением».

Такое состояние должно удовлетворять следующему важному условию: любой объект рассматриваемого класса можно привести в состояние общего положения «сколь угодно малой деформацией». Кроме того, желательно, чтобы интересующее нас свойство объекта сохранялось бы при любых сколь угодно малых деформациях этого объекта (например, при выборе точности задания исходных данных).

Состояние объектов часто характеризуется отображениями некоторого класса гладкости, т. е. упорядоченными наборами функций нескольких переменных, дифференцируемых достаточное число раз. Чтобы говорить о близости одного отображения к другому, множество всех отображений рассматриваемого класса снабжают разными структурами.

**Топологические пространства.** *Топологией* на множестве  $\Omega$  называется система  $T$  его *открытых* подмножеств, удовлетворяющая следующим условиям (см. [23]):

- 1) множество  $\Omega$  и пустое множество  $\emptyset$  принадлежат  $T$ ;
- 2) вместе с каждым набором множеств система  $T$  содержит их объединение, а вместе с каждым конечным набором — их пересечение.

Для задания топологии на множестве  $\Omega$  выбирают сначала *базовые* открытые подмножества, составляющие её базу. База топологии должна удовлетворять следующему условию: пересечение любого конечного набора множеств из базы является объединением базовых множеств. Например, в качестве базовых открытых подмножеств в  $\mathbb{R}^n$  обычно берут *открытые шары* (т. е. шары положительного радиуса без ограничивающих их сфер)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Здесь и далее  $\mathbb{R}^n$  обозначает евклидово пространство конечной размерности  $n \geq 1$ .



Открытыми подмножествами множества  $\Omega$  называются объединения базовых открытых подмножеств. *Окрестностью* точки в  $\Omega$  называют любое открытое подмножество, содержащее эту точку.

Множество  $\Omega$ , снабжённое топологией, называется *топологическим пространством*. Каждое его подмножество  $U$  само является топологическим пространством с *индуцированной* топологией. База этой топологии состоит из пересечений множества  $U$  с базовыми открытыми подмножествами пространства  $\Omega$ .

На топологию пространства часто накладывают разные дополнительные ограничения, формулируемые в виде аксиом. Мы упомянем здесь только две из них:

- 1) *аксиома отделимости Хаусдорфа*: любые две различные точки пространства имеют непересекающиеся окрестности;
- 2) *аксиома счётности*: топология обладает счётной базой.

Пространство  $\mathbb{R}^n$  со стандартной топологией (заданной открытыми шарами) удовлетворяет обеим этим аксиомам. Пространство функций в  $\mathbb{R}^n$ , непрерывно дифференцируемых  $k$  раз, снабжают так называемой  $C^k$ -топологией Уитни (с. 66). В этой топологии оно удовлетворяет аксиоме отделимости, но не удовлетворяет аксиоме счётности.

Пусть  $U$  — подмножество топологического пространства  $\Omega$ . Если у каждой точки  $x \in U$  есть окрестность, целиком лежащая в  $U$ , то множество  $U$  является открытым. Если дополнение к  $U$  в пространстве  $\Omega$  открыто, то говорят, что множество  $U$  *замкнуто*. Наибольшее открытое подмножество множества  $U$  называется его *внутренностью* и обозначается  $\text{Int } U$ . Наименьшее замкнутое множество, содержащее  $U$ , называется его *замыканием* и обозначается  $\text{Cl } U$ . Разность

$$\partial U = \text{Cl } U \setminus \text{Int } U$$

замыкания и внутренней называют *границей* множества. Она замкнута.

Отображение топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого подмножества пространства-образа является открытым подмножеством простран-

ства-прообраза. Прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут.

Подмножество  $U$  топологического пространства  $\Omega$  называется (*линейно*) *связным*, если любые две точки  $x, y \in U$  можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в  $U$ . Последнее означает, что существует такое непрерывное отображение  $\gamma$  отрезка  $[a, b]$  числовой прямой  $\mathbb{R}$  в пространство  $\Omega$ , что<sup>1</sup>

$$\gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y, \quad \gamma([a, b]) \subset U.$$

**Замечание.** Есть другое понятие связности, не равносильное линейной. Оно не используется в этой книге.

Всякое открытое связное подмножество топологического пространства называют *областью*. Максимальные связные подмножества пространства называют его *связными компонентами*. Максимальность связного подмножества  $U$  пространства  $\Omega$  означает, что никакую точку из  $\Omega$ , не принадлежащую  $U$ , нельзя соединить с подмножеством  $U$  непрерывной кривой, лежащей в  $\Omega$ .

Непрерывное отображение топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно обратимо и обратное отображение тоже непрерывно. Топологические пространства  $M$  и  $N$  называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм  $f: M \rightarrow N$ . Например, стандартная сфера в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , из которой выколота одна точка, гомеоморфна  $\mathbb{R}^n$  (гомеоморфизм — стереографическая проекция проколотой сферы на гиперплоскость).

Топологические пространства могут иметь различные дополнительные структуры. Важнейшей для нас будет структура гладкого многообразия (см. § 4, с. 30). В случае наличия такой структуры можно говорить о дифференцируемости отображения одного пространства в другое.

Множество всех непрерывных отображений многообразия  $M$  в многообразие  $N$  содержит различные подмножества, состоящие из отображений данного класса гладкости. Эти подмножества снабжают разными специальными топологиями и полученные топологические пространства называют *функциональными*.

---

<sup>1</sup>Здесь и далее символ  $\subset$  не исключает случай равенства рассматриваемых множеств.

Мы в этой книге будем изучать функциональные пространства  $C^\infty$ -гладких (бесконечно дифференцируемых) отображений гладких многообразий, снабжённые  $C^\infty$ -топологией Уитни. Подробное описание этой топологии приведено в § 9 (с. 67).

**Определение.** Подмножество  $U$  топологического пространства  $\Omega$  называется *всюду плотным*, если в любой окрестности любой точки  $x \in \Omega$  существует хотя бы одна точка, принадлежащая  $U$ . Подмножество  $U \subset \Omega$  называется *массивным*, если оно является пересечением счётного числа открытых всюду плотных подмножеств пространства  $\Omega$ .

Отметим, что пересечение конечного числа открытых всюду плотных подмножеств любого топологического пространства открыто и всюду плотно. Пересечение счётного числа массивных подмножеств массивно.

**Определение.** Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *условию Бэра*, если всякое его массивное подмножество всюду плотно.

Пространство  $\mathbb{R}^n$  (со стандартной топологией) удовлетворяет условию Бэра. Функциональное пространство гладких отображений в  $C^\infty$ -топологии Уитни также удовлетворяет этому условию.

**Пример 1.1.** Пусть  $P$  — ненулевой многочлен от  $x \in \mathbb{R}^n$  с существенными коэффициентами. Тогда множество  $U$  таких точек  $x$ , что  $P(x) \neq 0$ , является открытым всюду плотным подмножеством в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Действительно, из формулы Тейлора следует, что если многочлен  $P$  обращается в нуль во всех точках открытого подмножества в  $\mathbb{R}^n$ , то он тождественно равен 0. Открытость множества  $U$  объясняется свойством непрерывности многочленов.

Из примера 1.1 следует, в частности, что дополнение в  $\mathbb{R}^n$  к объединению конечного числа гиперплоскостей открыто и всюду плотно. Дополнение к объединению счётного числа гиперплоскостей массивно.

**Пример 1.2.** Множество всех гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^n$ , заданных уравнениями с целыми коэффициентами, является счётным. По-

этому дополнение к объединению всех таких гиперплоскостей массивно.

Пусть теперь  $\Omega$  — какое-нибудь функциональное пространство, удовлетворяющее условию Бэра.

**Определение.** Будем говорить, что утверждение об отображениях из пространства  $\Omega$  справедливо для отображения  $f$  *общего положения*, если существует такое массивное подмножество  $U \subset \Omega$ , что это утверждение имеет место для любого  $f \in U$ .

Свойства отображения общего положения зависят, очевидно, от выбора массивного подмножества  $U$  в функциональном пространстве  $\Omega$ . Если такой выбор сделан, то всякое отображение  $f \in \Omega \setminus U$  называется отображением *не общего положения*.

**Замечание.** Дополнение к массивному подмножеству в топологическом пространстве, удовлетворяющем условию Бэра, не содержит подмножеств, являющихся массивными подмножествами всего пространства.

**Пример 1.3.** Пусть  $\Omega$  — множество приведённых квадратных трёхчленов  $f$  от  $x \in \mathbb{R}$  вида

$$f(x) = x^2 + px + q$$

с вещественными коэффициентами. Оно представляет собой плоскость  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $p, q$ .

На плоскости  $\mathbb{R}^2$  многочлены  $f$ , имеющие кратный корень, образуют параболу

$$\Sigma_1: p^2 = 4q;$$

многочлены, имеющие нулевой корень, составляют прямую

$$\Sigma_2: q = 0;$$

многочлены, имеющие чисто мнимые комплексные корни, образуют полупрямую

$$\Sigma_3: p = 0, q > 0$$

(см. рис. 1). Дополнение к любой из первых двух кривых и дополнение к замыканию кривой  $\Sigma_3$  являются открытыми всюду плотными подмножествами в  $\mathbb{R}^2$ .

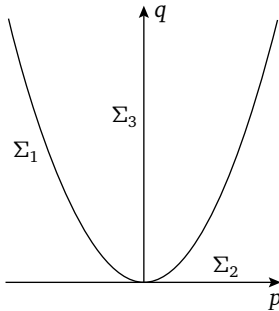


Рис. 1. Приведённые квадратные трёхчлены  
не общего положения

Если в качестве массивного подмножества  $U$  в пространстве  $\Omega$  взять дополнение к параболе  $\Sigma_1$ , то многочлен  $f \in U$  не будет иметь кратных корней. Если же в качестве  $U$  взять дополнение к объединению

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3,$$

то многочлен  $f \in U$  либо будет иметь пару различных ненулевых вещественных корней, либо — пару комплексно-сопряженных корней с ненулевой вещественной частью. Наконец, если в качестве  $U$  взять дополнение к объединению  $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ , то многочлен  $f \in U$  не будет иметь нулевых и чисто мнимых корней.

Главный вопрос, который всякий раз возникает при решении конкретной задачи — существует ли вообще хотя бы одно такое массивное подмножество  $U$  в данном функциональном пространстве  $\Omega$ , что каждое отображение  $f \in U$  обладает интересующим нас свойством? Ответить на этот вопрос позволяет знаменитая теорема трансверсальности Тома. Она сформулирована со всеми подробностями в § 9 (с. 67).

Не следует однако думать, что изучать необходимо лишь объекты общего положения. Дело в том, что на практике объект исследования может зависеть от одного или нескольких параметров. В этом случае возникает так называемое «семейство объектов» (полученных для всех возможных значений параметров). При изменении параметра объект семейства может оказаться в состоянии не общего положения. Более того, если семейство

само находится в «общем положении», то состояние не общего положения некоторых его объектов будет неустранимо малой деформацией семейства.

**Пример 1.4.** Рассмотрим семейство

$$F_\lambda(x) = x^2 + p(\lambda)x + q(\lambda)$$

приведённых квадратных трёхчленов  $x^2 + px + q$  от  $x$  с вещественными коэффициентами, гладко зависящими от одного вещественного параметра  $\lambda$ . Оно определяет кривую

$$\gamma: p = p(\lambda), \quad q = q(\lambda)$$

на плоскости  $(p, q)$  всех таких трёхчленов. Если кривая  $\gamma$  пересекает параболу  $\Sigma_1: p^2 = 4q$  при некотором  $\lambda = \lambda_0$ , то многочлен  $F_{\lambda_0}(x)$  имеет кратный корень.

Предположим, что кривая  $\gamma$  пересекает  $\Sigma_1$  в точке  $\gamma(\lambda_0)$  под ненулевым углом (т. е. касательные к кривым  $\gamma$  и  $\Sigma_1$  в этой точке не совпадают). Тогда, по теореме о неявной функции, для любого семейства

$$\tilde{F}_\lambda(x) = x^2 + \tilde{p}(\lambda)x + \tilde{q}(\lambda),$$

достаточно близкого к  $F_\lambda(x)$ , кривая

$$\tilde{\gamma}: p = \tilde{p}(\lambda), \quad q = \tilde{q}(\lambda)$$

пересекает параболу  $\Sigma_1$  при некотором  $\tilde{\lambda}_0$ , близком к  $\lambda_0$ , т. е. многочлен  $\tilde{F}_{\tilde{\lambda}_0}(x)$  также имеет кратный корень. Близость семейств  $\tilde{F}_\lambda(x)$  и  $F_\lambda(x)$  означает здесь близость значений вектор-функций  $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$  и  $\lambda \mapsto \tilde{\gamma}(\lambda)$  вместе с производными в окрестности точки  $\lambda_0$ .

Аналогично если кривая  $\gamma$  пересекает прямую  $\Sigma_2: q = 0$  (или полупрямую  $\Sigma_3: p = 0, q > 0$ ) при некотором  $\lambda = \lambda_0$ , то многочлен  $F_{\lambda_0}(x)$  имеет нулевой корень (или, соответственно, пару комплексно-сопряженных корней с нулевой вещественной частью). Более того, если это пересечение происходит под ненулевым углом, то для любого семейства  $\tilde{F}_\lambda(x)$ , достаточно близкого к  $F_\lambda(x)$ , кривая  $\tilde{\gamma}$  пересекает  $\Sigma_2$  (или  $\Sigma_3$ ) при некотором  $\tilde{\lambda}_0$ , близком к  $\lambda_0$ , т. е. многочлен  $\tilde{F}_{\tilde{\lambda}_0}(x)$  также имеет нулевой корень (или комплексно-сопряженную пару чисто мнимых корней).

Попадание объекта семейства в состояние не общего положения называется *вырождением*. Вырождения характеризуются своей коразмерностью.

**Определение.** Вырождение имеет *коразмерность*  $s$ , если оно неустранимым образом встречается в семействах объектов, зависящих не менее чем от  $s$  параметров, т. е. оно не встречается в  $k$ -параметрических семействах общего положения при  $k < s$ , а среди  $s$ -параметрических семейств есть такие, что указанное вырождение имеется как у них, так и у всех близких семейств при некоторых близких значениях параметров.

В частности, появление кратного ненулевого корня, простого нулевого корня или пары чисто мнимых корней у приведённого квадратного трёхчлена является вырождением коразмерности 1. Коразмерность вырождения, при котором трёхчлен имеет кратный нулевой корень, равна 2.

**Пример 1.5.** Пусть  $\Omega$  — векторное пространство вещественных квадратных матриц 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Оно изоморфно пространству  $\mathbb{R}^4$  с координатами  $a, b, c, d$ .

Характеристические корни  $\lambda$  матрицы  $A$  определяются уравнением

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Матрицы  $A$ , имеющие кратный характеристический корень, образуют гиперповерхность

$$\Sigma_1: (a - d)^2 + 4bc = 0$$

в пространстве  $\mathbb{R}^4$ ; матрицы, имеющие нулевой характеристический корень, составляют гиперповерхность

$$\Sigma_2: ad = bc;$$

матрицы, имеющие чисто мнимые характеристические корни, заполняют часть

$$\Sigma_3: a + d = 0, \quad ad > bc$$

гиперплоскости  $a + d = 0$ .

Из примера 1.1 (с. 10) следует, что дополнения к любой из гиперповерхностей  $\Sigma_1, \Sigma_2$  и дополнение к замыканию  $\Sigma_3$  являются открытыми всюду плотными подмножествами в  $\mathbb{R}^4$ . Таким образом, если в качестве массивного подмножества  $U \subset \Omega$  взять дополнение к объединению

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3,$$

то матрица  $A$  общего положения (принадлежащая  $U$ ) не будет иметь кратных, нулевых и чисто мнимых характеристических корней.

Далее, гиперповерхность  $\Sigma_1$  имеет касательную гиперплоскость в любой точке, не лежащей на прямой

$$a = d, \quad b = c = 0.$$

Гиперповерхность  $\Sigma_2$  имеет касательную гиперплоскость в любой точке, кроме начала координат. Отсюда следует, что появление кратного ненулевого корня, простого нулевого корня или пары чисто мнимых корней среди характеристических корней не скалярной матрицы  $A$  является вырождением коразмерности 1.

Покажем, что появление кратного нулевого характеристического корня у ненулевой матрицы является вырождением коразмерности 2. Действительно, пересечение  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  является конусом второго порядка в гиперплоскости  $a + d = 0$ . Этот конус имеет двумерную касательную плоскость во всех точках, кроме вершины (расположенной в начале координат).

Рассмотрим семейство

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

матриц, гладко зависящих от двух вещественных параметров  $x_1, x_2$ , где  $x = (x_1, x_2)$ . Оно определяет поверхность  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^4$ . Предположим, что эта поверхность пересекает конус  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  при  $x = x_0$  в точке  $A(x_0) \neq 0$  и имеет в этой точке (двумерную) касательную плоскость, которая пересекает касательную плоскость к конусу ровно в одной точке. Тогда, по теореме о неявной функции, для любого семейства  $\tilde{A}(x)$ , достаточно близкого к  $A(x)$ , соответствующая ему поверхность  $\tilde{\gamma}$  в  $\mathbb{R}^4$  пересекает конус  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  при



некотором  $\tilde{x}_0$ , близком к  $x_0$ , в точке  $\tilde{A}(x_0) \neq 0$ , т. е. ненулевая матрица  $\tilde{A}(\tilde{x}_0)$  также имеет кратный нулевой характеристический корень.

Тот факт, что матрицы  $A$  с кратным нулевым характеристическим корнем не встречаются в однопараметрических семействах общего положения следует из теоремы трансверсальности Тома. Мы лишь опишем геометрию этого явления.

Семейство матриц  $A$ , гладко зависящих от одного вещественного параметра, определяет кривую  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^4$ . Кривая  $\gamma$  общего положения имеет касательную в каждой своей точке (как и любая кривая общего положения в четырёхмерном пространстве; см. пример 9.3, с. 70). Пересечение кривой  $\gamma$  общего положения с гиперплоскостью  $a + d = 0$  происходит под ненулевым углом. Поэтому каждая точка пересечения обладает окрестностью, в которой нет других пересечений (теорема о неявной функции). Отсюда следует, что сколь угодно малой деформацией кривой  $\gamma$  можно сдвинуть все её точки пересечения с гиперплоскостью  $a + d = 0$  в дополнение к конусу  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  в этой гиперплоскости.

Аналогичные рассуждения показывают, что появление ненулевой скалярной матрицы в пространстве всех вещественных квадратных матриц 2-го порядка является вырождением коразмерности 3. Появление нулевой матрицы является вырождением коразмерности 4.

### Упражнения

1. Изобразите в пространстве вещественных квадратичных форм от двух переменных множество вырожденных форм. Что представляет из себя множество положительно определенных квадратичных форм?

2. Изобразите на плоскости  $(p, q)$  вещественных многочленов от  $x$  вида

$$x^3 + px + q$$

множество многочленов, имеющих кратный корень. Что представляет из себя множество многочленов, имеющих три попарно различных вещественных корня?

## § 2. Динамические системы

В этом и следующем параграфах мы проиллюстрируем введённые выше понятия на примере положений равновесия динамических систем (см. [10]).

Динамическая система в области  $D$  пространства  $\mathbb{R}^n$  задаётся автономным дифференциальным уравнением<sup>1</sup> вида

$$\dot{x} = v(x),$$

где  $\dot{x}$  — скорость перемещения точки  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  с течением времени  $t$ , а  $v$  — векторное поле в  $D$ . Область  $D$  часто называют *фазовым пространством* динамической системы,  $x$  — *фазовой точкой*,  $v$  — *фазовым векторным полем*, а вектор  $v(x)$  — *фазовой скоростью*.

Из основной теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [9]) следует, что если фазовая скорость непрерывно дифференцируемо зависит от фазовой точки, то для любых  $x_0 \in D$  и  $t_0 \in \mathbb{R}$  существует интервал  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , содержащий точку  $t_0$ , и вектор-функция

$$\gamma: I \rightarrow D, \quad t \mapsto x = \gamma(t),$$

такие, что

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v(\gamma(t))$$

для любого  $t \in I$ , причём  $\gamma(t_0) = x_0$ . Функция  $x = \gamma(t)$  называется *решением* дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , удовлетворяющим *начальному условию*  $\gamma(t_0) = x_0$ . Согласно той же теореме каждое решение дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$  локально единственно, т. е. если  $x = \gamma_1(t)$ ,  $t \in I_1$ , и  $x = \gamma_2(t)$ ,  $t \in I_2$ , — два таких решения, что  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$ , то  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  для любого  $t \in I_1 \cap I_2$ .

Каждое решение дифференциального уравнения определяет кривую в фазовом пространстве: образ соответствующей вектор-функции. Эта кривая называется *фазовой*. Она может состоять из одной точки. Поведение фазовых кривых динамической системы в данной области фазового пространства обычно описывается

---

<sup>1</sup>Дифференциальное уравнение в многомерном пространстве, записанное в координатной форме, называется *системой* дифференциальных уравнений.

так называемым *фазовым портретом*. Он представляет собой совокупность достаточного количества фазовых кривых, по которым можно судить о поведении всех остальных фазовых кривых системы. Особенно важными являются фазовые портреты динамических систем в окрестности положений равновесия.

Напомним, что точка  $x_0 \in D$  называется *особой точкой* векторного поля  $v$ , если  $v(x_0) = 0$ . В этом случае постоянная вектор-функция  $x = x_0$  является решением дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , а точка  $x_0$  — фазовой кривой. Поэтому особые точки векторных полей называют также *положениями равновесия* соответствующих динамических систем.

Далее будем считать, что  $v = v(x)$  — гладкое векторное поле, т. е. его координатные компоненты являются  $C^\infty$ -гладкими функциями от  $x$ .

**Определение.** Положение равновесия  $x_0$  динамической системы  $\dot{x} = v(x)$  называется *устойчивым* (по Ляпунову), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$  и такое, что для каждого  $\tilde{x}$ , удаленного от  $x_0$  меньше чем на  $\delta$ , выполнены следующие условия:

- 1) решение  $x = \gamma(t)$  уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\gamma(t_0) = \tilde{x}$ , продолжается на всю полуось  $t > t_0$ ;
- 2) точка  $\gamma(t)$  удалена от  $x_0$  меньше чем на  $\varepsilon$  для всех  $t > t_0$ .

Если, в дополнение к сказанному, существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = x_0,$$

то положение равновесия  $x_0$  называется *асимптотически устойчивым*.

Рассмотрим матрицу  $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$ , составленную из частных производных координатных компонент поля  $v$  в особой точке  $x_0$ . Характеристический многочлен этой матрицы имеет ровно  $n$  корней (вещественных и комплексных), взятых с учётом кратностей. Они не зависят от выбора системы гладких координат в  $\mathbb{R}^n$  и называются *характеристическими корнями* поля  $v$  в точке  $x_0$ . Следующее утверждение доказано, например, в [9].

**Теорема Ляпунова.** Если все характеристические корни векторного поля  $v$  в особой точке  $x_0$  имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия  $x_0$  динамической системы  $\dot{x} = v(x)$  асимптотически устойчиво. Если же хотя бы один из характеристических корней поля  $v$  в точке  $x_0$  имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия  $x_0$  неустойчиво.

Нетрудно проверить, что векторное поле  $v$  общего положения не имеет кратных, нулевых и чисто мнимых характеристических корней (в случае  $n = 2$  это доказано в примере 1.5, с. 14). Поэтому устойчивость положений равновесия динамической системы  $\dot{x} = v(x)$  общего положения полностью определяется характеристическими корнями поля  $v$  в соответствующих особых точках.

**Теорема Пуанкаре.** Если между характеристическими корнями векторного поля  $v$  в особой точке  $x_0 = (a_1, \dots, a_n)$  отсутствуют так называемые резонансы (линейные соотношения определенного вида с целыми коэффициентами, одновременно не равными нулю), то для любого натурального<sup>1</sup>  $N$  заменой координат

$$x_i = a_i + y_i + P_i(y), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $P_1, \dots, P_n$  — многочлены от  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , у которых степень каждого члена больше 1, динамическая система  $\dot{x} = v(x)$  приводится к виду

$$\dot{y} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0) \cdot y + o(|y|^N),$$

где  $|y| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ .

Спустя много лет после опубликования этого результата выяснилось, что справедливо более сильное утверждение: если векторное поле  $v$  удовлетворяет условию теоремы Пуанкаре в особой точке  $x_0$ , то дифференциальное уравнение  $\dot{x} = v(x)$  в окрестности этой точки можно привести к линейному виду гладкими заменами координат (см. [47]). Доказательство теоремы Пуанкаре имеется в [10].

<sup>1</sup>Натуральными в этой книге называются целые положительные числа.

Отметим, что нерезонансные наборы  $n$  комплексных чисел образуют массивное подмножество в  $n$ -мерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^n$  (как и точки в  $\mathbb{R}^n$  из дополнения к объединению гиперплоскостей, заданных уравнениями с целыми коэффициентами; см. пример 1.2, с. 10). Оказывается, что в функциональном пространстве гладких векторных полей в  $\mathbb{R}^n$  существует такое массивное подмножество  $U$ , что все особые точки каждого поля  $v \in U$  имеют нерезонансные наборы характеристических корней. Это вытекает из теоремы трансверсальности Тома (с. 67).

Таким образом, поведение фазовых кривых динамической системы  $\dot{x} = v(x)$  общего положения в окрестности любого положения равновесия  $x_0$  полностью описывается фазовым портретом *линеаризации*

$$\dot{y} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0) \cdot y$$

этой системы в точке  $x_0$ .

**Пример 2.1.** Положения равновесия динамической системы общего положения на плоскости исчерпываются списком из приведённой ниже таблицы<sup>1</sup>. Фазовые портреты линейных систем в окрестности этих положений равновесия изображены (в подходящих линейных координатах) на рис. 2.

характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2$	название положения равновесия	устойчивость положения
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	<i>неустойчивый узел</i>	неустойчиво
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	<i>устойчивый узел</i>	асимптотически устойчиво
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	<i>седло</i>	неустойчиво
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0, \beta > 0$	<i>устойчивый фокус</i>	асимптотически устойчиво
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta > 0$	<i>неустойчивый фокус</i>	неустойчиво

<sup>1</sup>Узлы, фокусы и седла (включая вырожденные и дикритические узлы при  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ) иногда называют грубыми особыми точками векторных полей на плоскости.

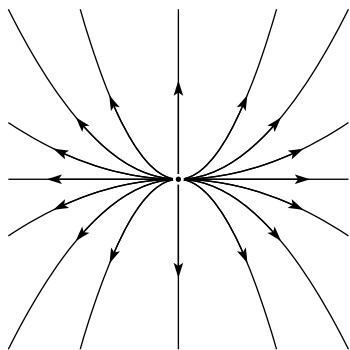
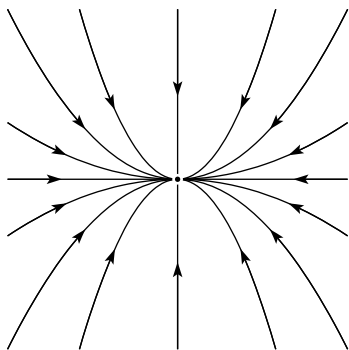
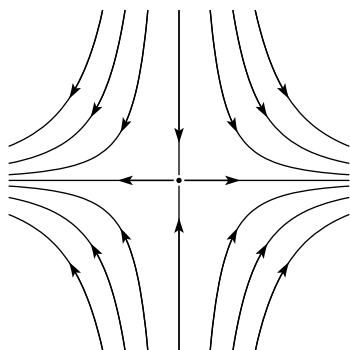
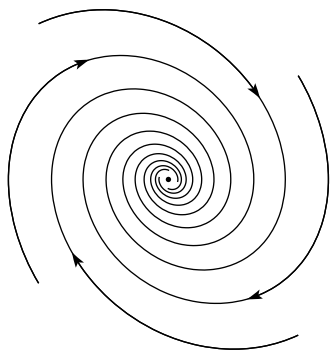
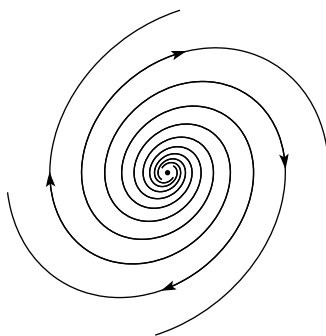
*неустойчивый узел**устойчивый узел**седло**устойчивый фокус**неустойчивый фокус*

Рис. 2. Особые точки векторного поля общего положения на плоскости

Фазовые портреты динамических систем в окрестностях положений равновесия с различными (неупорядоченными) наборами характеристических корней нельзя перевести друг в друга гладкими заменами координат. Поэтому их изучают при помощи локальных гомеоморфизмов.

**Определение.** Векторные поля  $v_1$  и  $v_2$ , заданные в областях  $D_1$  и  $D_2$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм

$$h: D_1 \rightarrow D_2,$$

переводящий фазовые кривые поля  $v_1$  в фазовые кривые поля  $v_2$  с сохранением направления движения<sup>1</sup>.

Особые точки векторных полей (или положения равновесия соответствующих динамических систем) называют *топологически эквивалентными*, если эти поля топологически эквивалентны в некоторых окрестностях рассматриваемых особых точек.

**Теорема Гробмана — Хартмана.** Пусть  $x_0$  — особая точка гладкого векторного поля  $v$  в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $k$  характеристических корней поля  $v$  в точке  $x_0$  имеют отрицательные вещественные части, а вещественные части остальных  $n - k$  корней положительны. Тогда положение равновесия  $x_0$  динамической системы  $\dot{x} = v(x)$  топологически эквивалентно положению равновесия динамической системы

$$\begin{cases} \dot{y}_i = -y_i, & i = 1, \dots, k; \\ \dot{y}_j = y_j, & j = k + 1, \dots, n. \end{cases}$$

В частности, любые два узла или любые два фокуса на плоскости (оба устойчивые или оба неустойчивые) топологически эквивалентны. Топологически эквивалентны также любые два седла. Доказательство теоремы Гробмана — Хартмана приведено, например, в [9].

**Замечание.** Ещё одним следствием теоремы Гробмана — Хартмана является топологическая эквивалентность узлов и

<sup>1</sup>Эту эквивалентность иногда называют орбитальной.

фокусов (одновременно устойчивых или неустойчивых). Это показывает, что топологическая эквивалентность положений равновесия динамических систем даёт о них весьма упрощенное представление.

В заключение отметим, что в теории катастроф постоянно используются различные эквивалентности между элементами тех или иных множеств. Все они являются *отношениями эквивалентности*, т. е. удовлетворяют следующим условиям (см. [23]):

- 1) каждый элемент эквивалентен самому себе (это условие называется *рефлексивностью*);
- 2) если  $a$  эквивалентно  $b$ , то  $b$  эквивалентно  $a$  (*симметричность*);
- 3) если  $a$  эквивалентно  $b$ , а  $b$  эквивалентно  $c$ , то  $a$  эквивалентно  $c$  (*транзитивность*).

Отношение эквивалентности на множестве примечательно тем, что оно позволяет разбить это множество на непересекающиеся классы попарно эквивалентных элементов. Такое разбиение называют *классификацией* элементов множества относительно данного отношения эквивалентности.

В частности, теорема Гробмана — Хартмана описывает классификацию положений равновесия динамических систем общего положения относительно топологического отношения эквивалентности. А именно, все особые точки векторных полей общего положения в  $\mathbb{R}^n$  разбиваются на  $n + 1$  класс топологической эквивалентности.

### Упражнения

1. Опишите все возможные наборы характеристических корней особых точек векторных полей общего положения в  $\mathbb{R}^3$ .

2. Нарисуйте фазовый портрет какой-нибудь линейной динамической системы общего положения в  $\mathbb{R}^3$  в окрестности положения равновесия.



### § 3. Бифуркации положений равновесия

Теперь рассмотрим семейство  $v_\tau(x)$  векторных полей в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящих от параметра  $\tau \in \mathbb{R}^k$ . Мы будем предполагать, что это семейство гладкое, т. е. координатные компоненты полей семейства являются  $C^\infty$ -гладкими функциями, определенными на пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ .

При изменении параметра  $\tau$  у векторного поля  $v_\tau(x)$  неустрашимым образом может появиться вырожденная особая точка.

**Пример 3.1.** Дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \tau \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

определяет закон малых колебаний математического маятника с трением. Здесь  $x$  — угол отклонения маятника от вертикальной оси,  $\tau \geq 0$  — коэффициент трения и

$$\omega^2 = g/l > 0,$$

где  $l$  — длина подвески, а  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнение (1) задаёт динамическую систему. Её фазовое пространство двумерно и определяется углом  $x$  и скоростью  $y = \dot{x}$ . Вектор фазовой скорости в точке  $(x, y)$  зависит от коэффициента трения  $\tau$  и определяется формулой

$$v_\tau(x, y) = (y, -\tau y - \omega^2 x).$$

Начало координат является особой точкой векторного поля  $v$ . При таких  $\tau$ , что  $\tau^2 - 4\omega^2 < 0$ , характеристические корни поля  $v$  в нуле образуют комплексно-сопряженную пару с вещественной частью  $-\tau/2$ . Следовательно, динамическая система математического маятника с малым, но ненулевым трением имеет асимптотически устойчивое положение равновесия  $x = \dot{x} = 0$  типа устойчивый фокус.

При исчезновении трения возникает вырожденное положение равновесия. А именно, при  $\tau = 0$  поле  $v$  имеет в нуле комплексно-сопряженную пару чисто мнимых характеристических корней.

Положение равновесия  $x = \dot{x} = 0$  динамической системы  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  называется *центром*. Фазовый портрет этой системы

изображен на рис. 3. Положение равновесия типа центр устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво асимптотически.

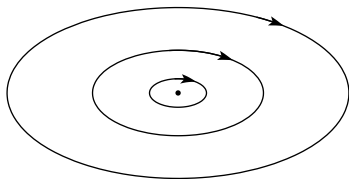


Рис. 3. Положение равновесия типа центр

**Замечание.** В классической механике центры возникают в точках невырожденного локального минимума потенциальной энергии консервативной системы с одной степенью свободы.

Любые качественные перестройки фазового портрета динамической системы в окрестности положения равновесия при изменении параметров, от которых зависит система, называются *бифуркациями* (см. [2]). Исторически бифуркации в динамических системах были первыми примерами катастроф, которые интенсивно изучались математиками. В оставшейся части параграфа в качестве примера описаны топологические бифуркации общего положения в динамических системах на плоскости, зависящих от одного параметра (см. также [10]).

Сначала заметим, что в результате простейшего вырождения (коразмерности 1) в наборе характеристических корней особой точки векторного поля может появиться либо ненулевой кратный корень, либо простой нулевой корень, либо комплексно-сопряженная пара корней с нулевой вещественной частью (см. пример 1.5, с. 14). По теореме Гробмана — Хартмана фазовый портрет динамической системы в окрестности положения равновесия в момент слияния двух ненулевых характеристических корней не претерпевает никаких изменений с точки зрения топологической эквивалентности. Поэтому этот случай обычно даже не считается вырождением при изучении топологических бифуркаций.

Исследуем теперь случай появления особой точки с простым нулевым характеристическим корнем.

**Пример 3.2.** Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \tau, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (2)$$

зависящую от параметра  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Если  $\tau < 0$ , то эта система имеет два положения равновесия: седло  $(\sqrt{-\tau}, 0)$  и устойчивый узел  $(-\sqrt{-\tau}, 0)$ . Если при этом  $\tau > -1/4$ , то замыкания почти всех фазовых кривых системы в окрестности узла касаются оси  $x$ .

Если  $\tau > 0$ , то система (2) не имеет положений равновесия. При  $\tau = 0$  она имеет только одно положение равновесия — в начале координат. Это положение равновесия называется *седло-узел*. Оно вырожденное. Его характеристические корни  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ .

Аналогично описывается перестройка фазового портрета динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \pm \tau, \\ \dot{y} = \pm y \end{cases} \quad (3)$$

при переходе параметра  $\tau$  через нуль, для любой другой возможной комбинации знаков  $\pm$ . Каждая из этих перестроек называется *бифуркацией седло-узел*. При надлежащем выборе направления изменения знака параметра  $\tau$  она описывает катастрофу, в результате которой происходит слияние седла с узлом и их последующее исчезновение. В случае (2) бифуркация седло-узел изображена на рис. 4.

Оказывается, что в некотором смысле система (3) описывает появление особой точки с простым нулевым характеристическим корнем в любом однопараметрическом семействе общего положения векторных полей на плоскости. Чтобы точно сформулировать соответствующий результат, необходимо распространить определение топологической эквивалентности особых точек на семейства векторных полей.

Рассмотрим два гладких семейства векторных полей  $v_{\tau,1}(x)$  и  $v_{\tau,2}(x)$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящих от параметра  $\tau \in \mathbb{R}^k$ . Предположим, что эти поля имеют особую точку  $x = 0$  при  $\tau = 0$ . Такое предположение несколько не ограничивает общности наших

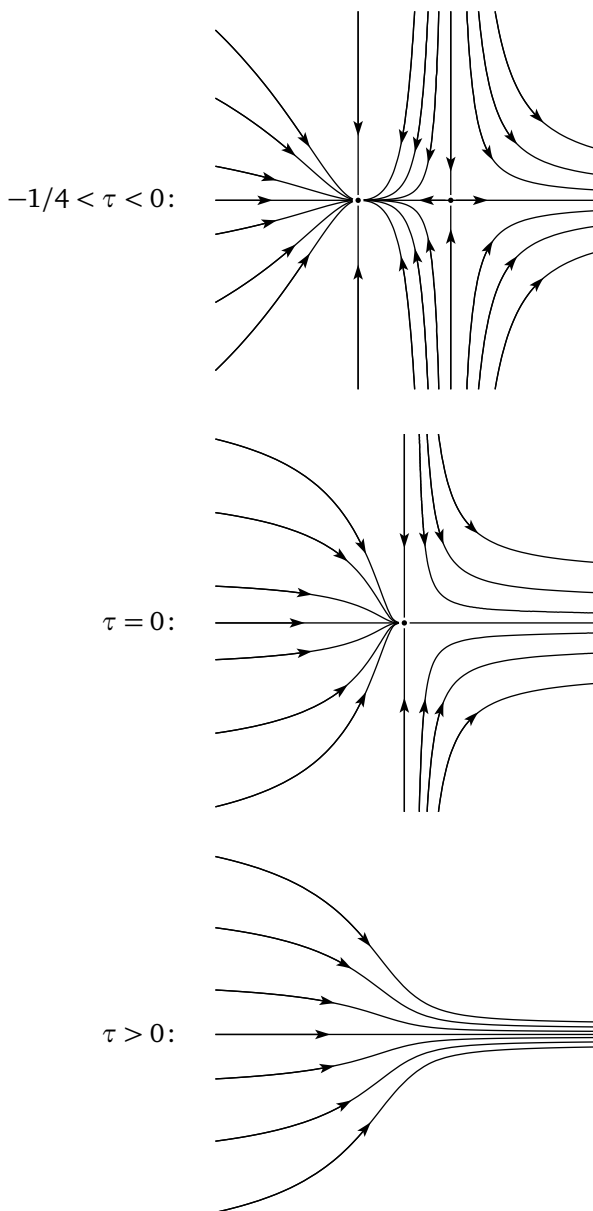


Рис. 4. Бифуркация седло-узел

рассуждений, поскольку всегда интересующую нас особую точку или значение параметра можно принять за начало отсчёта.

**Определение.** Семейства векторных полей  $v_{\tau,1}(x)$  и  $v_{\tau,2}(x)$  (или динамических систем  $\dot{x} = v_{\tau,1}(x)$  и  $\dot{x} = v_{\tau,2}(x)$ ) называются *топологически эквивалентными* вблизи точки  $x = 0$  при  $\tau = 0$ , если существует гомеоморфизм окрестности нуля прямого произведения  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , имеющий вид

$$(x, \tau) \mapsto (h(x, \tau), \tau),$$

сохраняющий нуль и такой, что при каждом  $\tau$ , достаточно близком к 0, фазовые кривые поля  $v_{\tau,1}(x)$  переходят в фазовые кривые поля  $v_{\tau,2}(x)$  с сохранением направления движения.

**Определение.** Говорят, что семейство  $v_{\tau,2}(x)$  *индуцировано* из  $v_{\tau,1}(x)$  вблизи точки  $x = 0$  при  $\tau = 0$ , если существует непрерывное отображение  $\tau \mapsto T(\tau)$ , сохраняющее нуль и такое, что

$$v_{\tau,2}(x) \equiv v_{T(\tau),1}(x)$$

в окрестности нуля пространства  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ .

По всей видимости, следующее утверждение было хорошо известно уже во времена Пуанкаре.

**Теорема 1.** Пусть  $v(x)$  — гладкое векторное поле на плоскости, имеющее особую точку  $x = 0$  с простым нулевым характеристическим корнем. Тогда всякое гладкое однопараметрическое семейство  $v_\tau(x)$  векторных полей на плоскости, такое, что  $v_0(x) \equiv v(x)$ , топологически эквивалентно вблизи точки  $x = 0$  при  $\tau = 0$  семейству векторных полей, индуцированному из семейства фазовых векторных полей системы (3), соответствующей знаку плюс перед параметром  $\tau$ . Более того, если семейство  $v_\tau(x)$  находится в общем положении, то семейство динамических систем  $\dot{x} = v_\tau(x)$  топологически эквивалентно вблизи точки  $x = 0$  при  $\tau = 0$  семейству (3) (одному из четырёх).

Остается случай появления комплексно-сопряженной пары характеристических корней с нулевой вещественной частью.

Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  с комплексной координатой  $z = x + iy$  динамическую систему

$$\dot{z} = z(i \pm \tau \pm |z|^2), \quad (4)$$

зависящую от параметра  $\tau \in \mathbb{R}$  с любой возможной комбинацией знаков  $\pm$ . При  $\tau = 0$  линеаризация этой системы в нуле имеет положение равновесия типа центр. Бифуркацию в системе (4) при переходе параметра  $\tau$  через 0 изучали Пуанкаре, Хопф и Андронов.

**Теорема 2.** Пусть  $v(x)$  — гладкое векторное поле на плоскости, имеющее особую точку  $x = 0$  с парой чисто мнимых характеристических корней. Тогда всякое гладкое однопараметрическое семейство  $v_\tau(x)$  векторных полей на плоскости, такое, что  $v_0(x) \equiv v(x)$ , топологически эквивалентно вблизи точки  $x = 0$  при  $\tau = 0$  семейству векторных полей, индуцированному из семейства фазовых векторных полей системы (4), соответствующей знаку плюс перед параметром  $\tau$ . Более того, если семейство  $v_\tau(x)$  находится в общем положении, то семейство динамических систем  $\dot{x} = v_\tau(x)$  топологически эквивалентно вблизи  $x = 0$  при  $\tau = 0$  семейству (4) (одному из четырёх).

### Упражнения

1. Изобразите бифуркации в динамической системе (3) при переходе параметра  $\tau$  через нуль для всех возможных комбинаций знаков  $\pm$ .

2. Перечислите с точностью до топологической эквивалентности бифуркации особых точек векторных полей на прямой в семействах общего положения, зависящих от одного параметра (см. [10]).

3. Опишите бифуркацию Пуанкаре — Хопфа — Андронова. В частности, при каком условии в системе (4) возникает устойчивый предельный цикл (см. [10]).

## § 4. Гладкие многообразия

Математическое моделирование различных процессов, происходящих в природе и в различных областях человеческой деятельности, часто приводит к необходимости рассмотрения отображений, которые определены на так называемых гладких многообразиях.

Понятие гладкого многообразия — одно из важнейших в современной математике<sup>1</sup>. Простейшими примерами гладких многообразий являются гладкие поверхности разных размерностей в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Подмножество  $M$  пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *гладкой  $m$ -мерной поверхностью*, если для любой точки  $x$  из  $M$  существует окрестность  $D \subset \mathbb{R}^n$  и разбиение

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}\}$$

декартовых координат в  $\mathbb{R}^n$  на два таких непересекающихся набора из  $m$  и  $n - m$  координат соответственно, что пересечение  $M \cap D$  состоит из точек  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x_{j_1} = f_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_{n-m}} = f_{n-m}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}), \end{cases} \quad (5)$$

где  $f_1, \dots, f_{n-m}$  обозначают  $C^\infty$ -гладкие функции переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ .

**Замечание.** В случае  $m = 0$ , т. е. когда набор  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$  пуст, а  $f_1, \dots, f_n$  — константы, получается множество изолированно лежащих точек в  $\mathbb{R}^n$ . В случае  $m = n$ , т. е. когда набор  $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}\}$  пуст, получается открытое подмножество.

Забегая вперёд, скажем, что любое гладкое многообразие диффеоморфно гладкой поверхности в пространстве  $\mathbb{R}^n$  достаточно большой размерности  $n$ . Это — фундаментальный резуль-

<sup>1</sup>То, что мы называем гладким многообразием, иногда называют гладким многообразием без края. Более общее понятие гладкого многообразия с краем не используется в данной книге.

тат дифференциальной топологии (см. [45]). Понятие диффеоморфности многообразий мы определим несколько позже (с. 35). Сейчас же дадим определение многообразия, которое позволит быстро проверить, является ли данное топологическое пространство  $M$ , вложение которого в пространство  $\mathbb{R}^n$  не очевидно, гладким многообразием.

Во-первых, пространство  $M$  должно быть снабжено топологией со счётной базой (аксиома счётности, с. 8). При этом любые две точки из  $M$  должны иметь не пересекающиеся окрестности (аксиома отделимости Хаусдорфа).

Во-вторых, каждая точка  $x \in M$  должна иметь окрестность, гомотопную области в пространстве  $\mathbb{R}^m$ , размерность которого не зависит от  $x$ . При этом говорят, что координаты в  $\mathbb{R}^m$  определяют *локальные координаты* на  $M$  в окрестности точки  $x$ . Например, если  $M$  — гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , заданная системой уравнений (5) в окрестности точки  $x$ , то  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  — локальные координаты на  $M$  в этой окрестности.

В-третьих, если в открытом подмножестве в  $M$  есть две локальные системы координат, то переход от одних координат к другим должен быть обратимым отображением,  $C^\infty$ -гладким вместе со своим обратным.

Число  $t$  локальных координат на многообразии  $M$  называется его *размерностью* и обозначается  $\dim M$  (пишут также  $M^m$ ). Подмножество  $M$  гладкого  $n$ -мерного многообразия  $N$  называется *гладким подмногообразием* размерности  $t$ , если в окрестности каждой своей точки в локальных координатах  $x_1, \dots, x_n$  на  $N$  оно задаётся системой уравнений вида (5). Такое подмножество само является гладким  $t$ -мерным многообразием с локальными координатами  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  в рассматриваемой окрестности. Число  $n - t$  называется *коразмерностью* подмногообразия  $M$  в объемлющем многообразии  $N$  и обозначается  $\text{codim } M$ .

**Пример 4.1.** Рассмотрим множество  $\mathbb{R}G(n)$  всех гиперплоскостей в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ . Любая гиперплоскость в этом пространстве определяется уравнением

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + b = 0,$$



где  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ , причём хотя бы одно из чисел  $a_1, \dots, a_n$  отлично от нуля. Условие  $a_k \neq 0$  означает, что гиперплоскость пересекает ось  $x_k$  ровно в одной точке. Уравнение такой гиперплоскости можно переписать в виде

$$x_k = \sum_{i \neq k} y_i x_i + y_k, \quad (6)$$

где

$$y_1 = -\frac{a_1}{a_k}, \dots, y_{k-1} = -\frac{a_{k-1}}{a_k}, y_k = -\frac{b}{a_k}, y_{k+1} = -\frac{a_{k+1}}{a_k}, \dots, y_n = -\frac{a_n}{a_k}.$$

Эти формулы задают взаимно однозначное соответствие между множеством гиперплоскостей, каждая из которых пересекает ось  $x_k$  ровно в одной точке, и пространством

$$\mathbb{R}^n = \{(y_1, \dots, y_n)\}.$$

Оно индуцирует топологию на  $\mathbb{R}G(n)$  из стандартной топологии пространства  $\mathbb{R}^n$  и определяет локальные координаты в окрестности любой гиперплоскости, заданной уравнением вида (6). Все указанные выше свойства гладкого многообразия легко проверяются. Таким образом, пространство  $\mathbb{R}G(n)$  является гладким  $n$ -мерным многообразием.

Рассмотрим теперь подмножество  $\mathbb{R}G_0(n)$  в  $\mathbb{R}G(n)$ , состоящее из гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Во введённых выше локальных координатах  $y_1, \dots, y_n$  на многообразии  $\mathbb{R}G(n)$ , множество гиперплоскостей, заданных уравнением вида (6) и принадлежащих множеству  $\mathbb{R}G_0(n)$ , задаётся уравнением  $y_k = 0$ . Следовательно,  $\mathbb{R}G_0(n)$  — гладкое  $(n-1)$ -мерное подмногообразие коразмерности 1 в  $\mathbb{R}G(n)$ . Многообразия  $\mathbb{R}G(n)$  и  $\mathbb{R}G_0(n)$  являются простейшими примерами так называемых многообразий Грассмана (см. замечание на с. 34).

Среди всех гладких многообразий важный класс составляют компактные многообразия. Напомним, что подмножество топологического пространства (в частности, все пространство) называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми подмножествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Пространство  $\mathbb{R}^n$  не является, очевидно, компактным. Подмножество в  $\mathbb{R}^n$  компактно, если и только если оно, во-первых,

ограничено, т. е. целиком лежит внутри некоторого открытого шара, и, во-вторых, замкнуто. Для установления факта компактности произвольного гладкого многообразия  $M$  достаточно показать, что любое бесконечное подмножество  $K \subset M$  имеет хотя бы одну предельную точку в  $M$ , т. е. точку, в любой окрестности которой содержится бесконечное множество точек из  $K$ .

#### Пример 4.2. Стандартная сфера

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

в  $\mathbb{R}^{n+1}$  является гладким компактным  $n$ -мерным многообразием и обозначается  $S^n$  (при  $n = 1$  оно называется окружностью). Каждая гиперплоскость  $x_k = 0$  разбивает эту сферу на  $(n - 1)$ -мерную сферу и две открытые полусферы, являющиеся графиками гладких функций

$$x_k = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{k-1}^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2},$$

где

$$x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 < 1.$$

Переменные

$$x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$$

определяют локальные координаты на каждой из этих полусфер.

Отметим, что сфера  $S^n$  не гомеоморфна  $\mathbb{R}^n$ , поскольку гомеоморфизм сохраняет компактность.

**Пример 4.3.** Множество всех прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат, также является гладким компактным  $n$ -мерным многообразием. Это многообразие называется  $n$ -мерным проективным пространством и обозначается  $\mathbb{R}P^n$ .

Имеется взаимно однозначное соответствие между множеством прямых, проходящих через начало координат и не лежащих в координатной гиперплоскости  $x_k = 0$  пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , и пространством  $\mathbb{R}^n$ . А именно, каждой такой прямой сопоставляется точка её пересечения с гиперплоскостью  $x_k = 1$ . Это отображение индуцирует топологию на  $\mathbb{R}P^n$  из стандартной топологии пространства  $\mathbb{R}^n$  и определяет локальные координаты

в окрестности любой прямой, не лежащей в гиперплоскости  $x_k = 0$ .

Пространство  $\mathbb{R}P^n$  естественным образом отождествляется с многообразием Грассмана  $\mathbb{R}G_0(n+1)$ : каждой гиперплоскости в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящей через начало координат, сопоставляется её нормаль в этой точке. Многообразие  $\mathbb{R}P^n$  можно получить также из сферы  $S^n$  отождествлением диаметрально противоположных точек.

Проективная прямая  $\mathbb{R}P^1$  гомеоморфна окружности  $S^1$ . Методами гомотопической топологии доказывается, что многообразия  $S^n$  и  $\mathbb{R}P^n$  не гомеоморфны при  $n > 1$  (см. [45]).

**Замечание.** Множество  $\mathbb{R}G_0(k, n)$ , состоящее из  $k$ -мерных плоскостей в  $\mathbb{R}^n$ , проходящих через начало координат, является гладким компактным многообразием размерности  $k(n-k)$ . Множество  $\mathbb{R}G(k, n)$  всех  $k$ -мерных плоскостей в  $\mathbb{R}^n$ , как проходящих, так и не проходящих через начало координат, является гладким многообразием, диффеоморфным открытому подмножеству в

$$\mathbb{R}G_0(k+1, n+1).$$

Все эти многообразия называются *многообразиями Грассмана*.

### Упражнения

1. Докажите, что прямое произведение гладких многообразий является гладким многообразием; размерность произведения равна сумме размерностей сомножителей. Опишите реализацию *двумерного тора* (прямое произведение двух окружностей) в виде гладкой поверхности в  $\mathbb{R}^3$ .

2. Докажите, что группа  $SO(n)$  ортогональных матриц порядка  $n$  с вещественными коэффициентами и определителем 1 является гладким многообразием размерности  $n(n-1)/2$ . Какими локальными координатами на группе  $SO(3)$  пользуются в классической механике при изучении движений твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^3$ ?

## § 5. Особенности гладких отображений

Мы начинаем изучать локальные свойства гладких отображений гладких многообразий. В этом и следующих параграфах все используемые понятия строго определены. Основные факты, необходимые для практического применения теории катастроф, приведены с точными формулировками.

Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия. Тогда каждое отображение  $f: M \rightarrow N$  в окрестности точки  $x_0 \in M$  задаётся упорядоченным набором  $n$  функций  $m$  переменных

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m),$$

где  $x_1, \dots, x_m$  — локальные координаты на  $M$  в окрестности точки  $x_0$ , а  $y_1, \dots, y_n$  — локальные координаты на  $N$  в окрестности точки  $f(x_0)$ .

Функции  $f_1, \dots, f_n$  называются *координатными компонентами* отображения  $f$ . Если все эти компоненты являются  $C^\infty$ -гладкими функциями для любой точки  $x_0$ , то отображение  $f$  называется *гладким*. Матрица

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

размера  $n \times m$ , составленная из частных производных координатных компонент отображения  $f$  в точке  $x_0$ , называется его *матрицей Якоби* в этой точке. Гладкость отображения и ранг матрицы Якоби не зависят от выбора локальных координат в образе и прообразе.

Гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  называется *диффеоморфизмом*, если существует гладкое обратное отображение  $f^{-1}: N \rightarrow M$ . Если отображение  $f: M \rightarrow N$  является диффеоморфизмом, то многообразия  $M$  и  $N$  называются *диффеоморфными*. Диффеоморфные многообразия имеют одинаковые размерности. Матрица Якоби диффеоморфизма невырождена во всех точках.

**Определение.** Гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  называется *вложением*, если его образ  $f(M)$  является гладким подмногообразием в  $N$ , а отображение  $f: M \rightarrow f(M)$  является диффеоморфизмом.

Гладкое отображение называется *собственным*, если прообраз любого компакта при этом отображении компактен. Гладкое

собственное отображение  $f: M \rightarrow N$  является вложением, если и только если оно *инъективно* (т. е. разные точки переводит в разные), а ранг его матрицы Якоби в каждой точке равен размерности многообразия  $M$  (см. [18]).

**Пример 5.1.** Гладкое отображение  $\gamma: (a, b) \rightarrow N$  интервала  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  в гладкое многообразие  $N$  называется *кривой* (класса  $C^\infty$ ). Образ этого отображения также называют *кривой* в  $N$ . В частности, фазовые кривые динамической системы определяются решениями соответствующего дифференциального уравнения.

Если отображение  $\gamma$  является вложением, то кривая называется *гладкой*. В этом случае гладкое одномерное подмногообразие  $\gamma(a, b) \subset N$  также называется *гладкой кривой* в  $N$ . Гладкая собственная вектор-функция в  $\mathbb{R}^n$  определяет гладкую кривую, если и только если производная этой функции всюду отлична от нуля, а каждая точка её образа имеет ровно один прообраз.

Мы будем говорить, что кривая  $\gamma$  *проходит* через точку  $P \in N$ , если существует такое  $t_0 \in (a, b)$ , что  $\gamma(t_0) = P$ . При этом если кривая  $\gamma$  гладкая, то сужение  $\gamma_+: [t_0, b) \rightarrow N$  отображения  $\gamma$  на промежуток  $[t_0, b)$  называется *гладкой кривой, выходящей из точки  $P$* . Кривая  $\gamma_-: (a, t_0] \rightarrow N$  называется *гладким продолжением кривой  $\gamma_+$  в точке  $P$* .

**Замечание.** *Замкнутой кривой* в многообразии  $N$  называется такое гладкое отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow N$ , что  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Замкнутая кривая  $\gamma$  называется *гладкой*, если  $(b-a)$ -периодическое продолжение отображения  $\gamma$  на всю числовую прямую является  $C^\infty$ -гладким, а сужение этого продолжения на любой интервал длины  $b - a$  является вложением.

Фактически гладкая замкнутая кривая  $\gamma$  является вложением окружности  $S^1$  в многообразие  $N$ . В дальнейшем гладкой замкнутой кривой мы будем называть также любое гладкое компактное одномерное подмногообразие в  $N$ . Каждая связная компонента такого многообразия представляет собой вложенную окружность (см. [45]).

**Пример 5.2.** Пусть  $m \geq n$  и  $L$  — гладкое многообразие размерности  $m - n$ . Тогда гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  называется

гладким расслоением со слоем  $L$ , если для любой точки  $y \in N$  существуют окрестность  $U_y \subset N$  и вложение  $\varphi: U_y \times L \rightarrow M$ , такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_y \times L & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow \text{pr} & & \downarrow f \\ U_y & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

коммутативна, т. е.  $f(\varphi(\tilde{y}, z)) = \tilde{y}$  для любых  $\tilde{y} \in U_y, z \in L$ . Здесь  $\text{pr}$  — естественная проекция прямого произведения на первый сомножитель, а отображение  $i$  является тождественным вложением. Многообразие  $N$  называется базой расслоения,  $M$  — тотальным пространством,  $f^{-1}(y)$  — слоем над точкой  $y$ .

Из коммутативности указанной диаграммы следует, что все слои гладкого расслоения диффеоморфны. Более того, в окрестности любой точки  $y$  базы расслоения и в окрестности любой точки  $z$  слоя  $f^{-1}(y)$  можно выбрать локальные координаты, в которых расслоение является проектированием пространства  $\mathbb{R}^m$  на  $n$ -мерное координатное подпространство. Таким образом, гладкое расслоение является обобщением обычного проектирования векторных пространств.

Зафиксируем точку  $x_0 \in M$  и рассмотрим множество  $C_{x_0}^\infty(M, N)$  всех гладких отображений вида  $\varphi: U \rightarrow N$ , где  $U \subset M$  — окрестность точки  $x_0$ . Два отображения  $\varphi_1: U_1 \rightarrow N$  и  $\varphi_2: U_2 \rightarrow N$  называются эквивалентными, если существует такая окрестность  $U \subset U_1 \cap U_2$  точки  $x_0$ , что  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$  для любого  $x \in U$ . Ряды Тейлора в точке  $x_0$  эквивалентных отображений совпадают в любых локальных координатах. Эквивалентность гладких отображений является отношением эквивалентности.

**Определение.** Ростком гладкого отображения  $f: M \rightarrow N$  в точке  $x_0 \in M$  называется класс эквивалентности отображений в  $C_{x_0}^\infty(M, N)$ , содержащий  $f$ .

Росток отображения полностью определяется любым представителем соответствующего класса эквивалентности. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы будем называть ростком отображения в данной точке его сужение на достаточно малую окрестность этой точки.

Аналогично определяется росток подмножества гладкого многообразия. Два подмножества с общей точкой называются *эквивалентными*, если они совпадают в некоторой окрестности этой точки. *Ростком* подмножества в данной точке называется класс эквивалентности этого подмножества среди всех подмножеств, содержащих эту точку. Пересечение подмножества гладкого многообразия с достаточно малой окрестностью данной точки мы также будем называть ростком этого подмножества.

Два подмножества гладкого многообразия называются *диффеоморфными*, если одно переводится в другое подходящим диффеоморфизмом объемлющего многообразия. Ростки подмножеств гладких многообразий (возможно, различных) в двух данных точках называются *диффеоморфными*, если один переводится в другой подходящим диффеоморфизмом окрестностей этих точек в объемлющих многообразиях. Такой диффеоморфизм часто называют *локальным*.

В дальнейшем нас будут интересовать ростки образа гладкого отображения гладких многообразий, а также ростки прообразов различных подмножеств многообразия-образа при этом отображении с точки зрения эквивалентности относительно локальных диффеоморфизмов.

**Замечание.** Выбор локальных координат сводит изучение ростка гладкого отображения  $f: M^m \rightarrow N^n$  к изучению гладкого отображения из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ , определенного в окрестности нуля. Мы будем считать, что это отображение продолжено до какого-нибудь гладкого отображения всего пространства  $\mathbb{R}^m$  так, что ростки в нуле исходного и продолженного отображений совпадают. Такое продолжение всегда можно сделать при помощи хорошо известной в математическом анализе конструкции разбиения единицы (см. [18]).

Предположим, что ранг матрицы Якоби  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$  гладкого отображения  $f: M^m \rightarrow N^n$  в точке  $x_0 \in M$  равен  $\min\{m, n\}$ . Тогда из теоремы о неявной функции следует, что:

1) если  $m < n$ , то найдутся гладкие координаты  $x_1, \dots, x_m$  на многообразии  $M$  в окрестности точки  $x_0$  и гладкие координаты  $y_1, \dots, y_n$  на многообразии  $N$  в окрестности точки  $f(x_0)$ , такие,

что в этих координатах росток  $f$  в  $x_0$  является ростком в нуле вложения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного формулами

$$y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m, y_{m+1} = 0, \dots, y_n = 0;$$

2) если  $m \geq n$ , то для любых гладких координат  $y_1, \dots, y_n$  на  $N$  в окрестности точки  $f(x_0)$  найдутся такие гладкие координаты  $x_1, \dots, x_m$  на  $M$  в окрестности точки  $x_0$ , что в этих координатах росток  $f$  в  $x_0$  является ростком в нуле расслоения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного формулами

$$y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n.$$

Таким образом, гладкое отображение ведет себя как линейное в окрестности любой точки, в которой ранг его матрицы Якоби максимально возможный.

**Определение.** *Критической* точкой гладкого отображения

$$f: M^m \rightarrow N^n$$

называется любая точка  $x_0 \in M$ , в которой ранг матрицы Якоби  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$  этого отображения меньше  $\min\{m, n\}$ . Образ критической точки называется *критическим значением*.

Гладкое отображение в окрестности критической точки может быть устроено сколь угодно сложно. Чтобы изучить свойства отображения, необходимо провести классификацию его ростков в критических точках относительно подходящего отношения эквивалентности. Чаще всего делают замены локальных координат в образе и прообразе.

**Определение.** Ростки гладких отображений

$$f_1: M_1 \rightarrow N_1 \quad \text{и} \quad f_2: M_2 \rightarrow N_2$$

в точках  $x_1 \in M_1$  и  $x_2 \in M_2$  соответственно называются *RL-* (или *лево-право-*) *эквивалентными*, если существуют окрестности  $U_1 \subset M_1$ ,  $U_2 \subset M_2$  точек  $x_1, x_2$ , окрестности  $B_1 \subset N_1$ ,  $B_2 \subset N_2$  точек  $y_1 = f_1(x_1)$ ,  $y_2 = f_2(x_2)$  и диффеоморфизмы  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ ,  $\psi: B_1 \rightarrow B_2$ , такие, что  $f_1(U_1) \subset B_1$ ,  $f_2(U_2) \subset B_2$ ,  $\varphi(x_1) = x_2$ ,  $\psi(y_1) = y_2$  и



диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ U_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 \end{array}$$

коммутативна, т. е.  $f_2(x) = \psi(f_1(\varphi^{-1}(x)))$  для любого  $x \in U_2$ .

Отметим, что в рамках данного определения ростки образов  $f_1(U_1)$  и  $f_2(U_2)$  окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  в точках  $y_1$  и  $y_2$  диффеоморфны ( $\psi$  — локальный диффеоморфизм).

**Замечание.** Название этой эквивалентности объясняется так: в формуле  $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$  действие в прообразе стоит справа, в образе — слева, а композиция отображений читается справа налево. Фактически речь идет о заменах  $\varphi^{-1}$  и  $\psi$  локальных координат в прообразе и образе отображения  $f_1$ , в результате которых формула, определяющая  $f_1$ , превращается в формулу для  $f_2$ .

Критические точки гладких функций (отображений в числовую прямую) обычно классифицируют при помощи гладких замен координат только в прообразе.

**Определение.** Ростки гладких функций

$$f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad f_2: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

в точках  $x_1 \in M_1$  и  $x_2 \in M_2$  соответственно называются  $R$ - (или право-) эквивалентными, если существуют окрестности  $U_1 \subset M_1$ ,  $U_2 \subset M_2$  точек  $x_1, x_2$  и диффеоморфизм  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ , такие, что  $\varphi(x_1) = x_2$  и

$$f_2(x) = f_1(\varphi^{-1}(x))$$

для любого  $x \in U_2$ .

Один из первых результатов, касающихся классификации критических точек гладких функций, был получен М. Морсом в начале двадцатого века (см. [28]).

**Лемма Морса.** Пусть  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция с критической точкой в нуле. Предположим, что эта критическая

точка невырождена, т. е. второй дифференциал  $d^2 f|_0$  является невырожденной квадратичной формой. Тогда росток  $f$  в нуле  $R$ -эквивалентен ростку в нуле одной из функций вида

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto f(0) \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_m^2.$$

Мы докажем более общую версию этого утверждения в § 12. Доказательство использует другой замечательный факт, вытекающий из формулы Ньютона — Лейбница.

**Лемма Адамара.** Пусть гладкая функция

$$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, u) \mapsto f(x, u),$$

удовлетворяет условию  $f(0, u) \equiv 0$ . Тогда

$$f(x, u) \equiv \sum_{i=1}^m x_i g_i(x, u),$$

где  $g_1, \dots, g_m$  — гладкие функции от  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^k$ , такие, что

$$g_i(0, u) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, u).$$

При изучении прообраза нуля гладкого отображения в пространство  $\mathbb{R}^n$  можно делать гладкие замены координат в прообразе и невырожденные линейные преобразования в образе, зависящие от точки прообраза.

**Определение.** Ростки в нуле гладких отображений

$$f_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

таких, что  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ , называются  $V$ -эквивалентными, если существуют окрестности  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^m$  начала координат, диффеоморфизм  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$  и гладкое отображение  $\Psi: U_2 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$  в пространство невырожденных матриц порядка  $n$ , такие, что  $\varphi(0) = 0$  и

$$f_2(x) = \Psi(x) f_1(\varphi^{-1}(x))$$

для любого  $x \in U_2$ .

Здесь буква  $V$  означает variety  $f^{-1}(0)$ . Диффеоморфизм  $\varphi$  переводит росток прообраза  $f_1^{-1}(0)$  в нуле в росток  $f_2^{-1}(0)$  в нуле.

**Замечание.** Из того, что ростки в нуле множеств решений двух систем  $f_1(x) = 0$  и  $f_2(x) = 0$  из  $n$  уравнений с  $m$  неизвестными переводятся один в другой подходящим диффеоморфизмом пространства неизвестных, не вытекает  $V$ -эквивалентность ростков отображений  $f_1, f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  в нуле. Например, функции  $f_1(x) = x^2$  и  $f_2(x) = x^3$  от  $x \in \mathbb{R}$  имеют одинаковые прообразы нуля, но их ростки в нуле не являются  $V$ -эквивалентными, поскольку из  $V$ -эквивалентности ростков в нуле гладких функций одной переменной  $x$ , обращающихся в нуль при  $x = 0$ , следует совпадение их порядков малости относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Класс эквивалентности ростка гладкого отображения в любой критической точке называют *особенностью*. Классификация особенностей относительно того или иного отношения эквивалентности состоит в выборе представителей соответствующих классов эквивалентности. Выбранные представители называются *нормальными формами* особенностей.

Нахождение нормальной формы конкретного ростка называется *приведением к нормальной форме*. Выбор нормальных форм не однозначен и зависит от исходной задачи. Полные списки нормальных форм особенностей гладких отображений общего положения удалось получить лишь в некоторых размерностях. Но уже эти результаты привели к важным следствиям в различных прикладных вопросах.

### Упражнения

1. Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция и  $x_0 \in \mathbb{R}$  — её критическая точка. Предположим, что все производные функции  $f$  в точке  $x_0$  до порядка  $\mu$  включительно равны нулю, а  $f^{(\mu+1)}(x_0) \neq 0$ . Докажите, что росток  $f$  в  $x_0$  право-эквивалентен ростку в нуле одной из функций вида

$$x \mapsto f(x_0) \pm x^{\mu+1}.$$

2. Докажите лемму Адамара.

## § 6. Складка, сборка и зонтик Уитни

Рассмотрим множество  $C^\infty(M, N)$  всех гладких отображений гладкого многообразия  $M$  в гладкое многообразие  $N$ . Чтобы правильно сформулировать хотя бы простейшие результаты теории катастроф, необходимо чтобы множество  $C^\infty(M, N)$  было функциональным пространством, т. е. снабжено топологией. Всюду далее мы будем предполагать, что пространство  $C^\infty(M, N)$  снабжено  $C^\infty$ -топологией Уитни.

Строгое определение этой топологии в случае произвольных многообразий  $M$  и  $N$  требует аппарата так называемых струй гладких отображений (см. § 9, с. 67). Однако многие локальные задачи, например классификация особенностей гладких отображений, сводятся к изучению ростков этих отображений в локальных координатах. Поэтому для понимания дальнейшего достаточно определить  $C^\infty$ -топологию Уитни на множестве  $C^\infty(M, N)$  в случае, когда  $M$  и  $N$  — области в пространствах  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно.

Пусть

$$U(f, k, \varepsilon) = \left\{ g \in C^\infty(M, N) : \max \left| \frac{\partial^{|I|}(g-f)}{\partial x^I}(x) \right| < \varepsilon(x) \quad \forall x \in M \right\},$$

где  $f \in C^\infty(M, N)$ ;  $k$  — целое неотрицательное число;  $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная строго положительная функция; максимум берется по всем упорядоченным наборам  $I = (i_1, \dots, i_m)$  из  $m$  таких неотрицательных целых чисел, что

$$|I| = i_1 + \dots + i_m \leq k;$$

$x = (x_1, \dots, x_m)$  — координаты в  $\mathbb{R}^m$  и

$$\partial x^I = \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}.$$

Тогда система множеств  $U(f, k, \varepsilon)$  для всех  $f, k, \varepsilon$  является базой топологии на  $C^\infty(M, N)$ . Она и есть  $C^\infty$ -топология Уитни в данном случае.

Рассмотрим произвольное гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$ . Если многообразии  $M$  одномерно, а  $\dim N \geq 2$ , то отображение  $f$  общего положения не имеет критических точек (см. пример 9.3,

с. 70). Если же  $\dim N = 1$ , то все критические точки отображения  $f$  общего положения невырождены (см. пример 9.2, с. 69). По лемме Морса (с. 40) росток функции  $f$  одной переменной в любой невырожденной критической точке  $x_0$  право-эквивалентен ростку в нуле одной из следующих функций:

- 1)  $x \mapsto f(x_0) + x^2$  (локальный минимум),
- 2)  $x \mapsto f(x_0) - x^2$  (локальный максимум).

Аналогично если многообразие  $M$  двумерно, а  $\dim N \geq 4$ , то отображение  $f$  общего положения не имеет критических точек. Если  $\dim N = 1$ , то все критические точки отображения  $f$  общего положения невырождены. Росток функции  $f$  двух переменных в любой невырожденной критической точке  $x_0$  право-эквивалентен ростку в нуле одной из следующих функций:

- 1)  $(x_1, x_2) \mapsto f(x_0) + x_1^2 + x_2^2$  (локальный минимум),
- 2)  $(x_1, x_2) \mapsto f(x_0) - x_1^2 - x_2^2$  (локальный максимум),
- 3)  $(x_1, x_2) \mapsto f(x_0) + x_1^2 - x_2^2$  (седло).

Особенности гладких отображений общего положения гладких двумерных многообразий в двумерные и трёхмерные были изучены Х. Уитни в середине прошлого столетия (см. [60], [59], а также [14]).

**Теорема Уитни о складках и сборках.** Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие двумерные многообразия. Тогда росток гладкого отображения

$$f: M \rightarrow N$$

общего положения в каждой точке  $x \in M$  лево-право-эквивалентен ростку в нуле отображения

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2),$$

заданного одной из следующих формул:

- 1)  $y_1 = x_1, y_2 = x_2$  (неособая точка);
- 2)  $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2$  (складка);
- 3)  $y_1 = x_1^3 + x_2 x_1, y_2 = x_2$  (сборка Уитни).

Более того, отображения, особенности которых исчерпываются складками и сборками Уитни (с точностью до  $RL$ -эквивалентности), образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве всех гладких отображений из  $M$  в  $N$ .

Складку и сборку можно увидеть непосредственно при проектировании поверхности в трёхмерном пространстве на плоскость.

**Пример 6.1.** Пусть  $M_1$  — параболический цилиндр в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $x_1, y_1, x_2$ , заданный уравнением  $y_1 = x_1^2$ . Он является гладким двумерным многообразием с (глобальными) координатами  $x_1, x_2$ . На рис. 5а изображена часть поверхности  $M_1$ , лежащая в окрестности начала координат, ограниченной параллелепипедом.

Рассмотрим проектирование

$$\text{pr}: (x_1, y_1, x_2) \mapsto (y_1, x_2)$$

пространства  $\mathbb{R}^3$  на плоскость  $x_1 = \text{const}$  с координатами  $y_1, y_2 = x_2$ . Сужение  $f_1$  проектирования  $\text{pr}$  на цилиндр  $M_1$  является гладким отображением двумерных многообразий. Критическими точками этого отображения являются точки, в которых прямая в  $\mathbb{R}^3$ , коллинеарная<sup>1</sup> оси  $x_1$ , касается цилиндра  $M_1$ . Эти точки образуют прямую  $x_1 = 0$  на  $M_1$  (жирная линия на цилиндре). В каждой точке этой прямой отображение  $f_1$  имеет особенность типа складки.

Пусть  $M_2$  — кубическая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , заданная уравнением  $y_1 = x_1^3 + x_2 x_1$  (см. рис. 5б). Она также является гладким двумерным многообразием с координатами  $x_1, x_2$ . Сужение  $f_2$  проектирования  $\text{pr}$  на поверхность  $M_2$  является гладким отображением двумерных многообразий. Критические точки этого отображения образуют гладкую кривую на  $M_2$ , заданную уравнением  $x_2 = -3x_1^2$ . В каждой точке этой кривой, кроме начала координат, отображение  $f_2$  имеет особенность типа складки. В начале координат отображение  $f_2$  имеет особенность типа сборки Уитни (в этой точке ось  $x_1$  касается замыкания линии складки).

<sup>1</sup>Две прямые в  $\mathbb{R}^n$  мы называем *коллинеарными*, если они либо совпадают, либо лежат в двумерной плоскости и не пересекаются.

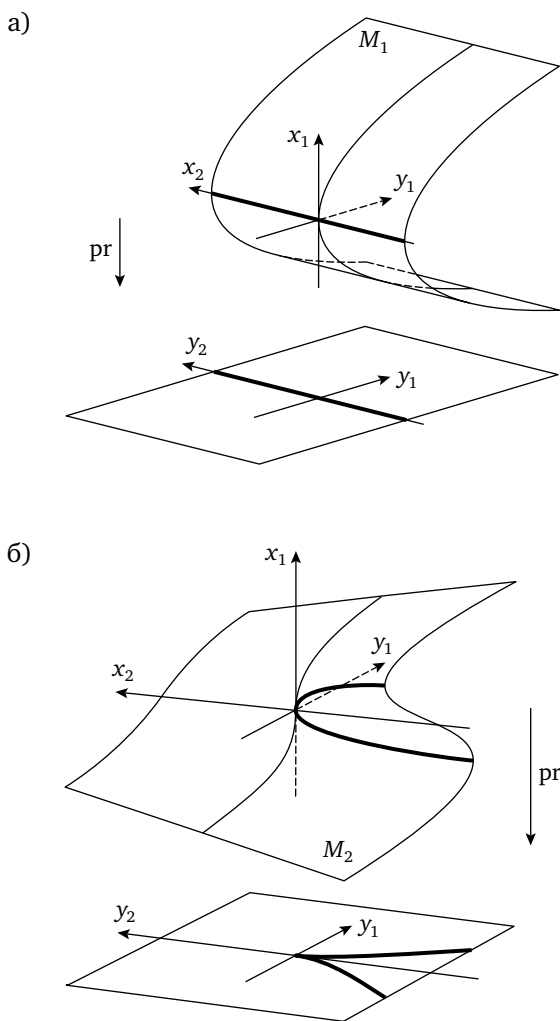


Рис. 5. а) Складка; б) сборка Уитни

Отметим, что множество критических значений отображения  $f_2$  является кривой с особой точкой в нуле (жирная линия на плоскости проекции). Эта кривая задаётся параметрически формулами

$$y_1 = -2x_1^3, \quad y_2 = -3x_1^2$$

и называется *полукубической параболой*. Особая точка полукубической параболы называется *полукубической точкой возврата*.

**Замечание.** Из теоремы Уитни следует, что росток гладкой поверхности общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $x_1, y_1, x_2$  приводится к ростку в нуле одной из трёх поверхностей

$$y_1 = x_1, \quad y_1 = x_1^2, \quad y_1 = x_1^3 + x_2x_1$$

подходящим диффеоморфизмом объемлющего пространства, переводящим прямые, коллинеарные оси  $x_1$ , в такие же прямые. Если проектировать поверхность не по направлению общего положения, а по специально подобранному, то могут получиться более сложные особенности (см. [6]).

В частности, ростки в нуле проектирований поверхностей

$$y_1 = x_1^3 \pm x_2^2x_1 \quad \text{и} \quad y_1 = x_1^4 + x_2x_1$$

на координатную плоскость  $(y_1, x_2)$  параллельно оси  $x_1$  описывают все вырождения коразмерности 1 с точностью до диффеоморфизмов указанного выше вида. Мы изучим деформации одной из этих особенностей в примере 13.2 (с. 97).

**Теорема Уитни о зонтиках.** Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия, причём  $M$  двумерно, а  $N$  трёхмерно. Тогда росток гладкого отображения

$$f: M \rightarrow N$$

общего положения в каждой точке  $x \in M$  лево-право-эквивалентен ростку в нуле отображения

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2, y_3),$$

заданного одной из следующих формул:

- 1)  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = 0$  (неособая точка);
- 2)  $y_1 = x_1^2, y_2 = x_1x_2, y_3 = x_2$  (зонтик Уитни).



Более того, отображения, особенности которых исчерпываются зонтиками Уитни (с точностью до  $RL$ -эквивалентности), образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве всех гладких отображений из  $M$  в  $N$ .

**Пример 6.2.** Рассмотрим гладкое отображение

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2, y_3), \quad y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad y_3 = x_2.$$

Оно имеет особенность типа зонтик Уитни в начале координат. Других критических точек у этого отображения нет. Образ  $\Sigma$  отображения  $f$  является особой поверхностью в  $\mathbb{R}^3$ . Она изображена на рис. 6а и называется зонтиком Уитни.

Кроме особенности в нуле поверхность  $\Sigma$  имеет линию самопересечения

$$y_2 = y_3 = 0, \quad y_1 > 0.$$

Каждая точка этой открытой полупрямой является точкой пересечения двух гладких ветвей поверхности  $\Sigma$ . А именно, при любом  $y_1 > 0$  точка  $(y_1, 0, 0)$  принадлежит одновременно двум гладким поверхностям — образам при отображении  $f$  достаточно малых окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  точек  $(\sqrt{y_1}, 0)$  и  $(-\sqrt{y_1}, 0)$  соответственно. При этом касательные плоскости к ветвям  $f(U_1)$  и  $f(U_2)$  поверхности  $\Sigma$  в точке  $(y_1, 0, 0)$  не совпадают.

Заметим, что поверхность  $\Sigma$  является частью подмножества в  $\mathbb{R}^3$ , заданного уравнением  $y_2^2 = y_1 y_3^2$ . Это множество изображено на рис. 6б. Оно состоит из поверхности  $\Sigma$  и открытой полупрямой

$$y_2 = y_3 = 0, \quad y_1 < 0.$$

Эту полупрямую называют *ручкой зонтика Уитни*. Она является гладким продолжением замыкания линии самопересечения зонтика Уитни. Вся поверхность

$$y_2^2 = y_1 y_3^2$$

называется *зонтиком Уитни с ручкой*.

Образом дифференциала отображения  $f$  в нуле является прямая

$$y_1 = y_2 = 0.$$

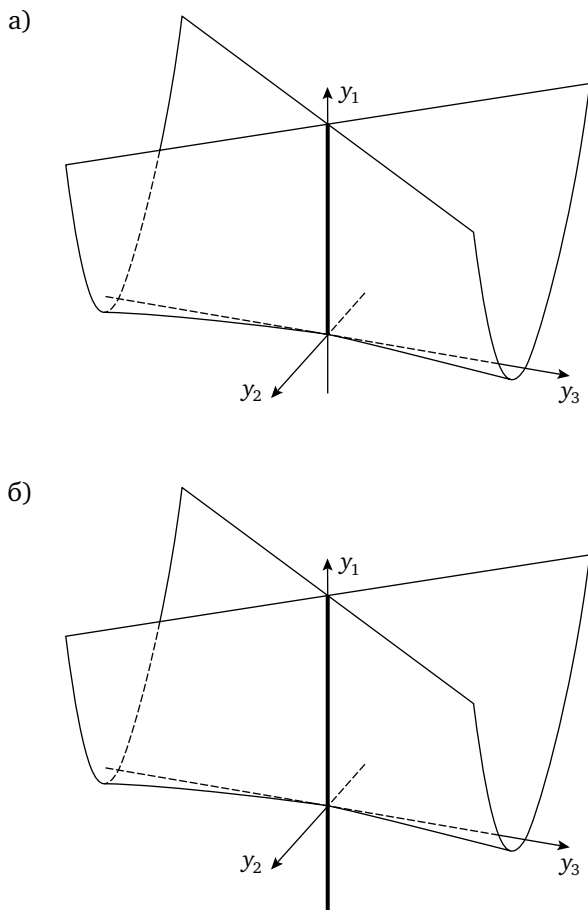


Рис. 6. а) Зонтик Уитни; б) зонтик Уитни с ручкой

Она инвариантно определяется самой поверхностью  $\Sigma$ . А именно, эта прямая является касательной в нуле к любой гладкой кривой, целиком лежащей на  $\Sigma$  и проходящей через начало координат. Мы будем называть её *касательной прямой* к зонтику Уитни.

**Замечание.** Классификация простейших вырожденных особенностей гладких отображений из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^3$  относительно  $RL$ -эквивалентности приведена в [53].

### Упражнения

1. Используя какую-нибудь компьютерную программу, рассмотрите полупрозрачный двумерный тор, стандартно вложенный в  $\mathbb{R}^3$  (поверхность идеального бублика), под разными углами. Как может выглядеть его видимый контур (множество критических значений проекции на сетчатку глаза)?

2. Образ гладкого компактного двумерного многообразия при отображении общего положения в  $\mathbb{R}^3$  является компактной поверхностью с особенностями трёх типов: зонтики Уитни, пересечения двух гладких ветвей под ненулевым углом и пересечения трёх гладких ветвей, где каждая ветвь пересекает линию пересечения двух других ветвей под ненулевым углом. Используя свойства конечных графов (см. [30]), докажите, что число зонтиков Уитни у такой поверхности чётно.

## § 7. Модель Зимана краха фондовой биржи

В теории катастроф имеются многочисленные примеры практического применения теоремы Уитни об особенностях гладкого отображения двумерных многообразий. Описанная ниже модель краха фондовой биржи принадлежит К. Зиману [61]. Эта модель применима к любому другому рынку (например, валют), допускающему спекулятивные операции.

Простейший способ измерить состояние рынка — выбрать какой-нибудь индекс  $I$ , скажем индекс Доу — Джонса. Зафиксируем этот индекс и через  $J$  обозначим скорость  $\dot{I}$  его изменения. Тогда  $J = 0$  означает застой,  $J > 0$  тенденцию на повышение, а  $J < 0$  — на понижение. Рынок с тенденцией на повышение называют *бычьим*, а на понижение — *медвежьим*.

Величина  $J$  зависит от темпов роста покупок и продаж инвесторов. По большому счёту существует два типа инвесторов — фундаменталисты и чартисты. *Фундаменталисты* основывают свой бизнес на оценке большого числа глобальных экономических факторов, таких как спрос, предложение и т. д. *Чартисты* же наоборот строят инвестиционную политику на основе поведения самого рынка, используя последние данные для прогнозирования его поведения в будущем. К чартистам относятся, например, спекулянты.

Пусть  $S$  — доля рынка, принадлежащая чартистам. Через  $F$  обозначим избыточный спрос на фонды со стороны фундаменталистов. Зиман предположил, что поведение рынка описывается гладкой динамической системой в трёхмерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $S, F, J$ . Более того, опираясь на глубокий анализ поведения рынков, он сформулировал условия, которым должна удовлетворять эта динамическая система.

1) При любых фиксированных  $S$  и  $F$  факторы спроса и предложения быстро приведут  $J$  к устойчивому положению равновесия  $\dot{J} = 0$ . При этом  $\dot{J} < 0$ , если  $J$  положительно и достаточно велико;  $\dot{J} > 0$ , если  $J$  отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине.

Множество  $S$  всех точек  $(S, F, J)$ , в которых  $\dot{J} = 0$ , является гладкой поверхностью в  $\mathbb{R}^3$ . Часть этой поверхности, состоящая

из точек, определяющих устойчивое положение равновесия величины  $J$ , называется *аттрактором*. Каждая прямая, коллинеарная оси  $J$ , пересекает поверхность  $S$  в конечном числе точек. По меньшей мере одна из них принадлежит аттрактору.

Все эти свойства связаны со следующим наблюдением. Величина  $J$  реагирует настолько быстро и чутко на изменения спроса и предложения, насколько это возможно. Изменения  $C$  и  $F$  могут вызвать изменение  $J$  в течение нескольких минут, в то время как изменение  $J$  гораздо медленнее влияет на изменения  $C$  и  $F$ .

2) При любом достаточно малом  $c \geq 0$  сечение поверхности  $S$  плоскостью  $C = c$  является графиком такой непрерывной возрастающей функции

$$J = J_c(F),$$

что  $J_c(0) = 0$ .

Действительно, если чартисты в меньшинстве и на рынке доминируют хорошо информированные инвесторы, то равный интерес последних к покупке и продаже приведёт к статичности индекса  $I$ . Преобладание спроса вызовет рост индекса, а преобладание предложения — его падение.

3) При любом достаточно большом  $c$  значение  $J = 0$  является неустойчивым положением равновесия динамической системы при фиксированных  $C = c$  и  $F = 0$ .

Другими словами, оставаться постоянным для индекса  $I$  динамически нестабильно в случае равенства спроса и предложения со стороны фундаменталистов и присутствия на рынке большой доли спекулятивных денег. Любое небольшое увеличение или уменьшение индекса будет усиливаться чартистами. Если индекс начинает расти, то  $J$  быстро придет в состояние устойчивого равновесия бычьего рынка. Если индекс падает, то  $J$  стремится в состояние устойчивого равновесия медвежьего рынка.

Из условий 1–3 и теоремы Уитни о складках и сборках (с. 44) следует, что в случае рынка общего положения особенности проектирования  $rg$  поверхности  $S$  на плоскость  $J = \text{const}$  параллельно оси  $J$  исчерпываются складками и сборками, причём хотя бы одна сборка есть обязательно. Нас будет интересовать поведение рынка вблизи точки сборки.

Точка сборки проектирования  $rg$  имеет координаты

$$C = C_0, \quad F = 0, \quad J = 0,$$

где  $C_0 > 0$ . Поверхность  $S$  в окрестности такой точки приводится к виду

$$F = J^3 + (C_0 - C)J \quad (7)$$

подходящим диффеоморфизмом объемлющего пространства  $\mathbb{R}^3$ , переводящим прямые, коллинеарные оси  $J$ , в такие же прямые.

Для простоты мы будем считать, что поверхность  $S$  изначально задаётся уравнением (7). Тогда аттрактор определяется условием

$$C < C_0 + 3J^2.$$

Границей аттрактора является линия складки

$$C = C_0 + 3J^2, \quad F = -2J^3$$

проектирования  $rg$ . Поверхность  $S$  изображена на рис. 7; аттрактор — её заштрихованная часть.

Как уже было сказано выше, динамическая система быстро приведёт фазовую точку, определяющую состояние рынка, в окрестность аттрактора. Чтобы описать дальнейшее её поведение, Зиман формулирует ещё несколько условий, которым должна удовлетворять динамическая система рынка.

4)  $\dot{C}$  и  $J$  имеют одинаковый знак, т. е. чартисты следуют за сложившейся тенденцией. Бычий рынок привлекает чартистов, и, следовательно, доля спекулятивных денег на рынке растёт. Медвежий рынок их отпугивает — доля спекулятивных денег уменьшается.

5)  $\dot{F} < 0$  после достаточно большого подъема индекса  $I$  даже при продолжающемся его росте. Опираясь на свои знания потенциала бычьего рынка фундаменталисты начинают продавать свои активы, как только курс становится достаточно большим, но ещё не достиг максимума.

6)  $\dot{F} < 0$  после быстрого падения индекса  $I$ , в частности, если  $J$  отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине. Дело в том, что фундаменталисты обычно выбирают маржу для

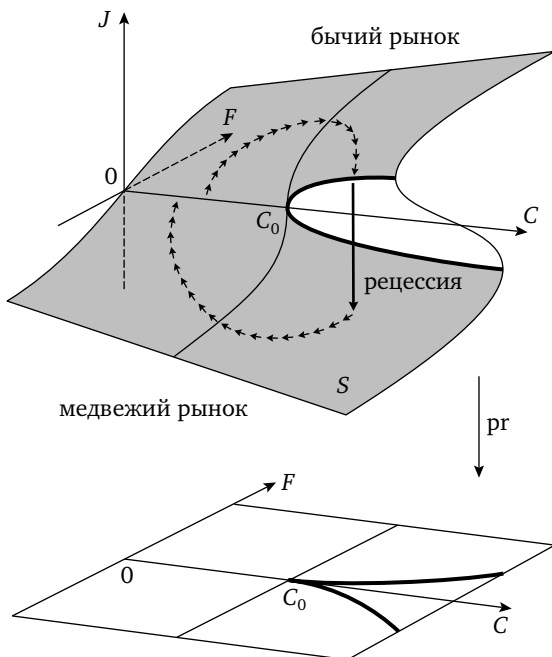


Рис. 7. Рецессия на фондовом рынке

каждого рынка. Пока падение цены превышает эту маржу, фундаменталисты продают свои акции.

7)  $\dot{F} > 0$ , если индекс  $I$  падал в течение некоторого времени, а затем начал стабилизироваться. Это происходит, когда  $J < 0$ , а  $\dot{J} > 0$ . Фундаменталистов привлекают вложения в восстанавливающийся медвежий рынок. Конечно, занижение цены приведёт к небольшим потерям за короткий промежуток времени. Однако эти потери должны окупиться с лихвой в длительной перспективе.

Отметим ещё, что рассматриваемая динамическая система подвержена влиянию различных внешних факторов (например, политических). Это влияние называется *стохастическим шумом*. Если шум велик, то поведение фондового рынка предсказать сложно. В дальнейшем мы будем считать внешнее воздействие слабым. Тем не менее, даже при таком шуме фазовая точка,

описывающая положение на рынке, может перескакивать с течением времени с одной фазовой кривой на другую.

Теперь мы можем делать выводы о глобальной динамике фондового рынка. Пусть он находится в устойчивом и относительно статичном положении. Тогда соответствующая фазовая точка располагается вблизи прямой  $J = F = 0$  с малым значением  $C$ .

Предположим, что фундаменталисты стали переводить свои средства с другого рынка, испытывающего период нестабильности. Такое нередко происходит на практике, поскольку в период стабильности рассматриваемого рынка фундаменталисты могли детально изучить его возможности. В результате фазовая точка начинает скользить вдоль верхней части аттрактора (где  $J > 0$ ). Траектория её движения представлена последовательностью коротких стрелок на рис. 7.

Растущий индекс начинает привлекать чартистов, и бычий рынок ускоряется. Когда доля спекулятивных денег становится слишком большой, фундаменталисты могут инициировать продажу своих ценных бумаг. После достаточно большой распродажи фазовая точка оказывается в окрестности линии складки проектирования  $rg$ . Отсюда она совершает практически отвесное падение в окрестность нижней части аттрактора (где  $J < 0$ ). Это падение называется *рецессией*. Оно изображено длинной толстой стрелкой на рис. 7.

Рецессия заставляет чартистов выходить из игры. Фазовая точка скользит вдоль отрицательной части аттрактора по направлению к оси  $F$ . Через некоторое время наблюдается медленное восстановление рынка, так как фундаменталисты возобновляют инвестиции. В результате рынок снова оказывается в устойчивом и относительно статичном положении.

Отметим, что достаточно глубокая рецессия (при очень большом  $C$ ) называется *кризисом*. Кризис на рынке приводит к краху фондовой биржи: акции обесцениваются и инвесторы разоряются.

**Замечание.** Обилие предположений, которые выдвигает Зиман, вызывает некоторый скепсис к его модели. Однако выводы, сделанные в рамках этой модели, поразительно подтверждаются многочисленными примерами из реальной жизни.



## § 8. Теорема Вейерштрасса — Мальгранжа

Доказательство теорем Уитни (как и многих других результатов теории особенностей) основывается на так называемой *подготовительной теореме* Вейерштрасса — Мальгранжа. Мы формулируем эту теорему, а затем, в качестве примера её использования, приведём к нормальной форме особенность гладкого отображения многообразий одинаковых размерностей (двумерных, в частности) в простейшей критической точке. Но сначала напомним некоторые важные алгебраические понятия.

**Алгебра формальных степенных рядов.** *Формальным степенным рядом* от  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  с вещественными коэффициентами называется выражение вида

$$\sum_I a_I x^I, \quad (8)$$

где  $I = (i_1, \dots, i_m)$  — любой упорядоченный набор  $m$  неотрицательных целых чисел,  $a_I \in \mathbb{R}$  и  $x^I = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$ . Важнейшим примером формального степенного ряда является ряд Тейлора гладкой функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  в нуле, т. е. ряд (8), в котором

$$a_I = \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(0),$$

где  $I! = i_1! \dots i_m!$ .

Формальные степенные ряды можно умножать и складывать по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \sum_I a_I x^I + \sum_I b_I x^I &= \sum_I (a_I + b_I) x^I, \\ \sum_I a_I x^I \cdot \sum_I b_I x^I &= \sum_K \left( \sum_{I+J=K} a_I b_J \right) x^K. \end{aligned}$$

Эти операции ассоциативны, коммутативны и дистрибутивны. Формальный степенной ряд, у которого все коэффициенты равны нулю, обладает свойствами нуля операции сложения. Ряд (8), у которого  $a_0 = 1$ , а все остальные коэффициенты равны нулю, обладает свойствами единицы операции умножения. Каждый ряд имеет противоположный (т. е. ряд, сумма с которым равна ну-

лю). Однако не всякий формальный степенной ряд, отличный от нулевого, имеет обратный (т. е. ряд, произведение с которым равно единице).

Таким образом, множество  $\mathbb{R}[[x]]$  всех формальных степенных рядов от  $x \in \mathbb{R}^m$  является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей (см. [17]). Поскольку это кольцо является ещё и векторным пространством над полем вещественных чисел, множество  $\mathbb{R}[[x]]$  — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим произвольную коммутативную ассоциативную алгебру  $\mathbb{A}$  с единицей над каким-нибудь полем  $R$ . Подмножество  $\mathcal{I} \subset \mathbb{A}$  называется *подалгеброй*, если оно само является алгеброй относительно операций в  $\mathbb{A}$ . Подалгебра  $\mathcal{I}$  называется *идеалом*, если произведение любого элемента из  $\mathcal{I}$  на любой элемент из  $\mathbb{A}$  принадлежит  $\mathcal{I}$ . Идеал в алгебре  $\mathbb{A}$  называется *максимальным*, если он не совпадает со всей алгеброй и не содержится ни в каком другом идеале, отличном от  $\mathbb{A}$ . Алгебра  $\mathbb{A}$  называется *локальной*, если она имеет единственный максимальный идеал. Алгебра  $\mathbb{R}[[x]]$  является локальной: идеал состоящий из формальных степенных рядов (8), у которых  $a_0 = 0$ , является её единственным максимальным идеалом.

Пусть  $\mathcal{I}$  — идеал в алгебре  $\mathbb{A}$ . Тогда факторпространство  $\mathbb{A}/\mathcal{I}$  векторного пространства  $\mathbb{A}$  по подпространству  $\mathcal{I}$  является векторным пространством над полем  $R$ . Элементами этого пространства являются классы эквивалентности по следующему отношению в алгебре  $\mathbb{A}$ : элементы  $a$  и  $b$  называются *эквивалентными*, если  $a - b \in \mathcal{I}$ . Класс эквивалентности, содержащий элемент  $a$ , называется *классом смежности* этого элемента и обозначается  $\{a + \mathcal{I}\}$ . Суммой классов  $\{a + \mathcal{I}\}$  и  $\{b + \mathcal{I}\}$  называется класс  $\{a + b + \mathcal{I}\}$ . Произведением элемента  $\lambda \in R$  и класса  $\{a + \mathcal{I}\}$  называется класс  $\{\lambda a + \mathcal{I}\}$ . Класс  $\{\mathcal{I}\}$  является нулем.

Пространство  $\mathbb{A}/\mathcal{I}$  является кольцом: произведением классов смежности  $\{a + \mathcal{I}\}$  и  $\{b + \mathcal{I}\}$  элементов  $a, b \in \mathbb{A}$  называется класс смежности  $\{ab + \mathcal{I}\}$  их произведения  $ab$ . Класс смежности  $\{1 + \mathcal{I}\}$  единицы 1 алгебры  $\mathbb{A}$  является *единицей* этого кольца. Следовательно, факторпространство  $\mathbb{A}/\mathcal{I}$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей над полем  $R$ . Она называется *факторалгеброй* алгебры  $\mathbb{A}$  по идеалу  $\mathcal{I}$ .

Рассмотрим теперь росток в нуле такого гладкого отображения  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $f(0) = 0$ . Он задаётся  $n$  гладкими функциями  $m$  переменных

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m).$$

Ряды Тейлора функций  $f_1, \dots, f_n$  в нуле являются элементами алгебры  $\mathbb{R}[[x]]$  формальных степенных рядов от  $x = (x_1, \dots, x_m)$  с вещественными коэффициентами. Они определяют идеал  $(f)$  в алгебре  $\mathbb{R}[[x]]$ , образованный всеми линейными комбинациями вида

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}[[x]]$ . Факторалгебра

$$Q_f = \mathbb{R}[[x]]/(f)$$

называется *локальной алгеброй* ростка  $f$  в нуле. Фактор максимального идеала алгебры  $\mathbb{R}[[x]]$  по идеалу  $(f)$  является единственным максимальным идеалом алгебры  $Q_f$ .

**Определение.** Росток  $f$  в нуле называется *конечнократным*, если его локальная алгебра  $Q_f$  как вещественное векторное пространство конечномерна. Размерность алгебры  $Q_f$  называется *кратностью* ростка  $f$  в нуле.

Кратность ростка гладкого отображения не зависит от выбора координат в его образе и прообразе. Конечнократные ростки могут быть лишь у гладкого отображения в пространство, размерность которого не меньше размерности прообраза.

**Определение.** Если росток отображения  $y = f(x)$  в нуле имеет конечную кратность  $\mu$ , то *системой образующих* его локальной алгебры  $Q_f$  называется такой набор гладких функций  $e_1, \dots, e_\mu$  от  $x$ , что набор их рядов Тейлора в нуле после факторизации по идеалу  $(f)$  даёт базис пространства  $Q_f$ .

У конечномерной локальной алгебры всегда существует система образующих, состоящая из мономов, т. е. функций вида  $x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}$ . Такая система называется *мономиальной*.

**Подготовительная теорема Вейерштрасса — Мальгранжа.**

Рассмотрим гладкое отображение

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto y = f(x),$$

такое, что  $f(0) = 0$ . Предположим, что росток  $f$  в нуле имеет конечную кратность  $\mu$  и  $e_1(x), \dots, e_\mu(x)$  — система образующих его локальной алгебры  $Q_f$ . Тогда для любой гладкой функции  $g$  от  $x$  найдутся такие гладкие функции  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$  от  $y$ , что

$$g(x) \equiv \alpha_1(f(x))e_1(x) + \dots + \alpha_\mu(f(x))e_\mu(x).$$

Доказательство основано на следующей теореме (см. [18]).

**Теорема деления по Мазеру [24].** Рассмотрим гладкую функцию

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, u) \mapsto F(t, u).$$

Предположим, что  $F(t, 0) = t^\mu h(t)$ , где  $\mu$  — натуральное число и  $h$  — гладкая функция,  $h(0) \neq 0$ . Тогда для любой гладкой функции  $G(t, u)$  найдутся такие гладкие функции  $\alpha_0(u), \dots, \alpha_{\mu-1}(u)$  и  $\beta(t, u)$ , что

$$G(t, u) \equiv \beta(t, u)F(t, u) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \alpha_i(u)t^i.$$

Эта теорема является обобщением на гладкие функции известного алгоритма деления многочлена на многочлен с остатком ( $\beta(t, u)$  — частное,  $\sum_{i=0}^{\mu-1} \alpha_i(u)t^i$  — остаток).

**Замечание.** Для комплексных голоморфных функций теорема деления была известна ещё Вейерштрассу. Подготовительная теорема в трудном случае  $C^\infty$ -гладких отображений впервые доказана Б. Мальгранжем [27].

**Пример 8.1.** Пусть гладкое отображение

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = (y_1, \dots, y_n), \quad y = f(x),$$

имеет критическую точку  $x_0$ . Тогда в простейшем случае ранг его матрицы Якоби в этой точке равен  $n - 1$ . Следовательно, по

теореме о неявной функции росток  $f$  в  $x_0$  лево-право-эквивалентен ростку в нуле гладкого отображения

$$y_1 = Y(x), \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n, \quad (9)$$

где  $Y(x)$  — гладкая функция от  $x$ , удовлетворяющая условиям

$$Y(0) = \frac{\partial Y}{\partial x_1}(0) = 0. \quad (10)$$

Множество критических точек отображения (9) задаётся уравнением  $\frac{\partial Y}{\partial x_1} = 0$ . Для отображения  $f$  общего положения множество  $\frac{\partial Y}{\partial x_1} = 0$  является гладким подмногообразием коразмерности 1 в окрестности начала координат в  $\mathbb{R}^n$  (см. пример 9.1, с. 68). В простейшем случае росток сужения отображения (9) на это многообразие является ростком вложения. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}(0) \neq 0. \quad (11)$$

Из условий (10) и (11) следует, что локальная алгебра отображения (9) в нуле двумерна, а функции 1 и  $x_1$  составляют мономиальную систему её образующих. Отсюда и из подготовительной теоремы Вейерштрасса — Мальгранжа следует, что существуют такие гладкие функции  $\alpha(y), \beta(y)$ , что

$$x_1^2 \equiv \alpha(Y(x), x_2, \dots, x_n)x_1 + \beta(Y(x), x_2, \dots, x_n). \quad (12)$$

Сравним коэффициенты при разных степенях переменной  $x_1$  в рядах Тейлора в нуле левой и правой частей тождества (12). Учитывая условия (10) и (11), получим:

$$x_1^0: \beta(0) = 0; \quad x_1^1: \alpha(0) = 0; \quad x_1^2: \frac{\partial \beta}{\partial y_1}(0) = 1. \quad (13)$$

Теперь перепишем тождество (12) в виде

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}\alpha(Y(x), x_2, \dots, x_n)\right)^2 \equiv \gamma(Y(x), x_2, \dots, x_n), \quad (14)$$

где  $\gamma(y) = \beta(y) + \frac{1}{4}\alpha^2(y)$  — гладкая функция от  $y$ . Из условий (10) и (13) следует, что формулы

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 - \frac{1}{2}\alpha(Y(x), x_2, \dots, x_n), & \tilde{x}_2 &= x_2, \quad \dots, \quad \tilde{x}_n = x_n, \\ \tilde{y}_1 &= \gamma(y), & \tilde{y}_2 &= y_2, \quad \dots, \quad \tilde{y}_n = y_n \end{aligned}$$

определяют новые гладкие координаты в окрестности нуля прообраза и образа отображения (9). В силу тождества (14) росток отображения (9) в нуле задаётся в этих координатах формулами

$$\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1^2, \quad \tilde{y}_2 = \tilde{x}_2, \quad \dots, \quad \tilde{y}_n = \tilde{x}_n. \quad (15)$$

Таким образом, росток  $f$  в  $x_0$  лево-право-эквивалентен ростку в нуле отображения (15). Как и в случае  $n = 2$ , особенность отображения (15) в нуле называют *складкой*.

**Замечание.** Получить нормальную форму (15) для ростка отображения  $f$  в простейшей критической точке можно и без использования подготовительной теоремы Вейерштрасса — Мальгранжа. Однако в более сложных случаях обойтись без неё трудно.

### Упражнения

1. Докажите, что если функция  $Y$ , определяющая отображение (9), удовлетворяет условиям

$$Y(0) = \frac{\partial Y}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^3 Y}{\partial x_1^3}(0) \neq 0,$$

то существуют такие гладкие функции  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$ ,  $\gamma(y)$ , что

$$x_1^3 \equiv \alpha(Y(x), x_2, \dots, x_n)x_1^2 + \beta(Y(x), x_2, \dots, x_n)x_1 + \gamma(Y(x), x_2, \dots, x_n).$$

2. Докажите, что если  $n \geq 2$ , то в рамках условий предыдущей задачи росток отображения (9) в нуле  $RL$ -эквивалентен ростку в нуле отображения

$$\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1^3 + \tilde{x}_2\tilde{x}_1, \quad \tilde{y}_2 = \tilde{x}_2, \quad \dots, \quad \tilde{y}_n = \tilde{x}_n.$$

Как и в случае  $n = 2$ , особенность этого отображения в нуле называют *сборкой*.

## § 9. Теорема трансверсальности Тома

Два векторных подпространства конечномерного векторного пространства называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство. Например, прямая  $L$  и гиперплоскость  $\pi$ , проходящие через начало координат в  $\mathbb{R}^n$ , трансверсальны, если и только если  $L$  не лежит в  $\pi$ . Если прямая  $L$  трансверсальна гиперплоскости  $\pi$ , то любая другая прямая, достаточно близкая к  $L$  в топологии проективного пространства  $\mathbb{R}P^{n-1}$  всех прямых, проходящих через нуль, также трансверсальна  $\pi$ . Если же прямая  $L$  не трансверсальна гиперплоскости  $\pi$ , то в любой сколь угодно малой её окрестности найдётся прямая, трансверсальная  $\pi$ .

Прямая  $L$  является образом линейного отображения  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Р. Том обобщил указанные выше свойства этого отображения на гладкие отображения произвольных гладких многообразий. Чтобы сформулировать эти обобщения, нам потребуются некоторые понятия анализа на многообразиях.

**Касательные пространства.** Пусть  $M$  — гладкое  $m$ -мерное многообразие. Зафиксируем произвольную точку  $x \in M$  и рассмотрим множество всех кривых

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M, \quad t \mapsto \gamma(t),$$

класса  $C^\infty$  на  $M$ , проходящих через эту точку при  $t = 0$ , т. е.  $\gamma(0) = x$ . Две кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  называются *эквивалентными*, если в локальных координатах в окрестности точки  $x$  евклидово расстояние между точками  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем  $t$  при  $t \rightarrow 0$ . Эквивалентность кривых не зависит от выбора локальных координат и является отношением эквивалентности.

**Определение.** Касательным вектором  $\dot{\gamma}(0)$  к кривой  $\gamma$  в точке  $x$  называется класс эквивалентности этой кривой среди всех кривых на  $M$ , проходящих через  $x$  при  $t = 0$ .

Множество всех касательных векторов в точке  $x$  является векторным пространством. Оно называется *касательным пространством* к многообразию  $M$  в точке  $x$  и обозначается  $T_x M$ . В локальных координатах  $x_1, \dots, x_m$  на многообразии  $M$  с началом в

точке  $x$  касательный вектор  $\dot{\gamma}(0)$  к кривой  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$  в нуле является классом эквивалентности линейного отображения

$$t \mapsto (x'_1(0)t, \dots, x'_m(0)t),$$

т. е. полностью определяется вектором  $(x'_1(0), \dots, x'_m(0)) \in \mathbb{R}^m$ .  
Отображение

$$T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \dot{\gamma}(0) \mapsto (x'_1(0), \dots, x'_m(0))$$

является изоморфизмом векторных пространств. Базис в  $T_x M$ , соответствующий стандартному базису в  $\mathbb{R}^m$  при этом изоморфизме, называется *согласованным* с локальными координатами  $x_1, \dots, x_m$ .

Рассмотрим объединение  $TM$  пространств  $T_x M$  по всем точкам  $x \in M$ . Оно является гладким  $2n$ -мерным многообразием. Если  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — набор локальных координат на многообразии  $M$ , то всякий вектор  $v \in T_x M$  задаётся своими координатами

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

в базисе, согласованном с координатами  $x_1, \dots, x_n$ . Набор  $2n$  чисел

$$(x, v) = (x_1, \dots, x_n; v_1, \dots, v_n)$$

определяет набор локальных координат на  $TM$ .

Естественная проекция  $\tau: TM \rightarrow M$ , сопоставляющая каждому вектору  $v \in T_x M$  точку  $x$ , является гладким расслоением. Это расслоение называется *касательным*. Его тотальное пространство  $TM$  также, для краткости, называют *касательным расслоением* многообразия  $M$ . Слоем над точкой  $x$  касательного расслоения  $\tau$  является касательное пространство  $T_x M$ . В указанных локальных координатах на  $TM$  расслоение  $\tau$  задаётся формулой  $(x, v) \mapsto x$ .

Пусть  $M$  — гладкое подмногообразие гладкого многообразия  $N$ . Тогда пространство  $T_x M$  естественно отождествляется с векторным подпространством в  $T_x N$  (классу эквивалентности кривой на многообразии  $M$  сопоставляется класс эквивалентности этой же кривой на многообразии  $N$ ). Коразмерность этого подпространства равна коразмерности  $M$  в  $N$ .



Например, если  $M$  — гладкая  $m$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , то пространство  $T_x M$  представляется  $m$ -мерной плоскостью  $\pi$  в  $\mathbb{R}^n$ , проходящей через точку  $x$  и обладающей следующим свойством: если  $\rho(\tilde{x}, \pi)$  — евклидово расстояние от точки  $\tilde{x} \in M$  до плоскости  $\pi$ , а  $\rho(\tilde{x}, x)$  — расстояние между точками  $\tilde{x}$  и  $x$ , то

$$\rho(\tilde{x}, \pi) = o(\rho(\tilde{x}, x))$$

при  $\tilde{x} \rightarrow x$ . Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности  $M$  в точке  $x$ .

**Определение.** Гладкие подмногообразия  $M_1$  и  $M_2$  гладкого многообразия  $N$  *касаются* в точке  $x \in M_1 \cap M_2$ , если одно из касательных подпространств  $T_x M_1, T_x M_2$  в  $T_x N$  содержит другое.

Рассмотрим теперь произвольные гладкие многообразия  $M$  и  $N$  и гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$ .

**Определение.** *Дифференциалом* отображения  $f$  в точке  $x \in M$  называется отображение

$$df|_x: T_x M \rightarrow T_x N,$$

сопоставляющее касательному вектору к гладкой кривой  $\gamma$  на  $M$  в точке  $x$  касательный вектор к кривой  $f \circ \gamma$  в точке  $y = f(x)$ .

Дифференциал  $df|_x$  является линейным оператором. Матрицей этого оператора в базисах, согласованных с локальными координатами на многообразиях  $M$  и  $N$ , является матрица Якоби отображения  $f$  в точке  $x$ .

**Определение.** Отображение  $f$  называется *трансверсальным* гладкому подмногообразию  $L \subset N$  в точке  $x \in M$ , если либо  $f(x)$  не принадлежит  $L$ , либо  $f(x) \in L$  и образ касательного пространства к  $M$  в точке  $x$  под действием дифференциала  $df|_x$  трансверсален касательному пространству к  $L$  в точке  $f(x)$ . Отображение  $f$  называется *трансверсальным*  $L$ , если оно трансверсально  $L$  в каждой точке многообразия  $M$ .

Следующее утверждение вытекает из теоремы о неявной функции (доказательство приведено, например, в [18]).

**Теорема (основное свойство трансверсальных отображений).** Пусть гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  трансверсально гладкому подмногообразию  $L \subset N$ . Тогда множество  $f^{-1}(L)$  либо пусто, либо является гладким подмногообразием в  $M$ , коразмерность которого равна коразмерности  $L$  в  $N$ .

Зафиксируем целое неотрицательное  $k$  и рассмотрим два гладких отображения  $f: M \rightarrow N$  и  $g: M \rightarrow N$ .

**Определение.** Отображения  $f$  и  $g$  имеют в точке  $x \in M$  касание порядка  $k$ , если:

- 1)  $f(x) = g(x)$ ;
- 2) в локальных координатах на многообразиях  $M$  и  $N$  евклидово расстояние между точками  $f(\tilde{x})$  и  $g(\tilde{x})$  является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем  $k$ -я степень евклидова расстояния между точками  $\tilde{x} \in M$  и  $x$  при  $\tilde{x} \rightarrow x$ .

Порядок касания не зависит от выбора локальных координат. Касание первого порядка отображений  $f$  и  $g$  в точке  $x$  означает совпадение значений  $f(x) = g(x)$ , а также равенство дифференциалов  $df|_x = dg|_x$ . В локальных координатах касание  $k$ -го порядка означает совпадение разложений отображений  $f$  и  $g$  в точке  $x$  по формуле Тейлора до членов степени  $k$  включительно.

Касание порядка  $k$  является отношением эквивалентности.

**Определение.** Класс эквивалентности отображения  $f$  в пространстве всех гладких отображений многообразия  $M$  в многообразии  $N$  относительно касания порядка  $k$  в точке  $x \in M$  называется  $k$ -струей отображения  $f$  в  $x$  и обозначается  $j^k f(x)$ .

Множество всех  $k$ -струй гладких отображений из  $M$  в  $N$  является гладким многообразием. Оно называется *пространством  $k$ -струй отображений из  $M$  в  $N$*  и обозначается  $J^k(M, N)$ . В локальных координатах  $x = (x_1, \dots, x_m)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  на многообразиях  $M$  и  $N$  соответственно  $k$ -струя  $j^k f(x)$  любого гладкого отображения

$$f: M \rightarrow N, \quad y = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

в точке  $x$  задаётся числами:

$$\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_n\}, \left\{ \frac{\partial^l f_s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(x) \right\},$$

где

$$1 \leq l \leq k, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq m, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Эти числа определяют локальные координаты на многообразии  $J^k(M, N)$ .

**Замечание.** Для любого  $l < k$  определено естественное отображение

$$J^k(M, N) \rightarrow J^l(M, N), \quad j^k f(x) \mapsto j^l f(x)$$

забывания информации о частных производных, порядок которых выше  $l$ . Это отображение представляет собой гладкое расслоение, слоем которого является конечномерное евклидово пространство.

**Определение.** Отображение

$$j^k f: M \rightarrow J^k(M, N), \quad j^k f: x \mapsto j^k f(x),$$

называется *k-струйным расширением* отображения  $f$ .

**Замечание.** Отображение  $j^k f$  гладкое.

Рассмотрим множество  $C^\infty(M, N)$  всех гладких отображений из  $M$  в  $N$ . Для каждого открытого подмножества  $U \subset J^k(M, N)$  определим подмножество  $F_U \subset C^\infty(M, N)$ , состоящее из таких отображений  $f$ , что

$$j^k f(M) \subset U.$$

Семейство множеств  $F_U$  является базой топологии в  $C^\infty(M, N)$ . Эта топология называется  *$C^k$ -топологией Уитни*.

Если  $M$  — компактное многообразие, то  $C^k$ -топология Уитни является обычной  $C^k$ -топологией равномерной сходимости последовательности отображений вместе со всеми частными производными до порядка  $k$  включительно. В общем случае эта топология более тонкая. А именно, последовательность отображений  $\{g_i\}$  в пространстве  $C^\infty(M, N)$  сходится к отображению  $g$  тогда и только тогда, когда существует такое компактное подмножество  $K \subset M$ , что последовательность  $\{j^k g_i\}$  равномерно сходится к  $j^k g$  на  $K$  и все  $g_i$ , за исключением конечного числа, совпадают с  $g$  вне  $K$ .

Обозначим через  $\Omega_k$  множество всех открытых подмножеств в пространстве  $C^\infty(M, N)$  в  $C^k$ -топологии Уитни.

**Определение.**  $C^\infty$ -топологией Уитни в пространстве гладких отображений многообразия  $M$  в многообразии  $N$  называется топология, базой которой является

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k.$$

**Замечание.** Совокупность подмножеств данного множества  $X$  можно взять в качестве базы топологии на  $X$ , если и только если пересечение любого конечного набора множеств из указанной совокупности является объединением множеств этой совокупности (с. 7). Данное выше определение корректно, поскольку  $\Omega_l \subset \Omega_k$  при  $l < k$ .

Всюду далее мы будем считать, что пространство  $C^\infty(M, N)$  всех гладких отображений из  $M$  в  $N$  снабжено  $C^\infty$ -топологией Уитни. Это функциональное пространство удовлетворяет условию Бэра: всякое его массивное подмножество (пересечение счётного числа открытых всюду плотных подмножеств) всюду плотно (см. [18]).

**Теорема трансверсальности Тома.** Пусть  $L$  — гладкое подмногообразие в пространстве струй  $J^k(M, N)$ . Тогда множество  $T_L$  гладких отображений  $f: M \rightarrow N$ , у которых  $k$ -струйные расширения трансверсальны  $L$ , является массивным подмножеством в  $C^\infty(M, N)$ . Если подмногообразие  $L \subset J^k(M, N)$  замкнуто в топологии пространства струй, то множество  $T_L$  открыто и всюду плотно в  $C^\infty(M, N)$ .

**Замечание.** В случае компактного многообразия  $M$  теорема Тома верна в обычной  $C^\infty$ -топологии равномерной сходимости.

Доказательство теоремы трансверсальности Тома, принадлежащее самому Тому, изложено в [44]. Более современная его версия приведена в [18]. В основе доказательства лежит следующее утверждение.

**Лемма Сарда.** Мера множества критических значений любого гладкого отображения гладких многообразий равна нулю.

Теорема трансверсальности Тома позволяет в различных задачах теории особенностей описывать условия, которым удовлетворяют объекты общего положения.

**Пример 9.1.** Рассмотрим гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Пусть ранг его матрицы Якоби в точке  $x \in \mathbb{R}^m$  равен  $r$ . Тогда размерность ядра и коразмерность образа дифференциала  $df|_x$  равны  $m - r$  и  $n - r$  соответственно.

Числа  $m - r$  и  $n - r$  называются *корангами* ростка  $f$  в точке  $x$  в его прообразе и образе. Докажем, что множество точек, в которых ранг матрицы Якоби гладкого отображения  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  общего положения равен  $r$ , либо пусто, либо является гладким подмногообразием в  $\mathbb{R}^m$ , коразмерность которого равна произведению корангов

$$(m - r)(n - r). \quad (16)$$

Действительно, пусть  $L_r$  — множество 1-струй  $j^1 f(x)$  отображений  $f$ , у которых ранг матрицы Якоби  $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$  равен  $r$ . Зафиксируем струю  $j^1 f(x_0) \in L_r$  и какой-нибудь базисный минор  $B$  матрицы  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ . Тогда для любой струи  $j^1 \tilde{f}(x)$ , достаточно близкой к  $j^1 f(x_0)$ , минор  $\tilde{B}$  матрицы  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x)$ , стоящий на пересечении строк и столбцов с теми же номерами, что и у  $B$ , невырожден.

Струя  $j^1 \tilde{f}(x)$  принадлежит  $L_r$ , если и только если все миноры матрицы  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x)$ , имеющие порядок  $r + 1$  и окаймляющие  $\tilde{B}$ , вырожденные. Каждый из этих миноров соответствует ровно одному элементу  $\tilde{a}_{k,l}$  матрицы  $\tilde{A}$ , полученной из  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x)$  вычеркиванием строк и столбцов, определяющих минор  $\tilde{B}$ . Вырожденность окаймляющего минора, соответствующего элементу  $\tilde{a}_{k,l}$ , означает, что

$$\tilde{a}_{k,l} \det(\tilde{B}) + \dots = 0,$$

где многоточие не содержит элементов матрицы  $\tilde{A}$ . Поскольку  $\det(\tilde{B}) \neq 0$ , каждый из  $(n - r)(m - r)$  элементов матрицы  $\tilde{A}$  является гладкой в окрестности  $j^1 f(x_0)$  функцией элементов матрицы  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x)$ , не входящих в  $\tilde{A}$ .

Следовательно, множество  $L_r$  является гладким подмногообразием коразмерности  $(m-r)(n-r)$  в пространстве  $J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . По теореме трансверсальности Тома множество отображений  $f$ , у которых 1-струйное расширение трансверсально многообразию  $L_r$ , является массивным подмножеством в пространстве всех гладких отображений из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Остается применить основное свойство трансверсальных отображений (с. 65).

**Замечание.** Из формулы (16) следует, в частности, что гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  общего положения при  $m = n \leq 3$  не имеет особенностей коранга 2.

**Пример 9.2.** Рассмотрим гладкую функцию  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой  $y = f(x_1, \dots, x_m)$ . Докажем, что каждая критическая точка функции  $f$  общего положения невырождена.

Действительно, пусть  $x = (x_1, \dots, x_m)$  — критическая точка функции  $f$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = 0.$$

Система уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

определяет гладкое подмногообразие  $L$  коразмерности  $m$  в пространстве  $J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  с координатами

$$x_1, \dots, x_m; y; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}.$$

Это подмногообразие замкнуто в топологии пространства струй, как и всякое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , составленное из общих нулей системы всюду непрерывных функций.

Пусть  $p = j^1 f(x) \in L$ . Рассмотрим векторные подпространства  $T_p L$  и

$$H = d(j^1 f)|_x(T_x \mathbb{R}^m)$$

в пространстве  $T_p J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ . Факторпространство  $H/T_p L$  изоморфно подпространству в  $\mathbb{R}^m$ , порождённому векторами

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \Big|_x, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отображение  $j^1 f$  трансверсально многообразию  $L$  в точке  $p$ , если и только если эти векторы линейно независимы, т. е.  $d^2 f|_x$  — невырожденная квадратичная форма.

Таким образом, множество функций, все критические точки которых невырожденные, является открытым всюду плотным подмножеством в пространстве всех гладких функций от  $m$  переменных в силу теоремы трансверсальности Тома.

**Пример 9.3.** Докажем, что гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  общего положения не имеет критических точек, если  $n \geq 2m$ .

В самом деле, пусть целое неотрицательное число  $r$  удовлетворяет условию

$$(m - r)(n - r) > m. \quad (17)$$

Тогда отображение  $j^1 f$  трансверсально многообразию  $L_r$ , определенному в примере 9.1, если и только если

$$j^1(\mathbb{R}^m) \cap L_r = \emptyset.$$

Это следует из того, что пространство  $\mathbb{R}^m$  не содержит непустых гладких подмногообразий коразмерности, большей  $m$ .

Таким образом, если условие (17) выполнено для каждого

$$r = 0, 1, \dots, \min\{m, n\} - 1,$$

то по теореме трансверсальности Тома множество отображений с матрицами Якоби максимально возможного ранга в каждой точке является массивным подмножеством в пространстве всех гладких отображений из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Остается заметить, что указанная система условий на натуральные числа  $m$  и  $n$  эквивалентна неравенству  $n \geq 2m$ .

**Замечание.** Можно доказать, что отображения без критических точек образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве  $C^\infty(M^m, N^n)$  при любом  $n \geq 2m$  (см. [8]).

### Упражнения

1. Используя теорему трансверсальности Тома, докажите, что особые точки векторного поля общего положения на плоскости не имеют кратных, нулевых и чисто мнимых характеристических корней.

2. Важными характеристиками пространственной кривой являются её кривизна и кручение (см. [20]). Докажите, что гладкая замкнутая кривая общего положения в  $\mathbb{R}^3$  имеет всюду ненулевую кривизну и чётное число точек нулевого кручения (см. [33]).



## § 10. Простейшие инварианты особенностей

В результате классификации элементов множества относительно заданного отношения эквивалентности находят так называемые *инварианты*. Это величины, каждая из которых определена для любого элемента рассматриваемого множества, одинакова для всех элементов каждого класса эквивалентности, но различна хотя бы для двух неэквивалентных элементов. Инварианты могут иметь разную природу.

Например, положительный индекс инерции квадратичной формы в  $\mathbb{R}^m$  (число положительных характеристических корней её матрицы) является инвариантом группы линейных преобразований  $GL(\mathbb{R}^m)$ . Следовательно, положительный индекс инерции  $i$  квадратичной формы 2-го дифференциала ростка гладкой функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  в критической точке является инвариантом правой эквивалентности в пространстве всех таких ростков. По лемме Морса (с. 40) этот инвариант полностью описывает классификацию ростков функции  $f$  в невырожденных критических точках с нулевым критическим значением: имеется ровно  $m + 1$  классов эквивалентности, соответствующих всем возможным значениям  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Важнейшими инвариантами особенностей гладких отображений являются классы Тома — Бордмана (см. [8]). Они определяются невозрастающими последовательностями неотрицательных целых чисел, не превосходящих размерности пространства-прообраза отображения.

Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия. Рассмотрим гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$ .

**Определение.** Отображение  $f$  имеет особенность класса  $\Sigma^i$  в точке  $x \in M$ , если размерность ядра первого дифференциала  $df|_x$  равна  $i$ .

**Пример 10.1.** Складки и сборки отображения двумерного многообразия в двумерное являются особенностями одного и того же класса  $\Sigma^1$ .

Пусть  $\Sigma^i(f)$  — множество точек  $x \in M$ , в которых отображение  $f$  имеет особенность класса  $\Sigma^i$ . Предположим, что это множество является гладким подмногообразием в  $M$ .

**Определение.** Отображение  $f$  имеет особенность класса  $\Sigma^{i,j}$  в точке  $x \in M$ , если размерность ядра первого дифференциала в точке  $x$  сужения отображения  $f$  на многообразии  $\Sigma^i(f)$  равна  $j$ .

Том дал индуктивное определение особенностей класса  $\Sigma^I$  для любой последовательности  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  таких целых чисел  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , что

$$m \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 0.$$

**Определение.** Пусть  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}(f)$  — гладкое подмногообразие в  $M$ . Тогда отображение  $f$  имеет особенность класса  $\Sigma^I$  в точке  $x \in M$ , если размерность ядра первого дифференциала в точке  $x$  сужения отображения  $f$  на многообразии  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}(f)$  равна  $i_k$ .

**Пример 10.2.** Гладкое отображение двумерного многообразия в двумерное имеет в точке складки особенность класса  $\Sigma^{1,0}$ , а в точке сборки — особенность класса  $\Sigma^{1,1,0}$ .

Множества  $\Sigma^I(f)$  определены, очевидно, не для всех отображений  $f$ . Дж. Бордман [13] предложил другую конструкцию. А именно, для каждого набора  $I$  длины  $k$  он определил подмножество  $\Sigma^I$  в пространстве  $k$ -струй  $J^k(M, N)$ , не зависящее ни от каких отображений. Он доказал, что это подмножество является гладким подмногообразием в  $J^k(M, N)$  и справедливо следующее утверждение.

**Теорема Бордмана.** Если  $k$ -струйное расширение отображения  $f: M \rightarrow N$  трансверсально подмногообразию  $\Sigma^I$  в  $J^k(M, N)$ , то множество  $(j^k f)^{-1}(\Sigma^I)$  является гладким подмногообразием в  $M$ , совпадающим с многообразием  $\Sigma^I(f)$  в смысле определения Тома.

По теореме трансверсальности Тома множество гладких отображений  $f: M \rightarrow N$ , у которых  $k$ -струйное расширение трансверсально  $\Sigma^I$ , является массивным подмножеством в пространстве  $C^\infty(M, N)$ , снабжённом  $C^\infty$ -топологией Уитни. Следовательно, многообразия  $\Sigma^I(f)$  в смысле Тома определены для любого отображения  $f$  общего положения.

Имеется несколько определений многообразий Бордмана. Все они довольно сложные. Поскольку далее рассматриваются

лишь отображения, к которым применимо определение классов  $\Sigma^I$  по Тому, мы не будем излагать здесь конструкцию Бордмана.

**Замечание.** Коразмерность подмногообразия  $\Sigma^i \subset J^1(M^m, N^n)$  равна  $i(n - m + i)$  (см. пример 9.1, с. 68). Коразмерность подмногообразия  $\Sigma^{i,j} \subset J^2(M^m, N^n)$  вычисляется по формуле Левина

$$\text{codim } \Sigma^{i,j} = i(n - m + i) + \frac{j}{2}(n - m + i)(2i - j + 1) - j(i - j).$$

Коразмерность подмногообразия  $\Sigma^I \subset J^k(M^m, N^n)$ , где  $I$  — последовательность, состоящая из  $k$  единиц, равна  $(n - m + 1)k$ . Бордман вычислил коразмерность подмногообразия  $\Sigma^I \subset J^k(M, N)$  для каждой последовательности  $I$ .

К сожалению, классификация особенностей гладких отображений по классам Тома — Бордмана не является полной. В частности, существуют две особенности класса  $\Sigma^{2,0}$ , не являющиеся  $RL$ -эквивалентными и не устранимые малой деформацией отображения.

**Пример 10.3.** Рассмотрим гладкие отображения

$$f_{\pm}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad x = (x_1, \dots, x_4) \mapsto y = (y_1, \dots, y_4),$$

заданные формулами

$$y_1 = x_1^2 \pm x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4,$$

соответственно. Они переводят точку  $x = 0$  в  $y = 0$  и имеют особенности класса  $\Sigma^{2,0}$  в нуле.

Оказывается, ростки  $f_{\pm}$  в нуле не являются  $RL$ -эквивалентными. Строгое доказательство этого факта приведено в [8]. Оно основано на изучении орбит действия групп линейных преобразований на пространстве пучков квадратичных форм.

На самом деле, указанные ростки не эквивалентны даже топологически, т. е. их нельзя перевести друг в друга непрерывными заменами координат в пространствах образа и прообраза. Чтобы в этом убедиться, достаточно изучить семейства отображений

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 \pm x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_2),$$

зависящих от параметров  $x_3, x_4$  (см. [8]).

Мы приведём здесь другое доказательство топологической неэквивалентности ростков  $f_{\pm}$  в нуле. Оно несколько громоздкое, но зато использует лишь простейшие сведения из аналитической геометрии.

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  и

$$U_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, 4\},$$

$$V_{\delta} = \{y \in \mathbb{R}^4 : |y_i| < \delta, i = 1, \dots, 4\}.$$

Тогда при любом  $\delta$  найдётся точка  $y \in V_{\delta}$ , не принадлежащая образу отображения  $f_{+}$ . Например, ему не принадлежат точки с координатами

$$-\delta < y_1 < 0, \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0.$$

Покажем, что наоборот для любого  $\varepsilon$  найдётся такое  $\delta$ , что любая точка  $y \in V_{\delta}$  имеет хотя бы один прообраз  $x \in U_{\varepsilon}$  при отображении  $f_{-}$ .

Действительно, зафиксируем произвольную точку  $y$  образа отображения  $f_{-}$ . Координаты любого прообраза  $x$  точки  $y$  при этом отображении определяются условиями:  $x_3 = y_3$ ,  $x_4 = y_4$ , а  $x_1$  и  $x_2$  — координаты точки пересечения двух кривых

$$\Gamma_1 : x_1^2 - x_2^2 + x_1 y_3 + x_2 y_4 = y_1,$$

$$\Gamma_2 : x_1 x_2 = y_2$$

на плоскости  $(x_1, x_2)$ .

Кривая  $\Gamma_2$  является гиперболой, если  $y_2 \neq 0$ . Уравнение кривой  $\Gamma_1$  записывается в виде

$$\left(x_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(x_2 - \frac{y_4}{2}\right)^2 = y_1 + \frac{y_3^2 - y_4^2}{4}.$$

Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что

$$-\frac{y_3}{2} \geq 0, \quad \frac{y_4}{2} \geq 0, \quad y_1 + \frac{y_3^2 - y_4^2}{4} \geq 0.$$

Это легко сделать, изменив направления и нумерацию осей систем координат в пространствах образа и прообраза отображения  $f_{-}$ .

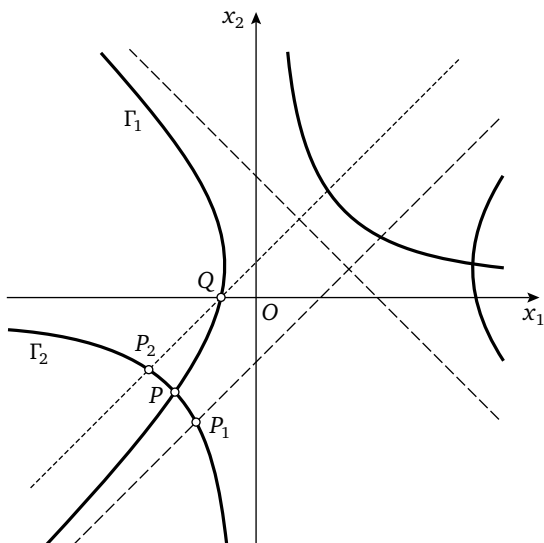


Рис. 8. Нахождение прообразов точки при отображении  $f_-$

Пусть  $y_1 + \frac{y_3^2 - y_4^2}{4} > 0$ . Тогда кривая  $\Gamma_1$  является гиперболой. Её центр находится в точке  $(-\frac{y_3}{2}, \frac{y_4}{2})$ , асимптоты коллинеарны прямым  $x_1 = \pm x_2$ , а вещественная ось коллинеарна оси  $x_1$ .

Если  $y_2 > 0$ , то левые ветви гипербол  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют ровно одну точку пересечения  $P$  (см. рис. 8). Эта точка лежит в открытой полосе между двумя параллельными прямыми: асимптотой

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{y_3 + y_4}{2}$$

гиперболы  $\Gamma_1$  и прямой

$$x_2 = x_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{y_3}{2} + \sqrt{y_1 + \frac{y_3^2}{4}},$$

проходящей через точку  $Q$  пересечения левой ветви  $\Gamma_1$  с осью  $x_1$ .

Обозначим точки пересечения левой ветви гиперболы  $\Gamma_2$  с этими прямыми через  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно. Тогда

$$x_1(P_2) < x_1(P) < 0, \quad x_2(P_1) < x_2(P) < 0,$$

где

$$x_1(P_2) = -\frac{\alpha_2}{2} - \sqrt{y_2 + \frac{\alpha_2^2}{4}}, \quad x_2(P_1) = \frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{y_2 + \frac{\alpha_1^2}{4}}.$$

Если  $y \in V_\delta$ , то

$$x_1(P_2) > -\frac{|\alpha_2|}{2} - \sqrt{\delta + \frac{\alpha_2^2}{4}}, \quad x_2(P_1) > -\frac{|\alpha_1|}{2} - \sqrt{\delta + \frac{\alpha_1^2}{4}},$$

где

$$|\alpha_1| < \frac{\delta}{2} < 2\sqrt{\delta + \frac{\delta^2}{4}}, \quad |\alpha_2| < \frac{\delta}{2} + \sqrt{\delta + \frac{\delta^2}{4}} < 2\sqrt{\delta + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Поэтому

$$x_1(P) > -2\sqrt{\delta + \frac{\alpha_2^2}{4}} > -2\sqrt{2\delta + \frac{\delta^2}{4}},$$

$$x_2(P) > -2\sqrt{\delta + \frac{\alpha_1^2}{4}} > -2\sqrt{2\delta + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Следовательно,  $P \in U_\varepsilon$  для любого положительного  $\delta < \delta(\varepsilon)$ , где

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{16 + \varepsilon^2} - 4.$$

Аналогично если  $y_2 < 0$ , то правые ветви гипербол  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют ровно одну точку пересечения  $P \in U_\varepsilon$  для любых  $y \in V_\delta$  и  $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ . В случаях  $y_2 = 0$  или  $y_1 + \frac{y_3^2 - y_4^2}{4} = 0$  один из прообразов  $x \in U_\varepsilon$  любой точки  $y \in V_\delta$  при отображении  $f_-$  вычисляется явно для каждого положительного  $\delta$ , меньшего  $\delta(\varepsilon)$ .

Таким образом, особенности отображений  $f_+$  и  $f_-$  в нуле не эквивалентны топологически, а значит, не являются и  $RL$ -эквивалентными. Их неустранимость будет доказана в следующем параграфе (см. пример 11.6, с. 82).

### Упражнения

1. Проверьте, что отображения  $f_\pm$  из примера 10.3 имеют особенности класса  $\Sigma^{2,0}$  в нуле.
2. Особенностью какого класса Тома — Бордмана является зонтик Уитни?

## § 11. Устойчивость гладких отображений

Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия. Рассмотрим гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$ .

**Определение.** Росток отображения  $f$  в точке  $x \in M$  называется *устойчивым*, если для любой окрестности  $U \subset M$  точки  $x$  существует окрестность  $V \subset C^\infty(M, N)$  отображения  $f$ , удовлетворяющая следующему условию: для любого отображения  $\tilde{f} \in V$  найдётся такая точка  $\tilde{x} \in U$ , что росток  $\tilde{f}$  в  $\tilde{x}$  лево-право-эквивалентен ростку  $f$  в  $x$ .

Прямое исследование ростака отображения на устойчивость весьма затруднительно. Дж. Мазер [25] свёл эту задачу к линейной.

**Теорема устойчивости Мазера.** *Росток гладкого отображения устойчив тогда и только тогда, когда он инфинитезимально устойчив.*

На самом деле Мазер доказал теорему устойчивости в гораздо более общей формулировке, описывающей условия устойчивости отображения в целом. Этому фундаментальному утверждению и его доказательству посвящена значительная часть книги [18]. Мы обсудим здесь лишь локальный вариант теоремы Мазера, который потребуется в дальнейшем.

Инфинитезимальная устойчивость ростака гладкого отображения является геометрическим понятием. Мы определим его в локальных координатах. От выбора локальных координат свойства устойчивости и инфинитезимальной устойчивости не зависят. Поэтому далее мы будем рассматривать росток в нуле гладкого отображения

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

удовлетворяющего условию  $f(0) = 0$ .

**Определение.** Росток отображения  $f$  в нуле называется *инфинитезимально устойчивым*, если для любого гладкого отображения

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

существуют гладкие функции

$$\alpha_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и гладкое отображение

$$\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

такие, что

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i(x) + \beta(f(x))$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю.

Проверка инфинитезимальной устойчивости сводится к другой практически легче решаемой задаче.

**Определение.** Росток отображения  $f$  в нуле называется *инфинитезимально  $V$ -устойчивым*, если для любого гладкого отображения

$$g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

существуют гладкие функции

$$\alpha_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

гладкие отображения

$$\beta_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, n,$$

и постоянная  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ , такие, что

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^n \beta_j(x) f_j(x) + \gamma \quad (18)$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю.

**Предложение 11.1.** Росток отображения  $f$  в нуле инфинитезимально устойчив, если и только если он инфинитезимально  $V$ -устойчив.

Доказательство см. в [8].



**Пример 11.2.** Рассмотрим росток в нуле гладкой функции

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = e_1 x_1^2 + \dots + e_m x_m^2,$$

где

$$e_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Нуль является невырожденной критической точкой этой функции, причём

$$x_i = \frac{1}{2} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Возьмем произвольную гладкую функцию  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Согласно лемме Адамара (с. 41), существуют такие гладкие функции

$$\alpha_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

что

$$g(x) = g(0) + \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i(x) = g(0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} e_i \alpha_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

для всех  $x$ . Следовательно, росток  $f$  в нуле инфинитезимально  $V$ -устойчив, а значит, инфинитезимально устойчив в силу предложения 11.1 и устойчив по теореме Мазера.

Отсюда и из леммы Морса следует, что *росток любой гладкой функции в невырожденной критической точке устойчив*.

С ростом размерности пространства образа гладкого отображения проверка инфинитезимальной  $V$ -устойчивости его ростка усложняется. Оказывается, эту проверку можно свести к простой конечномерной задаче.

**Определение.** Росток отображения  $f$  в нуле называется *почти инфинитезимально  $V$ -устойчивым*, если условие (18) выполняется с точностью до членов  $(n + 1)$ -го порядка малости по переменным  $x_1, \dots, x_m$ .

**Предложение 11.3.** *Если росток отображения  $f$  в нуле почти инфинитезимально  $V$ -устойчив, то он инфинитезимально  $V$ -устойчив.*

Это утверждение доказано в книге [8].

**Пример 11.4.** Докажем устойчивость сборки Уитни. Для этого убедимся сначала, что росток в нуле отображения

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

почти инфинитезимально  $V$ -устойчив, т. е. с точностью до членов третьего порядка малости по переменным  $x_1, x_2$  любая упорядоченная пара гладких функций является суммой постоянной  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  и линейной комбинации шести пар

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами, являющимися гладкими функциями от  $x_1, x_2$ .

По лемме Адамара любая пара функций, обращающихся в нуль при  $x_2 = 0$ , является линейной комбинацией последних двух пар из указанной выше шестерки. Поэтому достаточно проверить, что с точностью до членов третьего порядка малости по переменной  $x_1$  любая пара квадратных трёхчленов

$$\begin{pmatrix} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

может быть представлена в виде суммы пары констант и линейной комбинации двух пар

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами, являющимися многочленами от  $x_1$ . Но последнее очевидно:

$$\begin{pmatrix} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a_1}{3} \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ -b_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 + c_2 \end{pmatrix} \equiv (a_2 x_1^2 + b_2 x_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{b_2}{3} \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \pmod{x_1^3}.$$

Таким образом, сборка Уитни инфинитезимально  $V$ -устойчива (предложение 11.3), а значит, и инфинитезимально устойчива (предложение 11.1). Её устойчивость следует теперь из теоремы устойчивости Мазера.

При проверке инфинитезимальной устойчивости ростка отображения полезно также использовать следующее наблюдение В. И. Арнольда.

**Предложение 11.5** [8]. Росток в нуле гладкого отображения

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto y = f(x),$$

удовлетворяющего условию  $f(0) = 0$ , инфинитезимально устойчив, если и только если для любого  $i = 1, \dots, n$  существует  $(m \times n)$ -матрица  $A_i(x)$ , элементами которой являются гладкие функции от  $x$ , и  $(n \times n)$ -матрица  $B_i(y)$ , элементами которой являются гладкие функции от  $y$ , такие, что

$$x_i E = \frac{\partial f}{\partial x}(x) A_i(x) + B_i(f(x)) \quad (19)$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю, где  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ .

**Пример 11.6.** Рассмотрим отображения  $f_{\pm}$  из примера 10.3 (с. 74). Их особенности в нуле инфинитезимально устойчивы.

Действительно, в качестве матриц в разложениях (19) при  $i = 3, 4$  можно взять, например,

$$A_3 = A_4 = 0, \quad B_3 = y_3 E, \quad B_4 = y_4 E,$$

где  $E$  — единичная матрица четвертого порядка. Существование матричных решений уравнений (19) при  $i = 1, 2$  не столь очевидно. Тем не менее, такие решения есть. В частности:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 x_1 & -a_2 x_1 & -\left(\frac{1}{2} + a_3\right) x_1 & -a_4 x_1 \\ -a_1 x_2 & 1 - a_2 x_2 & -a_3 x_2 & -a_4 x_2 \\ 1 - a_1 x_3 & -a_2 x_3 & x_1 + \left(\frac{1}{2} - a_3\right) x_3 & -a_4 x_3 \\ -a_1 x_4 & \mp 2 - a_2 x_4 & -a_3 x_4 & x_1 - a_4 x_4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2a_1 y_1 & 2a_2 y_1 - y_4 & 2a_3 y_1 & 2a_4 y_1 - y_2 \\ 2a_1 y_2 & 2a_2 y_2 & \left(\frac{1}{2} + 2a_3\right) y_2 & 2a_4 y_2 \\ -1 + a_1 y_3 & a_2 y_3 & \left(-\frac{1}{2} + a_3\right) y_3 & a_4 y_3 \\ a_1 y_4 & \pm 2 + a_2 y_4 & a_3 y_4 & a_4 y_4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b_1x_1 & 1 - b_2x_1 & -b_3x_1 & -b_4x_1 \\ -b_1x_2 & -b_2x_2 & -b_3x_2 & -\left(\pm\frac{1}{2} + b_4\right)x_2 \\ -b_1x_3 & -2 - b_2x_3 & x_2 - b_3x_3 & -b_4x_3 \\ 1 - b_1x_4 & -b_2x_4 & -b_3x_4 & x_2 + \left(\pm\frac{1}{2} - b_4\right)x_4 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2b_1y_1 & 2b_2y_1 - y_3 & 2b_3y_1 - y_2 & 2b_4y_1 \\ 2b_1y_2 & 2b_2y_2 & 2b_3y_2 & \left(\pm\frac{1}{2} + 2b_4\right)y_2 \\ b_1y_3 & 2 + b_2y_3 & b_3y_3 & b_4y_3 \\ -1 + b_1y_4 & b_2y_4 & b_3y_4 & -\left(\pm\frac{1}{2} - b_4\right)y_4 \end{pmatrix},$$

где  $a_i, b_i, i = 1, \dots, 4$ , — произвольные вещественные числа.

Таким образом, ростки отображений  $f_{\pm}$  в нуле устойчивы, согласно теореме Мазера.

**Замечание.** При проверке условий (19) также достаточно лишь убедиться, что они выполняются с точностью до членов  $(n + 1)$ -го порядка малости по переменным  $x_1, \dots, x_m$ .

Доказательство теоремы устойчивости Мазера довольно сложное. Ключевую роль в нем играет следующая теорема (см. [8]).

**Теорема о конечной определенности.** *Инфинитезимально устойчивый росток гладкого отображения в  $n$ -мерное пространство  $RL$ -эквивалентен ростку своего многочлена Тейлора степени  $n + 1$ .*

Доказательство теоремы о конечной определенности проводится так называемым гомотопическим методом Тома. Этот метод широко используется в теории особенностей гладких отображений. Поэтому мы посвятим ему отдельный параграф.

**Замечание.** Гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  общего положения при  $m, n \leq 3$  имеет только устойчивые особенности. Отображения, имеющие лишь устойчивые особенности, не всюду плотны в пространстве всех гладких отображений гладких многообразий, если размерности этих многообразий принадлежат так называемой области плохих размерностей Мазера (см. [18]). В частности, ещё Том доказал, что при  $k \geq 3$  гладкое отображение  $f: M^{k^2} \rightarrow N^{k^2}$  может иметь неустойчивые особенности, не устранимые малой деформацией отображения (см. [44]).

### Упражнения

1. Используя какую-нибудь компьютерную программу, решите матричные уравнения (19) при  $i = 1, 2$  для отображений  $f_{\pm}$  из примера 10.3 (с. 74) в предположении, что элементы искомым матриц являются линейными функциями соответствующих переменных.

2. Докажите, что зонтик Уитни (инфинитезимально) устойчив.

## § 12. Гомотопический метод Тома

Суть гомотопического метода Тома в том, чтобы не искать конкретную эквивалентность изучаемого отображения с данным, а включить это отображение в семейство и искать семейство эквивалентностей. Вот как это выглядит в случае  $RL$ -эквивалентности (см. [8]).

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$F_t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto F_t(x), \quad t \in [0, 1],$$

таких, что  $F_t(0) \equiv 0$  и  $F_0 = f$ . Мы будем предполагать, что это семейство гладкое, т. е. координатные компоненты отображений семейства являются гладкими функциями, определенными на прямом произведении  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ .

Пусть существуют такие гладкие семейства диффеоморфизмов

$$\varphi_t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \varphi_t(x), \quad \text{и} \quad \psi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \psi_t(y),$$

что

$$\varphi_0(x) \equiv x, \quad \varphi_t(0) \equiv 0, \quad \psi_0(y) \equiv y, \quad \psi_t(0) \equiv 0 \quad (20)$$

и

$$F_t(\varphi_t(x)) \equiv \psi_t(f(x)) \quad (21)$$

для всех  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  и  $t \in [0, 1]$ . Они определяют гладкие семейства векторных полей  $v_t(x)$  и  $w_t(y)$  в  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  формулами:

$$v_t(\varphi_t(x)) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}, \quad w_t(\psi_t(y)) = \frac{\partial \psi_t(y)}{\partial t}.$$

Продифференцируем (21) по параметру  $t$ . Тогда получим новое тождество

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(\varphi_t(x)) + \frac{\partial F_t}{\partial v_t}(\varphi_t(x)) \equiv w_t(\psi_t(f(x))). \quad (22)$$

В нем второе слагаемое левой части обозначает производную отображения  $F_t$  по направлению векторного поля  $v_t$  в точке  $\varphi_t(x)$ , т. е.

$$\frac{\partial F_t}{\partial v_t}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_i} v_{t,i}(x),$$

где

$$v_t(x) = (v_{t,1}(x), \dots, v_{t,m}(x))$$

в стандартном базисе пространства  $\mathbb{R}^m$ .

Теперь, используя (21), перепишем тождество (22) в виде

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(\varphi_t(x)) + \frac{\partial F_t}{\partial v_t}(\varphi_t(x)) \equiv w_t(F_t(\varphi_t(x))).$$

Заменяя здесь  $\varphi_t(x)$  на  $x$ , получим в итоге уравнение

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = -\frac{\partial F_t}{\partial v_t}(x) + w_t(F_t(x)) \quad (23)$$

на семейства векторных полей  $v_t$  и  $w_t$ .

Это уравнение называется *гомологическим*. Если его удаётся решить в классе векторных полей, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$v_t(0) \equiv 0, \quad w_t(0) \equiv 0,$$

то семейства диффеоморфизмов  $\varphi_t$  и  $\psi_t$  можно найти из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v_t(x), \quad \frac{dy}{dt} = w_t(y).$$

А именно, вектор-функция  $t \mapsto \varphi_t(x)$  является решением дифференциального уравнения  $\dot{x} = v_t(x)$ , удовлетворяющим начальному условию  $\varphi_0(x) = x$ . Аналогично вектор-функция  $t \mapsto \psi_t(y)$  является решением дифференциального уравнения  $\dot{y} = w_t(y)$ , удовлетворяющим начальному условию  $\psi_0(y) = y$ . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [9]) следует, что отображения каждого из семейств  $x \mapsto \varphi_t(x)$  и  $y \mapsto \psi_t(y)$  удовлетворяют условиям (20) и являются диффеоморфизмами в достаточно малой окрестности нуля для всех значений  $t \in [0, 1]$ . Покажем, что для этих диффеоморфизмов справедливо тождество (21).

Действительно, из гомологического уравнения (23) получаем

$$\frac{d}{dt}F_t(\varphi_t(x)) \equiv w_t(F_t(\varphi_t(x))).$$

Это означает, что при любом фиксированном  $x$ , достаточно близком к нулю, вектор-функция  $t \mapsto F_t(\varphi_t(x))$  является решением дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dt} = w_t(y)$ , удовлетворяющим начальному условию

$$F_0(\varphi_0(x)) = F_0(x) = f(x).$$

Следовательно,

$$F_t(\varphi_t(x)) \equiv \psi_t(f(x))$$

в силу теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Таким образом, ростки всех отображений семейства  $F_t$  в нуле лево-право-эквивалентны. В частности, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 12.1.** Пусть  $f, \xi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — такие гладкие отображения, что  $f(0) = \xi(0) = 0$ . Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$F_t(x) = f(x) + t\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, 1].$$

Предположим, что существуют гладкие семейства функций

$$v_{t,i}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto v_{t,i}(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

и гладкое семейство отображений

$$w_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto w_t(y),$$

такие, что

$$v_{t,1}(0) \equiv \dots \equiv v_{t,m}(0) \equiv 0, \quad w_t(0) \equiv 0$$

и

$$\xi(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_i} v_{t,i}(x) + w_t(F_t(x))$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ . Тогда ростки отображений  $f + \xi$  и  $f$  в нуле  $RL$ -эквивалентны.

В случае  $R$ -эквивалентности функций формулировка соответствующего утверждения проще.



**Предложение 12.2.** Пусть  $f, \xi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции,  $f(0) = \xi(0) = 0$ . Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$F_t(x) = f(x) + t\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, t \in [0, 1].$$

Предположим, что существуют гладкие семейства функций

$$v_{t,i}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto v_{t,i}(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

такие, что

$$v_{t,1}(0) \equiv \dots \equiv v_{t,m}(0) \equiv 0$$

и

$$\xi(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_i} v_{t,i}(x) \quad (24)$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ . Тогда ростки функций  $f + \xi$  и  $f$  в нуле  $R$ -эквивалентны.

Мы продемонстрируем гомотопический метод Тома в случае правой эквивалентности на примере доказательства следующего обобщения леммы Морса, полученного В. И. Арнольдом.

**Лемма Морса с параметрами.** Пусть  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция с критической точкой в нуле. Предположим, что второй дифференциал  $d^2f|_0$  является квадратичной формой ранга  $r$ . Тогда росток  $f$  в нуле  $R$ -эквивалентен ростку в нуле одной из функций вида

$$(x, u) \mapsto h(u) \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_{m-r})$ ,  $dh|_0 = 0$ ,  $d^2h|_0 = 0$ .

**Доказательство.** Линейным преобразованием координат в пространстве  $\mathbb{R}^m$  функцию  $f$  можно привести к виду

$$f(x, u) = g(x, u) + e_1 x_1^2 + \dots + e_r x_r^2, \quad (25)$$

где  $x \in \mathbb{R}^r$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m-r}$ ,  $dg|_0 = 0$ ,  $d^2g|_0 = 0$ ,  $e_i = \pm 1$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = 0.$$

Она имеет вид

$$2e_i x_i + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, u) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Из условия  $d^2g|_0 = 0$  и теоремы о неявной функции следует, что в достаточно малой окрестности нуля эта система имеет и притом единственное гладкое решение

$$x = X(u) = (X_1(u), \dots, X_r(u)),$$

такое, что  $X(0) = 0$ ,  $dX|_0 = 0$ . Это решение определяет локальный диффеоморфизм

$$(x, u) \mapsto (x + X(u), u),$$

который приводит росток  $f$  в нуле к виду (25) с дополнительным условием

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, u) \equiv 0.$$

Пусть теперь

$$h(u) = f(0, u) \quad \text{и} \quad \xi(x, u) = g(x, u) - h(u).$$

Тогда

$$f(x, u) = h(u) + \xi(x, u) + e_1 x_1^2 + \dots + e_r x_r^2,$$

где

$$dh|_0 = 0, \quad d^2h|_0 = 0, \quad d\xi|_0 = 0, \quad d^2\xi|_0 = 0, \quad \xi(0, u) \equiv 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, u) \equiv 0.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$F_t(x, u) = h(u) + t\xi(x, u) + e_1 x_1^2 + \dots + e_r x_r^2, \quad t \in [0, 1].$$

Оно определяет семейство гладких отображений

$$Y_t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, u) \mapsto (y, u), \quad y = (y_1, \dots, y_r) = y_t(x, u),$$

$$y_i = \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(x, u) = 2e_i x_i + t \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x, u). \quad (26)$$

Поскольку  $d^2\xi|_0 = 0$ , в достаточно малой окрестности нуля каждое отображение этого семейства является диффеоморфизмом, причём

$$y_t(x, u) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (27)$$

так как  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, u) \equiv 0$ .

## Гладкое семейство отображений

$$Y_t^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (y, u) \mapsto (x, u), \quad x = x_t(y, u),$$

обратных к  $Y_t$  в окрестности нуля, определяет новые гладкие координаты  $(y, u)$  в  $\mathbb{R}^m$  для любого  $t \in [0, 1]$ . Поскольку  $\xi(x, u)|_{x=0} \equiv 0$ , имеем

$$\xi(x_t(y, u), u)|_{y=0} \equiv 0$$

в силу (27). Отсюда и из леммы Адамара (с. 41) следует, что существуют такие гладкие семейства функций

$$\alpha_{t,i}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad (y, u) \mapsto \alpha_{t,i}(y, u), \quad i = 1, \dots, r,$$

что

$$\xi(x_t(y, u), u) = \sum_{i=1}^r y_i \alpha_{t,i}(y, u) \quad (28)$$

для всех  $(y, u)$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ . При этом

$$\alpha_{t,1}(0, u) \equiv \dots \equiv \alpha_{t,r}(0, u) \equiv 0,$$

так как  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, u) \equiv 0$ .

Теперь, подставив (26) в (28), получим:

$$\xi(x, u) = - \sum_{i=1}^r \frac{\partial F_t(x, u)}{\partial x_i} v_{t,i}(x, u),$$

где

$$v_{t,i}(x, u) = -\alpha_{t,i}(y_t(x, u), u).$$

Набор семейств функций  $v_{t,i}$ , дополненный  $m - r$  семействами тождественно нулевых функций, является, очевидно, решением гомологического уравнения (24). Остается применить предложение 12.2 (с. 88). Лемма Морса с параметрами доказана.  $\square$

Гомотопический метод Тома в случае  $V$ -эквивалентности приводит к несколько иным формулам. А именно, пусть существуют гладкое семейство диффеоморфизмов

$$\varphi_t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \varphi_t(x),$$

и гладкое семейство отображений

$$\Psi_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n), \quad x \mapsto \Psi_t(x),$$

в пространстве невырожденных матриц порядка  $n$ , такие, что

$$\varphi_0(x) \equiv x, \quad \varphi_t(0) \equiv 0, \quad \Psi_0(x) \equiv E \quad (29)$$

и

$$F_t(\varphi_t(x)) \equiv \Psi_t(x)f(x) \quad (30)$$

для всех  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  и  $t \in [0, 1]$ . Они определяют гладкое семейство векторных полей  $v_t(x)$  в  $\mathbb{R}^m$  и гладкое семейство отображений

$$W_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad x \mapsto W_t(x),$$

в пространство вещественных квадратных матриц порядка  $n$  формулами:

$$v_t(\varphi_t(x)) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}, \quad W_t(\varphi_t(x)) = \frac{\partial \Psi_t(x)}{\partial t} \Psi_t^{-1}(x).$$

Продифференцируем (30) по параметру  $t$ . Тогда получим новое тождество

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(\varphi_t(x)) + \frac{\partial F_t}{\partial v_t}(\varphi_t(x)) \equiv W_t(\varphi_t(x)) \cdot F_t(\varphi_t(x)).$$

Заменяя здесь  $\varphi_t(x)$  на  $x$ , получим гомологическое уравнение

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = -\frac{\partial F_t}{\partial v_t}(x) + W_t(x) \cdot F_t(x) \quad (31)$$

на семейства векторных полей  $v_t$  и отображений  $W_t$ . Если его удастся решить при дополнительном условии

$$v_t(0) \equiv 0,$$

то семейство отображений  $x \mapsto \varphi_t(x)$ , удовлетворяющих условиям (29) и являющихся диффеоморфизмами в достаточно малой окрестности нуля для всех значений  $t \in [0, 1]$ , можно найти из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_t(x)$$

аналогично случаю  $RL$ -эквивалентности (см. с. 86).

Семейство отображений  $x \mapsto \Psi_t(x)$  находится из обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Psi}{dt} = W_t(\varphi_t(x)) \Psi$$

относительно вещественной квадратной матрицы  $\Psi$  порядка  $n$ . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [9]) следует, что это уравнение имеет и притом единственное решение  $t \mapsto \Psi_t(x) \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\Psi_0(x) = E$  и гладкое для всех  $x$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ .

Покажем теперь, что для семейств диффеоморфизмов  $\varphi_t$  и невырожденных матриц  $\Psi_t$  справедливо тождество (30). Действительно, гомологическое уравнение (31) приводит к тождеству

$$\frac{d}{dt} (F_t(\varphi_t(x))) \equiv W_t(\varphi_t(x)) \cdot F_t(\varphi_t(x)).$$

С другой стороны

$$\frac{d}{dt} (\Psi_t(x) f(x)) \equiv W_t(\varphi_t(x)) (\Psi_t(x) f(x)).$$

Следовательно, при любом фиксированном  $x$ , достаточно близком к нулю, вектор-функции  $t \mapsto F_t(\varphi_t(x))$  и  $t \mapsto \Psi_t(x) f(x)$  являются решениями линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = W_t(\varphi_t(x)) y$$

относительно  $y \in \mathbb{R}^n$ . Эти решения удовлетворяют одинаковому начальному условию

$$F_0(\varphi_0(x)) = \Psi_0(x) f(x) = f(x).$$

Поэтому

$$F_t(\varphi_t(x)) \equiv \Psi_t(x) f(x)$$

в силу теоремы единственности.

Таким образом, ростки всех отображений семейства  $F_t$  в нуле  $V$ -эквивалентны. В частности, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 12.3.** Пусть  $f, \xi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкие отображения,  $f(0) = \xi(0) = 0$ . Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$F_t(x) = f(x) + t\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, 1].$$

Предположим, что существуют такие гладкие семейства функций

$$v_{t,i}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto v_{t,i}(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

и отображений

$$W_t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad x \mapsto W_t(x),$$

в пространстве квадратных матриц порядка  $n$ , что

$$v_{t,1}(0) \equiv \dots \equiv v_{t,m}(0) \equiv 0$$

и

$$\xi(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_i} v_{t,i}(x) + W_t(x) \cdot F_t(x)$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ . Тогда ростки отображений  $f + \xi$  и  $f$  в нуле  $V$ -эквивалентны.

Пример применения гомотопического метода Тома в случае  $V$ -эквивалентности ростков функций приведён в § 21 (с. 213–215).

## § 13. Версальные деформации

При исследовании вырождений у объектов, зависящих от параметра (который может быть многомерным), следует изучать семейства объектов, в которых эти вырождения возникают неустрашимым образом. Семейство, рассматриваемое вблизи значения параметра, определяющего вырожденный объект, называется деформацией этого объекта. Во многих случаях исследование деформаций вырожденного объекта сводится к изучению всего лишь одной его деформации. Она называется версальной. В этом параграфе описан способ проверки версальности деформации особенности гладкого отображения относительно  $RL$ -,  $R$ - и  $V$ -эквивалентностей.

Рассмотрим росток в нуле гладкого отображения

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

удовлетворяющего условию  $f(0) = 0$ . Деформацией ростка  $f$  с параметром  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  называется росток в нуле такого гладкого отображения

$$F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda),$$

что  $F(x, 0) \equiv f(x)$ . Пространство параметров деформации называется базой деформации.

Зафиксируем деформацию  $F$  ростка  $f$  с базой  $\mathbb{R}^l$  и возьмем другую деформацию  $\tilde{F}$  этого же ростка с другой базой  $\mathbb{R}^{\tilde{l}} = \{\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{l}})\}$ .

**Определение.** Деформация  $F$  называется  $RL$ -версальной, если для любой деформации  $\tilde{F}$  существуют такие гладкие отображения

$$\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

что

$$\varphi(x, 0) \equiv x, \quad \psi(y, 0) \equiv y, \quad g(0) = 0$$

и

$$\tilde{F}(x, \tilde{\lambda}) \equiv \psi(F(\varphi(x, \tilde{\lambda}), g(\tilde{\lambda})), \tilde{\lambda}) \quad (32)$$

в достаточно малой окрестности нуля.

**Определение.** Деформация  $F$  ростка в нуле гладкой функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $R$ -версальной, если для любой другой его деформации  $\tilde{F}$  существуют такие гладкие отображения

$$\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g: \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

что

$$\varphi(x, 0) \equiv x, \quad g(0) = 0$$

и

$$\tilde{F}(x, \tilde{\lambda}) \equiv F(\varphi(x, \tilde{\lambda}), g(\tilde{\lambda})) \quad (33)$$

в достаточно малой окрестности нуля.

Отметим, что условие  $f(0) = 0$  для определения  $R$ -версальности не обязательно.

**Определение.** Деформация  $F$  ростка отображения  $f$  называется  $V$ -версальной, если для любой другой его деформации  $\tilde{F}$  существуют гладкие отображения

$$\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g: \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

и гладкое отображение

$$\Psi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

в пространство вещественных квадратных матриц порядка  $n$ , такие, что

$$\varphi(x, 0) \equiv x, \quad g(0) = 0, \quad \det \Psi(0, 0) \neq 0$$

и

$$\tilde{F}(x, \tilde{\lambda}) \equiv \Psi(x, \tilde{\lambda}) F(\varphi(x, \tilde{\lambda}), g(\tilde{\lambda})) \quad (34)$$

в достаточно малой окрестности нуля.

В этих определениях ростки в нуле отображений

$$\varphi(\cdot, \tilde{\lambda}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{и} \quad \psi(\cdot, \tilde{\lambda}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

являются ростками диффеоморфизмов для любого  $\tilde{\lambda}$ , достаточно близкого к нулю.



**Предложение 13.1.** Пусть  $F$  и  $\tilde{F}$  являются  $V$ -версальными деформациями ростка  $f$  с базами одинаковой размерности  $l = \tilde{l}$ . Тогда существуют такие гладкие отображения

$$\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \quad (x, \tilde{\lambda}) \mapsto (\varphi(x, \tilde{\lambda}), g(\tilde{\lambda})),$$

и

$$\Psi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

что росток  $\Phi$  в нуле является ростком диффеоморфизма,

$$\Phi(0, 0) = 0, \quad \det \Psi(0, 0) \neq 0$$

и имеет место тождество (34) в достаточно малой окрестности нуля. В частности, росток в нуле отображения

$$g: \mathbb{R}^{\tilde{l}} \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad \tilde{\lambda} \mapsto g(\tilde{\lambda})$$

пространств параметров деформаций  $\tilde{F}$  и  $F$  является ростком диффеоморфизма.

**Замечание.** Аналогичное утверждение справедливо также для  $RL$ - и  $R$ -версальных семейств (см. [8]).

Как и в вопросе устойчивости ростка отображения, проверку версальности деформации можно свести к линейной задаче.

**Определение.** Деформация  $F$  ростка отображения  $f$  называется инфинитезимально  $RL$ -версальной, если для любого гладкого отображения  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  существуют гладкие функции

$$\alpha_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

гладкое отображение  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и постоянная  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \mathbb{R}^l$ , такие, что

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i(x) + \beta(f(x)) + \sum_{k=1}^l \gamma_k \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda=0}$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю.

**Определение.** Деформация  $F$  ростка в нуле гладкой функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  называется *инфинитезимально  $R$ -версальной*, если для любой гладкой функции  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  существуют гладкие функции

$$\alpha_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и постоянная  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \mathbb{R}^l$ , такие, что

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^l \gamma_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \Big|_{\lambda=0}$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю.

**Определение.** Деформация  $F$  ростка отображения  $f$  называется *инфинитезимально  $V$ -версальной*, если для любого гладкого отображения  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  существуют гладкие функции

$$\alpha_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

гладкие отображения

$$\beta_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, n,$$

и постоянная  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \mathbb{R}^l$  такие, что

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^n \beta_j(x) f_j(x) + \sum_{k=1}^l \gamma_k \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda=0}$$

для всех  $x$ , достаточно близких к нулю.

**Теорема версальности.** Деформация ростка отображения является  $RL$ -версальной ( $R$ - или  $V$ -версальной), если и только если она инфинитезимально  $RL$ -версальна ( $R$ - или  $V$ -версальна соответственно).

Наиболее простое доказательство этой теоремы предложил Ж. Мартине. Оно изложено в книге [8].

**Пример 13.2.** Рассмотрим поверхность  $y_1 = x_1^3 + x_2^2 x_1$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $x_1, y_1, x_2$  (см. с. 47). Проектирование этой поверхности на координатную плоскость  $(y_1, x_2)$  параллельно оси  $x_1$  определяет гладкое отображение

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^2 x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оно имеет вырожденную особенность в нуле (это следует из теоремы Уитни о складках и сборках, с. 44).

Мы докажем, что деформация

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^2 x_1 + \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ростка  $f$  в нуле с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}$  является  $RL$ -версальной. В частности, коразмерность вырождения указанной особенности равна 1.

Сначала убедимся, что деформация  $F$  является инфинитезимально  $RL$ -версальной. Это значит, что любая упорядоченная пара гладких функций от  $x$  может быть представлена в виде суммы линейной комбинации двух пар

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами, являющимися гладкими функциями от  $x$ , пары

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

умноженной на константу, и пары функций от  $y = y(x)$ .

Действительно, локальная алгебра ростка  $f$  в нуле трёхмерна, а функции  $1, x_1$  и  $x_1^2$  составляют мономиальную систему её образующих. Отсюда и из подготовительной теоремы Вейерштрасса — Мальгранжа (с. 59) следует, что любая гладкая функция  $g$  от  $x$  представляется в виде

$$g(x) \equiv a_2(y)x_1^2 + a_1(y)x_1 + a_0(y),$$

где  $a_i$  — гладкие функции от  $y$ . По лемме Адамара (с. 41)

$$a_1(y) \equiv a_{1,1}(y)y_1 + a_{1,2}(y)y_2 + c_1,$$

где  $a_{1,i}(y)$  — гладкие функции от  $y$ , а  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Поэтому любая упорядоченная пара гладких функций  $g_1, g_2$  от  $x$  представляется в виде

$$\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(y) \\ b_2(y) \end{pmatrix} x_1^2 + \begin{pmatrix} a_{1,1}(y) \\ b_{1,1}(y) \end{pmatrix} x_1 y_1 + \begin{pmatrix} a_{1,2}(y) \\ b_{1,2}(y) \end{pmatrix} x_1 y_2 + \\ + \begin{pmatrix} a_0(y) \\ b_0(y) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

где  $a_i, b_i, a_{1,i}, b_{1,i}$  — гладкие функции от  $y$ , а  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Теперь искомое разложение получается при помощи формул:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{x_1^2}{3} \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2y_2^2}{3} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} &= x_1^2 \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2x_1 y_2}{3} \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2y_2^2}{3} \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2y_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, деформация  $F$  ростка  $f$  в нуле является  $RL$ -версальной по теореме версальности.

Проверка инфинитезимальной  $V$ -версальности представляет собой более простую задачу. Часто оказывается достаточно лишь леммы Адамара.

**Пример 13.3.** Рассмотрим ростки в нуле гладких отображений

$$\phi_{\pm}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \pm x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Мы докажем, что их деформации

$$F_{\pm}(x, \lambda) = \phi_{\pm}(x) + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

с параметром  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$  являются  $V$ -версальными.

Сначала убедимся, что деформации  $F_{\pm}$  являются инфинитезимально  $V$ -версальными. Это значит, что любая упорядоченная пара гладких функций от  $x$  является суммой линейной комбинации шести пар

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \pm x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \pm x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами, являющимися гладкими функциями от  $x$ , и линейной комбинации четырёх пар

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

с вещественными коэффициентами.

Действительно, по лемме Адамара (с. 41) любая упорядоченная пара гладких функций от  $x$  представляется в виде

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 \\ b_{1,1}x_1^2 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

где  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , а  $a_{i,j}, b_{i,j}$  — гладкие функции от  $x$ . Поэтому искомое разложение получается при помощи формул:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{x_1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \pm \frac{x_2}{2} \begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mp 2 \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} &= x_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mp 2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь  $V$ -версальность деформаций  $F_{\pm}$  следует из теоремы версальности.

**Определение.** Версальная деформация, база которой имеет минимально возможную размерность, называется *миниверсальной*.

**Пример 13.4.** Если росток отображения устойчив, то в качестве его  $RL$ -миниверсальной деформации можно взять 0-параметрическую деформацию, состоящую из одного этого ростка. Деформации, указанные в примерах 13.2 и 13.3, миниверсальны.

Мы изучим подробно случай  $R$ -миниверсальных деформаций ростков гладких функций. Эти деформации используются при решении многих важных задач теории катастроф.

Рассмотрим гладкую функцию

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x),$$

с критической точкой в нуле. Локальная алгебра ростка в нуле градиентного отображения

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right),$$

является факторалгеброй

$$Q_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \mathbb{R}[[x]] / \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

алгебры  $\mathbb{R}[[x]]$  формальных степенных рядов от переменных  $x_1, \dots, x_m$  с вещественными коэффициентами по идеалу  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ , порождённому рядами Тейлора частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

в нуле (см. с. 58). Идеал  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  называется *градиентным идеалом* ростка  $f$  в нуле.

**Определение.** Критическая точка нуль функции  $f$  называется *конечнократной*, если локальная алгебра  $Q_{\frac{\partial f}{\partial x}}$  ростка в нуле градиентного отображения  $\frac{\partial f}{\partial x}$  является конечномерным вещественным векторным пространством. Размерность этого пространства, т. е. кратность ростка  $\frac{\partial f}{\partial x}$  в нуле, называется *кратностью* критической точки ростка  $f$  в нуле.

Кратность критической точки ростка гладкой функции не зависит от выбора гладких координат в её окрестности.

**Предложение 13.5 [8].** Пусть гладкая функция  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в нуле критическую точку конечной кратности  $\mu$ . Предположим, что набор гладких функций  $e_1(x), \dots, e_\mu(x)$  от  $x \in \mathbb{R}^m$  является системой образующих локальной алгебры  $Q_{\frac{\partial f}{\partial x}}$  ростка в нуле градиентного отображения  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Тогда росток функции

$$F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1(x) + \dots + \lambda_\mu e_\mu(x)$$

в нуле представляет собой  $R$ -миниверсальную деформацию ростка  $f$  в нуле с параметром  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) \in \mathbb{R}^\mu$ .

Это утверждение является следствием определения инфинитезимальной  $R$ -версальности, определения локальной алгебры градиентного отображения и теоремы версальности.

**Пример 13.6.** Рассмотрим ростки в нуле функций

$$\begin{aligned} A_\mu^\pm &: \pm x^{\mu+1}, \quad \mu \geq 1; \\ D_\mu^\pm &: x^2 y \pm y^{\mu-1}, \quad \mu \geq 4; \\ E_6^\pm &: x^3 \pm y^4; \quad E_7: x^3 + xy^3; \quad E_8: x^3 + y^5. \end{aligned}$$

В качестве их  $R$ -миниверсальных деформаций можно взять ростки в нуле следующих функций:

$$\begin{aligned} &\pm x^{\mu+1} + \lambda_\mu x^{\mu-1} + \dots + \lambda_2 x + \lambda_1; \\ &x^2 y \pm y^{\mu-1} + \lambda_\mu y^{\mu-2} + \dots + \lambda_3 y + \lambda_2 x + \lambda_1; \\ &x^3 \pm y^4 + \lambda_6 xy^2 + \lambda_5 xy + \lambda_4 y^2 + \lambda_3 y + \lambda_2 x + \lambda_1; \\ &x^3 + xy^3 + \lambda_7 x^2 y + \lambda_6 x^2 + \lambda_5 xy + \lambda_4 y^2 + \lambda_3 y + \lambda_2 x + \lambda_1; \\ &x^3 + y^5 + \lambda_8 xy^3 + \lambda_7 xy^2 + \lambda_6 y^3 + \lambda_5 xy + \lambda_4 y^2 + \lambda_3 y + \lambda_2 x + \lambda_1. \end{aligned}$$

Кратность критической точки нуль каждого из ростков  $A_\mu, D_\mu, E_\mu$  (при любом выборе знаков  $\pm$ ) равна  $\mu$ .

Возьмем, например, росток в нуле функции  $D_\mu^+ : f(x, y) = x^2 y + y^{\mu-1}$ , где  $\mu \geq 4$ . Градиентный идеал  $I = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  этого ростка порождён многочленами  $2xy$  и  $x^2 + (\mu - 1)y^{\mu-2}$ . Чтобы описать идеал  $I$ , мы отождествим каждый моном  $x^p y^q \in I$  с точкой  $(p, q)$  целочисленной решетки на плоскости (удобно направить ось  $p$  вверх, а ось  $q$  вправо).

Каждая точка  $(p, q)$  является вершиной угла, состоящего из точек, координаты которых не меньше соответствующих координат вершины. Если вершина лежит в  $I$ , то и все целочисленные точки этого угла также лежат в  $I$ . В частности, все целочисленные точки угла  $p \geq 1, q \geq 1$  лежат в идеале  $I$ , поскольку в нем лежит моном  $xy$  (см. рис. 9а).

Сопоставим биному  $x^2 + (\mu - 1)y^{\mu-2}$  отрезок с концами в точках  $(2, 0)$  и  $(0, \mu - 2)$ . Если сдвинуть этот отрезок на 1 вверх (это соответствует умножению бинорма на  $x$ ), то правый конец отрезка попадет в  $I$ , а значит, туда попадет и левый его конец. Следовательно, моном  $x^3$  и все целочисленные точки угла  $p \geq 3, q \geq 0$  лежат в идеале  $I$  (см. рис. 9б).

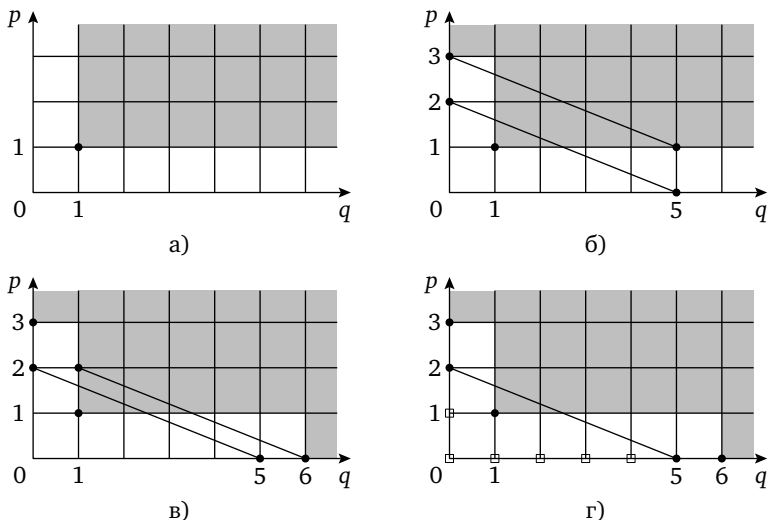


Рис. 9. Нахождение градиентного идеала  
ростка  $D_\mu^+ : x^2y + y^{\mu-1}$  в 0 при  $\mu = 7$

Аналогично если сдвинуть указанный отрезок на 1 вправо (это соответствует умножению бинома на  $y$ ), то его левый конец попадет в  $I$ , а значит, туда попадет и правый его конец. Следовательно, моном  $y^{\mu-1}$  и все целочисленные точки угла  $p \geq 0, q \geq \mu - 1$  лежат в идеале  $I$  (см. рис. 9в).

Таким образом, идеал  $I$  состоит из мономов закрашенной области на рис. 9г и линейной комбинации мономов  $x^2$  и  $y^{\mu-2}$  с ненулевыми коэффициентами (эти мономы соединены отрезком). В качестве базиса факторалгебры  $\mathbb{R}[[x, y]]/I$  можно взять набор, состоящий из мономов

$$1, x, y, y^2, \dots, y^{\mu-3}$$

(они отмечены квадратиками) и одного из мономов  $x^2, y^{\mu-2}$  (обычно выбирают  $y^{\mu-2}$ ). В частности, кратность критической точки ростка  $f$  в нуле равна  $\mu$ .

**Замечание.** Другие примеры версальных деформаций ростков гладких отображений можно найти, например, в книге [55].



**Упражнения**

1. Докажите  $R$ -миниверсальность остальных деформаций ростков в нуле функций из списка  $A_\mu^\pm, D_\mu^\pm, E_6^\pm, E_7, E_8$ , выписанных в примере 13.6.
2. Напишите  $V$ -миниверсальные деформации ростков в нуле функций из списка  $A_\mu^\pm, D_\mu^\pm, E_6^\pm, E_7, E_8$ .

## § 14. Устойчивые особенности коранга 1

Важнейшей задачей теории особенностей является классификация ростков гладких отображений относительно лево-правой эквивалентности. Простейшими особенностями являются классы эквивалентности устойчивых ростков коранга 1. Именно с их изучения в малых размерностях Уитни начал свои исследования. Б. Морен [29] продолжил работу Уитни и расклассифицировал устойчивые особенности коранга 1 во всех остальных размерностях.

Рассмотрим росток в нуле гладкого отображения  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такого, что  $f(0) = 0$ . Пусть ранг матрицы Якоби отображения  $f$  в нуле равен  $r$ .

**Предложение 14.1.** *Росток  $f$  в нуле  $RL$ -эквивалентен ростку в нуле гладкого отображения*

$$\begin{cases} y = \Phi(x, \lambda), & (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{m-r} \times \mathbb{R}^r; \\ z = \lambda, & (y, z) \in \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r, \end{cases}$$

где  $\Phi(0, 0) = 0$ ,  $d\Phi|_{(0,0)} = 0$ .

Это утверждение следует из теоремы о неявной функции. Числа  $n - r$  и  $m - r$  являются корангами в образе и прообразе соответственно ростка  $f$  в нуле (см. пример 9.1, с. 68). Росток в нуле отображения

$$\phi: \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}, \quad x \mapsto \phi(x) = \Phi(x, 0),$$

называется *генотипом* ростка  $f$ .

Пусть  $t \in \mathbb{R}^{n-r}$ . Тогда деформация

$$F(x, \lambda, t) = \Phi(x, \lambda) + t$$

генотипа  $\phi$  с параметрами  $\lambda, t$  обладает следующими свойствами (см. [8]).

**Предложение 14.2.** *Росток  $f$  устойчив, если и только если деформация  $F(x, \lambda, t)$  его генотипа  $V$ -версальна.*

**Предложение 14.3.** *Если деформация  $F(x, \lambda, t)$  генотипа  $\phi$  является  $V$ -версальной, то росток  $f$  лево-право-эквивалентен*

ростку в нуле отображения

$$\begin{cases} y = \phi(x) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=0}, & (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{m-r} \times \mathbb{R}^r; \\ z = \lambda, & (y, z) \in \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r, \end{cases}$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ .

Отсюда вытекают классификационные результаты Морена.

**Теорема Морена 1.** Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение, где  $m = n$ . Предположим, что росток  $f$  в точке  $x \in M$  устойчив, а его коранги в образе и прообразе равны 1. Тогда этот росток  $RL$ -эквивалентен ростку в нуле отображения  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного формулами

$$y_1 = x_1^{\mu+1} + x_2 x_1^{\mu-1} + x_3 x_1^{\mu-2} + \dots + x_\mu x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n, \quad (35)$$

где  $\mu$  — целое число,  $1 \leq \mu \leq n$ .

При  $n = 2$  получается складка, если  $\mu = 1$ , и сборка, если  $\mu = 2$ . Отображение (35) иногда называют обобщенной сборкой Уитни.

**Пример 14.4.** Рассмотрим отображение  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное формулами:

$$y_1 = x_1^4 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

Оно имеет в нуле особенность класса Тома — Бордмана  $\Sigma^{1,1,1,0}$ . Множество  $\Sigma$  критических значений отображения  $f$  состоит из точек  $(y_1, y_2, y_3)$ , для которых многочлен  $x^4 + y_2 x^2 + y_3 x - y_1$  от  $x$  имеет кратный вещественный корень. Это множество является особой поверхностью в  $\mathbb{R}^3$ . Она изображена на рис. 10 и называется ласточкиным хвостом.

Кроме особой точки в нуле, поверхность  $\Sigma$  имеет линию самопересечения

$$y_1 = -\frac{y_2^2}{4}, \quad y_3 = 0, \quad y_2 < 0$$

и два ребра возврата

$$y_1 = \frac{y_2^2}{12}, \quad 8y_2^3 + 27y_3^2 = 0, \quad y_2 < 0.$$

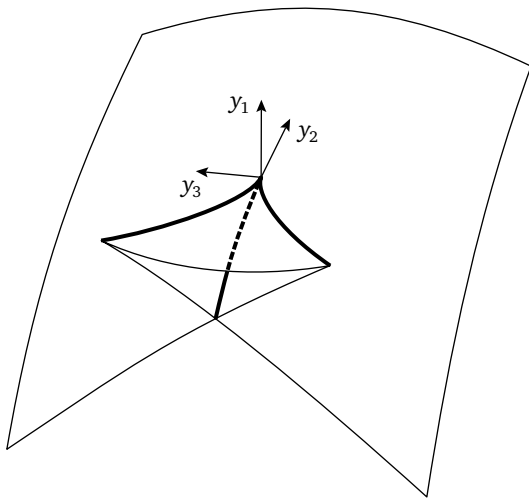


Рис. 10. Ласточкин хвост

Каждая точка линии самопересечения является точкой трансверсального пересечения двух гладких ветвей поверхности  $\Sigma$ . В окрестности каждой точки ребра возврата поверхность  $\Sigma$  задаётся уравнением  $y^2 = x^3$  в подходящих гладких координатах  $x, y, z$  в  $\mathbb{R}^3$ , т. е. диффеоморфна прямому произведению полукубической параболы на прямую.

Точкам ребер возврата соответствуют многочлены  $x^4 + y_2x^2 + y_3x - y_1$ , имеющие корень кратности 3. Точкам линии самопересечения — многочлены, имеющие два разных кратных вещественных корня. Начало координат является общей точкой замыканий линии самопересечения и ребер возврата. Эти замыкания имеют в нуле общую касательную прямую  $y_1 = y_3 = 0$ . Замыкание линии самопересечения имеет гладкое продолжение в нуле. Плоскость  $y_1 = 0$  является касательной к поверхности  $\Sigma$  в начале координат.

**Теорема Морена 2.** Пусть  $f : M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение, где  $m < n$ . Предположим, что росток  $f$  в точке  $x \in M$  устойчив, а его коранг в прообразе равен 1. Тогда этот росток  $RL$ -эквивалентен ростку в нуле отображения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного

формулами

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{\mu+1} + x_{1,2} x_1^{\mu-1} + x_{1,3} x_1^{\mu-2} + \dots + x_{1,\mu} x_1; \\ y_i = x_{i,1} x_1^\mu + x_{i,2} x_1^{\mu-1} + x_{i,3} x_1^{\mu-2} + \dots + x_{i,\mu} x_1, \\ y_{i,j} = x_{i,j}, \quad i = 2, \dots, n - t + 1, \quad j = 1, \dots, \mu; \\ y_k = x_k, \quad k = \mu(n - t + 1) + 1, \dots, t, \end{cases} \quad (36)$$

где  $\mu$  — целое число,  $1 \leq \mu \leq t/(n - t + 1)$ .

При  $t = 2$ ,  $n = 3$  и  $\mu = 1$  получается обычный зонтик Уитни. Поэтому отображение (36) иногда называют *обобщенным зонтиком Уитни*.

**Замечание.** Отображения (35) и (36) имеют в нуле особенности, класс Тома — Бордмана которых имеет вид  $\Sigma^{I,0}$ , где  $I$  — набор, состоящий из  $\mu$  единиц.

**Теорема Морена 3.** Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение, где  $t > n$ . Предположим, что росток  $f$  в критической точке  $x \in M$  устойчив, а его коранг в образе равен 1. Предположим также, что коранг в прообразе второго дифференциала генотипа этого ростка не превосходит 1. Тогда росток  $f$  в точке  $x$  лево-право-эквивалентен ростку в нуле отображения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного формулами

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{\mu+1} + x_{1,2} x_1^{\mu-1} + x_{1,3} x_1^{\mu-2} + \dots \\ \quad \quad \quad \dots + x_{1,\mu} x_1 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_{m-n+1}^2, \\ y_2 = x_{1,2}, \dots, y_n = x_{1,n}, \end{cases} \quad (37)$$

где  $\mu$  — целое число,  $1 \leq \mu \leq n$ .

**Замечание.** Отображение (37) имеет в нуле особенность, класс Тома — Бордмана которой имеет вид  $\Sigma^{m-n+1,I,0}$ , где  $I$  — набор, состоящий из  $\mu - 1$  единицы.

Отметим, что предложение 14.2 позволяет значительно упростить доказательство устойчивости ростка гладкого отображения.

**Пример 14.5.** Рассмотрим ростки в нуле отображений  $f_\pm$  из примера 10.3 (с. 74). Их генотипы определяются формулами

$$\phi_\pm(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \pm x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Деформации

$$\phi_{\pm}(x_1, x_2) + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

генотипов  $\phi_{\pm}$  с параметрами  $x_3, x_4, t_1, t_2$  являются  $V$ -версальными (см. пример 13.3, с. 99). Поэтому ростки  $f_{\pm}$  в нуле устойчивы в силу предложения 14.2.

**Замечание.** Весьма полезно сравнить сложность проверки инфинитезимальной  $V$ -версальности деформаций  $F_{\pm}$  в примере 13.3 (с. 99) со сложностью вычисления матриц  $A_1, A_2, B_1, B_2$  из примера 11.6 (с. 82), необходимого для проверки инфинитезимальной устойчивости ростков  $f_{\pm}$ .

### Упражнения

1. Сколько вещественных корней имеют многочлены  $x_1^4 + y_2 x_1^2 + y_3 x_1 - y_1$ , соответствующие разным точкам дополнения к ласточкину хвосту на рис. 10?

2. Выпишите список нормальных форм всех особенностей гладких отображений  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  общего положения с точностью до лево-правой эквивалентности.

3. Опишите подмножество в  $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d)\}$ , образованное многочленами  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  от  $x$ , имеющими кратный вещественный корень.

## § 15. ADE-классификация Арнольда

Наибольшего продвижения в вопросе классификации особенностей гладких отображений удалось достичь в случае функций нескольких переменных. А именно, В. И. Арнольд расклассифицировал все критические точки, встречающиеся в общих семействах функций, зависящих не более чем от 10 параметров (см. [8]). Здесь рассказано лишь о тех из полученных им результатов, которые будут использованы далее в приложениях.

О том, что задача классификации критических точек функций не является безнадежной, стало ясно после работы Ж.-К. Тужрона.

**Теорема Тужрона.** *В окрестности критической точки, имеющей конечную кратность  $\mu$ , гладкая функция право-эквивалентна своему многочлену Тейлора степени  $\mu + 1$ .*

Наиболее простое доказательство теоремы Тужрона предложил Мазер (см. [8]). Оно основано на гомотопическом методе Тома (предложение 12.2, с. 88).

**Пример 15.1.** Росток гладкой функции одной переменной в критической точке с нулевым критическим значением и конечной кратностью  $\mu$  право-эквивалентен ростку в нуле одной из функций  $\pm x^{\mu+1}$ .

Из теоремы Тужрона и леммы Морса с параметрами (с. 88) следует, что  $R$ -классификация критических точек конечной кратности  $\mu$  у функций разного числа переменных сводится, с точностью до аддитивной постоянной, к классификации ростков в нуле многочленов степени  $\mu + 1$ , состоящих из мономов степени не ниже третьей.

**Определение.** Ростки гладких функций называются  $R^+$ -эквивалентными, если они становятся  $R$ -эквивалентными после сложения с константой. Ростки гладких функций  $f_1: \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_2: \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}$  называются стабильно  $R$ -эквивалентными, если они становятся  $R$ -эквивалентными после прямого сложения с ростками в нуле невырожденных квадратичных форм от новых переменных (своих для каждого из ростков  $f_1, f_2$ ). Аналогично определяется понятие стабильной  $R^+$ -эквивалентности.

Стабильно  $R$ -эквивалентные ростки функций одинакового числа переменных могут не быть  $R$ -эквивалентными. Например, ростки в нуле функций  $-x^2$  и  $x^2$  не являются  $R$ -эквивалентными. Однако они стабильно  $R$ -эквивалентны, поскольку  $R$ -эквивалентны ростки в нуле функций  $-x^2 + y^2$  и  $x^2 - y^2$ . Стабильно  $R$ -эквивалентные ростки функций одинакового числа переменных в конечнократных критических точках с нулевым вторым дифференциалом  $R$ -эквивалентны (см. [16]).

**Пример 15.2.** Пусть гладкая функция нескольких переменных имеет критическую точку конечной кратности  $\mu$ . Предположим, что её второй дифференциал в этой точке является квадратичной формой коранга 1. Тогда росток функции в такой критической точке стабильно  $R^+$ -эквивалентен ростку в нуле одной из функций  $\pm x^{\mu+1}$ .

Рассмотрим гладкую функцию

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x).$$

Предположим, что она имеет критическую точку  $x_0$  с нулевым критическим значением и конечной кратностью  $\mu$ .

**Определение.** Модальностью  $k$  ростка  $f$  в точке  $x_0$  называется наименьшее число, такое, что некоторая достаточно малая окрестность его струи  $j^{\mu+1}f(x_0)$  в пространстве  $(\mu+1)$ -струй в  $x_0$  всех гладких функций  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих критическую точку  $x_0$  с нулевым критическим значением, покрывается конечным числом  $k$ -параметрических семейств классов  $R$ -эквивалентности.

Ростки с модальностью  $k=0$  и  $k=1$  называются *простыми* и *унимодальными*, соответственно. Число

$$c = \mu - k - 1$$

называется *коразмерностью* особенности в пространстве ростков функций в критической точке с нулевым критическим значением. Особенности коразмерности  $c$  появляются неустранимым образом лишь в семействах функций, зависящих не менее чем от  $c$  параметров.



**Теорема Арнольда о критических точках** [3], [4]. *Простые ростки гладких функций в конечнократных критических точках с нулевым критическим значением исчерпываются, с точностью до стабильной R-эквивалентности, ростками в нуле функций следующего списка:*

$$A_{\mu}^{\pm}: \pm x^{\mu+1}, \mu \geq 1; \quad D_{\mu}^{\pm}: x^2 y \pm y^{\mu-1}, \mu \geq 4;$$

$$E_6^{\pm}: x^3 \pm y^4; \quad E_7: x^3 + xy^3; \quad E_8: x^3 + y^5.$$

**Замечание.** При чётном  $\mu$  росток  $A_{\mu}^{-}$  право-эквивалентен ростку  $A_{\mu}^{+}$ . Кроме того, ростки  $A_1^{-}$  и  $A_1^{+}$  стабильно R-эквивалентны. В остальных случаях никакие два ростка из указанного выше списка не являются стабильно R-эквивалентными.

В. И. Арнольд обнаружил глубокую связь ростков  $A_{\mu}, D_{\mu}, E_{\mu}$  с одноименными простыми группами Ли (см. [3]). Он также доказал, что множество непростых ростков имеет коразмерность 6 в пространстве ростков функций  $n \geq 3$  переменных с нулевым критическим значением, т. е. всякое  $l$ -параметрическое семейство функций  $n$  переменных, где  $l < 6$ , можно сколь угодно малой деформацией привести в общее положение так, что ростки функций семейства во всех критических точках будут стабильно  $R^{+}$ -эквивалентны росткам  $A_{\mu}, D_{\mu}, E_{\mu}$  из списка Арнольда при  $\mu \leq l + 1$ . Множество непростых ростков в пространстве ростков функций двух переменных с нулевым критическим значением имеет коразмерность 7.

**Пример 15.3.** В 6-параметрических семействах функций трёх переменных неустранимым образом встречаются унимодальные ростки,  $R^{+}$ -эквивалентные ростку в нуле функции

$$x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad \text{где } a \neq -3. \quad (38)$$

В 7-параметрических семействах функций двух переменных неустранимым образом встречаются унимодальные ростки,  $R^{+}$ -эквивалентные росткам в нуле функций

$$\pm (x^4 + ax^2y^2 \pm y^4), \quad (39)$$

где  $a^2 \neq 4$ , если в скобках стоит плюс.

Параметр  $a$  является модулем (непрерывным инвариантом) каждой из указанных особенностей, т. е. существуют такие интервалы на числовой прямой  $\mathbb{R}$ , что ростки, отвечающие разным значениям  $a$  из одного и того же интервала, не являются стабильно  $R^+$ -эквивалентными.

**Замечание.** Арнольд расклассифицировал все критические точки, у которых либо модальность  $k \leq 2$ , либо кратность  $\mu \leq 16$ .

Значение теоремы Арнольда о критических точках гладких функций для теории катастроф трудно переоценить. Методы, которые применял Арнольд в процессе доказательства своих результатов, лежат в основе всех исследований особенностей реальных объектов. Основопологающей здесь является теорема о нормальной форме полуквазиоднородной функции.

Пусть  $f$  — вещественный многочлен от  $m$  переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Зафиксируем произвольные положительные рациональные числа  $w_1, \dots, w_m$ .

**Определение.** Квазистепенью монома  $x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}$  называется число  $p_1 w_1 + \dots + p_m w_m$ . Многочлен  $f$  называется квазиоднородным многочленом квазистепени  $d$  с весами  $w_1, \dots, w_m$ , если он состоит из мономов квазистепени  $d$ .

**Теорема Арнольда о нормальной форме полуквазиоднородной функции.** Рассмотрим гладкую функцию

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto \tilde{f}(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где  $f$  — квазиоднородный многочлен квазистепени  $d$  с весами  $w_1, \dots, w_m$ , а ряд Тейлора функции  $\varphi$  в нуле состоит из мономов, квазистепень которых больше  $d$ . Предположим, что многочлен  $f$  имеет конечнократную критическую точку в нуле, и зафиксируем мономиальную систему образующих локальной алгебры  $Q_{\frac{\partial f}{\partial x}}$  градиентного отображения  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Пусть  $e_1(x), \dots, e_l(x)$  — образующие, квазистепень которых больше  $d$ . Тогда росток в нуле функции  $\tilde{f}$  право-эквивалентен росту в нуле функции

$$f(x) + c_1 e_1(x) + \dots + c_l e_l(x),$$

где  $c_1, \dots, c_l$  — произвольные постоянные.

Доказательство см. в [8].

**Замечание.** Если функция  $\tilde{f}$  удовлетворяет всем перечисленным в теореме условиям, то она называется *полуквазиоднородной*.

**Пример 15.4.** Рассмотрим многочлен

$$f(x, y) = x^2y + y^{\mu-1},$$

где  $\mu \geq 4$ . Он квазиоднородный. Его квазистепень с весами

$$w_x = \frac{\mu-2}{2}, \quad w_y = 1$$

равна  $d = \mu - 1$ . Многочлен  $f$  имеет конечнократную критическую точку в нуле. Её кратность равна  $\mu$ . Мономы

$$1, x, y, y^2, \dots, y^{\mu-2}$$

составляют мономиальную систему образующих локальной алгебры  $Q_{\frac{\partial f}{\partial x}}$  градиентного отображения  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (см. пример 13.6, с. 102). Квазистепень каждой образующей меньше  $d$ . Следовательно, добавление к  $f$  любой гладкой функции  $\varphi(x, y)$ , у которой ряд Тейлора в нуле состоит из мономов квазистепени больше  $d$ , не меняет тип особенности в нуле, т. е. ростки в нуле функций  $f(x, y) + \varphi(x, y)$  и  $f(x, y)$  право-эквивалентны.

Процесс классификации критических точек функций основан на методе поворачивания линейки Ньютона. Мы продемонстрируем его в случае функций двух переменных.

Пусть гладкая функция

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

имеет конечнократную критическую точку в нуле с нулевым критическим значением. Предположим, что  $d^2 f|_0 = 0$ . Тогда 3-струя функции  $f$  в нуле является кубической формой.

Пусть форма  $j^3 f(0)$  невырождена, т. е. либо она раскладывается в произведение трёх линейных форм, либо равна произведению линейной формы на положительно определенную квадратичную форму. Выберем линейные координаты  $x, y$  на плоскости

$\mathbb{R}^2$  так, что  $j^3 f(0) = x^2 y \pm y^3$ . Тогда

$$f(x, y) = x^2 y \pm y^3 + \varphi(x, y),$$

где  $\varphi(x, y)$  — гладкая функция, у которой степень каждого ненулевого члена ряда Тейлора в нуле больше трёх.

К функции  $f$  указанного вида применимо рассуждение из примера 15.4 (в данном случае квазистепень равна степени). Поэтому росток  $f$  в нуле имеет особенность типа  $D_4^\pm$ .

Если форма  $j^3 f(0)$  вырожденная, то в простейшем случае она является произведением одной линейной формы на квадрат другой. Поэтому координаты  $x, y$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  можно выбрать так, что  $j^3 f(0) = x^2 y$ .

Отождествим мономы  $x^p y^q$ , из которых состоят ряды Тейлора в нуле гладких функций от  $x, y$ , с точками  $(p, q)$  целочисленной решетки на плоскости. Точки, соответствующие мономам, которые входят в ряд Тейлора функции  $f$  в нуле с ненулевыми коэффициентами, назовём отмеченными. Тогда хотя бы через один из отмеченных мономов можно провести прямую, от которой все отмеченные мономы лежат с одной стороны (т. е. в одной из замкнутых полуплоскостей, на которые прямая делит плоскость). Такая прямая называется *линейкой Ньютона*.

Проведём линейку Ньютона  $p + q = 3$  через моном  $x^2 y$  и будем поворачивать её против часовой стрелки вокруг этого монома до тех пор, пока она не пройдёт через другой отмеченный моном. Возможны два случая: либо линейка пройдёт через моном вида  $y^{2k}$  (рис. 11а), либо — сразу через два монома  $xy^{k+1}$  и  $y^{2k+1}$  (рис. 11б).

В первом случае применимо рассуждение из примера 15.4 и росток  $f$  в нуле имеет особенность одного из типов  $D_{2k-1}^\pm$ . Во втором случае

$$f(x, y) = x^2 y + axy^{k+1} + by^{2k+1} + \varphi(x, y),$$

где  $a, b$  — константы, одновременно не равные нулю, выражение

$$x^2 y + axy^{k+1} + by^{2k+1}$$

представляет собой квазиоднородный многочлен квазистепени  $d = 2k + 1$  с весами  $w_x = k, w_y = 1$ , а  $\varphi(x, y)$  — гладкая функция,

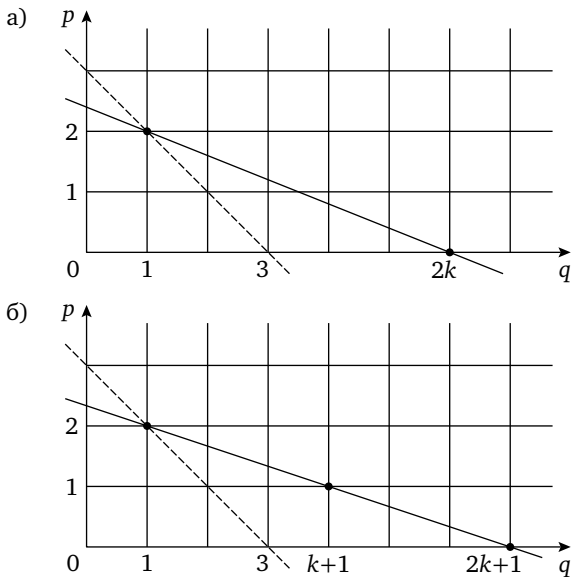


Рис. 11. Поворачивание линейки Ньютона

у которой ряд Тейлора в нуле состоит из мономов квазистепени больше  $d$ . Замена переменной

$$x \mapsto x - \frac{a}{2}y^k$$

приводит функцию  $f$  к виду

$$f(x, y) = x^2y + cy^{2k+1} + \tilde{\varphi}(x, y),$$

где  $c$  — константа, а  $\tilde{\varphi}(x, y)$  — гладкая функция, у которой ряд Тейлора в нуле также состоит из мономов квазистепени больше  $d$ .

Если  $c \neq 0$ , то применимо рассуждение из примера 15.4 и росток  $f$  в нуле имеет особенность одного из типов  $D_{2k}^\pm$ . Если же  $c = 0$ , то необходимо повернуть линейку Ньютона  $kp + q = d$  против часовой стрелки вокруг монома  $x^2y$  до тех пор, пока она не пройдёт через один из отмеченных мономов вида  $y^i$ ,  $i > 2k+1$  или  $xy^j$ ,  $j > k+1$ . Этот процесс поворачивания линейки обязательно закончится через конечное число шагов.

Действительно, предположим, что ряд Тейлора функции  $f$  в нуле имеет вид  $x^2(y + g(x, y))$ , где степень всех членов ряда  $g$  не меньше 2. Тогда градиентный идеал

$$I = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left( 2x(y + g) + x^2 \frac{\partial g}{\partial x}, x^2 \left( 1 + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right)$$

порождён мономами  $x^2, xy$ . Мономы  $1, x, y, y^2, \dots$  составляют мономиальную систему образующих локальной алгебры  $\mathbb{R}[[x, y]]/I$ . Следовательно, она бесконечномерна, что противоречит конечной кратности критической точки функции  $f$  в нуле.

Случай, когда  $j^3 f(0)$  является кубом линейной формы, разбирается аналогично. Здесь можно считать, что  $j^3 f(0) = x^3$ . Первые три поворачивания линейки Ньютона  $p + q = 3$  относительно монома  $x^3$  приведут к особенностям типов  $E_6^\pm, E_7, E_8$  соответственно. А вот в результате четвертого поворота, в простейшем случае, получится неустранимая унимодальная особенность.

Среди конечнократных ростков функций двух переменных с нулевой 3-струей простых нет: росток в нуле функции  $f(x, y)$ , такой, что  $j^3 f(0) = 0$ , а  $j^4 f(0)$  является формой 4-й степени общего положения, право-эквивалентен ростку в нуле одной из функций (39).

**Замечание.** Линейка Ньютона в случае функций трёх переменных является плоскостью в трёхмерном пространстве. Поэтому задача классификации ростков функций в критических точках становится более сложной. Однако и в случае двух переменных эта задача усложняется с ростом порядка ненулевой струи исследуемого ростка. Приходится использовать другие весьма нетривиальные методы (например, спектральные последовательности; см. [8]).

### Упражнения

1. Получите особенности типов  $E_6^\pm$ , продолжив классификацию критических точек функций двух переменных, начатую выше.
2. Получите весь список простых критических точек функций двух переменных.

## § 16. Эволюты, световые каустики и эквидистанты

Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$  гладкое семейство гладких кривых  $F(x, y, c) = 0$ , зависящих от параметра  $c \in \mathbb{R}$ . Кривую, заданную гладким отображением

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

будем называть *огibaющей* семейства  $F(x, y, c) = 0$ , если существует такое гладкое отображение

$$t \mapsto c = c(t),$$

что для всюду плотного множества значений  $t$  выполнены следующие условия:

$$c'(t) \neq 0, \quad \gamma'(t) \neq 0$$

и  $\gamma$  касается кривой  $F(x, y, c(t)) = 0$  в точке  $\gamma(t)$ .

Из условия касания гладких кривых (см. с. 64) следует перпендикулярность векторов

$$(x'(t), y'(t)) \quad \text{и} \quad (F'_x, F'_y)|_{(x(t), y(t), c(t))}.$$

Поэтому огibaющая удовлетворяет системе уравнений:

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0.$$

**Пример 16.1.** Рассмотрим уравнение Клеро

$$y = xy' + f(y'),$$

где  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = xc + f(c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Оно задаёт однопараметрическое семейство интегральных прямых на расширенной фазовой плоскости с координатами  $x, y$ .

У уравнения Клеро есть также особая интегральная кривая. Она задаётся параметрически формулами:

$$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = f(c) - cf'(c). \end{cases}$$

Эта кривая является огibaющей семейства прямых  $y = xc + f(c)$ .

Пусть, например,  $f(y') = (y')^3$ . Тогда особая интегральная кривая задаётся уравнением  $4x^3 + 27y^2 = 0$ . Эта кривая имеет особенность в начале координат: полукубическую точку возврата.

**Пример 16.2.** Рассмотрим произвольную гладкую кривую на плоскости  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ . Множество центров её кривизны называется *эволютой*. Эволюта кривой

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

задаётся параметрически формулами:

$$\begin{cases} x = x(t) - y'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \\ y = y(t) + x'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \end{cases}$$

Эволюта является огибающей семейства нормалей к кривой. Например, эволютой эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  является астроида

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Она имеет четыре полукубические точки возврата (см. рис. 12).

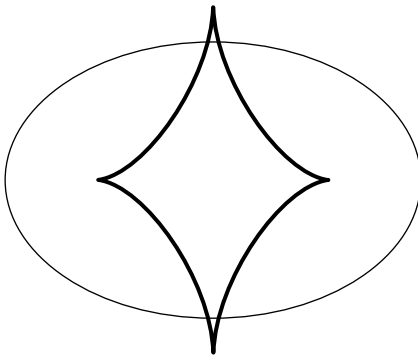


Рис. 12. Эволюта эллипса

Огибающие встречаются и в многомерных пространствах. Мы приведём лишь несколько простых примеров.



**Пример 16.3.** Рассмотрим гладкое семейство гладких гиперповерхностей  $F(q, c) = 0$  в пространстве  $\mathbb{R}^n = \{q\}$ , зависящих от параметра  $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Гиперповерхность, заданная гладким отображением

$$\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto q = \Gamma(x),$$

называется *огibaющей* семейства, если существует такое гладкое отображение  $x \mapsto c(x)$ , что для всюду плотного множества значений  $x$  ранг матриц Якоби  $\frac{\partial c}{\partial x}(x)$ ,  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x)$  равен  $n - 1$  и  $\Gamma$  касается гиперповерхности  $F(q, c(x)) = 0$  в точке  $\Gamma(x)$ . Аналогично случаю плоских кривых, огibaющая семейства гиперповерхностей  $F(q, c) = 0$  удовлетворяет системе уравнений

$$F(q, c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(q, c) = 0.$$

**Пример 16.4.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  гладкое семейство гладких кривых

$$\gamma_c: t \mapsto q = \gamma_c(t),$$

зависящих от параметра  $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Гиперповерхность, заданная гладким отображением

$$\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto q = \Gamma(x),$$

называется *огibaющей* семейства, если существует такое гладкое отображение  $x \mapsto c(x)$ , что для всюду плотного множества значений  $x$  ранг матриц Якоби  $\frac{\partial c}{\partial x}(x)$ ,  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x)$  равен  $n - 1$  и  $\Gamma$  касается кривой  $\gamma_{c(x)}$  в точке  $\Gamma(x)$ . Огibaющая семейства кривых  $\gamma_c(t)$  является образом при отображении

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (c, t) \mapsto q = \gamma_c(t),$$

множества точек  $(c, t)$ , в которых ранг его матрицы Якоби меньше  $n$ .

**Пример 16.5.** Рассмотрим гладкую гиперповерхность  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $N_q$  — нормаль к  $M$  в точке  $q \in M$ . Отметим на каждой нормали  $N_q$  центры главных кривизн гиперповерхности  $M$  в точке  $q$ . Множество всех полученных таким образом точек называется *фокальным множеством* или *эволютой* гиперповерхности  $M$ .

Эволюта гиперповерхности является огибающей семейства её нормалей  $N_q$ ,  $q \in M$ .

**Пример 16.6.** Огибающая системы световых лучей в геометрической оптике называется *каустикой*. Точки каустики светятся ярче остальной части освещенной поверхности. Каустику можно наблюдать, например, на дне чашки в солнечный день при подходящем её расположении относительно солнца.

А именно, свет, отражаясь от (искривлённой) боковой поверхности чашки, определяет двухпараметрическое семейство лучей. Это семейство может иметь огибающую в объемлющем пространстве. Пересечение огибающей с дном чашки и даёт на нём ярко светящуюся кривую (см. рис. 13).



Рис. 13. Каустика на дне чашки

**Пример 16.7.** Пусть  $M$  — гладкая гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что она *коориентирована*, т. е. к каждой точке  $x \in M$  приложен единичный нормальный вектор  $\nu_x$ , непрерывно зависящий от  $x$ . Тогда для любого  $t \in \mathbb{R}$  определено множество

$M_t$ , состоящее из точек вида  $q_x^t = x + t\nu_x$ ,  $x \in M$ . Это множество называется  $t$ -эквидистантой гиперповерхности  $M$ .

Эквидистанты гиперповерхности  $M$  общего положения являются огибающими. А именно,  $t$ -эквидистанта гиперповерхности  $M$  является огибающей семейства гиперплоскостей  $\pi_x^t$ ,  $x \in M$ , где  $\pi_x^t$  — гиперплоскость, проходящая через точку  $q_x^t$  и коллинеарная<sup>1</sup> касательной гиперплоскости к  $M$  в точке  $x$ .

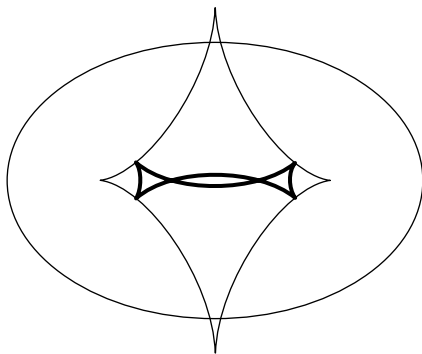


Рис. 14. Эквидистанта эллипса

Если  $t$  мало по абсолютной величине, то  $t$ -эквидистанта является гладкой гиперповерхностью. Однако с ростом  $|t|$  у неё могут появиться точки, в которых хотя бы одна из её ветвей является особой. Эти точки лежат на эволюте исходной гиперповерхности  $M$ . Более того, в момент  $t$  своего появления (или исчезновения) такая особая точка  $t$ -эквидистанты является особой точкой эволюты (см. рис. 14). Доказательство этих фактов приведено в § 19.

### Упражнения

1. Нарисуйте эволюту и семейство эквидистант параболы.
2. Коориентация гиперповерхности индуцирует естественную коориентацию её эквидистант. Как меняется коориентация  $t$ -эквидистанты эллипса при изменении параметра  $t$ ?

<sup>1</sup>Две гиперплоскости в  $\mathbb{R}^n$  мы называем *коллинеарными*, если они либо совпадают, либо не пересекаются.

## § 17. Особенности каустик

Световые каустики, эволюты гиперповерхностей и другие огибающие устроены весьма сложно. В этом параграфе изложена теория В. И. Арнольда, описывающая особенности подобных объектов. Сначала мы напомним некоторые понятия анализа на многообразиях (см. [11], [20]).

**Дифференциальные формы на многообразии.**  $k$ -Линейной кососимметрической функцией или просто  $k$ -формой в  $\mathbb{R}^m$  называется вещественная функция от  $k$  векторов, линейная по каждому аргументу и меняющая свой знак при перестановке местами любых двух из них. Дифференциальной  $k$ -формой на гладком многообразии  $M$  называется  $k$ -форма, заданная на касательном пространстве к  $M$  в каждой точке  $x \in M$  и гладко зависящая от  $x$ .

Дифференциальными 0-формами являются гладкие функции. Первый дифференциал гладкой функции является простейшим примером дифференциальной 1-формы.

**Определение.** Дифференциальная 2-форма  $\omega$  на многообразии  $M$  называется невырожденной, если для любых  $x \in M$  и  $v \in T_x M \setminus \{0\}$  существует такой вектор  $w \in T_x M$ , что  $\omega(v, w) \neq 0$ .

Невырожденные дифференциальные 2-формы могут быть только на многообразиях чётной размерности.

**Определение.** Внешним произведением дифференциальной  $k$ -формы  $\omega^k$  на дифференциальную форму  $\omega^l$  называется такая дифференциальная  $(k+l)$ -форма  $\omega^k \wedge \omega^l$ , что для любой точки  $x \in M$  и любых векторов  $v_1, \dots, v_{k+l} \in T_x M$

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum \pm \omega^k(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \omega^l(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}),$$

где  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $j_1 < \dots < j_l$  и сумма берётся по всем перестановкам  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$  индексов  $(1, \dots, k+l)$ , причём ставится знак  $+$ , если эта перестановка чётная, и знак  $-$ , если она нечётная.

Внешнее произведение дифференциальных форм ассоциативно, дистрибутивно и косокоммутативно:  $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$ . В гладких локальных координатах  $x_1, \dots, x_m$  на  $m$ -мерном многообразии  $M$  любая дифференциальная  $k$ -форма  $\omega^k$  однозначно

записывается в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (40)$$

где  $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$  — гладкие функции, а  $dx_i$  обозначает 1-форму в  $\mathbb{R}^m$ , значение которой на каждом векторе равно его  $i$ -й координате в базисе, согласованном с координатами  $x_1, \dots, x_m$ .

**Пример 17.1.** Рассмотрим дифференциальную 2-форму  $dx_1 \wedge dx_2$  на евклидовой плоскости с координатами  $x_1, x_2$ . Её значение на паре векторов  $v = (v_1, v_2)$ ,  $w = (w_1, w_2)$  вычисляется по формуле

$$(dx_1 \wedge dx_2)(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Это число равно определителю матрицы, составленной из координат векторов  $v, w$ , т. е. ориентированной площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

**Определение.** Внешним дифференциалом гладкой функции называется её обычный первый дифференциал. Внешним дифференциалом дифференциальной  $k$ -формы (40) в  $\mathbb{R}^m$  называется дифференциальная  $(k+1)$ -форма

$$d\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} da_{i_1, \dots, i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (41)$$

Это определение корректно (правая часть формулы (41) не зависит от системы координат). Операция вычисления внешнего дифференциала дифференциальной формы обладает следующими свойствами:

- 1) (линейность)  $d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 d\omega_1 + c_2 d\omega_2$  для любых  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- 2) (правило Лейбница)  $d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l$ ;
- 3)  $d(d\omega) = 0$  для любой формы  $\omega$ .

**Определение.** Дифференциальная форма называется замкнутой, если её внешний дифференциал равен нулю.

Пусть  $v = v(x)$  — гладкое векторное поле на многообразии  $M$ , т. е. такое гладкое отображение  $v: M \rightarrow TM$ , что  $v(x) \in T_x M$

для любого  $x \in M$ . Тогда для любой точки этого многообразия существуют такие окрестность  $U$  и число  $\varepsilon > 0$ , что для каждого вещественного  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  определено преобразование  $\varphi_t$  окрестности  $U$  за время  $t$ . Это преобразование осуществляет диффеоморфизм окрестности  $U$  на свой образ, при котором каждая точка  $x \in U$  переходит в точку  $\varphi_t(x)$ , где  $t \mapsto \varphi_t(x)$  — решение дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\varphi_0(x) = x$  (см. с. 86).

Рассмотрим произвольную дифференциальную  $k$ -форму  $\omega^k$  на  $M$ .

**Определение.** Производной Ли формы  $\omega^k$  по направлению векторного поля  $v$  называется дифференциальная  $k$ -форма  $\mathcal{D}_v \omega^k$ , значение которой в точке  $x \in M$  на наборе  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  векторов  $\xi_1, \dots, \xi_k$  из  $T_x M$  определяется формулой

$$\mathcal{D}_v \omega^k \Big|_x (\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega^k|_{\varphi_t(x)}(d\varphi_t|_x(\xi)) - \omega^k|_x(\xi)}{t}.$$

Для вычисления производной Ли используют формулу Картана (в [11] она называется формулой гомотопии):

$$\mathcal{D}_v \omega^k = i_v(d\omega^k) + d(i_v \omega^k).$$

Здесь  $i_v$  — операция, которая каждой дифференциальной  $l$ -форме  $\omega^l$  сопоставляет дифференциальную  $(l-1)$ -форму  $i_v \omega^l$  по правилу подстановки поля  $v$  на первое место, т. е.

$$i_v \omega^l(\xi_1, \dots, \xi_{l-1}) = \omega^l(v, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}).$$

Теперь мы можем перейти к изложению теории В. И. Арнольда, описывающей особенности каустик (см. [6]).

Пусть  $E$  — гладкое многообразие чётной размерности  $2n$ . Симплектической структурой на многообразии  $E$  называется гладкая замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма. Многообразие, снабжённое симплектической структурой, называется *симплектическим*.

Зафиксируем симплектическую структуру на многообразии  $E$ . Гладкое подмногообразие в  $E$  называется *изотропным*, если сужение симплектической структуры на это многообразие равно

нулю. Размерность изотропного многообразия симплектической структуры на  $E$  не превосходит  $n$ .

Изотропные многообразия симплектической структуры, имеющие наивысшую размерность (равную  $n$ ), называются *лагранжевыми*. Гладкое расслоение

$$\varrho: E \rightarrow V$$

с гладкой  $n$ -мерной базой  $V$  называется *лагранжевым*, если все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями в  $E$ .

Пусть  $\varrho$  — лагранжево расслоение и  $L$  — гладкое лагранжево подмногообразие в  $E$ . Тогда проектирование многообразия  $L$  на базу  $V$  расслоения  $\varrho$  вдоль его слоев называется *лагранжевым* отображением. Формально говоря, лагранжево отображение представляет собой диаграмму

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\varrho} V$$

где  $i$  — тождественное вложение. Мы будем изучать далее только *собственные* лагранжевы отображения (см. с. 35).

Множество критических значений лагранжева отображения называется *каустикой*. *Ветвью* каустики лагранжева отображения  $f$  в критической точке  $x \in L$  мы будем называть каустикой сужения  $f$  на любую достаточно малую окрестность точки  $x$ . *Ростком* каустики отображения  $f$  в критическом значении  $y \in V$  будем называть пересечение каустики этого отображения с достаточно малой окрестностью точки  $y$ .

**Пример 17.2.** Рассмотрим касательное пространство  $T_q V$  к гладкому  $n$ -мерному многообразию  $V$  в точке  $q$ . Всякая 1-форма  $p$  на пространстве  $T_q V$  называется *кокасательным вектором* или просто *ковектором* к  $V$  в  $q$ . Множество  $T_q^* V$  всех ковекторов  $p$  называется *кокасательным пространством* к многообразию  $V$  в точке  $q$ . Это множество является  $n$ -мерным векторным пространством.

Объединение  $T^* V$  пространств  $T_q^* V$  по всем точкам  $q \in V$  является гладким  $2n$ -мерным многообразием. Если  $q = (q_1, \dots, q_n)$  — набор локальных координат на многообразии  $V$ , то всякий вектор  $v \in T_q V$  задаётся своими координатами  $v = (v_1, \dots, v_n)$  в базисе,

согласованном с координатами  $q_1, \dots, q_n$ . Поэтому каждый ковектор  $p \in T_q^*V$  задаётся своими  $n$  компонентами  $p = (p_1, \dots, p_n)$  так, что

$$p(v) = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n.$$

Набор  $2n$  чисел

$$(p, q) = (p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$$

определяет систему локальных координат на  $T^*V$ .

Естественная проекция  $\rho: T^*V \rightarrow V$ , сопоставляющую каждому ковектору  $p \in T_q^*V$  точку  $q$ , является гладким расслоением. Это расслоение называется *кокасательным*. Его тотальное пространство  $T^*V$  также, для краткости, называют *кокасательным расслоением* многообразия  $V$ . Слоем над точкой  $q$  кокасательного расслоения  $\rho$  является кокасательное пространство  $T_q^*V$ . В указанных локальных координатах на  $T^*V$  расслоение  $\rho$  задаётся формулой  $(p, q) \mapsto q$ .

На многообразии  $T^*V$  определена каноническая 1-форма  $\alpha$ . А именно, пусть  $\xi$  — касательный вектор к  $T^*V$  в точке  $(p, q)$ , где  $p \in T_q^*V$ . Тогда

$$\alpha(\xi) = p(d\rho|_{(p,q)}(\xi)).$$

В локальных координатах  $p, q$  на  $T^*V$  эта дифференциальная форма имеет вид

$$\alpha = p dq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n.$$

Рассмотрим внешний дифференциал  $\omega = d\alpha$  формы  $\alpha$ . Он является замкнутой невырожденной 2-формой на  $T^*V$ . В указанных локальных координатах

$$\omega = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Форма  $\omega$  задаёт симплектическую структуру на пространстве  $T^*V$ . Каждое кокасательное пространство  $T_q^*V$ ,  $q \in V$ , является лагранжевым подмногообразием в  $T^*V$  относительно этой структуры. Поэтому расслоение  $\rho$  является лагранжевым.

**Замечание.** Согласно теореме Дарбу в окрестности каждой точки всякого симплектического  $2n$ -мерного многообразия существуют гладкие координаты

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n),$$



в которых его симплектическая структура задаётся формулой  $dp \wedge dq$ . Такие координаты называются *координатами Дарбу*. Росток любого лагранжева расслоения в подходящих координатах Дарбу  $p, q$  является ростком в нуле проекции

$$(p, q) \mapsto q.$$

**Пример 17.3.** Рассмотрим кокасательное расслоение  $T^*\mathbb{R}^n$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Проекция

$$\varrho: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p, q) \mapsto q,$$

где  $p \in T_q^*\mathbb{R}^n$ , является лагранжевым расслоением относительно симплектической структуры  $\omega = dp \wedge dq$ .

Пусть  $(v, w) \mapsto vw$  — стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим гладкую гиперповерхность  $M \subset \mathbb{R}^n$  и подмножество  $L \subset T^*\mathbb{R}^n$ , образованное ковекторами

$$p: v \mapsto vw$$

в концах  $q = x + w$  всевозможных векторов  $w \in \mathbb{R}^n$ , приложенных к гиперповерхности  $M$  и ортогональных ей в точках приложения  $x$ .

Множество  $L$  является гладким  $n$ -мерным подмногообразием в  $T^*\mathbb{R}^n$ . Сужение канонической 1-формы  $\alpha = p dq$  на многообразии  $L$  равно

$$w d(x + w) = w dx + w dw = \frac{1}{2}d(w^2).$$

Следовательно, подмногообразие  $L$  лагранжево. Его каустика относительно лагранжевой проекции  $\varrho$  является эволютой гиперповерхности  $M$ .

**Пример 17.4.** Пусть  $M$  — гладкая коориентированная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$  и  $\nu_x$  — единичный нормальный вектор к  $M$  в точке  $x$ , определяющий ориентацию. Рассмотрим росток  $M_{x_0}$  гиперповерхности  $M$  в точке  $x_0$  и подмножество  $L_{x_0}$  в кокасательном пространстве  $T^*\mathbb{R}^n$ , образованное ковекторами

$$p_x: v \mapsto v \nu_x,$$

в точках  $q_x^t = x + t \nu_x$  для всех  $x \in M_{x_0}$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

Если росток  $M_{x_0}$  достаточно мал, то множество  $L_{x_0}$  является гладким  $n$ -мерным подмногообразием в  $T^*\mathbb{R}^n$ . Сужение канонической 1-формы  $\alpha = p dq$  на  $L_{x_0}$  равно

$$\begin{aligned} p_x dq_x^t &= v_x d(x + t v_x) = v_x (dx + t dv_x + v_x dt) = \\ &= v_x dx + t v_x dv_x + v_x^2 dt = dt, \end{aligned}$$

поскольку  $v_x dx = 0$  на всех касательных пространствах к гиперповерхности  $M$ , а  $v_x dv_x = 0$  в силу равенства  $v_x^2 = 1$ .

Следовательно, многообразие  $L_{x_0}$  лагранжево относительно симплектической структуры  $\omega = dp \wedge dq$ . Каустика этого многообразия относительно лагранжевой проекции  $\varrho : (p, q) \mapsto q$  является эволютой ростка  $M_{x_0}$ , т. е. частью эволюты гиперповерхности  $M$ .

Примечательным здесь является тот факт, что многообразие  $L_{x_0}$  удовлетворяет уравнению  $p^2 = 1$  в кокасательном пространстве  $T^*\mathbb{R}^n$ . Это частный случай так называемого уравнения эйконала, описывающего световые лучи в геометрической оптике (см. § 19). Лагранжевы многообразия, удовлетворяющие уравнению эйконала, часто называются *оптическими*. Каустику оптического лагранжева многообразия также называют оптической. Таким образом, ветви эволюты гиперповерхности являются оптическими каустиками.

**Пример 17.5.** Рассмотрим чашку с гладкой боковой поверхностью в трёхмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Каждая ориентированная прямая  $l$ , трансверсально пересекающая плоскость  $\mathbb{R}^2$  дна чашки и направленная в полупространство, не содержащее чашку, однозначно определяется точкой  $q$  этого пересечения и единичным направляющим вектором  $e$  прямой  $l$ . Вектор  $e$  определяет ковектор  $p : v \mapsto ve$  в  $T_q^*\mathbb{R}^2$ .

Рассмотрим солнечные лучи, падающие на чашку, как ориентированные прямые в  $\mathbb{R}^3$ , коллинеарные друг другу<sup>1</sup>. Каждый луч  $l$ , трансверсально пересекающий боковую поверхность чашки в точке  $x$ , определяет отраженный луч  $l_x$ . Если  $\tau$  — единичный направляющий вектор луча  $l$ , то единичный направляющий

<sup>1</sup>Размеры чашки ничтожно малы по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца.

вектор  $e_x$  отраженного луча  $l_x$  определяется формулой:

$$e_x = \tau - 2(\nu_x \tau) \nu_x, \quad (42)$$

где  $\nu_x$  — единичный нормальный вектор боковой поверхности чашки в точке  $x$ , направленный внутрь этой чашки. Если луч  $l_x$  трансверсально пересекает плоскость  $\mathbb{R}^2$  в точке  $q_x$ , то существует такое  $s_x \in \mathbb{R}$ , гладко зависящее от  $x$ , что

$$q_x = x + s_x e_x. \quad (43)$$

Множество ковекторов  $p_x: \nu \mapsto \nu e_x$  в точках  $q_x$  является гладким двумерным подмногообразием  $L$  в  $T^*\mathbb{R}^2$ . Сужение канонической 1-формы  $\alpha = p dq$  на  $L$  равно

$$\begin{aligned} p_x dq_x &= e_x d(x + s_x e_x) = e_x (dx + s_x de_x + e_x ds_x) = \\ &= e_x dx + s_x e_x de_x + e_x^2 ds_x. \end{aligned}$$

Здесь

$$e_x dx = \tau dx = d(\tau x),$$

поскольку  $\nu_x dx = 0$  на боковой поверхности чашки и  $\tau = \text{const}$ , а  $e_x de_x = 0$ , так как  $e_x^2 = 1$ .

Следовательно,  $p_x dq_x = d(\tau x + s_x)$ , а значит, многообразие  $L$  лагранжево. Каустика лагранжева отображения  $(p_x, q_x) \mapsto q_x$  этого многообразия и есть световая каустика, изображенная на рис. 13.

**Пример 17.6.** Рассмотрим пространство  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  с координатами  $P, Q$ , где

$$\begin{aligned} P &= (t, p), & t &= (t_1, \dots, t_k), & p &= (p_{k+1}, \dots, p_n), \\ Q &= (x, q), & x &= (x_1, \dots, x_k), & q &= (q_{k+1}, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Дифференциальная 2-форма

$$dP \wedge dQ = dt \wedge dx + dp \wedge dq$$

определяет симплектическую структуру в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Отображение

$$\varrho: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (P, Q) \mapsto Q, \quad (44)$$

является лагранжевым расслоением с базой  $\mathbb{R}^n = \{Q\}$ .

Пусть  $S = S(t, q)$  — гладкая функция переменных  $t, q$ . Тогда система уравнений

$$x = -\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial S(t, q)}{\partial q} \quad (45)$$

определяет гладкое лагранжево подмногообразие

$$L = \{(t, q) \in \mathbb{R}^n\} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n}.$$

Формула

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, q) \mapsto \left(-\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, q\right) \quad (46)$$

задаёт лагранжево отображение

$$f: L \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n.$$

Каустика этого отображения состоит из таких точек  $(x, q) \in \mathbb{R}^n$ , что функция  $S(t, q) + xt$  от  $t$  имеет вырожденную критическую точку.

Пространство  $W$  всех вложений  $i: L \hookrightarrow E$  с лагранжевым образом снабдим  $C^\infty$ -топологией Уитни. Будем говорить, что утверждение о лагранжевых отображениях справедливо для отображения

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{g} V$$

*общего положения*, если существует такое открытое всюду плотное подмножество  $U \subset W$ , что это утверждение имеет место для любого  $i \in U$ .

**Определение.** Два лагранжевых отображения

$$L_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{g_1} V_1 \quad \text{и} \quad L_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{g_2} V_2$$

называются *лагранжево эквивалентными*, если существуют такие диффеоморфизмы

$$\Phi: E_1 \rightarrow E_2, \quad \varphi: V_1 \rightarrow V_2, \quad \varepsilon: L_1 \rightarrow L_2,$$

что  $\Phi$  переводит симплектическую структуру на  $E_1$  в симплекти-

ческую структуру на  $E_2$  и диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{e_1} & V_1 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi \\ L_2 & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{e_2} & V_2 \end{array}$$

коммутативна.

**Замечание.** Диффеоморфизм симплектических многообразий, переводящий симплектическую структуру первого многообразия в симплектическую структуру второго, называется *симплектоморфизмом*. Симплектоморфизм, переводящий слои первого лагранжева расслоения в слои второго, называется *лагранжевой эквивалентностью*. Лагранжева эквивалентность индуцирует диффеоморфизм баз лагранжевых расслоений, который переводит каустики лагранжево эквивалентных лагранжевых отображений друг в друга.

Класс эквивалентности ростка лагранжева отображения в критической точке относительно лагранжевой эквивалентности называется (*лагранжевой*) *особенностью*.

**Определение.** Росток лагранжева отображения

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{e} V$$

в точке  $x \in L$  называется (*лагранжево*) *устойчивым*, если для любого лагранжева отображения

$$\tilde{f}: L \xrightarrow{\tilde{i}} E \xrightarrow{\tilde{e}} V,$$

близкого к  $f$ , найдётся точка  $\tilde{x} \in L$ , близкая к  $x$  и такая, что росток  $\tilde{f}$  в  $\tilde{x}$  лагранжево эквивалентен ростку  $f$  в  $x$ . Росток  $f$  в  $x$  называется *простым*, если ростки всех близких лагранжевых отображений во всех близких точках принадлежат конечному числу классов лагранжевой эквивалентности.

**Теорема Арнольда о лагранжевых особенностях** [3], [4]. *Простые лагранжево устойчивые ростки лагранжевых отображений в гладкое  $n$ -мерное многообразие лагранжево эквивалентны росткам отображения (46) в нуле, где  $S = S(t, q)$  —*

функция одного из следующих типов, соответствующих целым положительным  $\mu$ , не превосходящим  $n + 1$ :

$$A_{\mu}^{\pm}: S = \pm t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \dots + q_2 t_1^2, \quad \mu \geq 1;$$

$$D_{\mu}^{\pm}: S = t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \dots + q_3 t_2^2, \quad \mu \geq 4;$$

$$E_6^{\pm}: S = t_1^3 \pm t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, \quad \mu = 6;$$

$$E_7: S = t_1^3 + t_1 t_2^3 + q_6 t_1^2 t_2 + q_5 t_1^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, \quad \mu = 7;$$

$$E_8: S = t_1^3 + t_2^5 + q_7 t_1 t_2^3 + q_6 t_1 t_2^2 + q_5 t_2^3 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, \quad \mu = 8.$$

Лагранжевы отображения общего положения в многообразии размерности  $n \leq 5$  могут иметь лишь простые устойчивые особенности.

Тип функции  $S$  определяет тип особенности (ростка) лагранжева отображения. Число  $\mu - 1$  называется *коразмерностью* соответствующей лагранжевой особенности. Если  $\mu$  чётное или  $\mu = 1$ , то ростки лагранжевых отображений типов  $A_{\mu}^{+}$  и  $A_{\mu}^{-}$  лагранжево эквивалентны и называются ростками *типа*  $A_{\mu}$ . В остальных случаях лагранжевы ростки перечисленных типов попарно лагранжево не эквивалентны.

Тип ростка лагранжева отображения определяет *тип ветви* каустики этого отображения в соответствующей точке. Если росток каустики состоит из одной ветви, то тип ветви называется *типом* *ростка каустики*.

Следует отметить, что ростки каустики типов  $A_{\mu}^{+}$  и  $A_{\mu}^{-}$  переводятся друг в друга диффеоморфизмом объемлющего пространства при любом натуральном  $\mu$ . Ростки каустики типов  $D_{\mu}^{+}$  и  $D_{\mu}^{-}$  диффеоморфны для любого нечётного  $\mu$ . Ростки каустики типов  $E_6^{+}$  и  $E_6^{-}$  также диффеоморфны. В остальных случаях ростки каустики перечисленных типов попарно не диффеоморфны.

Классификация простых лагранжево устойчивых ростков лагранжевых отображений опирается на теорему Арнольда о критических точках (с. 112) и следующие утверждения (см. [8]).

**Предложение 17.7.** *Всякий росток лагранжева отображения в гладкое  $n$ -мерное многообразие лагранжево эквивалентен ростуку в нуле отображения (46).*

**Предложение 17.8.** Росток в нуле лагранжева отображения (46) лагранжево устойчив, если и только если деформация

$$S(t, q) + xt - u$$

ростка в нуле функции  $S(t, 0)$  с параметрами  $x, q$  и дополнительным параметром  $u \in \mathbb{R}$  является  $R$ -версальной.

Список функций теоремы Арнольда получается теперь из списка  $R$ -миниверсальных деформаций в примере 13.6 (с. 102). Что касается задачи приведения ростка конкретного лагранжева отображения к нормальной форме лагранжевой эквивалентностью, то она сводится к более простой задаче классификации семейств функций.

Рассмотрим лагранжево многообразие (45). Его можно определить при помощи семейства

$$F(t, \lambda) = S(t, q) + xt$$

функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda = Q = (x, q) \in \mathbb{R}^n$  формулой

$$L = \left\{ (P, \lambda) \mid \exists t: \frac{\partial F}{\partial t} = 0, P = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right\}. \quad (47)$$

Обратно, рассмотрим гладкое семейство  $F(t, \lambda)$  функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что росток этого семейства в точке  $(t_0, \lambda_0)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, \lambda_0) = 0$ ;
- 2) ранг матрицы Якоби отображения

$$(t, \lambda) \mapsto \frac{\partial F}{\partial t}(t, \lambda)$$

в точке  $(t_0, \lambda_0)$  равен  $k$ .

Тогда формула (47) задаёт росток гладкого лагранжева подмногообразия  $L$  в пространстве лагранжева расслоения (44) в точке  $(P_0, Q_0)$ , где  $P_0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(t_0, \lambda_0)$ ,  $Q_0 = \lambda_0$ . При этом  $F$  называют *производящим семейством* как самого ростка  $L$ , так и ростка его лагранжева проектирования в  $\mathbb{R}^n$  вдоль слоев расслоения (44).

На практике лагранжевы отображения часто уже изначально заданы производящими семействами (иногда глобально).

**Пример 17.9.** Пусть  $M$  — гладкая гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим лагранжево подмногообразие  $L \subset T^*\mathbb{R}^n$ , образованное ковекторами  $p: v \mapsto vw$  в концах всевозможных векторов  $w \in \mathbb{R}^n$ , приложенных к гиперповерхности  $M$  и ортогональных ей в точках приложения (см. пример 17.3, с. 128).

Семейство

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2}|\lambda - x|^2$$

функций от  $x \in M$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , где  $|\lambda - x|$  — расстояние между точками  $\lambda$  и  $x$ , является производящим семейством многообразия  $L$ . Действительно, вектор  $w = \lambda - x$  ортогонален касательной гиперплоскости к  $M$  в точке  $x$ , если и только если  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0$ .

**Пример 17.10.** Пусть  $M$  — гладкая коориентированная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$  и  $\nu_x$  — единичный нормальный вектор к  $M$  в точке  $x$ , определяющий ориентацию. Рассмотрим росток  $M_{x_0}$  гиперповерхности  $M$  в точке  $x_0$  и оптическое лагранжево подмногообразие  $L_{x_0} \subset T^*\mathbb{R}^n$ , образованное ковекторами  $p_x: v \mapsto v\nu_x$  в точках  $q_x^t = x + t\nu_x$  для всех  $x \in M_{x_0}$  и  $t \in \mathbb{R}$  (см. пример 17.4, с. 128). Аналогично примеру 17.9 семейство

$$F(x, \lambda) = |\lambda - x|$$

функций от  $x \in M_{x_0}$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  является производящим семейством ростка многообразия  $L_{x_0}$  в точке  $(p_{x_0}, q_{x_0}^t)$  при любом  $t \neq 0$ .

**Определение.** Ростки семейств  $F_1(t, \lambda)$  и  $F_2(t, \lambda)$  функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  в точке  $(t_0, \lambda_0)$  называются  $R^+$ -эквивалентными (как ростки семейств<sup>1</sup>), если существуют гладкие отображения

$$h: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

и гладкая функция  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что

$$h(t_0, \lambda_0) = t_0, \quad \varphi(\lambda_0) = \lambda_0,$$

<sup>1</sup>Сравните с определением  $R^+$ -эквивалентности ростков функций на с. 110.



росток отображения

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, \quad (t, \lambda) \mapsto (h(t, \lambda), \varphi(\lambda)),$$

в точке  $(t_0, \lambda_0)$  является ростком диффеоморфизма и

$$F_2(t, \lambda) = F_1(h(t, \lambda), \varphi(\lambda)) + g(\lambda)$$

для всех  $(t, \lambda)$ , достаточно близких к  $(t_0, \lambda_0)$ . Если  $g(\lambda) \equiv 0$ , то ростки семейств  $F_1(t, \lambda)$  и  $F_2(t, \lambda)$  называются *R-эквивалентными*.

**Определение.** Ростки семейств  $F_1(\cdot, \lambda)$  и  $F_2(\cdot, \lambda)$  с общим параметром  $\lambda$ , но разными, вообще говоря, размерностями пространства аргументов называются *стабильно  $R^+$ -эквивалентными*, если они становятся  $R^+$ -эквивалентными (как ростки семейств с параметром  $\lambda$ ) после прямого сложения с ростками в нуле невырожденных квадратичных форм от новых аргументов (своих для каждого из ростков  $F_1, F_2$ ). Аналогично определяется понятие *стабильной R-эквивалентности* ростков семейств.

**Предложение 17.11** [8]. *Ростки лагранжевых отображений лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда они определены стабильно  $R^+$ -эквивалентными ростками производящих семейств.*

Из предложений 17.8 и 17.11 следует, что если росток в нуле лагранжева отображения с производящим семейством  $F(t, \lambda)$  прост и лагранжево устойчив а priori, то его тип определяется типом критической точки в нуле функции  $\eta(t) = F(t, 0)$  относительно стабильной  $R^+$ -эквивалентности. В качестве примера такого рода исследований может служить доказательство предложения 20.12 на с. 183.

Для приведения ростка семейства  $F(t, \lambda)$  к нормальной форме стабильной  $R^+$ -эквивалентностью (включая случай неустойчивого ростка лагранжева отображения) надо сначала стабильной  $R^+$ -эквивалентностью привести росток функции  $\eta(t)$  в нуле к такой нормальной форме  $\tilde{\eta}(t)$ , что  $d^2\tilde{\eta}|_0 = 0$  (см. § 15). Для ростка лагранжева отображения общего положения кратность  $\mu$  ростка  $\tilde{\eta}(t)$  в нуле конечна.

Предположим, что  $1, e_1(t), \dots, e_{\mu-1}(t)$  — система образующих локальной алгебры роста в нуле градиентного отображения  $t \mapsto \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}$ . Тогда росток в нуле функции

$$(t, b, c) \mapsto \tilde{\eta}(t) + b_{\mu-1}e_{\mu-1}(t) + \dots + b_1e_1(t) + c$$

является  $R$ -миниверсальной деформацией ростка  $\tilde{\eta}(t)$  с параметрами  $b = (b_1, \dots, b_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}, c \in \mathbb{R}$  (см. предложение 13.5, с. 101).

Следовательно, росток семейства  $F(t, \lambda)$  в нуле стабильно  $R^+$ -эквивалентен ростку в нуле производящего семейства

$$\tilde{F}(t, \lambda) = \tilde{\eta}(t) + b_{\mu-1}(\lambda)e_{\mu-1}(t) + \dots + b_1(\lambda)e_1(t),$$

где  $\lambda \mapsto b(\lambda)$  — гладкое отображение,  $b(0) = 0$ . Часть функций  $b_i(\lambda)$  можно взять за новые координаты в пространстве параметров, а остальные — постараться упростить заменами параметров, сохраняющими новые координаты.

Отметим, что в результате проведённых по указанной схеме вычислений была получена классификация особенностей лагранжевых отображений общего положения в пространство размерности  $n \leq 10$  (см. [8]).

**Пример 17.12.** Пусть росток  $\eta(t)$  в нуле  $R$ -эквивалентен ростку в нуле функции (38) на с. 112 и  $\lambda = (x_1, x_2, x_3, q_4, q_5, q_6) \in \mathbb{R}^6$ . Тогда росток в нуле производящего семейства  $F(t, \lambda)$  ростка лагранжева отображения общего положения  $R^+$ -эквивалентен ростку в нуле производящего семейства

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \lambda) = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + a(\lambda)t_1t_2t_3 + q_6t_1t_2 + q_5t_1t_3 + q_4t_2t_3 + \\ + x_3t_3 + x_2t_2 + x_1t_1, \end{aligned}$$

где  $a(\lambda)$  — гладкая функция от  $\lambda$ , причём  $a(0) \neq -3$ . Эта функция является *функциональным модулем* ростка лагранжева отображения, т. е. существуют такие области в пространстве функций шести переменных, что ростки лагранжевых отображений, отвечающие разным функциям  $a$  из одной и той же области, лагранжево не эквивалентны.

Таким образом, у лагранжевых отображений в пространство размерности  $n \geq 6$  встречаются неустойчивые непростые особенности, которые нельзя устранить малой деформацией отображения.

**Замечание.** Иногда в пространстве лагранжева расслоения возникают объекты, которые становятся гладкими лагранжевыми подмногообразиями только после удаления из них подмножества меры нуль (так бывает, например, в некоторых задачах физики и вариационного исчисления; см. [6]). Лагранжевым отображением такого «особого» лагранжева многообразия также называется его проектирование на базу расслоения вдоль слоев этого расслоения. А вот с понятием близости возникает проблема: вложение особого объекта в объемлющее пространство не определено. Используются разные способы преодоления этого препятствия. Например, два особых лагранжевых подмногообразия считаются близкими, если одно переводится в другое симплектоморфизмом пространства лагранжева расслоения, достаточно близким к тождественному (в  $C^\infty$ -топологии Уитни).

**Лагранжевы мультиособенности.** Пусть лагранжево отображение  $f: L \rightarrow V$  имеет лишь простые устойчивые особенности. Тогда каждой точке  $y \in V$  можно сопоставить формальное коммутативное произведение  $\mathcal{A}$  символов из списка теоремы Арнольда

$$A_1, A_{2k}, A_{2k+1}^+, A_{2k+1}^- \quad (k = 1, 2, \dots), \\ D_\mu^+, D_\mu^- \quad (\mu = 4, 5, \dots), \quad E_6^+, E_6^-, E_7, E_8,$$

обозначающих типы ростков отображения  $f$  в прообразах точки  $y$ . Если прообраз  $f^{-1}(y)$  пуст, т. е. точка  $y$  лежит в дополнении к образу отображения  $f$ , то полагают  $\mathcal{A} = 1$ .

Произведение  $\mathcal{A}$  называется *типом мультиособенности* лагранжева отображения  $f$  в точке  $y$  (или *типом моноособенности*, если  $y$  имеет лишь один прообраз). Тип мультиособенности отображения  $f$  в критическом значении  $y$  определяет тип ростка его каустики в этой точке. Все ростки типа  $\mathcal{A}$  каустики общего положения диффеоморфны. Ростки каустики типов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} A_1^k$  диффеоморфны для любого целого неотрицательного  $k$ .

Для лагранжева отображения  $f$  общего положения множество  $\mathcal{A}_f$  точек  $y$ , в которых  $f$  имеет мультиособенность типа  $\mathcal{A}$ , является гладким подмногообразием в  $V$ . Оно называется *многообразием мультиособенностей типа  $\mathcal{A}$* . Коразмерность многообразия  $\mathcal{A}_f$  в  $V$  равна сумме коразмерностей особенностей, которые отображение  $f$  имеет в прообразах точки  $y$ . Эта сумма

обозначается через  $\text{codim } \mathcal{A}$  и называется *коразмерностью мультиособенности типа  $\mathcal{A}$* .

**Пример 17.13.** Каустика общего положения на плоскости является кривой, которая не имеет других особенностей, кроме точек возврата, соответствующих лагранжевым особенностям типов  $A_3^\pm$ , и точек трансверсального пересечения двух гладких ветвей.

Росток типа  $A_3^+$  лагранжева отображения в плоскость является ростком в нуле сужения проекции

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t_1, x_1, q_2) \mapsto (x_1, q_2),$$

на поверхность

$$4t_1^3 + 2q_2t_1 + x_1 = 0,$$

т. е. является ростком сборки Уитни. Разбиение образа этого отображения в окрестности начала координат на многообразия лагранжевых мультиособенностей разных типов изображено на рис. 15.

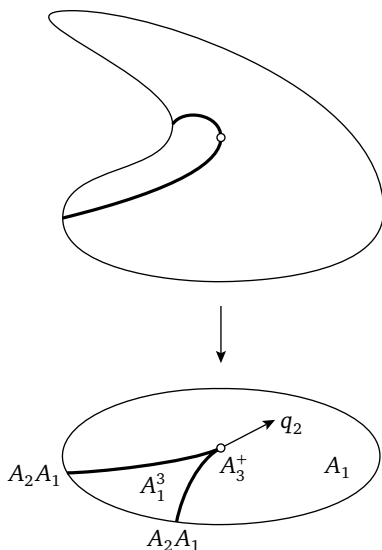


Рис. 15. Росток лагранжева отображения с особенностью типа  $A_3^+$

Случай  $A_3^-$  отличается от  $A_3^+$  направлением оси  $q_2$ . Трансверсальные самопересечения каустики соответствуют лагранжевым мультиособенностям типов  $A_2^2 A_1^k$ , где  $k$  может быть любым целым неотрицательным числом.

**Замечание.** Вершиной гладкой кривой на евклидовой плоскости называется точка локального экстремума её кривизны. Вершинам кривой общего положения соответствуют точки возврата её эволюты.

Согласно классической теореме Махопадхайя [54] всякая гладкая замкнутая кривая на плоскости имеет не менее четырёх вершин (строго говоря, Махопадхайя доказал свою теорему только для выпуклых кривых, но впоследствии выяснилось, что она справедлива и в невыпуклом случае; см. [49]). Следовательно, эволюта гладкой замкнутой кривой общего положения на плоскости имеет не менее четырёх точек возврата.

**Пример 17.14.** Каустика общего положения в трёхмерном пространстве является поверхностью, которая не имеет других особенностей, кроме *ребер возврата*, образованных особыми точками типов  $A_3^\pm$ , точечных особенностей типов  $A_4$  (*ласточкин хвост*),  $D_4^+$  (*кошелёк*),  $D_4^-$  (*пирамида*), и трансверсальных самопересечений.

Ребро возврата типа  $A_3^+$  изображено на рис. 16а (ребро возврата типа  $A_3^-$  выглядит так же). Ростки каустики с особенностями типов  $A_4$ ,  $D_4^+$  и  $D_4^-$  представлены на рис. 16б, 17а и 17б (тонкие линии изображают пересечение каустики со сферой достаточно малого радиуса, а также видимый контур поверхности на рис. 17а). На всех рисунках указано разбиение каустики на многообразия лагранжевых мультиособенностей разных типов.

Самопересечения каустики определяются лагранжевыми мультиособенностями типов  $A_2^2 A_1^k$  (линия трансверсального пересечения двух гладких ветвей),  $A_2^3 A_1^k$  (точка трансверсального пересечения гладкой ветви с линией трансверсального пересечения двух других гладких ветвей) и  $A_3^\pm A_2 A_1^k$  (трансверсальное пересечение ребра возврата с гладкой ветвью). Здесь  $k$  также может быть любым целым неотрицательным числом.

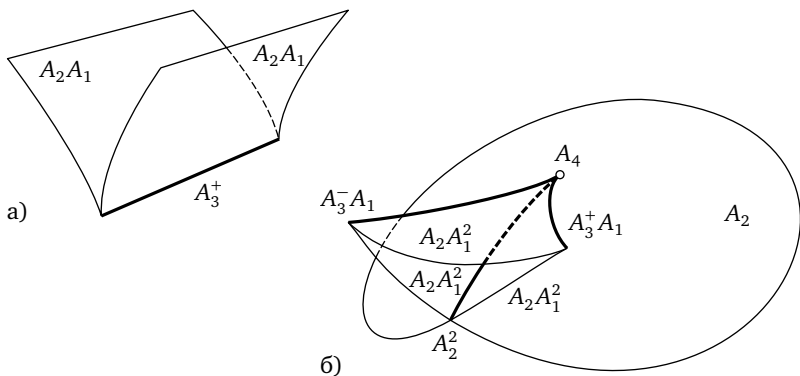


Рис. 16. Ростки каустики с особенностями типов а)  $A_3^+$  и б)  $A_4$

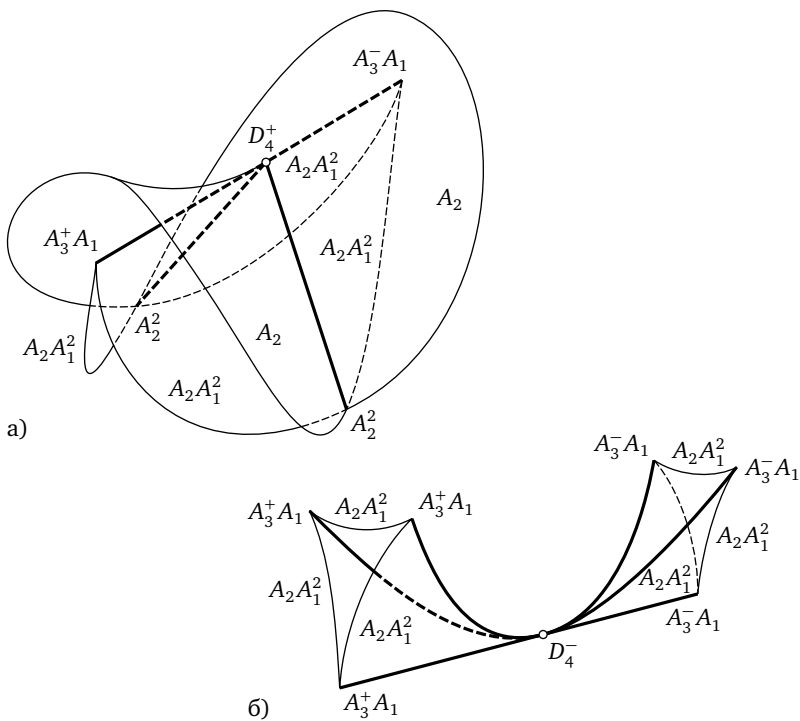


Рис. 17. Ростки каустики с особенностями типов а)  $D_4^+$  и б)  $D_4^-$

**Замечание.** Росток гладкого отображения общего положения 3-мерного пространства в себя, в отличие от лагранжево отображения общего положения, не имеет других изолированных особенностей, кроме обобщенной сборки Уитни, которой соответствует особенность типа ласточкин хвост множества его критических значений (см. пример 9.1 на с. 68, теорему Морена 1 на с. 106 и пример 14.4 на с. 106). Поэтому простые лагранжево устойчивые особенности лагранжевых отображений не являются, вообще говоря, устойчивыми особенностями этого отображения в пространстве всех гладких отображений  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  относительно  $RL$ -эквивалентности.

**Перестройки каустик.** Вернемся к световой каустике на дне чашки, изображенной на рис. 13. Из формул (42) и (43) следует, что при изменении направления  $\tau$  солнечных лучей эта каустика меняется, а вместе с ней перестраиваются и её особенности. Однако эти перестройки происходят крайне медленно. Чтобы увидеть процесс перестройки быстрее, не следует ждать пока солнце заметно изменит свое расположение на небосводе. Можно просто поворачивать саму чашку относительно солнечных лучей. То, что мы увидим, математически описывается следующим образом.

Предположим, что в пространстве  $E$  лагранжева расслоения  $\varrho: E \rightarrow V$  задано семейство лагранжевых подмногообразий  $i_c: L \hookrightarrow E$ , гладко зависящих от одного параметра  $c \in \mathbb{R}$ . Тогда определено семейство лагранжевых отображений

$$f_c: L \times \mathbb{R} \rightarrow V, \quad (l, c) \mapsto (\varrho \circ i_c)(l),$$

и соответствующее ему семейство каустик  $\Sigma_c$  в базе  $V$  расслоения  $\varrho$ .

Пусть размерность  $n$  многообразия  $V$  не превышает четырёх. Тогда лагранжево отображение  $f_c$  общего положения имеет лишь простые устойчивые особенности. Отдельные лагранжевы отображения в семействе  $f_c$  общего положения могут иметь более сложные особенности. Если отображение  $f_{c_0}$  имеет особенность не общего положения в некоторой точке  $l_0 \in L$ , то говорят, что росток семейства  $f_c$  в точке  $(l_0, c_0)$  определяет локальную перестройку в семействе каустик  $\Sigma_c$ .

Семейство  $\Sigma_c$  является семейством сечений множества  $\Sigma$  критических значений отображения

$$L \times \mathbb{R} \rightarrow V \times \mathbb{R}, \quad (\ell, c) \mapsto (f_c(\ell, c), c),$$

гиперповерхностями  $c = \text{const}$ . Локально это отображение лагранжево. Поэтому для семейства  $f_c$  общего положения гиперповерхность  $\Sigma$  в подходящих гладких координатах

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad q = (q_{k+1}, \dots, q_{n+1})$$

в окрестности каждой своей точки задаётся формулами

$$\Sigma = \left\{ (x, q) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists t \in \mathbb{R}^k : x = -\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, \det \frac{\partial^2 S(t, q)}{\partial t^2} = 0 \right\},$$

где  $S = S(t, q)$  — одна из функций списка теоремы Арнольда о лагранжевых особенностях с  $\mu \leq n + 2$ . Классификация локальных перестроек каустик сводится к классификации неособых ростков в нуле гладких функций  $c = c(x, q)$  общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  относительно  $RL$ -эквивалентности, при которой диффеоморфизм пространства-прообраза сохраняет  $\Sigma$ .

Последняя задача в случае функций  $S = S(t, q)$  типов  $A_\mu^\pm$  и  $D_\mu^\pm$  была решена В. И. Арнольдом (на плоскости и в трёхмерном пространстве; см. [6]) и В. М. Закалюкиным (во всех остальных размерностях; см. [22]). В частности, оказалось, что возможные локальные перестройки каустик на плоскости в однопараметрических семействах лагранжевых отображений общего положения описываются следующей таблицей:

$A_3 : S = t_1^4 + q_2 t_1^2$	$c = q_2 \pm q_3^2$
$A_4 : S = t_1^5 + q_3 t_1^3 + q_2 t_1^2$	$c = q_3$
$D_4^\pm : S = t_1^2 t_2 \pm t_2^3 + q_3 t_2^2$	$c = q_3 + x_1 + a x_2$ , где $a \in \mathbb{R}, a \neq \pm 1/\sqrt{3}$

Перестройка происходит в начале координат. Параметр  $a$  является модулем (непрерывным инвариантом; см. с. 113) локальных перестроек типов  $D_4^\pm$  относительно  $RL$ -эквивалентности (см. [6]).



**Замечание.** Имеется ровно две топологически неэквивалентные локальные перестройки типа  $D_4^+$  каустик на плоскости. Они соответствуют случаям  $|a| < 1/\sqrt{3}$  и  $|a| > 1/\sqrt{3}$  (см. рис. 18).

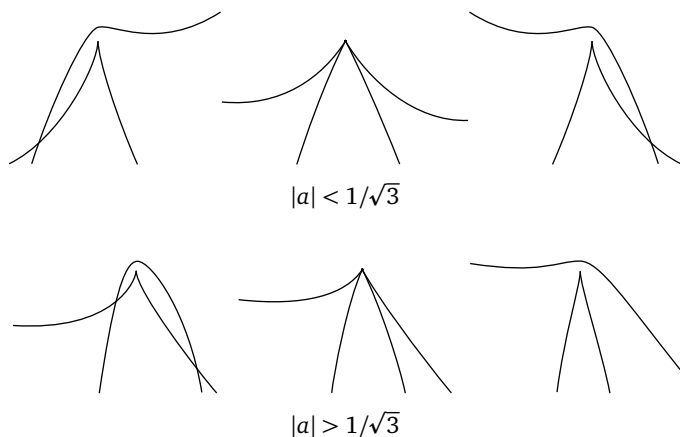


Рис. 18. Локальные перестройки типа  $D_4^+$  каустик на плоскости

В обоих случаях каустика в окрестности начала координат имеет ровно одну полукубическую точку возврата как до, так и после перестройки. Если  $|a| < 1/\sqrt{3}$ , то до и после перестройки каустика имеет вблизи нуля одну точку трансверсального пересечения двух гладких ветвей. Однако при  $|a| > 1/\sqrt{3}$  количество самопересечений каустики в окрестности начала координат меняется при переходе значения  $c$  через нуль. А именно, если правильно выбрать направление оси  $c$ , то каустика до перестройки будет иметь ровно две точки самопересечения. В результате перестройки эти точки исчезнут и каустика после перестройки не будет иметь самопересечений вблизи нуля.

### Упражнения

1. Сколько прообразов при лагранжевом отображении общего положения имеют точки дополнения к каустике в трёхмерном пространстве, расположенные вблизи точек, в которых это отображение имеет моноособности типов  $A_4$ ,  $D_4^+$  и  $D_4^-$ ?

2. Используя какую-нибудь компьютерную программу, изобразите локальные перестройки типов  $A_3$ ,  $A_4$  и  $D_4^-$  каустик на плоскости.

## § 18. Особенности фронтов

Здесь изложена теория, описывающая особенности эквидистант и других физических фронтов, ограничивающих область распространения тех или иных физических процессов. Эта теория, как и теория лагранжевых особенностей, построена В. И. Арнольдом (см. [6]).

Пусть  $E$  — гладкое многообразие. *Контактной гиперплоскостью* на  $E$  в точке  $x \in E$  называется любое векторное подпространство  $\pi \subset T_x E$  коразмерности 1. Пара  $(\pi, x)$  называется *контактным элементом* на  $E$ .

Рассмотрим гладкое поле контактных гиперплоскостей на многообразии  $E$ . Локально такое поле задаётся дифференциальной 1-формой  $\alpha$  как поле её нулей. Поле контактных гиперплоскостей называется *контактной структурой*, если внешний дифференциал  $d\alpha$  формы  $\alpha$  является невырожденной 2-формой на каждой гиперплоскости поля. Это условие не зависит от выбора формы  $\alpha$ . Многообразие, снабжённое контактной структурой, называется *контактным*.

**Замечание.** Контактные структуры бывают только на нечётномерных многообразиях.

Пусть  $\dim E = 2n - 1$ . Тогда поле  $\alpha = 0$  контактных гиперплоскостей на  $E$  является контактной структурой, если и только если  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ .

Зафиксируем контактную структуру на многообразии  $E$ . Гладкое подмногообразие в  $E$  называется *интегральным многообразием* контактной структуры, если оно в каждой своей точке  $x$  касается гиперплоскости  $\pi$  контактного элемента  $(\pi, x)$  контактной структуры. Размерность интегрального многообразия контактной структуры на  $E$  не превосходит  $n - 1$ .

Интегральные многообразия контактной структуры, имеющие наивысшую размерность (равную  $n - 1$ ), называются *лежандровыми*. Гладкое расслоение

$$\rho: E \rightarrow V$$

с гладкой  $n$ -мерной базой  $V$  называется *лежандровым*, если все его слои являются лежандровыми подмногообразиями в  $E$ .

Пусть  $\rho$  — лежандрово расслоение и  $L$  — гладкое лежандрово подмногообразие в  $E$ . Тогда проектирование многообразия  $L$  на базу  $V$  расслоения  $\rho$  вдоль его слоев называется *лежандровым отображением*. Формально, лежандрово отображение представляет собой диаграмму

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V,$$

где  $i$  — тождественное вложение. Мы будем изучать далее только собственные лежандровы отображения (см. с. 35).

Образ лежандрова отображения называется *фронтом*. *Ветвью* фронта лежандрова отображения  $f$  в точке  $x \in L$  мы будем называть фронт сужения  $f$  на любую достаточно малую окрестность точки  $x$ . *Ростком* фронта отображения  $f$  в точке  $y \in V$  будем называть пересечение фронта этого отображения с достаточно малой окрестностью точки  $y$ .

**Пример 18.1.** Рассмотрим гладкое  $(n - 1)$ -мерное многообразие  $M$ . Пространство  $J^1(M, \mathbb{R})$ , образованное 1-струями  $j^1u(q)$ ,  $q \in M$ , гладких функций  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , является гладким  $(2n - 1)$ -мерным многообразием. Если  $q = (q_1, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  — локальные координаты на  $M$ , то набор  $(p, q, u)$ , где

$$p = \frac{\partial u}{\partial q}(q),$$

определяет гладкие координаты на  $J^1(M, \mathbb{R})$ . Дифференциальная 1-форма  $du - p dq$  задаёт контактную структуру на многообразии  $J^1(M, \mathbb{R})$ . Естественная проекция

$$\rho: J^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow J^0(M, \mathbb{R}) = M \times \mathbb{R}, \quad (p, q, u) \mapsto (q, u),$$

забывания частных производных является лежандровым расслоением. Образ 1-струйного расширения  $j^1u$  любой гладкой функции  $u$  на  $M$  является лежандровым подмногообразием в  $J^1(M, \mathbb{R})$ . Его фронтом относительно лежандровой проекции  $\rho$  является график функции  $u$ .

**Замечание.** Согласно теореме Дарбу в окрестности каждой точки всякого контактного  $(2n - 1)$ -мерного многообразия существуют гладкие координаты

$$p = (p_1, \dots, p_{n-1}), \quad q = (q_1, \dots, q_{n-1}), \quad u,$$

в которых его контактная структура задаётся формой  $du - p dq$ . Такие координаты называются *координатами Дарбу*. Росток любого лежандрова расслоения в подходящих координатах Дарбу  $p, q, u$  является ростком в нуле проекции

$$(p, q, u) \mapsto (q, u).$$

**Пример 18.2.** Множество контактных элементов на гладком  $n$ -мерном многообразии  $V$  является гладким  $(2n - 1)$ -мерным многообразием. Это следует из того, что множество контактных элементов  $(\pi, q)$  с фиксированной точкой контакта  $q \in V$  является гладким  $(n - 1)$ -мерным многообразием Грассмана  $\mathbb{R}G_0(n)$  всех гиперплоскостей в  $T_q V$ , проходящих через нуль (см. пример 4.1, с. 31). Локальные координаты на многообразии контактных элементов на  $V$  можно ввести следующим образом.

Зафиксируем произвольный контактный элемент  $(\pi, q)$  и выберем локальные координаты  $q = (q_1, \dots, q_n)$  на многообразии  $V$  так, что контактная гиперплоскость  $\pi$  касается гиперповерхности  $q_n = 0$  в начале координат. В касательном пространстве  $T_q V$  возьмем базис, согласованный с координатами  $q_1, \dots, q_n$ . В этом базисе каждый вектор  $v \in T_q V$  определяется своими координатами  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Любая гиперплоскость в пространстве  $T_q V$ , проходящая через нуль и трансверсальная вектору  $(0, \dots, 0, 1)$ , задаётся уравнением

$$v_n = p_1 v_1 + \dots + p_{n-1} v_{n-1}.$$

Набор  $(2n - 1)$  чисел

$$(p_1, \dots, p_{n-1}; q_1, \dots, q_n)$$

определяет систему локальных координат на многообразии контактных элементов на  $V$ .

Рассмотрим теперь кокасательное расслоение  $T^*V$  многообразия  $V$ . Каждый ненулевой ковектор  $p \in T_q^*V$  определяет гиперплоскость в  $T_q V$ , состоящую из нулей 1-формы  $p$ . При этом два ковектора определяют одну и ту же гиперплоскость, если один ковектор получается из другого умножением на ненулевое число. Следовательно, многообразии контактных элементов на  $V$  естественно отождествляется с многообразием  $PT^*V$ , полученным

из  $T^*V$  заменой каждого слоя  $T_q^*V$  кокасательного расслоения проективным пространством  $\mathbb{R}P^{n-1}$  прямых в  $T_q^*V$ , проходящих через нуль.

Многообразие  $PT^*V$  называется *проективизацией* кокасательного расслоения многообразия  $V$ . Оно имеет естественную контактную структуру, определенную формулой: скорость движения контактного элемента  $(\pi, q)$  принадлежит гиперплоскости контактной структуры, если скорость точки контакта  $q$  принадлежит гиперплоскости  $\pi$ . В локальных координатах на  $PT^*V$ , введенных выше, эта структура задается дифференциальной 1-формой

$$dq_n - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dq_i.$$

Таким образом, указанные координаты являются координатами Дарбу на многообразии контактных элементов.

Рассмотрим гладкое расслоение

$$\varrho: PT^*V \rightarrow V, \quad \varrho: (\pi, q) \mapsto q.$$

Оно лежандрово относительно естественной контактной структуры на многообразии  $PT^*V$ . Лежандровость каждого слоя  $\mathbb{R}G_0(n)$  этого расслоения следует из того, что скорость движения точки контакта при движении контактного элемента вдоль слоя расслоения  $\varrho$  равна нулю.

**Пример 18.3.** Пусть  $M$  — гладкое  $m$ -мерное подмногообразие в гладком  $n$ -мерном многообразии  $V$ . Тогда множество  $L$  всех контактных элементов  $(\pi, q)$  на  $V$ , таких, что гиперплоскость  $\pi$  касается  $M$  в точке  $q$ , является гладким  $(n-1)$ -мерным подмногообразием в  $PT^*V$ . Локальные координаты на  $L$  в окрестности точки  $(\pi, q)$  определяются набором, состоящим из  $m$  локальных координат на  $M$  в окрестности точки  $q$  и  $n-m-1$  локальных координат в окрестности точки  $\pi$  на многообразии Грассмана  $\mathbb{R}G_0(n-m)$  всех гиперплоскостей в  $T_qV$ , касающихся  $M$  в точке  $q$ .

Многообразие  $L$  лежандрово, поскольку скорость движения точки контакта  $q$  при движении контактного элемента  $(\pi, q)$  вдоль  $L$  лежит в  $T_qM$ , а значит, принадлежит  $\pi$ . Фронтом многообразия  $L$  относительно лежандровой проекции  $\varrho$  является исходное многообразие  $M$ .

**Пример 18.4.** Пусть  $M$  — гладкая коориентированная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$  и  $\nu_x$  — единичный нормальный вектор к  $M$  в точке  $x$ , определяющий ориентацию. Рассмотрим проективизацию  $PT^*\mathbb{R}^n$  кокасательного расслоения пространства  $\mathbb{R}^n$  и лежандрово расслоение

$$\varrho: PT^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varrho: (\pi, q) \mapsto q.$$

Для каждого  $t \in \mathbb{R}$  определено подмножество  $L_t \subset PT^*\mathbb{R}^n$ , состоящее из контактных элементов  $(\pi_x^t, q_x^t)$ ,  $x \in M$ , где  $q_x^t = x + t\nu_x$ , а гиперплоскость  $\pi_x^t$  проходит через точку  $q_x^t$  и коллинеарна касательной гиперплоскости к  $M$  в точке  $x$ . Это множество является гладким  $(n-1)$ -мерным подмногообразием в пространстве  $PT^*\mathbb{R}^n$ .

Многообразие  $L_t$  лежандрово, поскольку вектор скорости нормального вектора  $\nu_x$  при движении контактного элемента  $(\pi_x^t, q_x^t)$  вдоль многообразия  $L_t$  ортогонален  $\nu_x$ , а значит, вектор скорости точки  $q_x^t$  лежит в гиперплоскости  $\pi_x^t$ . Фронтом многообразия  $L_t$  относительно лежандровой проекции  $\varrho$  является  $t$ -эквилидистанта гиперповерхности  $M$  (см. пример 16.7, с. 121).

**Пример 18.5.** Проективизация  $PT^*\mathbb{R}^n$  кокасательного расслоения пространства  $\mathbb{R}^n$  является пространством ещё одного естественного гладкого расслоения:

$$\vartheta: PT^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}G(n), \quad \vartheta: (\pi, q) \mapsto \pi.$$

Его базой является гладкое  $n$ -мерное многообразие Грассмана  $\mathbb{R}G(n)$  всех гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^n$ , как проходящих, так и не проходящих через начало координат (см. пример 4.1, с. 31). Слоем служит аффинное пространство  $\mathbb{R}^{n-1}$  всех точек гиперплоскости в  $\mathbb{R}^n$ . Расслоение  $\vartheta$  лежандрово, поскольку при движении контактного элемента  $(\pi, q)$  вдоль слоя расслоения  $\vartheta$  точка контакта  $q$  остается в гиперплоскости  $\pi$ .

Пусть  $M$  — произвольное гладкое подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ . Оно определяет лежандрово подмногообразие  $L \subset PT^*\mathbb{R}^n$ , состоящее из всех таких контактных элементов  $(\pi, q)$ , что гиперплоскость  $\pi$  касается  $M$  в точке  $q$ . Фронтом многообразия  $L$  относительно лежандровой проекции  $\vartheta$  является множество всех касательных гиперплоскостей к многообразию  $M$ .

**Пример 18.6.** Рассмотрим пространство  $J^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n-1}$  с координатами  $(P, Q, u)$ , где  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$P = (t, p), \quad t = (t_1, \dots, t_k), \quad p = (p_{k+1}, \dots, p_{n-1}),$$

$$Q = (x, q), \quad x = (x_1, \dots, x_k), \quad q = (q_{k+1}, \dots, q_{n-1}).$$

Дифференциальная 1-форма

$$du - P dQ = du - t dx - p dq$$

определяет контактную структуру в  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Отображение

$$\rho: \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (P, Q, u) \mapsto (Q, u), \quad (48)$$

является лежандровым расслоением с базой  $\mathbb{R}^n = \{(Q, u)\}$ .

Пусть  $S = S(t, q)$  — гладкая функция переменных  $t, q$ . Тогда система уравнений

$$x = -\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial S(t, q)}{\partial q}, \quad u = S(t, q) - t \frac{\partial S(t, q)}{\partial t} \quad (49)$$

определяет гладкое лежандрово подмногообразие

$$L = \{(t, q) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n-1}.$$

Формула

$$f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, q) \mapsto \left( -\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, q, S(t, q) - t \frac{\partial S(t, q)}{\partial t} \right), \quad (50)$$

задаёт лежандрово отображение

$$f: L \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n-1} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^n.$$

Фронт этого отображения состоит из таких точек  $(x, q, u) \in \mathbb{R}^n$ , что функция  $S(t, q) + xt - u$  от  $t$  имеет критическую точку с нулевым критическим значением.

Пространство  $W$  всех вложений  $i: L \hookrightarrow E$  с лежандровым образом снабдим  $C^\infty$ -топологией Уитни. Будем говорить, что утверждение о лежандровых отображениях справедливо для отображения

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V$$

общего положения, если существует такое открытое всюду плотное подмножество  $U \subset W$ , что это утверждение имеет место для любого  $i \in U$ .



**Определение.** Два лежандровых отображения

$$f_1: L_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\rho_1} V_1 \quad \text{и} \quad f_2: L_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\rho_2} V_2$$

называются *лежандрово эквивалентными*, если существуют такие диффеоморфизмы

$$\Phi: E_1 \rightarrow E_2, \quad \varphi: V_1 \rightarrow V_2, \quad \varepsilon: L_1 \rightarrow L_2,$$

что  $\Phi$  переводит контактную структуру на  $E_1$  в контактную структуру на  $E_2$ , а диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\rho_1} & V_1 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi \\ L_2 & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\rho_2} & V_2 \end{array}$$

коммутативна.

**Замечание.** Диффеоморфизм контактных многообразий, переводящий контактную структуру первого многообразия в контактную структуру второго, называется *контактоморфизмом*. Контактоморфизм, переводящий слои первого лежандрова расслоения в слои второго, называется *лежандровой эквивалентностью*. Лежандрова эквивалентность индуцирует диффеоморфизм баз лежандровых расслоений, который переводит фронты лежандрово эквивалентных лежандровых отображений друг в друга.

Класс эквивалентности ростка лежандрова отображения в критической точке относительно лежандровой эквивалентности называется (*лежандровой*) *особенностью*.

**Определение.** Росток лежандрова отображения

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V$$

в точке  $x \in L$  называется (*лежандрово*) *устойчивым*, если для любого лежандрова отображения

$$\tilde{f}: L \xrightarrow{\tilde{i}} E \xrightarrow{\rho} V,$$

близкого к  $f$ , найдётся точка  $\tilde{x} \in I$ , близкая к  $x$  и такая, что росток  $\tilde{f}$  в  $\tilde{x}$  лежандрово эквивалентен ростку  $f$  в  $x$ . Росток  $f$  в  $x$  называется *простым*, если ростки всех близких лежандровых отображений во всех близких точках принадлежат конечному числу классов лежандровой эквивалентности.

**Теорема Арнольда о лежандровых особенностях [4].** *Простые лежандрово устойчивые ростки лежандровых отображений в гладкое  $n$ -мерное многообразие лежандрово эквивалентны росткам отображения (50) в нуле, где  $S = S(t, q)$  — функция одного из следующих типов, соответствующих натуральным  $\mu$ , не превосходящим  $n$ :*

$$A_\mu: S = t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1}t_1^{\mu-1} + \dots + q_2t_1^2, \quad \mu \geq 1;$$

$$D_\mu^\pm: S = t_1^2t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1}t_2^{\mu-2} + \dots + q_3t_2^2, \quad \mu \geq 4;$$

$$E_6: S = t_1^3 + t_2^4 + q_5t_1t_2^2 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2, \quad \mu = 6;$$

$$E_7: S = t_1^3 + t_1t_2^3 + q_6t_1^2t_2 + q_5t_1^2 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2, \quad \mu = 7;$$

$$E_8: S = t_1^3 + t_2^5 + q_7t_1t_2^3 + q_6t_1t_2^2 + q_5t_2^3 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2, \quad \mu = 8.$$

*Лежандровы отображения общего положения в многообразии размерности  $n \leq 6$  могут иметь лишь простые устойчивые особенности.*

Тип функции  $S$  определяет тип особенности (ростка) лежандрова отображения. Число  $\mu$  называют *коразмерностью* соответствующей лежандровой особенности. Если  $\mu$  нечётное, то особенности лежандровых отображений типов  $D_\mu^+$  и  $D_\mu^-$  лежандрово эквивалентны и называются особенностями типа  $D_\mu$ . В остальных случаях лежандровы ростки перечисленных типов попарно лежандрово не эквивалентны.

Тип ростка лежандрова отображения определяет *тип ветви фронта* этого отображения в соответствующей точке. Если росток фронта состоит из одной ветви, то тип ветви называется *типом ростка фронта*.

Классификация простых лежандрово устойчивых ростков лежандровых отображений опирается на теорему Арнольда о критических точках функций (с. 112) и следующие утверждения (см. [8]).

**Предложение 18.7.** *Всякий росток лежандрова отображения в гладкое  $n$ -мерное многообразие лежандрово эквивалентен росту в нуле отображения (50).*

**Предложение 18.8.** *Росток в нуле лежандрова отображения (50) лежандрово устойчив, если и только если деформация*

$$S(t, q) + xt - u$$

*ростка в нуле функции  $S(t, 0)$  с параметрами  $x, q, u$  является  $V$ -версальной.*

Список функций теоремы Арнольда получается теперь из списка  $R$ -миниверсальных деформаций в примере 13.6 (с. 102) после замены символа  $\pm$  на  $+$  в формулах деформаций ростков функций  $\pm x^{\mu+1}$  и  $x^3 \pm y^4$ . Что касается задачи приведения ростка конкретного лежандрова отображения к нормальной форме лежандровой эквивалентностью, то она сводится к более простой задаче классификации семейств функций.

Рассмотрим лежандрово многообразие (49). Его можно определить при помощи семейства

$$F(t, \lambda) = S(t, q) + xt - u$$

функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda = (Q, u)$ , где  $Q = (x, q) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , следующим образом:

$$L = \left\{ (P, \lambda) \mid \exists t: F = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = 0, P = \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}. \quad (51)$$

Обратно, рассмотрим гладкое семейство  $F(t, \lambda)$  функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что росток этого семейства в точке  $(t_0, \lambda_0)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$1) F(t_0, \lambda_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, \lambda_0) = 0;$$

2) ранг матрицы Якоби отображения

$$(t, \lambda) \mapsto \left( F(t, \lambda), \frac{\partial F}{\partial t}(t, \lambda) \right)$$

в точке  $(t_0, \lambda_0)$  равен  $k + 1$ .

Тогда существует такое разбиение  $\lambda = (Q, u)$ , что  $\frac{\partial F}{\partial u}(t_0, \lambda_0) \neq 0$ , и формула (51) задаёт росток гладкого лежандрова подмногообразия  $L$  в пространстве лежандрова расслоения (48) в точке  $(P_0, Q_0, u_0)$ , где  $P_0 = \frac{\partial F}{\partial Q}(t_0, \lambda_0)$ ,  $(Q_0, u_0) = \lambda_0$ . При этом  $F$  называют *производящим семейством* как самого ростка  $L$ , так и ростка его лежандрова проектирования в  $\mathbb{R}^n$  вдоль слоев расслоения (48).

На практике лежандровы отображения часто уже изначально заданы производящими семействами (иногда глобально).

**Пример 18.9.** Пусть  $M$  — гладкая коориентированная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$  и  $\nu_x$  — единичный нормальный вектор к  $M$  в точке  $x$ , определяющий ориентацию. Зафиксируем произвольное  $t \in \mathbb{R}$  и рассмотрим лежандрово подмногообразие  $L_t \subset PT^*\mathbb{R}^n$ , образованное контактными элементами  $(\pi_x^t, q_x^t)$ ,  $x \in M$ , где  $q_x^t = x + t\nu_x$ , а гиперплоскость  $\pi_x^t$  проходит через точку  $q_x^t$  и коллинеарна касательной гиперплоскости к  $M$  в точке  $x$  (см. пример 18.4, с. 150).

Семейство

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} (|\lambda - x|^2 - t^2)$$

функций от  $x \in M$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , где  $|\lambda - x|$  — расстояние между точками  $\lambda$  и  $x$ , является производящим семейством ростка лежандрова многообразия  $L_t$  в точке  $(\pi_{x_0}^t, q_{x_0}^t)$  при любом  $t \neq 0$ . Действительно, вектор с началом в точке  $x$  и концом в точке  $\lambda$  имеет длину  $|\lambda - x|$  и ортогонален касательной гиперплоскости к  $M$  в точке  $x$ , если и только если  $F(x, \lambda) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0$ .

**Пример 18.10.** Росток любого гладкого  $k$ -мерного подмногообразия в  $\mathbb{R}^n$  в подходящих евклидовых координатах  $P, y$ , где  $P = (t, p)$ ,  $t \in \mathbb{R}^k$ ,  $p \in \mathbb{R}^{n-k-1}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , является ростком гладкого многообразия  $M$ , заданного формулами  $p = p(t)$ ,  $y = y(t)$ . Всякая трансверсальная оси  $y$  (*невертикальная*) гиперплоскость  $\pi$  в  $\mathbb{R}^n$  определяется уравнением  $y + PQ - u = 0$ , где  $Q = (x, q)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $q \in \mathbb{R}^{n-k-1}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Набор  $\lambda = (Q, u)$  задаёт локальные координаты в области многообразия Грассмана  $\mathbb{R}G(n)$ , образованной невертикальными гиперплоскостями (см. пример 4.1, с. 31).

Рассмотрим семейство  $F(t, \lambda) = S(t, q) + xt - u$  функций от  $t$  с параметром  $\lambda = (x, q, u)$ , где  $S(t, q) = y(t) + p(t)q$ . Оно является производящим семейством лежандрова подмногообразия

$L \subset PT^*\mathbb{R}^n$ , образованного контактными элементами невертикальных касательных гиперплоскостей к  $M$  в точках касания (см. пример 18.5, с. 150). Действительно, касание гиперплоскости  $\pi$  с многообразием  $M$  в точке  $(P(t), y(t))$ , где  $P(t) = (t, p(t))$ , эквивалентно двум условиям:  $F(t, \lambda) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \lambda) = 0$ .

**Определение.** Ростки семейств  $F_1(t, \lambda)$  и  $F_2(t, \lambda)$  функций от  $t \in \mathbb{R}^k$  с параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  в точке  $(t_0, \lambda_0)$  называются *V-эквивалентными* (как ростки семейств<sup>1</sup>), если существуют гладкие отображения

$$h: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

и гладкая функция  $g: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что

$$h(t_0, \lambda_0) = t_0, \quad \varphi(\lambda_0) = \lambda_0, \quad g(t_0, \lambda_0) \neq 0,$$

росток отображения

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, \quad (t, \lambda) \mapsto (h(t, \lambda), \varphi(\lambda)),$$

в точке  $(t_0, \lambda_0)$  является ростком диффеоморфизма и

$$F_2(t, \lambda) = g(t, \lambda) F_1(h(t, \lambda), \varphi(\lambda))$$

для всех  $(t, \lambda)$ , достаточно близких к  $(t_0, \lambda_0)$ .

**Замечание.** Если  $g(t, \lambda) \equiv 1$ , то ростки семейств  $F_1(t, \lambda)$  и  $F_2(t, \lambda)$  являются *R-эквивалентными* (определение *R-эквивалентности* ростков семейств см. на с. 135).

**Определение.** Ростки семейств  $F_1(\cdot, \lambda)$  и  $F_2(\cdot, \lambda)$  с общим параметром  $\lambda$ , но разными, вообще говоря, размерностями пространства аргументов называются *стабильно V-эквивалентными*, если они становятся *V-эквивалентными* (как ростки семейств с параметром  $\lambda$ ) после прямого сложения с ростками в нуле невырожденных квадратичных форм от новых аргументов (своих для каждого из ростков  $F_1, F_2$ ).

<sup>1</sup>Сравните с определением *V-эквивалентности* ростков функций на с. 41.

**Предложение 18.11** [8]. *Ростки лежандровых отображений лежандрово эквивалентны тогда и только тогда, когда они определены стабильно  $V$ -эквивалентными ростками производящих семейств.*

Из предложений 18.8 и 18.11 следует, что если росток в нуле лежандрова отображения с производящим семейством  $F(t, \lambda)$  прост и лежандрово устойчив  $\text{a rg}i0i$ , то для определения его типа необходимо найти тип критической точки в нуле функции  $\eta(t) = F(t, 0)$  относительно стабильной  $R$ -эквивалентности, а затем определить тип соответствующего ростка в списке теоремы Арнольда о критических точках (с. 112) относительно  $V$ -эквивалентности.

Для приведения ростка семейства  $F(t, \lambda)$  к нормальной форме стабильной  $V$ -эквивалентностью (включая случай неустойчивого ростка лежандрова отображения) надо сначала стабильной  $R$ -эквивалентностью привести росток функции  $\eta(t)$  в нуле к такой нормальной форме  $\tilde{\eta}(t)$ , что  $d^2\tilde{\eta}|_0 = 0$  (см. § 15). Для ростка лежандрова отображения общего положения кратность  $\mu$  ростка  $\tilde{\eta}(t)$  в нуле конечна.

Предположим, что  $1, e_1(t), \dots, e_{\mu-1}(t)$  — система образующих локальной алгебры ростка в нуле градиентного отображения  $t \mapsto \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}$ . Тогда росток в нуле функции

$$(t, b) \mapsto \tilde{\eta}(t) + b_{\mu-1}e_{\mu-1}(t) + \dots + b_1e_1(t) + b_0$$

является  $R$ -миниверсальной деформацией ростка  $\tilde{\eta}(t)$  с параметрами  $b = (b_0, b_1, \dots, b_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$  (см. предложение 13.5, с. 101).

Следовательно, росток семейства  $F(t, \lambda)$  в нуле стабильно  $R$ -эквивалентен ростку в нуле производящего семейства

$$\tilde{F}(t, \lambda) = \tilde{\eta}(t) + b_{\mu-1}(\lambda)e_{\mu-1}(t) + \dots + b_1(\lambda)e_1(t) + b_0(\lambda),$$

где  $\lambda \mapsto b(\lambda)$  — гладкое отображение,  $b(0) = 0$ . Это отображение можно затем постараться упростить  $V$ -эквивалентностью семейств.

Отметим, что в результате вычислений, проведённых по указанной схеме, была получена классификация особенностей лежандровых отображений общего положения в пространство размерности  $n \leq 11$  (см. [8]).

**Пример 18.12.** Пусть росток  $\eta(t)$  в нуле  $R$ -эквивалентен ростку в нуле функции (38) на с. 112 и  $\lambda = (x_1, x_2, x_3, q_4, q_5, q_6, u) \in \mathbb{R}^7$ . Тогда росток в нуле производящего семейства  $F(t, \lambda)$  ростка лежандрова отображения общего положения  $V$ -эквивалентен ростку в нуле производящего семейства

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \lambda) = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + at_1t_2t_3 + q_6t_1t_2 + q_5t_1t_3 + q_4t_2t_3 + \\ + x_3t_3 + x_2t_2 + x_1t_1 - u, \end{aligned}$$

где  $a \neq -3$ . Число  $a$  является модулем (непрерывным инвариантом; см. с. 113) ростка лежандрова отображения относительно лежандровой эквивалентности.

Таким образом, у лежандровых отображений в пространство размерности  $n \geq 7$  встречаются неустойчивые непростые особенности, не устранимые малой деформацией отображения.

**Лежандровы мультиособенности.** Пусть лежандрово отображение  $f: L \rightarrow V$  имеет лишь простые устойчивые особенности. Тогда каждой точке  $y \in V$  можно сопоставить формальное коммутативное произведение  $\mathcal{A}$  символов из списка теоремы Арнольда

$$A_\mu (\mu = 1, 2, \dots), \quad D_{2k+2}^-, D_{2k+2}^+, D_{2k+3} (k = 1, 2, \dots), \quad E_6, E_7, E_8,$$

обозначающих типы ростков отображения  $f$  в прообразах точки  $y$ . Если прообраз  $f^{-1}(y)$  пуст, т. е. точка  $y$  лежит в дополнении к фронту отображения  $f$ , то полагают  $\mathcal{A} = \mathbf{1}$ .

Произведение  $\mathcal{A}$  называется *типом мультиособенности* лежандрова отображения  $f$  в точке  $y$  (или *типом моноособенности*, если  $y$  имеет лишь один прообраз). Тип мультиособенности отображения  $f$  в точке  $y$  определяет тип ростка его фронта в этой точке. Все ростки типа  $\mathcal{A}$  фронта общего положения диффеоморфны.

Для лежандрова отображения  $f$  общего положения множество  $\mathcal{A}_f$  точек  $y$ , в которых  $f$  имеет мультиособенность типа  $\mathcal{A}$ , является гладким подмногообразием в  $V$ . Оно называется *многообразием мультиособенностей типа  $\mathcal{A}$* . Коразмерность многообразия  $\mathcal{A}_f$  в  $V$  равна сумме коразмерностей особенностей, которые отображение  $f$  имеет в прообразах точки  $y$ . Эта сумма

обозначается через  $\text{codim } \mathcal{A}$  и называется *коразмерностью мультиособенности типа  $\mathcal{A}$* .

**Пример 18.13.** Фронт общего положения на плоскости является кривой, которая не имеет других особенностей, кроме точек возврата, соответствующих лежандровым особенностям типов  $A_2$ , и точек трансверсального пересечения двух гладких ветвей.

Росток типа  $A_2$  лежандрова отображения в плоскость является ростком в нуле сужения проекции

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t_1, x_1, q_2) \mapsto (x_1, q_2),$$

на кривую

$$4t_1^3 + 2q_2t_1 + x_1 = 0, \quad 12t_1^2 + 2q_2 = 0,$$

являющуюся множеством критических точек сборки Уитни. Разбиение образа этого отображения в окрестности нуля на многообразия лежандровых мультиособенностей изображено на рис. 19. Трансверсальные самопересечения фронта соответствуют лежандровым мультиособенностям типа  $A_1^2$ .

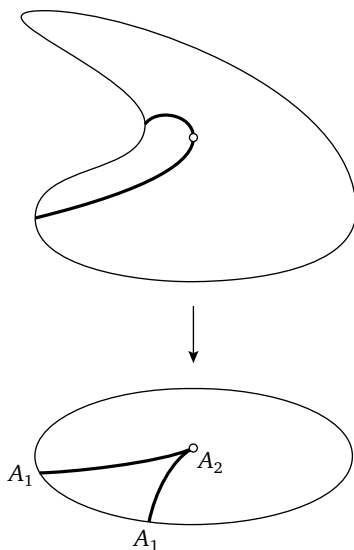


Рис. 19. Росток лежандрова отображения с особенностью типа  $A_2$



Отметим, что различие нижних индексов в обозначениях типов  $A_3^\pm$  и  $A_2$  точек возврата каустик и фронтов на плоскости объясняется различием кратностей лагранжевых и лежандровых ростков указанных типов: они равны 3 и 2 соответственно.

**Замечание.** Гладкое отображение общего положения прямой в плоскость, в отличие от лежандрова отображения общего положения, не имеет критических точек (см. пример 9.3, с. 70). Поэтому простые лежандрово устойчивые особенности лежандровых отображений не являются, вообще говоря, устойчивыми особенностями этого отображения в пространстве всех гладких отображений  $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  относительно  $RL$ -эквивалентности.

**Пример 18.14.** Фронт общего положения в трёхмерном пространстве является поверхностью, которая не имеет других особенностей, кроме *ребер возврата*, образованных точками, которые соответствуют лежандровым особенностям типа  $A_2$ , точечных особенностей типа  $A_3$  (*ласточкин хвост*) и трансверсальных самопересечений.

Ребро возврата фронта изображено на рис. 20а. Росток фронта с особенностью типа ласточкин хвост представлен на рис. 20б. Самопересечения фронта определяются лежандровыми мультиособенностями типов  $A_1^2$  (линия трансверсального пересечения

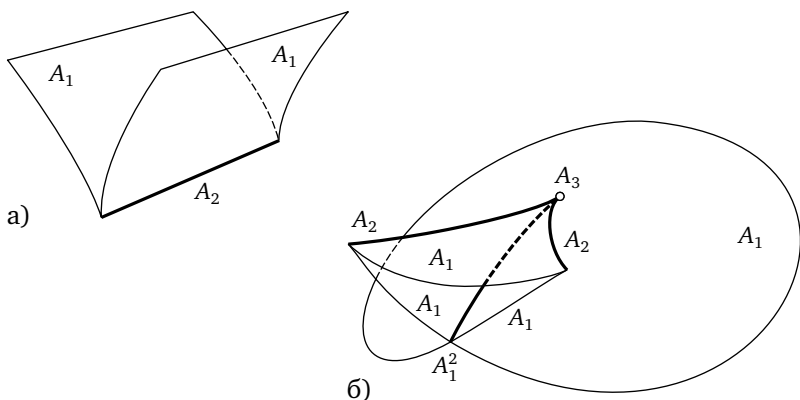


Рис. 20. Ростки фронта с особенностями типов а)  $A_2$  и б)  $A_3$

двух гладких ветвей),  $A_1^3$  (точка трансверсального пересечения гладкой ветви с линией трансверсального пересечения двух других гладких ветвей) и  $A_2A_1$  (трансверсальное пересечение ребра возврата с гладкой ветвью).

**Замечание.** Точкой уплощения гладкой кривой в  $\mathbb{R}^3$  называется точка, в которой кручение кривой равно нулю. Точкам уплощения кривой общего положения соответствуют особенности типа ласточкин хвост на фронте, образованном касательными плоскостями к кривой в многообразии всех плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ .

Гладкая пространственная кривая называется *слабо выпуклой*, если через каждую её точку проходит опорная плоскость, т. е. касательная плоскость, от которой кривая лежит с одной стороны. В работе [37] доказано, что всякая гладкая замкнутая слабо выпуклая кривая со всюду ненулевой кривизной в  $\mathbb{R}^3$  имеет не менее четырёх точек уплощения. Следовательно, фронт касательных плоскостей к гладкой замкнутой слабо выпуклой кривой общего положения в  $\mathbb{R}^3$  имеет не менее четырёх особенностей типа ласточкин хвост.

Из этих оценок следует теорема о четырёх вершинах плоской кривой и оценка числа точек возврата её эволюты (см. с. 140). Действительно, согласно старой лемме Кнезера [50] вершинам плоской кривой соответствуют точки уплощения её прообраза при стереографической проекции сферы на плоскость. Относительно недавно выяснилось, что эта лемма является проявлением глубокой связи между теориями лагранжевых и лежандровых особенностей (см. [38]). В частности, эволюта гладкого компактного подмногообразия общего положения в  $\mathbb{R}^n$  и фронт касательных гиперплоскостей к его стереографическому прообразу в  $\mathbb{R}^{n+1}$  имеют одинаковое количество изолированных особенностей каждого из типов  $A, D, E$ .

**Перестройки фронтов.** Вернемся к  $t$ -эквилистанте эллипса, изображенной на рис. 14, с. 122. При изменении  $t$  она меняется, а вместе с ней перестраиваются и её особенности. Математически эти перестройки описываются следующим образом.

Предположим, что в пространстве  $E$  лежандрова расслоения  $\rho: E \rightarrow V$  задано семейство лежандровых подмногообразий  $i_c: L \hookrightarrow E$ , гладко зависящих от одного параметра  $c \in \mathbb{R}$ . Тогда

определено семейство лежандровых отображений

$$f_c: L \times \mathbb{R} \rightarrow V, \quad (\ell, c) \mapsto (\varrho \circ i_c)(\ell),$$

и соответствующее ему семейство фронтов  $\Sigma_c$  в базе  $V$  расслоения  $\varrho$ .

Пусть размерность  $n$  многообразия  $V$  не превышает пяти. Тогда лежандрово отображение  $f_c$  общего положения имеет лишь простые устойчивые особенности. Отдельные лежандровы отображения в семействе  $f_c$  общего положения могут иметь более сложные особенности. Если отображение  $f_{c_0}$  имеет особенность не общего положения в некоторой точке  $\ell_0 \in L$ , то говорят, что росток семейства  $f_c$  в точке  $(\ell_0, c_0)$  определяет локальную перестройку в семействе фронтов  $\Sigma_c$ .

Семейство  $\Sigma_c$  является семейством сечений образа  $\Sigma$  отображения

$$L \times \mathbb{R} \rightarrow V \times \mathbb{R}, \quad (\ell, c) \mapsto (f_c(\ell, c), c),$$

гиперповерхностями  $c = \text{const}$ . Локально это отображение лежандрово. Поэтому для семейства  $f_c$  общего положения гиперповерхность  $\Sigma$  в подходящих гладких координатах

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad q = (q_{k+1}, \dots, q_n)$$

в окрестности каждой своей точки задаётся следующим образом:

$$\Sigma = \left\{ (x, q, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists t \in \mathbb{R}^k : x = -\frac{\partial S(t, q)}{\partial t}, u = S(t, q) - t \frac{\partial S(t, q)}{\partial t} \right\},$$

где  $S = S(t, q)$  — одна из функций списка теоремы Арнольда о лежандровых особенностях с  $\mu \leq n + 1$ . Классификация локальных перестроек фронтов сводится к классификации неособых ростков в нуле гладких функций  $c = c(x, q, u)$  общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  относительно  $RL$ -эквивалентности, при которой диффеоморфизм пространства-прообраза сохраняет  $\Sigma$ .

Последняя задача была решена В. И. Арнольдом (см. [6]). В частности, оказалось, что все возможные локальные перестройки фронтов на плоскости в однопараметрических семействах лежандровых отображений общего положения описываются следующей таблицей:

$A_2: S = t_1^3$	$c = x_1 \pm q_2^2$
$A_3: S = t_1^4 + q_2 t_1^2$	$c = q_2$

Перестройка происходит в начале координат.

### Упражнения

1. Пусть  $M$  — гладкое компактное подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим множество  $L$ , состоящее из пар вида  $(S, q)$ , где  $q \in M$ , а  $S$  — либо гиперплоскость, либо сфера положительного радиуса, касающаяся  $M$  в точке  $q$ . Докажите, что  $L$  является гладким лежандровым подмногообразием в  $PT^*\mathbb{R}^{n+1}$ , а его естественное отображение  $f: (S, q) \mapsto S$  — лежандровым. В случае когда  $M$  — эллипс на плоскости, опишите множество центров окружностей  $S$ , являющихся особыми точками фронта отображения  $f$ .

2. Используя какую-нибудь компьютерную программу, изобразите локальные перестройки фронтов на плоскости в однопараметрических семействах лежандровых отображений общего положения.

## § 19. Распространение возмущений

Рассмотрим подробнее  $t$ -эквилистанту гладкой коориентированной гиперповерхности  $M$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (пример 16.7, с. 121). Изменение времени  $t$  приводит  $t$ -эквилистанту в движение.

Если число  $|t|$  мало, то  $t$ -эквилистанта является гладкой гиперповерхностью, диффеоморфной исходной гиперповерхности  $M$ . При больших  $|t|$  у  $t$ -эквилистанты могут быть особенности. Поскольку эквилистанта является фронтом (пример 18.4, с. 150), для гиперповерхности  $M$  общего положения в пространстве небольшой размерности ветви  $t$ -эквилистанты в общие моменты  $t$  могут иметь лишь простые устойчивые особенности.

Особенности ветвей  $t$ -эквилистанты лежат на эволюте гиперповерхности  $M$ . Более того, в момент  $t$  своего появления (или исчезновения) каждая такая особая точка является особой точкой эволюты. С течением времени особенности эквилистанты перестраиваются по общим формулам локальных перестроек особенностей фронтов в однопараметрических семействах общего положения (см. с. 161).

Движение эквилистант является примером распространения возмущений (см. [11]). В общем случае этот процесс описывается уравнением эйконала в кокасательном расслоении (одним из основных уравнений геометрической оптики). Все перечисленные выше свойства эквилистант сохраняются и для возмущений. Поэтому мы докажем их сразу в общем случае.

Рассмотрим кокасательное расслоение

$$\varrho: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p, q) \mapsto q,$$

пространства  $\mathbb{R}^n$ , где  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$  и  $p \in T_q^*\mathbb{R}^n$ . Параллельный перенос отождествляет  $\mathbb{R}^n$  со всеми его касательными пространствами. Поэтому каждый кокасательный вектор  $p$  определяется своими  $n$  компонентами  $p = (p_1, \dots, p_n)$  так, что

$$p(v) = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$$

для любого вектора  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Набор  $(p, q)$  задаёт систему координат на  $T^*\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $H: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Уравнение  $H(p, q) = 1$  называется уравнением эйконала. Предположим, что множество

решений этого уравнения не пусто и каждое решение удовлетворяет условию

$$p \frac{\partial H}{\partial p} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \neq 0. \quad (52)$$

Тогда уравнение эйконала задаёт гладкую гиперповерхность  $\Gamma$  в  $T^*\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим каноническую 1-форму  $\alpha = p dq$  кокасательного расслоения  $\varrho$  (стр. 127). Она определяет контактную гиперплоскость  $\alpha = 0$  в каждой точке пространства  $T^*\mathbb{R}^n$ , не лежащей в подпространстве  $p = 0$ . Контактная гиперплоскость  $\alpha = 0$  в каждой точке гиперповерхности  $\Gamma$  трансверсально пересекает её в этой точке в силу условия (52). Следовательно, нули сужения  $\alpha|_{\Gamma}$  формы  $\alpha$  на гиперповерхность  $\Gamma$  образуют на ней гладкое поле контактных гиперплоскостей.

**Предложение 19.1.** *Поле нулей формы  $\alpha|_{\Gamma}$  является контактной структурой.*

**Доказательство.** Пусть  $n > 1$  (при  $n = 1$  утверждение очевидно). Зафиксируем произвольную точку  $(p, q) \in \Gamma$ . Не ограничивая общности, можно считать, что в этой точке  $p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$ . Поэтому гиперповерхность  $\Gamma$  в окрестности точки  $(p, q)$  является графиком гладкой функции

$$p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, q),$$

а поле контактных гиперплоскостей  $\alpha = 0$  задаётся формулой

$$dq_n = -\frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{n-1} p_j dq_j.$$

Следовательно, внешний дифференциал формы  $\alpha|_{\Gamma}$  равен

$$\begin{aligned} d(\alpha|_{\Gamma}) &= dp_n \wedge dq_n + \sum_{j=1}^{n-1} dp_j \wedge dq_j = \\ &= -\frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{n-1} p_j dp_n \wedge dq_j + \sum_{j=1}^{n-1} dp_j \wedge dq_j = p_n \sum_{j=1}^{n-1} d\left(\frac{p_j}{p_n}\right) \wedge dq_j. \end{aligned}$$

Эта 2-форма невырожденная, поскольку набор

$$\left(\frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}; q_1, \dots, q_{n-1}\right)$$

определяет гладкие локальные координаты в контактной гиперплоскости поля  $\alpha|_{\Gamma} = 0$  в точке  $(p, q)$ . Предложение 19.1 доказано.  $\square$

Гиперповерхность  $\Gamma$  трансверсальна слоям кокасательного расслоения  $\varrho$  в силу условия (52). Следовательно, её пересечение с каждым слоем этого расслоения либо пусто, либо является гладким  $(n - 1)$ -мерным многообразием. Из условия (52) и теоремы о неявной функции также следует, что проекция гиперповерхности  $\Gamma$  на базу расслоения  $\varrho$  является открытым подмножеством в  $\mathbb{R}^n$ .

Далее мы будем предполагать, что гиперповерхность  $\Gamma$  пересекает каждый слой расслоения  $\varrho$ , причём сужение

$$\varrho|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$$

кокасательного расслоения  $\varrho$  на гиперповерхность  $\Gamma$  является гладким расслоением. Слои этого расслоения являются интегральными многообразиями контактной структуры  $\alpha|_{\Gamma} = 0$ . Следовательно, расслоение  $\varrho|_{\Gamma}$  лежандрово.

Функция  $H$  определяет дифференциальное уравнение с частными производными

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial q}, q\right) = 1 \quad (53)$$

в базе  $\mathbb{R}^n$  лежандрова расслоения  $\varrho|_{\Gamma}$ . Это уравнение называется уравнением Гамильтона — Якоби, функция  $H$  — его гамильтонианом, а пространство  $\mathbb{R}^n$  — конфигурационным.

Пусть  $u = u(q)$  — гладкое решение уравнения (53) и  $\Sigma_0$  — непустая гиперповерхность уровня функции  $u$ . Из условия (52) следует, что  $\Sigma_0$  — гладкая гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ . Формула

$$p = \frac{\partial u}{\partial q}$$

определяет поднятие  $\Sigma_0$  на  $\Gamma$  до гладкого  $(n - 1)$ -мерного подмногообразия  $L_0$ . Это подмногообразие лежандрово, а  $\Sigma_0$  является его фронтом относительно лежандровой проекции  $\varrho|_{\Gamma}$ .

Действительно, касательные гиперплоскости к гиперповерхности  $\Sigma_0$  определяются уравнением  $\frac{\partial u}{\partial q} dq = 0$ . Поэтому  $L_0$  является интегральным многообразием поля гиперплоскостей  $\alpha = 0$ .

С другой стороны, многообразие  $L_0$  касается касательных гиперплоскостей гиперповерхности  $\Gamma$ , поскольку лежит в  $\Gamma$ . Следовательно,  $L_0$  является интегральным многообразием контактной структуры  $\alpha|_{\Gamma} = 0$ .

Уравнение Гамильтона — Якоби может иметь негладкие (многозначные) решения. Их гиперповерхности уровня могут иметь особенности. Мы докажем, что эти гиперповерхности также являются фронтами.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} / p, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} / p \frac{\partial H}{\partial p} \quad (54)$$

в дополнении к гиперповерхности  $p \frac{\partial H}{\partial p} = 0$  в пространстве  $T^*\mathbb{R}^n$ . Гамильтониан  $H$  является первым интегралом этой системы. Поэтому каждая её фазовая кривая  $p = p(t)$ ,  $q = q(t)$  целиком лежит на гиперповерхности уровня гамильтониана  $H$ . Из условия (52) следует, что система (54) определена в окрестности гиперповерхности  $\Gamma$ , а её фазовые кривые, лежащие на этой гиперповерхности, являются гладкими кривыми. Они называются *характеристиками уравнения* (53).

Проекции характеристик в конфигурационное пространство являются гладкими кривыми и называются *лучами*. Лучи трансверсально пересекают гиперповерхность  $\Sigma_0$  в силу условия (52). Скорость изменения значения гладкого решения  $u = u(q)$  уравнения (53) при движении точки  $q$  по лучу  $q = q(t)$  вычисляется по формуле

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} = p \dot{q} = p \frac{\partial H}{\partial p} / p \frac{\partial H}{\partial p} = 1.$$

Фазовое векторное поле системы (54) в окрестности каждой точки фазового пространства определяет преобразование  $\varphi_t$  за время  $t$  (см. с. 125). Это преобразование является локальным диффеоморфизмом, сохраняющим гиперповерхность  $\Gamma$ .

**Предложение 19.2.** *Преобразование  $\varphi_t$  сохраняет контактную структуру  $\alpha|_{\Gamma} = 0$ .*

**Доказательство.** Проверим, что производная Ли (см. с. 125) формы  $\alpha$  по направлению фазового векторного поля  $v$  системы (54) равна нулю на всех касательных пространствах к  $\Gamma$ . Действи-



тельно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v(\alpha) &= i_v(d\alpha) + d(i_v\alpha) = i_v(dp \wedge dq) + d\left(p \frac{\partial H}{\partial p} / p \frac{\partial H}{\partial p}\right) = \\ &= -dH / p \frac{\partial H}{\partial p} + d(1) = -dH / p \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}$$

по формуле Картана. Следовательно,  $\mathcal{D}_v(\alpha)|_\Gamma = 0$ , поскольку дифференциал  $dH$  равен нулю на касательных пространствах к гиперповерхности  $\Gamma$ . Предложение 19.2 доказано.  $\square$

Таким образом, преобразование  $\varphi_t$  переводит интегральные многообразия контактной структуры  $\alpha|_\Gamma = 0$  в интегральные. В частности, росток многообразия  $L_0$  в результате преобразования  $\varphi_t$  переходит в гладкое лежандрово подмногообразие  $L_t$  в гиперповерхности  $\Gamma$ . Фронт  $\Sigma_t$  многообразия  $L_t$  относительно лежандровой проекции  $\rho_\Gamma$  является гиперповерхностью уровня решения уравнения Гамильтона — Якоби. Эта гиперповерхность гладкая для всех  $t$ , достаточно близких к нулю. При больших  $|t|$  фронт  $\Sigma_t$  может иметь особенности.

Остается выяснить, где лежат точки фронта  $\Sigma_t$ , в которых хотя бы одна из его ветвей является особой, и когда такие точки появляются и исчезают.

Рассмотрим множество  $\mathcal{L}$  точек гиперповерхности  $\Gamma$ , лежащих на характеристиках уравнения Гамильтона — Якоби (53), которые пересекают многообразие  $L_0$ . Это множество является гладким  $n$ -мерным подмногообразием в  $T^*\mathbb{R}^n$  с локальными координатами  $(x, t)$ , где  $x$  — локальная координата на  $L_0$ , а  $t \in \mathbb{R}$ . Лежандровы многообразия  $L_t$  являются гладкими гиперповерхностями в  $\mathcal{L}$ , трансверсальными характеристикам.

**Предложение 19.3.** *Многообразие  $\mathcal{L}$  является лагранжевым подмногообразием в  $T^*\mathbb{R}^n$  относительно симплектической структуры  $\omega = d\alpha$ .*

**Доказательство.** Производная Ли формы  $\omega$  по направлению фазового векторного поля  $v$  системы (54) равна

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v(\omega) &= i_v(d\omega) + d(i_v\omega) = \\ &= i_v(0) + d\left(-dH / p \frac{\partial H}{\partial p}\right) = -d\left(1 / p \frac{\partial H}{\partial p}\right) \wedge dH \end{aligned}$$

по формуле Картана (см. с. 125). Сужение формы  $\mathcal{D}_v(\omega)$  на гиперповерхность  $\Gamma$  равно нулю. Следовательно, преобразование  $\varphi_t$  сохраняет сужение формы  $\omega$  на  $\Gamma$  и нам достаточно убедиться лишь в том, что форма  $\omega$  равна нулю на касательных пространствах к  $\mathcal{L}$  в точках многообразия  $L_0$ .

Пусть  $x = (p, q) \in L_0$  и  $w \in T_x \mathcal{L}$ . Тогда

$$\omega(v, w) = (i_v \omega)(w) = -dH(w) \Big|_p \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Если  $w \in T_x L_0$ , то

$$dp(w) = \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}(q) dq(w),$$

поскольку  $p = \frac{\partial u}{\partial q}$ . Следовательно, сужение формы  $\omega$  на пространство  $T_x L_0$  равно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}(q) dq \wedge dq.$$

Но эта дифференциальная 2-форма равна нулю по теореме о равенстве смешанных производных гладкой функции. Предложение 19.3 доказано.  $\square$

Пусть  $x \in L_0$  и  $\gamma_x : t \mapsto q = \gamma_x(t)$  — луч в конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , проходящий через точку  $\varrho(x)$ . Тогда росток проектирования многообразия  $\mathcal{L}$  в конфигурационное пространство  $\mathbb{R}^n$  вдоль слоев расслоения  $\varrho$  является ростком лагранжева отображения

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, t) \mapsto q = \gamma_x(t). \quad (55)$$

Каустика этого отображения является образом множества точек  $(x, t)$ , в которых ранг его матрицы Якоби меньше  $n$ , т. е. является огибающей семейства лучей  $\gamma_x, x \in L_0$  (см. пример 16.4, с. 120).

С другой стороны, при любом фиксированном  $t$  росток проектирования многообразия  $L_t$  в  $\mathbb{R}^n$  вдоль слоев расслоения  $\varrho|_{\Gamma}$  является ростком лежандрова отображения

$$L_t \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto q = \gamma_x(t).$$

Особые точки ветвей фронта этого отображения являются образами точек  $x$ , в которых ранг его матрицы Якоби меньше  $n - 1$ .

Поэтому точки фронта  $\Sigma_t$ , в которых хотя бы одна из его ветвей является особой, лежат на огибающей семейства лучей уравнения (53).

Точки негладкости ветвей на распространяющемся фронте  $\Sigma_t$  могут появиться (или исчезнуть) только в особых точках ветвей огибающей семейства лучей. Действительно, пусть ветвь огибающей семейства лучей  $\gamma_x$ ,  $x \in L_0$ , в точке  $(x_0, t_0)$  является ростком гладкой гиперповерхности, т. е. росток лагранжева отображения (55) в этой точке имеет особенность типа  $A_2$ . Тогда ветвь фронта  $\Sigma_{t_0}$  в точке  $x_0$  является особой. При этом росток множества критических точек отображения (55) в точке  $(x_0, t_0)$  является ростком гладкой гиперповерхности в  $\mathcal{L}$ , трансверсально пересекающей гиперповерхность  $L_{t_0}$  в этой точке. Следовательно, для любого  $t$ , достаточно близкого к  $t_0$ , существует  $x \in L_0$ , близкое к  $x_0$  и такое, что ветвь фронта  $\Sigma_t$  в точке  $x$  является особой.

В заключение отметим, что распространение эквидистант гладких гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^n$  описывается уравнением Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\right)^2 = 1. \quad (56)$$

### Упражнения

1. Проверьте, что гамильтониан, определяющий уравнение (56), удовлетворяет всем предположениям, сделанным в этом параграфе.

2. Что изменится, если сужение кокасательного расслоения  $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  на гиперповерхность уровня гамильтониана будет гладким расслоением только над некоторой областью в  $\mathbb{R}^n$ ?

## § 20. Строение особенностей каустик и фронтов

Рисунки особенностей каустик и фронтов на плоскости и в трёхмерном пространстве, приведённые в параграфах 17 и 18, позволяют качественно описать строение всех этих особенностей. В многомерных пространствах аналогичная задача становится очень трудной. В настоящем параграфе мы расскажем лишь о некоторых результатах, полученных при изучении топологических свойств простых устойчивых лагранжевых и лежандровых особенностей. Для этого нам понадобятся некоторые понятия и факты из курса топологии (см. [45]).

**Эйлерова характеристика.** Точки топологического пространства  $\Omega$  часто называют его 0-мерными клетками. *Клеткой* размерности  $k > 0$  в пространстве  $\Omega$  называется образ  $e^k$  внутренности  $\text{Int } D^k$  замкнутого  $k$ -мерного шара  $D^k \subset \mathbb{R}^k$  положительного радиуса при непрерывном отображении  $D^k \rightarrow \Omega$ , сужение которого на внутренность шара определяет гомеоморфизм  $\text{Int } D^k \rightarrow e^k$ . *Конечным клеточным пространством* называется несвязное объединение конечного числа клеток, имеющих разные размерности и удовлетворяющих следующему условию: граница каждой клетки лежит в объединении клеток меньших размерностей.

Конечное клеточное пространство компактно. Замечательным является тот факт, что всякое гладкое компактное многообразие является конечным клеточным пространством.

**Определение.** *Эйлеровой характеристикой* конечного клеточного пространства  $K$  называется число

$$\chi(K) = \sum_i (-1)^i b_i,$$

где  $b_i$  — число клеток размерности  $i$ .

Эйлерова характеристика не зависит от способа разбиения пространства на клетки, т. е. она является характеристикой самого пространства, а не конкретного разбиения. Это свойство эйлеровой характеристики очень полезно при проведении конкретных вычислений.

**Пример 20.1.** Эйлерова характеристика чётномерной сферы равна 2, а нечётномерной — 0. Действительно,  $n$ -мерную сферу  $S^n$  можно разбить на две клетки: точку и её дополнение в сфере. Точка является 0-мерной клеткой, а её дополнение гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$  (с. 9). Следовательно, эйлерова характеристика сферы  $S^n$  равна  $1 + (-1)^n$ .

Эйлерову характеристику можно определить и для некомпактных пространств. Для этого требуется аппарат так называемой теории гомологий. Однако пространства, которые встретятся нам далее, эквивалентны в некотором смысле конечным клеточным пространствам. Поэтому определить их эйлерову характеристику значительно проще. Сначала определим упомянутую эквивалентность.

Пусть  $M$  и  $N$  — топологические пространства. Рассмотрим два непрерывных отображения

$$f_0: M \rightarrow N \quad \text{и} \quad f_1: M \rightarrow N.$$

Они называются *гомотопными*, если существует такое семейство отображений

$$\varphi_t: M \rightarrow N, \quad t \in I = [0, 1] \subset \mathbb{R},$$

что  $\varphi_0 = f_0$ ,  $\varphi_1 = f_1$  и отображение

$$\Phi: M \times I \rightarrow N, \quad \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$$

непрерывно.

**Определение.** Пространства  $M$  и  $N$  называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие непрерывные отображения

$$f: M \rightarrow N \quad \text{и} \quad g: N \rightarrow M,$$

что композиции

$$g \circ f: M \rightarrow M \quad \text{и} \quad f \circ g: N \rightarrow N$$

гомотопны тождественным отображениям  $M \rightarrow M$  и  $N \rightarrow N$  соответственно.

Например, гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны. Бублик, как продукт хлебобулочного производства, гомотопически эквивалентен окружности  $S^1$ , если он не содержит внутри себя никаких полостей. Открытые и замкнутые шары в  $\mathbb{R}^n$  гомотопически эквивалентны точке. Кстати, пространства, гомотопически эквивалентные точке, называются *стягиваемыми*.

Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности. В курсе топологии доказывается, что гомотопически эквивалентные конечные клеточные пространства имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Поэтому корректно следующее определение.

**Определение.** *Эйлеровой характеристикой* пространства  $M$ , гомотопически эквивалентного конечному клеточному пространству  $K$ , называется число  $\chi(M) = \chi(K)$ .

Рассмотрим теперь гладкое лагранжево или лежандрово отображение  $f: L \rightarrow V$ . Предположим, что оно имеет только простые устойчивые особенности. Тогда в случае отображения  $f$  общего положения многообразие  $\mathcal{A}_f$  мультиособенностей любого типа  $\mathcal{A}$  является гладким подмногообразием коразмерности  $\text{codim } \mathcal{A}$  в многообразии  $V$ . Его замыкание  $\text{Cl } \mathcal{A}_f \subset V$  является несвязным объединением самого многообразия  $\mathcal{A}_f$  и многообразий мультиособенностей, коразмерность которых больше  $\text{codim } \mathcal{A}$ .

Зафиксируем произвольную точку  $y \in V$  и предположим, что отображение  $f$  имеет мультиособенность типа  $\mathcal{B}$  в точке  $y$ , где  $\text{codim } \mathcal{B} = c$ . Выберем окрестность  $U$  начала координат  $0$  в  $\mathbb{R}^c$  и рассмотрим такое гладкое вложение  $h: U \rightarrow V$ , что  $h(0) = y$ , причём подмногообразие  $h(U) \subset V$  трансверсально многообразию  $\mathcal{B}_f$  в точке  $y$ .

Пусть  $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$  — открытый  $c$ -мерный шар с радиусом  $\varepsilon > 0$  и центром в  $0$ . Тогда справедливы следующие утверждения (см., например, [26]).

1) Существует такое положительное число  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y, h)$ , что для любого типа  $\mathcal{A}$  мультиособенностей отображения  $f$  и любого  $\varepsilon < \varepsilon_0$  пересечение  $h(B_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$  является гладким подмногообразием в  $V$ , класс эквивалентности которого относительно диффеоморфизмов зависит только от типов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  мультиособенностей,

т. е. не зависит от выбора отображения  $f$ , точки  $y \in \mathcal{B}_f$ , вложения  $h$  и числа  $\varepsilon$ .

2) Многообразие  $h(B_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$  гомотопически эквивалентно конечному клеточному пространству  $K$ ; это пространство получается из множества

$$K_0 = h^{-1}(h(\text{Cl } B_\varepsilon) \cap \text{Cl } \mathcal{A}_f)$$

последовательностью вырезаний; а именно,

$$K_1 = K_0 \setminus B_{\delta_0},$$

где  $\delta_0$  достаточно мало и меньше  $\varepsilon$ ; если множество  $K_i$  уже построено, то

$$K_{i+1} = K_i \setminus \mathcal{O}_i,$$

где  $\mathcal{O}_i$  — объединение попарно непересекающихся окрестностей связных компонент множества точек  $z \in K_i$ , таких, что отображение  $f$  имеет мультиособенность коразмерности  $c - i$  в точке  $h(z)$ . Каждая из этих окрестностей является объединением открытых шаров достаточно малого радиуса  $\delta_i > 0$  с центрами в точках соответствующей связной компоненты; искомое пространство  $K$  равно  $K_d$ , где

$$d = c - \text{codim } \mathcal{A}.$$

**Пример 20.2.** На рис. 21 изображен процесс построения пространства  $K$  в лежандровом случае при  $\mathcal{A} = \mathbf{1}$  и  $\mathcal{B} = A_2$ . Здесь  $K = K_2$ .

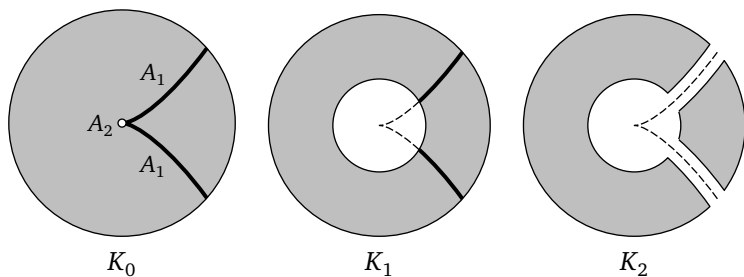


Рис. 21. Вырезание особенностей

Многообразие  $h(B_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$  при любом  $\varepsilon < \varepsilon_0(f, y, h)$  будем обозначать в дальнейшем через  $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ .

**Определение.** Мультиособенность типа  $\mathcal{B}$  примыкает к мультиособенности типа  $\mathcal{A}$ , если  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$  и  $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ . Эйлера характеристика многообразия  $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$  называется индексом примыкания и обозначается  $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ . Примыкание называется простым, если все связные компоненты многообразия  $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$  стягиваемы. В противном случае примыкание называется сложным.

**Замечание.** Индекс простого примыкания мультиособенности типа  $\mathcal{B}$  к мультиособенности типа  $\mathcal{A}$  отображения  $f$  в  $\mathbb{R}^n$  равен числу связных компонент пересечения многообразия  $\mathcal{A}_f$  с открытым шаром достаточно малого радиуса с центром в произвольно выбранной точке многообразия  $\mathcal{B}_f$ .

Из работы Э. Лоенги [52] следует, что все примыкания мультиособенностей лежандрова отображения общего положения с простыми устойчивыми особенностями являются простыми. Все примыкания мультиособенностей типа  $A_{\mu_1}^\pm \dots A_{\mu_l}^\pm$  лагранжева отображения общего положения также являются простыми. Примыкания других мультиособенностей лагранжева отображения общего положения с простыми устойчивыми особенностями могут быть сложными.

**Пример 20.3.** Лежандрова моноособенность типа  $A_1$  примыкает только к мультиособенности типа  $\mathbf{1}$ , причём  $J_1(A_1) = 2$ . Индексы всех примыканий лежандровых моноособенностей типов  $A_2$  и  $A_3$  легко вычисляются при помощи рисунка 20:

$\mathcal{A}$	$\mathbf{1}$	$A_1$
$J_{\mathcal{A}}(A_2)$	2	2

$\mathcal{A}$	$\mathbf{1}$	$A_1$	$A_1^2$	$A_2$
$J_{\mathcal{A}}(A_3)$	3	4	1	2



**Пример 20.4.** Лагранжева моноособность типа  $A_1$  не примыкает к мультиособностям других типов. Лагранжева моноособность типа  $A_2$  примыкает только к мультиособностям типов  $\mathbf{1}$  и  $A_1^2$ . При этом

$$J_1(A_2) = J_{A_1^2}(A_2) = 1.$$

Индексы всех примыканий лагранжевых моноособностей типов  $A_3^\pm$ ,  $A_4$  и  $D_4^\pm$  вычисляются при помощи рисунков 15, 16 и 17:

$\mathcal{A}$	$A_1$	$A_1^3$	$A_2A_1$
$J_{\mathcal{A}}(A_3^\pm)$	1	1	2

$\mathcal{A}$	$\mathbf{1}$	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_2$	$A_2A_1^2$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$	$A_2^2$
$J_{\mathcal{A}}(A_4)$	1	1	1	1	3	1	1	1

$\mathcal{A}$	$\mathbf{1}$	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_2$	$A_2A_1^2$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$	$A_2^2$
$J_{\mathcal{A}}(D_4^+)$	1	2	1	2	4	1	1	2

$\mathcal{A}$	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_2A_1^2$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_4^-)$	0	2	6	3	3

Заметим, что все примыкания лагранжевой моноособности типа  $D_4^+$  являются простыми. Простыми являются также все примыкания лагранжевой моноособности типа  $D_4^-$ , кроме примыкания к мультиособности типа  $A_1^2$ . Это примыкание сложное: многообразие  $\Xi_{A_1^2}(D_4^-)$  гомотопически эквивалентно окружности  $S^1$ .

Индексы примыкания мультиособностей удовлетворяют многочисленным соотношениям.

**Теорема** [42], [43]. Для любых типов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  мультиособностей лагранжева или лежандрова отображения  $f$  имеют место формулы:

$$1) J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \mathcal{C}) = \sum J_X(\mathcal{B})J_Y(\mathcal{C}),$$

где сумма берётся по всем упорядоченным парам  $(X, Y)$  типов  $X$  и  $Y$  мультиособностей (включая  $\mathbf{1}$ ), таких, что  $X \cdot Y = \mathcal{A}$ ;

$$2) \sum (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(\mathcal{B}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \\ (-1)^{\text{codim } \mathcal{A}}, & \text{если } \mathcal{A} = \mathcal{B}; \end{cases}$$

$$\sum (-1)^{\text{codim } X} J_X(\mathcal{A}) = 1;$$

$$\sum (-1)^{\text{codim } X} \#(X) J_X(\mathcal{A}) = (-1)^{\Delta} \#(\mathcal{A}),$$

где суммы берутся по всем типам  $X$  мультиособенностей (включая  $\mathbf{1}$ ),  $\#(X)$  обозначает число сомножителей при разложении  $X$  в произведение типов моноособенностей, а  $\Delta$  равно разности размерностей образа и прообраза отображения  $f$ .

Первая формула этой теоремы сводит задачу вычисления индексов примыканий мультиособенностей к вычислению индексов примыканий моноособенностей. Остальные можно использовать как для вычисления некоторых индексов через уже вычисленные, так и для проверки правильности индексов, вычисленных непосредственно методами алгебры и геометрии.

Наиболее просто найти индексы примыканий моноособенностей типов  $A_{\mu}^{\pm}$ . Такие моноособенности могут примыкать только к мультиособенностям типов  $A_{\mu_1}^{\pm} \dots A_{\mu_l}^{\pm}$ . Индексы этих примыканий вычисляются при помощи числа перестановок с повторениями. А именно,

$$\langle k_1, \dots, k_l \rangle = \frac{(k_1 + \dots + k_l)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!}$$

для всех неотрицательных целых чисел  $k_1, \dots, k_l$  и  $\langle k_1, \dots, k_l \rangle = 0$  в противном случае.

**Теорема [42].** Пусть  $\mathcal{A} = A_{\mu_1}^{k_1} \dots A_{\mu_l}^{k_l}$ , где  $\mu_1, \dots, \mu_l$  — попарно различные натуральные числа. Тогда лежандрова моноособенность типа  $A_{\mu}$  примыкает к мультиособенности типа  $\mathcal{A}$ , если и только если число

$$N = \mu + 1 - \sum_{i=1}^l k_i (\mu_i + 1)$$

неотрицательно. Индекс примыкания вычисляется по формуле

$$J_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) = \sum_{\substack{0 \leq k_0 \leq N \\ k_0 \equiv N \pmod{2}}} \langle k_0, k_1, \dots, k_l \rangle.$$

**Пример 20.5.** Индексы всех примыканий лежандровых моноособностей типов  $A_4$ ,  $A_5$  и  $A_6$  указаны в следующих таблицах:

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$
$J_{\mathcal{A}}(A_4)$	3	6	4	3	2	2

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(A_5)$	4	9	6	7	4	6	1

$\mathcal{A}$	$A_4$	$A_3A_1$	$A_2^2$	
$J_{\mathcal{A}}(A_5)$	2	2	1	

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	4	12	9	13	6	14	4

$\mathcal{A}$	$A_4$	$A_3A_1$	$A_2^2$	$A_2A_1^2$	$A_5$	$A_4A_1$	$A_3A_2$
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	4	6	3	3	2	2	2

**Теорема [43].** Пусть  $\delta = \pm 1$ ,

$$A_{\mu}^{\delta} = \begin{cases} A_{\mu}^{+}, & \text{если } \delta = +1; \\ A_{\mu}^{-}, & \text{если } \delta = -1, \end{cases}$$

и

$$\mathcal{A} = A_1^k A_{\mu_1}^{m_1} \dots A_{\mu_p}^{m_p} (A_{\mu_1^+}^+)^{m_1^+} \dots (A_{\mu_q^+}^+)^{m_q^+} (A_{\mu_1^-}^-)^{m_1^-} \dots (A_{\mu_r^-}^-)^{m_r^-},$$

где  $\mu_1, \dots, \mu_p$  — попарно различные чётные положительные числа, а каждый из наборов  $\mu_1^+, \dots, \mu_q^+$  и  $\mu_1^-, \dots, \mu_r^-$  состоит из попарно различных нечётных положительных чисел, больших 1. Положим

$$d = k + m_1^+ + \dots + m_q^+ + m_1^- + \dots + m_r^-,$$

$$N = d + m_1 + \dots + m_p,$$

$$k_+^{\delta} = \left[ \frac{2d + \delta + 1}{4} \right] - (m_1^+ + \dots + m_q^+),$$

$$k_-^{\delta} = \left[ \frac{2d - \delta + 1}{4} \right] - (m_1^- + \dots + m_r^-),$$

где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ . Тогда лагранжева моноособность типа  $A_{\mu}^{\delta}$  примыкает к мультиособности типа  $\mathcal{A}$ , если

и только если

$$\text{codim } \mathcal{A} \leq \min\{\mu - 2, \mu - N\}, \quad \text{codim } \mathcal{A} \equiv \mu - N \pmod{2},$$

$$J_{\mathcal{A}}(A_{\mu}^{\delta}) = \langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^{\delta} \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^{\delta} \rangle \langle m_1, \dots, m_p, d \rangle \neq 0.$$

**Пример 20.6.** Индексы всех примыканий лагранжевой моноособенности типа  $A_5^+$  указаны в следующей таблице:

$\mathcal{A}$	$A_1$	$A_1^3$	$A_1^5$	$A_2A_1$	$A_2A_1^3$	$A_3^+$	$A_3^+A_1^2$
$J_{\mathcal{A}}(A_5^+)$	1	1	1	2	4	1	2
$\mathcal{A}$	$A_3^-A_1^2$	$A_2^2A_1$	$A_4A_1$	$A_3^+A_2$			
$J_{\mathcal{A}}(A_5^+)$	1	3	2	2			

Таблица индексов примыкания лагранжевой моноособенности типа  $A_5^-$  получается из таблицы индексов  $J_{\mathcal{A}}(A_5^+)$  одновременным изменением всех знаков, стоящих в верхних индексах типов мультиособенностей, на противоположные.

**Пример 20.7.** Индексы всех примыканий лагранжевой моноособенности типа  $A_6$  указаны в следующей таблице:

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_1^6$	$A_2$	$A_2A_1^2$
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	1	1	1	1	1	3
$\mathcal{A}$	$A_2A_1^4$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$	$A_3^+A_1^3$	$A_3^-A_1^3$	$A_2^2$
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	5	1	1	2	2	1
$\mathcal{A}$	$A_2^2A_1^2$	$A_4$	$A_4A_1^2$	$A_3^+A_2A_1$	$A_3^-A_2A_1$	$A_2^3$
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	6	1	3	3	3	1
$\mathcal{A}$	$A_5^+A_1$	$A_5^-A_1$	$A_4A_2$	$A_3^+A_3^-$		
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	1	1	2	1		

Исследование примыканий лагранжевых и лежандровых моноособенностей типов  $D$  и  $E$  является более трудной задачей. Полностью она не решена до сих пор (см. [58]). Здесь мы приведём лишь некоторые следствия результатов, полученных в работах [42] и [43].

**Пример 20.8** [42]. Индексы всех примыканий лежандровых моноособностей типов  $D_4^\pm$ ,  $D_5$  и  $D_6^\pm$  указаны в следующих таблицах:

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$
$J_{\mathcal{A}}(D_4^+)$	3	4	2	1	2

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(D_4^-)$	7	14	6	9	6	2

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(D_5)$	6	15	9	12	8	6	3

$\mathcal{A}$	$D_4^+$	$D_4^-$	$A_4$	$A_3A_1$	$A_2A_1^2$	
$J_{\mathcal{A}}(D_5)$	1	1	2	2	1	

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	6	16	10	14	10	10	4

$\mathcal{A}$	$D_4^+$	$D_4^-$	$A_4$	$A_3A_1$	$A_2^2$	$A_2A_1^2$	$D_5$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	3	1	2	6	2	2	2

$\mathcal{A}$	$D_4^+A_1$	$A_3A_2$	
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	2	2	

$\mathcal{A}$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1^2$	$A_3$	$A_2A_1$	$A_1^3$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	11	34	20	40	20	26	18

$\mathcal{A}$	$D_4^+$	$D_4^-$	$A_4$	$A_3A_1$	$A_2^2$	$A_2A_1^2$	$A_1^4$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	1	3	6	18	4	4	3

$\mathcal{A}$	$D_5$	$D_4^-A_1$	$A_5$	$A_3A_2$	$A_3A_1^2$	
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	2	2	4	2	2	

**Пример 20.9** [43]. Индексы всех примыканий лагранжевой моноособности типа  $D_5^+$  указаны в следующей таблице:

$\mathcal{A}$	$A_1$	$A_1^3$	$A_1^5$	$A_2A_1$	$A_2A_1^3$	$A_2^2A_1$	$A_3^+$
$J_{\mathcal{A}}(D_5^+)$	1	1	2	3	9	6	1
$\mathcal{A}$	$A_3^-$	$A_3^+A_1^2$	$A_3^-A_1^2$	$A_3^+A_2$	$A_3^-A_2$	$A_4A_1$	$D_4^+A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_5^+)$	1	4	4	2	2	2	1
$\mathcal{A}$	$D_4^-A_1$						
$J_{\mathcal{A}}(D_5^+)$	1						

Таблица индексов примыкания лагранжевой моноособенности типа  $D_5^-$  совпадает с таблицей индексов  $J_{\mathcal{A}}(D_5^+)$ . Все примыкания лагранжевых моноособенностей типов  $D_5^\pm$ , кроме примыканий к мультиособенности типа  $A_1^3$ , являются простыми. Примыкания к мультиособенности типа  $A_1^3$  являются сложными. А именно, каждое из многообразий  $\Xi_{A_1^3}(D_5^+)$ ,  $\Xi_{A_1^3}(D_5^-)$  имеет две связные компоненты, одна из которых стягиваема, а другая гомотопически эквивалентна окружности  $S^1$ .

**Пример 20.10** [43]. Индексы всех примыканий лагранжевой моноособенности типа  $D_6^+$  указаны в следующей таблице:

$\mathcal{A}$	$\mathbf{1}$	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_1^6$	$A_2$	$A_2A_1^2$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	1	2	2	2	2	8
$\mathcal{A}$	$A_2A_1^4$	$A_2^2$	$A_2^2A_1^2$	$A_2^3$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	12	3	16	4	3	3
$\mathcal{A}$	$A_3^+A_1^3$	$A_3^-A_1^3$	$A_3^+A_2A_1$	$A_3^-A_2A_1$	$(A_3^+)^2$	$(A_3^-)^2$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	5	5	7	7	1	1
$\mathcal{A}$	$A_4$	$A_4A_1^2$	$A_4A_2$	$D_4^+$	$D_4^+A_1^2$	$D_4^-A_1^2$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	2	4	4	1	2	1
$\mathcal{A}$	$D_4^+A_2$	$D_5^+A_1$	$D_5^-A_1$			
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	2	1	1			

Все примыкания лагранжевой моноособенности типа  $D_6^+$ , кроме примыкания к мультиособенности типа  $A_1^4$ , являются простыми. Примыкание к мультиособенности типа  $A_1^4$  является сложным. А именно, многообразие  $\Xi_{A_1^4}(D_6^+)$  имеет три связные

компоненты, две из которых стягиваемы, а одна гомотопически эквивалентна окружности  $S^1$ .

**Пример 20.11** [43]. Индексы всех примыканий лагранжевой моноособности типа  $D_6^-$  указаны в следующей таблице:

$\mathcal{A}$	$A_1^2$	$A_1^4$	$A_1^6$	$A_2A_1^2$	$A_2A_1^4$	$A_2^2A_1^2$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	0	0	3	2	16	17
$\mathcal{A}$	$A_3^+A_1$	$A_3^-A_1$	$A_3^+A_1^3$	$A_3^-A_1^3$	$A_3^+A_2A_1$	$A_3^-A_2A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	2	2	8	8	11	11
$\mathcal{A}$	$(A_3^+)^2$	$A_3^+A_3^-$	$(A_3^-)^2$	$A_4A_1^2$	$A_5^+A_1$	$A_5^-A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	1	2	1	6	2	2
$\mathcal{A}$	$D_4^-$	$D_4^+A_1^2$	$D_4^-A_1^2$	$D_4^-A_2$	$D_5^+A_1$	$D_5^-A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	1	1	2	2	1	1

Все примыкания лагранжевой моноособности типа  $D_6^-$ , кроме примыканий к мультиособностям типов  $A_1^2, A_1^4, A_2A_1^2$ , являются простыми. Примыкания к мультиособностям типов  $A_1^2, A_1^4, A_2A_1^2$  являются сложными. А именно, многообразие  $\Xi_{A_1^2}(D_6^-)$  гомотопически эквивалентно окружности  $S^1$ . Многообразие  $\Xi_{A_1^4}(D_6^-)$  гомотопически эквивалентно несвязному объединению двух окружностей  $S^1$ . Многообразие  $\Xi_{A_2A_1^2}(D_6^-)$  имеет четыре связные компоненты, две из которых стягиваемы, а две гомотопически эквивалентны окружности  $S^1$ .

Вычислению индексов примыканий моноособностей предшествует перечисление распадений особенности отображения на менее вырожденные. Это более простая задача, и мы расскажем, как она решается, на примере лагранжевых особенностей типов  $D_\mu^\pm$ .

Зафиксируем произвольное целое  $\mu \geq 4$  и  $\delta = \pm 1$ . Пусть

$$t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q = (q_3, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-3}.$$

Тогда лагранжево отображение

$$f: \mathbb{R}^{\mu-1} \rightarrow \mathbb{R}^{\mu-1}, \quad (t, q) \mapsto (x, q),$$

заданное формулами

$$x_1 = -2t_1 t_2, \quad x_2 = -t_1^2 - \frac{\partial S_0}{\partial t_2}(t_2, q),$$

где

$$S_0(t_2, q) = \delta t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \dots + q_3 t_2^2,$$

имеет в нуле особенность типа

$$D_\mu^\delta = \begin{cases} D_\mu^+, & \text{если } \delta = +1, \\ D_\mu^-, & \text{если } \delta = -1. \end{cases}$$

Рассмотрим семейство

$$P_{x,q}(t_2) = t_2^2 \left( \frac{\partial S_0}{\partial t_2}(t_2, q) + x_2 \right) + \frac{x_1^2}{4}$$

многочленов от  $t_2$ , зависящих от параметров  $x, q$ .

**Предложение 20.12** [43]. Росток отображения  $f$  в точке  $(t, q) \neq 0$  лагранжево эквивалентен ростку типа:

- 1)  $A_\nu^\pm$ ,  $1 \leq \nu \leq \mu - 1$ , если  $t = \left( -\frac{x_1}{2t_2^*}, t_2^* \right)$ , где  $t_2^*$  — ненулевой вещественный корень кратности  $\nu$  многочлена  $P_{x,q}$ , причём

$$\pm \frac{\partial^\nu P_{x,q}}{\partial t_2^\nu}(t_2^*) > 0;$$

- 2)  $A_1$ , если  $t_1 \neq 0, t_2 = 0$ ;  
 3)  $A_3^\pm$ , если  $t = 0$  и  $\mp q_3 > 0$ ;  
 4)  $D_\nu^\pm$ ,  $4 \leq \nu \leq \mu - 1$ , если  $t = 0, q_3 = \dots = q_{\nu-1} = 0$  и  $\pm q_\nu > 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим семейство

$$F_{x,q}(t) = S_0(t_2, q) + t_1^2 t_2 + x_2 t_2 + x_1 t_1$$

многочленов от  $t$ , зависящих от параметров  $x, q$ . Каждый многочлен  $F_{x,q}$  имеет лишь простые критические точки. Росток функции  $F_{x,q}$  в критической точке  $t^*$  относительно стабильной  $R^+$ -эквивалентности и росток отображения  $f$  в точке  $(t^*, q)$  относительно лагранжевой эквивалентности имеют один и тот же тип.



1) Пусть  $t_2^* \neq 0$ . Тогда

$$F_{x,q}(t) = S_0(t_2, q) + x_2 t_2 + \text{sign}(t_2) \cdot \left( \sqrt{|t_2|} \left( t_1 + \frac{x_1}{2t_2} \right) \right)^2 - \frac{x_1^2}{4t_2}$$

в окрестности точки  $t^*$ . Следовательно, росток  $F_{x,q}$  в  $t^*$  стабильно  $R$ -эквивалентен росту в точке  $t_2^*$  функции

$$\tilde{F}_{x,q}(t_2) = S_0(t_2, q) + x_2 t_2 - \frac{x_1^2}{4t_2}$$

одной переменной  $t_2$ . Этот росток  $R^+$ -эквивалентен росту типа  $A_\nu^\pm$ , если  $t_2^*$  — нуль кратности  $\nu$  производной

$$\frac{d\tilde{F}_{x,q}}{dt_2}(t_2) = \frac{P_{x,q}(t_2)}{t_2^2},$$

причём

$$\pm \frac{d^{\nu+1} \tilde{F}_{x,q}}{dt_2^{\nu+1}}(t_2^*) = \pm \frac{1}{(t_2^*)^2} \cdot \frac{\partial^\nu P_{x,q}}{\partial t_2^\nu}(t_2^*) > 0.$$

2) Если  $t_2^* = 0$ , а  $t_1^* \neq 0$ , то росток  $f$  в точке  $(t^*, q)$  является ростком диффеоморфизма, т. е. типа  $A_1$ .

3) Пусть  $t^* = 0$ , а  $q_3 \neq 0$ . Тогда  $x_1 = x_2 = 0$  и

$$F_{x,q}(t) = \text{sign}(q_3) \cdot \left( \sqrt{|q_3|} \left( t_2 + \frac{t_1^2}{2q_3} \right) \right)^2 - \frac{t_1^4}{4q_3} + q_4 t_2^3 + \dots + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \delta t_2^{\mu-1}.$$

Замена переменной

$$t_2 \mapsto t_2 - \frac{t_1^2}{2q_3}$$

приводит функцию  $F_{x,q}(t)$  к виду

$$\tilde{F}_{x,q}(t) = \text{sign}(q_3) \cdot \left( \sqrt{|q_3|} |t_2| \right)^2 - \frac{t_1^4}{4q_3} + \sum_{i=3}^{\mu-2} q_{i+1} \left( t_2 - \frac{t_1^2}{2q_3} \right)^i + \delta \left( t_2 - \frac{t_1^2}{2q_3} \right)^{\mu-1}.$$

По теореме Арнольда о нормальной форме полуквазиоднородной функции (с. 113) росток  $\tilde{F}_{x,q}$  в нуле  $R$ -эквивалентен росту в нуле функции

$$\text{sign}(q_3) \cdot (\sqrt{|q_3|}t_2)^2 - \frac{t_1^4}{4q_3}.$$

Последний стабильно  $R$ -эквивалентен росту в нуле функции  $-\frac{t_1^4}{4q_3}$  одной переменной  $t_1$ , т. е. имеет особенность типа  $A_3^\pm$ , если  $\mp q_3 > 0$ .

4) Наконец, пусть

$$t^* = 0, \quad q_3 = \dots = q_{\nu-1} = 0, \quad q_\nu \neq 0,$$

где  $4 \leq \nu \leq \mu - 1$ . Тогда

$$F_{x,q}(t) = t_1^2 t_2 + q_\nu t_2^{\nu-1} + \dots + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \delta t_2^{\mu-1}.$$

Росток  $F_{x,q}$  в нуле  $R$ -эквивалентен росту в нуле функции

$$t_1^2 t_2 + \text{sign}(q_\nu) \cdot t_2^{\nu-1},$$

т. е. имеет особенность типа  $D_\nu^\pm$ , если  $\pm q_\nu > 0$  (см. пример 15.4, с. 114).

Предложение 20.12 доказано.  $\square$

Наряду с локальными свойствами лагранжевых и лежандровых мультиособенностей важное прикладное значение имеют условия их совместного сосуществования на всей каустике или фронте в целом (см. задачу 1987-5 в [7]). Например, компактный фронт общего положения в трёхмерном пространстве имеет чётное число особенностей типа ласточкин хвост. Это следует из того, что линия трансверсального пересечения двух гладких ветвей фронта может начинаться и заканчиваться только в вершине ласточкина хвоста. Многочисленные факты такого рода в пространствах разных размерностей приведены, например, в книге [16].

Вычисление индексов примыканий мультиособенностей позволило получить много новых ограничений на сосуществование особенностей каустик и фронтов. Это — линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей. Мы приведём список этих соотношений только в небольших размерностях.

**Теорема 1** [42]. Пусть  $\chi(\mathcal{A})$  — эйлерова характеристика многообразия особенностей типа  $\mathcal{A}$  компактного фронта общего положения в пространстве размерности  $n \leq 5$ . Тогда:

1) если  $n$  чётное, то

$$\begin{aligned} \chi(A_1) &= \chi(A_2) + 2\chi(A_1^2) - 5\chi(D_4^-) - 2\chi(A_4) - \frac{5}{2}\chi(A_3A_1) \\ &\quad - 2\chi(A_2^2) - 4\chi(A_2A_1^2) - 8\chi(A_1^4), \end{aligned}$$

$$\chi(A_3) = \chi(D_4^+) + 3\chi(D_4^-) + \chi(A_4) + \chi(A_3A_1),$$

$$\chi(A_2A_1) = \chi(A_4) + \chi(A_3A_1) + 2\chi(A_2^2) + 2\chi(A_2A_1^2),$$

$$\chi(A_1^3) = \chi(D_4^-) + \frac{1}{2}\chi(A_3A_1) + \chi(A_2A_1^2) + 4\chi(A_1^4).$$

В частности, фронт в четырёхмерном пространстве имеет чётное число особенностей типа  $A_3A_1$ ;

2) если  $n$  нечётное, то

$$\begin{aligned} \chi(A_2) &= \chi(A_3) + \chi(A_2A_1) - \frac{5}{2}\chi(D_5) - \chi(D_4^+A_1) - 3\chi(D_4^-A_1) - \\ &\quad - 2\chi(A_5) - 2\chi(A_4A_1) - \frac{3}{2}\chi(A_3A_2) - 2\chi(A_3A_1^2) - \\ &\quad - 2\chi(A_2^2A_1) - 2\chi(A_2A_1^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(A_1^2) &= \frac{1}{2}\chi(A_3) + \chi(A_2A_1) + 3\chi(A_1^3) - \frac{7}{2}\chi(D_5) - \frac{1}{2}\chi(D_4^+A_1) - \\ &\quad - \frac{19}{2}\chi(D_4^-A_1) - 2\chi(A_5) - \frac{7}{2}\chi(A_4A_1) - \frac{5}{2}\chi(A_3A_2) - \\ &\quad - \frac{11}{2}\chi(A_3A_1^2) - 4\chi(A_2^2A_1) - 9\chi(A_2A_1^3) - 20\chi(A_1^5), \end{aligned}$$

$$\chi(D_4^+) = \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(D_4^+A_1),$$

$$\chi(D_4^-) = \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(D_4^-A_1),$$

$$\chi(A_4) = \chi(D_5) + \chi(A_5) + \chi(A_4A_1),$$

$$\begin{aligned} \chi(A_3A_1) &= \chi(D_5) + \chi(D_4^+A_1) + 3\chi(D_4^-A_1) + \chi(A_5) + \chi(A_4A_1) + \\ &\quad + \chi(A_3A_2) + 2\chi(A_3A_1^2), \end{aligned}$$

$$\chi(A_2^2) = \frac{1}{2}\chi(A_5) + \chi(A_3A_2) + \chi(A_2^2A_1),$$

$$\begin{aligned} \chi(A_2A_1^2) &= \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(A_4A_1) + \frac{1}{2}\chi(A_3A_2) + \chi(A_3A_1^2) + \\ &\quad + 2\chi(A_2^2A_1) + 3\chi(A_2A_1^3), \end{aligned}$$

$$\chi(A_1^4) = \chi(D_4^- A_1) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_1^2) + \chi(A_2 A_1^3) + 5\chi(A_1^5).$$

В частности, фронт в пятимерном пространстве имеет чётное число особенностей каждого из типов  $A_5$ ,  $D_5$ ,  $A_3 A_1^2$ ,  $A_3 A_2$  и справедливо следующее сравнение по модулю 2:

$$\chi(A_4 A_1) + \chi(D_4^- A_1) + \chi(D_4^+ A_1) \equiv \chi(A_3).$$

**Замечание.** Для компактных фронтов общего положения в трёхмерном пространстве вторая из формул пункта 2 теоремы 1 приводит к сравнению  $\chi(A_3) \equiv 0 \pmod{2}$ , которое выражает упомянутый выше факт чётности числа особенностей типа ласточкин хвост.

**Теорема 2 [43].** Пусть  $\chi(\mathcal{A})$  — эйлерова характеристика несвязного объединения многообразий особенностей типов  $\mathcal{A} A_1^k$  компактной каустики общего положения в пространстве размерности  $n \leq 4$  по всевозможным целым  $k \geq 0$ . Тогда:

1) если  $n = 3$ , то

$$\chi(A_2^2) = 3\chi(A_2^3) + \chi(A_2 A_3^-) + \chi(A_2 A_3^+) + \frac{1}{2}\chi(A_4) + \chi(D_4^+),$$

$$\chi(A_3^-) = \chi(A_2 A_3^-) + \frac{1}{2}(\chi(A_4) + 3\chi(D_4^-) + \chi(D_4^+)),$$

$$\chi(A_3^+) = \chi(A_2 A_3^+) + \frac{1}{2}(\chi(A_4) + 3\chi(D_4^-) + \chi(D_4^+)).$$

В частности, справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\chi(A_4) \equiv 0, \quad \chi(D_4^-) + \chi(D_4^+) \equiv 0;$$

2) если  $n$  чётное, то

$$\begin{aligned} \chi(A_2) = & 2\chi(A_2^2) - 8\chi(A_2^4) - \frac{5}{2}\chi(A_2 A_4) + \chi(A_3^-) + \chi(A_3^+) - \\ & - 4\chi(A_2^2 A_3^-) - 4\chi(A_2^2 A_3^+) - 2\chi((A_3^-)^2) - 2\chi(A_3^- A_3^+) - \\ & - 2\chi((A_3^+)^2) - 5\chi(A_2 D_4^-) - 4\chi(A_2 D_4^+) - 2\chi(A_5^-) - \\ & - 2\chi(A_5^+) - 5\chi(D_5^-) - 5\chi(D_5^+), \end{aligned}$$

$$\chi(A_2^3) = 4\chi(A_2^4) + \chi(A_2^2 A_3^-) + \chi(A_2^2 A_3^+) + \frac{1}{2}\chi(A_2 A_4) + \chi(A_2 D_4^+),$$

$$\begin{aligned} \chi(A_2 A_3^-) = & \frac{1}{2}\chi(A_2 A_4) + 2\chi(A_2^2 A_3^-) + 2\chi((A_3^-)^2) + \chi(A_3^- A_3^+) + \\ & + \frac{3}{2}\chi(A_2 D_4^-) + \frac{1}{2}\chi(A_2 D_4^+) + \chi(A_5^-) + \chi(D_5^-) + \chi(D_5^+), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(A_2A_3^+) &= \frac{1}{2}\chi(A_2A_4) + 2\chi(A_2^2A_3^+) + 2\chi((A_3^+)^2) + \chi(A_3^-A_3^+) + \\ &\quad + \frac{3}{2}\chi(A_2D_4^-) + \frac{1}{2}\chi(A_2D_4^+) + \chi(A_5^+) + \chi(D_5^-) + \chi(D_5^+), \\ \chi(A_4) &= \chi(A_2A_4) + \chi(A_5^-) + \chi(A_5^+) + \chi(D_5^-) + \chi(D_5^+), \\ \chi(D_4^-) &= \chi(A_2D_4^-) + \frac{1}{2}(\chi(D_5^-) + \chi(D_5^+)), \\ \chi(D_4^+) &= \chi(A_2D_4^+) + \frac{1}{2}(\chi(D_5^-) + \chi(D_5^+)). \end{aligned}$$

В частности, справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\chi(A_2A_4) \equiv 0, \quad \chi(A_2D_4^-) + \chi(A_2D_4^+) \equiv 0, \quad \chi(D_5^-) + \chi(D_5^+) \equiv 0.$$

**Замечание.** Для компактных каустик общего положения в трёхмерном пространстве указанные в пункте 1 теоремы 2 сравнения выражают известный факт чётности числа особенностей типа ласточкин хвост и общего числа особенностей типов пирамида и кошелёк, взятых без учета числа неособых прообразов лагранжева отображения.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей топологической формуле. Пусть  $\chi_f(X)$  — эйлерова характеристика многообразия мультиособенностей типа  $X$  лагранжева или лежандрова отображения  $f$  общего положения с простыми устойчивыми особенностями в  $n$ -мерное пространство. Тогда

$$\chi_f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{X \neq \mathcal{A}} (-1)^{n - \text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi_f(X)$$

для любого такого типа  $\mathcal{A}$ , что  $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n - 1 \pmod{2}$ .

**Замечание.** В работе [43] получены также линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей лагранжева отображения общего положения гладкого компактного многообразия в пространстве размерности  $n \leq 4$ , учитывающие количество неособых точек в прообразе. Из этих соотношений несложно получить, например, следующий факт контактной геометрии пространственных кривых.

Рассмотрим гладкую кривую в трёхмерном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ . Порядок касания кривой общего положения с любой проективной плоскостью не превышает трёх. Если плоскость

имеет с кривой 2-й или 3-й порядок касания в данной точке, то она называется соприкасающейся в этой точке. Точка, в которой кривая имеет 3-й порядок касания со своей соприкасающейся плоскостью, называется точкой уплощения (кривая в  $\mathbb{R}^3$  имеет в такой точке нулевое кручение; см. также замечание на с. 161). Плоскость, касающаяся кривой в трёх различных точках, называется её тройной касательной плоскостью.

**Теорема [40].** У гладкой замкнутой кривой общего положения в  $\mathbb{R}P^3$

$$T \equiv \frac{N + kC}{2} \pmod{2},$$

где  $k$  — число её нестягиваемых компонент,  $T$  — число тройных касательных плоскостей,  $C$  — число точек уплощения, а  $N$  — общее число точек, в которых кривая трансверсально пересекает плоскости, являющиеся её соприкасающимися плоскостями в точках уплощения. В частности, если кривая не имеет точек уплощения, число её тройных касательных плоскостей чётно.

Отметим, что в частном случае гладких замкнутых кривых общего положения в  $\mathbb{R}^3$  утверждения этой теоремы доказаны в работах [48], [46].

### Упражнения

1. Докажите, что гладкое отображение общего положения гладкого компактного трёхмерного многообразия в любое гладкое многообразие той же размерности имеет чётное число особенностей класса Тома — Бордмана  $\Sigma^{1,1,1,0}$ .

2. Убедитесь на примерах в справедливости следующей формулы (см. [51], а также [41]): число особенностей типа сборки Уитни у гладкого отображения  $f: M \rightarrow N$  общего положения гладкого компактного двумерного многообразия  $M$  в любое гладкое связное многообразие  $N$  той же размерности сравнимо по модулю 2 с числом  $\chi(M) + c_f \chi(N)$ , где  $c_f$  равно 0 или 1, если прообраз  $f^{-1}(y)$  некритического значения  $y \in N$  состоит из чётного или нечётного числа точек соответственно (число  $c_f$  не зависит от выбора точки  $y$ ).

## § 21. Парусник

В заключение мы расскажем об одной задаче из теории оптимального управления, в которой естественным образом одновременно появляются ласточкин хвост и зонтик Уитни. Впервые соответствующая особенность была описана в заметке [39].

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = v_\tau(x)$$

в области  $D$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , зависящую от параметра  $\tau$ . Множество всевозможных векторов фазовой скорости  $v_\tau(x)$  в фазовой точке  $x \in D$  называется *индикатрисой* допустимых скоростей системы в этой точке<sup>1</sup>. При движении фазовой точки  $x$ , её скорость  $v_\tau(x)$  можно менять в пределах индикатрисы, выбирая подходящие значения  $\tau$ . Поэтому параметр  $\tau$  обычно называют *управлением*, а систему  $\dot{x} = v_\tau(x)$  *управляемой*.

При решении задачи оптимизации управляемой системы индикатрису допустимых скоростей можно заменять её выпуклой оболочкой (процедура релаксации). *Выпуклой оболочкой* подмножества в  $\mathbb{R}^n$  называется пересечение замкнутых полупространств, содержащих это подмножество. Переход от индикатрисы к её выпуклой оболочке объясняется возможностью применения *смешанных стратегий*, т. е. движением с быстро сменяющимися участками, на которых скорость выбирается по-разному.

Граница выпуклой оболочки индикатрисы допустимых скоростей не является, вообще говоря, гладким многообразием, даже в случае, когда индикатриса ограничена гладкой гиперповерхностью. Если нулевая скорость лежит внутри выпуклой оболочки, то именно особенности её границы определяют максимальную предельную скорость движения в заданном направлении при использовании смешанных стратегий.

**Пример 21.1** [5]. Рассмотрим индикатрису допустимых скоростей парусной яхты при встречном ветре (рис. 22). Она невы-

---

<sup>1</sup>Индикатрису допустимых скоростей системы в точке  $x$  следует считать ограниченным подмножеством касательного пространства  $T_x \mathbb{R}^n$ , поскольку скорость реальных физических объектов ограничена (хотя бы скоростью света).

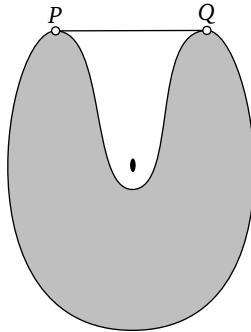


Рис. 22. Индикатриса допустимых скоростей парусной яхты

пуклая; её выпуклая оболочка ограничена гладкой кривой с концами в точках  $P, Q$  (выпуклая часть границы индикатрисы) и отрезком  $PQ$ . Граница выпуклой оболочки не гладкая в точках  $P$  и  $Q$ . Чтобы плыть против ветра, причём с максимально возможной скоростью в данном направлении, яхта должна двигаться галсами, перемежая участки движения со скоростями, определяемыми точками  $P$  и  $Q$ . Средняя скорость движения при такой стратегии задаёт точку на отрезке  $PQ$ .

Предположим, что индикатриса допустимых скоростей управляемой системы в каждой точке компактна и ограничена гладкой гиперповерхностью в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда выпуклая оболочка каждой индикатрисы гомеоморфна замкнутому  $n$ -мерному шару и является выпуклой оболочкой ограничивающей её гиперповерхности. Граница этой выпуклой оболочки непрерывно дифференцируема и гомеоморфна сфере  $S^{n-1}$  (см. [1]). Задача оптимизации управляемой системы приводит к необходимости классифицировать особенности границы выпуклой оболочки. Мы расскажем далее о некоторых результатах естественной классификации этих особенностей относительно диффеоморфизмов объемлющего пространства.

Пусть  $M$  — гладкая компактная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда через каждую точку границы  $\Gamma$  её выпуклой оболочки проходит *опорная гиперплоскость*, т. е. касательная гиперплоскость гиперповерхности  $M$ , от которой  $M$  лежит с одной стороны. Опорная



гиперплоскость гиперповерхности  $M$  общего положения касается её не более чем в  $n$  различных точках, являющихся вершинами симплекса. Этот симплекс называется *опорным симплексом* опорной гиперплоскости. Гиперповерхность  $\Gamma$  является, очевидно, объединением опорных симплексов всех опорных гиперплоскостей гиперповерхности  $M$ .

Рассмотрим проективизацию  $PT^*\mathbb{R}^n$  кокасательного расслоения пространства  $\mathbb{R}^n$  (см. пример 18.2 на с. 148). Оно является пространством лежандрова расслоения

$$\vartheta: PT^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}G(n), \quad \vartheta: (\pi, q) \mapsto \pi,$$

базой которого служит многообразие Грассмана  $\mathbb{R}G(n)$  всех гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^n$  (см. пример 18.5, с. 150). Контактные элементы касательных гиперплоскостей гиперповерхности  $M$  в точках касания образуют гладкое лежандрово подмногообразие  $L$  в  $PT^*\mathbb{R}^n$ . Оно определяет лежандрово отображение

$$f: L \xrightarrow{i} PT^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{R}G(n),$$

где  $i$  — тождественное вложение.

Фронт  $\Sigma$  лежандрова отображения  $f$  состоит из гиперплоскостей, касающихся гиперповерхности  $M$ . Множество гиперплоскостей, не пересекающих  $M$ , является связной компонентой дополнения к  $\Sigma$  в пространстве  $\mathbb{R}G(n)$ . Граница этой компоненты является множеством  $\Sigma_0$  опорных гиперплоскостей гиперповерхности  $M$ .

Из теоремы Арнольда о лежандровых особенностях (с. 153) следует, что для гиперповерхности  $M$  общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n \leq 6$  лежандрово отображение  $f$  имеет лишь простые устойчивые особенности. При этом фронт  $\Sigma$  во всех точках множества  $\Sigma_0$  имеет особенности типов  $A_{\mu_1} \dots A_{\mu_k}$ , где  $\mu_1, \dots, \mu_k$  — нечётные положительные числа,  $\mu_1 + \dots + \mu_k \leq n$  (это верно и при  $n = 7$ ; см. [21]).

Гиперплоскость  $\pi \in \Sigma_0$ , соответствующая особенности типа  $A_{\mu_1} \dots A_{\mu_k}$  фронта  $\Sigma$ , называется *опорной гиперплоскостью типа*  $A_{\mu_1} \dots A_{\mu_k}$ . Она обладает следующими свойствами:

1)  $\pi$  касается гиперповерхности  $M$  ровно в  $k$  точках, являющихся вершинами  $(k - 1)$ -мерного симплекса;

2) существует такой порядок  $P_1, \dots, P_k$  точек касания, что для любого  $i = 1, \dots, k$  росток в  $P_i$  сужения на  $M$  любой ненулевой линейной функции в  $\mathbb{R}^n$ , равной 0 на  $\pi$  и неотрицательной на  $M$ , задаётся многочленом

$$x_1^{\mu_i+1} + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$$

в подходящих локальных координатах  $x_1, \dots, x_{n-1}$  на  $M$ .

Опорный симплекс гиперплоскости  $\pi$  называется *опорным*  $A_{\mu_1} \dots A_{\mu_k}$ -симплексом. Его вершины  $P_1, \dots, P_k$  называются (*опорными*) *вершинами типов*  $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}$  соответственно.

**Пример 21.2.** Гладкая замкнутая кривая общего положения на плоскости имеет опорные прямые только следующих типов:  $A_1$  и  $A_1^2$ . Росток границы  $\Gamma$  её выпуклой оболочки в конце любого опорного  $A_1^2$ -отрезка в подходящих гладких координатах  $x, y$  является ростком в нуле графика функции

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0; \\ 0, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad (57)$$

Росток  $\Gamma$  в любой другой точке является ростком в нуле графика функции

$$y = 0. \quad (58)$$

Гладкая компактная поверхность общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^3$  имеет опорные плоскости типов  $A_1, A_1^2, A_1^3$  и  $A_3$ . Особенности границы  $\Gamma$  её выпуклой оболочки были перечислены в заметке [21]. Оказывается, что с точностью до диффеоморфизмов объемлющего пространства ростки  $\Gamma$  исчерпываются тремя нормальными формами. Одна из них, а именно особенность поверхности  $\Gamma$  в вершине опорного  $A_1^3$ -треугольника, имеет один модуль (непрерывный инвариант; см. с. 113). Эта особенность неустранима малой деформацией исходной поверхности, а её модуль имеет очень простой геометрический смысл.

А именно, проективизация  $PT^*\mathbb{R}^n$  кокасательного расслоения пространства  $\mathbb{R}^n$  является также пространством лежандрова расслоения

$$\varrho : PT^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varrho : (\pi, q) \mapsto q,$$

базой которого служит исходное пространство  $\mathbb{R}^n$  (см. пример 18.4, с. 150). Оно определяет второе лежандрово отображение

$$g: L \xrightarrow{i} PT^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{e} \mathbb{R}^n$$

многообразия  $L$  контактных элементов касательных гиперплоскостей к гиперповерхности  $M$  в точках касания. Поскольку  $M$  — гладкая гиперповерхность, то  $g$  устанавливает диффеоморфизм между многообразиями  $L$  и  $M$ .

Пусть  $\pi$  — опорная плоскость типа  $A_1^3$  к гладкой компактной поверхности  $M$  общего положения в  $\mathbb{R}^3$ , а  $P$  — одна из вершин её опорного треугольника. Тогда сужение  $f_P$  лежандрова отображения  $f$  на достаточно малую окрестность точки  $(\pi, P)$  в  $L$  является вложением. Множество особых точек поверхности  $\Sigma_0$ , принадлежащих образу отображения  $f_P$ , состоит из двух гладких кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ , выходящих из точки  $\pi$  под ненулевым углом друг к другу. Их прообразы  $f_P^{-1}(\gamma_1)$  и  $f_P^{-1}(\gamma_2)$  являются трансверсальными гладкими кривыми на поверхности  $L$ , выходящими из точки  $(\pi, P)$ . Следовательно,  $\hat{\gamma}_1 = g(f_P^{-1}(\gamma_1))$  и  $\hat{\gamma}_2 = g(f_P^{-1}(\gamma_2))$  — гладкие кривые на  $M$ , выходящие из точки  $P$  и трансверсальные друг другу.

Нетрудно убедиться, что для поверхности  $M$  общего положения множество особых точек поверхности  $\Gamma$  в окрестности точки  $P$  состоит из кривых  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$  и ростков двух сторон опорного треугольника плоскости  $\pi$ , выходящих из вершины  $P$ . Проекция этих четырёх кривых на плоскость  $\pi$  изображены (с точностью до диффеоморфизма плоскости) на рис. 23. Касательные к проекциям в точке  $P$  образуют четверку прямых общего положения в  $\mathbb{R}^2$ . Из линейной алгебры известно, что такая четверка имеет один числовой инвариант относительно группы линейных преобразований плоскости. Он называется *двойным отношением*. Именно это двойное отношение и является упомянутым выше модулем особенности поверхности  $\Gamma$  в вершине опорного  $A_1^3$ -треугольника относительно диффеоморфизмов пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Замечание.** Росток в вершине опорного  $A_1^3$ -треугольника границы  $\Gamma$  выпуклой оболочки поверхности общего положения в  $\mathbb{R}^3$  в подходящих гладких координатах  $x, y, z$  является ростком

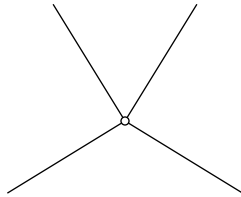


Рис. 23. Росток проекции множества особых точек границы выпуклой оболочки на плоскость

в нуле графика функции

$$z = \min_{(s,t) \in \Omega} \{(x-s)^2 + (y-t)^2\},$$

представляющей собой квадрат стандартного евклидова расстояния от точки в плоскости  $z = 0$  до замкнутой области  $\Omega$ , лежащей в этой же плоскости и состоящей из точек плоского угла

$$y \geq \alpha|x|,$$

где  $\alpha$  — положительное число, не равное 1 (оно является модулем особенности; см. [21]). Ростки  $\Gamma$  в остальных точках диффеоморфны росткам в нуле поверхностей, заданных формулами (57) и (58).

Гладкая компактная гиперповерхность общего положения в пространстве  $\mathbb{R}^4$  имеет опорные гиперплоскости только следующих типов:  $A_1$ ,  $A_1^2$ ,  $A_1^3$ ,  $A_1^4$ ,  $A_3$  и  $A_1A_3$ . Особенности границы её выпуклой оболочки изучались в работах [35], [56], [36], [39], [12]. В частности, в работе [35] показано, что особенность границы выпуклой оболочки компактной гиперповерхности общего положения в четырёхмерном пространстве в вершине опорного  $A_1^4$ -тетраэдра имеет уже не менее трёх модулей относительно диффеоморфизмов объемлющего пространства. Точное количество модулей этой особенности неизвестно до сих пор, однако доказано (см. [12]), что особенности границы выпуклой оболочки гиперповерхности общего положения в  $\mathbb{R}^4$  не имеют функциональных модулей (с. 137).

**Замечание.** В пространствах пяти и большего числа измерений встречаются гиперповерхности, у которых граница выпук-

лой оболочки имеет неустранимые особенности с функциональными модулями (см. [34]).

При исследовании особенностей границы выпуклой оболочки используются все методы теории катастроф, изложенные в этой книге. В качестве примера мы изучим особенность выпуклой оболочки гиперповерхности в четырёхмерном пространстве, которая приводит к естественной склейке ласточкина хвоста с зонтиком Уитни по их линиям самопересечения.

Напомним, что ласточкин хвост представляет собой особую поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , состоящую из точек  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , для которых многочлен

$$x^4 + y_2x^2 + y_3x - y_1$$

от  $x$  имеет кратный вещественный корень (см. пример 14.4, с. 106). Эта поверхность изображена на рис. 10 (с. 107).

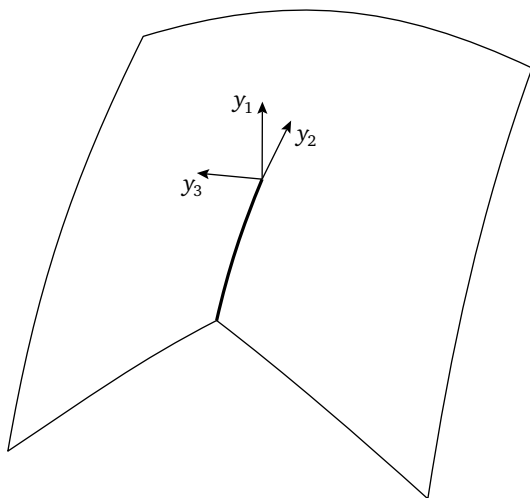


Рис. 24. Оборванный ласточкин хвост

Множество точек, для которых указанный выше многочлен не имеет вещественных корней, является связной компонентой дополнения к ласточкину хвосту. Граница этой компоненты изоб-

ражена на рис. 24. Она представляет собой график функции

$$y_1 = \min_{x \in \mathbb{R}} \{x^4 + y_2x^2 + y_3x\}. \quad (59)$$

**Определение.** Поверхность (59) называется *оборванным ласточкиным хвостом*. Замыкание разности ласточкина хвоста и его оборванной части называется *пирамидой ласточкина хвоста*.

Зонтик Уитни с ручкой представляет собой особую поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , заданную уравнением

$$y_2^2 = y_1y_3^2$$

(см. пример 6.2, с. 48). Множество точек, у которых

$$y_2 = y_3 = 0, \quad y_1 < 0,$$

называется ручкой. Зонтики Уитни без ручки и с ручкой изображены на рис. 6а и 6б соответственно.

Дополнение к зонтику Уитни с ручкой имеет три связанные компоненты. Две из них стягиваемые, а одна — нет (стягиваемости препятствует ручка). Нестягиваемая компонента гомотопически эквивалентна окружности  $S^1$ .

**Определение.** Граница стягиваемой связной компоненты дополнения к зонтику Уитни с ручкой называется *камерой зонтика Уитни*.

Поверхность

$$y_2^2 = y_1y_3^2, \quad y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \quad (60)$$

является одной из камер зонтика Уитни. Она изображена на рис. 25. Поверхность

$$y_3^2 + y_2 \left( y_1 + \frac{y_2^2}{4} \right)^2 = 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_1 + \frac{y_2^2}{4} \geq 0. \quad (61)$$

диффеоморфна камере (60).

**Замечание.** Камера зонтика Уитни гомеоморфна боковой поверхности кругового конуса (составленного из лучей, выходящих

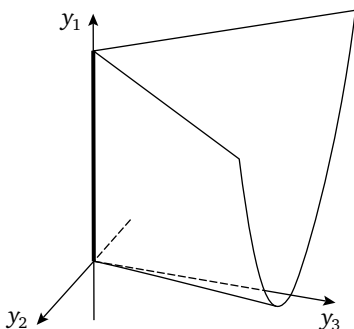


Рис. 25. Камера зонтика Уитни

из точки, называемой вершиной конуса, и проходящих через точки круга, лежащего в плоскости, не содержащей вершину).

**Определение.** Объединение (59)  $\cup$  (61) оборванного ласточкина хвоста (59) и камеры зонтика Уитни (61) называется *парусником*.

Парусник (59)  $\cup$  (61) изображен на рис. 26. Оборванный ласточкин хвост напоминает лодку, а камера зонтика Уитни — парус. Это и было мотивировкой названия указанной поверхности. Следующее утверждение анонсировано в заметке [39].

**Теорема 1.** Рассмотрим опорную гиперплоскость  $\pi$  типа  $A_1A_3$  к гладкой компактной гиперповерхности  $M$  в  $\mathbb{R}^4$ . Пусть  $P$  — опорный конец типа  $A_1$  опорного отрезка гиперплоскости  $\pi$ . Тогда любая параллельная проекция на  $\pi$  ростка в точке  $P$  множества особых точек границы выпуклой оболочки гиперповерхности  $M$  общего положения в подходящих гладких координатах  $y_1, y_2, y_3$  является ростком в нуле парусника (59)  $\cup$  (61).

Доказательство теоремы 1 приведено ниже (с. 201). Оно соответствует доказательству, изложенному в работе [57].

**Замечание.** После изучения множества особых точек границы  $\Gamma$  выпуклой оболочки гиперповерхности  $M$  можно приводить к нормальной форме ростки самой гиперповерхности  $\Gamma$ . В окрестности точки  $P$  она состоит из графиков трёх функций

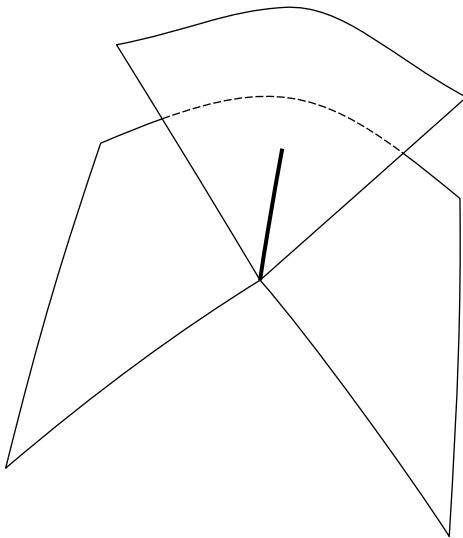


Рис. 26. Парусник

трёх переменных, определенных на замыканиях связных компонент дополнения к паруснику. Две из этих функций гладкие, а третья — класса  $C^1$ .

Эта задача была решена в работе [12] с использованием более сложной техники: теории особенностей лежандровых проекций так называемых стратифицированных лежандровых подмногообразий. Оказалось, что в условиях теоремы 1 росток в точке  $P$  границы выпуклой оболочки гиперповерхности  $M$  общего положения в подходящих гладких координатах  $y_1, \dots, y_4$  в  $\mathbb{R}^4$  является ростком в нуле графика функции

$$y_4 = \min_{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega} \{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\},$$

представляющей собой квадрат стандартного евклидова расстояния от точки в гиперплоскости  $y_4 = 0$  до замкнутой области  $\Omega$ , лежащей в этой же гиперплоскости и состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y_1 \leq x^4 + y_2 x^2 + y_3 x + y_2^2/4$$

для любого  $x \in \mathbb{R}$ .



Область  $\Omega$  диффеоморфна замыканию связной компоненты дополнения к стандартному ласточкину хвосту, а именно, она является замыканием множества многочленов

$$x^4 + y_2 x^2 + y_3 x + y_2^2/4 - y_1$$

от  $x$ , которые не имеют вещественных корней. Указанные здесь формулы получаются из формул теоремы 1 заменой  $y_1 \mapsto y_1 - y_2^2/4$ .

**Приложение к оптимальному управлению.** Пусть индикатриса допустимых скоростей управляемой системы в  $\mathbb{R}^n$  ограничена гладкой компактной гиперповерхностью  $M$  и нулевая скорость лежит внутри её выпуклой оболочки. Тогда (согласно процедуре релаксации) необходимо рассматривать выпуклую оболочку  $M$  вместо самой индикатрисы.

Это означает, что смешанная стратегия быстрее по некоторым направлениям, чем изначальная скорость. Следовательно, в случае гиперповерхности  $M$  общего положения для любого направления определено натуральное число: количество изначальных скоростей, определяющих максимальную предельную скорость движения в заданном направлении при использовании смешанных стратегий. Точки разрыва этой функции образуют гиперповерхность особых направлений в сфере  $S^{n-1}$  (направления определяются единичными векторами в  $\mathbb{R}^n$ ). Эта гиперповерхность может иметь особенности относительно локальных диффеоморфизмов  $S^{n-1}$ .

Если  $n = 2$ , то гиперповерхность особых направлений состоит из чётного числа точек на окружности  $S^1$  (см. рис. 22). Дополнение к этим точкам состоит из чётного числа открытых дуг двух типов. Одни состоят из чистых стратегий (определяемых изначальными скоростями выпуклой части границы индикатрисы), а другие образованы смешанными стратегиями, состоящими из двух изначальных скоростей (определяемых концами опорных  $A_1^2$ -отрезков). При этом дуги разных типов чередуются.

Если  $n = 3$ , то гиперповерхность особых направлений имеет лишь одну особенность. Она диффеоморфна ростку объединения четырёх лучей, выходящих из общей точки под ненулевыми углами друг к другу (рис. 23). Дополнение к этому объединению

имеет четыре связные компоненты. Одна из них состоит из чистых стратегий (внутренность острого или тупого плоского угла на рис. 23). Две другие, граничащие с первой по лучам, образованы смешанными стратегиями, состоящими из двух изначальных скоростей. Четвертая компонента образована смешанными стратегиями, состоящими из трёх изначальных скоростей (они определяются вершинами опорного  $A_1^3$ -треугольника).

Если  $n = 4$ , то парусник (59)  $\cup$  (61) является одной из особенностей гиперповерхности особых направлений в  $S^3$ . Одна связная компонента его дополнения состоит из чистых стратегий (выпуклая компонента дополнения к оборванному ласточкину хвосту (59)), а две другие образованы смешанными стратегиями, состоящими из двух и трёх изначальных скоростей соответственно (третья является выпуклой компонентой дополнения к камере зонтика Уитни (61)). Другие особенности являются ростками объединения нескольких замкнутых кусков гладких поверхностей, диффеоморфных либо полуплоскости, либо плоскому углу.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть  $\pi$  — опорная гиперплоскость типа  $A_1 A_3$  к гладкой компактной гиперповерхности  $M$  общего положения в  $\mathbb{R}^4$ . Через  $P$  и  $Q$  обозначим опорные концы типов  $A_1$  и  $A_3$  опорного отрезка гиперплоскости  $\pi$  соответственно. Тогда сужение  $f_P$  лежандрова отображения  $f$  (с. 192) на достаточно малую окрестность  $\emptyset \subset L$  точки  $(\pi, P)$  является вложением.

Множество  $S$  особых точек фронта  $\Sigma$  отображения  $f$ , принадлежащих трёхмерному многообразию  $f_P(\emptyset)$ , является поверхностью, росток которой в точке  $\pi$  диффеоморфен ростку ласточкина хвоста в нуле. Множество  $S_0 = S \cap \Sigma_0$  точек поверхности  $S$ , являющихся опорными гиперплоскостями к гиперповерхности  $M$ , представляет собой поверхность, росток которой в точке  $\pi$  диффеоморфен ростку оборванного ласточкина хвоста в нуле.

Поверхность  $S_0$  разбивает многообразие  $f_P(\emptyset)$  на две открытые части. Одна из них состоит из опорных гиперплоскостей типа  $A_1$ , а вторая не принадлежит множеству  $\Sigma_0$ . Часть, состоящая из опорных гиперплоскостей, и пирамида ласточкина хвоста  $S$  лежат по разные стороны от оборванного ласточкина хвоста  $S_0$ .

Обозначим через  $\gamma$  кривую особых точек поверхности  $S_0$ . Росток  $\gamma$  в  $\pi$  является ростком замыкания линии самопересечения ласточкина хвоста  $S$ . Поэтому кривая  $\gamma$  имеет гладкое продолжение в точке  $\pi$ . Если окрестность  $\mathcal{O}$  достаточно мала, то полный прообраз кривой  $\gamma$  относительно лежандрова отображения  $f$  состоит из гладкой кривой  $\gamma_P = f_P^{-1}(\gamma)$ , выходящей из точки  $(\pi, P)$ , и гладкой кривой  $\gamma_Q$ , проходящей через точку  $(\pi, Q)$ .

Образы  $\hat{\gamma}_P = g(\gamma_P)$  и  $\hat{\gamma}_Q = g(\gamma_Q)$  кривых  $\gamma_P$  и  $\gamma_Q$  при лежандровом отображении  $g$  (с. 194) являются гладкими кривыми в гиперповерхности  $M$ . Кривая  $\hat{\gamma}_P$  выходит из точки  $P$ , а кривая  $\hat{\gamma}_Q$  проходит через точку  $Q$ . При этом каждая гиперплоскость из  $\gamma \setminus \pi$  является опорной гиперплоскостью типа  $A_1^3$ , касающейся гиперповерхности  $M$  в одной точке кривой  $\hat{\gamma}_P$  и в двух точках кривой  $\hat{\gamma}_Q$ .

Рассмотрим поверхности

$$\hat{S} = g(f_P^{-1}(S)) \quad \text{и} \quad \hat{S}_0 = g(f_P^{-1}(S_0))$$

в  $M$ . Росток  $\hat{S}$  в точке  $P$  диффеоморфен ростку ласточкина хвоста в нуле, а росток  $\hat{S}_0$  — ростку его оборванной части.

**Лемма 1.** *Для гиперповерхности  $M$  общего положения касательная к кривой  $\hat{\gamma}_P$  в точке  $P$  и касательная к кривой  $\hat{\gamma}_Q$  в точке  $Q$  скрещиваются в гиперплоскости  $\pi$ . Прямая  $PQ$  трансверсальна в  $\pi$  касательной плоскости к поверхности  $\hat{S}_0$  в точке  $P$ . Коориентации поверхности  $\hat{S}_0$ , определенные вектором  $\overrightarrow{PQ}$  и расположением пирамиды ласточкина хвоста  $\hat{S}$ , совпадают.*

**Доказательство.** Пусть  $f_Q$  — сужение лежандрова отображения  $f$  на достаточно малую окрестность точки  $(\pi, Q)$  в  $L$ . Через  $\Lambda$  обозначим подмножество в  $\mathbb{R}G(n)$ , являющееся объединением многообразий мультиособенностей типов  $A_1^2$  и  $A_3$  отображения  $f_Q$ .

Если область определения отображения  $f_Q$  достаточно мала, то прообраз  $f_Q^{-1}(\Lambda)$  является гладкой поверхностью в  $L$ . Росток в точке  $Q$  его образа  $\hat{\Lambda} = g(f_Q^{-1}(\Lambda))$  при лежандровом отображении  $g$  является ростком гладкой поверхности в  $M$ . Для гиперповерхности  $M$  общего положения точка  $P$  не лежит в касательной плоскости к поверхности  $\hat{\Lambda}$  в точке  $Q$ . В частности, она не лежит на касательной к кривой  $\hat{\gamma}_Q$  в этой точке.

Рассмотрим семейство ненулевых линейных функций  $h_\tau$  в  $\mathbb{R}^4$ , гладко зависящих от гиперплоскости  $\tau \in \gamma$ , неотрицательных на гиперповерхности  $M$  и таких, что  $h_\tau|_\tau \equiv 0$ . Сужение функции  $h_\tau$  на гиперповерхность  $M$  является гладкой функцией, для которой точка  $P_\tau = g(f_P^{-1}(\tau))$  является критической. Второй дифференциал этой функции в точке  $P_\tau$  является положительно определенной квадратичной формой  $K_\tau$ , гладко зависящей от  $\tau$ . Эта форма определяет евклидову структуру в гиперплоскости  $\tau$ .

Если  $\tau \neq \pi$ , то касательная к кривой  $\hat{\gamma}_P$  в точке  $P_\tau$  ортогональна в  $K_\tau$ -структуре каждой стороне опорного треугольника гиперплоскости  $\tau$ , выходящей из вершины  $P_\tau$  (см. [35]). Следовательно, она ортогональна двумерной плоскости  $\Delta_\tau$ , содержащей этот треугольник.

Семейство плоскостей  $\Delta_\tau$ ,  $\tau \in \gamma \setminus \pi$ , имеет предел  $\Delta_\pi$  в топологии многообразия Грассмана двумерных плоскостей в  $\mathbb{R}^4$  при  $\tau \rightarrow \pi$ . Плоскость  $\Delta_\pi$  однозначно определяется прямой  $PQ$  и касательной к кривой  $\hat{\gamma}_Q$  в точке  $Q$ . Поэтому первая часть леммы следует из того, что касательная к кривой  $\hat{\gamma}_P$  в точке  $P$  ортогональна плоскости  $\Delta_\pi$  в  $K_\pi$ -структуре.

Для доказательства второй части леммы заметим, что каждая точка кривой  $\hat{\gamma}_P \setminus P$  является точкой трансверсального пересечения двух гладких ветвей поверхности  $\hat{S}$ . Каждая сторона опорного треугольника гиперплоскости  $\tau \in \gamma \setminus \pi$ , выходящая из вершины  $P_\tau$ , ортогональна в  $K_\tau$ -структуре касательной плоскости к соответствующей ветви поверхности  $\hat{S}$  в точке  $P_\tau$ . Следовательно, прямая  $PQ$  ортогональна в  $K_\pi$ -структуре касательной плоскости к поверхности  $\hat{S}$ , а значит, и к  $\hat{S}_0$  в точке  $P$ .

Наконец, коориентации поверхности  $\hat{S}_0$ , определенные вектором  $\overrightarrow{PQ}$  и расположением опорных точек опорных гиперплоскостей типа  $A_1$  в окрестности точки  $P$ , противоположны. Лемма 1 доказана.  $\square$

Пусть  $\Upsilon$  — подмножество в  $\mathbb{R}^4$ , состоящее из отрезка  $PQ$  и сторон опорных треугольников опорных гиперплоскостей типа  $A_1^3$ , выходящих из точек кривой  $\hat{\gamma}_P$ . Множество  $\Upsilon$  лежит на гладкой гиперповерхности, касающейся гиперплоскости  $\pi$  в каждой точке отрезка  $PQ$ . Эта гиперповерхность диффеоморфна прямому произведению гладкого продолжения кривой  $\hat{\gamma}_P$  и окрестности

отрезка  $PQ$  в плоскости  $\Delta_\pi$ , определенной прямой  $PQ$  и касательной к кривой  $\hat{\gamma}_Q$  в точке  $Q$ .

**Лемма 2.** *Множество особых точек границы  $\Gamma$  выпуклой оболочки гиперповерхности  $M$  и множество  $\hat{S}_0 \cup \Upsilon$  совпадают в достаточно малой окрестности точки  $P$ .*

**Доказательство.** Гиперповерхность  $\Gamma$  в достаточно малой окрестности точки  $P$  является пересечением этой окрестности с множеством, состоящим из объединения  $\Gamma_1$  опорных  $A_1$ -точек, объединения  $\Gamma_2$  внутренностей опорных  $A_1^2$ -отрезков, объединения  $\Gamma_3$  внутренностей опорных  $A_1^3$ -треугольников и множества  $\hat{S}_0 \cup \Upsilon$ . Множества  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  являются гладкими гиперповерхностями в  $\mathbb{R}^4$ .

А именно,  $\Gamma_1$  — открытая часть гиперповерхности  $M$ , множество  $\Gamma_2$  диффеоморфно прямому произведению гладкой поверхности  $\hat{S}_0 \setminus \hat{\gamma}_P$  на внутренность отрезка, а  $\Gamma_3$  диффеоморфно прямому произведению гладкой кривой  $\hat{\gamma}_P \setminus P$  на внутренность треугольника. Следовательно, особые точки гиперповерхности  $\Gamma$ , лежащие в достаточно малой окрестности точки  $P$ , принадлежат множеству  $\hat{S}_0 \cup \Upsilon$ . С другой стороны, каждая точка множества  $\hat{S}_0 \cup \Upsilon$  в этой окрестности является особой точкой  $\Gamma$ .

Действительно, любая точка  $\tilde{P} \in \hat{S}_0 \setminus \hat{\gamma}_P$  является концом опорного отрезка опорной гиперплоскости  $\tilde{\pi}$  типа  $A_1^2$ . Проведём двумерную плоскость  $H \subset \mathbb{R}^4$  через этот отрезок трансверсально гиперплоскости  $\tilde{\pi}$ . Тогда росток пересечения  $H \cap \Gamma$  в точке  $\tilde{P}$  в подходящих гладких координатах  $x, y$  в плоскости  $H$  является ростком в нуле графика функции (57).

Аналогично, пусть точка  $\tilde{P} \in \Upsilon$  является внутренней точкой стороны опорного треугольника опорной гиперплоскости  $\tilde{\pi}$  типа  $A_1^3$ . Проведём двумерную плоскость  $H \subset \mathbb{R}^4$  через  $\tilde{P}$  и какую-нибудь внутреннюю точку опорного треугольника трансверсально гиперплоскости  $\tilde{\pi}$ . Тогда росток пересечения  $H \cap \Gamma$  в точке  $\tilde{P}$  в подходящих гладких координатах  $x, y$  в плоскости  $H$  также является ростком в нуле графика функции (57).

Таким образом, гиперповерхность  $\Gamma$  не дифференцируема дважды в точках множества  $(\hat{S}_0 \cup \Upsilon) \setminus \hat{\gamma}_P$ , а значит, является особой в каждой точке множества  $\hat{S}_0 \cup \Upsilon$ . Лемма 2 доказана.  $\square$

**Замечание.** В работе [36] показано, что росток границы  $\Gamma$  выпуклой оболочки гиперповерхности  $M$  в любой точке  $\tilde{P} \in (\widehat{S}_0 \cup \Upsilon) \setminus \hat{\gamma}_P$ , близкой к  $P$ , в подходящих гладких координатах в  $\mathbb{R}^4$  является ростком в нуле прямого произведения графика функции (57) и  $\mathbb{R}^2$ .

Зафиксируем параллельное проектирование пространства  $\mathbb{R}^4$  на гиперплоскость  $\pi$ . Через  $S^*$ ,  $S_0^*$  и  $\Upsilon^*$  обозначим проекции множеств  $\widehat{S}$ ,  $\widehat{S}_0$  и  $\Upsilon$  соответственно. Сужение проектирования на любую гладкую гиперповерхность, трансверсальную в каждой своей точке направлению проектирования, является диффеоморфизмом. Поэтому множества  $\widehat{S}$ ,  $\widehat{S}_0$  и  $\Upsilon$  диффеоморфны своим проекциям, если область определения  $\mathcal{O}$  отображения  $f_P$  достаточно мала (при этом ростки объединений  $\widehat{S}_0 \cup \Upsilon$  и  $S_0^* \cup \Upsilon^*$  в точке  $P$  не диффеоморфны даже в классе  $C^2$ ).

Росток  $S^*$  в точке  $P$  диффеоморфен ростку ласточкина хвоста в нуле, а росток  $S_0^*$  — ростку его оборванной части. Пирамида ласточкина хвоста  $S^*$  и множество  $\Upsilon^*$  лежат с одной стороны от поверхности  $S_0^*$ . Проекции  $\gamma_P^*$ ,  $\gamma_Q^*$  кривых  $\hat{\gamma}_P$ ,  $\hat{\gamma}_Q$  являются гладкими кривыми в гиперплоскости  $\pi$ . Кривая  $\gamma_P^*$  выходит из точки  $P$ , а кривая  $\gamma_Q^*$  проходит через точку  $Q$ . Кривые  $\gamma_P^*$  и  $\hat{\gamma}_P$  имеют общую касательную в точке  $P$ . Кривые  $\gamma_Q^*$  и  $\hat{\gamma}_Q$  имеют общую касательную в точке  $Q$ . Кривая  $\gamma_P^*$  является линией особых точек поверхности  $S_0^*$ .

**Лемма 3.** Росток  $\Upsilon^*$  в точке  $P$  в подходящих гладких координатах  $y_1, y_2, y_3$  в гиперплоскости  $\pi$  является ростком в нуле камеры зонтика Уитни (60). Росток прямой  $PQ$  в точке  $P$  в этих координатах является ростком в нуле гладкой кривой, касающейся оси  $y_3$  в начале координат.

**Доказательство.** Введём в гиперплоскости  $\pi$  гладкую систему координат  $y_1, y_2, y_3$  с началом в точке  $P$  так, что:

- 1) ось  $y_1$  касается кривой  $\gamma_P^*$  в точке  $P$ , причём  $\gamma_P^*$  выходит из  $P$  в положительном направлении оси  $y_1$ ;
- 2) ось  $y_2$  параллельна касательной к кривой  $\gamma_Q^*$  в точке  $Q$ , причём  $\gamma_Q^*$  проходит через  $Q$  в положительном направлении оси  $y_2$ ;

3) ось  $y_3$  направлена вдоль отрезка  $PQ$ , причём координата  $y_3$  точки  $Q$  равна 1.

Используя нормальную форму лежандровой особенности типа  $A_3$  и выбрав подходящий масштаб на оси  $y_1$ , определим параметризацию

$$\gamma_Q^* : s \mapsto \gamma_Q^*(s), s \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \gamma_P^* : \tilde{s} \mapsto \gamma_P^*(\tilde{s}), \tilde{s} \in [0, +\infty)$$

кривых  $\gamma_Q^*$  и  $\gamma_P^*$  так, что:

4)  $\gamma_Q^*(0) = Q, \gamma_P^*(0) = P;$

5) длина векторов скорости  $\gamma_Q^{*\prime}(0)$  и  $\gamma_P^{*\prime}(0)$  равна 1;

6) точки  $\gamma_Q^*(s), \gamma_Q^*(-s), \gamma_P^*(s^2)$  являются вершинами проекции опорного  $A_1^3$ -треугольника для любого  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , достаточно близкого к нулю.

Тогда, согласно лемме Адамара (с. 41), существуют гладкие функции  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  переменной  $s \in \mathbb{R}$  и гладкие функции  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$  переменной  $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ , такие, что ростки кривых  $\gamma_Q^*$  и  $\gamma_P^*$  в точках  $Q$  и  $P$  задаются ростками в нуле отображений

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto \begin{pmatrix} s^2 \alpha_1 \\ s + s^2 \alpha_2 \\ 1 + s^2 \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \tilde{s} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{s} + \tilde{s}^2 \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{s}^2 \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{s}^2 \tilde{\alpha}_3 \end{pmatrix},$$

соответственно. Следовательно, существует такое  $\varepsilon > 0$ , что множество  $\Upsilon^*$  в окрестности отрезка  $PQ$  является образом прямого произведения интервала  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  и отрезка  $[0, 1]$  числовой прямой  $\mathbb{R}$  при отображении

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \mapsto \gamma_P^*(s^2) + t(\gamma_Q^*(s) - \gamma_P^*(s^2)),$$

$$F(s, t) = \begin{pmatrix} s^2 + s^4 \beta_1 \\ s^4 \beta_2 \\ s^4 \beta_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s^2 \beta_4 \\ s + s^2 \beta_5 \\ 1 + s^2 \beta_6 \end{pmatrix},$$

где  $\beta_1, \dots, \beta_6$  — гладкие функции переменной  $s \in \mathbb{R}$ .

Сначала опишем топологию множества  $\Upsilon^*$  в окрестности точки  $P$ . Проекция на гиперплоскость  $\pi$  опорных  $A_1^3$ -треугольников

разных опорных гиперплоскостей, достаточно близких к  $\pi$ , не пересекаются, поскольку не пересекаются сами опорные треугольники, а сужение проектирования на их объединение инъективно. Следовательно, сужение отображения  $F$  на прямое произведение  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, 1)$  является вложением, а множество  $\Upsilon^*$  в окрестности отрезка  $PQ$  получается из полосы  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1)$  склейкой точек  $(s, 0)$  и  $(-s, 0)$  для каждого  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Росток этой склейки в точке  $P$  гомеоморфен ростку боковой поверхности кругового конуса в его вершине.

Теперь найдём тип особенности отображения  $F$  в нуле относительно  $RL$ -эквивалентности. Замена переменной

$$t \mapsto \frac{t - s^4 \beta_3}{1 + s^2 \beta_6}$$

приводит росток  $F$  в нуле к виду

$$(s, t) \mapsto \begin{pmatrix} s^2 + s^4 \tilde{\beta}_1 \\ s^4 \tilde{\beta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s^2 \tilde{\beta}_3 \\ s + s^2 \tilde{\beta}_4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_4$  — гладкие функции от  $s$ . Замена переменной  $s$  при помощи функции, обратной к

$$s \mapsto s \sqrt{1 + s^2 \tilde{\beta}_1}$$

в окрестности нуля, приводит росток (62) в нуле к виду

$$(s, t) \mapsto \begin{pmatrix} s^2 \\ s^4 h_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s^2 h_2 \\ s + s^2 h_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  — гладкие функции от  $s$ .

Докажем, что росток в нуле отображения (63) устойчив. Для этого, в силу предложения 14.2 (с. 105) и теоремы версальности (с. 97), достаточно проверить, что отображение

$$(s, t) \mapsto \begin{pmatrix} s^2 \\ s^4 h_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s^2 h_2 \\ s + s^2 h_3 \end{pmatrix}$$

определяет инфинитезимально  $V$ -версальную деформацию своего генотипа

$$s \mapsto \begin{pmatrix} s^2 \\ s^4 h_1 \end{pmatrix}$$



с параметром  $t$ . Это означает, что любая упорядоченная пара гладких функций от  $s$  может быть представлена в окрестности нуля в виде суммы линейной комбинации пяти пар

$$\left( \begin{array}{c} 2s \\ 4s^3h_1 + s^4 \frac{dh_1}{ds} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} s^2 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ s^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} s^4h_1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ s^4h_1 \end{array} \right)$$

с коэффициентами, являющимися гладкими функциями от  $s$ , и линейной комбинации трёх пар

$$\left( \begin{array}{c} s^2h_2 \\ s + s^2h_3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

с вещественными коэффициентами.

Существование указанного разложения эквивалентно тому, что любая упорядоченная пара гладких функций от  $s$  может быть представлена в окрестности нуля в виде суммы линейной комбинации двух пар

$$\left( \begin{array}{c} s^2 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ s^2 \end{array} \right)$$

с коэффициентами, являющимися гладкими функциями от  $s$ , и линейной комбинации четырёх пар

$$\left( \begin{array}{c} s \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ s \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

с вещественными коэффициентами. Но последнее непосредственно следует из леммы Адамара.

Таким образом, росток отображения  $F$  в нуле устойчив. Его коранг в прообразе равен 1. Поэтому  $F$  имеет особенность типа зонтик Уитни в нуле согласно второй теореме Морена (с. 107). Отсюда и из приведённого выше топологического описания поверхности  $\Upsilon^*$  в окрестности точки  $P$  следует, что росток  $\Upsilon^*$  в  $P$  диффеоморфен ростку камеры зонтика Уитни в нуле. Остается заметить, что образ дифференциала отображения  $F$  в нуле определяется прямой  $PQ$ . Лемма 3 доказана.  $\square$

Введём координаты  $y_1, y_2, y_3$  в гиперплоскости  $\pi$  так, что росток поверхности  $S_0^*$  в точке  $P$  является ростком оборванного ласточкина хвоста (59) в нуле. В этих координатах росток поверхности  $\Upsilon^*$  задаётся довольно сложными формулами. Наша цель —

привести их к простому виду локальным диффеоморфизмом, сохраняющим росток (59).

Мы будем строить такой диффеоморфизм при помощи решений обыкновенного дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dt} = v_t(y)$ , где  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , а  $v_t(y)$  — гладкое семейство векторных полей, зависящих от  $t \in \mathbb{R}$  и таких, что  $v_t(0) \equiv 0$ . А именно (см. с. 86), это дифференциальное уравнение задаёт семейство диффеоморфизмов  $y \mapsto \varphi_t(y)$  окрестности  $U \subset \mathbb{R}^3$  начала координат, таких, что  $t \mapsto \varphi_t(y)$  — решение уравнения, определенное для всех  $t \in [0, 1]$  и удовлетворяющее начальному условию  $\varphi_0(y) = y \in U$ . Если векторные поля семейства  $v_t$  касаются оборванного ласточкина хвоста (59) (т. е. при любых  $y$  и  $t$  вектор  $v_t(y)$  лежит в касательной плоскости к поверхности (59) в точке  $y$ , если она неособая, и касается линии особых точек, если точка  $y$  особая), то диффеоморфизмы  $\varphi_t$  сохраняют росток (59) в нуле.

Пусть  $\Phi$  — множество всех гладких векторных полей в  $\mathbb{R}^3$ , обращающихся в нуль в начале координат и касающихся оборванного ласточкина хвоста (59). Оно является модулем<sup>1</sup> над кольцом гладких функций от  $y$ .

**Лемма 4.** *Модуль  $\Phi$  содержит подмодуль, порождённый полями*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \left( \frac{3}{16}y_3^2, -\left(y_1 + \frac{y_2^2}{4}\right), -\frac{y_2y_3}{2} \right), \\ \mathcal{V}_2 &= \left( \frac{y_2y_3}{8}, \frac{3}{4}y_3, -\left(y_1 + \frac{y_2^2}{4}\right) \right), \\ \mathcal{V}_3 &= \left( y_1, \frac{y_2}{2}, \frac{3}{4}y_3 \right). \end{aligned}$$

Этот подмодуль описан в книге [6]. Мы лишь выбрали другую систему образующих.

**Лемма 5.** *В гиперплоскости  $\pi$  существуют гладкие координаты  $y_1, y_2, y_3$ , в которых росток поверхности  $S_0^*$  в точке  $P$  является ростком в нуле оборванного ласточкина хвоста (59), а росток прямой  $PQ$  — ростком гладкой кривой, касающейся оси  $y_1$  в начале координат.*

<sup>1</sup>Определение модуля над кольцом аналогично определению векторного пространства над полем: надо лишь заменить термин поле на термин кольцо.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле

$$v = a_1 \mathcal{V}_1 + a_2 \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3,$$

где  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Дифференциальное уравнение  $\dot{y} = v(y)$  определяет семейство диффеоморфизмов  $y \mapsto \varphi_t(y)$  окрестности нуля пространства  $\mathbb{R}^3$  для всех  $t$ , достаточно близких к нулю. Образ  $Y(t)$  единичного направляющего вектора оси  $y_1$  под действием дифференциала  $d\varphi_t|_0$  отображения  $\varphi_t$  в нуле является решением уравнения в вариациях  $\dot{Y} = \frac{\partial v}{\partial y}(0)Y$ , где

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}a_2 \\ -a_2 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{t/2}(1 - e^{t/4})(a_1(1 + e^{t/4}) - 3a_2^2(1 - e^{t/4})) \\ 4e^{3t/4}(1 - e^{t/4})a_2 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья координаты вектора  $e^{-t}Y(t)$  определяют диффеоморфизм

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t/2}(1 - e^{t/4})(a_1(1 + e^{t/4}) - 3a_2^2(1 - e^{t/4})) \\ 4e^{-t/4}(1 - e^{t/4})a_2 \end{pmatrix},$$

при любом фиксированном положительном  $t$ .

Следовательно, касательную в точке  $P$  к любой гладкой кривой, трансверсально пересекающей касательную плоскость к поверхности  $S_0^*$  в этой точке, можно взять в качестве оси  $y_1$  системы координат  $y_1, y_2, y_3$ , в которой росток  $S_0^*$  в  $P$  является ростком в нуле оборванного ласточкина хвоста (59). Лемма 5 доказана.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $y_1, y_2, y_3$  — координаты в гиперплоскости  $\pi$ , описанные в лемме 5. Тогда росток поверхности  $\Upsilon^*$  в точке  $P$  является ростком в нуле камеры зонтика Уитни, заданного уравнением

$$y_3^2 + y_3Zh_1 + Z^2h_2 = 0, \quad (64)$$

где  $Z = y_1 + y_2^2/4$ , а  $h_1, h_2$  — такие гладкие функции от  $y$ , что

$$h_1(0) = h_2(0) = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(0) > 0.$$

**Доказательство.** По лемме 3 росток  $\Upsilon^*$  в точке  $P$  в подходящих гладких координатах  $Y_1, Y_2, Y_3$  является ростком в нуле камеры зонтика Уитни

$$Y_2^2 = Y_1 Y_3^2. \quad (65)$$

Ручка

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_1 < 0$$

этого зонтика может не совпадать с аналитическим продолжением

$$y_3 = 0, \quad Z = 0, \quad y_2 > 0$$

линии особых точек оборванного ласточкина хвоста (59). Поэтому сначала мы немного изменим уравнение (65).

А именно, росток кривой  $y_3 = 0, Z = 0$  в точке  $P$  является ростком в нуле кривой

$$Y_2 = \alpha(Y_1), \quad Y_3 = \beta(Y_1),$$

где  $\alpha, \beta$  — такие гладкие функции от  $Y_1$ , что  $\alpha(Y_1) = \beta(Y_1) = 0$  для любого  $Y_1 \geq 0$ . Зонтики Уитни

$$(Y_2 - \alpha(Y_1))^2 = Y_1 (Y_3 - \beta(Y_1))^2$$

и (65) отличаются только ручками. Следовательно, росток  $\Upsilon^*$  в точке  $P$  в координатах

$$\tilde{Y}_1 = Y_1, \quad \tilde{Y}_2 = Y_2 - \alpha(Y_1), \quad \tilde{Y}_3 = Y_3 - \beta(Y_1)$$

является ростком в нуле камеры зонтика Уитни

$$\tilde{Y}_2^2 = \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_3^2.$$

Новые координаты  $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3$  связаны с  $y_1, y_2, y_3$  гладкими функциями

$$\tilde{Y}_1 = \tilde{Y}_1(y_1, y_2, y_3), \quad \tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_2(y_1, y_2, y_3), \quad \tilde{Y}_3 = \tilde{Y}_3(y_1, y_2, y_3), \quad (66)$$

обращающимися в нуль в начале координат. Поскольку кривая  $y_3 = 0$ ,  $Z = 0$  задаётся уравнениями  $\tilde{Y}_2 = 0$ ,  $\tilde{Y}_3 = 0$ , то по лемме Адамара (с. 41) существуют такие гладкие функции  $a_1, a_2, b_1, b_2$  от  $y$ , что

$$\tilde{Y}_2 = a_1 y_3 + b_1 Z, \quad \tilde{Y}_3 = a_2 y_3 + b_2 Z.$$

Следовательно, росток  $\Upsilon^*$  в точке  $P$  в координатах  $y_1, y_2, y_3$  является ростком в нуле камеры зонтика Уитни

$$y_3^2 h_0 + y_3 Z h_1 + Z^2 h_2 = 0, \quad (67)$$

где

$$h_0 = a_1^2 - \tilde{Y}_1 a_2^2, \quad h_1 = 2(a_1 b_1 - \tilde{Y}_1 a_2 b_2), \quad h_2 = b_1^2 - \tilde{Y}_1 b_2^2.$$

Заметим, что  $b_1(0) = \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial y_1}(0) = 0$ , поскольку росток прямой  $PQ$  в точке  $P$  является ростком в нуле гладкой кривой, касающейся осей  $y_1, Y_3$  и  $\tilde{Y}_3$ . Следовательно,  $h_1(0) = h_2(0) = 0$  и

$$\frac{\partial h_2}{\partial y_1}(0) = -\frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial y_1}(0) b_2^2(0) = 0.$$

С другой стороны,

$$a_1(0) b_2(0) - a_2(0) b_1(0) \neq 0,$$

так как матрица Якоби отображения (66) в нуле невырожденная. Поэтому  $a_1(0) b_2(0) \neq 0$ , а значит,  $h_0(0) \neq 0$ .

Таким образом, уравнение (67) в окрестности начала координат можно разделить на функцию  $h_0$ . Остается заметить, что

$$\frac{\partial h_2}{\partial y_2}(0) = -\frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial y_2}(0) b_2^2(0) > 0,$$

поскольку кривая  $\tilde{\gamma}_P$  выходит из точки  $P$  в положительном направлении оси  $\tilde{Y}_1$  и в отрицательном направлении оси  $y_2$ . Лемма 6 доказана.  $\square$

Теперь упростим уравнение (64). По лемме Адамара его можно переписать в виде

$$y_3^2 + y_3 Z \tilde{h}_1 + Z^2 (y_2 (\lambda + \tilde{h}_2) + Z \tilde{h}_3) = 0, \quad (68)$$

где  $\lambda > 0$  и  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$  — такие гладкие функции от  $y$ , что

$$\tilde{h}_1(0) = \tilde{h}_2(0) = \tilde{h}_3(0) = 0. \quad (69)$$

Преобразование

$$y_1 \mapsto \frac{y_1}{\lambda}, \quad y_2 \mapsto \frac{y_2}{\sqrt{\lambda}}, \quad y_3 \mapsto \frac{y_3}{\sqrt[4]{\lambda^3}}$$

сохраняет росток в нуле оборванного ласточкина хвоста (59) и приводит уравнение (64) к виду (68), но уже с  $\lambda = 1$ . Оказывается, что подходящим диффеоморфизмом, сохраняющим росток (59), можно обнулить все три функции  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$  в уравнении (68). Мы докажем это при помощи гомотопического метода Тома в случае  $V$ -эквивалентности.

Рассмотрим семейство

$$F_t(y) = y_3^2 + ty_3Z\tilde{h}_1 + Z^2(y_2(1 + t\tilde{h}_2) + tZ\tilde{h}_3)$$

функций от  $y$  с параметром  $t \in [0, 1]$ . Через  $\xi$  обозначим функцию

$$\xi(y) = \frac{\partial F_t}{\partial t}(y) = y_3Z\tilde{h}_1 + y_2Z^2\tilde{h}_2 + Z^3\tilde{h}_3.$$

**Лемма 7.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial \mathcal{Y}_1} &= y_3Z\varepsilon_{t,1} + y_2Z^2\varepsilon_{t,2} - Z^3(1 + \varepsilon_{t,3}) + w_{t,1}F_t, \\ \frac{\partial F_t}{\partial \mathcal{Y}_2} &= -2y_3Z(1 + \varepsilon_{t,4}) + y_2Z^2b_{t,1} + Z^3b_{t,2} + w_{t,2}F_t, \\ \frac{\partial F_t}{\partial \mathcal{Y}_3} &= y_3Z\varepsilon_{t,5} + y_2Z^2(1 + \varepsilon_{t,6}) + Z^3b_{t,3} + w_{t,3}F_t, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,6}, b_{t,1}, \dots, b_{t,3}, w_{t,1}, \dots, w_{t,3}$  — гладкие семейства функций от  $y$  с параметром  $t$ , причём  $\varepsilon_{t,1}(0) \equiv \dots \equiv \varepsilon_{t,6}(0) \equiv 0$ .

Эти формулы получены путем непосредственных вычислений частных производных и использования леммы Адамара. Для их быстрой проверки лучше воспользоваться компьютером.

Пусть

$$v_t = \alpha_{t,1}\mathcal{Y}_1 + \alpha_{t,2}\mathcal{Y}_2 + \alpha_{t,3}\mathcal{Y}_3,$$

где  $\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2}, \alpha_{t,3}$  — гладкие семейства функций от  $y$  с параметром  $t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial v_t} = & y_3 Z(\varepsilon_{t,1} \alpha_{t,1} - 2(1 + \varepsilon_{t,4}) \alpha_{t,2} + \varepsilon_{t,5} \alpha_{t,3}) + \\ & + y_2 Z^2(\varepsilon_{t,2} \alpha_{t,1} + b_{t,1} \alpha_{t,2} + (1 + \varepsilon_{t,6}) \alpha_{t,3}) + \\ & + Z^3(-(1 + \varepsilon_{t,3}) \alpha_{t,1} + b_{t,2} \alpha_{t,2} + b_{t,3} \alpha_{t,3}) + \\ & + (w_{t,1} \alpha_{t,1} + w_{t,2} \alpha_{t,2} + w_{t,3} \alpha_{t,3}) F_t \end{aligned}$$

в силу леммы 7.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_{t,1} \alpha_{t,1} - 2(1 + \varepsilon_{t,4}) \alpha_{t,2} + \varepsilon_{t,5} \alpha_{t,3} = -\tilde{h}_1, \\ \varepsilon_{t,2} \alpha_{t,1} + b_{t,1} \alpha_{t,2} + (1 + \varepsilon_{t,6}) \alpha_{t,3} = -\tilde{h}_2, \\ -(1 + \varepsilon_{t,3}) \alpha_{t,1} + b_{t,2} \alpha_{t,2} + b_{t,3} \alpha_{t,3} = -\tilde{h}_3 \end{cases} \quad (70)$$

относительно семейств  $\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2}, \alpha_{t,3}$ . Она линейная, причём определитель матрицы её коэффициентов равен 2 в точке  $y = 0$  при любом  $t$ . Следовательно, эта система имеет и притом единственное гладкое решение в достаточно малой окрестности нуля при всех  $t \in [0, 1]$ .

Решение  $\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2}, \alpha_{t,3}$  системы (70) определяет гладкое семейство векторных полей  $v_t$  и гладкое семейство функций

$$w_t = w_{t,1} \alpha_{t,1} + w_{t,2} \alpha_{t,2} + w_{t,3} \alpha_{t,3},$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\xi(y) = -\frac{\partial F_t}{\partial v_t}(y) + w_t(y) F_t(y)$$

для всех  $y$ , достаточно близких к нулю, и  $t \in [0, 1]$ . Это уравнение является гомологическим уравнением (31) гомотопического метода Тома в случае  $V$ -эквивалентности функций. Поэтому к семейству  $F_t(y)$  применимо предложение 12.3 (с. 93).

Из него следует, что росток в нуле поверхности  $F_1(y) = 0$  в подходящих гладких координатах  $y_1, y_2, y_3$  в гиперплоскости  $\pi$  является ростком в нуле поверхности  $F_0(y) = 0$ . При этом росток поверхности  $S_0^*$  в точке  $P$  является ростком оборванного

ласточкина хвоста (59) в нуле. Росток поверхности  $\Upsilon^*$  в  $P$  является ростком камеры зонтика Уитни  $y_3^2 + y_2 Z^2 = 0$  в нуле. Эта камера лежит с той же стороны от оборванного ласточкина хвоста (59), что и пирамида всего ласточкина хвоста. Поэтому на ней  $y_2 \leq 0, Z \geq 0$ .

**Замечание.** Из условий (69) следует, что в новых координатах росток прямой  $PQ$  в точке  $P$  также является ростком гладкой кривой, касающейся оси  $y_1$  в нуле.

Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что одновременно мы доказали ещё и следующее (более простое) утверждение.

**Теорема 2.** Пусть ростки в нуле двух поверхностей в  $\mathbb{R}^3$  диффеоморфны росткам ласточкина хвоста и зонтика Уитни соответственно. Предположим, что в начале координат ростки линий самопересечения этих поверхностей совпадают, а касательная прямая к зонтику Уитни трансверсальна касательной плоскости к ласточкину хвосту. Тогда росток в нуле объединения этих поверхностей в подходящих гладких координатах  $y_1, y_2, y_3$  является ростком в нуле объединения образов отображений

$$y_1 = -3x_1^4 - x_1^2 x_2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = -4x_1^3 - 2x_1 x_2 \quad (71)$$

(ласточкин хвост) и

$$y_1 = x_1 - \frac{x_2^4}{4}, \quad y_2 = -x_2^2, \quad y_3 = x_1 x_2 \quad (72)$$

(зонтик Уитни), где  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Объединение поверхностей (71), (72) называется *склежкой ласточкина хвоста с зонтиком Уитни*. Росток склейки в окрестности нуля, ограниченной достаточно малым параллелепипедом, представлен на рис. 27. Тонкие линии изображают пересечение склейки с параллелепипедом, а также видимый контур зонтика Уитни.

Глобально склейка ласточкина хвоста с зонтиком Уитни устроена достаточно сложно (например, зонтик Уитни пересекает ребра возврата ласточкина хвоста). Дело в том, что в указан-



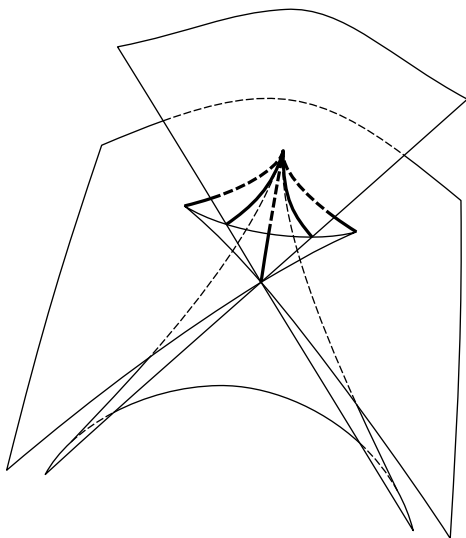


Рис. 27. Склейка ласточкина хвоста с зонтиком Уитни

ных координатах  $y_1, y_2, y_3$  ласточкин хвост и зонтик Уитни определяются квазиоднородными многочленами с разными наборами весов переменных: 4, 2, 3 для ласточкина хвоста и 4, 2, 5 для зонтика Уитни. Поэтому склейка не является квазиоднородной поверхностью и её строение в целом лучше изучать на компьютере при помощи какой-нибудь программы 3D-визуализации.

**Замечание.** Имеется общая задача (1972-12 в книге [7]), связанная с изучением особенностей выпуклых оболочек гладких подмногообразий всех возможных размерностей в  $\mathbb{R}^n$ . О некоторых результатах, полученных при решении этой задачи, можно узнать, например, из статей [32]—[36], [56].

В частности, в заметке [32] приведена классификация особенностей границы выпуклой оболочки гладкой замкнутой кривой общего положения в  $\mathbb{R}^3$  (подробное доказательство приведено в статье [33]). Оказывается, что ростки границы выпуклой оболочки кривой с точностью до диффеоморфизмов объемлющего пространства исчерпываются списком, состоящим из шести нормальных форм; все они не имеют модулей. Для большей инфор-

мативности мы выпишем нормальные формы ростков самой выпуклой оболочки в точках её границы.

**Теорема** [32], [33]. Росток выпуклой оболочки гладкой замкнутой кривой общего положения в  $\mathbb{R}^3$  в каждой точке границы оболочки в подходящих гладких координатах  $x, y, z$  является ростком в нуле одного из следующих шести выпуклых множеств:

- 1)  $z \geq 0$ ;
- 2)  $z \geq |x|$ ;
- 3)  $z \geq \min^2\{x, 0\}$ ;
- 4)  $z \leq \min_{t \in \mathbb{R}}\{t^4 + xt^2 + yt\}$ ;
- 5)  $z \geq \min^2\{x, y, 0\}$ ;
- 6)  $\begin{cases} z \geq \min^2\{x, y, 0\}; \\ x + y \geq 0. \end{cases}$

Отметим, что этот результат воспроизведен в книге [5] с опечаткой. А именно, формула 4 из приведённого выше списка написана в [5] с неправильным знаком неравенства (действительно, ростки в нуле замыканий выпуклой и невыпуклой связных компонент дополнения к оборванному ласточкину хвосту (59) не переводятся друг в друга гладкими заменами координат объемлющего пространства).

**Замечание.** Приложения теории особенностей выпуклых оболочек к исследованию границы локальной управляемости (достижимости) управляемой системы общего положения описаны в обзоре [19]. В качестве примера практического использования классификации особенностей выпуклых оболочек см. работу [15], посвященную исследованию фазовых переходов двухкомпонентных смесей в термодинамике.

### Упражнения

1. Опорные плоскости каких типов имеет гладкая замкнутая кривая общего положения в  $\mathbb{R}^3$ ? В каких точках опорных симплексов каких типов росток выпуклой оболочки кривой диффеоморфен заданному ростку из приведённого выше списка шести нормальных форм?

2. Докажите, что для любого натурального  $N$  существует гладкая замкнутая кривая в  $\mathbb{R}^4$ , некоторые особенности границы выпуклой оболочки которой имеют не менее  $N$  функциональных модулей одной переменной, причём эти особенности неустраняемы малой деформацией исходной кривой (см. [33], [35]).

## Литература

- [1] Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
- [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
- [3] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности // Функц. анализ и его прил. Т. 6 (1972), вып. 4. С. 3–25.  
<http://mi.mathnet.ru/faa2531>
- [4] Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы // УМН. Т. 30 (1975), вып. 5. С. 3–65.  
<http://mi.mathnet.ru/umn4237>
- [5] Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.  
<http://ilib.mccme.ru/djvu/arnold/tk.htm>
- [6] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996.
- [7] Арнольд В. И. Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000.
- [8] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009.
- [9] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.  
<http://www.mccme.ru/arnold/books/odu-12.pdf>
- [10] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2012.
- [11] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: URSS, 2017.
- [12] Богаевский И. А. Особенности выпуклых оболочек трёхмерных гиперповерхностей // Тр. МИАН. Т. 221 (1998). С. 81–100.  
<http://mi.mathnet.ru/tm635>
- [13] Бордман Дж. М. Особенности дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 102–152.
- [14] Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977.
- [15] Варченко А. Н. Перестройки выпуклых оболочек и фазовые переходы в термодинамике // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Т. 33. М.: ВИНТИ, 1988. С. 157–191.  
<http://mi.mathnet.ru/intd109>

- [16] *Васильев В. А.* Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: МЦНМО, 2000.
- [17] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.
- [18] *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977.
- [19] *Давыдов А. А., Закалюкин В. М.* Управляемость нелинейных систем: типичные особенности и их устойчивость // УМН. Т. 67 (2012), вып. 2. С. 65–92.  
<https://doi.org/10.4213/rm9468>
- [20] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. Т. 1–3. М.: URSS, 2013.
- [21] *Закалюкин В. М.* Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функци. анализ и его прил. Т. 11 (1977), вып. 3. С. 76–77.  
<http://mi.mathnet.ru/faa2091>
- [22] *Закалюкин В. М.* Перестройки фронтов, каустик, зависящих от параметра, версальность отображений // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1983. С. 56–93.  
<http://mi.mathnet.ru/intd62>
- [23] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [24] *Мезер<sup>1</sup> Дж.* Теорема деления для бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 198–215.
- [25] *Мезер Дж.* Структурная устойчивость отображений // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 216–267.
- [26] *Мазер Дж. Н.* Стратификации и отображения // УМН. Т. 27 (1972), вып. 5. С. 85–118.  
<http://mi.mathnet.ru/umn5110>
- [27] *Мальгранж Б.* Подготовительная теорема для дифференцируемых функций // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 183–189.
- [28] *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: URSS, 2011.
- [29] *Морэн<sup>2</sup> Б.* Канонические формы особенностей дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 153–163.

---

<sup>1</sup>Мезер — транслитерация фамилии Джона Мазера (J. Mather), использовавшаяся в 60-х годах прошлого века.

<sup>2</sup>Морэн — транслитерация фамилии Бернара Морена (B. Morin), использовавшаяся в 60-х годах прошлого века.

- [30] *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.
- [31] *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.
- [32] *Седых В. Д.* Особенности выпуклой оболочки кривой в  $\mathbb{R}^3$  // Функциональный анализ и его прил. Т. 11 (1977), вып. 1. С. 81–82.  
<http://mi.mathnet.ru/faa2057>
- [33] *Седых В. Д.* Строение выпуклой оболочки пространственной кривой // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 6 (1981). С. 239–256.
- [34] *Седых В. Д.* Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2 // Матем. сб. Т. 119 (1982), №2. С. 233–247.  
<http://mi.mathnet.ru/msb2846>
- [35] *Седых В. Д.* Особенности выпуклых оболочек // Сиб. матем. журн. Т. 24 (1983), №3. С. 158–175.  
[https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN394039319\\_0024](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN394039319_0024) (p. 562:158)
- [36] *Седых В. Д.* Стабилизация особенностей выпуклых оболочек // Матем. сб. Т. 135 (1988), №4. С. 514–519.  
<http://mi.mathnet.ru/msb1721>
- [37] *Седых В. Д.* Теорема о четырёх вершинах выпуклой пространственной кривой // Функциональный анализ и его прил. Т. 26 (1992), вып. 1. С. 35–41.  
<http://mi.mathnet.ru/faa756>
- [38] *Седых В. Д.* Связь лагранжевых особенностей с лежандровыми при стереографической проекции // Матем. сб. Т. 185 (1994), №12. С. 123–130.  
<http://mi.mathnet.ru/msb950>
- [39] *Седых В. Д.* Склеивание ласточкина хвоста и зонтика Уитни в четырёхмерной управляемой системе // Тр. ГАНГ им. И. М. Губкина. М.: Нефть и газ, 1997. С. 58–68.
- [40] *Седых В. Д.* Особенности коранга 1 устойчивых гладких отображений и особые касательные гиперплоскости пространственной кривой // Матем. заметки. Т. 78 (2005), вып. 3. С. 413–427.  
<https://doi.org/10.4213/mzm2598>
- [41] *Седых В. Д.* О сосуществовании мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения многообразий одинаковой размерности // Тр. МИАН. Т. 258 (2007). С. 201–226.  
<http://mi.mathnet.ru/tm484>

- [42] *Седых В. Д.* О топологии волновых фронтов в пространствах не-больших размерностей // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 76 (2012), №2. С. 171–214.  
<https://doi.org/10.4213/im4572>
- [43] *Седых В. Д.* О топологии устойчивых лагранжевых отображений с особенностями типов  $A$  и  $D$  // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 79 (2015), №3. С. 159–202.  
<https://doi.org/10.4213/im8202>
- [44] *Том Р., Левин Г.* Особенности дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 9–101.
- [45] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [46] *Banchoff Th., Gaffney T., McCrory C.* Counting tritangent planes of space curves // Topology. V. 24 (1985), no. 1. P. 15–23.
- [47] *Chen K. T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point // Amer. J. Math. V. 85 (1963), no. 4. P. 693–722.
- [48] *Freedman M. H.* Planes triply tangent to curves with nonvanishing torsion // Topology. V. 19 (1980), no. 1. P. 1–8.
- [49] *Haupt O.* Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Bose über die Anzahl der Schmieggkreise eines Ovals, die vom Oval umschlossen werden oder das Oval umschließen // J. Reine Angew. Math. V. 239/240 (1969). S. 339–352.
- [50] *Kneser A.* Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie // Festschrift H. Weber. B.G. Teubner, Leipzig, 1912. S. 170–180.
- [51] *Levine H. I.* The singularities,  $S_1^q$  // Illinois J. Math. V. 8 (1964). P. 152–168.
- [52] *Looijenga E.* The discriminant of a real simple singularity // Compositio Math. V. 37 (1978), no. 1. P. 51–62.
- [53] *Mond D.* On the classification of germs of maps from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$  // Proc. London Math. Soc. V. 50 (1985), no. 2. P. 333–369.
- [54] *Mukhopadhyaya S.* New methods in the geometry of a plane arc, I. Cyclic and sextactic points // Bull. Calcutta Math. Soc. V. 1 (1909). P. 31–37.
- [55] *du Plessis A., Wall C. T. C.* The geometry of topological stability. London Mathematical Society Monographs. New Series, 9. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

- [56] *Robertson S. A., Romero Fuster M. C.* The convex hull of a hypersurface // Proc. London Math. Soc. V. 50 (1985), no. 2. P. 370–384.
- [57] *Sedykh V. D.* Swallowtail, Whitney umbrella and convex hulls // J. Dyn. Control Syst. (2020).  
<https://doi.org/10.1007/s10883-020-09510-5>
- [58] *Sedykh V. D.* On Lagrangian and Legendrian singularities // Arnold Math. J. V. 7 (2021), no. 2. P. 195–212.  
<https://doi.org/10.1007/s40598-020-00161-9>
- [59] *Whitney H.* The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n - 1)$ -space // Ann. of Math. (2). V. 45 (1944), no. 2. P. 247–293.
- [60] *Whitney H.* On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane // Ann. of Math. (2). V. 62 (1955), no. 3. P. 374–410.
- [61] *Zeeman E. C.* On the unstable behaviour of stock exchanges // J. Math. Econom. V. 1 (1974). P. 39–49.