

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ
ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ
ГРУНТОВЫХ ВОД

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва 1942 Ленинград

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ЕВ_1942_AKS_834

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

Ак
С

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ
ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ
ГРУНТОВЫХ ВОД

БИБЛИОТЕКА
Академии Наук
СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва 1942 Ленинград

P. POLUBARINOVA-KOCHINA

PROBLEMS OF THE TWO-DIMENSIONAL
FLOW OF GROUND WATERS

ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению вопроса о фильтрации жидкостей в пористых средах было положено Дарси в книге 1856 г.^[44], трактующей о водопроводах города Дижона. Исследуя экспериментально вопрос об очистке воды пропусканием ее через песок, Дарси получил закон, носящий его имя. В шестидесятых годах появились работы Дюпюи^[48] по теории притока грунтовых вод к колодцам.

К 1897—1898 гг. относится большая статья Ч. Сликтера^[63], которого называют «отцом теории фильтрации». Форхгеймером^[49] и Н. Е. Жуковским^[15] даны дифференциальные уравнения движения грунтовых вод.

В вопросах дальнейшего развития и уточнения методов решения различных задач теории фильтрации видную роль играют русские ученые.

Н. Н. Павловскому^[28] принадлежит заслуга развития метода решения задач, относящихся к движению грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Основание сооружения считается состоящим из отрезков прямых линий, остальные границы области движения (непроницаемое основание, границы водных бассейнов) также являются прямолинейными. Движение считается плоским и установившимся. При этих условиях задача сводится к применению формул Кристоффеля-Шварца, дающих конформное отображение многоугольника на полуплоскость. Метод Н. Н. Павловского применялся многими его последователями к решению многочисленных задач (В. С. Козлов, Н. К. Гиринский и др.).

Н. Е. Жуковский впервые дал метод решения задачи о фильтрации со свободной поверхностью. Отдельные задачи были решены Козени^[58],^[55]. Систематическое развитие и применение методов конформного отображения в задачах со свободной поверхностью принадлежат В. В. Ведерникову^[6].

В связи с работами Козени Эренбергер обратил внимание на существование в плотинах и колодцах так называемого «промежутка высачивания», т. е. такой части откоса плотины или колодца, с которой происходит просачивание воды в свободную атмосферу. Задачи о фильтрации в плотинах с прямолинейными границами, когда имеется и свободная поверхность и промежуток высачивания, представляют наибольшие трудности для точного решения. Б. Б. Девисон^[13] впервые (в 1932 г.) дал общий метод для решения таких задач. Однако метод этот настолько сложен, что Девисон применил его лишь к одному случаю — земляной перемычки, т. е. плотины прямоугольного сечения. Через два года Гамелем^[61] была решена задача о земляной перемычке тем же, в сущности, методом, что и у Девисона. Вычисления, произведенные Гамелем и Гюнтером^[50], а позже Маскетом^[56],^[57] для нескольких случаев очень узкой перемычки, очень сложны.

В Математическом институте Академии Наук СССР мне была предложена тема — разработать метод решения задач о фильтрации через земляные плотины с помощью применения теории линейных дифференциальных уравнений класса

Фукса При ближайшем рассмотрении оказалось, что этот метод в применении к плотинам трапециoidalного сечения очень сложен и обладает теми же недостатками, что и метод, связанный с формулой Кристоффеля-Шварца, а именно, сложностью определения параметров, причем в случае линейных уравнений трудности эти усугубляются вследствие наличия так называемых аксессуарных параметров. Лишь тогда, когда число особых точек, т. е. число «углов» области движения, можно свести к трем или двум, метод является эффективным. С его помощью удалось получить более простое, чем у Девисона и Гамеля, решение задачи о земляной перемычке и провести для нее серию вычислений. Что касается плотин с наклонными откосами, то мною рассмотрены лишь некоторые частные случаи их в предположении, что происходит испарение со свободной поверхности. С помощью применения некоторых искусственных приемов оказалось возможным свести к линейным дифференциальным уравнениям несколько простейших задач о движении в двуслойной среде, с двумя различными коэффициентами фильтрации.

Б. К. Ризенкампп^[30] дал применяемому мною методу геометрическую форму. С. В. Фалькович^[39] внес некоторые усовершенствования в этот метод и решил с его помощью до конца ряд примеров. В. М. Абрамов применил этот метод к решению одной задачи теории упругости (по этому поводу им был сделан в 1939 г. доклад на семинаре по механике сплошной среды в Москве).

Что касается земляных плотин трапециoidalного сечения со свободной поверхностью и промежутком высачивания, нужно ожидать, что эффективное решение задач о фильтрации в таких плотинах будет опубликовано С. В. Нумеровым, который уже дал хороший метод решения аналогичных задач без промежутка высачивания и указал на возможность распространить его на случай с промежутком высачивания^[37].

Основное содержание настоящей работы составляет изложение метода решения задач, в которых, по условию, равны нулю мнимые части двух линейных комбинаций двух аналитических функций комплексного переменного на отрезках действительной оси плоскости комплексного переменного, и применение этого метода к указанным выше задачам теории фильтрации.

Кроме того, я включила сюда некоторые свои исследования по теории фильтрации, не связанные с аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений. Это прежде всего задача о движении двух жидкостей различной плотности, причем рассматриваются случаи установившегося и не установившегося движения. Последняя глава посвящена вопросу о фильтрации под гидротехническим сооружением в многослойной среде. Здесь я пользуюсь представлением функций в виде интеграла Фурье, причем мои исследования переплетаются с исследованиями Б. К. Ризенкамппа^[30], С. В. Фальковича^[39] и Н. К. Калинина^[17].

Отметим в заключение, что за последнее десятилетие наблюдается развитие интереса к теории фильтрации нефти в пористой среде. В Советском Союзе одним из первых занимался этими вопросами Л. С. Лейбензон^[38], затем В. Н. Щелкачев^[40]. В 1937 г. в США Muskat^[59] опубликовал капитальный труд по фильтрации жидкостей и газов в пористых средах. Некоторые из методов, применяемых в настоящей работе, в особенности относящиеся к фильтрации в многослойной среде, могут быть применены и в теории фильтрации нефти.

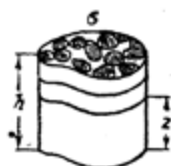
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ГОДОГРАФ СКОРОСТИ

1. Основные понятия. Грунтовой водой называют воду, заполняющую все поры грунта и все промежутки между зернами грунта. Грунт (песок, проницаемая глина и пр.) состоит из отдельных частиц, соприкасающихся между собой и образующих так называемый грунтовой скелет. Движение между частицами грунта носит сложный и беспорядочный характер, поэтому естественно рассматривать некоторое среднее движение. Если выделить малый объем, содержащий, однако, достаточно большое число зерен грунта, то отношение объема пор и промежутков между зернами грунта, т. е. объема, занятого водой, ко всему выделенному объему, называется пористостью грунта и обозначается обычно буквой m .

Можно было бы ввести еще понятие о «поверхностной пористости», т. е., выделив некоторую площадку, взять отношение части площади, занятой водой, ко всей выделенной площади.

Но эти две величины—объемная и поверхностная пористости—совпадают, если рассматривать некоторые средние значения поверхностной пористости.

Действительно, выделим объем грунта цилиндрической формы, с площадью основания σ и высотой h (фиг. 1). Обозначим через τ величину взятого объема, через τ_1 —объем пор. Тогда для объемной пористости имеем



Фиг. 1.

$$m = \frac{\tau_1}{\tau} \quad (1.1)$$

Пусть площадь пустот в площади σ будет σ_1 ; это переменная величина, зависящая от z . Для среднего значения поверхностной пористости по объему τ имеем

$$m_{\text{пов}} = \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_1 dz \right\} : \sigma = \frac{1}{h\sigma} \int_0^h \sigma_1 dz = \frac{\tau_1}{\tau} = m$$

Таким образом при выбранном нами способе осреднения среднее значение поверхностной пористости равно объемной пористости.

Обычно в опытах по изучению закона фильтрации рассматривают одномерное движение, т. е. движение в узкой трубке. Скорости отдельных частиц жидкости имеют всевозможные направления, т. е. могут иметь все три компоненты (u , v , w) отличными от нуля. Однако можно считать, что существуют некото-

рые средние значения этих компонент; например, можно рассматривать их средние арифметические в достаточно большом числе n точек:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \\ \bar{v} &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \\ \bar{w} &= \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n}\end{aligned}\quad (1.2)$$

При этом, если ось трубки направлена вдоль оси x , то v и w должны равняться нулю, т. е. при статистическом характере движения положительные и отрицательные отклонения от прямолинейного движения должны взаимно компенсироваться.

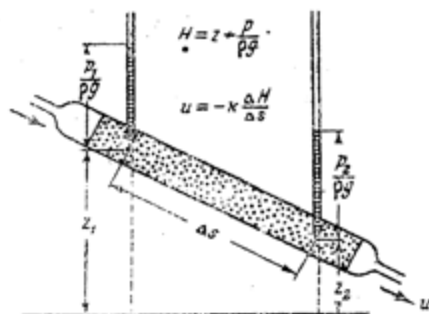
В теории фильтрации принято иметь дело не со средними скоростями частиц, а с так называемой скоростью фильтрации, под которой разумеют объемный расход жидкости в единицу времени через единицу площади. Чтобы найти зависимость между скоростью фильтрации и средней скоростью частицы, вычислим расход Q через площадку σ , перпендикулярную к оси трубки: он равен, с одной стороны, скорости фильтрации u , умноженной на величину площадки, а с другой стороны, средней скорости на величину площади, занятой водой, т. е.

$$\bar{Q} = u\sigma = \bar{u}m\sigma$$

Отсюда

$$\bar{u} = \frac{u}{m} \quad (1.3)$$

Понятие о скорости фильтрации, установленное для одномерного движения, обобщается на трехмерное движение, — вектором скорости фильтрации будем называть вектор, проекция которого на нормаль к данной площадке численно равна расходу жидкости через эту площадку. Этот вектор направлен по нормали к площадке с наибольшим расходом.



Фиг. 2.

2. Закон Дарси. Опыты, произведенные Дарси ^[44] и повторенные потом многими исследователями (фиг. 2), показывают, что для большинства грунтов справедлива зависимость, получившая название закона Дарси:

$$u = kI \quad (1.4)$$

где u — скорость фильтрации, I — гидравлический уклон, т. е. производная по пути s от пьезометрического напора H , взятая со знаком минус:

$$I = -\frac{dH}{ds} \quad (1.5)$$

причем

$$H = z + \frac{p}{\rho g} \quad (1.6)$$

Здесь z — высота рассматриваемой точки от произвольно выбранной горизонтальной плоскости, p — давление, ρ — плотность жидкости, которую считаем постоянной, g — ускорение силы тяжести. Таким образом

$$u = -k \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (1.7)$$

Постоянная величина k , имеющая размерность скорости, называется коэффициентом фильтрации. Он равен по величине вертикальной скорости фильтрации при условии, что давление имеет постоянное значение.

В теории фильтрации нефти вместо коэффициента фильтрации принято иметь дело с проницаемостью грунта k_0 ; при этом выражение для скорости фильтрации имеет вид

$$u = -\frac{k_0}{\mu} \frac{d(p + \rho g z)}{ds} \quad (1.8)$$

где μ — вязкость жидкости (воды или нефти).

Множитель k_0 носит название проницаемости. Как видно из сопоставления формул (1.7) и (1.8),

$$k_0 = \frac{k\mu}{\rho g} \quad (1.9)$$

Проницаемость грунта имеет размерность квадрата длины.

3. Уравнения установившегося движения. Закон Дарси получен из опытов с одномерным установившимся движением жидкости. Его распространяют на трехмерное движение; принимая, что проекции скорости фильтрации на оси координат выражаются так:

$$\begin{aligned} u &= -k \frac{\partial H}{\partial x} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ v &= -k \frac{\partial H}{\partial y} = -k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ w &= -k \frac{\partial H}{\partial z} = -k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где H определяется формулой (1.6).

Иначе говоря, скорость фильтрации в установившемся движении имеет потенциал φ :

$$\varphi(x, y, z) = -k \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) + C \quad (1.11)$$

(C — произвольная постоянная), так что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.12)$$

Уравнение неразрывности, выражающее при постоянной плотности ρ неизменность массы жидкого объема, имеет обычный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.13)$$

Из уравнения неразрывности следует, что потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В плоском движении условимся за ось y принимать вертикальную прямую, за ось x — горизонтальную прямую. Тогда установившееся движение будет подчиняться уравнениям

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.14)$$

$$\varphi = -k \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) + C \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.16)$$

вытекает, что существует функция тока $\psi(x, y)$ такая, что

$$[u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.17)$$

причем линейная комбинация функций φ и ψ

$$f = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.18)$$

является функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Ее принято называть комплексным потенциалом.

Рассматривая движение нефти в горизонтальной плоскости, пренебрегают силой тяжести, а потому принимают

$$\varphi = -\frac{k}{g^2} p = 1 - \frac{k_0}{\mu} p$$

Таким образом видим, что теория плоского установившегося движения сводится к теории функций комплексного переменного. Нужно еще установить граничные условия задач теории фильтрации, что будет сделано ниже (п. 6).

Для некоторых грунтов (крупнозернистых, трещиноватых и т. д.) закон Дарси оказывается неимеющим места.

В работе С. А. Христиановича^[12], посвященной движению грунтовых вод, не следующих закону Дарси, показано, как ввести поправку на отступление от этого закона. С этой точки зрения на закон Дарси можно смотреть как на первое приближение к теории движения грунтовых вод вообще.

4. Неустановившееся движение. Будем обозначать через (u, v, w) составляющие скорости отдельной частицы жидкости, движущейся между зернами грунта, и применим к ним уравнения движения идеальной жидкости

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \end{aligned} \quad (1.19)$$

В качестве внешней силы (F_x, F_y, F_z) рассматриваем одну силу—силу тяжести, т. е. принимаем

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -g \quad (1.20)$$

(ось z направлена по вертикали вверх).

Силами вязкости жидкости пренебрегают по сравнению с силами внешнего трения жидкости о стенки грунта.

Произведем теперь осреднение уравнений (1.19) по объему, подобно тому, как это делается в теории турбулентности (см., например^[13], ч. II). Если пользоваться формулами осреднения (1.2), то можно, заменив в (1.19) последовательно u, v, w на $\bar{u}, \bar{u}', \dots$, составить среднее арифметическое от левых и правых частей этих уравнений. Удобнее, однако, поступить так, как это делается в теории турбулентного движения, разложив проекции скорости данной частицы на среднюю скорость $\bar{u}$ и добавочную u' :

$$u = \bar{u} + u'$$

Плотность будем считать постоянной величиной, не подлежащей осреднению. Величину давления разобьем на два слагаемых;

$$p = \bar{p} + p'$$

Тогда вместо первого из уравнений (1.19) будем иметь.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{F}_x + \bar{\Phi}_x \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_x = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} - \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} - \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \\ & - \bar{u}' \frac{\partial u'}{\partial x} - \bar{v}' \frac{\partial u'}{\partial y} - \bar{w}' \frac{\partial u'}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.22)$$

а $\bar{\Phi}$ есть осредненное значение Φ_x .

Выражение Φ_x зависит как от осредненных, так и от добавочных скоростей. Можно рассматривать $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}_y$, $\bar{\Phi}_z$ как составляющие добавочных сил — сил сопротивления, зависящих от наличия грунтового скелета, который обуславливает неправильный и беспорядочный характер движения частиц жидкости.

А. Д. Гостевым^[12] сделана попытка определить с помощью некоторых дополнительных гипотез характер зависимости этих добавочных сил от скоростей.

Однако для того, чтобы иметь явное выражение силы ($\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}_y$, $\bar{\Phi}_z$), которую рассматривают как массовую силу сопротивления, происходящую от воздействия грунтового скелета на фильтрующуюся жидкость, прибегают к данным эксперимента. А именно, принят такой способ рассуждения. Предположим, что движение установившееся. Так как скорости частиц жидкости при фильтрации в грунте малы, то произведения $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, ... являются малыми высшего порядка и ими можно пренебречь.

Уравнения установившегося движения принимают тогда вид;

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \Phi_x \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \Phi_y \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \Phi_z \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отсюда

$$\Phi_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \Phi_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \Phi_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g$$

что можно записать еще так:

$$\Phi_x = g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\rho g} + z \right), \quad \Phi_y = g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}}{\rho g} + z \right), \quad \Phi_z = g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{p}}{\rho g} + z \right)$$

Сравнивая правые части полученных выражений с правыми частями уравнений (1.10), видим, что силы сопротивления пропорциональны скоростям

$$\Phi_x = -\frac{mg}{k} \bar{u}, \quad \Phi_y = -\frac{mg}{k} \bar{v}, \quad \Phi_z = -\frac{mg}{k} \bar{w}$$

Считая, что в случае неустановившегося движения сила сопротивления зависит от скорости таким же образом, как и в случае установившегося движения (и ни от чего, кроме скоростей, не зависит), получим уравнения осредненного неустановившегося движения в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{gm}{k} \bar{u} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{gm}{k} \bar{v} \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{gm}{k} \bar{w} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Эти уравнения с помощью формулы (1.3) и аналогичных ей для других составляющих скорости можно записать в скоростях фильтрации. Получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{m} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{g}{k} u \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{m} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{g}{k} v \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{m} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{g}{k} w\end{aligned}\quad (1.25)$$

Заметим, что в раскрытом виде левые части этих уравнений должны иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{m} \right) = \frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{m^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \dots$$

Однако членами второго порядка считают возможным пренебрегать как в установившемся, так и в неустойчивом движении вследствие малости самих скоростей и их производных по координатам.

По поводу уравнений неустойчивого движения существуют две точки зрения. Некоторые авторы, например, Девисон^[14], оставляют в уравнениях движения члены, содержащие производную по времени, т. е. пишут уравнения движения в форме

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k} u \\ \frac{1}{m} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k} v \\ \frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{k} w - g\end{aligned}\quad (1.26)$$

Если движение плоское, то уравнения неустойчивого движения мы будем писать в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k} u \\ \frac{1}{m} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k} v - g\end{aligned}\quad (1.26')$$

(для простоты отбрасываем черту при обозначении давления).

Другие, как, например, Muskat^[13], считают, что закон Дарси для неустойчивого движения тот же самый, что и для установившегося, т. е. выражается уравнениями (1.10). Так как уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости не содержит производной по времени, то Muskat по существу рассматривает неустойчивое движение как последовательность ряда установившихся движений.

В теории фильтрации принято вводить понятие о гипотетической, фиктивной жидкости, которая непрерывным образом заполняет всю область движения, включая грунтовый скелет, и заполняет реальную жидкость, движущуюся в порах грунта. Если представить уравнения (1.26) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (mp)}{\partial x} - \frac{gm}{k} u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (mp)}{\partial y} - \frac{gm}{k} v \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (mp)}{\partial z} - \frac{gm}{k} w = mg\end{aligned}$$

то видно, что этой гипотетической жидкости можно приписать в качестве скорости—скорость фильтрации, в качестве давления—величину mp и вместо силы тяжести—фиктивную силу тяжести с «ускорением» mg (см. Девисон^[14]) и постоянную плотность ρ .

Уравнение неразрывности в неустановившемся движении имеет попрежнему вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

так как жидкость считается несжимаемой.

В одной задаче о неустановившемся движении (см. главу II) мы пользуемся уравнениями (1.26).

Отметим, что Н. А. Багровым [3] рассмотрены общие уравнения теории фильтрации в предположении, что пористость m есть функция координат и вычислена величина силы, происходящей от воздействия грунтового скелета.

5. Уравнение неразрывности. Покажем, как можно вывести уравнение неразрывности в неустановившемся движении при переменной плотности ρ , хотя не будем пользоваться этим уравнением; оно применяется при изучении фильтрации газов в пористых средах.

Выделим некоторый объем τ грунта и рассмотрим массу жидкости, вытекающей в единицу времени из замкнутой поверхности σ , ограничивающей взятый объем. Эта масса равна

$$\iint_{\sigma} \rho v_n d\sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\tau$$

где v_n — нормальная составляющая вектора скорости фильтрации $\mathbf{v}$.

Полученная величина компенсируется изменением массы жидкости внутри поверхности σ , происходящим от уменьшения плотности, т. е. величиной, равной

$$- \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} m d\tau$$

(t — время).

Приравняв между собой полученные выражения, найдем, исходя из предположения непрерывности подинтегральных функций, что подинтегральные выражения в полученных тройных интегралах равны между собой, т. е.

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

В развернутом виде это уравнение неразрывности сжимаемой жидкости имеет вид:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

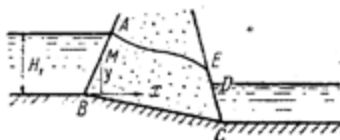
Если плотность ρ постоянна, то получаем упоминавшееся выше уравнение (1.16).

6. Граничные условия в плоском установившемся движении. В дальнейшем будем считать, что контуры гидротехнических сооружений состоят из отрезков прямых; непроницаемое для воды основание («водоупор») граничит с проницаемым грунтом по прямой линии. Тогда границы области, занятой движущейся жидкостью, могут быть следующих типов.

1) Границы водного бассейна. Можно считать при больших размерах водного бассейна, что в нем вода неподвижна и остается на одной и той же высоте, так что давление подчиняется гидростатическому закону. Поэтому в какой-нибудь точке M , находящейся на границе между грунтом и бассейном, на высоте y от дна бассейна, и рассматриваемой как точка бассейна, имеем согласно фиг. 3,

$$p = p_0 + \rho g (H_1 - y) \quad (1.27)$$

где p_0 — давление на поверхности бассейна, равное атмосферному.



Фиг. 3.

Подставляя выражение (1.27) для φ в формулу (1.11), получим

$$\varphi = -k \left(\frac{p_0}{\rho g} + H_1 \right) + C \quad (1.28)$$

т. е.

$$\varphi = \text{const} \quad \text{на } AB$$

и, следовательно, водная граница есть эквипотенциальная линия.

Предполагая, что уравнение прямой AB есть

$$ax + by + c = 0 \quad (1.29)$$

будем в дальнейшем рассматривать это уравнение (1.29) как второе условие на границе водного бассейна.

2) Линия непроницаемой границы должна быть линией тока. Поэтому вдоль непроницаемой границы

$$\psi = \text{const} \quad (1.30)$$

Кроме того, имеем уравнение самой непроницаемой границы. Например (фиг. 3), для прямой BC

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1.31)$$

3) На свободной поверхности давление постоянно (равно атмосферному). Тогда из уравнения (1.15) получаем

$$\varphi + ky = \text{const} \quad (1.32)$$

Кроме того, линия свободной поверхности, или, как ее называют, депрессионная кривая, должна быть линией тока, т. е. на ней

$$\psi = \text{const} \quad (1.33)$$

4) В земляной плотине могут существовать участки, где вода из тела плотины высачивается не в водный бассейн, а прямо в атмосферу. Такие участки называются промежутками высачивания. Пусть уравнение такого отрезка высачивания DE (фиг. 3) будет

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (1.34)$$

Вдоль DE давление должно равняться атмосферному, т. е. должно выполняться условие (1.32).

5) Если имеет место испарение со свободной поверхности или приток влаги на свободную поверхность, то обычно принимают следующий закон: расход воды через какую-нибудь часть свободной поверхности пропорционален разности абсцисс концов этой части

$$\psi - \psi_0 = c(x_0 - x)$$

где c — количество воды, испаряющейся в единицу времени, отнесенное к единице длины горизонтальной проекции дуги свободной поверхности. При испарении $c > 0$, для притока влаги извне $c < 0$.

Таким образом условия на свободной поверхности при наличии испарения можно записать так:

$$\begin{aligned} \psi + cx &= \text{const} \\ \varphi + ky &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Второе из уравнений (1.35) есть условие постоянства давления вдоль свободной поверхности.

Не останавливаясь на других возможных условиях на контуре: возможности испарения с промежутка высачивания, капиллярном поднятии воды и т. д., которые можно найти, например, в работе Б. К. Ризенкампа [83], так как этими условиями не будем пользоваться.

6) Рассмотрим, наконец, случай, когда грунтовая вода проходит через два грунта с различными коэффициентами фильтрации k_1 и k_2 , граничащих друг с другом по линии KL (фиг. 4).

Обозначая комплексные потенциалы первой и второй сред соответственно через

$$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \quad f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

будем иметь для потенциалов скорости согласно (1.15)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -k_1 \left(\frac{p_1}{\gamma g} + y \right) + C_1 \\ \varphi_2 &= -k_2 \left(\frac{p_2}{\gamma g} + y \right) + C_2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

где p_1 и p_2 — давления соответственно в первой и второй среде. Так как на границе двух сред давление должно меняться непрерывно, т. е.

$$p_1 = p_2$$

в каждой точке линии KL , то из (1.36) получаем

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} + C$$

или, если произвольную постоянную выбрать равной нулю:

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \quad (1.37)$$

на линии раздела.

С другой стороны, нормальная к линии KL составляющая скорости должна быть непрерывной, т. е.

или иначе $v_{1n} = v_{2n}$ на KL

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \quad \text{на } KL$$

Интегрируя это равенство по s и выбирая постоянную интегрирования равной нулю, получим, что на линии раздела

$$\psi_1 = \psi_2 \quad (1.38)$$

Уравнения (1.31) и (1.32) представляют собой условия, которые должны выполняться на границе двух сред.

Из чертежа (фиг. 4) нетрудно получить «закон преломления» для двуслойной среды

$$\frac{\tan \alpha_1}{k_1} = \frac{\tan \alpha_2}{k_2} \quad (1.39)$$

где α_1 и α_2 — углы между векторами скоростей и нормалью.

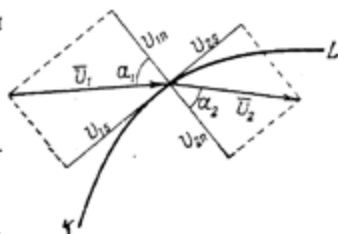
7. Годограф скорости. Комплексный потенциал $f = \varphi + i\psi$ представляет собой функцию комплексного переменного z — комплексной координаты точек области движения. Как известно, комплексная скорость связана с комплексным потенциалом уравнением

$$\frac{df}{dz} = u - iv \quad (1.40)$$

Она представляет собой, так же как и $f(z)$, функцию комплексного переменного z , т. е.

$$u - iv = w(z) \quad (1.41)$$

Область изменения z , т. е. область, занятую движущейся жидкостью, будем считать односвязной. Этой области должна соответствовать на плоскости w



Фиг. 4.

также односвязная область, границу которой называют **г о д о г р а ф о м** **с к о р о с т и**.

Можно доказать, что если границами области движения являются прямолинейные отрезки и депрессионная кривая, то соответствующая область плоскости $u-iv$ ограничена прямыми и дугами окружности.

Рассмотрим различные виды границ. Для большей наглядности вместо плоскости $u-iv$ будем рассматривать плоскость $u+iv$. В дальнейшем нам будут нужны лишь величины углов, а они те же, что и на плоскости $u-iv$.

1) Граница водного бассейна является эквипотенциальной линией, а потому вектор скорости перпендикулярен к этой границе.

Если уравнение границы есть

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b$$

то конец вектора скорости должен лежать на прямой

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (1.42)$$

проходящей через начало координат плоскости uv и перпендикулярной рассматриваемой границе.

2) На непроницаемой границе вектор скорости направлен вдоль этой границы.

Поэтому, если непроницаемая линия составляет угол α с осью x , то проекции скорости связаны уравнением

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.43)$$

т. е. на плоскости uv имеем прямую, проходящую через начало координат и параллельную границе.

3) Вдоль свободной поверхности имеем уравнение (1.21)

$$\varphi + ky = \text{const} \quad (1.44)$$

Дифференцируя это равенство по s , где s —длина дуги депрессионной кривой, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} + k \frac{dy}{ds} = 0 \quad (1.45)$$

Откуда, умножая на $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, имеем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + k \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{dy}{ds} = 0$$

или

$$u^2 + v^2 + kv = 0 \quad (1.46)$$

Это есть уравнение окружности радиуса $\frac{k}{2}$ с центром в точке $\left(u=0, v=-\frac{k}{2} \right)$.

4) На промежутке высачивания имеем те же уравнения (1.44) и (1.45), но теперь в (1.45) $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ уже не будет величиной полной скорости, — это есть проекция вектора скорости на линию высачивания. Если последняя образует угол α с осью x , то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

и уравнение (1.45) примет вид:

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha + k \sin \alpha = 0 \quad (1.47)$$

Это есть уравнение прямой, проходящей через точку $(u=0, v=-k)$ и перпендикулярной к прямой высачивания.

5) При наличии испарения на свободной поверхности имеем уравнения

$$\varphi + ky = \text{const} \quad (1.48)$$

$$\psi + cx = \text{const} \quad (1.49)$$

Если теперь под α понимать угол между касательной к депрессионной кривой и осью x , то будет иметь место уравнение (1.47), где, однако, угол α не будет постоянным.

Дифференцирование уравнения (1.49) по s , т. е. вдоль депрессионной кривой, дает

$$u \sin \alpha - v \cos \alpha + c \cos \alpha = 0 \quad (1.50)$$

Исключив переменный параметр α из уравнений (1.47) и (1.50), получим

$$u^2 + v^2 + (k - c)v = kc \quad (1.51)$$

Это есть уравнение окружности, проходящей через точки $(0, c)$ и $(0, -k)$, имеющей центр в точке $(0, \frac{c-k}{2})$ и радиус, равный $\frac{k+c}{2}$.

Таким образом видим, что действительно на плоскости $u + iv$, а следовательно, и на плоскости $u - iv$, границами области являются прямые или окружности. Если прямую интерпретировать как окружность бесконечно большого радиуса, то можно сказать, что область w ограничена дугами окружностей.

Приведем другое доказательство этого предложения, для чего используем форму записи граничных условий, предложенную Б. Б. Девисоном. А именно, он заметил, что на каждой из границ контурные условия могут быть представлены в виде двух уравнений вида

$$\begin{aligned} k_1 x + l_1 y + m_1 \varphi + n_1 \psi &= p \\ k_2 x + l_2 y + m_2 \varphi + n_2 \psi &= q \end{aligned} \quad (1.52)$$

что можно записать еще так:

$$\begin{aligned} \text{Im}(kz + lf) &= p \\ \text{Im}(mz + nf) &= q \end{aligned}$$

где k, l, m, n — комплексные числа, а через Im обозначен коэффициент при мнимой части комплексной величины.

При этом Девисон проверил, что для всех видов границ определитель

$$\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (за исключением одного совершенно частного случая притока жидкости извне, когда $c = -k$).

В дальнейшем будем отображать область движения и область комплексной скорости на полуплоскость вспомогательного комплексного переменного ζ . Так как границы области перейдут у нас в отрезки действительной оси плоскости ζ , то значения ζ , соответствующие контуру области, будут действительны.

Продифференцируем уравнения (1.52) по действительной переменной ζ . Получим

$$\text{Im}(kZ + lF) = 0, \quad \text{Im}(mZ + nF) = 0 \quad (1.53)$$

где

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{df}{d\zeta} \quad (1.54)$$

Уравнение (1.53) показывает, что величины

$$kZ + lF \text{ и } mZ + nF$$

действительны на соответствующем отрезке действительной оси ζ . Их отношение также будет действительным, так что можно, например, написать

$$\operatorname{Im} \left(\frac{kZ + lF}{mZ + nF} \right) = 0$$

или иначе

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k + lF/Z}{m + nF/Z} \right) = 0$$

Замечая, что

$$\frac{F}{Z} = \frac{df}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta} = \frac{df}{dz} = w$$

получаем уравнение вида

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k + lw}{m + nw} \right) = 0 \quad (1.55)$$

Уравнение (1.55) определяет на плоскости w окружность и притом действительную. Это вытекает из того, что линейное преобразование

$$w_1 = \frac{k + lw}{m + nw}$$

переводит действительную окружность плоскости w_1 в действительную же окружность плоскости w . Но очевидно, что это преобразование переводит уравнение (1.55) в уравнение

$$\operatorname{Im}(w_1) = 0$$

т. е. в уравнение действительной оси плоскости w .

Непосредственно видно, что окружность (1.55) проходит через точки $(w = -\frac{k}{l} \text{ и } w = -\frac{m}{n})$.

8. Примеры. В задачах о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, где нет свободных поверхностей, все линии годографа скорости суть прямые. Область движения предполагается ограниченной прямыми линиями. В этом случае промежутки высачивания отсутствуют, и на плоскости комплексного потенциала имеют место лишь прямые $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Поэтому решение задачи о фильтрации под гидротехническими сооружениями, ограниченными прямолинейными контурами, сводится к непосредственному применению формулы Кристоффеля-Шварца для области движения и области комплексного потенциала.

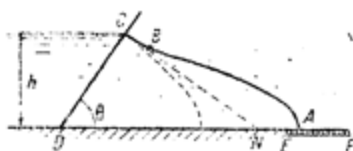
В случае же движения при наличии свободной поверхности бывает полезно построить годограф скорости. Приемы для его построения изложены у Девисона^[14] (§ 10 и 17), поэтому на них не останавливаемся, а отметим лишь некоторые моменты, связанные с изменением годографа скорости при изменении параметров, характеризующих данную область движения.

Возьмем в качестве примера простейшую плотину (фиг. 5) с наклонным верховым откосом, лежащую на непроницаемом дренированном основании (EF —линия дренажа).

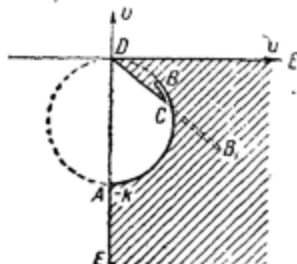
Исследованию движения в этой плотине посвящен ряд работ (Кожену^[55], Нельсон-Скорняков^[25], Нумеров^[27], Ризенкамф^[38]), причем даны как точные, так и приближенные решения. Здесь мы ограничимся исследованием изменения годографа скорости.

В земляной плотине обычно глубина воды в верхнем бьефе мала по сравнению с длиной l основания DA плотины. Предположим, что $\frac{h}{l}$ настолько мало,

что перпендикуляр CN к линии CD в точке C пересекает основание плотины DA (фиг. 5). В этом случае депрессионная кривая должна иметь точку перегиба. Действительно, в противном случае депрессионная кривая вся должна лежать под прямой CN , что, очевидно, невозможно, так как вода, накапливаясь в теле плотины, должна иметь выход в дренажную щель. Теперь спрашивается, будет ли точка перегиба оставаться на кривой при увеличении вы-



Фиг. 5:



Фиг. 6.

соты h воды в бассейне, и если она может исчезнуть, то каким образом это может произойти.

Обратимся к годографу скорости (фиг. 6). Он ограничен согласно (1.46) окружностью $u^2 + v^2 + kv = 0$, соответствующей свободной поверхности, прямой, проходящей через начало и перпендикулярной к верховому откосу плотины, осью u , соответствующей непроницаемому основанию, и осью v , отвечающей линии дренажа.

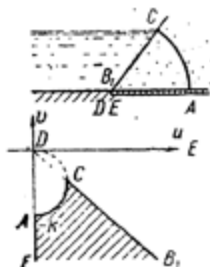
Рассмотрев конечное число областей, ограниченных этими линиями, мы должны выбрать единственно возможную, заштрихованную область на фиг. 6. При этом, учитывая наличие точки перегиба у депрессионной кривой, нужно провести надрез по дуге окружности. Будем теперь увеличивать $\frac{h}{l}$. Легко видеть, что при достаточно больших значениях этого отношения депрессионная кривая не будет иметь точки перегиба. Действительно, с увеличением $\frac{h}{l}$ надрез CB уменьшается и при некотором определенном значении $\frac{h}{l}$ исчезнет; при дальнейшем увеличении $\frac{h}{l}$ появится надрез CB_1 вдоль прямой DC . Это означает, что точка перегиба B , в которой величина скорости имеет наименьшее значение, дойдя до откоса, исчезает, а вместо нее на откосе появляется точка с максимумом скорости. С увеличением $\frac{h}{l}$ эта точка будет перемещаться вниз по откосу, причем величина максимума увеличивается. Если рассматривать возрастание $\frac{h}{l}$ таким образом, что h остается постоянным, а l уменьшается и стремится к нулю, то в пределе получим схему, представленную на фиг. 7, с годографом скорости AEB_1CA , т. е. в пределе часть EDB_1 первоначальной области скорости исчезает (фиг. 6).

Вычисления¹ (произведенные для двух значений угла θ) показывают, что точка перегиба исчезает при значениях

$$\begin{cases} \frac{h}{l} = 1.16 \sin \theta = 0.820 & \text{для } \theta = \frac{\pi}{4} \\ \frac{h}{l} = 1.19 \sin \theta = 0.232 & \text{для } \theta = \frac{\pi}{16} \end{cases}$$

¹ Эти вычисления были произведены Н. В. Леви и М. Д. Тахтамишевой в Математическом институте АН СССР.

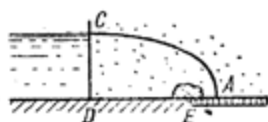
В реальных плотинах $\frac{h}{l}$ имеет обычно меньшие значения, чем только что приведенные, поэтому, как правило, депрессионная кривая имеет точку перегиба.



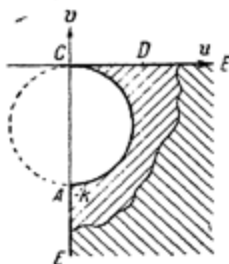
Фиг. 7.

Рассмотрим теперь предельный случай дренированной плотины (фиг. 8), соответствующий значению $\theta = \frac{\pi}{2}$ (такие плотины устраиваются как временные сооружения и называются перемычками). В этом случае нет никаких оснований для существования точки перегиба, и годограф скорости имеет вид, изображенный на фиг. 9. Если сравнить его с годографом скорости, представленным на фиг. 6, то на первый взгляд может показаться непонятным, каким образом точка D могла перейти из начала координат в некоторую точку оси u. Здесь дело обстоит

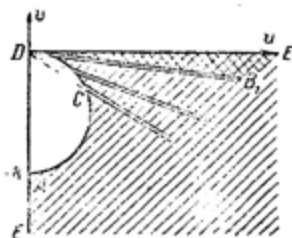
так, что при увеличении угла θ плотины (фиг. 5), при заданных h и l , всегда найдется такое значение этого угла, при котором точка перегиба исчезнет, и на годографе скорости появится надрез CB_1 , который будет увеличиваться и приближаться к оси u (фиг. 10). В пределе часть EDB, первоначальной области годографа исчезает. Если рассмотреть случай, когда угол θ тупой, то на годографе скорости появится



Фиг. 8.



Фиг. 9.



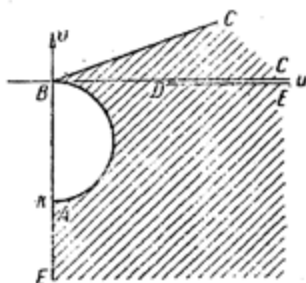
Фиг. 10.

надрез вдоль оси u, идущий до бесконечности (фиг. 11 и 12). Заметим, что плотины, у которых земляная часть имеет форму, представленную на фиг. 11, существуют (см., например, [63]).

Вернемся теперь к наиболее простой схеме плотины, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (фиг. 8). Единственным параметром, определяющим конфигурацию этой плотины, является отношение $\frac{h}{l}$ (длины отрезка AE является искомой). На годографе скорости (фиг. 9) единственной подвижной вер-



Фиг. 11.



Фиг. 12.

шиной является точка D. Следовательно, при изменении $\frac{h}{l}$ эта точка должна перемещаться. В предельном случае, когда $l \rightarrow \infty$, оказывается, что депрес-

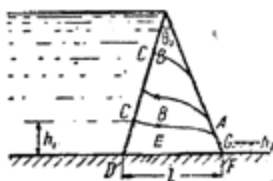
сионная кривая представляет собой параболу с фокусом в точке E . Отсюда следует, что $h \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{h}{l} = 0$$

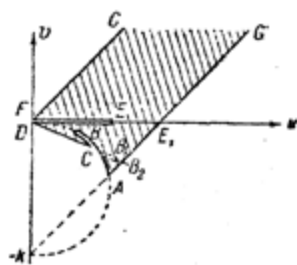
При этом обе точки C и D уходят на бесконечность и, следовательно, на годографе скорости точка D стремится к точке C . Наоборот, если $l \rightarrow 0$, то точка D годографа скорости должна уйти на бесконечность и на годографе точка D стремится к точке E .

Предположим теперь, что стенка CD остается на месте, а отрезок дренажа EA удаляется на бесконечность, так что $\frac{l}{h} \rightarrow \infty$. Тогда опять на годографе скорости точка D должна стремиться к точке C , и в этом предельном случае отрезку CD области движения на плоскости z отвечает только одна точка $C(D)$ плоскости uv . Но тогда по свойству функций комплексного переменного и всей области плоскости z должна соответствовать точка на плоскости w . В данном случае эта точка, которой соответствует скорость, равная нулю, есть начало координат. Из физических соображений также ясно, что для рассматриваемого предельного случая движение не может происходить.

Отметим, что область комплексной скорости отнюдь не стягивается к точке непрерывным образом, — она все время имеет вид, изображенный на фиг. 9.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

где лишь меняется положение точки D . Иначе говоря, малой области плоскости z в окрестности точки E (см. заштрихованную часть фиг. 8) отвечает большая область плоскости $u - iv$; при данном h и $l \rightarrow \infty$ скорость $u - iv$ стремится к нулю неравномерно.

Рассмотрим еще один пример изменения годографа скорости. На фиг. 13 представлена плотина с наклонными откосами, угол между которыми θ_0 острый, h_1 и h_2 — глубины воды в верхнем и нижнем бьефах, l — длина непроницаемого основания. Если значение отношения $(h_1 - h_2)/l$ мало, то точке перегиба свободной поверхности соответствует точка B на годографе скорости (фиг. 14). При возрастании величины $(h_1 - h_2)/l$ точка B стремится к точке C ; затем вместо надresa CB появится надрез CB_1 , который при полном заполнении плотины перейдет в отрезок CB_2 , причем часть CB_2A первоначальной области годографа исчезает. Если $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, то на годографе точки C и A совпадут, надрез CB_1 станет невозможным. Таким образом при $\theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ точка перегиба всегда существует, кроме предельного случая полного заполнения плотины, когда точка B сольется с точкой C . Если $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, то всегда (и при

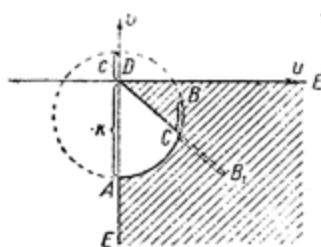
полном подъеме воды) будет существовать свободная поверхность, на которой имеется точка перегиба. Годограф скорости всегда будет иметь надрез AB по дуге окружности (точка C на годографе скорости будет ниже точки A).

Если $h_2 = 0$, т. е. в нижнем бьефе не будет воды, то точка E годографа скорости займет положение E_1 , и верхняя часть годографа отпадает. Для этого случая построен ряд графиков годографа скорости в работе Wenig и Schields^[66].

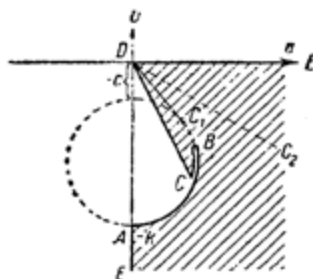
Если будем отодвигать основание плотины DF вниз на бесконечность, то

$$h_1 \rightarrow \infty, \quad h_2 \rightarrow \infty, \quad \frac{h_1}{h_2} \rightarrow 1$$

При этом на годографе скорости надрез FED исчезнет. Он исчезнет также, если, считая l и h_1 (или h_2) неизменными, устремлять h_2 к h_1 (или h_1 к h_2). Но



Фиг. 15.



Фиг. 16.

в этом случае движение стремится к покою, для которого годограф скорости должен представлять точку. Таким образом здесь, как и в предыдущем случае, при стремлении к покою нарушается непрерывность изменения скорости. Аналогичным путем можно рассмотреть более сложный случай годографа для плотины на проницаемом основании конечной глубины (см. Б. Б. Девисон^[41]).

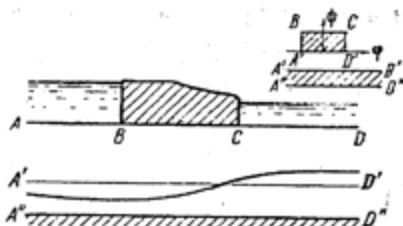
Если учесть испарение со свободной поверхности плотины фиг. 5, то соответствующий годограф скорости будет представлен фиг. 15. В случае инфильтрации (выпадения осадков) на свободную поверхность годограф скорости имеет вид фиг. 16.

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

Задача о фильтрации двуслойных грунтовых вод под плотиной¹ возникает, например, в том случае, когда на некоторой глубине имеется слой соленой воды, образовавшийся вследствие того, что проницаемый слой лежит на толще каменной соли.

В первом параграфе этой главы излагается постановка задачи для изотропного грунта при установившемся движении, во втором—решается эта же задача для неустановившегося движения; в третьем параграфе приводятся общие положения об установившемся движении грунтовых вод в анизотропном грунте с постоянным тензором фильтрации; в четвертом—результаты предыдущего параграфа применяются к задаче о фильтрации двуслойной жидкости в анизотропном грунте, причем рассматривается только установившееся движение.

1. Установившееся движение. На некоторой глубине под гидротехническим сооружением имеется слой соленой воды $A'D'D'A''$, лежащий на непроницаемой толще каменной соли. Весь слой грунта $ADD'A''$ считается однородным, т. е. состоящим из одной и той же породы. Предполагается, что после возведения гидротехнического сооружения будет происходить отжим рассола так, что левая часть линии $A'D'$ будет понижаться, правая подниматься (фиг. 17). Спрашивается, каким образом будет происходить это явление, т. е. как будет изменяться с течением времени линия раздела между пресной и соленой водой.



Фиг. 17.

Особый интерес представляет вопрос о том, возможно ли в этом случае установившееся движение, и если возможно, то насколько быстро неустановившееся движение будет приближаться к установившемуся.

В этом параграфе рассматривается случай установившегося движения.

Будем считать обе жидкости несжимаемыми, обладающими соответственно плотностями ρ_1 и ρ_2 , причем $\rho_2 > \rho_1$. Что касается коэффициента фильтрации, то он зависит не только от свойств грунта, но и от свойств жидкости, а именно, от ее вязкости, а следовательно, косвенным образом от ее плотности. С некоторой степенью приближения можно принять, что в первой области коэффициент фильтрации имеет постоянное значение k_1 , а во второй—постоянное значение k_2 . (В нашей работе [80], посвященной этой задаче, было принято $k_1 = k_2$.) Осталь-

¹ Такая задача была поставлена перед Институтом механики Академии Наук СССР Управлением Соликамского гидроузла.

ные предположения, которые обычно делались—о малости скоростей, о выполнении закона Дарси—остаются в силе.

Напишем уравнения для скоростей (1.14) для каждой из двух жидкостей;

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & v_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \Delta \varphi_i &= 0 & (i=1,2) \\ \varphi_i &= -k_i \left(\frac{p_i}{\rho_i g} + y \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие равенства давлений на линии раздела приводит к уравнению

$$\frac{\rho_1}{k_1} \varphi_1 - \frac{\rho_2}{k_2} \varphi_2 = (\rho_2 - \rho_1) y \quad (2.2)$$

на линии раздела.

Кроме того, линия раздела должна быть линией тока, т. е. на ней

$$\psi_1 = \text{const}, \quad \psi_2 = \text{const}$$

Если рассмотрим плоскость комплексного потенциала $f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ для первой области, то на ней получим прямоугольник $A'D'CB$ (фиг. 17, сверху).

Следовательно, φ_1 конечно во всей области 1.

Перейдем к области 2. Если бы в ней было возможно движение, то на плоскости ее комплексного потенциала $f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ мы получили бы полосу $A'D'A'D''$, откуда следует, что $\varphi_2 = \pm \infty$, когда $x = \pm \infty$. Но тогда из уравнения (2.2) следовало бы, что и $\varphi_1 = \pm \infty$ при $x = \pm \infty$, что невозможно. Следовательно, в случае установившегося движения в области 2 жидкость должна оставаться в покое.

Таким образом задача сводится к определению движения в одной области, причем для линии раздела получаются условия, совершенно аналогичные тем, какие имеют место на линии свободной поверхности. А именно, полагая в уравнении (2.2) величину φ_2 постоянной, его можно представить в виде

$$\varphi_1 - \mu y = \text{const} \quad (2.3)$$

где

$$\mu = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) k_1 \quad (2.4)$$

Такое же выражение получили бы, считая $k_1 = k_2$. Другими словами, величина коэффициента фильтрации второй среды не входит в условие задачи.

Очевидно, что на годографе скорости уравнению (2.3) соответствует окружность

$$u^2 + v^2 - \mu u = 0 \quad (2.5)$$

Пусть имеем гидротехническое сооружение произвольной формы. На границах водоемов AB и CD (фиг. 17) потенциал скорости имеет постоянные значения. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{2} k_1 H & \text{на } AB \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} k_1 H & \text{на } CD \end{aligned}$$

т. е. значение φ_1 выбрано так, что величина действующего напора равна H :

$$H_1 - H_2 = H$$

Обозначим глубины движущейся жидкости для $x = -\infty$ и $x = +\infty$ соответственно через h' и h'' . Представив уравнение (2.3) в виде

$$y = \frac{\varphi_1}{\mu} + C$$

Будем иметь:

при $x = -\infty$

$$-h' = -\frac{k_1 H}{2\mu} + C$$

при $x = +\infty$

$$-h'' = \frac{kH}{2\mu} + C$$

Отсюда

$$C = -\frac{h' + h''}{2}$$

Для установившегося движения в конечной области должно было бы выполняться условие равенства первоначальной и окончательной площадей соленых вод. В рассматриваемом случае эти площади бесконечны, поэтому заменим указанное условие следующим: будем считать полусумму глубин h' и h'' равной глубине верхнего слоя воды в состоянии равновесия

$$\frac{h' + h''}{2} = h_1 \quad (2.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} C &= -h_1 \\ h' &= h_1 + \frac{k_1 H}{2\mu} = h_1 + \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)} \\ h'' &= h_1 - \frac{k_1 H}{2\mu} = h_1 - \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Разность глубин равна

$$h' - h'' = \frac{H}{\rho_2/\rho_1 - 1}$$

Таким образом глубина вытеснения будет тем больше, чем меньше разность плотностей ρ_1 и ρ_2 .

Если окажется, что

$$h_1 \leq \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)}$$

то правый конец линии раздела будет упираться в границу нижнего водоема.

Если глубина h_2 нижнего слоя удовлетворяет неравенству

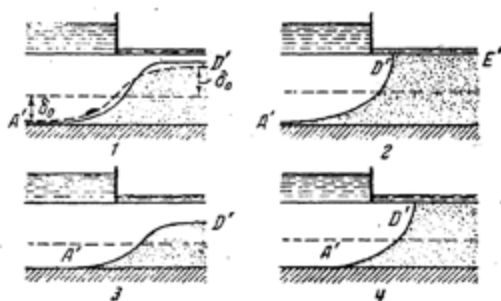
$$h_2 \leq \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)}$$

то линия раздела упирается в линию водоупора. Возможны четыре вида линии раздела, изображенные на фиг. 18.

Для ряда частных форм основания гидротехнического сооружения нетрудно получить решение с помощью конформного отображения на полуплоскость области комплексного потенциала и области годографа скорости (или ее инверсии). Для шпунта можно получить решение, используя функцию Жуковского.

В качестве простейшего случая можно взять обтекание точечного шпунта в установившемся движении. Получаются формулы, представляющие f и z как функции вспомогательного параметра ζ :

$$\begin{aligned} f &= \frac{k_1 H}{\pi} \arcsin \zeta \\ z &= \frac{k_1 H - 2\mu h_1}{2\mu\kappa} \ln(1 - \zeta) + \frac{k_1 H + 2\mu h_1}{2\mu\kappa} \ln(1 + \zeta) + \frac{ik_1 H}{\mu\kappa} \arcsin \zeta + \frac{k_1 H}{\mu\kappa} \ln 2 - ih_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$



Фиг. 18.

Уравнение линии раздела

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{H}{\pi(\rho_2/\rho_1 - 1)} \ln(2\sqrt{1-\zeta^2}) + \frac{h_1}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \\ Y_0 &= \frac{H}{\pi(\rho_2/\rho_1 - 1)} \arcsin \zeta - h_1 \quad (-1 \leq \zeta \leq 1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если между h_1 и H имеет место зависимость

$$h_1 = \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)}$$

то уравнение линии раздела принимает вид:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{2h_1}{\pi} \ln[2(1+\zeta)] \\ Y_0 &= \frac{2h_1}{\pi} \arcsin \zeta - h_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

А. Т. Павловым были рассмотрены случаи заглубленного шпунта и плоского флютбета¹. Приведем уравнение линии раздела в случае плоского флютбета в той форме, которая была дана М. Брагинским, производившим вычисления для анизотропного грунта (см. п. 4).

$$\begin{aligned} X_* &= \frac{H}{2(\rho_2/\rho_1 - 1)} \left\{ \frac{K'}{2K} + \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{\pi} \ln \cos \varphi + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\theta(u)}{\theta(0)} \right\} + \frac{2h_1}{\pi} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ Y_* &= -h_1 + \frac{Hu}{2K(\rho_2/\rho_1 - 1)} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} m &= F(\varphi, \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ K' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \sin \alpha = \operatorname{th} \frac{\pi b}{2h_1}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

θ — тета-функция Якоби, $2b$ — длина флютбета, h_1 — первоначальная глубина воды.

2. Неустановившееся движение. Уравнения неустановившегося движения грунтовых вод при наших исходных предположениях имеют, как мы видели, вид (1.26). Для плоского случая получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} - \frac{g}{k} u_i \\ \frac{1}{m} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{g}{k} v_i - g \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $i=1$ для верхней, $i=2$ для нижней жидкости, p_i — давление, g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент фильтрации, m — коэффициент пористости, u_i, v_i — проекции скорости на оси x, y .

Скорости в уравнении (2.12) имеют потенциал (см. [41], стр. 225).

Положим

$$u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \quad v_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad \Phi_i = \Phi_i(x, y, t)$$

Тогда из уравнения неразрывности получим

$$\Delta \Phi_i = 0$$

¹ См. «Прикладная математика и механика», том VI, 1942.

Уравнения движения (2.12) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{g}{k} \Phi_i \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{g}{k} \Phi_i + gy \right) &= 0\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{p_i}{\rho_i} + \frac{g}{k} \Phi_i + \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gy = 0 \quad (2.13)$$

Произвольная функция t , входящая в уравнение (2.13), может быть включена в функцию Φ_i .

Из (2.13) для величины давления получаем

$$p_i = -g\rho_i y - \frac{g\rho_i}{k} \Phi_i - \frac{\rho_i}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad (2.14)$$

На линии раздела $A'D'$ давление должно изменяться непрерывно, т. е. $p_1 = p_2$. Это условие дает:

$$g(\rho_2 - \rho_1)y = -\frac{g}{k}(\rho_2\Phi_2 - \rho_1\Phi_1) - \frac{1}{m}\left(\rho_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right) \quad (2.15)$$

Пусть уравнение линии раздела имеет вид:

$$y = \delta(x, t)$$

Положив $y = -h$ в правой части уравнения (2.15), которая представляет функцию от x , y и t , получим с точностью до малых второго порядка (лишь с такой точностью справедлива вся применяемая нами теория) уравнение линии раздела:

$$g(\rho_2 - \rho_1)\delta(x, t) = -\frac{g}{k}(\rho_2\Phi_2 - \rho_1\Phi_1) - \frac{1}{m}\left(\rho_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right) \quad (2.16)$$

Кроме того, на линии раздела должны выполняться условия равенства нормальной составляющей скорости перемещения свободной поверхности и нормальных составляющих скоростей жидкости в той и другой среде:

$$m \frac{\partial \delta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_1 = -u_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_2 \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) выводятся следующим образом.

Пусть уравнение линии раздела будет

$$F(x, y, t) = 0$$

К моменту времени $t + \Delta t$ частица (x, y) , находившаяся на линии раздела, займет положение $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, так что будет удовлетворяться уравнение

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = 0$$

Вычитая почленно последние два уравнения и переходя после деления на Δt к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

Но

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v}{m}$$

где u, v — составляющие скорости фильтрации. Поэтому на линии раздела имеем условие

$$m \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Если взять уравнение линии раздела в форме

$$y - \delta(x, t) = 0$$

то получим

$$m \frac{\partial \delta}{\partial t} = -u \frac{\partial \delta}{\partial x} + v$$

Применив последнее уравнение к первой и второй среде, в которых проекции скоростей фильтрации соответственно (u_1, v_1) и (u_2, v_2) , получим уравнения (2.17).

На других границах областей движения должны выполняться обычные условия: $\varphi_i = \text{const}$ на границах водной поверхности AB и CD ; на непроницаемых границах нормальная скорость должна равняться нулю, т. е.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0$$

Поставленная таким образом задача может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению. Однако решение последнего представляет большие трудности. Поэтому здесь используем другой метод, применяя некоторое упрощение задачи.

Предположим, что мы решили задачу для установившегося движения и нашли потенциал скорости $\varphi_0(x, y)$. Наложим на установившееся движение такое движение, в котором горизонтальные скорости u_1 и u_2 зависят только от x и t и, следовательно, не зависят от y . Такого рода допущение делается обычно в теории длинных волн, и следует ожидать, что в рассматриваемой задаче о фильтрации под флютбетом, который имеет большую длину по сравнению с h_1 , оно даст достаточную степень приближения.

Полагая

$$u_1 = u_1(x, t), \quad u_2 = u_2(x, t)$$

из уравнений неразрывности для первой и второй среды

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

найдем, что v_1 и v_2 — линейные функции y , т. е.

$$v_1 = -y \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad v_2 = -(y + h) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

Произвольные постоянные интегрирования здесь выбраны так, чтобы v_1 обращалось в нуль на всей верхней границе области — линии $ABCD$, а v_2 — обращалось в нуль на нижней непроницаемой границе $y = -h$, где $h = h_1 + h_2$.

Далее, добавочные вертикальные скорости будут малы и мало меняются со временем, поэтому во втором из уравнений (2.12) можно пренебречь членами $\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial t}$ и $\frac{g}{k} v_i$ по сравнению с g и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial y}$. Тогда получим

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} = -g$$

откуда

$$p_i = -\rho_i g y + f_i(x, t)$$

Обращаясь к общему движению, положим в нем

$$p_1 = -g \rho_1 y - \frac{g \rho_1}{k} \varphi_0(x, y) + f_1(x, t)$$

$$p_2 = -g \rho_2 y + f_2(x, t)$$

Тогда на $A'D'$ будем иметь вместо (2.15)

$$g(\rho_2 - \rho_1) \delta(x, t) = \frac{g \rho_1}{k} \varphi_0(x, -h_1) + f_2(x, t) - f_1(x, t) \quad (2.18)$$

Обозначим скорости движения в первой среде через U_1 , V_1 и положим

$$U_1 = u_0 + u_1, \quad V_1 = v_0 + v_1$$

Обозначая скорости второй среды через u_2 , v_2 , получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{g}{k} u_1 &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{g}{k} u_2 &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ v_1 &= -y \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ v_2 &= -(y+h) \frac{\partial u_2}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Уравнения (2.17) дают

$$m \frac{\partial \delta}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial \delta}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_1 = -u_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_2$$

С точностью до малых второго порядка эти равенства можем заменить такими:

$$\begin{aligned}m \frac{\partial \delta}{\partial t} &= v_1 = v_2 && \text{при } y = -h_1 \\ \text{или} &&& \\ m \frac{\partial \delta}{\partial t} &= h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} && \text{при } y = -h_2\end{aligned}\quad (2.20)$$

Интегрируя вторую и третью части этого двойного уравнения по x , получим

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 = q(t) \quad (2.21)$$

где $q(t)$ — произвольная функция времени.

Положим

$$h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

Функция W определяется этими соотношениями с точностью до линейной функции от x . Т. е., если бы мы нашли некоторую функцию $W_1(x, t)$, удовлетворяющую уравнениям (2.22), то функция

$$W_1(x, t) + a(t)x + b(t)$$

будет также им удовлетворять при произвольных функциях $a(t)$ и $b(t)$. Поэтому, получив в дальнейшем эти произвольные функции от t , можем выбрать между ними по усмотрению два соотношения.

Интегрируя уравнения (2.22) по x , получим

$$\begin{aligned}h_1 u_1 &= \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha_1(t) \\ -h_2 u_2 &= \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha_2(t)\end{aligned}\quad (2.23)$$

На основании (2.21) произвольные функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ связаны соотношением

$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = q(t) \quad (2.24)$$

Подставим теперь выражения (2.23) для u_1 и u_2 в уравнения (2.19) и проинтегрируем их затем по x . Получим

$$\begin{aligned}f_1 &= -\frac{\rho_1}{h_1} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{g}{k} W + \left(\frac{\alpha_1}{m} + \frac{g}{k} \alpha_1 \right) x \right\} + \beta_1(t) \\ f_2 &= \frac{\rho_2}{h_2} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{g}{k} W + \left(\frac{\alpha_2}{m} + \frac{g}{k} \alpha_2 \right) x \right\} + \beta_2(t)\end{aligned}$$

где $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ — произвольные функции времени. (Точка означает дифференцирование по времени.)

Из этих уравнений для разности $f_2 - f_1$, входящей в уравнение линии раздела (2.18), имеем

$$f_2 - f_1 = \frac{\gamma}{m} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{g\gamma}{k} W + \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{h_1} \dot{\alpha}_1 + \frac{\rho_2}{h_2} \dot{\alpha}_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{g}{k} \left(\frac{\rho_1}{h_1} \alpha_1 + \frac{\rho_2}{h_2} \alpha_2 \right) \right] x + \beta_2(t) - \beta_1(t) \quad (2.25)$$

$$\gamma = \frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2} \quad (2.26)$$

Подчиним функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ условию

$$\frac{\rho_1}{h_1} \alpha_1 + \frac{\rho_2}{h_2} \alpha_2 = 0 \quad (2.27)$$

а произвольные функции $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ условию

$$\beta_1(t) = \beta_2(t)$$

что согласно сделанному выше замечанию равносильно включению в $W(x, t)$ соответствующим образом выбранной функции $a(t)x + b(t)$.

Теперь выражение для разности $f_2 - f_1$ примет более простой вид:

$$f_2 - f_1 = \frac{\gamma}{m} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{g\gamma}{k} W$$

а уравнение линии раздела согласно (2.18) будет

$$y = \delta(x, t) = -h_1 + \frac{\rho_2}{k(\rho_2 - \rho_1)} \varphi_0(x, -h_1) + \frac{\gamma}{mg(\rho_2 - \rho_1)} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{mg}{k} W \right) \quad (2.28)$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $W(x, t)$.

Дифференцируя (2.28) по t и подставляя $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ в (2.20), с помощью (2.22) получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{mg}{k} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\gamma} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

Хотя при выводе уравнения (2.29) мы пользовались уравнением (2.28), имеющим место лишь на линии раздела, однако уравнение (2.29) имеет место во всей области движения, так как функции u_1 и u_2 , определяемые с помощью уравнений (2.23), зависят только от x и t (не зависят от y).

Определяя $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ из системы уравнений (2.24) и (2.28) и подставляя в уравнения (2.23), получим выражения для скоростей

$$u_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\rho_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} q(t) \\ u_2 = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} q(t)$$

Введем новые независимые переменные

$$\tau = \frac{mg}{2k} t, \quad \xi = \alpha_0 x$$

где

$$\alpha_0 = \frac{m}{2k} \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_2 - \rho_1}} \quad (2.30)$$

Преобразуем уравнение (2.29) к виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (2.31)$$

Это уравнение [так же как уравнение (2.29)] есть хорошо изученное «телеграфное» уравнение¹. Его частные решения могут быть представлены в виде произведения функций от τ

$$e^{-\tau} \cos \sqrt{\alpha^2 - 1} \tau, \quad e^{-\tau} \frac{\sin \sqrt{\alpha^2 - 1} \tau}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

¹ См., например, Picard. E. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. Paris. 1927.

и функций от ξ

$$\cos \alpha \xi, \quad \sin \alpha \xi$$

Решение уравнения (2.31), удовлетворяющее начальным условиям

$$W = f_1(\xi), \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = f_2(\xi) \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.32)$$

может быть представлено в виде суммы двойных интегралов:

$$W = \frac{e^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu) \exp \{ +iq(\xi - \mu) \} \cos \tau \sqrt{q^2 - 1} dq d\mu - \\ - \frac{e^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\mu) + f_2(\mu)] \exp \{ iq(\xi - \mu) \} \frac{\sin \tau \sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq d\mu \quad (2.33)$$

Пуанкаре («Comptes Rendus», 1894 г.) показал, как можно перейти от двойных интегралов к простым. А именно, он вводит функцию

$$Q(\xi - \mu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ iq(\xi - \mu) \} \frac{\sin \tau \sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq$$

с помощью которой решение (2.33) можно представить в виде

$$W = \frac{e^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial \tau} f_1(\mu) d\mu - \frac{e^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau) [f_1(\mu) + f_2(\mu)] d\mu \quad (2.34)$$

При этом нетрудно показать, что

$$Q(z, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{для } z > \tau \\ \pi J_0(\sqrt{z^2 - \tau^2}) & \text{для } -\tau < z < \tau \\ 0 & \text{для } z < -\tau \end{cases} \quad (2.35)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода порядка нуля.

При решении нашей задачи исходим из начальных условий вида

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = f(\xi) \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.36)$$

Здесь входящий в решение интеграл (2.33) оказывается расходящимся. Поэтому рассмотрим функцию

$$U = \frac{\partial W}{\partial \xi}$$

которая также является решением телеграфного уравнения (2.31).

Начальные условия для этой функции U будут

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2 \partial \tau} = f'(\xi) = \theta(\xi) \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.37)$$

По формуле (2.33), несколько преобразовав ее, получим

$$U = - \frac{e^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ iq(\xi - \mu) \} \frac{\sin \tau \sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} \theta(\mu) dq d\mu$$

Отсюда найдем

$$W = \frac{ie^{-\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ iq(\xi - \mu) \} \theta(\mu) \frac{\sin \tau \sqrt{q^2 - 1}}{q \sqrt{q^2 - 1}} dq d\mu$$

Наконец, вводя вместо тригонометрического синуса гиперболический и вместо $\theta(\xi)$ функцию $f'(\xi)$, найдем

$$W = \frac{e^{-\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh \tau \sqrt{1 - q^2}}{q \sqrt{1 - q^2}} dq \int_{-\infty}^{\infty} f'(\mu) \sin q(\xi - \mu) d\mu. \quad (2.38)$$

Для линии раздела получаем уравнение, соответствующее уравнению (2.28):

$$y = \delta(\xi, \tau) = \frac{\rho_1 \tau_0}{k(\rho_2 - \rho_1)} - h_1 - \quad (2.39)$$

$$- \frac{\gamma e^{-\tau}}{2k\pi(\rho_2 - \rho_1)} \int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau \sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-q^2}} + \operatorname{ch} \tau \sqrt{1-q^2} \right) \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\mu) \sin q(\zeta - \mu) d\mu$$

Для нас специальный интерес представляли большие значения t . Можно получить асимптотическое представление интеграла, входящего в уравнение (2.39). Первые члены этого разложения дают

$$y = \delta(\xi, \tau) = \frac{\rho_1 \tau_0}{k(\rho_2 - \rho_1)} - h_1 - \frac{\gamma}{2\pi k(\rho_2 - \rho_1)} \left[A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} - \frac{A_1}{2\tau} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} + \dots \right] \quad (2.40)$$

где

$$A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \xi) f'(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \mu f'(\mu) d\mu - \xi [f(\infty) - f(-\infty)] \quad (2.41)$$

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} (\mu - \xi)^2 \right] f'(\mu) d\mu =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \xi^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} f'(\mu) d\mu + \frac{2}{3} \xi \int_{-\infty}^{\infty} \mu f'(\mu) d\mu - \frac{1}{3} \xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f'(\mu) d\mu$$

В пределе, при $t \rightarrow \infty$, получим линию раздела установившегося движения. Формула (2.40) позволяет определить положение линии раздела в различные моменты времени (t должно быть большим, в рассмотренных примерах — порядка нескольких лет) и установить, через какой промежуток времени движение будет достаточно близким к установившемуся, т. е. насколько быстро может происходить процесс изменения режима движения.

При вычислении интегралов (2.41) нужно знать уравнение линии раздела в установившемся движении. Для точечного шпунта можно использовать приведенные выше точные решения, имеющие место для схем 1 и 2 (фиг. 18).

При рассмотрении схем 3 и 4, представленных на той же фиг. 18, встречаемся с некоторыми затруднениями. Дело в том, что когда линия раздела уходит в бесконечность в обоих направлениях, функция $\varphi_0(x, y)$ задана для всех x от $-\infty$ до $+\infty$. В том случае, когда

$$h_1 = \frac{H}{\rho_2/\rho_1 - 1}$$

(фиг. 18, схема 2), за линию раздела можно считать линию $A'D'E'$. Если же

$$h_1 < \frac{H}{\rho_2/\rho_1 - 1}$$

то уже в неустановившемся движении линия раздела может дойти до границы нижнего бьефа и часть рассола будет выходить в нижний бьеф. То же относится к схеме 4, фиг. 18, когда

$$h_2 < \frac{H}{\rho_2/\rho_1 - 1}$$

Здесь неясно, как следует продолжить линию $A'D'$.

Мы привели схему вычислений для точечного шпунта. При этом для упрощения расчета² заменили точную линию раздела $A'D'$ установившегося движения приближенной, взяв вместо уравнений (2.9) уравнения

$$x = \frac{h_1}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

$$y = \frac{2H}{\pi(\rho_2/\rho_1 - 1)} \arcsin \zeta - h_1$$

² Не представляет принципиальных затруднений и рассмотрение точных уравнений (2.9.)

Эти уравнения получим, взяв вместо потенциала скорости установившегося движения $\varphi_0(x, y)$ потенциал скорости движения в слое глубиной h_1 , лежащем на непроницаемом основании (этому предположению на схеме 7 фиг. 18 соответствует пунктирная линия).

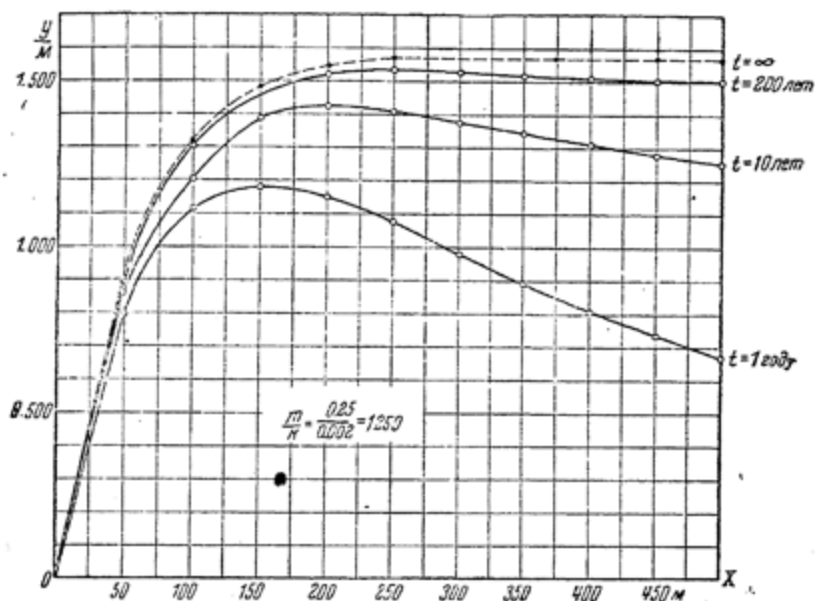
Тогда для уравнения линии раздела в неустановившемся движении получаем асимптотическую формулу

$$y = \delta(x, t) = \frac{2H}{\pi(\rho_2/\rho_1 - 1)} \left\{ \arcsin \operatorname{th} \frac{\pi x}{2h_1} - \sqrt{\frac{m\pi(\rho_1/h_1 + \rho_2/h_2)}{4k(\rho_2 - \rho_1)t}} \left(1 - \frac{1/4 + 1/8 \alpha_0^2 x^2 + \alpha_0^2 h_1^2}{(mg/k)t} + \dots \right) \right\}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{m}{2k} \sqrt{\frac{g(\rho_1/h_1 + \rho_2/h_2)}{\rho_2 - \rho_1}}$$

Приводим результаты некоторых вычислений.



Фиг. 19.

Принимая, например, коэффициент фильтрации $k = 0,02$ см/сек, а для остальных величин значения

$$h_1 = 75 \text{ м}, h_2 = 60 \text{ м}, H = 25 \text{ м}, \rho_2/\rho_1 = 1.25, m = 0.25$$

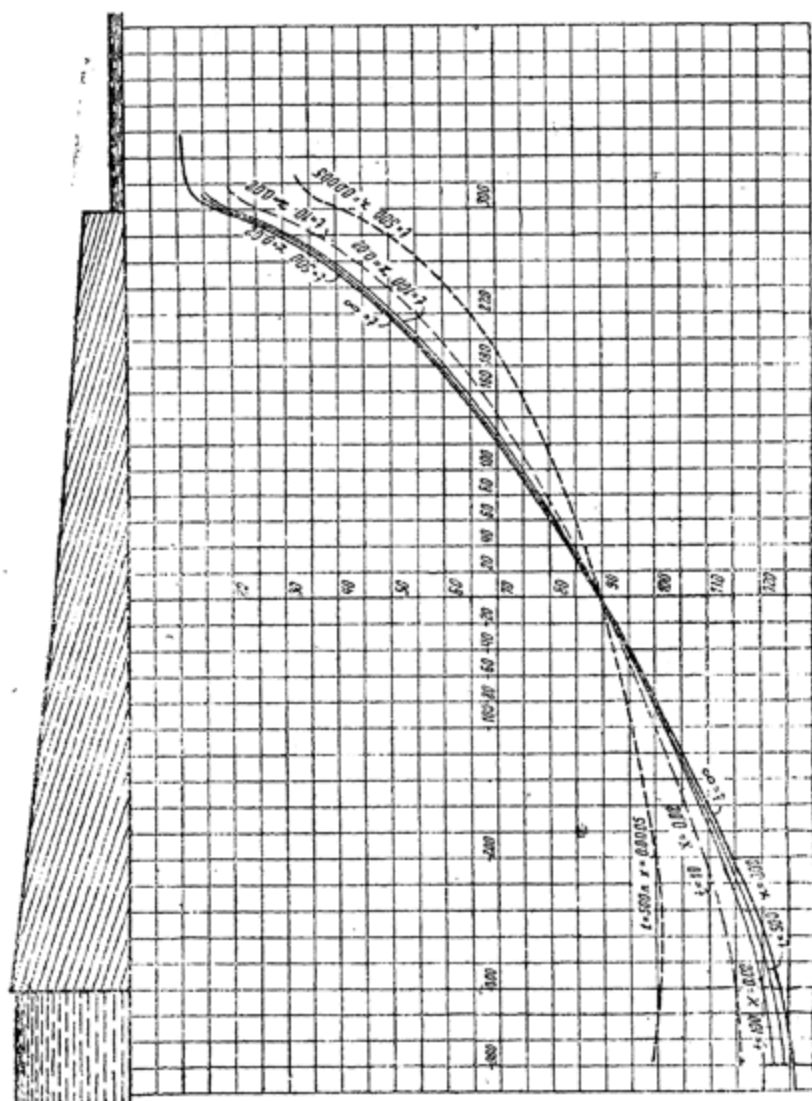
для значений δ в неустановившемся движении и для δ^* в установившемся движении получим в различные моменты времени на расстоянии $x = \pm 200$ м от шпунта

t	1 год	9 лет	100 лет
δ	48 м	55.9 м	59.4 м
δ^*	60 »	60 »	60 »

Принимая коэффициент фильтрации $k = 0.0005$ см/сек и сохраняя значения остальных величин, получим

t	49 лет	100 лет	400 лет
δ	33.6 м	35.3 м	53.4 м
δ^*	60 м	60 »	60 »

На фиг. 19 при принятых выше значениях величин для коэффициента фильтрации $k=0.02$ см/сек изображено положение линии раздела в различных



Фиг. 20.

ные моменты времени для точечного шпунта. На графике построены значения ¹ функции y/M , где

$$M = \frac{H}{\pi (p_2/p_1 - 1)}$$

Линия $t = \infty$ соответствует установившемуся движению.

Для случая, когда движение грунтовых вод происходит под флотбетом (фиг. 20), уравнение линии раздела для больших значений t было принято в форме

$$Y = y + \frac{A_0}{\sqrt{2\pi t}}$$

¹ Соответствующие вычисления произведены Б. В. Овчинским.

где

$$A_0 = \frac{H}{\rho_2/\rho_1 - 1} \xi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\tau = \frac{mg}{2k_1} t, \quad \xi = \alpha_0 x, \quad \alpha_0 = \frac{mg}{2k_1} \sqrt{\frac{\rho_2/h_1 + \rho_2/h_2}{g(\rho_2 - \rho_1)}}, \quad k = \operatorname{th} \frac{\pi b}{2h_1}$$

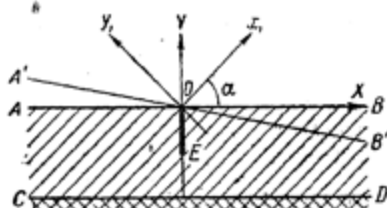
причем x и y определяются по формулам (2.11), полагая $x = X_0$, $y = Y_0$.

На фиг. 20 представлено положение линии раздела¹ для различных моментов времени при двух значениях коэффициента фильтрации $k_1 = 0.02$ см/сек и $k_1 = 0.0005$ см/сек. Длина флютбета принята равной 600 м, $H = 30$ м, остальные данные такие же, как в предыдущем примере.

Заметим, что изложенный метод может быть применен и к решению пространственной задачи.

Двухжидкостная задача встречается между прочим в вопросе о фильтрации нефти и воды в пористой среде. Некоторое видоизменение изложенного метода позволяет рассмотреть осесимметричный случай «конуса обводнения», образующегося при движении к скважине нефти, под которой имеется слой воды.

3. Установившееся движение в анизотропном грунте. Предположим, что имеем дело со слоистым грунтом, в котором слои параллельны друг другу. Тогда вместо коэффициента фильтрации нужно ввести тензор фильтрации (см., например, [33], ч. 1). Главные оси тензора



Фиг. 21.

фильтрации будут направлены вдоль слоистости и перпендикулярно слоистости, — пусть на фиг. 21 это будут направления x_1 и y_1 . В этой системе координат тензор фильтрации будет

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix}$$

так что уравнения плоского установившегося движения с малыми скоростями вместо (1.26') при $du/dt = 0$ и $dv/dt = 0$ будут иметь вид:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{g}{k_1} u_1 - g \sin \alpha$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_1} - \frac{g}{k_2} v_1 - g \cos \alpha$$
(2.42)

где u_1 , v_1 — проекции скорости фильтрации на оси x_1 , y_1 .

Уравнение неразрывности имеет попрежнему вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0$$
(2.43)

Полагая

$$k_1 = \mu^2, \quad k_2 = \nu^2$$
(2.44)

представим уравнения (2.42) и (2.43) в виде

$$u_1 = \mu^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

$$v_1 = \nu^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = 0$$
(2.45)

¹ Вычисления производила Р. И. Тюркишер.

где

$$\Phi(x_1, y_1) = -\frac{p}{\rho g} - x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha \quad (2.46)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, u_1, v_1 — проекции скорости на оси x_1, y_1 ; угол α и расположение осей показаны на чертеже фиг. 21.

Введем функцию тока $\Psi(x_1, y_1)$ с помощью равенств:

$$u_1 = \mu v \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\mu v \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \quad (2.47)$$

Функция $\Psi(x_1, y_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} = 0$$

Из формул (2.47) следует, что расход жидкости между какими-нибудь двумя точками области M и N выражается через функцию тока так:

$$Q = \mu v (\Psi_N - \Psi_M) = \sqrt{k_1 k_2} (\Psi_N - \Psi_M) \quad (2.48)$$

Замена переменных по формулам $x_1 = \mu x, y_1 = \nu y$ дает для функций Φ и Ψ уравнение Лапласа по x и y . При этом $\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ представляет собой функцию комплексного переменного $z = x + iy$, т. е.

$$\Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = f(z)$$

Оси x, y совпадают по направлению с осями x_1, y_1 , но масштабы по ним уменьшены соответственно в μ и ν раз.

Будем рассматривать три системы координат: X, V, x_1, y_1 и x, y . Они связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} X &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha = \mu x \cos \alpha - \nu y \sin \alpha \\ Y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha = \mu x \sin \alpha + \nu y \cos \alpha \\ x_1 &= \mu x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ y_1 &= \nu y = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.49)$$

В частности, уравнение линий AB, CD и OE (фиг. 21) в системе координат x, y будут соответственно

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\mu}{\nu} x \operatorname{tg} \alpha \\ \mu x \sin \alpha + \nu y \cos \alpha + h &= 0 \\ y &= \frac{\mu}{\nu} x \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

В системе x, y мы можем рассматривать некоторое фиктивное движение в области, получаемой из области плоскости XV аффинным преобразованием, при котором прямые линии переходят в прямые (но углы между этими прямыми, вообще говоря, не сохраняются).

На границах области в плоскости xu будут выполняться условия:

1) На границе водного бассейна

$$\Phi(x, y) = \text{const}$$

так как на соответствующей границе плоскости $x_1 y_1$ имеем $\Phi(x_1, y_1) = \text{const}$.

2) На непроницаемой границе

$$\Psi(x_1, y_1) = \text{const}$$

3) На свободной поверхности давление постоянно, а потому имеем по (2.46) и (2.49)

$$\Phi + \mu x \sin \alpha + \nu y \cos \alpha = \text{const} \quad (2.50)$$

Кроме того, на депрессионной кривой

$$\Phi(x, y) = \text{const}$$

Если рассмотрим годограф скорости на плоскости uv , то увидим, что депрессионной кривой соответствует окружность

$$u^2 + v^2 + \mu \sin \alpha + v \cos \alpha = 0 \quad (2.51)$$

Действительно, дифференцируя (2.50) вдоль линии свободной поверхности и умножая полученное уравнение на $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$, найдем

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 + \mu \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{dx}{ds} + v \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{dy}{ds} = 0$$

откуда и вытекает (2.51).]

4) На промежутке высачивания имеет место уравнение (2.50). Пусть промежуток высачивания есть прямая, образующая угол β с осью x . Дифференцируя уравнение (2.50) вдоль промежутка высачивания, получим

$$u \cos \beta + v \sin \beta + \mu \sin \alpha \cos \beta + v \cos \alpha \sin \beta = 0 \quad (2.52)$$

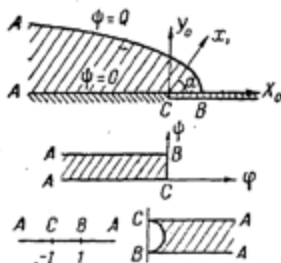
Это есть прямая, проходящая через точку $(-\mu \sin \alpha, -v \cos \alpha)$ и перпендикулярная к промежутку высачивания.

Пример. Рассмотрим простейший случай движения со свободной поверхностью — приток грунтовых вод к горизонтальному фильтру при наличии горизонтального водоупора. Впервые эта задача — для изотропного грунта — была решена Козену [58].

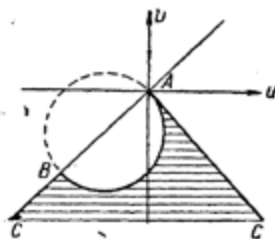
Если отобразить область комплексного потенциала и область функции

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{v_x - iv_y}$$

на полуплоскость ζ (как это указано на фиг. 22) так, чтобы точки A, B, C



Фиг. 22.



Фиг. 23.

перешли соответственно в точки $\infty, 1, -1$, то решение задачи можно представить в виде

$$f = \frac{Q_0}{\pi} \left(\arcsin \zeta + \frac{\pi}{2} \right); \quad \frac{dz}{df} = -\frac{i}{\pi k} \left(\arcsin \zeta + \frac{\pi}{2} \right)$$

а уравнение депрессионной кривой

$$Z_0 = X_0 + iY_0 = \frac{Q_0}{2k\pi} \arcsin \zeta + \frac{Q_0}{2k\pi^2} (\arcsin \zeta)^2 + \frac{Q}{8k}$$

или]

$$Y_0^2 = Q_0^2 - 2Q_0 X_0$$

Длина отрезка дренажа l , связана с расходом Q_0 соотношением

$$Q_0 = 2kl$$

Положим $k=1$ и используем полученное решение при переходе к анизотропному грунту.

Для анизотропного грунта на плоскости $\Phi\Psi$ мы будем иметь ту же фигуру, что и для изотропного. На плоскости uv окружность, соответст-

вующая депрессионной кривой, сдвигается (фиг. 23), так как центр ее будет лежать в точке

$$\left(-\frac{\mu}{2} \sin \alpha, -\frac{\nu}{2} \cos \alpha\right)$$

Уравнение BC в области движения имеет вид:

$$Y = \mu x \sin \alpha + \nu y \cos \alpha = 0$$

Линия BC годографа скорости должна быть перпендикулярна к этой прямой, т. е. имеет своим уравнением]

$$v = \frac{\nu}{\mu} u \operatorname{ctg} \alpha$$

откуда видно, что прямая ABC составляет с осью v угол γ , причем

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\mu}{\nu}$$

Уравнение прямой AC в координатах x, y имеет вид:

$$Y = \mu x \sin \alpha + \nu y \cos \alpha = 0$$

Прямая AC годографа скорости параллельна линии BC , т. е. имеет уравнение

$$\mu u \sin \alpha + \nu v \cos \alpha = 0$$

или

$$v = -u \operatorname{ctg} \gamma$$

следовательно, она перпендикулярна ABC .

Если повернуть годограф скорости плоскости uv на угол γ против часовой стрелки, то получим годограф скорости изотропного случая, т. е.

$$u + iv = e^{-i\gamma} (v_x + iv_y)$$

или

$$u - iv = e^{i\gamma} (v_x - iv_y)$$

$$\frac{df}{dz} = e^{i\gamma} \frac{df}{dz}$$

Отсюда, так как функция f в соответствующих точках плоскостей z и Z принимает одинаковые значения, получаем

$$z = e^{-i\gamma} Z \quad (2.53)$$

Пусть мы нашли, что

$$Z = Z_0(\zeta) = X_0(\zeta) + iY_0(\zeta)$$

На основании формул (2.49) и (2.53) имеем

$$x + iy = \frac{X \cos \alpha + Y \sin \alpha}{\mu} + i \frac{-X \sin \alpha + Y \cos \alpha}{\nu} = e^{-i\gamma} (X_0 + iY_0)$$

Отделяя здесь действительную часть от мнимой, найдем

$$X = mX_0 + nY_0$$

$$Y = Y_0$$

$$(2.54)$$

где

$$m = \frac{\mu\nu}{\mu^2 \sin^2 \alpha + \nu^2 \cos^2 \alpha}, \quad n = \frac{(\mu^2 - \nu^2) \sin \alpha \cos \alpha}{\mu^2 \sin^2 \alpha + \nu^2 \cos^2 \alpha}$$

Такова зависимость между координатами точек области движения для анизотропного и изотропного грунта в случае, если области $\Phi + i\Psi$ в обоих случаях одинаковы, а область $u + iv$ повернута на угол γ относительно области $v_x + iv_y$.

В частности, координаты точек свободной поверхности анизотропного грунта X, Y связаны с координатами точек свободной поверхности изотропного грунта X_0, Y_0 соотношениями (2.54).

Применяя эти уравнения к рассматриваемому нами частному случаю движения, получим уравнение линии свободной поверхности в виде параболы

$$Y^2 = Q_0^2 - \frac{2Q_0}{m}(X + nY), \quad Q_0 = 2I_0$$

Расход Q через отрезок CB на основании формулы (2.48) равен:

$$Q = \sqrt{k_1 k_2} Q_0$$

Зависимость между расходом Q и отрезком дренажа CB , длину которого обозначим через l , определяется соотношением

$$Q = \frac{2I}{m} \mu v = 2(\mu^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha) l$$

или

$$Q = 2(k_1 \sin^2 \alpha + k_2 \cos^2 \alpha) l$$

4. Фильтрация двуслойной жидкости для анизотропного грунта (установившееся движение). Пусть в области пресной воды коэффициенты фильтрации будут $k'_1 = \mu_1^2$, $k'_1 = v_1^2$, в области соленой воды $k'_2 = \mu_2^2$, $k'_2 = v_2^2$. Будем считать, что «степень анизотропии» в обоих слоях одна и та же, т. е., что

$$\frac{k'_1}{k'_2} = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

Тогда, вводя обозначение

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{v_2}{v_1} = \lambda$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{p_1}{\rho_1 g} - \mu_1 x \sin \alpha - v_1 y \cos \alpha \\ \varphi_2 &= -\frac{p_2}{\rho_2 g} - \lambda(\mu_1 x \sin \alpha + v_1 y \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.55)$$

На линии раздела между пресной и соленой водой $p_1 = p_2$. Поэтому из (2.55) получаем, что на линии раздела

$$\rho_1 \varphi_1 - \rho_2 \varphi_2 + \mu_1(\rho_1 - \lambda \rho_2) x \sin \alpha + v_1(\rho_1 - \lambda \rho_2) y \cos \alpha = 0 \quad (2.56)$$

Как и в изотропном случае, можно показать, что в нижней области движение должно отсутствовать, т. е.

$$\varphi_2 = \text{const}$$

Тогда, дифференцируя (2.56) вдоль линии раздела, которая должна являться линией тока, получим, как это мы уже делали несколько раз для других случаев, уравнение окружности

$$u^2 + v^2 - \mu_1 \left(\frac{\lambda \rho_2}{\rho_1} - 1 \right) u \sin \alpha - v_1 \left(\frac{\lambda \rho_2}{\rho_1} - 1 \right) v \cos \alpha = 0 \quad (2.57)$$

Эта окружность проходит через начало координат и имеет центр в точке

$$\left(\frac{\mu_1}{2} \left[\frac{\lambda \rho_2}{\rho_1} - 1 \right] \sin \alpha, \frac{v_1}{2} \left[\frac{\lambda \rho_2}{\rho_1} - 1 \right] \cos \alpha \right)$$

Так как другие возможные границы в рассматриваемой задаче предполагаются прямолинейными и вдоль них или $\varphi = \text{const}$, или $\psi = \text{const}$, то на плоскости скорости uv получаем область, ограниченную дугой окружности (2.57) и прямыми, проходящими через начало координат. Такая область отображается на полуплоскость с помощью интегралов Кристоффеля-Шварца, так же как область комплексного потенциала. Следовательно, задача всегда решается известными приемами.

В частности, если область плоскости uv имеет тот же вид, что соответствующая область для изотропного грунта, но повернута на угол φ относительно

оси y (см. пример п. 3), то будут иметь место уравнения (2.54) с теми же значениями коэффициентов m и n . В частности, таким образом можно получить уравнение линии раздела в анизотропном грунте для точечного шпунта и плоского флютбета. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} X &= mX_0 + nY_0 \\ Y_0 &= Y \end{aligned} \quad (2.58)$$

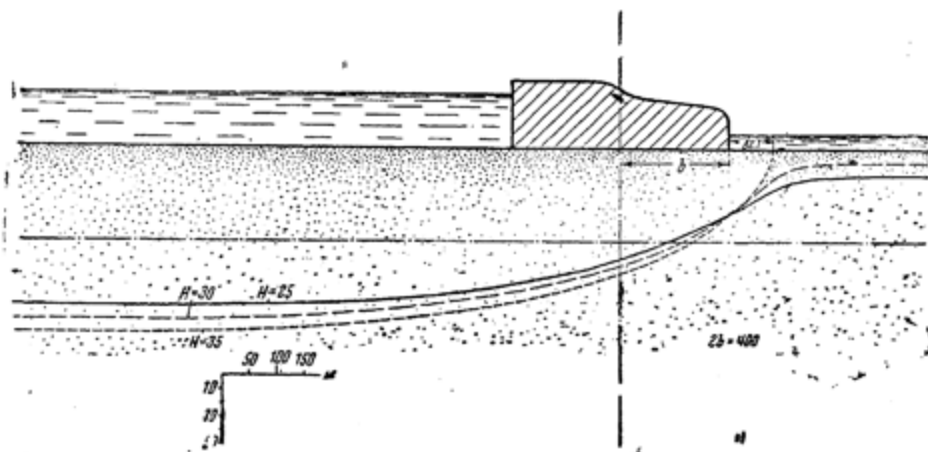
где

$$m = \frac{\mu_1 \nu_1}{\mu_1^2 \sin^2 \alpha + \nu_1^2 \cos^2 \alpha}, \quad n = \frac{(\mu_1^2 - \nu_1^2) \sin \alpha \cos \alpha}{\mu_1^2 \sin^2 \alpha + \nu_1^2 \cos^2 \alpha}$$

Для точечного шпунта значения X_0 и Y_0 определяются формулами (2.9) или (2.10), для плоского флютбета — (2.11), в которых, однако, нужно взять другое значение k , а именно,

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi B}{2h_1}, \quad B = \frac{b}{m}$$

Другими словами, нужно решить задачу об отжиме соленых вод под плоским флютбетом ширины $2B$, затем в полученном решении деформировать X согласно уравнениям (2.58).



Фиг. 24.

Если под флютбетом имеется горизонтальная слоистость, т. е. если $\alpha=0$, то формулы (2.58) упрощаются, и мы имеем

$$\begin{aligned} X &= \frac{\mu}{\nu} X_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} X_0, & Y &= Y_0 \\ k &= \operatorname{th} \frac{\pi B}{2h_1}, & B &= \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} b \end{aligned} \quad (2.59)$$

т. е. в этом случае нужно решить изотропную задачу для «укороченного» в $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ раз флютбета, затем полученную линию раздела «растянуть» вдоль оси X , «удлинив» ее в $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ раз.

Расход в анизотропном грунте Q и соответствующий «приведенный» расход Q_0 в изотропном грунте, т. е. расход при коэффициенте фильтрации равном единице, связаны зависимостью

$$Q = \sqrt{k_1 k_2} Q_0.$$

Случай обтекания плоского флютбета в анизотропном грунте был изучен В. А. Брагинской¹.

На фиг. 24 изображены три положения линии раздела под флютбетом. При вычислениях было принято для напоров, соответственно равных 25, 30 и 35 м:

$$2b = 400 \text{ м}, \quad h_0 = 70 \text{ м}, \quad \rho_2/\rho_1 = 1.25$$

Если линия раздела выходит в область нижнего бьефа, то для отрезка ξ между точкой выхода и правым концом флютбета (фиг. 24) имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \left[\frac{K'}{K} \frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{\pi} \ln 4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2h_0}{\pi} \ln \frac{\Theta(K)}{\Theta(0)} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \left(\frac{K'}{2K} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) h_0 - \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Вычисления приводят к таким результатам:

		2b	0	400	500	600	∞
$k_1/k_2 = 10$	ξ		195.3	82.1	70.4	61.7	0
$k_1/k_2 = 1$	ξ		63.8	10.6	8.7	7.4	0

¹ См. «Прикладная математика и механика», том VI, 1942.

СВЯЗЬ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Конформное отображение кругового многоугольника на полуплоскость.

В главе I мы выяснили, что для плоского установившегося движения грунтовых вод область на плоскости комплексной скорости ограничена дугами окружностей, уравнения которых согласно (1.55)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k + lw}{m + pw} \right) = 0 \quad (3.1)$$

причем соседние окружности должны пересекаться, чтобы образовать область на плоскости w .

Предположим, что имеем круговой многоугольник, т. е. многоугольник, ограниченный дугами окружностей

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k_s + l_s w}{m_s + n_s w} \right) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, \nu, \nu + 1) \quad (3.2)$$

Углы в вершинах многоугольника обозначены через

$$\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_{\nu+1}$$

Отобразим его конформно на верхнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного ζ . Пусть вершины многоугольника переходят в точки вещественной оси a_s , $s = 1, 2, \dots, \nu + 1$, причем пусть

$$a_{\nu+1} = \infty$$

Если выберем произвольно аффиксы еще двух точек a_s , то положение остальных точек будет вполне определенным для данного многоугольника.

Как известно, функцию w можно представить в виде отношения двух линейно независимых частных решений дифференциального уравнения

$$Y'' + \left(\frac{1 - \alpha_1}{\zeta - a_1} + \frac{1 - \alpha_2}{\zeta - a_2} + \dots + \frac{1 - \alpha_\nu}{\zeta - a_\nu} \right) Y' + \frac{\alpha_{\nu+1}' \alpha_{\nu+1}'' (\zeta - \lambda_1) \dots (\zeta - \lambda_{\nu-2})}{(\zeta - a_1) (\zeta - a_2) \dots (\zeta - a_\nu)} Y = 0 \quad (3.3)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ суть деленные на π углы в вершинах многоугольника, переходящих при конформном отображении в точки вещественной оси ζ , лежащие на конечном расстоянии; $\alpha_{\nu+1}'$ и $\alpha_{\nu+1}''$ таковы, что

$$\alpha_{\nu+1}' - \alpha_{\nu+1}'' = \alpha_{\nu+1} \quad (3.4)$$

($\pi\alpha_{\nu+1}$ есть угол при вершине, переходящей в точку $\zeta = \infty$).

При этом между числами a_s ($s = 1, 2, \dots, \nu$), $\alpha_{\nu+1}'$ и $\alpha_{\nu+1}''$ должно выполняться соотношение Фукса

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}' + \alpha_{\nu+1}'' = \nu - 2 \quad (3.5)$$

Наконец, величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu-2}$ в уравнении (3.3) представляют собой так называемые «акцессорные параметры», о которых будет речь ниже.

Обозначим линейно независимые интегралы уравнения (3.3) около точки a_s через U_s и V_s . Тогда величина w будет дробно-линейной функцией от них:

$$w = \frac{AU_s + BV_s}{CU_s + DV_s} \quad (3.6)$$

где A, B, C, D — некоторые постоянные.

В качестве U_s, V_s можно выбрать так называемую каноническую систему интегралов, т. е. интегралов, имеющих вид:

$$U_s = A_0 + A_1(\zeta - a_s) + \dots \quad (3.7)$$

$$V_s = (\zeta - a_s)^{\alpha_s} [B_0 + B_1(\zeta - a_s) + \dots]$$

$$U_{s+1} = \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha_{s+1}'} \left(C_0 + \frac{C_1}{\zeta} + \dots\right) \quad (3.8)$$

$$V_{s+1} = \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha_{s+1}''} \left(D_0 + \frac{D_1}{\zeta} + \dots\right)$$

Если α_s равно нулю или целому числу, то ряд для V_s может содержать $\lg(\zeta - a_s)$.

Напомним, что точка, около которой аналитическая функция разлагается в ряд Тейлора, называется обыкновенной точкой. Если же около точки a функция $F(\zeta)$ имеет разложение вида

$$F(\zeta) = (\zeta - a)^{\alpha} [A_0 - A_1(\zeta - a) + \dots] \quad (3.9)$$

(α не целое положительное число), то точка $\zeta = a$ называется регулярной особой точкой; относительно функции $F(\zeta)$ говорят, что она принадлежит показателю α около $\zeta = a$.

Решения дифференциального уравнения (3.3) имеют лишь регулярные особые точки

$$\zeta = a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}$$

Системы линейно независимых интегралов около двух особых точек связаны между собой линейной зависимостью с постоянными коэффициентами. Например,

$$\begin{aligned} U_s &= p_{cs} U_c + q_{cs} V_c \\ V_s &= r_{cs} U_c + s_{cs} V_c \end{aligned} \quad (3.10)$$

Коэффициенты

$$\begin{pmatrix} p_{cs} & q_{cs} \\ r_{cs} & s_{cs} \end{pmatrix}$$

образуют так называемую вспомогательную подстановку.

Заметим, что равенства (3.10) следует понимать в смысле аналитического продолжения, так как тождественное равенство будет иметь место лишь в общей области существования рядов U_c, V_c и U_s, V_s . Ряды (3.7) сходятся в круге с центром в точке a_s , проходящем через ближайшую особую точку a_{s+1} или a_{s-1} , если расположить a_s в порядке возрастания.

Возвращаемся теперь к нашей задаче о фильтрации грунтовых вод. Если отобразить на полуплоскость ζ область комплексной скорости w , то области комплексной координаты z и комплексного потенциала f также отобразятся на эту полуплоскость. То же относится к их производным

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{df}{d\zeta}$$

При этом, так как, с одной стороны,

$$w = \frac{F}{Z} \quad (3.11)$$

а с другой стороны, w выражается через U_s и V_s по формуле (3.6), то можем положить

$$\begin{aligned} F &= \Phi(\zeta) (AU_s + BV_s) \\ Z &= \Phi(\zeta) (CU_s + DV_s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\Phi(\zeta)$ — неизвестная пока функция. Если она будет определена, то наша задача о фильтрации грунтовых вод будет решена.

Прежде всего важно выяснить вопрос о характере функции $\Phi(\zeta)$. Рассматривая поведение z и f около каждой из вершин областей z , f и w , как, например, мы это делаем в конце этой главы, легко убедиться в том, что функция $\Phi(\zeta)$ может иметь лишь регулярные особенности в этих вершинах.

Этот же результат можно получить с помощью изящного приема, данного Б. К. Ризенкампом^[13] (ч. IV), который здесь воспроизводится в несколько видоизмененном виде.

Возьмем две соседние из окружностей (3.2), например,

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k_1 + l_1 w}{m_1 + n_1 w} \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{k_2 + l_2 w}{m_2 + n_2 w} \right) = 0 \quad (3.13)$$

и предположим, что они пересекаются в двух точках w_0 и w_{00} , так что

$$\operatorname{Im} \left(\frac{k_s + l_s w_0}{m_s + n_s w_0} \right) \equiv 0, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{k_s + l_s w_{00}}{m_s + n_s w_{00}} \right) \equiv 0 \quad (3.14)$$

Пользуясь приемом Девисона, примененным им по другому поводу^[14], Б. К. Ризенкампом вычитает из уравнений (3.13) первые уравнения (3.14), соответствующие точке w_0 . Получаются уравнения

$$\operatorname{Im} \left(\frac{m_s k_s - n_s l_s}{m_s + n_s w_0} \frac{w - w_0}{m_s + n_s w} \right) = 0 \quad (s = 1, 2) \quad (3.15)$$

которые приводятся с помощью равенства (3.11) к виду

$$\operatorname{Im} \left(\frac{m_s k_s - n_s l_s}{m_s + n_s w_0} \frac{F - w_0 Z}{m_s Z + n_s F} \right) = 0 \quad (s = 1, 2) \quad (3.16)$$

Но мы видели, что на контуре должны выполняться соотношения

$$\operatorname{Im}(m_s Z + n_s F) = 0, \quad \operatorname{Im}(k_s Z + l_s F) = 0 \quad (3.17)$$

Из (3.16) и первого из равенств (3.17) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{m_1 k_1 - n_1 l_1}{m_1 + n_1 w_0} (F - w_0 Z) \right] &= 0 \\ \operatorname{Im} \left[\frac{m_2 k_2 - n_2 l_2}{m_2 + n_2 w_0} (F - w_0 Z) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Если ввести в рассмотрение плоскость функции

$$W = F - w_0 Z$$

то на этой плоскости имеем согласно (3.18)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{m_1 k_1 - n_1 l_1}{m_1 + n_1 w_0} W \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{m_2 k_2 - n_2 l_2}{m_2 + n_2 w_0} W \right) = 0 \quad (3.19)$$

т. е. две прямые, пересекающиеся под некоторым углом $\pi\alpha'$.

Совершая конформное отображение этого угла на полуплоскость ζ и считая, что вершина угла переходит в точку $\zeta = 0$, для функции W получим представление

$$W = F - w_0 Z = \zeta^{\alpha'} (A_0 + A_1 \zeta + \dots) \quad (3.20)$$

Аналогичные рассуждения по отношению ко второй точке пересечения окружностей (3.13), точке w_{00} , приводят к уравнениям

$$\operatorname{Im} \left(\frac{m_1 k_1 - n_1 l_1}{m_1 + n_1 w_{00}} W_1 \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{m_2 k_2 - n_2 l_2}{m_2 + n_2 w_{00}} W_1 \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$W_1 = F - w_{00}Z$$

Если прямые (3.21) образуют угол $\pi\alpha''$, то, переводя вершину w_{00} опять в точку $\zeta=0$, для функции W_1 имеем

$$W_1 = F - w_{00}Z = \zeta^{\alpha'} (B_0 + B_1\zeta + \dots) \quad (3.22)$$

Таким образом Б. К. Ризенкампу удастся получить представление двух линейных функций F и Z через функции, принадлежащие показателям α' и α'' в окрестности особой точки. Отсюда следует, что и сами функции F и Z имеют соответствующую вершину своей регулярной особой точкой.

Разделив (3.20) на (3.22), найдем

$$\frac{F - w_{00}Z}{F - w_{00}Z} = \frac{w - w_{00}}{w - w_{00}} = \zeta^{\alpha' - \alpha''} (C_0 + C_1\zeta + \dots)$$

отсюда видно, что функция $\frac{w - w_{00}}{w - w_{00}}$ принадлежит показателю $\alpha' - \alpha''$. Следовательно,

$$\pi(\alpha' - \alpha'')$$

равняется углу при соответствующей вершине кругового многоугольника плоскости w .

Путем предельного перехода Б. К. Ризенкампу исследует случай, когда угол многоугольника равен нулю, а также рассматривает случай, когда окружности (в этом случае прямые) пересекаются на бесконечности, на чем здесь не останавливаемся.

Таким образом можно считать установленным, что вершины областей z , f и w являются регулярными особыми точками функций F и Z . Если найдем показатели этих функций около всех особых точек, то, предполагая, что никаких других особенностей на плоскости эти функции не имеют, а также, что F/Z не имеет нигде, кроме вершин, обыкновенных точек, в которых производная этого отношения обращается в нуль (об этом будет еще сказано ниже), можем построить дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (3.3). Тогда останется определить постоянные A, B, C, D в уравнениях (3.12) и задача будет полностью решена.

Для отыскания показателей функций Z и F в последнее время Б. К. Ризенкампом дан геометрический метод, основанный на использовании равенств (3.20) и (3.22). Так как в дальнейшем будем рассматривать некоторые задачи (двуслойные), в которых непосредственное геометрическое представление затруднено, а также имея в виду решение других задач, в которых могут встретиться комплексные показатели (таковы некоторые задачи теории упругости), даем ниже два аналитических способа определения этих показателей^[19]. Для случая вещественных показателей рассмотрен также способ определения постоянных A, B, C, D в формулах (3.12).

2: Определение показателей (метод аналитического продолжения). Рассмотрим такую задачу. Имеем функции Z и F , регулярные в верхней полуплоскости комплексного переменного ζ . При этом действительная ось разбивается точками $M_1, M_2, \dots$ на конечное число отрезков (фиг. 25), на каждом из которых выполняются по два условия вида (3.17). Положим, для определенности, что

на M_1M_2 ,

$$\operatorname{Im}(k_1Z + l_1F) = \operatorname{Im}(m_1Z + n_1F) = 0$$

на M_2M_3 ,

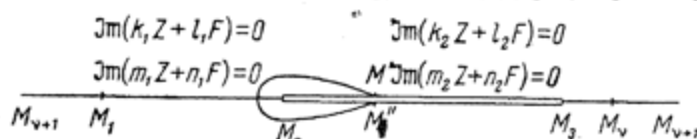
$$\operatorname{Im}(k_2Z + l_2F) = \operatorname{Im}(m_2Z + n_2F) = 0$$

(3.23)

причем

$$\begin{vmatrix} k_s & l_s \\ m_s & n_s \end{vmatrix} \neq 0 \quad (s=1,2)$$

Воспользуемся принципом симметрии Римана-Шварца в частной его форме, которая для нас здесь достаточна: если функция $f(z)$ регулярна внутри обла-



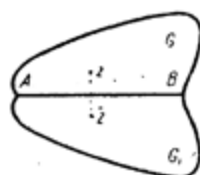
Фиг. 25.

сти G , часть контура которой составляет отрезок действительной оси (фиг. 26), и если при приближении к этому отрезку $f(z)$ стремится к определенным вещественным значениям, непрерывным вдоль MN , то функция $f(z)$ может быть продолжена в область G_1 , симметричную с G относительно действительной оси. При этом продолженная функция будет в сопряженных точках принимать сопряженные значения, т. е.

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

($\bar{z}$ — сопряженное с z , $\bar{f}$ — сопряженная с f функция).

В силу физических условий рассматриваемых нами задач непрерывность значений функций Z и F должна иметь место, так же как и существование предельных значений этих функций при приближении к точкам контура. В силу условий (3.23) функции $k_1 Z + l_1 F$ и $m_1 Z + n_1 F$ принимают на отрезке $M_1 M_2$ вещественные значения. Следовательно, эти функции могут быть продолжены через отрезок $M_1 M_2$ в нижнюю часть плоскости ζ , причем в симметричных относительно действительной оси точках они принимают сопряженные значения.



Фиг. 26.

Сделаем теперь в плоскости ζ разрез вдоль отрезка $M_2 M_2''$ и возьмем произвольную точку M' на верхнем крае разреза. После обхода вокруг точки M_2 в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном движению часовой стрелки, придем в точку M'' , находящуюся на нижнем крае разреза. При этом, если в точке M' значения наших функций были Z и F , то в точке M'' обозначим их через Z^* и F^* . На основании сказанного выше должно быть

$$\begin{aligned} k_1 Z^* + l_1 F^* &= \overline{k_1 \bar{Z} + l_1 \bar{F}} \\ m_1 Z^* + n_1 F^* &= \overline{m_1 \bar{Z} + n_1 \bar{F}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

так как M' и M'' можно рассматривать как симметричные относительно действительной оси точки.

Обратимся теперь к условиям на отрезке $M_2 M_2''$; в точке M' этого отрезка имеем

$$\Im m(k_2 Z + l_2 F) = 0$$

Если представить $k_2 Z + l_2 F$ в форме

$$k_2 Z + l_2 F = \frac{1}{2} (k_2 Z + l_2 F + \overline{k_2 \bar{Z} + l_2 \bar{F}}) + \frac{1}{2} (k_2 Z + l_2 F - \overline{k_2 \bar{Z} + l_2 \bar{F}})$$

то это условие дает

$$k_2 Z + l_2 F - \overline{k_2 \bar{Z} + l_2 \bar{F}} = 0 \quad (3.25)$$

в точке M' , а следовательно, и в точке M'' .

Таким же образом найдем

$$m_2 Z + n_2 F - \bar{m}_2 \bar{Z} - \bar{n}_2 \bar{F} = 0 \quad (3.26)$$

Из уравнений (3.25) и (3.26) найдем $\bar{Z}$ и $\bar{F}$, выраженные через Z и F , и подставим их в (3.24). Решая последние уравнения относительно Z^* и F^* , получим

$$Z^* = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 Z + l_2 F & \bar{l}_2 \\ m_2 Z + n_2 F & \bar{n}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 & \bar{l}_1 \\ n_1 & \bar{n}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 Z + l_2 F & \bar{k}_2 \\ m_2 Z + n_2 F & \bar{m}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} \quad (3.27)$$

$$F^* = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & \bar{k}_1 \\ m_1 & \bar{m}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 Z + l_2 F & l_2 \\ m_2 Z + n_2 F & n_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{l}_1 & k_1 \\ \bar{m}_1 & m_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 Z + l_2 F & k_2 \\ m_2 Z + n_2 F & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}$$

или иначе

$$Z^* = \frac{(\bar{k}_1 n_1 - \bar{m}_1 l_1)(k_2 \bar{n}_2 - m_2 \bar{l}_2) + (l_1 \bar{n}_1 - n_1 \bar{l}_1)(k_2 \bar{m}_2 - m_2 \bar{k}_2)}{(k_1 n_1 - m_1 l_1)(k_2 \bar{n}_2 - l_2 \bar{m}_2)} Z +$$

$$+ \frac{(\bar{k}_1 n_1 - \bar{m}_1 l_1)(l_2 \bar{n}_2 - n_2 \bar{l}_2) + (l_1 \bar{n}_1 - n_1 \bar{l}_1)(l_2 \bar{m}_2 - n_2 \bar{k}_2)}{(k_1 n_1 - m_1 l_1)(k_2 \bar{n}_2 - l_2 \bar{m}_2)} F$$

$$F^* = \frac{(k_1 \bar{m}_1 - m_1 \bar{k}_1)(k_2 \bar{n}_2 - m_2 \bar{l}_2) + (\bar{l}_1 m_1 - \bar{n}_1 k_1)(k_2 \bar{m}_2 - m_2 \bar{k}_2)}{(k_1 n_1 - m_1 l_1)(k_2 \bar{n}_2 - l_2 \bar{m}_2)} Z +$$

$$+ \frac{(k_1 \bar{m}_1 - m_1 \bar{k}_1)(l_2 \bar{n}_2 - n_2 \bar{l}_2) + (\bar{l}_1 m_1 - \bar{n}_1 k_1)(l_2 \bar{m}_2 - n_2 \bar{k}_2)}{(k_1 n_1 - m_1 l_1)(k_2 \bar{n}_2 - l_2 \bar{m}_2)} F \quad (3.27')$$

При выводе формул (3.26) или (3.27) мы исходили из точки M' , лежащей на отрезке $M_2 M_3$, так что последние формулы справедливы для этого отрезка. Но так как функции Z и F аналитические, то эти формулы справедливы вообще, т. е. если берем любую точку верхней полуплоскости и в ней возьмем значения функций Z и F , дающие решение нашей задачи, то после однократного положительного обхода точки M_2 вернемся в исходную точку со значениями Z^* и F^* , удовлетворяющими равенствам (3.27). Таким образом (3.27) представляет подстановку функций Z и F около особой точки M_2 .

Для получения подстановки около особой точки $a_{v+1} = \infty$ (см. начало главы III) нужно $k_1 l_1 m_1 n_1$ заменить на $k_1 l_1 m_1 n_1$, а $k_2 l_2 m_2 n_2$ на $k_{v+1} l_{v+1} m_{v+1} n_{v+1}$.

Обозначим для краткости коэффициенты подстановки (3.27) буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$Z^* = \alpha Z + \beta F$$

$$F^* = \gamma Z + \delta F \quad (3.28)$$

Как известно, каноническую подстановку можно найти, решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

Пусть корни этого уравнения будут λ и λ' . Тогда вблизи особой точки M_2 , в которой для простоты можно считать $\xi = 0$, функции Z и F должны выражаться линейно через функции U и V вида

$$U = \zeta^{\alpha'} \sum_{v=0}^{\infty} a_v \zeta^v$$

$$V = \zeta^{\alpha'} \left[\mu \sum_{v=0}^{\infty} a_v \zeta^v + \sum_{v=0}^{\infty} b_v \zeta^v \right] \quad (3.30)$$

(см., например, [44], стр. 162 или [44]).

При этом показатели α' и α'' связаны с корнями характеристического уравнения λ' , λ'' соотношениями

$$\alpha' = \frac{\ln \lambda'}{2\pi i}, \quad \alpha'' = \frac{\ln \lambda''}{2\pi i} \quad (3.31)$$

По этим формулам α' и α'' определяются с точностью до целого слагаемого. Однозначное их определение вытекает из условий задачи, когда известны некоторые углы или известен характер поведения искомых функций около особых точек (т. е. когда известно, что некоторые из функций конечны, или известен для них порядок бесконечности).

В целях упрощения характеристического уравнения (3.29) можно поступить следующим образом. Заменяем функции Z и F их линейными комбинациями, положив

$$\begin{aligned} Z_1 &= k_1 Z + l_1 F \\ F_1 &= m_1 Z + n_1 F \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тогда на отрезке $M_1 M_2$ будем иметь

$$\operatorname{Im}(Z_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(F_1) = 0 \quad (3.33)$$

На отрезке $M_1 M_2$ получим условие того же вида, что и раньше, но с другими коэффициентами. Положим, что на $M_1 M_2$

$$\operatorname{Im}(kZ_1 + lF_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(mZ_1 + nF_1) = 0 \quad (3.34)$$

Тогда уравнения (3.27) упростятся и получим:

$$\begin{aligned} Z_1^* &= \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - \bar{m}l} Z_1 + \frac{\bar{l}n - \bar{l}n}{kn - \bar{m}l} F_1 \\ F_1^* &= \frac{\bar{k}m - \bar{k}m}{kn - \bar{m}l} Z_1 + \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - \bar{m}l} F_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - \bar{m}l} - \lambda & \frac{\bar{l}n - \bar{l}n}{kn - \bar{m}l} \\ \frac{\bar{k}m - \bar{k}m}{kn - \bar{m}l} & \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - \bar{m}l} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(kn - lm)\lambda^2 - (k\bar{n} - \bar{m}l + kn - \bar{m}l)\lambda + k\bar{n} - \bar{l}m = 0 \quad (3.36)$$

Корни этого уравнения λ' и λ'' должны совпадать с корнями уравнения (3.29), так как Z_1 и F_1 , как линейные комбинации Z и F , должны принадлежать тем же показателям. По найденным λ' , λ'' с помощью (3.31) определяются показатели α' , α'' .

3. Случай действительных показателей. Второй вывод характеристического уравнения. Нас специально будет интересовать случай, когда α' и α'' действительны. Нетрудно убедиться, что необходимым и достаточным условием действительности α' и α'' является условие пересечения окружностей

$$\operatorname{Im}\left(\frac{k + lw_1}{m + nw_1}\right) = 0, \quad \operatorname{Im}(w_1) = 0 \quad (3.37)$$

полученных из уравнений (3.33) и (3.34), где

$$w_1 = \frac{F_1}{Z_1}$$

Действительно, если окружности (3.37) пересекаются, то $\alpha' - \alpha''$ есть действительное число, так как $\pi(\alpha' - \alpha'')$ есть угол между этими окружностями. Тогда отношение

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \exp\{2\pi i(\alpha' - \alpha'')\}$$

должно по модулю равняться единице,

Но уравнение (3.36) имеет вид

$$a\lambda^2 - b\lambda + \bar{a} = 0$$

где b действительное, a и $\bar{a}$ комплексные сопряженные числа, поэтому

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a\bar{a}}}{b - \sqrt{b^2 - 4a\bar{a}}}$$

Для того чтобы

$$\left| \frac{\lambda'}{\lambda''} \right| = 1$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$b^2 - 4a\bar{a} \leq 0$$

или

$$(\bar{k}n + k\bar{n} - \bar{m}l - m\bar{l})^2 - 4(kn - lm)(\bar{k}n - \bar{l}m) \leq 0 \quad (3.38)$$

а это есть условие того, что окружности (3.37) пересекаются (или касаются). Действительно, в последнем случае координаты точек пересечения являются корнями уравнения

$$w^2 + \frac{l\bar{m} - \bar{k}n + k\bar{n} - \bar{l}m}{l\bar{n} - \bar{l}n} w + \frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{l\bar{n} - \bar{l}n} = 0$$

а эти корни действительны при условии

$$(\bar{k}n - k\bar{n} + \bar{l}m - l\bar{m})^2 - 4(k\bar{m} - \bar{k}m)(l\bar{n} - \bar{l}n) \leq 0$$

что совпадает с условием (3.38).

Так как произведение $\lambda'\lambda'' = \frac{\bar{a}}{a}$ по модулю всегда равно единице, то легко видеть, что из действительности числа $\alpha' - \alpha''$ вытекает действительность чисел α' и α'' .

Предполагая теперь выполненными условия действительности показателей α' , α'' около $\zeta = 0$, вернемся к условиям на отрезках вида (3.23). Предположим, что

$$Z = AU + BV, \quad F = CU + DV \quad (3.39)$$

где

$$U = \zeta^{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad V = \zeta^{\alpha''} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (3.40)$$

причем для простоты считаем, что в этих разложениях члены с lg отсутствуют ($\alpha' \neq \alpha''$).

Тогда первое из условий на отрезке M_2M_1 можно по (3.39) представить в виде

$$\operatorname{Im}(k_2 Z + l_2 F) = \operatorname{Im}[(k_2 A + l_2 C)U + (k_2 B + l_2 D)V] = 0 \quad (3.41)$$

Если показатели около всех особых точек действительны, что считаем выполненным, то коэффициенты в разложениях (3.40) будут действительными. Поэтому (3.41) можно представить в виде

$$U \operatorname{Im}(k_2 A + l_2 C) + V \operatorname{Im}(k_2 B + l_2 D) = 0$$

Так как функции U и V линейно независимы, то коэффициенты при них должны равняться нулю:

$$\operatorname{Im}(k_2 A + l_2 C) = 0, \quad \operatorname{Im}(k_2 B + l_2 D) = 0 \quad (3.42)$$

Таким же образом получим еще два уравнения:

$$\operatorname{Im}(m_2 A + n_2 C) = 0, \quad \operatorname{Im}(m_2 B + n_2 D) = 0 \quad (3.43)$$

Перейдем теперь с отрезка M_2M_1 на отрезок M_1M_2 , совершив обход около точки $\zeta = 0$ по полуокружности в верхней полуплоскости. Если на

отрезке M_2M_2 считать $\arg \zeta = 0$, то $\arg \zeta = \pi$ на отрезке M_1M_2 , а следовательно, на отрезке M_1M_2 при $\zeta < 0$

$$\begin{aligned} \zeta^{\alpha'} &= |\zeta|^{\alpha'} e^{i\pi\alpha'}, & \zeta^{\alpha''} &= |\zeta|^{\alpha''} e^{i\pi\alpha''} \\ \text{Полагая для } \zeta < 0 & & U &= e^{i\pi\alpha'} U', & V &= e^{i\pi\alpha''} V' \end{aligned}$$

где U' и V' действительны при $\zeta < 0$, на отрезке M_1M_2 получим

$$\operatorname{Im} (k_1 Z + l_1 F) = \operatorname{Im} [(k_1 A + l_1 C) e^{i\pi\alpha'} U' + (k_1 B + l_1 D) e^{i\pi\alpha''} V'] = 0$$

Отсюда

$$\operatorname{Im} [(k_1 A + l_1 C) e^{i\pi\alpha'}] = 0, \quad \operatorname{Im} [(k_1 B + l_1 D) e^{i\pi\alpha''}] = 0 \quad (3.44)$$

Аналогичным путем найдем

$$\operatorname{Im} [(m_1 A + n_1 C) e^{i\pi\alpha'}] = 0, \quad \operatorname{Im} [(m_1 B + n_1 D) e^{i\pi\alpha''}] = 0 \quad (3.45)$$

Полученные восемь уравнений (3.42) — (3.45) распадаются на две группы, в одну из которых входят A и C , в другую B и D . Перепишем эти уравнения, вводя комплексные сопряженные числа ($\bar{A}$ — сопряженное с A и т. д.)

$$\begin{aligned} k_1 A + l_1 C - \bar{k}_1 \bar{A} - \bar{l}_1 \bar{C} &= 0 \\ m_1 A + n_1 C - \bar{m}_1 \bar{A} - \bar{n}_1 \bar{C} &= 0 \\ (k_1 A + l_1 C) e^{2i\pi\alpha'} - \bar{k}_1 \bar{A} - \bar{l}_1 \bar{C} &= 0 \\ (m_1 A + n_1 C) e^{2i\pi\alpha'} - \bar{m}_1 \bar{A} - \bar{n}_1 \bar{C} &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} k_1 B + l_1 D - \bar{k}_1 \bar{B} - \bar{l}_1 \bar{D} &= 0 \\ m_1 B + n_1 D - \bar{m}_1 \bar{B} - \bar{n}_1 \bar{D} &= 0 \\ (k_1 B + l_1 D) e^{2i\pi\alpha''} - \bar{k}_1 \bar{B} - \bar{l}_1 \bar{D} &= 0 \\ (m_1 B + n_1 D) e^{2i\pi\alpha''} - \bar{m}_1 \bar{B} - \bar{n}_1 \bar{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Для того чтобы система (3.46) имела отличные от нуля решения, необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} k_1 e^{2i\pi\alpha'} & l_1 e^{2i\pi\alpha'} & \bar{k}_1 & \bar{l}_1 \\ m_1 e^{2i\pi\alpha'} & n_1 e^{2i\pi\alpha'} & \bar{m}_1 & \bar{n}_1 \\ k_2 & l_2 & \bar{k}_2 & \bar{l}_2 \\ m_2 & n_2 & \bar{m}_2 & \bar{n}_2 \end{vmatrix} = 0$$

Если в этом определителе заменить α' на α'' , то получим условие того, что система (3.47) имеет для B и D отличные от нуля решения.

Это показывает, что $e^{2i\pi\alpha'}$ и $e^{2i\pi\alpha''}$ являются корнями уравнения второй степени относительно λ :

$$\begin{vmatrix} k_1 \lambda & l_1 \lambda & \bar{k}_1 & \bar{l}_1 \\ m_1 \lambda & n_1 \lambda & \bar{m}_1 & \bar{n}_1 \\ k_2 & l_2 & \bar{k}_2 & \bar{l}_2 \\ m_2 & n_2 & \bar{m}_2 & \bar{n}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

Получим, таким образом, характеристическое уравнение для $\lambda = e^{2i\pi\alpha'}$. Хотя при выводе мы пользовались условием вещественности α' и α'' , однако уравнение (3.48) годится и для комплексных α' , α'' , в чем можно убедиться, преобразовав уравнение (3.29) к виду (3.48).

4. Круговые многоугольники. Прежде чем переходить к вопросу об определении коэффициентов A, B, C, D в формулах (3.39) для Z и F , рассмотрим задачу о конформном отображении на полуплоскость некоторых круго-

вых многоугольников, причем для простоты будем предполагать, что углы многоугольника отличны от нуля.

Треугольник. С помощью дробно-линейного преобразования круговой треугольник с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$ и $\pi(\gamma-\gamma')$ можно перевести в треугольник с двумя прямолинейными сторонами, — треугольник ABC (фиг. 27). Соответственно тому, что мы указываем выше относительно конформного отображения многоугольника, для нахождения функции, отображающей на полуплоскость ξ треугольник плоскости w , нужно построить уравнение с тремя особыми точками (гипергеометрическое уравнение). Пусть вершинам A, B, C соответствуют точки $\zeta=0, 1, \infty$. Около точки $\zeta=0$ примем показатели 0 и α (можно было бы взять произвольные α' и α'' такие, чтобы $\alpha' - \alpha'' = \alpha$), около точки $\zeta=1$ пусть показатели будут 0 и β . Показатели около точки $\zeta=\infty$ обозначим через γ и γ' , причем углы треугольника должны равняться $\pi\alpha$, $\pi\beta$ и $\pi(\gamma-\gamma')$. Соотношение Фукса

$$\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1$$

позволяет найти каждый из показателей γ и γ' .

Гипергеометрическое уравнение задачи имеет вид:

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta} + \frac{1-\beta}{\zeta-1} \right) Y' + \frac{\gamma\gamma'}{\zeta(\zeta-1)} Y = 0$$

Обозначим через U, V фундаментальную каноническую систему решений этого уравнения около точки $\zeta=0$, имеющую вид:

$$\begin{aligned} U &= 1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots \\ V &= \zeta^\alpha (1 + a'_1 \zeta + \dots) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Пусть около точки $\zeta=1$ имеем систему линейно независимых решений U_1, V_1 :

$$\begin{aligned} U_1 &= 1 + b_1(\zeta-1) + \dots \\ V_1 &= (1-\zeta)^\beta [1 + b'_1(\zeta-1) + \dots] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Около точки $\zeta=\infty$ пусть фундаментальная система будет:

$$\begin{aligned} U_\infty &= \left(\frac{1}{\zeta} \right)^\gamma \left(1 + \frac{c_1}{\zeta} + \dots \right) \\ V_\infty &= \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{\gamma'} \left(1 + \frac{c'_1}{\zeta} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Тогда около точки $\zeta=0$ функция w будет иметь вид:

$$w = \frac{AU + BV}{CU + DV} \quad (3.52)$$

Постоянные A, B, C, D (вернее, отношение к одной из них трех остальных) можно найти, подставляя в (3.52) и их аналитические продолжения последовательно значения $\zeta=0, 1, \infty$ и координаты соответствующих вершин треугольника.

Можно, однако, поступить несколько иначе.

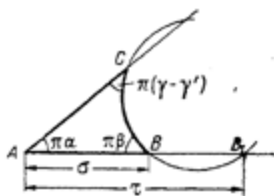
Напишем уравнения:

окружности AB

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \quad (3.53)$$

окружности AC

$$\operatorname{Im}(e^{\pi i \alpha} w) = 0 \quad (3.54)$$



Фиг. 27.

окружности BC

$$\operatorname{Im}\left[\frac{e^{\pi i \beta}(w-\tau)}{w-\tau}\right]=0 \quad (3.55)$$

где σ и τ обозначают отрезки, отсекаемые окружностью BC на оси абсцисс; нетрудно видеть, что (3.55) представляет собой уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{\tau+\sigma}{2}, \frac{\tau-\sigma}{2} \operatorname{ctg} \pi \beta\right)$ и радиусом $\frac{\tau-\sigma}{2 \sin \pi \beta}$.

* Очевидно, что для рассматриваемого треугольника в формуле (3.52)

$$A=D=0$$

Полагая

$$\frac{B}{C}=\mu$$

будем иметь

$$w=\mu \frac{V}{U} \quad (3.56)$$

Для определения величины μ обратимся к уравнению (3.55), для чего предварительно перейдем от системы решений (U, V) к системе (U_1, V_1) с помощью вспомогательной подстановки

$$U=pU_1+qV_1, \quad V=rU_1+sV_1$$

Коэффициенты p, q, r, s этой подстановки — действительные числа. Можем написать

$$w=\frac{\mu r U_1+\mu s V_1}{p U_1+q V_1}$$

Если перейти с отрезка $(0, 1)$ на отрезок $\zeta > 1$, то там функция V_1 уже не будет иметь действительных значений.

Можно положить

$$V_1=e^{-\pi i \beta} V'$$

где функция V' имеет действительные значения при $\zeta > 1$.

Тогда получим

$$\frac{e^{\pi i \beta}(w-\tau)}{w-\tau}=\frac{e^{\pi i \beta}(\mu r-p\tau) U_1+(\mu s-q\tau) V'}{(\mu r-p\tau) U_1+(\mu s-q\tau) e^{-\pi i \beta} V'}$$

Если выполняется уравнение (3.55), то необходимо должны одновременно выполняться равенства:

$$\operatorname{Im}\left[e^{\pi i \beta}(\mu r-p\tau)(\mu r-p\sigma)\right]=0$$

$$\operatorname{Im}\left[e^{\pi i \beta}(\mu s-q\tau)(\mu s-q\sigma)\right]=0$$

$$\operatorname{Im}\left[e^{2 \pi i \beta}(\mu r-p\sigma)(\mu s-q\tau)\right]=0.$$

Так как $ps-qr \neq 0$, то одновременно

$$\mu r-p\sigma=0, \quad \mu s-q\tau=0,$$

откуда для μ получаем два выражения:

$$\mu=\frac{q\tau}{s} \quad \text{и} \quad \mu'=\frac{p\sigma}{r}$$

Для совместности этих равенств необходимо, чтобы

$$\frac{\tau}{\sigma}=\frac{ps}{qr} \quad (3.57)$$

Нетрудно показать, что это соотношение всегда имеет место. Действительно, как известно из теории гипергеометрического уравнения (см., например, Picard, *Traité d'analyse*, т. III, стр. 298):

$$\frac{ps}{qr} = \frac{\sin \pi(\alpha + \gamma) \sin \pi(\beta + \gamma)}{\sin \pi\gamma \sin \pi\gamma'} \quad (3.58)$$

С другой стороны, рассматривая треугольник ABC , найдем для косинуса угла при вершине C

$$\cos \pi(\gamma - \gamma') = \frac{\sigma \cos \pi(\alpha - \beta) - \tau \cos \pi(\alpha + \beta)}{\tau - \sigma} \quad (3.59)$$

Решив последнее уравнение относительно τ/σ , получим выражение, стоящее в правой части (3.58), что и доказывает справедливость тождества (3.57).

Уравнение (3.56) дает вполне определенное, единственное—по теореме Римана о конформном отображении—выражение функции, отображающей треугольник ABC на полуплоскость так, чтобы вершины его перешли соответственно в точки $0, 1, \infty$.

Четырехугольник. Аналогичным образом можно рассмотреть четырехугольник с не равными нулю углами. С помощью дробно-линейного преобразования переведем его в четырехугольник, две смежные стороны которого суть прямые. Пусть это будет четырехугольник, представленный на фиг. 28. Напишем уравнения его сторон в форме

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \quad (3.60)$$

$$\operatorname{Im}(e^{-\pi i \alpha} w) = 0 \quad (3.61)$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{\pi i \beta} (w - c_1)}{w - c_2} \right] = 0 \quad (3.62)$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{-\pi i \gamma} (e^{-\pi i \alpha} w - c_2)}{e^{-\pi i \alpha} w - c_2} \right] = 0 \quad (3.63)$$

Для отыскания функции, дающей конформное отображение внутренности нашего четырехугольника на верхнюю полуплоскость ζ так, чтобы точки A, B, C, D плоскости w перешли соответственно в точки $0, 1, a, \infty$ плоскости ζ , составим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta} + \frac{1-\beta}{\zeta-1} + \frac{1-\gamma}{\zeta-a} \right) Y' + \frac{\delta\delta'(\zeta-1)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)} Y = 0 \quad (3.64)$$

Это уравнение определяет функцию, две ветви которой имеют около особых точек показатели, соответственно равные 0 и α около $\zeta=0$, 0 и β около $\zeta=1$, 0 и γ около $\zeta=a$, δ и δ' около $\zeta=\infty$. Эти показатели должны удовлетворять соотношению Фукса

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \delta' = 2$$

Уравнение (3.64) в отличие от уравнения, соответствующего треугольнику, кроме заданных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta'$, содержит еще два неизвестных параметра a и λ , которые зависят как от углов данного четырехугольника, так и от других параметров, определяющих этот четырехугольник. Нужно получить два соотношения, могущие послужить для определения a и λ .

Фундаментальные канонические системы решений уравнения (3.64) имеют вид, аналогичный уравнениям (3.49)—(3.51). Обозначим эти решения соответственно через $(U, V), (U_1, V_1), (U_a, V_a), (U_\infty, V_\infty)$. Коэффициенты рядов для этих функций будут теперь зависеть не только от показателей, но и от a и λ .

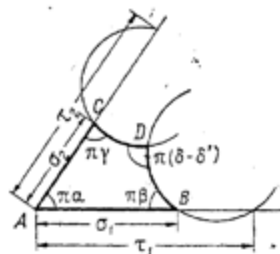
Функция, отображающая конформно рассматриваемый четырехугольник на полуплоскость, имеет около точки $\zeta=0$ вид (3.56). Подстановка этого выражения в уравнение (3.62) приводит к двум выражениям для μ :

$$\mu = \frac{q\tau_1}{s} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{p\tau_1}{r} \quad (3.65)$$

Для того чтобы эти выражения совпадали, необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\tau_1}{s} = \frac{ps}{qr} \quad (3.66)$$

которое, однако, теперь не является тождеством, но представляет уравнение, содержащее неизвестные a и λ . Действительно, для заданного четырехугольника отношение τ_1/s есть известное число, в то время как правая часть зависимости (3.66) есть функция a и λ . Это различие между треугольником и четырехугольником объясняется тем, что для треугольника (фиг. 27) отношение τ/s вполне определяется заданием углов треугольника, в то время как для четырехугольника фиг. 28 задание углов еще недостаточно для определения τ_1/s_1 .



Фиг. 28.

Для того чтобы получить еще одно уравнение между a и λ , обратимся к неиспользованному еще нами уравнению (3.63) четвертой стороны четырехугольника. Для этого перейдем от системы (U, V) решений около точки $\zeta=0$ к системе решений (U_a, V_a) около точки $\zeta=a$. В рассматриваемом случае $a < 0$, т. е. отрезок $(a, 0)$ лежит влево от точки $\zeta=0$. Поэтому на отрезке $(a, 0)$ решение U имеет действительные значения, а решение V имеет вид:

$$V = e^{\pi i \alpha} V'$$

где функция V' принимает только действительные значения. Вспомогательная подстановка, переводящая (U, V) в (U_a, V_a) , имеет вид:

$$U = p_a U_a + q_a V_a = p_a U_a + q_a e^{\pi i \gamma} V'_a$$

$$V = e^{\pi i \alpha} (r_a U_a + s_a V_a) = e^{\pi i \alpha} (r_a U_a + s_a e^{\pi i \gamma} V'_a)$$

где коэффициенты p_a, q_a, r_a, s_a — действительные числа. Вторые равенства относятся к значениям $\zeta < a$, для которых функция V'_a имеет действительные значения.

Так как согласно (3.56)

$$w = \frac{pe^{\pi i \alpha} (r_a U_a + s_a e^{\pi i \gamma} V'_a)}{p_a U_a + q_a e^{\pi i \gamma} V'_a}$$

то (3.63) дает

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{\pi i \gamma} (\mu r_a - c_2 p_a) U_a + (\mu s_a - c_2 q_a) V'_a}{(\mu r_a - c_2 p_a) U_a + (\mu s_a - c_2 q_a) e^{\pi i \gamma} V'_a} \right] = 0$$

Отсюда вытекает необходимость выполнения равенств:

$$\operatorname{Im} [e^{-\pi i \gamma} (\mu r_a - c_2 p_a) (\mu r_a - c_2 p_a)] = 0$$

$$\operatorname{Im} [e^{-\pi i \gamma} (\mu s_a - c_2 q_a) (\mu s_a - c_2 q_a)] = 0$$

$$\operatorname{Im} [e^{-2\pi i \gamma} (\mu r_a - c_2 p_a) (\mu s_a - c_2 q_a)] = 0$$

Этим равенством можно удовлетворить лишь при условии, что одновременно

$$\mu r_a - c_2 p_a = 0, \quad \mu s_a - c_2 q_a = 0$$

т. е. если

$$\mu = \frac{p_a \tau_2}{r_a} = \frac{p_a \tau_2}{s_a} \quad (3.67)$$

Это дает нам уравнение

$$\frac{\tau_2}{c_2} = \frac{p_a s_a}{q a' a} \quad (3.68)$$

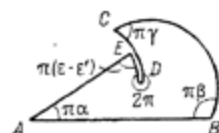
которое вместе с (3.66) образует систему двух уравнений для определения значений λ и a .

При этом каждому заданному четырехугольнику соответствует единственная система значений a , λ , между тем как (3.66) и (3.68) допускают бесчисленное множество значений для λ . В задачах о движении грунтовых вод обычно удается найти интервал, в котором заключается λ .

Заметим, что в случае четырехугольника уравнение, соответствующее уравнению (3.59) для треугольника, имеет вид:

$$\cos \pi(\beta - \beta') = \frac{c_1 c_2 \cos \pi(\alpha + \beta - \gamma) + \tau_1 \tau_2 \cos \pi(\alpha - \beta + \gamma)}{(c_1 - \tau_1)(c_2 - \tau_2)} - \frac{c_1 \tau_1 \cos \pi(\alpha + \beta + \gamma) + c_2 \tau_2 \cos \pi(\alpha - \beta - \gamma) + 2(c_1 c_2 + \tau_1 \tau_2) \sin \pi \beta \sin \pi \gamma}{(c_1 - \tau_1)(c_2 - \tau_2)}$$

Частный случай пятиугольника. Рассмотрим пятиугольник, две стороны которого имеют общую часть, образуя угол, равный 2π (на фиг. 29 это угол при вершине D). Другими словами, имеем многоугольник с надрезом. Пусть при конформном отображении этого многоугольника на полуплоскость вершины A, B, C, D, E переходят соответственно в точки



Фиг. 29.

вещественной оси $\zeta = a, b, c, d, \infty$. Показатели около особых точек будут соответственно $[0, \alpha]$, $[0, \beta]$, $[0, \gamma]$, $[0, 2]$ и $[z, z']$. Сумма их должна удовлетворять соотношению Фукса

$$\alpha + \beta + \gamma + 2 + z + z' = 3$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma + z + z' = 1$$

Дифференциальное уравнение задачи о конформном отображении нашего многоугольника имеет вид:

$$Y'' + \left(\frac{1-a}{\zeta-a} + \frac{1-b}{\zeta-b} + \frac{1-c}{\zeta-c} + \frac{1-d}{\zeta-d} \right) Y' + \frac{zz'(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d)}{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d)} Y = 0 \quad (3.69)$$

Два из четырех чисел a, b, c, d можно выбрать произвольно, приняв их, например, равными 0 и 1. Два оставшихся числа вместе с числами λ_1 и λ_2 составляют четыре параметра, подлежащих определению. Уравнения сторон нашего пятиугольника имеют тот же вид, что и для четырехугольника, рассмотренного нами выше, так как стороны CD и DE определяются одним и тем же уравнением.

Поэтому у нас должны иметь место уравнения (3.66) и (3.68).

Третье уравнение получим, исходя из следующих соображений. Точка D должна быть обыкновенной точкой решения дифференциального уравнения (3.69), т. е. около нее фундаментальная система решений должна иметь вид:

$$U_d = 1 + a_1(\zeta - d) + \dots$$

$$V_d = (\zeta - d)^2 [1 + a_1''(\zeta - d) + \dots]$$

¹ Дело в том, что четырехугольник, ограниченный одними и теми же окружностями, может лежать на различном числе листов римановой поверхности, — каждому листу соответствует свое значение λ .

Здесь логарифмический член разложения $\lg(\zeta-d)$ отсутствует, так как при его наличии обход дважды по дуге CD , а затем по DE будет невозможен. Но тогда производные по ζ от этих функций также не содержат логарифмов и должны принадлежать показателям 0, 1. Заметим, что $a_1 \neq 0$, так как в противном случае из уравнения (3.69) получили бы $2a_2 + \frac{1}{0} = 0$, что невозможно.

Составим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $dY/d\zeta$, где Y есть решение уравнения (3.69). Перепишем уравнение (3.69) в виде

$$Y'' + \left(\frac{A}{\zeta-a} + \frac{B}{\zeta-b} + \frac{C}{\zeta-c} + \frac{D}{\zeta-d} \right) Y' + \frac{E(\zeta-\lambda_1)(\zeta-\lambda_2)}{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d)} Y = 0$$

Вводя обозначение

$$\frac{dV}{d\zeta} = W$$

получим для функции W уравнение

$$W'' + \left(\frac{A+1}{\zeta-a} + \frac{B+1}{\zeta-b} + \frac{C+1}{\zeta-c} - \frac{1}{\zeta-\lambda_1} - \frac{1}{\zeta-\lambda_2} \right) W' + \frac{Q}{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d)(\zeta-\lambda_1)(\zeta-\lambda_2)} W = 0$$

где

$$Q = E(\zeta-\lambda_1)^2(\zeta-\lambda_2)^2 - (2\zeta-\lambda_1-\lambda_2) \{ A(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d) + D(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c) - (\zeta-\lambda_1)(\zeta-\lambda_2) \{ (A+B)(\zeta-c)(\zeta-d) + (A+D)(\zeta-b)(\zeta-c) + (B+C)(\zeta-a)(\zeta-d) + (B+D)(\zeta-a)(\zeta-c) + (C+D)(\zeta-a)(\zeta-b) \} \}$$

Функция W имеет семь особых точек; кроме тех пяти, которые были особыми точками для Y , особыми будут также точки λ_1 и λ_2 , показатели около которых суть 0 и 2. Если показатели для Y около точек $\zeta=a, b, c, d, \infty$ были соответственно $(0, \alpha), (0, \beta), (0, \gamma), (0, 2), (z, z')$, то для W они будут $(0, \alpha-1), (0, \beta-1), (0, \gamma-1), [(0, 1), (z+1, z'+1)]$. Так как в рассматриваемом случае $D = -1$, то в коэффициенте при W' член с $\frac{1}{\zeta-d}$ пропадает. Нужно, чтобы $\zeta=d$ пропало и в коэффициенте при W . Условие делимости Q на $\zeta-d$ и дает искомое третье уравнение нашей задачи

$$zz'(d-\lambda_1)^2(d-\lambda_2)^2 + (2d-\lambda_1-\lambda_2)(d-a)(d-b)(d-c) + (d-\lambda_1)(d-\lambda_2)[\alpha(d-b)(d-c) + \beta(d-a)(d-c) + \gamma(d-a)(d-b)] = 0 \quad (3.70)$$

Отметим, что точка $\zeta=d$, соответствующая вершине D , не может быть обыкновенной точкой дифференциального уравнения, так как около $\zeta=d$ должно существовать решение вида

$$(\zeta-d)^2 [1 + b_1(\zeta-d) + \dots]$$

обращающееся в нуль вместе с первой производной. Тогда из уравнения

$$Y'' + pY' + qY = 0$$

вытекало бы, что $Y''=0$ при $\zeta=d$, откуда следует, что $Y \equiv 0$. Такие точки называются кажущимися или побочными особыми точками дифференциального уравнения.

Уравнению (3.70) можно дать другой вид, если заменить параметры λ_1 и λ_2 параметрами λ и μ , которые получим, представив уравнение (3.69) в виде

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta-a} + \frac{1-\beta}{\zeta-b} + \frac{1-\gamma}{\zeta-c} - \frac{1}{\zeta-d} \right) Y' + \frac{zz'^2 + \mu^2 + \lambda}{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)(\zeta-d)} Y = 0$$

т. е.

$$\lambda = zz'\lambda_1\lambda_2, \quad \mu = -zz'(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Таким образом

$$(d - \lambda_1)(d - \lambda_2) = \frac{d^2 \varepsilon \varepsilon' + d\mu + \lambda}{\varepsilon \varepsilon'}$$

$$2d - \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\varepsilon \varepsilon' d + \mu}{\varepsilon \varepsilon'}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.70) четвертой степени относительно λ_1 и λ_2 , получим уравнение второй степени относительно λ и μ

$$(\varepsilon \varepsilon' d^2 + \mu d + \lambda)^2 + (2\varepsilon \varepsilon' d + \mu)(d - a)(d - b)(d - c) + (\varepsilon \varepsilon' d^2 + \mu d + \lambda)^2 [\alpha(d - b)(d - c) + \beta(d - a)(d - c) + \gamma(d - a)(d - b)] = 0 \quad (3.71)$$

Уравнение (3.71) имеет перед (3.70) еще то преимущество, что оно остается справедливым и при $\varepsilon \varepsilon' = 0$, тогда как (3.70) имеет в этом случае другую форму.

Таким образом для определения четырех параметров рассматриваемой задачи пока имеем три уравнения: (3.66), (3.68) и (3.70) или (3.71). Для получения четвертого уравнения можно было бы воспользоваться тем обстоятельством, что положение вершины D предполагается известным. Однако в задачах о движении грунтовых вод положение вершины D не бывает заранее известно, но имеющееся обычно в этих задачах дополнительное условие позволяет составить необходимое четвертое уравнение.

5. Определение постоянных A, B, C, D . Случай трех особых точек. Для того чтобы показать возможность определения постоянных в формулах (3.39) (которые определяются лишь с точностью до вещественного множителя), приведем условия на отрезках (3.23) к некоторому простейшему виду, который будем называть каноническим. Тем самым рассматриваемую задачу сведем к задаче о конформном преобразовании треугольника.

Одно упрощение нами уже применялось, когда с помощью равенства (3.32) были введены новые функции Z_1 и F_1 и получены условия (3.33) и (3.34). Поэтому будем считать, что это преобразование уже сделано, так что условия на отрезках имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{на } M_2 M_1 \quad \operatorname{Im}(kZ + lF) &= \operatorname{Im}(mZ + nF) = 0 \\ \text{на } M_1 M_2 \quad \operatorname{Im}(Z) &= \operatorname{Im}(F) = 0 \\ \text{на } M_2 M_3 \quad \operatorname{Im}(k_0 Z + l_0 F) &= \operatorname{Im}(m_0 Z + n_0 F) = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Предположим, что показатели функций около особых точек мы уже знаем. Около точки $\zeta = 0$ обозначим их через α' и α'' . Предположим далее, что каноническая система интегралов U, V около $\zeta = 0$ нами определена, так что

$$Z = AU + BV, \quad F = CU + DV \quad (3.73)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.35), получим

$$\begin{aligned} Z^* &= \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} A + \frac{\bar{l}n - \bar{l}n}{kn - ml} C \right) U + \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} B + \frac{\bar{l}n - \bar{l}n}{kn - ml} D \right) V \\ F^* &= \left(\frac{\bar{k}n - \bar{k}n}{kn - ml} A + \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} C \right) U + \left(\frac{\bar{k}m - \bar{k}m}{kn - ml} B + \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} D \right) V \end{aligned} \quad (3.74)$$

С другой стороны, очевидно, что при обходе точки $\zeta = 0$ в положительном направлении функции U и V приобретают соответственно множители $e^{2\pi i \alpha'}$ и $e^{2\pi i \alpha''}$. Поэтому для функций Z^* и F^* имеем другое выражение, полученное с помощью формул (3.73):

$$\begin{aligned} Z^* &= A e^{2\pi i \alpha'} U + B e^{2\pi i \alpha''} V \\ F^* &= C e^{2\pi i \alpha'} U + D e^{2\pi i \alpha''} V \end{aligned} \quad (3.75)$$

Сравнивая формулы (3.75) и (3.74), находим для A и C систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} - e^{2\pi i \alpha'} \right) A + \frac{\bar{l}n - \bar{l}n}{kn - \bar{l}m} C &= 0 \\ \frac{\bar{k}m - \bar{k}m}{kn - \bar{m}l} A + \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - \bar{m}l} - e^{-2\pi i \alpha'} \right) C &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Эти уравнения совместны, — определитель системы равен нулю, так как $e^{2\pi i \alpha'}$ есть корень характеристического уравнения. Поэтому из (3.76) можем найти отношение C/A . Заметим, что у нас числа A, B, C, D должны быть действительными в силу того, что при $0 < \zeta < 1$

$$\operatorname{Im}(Z) = \operatorname{Im}(F) = 0$$

Аналогичным путем можно найти и отношение B/D . Для B и D получается такая же система уравнений, как для A и C , лишь α' будет заменено на α'' .

Таким образом, полагая

$$\frac{C}{A} = \mu', \quad \frac{D}{B} = \mu''$$

получим

$$\begin{aligned} \mu' &= - \frac{\bar{k}n - \bar{m}l - (kn - ml) e^{2\pi i \alpha'}}{\bar{l}n - \bar{l}n} \\ \mu'' &= - \frac{\bar{k}n - \bar{m}l - (kn - ml) e^{2\pi i \alpha''}}{\bar{l}n - \bar{l}n} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Если в характеристическое уравнение (3.36) подставим $\lambda = e^{2\pi i \alpha'}$ и умножим его почленно на $e^{-2\pi i \alpha'}$, то получим тождество

$$(kn - lm) e^{2\pi i \alpha'} - (\bar{k}n - \bar{m}l) = k\bar{n} - m\bar{l} - (\bar{k}n - \bar{l}m) e^{-2\pi i \alpha'}$$

Отсюда для μ' получаем другое выражение, сопряженное с (3.77), а это означает, что μ' (а также и μ'') есть действительное число.

Таким образом (3.73) можно представить в виде

$$Z = AU + BV, \quad F = A\mu'U + B\mu''V \quad (3.78)$$

где U и V принадлежат соответственно показателям α' и α'' около $\zeta = 0$. Теперь остается лишь определить отношение коэффициентов A и B . Чтобы показать возможность и единственность этого определения, подвергнем условия на отрезках (3.72) дальнейшим преобразованиям.

Прежде всего с помощью (3.78) составим линейные комбинации

$$F_1 = \mu''Z - F = A(\mu' - \mu'')U$$

$$Z_1 = \mu'Z - F = B(\mu' - \mu'')V$$

При $0 < \zeta < 1$ имеем $\operatorname{Im}(Z_1) = \operatorname{Im}(F_1) = 0$. Но теперь Z_1 и F_1 просто пропорциональны U и V :

$$Z_1 = A'V, \quad F_1 = B'U$$

При $\zeta < 0$ будем иметь

$$\operatorname{Im}(Z_1 e^{-\pi i \alpha'}) = 0, \quad \operatorname{Im}(F_1 e^{-\pi i \alpha'}) = 0$$

Будем считать, что $\alpha' > \alpha''$.

Предположим, что около точки $\zeta = 1$ мы получили для нашей задачи показатели β' и β'' , причем $\beta' > \beta''$. Заменяем теперь Z_1 и F_1 новыми функциями с помощью равенств

$$\begin{aligned} Z_1 &= t^{\alpha'}(1-t)^{\beta'}Z_2 \\ F_1 &= t^{\alpha''}(1-t)^{\beta''}F_2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Тогда Z_2 и F_2 будут около $\zeta = 0$ принадлежать показателям 0 и $\alpha = \alpha' - \alpha''$, около $\zeta = 1$ показателям -0 и $\beta = \beta' - \beta''$.

Для Z_2 и F_2 условия на отрезках будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{на } M_3M_2 \quad \operatorname{Im}(Z_2) &= \operatorname{Im}(e^{-\pi i \alpha} F_2) = 0 \\ \text{на } M_1M_2 \quad \operatorname{Im}(Z_2) &= \operatorname{Im}(F_2) = 0 \\ \text{на } M_2M_3 \quad \operatorname{Im}(KZ_2 + LF_2) &= \operatorname{Im}(MZ_2 + NF_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

На первых двух отрезках условия уже приведены к каноническому виду. Преобразуем дальше условия на третьем отрезке. Для этого умножим последние два из уравнений (3.80) соответственно на a и b , где a и b — действительные числа, и сложим их. Получим

$$\operatorname{Im}[(aK + bM)Z_2 + (aL + bN)F_2] = 0$$

Полагая $K = k' + ik''$, $L = l' + il''$, $M = m' + im''$, $N = n' + in''$ имеем

$$\begin{aligned} aK + bM &= ak' + bm' + i(ak'' + bm'') \\ aL + bN &= al' + bn' + i(al'' + bn'') \end{aligned} \quad (3.81)$$

Прежде чем перейти к подбору чисел a и b , отметим условия, которые налагает на коэффициенты K, L, M, N требование, что характеристическое уравнение

$$(\overline{KN} - \overline{LM})\lambda^2 - (\overline{KN} + K\overline{N} - \overline{ML} - M\overline{L})\lambda + KN - LM = 0$$

имеет около точки $\zeta = 1$ корни 1 и $e^{2\pi i \beta}$. Это уравнение аналогично (3.36), только черта (знак сопряженности) стоит на других буквах.

Требование, что значения $\lambda = 1$ и $\lambda = e^{2\pi i \beta}$ являются корнями этого уравнения, дает

$$\frac{K - K'}{L - L'} = \frac{M - M'}{N - N'}, \quad e^{2\pi i \beta} = \frac{KN - LM}{\overline{KN} - \overline{LM}} \quad (3.82)$$

Первое из равенств (3.82) равносильно

$$k'' : l'' = m'' : n''$$

что дает возможность уничтожить мнимые части в равенствах (4.81). Действительно, 1) если ни одно из чисел k'', l'', m'', n'' не равно нулю, то величины a и b можно выбрать так, чтобы $ak'' + bm'' = 0$, $al'' + bn'' = 0$; 2) если $k'' = 0$, $m'' \neq 0$, то $l'' = 0$, и первое из уравнений (3.81) уже имеет действительные коэффициенты; 3) если $k'' \neq 0$, $m'' = 0$, то $n'' = 0$, и второе из уравнений (3.81) имеет действительные коэффициенты.

Будем считать, что K и L представляют собой действительные величины. Хотя бы одна из них должна быть отличной от нуля. Пусть будет $L \neq 0$. Тогда, введя обозначение

$$\frac{K}{L} = -\sigma$$

причем σ — действительное число, приведем одно из условий (3.80) на отрезке M_2M_3 к виду

$$\operatorname{Im}(F_2 - \sigma Z_2) = 0 \quad (3.83)$$

Присоединим к нему второе уравнение

$$\operatorname{Im}(MZ_2 + NF_2) = 0 \quad (3.84)$$

Характеристическое уравнение для (3.83) и (3.84) имеет вид:

$$(\sigma \overline{N} + \overline{M})\lambda^2 - (\sigma N + \sigma \overline{N} - \overline{M} - M)\lambda + \sigma N + M = 0$$

Теперь для $e^{2\pi i \beta}$ получаем

$$e^{2\pi i \beta} = \frac{\sigma N + M}{\sigma \overline{N} + \overline{M}}$$

что можно представить в виде

$$\frac{\cos \pi\beta + i \sin \pi\beta}{\cos \pi\beta - i \sin \pi\beta} = \frac{zn' + m' + i(zn'' + m'')}{zn' + m' - i(zn'' + m'')}.$$

Если $m'' = n'' = 0$, то коэффициенты M и N будут действительные числа. Предположим, что это не имеет места (т. е. $\beta = 0$ или целому числу), т. е. что, например, $n'' \neq 0$. Представим (3.84) в виде

$$\operatorname{Im}[(m' + im'')Z_2 + (n' + in'')F_2] = 0 \quad (3.85)$$

Сделаем так, чтобы коэффициент при F_2 стал чисто мнимым. Для этого, если $n' \neq 0$, умножим (3.83) на n' , (3.85) на σ и сложим. Поделив затем (3.85) почленно на n'' , получим

$$\operatorname{Im}(iF_2 + PZ_2) = 0 \quad (3.86)$$

где $P = P' + iP''$, т. е., вообще говоря, [комплексное число.

Если $n'' = 0$, $m'' \neq 0$, то при $\sigma \neq 0$ можно сделать так, чтобы коэффициент при Z_2 был чисто мнимым.

Произведем, наконец, последнее преобразование. Умножим (3.83) на $\cos \pi\beta$, а (3.86) на $\sin \pi\beta$ и сложим полученные результаты. Имеем

$$\operatorname{Im}[e^{\pi i\beta}F_2 + (P' \sin \pi\beta - \sigma \cos \pi\beta + iP'' \sin \pi\beta)Z_2] = 0 \quad (3.87)$$

Но из характеристического уравнения для (3.86)

$$(\sigma i - \bar{P})\lambda^2 + (P + \bar{P})\lambda - \sigma i - P = 0$$

следует, что

$$e^{2\pi i\beta} = \frac{P + \sigma i}{P - \sigma i} = \frac{P' + i(P'' + \sigma)}{P' - i(P'' + \sigma)}$$

Отсюда

$$\frac{\cos \pi\beta}{\sin \pi\beta} = \frac{P'}{P'' + \sigma}, \quad P' \sin \pi\beta = (P'' + \sigma) \cos \pi\beta$$

и, следовательно, уравнение (3.87) принимает вид:

$$\operatorname{Im}(e^{\pi i\beta}F_2 + P''e^{\pi i\beta}Z_2) = 0$$

или, если положить $P'' = -\tau$,

$$\operatorname{Im}[e^{\pi i\beta}(F_2 - \tau Z_2)] = 0 \quad (3.88)$$

Итак, в общем случае приводим условия на отрезках к виду:

$$\begin{aligned} \text{на } M_2M_1 \quad & \operatorname{Im}(F_2 e^{-\pi i\beta}) = \operatorname{Im}(Z_2) = 0 \\ \text{на } M_1M_2 \quad & \operatorname{Im}(Z_2) = \operatorname{Im}(F_2) = 0 \\ \text{на } M_2M_3 \quad & \operatorname{Im}(F_2 - \tau Z_2) = \operatorname{Im}[e^{\pi i\beta}(F_2 - \tau Z_2)] = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Но если разделить попарно друг на друга эти соотношения и положить

$$\frac{F_2}{Z_2} = w,$$

то получим как раз уравнения сторон треугольника, для отображения которого на полуплоскость было найдено

$$w = \frac{F_2}{Z_2} = \frac{V}{U}$$

Функции

$$F_2 = H_U V, \quad Z_2 = H U \quad (3.90)$$

где H — действительная постоянная, удовлетворяют всем условиям (3.89), а потому представляют искомое решение.

Других уравнений для F_2 и Z_2 не может быть, т. е. мы получили единственное — с точностью до произвольной постоянной H — решение задачи.

С помощью функций Z_2 и F_2 нетрудно найти функции Z и F , которые будут иметь вид:

$$Z = \zeta^{\alpha^*} (1 - \zeta)^{\beta^*} (AU + BV)$$

$$F = \zeta^{\alpha^*} (1 - \zeta)^{\beta^*} (CU + DV)$$

где функции U и V принадлежат около особых точек соответственно показателям $(0, \alpha)$, $(0, \beta)$ и (γ, γ') .

Таким образом при соответствующем выборе системы функций U, V для множителя $\Phi(\zeta)$ уравнений (3.12) будем иметь выражение

$$\Phi(\zeta) = \zeta^{\alpha*} (1 - \zeta)^{\beta*}$$

В частных случаях можем получить условия (3.89) в несколько ином виде — это будет, когда вместо окружности будем иметь прямую.

6. Случай четырех особых точек. В этом случае условия на отрезках можно привести к виду, представленному на фиг. 30.

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Im}(e^{-\pi i \alpha} F - \tau_2 Z) = 0 & \operatorname{Im}(e^{-\pi i \alpha} F) = 0 & \operatorname{Im}(F) = 0 & \operatorname{Im}(F - \tau_1 Z) = 0 & & & \\ \operatorname{Im}[e^{-\pi i \gamma}(e^{-\pi i \alpha} F - \sigma_2 Z)] = 0 & \operatorname{Im}(Z) = 0 & \operatorname{Im}(Z) = 0 & \operatorname{Im}[e^{-\pi i \beta}(F - \sigma_1 Z)] = 0 & & & \\ D & C & A & B & & & D \end{array}$$

Фиг. 30.

Для доказательства поступаем так. Прежде всего условие на отрезке AB приведем к виду

$$\operatorname{Im}(Z_1) = \operatorname{Im}(F_1) = 0$$

Затем, если показатели около особых точек $\zeta = a, b, c$ соответственно равны (α', α'') , (β', β'') , (γ', γ'') , то положим

$$Z_1 = (\zeta - a)^{\alpha'*} (b - \zeta)^{\beta'*} (c - \zeta)^{\gamma'*} Z_2$$

$$F_1 = (\zeta - a)^{\alpha'*} (b - \zeta)^{\beta'*} (c - \zeta)^{\gamma'*} F_2$$

Тогда на отрезках BC, CA, AB получим условия, выписанные на фиг. 30 совершенно так, как это сделано нами в случае трех особых точек. Что касается условий на отрезке DC , то их можно получить следующим рассуждением.

Если положить

$$Z_2 = Z_3, \quad e^{-\pi i \alpha} F_2 = F_3$$

то на отрезке CA будем иметь

$$\operatorname{Im}(Z_3) = 0, \quad \operatorname{Im}(F_3) = 0$$

т. е. условия того же вида, что для Z_2 и F_2 на отрезке AB . Тогда на отрезке DC будем иметь уравнения

$$\operatorname{Im}(F_2 - \tau_2 Z_3) = \operatorname{Im}[e^{-\pi i \gamma}(F_2 - \sigma_2 Z_3)] = 0$$

которые можно получить так же, как условия на BD .

Условия, представленные на фиг. 30, можно привести к условиям (3.60)—(3.63) для четырехугольника, и, следовательно, если для последнего найдено решение, то для F_2 и Z_2 получим выражения вида (3.90).

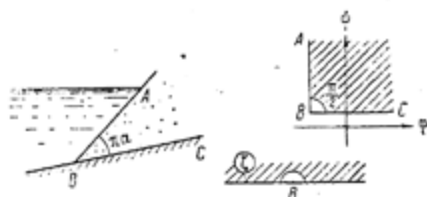
Заметим, что при решении рассмотренных задач предполагалось отсутствие кажущихся особых точек. При наличии таковых задача привелась бы к аналогичной задаче о конформном отображении на полуплоскость частного случая пятиугольника, рассмотренного выше.

В заключение этой главы приведем результаты, относящиеся к способу определения показателей около особых точек для различных комбинаций граничных условий, которые встречаются при изучении движения грунтовых вод. Большая часть этих результатов имеется в работе Б. К. Ризенкампа [32].

Рассмотрим, следуя Б. К. Ризенкампу [32] (IV ч., стр. 26), различные комбинации границ, которые могут встретиться в задачах о земляных плотинах. Именно, границами области фильтрации могут быть:

- а) прямолинейные непроницаемые стенки,
- б) прямолинейные границы водоемов,
- в) прямолинейные промежутки высачивания,
- г) свободные поверхности, вдоль которых может происходить испарение воды (или к которым может притекать вода извне).

Б. К. Ризенкамф указывает еще на возможность испарения с прямолинейных границ грунта. На этом случае останавливаться не будем, а перечисленные выше рассмотрим более полно.



Фиг. 31.

Всего имеем шесть возможных случаев соединений (аб), (ав), (ар), (бв), (бр), (вр) вышеуказанных границ.

1. Случай аб. Пусть откос плотности составляет угол $\pi\alpha$ с линией непроницаемого основания (фиг. 31).

Тогда конформное отображение области z на полуплоскость ζ вблизи точки B , если считать, что точка B переходит в начало координат плоскости ζ , имеет вид:

$$z = \zeta^\alpha (a_0 + a_1 \zeta + \dots)$$

Для функции Z получаем

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = \zeta^{\alpha-1} (b_0 + b_1 \zeta + \dots)$$

Следовательно, функция Z принадлежит показателю $\alpha - 1$.

На плоскости $f = \varphi + i\psi$ в точке B сходятся линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, поэтому имеем

$$f = \zeta^{\frac{1}{2}} (c_0 + c_1 \zeta + \dots)$$

$$F = \frac{df}{d\zeta} = \zeta^{-\frac{1}{2}} (e_0 + e_1 \zeta + \dots)$$

т. е. функция F принадлежит показателю $-\frac{1}{2}$.

Таким образом для функций Z и F имеем показатели $(\alpha - 1, -\frac{1}{2})$.

Если угол $\pi\alpha$ прямой, то показатели будут $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. В этом случае на гидрографе скорости точка B будет обыкновенной точкой. Подстановка

$$Z = \frac{Z_1}{\sqrt{\zeta}}, \quad F = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta}}$$

приводит к функциям Z_1 и F_1 , для которых точка B является также обыкновенной точкой, т. е. разложения этих функций

$$Z_1 = a_0 + a_1 \zeta + \dots, \quad F_1 = b_0 + b_1 \zeta + \dots$$

не содержат логарифмического члена $\ln \zeta$.

Такие точки, особенность в которых можно устранить подстановкой вида

$$U = \zeta^m U_1$$

можно назвать, по предложению Б. К. Ризенкампа, устранимыми особыми точками. В этом случае можно составить линейную комбинацию функций Z_1 и F_1 , принадлежащую показателю $+1$, и считать, что функции F и Z принадлежат показателям $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, а функции F_1 и Z_1 показателям $(0, 1)$.

2. Случай ав. Непроницаемая стенка соединяется с промежутком высачивания (фиг. 32). Как и в предыдущем случае, для Z имеем

$$Z = \zeta^{\alpha-1} (a_0 + a_1 \zeta + \dots)$$

Рассмотрим плоскость комплексной скорости. На ней имеем прямые, пересекающиеся в точке B под углом $\pi(\frac{1}{2} - \alpha)$.

Следовательно, для $u - iv$ получим

$$u - iv = \frac{F}{Z} = \zeta^{\frac{1}{2}-\alpha} (c_0 + c_1 \zeta + \dots)$$

Отсюда

$$F = Z \zeta^{\frac{1}{2}-\alpha} (c_0 + \dots) = \zeta^{-\frac{1}{2}} (a_0 c_0 + \dots)$$



Фиг. 32.

Таким образом функции F и Z будут принадлежать показателям $(\alpha - 1, -\frac{1}{2})$. Здесь в отличие от предыдущего случая при $\alpha = \frac{1}{2}$ разложения для Z и F содержат логарифмический член $\ln \zeta$. Действительно, в этом случае на плоскости $u - iv$ прямые становятся параллельными, а потому

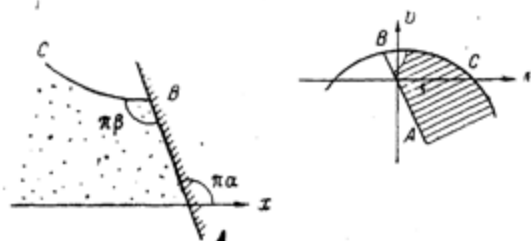
$$u - iv = \frac{F}{Z} = m \ln \zeta + \dots$$

следовательно,

$$F = Z \ln \zeta + \dots$$

3. Случай аг. Непроницаемая стенка соединяется со свободной поверхностью (фиг. 33). С поверхности CB происходит испарение интенсивности c , так что

$$\psi + cx = \text{const}$$



Фиг. 33.

$$\begin{aligned} \Im m(F) &= 0 & \Im m(iF + kZ) &= 0 \\ \Im m(Z e^{-\pi i \alpha}) &= 0 & \Im m(F + ciZ) &= 0 \end{aligned}$$

Фиг. 34.

Кроме того, вдоль CB давление постоянно, следовательно,

$$\varphi + ky = \text{const}$$

Уравнение стенки AB пусть имеет вид:

$$y \cos \pi \alpha - x \sin \pi \alpha = 0$$

Вдоль стенки $\psi = \text{const}$.

Условия на отрезках AB и BC плоскости ζ представлены на фиг. 34. Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} k\lambda & i\lambda & k & -i \\ ci\lambda & \lambda & -ci & 1 \\ e^{-\pi i \alpha} & 0 & e^{\pi i \alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение приводится к виду

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{k-c}{k+c} e^{-\pi i \alpha} \cos \pi \alpha + e^{-2\pi i \alpha} = 0$$

Каждый раз, как

$$\left(\frac{k-c}{k+c} \right)^2 \cos^2 \pi \alpha < 1$$

(в частности, это неравенство имеет место при $c > 0$, т. е. в случае испарения),
имеем

$$\lambda = e^{-\pi i a} \left[\frac{k-c}{k+c} \cos \pi x \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{k-c}{k+c} \right)^2 \cos^2 \pi x} \right]$$

Полагая

$$\frac{k-c}{k+c} \cos \pi x = \cos \pi \delta$$

будем иметь

$$\lambda = e^{-\pi i (a \pm \delta)}$$

Искомые показатели около особой точки B , определяемые по формуле

$$r_1 = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i}, \quad r_2 = \frac{\ln \lambda_2}{2\pi i}$$

будут соответственно

$$-\frac{1}{2}(x+\delta) + m$$

$$-\frac{1}{2}(x-\delta) + m'$$

где m и m' — целые числа и $0 < \delta < 1$.

Рассмотрение годографа скорости показывает, что

$$m = m' = 0$$

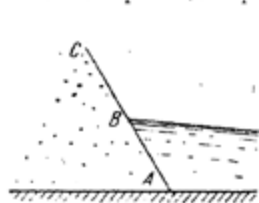
причем $\pi\delta$ есть дополнение до π угла ABC на годографе скорости; при этом угол $\pi\delta$, образуемый стенкой и линией свободной поверхности, определяется через величины x и δ таким образом:

$$\pi\delta = \pi \left(1 - \frac{x+\delta}{2} \right)$$

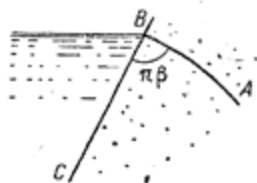
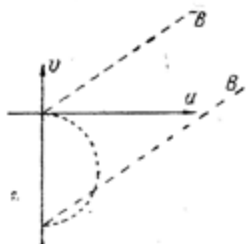
В данном случае показатели системы функций Z и F имеют вид:

$$\left(-\frac{x+\delta}{2}, \frac{\delta-x}{2} \right)$$

4. Случай бв (фиг. 35). Прямолинейная граница водоема является и прямолинейной границей промежутка высачивания.



Фиг. 35.



Фиг. 36.

Здесь на плоскости z , а следовательно, и для функции Z , имеем обыкновенную точку:

$$Z = a_0 + a_1 \zeta + \dots$$

На плоскости $u-iv$ точка B находится на бесконечности и представляет пересечение двух параллельных прямых, перпендикулярных прямой ABC плоскости z . Поэтому около точки B

$$u-iv = c_0 \ln \zeta + \dots$$

Показатель системы функций Z и F есть двукратный нуль $(0,0)$.

5. Случай бг (фиг. 36). Свободная поверхность соединяется с границей водного бассейна. Условия на линии AB будут такие же, как в третьем случае, а условия на отрезке BC имеют вид:

$$\operatorname{Im}(Ze^{-\pi i a}) = 0, \quad \operatorname{Im}(iF) = 0$$

Соответствующее характеристическое уравнение (в случае испарения)

$$\begin{vmatrix} k\lambda & i\lambda & k & -i \\ ci\lambda & \lambda & -ci & 1 \\ e^{-\pi i \alpha} & 0 & e^{\pi i \alpha} & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{vmatrix} = 0$$

приводится к виду

$$\lambda^3 + 2\frac{k-c}{k+c} \exp \left\{ \pi i \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right\} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \lambda + \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right\} = 0$$

Отсюда

$$\lambda = \exp \left\{ \pi i \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right\} \left[-\frac{k-c}{k+c} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k-c}{k+c} \right)^2 \cos^2 \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - 1} \right]$$

Полагая

$$-\frac{k-c}{k+c} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) = \cos \pi \delta$$

получим

$$\lambda = \exp \left\{ \pi i \left(\frac{1}{2} - \alpha + \delta \right) \right\}$$

откуда для показателей получаем значения: $-\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \alpha - \delta \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \alpha - \delta \right)$.

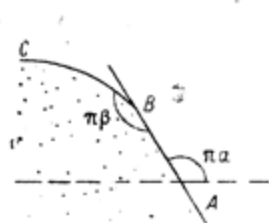
При этом

$$\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

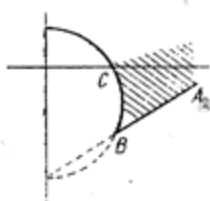
Если нет испарения, т. е. $c=0$, то $\delta = \alpha + \frac{1}{2}$ и

$$\beta = \frac{1}{2}$$

6. Случай vg (фиг. 37). Свободная поверхность граничит с прямолинейным промежутком высачивания. Условия на отрезках AB и BC представлены на фиг. 38.



Фиг. 37.



$$\begin{array}{ll} \Im m(Z e^{-\pi i \alpha}) = 0 & \Im m(F + ciZ) = 0 \\ \Im m(iF + kZ) = 0 & \Im m(iF + kZ) = 0 \end{array}$$

Фиг. 38.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} k\lambda & i\lambda & k & -i \\ ci\lambda & \lambda & -ci & 1 \\ k & i & k & -i \\ e^{-\pi i \alpha} & 0 & e^{\pi i \alpha} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -e^{-2\pi i \alpha} = \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right\}$$

Отсюда нетрудно прийти к заключению, что около вершины B показатели будут 0 и $\frac{1}{2} - \alpha$. Если откос составляет тупой угол с линией горизонта, то $\pi\beta = \pi$, если острый, то $\pi\beta = \pi \left(\frac{3}{2} - \alpha \right)$.

В заключение сделаем замечание относительно показателей около бесконечно далекой точки.

Если считать, что данной вершине B соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ , то полученные выше значения показателей нужно увеличить на две единицы. Это замечание принадлежит Б. К. Ризенкампу. Доказывается оно таким образом.

Положим

$$\zeta = \frac{1}{\tau}$$

Тогда точка $\zeta = \infty$ перейдет в точку $\tau = 0$; после преобразования функций

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{df}{d\zeta}$$

получим выражения

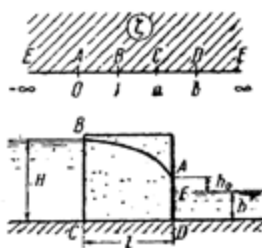
$$Z = -\frac{dz}{d\tau} \tau^2, \quad F = -\frac{df}{d\tau} \tau^2$$

откуда и следует высказанное утверждение.

ЗАДАЧА О ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ЗЕМЛЯНУЮ ПЕРЕМЫЧКУ

Схема задачи представлена на фиг. 39. Рассматривается плотина с вертикальными откосами AD и BC на непроницаемом горизонтальном основании CD длины l . Высота воды в верхнем бьефе H , в нижнем — h . Требуется определить элементы движения.

Эта задача была решена Б. Б. Девисоном в 1932 г. [13], [45] и Гамелем в 1934 г., но их формулы имеют очень сложный вид и не определяют всех элементов движения. В 1935 г. Гамель с Э. Гюнтером проделали вычисления размеров плотины для одного случая; Маскет (Muskat) в 1935 г. добавил к этому расчет пяти новых случаев плотины, причем им вычислен также общий расход жидкости, протекающей через плотину [56]. Вычисления эти очень громоздки.

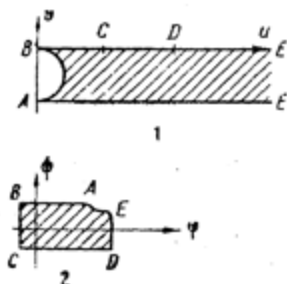


Фиг. 39.

Применение аналитической теории линейных дифференциальных уравнений позволило получить более простое решение этой задачи [28], которое затем удалось привести к виду, удобному для вычислений [31]. По полученным формулам были произведены вычисления, результаты которых приводятся в конце этой главы.

Одновременно с нашими ряд работ в области развиваемого метода был опубликован Б. К. Ризенкампом, который также исследовал задачу о фильтрации через земляную перемычку и получил аналогичные формулы ([33], ч. IV).

1. Построение решения. Пользуясь результатами конца предыдущей главы, найдем показатели системы функций Z, F для нашей задачи. Для облегчения проверки правильности вычисления этих показателей служат схемы, представленные на фиг. 40. Заметим, что по этим схемам без труда можно было бы



Фиг. 40.

определять все показатели. Пусть при конформном отображении области движения на полуплоскость комплексного переменного ζ точки A, B, C, D, E перейдут соответственно в точки действительной оси $\zeta = 0, 1, a, b, \infty$. Будем искать показатели около каждой из этих точек.

Около точки A ($\zeta = 0$) имеет место шестой случай (вг), рассмотренный в главе III. Поэтому показатели (здесь $\alpha = \frac{1}{2}$) будут $(0, 0)$.

Около точки B ($\zeta = 1$) имеет место пятый случай (бг). Здесь получаем,

что $-\frac{1}{2}$ является кратным корнем характеристического уравнения, т. е. что показатели равны $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Около точки $C (\zeta=a)$ соответственно первому случаю (аб) можно считать, что имеем показатели $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, причем здесь, как было выяснено к концу главы III, особенность является устранимой.

Около точки $D (\zeta=b)$ получаем то же самое, что и около точки C , т. е. показатели будут $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Около точки $E (\zeta=\infty)$ имеем четвертый случай (бв), которому соответствует кратный корень характеристического уравнения, равный нулю. Так как особая точка здесь есть бесконечно далекая точка, то показатели около нее будут $(2, 2)$.

Теперь наша задача сводится к отысканию функции Римана, т. е. многозначной функции, имеющей регулярные особые точки $\zeta=0, 1, a, b, \infty$, две ветви которой принадлежат соответственно показателям $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(2, 2)$.

Такая функция может быть обозначена с помощью символа Римана

$$\check{Y} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b & \infty \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & \zeta \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Отметим, что сумма всех показателей у нас равна трем, следовательно, условие Фукса здесь выполняется (число особых точек равно пяти).

Для функции Римана имеет место следующее тождественное преобразование:

$$P \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \dots & \alpha_n' & \zeta \\ \alpha_1'' & \alpha_2'' & \dots & \alpha_n'' \end{pmatrix} = (\zeta - a_1)^{\alpha_1'} (\zeta - a_2)^{\alpha_2'} \dots \quad (4.2)$$

$$\dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n'} P \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha_n' & \zeta \\ \alpha_1'' - \alpha_1' & \alpha_2'' - \alpha_2' & \dots & \alpha_n'' - \alpha_n' & \alpha_n'' + \alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha_n' \end{pmatrix}$$

Применяя эту формулу к нашей функции Y , можем написать

$$\check{Y} = (1 - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2}} (\zeta - b)^{-\frac{1}{2}} P \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \zeta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{Y}{\sqrt{(1 - \zeta)(\zeta - a)(\zeta - b)}} \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что функция Y в точках $\zeta=a$ и $\zeta=b$ имеет показатели 0 и 1 и, как было показано выше, в своих разложениях не содержит логарифмических членов. Поэтому $\zeta=a$ и $\zeta=b$ являются обыкновенными точ-

ками и могут быть исключены из рассмотрения, т. е. функция Y имеет лишь три особых точки и может быть обозначена так:

$$Y = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \zeta \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Известно, что функция

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \gamma & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix}$$

есть решение уравнения

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta} + \frac{1-\beta}{\zeta-1} \right) Y' + \frac{\gamma\gamma'}{\zeta(\zeta-1)} Y = 0 \quad (4.5)$$

В рассматриваемом случае

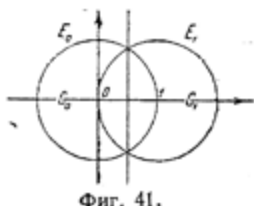
$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = \gamma' = \frac{1}{2}$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (4.5) принимает вид:

$$Y'' + \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1} \right) Y' + \frac{1}{4} \frac{Y}{\zeta(\zeta-1)} = 0$$

или

$$\zeta(1-\zeta)Y'' - (1+2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0 \quad (4.6)$$



Это есть уравнение некоторого специального гипергеометрического ряда, изученное Ж. Таннери^[44]. Линейно независимые канонические интегралы этого уравнения около каждой из особых точек имеют следующий вид:

около точки $\zeta=0$ (в области C_0 , фиг. 41)

$$U = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \zeta\right) = P(\zeta) \quad (4.7)$$

$$V = P(\zeta) \lg \zeta + G(\zeta) = Q(\zeta)$$

где

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \zeta\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \zeta^n \quad (4.8)$$

$$G(\zeta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \zeta^n$$

около $\zeta=1$

$$U_1 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-\zeta\right) = P(1-\zeta) \quad (4.9)$$

$$V_1 = P(1-\zeta) \lg(1-\zeta) + G(1-\zeta) = Q(1-\zeta)$$

около $\zeta=\infty$

$$U_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} P\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (4.10)$$

$$V_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[P\left(\frac{1}{\zeta}\right) \lg \frac{1}{\zeta} + G\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Функции $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ обладают важным для вычисления свойством, — они выражаются через полные эллиптические интегралы первого рода:

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} K(\zeta) \quad (4.11)$$

$$Q(\zeta) = \frac{8 \lg 2}{\pi} K(\zeta) - 2K(1-\zeta) \quad (4.12)$$

$$4 \lg 2 P(\zeta) - Q(\zeta) = 2K(1-\zeta)$$

где

$$K(\zeta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \zeta \sin^2 \varphi}}$$

Первая из формул (4.11) выводится непосредственно, путем сравнения разложения для $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \zeta\right)$ с разложением полного эллиптического интеграла первого рода по степеням квадрата модуля, причем $k^2 = \zeta$.

Обратимся теперь к определению функций Z и F , которые представляют собой линейные комбинации двух независимых ветвей функции $\tilde{Y}$. Последняя же выражается через Y по формуле (4.3). Поэтому около точки $\zeta = 0$ будем иметь

$$Z = \frac{AU + BV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}, \quad F = \frac{CU + DV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \quad (4.13)$$

где A, B, C, D — комплексные постоянные, которые надо определить так, чтобы выполнялись условия на отрезках действительной оси ζ .

На отрезке AB , т. е. при $0 < \zeta < 1$, должны иметь

$$\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Im}(iF + kZ) = 0$$

т. е.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{CU + DV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}\right) = 0 \quad \operatorname{Im}\left(\frac{(Ci + kA)U + (Di + kB)V}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}\right) = 0$$

Так как функции U и V линейно независимы, то

$$\operatorname{Im}(C) = \operatorname{Im}(D) = 0$$

Отсюда C и D должны быть действительными числами.

Далее, полагая

$$A = A' + iA'', \quad B = B' + iB''$$

из условия

$$\operatorname{Im}(Ci + kA) = 0, \quad \operatorname{Im}(Di + kB) = 0$$

получим

$$C + kA'' = 0, \quad D + kB'' = 0$$

откуда

$$C = -kA'', \quad D = -kB''$$

Перейдем теперь на отрезок EA , обойдя точку A на полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости. Тогда, считая, что для $0 < \zeta < 1$ $\arg \lg \zeta = 0$, при $\zeta < 0$ будем иметь

$$\lg \zeta = \lg |\zeta| + \pi i$$

$$V = U \lg \zeta + G = U \lg |\zeta| + G + \pi i U = V' + \pi i U$$

где функция V' имеет действительные значения при $\zeta < 0$. Получим

$$Z = \frac{(A' + iA'')U + (B' + iB'')(V' + \pi i U)}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}$$

Условие $\operatorname{Im}(iZ) = 0$ при $\zeta < 0$ дает

$$A' - \pi B'' = 0, \quad B' = 0$$

Условие $\operatorname{Im}(iF + kZ) = 0$ выполняется тождественно при постоянных, удовлетворяющих уже полученным соотношениям.

Для функций Z и F получаем выражения

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(\pi B'' + iA'')U + B''iV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \\ F &= -k \frac{A''U + B''V}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Наконец, перейдем на отрезок BC ($\zeta > 1$). Канонические интегралы U и V около особой точки $\zeta=0$ связаны с канонической системой интегралов U_1, V_1 , около $\zeta=1$ линейными зависимостями. По Таннери эти зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{4 \lg 2}{\pi} U_1 - \frac{1}{\pi} V_1 \\ V &= \frac{16 \lg^2 2 - \pi^2}{\pi} U_1 - \frac{4 \lg 2}{\pi} V_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

При $\zeta > 1$ имеем

$$\sqrt{1-\zeta} = -i\sqrt{\zeta-1}, \quad \lg(1-\zeta) = \lg(\zeta-1) - \pi i$$

поэтому

$$V_1 = U_1 \lg(\zeta-1) + G(1-\zeta) - \pi i U_1 = V_1' - \pi i U_1$$

где V_1' и U_1 — действительные функции.

Для $\zeta > 1$ представим выражения для функций U и V в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{4 \lg 2 + \pi i}{\pi} U_1 - \frac{1}{\pi} V_1' \\ V &= \frac{16 \lg^2 2 - \pi^2 + 4\pi i \lg 2}{\pi} U_1 - \frac{4 \lg 2}{\pi} V_1' \end{aligned}$$

и подставим эти выражения в формулу (4.14). Получим

$$F = \frac{ki}{\pi} \frac{A'' [(4 \lg 2 + \pi i) U_1 - V_1'] + B'' [(16 \lg^2 2 - \pi^2 + 4\pi i \lg 2) U_1 - 4 \lg 2 V_1']}{V(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}$$

Условие $\text{Im}(iF) = 0$ при $\zeta > 1$ приводит к уравнению

$$A'' + 4 \lg 2 B'' = 0$$

откуда

$$A'' = -4 \lg 2 B''$$

Меняя обозначение, положим

$$B'' = -B$$

тогда

$$A'' = 4B \lg 2$$

$$Z = -B \frac{(4 \lg 2 + \pi i) U - V}{V(1-\zeta)(\zeta-a)(b-\zeta)} \quad (4.16)$$

$$F = -kB i \frac{4 \lg 2 U - V}{V(1-\zeta)(\zeta-a)(b-\zeta)}$$

где B — действительная постоянная.

Пользуясь формулами (7) и (12), можно написать

$$Z = -2B \frac{K(\zeta) - iK(1-\zeta)}{V(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)} \quad (4.17)$$

$$F = -2kB \frac{K(1-\zeta)}{V(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}$$

Эти выражения справедливы в общей области двух кругов $|\zeta| < 1$ и $|1-\zeta| < 1$. Далее будут указаны аналитические продолжения формул (4.17).

Положим

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{2K(1-\zeta) + 2iK(\zeta)}{V(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)} \quad (4.18)$$

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{2K(1-\zeta)}{V(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}$$

Тогда для функций z и f будем иметь

$$z = -B \int_a^\zeta \Phi_1(t) dt, \quad f = -kB i \int_a^\zeta \Phi_2(t) dt - kH \quad (4.19)$$

Заметим, что значения функций φ и ψ на контуре области выбираются так: $\psi=0$ на CD , $\psi=Q$ на AB , $\varphi=-kH$ на BC , $\varphi=-kh$ на ED .

Давая ζ частные значения, получим

$$I = B \int_a^b \Phi_1(t) dt, \quad Hi = B \int_a^1 \Phi_1(t) dt, \quad hi = \int_b^\infty \Phi_1(t) dt \quad (4.20)$$

$$h_0 i = -B \int_{-\infty}^0 \Phi_1(t) dt, \quad Q = kB \int_a^1 \Phi_2(t) dt \quad (4.21)$$

$$Q_h = kB \int_b^\infty \Phi_2(t) dt, \quad Q_{h_0} = kB \int_{-\infty}^0 \Phi_2(t) dt$$

Здесь Q , Q_h и Q_{h_0} обозначают соответственно расходы через отрезки BC , DE и EA .

Уравнения (4.20) выражают зависимость между неизвестными параметрами B , a , b и данными величинами I , H , h . Уравнения (4.21) служат для определения величин h_0 , Q , Q_h , Q_{h_0} .

2. Преобразование формул (4.20) и (4.21) к виду, удобному для вычислений. Прежде всего заметим, что формулы (4.17) годятся лишь для отрезка действительной оси $(0, 1)$.

Полагая

$$W_1 = K(\zeta) - iK(1-\zeta), \quad W_2 = K(1-\zeta) \quad \text{для } 0 < \zeta < 1$$

будем иметь

$$W_1 = -\frac{iK\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}{\sqrt{1-\zeta}}, \quad W_2 = -\frac{iK\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)}{\sqrt{1-\zeta}} \quad \text{для } -\infty < \zeta < 0$$

$$W_1 = \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta}}, \quad W_2 = iK\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{для } 1 < \zeta < \infty$$

(см., например, [66]).

Пользуясь этими формулами, напомним выражения функций Z и F на различных отрезках действительной оси плоскости ζ :

для $0 < \zeta < 1$

$$Z = -2B \frac{K(\zeta) - iK(1-\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

$$F = -2kB \frac{K(1-\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

для $1 < \zeta < a$

$$Z = -2B \frac{iK\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta \sqrt{(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

$$F = -2kB \frac{iK\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

для $a < \zeta < b$

$$Z = 2B \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(b-\zeta)}}$$

$$F = 2kB \frac{K\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

для $b < \zeta < \infty$

$$Z = 2Bi \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}$$

$$F = 2kBi \frac{K\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}$$

для $-\infty < \zeta < 0$

$$Z = 2B \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

$$F = 2kB \frac{K\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

Теперь формулы (4.20) и (4.21) можно представить в виде

$$l = 2B \int_a^b \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta}{\zeta \sqrt{(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \quad (4.22)$$

$$H = 2B \int_a^1 \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta}{\zeta \sqrt{(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}} \quad (4.23)$$

$$h = 2B \int_b^\infty \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta}{\zeta \sqrt{(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \quad (4.24)$$

$$h_0 = 2B \int_{-\infty}^0 \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) d\zeta}{(1-\zeta) \sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}} \quad (4.25)$$

$$Q = 2kB \int_1^a \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right) d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}} \quad (4.26)$$

$$Q_h = 2kB \int_b^\infty \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right) d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}} \quad (4.27)$$

$$Q_{h_0} = 2kB \int_{-\infty}^0 \frac{K\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) d\zeta}{(1-\zeta) \sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}} \quad (4.28)$$

где Q, Q_h, Q_{h_0} обозначают расходы соответственно через отрезки H, h, h_0 .

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{1}{b}, \quad \beta = \frac{1}{a}, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \quad (4.29)$$

и сделаем в интегралах (4.22)–(4.24) подстановку

$$\zeta = \frac{1}{\tau}$$

В каждом из интегралов (4.22)–(4.24) применим подстановку, делающую подынтегральную функцию конечной на пределах интегрирования. А именно, положим:

(в 4.22)

$$\tau = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \phi$$

(в 4.23)

$$\tau = \beta + (1 - \beta) \sin^2 \phi$$

в (4.24)

$$\tau = \alpha \sin^2 \psi$$

Вводя еще одно обозначение:

$$\frac{4B}{\sqrt{ab}} = C$$

получим

$$l = C \int_0^{\pi/2} \frac{K[\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \psi] d\psi}{\sqrt{1 - \alpha - (\beta - \alpha) \sin^2 \psi}} \quad (4.30)$$

$$H = C \int_0^{\pi/2} \frac{K[\beta + (1 - \beta) \sin^2 \psi] d\psi}{\sqrt{\beta - \alpha - (1 - \beta) \sin^2 \psi}} \quad (4.31)$$

$$h = C\sqrt{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha \sin^2 \psi) \sin \psi d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \psi)(\beta - \alpha \sin^2 \psi)}} \quad (4.32)$$

Полагая в интегралах (4.25) и (4.28)

$$\frac{1}{1 - \xi} = \tau = \sin^2 \psi$$

а в интегралах (4.26) и (4.27)

$$\frac{\xi - 1}{\xi} = \tau = (1 - \beta) \sin^2 \psi$$

будем иметь

$$h_* = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 \psi) \sin \psi \cos \psi d\psi}{\sqrt{[1 - (1 - \alpha) \sin^2 \psi][1 - (1 - \beta) \sin^2 \psi]}} \quad (4.33)$$

$$Q_{h_0} = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 \psi) \sin \psi \cos \psi d\psi}{\sqrt{[1 - (1 - \alpha) \sin^2 \psi][1 - (1 - \beta) \sin^2 \psi]}} \quad (4.34)$$

$$Q = \frac{C}{\sqrt{1 - \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{K[(1 - \beta) \sin^2 \psi] d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \sin^2 \psi}} \quad (4.35)$$

$$Q_h = C\sqrt{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{K(1 - \alpha \sin^2 \psi) \sin \psi d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \psi)(\beta - \alpha \sin^2 \psi)}} \quad (4.36)$$

Наконец, найдем формулы, дающие уравнение депрессионной кривой в параметрическом виде. Вдоль линии свободной поверхности ξ меняется в промежутке от 0 до 1. Поэтому нужно взять первую из формул (4.17). Получим

$$z = x + iy = -C\sqrt{ab} \int_0^{\xi} \frac{K(\xi) - iK(1 - \xi)}{\sqrt{(1 - \xi)(a - \xi)(b - \xi)}} d\xi + l + (h + h_*) i$$

Отделяя действительную часть от мнимой и делая подстановку

$$\xi = \sin^2 \psi$$

Получим уравнение линии свободной поверхности в функции от параметра ψ

$$\begin{aligned} x &= l - C \int_0^{\psi} \frac{K(\sin^2 \psi) \sin \psi d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \psi)(1 - \beta \sin^2 \psi)}} \\ y &= C \int_0^{\psi} \frac{K(\cos^2 \psi) \sin \psi d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \psi)(1 - \beta \sin^2 \psi)}} + h + h_* \end{aligned} \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.37)$$

Положим $C=1$. Тогда основные формулы для определения элементов земной перемычки будут иметь следующий вид:

$$x = l - \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha \sin^2 \varphi)(1 - \beta \sin^2 \varphi)} \quad (4.38)$$

$$y = \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha \sin^2 \varphi)(1 - \beta \sin^2 \varphi)} \quad (4.39)$$

$$l = \int_0^{\pi/2} \frac{K[\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi] d\varphi}{V1 - \alpha - (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi} = \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha \sin^2 \varphi)(1 - \beta \sin^2 \varphi)} \quad (4.40)$$

$$H = \int_0^{\pi/2} \frac{K[\beta + (1 - \beta) \sin^2 \varphi] d\varphi}{V\beta - \alpha + (1 - \beta) \sin^2 \varphi} = \frac{1}{V\alpha_1} \int_0^{\pi/2} \frac{K(1 - \beta_1 \sin^2 \varphi) d\varphi}{V1 - \gamma_1 \sin^2 \varphi} \quad (4.41)$$

$$h = V\gamma \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha \sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha \sin^2 \varphi)(1 - \gamma \sin^2 \varphi)} \quad (4.42)$$

$$h_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha_1 \sin^2 \varphi)(1 - \beta_1 \sin^2 \varphi)} \quad (4.43)$$

$$Q' = \frac{Q}{k} = \frac{1}{V\alpha_1} \int_0^{\pi/2} \frac{K(\beta_1 \sin^2 \varphi) d\varphi}{V1 - \gamma_1 \sin^2 \varphi} \quad (4.44)$$

$$Q_h' = \frac{Q_h}{k} = V\gamma \int_0^{\pi/2} \frac{K(1 - \alpha \sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha \sin^2 \varphi)(1 - \gamma \sin^2 \varphi)} \quad (4.45)$$

$$Q_{h_0}' = \frac{Q_{h_0}}{k} = \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha_1 \sin^2 \varphi)(1 - \beta_1 \sin^2 \varphi)} \quad (4.46)$$

$$\left(\alpha_1 = 1 - \alpha, \beta_1 = 1 - \beta, \gamma = \frac{\alpha}{\beta}, \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)$$

Для всех приведенных величин можно получить степенные ряды по степеням параметров α, β или α_1, β_1 и т. д.

В частности, при разложении в ряд l и $y \left(\frac{\pi}{2} \right)$ встречаются интегралы

$$I_n = \int_0^{\pi/2} K(\sin^2 \varphi) \sin^n \varphi d\varphi$$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} K(\cos^2 \varphi) \sin^n \varphi d\varphi$$

некоторые значения которых мы приводим:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} K(1 - \zeta^2) d\zeta = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I_3 = \frac{3\pi^2}{16},$$

$$I_5 = \frac{41\pi^2}{256},$$

$$I_7 = \frac{147\pi^2}{1024}$$

$$J_1 = \int_0^1 K(t^2) dt = 2G = 1.8319$$

$$J_3 = 1.124,$$

$$J_5 = 0.8764,$$

$$J_7 = 0.7478$$

где G — постоянная Каталана.

Укажем теперь, каким образом производились вычисления.

Вычисление l . При малых значениях α и β имеем разложение

$$l(\alpha, \beta) = \frac{\pi^2}{4} \{1 + 0.375(\alpha + \beta) + 0.24023(\alpha^2 + \beta^2) + 0.16016\alpha\beta + \\ + 0.1794(\alpha^3 + \beta^3) + 0.1075\alpha\beta(\alpha + \beta) + 0.1443(\alpha^4 - \beta^4) + \dots\}$$

Однако малые значения β соответствуют узким перемычкам, поэтому наиболее важные случаи получаются при $\beta \geq 0.9$. Для таких значений β приведенное разложение l не годится. Вычисления производились путем численного вычисления интеграла

$$l = \frac{1}{V\alpha} \int_0^K K(1 - \alpha_1 \operatorname{dn}^2 u) du$$

где $\operatorname{dn} u$ — эллиптическая функция, для которой квадрат модуля k^2 вычисляется по формуле

$$k^2 = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}$$

и где K — период эллиптической функции с модулем k .

Подинтегральная функция в интеграле для l очень близка к линейной функции от u , что дало возможность упростить вычисления.

При $\alpha = \beta$ для l получаем простое выражение

$$l = \frac{\pi K(\alpha)}{2V1 - \alpha}$$

При $\alpha = \beta = 0$

$$l = \frac{\pi^2}{4}$$

Вычисление H и Q' . Для этих величин разложения по степеням β_1 и γ_1

$$Q' = \frac{\pi^2}{4V\alpha_1} \left(1 + \frac{1}{8}\beta_1 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{27}{512}\beta_1^2 + \frac{3}{64}\beta_1\gamma_1 + \frac{9}{64}\gamma_1^2 + \dots\right)$$

$$H = \frac{\pi}{2V\alpha_1} \left\{ 2.0794 + 0.07243\beta_1 + 0.39486\gamma_1 + 0.01737\beta_1^2 + 0.02326\beta_1\gamma_1 - \right. \\ \left. - 0.21039\gamma_1^2 - \frac{\ln \beta_1}{2} \left(1 + \frac{1}{8}\beta_1 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{27}{512}\beta_1^2 + \frac{3}{64}\beta_1\gamma_1 + \frac{9}{64}\gamma_1^2 + \dots\right) \right\}$$

хорошо сходятся при $\beta \geq 0.9$ и всех $\alpha < \beta$.

В частном случае при $\alpha = 0$, $\gamma_1 = \beta_1$

$$Q' = \int_0^{\pi/2} \frac{K(\beta_1 \sin^2 \varphi) d\varphi}{V1 - \beta_1 \sin^2 \varphi} = l(0, \beta_1)$$

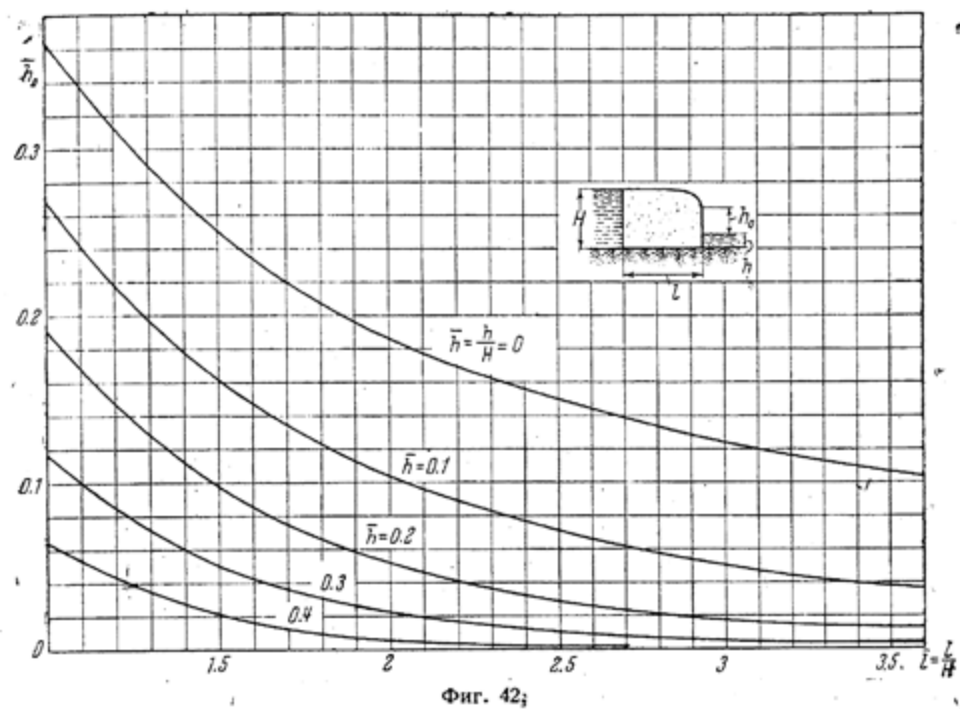
при $\beta = 1$

$$Q' = \frac{\pi^2}{4V\alpha_1}$$

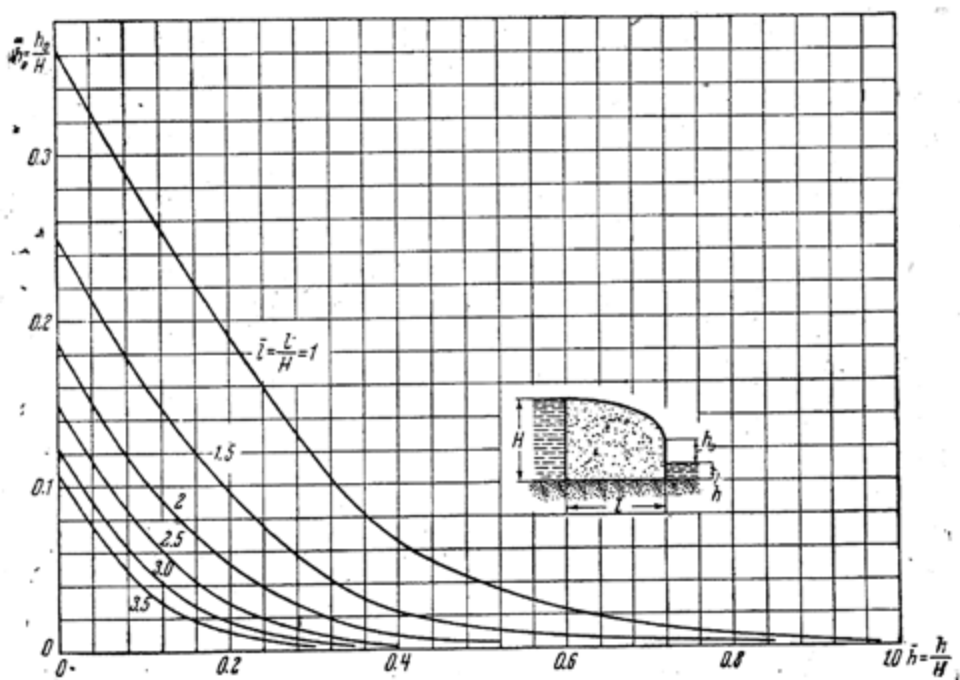
Вычисление h и Q_h' . Для малых значений α и одновременно для значений β , близких к единице, имеем разложения

$$h(\alpha, \gamma) = \frac{\pi}{2} V\gamma \left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\gamma + 0.3417\alpha^2 + 0.2\alpha\gamma + 0.2\gamma^2 + 0.2625\alpha^3 + \right. \\ \left. + 0.1464\alpha^2\gamma + 0.1286\alpha\gamma^2 + 0.1429\gamma^3 + \dots\right)$$

$$Q_h' = V\gamma \left(E_0 + \frac{1}{2}\gamma E_1 + \frac{3}{8}\gamma^2 E_2 + \dots\right)$$



Фиг. 42;



Фиг. 43:

где

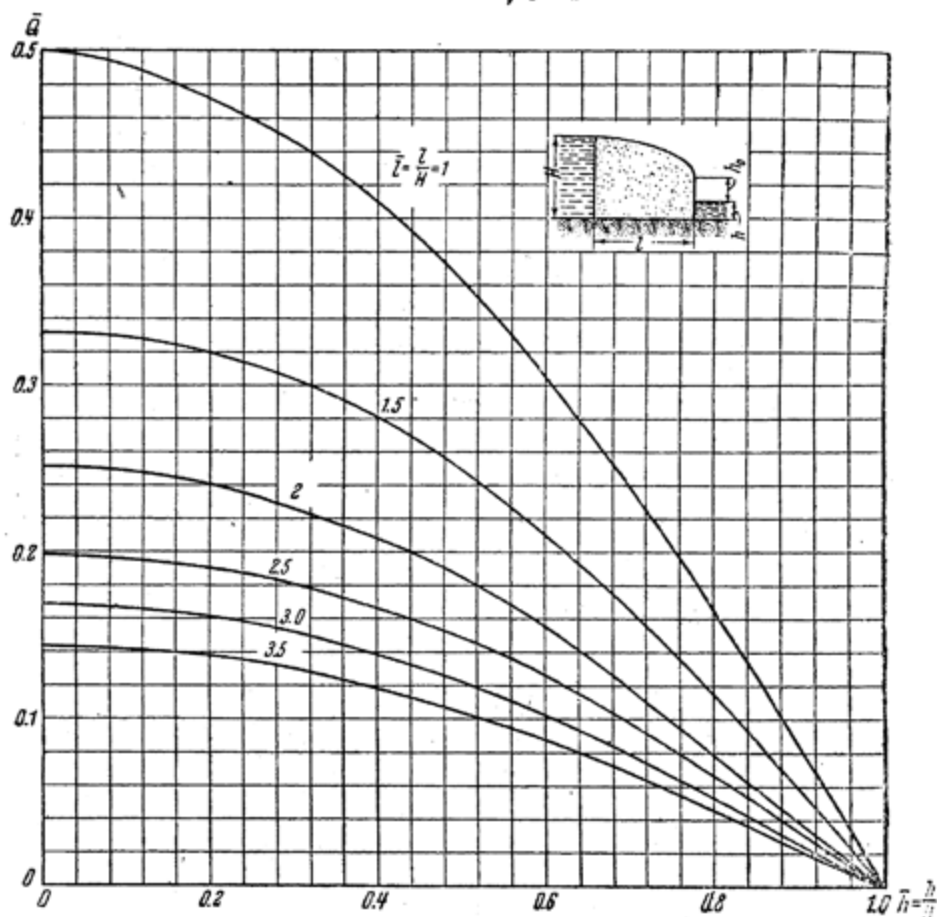
$$E_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{41}{120}\alpha^2 + \dots\right) \ln \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + 1 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{817}{7200}\alpha^2 + \dots$$

$$E_1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\alpha + \frac{41}{140}\alpha^2 + \dots\right) \ln \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{5}{9} + \frac{9}{50}\alpha + \frac{5309}{58800}\alpha^2 + \dots$$

$$E_2 = \left(\frac{8}{15} + \frac{12}{35}\alpha + \frac{82}{315}\alpha^2 + \dots\right) \ln \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{94}{225} + \frac{179}{1225}\alpha + \frac{30419}{396900}\alpha^2 + \dots$$

с помощью которых вычисления производились для $\alpha \leq 0.5$, $\beta \geq 0.9$. Для оценки погрешности можно пользоваться неравенством

$$h(\alpha, \gamma) < h < \frac{K(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$$



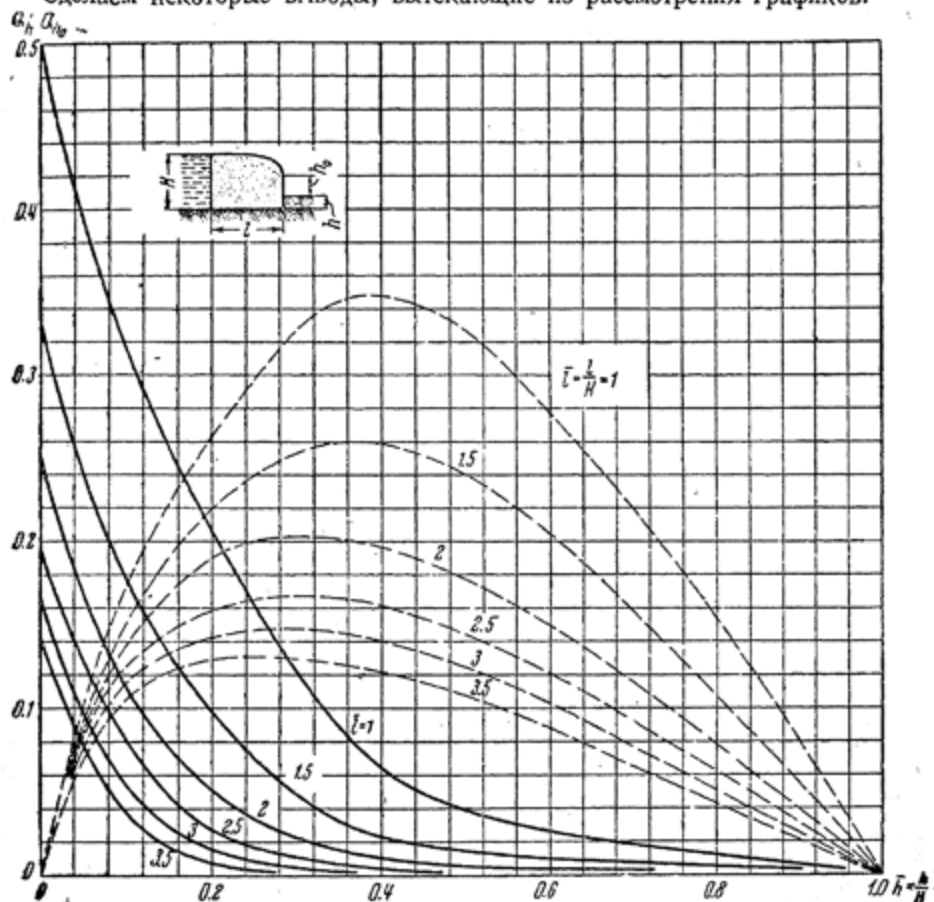
Фиг. 44.

Через $h(\alpha, \gamma)$ обозначено значение h , получаемое с помощью степенного ряда при конечном числе членов (мы брали члены до восьмой степени включительно). Так, для $\alpha = 0.5$ погрешность в значении h меньше 2%, для значений $\alpha < 0.5$ эта погрешность уменьшается.

Б. Э. Казарновской, производившей вычисления к этой задаче, были найдены значения l, H, h, h_0, Q, Q_0 для $\beta = 0.9, 0.99, 0.999, \dots, 0.99999999$ и $\alpha = 0, 0.1, \dots, 0.9, 0.99, \dots, 0.99999999$, а также соответствующие значения

Безразмерных величин $\bar{l} = \frac{l}{H}$, $\bar{h}$, $\bar{h}_0$, $\bar{Q}$, $\bar{Q}_h$, $\bar{Q}_{h_0}$. Производя графическое интегрирование, мы получили графики, представленные на фиг. 42—47.

Сделаем некоторые выводы, вытекающие из рассмотрения графиков.



Фиг. 45.

В случае отсутствия воды в нижнем бьефе ($h=0$) при бесконечной длине основания перемычки ($l=\infty$) имеет место простая зависимость между расходом Q' и длиной промежутка высачивания

$$Q' = 0.346h_0.$$

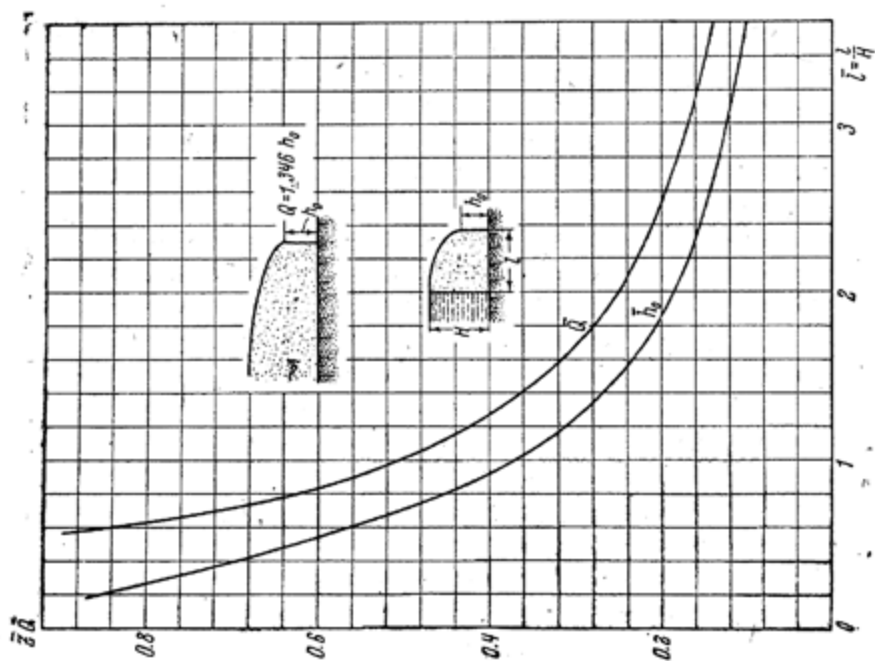
Оказывается, что это соотношение имеет место и для перемычки с конечной шириной основания, но достаточно большой. А именно, если $\bar{l} = l/H \geq 1$, то можно принять, что

$$\bar{Q} = 1.35\bar{h}_0.$$

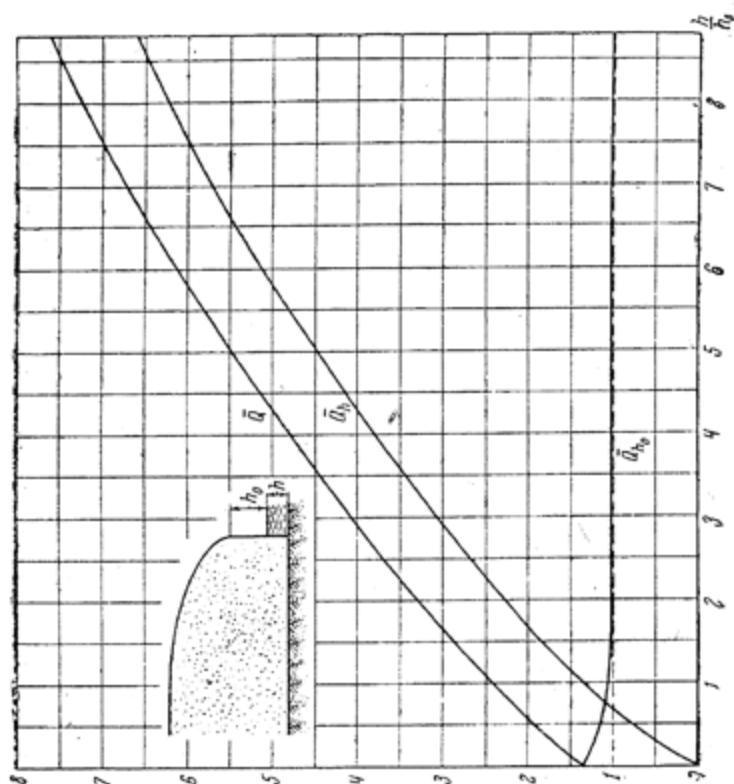
При $l/H < 1$ это равенство становится все менее точным по мере приближения l/H к нулю.

При $l=\infty$, но h отличном от нуля, отношение $\bar{Q}$ к h_0 изменяется в пределах от 1.346 до 1, когда $\bar{h}$ изменяется от 0 до ∞ .

Уравнение линии свободной поверхности (кривой депрессии). Рассмотрим [прежде всего тот крайний случай, когда в нижнем бьефе нет



Фиг. 46.



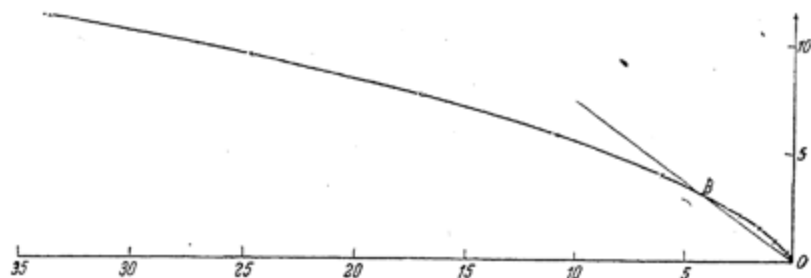
Фиг. 47.

воды и когда плотина имеет бесконечную ширину, т. е. когда $l = \infty$. Этому случаю соответствуют значения параметров α и β :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

Если опустить слагаемое l и изменить знак в выражении (4.38) для x , то формулы (4.38) и (4.39) для координат точек свободной поверхности дают

$$x = + \int_0^{\varphi} \frac{K (\sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi}, \quad y = \int_0^{\varphi} \frac{K (\cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi} \quad (4.47)$$



Фиг. 48.

Полагая

$$\sin^2 \varphi = m$$

эти уравнения представим несколько иначе:

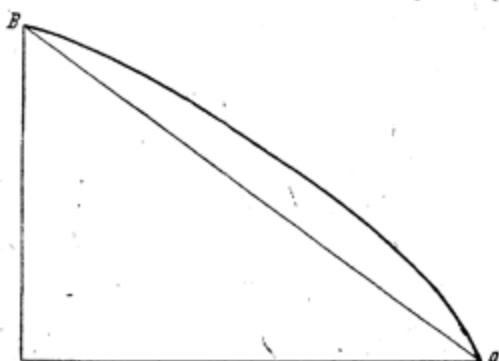
$$x = + \frac{1}{2} \int_0^m \frac{K(m) dm}{1-m}, \quad y = \frac{1}{2} \int_0^m \frac{K(1-m) dm}{1-m} \quad (4.48)$$

$$(0 < m < 1)$$

Разлагая подинтегральные функции в ряды по степеням при значениях m , близких к нулю, и по степеням $m_1 = 1 - m$ при значениях m , близких к единице, нетрудно найти координаты точек кривой депрессии. Приводим результаты некоторых вычислений:

x	0.0356	0.0733	0.250	0.490	0.800	1.085	
y	0.0838	0.160	0.445	0.771	0.973	1.224	
x	1.520	2.35	5.95	10.87	17.10	24.66	33.55
y	1.566	2.13	3.96	5.77	7.58	9.38	11.19

С помощью этих значений построен график фиг. 48.



Фиг. 49.

Что касается других случаев плотин — конечной ширины, при наличии или отсутствии воды в нижнем бьефе, то для них оказалось возможным указать правило приближенного определения формы депрессионной кривой.

Обозначим через a разность $H - h$:

$$a = H - h$$

через l — длину основания данной плотины.

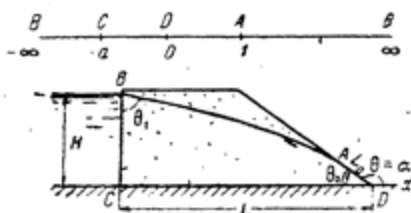
Из начала координат (фиг. 48) проведем прямую OB , параллельную хорде AB линии свободной поверхности. Линия OB (фиг. 48) будет давать приближенно форму депрессионной кривой в измененном масштабе.

На фиг. 49 изображено построение для перемычки, рассмотренной Гамелем, причем вычисления были проведены заново. Депрессионная кривая, построенная точно, и такая же кривая, построенная приближенно, т. е. путем перенесения куска кривой АВ фиг. 48, дают совпадение точек всюду кроме части, примыкающей к верхнему бьефу. Здесь и следовало ожидать наибольшего расхождения, так как для плотины конечной ширины в точке сопряжения с верхним бьефом имеем горизонтальную касательную, для плотины же бесконечно широкой касательная всюду наклонна. Приближенная кривая будет этому всегда ниже точной (можно было бы ввести поправку, подняв наибольшую ординату, приближенной кривой на 2%). Чем шире перемычка, тем точнее будет приближенная форма поверхности.

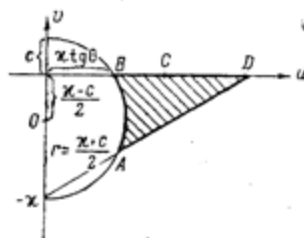
НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД С ИСПАРЕНИЕМ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИЛИ ИНФИЛЬТРАЦИЕЙ

В главе III было показано, что в случае испарения со свободной поверхности, если принять указанный в этой главе закон испарения, на годографе скорости получается область, ограниченная прямыми и дугами окружностей. Следовательно, к этому случаю можно применить теорию уравнений класса Фукса. В этой главе рассматриваются некоторые примеры фильтрации с испарением со свободной поверхности, для которых годограф скорости представляет круговой треугольник, и которые, следовательно, должны решаться в гипергеометрических функциях. Кроме того, здесь же исследуется один случай движения с инфильтрацией.

1. Плотина, поперечное сечение которой есть прямоугольная трапеция. Пусть имеем плотину на непроницаемом основании CD длины L , у которой



Фиг. 50.



Фиг. 51.

низовой откос наклонный и составляет угол $\theta = \pi\delta$ с горизонтом, а верховой откос вертикальный (фиг. 50). Угол θ считаем тупым.

В верхнем бьефе имеется вода глубины H , в нижнем бьефе нет воды, так что жидкость просачивается на дневную поверхность через откос. Со свободной поверхности происходит испарение таким образом, что на AB

$$\psi + cx = \text{const} \quad (5.1)$$

где c — коэффициент испарения (1.35). Если имеем приток влаги извне; то нужно считать $c < 0$.

Годограф скорости представлен на фиг. 51. Через x обозначен коэффициент фильтрации.

Отметим, что линия AB не есть линия тока; поэтому в точке B (фиг. 50) угол, составляемый линией свободной поверхности с линией BC , не будет прямым. А именно, если обозначить через β угол касательной к свободной поверхности с осью x , через γ угол вектора скорости (или линии тока) с осью x , то, как указал В. В. Ведерников[7], имеет место соотношение

$$\text{tg } \beta \text{ tg } (\gamma - \beta) = -\frac{c}{x} \quad (5.2)$$

С помощью этой формулы получаем, что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \sqrt{\frac{c}{x}}$$

Однако воспользуемся здесь способом определения показателей, изложенным в конце главы III.

Пусть на действительной оси плоскости ζ точки A, B, C и D отображаются соответственно в точки $\zeta=0, 1, -a, \infty$.

Прежде всего заметим, что при $\zeta=-a$ имеем устранимую особенность с показателем $-\frac{1}{2}$. Поэтому можно ввести новые функции Z_1 и F_1 с помощью равенств

$$F = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta+a}}, \quad Z = \frac{Z_1}{\sqrt{\zeta+a}} \quad (5.3)$$

Введем обозначения

$$\frac{\theta}{\pi} = \delta$$

$$\operatorname{tg} \pi \delta = \sqrt{\frac{c}{x}} \quad (5.4)$$

Тогда для функций Z_1 и F_1 около особых точек получим показатели

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}, & -\delta & \text{при } \zeta=0 \\ 1+a, & 1-a & \text{при } \zeta=\infty \\ 0, & \delta-\frac{1}{2} & \text{при } \zeta=1 \end{array}$$

Функции Z_1 и F_1 представляют линейные комбинации двух ветвей функции Римана

$$P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \zeta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1+a & 0 & \zeta \\ -\delta & 1-a & \delta-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

С помощью формулы (3.6), которая в случае трех особых точек имеет вид

$$P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \zeta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \zeta^a (1-\zeta)^b P \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \zeta \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma \end{pmatrix}$$

получаем

$$P \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1+a & 0 & \zeta \\ -\delta & 1-a & \delta-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \zeta^{-1} P \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}+a & 0 & \zeta \\ \frac{1}{2}-\delta & \frac{1}{2}-a & \delta-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Далее, если ввести обозначения

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta + \gamma \\ b &= \alpha + \beta' + \gamma \\ c &= 1 + \alpha - \alpha' \end{aligned} \quad (5.5)$$

то каждая из ветвей функции

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \zeta \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma \end{pmatrix}$$

будет решением гипергеометрического уравнения

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + [c - (a+b+1)\zeta]Y' - abY = 0 \quad (5.6)$$

В рассматриваемом случае

$$a = \frac{1}{2} + a, \quad b = \frac{1}{2} - a, \quad c = \frac{1}{2} + \delta$$

Возьмём около точки $\zeta=0$ линейно независимые решения полученного дифференциального уравнения в виде

$$\begin{aligned} U &= F(a, b, c, \zeta) = F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \delta, \zeta\right) \\ V &= \zeta^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \zeta) = \\ &= \zeta^{1-\delta} F\left(1 + \varepsilon - \delta, 1 - \varepsilon - \alpha, \frac{3}{2} - \delta, \zeta\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Гипергеометрические ряды, через которые мы выразили функции U и V , сходятся в круге $|\zeta| < 1$. Функции Z_1 и F_1 можно представить в виде линейных комбинаций U и V :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{AU + BV}{\sqrt{\zeta}} = \frac{(A' + iA'')U + (B' + iB'')V}{\sqrt{\zeta}} \\ F_1 &= \frac{CU + DV}{\sqrt{\zeta}} = \frac{(C' + iC'')U + (D' + iD'')V}{\sqrt{\zeta}} \end{aligned}$$

где A, B, C, D — комплексные, A', B' — действительные постоянные, для определения которых обратимся к условиям на контуре.

На отрезке BD , т. е. при $\zeta < 0$, имеем

$$\operatorname{Im}(F_1) = \operatorname{Im}(Z_1) = 0$$

но при $\zeta < 0$

$$\begin{aligned} \zeta^{1-\delta} &= |\zeta|^{1-\delta} \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \delta\right)\pi i\right\} = (\sin \pi \delta + i \cos \pi \delta) |\zeta|^{1-\delta} = (\sin \theta + i \cos \theta) |\zeta|^{1-\delta} \\ \sqrt{\zeta} &= i \sqrt{|\zeta|}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(Z_1) &= \operatorname{Im} \frac{(A' + iA'')U_1 + (B' + iB'')(\sin \theta + i \cos \theta)U_2}{i \sqrt{|\zeta|}} = \\ &= \frac{A'U_1 + (B' \sin \theta - B'' \cos \theta)U_2}{\sqrt{|\zeta|}} \end{aligned}$$

где

$$U_s = |\zeta|^{1-\delta} F\left(1 + \varepsilon - \delta, 1 - \varepsilon - \delta, \frac{3}{2} - \delta, \zeta\right)$$

Для выполнения равенства $\operatorname{Im}(Z_1) = 0$ для всех $\zeta < 0$ необходимо, чтобы

$$A' = 0, \quad B' \sin \theta - B'' \cos \theta = 0$$

или

$$A' = 0, \quad B'' = B' \operatorname{tg} \theta$$

Точно так же условие $\operatorname{Im}(Z_1) = 0$ при $\zeta < 0$ приводит к соотношениям

$$C' = 0, \quad D'' = D' \operatorname{tg} \theta$$

Таким образом

$$Z_1 = \frac{iA''U_1 + B'(1 + i \operatorname{tg} \theta)U_2}{\sqrt{\zeta}}, \quad F_1 = \frac{iC''U_1 + D'(1 + i \operatorname{tg} \theta)U_2}{\sqrt{\zeta}}$$

Перейдем к промежутку DA . Так как

$$Z_1 e^{-i\theta} = (\cos \theta - i \sin \theta) \frac{iA''U_1 + B'(1 + i \operatorname{tg} \theta)U_2}{\sqrt{\zeta}}$$

то для выполнения условия $\operatorname{Im}(Z_1 e^{-i\theta}) = 0$ при $0 < \zeta < 1$ необходимо, чтобы $A'' = 0$. Тогда

$$Z_1 = B'(1 + i \operatorname{tg} \theta) \frac{U_2}{\sqrt{\zeta}}$$

Составим далее комбинацию

$$iF_1 + \alpha Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \{-C''U_1 + iD'(1 + i \operatorname{tg} \theta)U_2 + \alpha B'(1 + i \operatorname{tg} \theta)U_2\}$$

Чтобы $\text{Im}(iF_1 + xZ_1) = 0$ при $0 < \zeta < 1$, необходимо

$$D' + xB' \operatorname{tg} \theta = 0,$$

откуда

$$D' = -xB' \operatorname{tg} \theta, \quad F_1 = \frac{iC^*U_1 - xB' \operatorname{tg} \theta (1 + i \operatorname{tg} \theta) U_2}{\sqrt{\zeta}}$$

Чтобы рассмотреть условие $\text{Im}(F_1 + icZ_1) = 0$, на отрезке AB , нужно взять выражения функций U и V , годные для $\zeta > 1$, а именно, воспользоваться соотношениями

$$U = F(a, b, c, \zeta) = pF(a, b, a+b+1-c, 1-\zeta) + q(1-\zeta)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-\zeta)$$

$$V = \zeta^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 1-c, \zeta) = rF(a, b, a+b+1-c, 1-\zeta) + s(1-\zeta)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-\zeta)$$

где

$$p = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad q = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)},$$

$$r = \frac{\Gamma(2-c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a) \Gamma(1-b)}, \quad s = \frac{\Gamma(2-c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c) \Gamma(b+1-c)}$$

При $\zeta > 1$ имеем

$$(1-\zeta)^{c-a-b} = (1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = |1-\zeta|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} (\sin \theta - i \cos \theta) (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

Поэтому

$$F_1 + icZ_1 = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \{ [iC^*p + B'r(1+i \operatorname{tg} \theta)(ic - x \operatorname{tg} \theta)] V_1 + [iC^*q(\sin \theta - i \cos \theta) + B's(1+i \operatorname{tg} \theta)(ic - x \operatorname{tg} \theta)(\sin \theta - i \cos \theta)] V_2 \}$$

Здесь

$$V_1 = F(a, b, a+b+1-c, 1-\zeta)$$

$$V_2 = |1-\zeta|^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-\zeta)$$

Для того чтобы $\text{Im}(F_1 + icZ_1) = 0$ при всех $\zeta > 1$, необходимо

$$C^*p + B'r(c - x \operatorname{tg}^2 \theta) = 0$$

$$C^*q \sin \theta + B's(2c \sin \theta + x \sin \theta - x \sin \theta \operatorname{tg}^2 \theta) = 0$$

Первое из полученных соотношений дает

$$C^* = B' (x \operatorname{tg}^2 \theta - c) \frac{r}{p}$$

второе является следствием первого. Таким образом для Z_1 и F_1 получаем

$$Z_1 = B' (1 + i \operatorname{tg} \theta) \frac{U_2}{\sqrt{\zeta}}$$

$$F_1 = \frac{B'}{\sqrt{\zeta}} \left\{ \frac{ir}{p} (x \operatorname{tg}^2 \theta - c) U_1 - x \operatorname{tg} \theta (1 + i \operatorname{tg} \theta) U_2 \right\}$$

Вспомогая, что

$$\frac{dz}{d\zeta} = Z = \frac{Z_1}{\sqrt{\zeta+a}}, \quad \frac{df}{d\zeta} = F = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta+a}}$$

получим (отбрасывая значок у B')

$$z = B(1 + i \operatorname{tg} \theta) \int \frac{V d\zeta}{\sqrt{\zeta+a}} \quad (5.8)$$

$$f = \frac{Bri}{p} (x \operatorname{tg}^2 \theta - c) \int \frac{U d\zeta}{\sqrt{\zeta+a}} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{r}{p} &= \frac{\Gamma(2-c) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}{\Gamma(1-a) \Gamma(1-b) \Gamma(c)} = \\ &= \frac{\cos \pi s}{\pi \Gamma(\frac{1}{2} + s)} \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right) \Gamma(s-a) \Gamma(s+b) \end{aligned}$$

Теперь остаются не определенными величины B и a . Они связаны с заданными длинами H и L соотношениями

$$\begin{aligned} B(1 + i \operatorname{tg} \theta) \int_{-\infty}^a \frac{V d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} &= -Hi \\ B(1 + i \operatorname{tg} \theta) \int_{-a}^0 \frac{V d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} &= L \end{aligned}$$

Отрезок L_0 найдем по формуле

$$L_0 = \frac{B}{\cos \theta} \int_0^1 \frac{V d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} \quad (5.10)$$

Наконец, расход Q через отрезок BC (или AD) вычислим по формуле

$$Q = \frac{Br}{p} (x \operatorname{tg}^2 \theta - c) \int_0^1 \frac{U d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} \quad (5.11)$$

Полученное решение не годится при $\theta = \frac{\pi}{2}$, так как здесь около $\zeta = 1$ оба показателя обращаются в нуль

$$\gamma = \gamma' = 0$$

и, следовательно, одно из фундаментальных решений должно содержать $\lg(\zeta - 1)$. На этом случае останавливаться не будем, так как для него решение может быть получено как частный случай решения задачи о фильтрации в земляной перемычке с испарением, рассмотренной ниже.

Если между коэффициентами c, x и углом $\theta_0 = \pi - \theta$ существует зависимость

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{c}{x}}$$

то в выражении для F_1 пропадает первый член и таким образом

$$Z_1 = B(1 - c \operatorname{tg} \theta_0) \frac{V}{\sqrt{\zeta}}, \quad F = xB \operatorname{tg} \theta_0 (1 - i \operatorname{tg} \theta_0) \frac{V}{\sqrt{\zeta}}$$

откуда

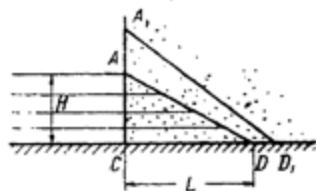
$$\frac{df}{dz} = \frac{F_1}{Z_1} = x \operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{xc}$$

Следовательно, во всей области движения

$$u = \sqrt{xc}, \quad v = 0$$

Движение происходит с постоянной горизонтальной скоростью. Годограф скорости в этом случае превращается в точку B . Свободная поверхность превращается в прямую AD , совпадающую с линией низового откоса (фиг. 52).

Если теперь передвинуть низовой откос, переместив линию AD в любое положение $A'D'$, но так, чтобы она не пересекала треугольника ADC , то картина будет оставаться прежней: AD будет линией свободной поверхности, с которой будет происходить полное испарение.



Фиг. 52.

Этот результат показывает, что нужно различать два случая. Если

$$\frac{H}{L} \leq \sqrt{\frac{c}{x}}$$

то имеет место только что описанный случай полного испарения. Если

$$\frac{H}{L} > \sqrt{\frac{c}{x}} = \operatorname{tg} \pi z$$

то низовой откос пересекает треугольник ACD , существует промежуток высачивания, и, следовательно, будет применимо найденное выше решение.

Предположим, что длина L основания плотины бесконечно велика. Тогда точка C годографа скорости (фиг. 51) совпадет с точкой B , и величина a обратится в бесконечность. Вместо формул (5.8) и (5.9) будем иметь

$$z = A(1 + i \operatorname{tg} \theta) \int \frac{V d\zeta}{V\zeta} \quad (5.12)$$

$$f = \frac{Ar}{p} (x \operatorname{tg}^2 \theta - c) \int \frac{U d\zeta}{V\zeta} \quad (5.13)$$

где функции U и V определяются равенствами (5.7). Далее, упростим задачу еще более, полагая, что испарение отсутствует ($e=0$). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta, \zeta \right) \\ V &= \zeta^{-\frac{1}{2}} F \left(1 - \delta, 1 - \delta, \frac{3}{2} - \delta, \zeta \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь H и L будут равны бесконечности. Что касается величин L_0 и Q , то можем найти не каждую из них в отдельности, но их отношение. По формулам (5.10) и (5.11) имеем

$$L_0 = \frac{A}{\cos \theta} \int_0^1 \zeta^{-\frac{1}{2}} F \left(1 - \delta, 1 - \delta, \frac{3}{2} - \delta, \zeta \right) d\zeta$$

$$Q = \frac{Ar}{p} x \operatorname{tg}^2 \theta \int_0^1 \zeta^{-\frac{1}{2}} F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta, \zeta \right) d\zeta$$

Отсюда получаем

$$\frac{Q}{L_0} = \frac{r}{p} x \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta \frac{\int_0^1 \zeta^{-\frac{1}{2}} F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta, \zeta \right) d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{-\frac{1}{2}} F \left(1 - \delta, 1 - \delta, \frac{3}{2} - \delta, \zeta \right) d\zeta} \quad (5.15)$$

С. В. Фальковичем [22] получена более удобная формула для Q/L_0 . Он при решении задачи о высачивании грунтовой воды на низовой откос плотины пользовался представлением гипергеометрических функций в виде интеграла. В результате им найдено выражение

$$\frac{L_0}{Q} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{1-2\pi x} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx \quad (5.16)$$

где $Q' = \frac{Q}{x}$, причем $\pi x = \theta$ (см. фиг. 50).

На фиг. 53 приведен график, данный С. В. Фальковичем в его диссертации.

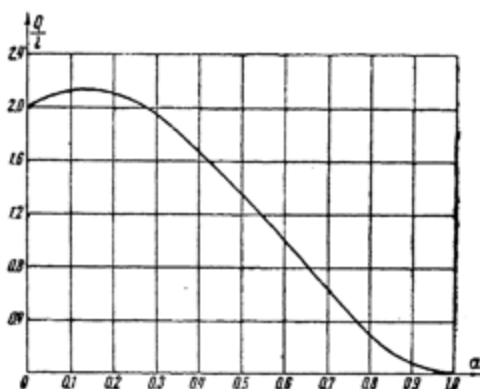
2. **Перемычка на дренированном основании.** Отметим частный случай предыдущей задачи, — при $\theta = 0$ получается земляная перемычка на дренированном основании, представленная на схеме фиг. 8 (стр. 18); однако при этом учитывается испарение.

В рассматриваемом случае величину δ , определенную уравнением (5.4), мы должны считать равной нулю, т. е. $\delta = 0$, поэтому

$$U = F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right)$$

$$V = \zeta^{-\frac{1}{2}} F\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right)$$

Гауссом были найдены выражения



Фиг. 53.

$$F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right) = \cos 2\varepsilon x \quad (5.17)$$

$$F\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right) = \frac{\sin 2\varepsilon x}{2\varepsilon \sin x \cos x}$$

Отсюда легко получить равенства

$$F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right) = \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{2\sqrt{1-\zeta}} \quad (5.18)$$

$$F\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right) = \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{4\varepsilon \sqrt{\zeta(1-\zeta)}}$$

с помощью которых для рассматриваемого случая найдем

$$z = \frac{B}{4\pi i} \int_{-a}^{\zeta} \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta}(\zeta + a)(1-\zeta)} d\zeta \quad (5.19)$$

$$f = \frac{i\sqrt{\kappa c}}{2\varepsilon} B \int_{-a}^{\zeta} \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta}(\zeta + a)(1-\zeta)} d\zeta$$

Беря в формуле для L пределы $(-a, 0)$ и полагая

$$\zeta = -a \sin^2 \varphi$$

в формуле для L_0 пределы $(0, 1)$ и полагая

$$\zeta = \sin^2 \varphi$$

в формулах для H и Q пределы $(-\infty, -a)$ и полагая

$$\zeta = -a \sec^2 \varphi$$

получим

$$= \frac{B}{2\varepsilon} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1+a\sin^2 \varphi} + \sqrt{a}\sin \varphi)^{2\varepsilon} - (\sqrt{1+a\sin^2 \varphi} - \sqrt{a}\sin \varphi)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1+a\sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$H = \frac{B}{2\varepsilon} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1+a\sec^2 \varphi} + \sqrt{a}\sec \varphi)^{2\varepsilon} - (\sqrt{1+a\sec^2 \varphi} - \sqrt{a}\sec \varphi)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1+a\sec^2 \varphi}} \sec \varphi d\varphi \quad (5.20)$$

$$Q = \frac{\kappa c}{2} \cos \pi \varepsilon B \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\varepsilon \varphi d\varphi}{\sqrt{a + \sin^2 \varphi}}$$

$$L_0 = \frac{B}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi d\varphi}{\sqrt{a + \sin^2 \varphi}}$$

Полагая

$$a = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad k = \sin \alpha, \quad k' = \cos \alpha, \quad \sin \varphi = \sin u$$

представим последние формулы в виде

$$L = B \int_0^K [(dn u + k cn u)^{2\pi} - (dn u - k cn u)^{2\pi}] k dn u du$$

$$H = B \int_0^{K'} [(dn u + k)^{2\pi} - (dn u - k)^{2\pi}] \frac{du}{(\sin u)^{2\pi}}$$

$$Q = \frac{\pi B}{2} \cos \pi \varepsilon \int_0^K \operatorname{cn}(2\varepsilon \operatorname{am} u) du$$

$$L_0 = 2Bk'^{2\pi} \int_0^K \operatorname{sn}(2\varepsilon \operatorname{am} u) du$$

Эти формулы позволяют по заданным L и H найти B и k (или наоборот) а затем определить Q и L_0 .

В частном случае, когда перемычка имеет основание бесконечной ширины, т. е. когда имеет место приток грунтовых вод к горизонтальной дрене из бесконечности, в формулах (5.19) следует положить $a = \infty$, т. е.

$$z = \frac{A}{4\pi i} \int \frac{(\sqrt{1-\zeta})^{2\pi} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\pi}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} d\zeta$$

$$f = \frac{i\sqrt{\kappa c}}{2\pi} A \int \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\pi} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\pi}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} d\zeta$$

где

$$A = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B}{\sqrt{a}} \quad \text{при } a = \infty$$

Полагая здесь $\zeta = \sin^2 t$, получим

$$z = \frac{A}{2\pi i} \int_0^t \sin 2\pi t dt = \frac{A}{4\pi i} (1 - \cos 2\pi t) \quad (5.21)$$

$$f = \frac{i\sqrt{\kappa c}}{2\pi} A \int_0^t \cos 2\pi t dt = \frac{i\sqrt{\kappa c}}{2\pi^2} A \sin 2\pi t \quad (5.22)$$

Длина отрезков дренажа L_0 найдется по формуле

$$L_0 = \frac{A}{4\pi^2} (1 - \cos \pi \varepsilon)$$

Выражая расход Q через отрезок дренажа, имеем

$$Q = \frac{\sqrt{\kappa c} A}{2\pi^2} \sin \pi \varepsilon$$

Отсюда

$$\frac{Q}{L} = 2 \sqrt{\kappa c} \frac{\sin \pi \varepsilon}{1 - \cos \pi \varepsilon} = 2\pi \sqrt{\frac{c}{\kappa}} \frac{\sin \pi \varepsilon}{1 - \cos \pi \varepsilon}$$

и

$$Q' = L_0 (\sqrt{c+x} + \sqrt{x}) \quad (5.23)$$

В то же время для постоянной A можем написать такое выражение:

$$\frac{A}{4\pi^2} = \frac{L_0}{1 - \cos \pi \varepsilon} \quad (5.24)$$

Вдоль свободной поверхности ζ меняется в пределах от 1 до ∞ . Положив здесь

$$\zeta = \operatorname{ch}^2 u$$

найдем, что

$$t = \frac{\pi}{2} + ui$$

вдоль свободной поверхности, причем u пробегает действительные значения от 0 до ∞ .

Отделяя в уравнении (5.21) действительную часть от мнимой, найдем уравнение депрессионной кривой. Исключив затем параметр u , найдем уравнение линии свободной поверхности в виде

$$y^2 = \frac{c}{x} x^2 + 2L_0 \left(\frac{\sqrt{x+c} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) x \quad (5.25)$$

Это—уравнение гиперболы.

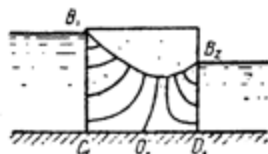
Задача о притоке грунтовой воды к горизонтальному фильтру из бесконечности при наличии испарения решалась также С. В. Фальковичем [32].

3. Земляная перемычка. Рассмотрим фильтрацию в земляной перемычке в случае, когда имеется испарение со свободной поверхности. Было показано, что при отсутствии испарения годограф скорости представляется линией $EBAE$ (фиг. 40). Если начинается испарение со свободной поверхности, то естественно считать, что годограф скорости будет меняться непрерывным образом, принимая вид линии EB_1AE (фиг. 54). При увеличении коэффициента испарения с годограф продолжает изменяться непрерывно, и, казалось бы, меняя к тому же положение точек C и D , можно получить всевозможные размеры для перемычки с всевозможными интенсивностями испарения. С другой стороны, Девисоном было получено другое решение, удовлетворяющее всем условиям задачи, но пригодное лишь при выполнении неравенства

$$\frac{H_1 - H_2}{L} \leq \sqrt{\frac{c}{x}} = \operatorname{tg} \pi \varepsilon$$

т. е. при интенсивном испарении.

Девисон получил это решение, предполагая, что годограф скорости представляет двугульник B_1KB_2 (фиг. 54). При этом промежуток высачивания отсутствует (фиг. 55). На дне плотины найдется точка O_1 , в которой скорость равна нулю и через которую проходит линия O_1N , разделяющая область движения на две части так, что в левую часть втягивается вода из верхнего бьефа, а в правую из нижнего. Если



Фиг. 55.

$$\frac{H_1 - H_2}{L} = \operatorname{tg} \pi \varepsilon = \sqrt{\frac{c}{x}}$$

то свободная поверхность будет прямолинейной (фиг. 56), скорости во всей области горизонтальны.

В этом случае на годографе скорости точки C и D должны слиться с точкой B_1 , и область движения должна скачкообразным путем превратиться в точку B_1 . Если задача правильно поставлена, то каждой заданной совокупности значений H_1 , H_2 , L , c и x должно соответствовать единственное реше-

ние. Значит годограф скорости первого типа (EB_1AE , фиг. 54) должен иметь место при

$$\frac{H_1 - H_2}{L} \geq \operatorname{tg} \pi \varepsilon$$

Дадим дополнительное к девионовскому решение для земляной перемычки с испарением.

Отображая область движения конформно на полуплоскость ζ с соответствием точек, указанным на фиг. 54, около особых точек получим показатели

ζ	0	1	a	b	∞
α	0	$-\frac{1}{2} - \varepsilon$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
α'	0	$-\frac{1}{2} + \varepsilon$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

Пользуясь символом Римана, будем иметь [см. (3.7)]

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b & \infty \\ 0 & -\frac{1}{2} - \varepsilon & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} + \varepsilon & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \zeta =$$

$$= (1 - \zeta)^{-\frac{1}{2} - \varepsilon} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2}} (\zeta - b)^{-\frac{1}{2}} P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \varepsilon \\ 0 & 2\varepsilon & \frac{1}{2} - \varepsilon \end{pmatrix} \zeta$$

Функция

$$Y = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & \frac{1}{2} - \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix} \zeta$$

удовлетворяет уравнению

$$\zeta(1 - \zeta)Y'' - [1 - 2(1 - \varepsilon)\zeta]Y' - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 Y = 0 \quad (5.26)$$

так как здесь

$$a = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad b = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad c = 1$$

Уравнение (5.26) вырождается в уравнение (4.10) при $\varepsilon = 0$.

Возьмем фундаментальную систему решений уравнения (5.26) около каждой из особых точек в следующих формах.

Около $\zeta = 0$

$$U = F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 1, \zeta\right)$$

$$V = F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 1, \zeta\right) \lg \zeta + G(\zeta)$$

Около $\zeta = 1$

$$U_1 = F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 1 - 2\varepsilon, 1 - \zeta\right)$$

$$V_1 = (\zeta - 1)^{2\varepsilon} F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 1 + 2\varepsilon, 1 - \zeta\right)$$

Около $\zeta = \infty$

$$U_\infty = \zeta^{-\frac{1}{2} - \varepsilon} F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 1, \frac{1}{\zeta}\right)$$

$$V_\infty = U_\infty \lg \zeta + G(\zeta)$$

Тогда для $a > \zeta > 1$ будем иметь

$$Z = \frac{Ai U_1 + Bi V_1}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

$$F = \frac{Ci U_1 + Di V_1}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

где A, B, C, D — действительные числа.

Переходя к отрезку $0 < \zeta < 1$, представим функции Z и F в виде

$$Z = \frac{\exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right\} [Ai U_1 + Bi e^{2\pi i \varepsilon} V_1]}{(1 - \zeta)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

$$F = \frac{\exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right\} [Ci U_1 + Di e^{2\pi i \varepsilon} V_1]}{(1 - \zeta)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

Для того чтобы здесь $\text{Im}(iF + kZ) = 0$, необходимо, чтобы

$$\text{Im} \left(\kappa Ai \exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right\} - C \exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right\} \right) = 0$$

$$\text{Im} \left(\kappa Bi \exp \left\{ \pi i \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) \right\} - D \exp \left\{ \pi i \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) \right\} \right) = 0$$

Отсюда находим

$$C = \kappa A \operatorname{tg} \pi \varepsilon, \quad D = \kappa B \operatorname{tg} \pi \varepsilon$$

Таким образом получаем:

$$Z = \frac{i(AU_1 + BV_1)}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}, \quad F = \frac{\kappa i \operatorname{tg} \pi \varepsilon (AU_1 - BV_1)}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}} \quad (5.27)$$

Легко проверить, что второе условие на отрезке $(0, 1)$

$$\text{Im}(F + ciZ) = 0$$

уже является выполненным.

Теперь остается с помощью условий на отрезке $(-\infty, 0)$ или $(1, \infty)$ установить зависимость между A и B . Возьмем отрезок $(-\infty, 0)$. Для того чтобы перейти на этот отрезок, установим связь между U_1, V_1 и U, V в форме

$$U_1 = pU + qV, \quad V_1 = (rU + sV)e^{2\pi i \varepsilon} \quad (5.28)$$

Оказывается, что зависимость эта имеет вид:

$$U_1 = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{2\pi\Gamma(2\varepsilon) \operatorname{tg} \pi \varepsilon} (\mu U - V)$$

$$V_1 = -\frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} - \varepsilon) e^{2\pi i \varepsilon}}{2\pi\Gamma(2\varepsilon) \operatorname{tg} \pi \varepsilon} (\nu U - V) \quad (5.29)$$

где

$$\mu = \Gamma'(1) - \frac{2\Gamma'(\frac{1}{2} - \varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \varepsilon)}, \quad \nu = \Gamma'(1) - \frac{2\Gamma'(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)}$$

Сравнивая формулы (5.27) и (5.28), получаем, в частности,

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} + s\right)}{2\pi\Gamma(2s) \operatorname{tg} \pi s} \\ s &= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} - s\right)}{2\pi\Gamma(2s) \operatorname{tg} \pi s} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Теперь выражение (5.27) для функции Z с помощью формулы (5.29) можно представить в виде

$$Z = \frac{(Ap + Bre^{2\pi is})U + (Aq + Bse^{2\pi is})V}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

Переходя к значениям $\zeta < 0$, будем иметь

$$V = [\lg(-\zeta) + \pi i]U + G = U' + \pi iU$$

где U' и U принимают действительные значения при $\zeta < 0$. Тогда

$$Z = i \exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + s \right) \right\} \frac{[Ap + \pi i Aq + (Br + \pi i Bs)e^{2\pi is}]U + (Aq + Bse^{2\pi is})U'}{(1 - \zeta)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}}$$

Условие $\operatorname{Im}(iZ) = 0$ при $\zeta < 0$ требует, чтобы

$$\operatorname{Im} \left[\exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} + s \right) \right\} A(p + \pi i q) + \exp \left\{ -\pi i \left(\frac{1}{2} - s \right) \right\} B(r + \pi i s) \right] = 0$$

откуда вытекает необходимость выполнения равенства

$$Aq + Bs = 0$$

Согласно равенству (5.27) находим

$$B = mA$$

где

$$m = \frac{\Gamma(-2s)}{\Gamma(2s)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)} \right]^2 \quad (5.31)$$

так что Z и F принимают вид:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Ai(U_1 + mV_1)}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}} \\ F &= \frac{\kappa Ai \operatorname{tg} \pi s (U_1 - mV_1)}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}} \\ u - iv &= \frac{F}{Z} = \kappa \operatorname{tg} \pi s \frac{U_1 - mV_1}{U_1 + mV_1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

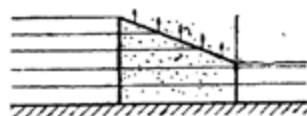
Для H_1 , H_2 и L получаем такие формулы:

$$\begin{aligned} H_1 &= A \int_a^1 \frac{(U_1 + mV_1) d\zeta}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(a - \zeta)(b - \zeta)}} \\ H_2 &= A \int_b^\infty \frac{(U_1 + mV_1) d\zeta}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} \\ L &= A \int_a^b \frac{(U_1 + mV_1) d\zeta}{(\zeta - 1)^{\frac{1}{2} + s} \sqrt{(\zeta - a)(b - \zeta)}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

В этих формулах нельзя для U_1 и V_1 пользоваться выше найденными выражениями, так как входящие в них ряды сходятся лишь при $|\zeta - 1| < 1$. Однако в этом случае можно взять другие ряды Куммера, а именно, формулы

$$\begin{aligned} U_1 &= \zeta^{-1+s} F\left(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}-s, 1-2s, \frac{\zeta-1}{\zeta}\right) \\ V_1 &= \zeta^{-1+s} (\zeta-1)^s F\left(\frac{1}{2}+s, \frac{1}{2}+s, 1+2s, \frac{\zeta-1}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Для этих функций ряды сходятся в области E плоскости ζ (см. фиг. 41 главы IV). Для действительных значений ζ это будет интервал $\frac{1}{2} < \zeta < \infty$.



Фиг. 56.

Составим выражение $\frac{H_1 - H_2}{L}$, пользуясь формулами (5.33), преобразовав их предварительно с помощью подстановок

$$\zeta = 1 + (a-1) \sin^2 \varphi \quad \text{для } H_1$$

$$\zeta = 1 + \frac{b-1}{\sin^2 \varphi} \quad \text{для } H_2$$

$$\zeta = a + (b-a) \sin^2 \varphi \quad \text{для } L$$

Получим

$$H_1 = \frac{2}{(a-1)^{s+1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(U_1 + mV_1) d\varphi}{\sin^{2s} \varphi \sqrt{\frac{a-1}{b-1} - \sin^2 \varphi}}$$

$$H_2 = \frac{2}{(b-1)^{s+1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(U_1' + mV_1') d\varphi}{\sin^{2s} \varphi \sqrt{1 - \frac{a}{b} \sin^2 \varphi}}$$

$$L = \frac{2}{(a-1)^{s+1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(U_1' + mV_1') d\varphi}{\left(1 + \frac{b-a}{a-1} \sin^2 \varphi\right)^{s+1/2}}$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_1 &= (1 + a \sin^2 \varphi)^{-1+s} F\left(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}-s, 1-2s, \frac{a \sin^2 \varphi}{1 + a \sin^2 \varphi}\right) = \\ &= 1 - \frac{(\frac{1}{2}-s)^s}{1-2s} a \sin^2 \varphi + \dots \end{aligned}$$

$$V_1 = a^{2s} \sin^{4s} \varphi \left[1 - \frac{(\frac{1}{2}+s)^s}{1+2s} a \sin^2 \varphi + \dots \right]$$

$$U_1' = 1 - \frac{(\frac{1}{2}-s)^s}{1-2s} \beta \operatorname{cosec}^2 \varphi + \dots$$

$$V_1' = \beta^{2s} \sin^{-4s} \varphi \left[1 - \frac{(\frac{1}{2}+s)^s}{1+2s} \beta \operatorname{cosec}^2 \varphi + \dots \right]$$

$$U_1' = 1 - \frac{(\frac{1}{2}-s)^s}{1-2s} (\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) + \dots$$

$$V_1' = (\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi)^{2s} \left[1 - \frac{(\frac{1}{2}+s)^s}{1+2s} (\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) + \dots \right]$$

$$(\alpha = a-1, \quad \beta = b-1)$$

Переходя теперь к пределу при $\alpha = \beta \rightarrow 0$, т. е. при $a = b \rightarrow 1$, получим

$$\frac{H_1 - H_2}{L} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\sin^{-2\alpha} \varphi - \sin^{2\alpha} \varphi}{\cos \varphi} + O(\alpha) \right\} d\varphi}{\int_0^{\pi/2} [1 + O(\alpha)] d\varphi} = \operatorname{tg} \pi e.$$

Этот случай, исследованный Б. Б. Девисоном при переходе к пределу, так сказать, с другой стороны (см. выше). Проверка того, что при $b > a > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{H_1 - H_2}{L} > \operatorname{tg} \pi e$$

громоздка, но несомненно, что такое неравенство должно иметь место.

ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В ДВУХ СЛОЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФИЛЬТРАЦИИ

В этой главе рассматриваются два простейших случая движения грунтовой воды в двуслойной области (фиг. 57 и 64). Примененный метод решения непосредственно годится лишь для случая, когда оба слоя имеют одинаковую толщину. Однако ввиду важности задач рассматриваемого типа для гидротехники (на которую мне впервые указал проф. Н. И. Анисимов) решение этих частных задач представляет интерес, тем более что результаты получились в простой и законченной форме.

Задача 1. В полосе глубины h с коэффициентом фильтрации α_1 имеется флютбет (основание гидротехнического сооружения, имеющее вид горизонтального отрезка) шириной $2l$. Нижний слой, также глубины h , имеет коэффициент фильтрации α_2 и лежит на непроницаемом основании. Требуется определить все элементы движения.

Все величины, относящиеся к первой области, снабдим значком 1, ко второй области—значком 2. Будем рассматривать только правую половину чертежа. Выпишем условия, которые должны выполняться на контуре областей A_1DCBA и $ABEA_1$.

Границы водоемов представляют, как мы видели в главе I, эквипотенциальные линии. Следовательно, на них должны выполняться условия (1.28):

$$\text{вдоль границы левого водоема} \\ \varphi_1 = -\alpha_1 \left(\frac{p_0}{\rho g} + H_1 \right) + C$$

на линии DA_1

$$\varphi_1 = -\alpha_1 \left(\frac{p_0}{\rho g} + H_1 \right) + C$$

Будем считать атмосферное давление p_0 равным нулю. Выберем произвольную постоянную C равной $-\alpha_1 \frac{H_1 + H_2}{2}$. Тогда получим:

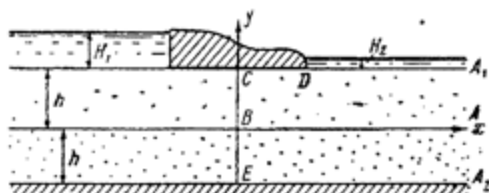
$$\text{вдоль границы левого водоема} \\ \varphi_1 = -\alpha_1 \frac{H_1 - H_2}{2}$$

на DA_1

$$\varphi_1 = \alpha_1 \frac{H_1 - H_2}{2}$$

Положим

$$H_1 - H_2 = H$$



Фиг. 57.

где H — так называемый действующий напор. Тогда на границе левого водоема

$$\varphi_1 = -x_1 \frac{H}{2} \quad (6.1)$$

на DA

$$\varphi_1 = x_1 \frac{H}{2} \quad (6.2)$$

Вследствие симметричности потока на линии CB , которая также является линией равного потенциала, должны иметь

$$\varphi_1 = 0 \quad (6.3)$$

Линия BE также должна быть эквипотенциальной, так что на ней $\varphi_2 = \text{const}$. Положим

$$\varphi_2 = 0 \quad \text{на } BE \quad (6.4)$$

Далее, CD и EA_2 являются линиями тока. Положим:

на EA_2

$$\psi_1 = 0 \quad (6.5)$$

на CD

$$\psi_1 = Q \quad (6.6)$$

На границе двух сред AB должны выполняться условия (1.37) и (1.38)

$$\frac{\varphi_1}{x_1} = \frac{\varphi_2}{x_2}, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad (6.7)$$

Отобразим область A_1DCBEA_2 плоскости $z = x + iy$ на надрезанную плоскость комплексного переменного ζ (фиг. 58) так, чтобы область A_1DCBA перешла в верхнюю полуплоскость, область $ABEA_2$ в нижнюю.

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 \operatorname{Im}(iF_1)=0 & D & 0 & \operatorname{Im}(F_1)=0 & C & a & \operatorname{Im}(iF_1)=0 & B & \operatorname{Im}(F_1-F_2)=0 & A \\ \hline A_2 & \cdot & \cdot & \operatorname{Im}(F_2)=0 & E & \operatorname{Im}(iF_2)=0 & 1 & \operatorname{Im}\left(\frac{iF_1}{x_1} - \frac{iF_2}{x_2}\right)=0 & \infty \end{array}$$

Фиг. 58.

Зависимость между z и ζ будет иметь вид:

$$\zeta = \frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{h} \quad (6.8)$$

где a — аффикс точек C и E на плоскости ζ .

Полагая в уравнении (6.8) $\zeta = 0$, $z = l + hi$, найдем

$$a = \operatorname{th}^2 \frac{\pi l}{2h} \quad (6.9)$$

Таким образом по заданным l и h легко вычислить a .

Будем рассматривать комплексные потенциалы $f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ и $f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ первой и второй областей движения. На плоскости ζ функция $f_1(\zeta)$ рассматривается в верхней полуплоскости, $f_2(\zeta)$ в нижней. Через функции f_1 и f_2 можно выразить условия на границах:

$$\begin{array}{ll} \text{на } DA_1 & \operatorname{Im}(if_1) = x_1 \frac{H}{2} \\ \text{на } CD & \operatorname{Im}(f_1) = Q \\ \text{на } CB & \operatorname{Im}(if_1) = 0 \\ \text{на } BE & \operatorname{Im}(if_2) = 0 \\ \text{на } EA_2 & \operatorname{Im}(f_2) = 0 \end{array}$$

на АВ

$$\operatorname{Im}\left(\frac{if_1}{z_1} - \frac{if_2}{z_2}\right) = 0, \quad \operatorname{Im}(f_1 - f_2) = 0$$

Чтобы получить однородные условия на контуре, введем функции

$$F_1 = \frac{df_1}{d\zeta}, \quad F_2 = \frac{df_2}{d\zeta}$$

Для функций F_1 и F_2 получаем условия, которые выписаны возле соответствующих отрезков (фиг. 58).

В точке С (фиг. 57) сходятся линии $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$, следовательно, на плоскости комплексного потенциала здесь имеем прямой угол. Поэтому разложение $f_1(\zeta)$ около точки $\zeta = a$ должно иметь вид:

$$f_1(\zeta) = \sqrt{\zeta - a} [a_0 + a_1(\zeta - a) + \dots]$$

Точно так же в точке Е функция $f_2(\zeta)$ имеет вид:

$$f_2(\zeta) = \sqrt{\zeta - a} [b_0 + b_1(\zeta - a) + \dots]$$

Поэтому для функций $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ получаем

$$\begin{aligned} F_1(\zeta) &= \frac{c_0 + c_1(\zeta - a) + \dots}{\sqrt{\zeta - a}} = \frac{\Phi_1(\zeta)}{\sqrt{\zeta - a}} \\ F_2(\zeta) &= \frac{d_0 + d_1(\zeta - a) + \dots}{\sqrt{\zeta - a}} = \frac{\Phi_2(\zeta)}{\sqrt{\zeta - a}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ — функции, имеющие точку $\zeta = a$ обыкновенной точкой. Будем рассматривать вместо F_1 и F_2 функции Φ_1 и Φ_2 . Вдоль действительной оси полуплоскости ζ при $\zeta > a$ радикал $\sqrt{\zeta - a}$ имеет действительные значения

$$\begin{array}{ccccc} A, \operatorname{Im}(\Phi_1) = 0 & D, \operatorname{Im}(i\Phi_1) = 0 & B, \operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 & A \\ \hline A_2, \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0 & O, \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0 & I, \operatorname{Im}\left(\frac{i\Phi_1}{z_1} - \frac{i\Phi_2}{z_2}\right) = 0 & \infty \end{array}$$

Фиг. 59.

ния, следовательно, условия для функций Φ_1 и Φ_2 направо от точки a будут такими же, как для F_1 и F_2 . При $\zeta < a$ радикал $\sqrt{\zeta - a}$ имеет мнимые значения, вследствие чего условия на отрезках A_1D , DC и A_2E изменятся так, как указано на фиг. 59.

Функции F_1 и F_2 должны быть аналитическими функциями соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, имеющими регулярные особенности в точках $\zeta = 0, 1, a, \infty$. Предположим, что каждая из этих функций может быть продолжена в другую полуплоскость, и попытаемся искать F_1 и F_2 как решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

A priori трудно сказать, удастся ли этот прием; кроме того, здесь можно пропустить побочные особые точки, так как геометрическое представление здесь несколько затруднено (об этом см. в конце главы). Поэтому необходимо проверить получаемое таким способом решение.

Исследуем поведение рассматриваемых функций около особых точек

Около $\zeta = 0$. Около этой точки функция $f_1(\zeta)$ должна иметь вид:

$$f_1(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{2}} (a_0 + a_1\zeta + \dots)$$

так как здесь сходятся линия тока и эквипотенциальная линия.

Тогда

$$F_1(\zeta) = \zeta^{-\frac{1}{2}} (a'_0 + \dots)$$

т.е. $F_1(\zeta)$, а значит и $\Phi_1(\zeta)$ принадлежат показателю $-\frac{1}{2}$. Для $F_2(\zeta)$ точка $\zeta=0$ является обыкновенной, т. е. показатель в ней равен нулю как для $F_2(\zeta)$, так и для $\Phi_2(\zeta)$.

Около $\zeta=1$. Предположим, что функции Φ_1 и Φ_2 могут быть продолжены через отрезок BA . Сделаем надрез вдоль отрезка DB (фиг. 60). Изменим несколько обозначения. А именно, сохраним обозначение Φ_1, Φ_2 для значений рассматриваемых функций на нижней стороне разреза и обозначим через Φ_1^*, Φ_2^* значения тех же функций на верхней стороне разреза. Тогда разность $\Phi_1 - \Phi_2$ перейдет в $\Phi_1^* - \Phi_2^*$. Но так как вдоль BA разность $\Phi_1 - \Phi_2$ принимает действительные значения, то в точке M' , которую можно рассматривать как сопряженную с M , эта разность заменится на сопряженное выражение, и будем иметь

$$\Phi_1^* - \Phi_2^* = \overline{\Phi_1 - \Phi_2} \quad (6.11)$$

Точно так же второе условие на отрезке AB дает

$$\frac{i\Phi_1^*}{x_1} - \frac{i\Phi_2^*}{x_2} = -\frac{i\overline{\Phi_1}}{x_1} + \frac{i\overline{\Phi_2}}{x_2} \quad (6.12)$$

Решая эти уравнения относительно Φ_1^* и Φ_2^* , получим

$$\Phi_1^* = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \overline{\Phi_1} - \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \overline{\Phi_2} \quad (6.13)$$

$$\Phi_2^* = \frac{2x_2}{x_1 - x_2} \overline{\Phi_1} - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \overline{\Phi_2}$$

Что касается условий на отрезке CB , то в наших новых обозначениях они должны быть представлены в виде

$$\operatorname{Im}(i\Phi_1^*) = 0, \quad \operatorname{Im}(i\Phi_2^*) = 0$$

или иначе

$$\Phi_1^* + \overline{\Phi_1^*} = 0, \quad \Phi_2^* + \overline{\Phi_2^*} = 0 \quad (6.14)$$

откуда

$$\overline{\Phi_1^*} = -\Phi_1^*, \quad \overline{\Phi_2^*} = -\Phi_2^*$$

В равенстве (6.13) для Φ_1^* заменим все величины им сопряженными, получим

$$\overline{\Phi_1^*} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 - \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \Phi_2$$

Сложив последнее равенство с равенством (6.13) для Φ_1^* и принимая во внимание (6.14), найдем

$$\Phi_1 + \overline{\Phi_1} = 0$$

Поэтому функции Φ_1^* и Φ_2^* можно выразить через функции Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1^* = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \Phi_1 - \frac{2x_1}{x_2 - x_1} \Phi_2 \quad (6.15)$$

$$\Phi_2^* = \frac{2x_2}{x_2 - x_1} \Phi_1 - \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \Phi_2$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} - \lambda & -\frac{2x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{2x_2}{x_2 - x_1} & -\frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$. Показатели, при которых функции f_1 и f_2 остаются ограниченными в точке B , соответственно будут

$$\gamma = \frac{\lg \lambda}{2\pi i} = 0, \quad \gamma' = \frac{\lg \lambda'}{2\pi i} = -\frac{1}{2}$$

Около $\zeta = \infty$. Положительный обход вокруг бесконечно далекой точки может быть заменен отрицательным обходом вокруг точек D и B . При этом рассматриваемые функции будут продолжены через отрезок BA , следовательно, формулы (6.13) сохраняются и в этом случае. Если через Φ_1 , Φ_2 обозначить значения функций до обхода, т. е. на верхнем краю разреза (фиг. 61), а через Φ_1^* , Φ_2^* их значения после обхода, т. е. на нижнем краю разреза, то условия на AD будут иметь вид:

$$\operatorname{Im}(\Phi_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(i\Phi_2^*) = 0$$

или

$$\bar{\Phi}_1 = \Phi_1, \quad \bar{\Phi}_2^* = -\Phi_2^*$$

Во втором из уравнений (6.13) заменим все величины на сопряженные. Получим

$$\bar{\Phi}_2^* = -\Phi_2^* = \frac{2x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \Phi_2$$

Складывая полученное равенство со вторым из равенств (6.13), найдем

$$0 = \frac{4x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} (\Phi_2 + \bar{\Phi}_2)$$

откуда

$$\bar{\Phi}_2 = -\Phi_2 + \frac{4x_2}{x_1 + x_2} \Phi_1$$

Подставив $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ в уравнения (6.13), получим

$$\Phi_1^* = -\frac{x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} \Phi_1 + \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \Phi_2$$

$$\Phi_2^* = \frac{2x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \Phi_2 \quad (6.16)$$

Характеристическое уравнение

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} - \lambda & \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \\ -\frac{2x_2}{x_1 - x_2} & \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} - \lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 2 \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \lambda + 1 = 0$$

имеет корни

$$\lambda = \frac{\sqrt{x_1} + i\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} - i\sqrt{x_2}}, \quad \lambda' = \frac{\sqrt{x_1} - i\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + i\sqrt{x_2}}$$

Положим

$$\operatorname{tg} \pi s = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad \sin \pi s = \sqrt{\frac{x_2}{x_1 + x_2}}, \quad \cos \pi s = \sqrt{\frac{x_1}{x_1 + x_2}} \quad (6.17)$$

Тогда

$$\lambda = e^{2\pi i s}, \quad \lambda' = e^{-2\pi i s}$$

откуда

$$\beta = \frac{\lg \lambda}{2\pi i} = s + n, \quad \beta' = \frac{\lg \lambda'}{2\pi i} = -s + n'$$

Условие ограниченности функций f_1 и f_2 при $\zeta = 0$ дает для n и n' значения

$$n = n' = 1$$

так что

$$\beta = 1 + \varepsilon, \quad \beta' = 1 - \varepsilon$$

Предполагая, что Φ_1 и Φ_2 не имеют никаких других особых точек, получаем, что функции Φ_1 и Φ_2 представляют ветви функции Римана

$$P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma & \zeta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \zeta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \zeta \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 & \zeta \\ -\frac{1}{2} & 1 + \varepsilon & -\frac{1}{2} & \zeta \end{pmatrix}$$

Вводя обозначения

$$a = \alpha + \beta + \gamma, \quad b = \alpha + \beta' + \gamma, \quad c = 1 + \alpha - \alpha'$$

имеем

$$a = 1 + \varepsilon, \quad b = 1 - \varepsilon, \quad c = \frac{3}{2}$$

Как известно из теории гипергеометрического уравнения, функции Φ_1 и Φ_2 будут линейными комбинациями интегралов уравнения

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + [c - (a+b+1)\zeta]Y' - abY = 0$$

или

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + \left(\frac{3}{2} - 3\zeta\right)Y' - (1-\varepsilon^2)Y = 0 \quad (6.18)$$

А именно, около $\zeta = 0$ можно взять фундаментальную систему решений

$$U = F(a, b, c, \zeta) = F\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right)$$

$$V = \zeta^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \zeta) = \zeta^{-1} F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right) \quad (6.19)$$

где гипергеометрическая функция

$$F(a, b, c, \zeta) = 1 + \frac{ab}{c}\zeta + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}\zeta^2 + \dots$$

Как было показано выше, полученные гипергеометрические функции можно представить в виде

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right) &= \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{2\sqrt{1-\zeta}} \\ F\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right) &= \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{4\varepsilon i \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Функции Φ_1 и Φ_2 выражаются линейно через U и V , т. е.

$$\Phi_1 = AU + BV$$

$$\Phi_2 = CU + DV$$

где A, B, C, D — комплексные постоянные.

Так как на отрезке DB , где $0 < \zeta < 1$, функции U и V принимают действительные значения, то для выполнения условий

$$\operatorname{Im}(i\Phi_1) = \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0$$

необходимо, чтобы постоянные A, B, C, D были чисто мнимыми. Поэтому, меняя обозначения, имеем

$$\Phi_1 = AiU + BiV$$

$$\Phi_2 = CiU + DiV$$

где A, B, C, D — действительные постоянные. Для того чтобы на промежутке AC , где $\zeta < 0$, функция Φ_1 принимала действительные, а функция Φ_2 чисто мнимые значения, необходимо, чтобы

$$A = D = 0$$

Поэтому

$$\Phi_1 = BiV = \frac{Bi}{\sqrt{\zeta}} F\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right)$$

$$\Phi_2 = CiU = CiF\left(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right)$$

или

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{Bi}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\} \\ \Phi_2 &= \frac{C}{4\varepsilon\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\}\end{aligned}\quad (6.21)$$

Предположим теперь, что $\zeta > 1$. Тогда, совершив обход вокруг точки $\zeta = 1$ по полуокружности, получим

$$(1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} = \mp i(\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}$$

смотря по тому, в какой полуплоскости рассматривается функция, верхней или нижней. Для функции Φ_1 нужно взять знак минус, для функции Φ_2 знак плюс.

Точно так же при переходе от значений $\zeta < 0$ к значениям $\zeta > 0$

$$\sqrt{-\zeta} = \mp i\sqrt{\zeta}$$

причем минус относится к функции Φ_1 , плюс — к Φ_2 .

Для $\zeta > 1$ функции Φ_1 и Φ_2 можно представить в виде

$$\Phi_1 = \frac{Bi}{2} \frac{e^{-\pi i \varepsilon} (\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta})^{2\varepsilon} + e^{\pi i \varepsilon} (\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta-1})^{2\varepsilon}}{-i\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{4i\varepsilon} \frac{e^{\pi i \varepsilon} (\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta})^{2\varepsilon} - e^{-\pi i \varepsilon} (\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta-1})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}$$

Условие $\text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$ при $\zeta > 1$ приводит к равенству

$$\text{Im} \left(-Be^{-\pi i \varepsilon} + \frac{iC}{2\varepsilon} e^{\pi i \varepsilon} \right) = B \sin \pi \varepsilon + \frac{C}{2\varepsilon} \cos \pi \varepsilon = 0$$

откуда

$$C = -2\varepsilon \tan \pi \varepsilon B \quad (6.22)$$

Второе условие на отрезке AB выполняется тождественно.

Для функций F_1 и F_2 получаем на основании (6.10), (6.21) и (6.22)

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{Bi}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}} \{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\} \\ F_2 &= -\frac{B \tan \pi \varepsilon}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}} \{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\}\end{aligned}\quad (6.23)$$

Функции f_1 и f_2 будут определяться с помощью интегралов

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{Bi}{2} \int \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}} d\zeta \\ f_2 &= -\frac{B \tan \pi \varepsilon}{2} \int \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}} d\zeta\end{aligned}\quad (6.24)$$

Для определения постоянной B возьмем интеграл для f_1 в пределах от $\zeta = a$ до $\zeta = 0$. Так как

$$f_1(0) = \frac{x_1 H}{2} + Qi, \quad f_2(a) = Qi$$

то

$$Bi \int_a^0 \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}} d\zeta = x_1 H \quad (6.25)$$

Параметр a , как было показано, определяется равенством (6.9). Введем обозначения

$$\operatorname{th} \frac{\pi l}{2h} = k, \quad \operatorname{ch} \frac{\pi l}{2h} = \frac{1}{k'} \quad (6.26)$$

Тогда

$$a = k^2 \quad (6.27)$$

Под знаком интеграла (6.26) сделаем подстановку

$$\zeta = a \sin^2 \alpha = k^2 \sin^2 \alpha$$

Тогда получим

$$B = \frac{x_1 H}{2J} \quad (6.28)$$

где

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2 \arcsin k \sin \alpha) d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\arcsin k} \frac{\cos 2\alpha d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (6.29)$$

Беря интеграл для $f_1(\zeta)$ в пределах от $\zeta = -\infty$ до $\zeta = 0$, найдем расход

$$Q = \frac{x_1 H J'}{2J \cos \pi \varepsilon} \quad (6.30)$$

где

$$J' = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2s \arcsin k' \sin \alpha) d\alpha}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\arcsin k'} \frac{\cos 2s\alpha d\alpha}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (6.31)$$

Так как

$$\frac{df_s}{dz} = \frac{dj_s}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta} = F_s \frac{d\zeta}{dz} \quad (s = 1, 2)$$

то, пользуясь формулами (6.8) и (6.23), найдем выражения для комплексных скоростей в первой и второй среде. А именно,

$$u_1 - iv_1 = \frac{x_1 H \pi}{4hJ} \frac{(-\sin \omega l z + i \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z})^{2\varepsilon} + (-\sin \omega l z - i \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z}} \quad (6.32)$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{x_1 H i \pi \operatorname{tg} \pi \varepsilon}{4hJ} \frac{(\sin \omega l z + i \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z})^{2\varepsilon} - (\sin \omega l z - i \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega l z}}$$

причем

$$\omega = \frac{\pi}{2h}$$

Проверка показывает, что для $u_1 - iv_1$ и $u_2 - iv_2$ выполняются все условия на границах, т. е. что построенное решение правильно.

Введем обозначение

$$u - iv = \frac{x_1 H}{2h} (\bar{u} - i\bar{v})$$

Вдоль линии раздела ВА, положив $z = x$, будем иметь после отделения действительной и мнимой частей

$$\bar{u}_1 = \frac{\pi}{J} \frac{M + N}{P} \cos \pi \varepsilon, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{J} \frac{N - M}{P} \sin \pi \varepsilon$$

где

$$M = (P - \operatorname{sh} \omega x)^{2\varepsilon}, \quad N = (P + \operatorname{sh} \omega x)^{2\varepsilon}, \quad P = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l + \operatorname{sh}^2 \omega x}$$

$$\left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq x < \infty \right)$$

Вдоль отрезка CD флютбета

$$\bar{v}_1 = 0, \quad \bar{u}_1 = \frac{\pi}{J} \frac{(\operatorname{ch} \omega l)^{2\varepsilon} \cos 2\varepsilon \theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \operatorname{ch}^2 \omega x}}$$

где

$$\theta = \arccos \frac{\operatorname{ch} \omega x}{\operatorname{ch} \omega l} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq x \leq l \right)$$

Вдоль границы DA_1 нижнего бьефа

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{J} \frac{\operatorname{ch}(2\epsilon\theta)}{(\operatorname{ch} \omega l)^{1-2\epsilon} \operatorname{sh} \theta}$$

где

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{\operatorname{ch} \omega x}{\operatorname{ch} \omega l} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right)$$

Вдоль отрезка BC_1 ,

где $x=0$, $z=yi$, имеем

$$\bar{v}_1 = 0$$

$$\bar{u}_1 = \frac{\pi}{J} \frac{\operatorname{ch} \omega l \cos 2\epsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega y}}$$

где

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega y}}{\sin \omega y} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right)$$

Вдоль отрезка BE

получим

$$\bar{v}_2 = 0$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\operatorname{tg} \pi \epsilon}{J} \frac{\operatorname{ch} \omega l \sin 2\epsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \sin^2 \omega y}}$$

где θ имеет то же выражение, что и в предыдущем случае.

Вдоль непроницаемого основания EA_2 ,

$$\bar{v}_2 = 0,$$

$$u_2 = \frac{\operatorname{tg} \pi \epsilon}{J} \frac{\operatorname{ch} \omega l \sin 2\epsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \operatorname{ch}^2 \omega x}}$$

где

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega l - \operatorname{ch}^2 \omega x}}{\operatorname{ch} \omega x} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right)$$

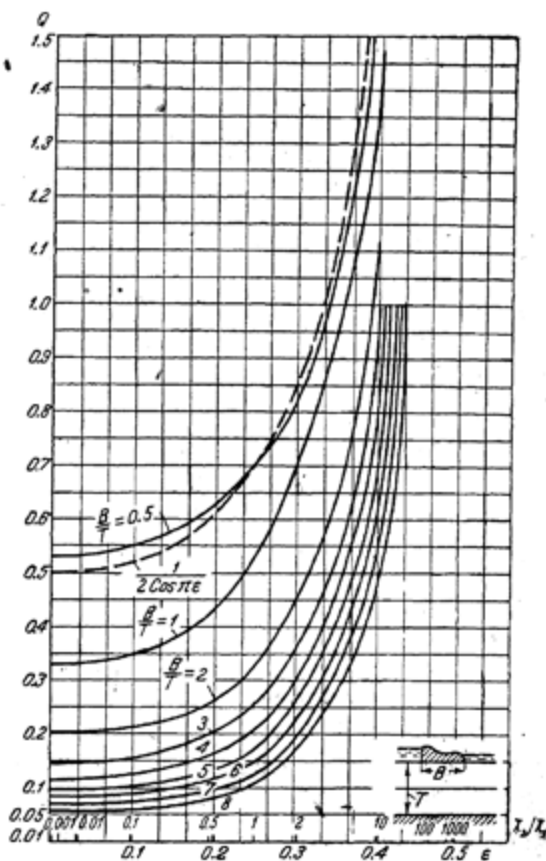
Обозначим через Q' приведенный расход, т. е. расход при $x_1=1$, $H=1$. Тогда

$$Q = x_1 H Q' \quad (6.33)$$

На фиг. 62 даны графики зависимости Q' от

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

Заметим, что при $\epsilon=0$, т. е. $x_2=0$, имеем движение в однородном верхнем слое грунта глубины h с коэффициентом фильтрации x_1 . При $\epsilon = \frac{1}{4}$ имеем $x_1=x_2$, т. е. приходим к случаю фильтрации в однородном слое грунта глубины $2h$. При $\epsilon = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{x_2}{x_1} = \infty$, т. е. в нижнем слое нет сопротивления.



Фиг. 62.

Движение происходит так, как если бы в этом слое была вода (без грунта).
 $= \frac{1}{2}$, приведенный расход $Q = \infty$, причем при ε близких к $\frac{1}{2}$,

$$Q' \approx \frac{1}{\cos \pi \varepsilon}$$

точнее

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2}} Q' \cos \pi \varepsilon = 1$$

Для построения графиков фиг. 62 и 63 была использована таблица значений приведенного расхода в однослойной среде. Здесь B означает ширину флютбета (фиг. 63), т. е. $B = 2l$, T — глубина слоя (всего грунта).

Полагая $\varepsilon = 0$ в формулах (6.30) и (6.31), получим расход в однородной среде глубины h :

$$Q = \frac{\chi_1 H K'}{2K}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi B}{4T}$$

а K' — полный эллиптический интеграл первого рода от дополнительного модуля.

Приводим некоторые значения

$$\text{величины } Q' = \frac{K'}{2K} :$$

B/T	0.4	1	1.122	2	3	4	5	6	7	7.5	
Q'	0.811	0.533	0.500	0.300	0.258	0.204	0.170	0.146	0.126	0.119	
B/T	8	10	12	14	15	16	20	25	30	40	50
Q'	0.113	0.0919	0.0776	0.0672	0.0630	0.0592	0.0479	0.0386	0.0324	0.0245	0.0197

Задача 2. В двуслойном грунте, состоящем из двух горизонтальных слоев (фиг. 64) одинаковой толщины h , расположен шпунт, глубина забивки которого равна d . Коэффициенты фильтрации этих слоев равны соответственно χ_1 и χ_2 .

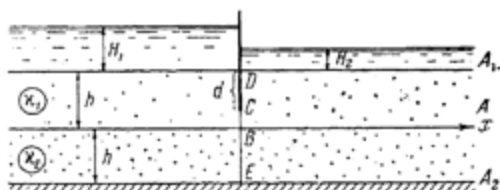
В этой задаче приходится различать три случая.

1°. Пусть $d < h$.

Как и в задаче 1, отобразим область $ABCD A_1$ на верхнюю, область $A B E A_2$ на нижнюю полу-

плоскость плоскости комплексного переменного ζ , как это показано на фиг. 65. Зависимость между z и ζ будет опять выражаться формулой

$$\zeta = \frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{h}$$



Фиг. 64.

но в ней a имеет другое значение. В самом деле, полагая здесь $\zeta=0$, $z=(h-d)t$, найдем

$$a = -\operatorname{tg}^2 \frac{\pi d}{2h}. \quad (6.34)$$

Введем обозначения

$$\sin \frac{\pi d}{2h} = k, \quad \cos \frac{\pi d}{2h} = k', \quad (6.35)$$

тогда

$$a = -\frac{k^2}{k'^2}.$$

Положим и здесь

$$F_1 = \frac{\Phi_1}{\sqrt{\zeta-a}}, \quad F_2 = \frac{\Phi_2}{\sqrt{\zeta-a}}.$$

Тогда для функций Φ_1 и Φ_2 будут выполняться на отрезках $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ те же условия, что и в предыдущей задаче. Следовательно, решение

$$\begin{array}{l} A, \operatorname{Im}(iF_1)=0 \quad C \operatorname{Im}(F_1)=0 \quad D \operatorname{Im}(iF_1)=0 \quad B, \operatorname{Im}(F_1-F_2)=0 \quad A \\ A_2, \operatorname{Im}(F_2)=0 \quad \alpha \operatorname{Im}(F_2)=0 \quad \beta \operatorname{Im}(iF_2)=0 \quad 1, \operatorname{Im}\left(\frac{iF_1}{z_1} - \frac{iF_2}{z_2}\right)=0 \end{array}$$

Фиг. 65.

будет выражаться через те же функции (6.20) и для F_1 и F_2 получим те же уравнения (6.24) и (6.25). Но постоянная B здесь имеет другое значение. А именно, интегрируя в формулах (6.25) от a до 0, найдем

$$\frac{B}{2} \int_0^a \frac{(\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{-\zeta})^{2\alpha} + (\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{-\zeta})^{2\alpha}}{\sqrt{-\zeta}(1-\zeta)(\zeta-a)} d\zeta = \frac{z_1 H}{2}$$

Подстановка

$$\zeta = a \sin^2 \varphi$$

дает

$$B = \frac{z_1 H}{J}$$

где

$$J = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1+b \sin^2 \varphi} + \sqrt{b} \sin \varphi)^{2\alpha} + (\sqrt{1+b \sin^2 \varphi} - \sqrt{b} \sin \varphi)^{2\alpha}}{\sqrt{1+b \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

причем

$$b = -a > 0.$$

Полагая

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и пользуясь обозначениями (6.35), найдем

$$J = 2(k')^{1-2\alpha} (J_1 + J_2)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + k \cos \varphi)^{2\alpha}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^K (\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)^{2\alpha} du \\ J_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - k \cos \varphi)^{2\alpha}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^K (\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u)^{2\alpha} du \end{aligned} \quad (6.36)$$

Далее, беря в выражении (6.25) для f пределы $-\infty$ и a , найдем расход Q :

$$Q = \frac{B}{2} \int_{-\infty}^a \frac{(\sqrt{1-t} + \sqrt{-t})^{2\epsilon} + (\sqrt{1-t} - \sqrt{-t})^{2\epsilon}}{\sqrt{t(1-t)(t-a)}} dt$$

Полагая

$$t = a \operatorname{cosec}^2 \varphi = -\frac{b}{\sin^2 \varphi}$$

получим

$$Q = Bk'^{1-2\epsilon} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} + k)^{2\epsilon} + (\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} - k)^{2\epsilon}}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (6.37)$$

Можно вычислить расход Q иначе, как сумму расходов через отрезки EB и BD . Ниже приводится вычисленная таким образом формула для Q , которая была использована при числовых расчетах.

Не останавливаясь на вычислениях, ограничимся приведением окончательных результатов.

Для $d < h$, полагая

$$Q = xHQ'$$

будем иметь

$$Q' = \frac{1}{J_1 + J_2} \left[\frac{k'^{2\epsilon}}{\cos \pi\epsilon} J_3 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi\epsilon (J_1 - J_2) \right] \quad (6.38)$$

где

$$J_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\epsilon\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} \quad (6.39)$$

а J_1 и J_2 определяются формулами (6.36) и (6.37). Далее, выражения комплексных скоростей первой и второй среды имеют вид:

$$u_1 - iv_1 = -\frac{x_1 H \pi i}{4h(J_1 + J_2)} \frac{(-\sin \omega iz + \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\epsilon} + (-\sin \omega iz - \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\epsilon}}{\sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2}} \quad (6.40)$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{x_1 H \pi \operatorname{tg} \pi\epsilon}{4h(J_1 + J_2)} \frac{(\sin \omega iz + \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\epsilon} - (\sin \omega iz - \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\epsilon}}{\sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2}}$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{2h}$$

В частности, для выходной скорости v , т. е. скорости в точке C шпунта, имеем

$$v = \frac{xHv'}{2h}$$

где v' — «приведенная» скорость — определяется формулой

$$v' = \frac{(1+k)^{2\epsilon} + (1-k)^{2\epsilon}}{2k(J_1 + J_2)} \quad (6.41)$$

При $\epsilon=0$, т. е. при $x_1=0$, получаем однослойный грунт глубины h . При этом

$$Q' = \frac{K'}{2K}, \quad v' = \frac{\pi}{2K}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем

$$k = \sin \frac{\pi d}{2h}$$

а K' — такой же интеграл с дополнительным модулем.

При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ имеем однослойный грунт глубины $2h$.

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получаем

$$Q' = \infty, \quad v' = \frac{v}{k}$$

2°. Для $d > h$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{x_1 H \pi i}{4h J_0} \frac{(-\sin \omega iz + \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\varepsilon} - (-\sin \omega iz - \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2}} \\ u_2 - iv_2 &= \frac{x_1 H \pi \operatorname{tg} \pi \varepsilon}{4h J_0} \frac{(\sin \omega iz + \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\varepsilon} + (\sin \omega iz - \sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2 \omega iz - k'^2}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Здесь

$$J_0 = J_1 - J_2 + \frac{2k'^{2\varepsilon}}{\sin \pi \varepsilon} J_3, \quad \omega = \frac{\pi}{2h}.$$

Для приведенного расхода и приведенной выходной скорости имеем

$$Q' = \frac{\operatorname{tg} \pi \varepsilon (J_1 + J_2)}{2J_0}, \quad v' = \frac{\pi (1+k)^{2\varepsilon} - (1-k)^{2\varepsilon}}{2k J_0}.$$

Отметим частные случаи.

При $\varepsilon = 0$, т. е. $x_2 = 0$, очевидно, должны иметь

$$Q' = 0, \quad v' = 0.$$

При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ получаем однородный грунт глубины $2h$.

3°. Наконец, к случаю $d = h$ придем, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}$, т. е. $x_2 = \infty$. Здесь имеем

$$Q' = \infty, \quad v' = 1$$

Этот случай¹ может быть получен как из случая $d < h$, так и из случая $d > h$ при $k = 1$, $k' = 0$, что дает

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{x_1 H \sqrt{\pi} i}{2h \Gamma(\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{(-\sin \omega iz)^{1-2\varepsilon}} \\ u_2 - iv_2 &= \frac{\sqrt{x_1 x_2} H \sqrt{\pi}}{2h \Gamma(\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{(-\sin \omega iz)^{1-2\varepsilon}} \end{aligned}$$

где $\Gamma(\varepsilon)$ — функция Эйлера, $\omega = \frac{\pi}{2h}$ и

$$Q = \frac{1}{2} x_1 H \operatorname{tg} \pi \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2} H, \quad v = \frac{x_1 H \sqrt{\pi}}{2h} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)},$$

т. е.

$$Q' = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad v' = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}.$$

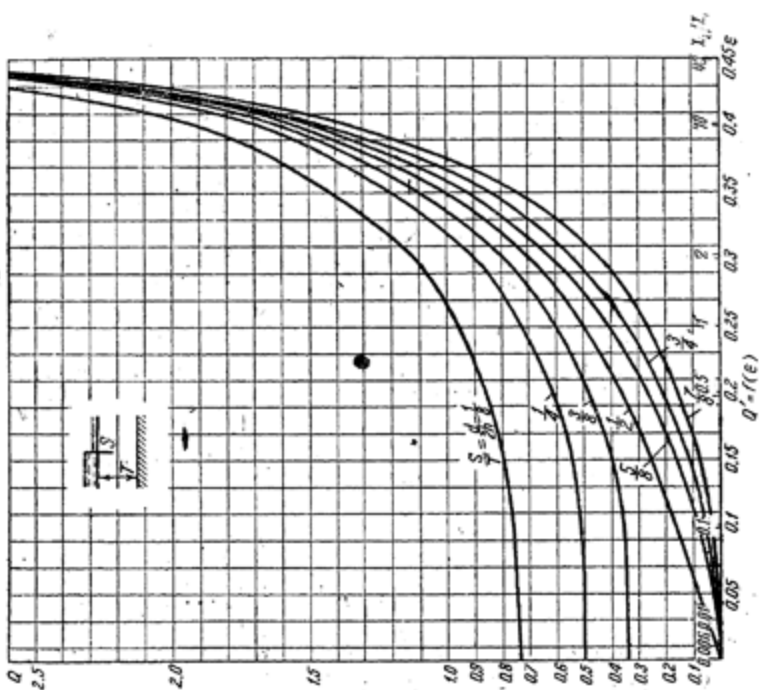
На фиг. 66—69 построены графики зависимости Q' и v' от

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad \text{при} \quad \frac{d}{2h} = 1/3, 1/4, \dots, 7/8$$

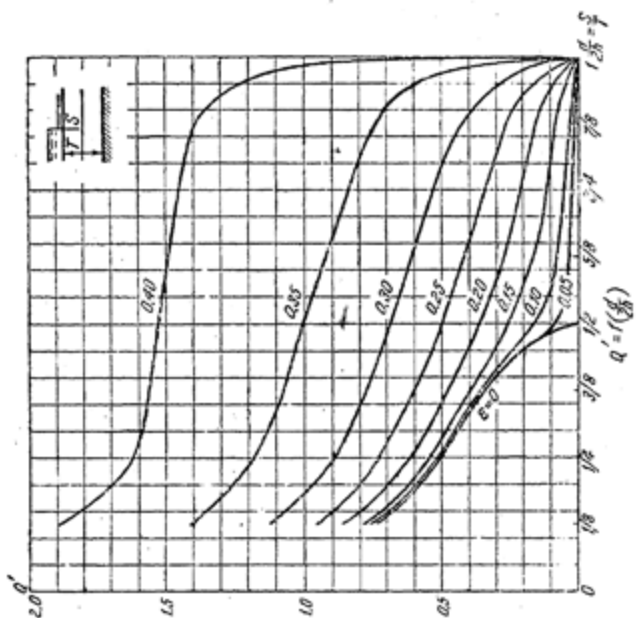
и графики зависимости Q' , v' от $\frac{d}{2h}$ при различных значениях ε .

При построении графиков фиг. 66—69 нами использована табл. 1 вычисленных значений Q' , v' для однородного грунта.

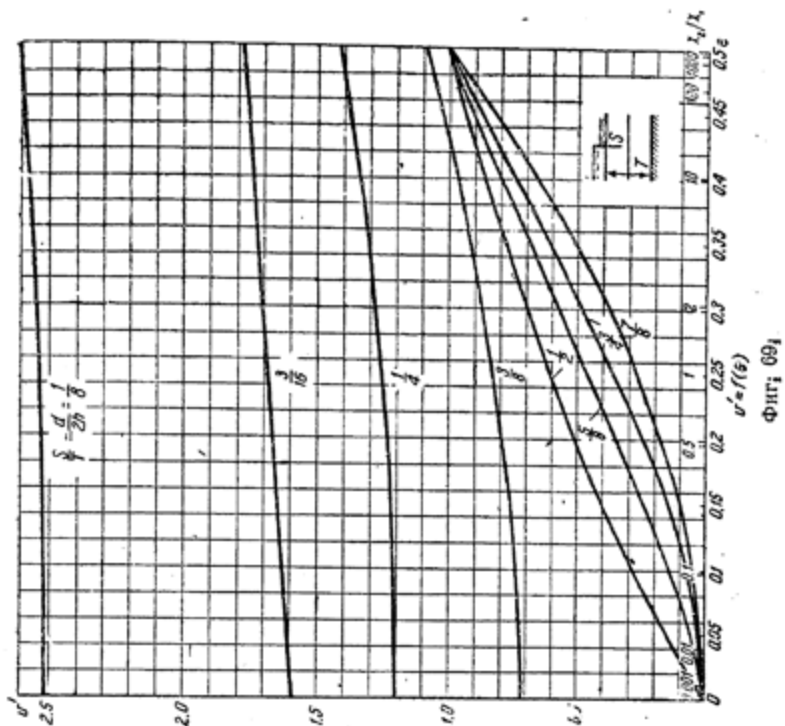
¹ Этот случай рассмотрен Н. К. Гириным в его диссертации.



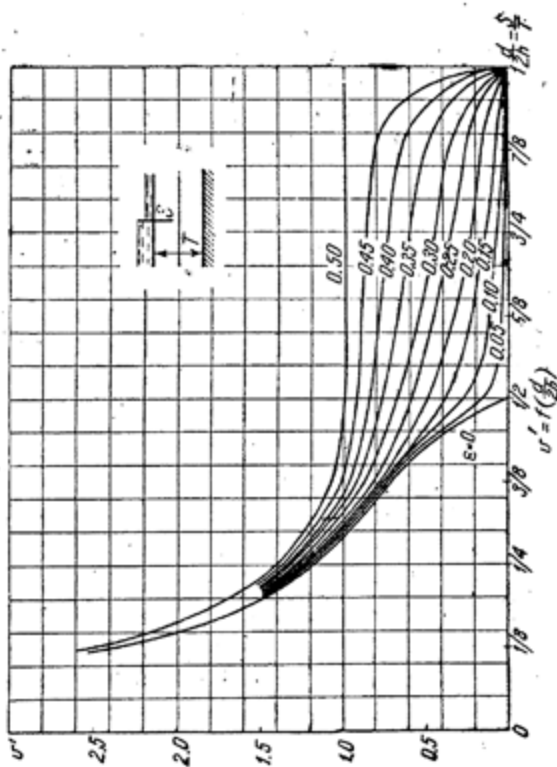
Фиг. 66.



Фиг. 67.



Фиг. 69



Фиг. 68

$T:S$	1.01	1 $\frac{1}{8}$	1.25	1 $\frac{1}{2}$	1.5	1.6	1.75	2	2.5	2 $\frac{2}{3}$
Q'	0.141	0.261	0.310	0.340	0.391	0.417	0.451	0.500	0.578	0.600
v'	0.140	0.231	0.254	0.266	0.280	0.286	0.292	0.300	0.307	0.308
$v'' = \frac{T}{S} v'$	0.141	0.264	0.318	0.354	0.420	0.458	0.511	0.599	0.768	0.822
$T:S$	3	4	5	8	10	20	30	40	50	∞
Q'	0.639	0.734	0.808	0.958	1.026	1.255	1.380	1.472	1.542	∞
v'	0.311	0.314	0.316	0.317	0.318	0.318	0.318	0.318	0.318	0.3183
$v'' = \frac{T}{S} v'$	0.933	1.256	1.580	2.536	3.18	6.36	9.54	12.72	15.90	∞

Заметим, что для грубого построения зависимости v' от ε достаточны лишь три точки: $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1/4$ и $\varepsilon=1/2$, о которых говорилось выше. Q' в третьей точке ($\varepsilon=1/2$) обращается в бесконечность. Но при очень грубых расчетах можно ограничиться двумя точками ($\varepsilon=0$, $\varepsilon=1/4$) и тем, что при ε , близких к $1/2$, Q' близко к $\frac{1}{\cos \pi \varepsilon}$ или, что то же, к $\operatorname{tg} \pi \varepsilon$.

Такой грубый прием можно применять при вычислении Q' и v' для двуслойной среды под любым гидротехническим сооружением, с любым отношением глубин $\frac{h_1}{h_2}$. Для этого нужно, чтобы были решены две задачи: 1) задача о фильтрации под этим сооружением в проницаемом однородном слое произвольной глубины, 2) задача о фильтрации в слое конечной глубины, под которым находится слой воды. Их решение сводится к конформному отображению многоугольных областей.

Для рассмотренной задачи приводим формулы скоростей вдоль контура области, полагая

$$\bar{u} - i\bar{v} = \frac{2h}{\chi_1 H} (u - iv).$$

1° Случай $d < h$.

Вдоль нижнего бассейна

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{2(J_1 + J_2)} \frac{(\operatorname{ch} \omega x + M)^{2\varepsilon} + (\operatorname{ch} \omega x - M)^{2\varepsilon}}{M}$$

$$M = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega x - k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq x < \infty \right)$$

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{2(J_1 + J_2)} \frac{(\sin \omega y + N)^{2\varepsilon} + (\sin \omega y - N)^{2\varepsilon}}{N}$$

$$N = \sqrt{\sin^2 \omega y - k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad h-d < y \leq h \right)$$

Вдоль вертикали под шпунтом

$$\bar{v}_1 = 0, \quad \bar{u}_1 = \frac{\pi k'^{2\varepsilon}}{J_1 + J_2} \frac{\cos 2\varepsilon \theta}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}$$

где

$$\theta = \arcsin \frac{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}{k'} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq y < h-d \right)$$

Вдоль линии раздела

$$\bar{u}_1 = \frac{\pi}{2(J_1 + J_2)} \frac{(P + \operatorname{sh} \omega x)^{2s} + (P - \operatorname{sh} \omega x)^{2s}}{P} \cos \pi s$$

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi}{2(J_1 + J_2)} \frac{(P + \operatorname{sh} \omega x)^{2s} - (P - \operatorname{sh} \omega x)^{2s}}{P} \sin \pi s$$

где

$$P = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega x + k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right).$$

Вдоль непроницаемого основания в нижнем слое

$$\bar{v}_2 = 0, \quad \bar{u}_2 = \frac{\pi \operatorname{tg} \pi s}{2(J_1 + J_2)} \frac{(R + \operatorname{ch} \omega x)^{2s} - (\operatorname{ch} \omega x - R)^{2s}}{R}$$

где

$$R = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega x - k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq x < \infty \right)$$

Вдоль вертикали в нижнем слое

$$\bar{v}_2 = 0, \quad \bar{u}_2 = \frac{k' \pi \operatorname{tg} \pi s}{2(J_1 + J_2)} \frac{\sin 2s\theta}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}$$

где

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}{\sin \omega y} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right).$$

2° Случай $d > h$.

Вдоль линии раздела

$$\bar{u}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(M + \operatorname{sh} \omega x)^{2s} - (M - \operatorname{sh} \omega x)^{2s}}{M} \cos \pi s,$$

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(M + \operatorname{sh} \omega x)^{2s} + (M - \operatorname{sh} \omega x)^{2s}}{M} \sin \pi s$$

где

$$M = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega x + k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right)$$

Вдоль границы водоёма

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(\operatorname{ch} \omega x + N)^{2s} - (\operatorname{ch} \omega x - N)^{2s}}{N}$$

$$N = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \omega x - k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq x < \infty \right)$$

Вдоль шпунта в верхнем слое

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(\sin \omega y + P)^{2s} - (\sin \omega y - P)^{2s}}{P}$$

$$\left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad 0 \leq y < h \right)$$

Вдоль шпунта в нижнем слое

$$\bar{u}_2 = 0, \quad \bar{v}_2 = \frac{\pi k' \operatorname{tg} \pi s}{2J_0} \frac{\cos 2s\theta}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}$$

где

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \omega y}}{\sin \omega y} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad d - h < y < 0 \right)$$

Под шпунтом в нижнем слое

$$\bar{v}_2 = 0, \quad \bar{u}_2 = \frac{\pi \operatorname{tg} \pi s}{2J_0} \frac{(-\sin \omega y + R)^{2s} + (-\sin \omega y - R)^{2s}}{R}$$

где

$$R = \sqrt{\sin^2 \omega y - k'^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}, \quad h - d < y < -h \right)$$

3° Случай $d=h$.

Вдоль границы водоема

$$\bar{u}_1=0, \quad \bar{v}_1=\frac{\pi\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{(\operatorname{ch}\omega x)^{1-2\varepsilon}}$$

$$\left(\omega=\frac{\pi}{2h}, \quad 0\leq x<\infty\right)$$

Вдоль шпунта

$$\bar{u}_1=0, \quad \bar{v}_1=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{(\sin\omega y)^{1-2\varepsilon}} \quad (0<y\leq h)$$

Вдоль линии раздела

$$\bar{u}_1=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{\sin\pi\varepsilon}{(\operatorname{sh}\omega x)^{1-2\varepsilon}}, \quad \bar{v}_1=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{\cos\pi\varepsilon}{(\operatorname{sh}\omega x)^{1-2\varepsilon}}$$

По вертикали под шпунтом

$$\bar{v}_2=0, \quad \bar{u}_2=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\operatorname{tg}\pi\varepsilon\frac{1}{(-\sin\omega y)^{1-2\varepsilon}} \quad (-h\leq y<0)$$

Вдоль непроницаемого основания

$$\bar{v}_2=0, \quad \bar{u}_2=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\varepsilon)\operatorname{tg}\pi\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{(\operatorname{ch}\omega x)^{1-2\varepsilon}} \quad (0\leq x<\infty)$$

Приведем здесь так же формулы для скоростей точечного шпунта в двухслойной среде, при одинаковых глубинах обоих слоев. Для этого можно воспользоваться формулами (6.40), положив в них $k=0$, $k'=1$. При этом окажется

$$J_1=\frac{\pi}{2}, \quad J_2=0$$

Поэтому получим

$$u_1-iv_1=-\frac{x_1H}{2h}\left\{\exp(\pi i\varepsilon)\exp\left(\frac{\pi z}{h}\right)+\exp(-\pi i\varepsilon)\exp\left(-\frac{\pi z}{h}\right)\right\}\sec\frac{\pi z}{2hi}=$$

$$=-\frac{x_1H}{h}\sec\frac{\pi z}{2hi}\cos\pi\varepsilon\left(1-\frac{z}{hi}\right)$$

$$u_2-iv_2=\frac{x_1H\operatorname{tg}\pi\varepsilon}{h}\sec\frac{\pi z}{2hi}\sin\pi\varepsilon\left(1+\frac{z}{hi}\right)$$

где попрежнему

$$\frac{\pi}{2h}=\omega$$

По этим формулам для скоростей получаются выражения:

Вдоль линии раздела

$$\bar{u}_1=\frac{2\operatorname{ch}2\omega x}{\operatorname{ch}\omega x}\cos\pi\varepsilon, \quad \bar{v}_1=\frac{2\operatorname{sh}2\omega x}{\operatorname{ch}\omega x}\sin\pi\varepsilon \quad (0\leq x<\infty)$$

Вдоль вертикали в верхнем слое

$$\bar{v}_1=0, \quad \bar{u}_1=\frac{2\cos\pi\varepsilon(1-y/h)}{\cos\omega y} \quad (0<y<h)$$

Вдоль вертикали в нижнем слое

$$\bar{v}_2=0, \quad \bar{u}_2=2\operatorname{tg}\pi\varepsilon\frac{\sin\pi\varepsilon(y/h+\pi/2)}{\cos\omega y} \quad (0\leq y'<h)$$

Вдоль границы водоема

$$\bar{u}_1=0, \quad \bar{v}_1=\frac{2\operatorname{ch}2\omega x}{\operatorname{sh}\omega x} \quad (0\leq x<\infty)$$

Вдоль непроницаемой границы

$$\bar{v}_2=0, \quad \bar{u}_2=\frac{2\operatorname{sh}2\omega x}{\operatorname{sh}\omega x} \quad (0\leq x<\infty)$$

С помощью метода, примененного в этой главе, можно решить еще несколько симметричных задач о фильтрации в двуслойной среде: например, можно было бы рассмотреть флютбет, от середины которого отходит шпунт, или два симметричных флютбета. Но при этом увеличивается число особых точек, и приходится учитывать наличие побочных особенностей.

Можно было бы рассмотреть отношение

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = W(\zeta)$$

и построить область функции W .

Посмотрим, что можно здесь получить для только что рассмотренных задач.

Разделив уравнение

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i\Phi_1}{x_1} - \frac{i\Phi_2}{x_2} \right) = 0$$

на уравнение

$$\operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$$

на линии AB имеем

$$\operatorname{Im} \left(\frac{iW - i x_1/x_2}{W - 1} \right) = 0 \quad (6.43)$$

Это есть уравнение окружности, проходящей через точки

$$W = 1 \quad \text{и} \quad W = \frac{x_1}{x_2}$$

На остальных отрезках нельзя считать, что в формуле для W функции Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют тем условиям, которые выписаны на фиг. 33. Нужно, как это указывалось выше, например, на верхнем крае разреза заменить функцию Φ_1 на Φ_1^* . Тогда на основании формул (6.15) условия для функции Φ_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[(x_2 + x_1)\Phi_1 - 2x_1\Phi_2] &= 0, & \operatorname{Im}(\Phi_2) &= 0 & \text{при } -\infty < \zeta < 0 \\ \operatorname{Im}[(x_2 + x_1)\Phi_1 i - 2x_1 i \Phi_2] &= 0, & \operatorname{Im}(i\Phi_2) &= 0 & \text{при } 0 < \zeta < 1 \end{aligned} \quad (6.44)$$

Деля первое равенство (6.43) на второе, получим для $-\infty < \zeta < 0$

$$\operatorname{Im}[(x_2 + x_1)W - 2x_1] = 0$$

или

$$\operatorname{Im}(W) = 0.$$

Аналогично для $0 < \zeta < 1$

$$\operatorname{Im}[(x_1 + x_2)Wi - 2x_1 i] = 0$$

или

$$\operatorname{Im} \left(iW - \frac{2x_1 i}{x_2 + x_1} \right) = 0$$

Если положить

$$W = U + iV,$$

то полученные уравнения дают две прямые: действительную ось W и прямую

$$U = \frac{2x_1}{x_1 + x_2}$$

и на плоскости W образуется треугольник, ограниченный этими прямыми и окружностью (6.43).

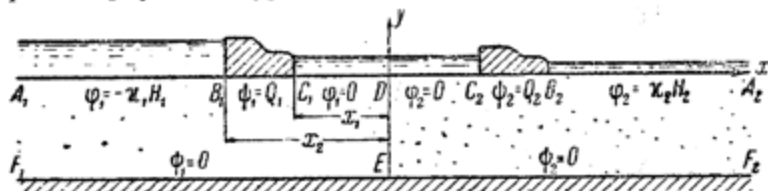
ФИЛЬТРАЦИЯ В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПОД ДВУМЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ¹

Здесь рассмотрен до конца симметричный случай двух флютбетов и несимметричный случай двух точечных шпунтов.

1. Два симметричных флютбета. Рассмотрим фильтрацию под двумя флютбетами одинаковой длины, расположенными симметрично относительно оси y (фиг. 70). В области, лежащей влево от оси y , имеем коэффициент фильтрации κ_1 , вправо — κ_2 . Все величины, относящиеся к элементам движения левой области, будем обозначать значком 1, для правой области — значком 2.

Движение считаем плоским и установившимся.

Будем считать, что разность уровней воды в первом и во втором бассейнах равна H_1 , разность уровней во втором и в третьем бассейнах обоз-



Фиг. 70.

начим через H_2 . Величина H_1 и H_2 представляют собой действующие напоры около каждого из флютбетов.

Установим граничные условия. Если положить на $C_1 D$ и $D C_2$ соответственно

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

то на $A_1 B_1$ и $B_2 A_2$ соответственно

$$\varphi_1 = -\kappa_1 H_1, \quad \varphi_2 = \kappa_2 H_2$$

Полагая на $F_1 E$ и на $E F_2$ соответственно

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0$$

на $B_1 C_1$ и $B_2 C_2$ соответственно считаем

$$\phi_1 = Q_1, \quad \phi_2 = Q_2$$

Тогда на границе DE двух областей будем иметь

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \frac{\varphi_1}{\kappa_1} = \frac{\varphi_2}{\kappa_2}$$

Введем вспомогательное комплексное переменное ζ , на верхнюю плоскость которого отобразим область $A_2 D E F_2$, на нижнюю область $A_1 D E F_1$.

¹ Настоящая задача была предложена А. М. Сенковым.

так, чтобы отрезок DE перешел в отрезок $(0, 1)$ плоскости ζ . Остальные точки расположатся, как указано на фиг. 71, где представлены также и

$$\begin{array}{ccccccc} A_2 \Im(F_2)=0 & B_2 \Im(F_2)=0 & C_2 \Im(F_2)=0 & D \Im\left(\frac{iF_1}{x_1} - \frac{iF_2}{x_2}\right)=0 & E \Im(F_2)=0 & F_2 \\ \hline A_1 \Im(iF_1)=0 & B_1 \Im(F_1)=0 & C_1 \Im(iF_1)=0 & \Im(F_1 - F_2)=0 & \Im(F_1)=0 & F_1 \end{array}$$

Фиг. 71.

условия, которые должны выполняться на соответствующих участках, для функций

$$F_1 = \frac{df_1}{d\zeta}, \quad F_2 = \frac{df_2}{d\zeta} \quad (7.1)$$

Аффиксы точек C_1 и C_2 обозначим через $-\gamma$, т. е.

$$c = -\gamma \quad (7.2)$$

аффиксы точек B_1 и B_2 через β , т. е.

$$b = \beta \quad (7.3)$$

Введем новые функции с помощью равенств

$$F_1 = \frac{\Phi_1}{\sqrt{(\zeta - b)(\zeta - c)}}, \quad F_2 = \frac{\Phi_2}{\sqrt{(\zeta - b)(\zeta - c)}} \quad (7.4)$$

получим, что Φ_1 и Φ_2 будут иметь точки b и c обыкновенными точками.

Условия на отрезках $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ примут теперь вид, изображенный на фиг. 72.

Для нахождения показателей около особых точек $\zeta=0, 1, \infty$ поступим так же, как в главе VII, где на отрезках имелись аналогичные условия.

$$\begin{array}{ccccc} \Im(i\Phi_2)=0 & \Im\left(\frac{i\Phi_1}{x_1} - \frac{i\Phi_2}{x_2}\right)=0 & \Im(\Phi_2)=0 \\ \hline \Im(i\Phi_1)=0 & 0 & \Im(\Phi_1 - \Phi_2)=0 & \Im(\Phi_1)=0 \end{array}$$

Фиг. 72.

В рассматриваемом случае функции Φ_1 и Φ_2 переставлены, и условия несколько проще, чем в задачах главы VI. Уравнения (6.13) имеют место и здесь:

$$\begin{aligned} \Phi_1^* &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \bar{\Phi}_1 - \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \bar{\Phi}_2 \\ \Phi_2^* &= \frac{2x_2}{x_1 - x_2} \bar{\Phi}_1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \bar{\Phi}_2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Считая, что на верхней стороне разреза условие при $-\infty < \zeta < 0$ имеет вид:

$$\Im(i\Phi_2^*)=0$$

а на нижней

$$\Im(i\Phi_1)=0$$

переписываем эти условия в виде

$$\Phi_1^* + \bar{\Phi}_2^* = 0, \quad \Phi_1 + \bar{\Phi}_1 = 0 \quad (7.6)$$

Складывая второе из уравнений (7.5) и сопряженное с ним, получим

$$\Phi_1 + \Phi_2^* = 0 \quad (7.7)$$

Поэтому, заменяя в (7.5) $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ с помощью уравнений (7.6) и (7.7) на $-\Phi_1$ и $-\Phi_2$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^* &= \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \Phi_1 - \frac{2x_1}{x_2 - x_1} \Phi_2 \\ \Phi_2^* &= \frac{2x_2}{x_2 - x_1} \Phi_1 - \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \Phi_2 \end{aligned}$$

т. е. уравнения (6.15). Следовательно, и корни характеристического уравнения будут те же, $\lambda = \pm 1$, а показатели около $\zeta = 0$ будут

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = -\frac{1}{2} \quad (7.8)$$

Около $\zeta = 1$ будем иметь уравнение (7.5). Условие на краях надреза $(1, \infty)$ можем записать так:

$$\operatorname{Im}(\Phi_2^*) = 0, \quad \operatorname{Im}(\Phi_1) = 0$$

или

$$\Phi_2^* = \bar{\Phi}_2^*, \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1$$

Тогда из уравнений (7.5) найдем, что $\bar{\Phi}_2 = \Phi_2$ и

$$\Phi_1^* = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 - \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \Phi_2$$

$$\Phi_2^* = \frac{2x_2}{x_1 - x_2} \Phi_1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \Phi_2$$

Отсюда характеристическое уравнение для точки $\zeta = 1$ получим в виде

$$\lambda^2 = 1,$$

т. е. $\lambda = \pm 1$, и показатели около $\zeta = 1$ будут

$$\beta = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{2} \quad (7.9)$$

Около $\zeta = \infty$ функции Φ_1 и Φ_2 имеют вид:

$$\Phi_1 = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta}}, \quad \Phi_2 = \frac{F_2}{\sqrt{\zeta}} \quad (7.10)$$

где F_1, F_2 регулярны при $\zeta = \infty$.

Следовательно, функции F_1 и F_2 имеют всего две особые точки $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ с показателями соответственно

$$0, \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 0, -\frac{1}{2}$$

По свойству линейного дифференциального уравнения с двумя регулярными особыми точками (см., например, Уиттекер и Ватсон «Современный анализ», гл. X) фундаментальная система решений, через которые линейно выражаются F_1 и F_2 , есть

$$\sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}}, \quad 1$$

Для Φ_1 и Φ_2 имеем фундаментальную систему

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\zeta}}$$

поэтому

$$\Phi_1 = \frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}}, \quad \Phi_2 = \frac{C}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Di}{\sqrt{1-\zeta}} \quad (7.11)$$

где A, B, C, D , как это нетрудно видеть, рассматривая условие при $\zeta < 0$, вещественные числа. Условия при $\zeta > 1$ тоже оказываются выполненными в уравнениях (7.11). Для того чтобы выполнялись условия на отрезке $(0, 1)$, необходимо положить

$$D = B, \quad C = \frac{x_2}{x_1} A \quad (7.12)$$

В самом деле

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} A \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)$$

и

$$\frac{i\Phi_1}{x_1} - \frac{i\Phi_2}{x_2} = -B \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}$$

действительны при $0 < \zeta < 1$.

Получаем теперь

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{1}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} \\ F_2 &= \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{1}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 + i\psi_1 = \int \left(\frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} \\ f_2 &= \varphi_2 + i\psi_2 = \int \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Для определения постоянных A и B воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} f_1(b) &= -x_1 H_1 + Q_1 i, & f_1(c) &= Q_1 i \\ f_2(b) &= x_2 H_2 + Q_2 i, & f_2(c) &= Q_2 i \end{aligned}$$

Поэтому по формулам (7.14) получим

$$\begin{aligned} \int_b^c \left(\frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} &= x_1 H_1 \\ \int_b^c \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{A}{\sqrt{\zeta}} + \frac{Bi}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(\zeta-c)}} &= -x_2 H_2 \end{aligned} \quad (7.15)$$

В промежутке интегрирования ζ отрицательно, так как $b < 0$ и $c < 0$. Поэтому нужно преобразовать $\sqrt{\zeta}$ и $\sqrt{\zeta-c}$. В области 1, которой соответствует нижняя полуплоскость ζ , при переходе от значений $\zeta > 0$ к $\zeta < 0$ имеем

$$\sqrt{\zeta} = -i\sqrt{-\zeta}$$

и аналогично

$$\sqrt{\zeta-c} = -i\sqrt{c-\zeta}$$

В области 2, где соответствующие обходы вокруг особой точки совершаются по полуокружности в положительном направлении, получаем для $\zeta < 0$

$$\sqrt{\zeta} = i\sqrt{-\zeta}$$

для $\zeta < c$

$$\sqrt{\zeta-c} = i\sqrt{c-\zeta}$$

Поэтому уравнения (7.15) принимают вид:

$$\begin{aligned} \int_b^c \left(\frac{A}{\sqrt{-\zeta}} - \frac{B}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(c-\zeta)}} &= -x_1 H_1 \\ \int_b^c \left(-\frac{x_2}{x_1} \frac{A}{\sqrt{-\zeta}} + \frac{B}{\sqrt{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-b)(c-\zeta)}} &= -x_2 H_2 \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений последовательно B и A , найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2} + 1 \right) A \int_b^c \frac{d\zeta}{\sqrt{-\zeta}(\zeta-b)(c-\zeta)} &= -x_1 H_1 + x_2 H_2 \\ \left(\frac{x_2}{x_1} + 1 \right) B \int_b^c \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-b)(c-\zeta)}} &= -x_2 H_2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

В этих равенствах положим

$$b = -\beta, \quad c = -\gamma, \quad \zeta = -\beta + (\beta - \gamma) \sin^2 \theta$$

Тогда будем иметь

$$2A \left(\frac{x_2}{x_1} + 1 \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - (\beta - \gamma) \sin^2 \theta}} = x_2 H_2 - x_1 H_1$$

$$2B \left(\frac{x_2}{x_1} + 1 \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \beta - (\beta - \gamma) \sin^2 \theta}} = -x_2 (H_1 + H_2)$$

Отсюда

$$A = -\frac{x_1 (x_1 H_2 - x_2 H_1) \sqrt{\beta}}{2(x_1 + x_2) K((\beta - \gamma) / \beta)} = -A'$$

$$B = -\frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2) \sqrt{1 + \beta}}{2(x_1 + x_2) K((\beta - \gamma) / (\beta + 1))} = -B' \quad (7.17)$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k ; в A входит интеграл с модулем k' ; при этом

$$k^2 = \frac{\gamma}{\beta}, \quad k'^2 = \frac{\beta - \gamma}{\beta} \quad (7.18)$$

В B входит интеграл с модулем k_1' , где

$$k_1^2 = \frac{1 + \gamma}{1 + \beta}, \quad k_1'^2 = \frac{\beta - \gamma}{\beta + 1} \quad (7.19)$$

Зависимость между ζ и z имеет вид:

$$\zeta = \sin^2 \frac{\pi z i}{2h}$$

Поэтому, вводя обозначение

$$\frac{\pi}{2h} = \omega$$

имеем

$$\gamma = \text{sh}^2 \omega x_1, \quad \beta = \text{sh}^2 \omega x_2 \quad (7.20)$$

где x_1 и x_2 — отрезки, изображенные на фиг. 70.

Пользуясь (7.20), перепишем формулы (7.17) для A' и B' :

$$A' = \frac{x_1 (x_1 H_2 - x_2 H_1) \text{sh} \omega x_2}{2(x_1 + x_2) K(1 - \text{sh}^2 \omega x_1 / \text{sh}^2 \omega x_2)} \quad (7.21)$$

$$B' = \frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2) \text{ch} \omega x_2}{2(x_1 + x_2) K\{(\text{sh}^2 \omega x_2 - \text{sh}^2 \omega x_1) / \text{ch}^2 \omega x_1\}}$$

Найдем теперь выражения комплексной скорости для первой и второй среды. Имеем

$$u_k - iv_k = \frac{df_k}{dz} = F_k \frac{dz}{dz} \quad (k = 1, 2)$$

или

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\pi i}{h} \frac{A' \cos \omega iz + B' i \sin \omega iz}{\sqrt{(\sin^2 \omega iz + \text{sh}^2 \omega x_1)(\sin^2 \omega iz + \text{sh}^2 \omega x_2)}} \quad (7.22)$$

Аналогичным образом найдем

$$u_2 - iv_2 = -\frac{\pi i}{h} \frac{x_2 / x_1 A' \cos \omega iz + B' i \sin \omega iz}{\sqrt{(\sin^2 \omega iz + \text{sh}^2 \omega x_1)(\sin^2 \omega iz + \text{sh}^2 \omega x_2)}} \quad (7.23)$$

В частности, на отдельных участках контура выражения для скоростей будут:

вдоль DC_2 , где $z = x < x_1$,

$$u_1 = 0, \quad v_2 = \frac{\pi}{h} \frac{x_2 / x_1 A' \text{ch} \omega x - B' \text{sh} \omega x}{\sqrt{(\text{sh}^2 \omega x_1 - \text{sh}^2 \omega x)(\text{sh}^2 \omega x_2 - \text{sh}^2 \omega x)}}$$

вдоль $C_2 B_2$, где $x_1 < x < x_2$,

$$v_1 = 0, \quad u_2 = -\frac{\pi}{h} \frac{x_2 / x_1 A' \text{ch} \omega x - B' \text{sh} \omega x}{\sqrt{(\text{sh}^2 \omega x - \text{sh}^2 \omega x_2)(\text{sh}^2 \omega x_2 - \text{sh}^2 \omega x)}}$$

вдоль B_1A_1 , где $x > x_1$,

$$u_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{\pi}{h} \frac{x_2/x_1 A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x - \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\operatorname{sh}^2 \omega x - \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

вдоль EF_2 , где $z = -hi + x$,

$$v_2 = 0, \quad u_2 = -\frac{\pi}{h} \frac{x_2/x_1 A' \operatorname{sh} \omega x + B' \operatorname{ch} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 \omega x + \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\operatorname{ch}^2 \omega x + \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

вдоль DC_1

$$u_1 = 0, \quad v_1 = \frac{\pi}{h} \frac{A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x_1 - \operatorname{sh}^2 \omega x)(\operatorname{sh}^2 \omega x_2 - \operatorname{sh}^2 \omega x)}}$$

вдоль B_1C_1

$$v_1 = 0, \quad u_1 = \frac{\pi}{h} \frac{A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x - \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\operatorname{sh}^2 \omega x_2 - \operatorname{sh}^2 \omega x)}}$$

вдоль A_1B_1

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{\pi}{h} \frac{A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x - \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\operatorname{sh}^2 \omega x - \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

вдоль F_1E

$$v_1 = 0, \quad u_1 = -\frac{\pi}{h} \frac{A' \operatorname{sh} \omega x + B' \operatorname{ch} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 \omega x + \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\operatorname{ch}^2 \omega x + \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

вдоль DE , где $z = yi$, $0 > y > -h$,

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\pi}{h} \frac{B' \sin \omega y + i A' \cos \omega y}{\sqrt{(\sin^2 \omega y + \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\sin^2 \omega y + \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

$$u_2 - iv_2 = -\frac{\pi}{h} \frac{B' \sin \omega y + i x_2/x_1 A' \cos \omega y}{\sqrt{(\sin^2 \omega y + \operatorname{sh}^2 \omega x_1)(\sin^2 \omega y + \operatorname{sh}^2 \omega x_2)}}$$

где, напомним, всюду

$$\omega = \frac{\pi}{2h}$$

Пользуясь этими соотношениями, нетрудно проверить, что все условия на всех участках контура выполняются.

Рассмотрим, в частности, скорости на границе второго водного бассейна, т. е. на линиях DC_1 и DC_2 , где $-x_1 < x < x_1$. Здесь

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{\pi}{h} \frac{A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x_1 - \operatorname{sh}^2 \omega x)(\operatorname{sh}^2 \omega x_2 - \operatorname{sh}^2 \omega x)}} \quad (-x_1 < x < 0) \quad (7.24)$$

$$v_2 = \frac{\pi}{h} \frac{x_2/x_1 A' \operatorname{ch} \omega x - B' \operatorname{sh} \omega x}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 \omega x_1 - \operatorname{sh}^2 \omega x)(\operatorname{sh}^2 \omega x_2 - \operatorname{sh}^2 \omega x)}} \quad (0 < x < x_1) \quad (7.25)$$

Величина B' всегда будет положительной. Если A' также положительно, то найдется такая точка на участке DC_1 , в которой скорость обращается в нуль. Обозначим эту точку через x_0 . Тогда

$$\operatorname{th} \omega x_0 = \frac{A'}{B'} = \frac{(x_2 H_1 - x_1 H_2) K(k_1')}{x_1 (H_1 + H_2) K(k')} \operatorname{th} \omega x_2 \quad (7.26)$$

Действительно, если $x_1 H_1 > x_2 H_2$, $A' > 0$

В этом случае правая часть (7.26) положительна и притом меньше единицы. Последнее следует из того, что по (7.18) и (7.19)

$$k_1' < k'$$

следовательно, $K(k_1') < K(k')$ и два других множителя правой части (7.26) также меньше единицы.

Если же $x_1 H_1 < x_2 H_2$, то

$$A' < 0$$

оба члена числителя в формуле (7.25) отрицательны, и v_2 не может обратиться в нуль. Но тогда найдется точка, в которой v_1 обращается в нуль:

$$\operatorname{th} \pi x_0 = -\frac{z_2 H_2 - z_1 H_1}{z_2 (H_1 + H_2)} \frac{K(k_1)}{K(k)} \operatorname{th} \omega x_2 \quad (7.27)$$

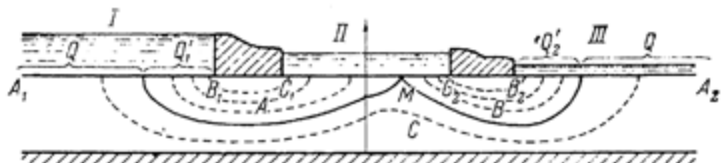
Действительно, при этом $x_0 < 0$, а в правой части стоит отрицательное число, по абсолютному значению меньшее единицы.

Если $x_1 H_1 = x_2 H_2$, то

$$x_0 = 0$$

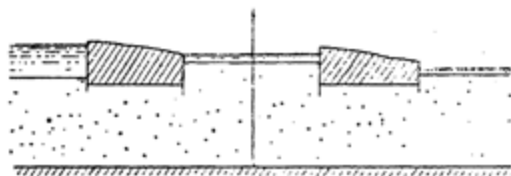
В этом случае нет преломления скорости вдоль линии раздела двух сред.

Картина линий тока имеет вид, изображенный на фиг. 73, где взято $x_1 H_1 > x_2 H_2$. Вся область движения может быть разбита на три части.



Фиг. 73.

В область A вода поступает из I бассейна, причем вся поступившая в эту область вода выходит во II бассейн. В область B вода поступает из II бассейна и выходит в бассейн III. Наконец, область C такова, что жидкость в нее поступает из I бассейна и выходит в бассейн III. Представляет интерес вычисление расходов жидкости через различные участки контура, в частности, вопрос о том, какое количество жидкости может переходить из I бассейна в III.



Фиг. 74.

Пусть на линии (фиг. 73), отделяющей область C от областей A и B, функция $\psi = Q$ (т. е. $\psi_1 = Q$, $\psi_2 = Q$). Расход Q_1 через отрезок $A_1 B_1$ может быть представлен в виде суммы

$$Q_1 = Q_1' + Q$$

Расход Q_2 через отрезок $B_2 A_2$ может быть представлен в виде суммы

$$Q_2 = Q' + Q$$

Для расходов Q_1 и Q_2 имеем выражения

$$Q_1 = i \int_{-\infty}^{-\beta} \left(\frac{A'}{\sqrt{\xi}} + \frac{B_1'}{\sqrt{1-\xi}} \right) \frac{d\xi}{V(\xi+\beta)(\xi+\gamma)} = \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{A'}{\sqrt{\tau}} + \frac{B'}{\sqrt{\tau+1}} \right) \frac{d\tau}{V(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$Q_2 = i \int_{-\infty}^{-\beta} \left(\frac{z_2}{z_1} \frac{A'}{\sqrt{\xi}} + \frac{B_1'}{\sqrt{1-\xi}} \right) \frac{d\xi}{V(\xi+\beta)(\xi+\gamma)} =$$

$$= \int_{\beta}^{\infty} \left(-\frac{z_2}{z_1} \frac{A'}{\sqrt{\tau}} + \frac{B'}{\sqrt{\tau+1}} \right) \frac{d\tau}{V(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Полагая $\tau = \frac{\beta}{x^2}$, найдем

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{d\tau}{V^{\tau}(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \frac{2}{V^{\beta}} K\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

Полагая $\tau + 1 = (1 + \beta)/x^2$, получим

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{d\tau}{V^{(1+\tau)}(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \frac{2}{V^{\beta+1}} K\left(\frac{1+\gamma}{1+\beta}\right)$$

Таким образом

$$Q_1 = \frac{x_1(x_1 H_1 - x_2 H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K(\gamma/\beta)}{K((1-\gamma)/\beta)} + \frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K((1+\gamma)/(1+\beta))}{K((\beta-\gamma)/(1+\beta))}$$

$$Q_2 = -\frac{x_2(x_1 H_1 - x_2 H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K(\gamma/\beta)}{K((1-\gamma)/\beta)} + \frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K((1+\gamma)/(1+\beta))}{K((\beta-\gamma)/(1+\beta))}$$

Или, пользуясь обозначениями (7.19) и (7.20):

$$Q_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \left[(x_1 H_1 - x_2 H_2) \frac{K(k^2)}{K(k'^2)} + x_2 (H_1 + H_2) \frac{K(k_1^2)}{K(k_1'^2)} \right]$$

$$Q_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \left[-(x_1 H_1 - x_2 H_2) \frac{K(k^2)}{K(k'^2)} + x_1 (H_1 + H_2) \frac{K(k_1^2)}{K(k_1'^2)} \right] \quad (7.28)$$

Для вычисления расхода Q рассмотрим интеграл от F_2 вдоль отрезка MC_2 , причем для определенности считаем $x_1 H_1 > x_2 H_2$. Полагая, что $x = x_0$, при $\zeta = \zeta_0 = -\tau_0$, имеем

$$f_2(\zeta_0) = Qi, \quad f_2(c) = Q_2 i$$

Поэтому

$$\int_{\zeta_0}^c F_2 d\zeta = (Q_2 - Q) i = - \int_{\zeta_0}^c \left(\frac{x_2 A'}{x_1 V^{\zeta}} + \frac{B' i}{V^{1-\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{V^{(\zeta-b)(\zeta-c)}}$$

или

$$Q_2 - Q = \int_{\tau_0}^{\gamma} \left(-\frac{x_2 A}{x_1 V^{\tau}} + \frac{B}{V^{1+\tau}} \right) \frac{d\tau}{V^{(\beta-\tau)(\gamma-\tau)}} \quad (7.29)$$

Здесь

$$\tau_0 = \text{sh}^2 \omega x_0 \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right) \quad (7.30)$$

Полагая в первом из интегралов (7.29)

$$\tau = \gamma \sin^2 \theta$$

во втором

$$1 + \tau = (1 + \gamma) \sin^2 \theta$$

получим

$$\int_{\tau_0}^{\gamma} \frac{d\tau}{V^{\tau}(\beta-\tau)(\gamma-\tau)} = \frac{2}{V^{\beta}} \left[K\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) - F\left(\frac{\gamma}{\beta}, \theta_1\right) \right]$$

$$\theta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} = \arcsin \frac{\text{sh } \omega x_0}{\text{sh } \omega x_1}$$

$$\int_{\tau_0}^{\gamma} \frac{d\tau}{V^{(1+\tau)}(\beta-\tau)(\gamma-\tau)} = \frac{2}{V^{\beta+1}} \left[K\left(\frac{1+\gamma}{1+\beta}\right) - F\left(\frac{1+\gamma}{1+\beta}, \theta_2\right) \right]$$

$$\theta_2 = \arcsin \sqrt{\frac{\tau_0-1}{\gamma+1}} = \arcsin \frac{\text{ch } \omega x_0}{\text{ch } \omega x_1}$$

Тогда формула (7.29) дает

$$Q_2 - Q = -\frac{x_2(x_1 H_1 - x_2 H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K(\gamma/\beta, \theta_1)}{K((\beta-\gamma)/\beta)}$$

$$-\frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2)}{x_1 + x_2} \frac{K((1+\gamma)/(1+\beta)) - F((1+\gamma)/(1+\beta), \theta_2)}{K((\beta-\gamma)/(\beta+1))}$$

Принимая во внимание выражения (7.28) для Q_1 и Q_2 , найдем

$$Q = \frac{x_1 x_2 (H_1 + H_2)}{x_1 + x_2} \frac{F(k_1^2, \theta_2)}{K(k_1'^2)} - \frac{x_2 (x_1 H_1 - x_2 H_2)}{x_1 + x_2} \frac{F(k^2, \theta_1)}{K(k'^2)} \quad (7.31)$$

При подсчетах, проведенных для случая, интересовавшего А. М. Сенкова, было принято

$$H_1 = H_2, \quad h = 10 \div 20 \text{ м} \\ x_2 = 0.0001 x_1, \quad x \gg 200 \text{ м}, \quad x_2 \gg 240 \text{ м}$$

При таких условиях оказалось, что расходы можно вычислять для каждого флютбета так, как если бы второго флютбета вовсе не было. Расход Q оказался совершенно ничтожным по сравнению с расходами Q_1 и Q_2 .

Укажем здесь на один из возможных способов построения линий тока рассматриваемого движения.

Интегрируя по z уравнение (7.22) и принимая для простоты $h = \pi/2$, получим:

$$\varphi_1 + i\psi_1 = -2A' \int_0^z \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{V(a^2 - \operatorname{sh}^2 z)(b^2 - \operatorname{sh}^2 z)} + 2B' \int_0^z \frac{\operatorname{sh} z \, dz}{(a^2 - \operatorname{sh}^2 z)(b^2 - \operatorname{sh}^2 z)} \\ (a^2 = \operatorname{sh}^2 x_1, \quad b^2 = \operatorname{sh}^2 x_2)$$

Полагая в первом из полученных интегралов

$$\operatorname{sh} z = at$$

во втором

$$\operatorname{ch} z = \sqrt{a^2 + 1}$$

получим

$$\varphi_1 + i\psi_1 = -\frac{2Bt}{Vb^2 + 1} \int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\frac{a^2}{b^2+1}t^2)} + \frac{2Ai}{b} \int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\frac{a^2}{b^2+1}t^2)}$$

Полагая

$$\int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\frac{a^2}{b^2+1}t^2)} = u, \quad \int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\frac{a^2}{b^2+1}t^2)} = v$$

получим

$$\operatorname{ch} z = \sqrt{a^2 + 1} \operatorname{sn}\left(u, \sqrt{\frac{a^2 + 1}{b^2 + 1}}\right) \quad (7.32)$$

$$\operatorname{sh} z = -a \operatorname{sn}\left(v, \frac{a}{b}\right) \quad (7.33)$$

Поэтому

$$\varphi_1 + i\psi_1 = \frac{2B'i}{Vb^2 + 1} (u' + iu'') + \frac{2A'i}{b} (v' + iv'')$$

где u' и v' — действительные, u'' и v'' — мнимые части соответственно функций u и v .

Отсюда найдем ψ_1 :

$$\psi_1 = \frac{2B'}{Vb^2 + 1} u'' - \frac{2A'}{b} v'' \quad (7.34)$$

Если построить линии

$$u'' = \text{const}, \quad v'' = \text{const} \quad (7.35)$$

то, применяя способ Максвелла графического сложения изолиний, можно построить, пользуясь уравнениями (7.35), линии $\psi_1 = \text{const}$.

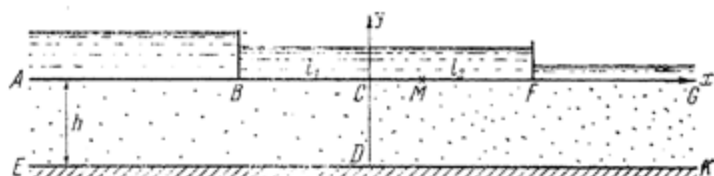
Что касается линий (7.35), то они могут быть построены при помощи уравнений (7.32) и (7.33), если в них считать постоянной мнимую часть аргументов эллиптических функций.

2. **Случай двух симметричных гидротехнических сооружений произвольной формы.** Задача может быть решена также в случае, когда основания гидротехнических сооружений имеют произвольную форму, если только они симметричны относительно оси y (линии раздела двух сред) и если мы умеем найти конформное отображение области (1) или (2) на полуплоскость. Формулы этого параграфа (7.1) и (7.19) при этом сохраняются, зависимость же между ζ и z будет иная.

Заметим, что напоры H_1 и H_2 могут иметь разный знак, — тогда получим приток воды к среднему бассейну из обоих крайних или, наоборот, приток воды в крайние бассейны из среднего. Такое явление имеет место в случае котлована, который представляет собой углубление, ограниченное двумя рядами параллельных шпунтов (иногда четырьмя рядами), и который устраивается для производства работ при возведении гидротехнического сооружения.

3. **Два несимметричных точечных шпунта.** Этот случай изображен на фиг. 75.

Если отобразить конформно область движения на надрезанную плоскость, как это делалось в случае двух флютбетов, то получим, что на верхнем



Фиг. 75.

краю разреза есть особенность в точке $\zeta = -a$, а на нижнем краю разреза — особенность в точке $\zeta = -b$. При обходах вокруг точки C получим различные листы римановой поверхности, причем если точку $\zeta = -a$ возьмем, например, на верхнем листе этой поверхности, то точка $\zeta = -b$ будет расположена на нижнем.

Проанализировав решение задачи для двух точечных шпунтов, изображенных на фиг. 76, но в однородной среде, т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2$, можно прийти к зак-

$$\begin{array}{ccccccc} G \Im(F_2)=0 & F_1-a & \Im(F_2)=0 & C \Im\left(\frac{iF_1}{x_1}-\frac{iF_2}{x_2}\right)=0 & D & \Im(iF_2)=0 & K \\ \hline A & \Im(F_1)=0 & B-b & J(F_1)=0 & 0 & \Im(F_1-F_2)=0 & 1 & \Im(iF_1)=0 & E \end{array}$$

Фиг. 76.

лючению, что функции F_1 и F_2 для задачи с двумя различными коэффициентами фильтрации следует искать в виде:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\zeta+a} \left(\frac{Ai}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{B}{\sqrt{\zeta}} \right) + \frac{1}{\zeta+b} \left(\frac{Ci}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{D}{\sqrt{\zeta}} \right) \\ F_2 &= \frac{1}{\zeta+a} \left(\frac{Ki}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{L}{\sqrt{\zeta}} \right) + \frac{1}{\zeta+b} \left(\frac{Mi}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{N}{\sqrt{\zeta}} \right) \end{aligned}$$

Условия, которые должны выполняться на отрезках надрезанной плоскости ζ , приводят к соотношениям между постоянными

$$K=A, \quad M=C, \quad L=\frac{x_2}{x_1}B, \quad N=\frac{x_2}{x_1}D$$

так что выражения для F_1 и F_2 примут вид:

$$F_1 = \frac{Ai\sqrt{\zeta} + B\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta+a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{Ci\sqrt{\zeta} + D\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta+b)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}$$

$$F_2 = \frac{Ai\sqrt{\zeta} + B\sqrt{1-\zeta}x_2/x_1}{(\zeta+a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{Ci\sqrt{\zeta} + D\sqrt{1-\zeta}x_2/x_1}{(\zeta+b)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}$$

Беря полувычеты функций F_1 и F_2 около точек $\zeta = -a$ и $\zeta = -b$, найдем

$$\pi \frac{-A\sqrt{a} + B\sqrt{1+a}}{\sqrt{a(1+a)}} = x_1 H_1$$

$$\pi \frac{C\sqrt{b} + D\sqrt{1+b}x_2/x_1}{\sqrt{b(1+b)}} = -x_2 H_2$$

$$\pi \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{1+a}x_2/x_1}{\sqrt{a(1+a)}} = 0$$

$$\pi \frac{-C\sqrt{b} + D\sqrt{1+b}}{\sqrt{b(1+b)}} = 0$$

Отображение наших областей на плоскость ζ дается, как и раньше, формулой

$$\zeta = \sin^2 \frac{\pi z}{2hi}$$

Поэтому имеем

$$a = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi l_1}{2h}, \quad b = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi l_2}{2h}$$

где l_1 и l_2 — длины отрезков CB и CF ($l_1, l_2 > 0$).

Для постоянных получим значения

$$A = -\frac{x_1 x_2 H_1}{\pi(x_1 + x_2)} \operatorname{ch} \omega l_2, \quad C = -\frac{x_1 x_2 H_2}{\pi(x_1 + x_2)} \operatorname{ch} \omega l_1, \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2h}\right)$$

$$B = -\frac{x_1 x_2 H_1}{\pi(x_1 + x_2)} \operatorname{sh} \omega l_2, \quad D = \frac{x_1 x_2 H_2}{\pi(x_1 + x_2)} \operatorname{sh} \omega l_1$$

Окончательные формулы для скоростей имеют такой вид:

$$u_1 - iv_2 = -\frac{x_1 x_2 i}{h(x_1 + x_2)} \left[\frac{H_1 (-\operatorname{ch} \omega l_1 \operatorname{sh} \omega z + \operatorname{sh} \omega l_1 \operatorname{ch} \omega z) x_1 / x_2}{\operatorname{sh} \omega(l_1 + z) \operatorname{sh} \omega(l_1 - z)} - \frac{H_2}{\operatorname{sh} \omega(l_2 - z)} \right]$$

$$u_1 - iv_2 = -\frac{x_1 x_2 i}{h(x_1 + x_2)} \left[\frac{H_1}{\operatorname{sh} \omega(l_1 + z)} - \frac{H_2 (\operatorname{ch} \omega l_2 \operatorname{sh} \omega z + \operatorname{sh} \omega l_2 \operatorname{ch} \omega z) x_2 / x_1}{\operatorname{sh} \omega(l_2 + z) \operatorname{sh} \omega(l_2 - z)} \right] \quad (7.36)$$

Если точка M на границе среднего водоема, в которой скорость обращается в нуль, лежит во второй области (где $x > 0$), то абсцисса x_0 этой точки определяется уравнением

$$H_1 \operatorname{sh} \omega(l_1 + x_0) \operatorname{sh} \omega(l_2 - x_0) =$$

$$= H_2 (\operatorname{ch} \omega l_2 \operatorname{sh} \omega x_0 + \operatorname{sh} \omega l_2 \operatorname{ch} \omega x_0 x_2 / x_1) \operatorname{sh} \omega(l_1 + x_0) \quad (7.37)$$

Если эта точка лежит в первой области, то в уравнении (7.37) нужно заменить H_2 , l_2 , x_2 на H_1 , l_1 , x_1 и, наоборот и x_0 заменить на $-x_0$.

Положив для краткости

$$\omega x_0 = \frac{\pi x_0}{2h} = \xi, \quad \omega l_1 = \frac{\pi l_1}{2h} = \alpha_1, \quad \omega l_2 = \frac{\pi l_2}{2h} = \alpha_2, \quad \frac{H_2}{H_1} = H, \quad \frac{x_2}{x_1} = x$$

получим из уравнения (7.37)

$$\operatorname{th} \xi = \frac{-H(\operatorname{ch} a_2 \operatorname{sh} a_1 + x \operatorname{sh} a_2 \operatorname{ch} a_1)}{2 \operatorname{ch} a_2 (\operatorname{ch} a_2 + H \operatorname{ch} a_1)} + \\ + \frac{\sqrt{[H(\operatorname{ch} a_2 \operatorname{sh} a_1 - x \operatorname{sh} a_2 \operatorname{ch} a_1) + \operatorname{sh} 2a_2]^2 + 2H(x+1) \operatorname{sh} 2a_2 \operatorname{sh}(a_2 - a_1)}}{2 \operatorname{ch} a_2 (\operatorname{ch} a_2 + H \operatorname{ch} a_1)}$$

При $l_1 = l_2 = l$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$, уравнение приобретает вид:

$$\operatorname{th} \frac{\pi x_0}{2h} = \frac{H_1 x_1 + H_2 x_2}{x_1 (H_1 + H_2)} \operatorname{th} \frac{\pi l}{2h}$$

4. Точечный шпунт в бесконечной полуплоскости. Положим в формулах предыдущего параграфа $H_2 = 0$. Тогда будем иметь шпунт лишь в точке $z = -l_1$. Обозначим

$$-l_1 = l, \quad H_1 = H$$

Тогда формулы (7.36) примут вид:

$$u_1 - iv_1 = \frac{x_1 x_2 H}{ih(x_1 + x_2)} \frac{\operatorname{ch} \omega l \operatorname{sh} \omega z + \operatorname{sh} \omega l \operatorname{ch} \omega z x_1 / x_2}{\operatorname{sh} \omega(z-l) \operatorname{sh} \omega(z+l)} \\ u_2 - iv_2 = \frac{x_1 x_2 H}{ih(x_1 + x_2)} \frac{1}{\operatorname{sh} \omega(z-l)} \\ \left(\omega = \frac{\pi}{2h} \right) \quad (7.38)$$

Рассмотрим теперь случай грунта бесконечной глубины, т. е. положим $h = \infty$. Уравнение (7.38) после преобразований примет вид:

$$u_1 - iv_1 = \frac{x_2 H}{\pi i} \left\{ \frac{1}{z-l} + \frac{\lambda}{z+l} \right\} \\ u_2 - iv_2 = \frac{x_2 H}{\pi i} (1-\lambda) \frac{1}{z-l} \quad (7.39)$$

где

$$\lambda = \frac{x_1 - x_2}{x_2 + x_1}$$

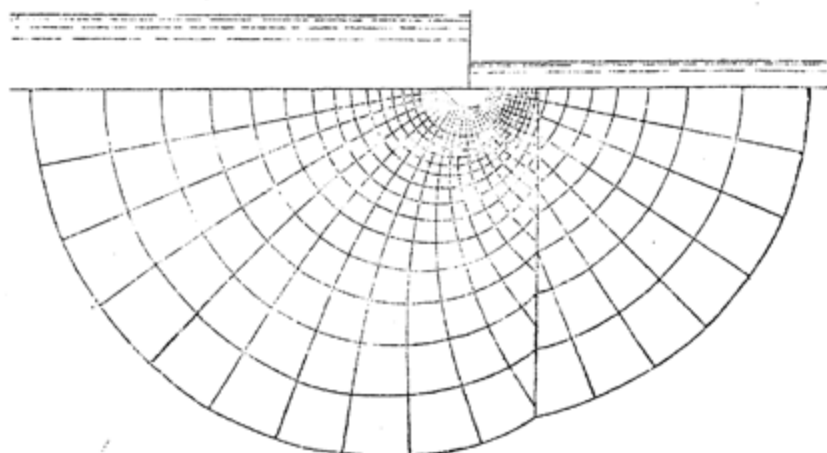
Если линия раздела между двумя грунтами есть ось абсцисс плоскости x и точечный вихрь в области 1 помещается в точке $z = z_0$, то комплексные скорости соответственно в областях 1 и 2 будут иметь вид:

$$u_1 - iv_1 = \frac{x_2 \Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z - z_0} + \frac{\lambda}{z - \bar{z}_0} \right\} \\ u_2 - iv_2 = \frac{x_2 \Gamma}{2\pi i} \frac{1 - \lambda}{z - z_0} \quad (7.40)$$

Здесь Γ — величина, характеризующая интенсивность точечного вихря. В этом случае нельзя говорить о точечном шпунте, так как среди линий равного потенциала нет горизонтальной прямой, которая могла бы быть принятой за границу водного бассейна. Однако рассмотрение точечного вихря в теории фильтрации грунтовых вод является полезным, так как с помощью подбора системы вихрей подходящей интенсивности можно решать задачи об обтекании гидротехнических сооружений. Формулы вида (7.39) и (7.40) были даны С. В. Фальковичем^[39], так сказать, конструктивным путем, т. е. автор показал справедливость их путем проверки выполнения условий на границах. С помощью этих формул он строит затем решение некоторых задач, в частности, задач 1 и 3 этой главы.

Если первые части формул (7.40) умножить на i , то вместо точечного вихря получим точечный сток или источник в полуплоскости с коэффициентом фильтрации x_1 , в то время как в другой полуплоскости находится грунт с коэффициентом фильтрации x_2 .

На фиг. 77 построены линии тока и линии равного потенциала для точечного шпунта в среде 1, когда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3}$.



Фиг. 77.

Интегрируя уравнения (7.39), получим для комплексного потенциала областей 1 и 2 соответственно

$$f_1(z) = \frac{x_1 H}{\pi i} \{ \lg(z-l) + \lambda \lg(z+l) \} + c_1 \quad (7.41)$$

$$f_2(z) = \frac{x_2 H}{\pi i} (1-\lambda) \lg(z-l) + c_2$$

Нетрудно видеть, что в первой области линии тока представляют собой «обобщенные лемнискаты», т. е. линии, уравнение которых есть

$$|z-l||z+l|^\lambda = \text{const}$$

Во второй области линии тока являются окружностями.

ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМ СООРУЖЕНИЕМ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

В этой главе рассматривается плоская задача о движении грунтовых вод под гидротехническим сооружением в среде, состоящей из горизонтальных слоев грунта различной проницаемости. Основание гидротехнического сооружения (водонепроницаемое) представляет дугу аналитической кривой.

Для решения этой задачи можно поступить подобно тому, как это делается в теории обтекания тел, а именно, заменить контур основания гидротехнического сооружения системой точечных вихрей и подбирать плотность интенсивности этих вихрей так, чтобы удовлетворялось условие на контуре (нормальная составляющая скорости равна нулю). При этом оказалось возможным применить комбинацию приемов, разработанных в последнее время в теории волн и теории крыла Н. Е. Кочкиным^[22], Л. И. Седовым^[26, 28], М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым^[18].

Задача состоит из трех частей. Прежде всего нужно найти скорости, вызываемые отдельным вихрем, находящимся в области движения. Вторая часть состоит в составлении интегрального уравнения для интенсивности вихрей. Третья часть состоит в отыскании решения интегрального уравнения.

Первая часть задачи решена Б. К. Ризенкампом^[34] для случая точечного вихря в двуслойной среде, где нижний слой бесконечно глубок, причем автор указывает на возможность решения задачи для любого числа слоев любой глубины.

В этой работе в параграфе первом задача об определении скоростей в многослойной среде при наличии точечного вихря решается с помощью интеграла Фурье.

В параграфе втором дается вывод интегрального уравнения задачи так, как это сделано М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым^[18], и приводится интегральное уравнение для случая незаглубленного флютбета. Интегральное уравнение для указанного выше частного случая составлено Б. К. Ризенкампом.

В параграфе третьем к отысканию решения интегральных уравнений применяется метод Л. И. Седова, причем решение ищется в виде ряда, расположенного по некоторым параметрам задачи.

1. Точечный вихрь в многослойной области. Рассматриваемая схема представлена на фиг. 78, где изображен горизонтальный слой грунта толщины h_1 с коэффициентом фильтрации χ_1 , далее слой толщины h_2 с коэффициентом фильтрации χ_2 и т. д., наконец, нижний слой грунта толщины h_n с коэффициентом фильтрации χ_n .

Наряду с величинами h_i будем рассматривать их суммы d_i так, что

$$d_1 = h_1, \quad d_2 = h_1 + h_2, \dots, \quad d_n = h_1 + h_2 + \dots + h_n$$

Линия $y = -d_n$ представляет непроницаемую границу.

В точке $\zeta = \xi + i\eta$ верхнего слоя поместим точечный вихрь, интенсивность которого равна единице. Обозначим через $w_r = u_r - iv_r$ комплексную скорость в точке z , принадлежащей r -му слою, обусловленную наличием точечного вихря в точке ζ . Будем искать функцию w_r в виде интеграла Фурье;

$$w_r(z) = \int_0^{\infty} [A_r(x) \exp(izx) + B_r(x) \exp(-izx)] dx \quad (r = 2, 3, \dots, n) \quad (8.1)$$

где $A_r(x)$ и $B_r(x)$ — комплексные функции действительной переменной x .

Что касается скорости в точке верхнего слоя, содержащего точечный вихрь, то в ее выражении выделим член, соответствующий этому вихрю:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \zeta}$$

Вдоль оси x , соответствующей границе водного бассейна, горизонтальная составляющая скорости равна нулю, что можно записать так:

$$\text{Im}(iw_1) = 0$$

Фиг. 78.

где Im обозначает мнимую часть комплексного числа.

Отсюда следует, что функция комплексного переменного iw_1 может быть продолжена в верхнюю полуплоскость (в область, представляющую собой полосу между прямыми $y=0$ и $y=+h_1$), причем в точке z функция iw_1 переходит в $-i\bar{w}_1$. Это обстоятельство позволяет искать w_1 в виде

$$w_1 = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \bar{\zeta}} + \int_0^{\infty} [A_1(x) \exp(izx) + B_1(x) \exp(-izx)] dx \quad (8.2)$$

где

$$B_1(x) = -\overline{A_1(x)} \quad (8.3)$$

На непроницаемой границе нижнего n -го слоя вертикальная скорость должна равняться нулю. Это определяет зависимость между $A_n(x)$ и $B_n(x)$ такого вида:

$$B_n(x) = \exp(2d_n x) \overline{A_n(x)}. \quad (8.4)$$

Теперь рассмотрим условия на границе r -го и $r+1$ -го слоев. Как известно, на линии раздела двух сред с различными коэффициентами фильтрации нормальная скорость должна быть непрерывной, касательные же составляющие пропорциональны соответствующим коэффициентам фильтрации. Поэтому при $y = -d_r$ имеем

$$v_{r+1} = v_r, \quad \frac{u_{r+1}}{x_{r+1}} = \frac{u_r}{x_r}$$

или иначе

$$\text{Im}(w_{r+1}) = \text{Im}(w_r), \quad x_r \text{Re}(w_{r+1}) = x_{r+1} \text{Re}(w_r)$$

где Re — знак действительной части числа. Наконец, последнее условие можно переписать так:

$$w_{r+1} - \bar{w}_{r+1} = w_r - \bar{w}_r \quad (8.5)$$

$$x_r (w_{r+1} + \bar{w}_{r+1}) = x_{r+1} (\bar{w}_r + w_r)$$

При $z = x - d_r i$ имеем

$$w_{r+1}(z) = \int_0^{\infty} [A_{r+1}(\alpha) \exp(d_r \alpha) \exp(i \alpha x) + B_{r+1}(\alpha) \exp(-d_r \alpha) \exp(-i \alpha x)] d\alpha$$

$$w_r(z) = \int_0^{\infty} [A_r(\alpha) \exp(d_r \alpha) \exp(i \alpha x) + B_r(\alpha) \exp(-d_r \alpha) \exp(-i \alpha x)] d\alpha$$

Условия (8.5) должны выполняться не только для самих функций w_r и w_{r+1} , но и для их подинтегральных выражений. Таким образом получаем

$$(A_{r+1} - A_r) \exp(d_r \alpha) \exp(i \alpha x) + (B_{r+1} - B_r) \exp(-d_r \alpha) \exp(-i \alpha x) =$$

$$= (\bar{A}_{r+1} - \bar{A}_r) \exp(d_r \alpha) \exp(-i \alpha x) + (\bar{B}_{r+1} - \bar{B}_r) \exp(-d_r \alpha) \exp(i \alpha x)$$

$$(x_r A_{r+1} - x_{r+1} A_r) \exp(d_r \alpha) \exp(i \alpha x) + (x_r B_{r+1} - x_{r+1} B_r) \exp(-d_r \alpha) \exp(-i \alpha x) =$$

$$= -(x_r \bar{A}_{r+1} - x_{r+1} \bar{A}_r) \exp(d_r \alpha) \exp(-i \alpha x) - (x_r \bar{B}_{r+1} - x_{r+1} \bar{B}_r) \exp(-d_r \alpha) \exp(i \alpha x)$$

Эти уравнения должны выполняться тождественно относительно x , поэтому можно приравнять между собой коэффициенты при $\exp(i \alpha x)$ и $\exp(-i \alpha x)$ в левой и правой частях последних уравнений.

Это дает четыре уравнения, из которых выпишем два

$$(A_{r+1} - A_r) \exp(d_r \alpha) - (\bar{B}_{r+1} - \bar{B}_r) \exp(-d_r \alpha) = 0$$

$$(x_r A_{r+1} - x_{r+1} A_r) \exp(d_r \alpha) + (x_r \bar{B}_{r+1} - x_{r+1} \bar{B}_r) \exp(-d_r \alpha) = 0 \quad (8.6)$$

Два другие уравнения получим, если заменим в уравнениях (8.6) все комплексные величины их сопряженными.

Уравнения (8.6) имеют место для $r = 2, 3, \dots, n-1$. Что касается линии $y = -h_1 = -d_1$, то, для того чтобы использовать условие на ней, представим главную часть выражения w_1 в виде определенного интеграла

$$\frac{1}{z - \zeta} = i \int_0^{\infty} \exp\{-i \alpha (z - \zeta)\} d\alpha \quad \text{при} \quad \text{Im}(z - \zeta) < 0$$

Вдоль линии $y = -d_1$ условие $\text{Im}(z - \zeta) < 0$, равно как и условие $\text{Im}(z - \zeta) < \theta$ выполнено. Поэтому функцию $w_1(z)$ можно представить в виде

$$w_1(z) = \int_0^{\infty} \left\{ \exp(i \alpha z) A_1(\alpha) + \exp(-i \alpha z) B_1(\alpha) + \frac{1}{\pi} \exp[-i \alpha (z - \xi)] \text{ch } d_1 \eta \right\} d\alpha$$

$$(y - \eta < 0)$$

а при $z = x - d_1 i$ в виде

$$w_1(z) = \int_0^{\infty} \left\{ A_1(\alpha) \exp(d_1 \alpha) \exp(i \alpha x) + B_1(\alpha) \exp(-d_1 \alpha) \exp(-i \alpha x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \exp(-d_1 \alpha) \exp[-i \alpha (x - \xi)] \text{ch } \alpha \eta \right\} d\alpha$$

Условия на линии раздела дают

$$(A_1 - A_2) \exp(d_1 \alpha) - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \exp(-d_1 \alpha) = \frac{1}{\pi} \exp(-d_1 \alpha) \exp(-i \alpha \xi) \text{ch } \alpha \eta$$

$$(x_1 A_1 - x_2 A_2) \exp(d_1 \alpha) + (x_1 \bar{B}_1 - x_2 \bar{B}_2) \exp(-d_1 \alpha) =$$

$$= -\frac{x_2}{\pi} \exp(-d_1 \alpha) \exp(-i \alpha \xi) \text{ch } \alpha \eta \quad (8.7)$$

Вводя обозначения

$$\exp(2d_r \alpha) = a_r, \quad \frac{1}{\pi} \exp(i \alpha \xi) \text{ch } \alpha \eta = b, \quad \frac{x_r}{x_{r+1}} = \lambda_r$$

систему уравнений (8.3), (8.4), (8.6) и (8.7) можно переписать так:

$$\begin{aligned} A_1 + \bar{B}_1 &= 0 \\ \alpha_1 A_1 - B_1 - \alpha_1 A_2 + \bar{B}_2 &= b \\ \alpha_1 A_1 + \bar{B}_1 - \lambda_1 \alpha_1 A_2 - \lambda_1 \bar{B}_2 &= -b \\ \alpha_2 A_2 - \bar{B}_2 - \alpha_2 A_3 + \bar{B}_3 &= 0 \\ \alpha_2 A_2 + \bar{B}_2 - \lambda_2 \alpha_2 A_3 - \lambda_2 \bar{B}_3 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_n A_n - \bar{B}_n &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

В частности, при $n=2$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= -A_1 \\ \bar{B}_2 &= \alpha_2 A_2 \\ (\alpha_1 + 1) A_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) A_2 &= b \\ (\alpha_1 - 1) A_1 - \lambda (\alpha_2 + \alpha_1) A_2 &= -b \end{aligned}$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\text{ch } \alpha \eta (\alpha_1 \text{ch } h_2 \alpha - \alpha_2 \text{sh } h_2 \alpha)}{\alpha_2 \text{sh } h_1 \alpha \text{sh } h_2 \alpha + \alpha_1 \text{ch } h_1 \alpha \text{ch } h_2 \alpha} \exp(-i\alpha \xi) \exp(-h_1 \alpha) \\ A_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\text{ch } \alpha \eta}{\alpha_2 \text{sh } h_1 \alpha \text{sh } h_2 \alpha + \alpha_1 \text{ch } h_1 \alpha \text{ch } h_2 \alpha} \exp(-i\alpha \xi) \exp\{-(h_1 + h_2) \alpha\} \end{aligned}$$

Для комплексных скоростей первой и второй областей движения будем иметь

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \bar{\xi}} + \\ &+ \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch } \alpha \eta \sin \alpha (z - \xi) (\alpha_1 \text{ch } h_2 \alpha - \alpha_2 \text{sh } h_2 \alpha)}{(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ch } h \alpha + (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ch } (h_1 - h_2) \alpha} \exp(-h_1 \alpha) d\alpha \\ w_2(z) &= \frac{2\alpha_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch } \alpha \eta \cos \alpha (z - \xi + \eta i) d\alpha}{(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ch } h \alpha + (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ch } (h_1 - h_2) \alpha} \\ h &= h_1 + h_2, \quad y - \eta < 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для трехслойной среды уравнения (8.8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= -A_1 \\ \bar{B}_3 &= \alpha_3 A_3 \\ (\alpha_1 + 1) A_1 - \alpha_1 A_2 + \bar{B}_2 &= b \\ (\alpha_1 - 1) A_1 - \lambda_1 A_2 - \lambda_1 \bar{B}_2 &= -b \\ \alpha_2 A_2 - \bar{B}_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) A_3 &= 0 \\ \alpha_2 A_2 + \bar{B}_2 - \lambda_2 (\alpha_3 + \alpha_2) A_3 &= 0 \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \frac{b}{\Delta} P \exp(-h_1 \alpha) \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\bar{b}}{\Delta} P \exp(-h_1 \alpha) \\ A_2 &= \frac{\alpha_2}{2} \frac{b}{\Delta} (\alpha_2 \text{ch } h_2 \alpha - \alpha_3 \text{sh } h_2 \alpha) \exp(-d_1 \alpha) \\ B_2 &= \frac{\alpha_2}{2} \frac{\bar{b}}{\Delta} (\alpha_2 \text{ch } h_2 \alpha + \alpha_3 \text{sh } h_2 \alpha) \exp(d_1 \alpha) \end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{x_2 x_3}{2} = \frac{x_2 x_3}{2} \Delta$$

$$B_3 = \frac{x_2 x_3}{2} \frac{b}{\Delta} \exp(d_3 \alpha)$$

$$\Delta = x_2 \operatorname{ch} h_3 \alpha (x_1' \operatorname{ch} h_1 \alpha \operatorname{ch} h_2 \alpha + x_2 \operatorname{sh} h_1 \alpha \operatorname{sh} h_2 \alpha) + \\ + x_3 \operatorname{sh} h_3 \alpha (x_1 \operatorname{ch} h_1 \alpha \operatorname{sh} h_2 \alpha + x_2 \operatorname{sh} h_1 \alpha \operatorname{ch} h_2 \alpha)$$

$$P = x_2 \operatorname{ch} h_3 \alpha (x_1 \operatorname{ch} h_2 \alpha - x_2 \operatorname{sh} h_2 \alpha) + x_3 \operatorname{sh} h_3 \alpha (x_1 \operatorname{sh} h_2 \alpha - x_2 \operatorname{ch} h_2 \alpha)$$

Комплексные скорости в каждом из трех слоев имеют соответственно вид:

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \bar{\xi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \alpha \eta P \sin \alpha (z - \xi)}{\Delta} \exp(-h_1 \alpha) d\alpha$$

$$w_2(z) = \frac{x_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \alpha \eta}{\Delta} \{x_1 \operatorname{ch} h_3 \alpha \cos \alpha (z - \xi + d_1 i) - i x_3 \operatorname{sh} h_3 \alpha \sin \alpha (z - \xi + d_1 i)\} d\alpha \quad (8.10)$$

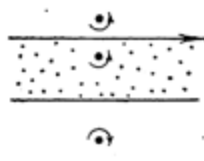
$$w_3(z) = \frac{x_2 x_3}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \alpha \eta \cos \alpha (z - \xi + d_3 i)}{\Delta} d\alpha$$

Наконец рассмотрим два частных случая движения, вызванного точечным вихрем в однородном грунте, в слое глубины h .

1. Линия $y = -h$ представляет непроницаемую границу, вдоль оси $y = 0$ скорость нормальна к оси.

Отразив область движения относительно прямых $y = 0$, $y = \pm h$, $y = \pm 2h$, ... и разместив в полученных полосах вихри (фиг. 79) интенсивности $+1$ и -1 , получим выражение комплексной скорости

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i} \left[\operatorname{cosech} \frac{\pi(z - \xi)}{2h} + \operatorname{cosech} \frac{\pi(z - \bar{\xi})}{2h} \right] \quad (8.11)$$



Фиг. 79.

2. Если линия $y = -h$ представляет проницаемое основание (линию равного напора), то нужно во всех точках, полученных указанным выше отражением данного точечного вихря, поместить точечные вихри одинаковой интенсивности; мы примем ее равной положительной единице. Получим

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i} \left[\coth \frac{\pi(z - \xi)}{2h} + \coth \frac{\pi(z - \bar{\xi})}{2h} \right] \quad (8.12)$$

Если точечный вихрь находится на оси x , т. е. если $\xi = \bar{\xi}$, в формулах (8.9), (8.10), (8.11) и (8.12) нужно отбросить члены, содержащие $\bar{\xi}$, и в формулах (8.9) и (8.10) уменьшить вдвое входящие в них интегралы (положив при этом $\eta = 0$).

2. Интегральное уравнение для вихревой интенсивности. Предположим теперь, что основание гидротехнического сооружения ограничено линией AB (фиг. 80). Отразив эту линию в оси x , получим замкнутый контур C . Предположим, что контур C имеет в каждой точке касательную. В случае однородной (однослойной) среды наша задача равносильна задаче об обтекании симметричного цилиндра потоком, имеющим заданную циркуляцию, в канале ширины $2h$ со скоростью, равной нулю на бесконечности. В случае многослойной среды также имеем обтекание цилиндра, но в более сложном потоке.

Вдоль контура C распределим вихри с интенсивностью $\Gamma(s) ds$ на элементе дуги ds . Если мы нашли комплексную скорость $w(z, \zeta)$, происходящую от действия точечного вихря в точке $\zeta = \xi + i\eta$ с интенсивностью, равной единице, то элемент дуги ds будет вызывать в точке z скорость

$$\Gamma(s) w(z, \zeta) ds$$

При этом ζ будет функцией длины дуги s

$$\zeta = \xi(s) + i\eta(s) \quad (8.13)$$

Скорость $W(z)$, происходящая от действия на точку z системы всех вихрей, распределенных по контуру C , будет

$$W(z) = \int_C \Gamma(s) w(z, \zeta) ds \quad (8.14)$$

Фиг. 80.

Воспроизводя рассуждения М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [18], положим

$$w(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \zeta} + \Phi(z, \zeta)$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная функция.

Будем приближать точку z к некоторой точке ζ_0 контура AB . Пусть

$$\zeta_0 = \zeta(\sigma)$$

где σ — длина дуги, соответствующая точке ζ_0 . Обозначим через $\theta(\sigma)$ угол касательной с осью x в точке кривой C . Тогда в пределе для интеграла типа Коши получим

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s) ds}{z - \zeta} = \frac{1}{2} \Gamma(\sigma) \exp\{-i\theta(\sigma)\} + \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_C \frac{\Gamma(s) ds}{\zeta(\sigma) - \zeta(s)} \quad (8.15)$$

где v. p. обозначает главное значение интеграла в смысле Коши.

Умножив уравнение (8.14) почленно на $\exp\{i\theta(\sigma)\}$ и перейдя к пределу при $z \rightarrow \zeta_0$, получим

$$W(\zeta_0) \exp\{i\theta(\sigma)\} = \frac{1}{2} \Gamma(\sigma) + \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_C \Gamma(s) w(z, \zeta) \exp\{i\theta(\sigma)\} ds \quad (8.16)$$

Но

$$W(\zeta_0) \exp\{i\theta(\sigma)\} = V_t - iV_n$$

где V_t — проекция скорости на касательную к контуру C , V_n — проекция скорости на нормаль.

Отделив в уравнении (8.16) действительную часть от мнимой, получим

$$V_t = \frac{1}{2} \Gamma(\sigma) + \int_C \Gamma(s) E(\sigma, s) ds$$

$$V_n = \int_C \Gamma(s) G(\sigma, s) ds$$

Здесь

$$E(\sigma, s) = u(\sigma, s) \sin \theta(\sigma) - v(\sigma, s) \cos \theta(\sigma)$$

$$G(\sigma, s) = u(\sigma, s) \cos \theta(\sigma) + v(\sigma, s) \sin \theta(\sigma)$$

Чтобы получить интегральное уравнение, можно или воспользоваться тем, что в точках контура касательная составляющая скорости равна циркуляции

$$V_t = \Gamma(\sigma)$$

или тем, что в точках контура нормальная составляющая скорости равна нулю. Получаем интегральное уравнение второго рода с обыкновенным ядром:

$$\frac{1}{2} \Gamma(\sigma) = \int_C \Gamma(s) E(\sigma, s) ds \quad (8.17)$$

или уравнение первого рода с несобственным ядром:

$$\int_C \Gamma(s) G(\sigma, s) ds = 0 \quad (8.18)$$

Если контур C вырождается в дугу (фиг. 81), то уравнение (8.18) остается, уравнение же (8.17) отпадает. В этом случае циркуляция равна разности значений касательной составляющей скорости на двух сторонах дуги:

$$\Gamma(\sigma) = V_t' - V_t''$$

Так как уравнения (8.17) и (8.18) однородные, то $\Gamma(s)$ может быть определено из них лишь с точностью до постоянного множителя. Этот множитель найдем из условия, что циркуляция по всему замкнутому контуру C равна удвоенной разности значений потенциала скорости на границах нижнего и верхнего бьефа.

Пусть вдоль границы водного бассейна верхнего бьефа для

$$\varphi = -x_1 \left(\frac{p}{\rho g} + y \right)$$

имеем

$$\varphi_1 = -x_1 H_1$$

где H_1 — глубина воды в верхнем бассейне, а вдоль границы нижнего водного бассейна

$$\varphi_2 = -x_1 H_2$$

где H_2 — глубина нижнего бассейна. Тогда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = x_1 (H_1 - H_2) = x_1 H$$

где H — действующий напор. Следовательно,

$$\int_C \Gamma(s) ds = 2x_1 H \quad (8.19)$$

откуда и определяется постоянный множитель, входящий в $\Gamma(s)$.

Если контур C представляет собой дугу, то имеет место равенство (8.19), в котором под C следует понимать контур, проходимый один раз в направлении, совпадающем с направлением вращения, которое вызывает $\Gamma(\sigma)$.

Отметим здесь некоторые случаи интегральных уравнений первого рода, для которых можно получить общее решение в замкнутой форме.

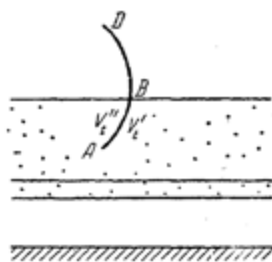
1. Пользуясь методом Л. И. Седова, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев нашли общее решение такого интегрального уравнения

$$\text{в. п.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{x-s} = \psi(x) \quad (8.20)$$

(у названных авторов принято $l=1$).

А именно, для $\varphi(x)$ получено выражение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \text{в. п.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2} \psi(s) ds}{s-x} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8.21)$$



Фиг. 81.

Постоянная C имеет значение:

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \varphi(s) ds \quad (8.22)$$

2. С помощью того же метода Л. И. Седова нетрудно найти решение интегрального уравнения

$$\text{v. p.} \int_{-l}^l \varphi(s) \operatorname{cosech} \frac{\pi(x-s)}{2h} ds = \psi(x) \quad (8.23)$$

Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & - \frac{\coth \omega x}{4h^2 \sqrt{\coth^2 \omega l - \coth^2 \omega x}} \text{v. p.} \int_{-l}^{+l} \psi(s) \frac{\sqrt{\coth^2 \omega l - \coth^2 \omega s}}{\operatorname{sh} \omega(x-s) \coth \omega s} ds + \\ & + \frac{C}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega l - \operatorname{sh}^2 \omega x}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

где $\omega = \pi/(2h)$, причем $C=0$, если интеграл, аналогичный (8.12), равен нулю.

3. Интегральное уравнение

$$\text{v. p.} \int_{-l}^l \coth \frac{\pi(x-s)}{2h} \varphi(s) ds = \psi(s) \quad (8.25)$$

имеет решение

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{4h^2 \sqrt{\operatorname{th}^2 \omega l - \operatorname{th}^2 \omega x}} \text{v. p.} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\operatorname{th}^2 \omega l - \operatorname{th}^2 \omega s} \operatorname{ch} \omega x}{\operatorname{ch} \omega s \operatorname{sh} \omega(x-s)} \psi(s) ds + \\ & + \frac{C - A \operatorname{th} \omega x}{\sqrt{\operatorname{th}^2 \omega l - \operatorname{th}^2 \omega x}} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Здесь также $\omega = \pi/(2h)$ и постоянная $C=0$, если интеграл (8.22) равен нулю.

4. Наконец, рассмотрим такое интегральное уравнение:

$$\text{v. p.} \int_{ABD} \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right) \varphi(s) ds = \psi(z)$$

где ABD — дуга кривой (фиг. 81), z и ζ — точки этой дуги, так что

$$\zeta = \xi(s) + i\eta(s)$$

Оно может быть заменено уравнением:

$$\text{v. p.} \int_{ABD} \frac{\varphi(s) ds}{z-\zeta} = \frac{1}{2} \psi(z)$$

Это следует из того, что когда ζ пробегает дугу ABD , то $\frac{\varphi(s)}{z-\zeta}$ пробежит ту же совокупность значений, что и $\frac{\varphi(s)}{z-\bar{\zeta}}$.

Аналогичное замечание относится к интегральным уравнениям с ядрами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\operatorname{cosech} \frac{\pi(z-\zeta)}{2h}} + \frac{1}{\operatorname{cosech} \frac{\pi(z-\bar{\zeta})}{2h}} \\ & \coth \frac{\pi(z-\zeta)}{2h} + \coth \frac{\pi(z-\bar{\zeta})}{2h} \end{aligned}$$

3. Флютбет в двуслойной среде. Если основание гидротехнического сооружения представляет собой горизонтальный отрезок $(-l, l)$ оси x , то координаты

Ната точечного вихря $\zeta = \xi$ и формулы (8.9) для комплексных скоростей верхнего и нижнего слоя грунта принимают вид:

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x_1 \operatorname{ch} h_1 \alpha - x_2 \operatorname{sh} h_2 \alpha) \sin \alpha (z - \xi)}{(x_1 + x_2) \operatorname{ch} (h_1 + h_2) \alpha + (x_1 - x_2) \operatorname{ch} (h_1 - h_2) \alpha} \exp(-h_1 \alpha) d\alpha$$

$$w^{(2)}(z) = \frac{x_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha (z - \xi + hi)}{(x_1 + x_2) \operatorname{ch} (h_1 + h_2) \alpha + (x_1 - x_2) \operatorname{ch} (h_1 - h_2) \alpha} d\alpha \quad (8.27)$$

Если глубина нижнего слоя $h_2 = \infty$, то получаем

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} - \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x_2 - x_1) \sin \alpha (z - \xi)}{x_2 \operatorname{sh} h_1 \alpha + x_1 \operatorname{ch} h_1 \alpha} \exp(-h_1 \alpha) d\alpha$$

$$w^{(2)}(z) = \frac{x_2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha (z - \xi + hi)}{x_2 \operatorname{sh} h_1 \alpha + x_1 \operatorname{ch} h_1 \alpha} d\alpha \quad (8.28)$$

Вдоль отрезка $(-l, l)$ распределим точечные вихри интенсивности $\Gamma(\xi)$ так, чтобы комплексные скорости $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ движения под флотбетом соответственно в первом и втором слоях были

$$W^{(1)}(z) = \int_{-l}^l \Gamma(\xi) w^{(1)}(z, \xi) d\xi$$

$$W^{(2)}(z) = \int_{-l}^l \Gamma(\xi) w^{(2)}(z, \xi) d\xi$$

Рассмотрим параметры, представляющие собой комбинации коэффициентов фильтрации:

$$\lambda = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \quad (8.29)$$

$$\mu = \frac{x_2}{x_1} \quad (8.30)$$

$$\nu = \frac{x_1}{x_2} \quad (8.31)$$

Если x_2 близко к x_1 , то λ мало; если x_2 мало по сравнению с x_1 , то мало μ , если x_2 велико по сравнению с x_1 , то малым является параметр ν .

При $\lambda = 0$ имеем движение в однородной среде глубины $h_1 + h_2$ (или в случае уравнений (8.28) — бесконечной глубины) с коэффициентом фильтрации x_1 . При $\mu = 0$ нижний слой является непроницаемым ($x = 0$), т. е. движение происходит в однородной среде глубины h_1 . При $\nu = 0$ должно быть $x_2 = \infty$. Это значит, что в нижнем слое отсутствует сопротивление. Линия $y = -h_1$ представляет линию равного потенциала. При этом вследствие симметричности задачи вдоль EF (фиг. 82) имеем

$$\varphi = -x_1 \frac{H_1 + H_2}{2} \quad (8.32)$$

если $\varphi = -x_1 H_1$ вдоль AB и $\varphi = -x_1 H_2$ вдоль CD .

В каждом из этих трех случаев решение задачи известно, так что известны значения $\Gamma(\xi)$, а также значения $W^{(1)}(z)$ и $W^{(2)}(z)$. Другими словами, известно решение нашей задачи при $\lambda = 0, -1, +1$. Вероятно, при вычислении $\Gamma(\xi)$,



Фиг. 82.

Если ввести параметр μ , то для того же случая $h_2 = \infty$ будем иметь

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(\mu - 1) \sin \alpha (z - \xi)}{\operatorname{ch} h_1 \alpha + \mu \operatorname{sh} h_1 \alpha} \exp(-h_1 \alpha) d\alpha \quad (8.40)$$

При разложении в ряд $w^{(1)}(z)$ можно воспользоваться формулами:

$$J_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha (z - \xi)}{\operatorname{ch} h \alpha} \exp(-h \alpha) d\alpha = \frac{1}{z - \xi} - \frac{\pi}{2h} \operatorname{cosech} \frac{\pi(z - \xi)}{2h}$$

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi q}{2}$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} d\alpha = \frac{\pi q}{2} \operatorname{cosech} \frac{\pi q}{2}$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch}^3 \alpha} d\alpha = \frac{\pi}{4} \operatorname{sech} \frac{\pi q}{2}$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch}^4 \alpha} d\alpha = \frac{\pi}{12} (4q + q^3) \operatorname{cosech} \frac{\pi q}{2}$$

$$J_5 = \int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch}^5 \alpha} d\alpha = \frac{\pi}{48} (q + 10q^3 + q^5) \operatorname{sech} \frac{\pi q}{2}$$

.....

Заметим, что интегралы $J_1, J_2, \dots$ могут быть получены с помощью разложения в ряд по степеням x интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos q \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + x} d\alpha = J_1 - x J_2 + x^2 J_3 - \dots = \frac{\pi \operatorname{sh} q (\arccos x)}{\operatorname{sh} \pi q \sqrt{1 - x^2}}$$

Таким образом получим разложение

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{4h_1 i} \operatorname{cosech} \frac{\pi(z - \xi)}{2h_1} + \frac{z - \xi}{8i} \left[\sec \frac{\pi(z - \xi + h_1 i)}{2h_1} + \right. \\ \left. + \sec \frac{\pi(z - \xi - h_1 i)}{2h_1} \right] \mu + \dots \quad (8.41)$$

Наконец, если ввести параметр $\nu = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, то можно $w^{(1)}(z)$ представить в форме

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{4h_1 i} \coth \frac{\pi(z - \xi)}{2h_1} - \nu \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha (z - \xi) d\alpha}{\operatorname{sh} h_1 \alpha (\operatorname{sh} h_1 \alpha + \nu \operatorname{ch} h_1 \alpha)} \quad (8.42)$$

Если положить

$$\Gamma(\xi, \mu) = \gamma_0(\xi) + \mu \gamma_1(\xi) + \mu^2 \gamma_2(\xi) + \dots$$

$$\Gamma(\xi, \nu) = \Gamma^{(1)}(\xi) + \nu \Gamma^{(2)}(\xi, \nu)$$

то для первых членов разложений $\Gamma(\xi)$ будем иметь соответственно такие уравнения:

$$\int_{-1}^1 \Gamma_0(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} = 0$$

$$\int_{-1}^1 \gamma_0(\xi) \operatorname{cosech} \frac{\pi(x - \xi)}{2h_1} d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^1 \Gamma^{(1)}(\xi) \coth \frac{\pi(x - \xi)}{2h_1} d\xi = 0$$

По формулам (8.20), (8.24), и (8.26), полагая в них $\psi(\xi) = 0$ и выбирая C так, чтобы выполнялось условие (8.38), найдем:

$$\Gamma_0(x) = \frac{2x_1 H}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}} \quad (8.43)$$

$$\gamma_0(x) = \frac{x_1 H \pi \operatorname{ch} \omega_1 l}{2h_1 K \sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega_1 l - \operatorname{sh}^2 \omega_1 x}} \quad (8.44)$$

$$\left(\omega_1 = \frac{\pi}{2h_1}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2h_1} \right)$$

$$\Gamma^{(1)}(x) = \frac{x_1 H}{h_1 \operatorname{ch} \omega_1 l} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 \omega_1 l - \operatorname{th}^2 \omega_1 x}} \quad (8.45)$$

Последние выражения могут быть получены и другим путем: достаточно принять во внимание, что $\Gamma_0(x)$, $\gamma_0(x)$ и $\Gamma^{(1)}(x)$ соответственно равны удвоенной скорости в точках флютбета при обтекании флютбета в однородном потоке в бесконечной полуплоскости ($\Gamma_0(x)$), в проницаемом слое глубины h_1 на непроницаемом основании ($\gamma_0(x)$) и в проницаемом слое глубины h_1 на бесконечно проницаемом основании ($\Gamma^{(1)}(x)$).

Зная $\Gamma_0(x)$ или $\gamma_0(x)$, можно последовательно определить $\Gamma_1(x)$, ... или $\gamma_1(x)$, ... из уравнений (8.36), с помощью формул (8.20) или (8.24), в которых следует считать $C = 0$. Однако, несмотря на простой вид этих формул, уже для $\Gamma_1(x)$, $\gamma_1(x)$ получаются сложные выражения. А именно:

$$\Gamma^{(1)}(x) = \frac{x_1 H}{h_1 \operatorname{ch} [\pi l / (2h_1)]} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 [\pi l / (2h_1)] - \operatorname{th}^2 [\pi x / (2h_1)]}}$$

$$\gamma_1(x) = \frac{x_1 H \pi}{64 h_1^3 l K} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 l \operatorname{ch} \omega_1 x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega_1 l - \operatorname{sh}^2 \omega_1 x}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega_1 l - \operatorname{sh}^2 \omega_1 s} \psi(s) ds}{\operatorname{sh} \omega_1 (x - s)}$$

где попрежнему $\omega_1 = \pi / (2h_1)$, а

$$\psi(s) = \int_{-1}^1 \operatorname{sech} \omega_1 (s - \xi + h_1 i) + \operatorname{sech} \omega_1 (s - \xi - h_1 i) \frac{(s - \xi) d\xi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega_1 l - \operatorname{sh}^2 \omega_1 \xi}}$$

Поэтому на практике вряд ли возможно использовать дальнейшие члены разложения $\Gamma(x)$.

Что касается случая, когда отношение $\nu = x_1 / x_2$ мало, то воспользоваться изложенным методом хотя бы для получения ближайшей поправки к $\Gamma^{(1)}(x)$ пока не удалось.

В случае конечного значения h_1 также не трудно получить выражения для $\Gamma_0(x)$, $\gamma_0(x)$ и $\Gamma^{(1)}(x)$, и сложными являются формулы для $\Gamma_1(x)$ и $\gamma_1(x)$. А именно, так как при $x_1 = x_2$ ($\lambda = 0$) имеем однородный грунт глубины $h = h_1 + h_2$, то

$$\Gamma_0(x) = \frac{x_1 H \pi}{2hK} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 l}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \omega_1 l - \operatorname{sh}^2 \omega_1 x}}$$

$$\left(\omega_1 = \frac{\pi}{2h}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2h} \right)$$

для $\gamma_0(x)$ и $\Gamma^{(1)}(x)$ остаются в силе формулы (8.43) и (8.44).

Предположим теперь, что $\Gamma_0(x)$ и $\Gamma_1(x)$ определены. Тогда для комплексной скорости в точке z первой и второй среды будем иметь:

$$W^{(1)}(z) = W_0^{(1)}(z) + \lambda W_1^{(2)}(z) + \dots$$

$$W^{(2)}(z) = W_0^{(2)}(z) + \lambda W_1^{(2)}(z) + \dots$$

где, в частности:

$$W_0^{(1)}(z) = \frac{x_1 H}{\pi \sqrt{l^2 - z^2}}$$

Если $\Gamma(x)$ найдено, то $W^{(1)}(z)$ находится без труда, а именно:

$$W^{(1)}(z) = \frac{1}{2} \Gamma(z)$$

Что касается $W^{(2)}(z)$, то для его вычисления приходится пользоваться интегралами (8.45), что приводит к сложным выражениям.

Все приведенные рассуждения применимы в случае обтекания точечного шпунта. На основании замечания, сделанного в конце § 2, возможно применить формулы (8.20), (8.24) и (8.26) для отыскания коэффициентов в разложениях $\Gamma(x)$ по степеням параметров λ и μ и выражения $\Gamma(x)_{\lambda=0}$. Все вычислительные трудности остаются также в силе.

Таким образом произведенное исследование приводит нас к возможности решения простейших задач о движении в двуслойной среде под гидротехническим сооружением, однако формулы для этого решения являются сложными — вероятно эта сложность определяется существом задачи. Это заставляет искать приближенные решения — или с помощью построения указанных выше интерполяционных полиномов по λ , или с помощью замены функции $\Gamma(x)$ функцией $\Gamma_0(x)$ или $\gamma_0(x)$, или $\Gamma^{(1)}(x)$. В теории несовершенного колодца (осесимметричная задача) уже применялись такие приближенные методы (см. Samsioe^[60], Muskat^[58]), когда вдоль колодца распределяются источники постоянной интенсивности или приближенно определяется переменная интенсивность их.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И. О фильтрации из резервуаров. Известия Научно-исследовательского ин-та гидротехники. 1935. Т. XVI.
2. Аравин В. И. Приток грунтовых вод к водосборам. Гидротехническое строительство. 1936. Т. XVIII.
3. Багров Н. А. Некоторые вопросы неустановившегося движения грунтовых вод (кандидатская диссертация).
4. Ведерников В. В. Метод решения некоторых задач по фильтрации со свободной поверхностью. Гидротехническое строительство. 1935. № 9.
5. Ведерников В. В. Фильтрация из каналов. М. 1934.
6. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М. 1939.
7. Ведерников В. В. К теории дренажа. ДАН. 1939. Т. XVIII. № 4.
8. Воицкий А. Движение грунтовых вод в теле и основании однородной земляной плотины с горизонтальным фильтром при конечной глубине проницаемого основания. ДАН. 1939. Т. XIV. № 9.
9. Гирицкий Н. К. Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями при наличии по нижней поверхности грунта напора постоянной величины. Гидротехническое строительство. 1936. № 6.
10. Гирицкий Н. К. Графический расчет фильтрации под гидротехническими сооружениями. Гидротехническое строительство. 1938. № 9.
11. Гирицкий Н. К. Диссертация. 1939.
12. Гостев А. Д. Основные законы движения фильтрационных потоков. Прикладная математика и механика. (Печатается. 1943. Т. VII).
13. Девисон Б. Б. 1) Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины. Записки Гос. гидр. ин-та Л. 1932. Т. IV. (Стр. 11—19). 2) Труды гидрологической конференции Балтийских стран. 1933.
14. Девисон Б. Б. Некоторые точные решения задачи о движении грунтовых вод, получаемые упрощенным приемом. Известия ОТН АН СССР. 1938. № 8—9.
15. Жуковский Н. Е. Теоретические исследования о движении подпочвенных вод. Журнал русского физ.-хим. о-ва. Физическое отделение. 1889. Т. XXI. Полное собрание сочинений. Т. VIII.
16. Замарин Е. А., Попов К. В., Гирицкий Н. К.* и Кобяк С. И. Курс гидротехнических сооружений. 1940.
17. Калинин Н. К. Приближенные приемы решения некоторых двуслойных задач теории фильтрации. ДАН. 1941. Т. XXX. № 7.
18. Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. Труды Конференции по теории волнового сопротивления. ЦАГИ. 1937.
19. Кибель И. А., Кочин Н. Е. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. и II. ГТТИ. 1941.
20. Козлов В. С. Гидромеханический расчет шпунтовых перемычек. Известия ОТН АН СССР. 1939. № 6.
21. Козлов В. С. Фильтрация в анизотропном грунте. Известия ОТН. 1940.
22. Кочин Н. Е. Труды Конференции по теории волнового сопротивления. ЦАГИ. 1937.
23. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. II. Горнонефтеиздат. 1934.
24. Нельсон-Скорняков Ф. Б. 1) Расчет грунтовых вод через земляные плотины. ВАСХНИЛ. 1936. 2) Научные записки Московского ин-та инженеров водного хозяйства. 1937. Вып. 4.
25. Нельсон-Скорняков Ф. Б. О движении грунтовых вод через дренированные земляные плотины. Гидротехническое строительство. 1937. № 2, 7—8.
26. Нумеров С. Н. Известия Научно-исследовательского ин-та гидротехники. 1938.
27. Нумеров С. Н. Новый метод решения фильтрационных задач без промежутков высачивания и инфильтрации или испарения воды со свободных поверхностей. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. В. 1.
28. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Спб. 1922.
29. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды. 1. Известия АН СССР. Серия математическая. 1938. № 3. 2. Известия АН СССР. 1939. № 3. Известия АН СССР. 1939. № 5—6.

30. Полубаринова-Кочина П. Я. Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации. Известия ОН АН СССР. 1939. № 6.
31. Полубаринова-Кочина П. Я. О фильтрации через земляную перемычку. Известия ОН. 1940.
32. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности. Известия ОН АН СССР. 1940. № 6.
33. Ризенкампф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ученые записки Саратовского гос. университета. Серия ФМИ. 1938. Т. I. (XIV). Вып. 1 (ч. I). Вып. 2 (ч. II и III). Вып. 5. 1940. Т. II (XV). (Ч. IV—VI).
34. Ризенкампф Б. К. Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте. Ученые записки Саратовского гос. университета. 1940. Т. XV. Вып. 5.
35. Седов Л. И. Труды ЦАГИ. 1936. № 252.
36. Седов Л. И. Теория плоских движений идеальной жидкости. Оборонгиз. 1939.
37. Сенков А. М. Новый способ устройства водохранилищ. Гидротехническое строительство. 1940. № 1.
38. Смирнов В. И. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Петроград. 1918 (лиитографировано).
39. Фалькович С. В. Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод.
40. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М. ОНТИ. 1935.
41. Христианович С. А., Михлин С. Г. и Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР. 1938.
42. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующих закону Дарси. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 1.
43. Щелкачев В. Н. и Пыхачев Г. В. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. Баку. 1939.
44. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris. 1856.
45. Davison B. On the steady motion of ground water through a wide prismatic dam. Phil. Mag. 1936. V. Vol. 21.
46. Davison B. On the steady two-dimensional motion of ground water with a free surface. Phil. Mag. Ser. 7. 1936. V. Vol. 22.
47. Davison B. a. Rosenhead. Proc. Roy. Soc. London. 1940. № 962.
48. Dupuit J. Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables. 2-me edition. Paris. 1863.
49. Forchheimer Ph. Zur Theorie der Grundwasserströmungen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien. 1919. H. 8.
50. Goursat E. Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss. 1936.
51. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Funktionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. Math. Ann. 1899. Bd. 33.
52. Hopf L. u. Trefwiz E. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben. ZAMM. 1921. Bd. 1. H. 4. [Ср. 290—298].
53. Kozeny J. Über Grundwasserbewegung, Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1927.
54. Kozeny J. Theorie und Berechnung der Brunnen. Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1933.
55. Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Flus und Kanalversicherung. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft. 1931. № 3.
56. Muskat M. The Seepage of Water through Dams with Vertical Faces. Physics. 1935. XI. Vol. 6.
57. Muskat M. Percolation of Ground Waters through a Dam with Vertical Faces. Physics. 1936.
58. Muskat. M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. New-York a. London. 1937.
59. Rossbach H. Über Grundwasserströmung. Ingenieur-Archiv. 1936. N. 5. 1937. N. 1.
60. Samsioe F. ZAMM. 1931. H. 2. Bd. 11.
61. Schlesinger L. Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionen-theoretischer Grundlage. Berlin. 1922.
62. Schlesinger L. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 1895—97. Bd. 1—2.
63. Slichter Ch. Theoretical Investigation of the Motion of Ground Waters. XIX Annual Report of the U. S. Geol. Survey. 1897—98. Part II.
64. Tannery J. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Annales de l'École Normale Supérieure. 1879. Sér. 2. T. VIII.
65. Wegmann E. The Design and Construction of the Dams. New-York. 1927.
66. Weinig u. Shields. Graphisches Verfahren zur Ermittlung der Sickerströmung durch Ständämmen. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft. 1934. [Ср. 231—240].

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение	3
--------------------	---

Глава I

Основные уравнения. Граничные условия. Годограф скорости

1. Основные понятия	5
2. Закон Дарси	6
3. Уравнения установившегося движения	7
4. Неустановившееся движение	8
5. Уравнение неразрывности	11
6. Граничные условия в плоском установившемся движении	11
7. Годограф скорости	13
8. Примеры годографа скорости	16

Глава II

Фильтрация двух жидкостей различной плотности

1. Установившееся движение	21
2. Неустановившееся движение	24
3. Фильтрация в анизотропном грунте	33
4. Фильтрация двуслойной жидкости для анизотропного грунта (установившееся движение)	37

Глава III

Связь задачи о плоском установившемся движении грунтовых вод с аналитической теорией дифференциальных уравнений

1. Конформное отображение кругового многоугольника на полуплоскость	40
2. Первый способ определения показателей (метод аналитического продолжения)	43
3. Случай вещественных показателей. Второй вывод характеристического уравнения	46
4. Круговые многоугольники	48
5. Определение постоянных A, B, C, D . Случай трех особых точек	55
6. Случай четырех особых точек	59
7. Применение к фильтрации грунтовых вод	—

Глава IV

Задача о фильтрации через земляную перемычку

1. Построение решения	65
2. Преобразование полученных формул	70

Глава V

Некоторые случаи движения грунтовых вод с испарением со свободной поверхности

1. Плотины, поперечное сечение которой есть прямоугольная трапеция	81
2. Перемычка на дренажном основании	87
3. Земляная перемычка	89

Глава VI

Простейшие случаи движения грунтовых вод с различными коэффициентами фильтрации

Глава VII

Фильтрация в двуслойной среде под двумя гидротехническими сооружениями

1. Два симметричных флюتبета	114
2. Два симметричных гидротехнических сооружения произвольной формы	123
3. Два несимметричных точечных шпунта	123
4. Точечный шпунт в бесконечной полуплоскости	125

Глава VIII

Фильтрация под гидротехническим сооружением в многослойной среде

1. Точечный вихрь в многослойной области	127
2. Интегральное уравнение для вихревой интенсивности	131
3. Флютбет в двуслойной среде	134
Литература	140



Редактор издательства *Н. А. Талицких*

Подписано к печати 24/XII 1942 г. Л 116792. Печ. листов 9. Уч.-издач. лист. 14,4
Тираж 1000 экз. Формат бумаги 70×108. Зак. 644. Цена 12 р.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный, 9.

Цена 12 руб:

1742

Ар Р

5077