МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. НОВИКОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория чисел, комбинаторика, начала теории вероятностей, неравенства

Рязань 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

А.И. НОВИКОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория чисел, комбинаторика, начала теории вероятностей, неравенства

Учебное пособие

Для факультетов довузовской подготовки, школ и классов физико-математического профиля

Второе издание,

переработанное и дополненное

Рязань 2012

УДК 512
Элементарная математика и начала теории вероятностей. Теория чисел, комбинаторика, начала теории вероятностей, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2012. – 252 с.

Содержит достаточно подробное изложение теоретического материала, решение типовых задач и обширную подборку задач для самостоятельного решения.

Предназначено учащимся и преподавателям системы довузовской подготовки, абитуриентам для самостоятельного изучения, а также учителям и учащимся школ и классов физико-математического профиля.

Ил. 23. Библиогр.: 15 назв.

Натуральные, целые числа, каноническое разложение, признаки делимости, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, сравнения, теоремы об остатках, решение уравнений в целых числах, рациональные и действительные числа, степени действительного числа, модуль числа, элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики, доказательство неравенств

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента;

$\bigcup$ – объединение (множеств), например $A \bigcup B$;

$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}$ – объединение (множеств) по индексу n, например $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$;

$\bigcap$ – пересечение (множеств), например $A \bigcap B$;

$\bigcap\limits_{n=1}^{m}$ – пересечение (множеств) по индексу n, например $\bigcap\limits_{n=1}^{m} A_n = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_m$;

$\forall$ – квантор всеобщности, заменяет слова: «любой», «любого», «для любого», «для каждого», определяет область истинности утверждения, например $\forall n \in \mathbf{N}\colon \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

$\exists$ – квантор существования, заменяет слова: «существует», «найдётся», например $\exists n \in \mathbf{Z}\colon 5 + n = 3$;

$\Rightarrow$ – знак следования, «импликации», запись $A \Rightarrow B$ означает, что B следует из A или A влечёт B, например $\forall a \in \mathbf{R}^{+} \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} \geq 2$;

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности, «эквивалентности», запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что B следует из A и A следует из B, например $a + \dfrac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$;

$\overset{\text{def}}{=}$ – «равно по определению»;

$\text{НОД}(m; n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n;

$\text{НОК}(m; n)$ – наименьшее общее кратное чисел m и n;

$\mathbf{N}$	– множество натуральных чисел (натуральный ряд);
$\mathbf{N}_o$	– расширенный натуральный ряд $\left(\mathbf{N}_o = \{0\} \cup \mathbf{N}\right)$;
$\mathbf{Z}$	– множество целых чисел;
$\mathbf{Z}^+$	– множество положительных целых чисел $\left(\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}\right)$;
$\mathbf{Z}^-$	– множество отрицательных целых чисел;
$\mathbf{Q}$	– множество всех рациональных чисел;
$\mathbf{Q}^+$	– множество положительных рациональных чисел: $\mathbf{Q}^+ = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{N}\right\}$;
$\mathbf{Q}^-$	– множество отрицательных рациональных чисел: $\mathbf{Q}^- = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}^-, n \in \mathbf{N}\right\}$;
$\mathbf{I}$	– множество всех иррациональных чисел;
$\mathbf{R}$	–множество всех действительных чисел;
$\mathbf{R}^+$	–множество положительных действительных чисел $\left(\mathbf{R}^+ = \{a : a \in \mathbf{R}, a > 0\}\right)$;
$\mathbf{R}^-$	–множество отрицательных действительных чисел $\left(\mathbf{R}^- = \{a : a \in \mathbf{R}, a < 0\}\right)$;
$m \vdots n$	- натуральное (целое) число m делится нацело на натуральное число n;
$a \equiv b \pmod m$	– число a сравнимо с b по модулю m;
$\rho(x_1, x_2)$	– расстояние между точками x_1 и x_2 на числовой прямой;
$U_\varepsilon(x_0)$	– эпсилон-окрестность точки x_0 $\left(U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)\right)$.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие числа является основополагающим в математике. Возросший в последние годы интерес к теории чисел и числовым системам обусловлен бурным развитием информационных технологий и, в первую очередь, – компьютерных технологий защиты информации. В учебные планы многих специальностей в вузах включены курсы «Теория чисел», «Дискретная математика». Успешное освоение этих курсов в вузе предполагает определённую степень знакомства абитуриентов с основами теории чисел и комбинаторики.

Необходимость изучения комбинаторики и начал теории вероятностей в рамках средней школы диктуется включением в программу средней школы основ теории вероятностей и математической статистики. Простейшие задачи по этому разделу включаются и в задания Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Пособие рассчитано на учащихся старших классов профильной школы и системы довузовской подготовки с различным исходным уровнем знаний по математике. Вместе с тем многие задачи в пособии имеют повышенный уровень сложности, поэтому успешная работа с пособием возможна только при наличии высокого уровня мотивации к познанию, желания преодолевать трудности и достигать требуемого результата.

В настоящем – втором – издании пособия исправлены замеченные ошибки и опечатки, во вторую главу добавлен подраздел с решениями реальных задач группы С6 ЕГЭ, добавлена глава 5, содержащая теоретический материал и простейшие задачи по теории вероятностей и математической статистике. В седьмую главу включены дополнительные задачи для самостоятельного решения по вновь введенным разделам. В остальном сохранена структура первого издания.

Материал пособия разделён на семь глав. В первых трёх главах достаточно подробно изложены основы теории натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел. При этом вторая глава полностью посвящена методам решения уравнений и систем уравнений на множестве целых чисел.

В четвёртой главе рассмотрены метод математической индукции, бином Ньютона, основные задачи комбинаторики. Пятая глава полностью посвящена изучению начал теории вероятностей и математической статистики, а также решению простейших задач из этих разделов. В шестой главе изложены методы доказательства неравенств и их использование для решения задач из смежных разделов.

Большинство теорем и утверждений в пособии доказаны. Окончание доказательства отмечается значком ■ (заштрихованный квадрат). Пособие содержит большое число подробно решённых типовых примеров. Седьмая глава является сборником задач по тематике первых шести глав. Примеры разбиты на тематические группы в полном соответствии с содержанием основной части пособия.

Автор выражает глубокую благодарность доц. Курашину В.Н. за внимательное прочтение первого издания пособия и ряд важных замечаний и пожеланий по его содержанию, а также доц. Сюсюкалову А.И. за рецензирование настоящего издания и за многочисленные обсуждения задач по тематике пособия.

Особую признательность автор выражает Мурзовой Т.Д. за огромный труд по компьютерному набору пособия.

ГЛАВА I. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Определения. Формы записи

Определение 1. *Числа* $1,2,3,\dots$ *называются* ***натуральными числами.***

Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbf{N}$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{N} \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, записанных в их естественном порядке, называется также ***натуральным рядом***.

Если m и n – два произвольных натуральных числа и m предшествует n (m стоит раньше n) в натуральном ряду, то говорят, что m меньше n и пишут $m<n$. Для любых двух натуральных чисел m, n имеет место одно и только одно из трех отношений: $m<n$, $m=n$, $m>n$.

Натуральные числа можно складывать и умножать. При этом вновь получается натуральное число, то есть для любых $m,n \in \mathbf{N} : (m+n) \in \mathbf{N}$ и $m \cdot n \in \mathbf{N}$. Желая подчеркнуть это, говорят, что множество натуральных чисел ***замкнуто*** относительно операций сложения и умножения.

Операция вычитания $m-n$ на множестве натуральных чисел определена только для таких чисел m, n, которые связанны неравенством m>n. В этом случае $(m-n) \in \mathrm{N}$, но противоположное число $(n-m) \notin \mathbf{N}$. Разделить одно натуральное число на другое можно лишь при условии, что делимое m кратно делителю n, т.е. $\exists k \in \mathrm{N} : m = n \cdot k$. Например, если $m=6$, а $n=3$, то $m-n=6-3=3$, т.е. $(m-n) \in \mathbf{N}$, но $n-m=3-6$ и $(n-m) \notin \mathbf{N}$; $\frac{m}{n} = \frac{6}{3} = 2$ и $\frac{m}{n} \in \mathbf{N}$, но $\frac{n}{m} = \frac{3}{6}$ и $\frac{n}{m} \notin \mathbf{N}$. Отсюда следует, что операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел не всегда возможны.

Наряду с множеством натуральных чисел $\mathbf{N}$ в математике часто рассматривают множество $\mathbf{N}_0$ – множество натуральных чисел, дополненное нулем. Оно называется ***расширенным множеством натуральных чисел***, а также ***расширенным натуральным рядом***.

$$\mathbf{N}_0 \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{0}\} \cup \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Для любого $n \in \mathbf{N}_0$ справедливы равенства

$$n + 0 = n, \qquad n \cdot 0 = 0,$$

в частности $0 + 0 = 0$ и $0 \cdot 0 = 0$.

Операции сложения и умножения на множестве $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ удовлетворяют следующим свойствам:

Переместительное свойство (свойство коммутативности)

1. $m + n = n + m$ **1.** $m \cdot n = n \cdot m$

Сочетательное свойство (свойство ассоциативности)

2. $m + (n + k) = (m + n) + k$ **2.** $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

Распределительное свойство (свойство дистрибутивности)

3. $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$

Определение 2. *Числа вида* $-n$*, где* n *– натуральное число, называются* ***целыми отрицательными числами***.

Множество $\{\dots, -n, -n+1, \dots, -2, -1\}$ целых отрицательных чисел обозначается буквой $\mathbf{Z}^-$.

Числа n, $n \in \mathbf{N}$ и $-n$, $-n \in \mathbf{Z}^-$ называются противоположными числами.

Определение 3. *Множество, состоящее из отрицательных целых чисел, нуля и натуральных чисел, называется* ***множеством целых чисел*** *и обозначается буквой* ***Z****:*

$$\mathbf{Z} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathrm{N}$$

Элементы множества $\mathbf{Z}$ называются ***целыми числами***. Множество целых положительных чисел, то есть натуральных чисел **N**, будем обозначать также буквой $\mathbf{Z}^+$.

Множество целых чисел *замкнуто* относительно трех операций: сложения, умножения и вычитания. Это означает, что сумма, произведение и разность любых двух целых чисел является целым числом. Имеют место включения $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z}$.

В десятичной системе счисления запись натурального числа m осуществляется с помощью цифр $0,1,2,\ldots,9$ и имеет в сокращенной форме следующий вид:

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0},$$

а в развернутой –

$$m = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – цифры от 0 до 9, причем $a_n \neq 0$. В приведенной записи числа m цифра a_0 определяет число единиц, a_1 – число десятков, a_2 – число сотен и т.д. Это означает, что позиция цифры a_k в сокращенной записи $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1 a_0}$ определяет степень k числа 10 в развернутой записи, т.е.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1 a_0} =$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^k + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

1.2. Деление натуральных и целых чисел. Признаки делимости

1.2.1. Определения

Определение 1. *Натуральное число* m *делится на натуральное число* n*, если существует натуральное число* k *такое, что* $m = n \cdot k$.

Если m делится на n (n делит m, n является делителем числа m) будем писать $m \vdots n$. Например, запись $24 \vdots 6$ означает, что натуральное число 24 делится нацело на 6 или что существует $k \in \mathbf{N}$ $(k = 4)$ такое, что $24 = 6 \cdot k$. Очевидно, что всякое натуральное число m, отличное от 1, делится на 1 и на само себя. Отметим, что 0 делится на любое целое число n, отличное от нуля, и при этом $0:n=0$.

Определение 2. *Натуральное число* m*, большее единицы, называется* ***простым,*** *если оно имеет только два делителя: 1 и само число* m.

Если натуральное число m *имеет три и более делителей, то оно называется* ***составным.***

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 являются простыми, так как делителями каждого из них являются только 1 и само число. Числа 6, 72, 234 напротив, являются составными. Число 6 имеет четыре делителя (1, 2, 3, 6), натуральное число 72 имеет 11 натуральных делителей, а число 234 – 10 натуральных делителей.

Как простых, так и составных чисел в натуральном ряду бесконечно много. Бесконечность множества простых чисел легко доказывается методом от противного. Действительно, допустим, что множество простых чисел конечно и что это числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тогда любое число $m \in \mathbf{N}$ и отличное от 1 и чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$ должно быть составным. В частности, составным должно быть число $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$. Оно не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, больше каждого из них и как составное должно делиться хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Но m не делится ни на одно из этих чисел. Это означает, что построенное число m является простым, и поэтому предположение о конечности множества простых чисел неверно, т.е. ***множество простых чисел бесконечно***.

Получить ряд последовательных простых чисел конечной, но сколь угодно большой длины можно с помощью простейшего алгоритма, названного по имени его создателя ***решетом Эратосфена.***[1] Основан он на последовательном, пошаговом

[1] Эратосфен Киренский (276 – 194 до н.э.) - древнегреческий ученый; в области математики известен тем, что нашел простой способ выделения простых чисел из натурального ряда (решето Эратосфена).

вычеркивании всех составных чисел, кратных выделенному на данном шаге простому числу.

Первой из натурального ряда вычеркивается единица, не являющаяся простым числом.

Шаг 1. 2 – простое число. Зачёркиваются все числа, кратные 2, т.е. 4, 6, 8, …. После этого шага в натуральном ряде останутся только нечётные числа (исключая число 2).

Шаг 2. Первое не зачёркнутое число 3 – простое. Теперь зачёркиваются числа, которые следуют за 3 и делятся на 3, т.е. 9, 15,21,….

Шаг 3. Следующее за 3 не зачёркнутое число 5 – простое. Зачёркиваем все числа, кратные 5. Среди не зачёркнутых чисел в первой «сотне» осталось только 5 таких чисел: 25, 35, 55, 85, 95.

Продолжая этот процесс дальше, получаем необходимое множество простых чисел. Уместно заметить, что уже после следующего, четвертого шага вычеркивания всех чисел, кратных 7, в отрезке натурального ряда от 1 до 100 останутся только простые числа. При этом на четвертом шаге придется зачеркнуть всего три числа, кратных 7: 49, 77 и 91 (проверьте!). В результате получим первые 25 простых чисел:

2	5	11	17	23	29		41	47	53	59		71		83	89	
3	7	13	19		31	37	43			61	67	73	79			97.

Они записаны в порядке возрастания, но не в одной строке, а в двух. Сделано это специально по следующей причине. Можно заметить, что в каждой строке последующее число (начиная с 11 и 13) получается из предыдущего прибавлением к нему числа, кратного 6. В свою очередь, в каждом столбце, начиная со второго, простые числа принадлежат одному из множеств $\{6n-1,\ n\in N\}$ и $\{6n+1,\ n\in N\}$. Отмеченное свойство справедливо и для других простых чисел, больших 97, а именно: если p – простое число, то оно имеет вид $6n-1, n\in N$ или $6n+1, n\in N$. Следует заметить, что не каждое число указанного вида является простым. Это видно уже из приведенного списка первых 25 простых чисел.

Найдем таким способом, т.е. среди чисел $6n-1$ и $6n+1$ при соответствующих значениях $n \in N$, простые числа из отрезка натурального ряда: 101, 102, … , 200.

n:	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$6n-1$:	101	107	113	-	-	131	137	-	149	-	-	167
$6n+1$:	103	109	-	-	127	-	139	-	151	157	163	-
n:	29	30	31	32	33							
$6n-1$:	173	179	-	191	197							
$6n+1$:	-	181	-	193	199.							

Из второй “сотни” натуральных чисел выделено 21 простое число, т.е. на 4 меньше, чем из первой “сотни”. Это общая закономерность: чем дальше от начала натурального ряда, тем ниже в среднем плотность простых чисел в отрезке натурального ряда фиксированной длины.

Количество простых чисел, не превосходящих данное натуральное число n, обозначается $\pi(n)$. *Так, например*
$\pi(10)=4$, $\pi(50)=15$, $\pi(100)=25$, $\pi(200)=46$, $\pi(1000)=168$, $\pi(10^6)=78498$.

Выдающийся русский ученый Пафнутий Львович Чебышев (1821 – 1894) установил, что при очень больших значениях n:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}, \quad \textit{так что} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)} = 1.$$

Отметим, что простые числа, разность между которыми равна 2, называются ***близнецами****. Например, простые числа 5 и 7, 11 и 13, ..., 191 и 193, 197 и 199 - близнецы.*

Составное число можно представить в виде произведения своих делителей различными способами. Например, $72 = 2\cdot 36 = 4\cdot 18 = 6\cdot 12 = 8\cdot 9$, а также $72 = 2\cdot 2\cdot 18 = 3\cdot 6\cdot 4$ и т.д. Однако для любого составного числа существует *единственное* разложение его на произведение степеней простых чисел, а именно справедлива

Основная теорема арифметики*. Всякое натуральное число* m $(m>1)$ *можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых чисел*

$$\boxed{m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}}\,. \tag{1.1}$$

Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *– простые числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_r$ *– натуральные числа. Число* k_i *определяет кратность вхождения простого числа* p_i *в разложение* (1.1).

Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Кратность вхождения простого числа 2 в разложение числа 72 равна 3, т.е. $p_1 = 2$, а отвечающее ему значение $k_1 = 3$.

Разложение (1.1) натурального числа m на произведение степеней простых чисел называется *каноническим разложением* этого числа.

Для нахождения канонического разложения числа m необходимо:

1. Найти наименьшее простое число p_1, являющееся делителем m. Пусть $m : p_1 = m_1$.
2. Если $m_1 \vdots p_1$, то находим $m_2 \in \mathbf{N}$ такое, что $m_1 : p_1 = m_2$. Если же m_1 не делится на p_1, то ищем следующее, ближайшее к p_1 простое число p_2 $(p_2 > p_1)$ такое, что $m \vdots p_2$ и т.д.

Найдем каноническое разложение числа 4200. Наименьшее простое число p_1, на которое делится это число, равно 2. Имеем $4200 = 2 \cdot 2100$; 2100 также делится на 2: $2100 = 2 \cdot 1050$ и вновь $1050 = 2 \cdot 525$. Число 525 не делится на 2, но делится на 3: $525 = 3 \cdot 175$. Число 175 не делится на 3. Ближайший простой делитель 5: $175 = 5 \cdot 35$ и далее $35 = 5 \cdot 7$. Таким образом, с учетом числа повторений простых чисел 2, 3, 5, 7 – делителей числа 4200 – получаем его каноническое разложение: $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Разумеется, каноническое разложение натурального числа удобнее осуществлять в виде многоступенчатой процедуры деления натуральных чисел в «столбик».

$$
\begin{array}{r|l}
4200 & 2 \\
2100 & 2 \\
1050 & 2 \\
525 & 3 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad 4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 .
$$

1.2.2. Признаки делимости

Пусть m – натуральное число, большее 1 и

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ –}$$

его сокращенная и развернутая записи в десятичной системе счисления.

Рассмотрим признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. Эти признаки зафиксированы в следующих семи теоремах:

Теорема 1.1 $m \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$.

Теорема 1.2 $m \vdots 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 3$.

Теорема 1.3 $m \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Теорема 1.4 $m \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 = 0$ или $a_0 = 5$.

Теорема 1.5 $m \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

Теорема 1.6 $m \vdots 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 9$.

Теорема 1.7

$$m \vdots 11 \Leftrightarrow \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0\right) \vdots 11 .$$

Формулировки теорем приведены в символьной, «бессловесной» форме. Такая форма записи утверждений и теорем является не только компактной, но наглядной и хорошо запоминающейся. Знак эквивалентности «$\Leftrightarrow$» в записи теорем 1.1 … 1.7 заменяет словосочетания «тогда и только тогда, когда», «необходимо и достаточно». Например, теорему 1.1 следует читать так: «m делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра (цифра единиц) числа m делится на 2», теорему 1.5: «m делится на 8 тогда и только тогда, когда на 8 делится число, образованное тремя последними цифрами числа m», теорему 1.7: «Для того, чтобы натуральное число m делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы на 11 делилась знакопеременная сумма цифр числа m».

Справедливость утверждений 1 и 5 достаточно очевидна. Докажем утверждения 3, 6 и 7.

Теорема 1.3 $m\,\vdots\,4 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_1a_0}\,\vdots\,4$.

Доказательство. Необходимость.

Дано: $m=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}\,\vdots\,4$. *Требуется доказать, что на 4 делится число* $\overline{a_1a_0}=10a_1+a_0$. *Преобразуем число* m *к виду*

$$m\equiv a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_110+a_0=$$
$$=\left(a_n10^{n-2}+a_{n-1}10^{n-3}+\cdots+a_310+a_2\right)\times100+a_110+a_0.$$

Число 100 делится на 4 и потому на 4 делится первое слагаемое $q=\left(a_n10^{n-2}+a_{n-1}10^{n-3}+\cdots+a_310+a_2\right)\cdot100$ *в составе числа* m $\left(m=q+\overline{a_1a_0}\right)$. *Но тогда и число* $\overline{a_1a_0}=m-q$ *должно делиться на 4.*

Достаточность. *Дано:* $\overline{a_1a_0}\,\vdots\,4$. *Требуется доказать, что* $m\,\vdots\,4$. *Так как* $m=q+\overline{a_1a_0}$*;* $q\,\vdots\,4$ *и* $\overline{a_1a_0}\,\vdots\,4$*, то и* $m\,\vdots\,4$. ■

Заметим, что теорема 1.5 доказывается аналогично приведенному доказательству теоремы 1.3.

Теорема 1.6 $m\,\vdots\,9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\right)\vdots\,9$.

Доказательство. *Поскольку* $10^k = \underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{раз}} + 1$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$, *то*

$$a_1 10 = a_1(9+1) = 9a_1 + a_1,$$
$$a_2 10^2 = a_2(99+1) = 99a_2 + a_2,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{n-1}10^{n-1} = a_{n-1}\left(\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + 1\right) = \underbrace{99\ldots9}_{n-1} a_{n-1} + a_{n-1},$$
$$a_n 10^n = a_n\left(\underbrace{99\ldots99}_{n} + 1\right) = \underbrace{99\ldots99}_{n} a_{n-1} + a_n.$$

Используя эти равенства, преобразуем m *к следующему виду:*

$$m = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$$
$$= \left(\underbrace{99\ldots9}_{n} a_n + \underbrace{99\ldots9}_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 99a_2 + 9a_1\right) +$$
$$+ (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0). \qquad (1.2)$$

В правой части равенства (1.2) первое слагаемое $q = 9\left(\underbrace{11\ldots1}_{n} a_n + \underbrace{11\ldots1}_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 11a_2 + a_1\right)$ *делится на 9. Поэтому, если* $m \vdots 9$, *то и сумма цифр* $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ *числа* m *должна делиться на 9 (необходимость) и, наоборот, если* $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 9$, *то и* $m \vdots 9$ *(достаточность).* ■

Теорема 1.7

$$m \vdots 11 \iff \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0\right) \vdots 11.$$

Доказательство. *Представим каждое число* 10^k *в десятичной записи числа* m *в следующем виде:*

$$\begin{array}{ll} 10 = 11 - 1, & 100 = 99 + 1, \\ 1000 = 990 + 11 - 1, & 10^4 = 9999 + 1, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \\ 10^{2k-1} = \underbrace{99\dots9}_{2k-2}0 + 11 - 1, & 10^{2k} = \underbrace{99\dots99}_{2k} + 1. \end{array} \tag{1.3}$$

Запишем число m с учетом (1.3):

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 10^3 + \dots + a_n 10^n =$$

$$= a_0 + a_1(11-1) + a_2(99+1) + a_3(990+11-1) + \dots + a_n\left(h + (-1)^n\right) =$$

$$= \left(11a_1 + 99a_2 + (990+11)a_3 + \dots + ha_n\right) +$$
$$+ \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n\right).$$

Здесь $h = \underbrace{99\dots99}_{2n}$ *– при четном* n *и* $h = \underbrace{99\dots9}_{2n-2}0 + 11$ *– при нечетном* n.

Введем обозначения: $q = \left(11a_1 + 99a_2 + \dots + ha_n\right)$, $p = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$. *Тогда* $m = q + p$ *и при этом* q *делится на 11.*

Поэтому, если $m \vdots 11$*, то и* $p \vdots 11$ *(необходимость) и, наоборот, если* $p \vdots 11$*, то и* $m \vdots 11$. ■

Замечание. *Частное от деления натурального числа* m *на* n *и противоположного ему целого отрицательного* $(-m)$ *на* n *отличаются лишь знаком. Поэтому признак делимости на 11:* $m \vdots 11 \;\Leftrightarrow\; \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n\right) \vdots 11$ *можно переписать в равносильной форме:*

$$m \vdots 11 \;\Leftrightarrow\; \left(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n\right) \vdots 11.$$

Примеры. Число 4288 делится на 2, так как последняя цифра числа 8 делится на 2; оно делится на 4, поскольку число 88, образованное двумя последними цифрами этого числа, делится на 4; делится оно и на 8, потому что $288 \vdots 8$. Однако это число не делится на 3 и 9, так как сумма цифр числа 4288 равна $4+2+8+8=22$, но 22 не делится ни на 3, ни на 9; не делится оно и на 11, поскольку знакопеременная сумма $4-2+8-8=2$, а 2 не делится на 11. Напротив, число 9295 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 8, но делится на 11, так как знакопеременная сумма цифр этого числа $9-2+9-5=11$ делится на 11.

Известен еще один признак делимости на простые числа 7, 11, 13. Он основан на том, что произведение этих чисел равно 1001, т.е. $7\cdot 11\cdot 13=1001$, и при этом

$$10^3=1001-1,$$

$$10^6=999999+1=1001\cdot 999+1,$$

$$10^9=1000\,000\,001-1=1001\cdot 999001-1 \text{ и т.д.}$$

Любое натуральное число n можно представить в виде алгебраической суммы степеней числа 1000 с последующим преобразованием этих степеней по приведенным равенствам. Так, например, для шестизначного числа $\overline{abcdef}$ будем иметь

$$\overline{abcdef}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}=\overline{abc}(1001-1)+\overline{def}=$$
$$=\overline{abc}\cdot 1001+\left(\overline{def}-\overline{abc}\right).$$

Отсюда следует, что число $\overline{abcdef}$ делится на m , где m равно одному из чисел 7, 11, 13, тогда и только тогда, когда на m делится разность $\overline{def}-\overline{abc}$.

Для семизначного числа $\overline{abcdefg}$ аналогично получаем

$$\overline{abcdefg}=a\cdot 10^6+\overline{bcd}\cdot 10^3+\overline{efg}=$$
$$=a(1001\cdot 999+1)+\overline{bcd}(1001-1)+\overline{efg}=$$
$$=\left(a\cdot 999+\overline{bcd}\right)\cdot 1001+\left(\overline{efg}-\overline{bcd}+a\right).$$

Откуда следует, что

$$\overline{abcdefg}\,\vdots\, m \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overline{efg}-\overline{bcd}+a\right)\vdots\, m.$$

И далее

$$\overline{abcdefgh}\,\vdots\, m \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overline{fgh}-\overline{cde}+\overline{ab}\right)\vdots\, m$$

$$\overline{abcdefghk} \vdots m \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overline{ghk} - \overline{def} + \overline{abc}\right) \vdots m$$

и т.д.

На практике для проверки делимости натурального числа n на 7, 11 или 13 необходимо разбить это число на грани справа налево по три цифры в каждой грани (в последней грани может быть одна, две или три цифры) и из полученных трёхзначных чисел составить знакопеременную сумму. Если полученное число делится на m, где $m \in \{7,11,13\}$, то на m делится и число n.

Пусть, например $n = 19712$. Поскольку $712 - 19 = 693$ и 693 делится на 7 и 11, но не делится на 13, то число 19712 делится на 7 и 11, но не делится на 13.

Пусть теперь $n = 2.566.412.849$. Вычислим знакопеременную сумму $849 - 412 + 566 - 2 = 1001$. Это число делится на 7, 11 и на 13, поэтому и число 2566412849 делится на 7, 11 и на 13.

1.2.3. Признаки делимости на составные числа

Пусть n – составное число и

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}, \quad s \geq 1, - \tag{1.4}$$

его каноническое разложение. Если m делится на n, то m должно делиться на любое число вида

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

где $0 \leq \alpha_1 \leq k_1,\ 0 \leq \alpha_2 \leq k_2,\ \ldots, 0 \leq \alpha_s \leq k_s$.

Имеет место следующая

Теорема 1.8. *Натуральное число* m *делится на составное* n *в виде (1.4) тогда и только тогда, когда* m *делится одновременно на* $p_1^{k_1}$*, на* $p_2^{k_2}, \ldots,$ *на* $p_s^{k_s}$.

Доказательство. Необходимость. *Дано:* $m \vdots n$ *и* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$. *Требуется доказать, что* $m \vdots p_i^{k_i}$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$. *Так как* $m \vdots n$*, то существует натуральное число* q *такое, что* $m = n \cdot q$ *или, с учетом (1.4),*

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} \cdot q.$$

Отсюда следует, что $m \vdots p_1^{k_1}$, $m \vdots p_2^{k_2}, \ldots,$ $m \vdots p_s^{k_s}$.

Достаточность. *Дано:* $m \vdots p_i^{k_i}$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$; $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$. *Требуется доказать, что* $m \vdots n$.

Так как $m \vdots p_i^{k_i}$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$ *и* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *– взаимно простые числа, то каждое из этих чисел* p_i *входит в состав канонического разложения числа* m *и при этом в степени* α_i, *не меньшей* k_i, *т.е.* $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} \cdot q$, *где* $\alpha_i \geq k_i$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$; $q \in \mathbf{N}$.

Имеем $m = \left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}\right) p_1^{\alpha_1 - k_1} p_2^{\alpha_2 - k_2} \ldots p_s^{\alpha_s - k_s} \cdot q = n \cdot q_1$, *где* $q_1 = p_1^{\alpha_1 - k_1} p_2^{\alpha_2 - k_2} \ldots p_s^{\alpha_s - k_s} \cdot q$. *Из равенства* $m = n \cdot q_1$ *следует, что* $m \vdots n$. ■

Замечание. *Если числа* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *не являются взаимно простыми, то теорема 1.1 не будет верна. Например,* $36 \vdots 4$ *и* $36 \vdots 6$, *но 36 не делится на произведение этих чисел, т.е. на 24.*

Иначе говоря, из того, что $m \vdots n_1$ *и* $m \vdots n_2$ *в общем случае не следует, что* $m \vdots (n_1 \cdot n_2)$. *Но если* n_1 *и* n_2 *взаимно простые числа, то из делимости* m *на* n_1 *и* n_2 *следует делимость* m *на их произведение.*

Пример 1.1. Найдите все числа вида $\overline{2x06y}$, $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, которые делятся на 36.

Решение. Найдем каноническое разложение числа 36: $36 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9$. В соответствии с теоремой 1.8 искомое число делится на 36, если оно делится одновременно на 4 и на 9.

Из того, что число $m = \overline{2x06y}$ должно делиться на 4 и из признака делимости на 4 (теорема 1.3), следует, что на 4 должно делиться число $\overline{6y}$. Этому условию удовлетворяют три цифры y: $y = 0, y = 4$ и $y = 8$.

Пусть $y=0$, тогда искомое число m принимает вид $m=\overline{2x060}$. Оно должно делиться на 9, что, в соответствии с теоремой 1.6, равносильно делимости на 9 суммы цифр этого числа, т.е. $(2+x+6)\,\vdots\,9$. Поскольку $x\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, то подходит только одно значение $x=1$ и тогда $m=21060$.

Пусть теперь $y=4$ и $m=\overline{2x064}$. Из делимости m на 9 следует, что число $(2+x+6+4)$ должно делиться на 9. Подходит $x=6$. Получаем новое число $m=26064$.

Если же $y=8$, то $m=\overline{2x068}$. Из условия делимости m на 9 ($m\,\vdots\,9 \Leftrightarrow (2+x+6+8)\,\vdots\,9$) получаем $x=2$ и $m=22068$.

Ответ: $\{21060;\,26064;22068\}$.

Пример 1.2. Найдите все числа вида $\overline{2x03y}$, которые делятся на 99.

Решение. Находим каноническое разложение числа 99: $99=3^2\cdot 11=9\cdot 11$. В соответствии с теоремой 1.8 число $m=\overline{2x03y}$ будет делиться на 99, если оно делится одновременно на 9 и на 11.

Из теорем 1.6 и 1.7 получаем условия делимости числа m на 9 и 11:

$$2+x+3+y=9k \qquad \text{(условие делимости на 9);}$$

$$2-x+0-3+y=11n \qquad \text{(условие делимости на 11).}$$

Здесь $k\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N_0}$. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 5+x+y=9k, & (1.5)\\ -1-x+y=11n. & (1.6)\end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем

$$4+2y=9k+11n. \qquad (1.7)$$

Из уравнения (1.6): $-x-1+y=11n$ с учетом того, что x, y – цифры, следует, что подходит только одно значение n: $n=0$. Тогда уравнение (1.7) принимает вид:

$$4+2y=9k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Отметим, что $4 \le 4+2y \le 22$, соответственно $4 \le 9k \le 22$, и потому необходимо проверить лишь два значения k $(k=1 \text{ и } k=2)$. Если $k=1$, то получаем уравнение $4+2y=9$, которое не имеет решения на множестве цифр. Если же $k=2$, то $4+2y=18$ и $y=7$.

Уравнение (1.5) при $k=2$ и $y=7$ принимает вид $12+x=18$. Откуда $x=6$. Таким образом, из множества пятизначных чисел вида $\overline{2x03y}$ на 99 делится лишь одно: $m=26037$.

Ответ: 26037.

1.2.4. Делимость целых чисел с остатком

Пусть m целое число, а n натуральное число. Если $|m|>n$ и m не делится на n нацело, то возможно деление m на n с остатком.

Определение 3. *Для любого целого числа* m *и любого натурального* n *существуют единственное целое число* k *и единственное натуральное число* r, *причем* $0 \le r < n$, *такое, что*

$$m=nk+r. \tag{1.8}$$

При этом целое число k называется ***неполным частным*** или просто ***частным***, а натуральное число r – ***остатком.***

Замечание: *если* m *положительное целое число и* $m<n$, *то* $k=0$, *а* $r=m$, *т.е., например, остаток от деления числа 13 на 15 равен 13, а частное – нулю.*

Разделим 26 на 4 с остатком. Для этого находим максимальное число k, удовлетворяющее неравенствам: $4k<26$ и $26-4k<4$. Таким числом будет $k=6$. Тогда $r=26-4\cdot 6=2$ и в итоге имеем: $26=4\cdot 6+2$.

Здесь $k=6$ – частное, $r=2$ – остаток.

Разделим отрицательное число -35 на 8. Если бы число m было положительным $m = 35$, то мы получили бы частное от деления 35 на 8, равное 4, и остаток $r = 3$, т.е.

$$35 = 8 \cdot 4 + 3 \qquad (k = 4,\ r = 3).$$

Запись по аналогии

$$-35 = 8(-4) - 3 \qquad (k = 4,\ r = -3)$$

для равного по модулю отрицательного числа является ошибочной, так как по определению $0 \le r < n$. Правильные значения k и r в данном случае ($m = -35$) таковы: $k = -5,\ r = 5$, т.е.

$$-35 = 8(-5) + 5.$$

Можно предложить следующий алгоритм для деления отрицательного числа m на натуральное n с остатком:

1. Находим неполное частное k для целого положительного числа ($-m$): $k \cdot n < (-m) < (k+1) \cdot n$.
2. Искомое частное $\tilde{k}$ для отрицательного числа m равно $-(k+1)$, а остаток r равен $r = m - (-(k+1) \cdot n) = m + (k+1)n$.

Пусть, например, необходимо разделить число -76 на 9. Поскольку $9 \cdot 8 < 76 < 9 \cdot 9$, то $k = 8$ (неполное частное от деления числа 76 на 9). Тогда искомое неполное частное для противоположного ему числа -76 равно $-(8+1) = -9$, а остаток $r = -76 - (-9) \cdot 9 = 5$. Окончательно

$$-76 = -9 \cdot 9 + 5.$$

1.3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Если натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ делятся на натуральное число n (не обязательно простое), то число n называется ***общим делителем*** чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Два и более натуральных числа могут иметь несколько разных общих делителей. Очевидно, что один из них больше других. Он имеет свое название, обозначение и играет важную роль в теории целых чисел.

Определение 1. *Наибольшее натуральное число, на которое делятся числа* $m_1, m_2, \ldots, m_k$*, называется* ***наибольшим общим делителем*** *(НОД) этих чисел.*

Например, $m_1 = 72$ и $m_2 = 42$ имеют три общих делителя – числа 2, 3 и 6, наибольшим их них является число 6. Будем писать: $\text{НОД}(72, 42) = 6$.

Числа 180, 450 и 315 имеют четыре общих делителя – числа 3, 9, 15, 45; наибольшее их них – 45. Поэтому

$$\text{НОД}(180, 450, 315) = 45.$$

Если известны канонические разложения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то для нахождения НОД ($m_1, m_2, \ldots, m_k$) необходимо:

1. *Выбрать одинаковые простые числа* p_i*, входящие одновременно в разложение каждого числа* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
2. *Составить из выбранных простых чисел произведение, взяв каждое простое число в* ***минимальной*** *из всех степеней, в которых оно входит в разложение чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например,

$$\text{НОД}(72;126) = \text{НОД}\left(2^3 \cdot 3^2; 2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

В разложении чисел $72 = 2^3 \cdot 3^2$ и $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ два одинаковых простых числа: $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Минимальная степень числа $p_1 = 2$ равна 1, а числа $p_2 = 3$ равна 2. Поэтому НОД (72,126) $= 2 \cdot 3^2 = 18$.

Пример 1.3. Найдите НОД (847, 1617).

Решение. Число 847 не делится на простые числа 2, 3, 5, но делится на 7. Сумма цифр числа 1617 делится на 3 (1+6+1+7=15). Поэтому имеем далее:

$$\begin{array}{r|l} 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 847 = 7 \cdot 11^2;$$

$$\begin{array}{r|l} 1617 & 3 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1617 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Выбрав одинаковые простые числа $p_1 = 7$ и $p_2 = 11$ из построенных канонических разложений, получим

$$\text{НОД}(847, 1617) = 7 \cdot 11 = 77.$$

Ответ: $\text{НОД}(847, 1617) = 77$.

Пример 1.4. Найдите НОД (525, 715, 1260).

Решение. $525 = 3 \cdot 175 = 3 \cdot 5 \cdot 35 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7;$

$715 = 5 \cdot 143 = 5 \cdot 11 \cdot 13;$

$$1260 = 2 \cdot 630 = 2^2 \cdot 315 = 2^2 \cdot 3 \cdot 105 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 35 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Откуда $\text{НОД}(525, 715, 1260) =$

$$= \text{НОД}\left(3 \cdot 5^2 \cdot 7;\, 5 \cdot 11 \cdot 13;\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7\right) = 5.$$

Ответ: $\text{НОД}(525, 715, 1260) = 5$.

Нахождение канонического разложения натурального числа m в некоторых случаях может быть не очень простой процедурой, требующей перебора большого числа ме́ньших простых чисел, пока не встретится искомое простое число. Например, для построения канонического разложения числа 6137 ($6137 = 17 \cdot 19^2$) необходимо проверить 6 простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13), предшествующих в натуральном ряду первому простому числу – делителю числа 6137.

Построению канонического разложения больших натуральных чисел в известной мере помогает следующая

Теорема 1.9. *Если* p *– наименьшее простое число в составе канонического разложения натурального числа* m $\left(m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\right)$, *то*

$$p^2 \le m. \qquad (1.9)$$

Доказательство. *Не умаляя общности, можем считать, что* $p = p_1$ *и* $p_2 > p_1$, $p_3 > p_1, \ldots, p_r > p_1$. *Но тогда* $p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} > p^{k_2+k_3+k_r} > p$ *и, как следствие,*

$$m = p^{k_1}\left(p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}\right) > p^{k_1} \cdot p \geq p^2 . \blacksquare$$

Следствие. *Если ни одно простое число* p $\left(p \leq \sqrt{m}\right)$ *не является делителем числа* m*, то* m *– простое число.*

Из неравенства (1.9) следует, что наименьшее простое число p, являющееся делителем натурального числа m, следует искать среди чисел, которые удовлетворяют неравенству

$$p \leq \sqrt{m} . \qquad (1.10)$$

Пусть $m = 4199$, тогда

$$64 < \sqrt{4199} < 65$$

и потому $p_1 \leq 64$. Используя признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 11, получаем, что 4199 не делится ни на одно из этих простых чисел. Не делится оно и на 7. Проверим делимость этого числа на 13: $4199 : 13 = 323$. Частное 323 на 13 не делится. Для нахождения второго простого числа в каноническом разложении числа 4199, т.е. делителя числа 323, найдем оценку $\sqrt{323}$ и воспользуемся неравенством (1.10):

$$17 < \sqrt{323} < 18 .$$

Отсюда следует, что $13 < p_2 \leq 17$. Проверив делимость 323 на 17, получим: $323 = 17 \cdot 19$. Окончательно имеем каноническое разложение числа 4199: $4199 = 13 \cdot 17 \cdot 19$.

Таким образом, получаем правило построения канонического разложения «больших» и «нестандартных» натуральных чисел m.

1. *Находим оценки:* n_1 *– снизу и* n_2 *– сверху корня квадратного из* m *(*$n_1 \leq \sqrt{m} \leq n_2$, n_1, n_2 *– натуральные числа).*
2. *Проверяем делимость* m *на простые числа* p*, не превосходящие числа* n_1*. Если такие числа не найдены, то* m *– про-*

стое число. Если же $p_1 < n_1$ *– искомое число, то находим частное* m_1 *от деления* m *на* p_1 *(*$m = p_1 \cdot m_1$*).*

3. *Проверяем делимость* m_1 *на* p_1. *Если* $m_1 \vdots p_1$, *то существует* m_2 *такое, что* $m_1 = p_1 \cdot m_2$ *и соответственно* $m = p^2{}_1 \cdot m_2$. *Если же* m_1 *не делится на* p_1, *то находим оценки* $\sqrt{m_1}$ $\left(\widetilde{n}_1 \le \sqrt{m_1} \le \widetilde{n}_2\right)$ *и затем ищем делители* p_2 *числа* m_1 *такие, что*

$$p_1 < p_2 \le \widetilde{n}_1$$

и т.д.

Пример 1.5. Установите, является ли число 331 составным и если является, то найдите его каноническое разложение.

Решение. $18 < \sqrt{331} < 19$. Легко устанавливается, что 331 не делится ни на одно простое число $p \le 17$ (либо с помощью признаков делимости на 2, 3, 5, 9, 11, либо непосредственно делением на 7, 13, 17). Это означает, с учетом следствия из теоремы 1.9, что 331 – простое число.

Ответ: 331 – простое число.

Пример 1.6. Установите, является ли число 73117 составным и если является, то найдите его каноническое разложение.

Решение. $270 < \sqrt{73117} < 271$. Поэтому, если существует простое число p_1 такое, что $73117 \vdots p_1$, то $p_1 < 270$ (270 – составное). Легко устанавливается, что 73117 не делится на простые числа 2, 3, 5, 7, а на 11 оно делится, так как знакопеременная сумма цифр этого числа делится на 11: $7 - 3 + 1 - 1 + 7 = 11$, $11 \vdots 11$. Имеем $73117 = 11 \cdot 6647$. Частное 6647 не делится на 11. Поэтому ищем второй делитель p_2 числа 73117 среди простых чисел p_2 таких, что $11 < p_2 < \sqrt{6647} \quad \Leftrightarrow \quad 11 < p_2 < 81$. Число 6647 не делится на 13, но делится на 17: $6647 = 17 \cdot 391$. Проверяем делимость 391 на 17. Имеем $391 = 17 \cdot 23$. Окончательно получаем: $73117 = 11 \cdot 17^2 \cdot 23$ – каноническое разложение числа 73117.

Ответ: $73117 = 11 \cdot 17^2 \cdot 23$.

Использование оценки (1.10) для потенциальных простых делителей натурального числа m облегчает нахождение канонического разложения этого числа и, как следствие, – нахождение НОД «больших чисел».

Однако для нахождения НОД «больших» чисел удобнее применять алгоритм Евклида. Поясним суть алгоритма на примере.

Пример 1.7. Найдите НОД (1547, 5746).

Решение. Разделим большее из двух чисел на меньшее с остатком:

$$\begin{array}{r|l} -\,5746 & 1547 \\ \underline{4641} & 3 \\ 1105 & \end{array}$$

Теперь разделим делитель 1547 на остаток 1105:

$$\begin{array}{r|l} -\,1547 & 1105 \\ \underline{1105} & 1 \\ 442 & \end{array}$$

И вновь разделим делитель 1105 на остаток 442 и т.д., пока не произойдет деление нацело:

$$\begin{array}{r|l} -\,1105 & 442 \\ \underline{884} & 2 \\ 221 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} -\,442 & 221 \\ \underline{442} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Число 221, обеспечившее на последнем этапе деление нацело, и является искомым НОД.

Ответ: НОД (1547, 5746) = 221.

Отметим, что $1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17$, а $5746 = 2 \cdot 13^2 \cdot 17$ и потому, действительно, НОД (1547, 5746) $= 13 \cdot 17 = 221$.

Комментарий к примеру 1.7. *Запишем цепочку последовательных операций деления в примере 1.7 в виде (1.8):*

$$5746 = 1547 \cdot 3 + 1105,$$

$$1547 = 1105 + 442,$$

$$1105 = 442 \cdot 2 + 221,$$

$$442 = 221 \cdot 2.$$

Выразим из третьего равенства полученное значение НОД – число 221 – через делимое и делитель:

$$221 = 1105 - 442 \cdot 2;$$

затем из второго – остаток 442 через делимое и, делитель и наконец, остаток 1105 из первого равенства:

$$221 = 1105 - 2(1547 - 1105) = 3 \cdot 1105 - 2 \cdot 1574,$$

$$221 = 3(5746 - 3 \cdot 1547) - 2 \cdot 1574 = 3 \cdot 5746 - 11 \cdot 1574.$$

В итоге НОД чисел 5746 и 1574 представлен в виде алгебраической суммы этих же чисел

$$221 = 3 \cdot 5746 + (-11) \cdot 1574.$$

Подобное представление справедливо для НОД любых целых чисел m и n, а именно: если $d = \text{НОД}(m, n)$, то существуют $t, \ell \in \mathbf{Z}$ такие, что

$$d = t \cdot m + \ell \cdot n. \tag{1.11}$$

Это равенство является следствием алгоритма Евклида.

Приведем краткое обоснование алгоритма Евклида. Пусть m_1, m_2 – два натуральных числа, причем, для определенности, $m_2 > m_1$. Разделим m_2 на m_1 с остатком:

$$m_2 = k_1 m_1 + r_1, \quad r_1 < m_1. \tag{1.12}$$

Если $r_1 = 0$, то $m_2 \vdots m_1$ и НОД (m_1, m_2) = m_1.

Если же $r_1 \neq 0$ $\;(0 < r_1 < m_1)$ и $d = \text{НОД}(m_1, m_2)$, то $m_1 \vdots d$ и $m_2 \vdots d$. Тогда из (1.12) следует, что и остаток r_1 должен делиться на d, а это, в свою очередь, означает, что

$$\text{НОД}(m_1, m_2) = \text{НОД}(r_1, m_1).$$

Разделив аналогично m_1 на r_1:

$$m_1 = k_2 r_1 + r_2, \quad r_2 < r_1,$$

мы получим либо $r_2 = 0$ и тогда $d = r_1$ [действительно, $m_1 = k_2 \cdot r_1$ и, с учетом (1.12), $m_2 = k_1 \cdot k_2 \cdot r_1 + r_1 = (k_1 k_2 + 1) r_1$], либо $0 < r_2 < r_1$ и соответственно

$$\text{НОД}(m_1, m_2) = \text{НОД}(r_1, m_1) = \text{НОД}(r_2, r_1).$$

Продолжив процесс деления «делителей» на «остатки», мы получим на некотором шаге, что $\text{НОД}(m_1, m_2) = r_s$, $r_s > 1$, если $r_{s+1} = 0$, либо $\text{НОД}(m_1, m_2) = 1$, если $r_{s+1} = 1$. Т.е.

$$\begin{aligned} m_2 &= k_1 \cdot m_1 + r_1, \\ m_1 &= k_2 \cdot r_1 + r_2, \\ r_1 &= k_3 \cdot r_2 + r_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{s-2} &= k_s \cdot r_{s-1} + r_s, \\ r_{s-1} &= k_{s+1} \cdot r_s + r_{s+1}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Откуда: 1) $d = r_s$, если $r_{s+1} = 0$;

2) $d = 1$, если $r_{s+1} = 1$.

Выражая последовательно остатки r_i, $i = 1, 2, \dots$, через делимое и делитель, получаем:

$$r_1 = m_2 - k_1 m_1 = 1 \cdot m_2 + (-k_1) m_1,$$

$$r_2 = m_1 - k_1 r_1 = m_1 - k_1(m_2 - k_1 m_1) = (-k) m_2 + (1 + k_1 k_2) m_1$$

и т.д. Отсюда следует, что каждый остаток r_i является алгебраической суммой (1.11) чисел m_1, m_2. Поскольку $\text{НОД}(m_1, m_2)$ равен одному из остатков ($d = r_s$ или $d = r_{s+1} = 1$), то на s-м или на $(s+1)$ - м шаге получим искомое представление:

$$d = t\,m_1 + \ell\,m_2.$$

Пример 1.8. Найдите НОД (30031; 510528).

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\,510528 & 30031 \\ \cline{2-2} 30031 & 17 \\ \cline{1-1} -\,210218 & \\ 210217 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Поскольку $510528 = 17 \cdot 30031 + 1$, то

$$\text{НОД}\ (30031; 510528) = 1.$$

Числа 30031 и 510528 являются взаимно простыми.

Ответ: НОД (30031; 510528)=1.

Отметим, что $30031 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1$,

$$510528 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17+1.$$

В различных по своей природе математических задачах приходится находить минимальное целое число, которое делится одновременно на два или более других целых чисел.

Пример 1.9. Два спортсмена начинают движение по прямой с общей линии старта. Длина шага одного из них равна 112 см, другого 126 см. Длина шага – расстояние от центра одной стопы спортсмена до центра другой; соответственно отметкой от стопы является точка – центр стопы. Через какое минимальное расстояние отметки от стоп совпадут?

Решение. По условию задачи каждый спортсмен сделает целое число шагов m и n соответственно до точки, в которой совпадут отметки от их стоп. Должно выполняться равенство $m\cdot 112 = n\cdot 126$, причем m и n не должны иметь общих делителей. Имеем $m = \frac{n\cdot 126}{112} = \frac{n\cdot 63}{56} = \frac{n\cdot 9}{8}$. Поскольку $m \in \mathbf{N}$, то n должно делиться на 8. Минимальное значение n, удовлетворяющее этому условию, равно 8 и, как следствие, $\ell_{\min} = 8\cdot 126 = 1008$.

Ответ: 1008 см.

Найденное в примере 1.9 число 1008 является минимальным числом, делящимся одновременно на 112 и на 126. Его называют наименьшим общим кратным чисел 112 и 126.

Определение 2*. *Наименьшим общим кратным *(НОК) чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *называется наименьшее натуральное число* n*, которое делится на каждое из чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Будем писать $\text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = n$.

В примере 1.9 указан один из возможных способов нахождения НОК двух чисел. Другой способ основан на использовании канонических разложений чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Проанализируем с этой точки зрения пример 1.9. Построим каноническое разложение чисел 112 и 126: $112 = 2^4 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, а также числа $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Можно отметить, что в каноническое разложение числа 1008:

1) вошли ***все*** простые числа, входящие в разложение чисел 112 и 126, т.е. $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 7$;

2) простое число $p_1 = 2$ вошло в максимальной степени 4 из двух возможных 1 и 4.

Подмеченные свойства НОК двух конкретных чисел являются общими для НОК любых двух и более целых чисел. Для нахождения $\text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ необходимо:

1. *Составить канонические разложения чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
2. *Составить из всех простых чисел, вошедших в разложение хотя бы одного числа* m_i, *произведение,* ***взяв каждое простое число*** p ***в максимальной степени*** *из всех степеней, в которых это число* p *входит в разложение чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например, если $m_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $m_2 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, $m_3 = 7^2 \cdot 2^4$, то $\text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Из правил построения НОК и НОД двух натуральных чисел через их канонические разложения легко выводится следующее свойство НОД и НОК:

$$\boxed{\text{НОД}(m_1, m_2) \cdot \text{НОК}(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2}. \tag{1.14}$$

Откуда, в частности, получаем формулу для нахождения НОК

$$\boxed{\text{НОК}(m_1, m_2) = \frac{m_1 \cdot m_2}{\text{НОД}(m_1, m_2)}}. \tag{1.15}$$

Пример 1.10. Найдите НОД и НОК чисел 7007 и 31603.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида для нахождения НОД (7007; 31603).

$$\begin{array}{r|l} -31603 & 7007 \\ \underline{28028} & 4 \\ 3575 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -7007 & 3575 \\ \underline{3575} & 1 \\ 3432 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3575 & 3432 \\ \underline{3432} & 1 \\ 143 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3432 & 143 \\ \underline{286} & 24 \\ -572 & \\ \underline{572} & \\ 0 & \end{array}$$

Откуда $НОД(7007;31603) = 143$.

В соответствии с формулой (1.15) имеем

$$НОК(7007;31603) = \frac{7007 \cdot 31603}{143} = 1548547.$$

Ответ: $НОД(7007;31603) = 143$;

$НОК(7007;\ 31603) = 1548547$.

1.4. Сравнения. Теоремы об остатках

Множество целых чисел, дающих при делении на некоторое фиксированное целое число m одинаковый остаток r, $0 \le r < m$, можно объединить в один класс. Например, числа $\ldots,-5,-1,3,7,11,15,\ldots$ при делении на 4 дают остаток 3. Это означает, что образуется целый класс чисел, обладающих указанным свойством. Числа, принадлежащие этому классу, называются ***сравнимыми по модулю*** m.

Определение. *Целые числа* a *и* b *называются* ***сравнимыми по модулю*** m, *если* $(a-b)\vdots m$, *т.е. если* m *делит разность этих чисел.*

Если a сравнимо с b по модулю m, то пишут

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

Например, $15 \equiv 7(\mathrm{mod}\,4) \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$. Эта запись говорит о том, что число 15 сравнимо с каждым из чисел 7, 3, -1 (по модулю 4). Запись $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ означает, что $a = b + k \cdot m$.

Пусть A – множество всех чисел, сравнимых по модулю m. Наименьшее положительное число из этого множества является остатком от деления каждого числа $a \in A$ на m. Например, если $A = \{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$, то остаток r от деления каждого числа из этого множества на 4 равен 3.

Множество A в данном примере можно задать компактно:

$$A = \{a | a = -1 + 4k,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

или

$$A = \{a | a = 3 + 4k,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

или

$$A = \{a | a = 11 + 4k,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

и т.д. В общем случае

$$A = \{a | a = b + mk,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

где b – *произвольное* число из множества A. Однако удобно в качестве числа b брать остаток r отделения a на m, т.е.

$$A = \{a | a = r + mk,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Данная запись читается следующим образом: A есть множество чисел a таких, что $a = r + mk,\ k \in \mathbf{Z}$. Ещё раз отметим, что $m \in \mathbf{Z}$, $0 \le r < m$, и потому $a \in \mathbf{Z}$.

Для каждого $m \in \mathbf{Z}$ существует ровно m различных классов сравнимости. Например, для $m = 4$ $(m = -4)$ таких классов 4:

$$A_1 = \{a | a = 4k,\ k \in \mathbf{Z}\};$$

$$A_2 = \{a | a = 4k + 1,\ k \in \mathbf{Z}\};$$

$$A_3 = \{a | a = 4k + 2,\ k \in \mathbf{Z}\};$$

$$A_4 = \{a | a = 4k + 3,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Достаточно очевидно, что объединение этих множеств $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ совпадает с множеством $\mathbf{Z}$ целых чисел. Разумеется, это справедливо для любого $m \ge 1$. Если $m = 1$, то любые два числа $a, b \in \mathbf{Z}$ сравнимы по модулю 1. Отсюда следует, что класс сравнимости A_1 по модулю 1 совпадает с множеством $\mathbf{Z}$. Отношение сравнения по модулю $0\ (m = 0)$ является отношением равенства: $a = b(\mathrm{mod}\, 0)$.

Сравнения по модулю m можно почленно складывать (вычитать) и умножать. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.10. *Если* $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, *то*

$$a + c \equiv (b + d) \pmod m,$$
$$a - c \equiv (b - d) \pmod m.$$

Доказательство. *Дано:*

$$a \equiv b \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (a - b) \vdots m,$$
$$c \equiv d \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (c - d) \vdots m.$$

Требуется доказать:

$$a + c \equiv (b + d) \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad ((a + c) - (b + d)) \vdots m,$$
$$a - c \equiv (b - d) \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad ((a - c) - (b - d)) \vdots m.$$

Так как $(a - b) \vdots m$ *и* $(c - d) \vdots m$, *то и их сумма*

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

и разность $\quad (a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$

делятся на m. *Что требовалось доказать.* ■

Заметим, что утверждение теоремы справедливо для суммы любого конечного числа сравнений. В частности, справедливо следующее следствие из теоремы.

Следствие из теоремы. *Если* $a \equiv b \pmod m$, *то*

$$\forall k \in N : k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod m.$$

Например, так как $13 \equiv 2 \pmod{11}$, то

$$10 \cdot 13 \equiv 10 \cdot 2 \pmod{11} = 9 \pmod{11}.$$

Теорема 1.11. *Если* $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, *то* $ac \equiv bd \pmod m$.

Доказательство. *Дано:*

$$a \equiv b \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (a - b) \vdots m \quad \Leftrightarrow \quad a - b = mk, k \in \mathbf{Z},$$
$$c \equiv d \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (c - d) \vdots m \quad \Leftrightarrow \quad c - d = m\ell, \ell \in Z.$$

Требуется доказать, что

$$ac \equiv bd \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (ac - bd) \vdots m \quad \Leftrightarrow \quad ac - bd = mt,\ t \in \mathbf{Z}.$$

Имеем

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b)c + b(c-d) =$$
$$= cmk + bm\ell = m(ck + b\ell).$$

Так как $c, b, k, \ell \in \mathbf{Z}$*, то* $ck + b\ell = t$ *и* $t \in \mathbf{Z}$*. Таким образом,* $ac - bd = mt$*,* $t \in \mathbf{Z}$. ■

Отметим, что, как и в теореме 1.10, утверждение теоремы 1.11 имеет место для любого конечного числа перемножаемых сравнений. Справедливо и аналогичное следствие из теоремы.

Следствие из теоремы. *Если* $a \equiv b \pmod m$*, то* $\forall n \in N : a^n \equiv b^n \pmod m$.

Например,

$$13^7 \equiv 2^7 \pmod{11} \equiv 2^5 \pmod{11} \cdot 2^2 \pmod{11} \equiv (-1) \cdot 4 \pmod{11} \equiv$$
$$\equiv 7 \pmod{11}.$$

Суммируя результаты теорем 1.10 и 1.11, а также следствий из них, получаем правила:

Сравнения можно почленно складывать, вычитать, умножать и возводить в натуральную степень.

К обеим частям сравнения можно прибавлять постоянную величину, т.е.

$$\mathbf{a + c \equiv (b + c) \pmod m}.$$

Замечание. *Если в сравнениях* $a \equiv b \pmod m$ $c \equiv d \pmod m$ b *является остатком* r_a *от деления* a *на* m*, а* d *является остатком* r_b *от деления* c *на* m*, то теоремы 1.10 и 1.11 превращаются в теорему об остатках.*

Теорема 1.12. *Остаток* r_{a+b} *от деления суммы* $a + b$ *двух целых чисел* a *и* b *на* m *равен сумме остатков* r_a *и* r_b*, взя-*

тых по модулю m, а остаток r_{ab} *от деления произведения двух целых чисел* a *и* b *на* m *равен произведению остатков* r_a *и* r_b, *взятых по модулю m,* т.е.

$$a+b \equiv (r_a + r_b)(\mathrm{mod}\, m) = r_{a+b},$$

$$ab \equiv r_a \cdot r_b (\mathrm{mod}\, m) = r_{ab}$$

или, иначе $r_{a+b} = \begin{cases} r_a + r_b, \text{ если } r_a + r_b < m; \\ r_a + r_b - m, \text{ если } r_a + r_b \geq m. \end{cases}$

$$r_{ab} = \begin{cases} r_a \cdot r_b, \text{ если } r_a \cdot r_b < m; \\ r_a \cdot r_b (\mathrm{mod} m), \text{ если } r_a \cdot r_b \geq m. \end{cases}$$

Пример 1.11. Найдите остаток от деления числа $4^{50} + 5^{50}$ на 9.

Решение. Найдём последовательность $\{r_k\}, k \in \mathbf{N}$, остатков от деления степеней 4^k, $k \in \mathbf{N}$, на 9 . Очевидно, что остатки r_k в этой последовательности будут повторяться с некоторым конечным шагом h, $h \leq 8$, поскольку $0 \leq r_k < 9$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Остаток r_k от деления числа 4^k на 9 легко находится с помощью теоремы об остатках. Действительно, так как $4^k = 4^{k-1} \cdot 4$ и $4 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 9)$, $0 \leq r < 9$, то $4^k \equiv 4 \cdot r(\mathrm{mod}\, 9)$.

В частности, $4^1 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4$;

$$4^2 \equiv 4 \cdot 4(\mathrm{mod}\, 9) \equiv 7(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_2 = 7;$$

$$4^3 \equiv 4 \cdot 7(\mathrm{mod}\, 9) \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_3 = 1;$$

$$4^4 \equiv 4 \cdot 1(\mathrm{mod}\, 9) \equiv 4(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_4 = 4;$$

$$4^5 \equiv 4 \cdot 4(\mathrm{mod}\, 9) \equiv 7(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_5 = 7;$$

$$4^6 \equiv 4 \cdot 7(\mathrm{mod}\, 9) \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9) \quad \Rightarrow \quad r_6 = 1$$

и т.д. Остатки повторяются с шагом $h=3$. Поскольку $50=16\cdot 3+2$, то остаток от деления числа 4^{50} на 9 будет равен r_2: $4^{50}\equiv 7(\mathrm{mod}\,9)=r_2$.

Аналогично находим

$$
\begin{aligned}
&5^1\equiv 5(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_1=5;\\
&5^2\equiv 5\cdot 5(\mathrm{mod}\,9)\equiv 7(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_2=7;\\
&5^3\equiv 7\cdot 5(\mathrm{mod}\,9)\equiv 8(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_3=8;\\
&5^4\equiv 8\cdot 5(\mathrm{mod}\,9)\equiv 4(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_4=4;\\
&5^5\equiv 4\cdot 5(\mathrm{mod}\,9)\equiv 2(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_5=2;\\
&5^6\equiv 2\cdot 5(\mathrm{mod}\,9)\equiv 1(\mathrm{mod}\,9) && \Rightarrow\ r_6=1.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что остатки от деления числа 5^k, $k\in\mathbf{N}$, на 9 повторяются с шагом $h=6$. Поскольку $50=8\cdot 6+2$, то остаток от деления числа 5^{50} на 9 будет равен r_2: $5^{50}\equiv 7(\mathrm{mod}\,9)=r_2$.

В соответствии с теоремой 3 об остатках

$$4^{50}+5^{50}\equiv(7+7)(\mathrm{mod}\,9)\equiv 5(\mathrm{mod}\,9).$$

Ответ: 5.

Пример 1.12. Найдите остаток от деления числа 2008^{2008} на 17.

Решение.
$$
\begin{aligned}
&2008^1\equiv 2(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_1=2;\\
&2008^2\equiv 2\cdot 2(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_2=4;\\
&2008^3\equiv 2\cdot 4(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_3=8;\\
&2008^4\equiv 2\cdot 8(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_2=16;\\
&2008^5\equiv 2\cdot 16(\mathrm{mod}\,17)\equiv 15(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_5=15;\\
&2008^6\equiv 2\cdot 15(\mathrm{mod}\,17)\equiv 13(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_6=13;\\
&2008^7\equiv 2\cdot 13(\mathrm{mod}\,17)\equiv 9(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_7=9;\\
&2008^8\equiv 2\cdot 9(\mathrm{mod}\,17)\equiv 1(\mathrm{mod}\,17) && \Rightarrow\ r_8=1,
\end{aligned}
$$

откуда $h = 8$. Поскольку $2008 = 251 \cdot 8 + 0$, то $2008^{2008} \equiv 1(\mathrm{mod}\,17)$, т.е. $r_{2008} = r_8 = 1$.

Ответ: 1.

Замечание. *Решение примера можно существенно упростить, если заметить, что* $2008^4 \equiv 16(\mathrm{mod}\,17) \equiv -1(\mathrm{mod}\,17)$ *и, что* $2008 = 502 \cdot 4$. *Тогда*

$$2008^4 \equiv (-1)^{502}(\mathrm{mod}\,17) \equiv 1(\mathrm{mod}\,17).$$

Нахождение остатков от деления степеней одного натурального числа на другое натуральное число в некоторых случаях существенно облегчает *малая теорема Ферма*[1].

Теорема 1.13*. *(малая теорема Ферма) *Если p – простое число, а натуральное число m не делится на p, то*

$$m^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,p), \qquad (1.16)$$

или, иначе: $\left(m^{p-1} - 1\right) \vdots\, p$.

Доказательство. *Пусть* r_1, $0 < r_1 \le p - 1$ *– остаток от деления числа m на p,* r_2 *– остаток от деления* $2m$ *на p,* r_3 *– остаток от деления* $3m$ *на p, ...,* r_{p-1} *– остаток от деления числа* $(p-1)m$ *на p. Все остатки* $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ *различны, т.е. среди этих остатков нет хотя бы двух равных. Действительно, если допустить, что*

$$r_i = r_j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\},\ i \ne j,$$

то число $|i - j| \cdot m$ *должно делиться на p, но это невозможно, поскольку* $|i - j| < p$, *а m не делится на p по условию теоремы.*

Таким образом, $\forall i \in \{1, 2, \dots, p-1\}:\ 0 < r_i \le p - 1$ *и* $\forall i \ne j:\ r_i \ne r_j$. *Отсюда следует, что остатки*

---

[1] Ферма Пьер (Fermat Pierre, 1601 – 1665) – выдающийся французский математик (по профессии – юрист). Основные результаты по алгебре и математическому анализу; один из создателей теории числа и автор двух знаменитых теорем – великой и малой теорем Ферма.

$r_i,\ i = 1,2,\ldots,\ldots p-1$ *принимают все значения* $1,2,\ldots,\ldots p-1$ *и потому*

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) = (p-1)!$$

В соответствии с теоремой 1.12 и с учетом данного результата, получаем

$$(p-1)!\,m^{p-1} \equiv (p-1)!\,(\operatorname{mod} m).$$

Откуда получаем искомое утверждение

$$m^{p-1} \equiv 1(\operatorname{mod} p).\ \blacksquare$$

Следствие из теоремы*. Если* $p = 2q+1$ *– простое число, то для любого числа* $m \in \mathbf{N}$ *, не кратного* p*, либо* $m^q - 1$*, либо* $m^q + 1$ *делится на* p.

Доказательство. *В соответствии с малой теоремой Ферма число* $m^{p-1} - 1 = m^{2q} - 1$ *делится на* p. *Учитывая, что* $m^{2q} - 1 = (m^q - 1)\cdot(m^q + 1)$, *получаем искомое утверждение.* $\blacksquare$

Замечание. *Показатель* $p-1$ *степени числа* m*, при котором число* $m^{p-1} - 1$ *делится на* p, *не обязательно является минимальным. Однако если существует число* $k < p-1$ *и такое, что* $m^k - 1$ *делится на* p, *то* k *является делителем числа* $p-1$ (*докажите!*). *Подобная ситуация имеет место в рассматриваемом ниже примере.*

Решим пример 1.12 с использованием малой теоремы Ферма, т.е. найдем остаток от деления числа 2008^{2008} на 17. Поскольку $2008 \equiv 2(\operatorname{mod} 17)$, то $2008^{2008} \equiv 2^{2008}(\operatorname{mod} 17)$. В соответствии с малой теоремой Ферма $2^{16} \equiv 1(\operatorname{mod} 17)$. Отметим попутно, что наименьшее значение показателя k, при котором число $2^k - 1$ делится на 17, равно 8, т.е. $2^8 \equiv 1(\operatorname{mod} 17)$.

Представим показатель степени числа 2^{2008} в следующем виде: $2008 = 16 \cdot 125 + 8$. Как следствие, $2^{2008} = \left(2^{16}\right)^{125} \cdot 2^8$. В соответствии с теоремой 1.11

$$2^{2008} \equiv \left(2^{16}\right)^{125} (\mathrm{mod}\,17) \cdot 2^{8} (\mathrm{mod}\,17) \equiv 2^{8} (\mathrm{mod}\,17).$$

Имеем далее

$$2^{8} \equiv 2^{4} (\mathrm{mod}\,17) \cdot 2^{4} (\mathrm{mod}\,17) \equiv (-1) \cdot (-1) (\mathrm{mod}\,17) \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17).$$

Таким образом, $2008^{2008} \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17)$.

Пример 1.13. Найдите остаток от деления числа 347^{123} на 11.

Решение. $347 \equiv 6 (\mathrm{mod}\,11)$. В соответствии с малой теоремой Ферма $6^{10} \equiv 1 (\mathrm{mod}\,11)$. Учитывая этот результат и то, что $123 = 10 \cdot 12 + 3$, получаем

$$347^{123} \equiv 6^{123} (\mathrm{mod}\,11) \equiv \left(6^{10}\right)^{12} (\mathrm{mod}\,11) \cdot 6^{3} (\mathrm{mod}\,11) \equiv$$
$$\equiv 6^{3} (\mathrm{mod}\,11) \equiv 6^{2} (\mathrm{mod}\,11) \cdot 6 (\mathrm{mod}\,11) \equiv 3 \cdot 6 (\mathrm{mod}\,11) \equiv$$
$$\equiv 7 (\mathrm{mod}\,11).$$

Ответ: $r = 7$.

Пример 1.14. Докажите, что при любом натуральном m**,** не кратном 11, число

$$2m^{12} + m^{11} - 3m^{10} + 20m^{2} + 10m - 30$$

делится на 11.

Решение. $2m^{12} + m^{11} - 3m^{10} + 20m^{2} + 10m - 30 =$

$$= m^{10}\left(2m^{2} + m - 3\right) + 10\left(2m^{2} + m - 3\right) =$$
$$= \left(m^{10} + 10\right) \cdot \left(2m^{2} + m - 3\right) = \left(\left(m^{10} - 1\right) + 11\right) \cdot \left(2m^{2} + m - 3\right).$$

В соответствии с малой теоремой Ферма $\left(m^{10} - 1\right)$ делится на 11, поэтому число $m^{10} + 10 = \left(m^{10} - 1\right) + 11$ также делится на 11. ■

1. 5. Свойства квадратов целых чисел

Квадраты и более высокие степени целых чисел обладают рядом свойств, которые позволяют успешно решать многие задачи на множествах целых и натуральных чисел. Например, квадрат целого числа может оканчиваться только на одну из шести цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, а остатки от деления квадрата любого целого числа на 3, 4, 5, …, в свою очередь, образуют подмножества в множестве всех возможных остатков.

Для большего удобства в записи свойств квадратов целых чисел введём следующие обозначения для натуральных чисел n: $\overline{m1}$, $\overline{m2}$, …, $\overline{m9}$, $\overline{m0}$, где $m \in \mathbf{N_0}$ – число, образованное первыми цифрами натурального числа n. Например, если $n = 2431$, то $m = 243$; $n = 5$, то $m = 0$; $n = 289$, то $m = 28$.

Перечислим свойства квадратов целых чисел.

Свойство 1. *Квадрат* n^2 *целого числа* n *может оканчиваться только на одну из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, причём квадраты:*

– $\left(\overline{m1}\right)^2$ *и* $\left(\overline{m9}\right)^2$ *оканчиваются на 1;*

– $\left(\overline{m2}\right)^2$ *и* $\left(\overline{m8}\right)^2$ *оканчиваются на 4;*

– $\left(\overline{m3}\right)^2$ *и* $\left(\overline{m7}\right)^2$ *оканчиваются на 9;*

– $\left(\overline{m4}\right)^2$ *и* $\left(\overline{m6}\right)^2$ *оканчиваются на 6;*

– $\left(\overline{m5}\right)^2$ *оканчиваются на 25;*

– $\left(\overline{m0}\right)^2$ *оканчиваются на 00.*

Таким образом, квадрат целого числа не может оканчиваться на цифры 2, 3, 7 и 8; квадрат целого числа, имеющего в последних позициях один или несколько нулей, не может оканчиваться на нечётное число нулей.

Свойство 2. *Если целое число* n *делится на простое число* p*, то его квадрат* n^2 *должен делиться на* p^2.

Например, число 159 не может быть квадратом некоторого целого числа, поскольку оно делится на 3, но не делится на 9. Аналогично, число 2100126 не может быть квадратом целого числа, так как оно делится на 2, но не делится на 4.

Свойство 3. *При делении квадрата* n^2 *любого целого числа на 3, 4, …, 8, 9 возможны только перечисляемые ниже остатки:*

- *на 3 – 0 и 1;*
- *на 4 – 0 и 1;*
- *на 5 – 0, 1 и 4;*
- *на 6 – 0, 1, 3 и 4;*
- *на 7 – 0, 1, 2 и 4;*
- *на 8 – 0, 1 и 4;*
- *на 5 – 0, 1, 4 и 7.*

Свойство 3 означает, в частности, что квадрат n^2 целого числа может иметь вид:

$3k$ или $3k+1$ $\left(9 = 3 \cdot 3,\ 7^2 = 49 = 3 \cdot 18 + 1\right)$;

$4k$ или $4k+1$ $\left(8^2 = 4 \cdot 16,\ 9^2 = 81 = 4 \cdot 20 + 1\right)$;

$5k$ или $5k+1$, или $5k+4$

$\left(15^2 = 225 = 5 \cdot 45,\ 6^2 = 36 = 5 \cdot 7 + 1,\ 7^2 = 49 = 5 \cdot 9 + 4\right)$ и т.д.

Из свойства 3 следует так же, что квадрат n^2 целого числа n не может иметь вид $3k+2$, $4k+2$, $4k+3$, $5k+2$, $5k+3$ и т.д. Так, число 287 не может быть квадратом какого-либо целого числа, поскольку $287 = 4 \cdot 71 + 3$. Правда, это число не удовлетворяет и свойству 1. Число 27819 удовлетворяет свойствам 1 и 2 квадратов целых чисел, но не удовлетворяет свойству 3. Действительно, при делении этого числа с остатком на 4 в остатке получаем «недопустимое» значение 3: $27819 = 4 \cdot 6954 + 3$.

Невыполнение хотя бы одного из свойств 1-3 для некоторого натурального числа n **достаточно** для утверждения о том, что оно не может быть квадратом какого-либо целого числа.

Доказательство свойств 1-3 квадратов целых чисел не представляет особого труда. Докажем в качестве примера первые два утверждения в свойстве 1.

$$\left(\overline{m1}\right)^2 = (m \cdot 10 + 1)^2 = m^2 \cdot 10^2 + 2m \cdot 10 + 1,$$

$$\left(\overline{m9}\right)^2 = (m \cdot 10 + 9)^2 = m^2 \cdot 10^2 + 18m \cdot 10 + 81 =$$

$$= m^2 \cdot 10^2 + (18m + 8) \cdot 10 + 1.$$

Отсюда следует, что числа $\left(\overline{m1}\right)^2$ и $\left(\overline{m9}\right)^2$ оканчиваются на 1.

$$\left(\overline{m2}\right)^2 = (m \cdot 10 + 2)^2 = m^2 \cdot 10^2 + 40m + 4,$$

$$\left(\overline{m8}\right)^2 = (m \cdot 10 + 8)^2 = m^2 \cdot 10^2 + 16m \cdot 10 + 64 =$$

$$= m^2 \cdot 10^2 + (16m + 6) \cdot 10 + 4.$$

Таким образом, числа $\left(\overline{m2}\right)^2$ и $\left(\overline{m8}\right)^2$ оканчиваются на цифру 4.

Заметим, что $m \cdot 10 + 9 = (m+1) \cdot 10 - 1$,

$$m \cdot 10 + 8 = (m+1) \cdot 8 - 2$$

и уже отсюда следует, что пары числа $\left(\overline{m1}\right)^2$ и $\left(\overline{m9}\right)^2$, числа $\left(\overline{m2}\right)^2$ и $\left(\overline{m8}\right)^2$ имеют одинаковые (в паре) последние цифры в десятичной записи чисел.

Справедливость свойства 2 очевидна. Действительно, если $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа n, то $n^2 = \left(p_1^{k_1}\right)^2 \cdot \left(p_2^{k_2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{k_s}\right)^2$. Отсюда следует, что $n \vdots p$, где $p = p_i^{k_i}$, $i = 1,2,\ldots,s$, а $n^2 \vdots p^2$.

Докажем свойство 3 об остатках одного делителя, например 4. Разобьём множество целых чисел $\mathbf{Z}$ на 4 класса:

$$N_1 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{4k - 1\},\ N_2 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{4k\},$$

$$N_3 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{4k + 1\},\ N_4 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{4k + 2\}$$

и найдём остатки от деления квадрата n^2 на 4 в каждом классе.

$N_1 : (4k)^2 = 4\cdot(4k^2) \vdots 4$ – остаток 0;

$N_2, N_3 : (4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 4\cdot(4k^2 \pm 2k) + 1$ – остаток 1;

$N_4 : (4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4\cdot(2k+1)^2 \vdots 4$ – остаток 0.

Таким образом, квадрат n^2 любого целого числа n либо делится на 4 без остатка, либо остаток равен 1. ■

Аналогично доказываются утверждения об остатках для других делителей.

Пример 1.15. Установите, какие числа из приведённых могут, а какие не могут быть квадратом целого числа и почему.
а) 4257; б) 111111; в) 121121; г) 120409;
д) 437875; е) 29000; ж) 8410000.

Решение. а) число 4257 не может быть квадратом целого числа, так как оканчивается на цифру 7;

б) $111111 \vdots 3$, но 111111не делится на 9, поэтому и это число не может быть квадратом целого числа;

в) $121121 = 40373\cdot 3 + 2$; квадрат целого числа не может иметь остаток 2 при делении на 3;

г) число 120409 удовлетворяет всем трём свойствам квадрата целого числа; как следствие: $120409 = (347)^2$;

д) число 437875 не оканчивается на 25 и поэтому не может быть квадратом целого числа $n = \overline{m5}$;

е) 29000 оканчивается на нечётное число нулей и в соответствии со свойством 1 не может быть квадратом целого числа;

ж) число 8410000 удовлетворяет свойствам 1-3 квадрата целого числа и потому: $8410000 = (2900)^2$.

Ответ: а), б), в), д), е) – не могут;

г) $120409 = (347)^2$; ж) $8410000 = (2900)^2$.

Пример 1.16. Может ли число $4n^2 + 12n + 11$ быть квадратом целого числа при $n \in \mathbf{N}$?

Решение.

$$4n^2 + 12n + 11 = (4n^2 + 12n + 8) + 3 = 4(n^2 + 3n + 2) + 3.$$

Поскольку число $4n^2+12n+11$ представимо в виде $4k+3$, где $k=n^2+3n+2$, то оно не может быть квадратом целого числа (свойство 3).

Ответ: не может быть ни при каких $n \in \mathbf{N}$.

Пример 1.17. Квадрат двузначного числа состоит из четырёх цифр 0, 2, 8, 9. Найдите двузначное число и его квадрат.

Решение. Квадрат целого числа не может оканчиваться на цифры 2, 8 и на один нуль. Поэтому последняя цифра квадрата числа 9, а искомое двузначное число имеет вид $\overline{m3}$ или $\overline{m7}$, где m – цифра, отличная от нуля.

Поскольку 0 не может быть первой цифрой квадрата числа, то возможны четыре варианта: 8029, 8209, 2089 и 2809. Поскольку $90^2=8100$, то $89^2<8029<90^2$, $90^2<8209<91^2$. Действительно, $89^2=(90-1)^2=8100-180+1<8029$, а $91^2=(90+1)^2=8100+180+1=8281>8209$. Поэтому числа 8029 и 8209 не могут быть квадратами целых чисел.

Число 2089 удовлетворяет двойному неравенству $45^2<2089<46^2$ и так же не может быть квадратом целого числа.

Последнее число в списке 2809. Очевидно, что $50^2<2809<55^2$. Поэтому, если оно является квадратом двузначного числа, то им может быть только число 53: $53^2=(50+3)^2=2809$.

Ответ: $n=53$, $n^2=2809$.

1.6. Решение типовых задач

Классифицировать задачи на делимость целых чисел, наверное, можно. Однако проще и целесообразнее выделить свойства натуральных (целых) чисел, которые наиболее часто используются при решении задач на делимость, и указать некоторые стандартные приемы решения соответствующих задач.

1. *В произведении любых двух соседних целых чисел* $n\cdot(n+1)$ *одно из этих чисел делится на 2; в произведении любых трех соседних чисел* $n(n+1)(n+2)$ *хотя бы одно число делится на 2 и одно делится на 3 и т.д.*

Например, число n^5-5n^3+4n делится (для всех $n\in\mathbf{N}$) на 120, поскольку $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, а произведение пяти последовательных натуральных (целых) чисел делится на 2, на 3, на 4 и на 5, т.е. делится на $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

2. *Множество натуральных (целых) чисел можно разбить на классы.*

Например, $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\bigcup\mathbf{N}_2$ – разбиение множества натуральных чисел на два класса:

$\mathbf{N}_1$ – класс нечетных чисел $2k-1, k\in\mathbf{N}$;

$\mathbf{N}_2$ – класс четных чисел $2k, k\in\mathbf{N}$,

т.е. $\mathbf{N}_1=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1)$, $\mathbf{N}_2=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(2k)$.

Множество натуральных чисел можно разбить на три класса $\mathbf{N}_1\bigcup\mathbf{N}_2\bigcup\mathbf{N}_3$, включив в первый класс числа $3k, k\in\mathbf{N}$; во второй – числа $3k+1, k\in\mathbf{N}$; в третий – числа $3k+2, k\in\mathbf{N}$.

Разбиение множества целых чисел, например на 5 классов, можно записать в следующем виде

$$\mathbf{Z}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(\{5k-2\}\cup\{5k-1\}\cup\{5k\}\cup\{5k+1\}\cup\{5k+2\}\right), k\in\mathbf{Z}.$$

Разбиение на классы удобно использовать для доказательства некоторых утверждений, связанных с делимостью целых чисел.

3. *Заданное натуральное число* m *делится нацело на число* $kn+r$, *если* $kn+r$ *является делителем числа* m.

Например, $\dfrac{6}{m-2}$ будет целым числом тогда и только тогда, когда $m-2=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, т.е.

$$m \in \{1, 3, 0, 4, -1, 5, -4, 8\}.$$

Пример 1.18. Докажите, что число $(2n+1)^4 - 1$ делится на 16 для всех $n \in \mathbf{N}$.

Решение. $(2n+1)^4 - 1 = \left((2n+1)^2 - 1\right)\left((2n+1)^2 + 1\right) =$

$= (2n+1-1)(2n+1+1)\left((2n+1)^2 + 1\right) = 4n(n+1)\left((2n+1)^2 + 1\right).$

Для любого $n \in \mathbf{N}$: $n(n+1) \vdots 2$ и $\left((2n+1)^2 + 1\right) \vdots 2$. Действительно, $(2n+1)$ – нечетное число, тогда $(2n+1)^2$ – также нечетное число, а $(2n+1)^2 + 1$ – четное и потому делится на 2.

Окончательно имеем, что $(2n+1)^4 - 1$ делится на 16. ∎

Пример 1.19. Существуют ли натуральные числа n такие, что число $n^2 + n + 3$ делится на 26?

Решение. Если число $(n^2 + n + 3)$ делится на 26, то оно должно делиться и на 2, т.е. быть четным числом. Разобьем множество целых чисел на 2 класса: $\mathbf{N}_1 = \{2k\}$ – четных чисел и $\mathbf{N}_2 = \{2k-1\}$ – нечетных. Если $n = 2k$, то $n^2 + n + 3 = 2k(2k+1) + 3$ – нечетное число; если же $n = 2k-1$, то $n^2 + n + 3 = (2k-1) \cdot 2k + 3$ – также нечетное число.

Ответ: Не существует $n \in \mathbf{N}$, при котором число $(n^2 + n + 3)$ делится на 26.

Пример 1.20. Найдите 7 целых положительных чисел, сумма которых равна 175 и при этом в любой паре чисел одно число в целое число раз больше другого.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ – искомая совокупность чисел, записанных в порядке возрастания. Пусть далее $a_1 = a, a \in \mathbf{Z}^+$ – первое число, тогда

$$a_2 = ak_1, a_3 = ak_1k_2, \ldots, a_7 = ak_1k_2 \ldots k_6 \text{ -}$$

соответственно второе, третье, …, седьмое числа. При этом $k_1, k_2, \ldots, k_6 \in \mathbf{N}, \quad k_i \geq 2$.

Имеем

$$a\left(1+k_1+k_1k_2+\cdots+k_1k_2k_3\ldots k_6\right)=175. \qquad (1.17)$$

Отсюда следует, что $175 \vdots a$ и что a является нечетным числом.

Но при $k_1=k_2=\cdots=k_6=2$ (минимально возможное значение k_i):

$$1+k_1+k_1k_2+\cdots+k_1k_2\ldots k_6=1+2+2^2+\cdots+2^6=2^7-1=127.$$

Поэтому $a=1$. Тогда из (1.17) получаем

$$1+k_1+k_1k_2+\cdots+k_1k_2\ldots k_6=175 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k_1\left(1+k_2+k_2k_3+\cdots+k_2k_3k_6\right)=174. \qquad (1.18)$$

Отсюда следует, что $174 \vdots k_1$, т.е. $k_1 \in \{2, 3, 6, \ldots\}$. Поскольку при $k_2=k_3=\cdots=k_6=2$ сумма $1+2+2^2+\cdots+2^5=63$, то подходит только $k_1=2$ и соответственно $a_2=1\cdot 2=2$. Поэтому из (1.18) получаем

$$1+k_2+\cdots+k_2k_3+k_2k_3\ldots k_6=87 \quad \Rightarrow$$

$$k_2\left(1+k_3+k_3k_4+k_3k_4k_5+k_3k_4k_5k_6\right)=86 \quad \Rightarrow$$

$86 \vdots k_2$ и $k_1 \in \{2, 43\}$. Подходит $k_2=2$; при этом $a_3=2\cdot 2=4$. Тогда

$$1+k_3+k_3k_4+k_3k_4k_5+k_3k_4k_5k_6=43$$

и

$$k_3\left(1+k_4+k_4k_5+k_4k_5k_6\right)=42. \qquad (1.19)$$

Число 42 должно делиться на k_3, поэтому $k_3 \in \{2, 3, 6, \ldots\}$. Так как $1+2+2^2+2^3=15$, то $k_3=2$, $a_4=4\cdot 2=8$ и из (1.19) получаем $k_4\left(1+k_5+k_5k_6\right)=20$. Рассуждая аналогично, получаем, что и $k_4=2$, $a_5=8\cdot 2=16$. Тогда $1+k_5+k_5\cdot k_6=10$ и $k_5\left(1+k_6\right)=9$. Откуда

$k_5 = 3, \quad 1 + k_6 = 3, \quad k_6 = 2$; $a_6 = 16 \cdot 3 = 48$, $a_7 = 48 \cdot 2 = 96$.

Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 48, 96.

Пример 1.21. Найдите наименьшее четырехзначное натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, на 6 – остаток 5, на 7 – остаток 6 и на 8 – остаток 7.

Решение. Пусть $n = \overline{xyzt}$ – искомое число. По условию

$$\begin{cases} n = 5 \cdot k + 4, \\ n = 6 \cdot m + 5, \\ n = 7 \cdot \ell + 6, \\ n = 8 \cdot r + 7, \end{cases}$$

где k, m, ℓ, r – натуральные числа. Число $n+1$ будет делиться нацело на 5, 6, 7 и 8. Действительно,

$$n + 1 = 5k + 4 + 1 = 5k + 5 = 5(k+1) \text{ и } (n+1) \vdots 5.$$

Аналогично: $(n+1) \vdots 6, (n+1) \vdots 7, (n+1) \vdots 8$. Но тогда это число $(n+1)$ кратно $НОК(5,6,7,8) = 5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 840$, т.е. $(n+1) = 840 \cdot t$, $t \in \mathbf{N}$. Откуда $n = 840 \cdot t - 1$. Наименьшее четырехзначное число, удовлетворяющее условиям примера, $n = 840 \cdot 2 - 1 = 1679$.

Ответ: 1679.

Пример 1.22. Найдите сумму целых значений n, при которых выражение $\dfrac{2n^2 - 5n + 5}{n-2}$ является целым числом.

Решение. Выделим из состава дроби $\dfrac{2n^2 - 5n + 5}{n-2}$ целую часть и правильную дробь: $\dfrac{2n^2 - 5n + 5}{n-2} = 2n - 1 + \dfrac{3}{n-2}$.

Дробь $\dfrac{2n^2-5n+5}{n-2}$ будет целым числом при некотором n, если целым при данном значении n является число $\dfrac{3}{n-2}$. Этому условию удовлетворяют те и только те значения n, при которых $(n-2)$ является делителем числа 3, т.е. $(n-2)\in\{\pm1,\pm3\}$, откуда $n\in\{-1,1,3,5\}$ и сумма $-1+1+3+5=8$.

Ответ: 8.

Пример 1.23. Докажите, что для любого целого n выражение n^7-n делится на 7.

Решение. Разобьем множество целых чисел $\mathbf{Z}$ на 7 классов:

$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_1\cup\mathbf{Z}_2\cup\ldots\cup\mathbf{Z}_7$, где класс $\mathbf{Z}_i$, $i=1,2,...,7$ содержит числа вида $7m-4+i$, $m\in\mathbf{Z}$. Например,

$$\mathbf{Z}_1=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\{7m-3\},\quad \mathbf{Z}_2=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\{7m-2\},\quad \ldots,$$

$$\mathbf{Z}_6=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\{7m+2\},\quad \mathbf{Z}_7=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\{7m+3\}.$$

Преобразуем заданное выражение

$$A(n)=n^7-n=n(n^6-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)\cdot(n^2-n+1).$$

1. Если n принадлежит одному из классов $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_5$, то один из множителей $n(n-1)(n+1)$ в составе $A(n)$ принимает значение $7m$ и потому $A(n)\,\vdots\,7$. Например, если $n=7m-1$ $(n\in\mathbf{Z}_3)$, то $n+1=(7m-1)+1=7m$.

2. Если n принадлежит одному из классов $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_6$, $\mathbf{Z}_7$, то теперь уже один из двух множителей (n^2-n+1) и (n^2+n+1) оказывается кратным 7 и потому $A(n)\,\vdots\,7$. В качестве примера рассмотрим два случая из четырех:

а) пусть $n = 7m - 3 \ \left(n \in Z_1\right)$, то

$$n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1 = (7m-3)(7m-2) + 1 =$$
$$= 49m^2 - 35m + 7 = 7\left(7m^2 - 5m + 1\right) \text{ и } A(n) \vdots 7;$$

б) $n = 7m - 2 \ \left(n \in Z_2\right)$, то

$$n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1 = (7m-2)(7m-3) + 1 =$$
$$= 7\left(7m^2 - 5m + 1\right) \text{ и } A(n) \vdots 7.$$

Аналогично доказывается делимость $A(n)$ на 7 в классах $\mathbf{Z}_6$ и $\mathbf{Z}_7$.

Поскольку доказана делимость $A(n)$ на 7 в каждом из 7 классов $\mathbf{Z}_i$, то $A(n) \vdots 7$ для любых $n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 1.24. Найдите сумму чисел, являющихся одновременно членами арифметических прогрессий

$$2, 8, 14, 20, \ldots, 788$$

и

$$13, 24, 35, \ldots, 1003.$$

Решение. Достаточно очевидно, что равные числа в составе заданных прогрессий также образуют арифметическую прогрессию. Найдем её. Имеем:

$a_n = 2 + (n-1)6 = -4 + 6n$ – общий член первой прогрессии;

$b_m = 13 + (m-1)11 = 2 + 11m$ – общий член второй прогрессии.

Из условия равенства чисел, являющихся одновременно членами первой и второй прогрессий,

$$-4 + 6n = 2 + 11m, \quad n, m \in \mathbf{N},$$

получаем:

$$n = \frac{6 + 11m}{6} = \frac{6(1 + 2m) - m}{6} = 1 + 2m - \frac{m}{6}.$$

Отсюда следует, что $m \vdots 6$ и потому $m = 6k$, $k \in \mathbf{N}$. В итоге получаем формулу общего члена искомой третьей прогрессии, составленной из общих членов первых двух прогрессий

$$c_k = 2 + 11 \cdot 6k = 2 + 66k, \quad k = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом $13 \le c_k \le 788$ или

$$13 \le 2 + 66k \le 788 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le k \le 11.$$

Таким образом, $\{c_k\} = \{68, 134, 200, \ldots, 728\}$ – множество равных чисел в составе первой и второй прогрессий, а их сумма $S = \dfrac{68 + 728}{2} \cdot 11 = 4378.$

Ответ: 4378.

Пример 1.25. Найдите наибольшее трехзначное число, кратное 6 и дающее при делении на 8 остаток 4.

Решение. Дано: $a \in \mathbf{N}$, $100 < a \le 999$ и существуют $m, n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} a = 6n, \\ a = 8m + 4. \end{cases}$$

Из системы следует, что $6n = 8m + 4$ или $n = \dfrac{8m + 4}{6} = m + \dfrac{m + 2}{3}$. Поскольку $m, n \in \mathbf{N}$, то $(m + 2) \vdots 3$, т.е. существует $k \in \mathbf{N}$ такое, что

$$m + 2 = 3k, \ m = 3k - 2$$

и, как следствие,

$$a = 8(3k - 2) + 4 = 24k - 12.$$

Наибольшее трехзначное число $a_k = 24k - 12$ найдем из условия: $24k - 12 \le 999$. Имеем $k \le \dfrac{1011}{24}$. Искомое значение $k = \left[\dfrac{1011}{24}\right] = 42$ и $a_{наиб} = 24 \cdot 42 - 12 = 996$. Здесь $[\cdot]$ – знак целой части числа.

Ответ: 996.

ГЛАВА II
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

2.1. Линейные уравнения

Определение 1. *Уравнение*

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

называется ***линейным уравнением*** *относительно двух переменных* x, y.

В (2.1) a, b, c – коэффициенты уравнения (заданные числа), x, y – подлежащие определению неизвестные. При этом предполагается, что $a \cdot b \neq 0$, т.е. $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Уравнение (2.1) является уравнением прямой, содержащей бесконечное множество точек с координатами $(x_0; y_0)$ – решениями уравнения (2.1), т.е. $ax_0 + by_0 = c$. В общем случае x_0, y_0 являются действительными числами и легко находятся из уравнения (2.1). Действительно, положив $x_0 = t$, $t \in \mathbf{R}$, получим, что $y_0 = (c - at)/b$. Таким образом, бесконечное множество пар действительных чисел $(t; (c - at)/b)$, $t \in \mathbf{R}$, является решением уравнения (2.1) при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Особый интерес представляют линейные уравнения (2.1) с целочисленными коэффициентами a, b, c, решение которых ищется также на множестве целых чисел. Например, решением уравнения $5x + 3y = 11$ на множестве действительных чисел являются пары $(t, 11 - 5t/3)$, $t \in \mathbf{R}$. Есть ли среди них точки с целочисленными координатами? В данном случае этот вопрос можно перефразировать так: существуют ли $t \in \mathbf{Z}$ такие, что числитель $(11 - 5t)$ дроби $(11 - 5t/3)$ делится на 3 или, иначе, $11 - 5t = 3n$, $n \in \mathbf{Z}$?

Выразим из тождества $11 - 5t = 3n$ параметр t через n:

$$t = \frac{11 - 3n}{5} = \frac{(10 - 5n) + 2n + 1}{5} = 2 - n + \frac{2n + 1}{5}.$$

По предположению $t \in \mathbf{Z}$, тогда $(2n+1)$ должно делиться на 5, т.е. $2n+1=5m$, $m \in \mathbf{Z}$. Откуда $n=\frac{5m-1}{2}=2m+\frac{m-1}{2}$.

Вновь заключаем, что $(m-1)$ должно делиться на 2, т.е. $m-1=2k$, $k \in \mathbf{Z}$, или $m=2k+1$.

Возвращаясь назад по сформированной цепочке

$$y=\frac{11-5t}{3} \to t=\frac{11-3n}{5} \to n=\frac{5m-1}{2} \to m=2k+1,$$

получаем последовательно

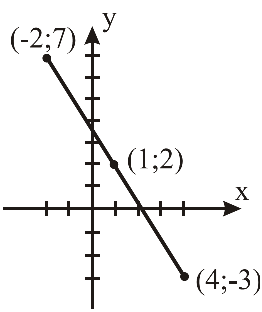
$$n=\frac{5m-1}{2}=\frac{5(2k+1)-1}{2}2=5k+2,$$

$$x=t=\frac{11-3n}{5}=\frac{11-3(5k+2)}{5}=-3k+1,$$

$$y=\frac{11-5t}{3}=\frac{11-5(-3k+1)}{3}=5k+2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, $x=-3k+1$, $y=5k+2$, $k \in \mathbf{Z}$ – искомые целочисленные решения уравнения $5x+3y=11$. Фиксированным целым значениям параметра k отвечают точки с целочисленными координатами. Например, при $k=0$ получаем точку (1; 2), а при $k=-1$ – точку (4; –3) и т.д.

На рисунке приведена геометрическая иллюстрация решения уравнения $5x+3y=11$ в целых числах. Искомые решения – точки с целочисленными координатами – расположены на прямой L: $5x+3y=11$. При этом расстояние между любыми двумя соседними точками равно $\sqrt{34}$. Приведенный способ решения линейных уравнений с целочисленными коэффициентами в целых числах обладает необходимой общностью. Он либо приводит за конечное число шагов к целочис-



ленному решению, либо позволяет установить отсутствие целочисленных решений.

Замечание. *Линейные уравнения (2.1) с целочисленными коэффициентами, решения которых ищутся на множестве целых или рациональных чисел, называются еще* ***диофантовыми***. *Названы они так по имени древнегреческого (3 век) математика Диофанта, занимавшегося поиском решений неопределенных уравнений (число уравнений меньше числа неизвестных) на множестве рациональных и, в частности, целых, положительных чисел. К диофантовым относят не только линейные, но и нелинейные уравнения, а также системы линейных уравнений с целочисленными коэффициентами и с числом уравнений, меньшим числа неизвестных.*

В разделе 2.2 данной главы изучаются нелинейные диофантовы уравнения второй степени, а в разделе 2.3 - диофантовы системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 2.1. Решите в целых числах уравнение $3x+6y=13$.

Решение. Действительные решения уравнения запишем в виде: $y=t$, $x=\dfrac{13-6t}{3}$, $t\in\mathbf{Z}$. Пусть теперь $t\in\mathbf{Z}$; преобразуем $x=\dfrac{13-6t}{3}=\dfrac{(12-6t)+1}{3}=4-2t+\dfrac{1}{3}$. Отсюда следует, что для любого целого значения t число $x=4-2t+\dfrac{1}{3}$ не является целым числом. Это означает, что уравнение $3x+6y=13$ не имеет решения на множестве целых чисел.

Ответ: $\varnothing$.

Комментарий к примеру 2.1. *Отсутствие целочисленных решений уравнения* $3x+6y=13$ *можно установить иначе. Перепишем уравнение в равносильной форме* $3(x+2y)=13$. *Левая часть уравнения делится на 3, а правая – число 13 – на 3 не де-*

лится. Поэтому уравнение $3x + 6y = 13$ *не может иметь целочисленных решений.*

Прием, примененный в комментарии к примеру 2.1 для установления неразрешимости уравнения $3x + 6y = 13$ в целых числах, легко переносится на уравнение (2.1) в его общем виде. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *Если* $d = \text{НОД}(a, b) \neq 1$ *и* c *не делится на* d*, то уравнение (2.1) не имеет решений в целых числах.*

Если же $d = 1$ *или* $d \neq 1$*, но* $c \vdots d$ *и преобразованное уравнение* $a_1x + b_1y = d_1$ *[после деления обеих частей (2.1) на* d*] имеет* $d_1 = \text{НОД}(a_1; b_1) = 1$*, то уравнение (2.1) имеет бесконечное множество решений в целых числах.*

Доказательство. *Пусть* $d = \text{НОД}(a, b) \neq 1$ *и* c *не делится на* d*. Тогда уравнение (2.1) можно переписать в равносильной форме*

$$d(a_1x + b_1y) = c, \tag{2.2}$$

где $da_1 = a, \quad db_1 = b$*. Левая часть уравнения (2.2) делится на* d*, а правая, по условию теоремы, не делится. Отсюда, в свою очередь, следует, что уравнение (2.1) не разрешимо в целых числах.*

Если же $d = \text{НОД}(a, b) = 1$*, то в соответствии со следствием (1.18) из алгоритма Евклида, существуют целые числа* t *и* ℓ *такие, что*

$$1 = ta + \ell b.$$

Умножив обе части этого равенства на c*, получим:*

$$a \cdot (ct) + b(c\ell) = c,$$

откуда, с учетом (2.1) делаем вывод о том, что $x_0 = ct$, $y_0 = c\ell$ *– целочисленное решение уравнения (2.1), т.е.*

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{2.3}$$

Покажем, что таких решений уравнение (2.1) имеет бесконечно много.

Пусть $(x\,;\,y)$ *– произвольное решение уравнения (2.1), т.е.*

$$ax + by = c.$$

Вычитая из этого равенства равенство (2.3), получаем

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

или

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0). \qquad (2.4)$$

Из последнего равенства следует, что $(x - x_0) \vdots b$*, а* $(y - y_0) \vdots a$.

Пусть $x - x_0 = -b \cdot k$*,* $k \in \mathbf{Z}$*, тогда в соответствии с (2.4)* $y - y_0 = ak$.

Пара чисел

$$\begin{cases} x = x_0 - bk, \\ y = y_0 + ak, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \qquad (2.5)$$

удовлетворяет уравнению (2.1). Действительно,

$$a(x_0 - bk) + b(y_0 + ak) = c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (ax_0 + by_0) + (-abk + abk) = c \quad \Leftrightarrow \quad ax_0 + by_0 = c,$$

а это, в силу (2.3) верное равенство. Поэтому множество решений уравнения (2.1) при $d = 1$ *задается формулой (2.5).* ■

Решим еще одно уравнение в целых числах способом, вытекающим из второй части доказательства теоремы [доказательства существования бесконечного множества решений при $d = \text{НОД}(a\,;b) = 1$].

Пример 2.2. Решите в целых числах уравнение $47x - 30y = 22$.

Решение. Здесь $\text{НОД}(47\,,30) = 1$ и потому уравнение $47x - 30y = 22$ имеет бесконечно много целочисленных решений.

Найдем их сначала способом, примененным при решении уравнения $5x + 3y = 11$.

Способ 1. Пусть $x = t$, $t \in \mathbf{Z}$. Тогда из уравнения получаем $y = \dfrac{47t - 22}{30}$. Преобразуем дробь так, чтобы выделилась целая часть и дробь, в которой коэффициент при t в числителе дроби был бы меньше 30 (меньше знаменателя дроби).

$$y = \frac{47t - 22}{30} = \frac{(30t - 30) + (17t + 8)}{30} = t - 1 + \frac{17t + 8}{30}.$$

Так как $y \in \mathbf{Z}$, то числитель $17t + 8$ новой дроби должен делиться на 30, т.е. $17t + 8 = 30n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Выразим из этого тождества t через n и повторим преобразования:

$$t = \frac{30n - 8}{17} = \frac{34n - (4n + 8)}{17} = 2n - \frac{4n + 8}{17}.$$

Поскольку $t \in \mathbf{Z}$, то $(4n + 8) \vdots 17$, т.е.

$$4n + 8 = 17m \quad \Rightarrow \quad n = \frac{17m - 8}{4} = 4m - 2 + \frac{m}{4}.$$

Из последнего равенства в целых числах следует, что $m \vdots 4$, т.е. $m = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$. Возвращаясь назад, находим последовательно

$$n = \frac{17m - 8}{4} = \frac{17(4k) - 8}{4} = 17k - 2,$$

$$x = t = \frac{30n - 8}{17} = \frac{30(17k - 2) - 8}{17} = 30k - 4,$$

$$y = \frac{47x - 22}{30} = \frac{47(30k - 4) - 22}{30} = 47k - 7, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пары целых чисел $x = 30k - 4$, $y = 47k - 7$, $k \in \mathbf{Z}$, образуют бесконечное множество целочисленных решений уравнения $47x - 30y = 22$.

Способ 2. Пусть $(x\,;y)$ и $(x_0\,;y_0)$ – две пары целочисленных решений уравнения $47x-30y=22$, причем $(x_0\,;y_0)$ – фиксированное решение, а $(x\,;y)$ – произвольное.

Это означает, что имеют место равенства

$$\begin{cases}47x-30y=22,\\ 47x_0-30y_0=22.\end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе

$$47(x-x_0)-30(y-y_0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 47(x-x_0)=30(y-y_0). \qquad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что существует целое число k такое, что

$$x-x_0=30k\,,\ y-y_0=47k\,.$$

Пара чисел

$$\begin{cases}x=x_0+30k,\\ y=y_0+47k,\end{cases} \quad k\in\mathbf{Z}, \qquad (2.7)$$

задает множество всех целочисленных решений уравнения. Теперь необходимо подобрать некоторые конкретные значения чисел x_0, y_0.

Общий способ нахождения таких чисел вытекает из следствия (1.18) алгоритма Евклида:

$$\begin{matrix}47=30+17, \\ 30=17+13, \\ 17=13+4, \\ 13=3\cdot4+1\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}1&=13-3\cdot4=13-3(17-13)=\\ &=4\cdot13-3\cdot17=4(30-17)-3\cdot17=\\ &=4\cdot30-7\cdot17=4\cdot30-7(47-30)=\\ &=11\cdot30-7\cdot47.\end{aligned}$$

Таким образом, $1=47(-7)-30(-11)$.

Умножим обе части этого равенства на 22:

$$22=47(-154)-30(-242).$$

Сопоставляя это числовое равенство с уравнением $47x-30y=22$, заключаем, что $x_0=-154$, $y_0=-242$. Решение (2.7) исходного уравнения примет окончательный вид

$$\begin{cases} x = -154 + 30k, \\ y = -242 + 47k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}. \qquad (2.8)$$

Решение, полученное вторым способом, отличается по форме от первого ($x = 30k - 4$, $y = 47k - 7$, $k \in \mathbf{Z}$). Отличаются они значениями x_0 и y_0. Однако приняв в (2.8) $k = k_1 + 5$, получим

$$x = -154 + 30(k_1 + 5) = -154 + 150 + 30k_1 = -4 + 30k_1,$$

$$y = -242 + 47(k_1 + 5) = -7 + 47k_1.$$

Ответ: $x = -4 + 30k$, $y = -7 + 47k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Комментарий к примеру 2.2

В отдельных случаях для нахождения значений x_0, y_0 *для (2.7) не обязательно прибегать к алгоритму Евклида. Так, в данном примере можно заметить, что, если* x_0 *выбрать таким, чтобы число* $47x_0$ *оканчивалось на 2, т.е.* $x_0 \in \{6, 16, 26, \ldots\}$, *а число* $47x_0 - 22$ *делилось на 30, т.е.* $y_0 = (47x_0 - 22)/30$, *то это будут искомые значения* x_0, y_0. *Легко установить, что подходит* $x_0 = 26$ *и* $y_0 = 40$. *В этом случае решение (2.7) уравнения принимает вид*

$$\begin{cases} x = 26 + 30k, \\ y = 40 + 47k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2.2. Нелинейные уравнения

В этом пункте рассматривается решение в целых числах уравнений

$$ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + d = 0,$$

левая часть которых является квадратичной функцией относительно двух переменных x, y. Коэффициенты уравнения a, b, c, p, q, d – заданные целые числа. Решение $(x; y)$ ищется на множестве целых чисел, т.е. $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$. Предполагается, что коэффициенты a, b, c в уравнении не обращаются одновременно в ноль ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

Если $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то с помощью выделения полных квадратов по переменной x ($ax^2 + px = a(x + r_1)^2 + h$) и по переменной y ($cy^2 + qy = c(y + r_2)^2 + t$) исходное уравнение сводится к виду:

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = d_1, \tag{2.9}$$

где $x_1 = x + r_1,\ y_1 = y + r_2$.

Если $a = 0, b = 0$, но $c \neq 0$ или $b = 0, c = 0$, но $a \neq 0$, то после выделения полного квадрата по одной переменной получаем уравнение:

$$\begin{gathered} cy_1^2 + px + d_1 = 0, \\ \text{или} \\ ax_1^2 + qy + d_2 = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Если же $a = 0, c = 0$, то имеем уравнение:

$$bxy + px + qy + d = 0, \qquad b, p, q, d \in \mathbf{Z}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим общие схемы решения уравнений (2.9) ÷ (2.11) и частные приемы, применяемые при решении таких уравнений.

А. Опустив для простоты индексы у коэффициентов в (2.9), будем рассматривать уравнение

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d. \tag{2.12}$$

Выделив полный квадрат в левой части уравнения (2.12), получим

$$a^2x^2 + abxy + acy^2 = ad \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(ax + \frac{by}{2}\right)^2 + acy^2 - \frac{b^2y^2}{4} = ad \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2ax + by)^2 + \left(4ac - b^2\right)y^2 = 4ad. \tag{2.13}$$

Рассмотрим два случая:

1. $D = b^2 - 4ac < 0$, т.е. $4ac - b^2 > 0$.

Тогда в левой части уравнения (2.13) сумма двух неотрицательных величин и потому, если $ad < 0$, то уравнение (2.13), а значит и (2.12), не имеет решения.

Если же $ad > 0$, то из (2.13) следуют оценки:

$$\begin{cases} |2ax + by| \le 2\sqrt{ad}; \\ |y| \le 2\sqrt{\dfrac{ad}{4ac - b^2}}. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Неравенства (2.14) задают конечное множество целочисленных пар $(x_0; y_0)$, которые необходимо проверить на принадлежность к множеству целочисленных решений уравнения (2.12).

При решении квадратичных уравнений двух и более переменных в целых числах используется процедура выделения полных квадратов. Прием, используемый для выделения полного квадрата из состава квадратичной функции одной переменной, применим к квадратичным функциям двух и более переменных. Для этого необходимо осуществить выделение уже не одного, а двух или более полных квадратов.

Задача разложения квадратичной функции на алгебраическую сумму полных квадратов может быть решена двумя способами. В основе первого метода лежит метод неопределенных коэффициентов. Второй метод основывается на тождественных преобразованиях квадратичной функции. Для решения задач, рассматриваемых в данной главе, он подходит в большей степени.

Рассмотрим реализацию этого способа на следующем примере: разложить на сумму квадратов (выделить полные квадраты) квадратичную функцию

$$f(x, y) = 3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 20y + 11.$$

Решение данного примера запишем в виде жесткого алгоритма по пунктам.

1. Перегруппируем слагаемые в записи квадратичной функции, выделив те, которые содержат переменную x

$$f(x,y)=\left(3x^2-12xy+6x\right)+14y^2-20y+11\,.$$

2. Вынесем коэффициент 3 перед x^2 за скобку

$$f(x,y)=3\left(x^2-4xy+2x\right)+14y^2-20y+11\,.$$

3. Выделим полный квадрат из выражения в скобке, считая x – переменной величиной, а y – параметром:

$$f(x,y)=3\left[x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2\right]-$$
$$-3(2y-1)^2+14y^2-20y+11.$$

Выражение в квадратных скобках является полным квадратом $(x-2y+1)^2$, т.е. выделен первый полный квадрат.

4. Выполним очевидные преобразования вне квадратных скобок

$$f(x,y)=3(x-2y+1)^2+2y^2-8y+8\,.$$

5. Выделим второй полный квадрат (по переменной y)

$$f(x,y)=3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2\,.$$

Таким образом, квадратичная функция

$$f(x,y)=3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11$$

разложена с помощью тождественных преобразований на сумму квадратов

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=$$
$$=3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2\,.$$

Отметим, что разложение квадратичной функции $f(x,y)$ на сумму квадратов можно начинать с любой переменной. В данном примере это приводит к альтернативному разложению

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=$$
$$=2(7y-3x-5)^2+3(x-3)^2\,.$$

Допустим теперь, что решается уравнение

$$3x^2+14y^2-12xy+6x-20y+11=0\,.$$

С учетом выполненных преобразований оно равносильно каждому из уравнений

$$3(x-2y+1)^2+2(y-2)^2=0,$$

$$2(7y-3x-5)^2+3(x-3)^2=0,$$

а они, в свою очередь, равносильны соответствующим системам линейных уравнений

$$\begin{cases} x-2y+1=0, \\ \quad y-2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7y-3x-5=0, \\ \quad x-3=0. \end{cases}$$

Обе системы имеют, естественно, одинаковое решение

$$x=3,\ y=2.$$

Пример 2.3. Решите уравнение

$$9x^2+6xy+5y^2=20$$

на множестве целых чисел.

Решение. Выделим полный квадрат в левой части уравнения

$$(3x+y)^2+4y^2=20,$$

откуда получаем оценки:

$$4y^2\le 20 \quad\Rightarrow\quad y^2\le 5 \quad\Rightarrow |y|\le\sqrt{5}.$$

Так как $y\in\mathbf{Z}$, то возможные значения y: $y\in\{0,\pm1,\pm2\}$. Если $y=0$, то $(3x+y)^2=20$ – уравнение, не имеющее решений в целых числах; если же $y=\pm1$, то

$$\begin{cases} (3x+y)^2=16, \\ y=\pm1, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x\pm1=\pm4, \\ y=\pm1, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\pm1, \\ y=\pm1. \end{cases}$$

При $y=\pm2$ имеем $\begin{cases} (3x+y)^2=4, \\ y=\pm2, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0, \\ y=\pm2. \end{cases}$

Ответ: (1; 1), (-1; -1), (0; 2), (0; -2).

Случай 2. $D=b^2-4ac\ge 0$, тогда уравнение (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$(2ax+by)^2-\left(\sqrt{D}y\right)^2=4ad$$

или

$$\left(2ax+by-\sqrt{D}y\right)\left(2ax+by+\sqrt{D}y\right)=4ad.$$

Обозначив $a_1=2a$, $b_1=b-\sqrt{D}$, $b_2=b+\sqrt{D}$, $d_1=4ad$, $a\neq 0$, получим уравнение вида

$$(a_1x+b_1y)(a_1x+b_2y)=d_1. \qquad (2.15)$$

Пусть НОД$(a_1,b_1)=1$ и НОД$(a_1,b_2)=1$. В противном случае разделим d_1 на НОД указанных чисел. Если же d_1 не делится на НОД $(a_1,b_1)>1$, то уравнение (2.15) и равносильное ему (2.12) не имеют решений на множестве целых чисел.

Поскольку $d_1\in\mathbf{Z}$, то его можно представить различными способами в виде произведения двух целых чисел:

$$d_1=m_1\cdot n_1=m_2\cdot n_2=\cdots=m_k\cdot n_k.$$

Тогда из (2.15), с учетом приведенного разложения d_1 на произведение целых чисел, получаем совокупность $2k$ линейных систем вида

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=\pm m_i,\\ a_1x+b_2y=\pm n_i, \quad i=1,2,\ldots,k.\end{cases}$$

Пример 2.4. Решите в целых числах уравнение

$$9x^2-6xy-8y^2=7.$$

Решение.

$$9x^2-6xy-8y^2=7 \iff (3x-y)^2-9y^2=7 \iff$$

$$\iff (3x-y-3y)(3x-y-3y)=7 \iff (3x-4y)(3x+2y)=7.$$

Так как $7=1\cdot 7=7\cdot 1=(-1)\cdot(-7)=(-7)\cdot(-1)$, то получаем совокупность четырех систем линейных уравнений

$$\begin{cases}3x-4y=1,\\ 3x+2y=7,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-4y=7,\\ 3x+2y=1,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-4y=-1,\\ 3x+2y=-7,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-4y=-7,\\ 3x+2y=-1.\end{cases}$$

Умножив второе уравнение каждой системы на 2 и сложив его с первым, получим 4 уравнения:

$$9x = 15; \qquad 9x = 9; \qquad 9x = -15; \qquad 9x = -9.$$

Целочисленные решения имеют второе и четвертое уравнения: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Из второй и четвертой систем находим отвечающие им целые значения y: $y_1 = -1, y_2 = 1$.

Ответ: (1; –1); (–1; 1).

В. Рассмотрим теперь решение уравнений вида (2.10). Пусть (x_1, y_1) – некоторое фиксированное, а (x, y) – произвольное целочисленные решения уравнения

$$ax^2 + qy + d = 0, \tag{2.16}$$

т.е.

$$\begin{cases} ax_1^{\ 2} + qy_1 + d = 0, \\ ax^2 + qy + d = 0. \end{cases}$$

Вычитая из одного равенства другое, получаем

$$a\left(x^2 - x_1^2\right) + q(y - y_1) = 0 \quad \text{или}$$

$$a(x - x_1)(x + x_1) = q(y_1 - y). \tag{2.17}$$

Если $\text{НОД}(a, q) = 1$, то из (2.17) следует, что $(x - x_1)$ или $(x + x_1)$ должно делиться на q, а $y_1 - y$ на а. Пусть $(x - x_1) \vdots q$, т.е. существует $k \in \mathbf{Z}$: $x - x_1 = qk$ или $x = x_1 + qk$, $k \in \mathbf{Z}$.

Из (2.17) получаем:

$$aqk(2x_1 + qk) = q(y_1 - y) \quad \Rightarrow \quad y = y_1 - ak(2x_1 + qk).$$

Пара $x = x_1 + qk$, $y = y_1 - ak(2x_1 + qk)$, $k \in \mathbf{Z}$, задает множество целочисленных решений уравнения (2.16). Для нахождения некоторого целочисленного решения (x_1, y_1) применим известный прием (см. п. 1. Линейные уравнения) последовательного разложения дробей на целую часть и «правильную дробь».

Пример 2.5. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5y = 22.$$

Решение. Пусть (x_1, y_1) – некоторое фиксированное целочисленное решение данного уравнения, а (x, y) – переменное целочисленное решение, т.е.

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 5y_1 = 22, \\ 3x^2 + 5y = 22. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$3\left(x^2 - x_1^2\right) + 5(y - y_1) = 0 \quad \text{или}$$

$$3(x - x_1)(x + x_1) = 5(y - y_1). \tag{2.18}$$

Отсюда следует, что $(x - x_1) \vdots 5$ или $(x + x_1) \vdots 5$.

Пусть $(x - x_1) \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 + 5k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Подставим $(x_1 + 5k)$ вместо x в (2.18):

$$3 \cdot 5k(2x_1 + 5k) = 5(y_1 - y),$$

откуда $y = y_1 - 3k(2x_1 + 5k), \quad k \in \mathbf{Z}$.

Множество пар целых чисел $(x_1 + 5k;\, y_1 - 3k(2x_1 + 5k))$ задают множество целочисленных решений уравнения $3x^2 + 5y = 22$ при условии $22 - 5y \ge 0$.

Найдем некоторую точку (x_1, y_1). Выразим из исходного уравнения x^2 через y:

$$x^2 = \frac{22 - 5y}{3}, \quad (22 - 5y \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y \le 4).$$

Так как по условию $x \in \mathbf{Z}$, то $x^2 \in \mathbf{Z}^+$ и $(22 - 5y)$ должно делиться на 3, т.е. существует $n \in \mathbf{Z}^+$: $22 - 5y = 3n$. Откуда $y = \dfrac{22 - 3n}{5} = 4 + \dfrac{2 - 3n}{5}$. Вновь делаем вывод, что $(2 - 3n) \vdots 5$, т.е. $2-3n=5m$ и $n=\dfrac{2-5m}{3}=-2m+\dfrac{m+2}{3}$. Откуда $m+2=3\ell$, $\ell\in\mathbf{Z}$ или $m=3\ell-2$, $\ell\in\mathbf{Z}$.

Возвращаясь назад по цепочке преобразований, находим:

$$n=\frac{2-5m}{3}=\frac{2-5(3\ell-2)}{3}=-5\ell+4;$$

$$y=\frac{22-3n}{5}=\frac{22-3(-5\ell+4)}{5}=3\ell+2;$$

$$x^2=\frac{22-5y}{3}=\frac{22-5(3\ell+2)}{3}=4-5\ell.$$

При этом $4-5\ell\geq 0 \;\Rightarrow\; \ell\leq 0$, т.е. $\ell\in\mathbf{Z}^{-}\cup\{0\}$. Выражение $4-5\ell$ должно быть квадратом целого числа. При $\ell=0$ имеем $x^2=4$, откуда $x=\pm 2$, $y=2$. Таким образом, $x_1=\pm 2, y_1=2$ и $x=\pm 2+5k$, $y=2\mp 12k-15k^2$, $k\in\mathbf{Z}$ – множество целочисленных решений исходного уравнения.

Ответ: $(\pm 2+5k;2\mp 12k-15k^2)$, $k\in\mathbf{Z}$.

С. Рассмотрим теперь методы решения в целых числах уравнений вида (2.11).

Пример 2.6. Решите в целых числах (x,y) уравнение

$$3xy-5y+6x-12=0.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и перепишем его в виде

$$6xy-10y+12x=24.$$

Левую часть данного уравнения представим в виде

$$(3x-5)(2y+4)+20=24,$$

откуда

$$(3x-5)(2y+4)=4 \quad\Leftrightarrow\quad (3x-5)(y+2)=2.$$

Поскольку

$$2=1\cdot 2=2\cdot 1=(-1)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-1),$$

то необходимо составить и решить 4 системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}3x-5=1,\\ y+2=2,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-5=2,\\ y+2=1,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-5=-1,\\ y+2=-2,\end{cases} \quad \begin{cases}3x-5=-2,\\ y+2=-1.\end{cases}$$

Проверка показывает, что целочисленные решения имеют только первая ($x=2, y=0$) и последняя ($x=1, y=-3$) системы.

Ответ: (2; 0); (1; -3).

Комментарий к примеру 2.6. *Данный пример можно решить еще одним неоднократно применявшимся выше способом. Выразим из исходного уравнения* x *через* y*:* $x=\dfrac{5y+12}{3y+6}$. *Преобразуем полученную дробно – рациональную функцию:* $x=\dfrac{(6y+12)-y}{3y+6}=2-\dfrac{y}{3y+6}$. *Отсюда следует, что* $y \vdots (3y+6)$, *т.е.* $y=(3y+6)\cdot n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Выразив* y *через* n *и осуществив типовые преобразования, получим:*

$$y=\frac{6n}{1-3n}=\frac{(6n-2)+2}{1-3n}=-2+\frac{2}{1-3n}.$$

Так как $y\in\mathbf{Z}$, *то* $2 \vdots (1-3n)$, *т.е.* $1-3n\in\{\pm1, \pm2\}$. *Составим и решим уравнения*

$$1-3n=1, \quad 1-3n=-1, \quad 1-3n=2, \quad 1-3n=-2.$$

Из первого уравнения получаем $n=0$ *и соответственно* $y=0, x=2$. *Второе и третье уравнения не имеют целочисленных решений, а из последнего:*

$$n=1, y=-3, x=\frac{5(-3)+12}{3(-3)+6}=1.$$

Таким образом, $x=2, y=0$ *и* $x=1, y=-3$ *– две пары целочисленных решений уравнения* $3xy-5y+6x-12=0$.

Ответ: $(2;0)$, $(1;-3)$.

Приведем примеры задач, соответствующих уровню экзаменационных заданий в ведущих вузах страны.

Пример 2.7. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$2x^2 + xy - y^2 + 5x - y - 3 = 0.$$

Выделим полные квадраты в составе левой части уравнения по обеим переменным:

$$2\left(x^2 + x\frac{y+5}{2} + \left(\frac{y+5}{4}\right)^2\right) - \frac{(y+5)^2}{8} - y^2 - y - 3 = 0,$$

$$2\left(x + \frac{y+5}{4}\right)^2 - \frac{9y^2 + 18y + 49}{8} = 0,$$

$$(4x + y + 5)^2 - (3y + 3)^2 = 40,$$

$$(4x + y + 5 - 3y - 3)(4x + y + 5 + 3y + 3) = 40,$$

$$8(2x - y + 1)(x + y + 2) = 40,$$

$$(2x - y + 1)(x + y + 2) = 5.$$

Поскольку $5 = 1\cdot 5 = 5\cdot 1 = (-1)\cdot(-5) = (-5)\cdot(-1)$, то необходимо составить и решить четыре системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 1, \\ x + y + 2 = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 = 5, \\ x + y + 2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = -1, \\ x + y + 2 = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 = -5, \\ x + y + 2 = -1. \end{cases}$$

Складывая уравнения каждой системы, находим сначала значение x_0, а затем и y_0.

Ответ: (1; 2), (1; -2), (-3; -4), (-3; 0).

Пример 2.8. Решите в целых числах (x, y) уравнение

$$x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x - 16y - 3 = 0.$$

Решение. Выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$\left(x^2-2x(2y-1)+(2y-1)^2\right)-(2y-1)^2+8y^2-16y-3=0,$$

$$(x-2y+1)^2+4y^2-12y-4=0,$$

$$(x-2y+1)^2+(2y-3)^2=13. \qquad (2.19)$$

Из последнего уравнения имеем оценки $|x-2y+1|\le\sqrt{13}$ и $|2y-3|\le\sqrt{13}$, откуда, в частности, получаем возможные значения выражения $(2y-3)$: $2y-3\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$. Достаточно очевидно, что из приведенного множества значений подходят только нечетные числа $\pm1,\ \pm3$.

Если $2y-3=1$, т.е. $y=2$, то из (2.19) получаем уравнение $(x-3)^2=12$, которое не имеет целочисленных решений.

Если $2y-3=-1$, т.е. $y=1$, то из (2.19) получаем уравнение $(x-1)^2=12$, которое также не имеет решения на множестве целых чисел.

Пусть $2y-3=3$, откуда $y=3$, и из (2.19) следует, что $(x-5)^2=4$, откуда получаем пару целочисленных решений $x_1=3, y_1=3$ и $x_2=7, y_2=3$.

Если же $2y-3=-3$, то $y=0$, из (2.19) получаем уравнение $(x+1)^2=4$, имеющее два целочисленных решения $x_3=-1$, $y_4=-3$.

Ответ: $(3;3)$, $(7;3)$, $(1;0)$, $(-3;0)$.

Пример 2.9. (Факультет психологии МГУ, 1975 г.)

Найдите все целые положительные решения (x,y) уравнения

$$2x^2-2xy+x+3y=36.$$

Выделив полные квадраты по обеим переменным в исходном уравнении, получим равносильное уравнение:

$$(4x-2y+1)^2-(2y-7)^2=240,$$

$$(4x-2y+1-2y+7)(4x-2y+1+2y-7)=240,$$

$$(x-y+2)(2x-3)=30.$$

Число 30 можно представить в виде произведения двух целых чисел 16 способами: $30=1\cdot 30=2\cdot 15=3\cdot 10=5\cdot 6$ – четыре способа; перестановка сомножителей дает еще четыре способа и 8 способов дают произведения этих же чисел с измененными на противоположные знаками сомножителей [$(-1)\cdot(-30)=(-2)\cdot(-15)$ и т.д.].

Это означает, что если действовать формально, то необходимо составить и решить 16 систем линейных алгебраических уравнений, а затем отобрать из полученных решений целые положительные, т.е. $x\geq 1$ и $y\geq 1$. Поскольку $x\geq 1$, то $2x-3\geq -1$ и потому число систем уравнений сократится с 16 до 9. Далее замечаем, что уравнение $2x-3=n$ может иметь целочисленное решение только при нечетном n, т.е. $n\in\{-1, 1, 3, 5, 15\}$ и потому составить и решить необходимо лишь 5 систем уравнений:

$$\begin{cases} x-y+2=-30, \\ 2x-3=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2=30, \\ 2x-3=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2=10, \\ 2x-3=3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2=6, \\ 2x-3=5, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2=2, \\ 2x-3=15. \end{cases}$$

Положительные целочисленные решения имеют первая и последняя системы: $x_1=1, y_1=33$ и $x_2=9, y_2=9$.

Ответ: (1; 33), (9; 9).

2.3. Системы уравнений

Уравнение $Ax+By+Cz=0$ с коэффициентами A, B, C, D определяет в трёхмерном пространстве плоскость.

Будем рассматривать системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Две плоскости в пространстве могут быть:

- параллельными, в этом случае $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;
- совпадать, в этом случае $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$;
- пересекаться, в этом случае (2.21)

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ и (или) } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Рассмотрим примеры систем уравнений (2.20), целочисленные коэффициенты которых удовлетворяют условиям (2.21).

На множестве действительных троек чисел $(x; y; z)$ система уравнений (2.20) имеет бесконечное множество решений. Действительно, две плоскости при выполнении условий (2.21) пересекаются по прямой, каждая точка которой, т.е. тройка чисел $(x; y; z)$, является решением системы (2.20). Однако в рассматриваемых ниже примерах необходимо либо найти целочисленные решения системы, если они существуют, либо доказать неразрешимость в целых числах такой системы.

Пример 2.10. Решите в целых числах x; y; z систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -8, \\ 3x + y + 2z = -1. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{5}{2}$, то система уравнений имеет решение на множестве действительных чисел. Выясним, имеет ли она целочисленные решения и если имеет, то найдём их.

Обозначим $z = m$ и преобразуем систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = -8 - 5m, \\ 3x + y = -1 - 2m. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на 3 и сложим с первым (исключим y из системы): $11x = -11 - 11m$, $x = -1 - m$. Из второго уравнения системы получаем $y = -1 - 2m - 3(-1 - m)$, $y = 2 + m$.

Система

$$\begin{cases} x = -1 - m, \\ y = 2 + m, \quad m \in \mathbf{R}, \\ z = m, \end{cases} \tag{2.22}$$

является параметрическим уравнением прямой, по которой пересекаются плоскости. Если же $m \in \mathbf{Z}$, то (2.22) определяет множество точек на прямой с целочисленными координатами.

Ответ: $x = -1 - m$, $y = 2 + m$, $z = m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 2.11. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ 4x - 3y - z = 2. \end{cases}$$

Решение. Сложим уравнения системы:

$$6x - 4y = 5 \text{ или } 2 \cdot (3x - 4y) = 5.$$

Полученное уравнение не может быть равенством ни при каких целых x и y: левая часть уравнения делится на 2, а правая – нет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2.11 «подсказывает» критерий разрешимости системы уравнений (2.20) в целых числах.

Если в уравнении $ax+by=c$*, полученном из системы в результате исключения из неё* z*:*

а) НОД $(a,b)=1$*, либо НОД* $(a;b)=d$*, но* c *делится на* d*, то система уравнений имеет решения в целых числах;*

б) НОД $(a,b)=d$*,* $d\neq 1$ *и* c *не делится на* d*, то система уравнений не имеет решений в целых числах.*

Пример 2.12. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} 9x-17y+2z=2, \\ 2x-5y-z=3. \end{cases}$$

Решение. Сложим уравнения системы, умножив предварительно второе уравнение на 2.

$$13x-27y=8.$$

Поскольку НОД$(13,27)=1$, то система уравнений имеет решение в целых числах. Примем $z=m$, $m\in\mathbf{Z}$, и преобразуем систему

$$\begin{cases} 9x-17y=2-2m, \\ 2x-5y=3+m. \end{cases}$$

Откуда находим $y=-\dfrac{13m+23}{11}$ или $y=-m-2-\dfrac{2m+1}{11}$; $y\in\mathbf{Z}$, если $(2m+1)\vdots 11$, т.е. $2m+1=11k$. Откуда $m=\dfrac{11k-1}{2}$ или $m=5k+\dfrac{k-1}{2}$ $\Rightarrow$ $k-1=2r$, $r\in\mathbf{Z}$.

Возвращаясь по цепочке преобразований назад, находим

$$m=\frac{11(2r+1)-1}{2}=11r+5,$$

$$y=-\frac{13(11r+5)+23}{11}=-13r-8;$$

$$x=\frac{5y+3+m}{2},\quad x=\frac{5(-13r-8)+3+11r+5}{2}=-27r-16.$$

Ответ: $x=-27k-16$, $y=-13k-8$, $z=11k+5$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.4. Задачи группы С6

Пример 2.13. Найдите все натуральные числа, квадрат каждого из которых имеет вид $\overline{xy6z5}$, $x \neq 0$.

Решение. Квадрат числа оканчивается на 5, поэтому $z = 2$, а $\overline{xy6} = n \cdot (n+1)$, где n – натуральное число (см. пример 1.47, глава 7). Произведение двух последовательных чисел n и $n+1$ оканчивается на 6, т.е. $n \cdot (n+1) = \overline{xy6}$, если n, в свою очередь, оканчивается либо на 2 ($n = \overline{p2}$), либо на 7 ($n = \overline{p7}$). Перечисленным условиям удовлетворяют четыре числа: 125, 175, 225, 275.

Ответ: 125, 175, 225, 275.

Пример 2.14. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $2012!$ делится на 136^n.

Решение. Поскольку $136 = 2^3 \cdot 17$, то число $2012! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2011 \cdot 2012$ будет делиться на 136^n, если оно делится одновременно на $2^{3n} = 8^n$ и на 17^n. Очевидно, что кратность вхождения числа 8 в число $2012!$ больше, чем кратность вхождения в него числа 17. Поэтому достаточно найти кратность вхождения числа 17 в $2012!$. На 17 делится каждое семнадцатое число в составе числа $2012! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2011 \cdot 2012$, на 17^2 - каждое двести восемьдесят девятое. Учитывая, что $17^3 > 2012$, то $n_{наиб} = \left[\frac{2012}{17}\right] + \left[\frac{2012}{289}\right] = 118 + 6 = 124$. Здесь $[a]$ – целая часть действительного числа a.

Отметим попутно, что кратность вхождения числа 8 в $2012!$ равна

$$\left[\frac{2012}{8}\right] + \left[\frac{2012}{16}\right] + \left[\frac{2012}{32}\right] + \left[\frac{2012}{64}\right] + \left[\frac{2012}{128}\right] + \left[\frac{2012}{256}\right] +$$
$$+ \left[\frac{2012}{512}\right] + \left[\frac{2012}{1024}\right] = 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 495.$$

Ответ: $n_{наиб} = 124$.

Замечание. *Кратность вхождения простого числа* p *в каноническое разложение натурального числа* $N!$ *может быть найдена по формуле:* $\left[\frac{N}{p}\right] + \left[\frac{N}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{N}{p^m}\right]$, $p^m \le N$.

Пример 2.15. Найдите все натуральные значения n и m, являющиеся решением уравнения $2^{n^2} - 5n! = m!$.

Решение. Число 2^{n^2} оканчивается для любого n на одну из четырех цифр: 2, 4, 8, 6. Число $5n!$ оканчивается на 0 при $n \ge 2$, а $m!$ оканчивается на 0 при $m \ge 5$. Значит, при $m \ge 5$ уравнение не может иметь решений. При $n = 0,1$ левая часть уравнения отрицательна, а правая ($m!$) положительна при всех значениях m. Поэтому необходимо проверить лишь три значения $n = 2, 3, 4$.

При $n = 2$ левая часть уравнения равна $2^{2^2} - 5 \cdot 2! = 6$. Но и $3! = 6$. Значит, пара $n = 2$, $m = 3$ является решением уравнения.

Других решений уравнение иметь не может. Действительно, число $2^{n^2} - 5n!$ при $n \ge 3$ может оканчиваться только на 2, 4, 8, 6, причем уже при $n = 3$: $2^{3^2} - 5 \cdot 3! = 482$. Близкие к этому числу значения $m!$ оканчиваются на 0 (5!=120, 6!=720 и т.д.).

Ответ: $n = 2$, $m = 3$.

Пример 2.16. Четыре натуральных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. После деления каждого из этих чисел на натуральные числа a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно получили упорядоченный набор чисел 1, 5, 45, 9. Найдите числа a_1, a_2, a_3, a_4, если известно, что произведение всех членов исходной геометрической прогрессии в 225 раз меньше произведения чисел 1, 5, 45, 9.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 - исходная геометрическая прогрессия, q – ее знаменатель. Тогда $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 = b_1^4 \cdot q^6$. С другой стороны, в соответствии с условием примера, имеем $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 = 225 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 45 \cdot 9 = 5^4 \cdot 3^6$. Значит, $b_1 = 5, q = 3$, а 5, 15, 45, 135 – исходная геометрическая прогрессия. Тогда $a_1 = 5/1 = 5,\ a_2 = 15/5 = 3,\ a_3 = 45/45 = 1,\ a_4 = 135/9 = 15$.

Ответ: 5, 3, 1, 15.

Метод, примененный при решении линейных уравнений в целых числах [пункт 2.1], обладает достаточно большой общностью. С его помощью удается решать различные задачи на множестве целых чисел, в частности и многие из тех, что входят в состав заданий ЕГЭ под именем задачи С6. Рассмотрим такие примеры.

Линейные уравнения в целых числах могут появляться в процессе решения задач, не имеющих, на первый взгляд, ничего общего с ними. В сборнике типовых заданий ЕГЭ – 2010 [11] помещена следующая задача (С6 по классификации ЕГЭ – 2010): Все правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные положительные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

Решение этой задачи приведено в журнале “Математика в школе” [12]. В следующем примере рассматривается решение близкой по содержанию задачи.

Пример 2.17. Найдите наилучшее приближение числа $\frac{7}{16}$ несократимой дробью $\frac{m}{n}$, числитель и знаменатель которой являются трехзначными натуральными числами.

Решение. Пусть $\frac{m_0}{n_0}$ – искомая дробь. Тогда разность $\left|\frac{m_0}{n_0}-\frac{7}{16}\right|$ является минимальной на множестве всех дробей $\frac{m}{n}$, числители и знаменатели которых являются трехзначными натуральными числами с $\text{НОД}(m,n)=1$. Рассмотрим разности $\frac{m}{n}-\frac{7}{16}=\frac{16m-7n}{16n}$.

Дробь $\frac{m}{n}$ при соответствующем выборе чисел m, n является приближением числа $\frac{7}{16}$ либо с недостатком: $\frac{m}{n}<\frac{7}{16}$, либо с избытком: $\frac{m}{n}>\frac{7}{16}$. Пусть $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ наилучшие (в условиях задачи) приближения числа $\frac{7}{16}$ соответственно с избытком и с недостатком. Достаточно очевидно, что наименьшее значение разности $\frac{m}{n}-\frac{7}{16}$ равно $\frac{1}{16n_1}$ для приближения $\frac{m_1}{n_1}$ с избытком и $-\frac{1}{16n_2}$ – для приближения $\frac{m_2}{n_2}$ с недостатком. Здесь n_1, n_2 максимально возможные в условиях задачи трехзначные числа. Приведенные рассуждения позволяют записать уравнения

$$16m-7n=1 \text{ при } \frac{m}{n}>\frac{7}{16},$$

$$16m-7n=-1 \text{ при } \frac{m}{n}<\frac{7}{16}.$$

Оба уравнения имеют решения в целых числах, поскольку $\text{НОД}(7,16)=1$. Решим первое уравнение

$$16m-7n=1 \quad \Rightarrow \quad n=\frac{16m-1}{7}=2m+\frac{2m-1}{7}.$$

Числа m, n являются натуральными, поэтому число $2m-1$ должно делиться на 7, т.е. $2m-1=7k, k \in N$. Откуда $m=\frac{7k+1}{2}=3k+\frac{k+1}{2}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что существует $r \in N$ такое, что $k+1=2r$.

Возвращаясь назад по цепочке преобразований дробей, получаем целочисленные решения первого уравнения

$$\begin{cases} m=\dfrac{7(2r-1)+1}{2}=7r-3, \\ n=\dfrac{16(7r-3)-1}{7}=16r-7, \ r \in N. \end{cases}$$

Наибольшее трехзначное число $n=16r-7$ найдем из неравенства $16r-7 \leq 999, r \in N$. Его решение: $r=62$. Теперь находим $m_1=7 \cdot 62-3=431,\ n_1=16 \cdot 62-7=985$. Дробь $\frac{431}{985}$ является наилучшим приближением числа $\frac{7}{16}$ с избытком среди всех дробей $\frac{m}{n}$, где m и n трехзначные натуральные числа с $\text{НОД}(m, n)=1$. При этом абсолютная ошибка Δ_1 приближения равна $\Delta_1=\frac{431}{985}-\frac{7}{16}=\frac{1}{16 \cdot 985}$.

Решения уравнения $16m-7n=-1$ находятся аналогично. Они задаются параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} m=7r+3, \\ n=16r+7, r \in N. \end{cases}$$

Из условия $16r + 7 < 999$ находим $r = 62$, $n_2 = 16 \cdot 62 + 7 = 999$, $m_2 = 7 \cdot 62 + 3 = 437$. Дробь $\frac{437}{999}$ является наилучшим приближением числа $\frac{7}{16}$ с недостатком (в условиях задачи) с абсолютной ошибкой $\Delta_2 = \left|\frac{437}{999} - \frac{7}{16}\right| = \frac{1}{16 \cdot 999}$.

Ошибка $\Delta_2 < \Delta_1$, поэтому дробь $\frac{437}{999}$ является решением задачи.

Ответ: $\frac{437}{999}$.

Замечание. *Учитывая, что* $\Delta_1 = \frac{1}{16n_1}$, *а* $\Delta_2 = \frac{1}{16n_2}$, *то для решения примера достаточно сравнить знаменатели* n_1, n_2 *дробей* $\frac{m_1}{n_1}$ *и* $\frac{m_2}{n_2}$. *В данном случае* $n_2 > n_1$ *(*$999 > 985$*) и потому дробь* $\frac{m_2}{n_2} = \frac{437}{999}$ *является решением задачи.*

Пример 2.18. Найдите все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}.$$

Решение. Данный пример приведен с решением в [13]. Рассмотрим альтернативный способ решения, вытекающий из общей схемы преобразования дробно-линейной функции. Имеем $m, n \in N$ и $12(m + n) = m \cdot n$. Пусть в соответствии с условием задачи $m = 2k$, $n = 2\ell - 1$, $k, \ell \in N$. Тогда уравнение

$12(m+n)=m\cdot n$ преобразуется к следующему виду $6(2k+2\ell-1)=k(2\ell-1)$. Выразим отсюда 2ℓ: $2\ell=\dfrac{13k-6}{k-6}$. Разложим полученную неправильную дробь на сумму целой части и правильной дроби

$$2\ell=\frac{13(k-6)+78-6}{k-6}=13+\frac{72}{k-6}.$$

Поскольку 2ℓ четное число, а 13 – нечетное, то дробь $\dfrac{72}{k-6}$ должна быть нечетным натуральным числом. Этому условию удовлетворяют следующие делители числа 72: 8, 24, 72, т.е. $k-6\in\{8, 24, 72\}$. Теперь находим последовательно искомые пары чисел (m,n):

1) $k-6=8$, $k=14$ $\Rightarrow$ $\ell=11$, $n=21$, $m=28$;
2) $k-6=24$, $k=30$ $\Rightarrow$ $\ell=8$, $n=15$, $m=60$;
3) $k-6=72$, $k=78$ $\Rightarrow$ $\ell=7$, $n=13$, $m=156$;

Ответ: (28; 21), (60; 15), (156; 13).

Пример 2.19. Найдите все трехзначные натуральные числа a, для каждого из которых выражение $1001a+9$ является квадратом целого числа.

Решение. Требуется найти все трехзначные числа, $a=\overline{xyz}$, где $x, y, z-$ цифры, $x\neq 0$ и такие, что $1001a+9=b^2$, $b\in N$. По условию примера a – трехзначное число, т.е. $100\le a\le 999$ и соответственно $1001\cdot 100+9\le b^2\le 1001\cdot 999+9$. Отсюда и из свойств квадратов целых чисел следует, что $316<b\le 999$. Теперь учтем, что $1001=7\cdot 11\cdot 13$ и преобразуем равенство $1001a+9=b^2$, $b\in N$ к виду $7\cdot 11\cdot 13a=(b-3)\cdot(b+3)$. Отсюда следует, что произведение $(b-3)\cdot(b+3)$ должно делиться на 7, на 11 и на 13. Рассмотрим все возможные варианты.

1. $\begin{cases} b+3=7k, \\ b-3=11\cdot 13m,\ k,m\in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7k-3, \\ b=143m+3. \end{cases}$

В итоге получаем линейное уравнение $7k-3=143m+3$, которое решим по стандартной схеме

$$k=\frac{143m+6}{7}=20m+1+\frac{3m-1}{7} \quad\Rightarrow\quad \frac{3m-1}{7}=n,\, n\in N.$$

$$3m-1=7n \Rightarrow\ m=\frac{7n+1}{3}=2n+\frac{n+1}{3}\Rightarrow n=3r-1,\ r\in N.$$

Возвращаясь назад по сформированной цепочке, находим

$$m=\frac{7n+1}{3}=\frac{7(3r-1)+1}{3}=7r-2.$$

$$b=143m+3=143(7r-2)+3=1001r-283.$$

Полученным выше ограничениям $316<b\le 999$ удовлетворяет единственное значение $b=1001-283=718$, которое получается из последнего равенства при $r=1$. Теперь находим соответствующее значение числа a:

$$a=\frac{(718-3)(718+3)}{1001}=\frac{715\cdot 721}{7\cdot 11\cdot 13}=515.$$

Все вычисления здесь можно выполнить без калькулятора. Действительно, легко видеть, что 715 делится на 11 и на 13 $(715:11:13=65:13=5)$, а $721:7=103$.

2. $$\begin{cases} b+3=11k, \\ b-3=7\cdot 13m,\ k,m\in N. \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b=11k-3, \\ b=91m+3. \end{cases}$$

Решив аналогичным образом уравнение $11\cdot k-3=91\cdot m+3$, получим $b=91m+3=91(11r-2)+3=1001r-179$. При $r=1$ находим

$$b=1001-179=822,\quad a=(822-3)\cdot(822+3)/1001=675.$$

3. $$\begin{cases} b+3=13k, \\ b-3=7\cdot 11m,\ k,m\in N_0. \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b=13k-3, \\ b=77m+3. \end{cases}$$

Решением данной системы при ограничениях, наложенных условиями примера, будет $b=465$. Этому значению b отвечают $m=7\cdot 62-3=431$, $a=(465-3)\cdot(465+3)/1001=216.$

4. $\begin{cases} b-3=7k, \\ b+3=11\cdot 13m, \ k,m\in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7k+3, \\ b=143m-3. \end{cases}$

Решим эту систему подробно

$$7k+3=143m-3 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{143m-6}{7}=20m-1+\frac{3m+1}{7}.$$

Откуда следует, что $\frac{3m+1}{7}=n,\ n\in N,$ соответственно

$$3m+1=7n \Rightarrow m=\frac{7n-1}{3}=2n+\frac{n-1}{3}\Rightarrow n=3r+1,\ r\in N.$$

Возвращаясь назад по сформированной цепочке, получаем

$$m=\frac{7n-1}{3}=\frac{7(3r+1)-1}{3}=7r+2,$$

$$b=143m-3=143(7r+2)+3=1001r+283.$$

Отсюда следует, что имеется единственное трехзначное число $b=283$. Однако оно не удовлетворяет ограничениям на возможные значения b $(b>316)$.

5. $\begin{cases} b-3=11k, \\ b+3=7\cdot 13m, \ k,m\in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=11k+3, \\ b=91m-3. \end{cases}$

Решением данной системы является число $b=179$, которое вновь не удовлетворяет ограничениям на возможные значения b.

6. $\begin{cases} b-3=13k, \\ b+3=7\cdot 11m, \ k,m\in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=13k+3, \\ b=77m-3. \end{cases}$

Решением этой системы будет число $b=536$, которому отвечает трехзначное число $a=287$, являющееся решением примера.

7. $\begin{cases} b+3=1001k, \\ b-3=1001k-3, \ k\in N. \end{cases}$

Отсюда получаем еще одно трехзначное число $b = 998$ и отвечающее ему число $a = (998 - 3)(998 + 3)/1001 = 995$.

Ответ: $216, 287, 515, 675, 995$.

Замечание. *Произведение* $1001a$ *является альтернативной формой записи числа* $\overline{xyzxyz}$, *где* $\overline{xyz} = a$, $x, y, z -$ *цифры,* $x \neq 0$, *т.е. числа, которое получается приписыванием к а этого же трехзначного числа. Поэтому условие задачи может звучать и так:* ***К трехзначному числу*** $\overline{xyz} = a$ ***приписали это же число и прибавили число 9 (16, 25, ...). Найдите все числа b квадрат которых равен построенному числу (*** $\overline{xyzxyz} + 9$ ***).***

Рассмотрим пример, который предлагался на вступительных экзаменах в МГУ. Его решение приведено в [9] как решение задачи линейного целочисленного программирования графическим методом. Отказ от такого подхода в приводимом ниже решении позволил получить более лаконичное и вполне конструктивное (для данного примера) решение.

Пример 2.20. (МГУ, экономический факультет, 1996 г.). В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих изделий равен 326 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Решение. Обозначим через x, y, z число изделий первого, второго и третьего типов соответственно. В соответствии с условиями задачи общий вес изделий 326 кг равен $12x + 16y + 15z$, а их суммарная стоимость $S(x, y, z)$ является линейной функцией $S(x, y, z) = 400x + 500y + 600z$.

В результате имеем задачу: найти наименьшее и наибольшее значения функции $S(x, y, z)$ при условии $x, y, z \in N$, удовлетворяющие уравнению связи $12x + 16y + 15z = 326$.

Выразим отсюда x через y, z и выделим из полученной дроби целую часть

$$x=\frac{326-16y-15z}{12}=27-y-z+\frac{2-4y-3z}{12}\ .$$

По условию задачи x, y, z - натуральные числа, поэтому дробь $\dfrac{2-4y-3z}{12}$ должна быть целым числом. Пусть

$$\frac{2-4y-3z}{12}=k,\ k\in Z\,.$$

Выразим теперь z из полученного соотношения

$$z=\frac{2-4y-12k}{3}=-4k-y+\frac{2-y}{3}\ .$$

Отсюда следует, что z будет натуральным числом, если дробь $\dfrac{2-y}{3}$ принимает целочисленные значения. Пусть $\dfrac{2-y}{3}=m,\ m\in\mathbf{Z}$, тогда $y=2-3m,\ m\in\mathbf{Z}^{-}\cup\{0\}$, или $y=2+3m,\ m\in\mathbf{N}_0$. Возвращаясь назад по цепочке преобразований, получаем

$$z=\frac{2-4y-12k}{3}=\frac{2-4(2+3m)-12k}{3}=$$

$$=-2-4k-4m,\ k\in Z, m\in\mathbf{N}_0\,,$$

$$x=\frac{326-16y-15z}{12}=\frac{326-16(2+3m)-15(-2-4k-4m)}{12}=$$

$$=27+5k+m\,,\ k\in\mathbf{Z}\,,\ m\in\mathbf{N}_0\,,$$

$$S(k,m)=400(27+5k+m)+500(3m+2)+600(-2-4k-4m)=$$

$$=10600-400k-500m\,.$$

Переформулируем исходную задачу: необходимо найти наименьшее и наибольшее возможные значения функции $S(k,m)=10600-400k-500m$ при условиях

$$\begin{cases} x=27+5k+m, \\ y=2+3m, \\ z=-2-4k-4m, \\ x,y,z\in \mathbf{N}_0 . \end{cases}$$

Это задача целочисленного линейного программирования. Получим элементарное решение данной задачи.

Функция $S(k,m)$ является линейной. Учитывая, что $m\in \mathbf{N}_0$, а $z\ge 0$, приходим к выводу, что $k\in \mathbf{Z}^{-}\bigcup\{0\}$. Поскольку знаки коэффициентов перед переменными k и m в составе функции $S(k,m)$ отрицательны, то наибольшее значение функции $S(k,m)$ достигается при минимально возможном значении m, т.е. при $m=0$ и при минимально возможном в этих условиях отрицательном значении k. Найдем это значение k. Из условия не отрицательности переменной x, получаем неравенство $27+5k\ge 0$. Отсюда следует, что минимально допустимое значение $k=-5$. В результате имеем

$$S_{max}=S(-5;0)=10600-400(-5)-500\cdot 0=12600 .$$

Достигается наибольшее значение в точке с координатами

$$x=27+5(-5)=2, \quad y=2+3\cdot 0=2, \quad z=-2-4\cdot(-5)=18 .$$

Найдем теперь минимально возможное значение функции суммарной стоимости изделий $S(k,m)$. По аналогичным причинам приходим к выводу, что S_{min} будет достигаться при максимально возможных значениях m и k (с учетом не положительности k). Условия $x\ge 0$ и $z\ge 0$ приводят к двойному неравенству

$$-\frac{27+m}{5} \le k \le -m-\frac{1}{2}.$$

Из этого неравенства находим оценку для m: $m \le 6$. Значение m должно быть максимально возможным, однако $m=6$ не подходит, так как в этом случае для k получается неравенство, не имеющее решения $-6,6 \le k \le -6,5$. Поэтому полагаем $m=5$. При данном значении m для k получаем неравенство $-6,4 \le k \le -5,5$, имеющее единственное решение: $k=-6$.

В итоге имеем

$$S_{min} = S(-6;5) = 10600 - 400(-6) - 500 \cdot 5 = 10500.$$

Достигается минимальное значение суммарной стоимости изделий при

$$x = 27 + 5(-6) + 5 = 2,$$

$$y = 2 + 3 \cdot 5 = 17,$$

$$z = -2 - 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 5 = 2,$$

т.е. в точке с координатами $(2;17;2)$.

Ответ: $S_{min} = 10500$, $S_{max} = 12600$.

ГЛАВА III
РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА
3.1. Обыкновенные дроби

Определение 1. *Дроби вида* $\frac{m}{n}$*, где* $m \in \mathbf{Z}$*,* $n \in \mathbf{N}$*, называются* ***обыкновенными дробями****.*

Обыкновенные дроби $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, подразделяют на правильные и неправильные.

Определение 2. *Дробь* $\frac{m}{n}$*,* $m \in \mathbf{Z}$*,* $n \in \mathbf{N}$*, называется* ***правильной****, если* $m < n$ *при* $m \in \mathbf{Z}^{+}$ *или* $(-m) < n$ *при* $m \in \mathbf{Z}^{-1}$ *и* ***неправильной*** *в противном случае, т.е., если* $m \geq n$ *или* $(-m) \geq n$.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа k и правильной дроби $\frac{r}{n}$, где $0 \leq r < n$, причем такое разложение $\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}$ единственно.

Например, дробь $\frac{3}{7}$ – правильная; дробь $\frac{23}{6}$ – неправильная, а равенство $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ даёт её разложение на сумму натурального числа 3 и правильной дроби $\frac{5}{6}$. Часто неправильную дробь записывают в форме смешанного числа: $\frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$, $\frac{57}{14} = 4\frac{1}{14}$. В записи $3\frac{5}{6}$ число 3 является целой частью этого числа, а $\frac{5}{6}$ – дробной частью.

Для отрицательной дроби $-\frac{23}{6}$ разложение имеет следующий вид: $-\frac{23}{6} = -4 + \frac{1}{6}$. Заметим, что формально верным является и альтернативное разложение: $-\frac{23}{6} = -3 - \frac{5}{6}$.

Числа $a = \frac{m}{n}$ и $b = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbf{N}$, называются взаимно обратными. Задачи с такими числами часто встречаются на экзаменах и основываются они, как правило, на простом, но очень важном свойстве: для любого $a > 0$ справедливо неравенство

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2},$$

причем $a + \frac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$.

Если же $a < 0$, то

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \leq -2}$$

и $a + \frac{1}{a} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$.

Справедливость каждого неравенства следует из соответствующих неравенств:

$$a > 0: \quad (a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2;$$

$$a < 0: \quad (a+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq -2a \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2.$$

Определение 3. *Две дроби* $\frac{m_1}{n_1}$ *и* $\frac{m_2}{n_2}$ *называются* ***равными****, если* $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Например, $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$, так как $3 \cdot 56 = 21 \cdot 8$. Поскольку $\frac{21}{56} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{3}{8}$, то любую дробь $\frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot k}{n_1 \cdot k}$, числитель и знаменатель которой содержит общий множитель k, можно сократить на k: $\frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot k}{n_1 \cdot k} = \frac{m_1}{n_1}$.

Сравнение неравных положительных дробей основывается на эквиваленциях

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 n_2 < m_2 n_1;$$

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 n_2 > m_2 n_1.$$

Например, $\frac{17}{19} < \frac{23}{25}$, так как $17 \cdot 25 < 19 \cdot 23$ или $425 < 437$.

При вычислении значений числовых выражений, содержащих в своём составе обыкновенные дроби, а также при сравнении дробей, часто приходится приводить дроби к общему знаменателю.

Пусть требуется вычислить разность $\frac{19}{28} - \frac{13}{36}$. Для вычисления значения этого числового выражения необходимо сначала привести обе дроби к общему знаменателю. Наименьший общий знаменатель – это НОК чисел 28 и 36. Вычисляем

$$\text{НОК }(28,36) = \text{НОК}\left(2^2 \cdot 7;\, 2^2 \cdot 9\right) = 2^2 \cdot 7 \cdot 9.$$

Замечаем, что $2^2 \cdot 7 \cdot 9 = 28 \cdot 9 = 36 \cdot 7$.

Поэтому

$$\frac{19}{28}-\frac{13}{36}=\frac{19\cdot 9}{28\cdot 9}-\frac{13\cdot 7}{36\cdot 7}=\frac{171-91}{2^2\cdot 7\cdot 9}=\frac{80}{2^2\cdot 7\cdot 9}=\frac{20}{63}.$$

На практике при приведении дробей к общему знаменателю используют более компактные записи

$$\frac{19}{28}^{\backslash 9}-\frac{13}{36}^{\backslash 7}=\frac{19\cdot 9-13\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 9}=\frac{20}{63}.$$

3.2. Десятичные дроби

Определение. Десятичной дробью *называется запись обыкновенной дроби* $\frac{m}{n}$*,* $m,n\in\mathbf{N}$ *в виде*

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n.... \tag{3.1}$$

Здесь α_0 – целая часть числа, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ – дробная часть.

При этом α_0 – натуральное число, а $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,...$ – цифры, т.е. для любого $k\in\mathbf{N}$ $\alpha_k\in\{0,1,2,...,9\}$.

Если дробь $\frac{m}{n}$ правильная, то $\alpha_0=0$. Если дробь $\frac{m}{n}$ неправильная, то $\alpha_0\neq 0$ и дробь (3.1) называется смешанной.

Всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть представлено либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной, но в этом случае периодической. Например, $\frac{4}{5}=0{,}8$; $\frac{36}{8}=4{,}5$; $\frac{171}{8}=21{,}375$ – конечные десятичные дроби, а $\frac{137}{333}=0{,}411411411...$, $\frac{54287}{24975}=2{,}17365365365...$ – бесконечные периодические дроби. Бесконечные периодические дроби принято записывать в краткой форме: $0,(411)=0,411411...$; $2,17(365)=2,17365365...$.

Группа цифр, стоящих в круглых скобках, называется периодом бесконечной десятичной периодической дроби. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется ***чисто периодической:*** $0,(411)$; $3,(1273)$; $0,(13)$. Если же между запятой и периодом есть ещё цифры, то дробь называется ***смешанной периодической***: $2,17(365)$; $0,234(13)$; $0,317(8914)$.

При решении примеров, содержащих десятичные дроби, часто приходиться обращать их в обыкновенные. Обращение конечной десятичной дроби в обыкновенную не представляет особого труда: $0,125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$; $2,12=2+\frac{12}{100}=2+\frac{3}{25}=\frac{53}{25}$.

Обращение же бесконечной периодической дроби в обыкновенную и обратный перевод требуют определённых навыков. Обратим для примера дробь $0,(411)$. Имеем

$$0,(411)=\frac{411}{1000}+\frac{411}{(1000)^2}+...+\frac{411}{(1000)^n}+....$$

В первой части числового равенства сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{411}{1000}$ и знаменателем $q=\frac{1}{1000}$. Поэтому $\left(S=\frac{b_1}{1-q}\right)$

$$0,(411)=\frac{\frac{411}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{411}{1000}\cdot\frac{1000}{999}=\frac{411}{999}.$$

Легко показать, что в случае произвольной чистой периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$ справедливо представление

$$\boxed{0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)=\frac{\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}{99...9}}. \tag{3.2}$$

Таким образом, получили **правило обращения чисто периодической дроби**:

Для перевода чисто периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$ *в обыкновенную* $\frac{m}{n}$*, необходимо в числителе обыкновенной дроби записать группу цифр* $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$*, образующих период десятичной дроби, а в знаменателе - число* $\underbrace{99...9}_{k\text{ раз}}$.

Получим правило обращения смешанной десятичной периодической дроби в обыкновенную. Обратим дробь $2{,}17(365)$. Имеем

$$2{,}17(365) = 2 + \frac{17}{100} + \frac{365}{10^5} + \frac{365}{10^8} + ... + \frac{365}{10^{3n+2}} + ... =$$

$$= 2 + \frac{17}{100} + \frac{\frac{365}{10^5}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 2 + \frac{17}{100} + \frac{165}{10^5} \cdot \frac{10^3}{999} =$$

$$= 2 + \frac{17}{100}^{\backslash 999} + \frac{365}{99900} = 2 + \frac{17 \cdot 999 + 365}{99900} =$$

$$= 2 + \frac{17(1000-1) + 365}{99900} = 2 + \frac{17365 - 17}{99900} =$$

$$= 2\frac{17348}{99900} = 2\frac{4337}{24975} = \frac{54287}{24975}.$$

В случае произвольной смешанной бесконечной периодической дроби $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k)$. Справедливо представление

$$\boxed{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k) = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m\alpha_{m+1}...\alpha_k} - \overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}}{\underbrace{99...9}_{k-m}\underbrace{00...0}_{m}}}. \quad (3.3)$$

Например,

$$0,137(2943)=\frac{1372943-137}{9999000}=\frac{1372806}{9999000}=\frac{76267}{555500};$$

$$0,224(17)=\frac{22417-224}{99000}=\frac{22193}{99000}.$$

Правило перевода смешанной периодической дроби в обыкновенную:

Для перевода смешанной периодической дроби $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k)$ *в обыкновенную* $\frac{m}{n}$ *необходимо в числителе дроби* $\frac{m}{n}$ *записать разность*

$$\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m\alpha_{m+1}...\alpha_k}-\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m},$$

в составе которой ***первое число*** *образовано* ***всеми цифрами*** *дробной части десятичной дроби, а* ***второе*** *–* ***цифрами, предшествующими периоду****; в знаменателе дроби записывается число 99…900…0, содержащее столько девяток, сколько цифр в периоде и столько нулей, сколько цифр предшествует периоду.*

Альтернативный способ перевода бесконечных периодических дробей в обыкновенные рассмотрим на примерах. Обратим чисто периодическое число $0,(411)=0,411411...$. Примем $x=0,411411...$ и умножим обе части равенства на 10^3, где 3 – число цифр в периоде. Получим

$$1000x=411,411411...=411,(411).$$

Вычтем $x=0,(411)$ из числа $1000x=411,(411)$. Получим $999x=411$, откуда $x=\frac{411}{999}$.

Обратим таким же способом смешанное периодическое число $2{,}17(365)$. Положим $x = 0{,}17(365)$ и умножим обе части на 100 для получения чистой периодической дроби:

$$100x = 17,(365). \qquad (3.4)$$

Умножим теперь обе части равенства (3.4) на 10^3:

$$100000x = 17365,(365).$$

Вычтем $100x$ из $100000x$:

$$100000x - 100x = 17365,(365) - 17,(365)$$

или $\qquad 99900x = 17365 - 17$. Откуда $x = \dfrac{17348}{99900} = \dfrac{4337}{24975}$ и, как следствие, $2{,}17(365) = 2\dfrac{4337}{24975}$.

Пример 3.1. Решите уравнение

$$\frac{0,(24)x + 0,(3)}{1,(87)x + 0{,}8(3)} = 2.$$

Решение. $\dfrac{24}{99}x + \dfrac{3}{9} = 2\left(1\dfrac{87}{99}x + \dfrac{83-8}{90}\right)$;

$\dfrac{372x - 24x}{99} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{75}{45}$; $\qquad \dfrac{348}{99}x = -\dfrac{4}{3}$. Откуда $x = -\dfrac{11}{29}$.

Ответ: $x = -\dfrac{11}{29}$.

Для вычисления значений числовых выражений, в состав которых входят десятичные периодические дроби, необходимо преобразовать эти дроби в обыкновенные дроби.

Пример 3.2. Найдите значение числового выражения. Результат запишите в виде обыкновенной и десятичной дробей

$$4 \cdot 2{,}5(3) - 3 \cdot 33,(14).$$

Решение.

$$4\cdot 2{,}5(3)-3\cdot 3{,}(14)=4\left(2+\frac{53-5}{90}\right)-3\cdot\left(3+\frac{14}{99}\right)=$$

$$=-1+\frac{4\cdot 48}{90}-\frac{3\cdot 14}{99}=-1+\frac{4\cdot 16^{\backslash 11}}{3\cdot 10}-\frac{14^{\backslash 10}}{3\cdot 11}=$$

$$=-1+\frac{4(176-35)}{3\cdot 10\cdot 11}=-1+\frac{2\cdot 47}{5\cdot 11}=\frac{39}{55}.$$

Преобразуем обыкновенную дробь $\frac{39}{55}$ в десятичную:

$$\frac{39}{55}=\frac{39\cdot 9\cdot 2}{11\cdot 5\cdot 9\cdot 2}=\frac{702}{990}.$$

Отсюда следует, что искомая десятичная дробь должна иметь две цифры в периоде и одну – до периода. Цифра до периода 7, а цифры в периоде найдём из правила обращения смешанной десятичной периодической дроби в обыкновенную:

$$02=\overline{mn}-7\Rightarrow\overline{mn}=02+07=09.$$

Поэтому $\frac{39}{55}=0{,}7(09)$.

Ответ: $\frac{39}{55}$ или $0{,}7(09)$.

3.3. Рациональные числа

Определение. *Множество обыкновенных дробей* $\left\{\frac{m}{n}\right\}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, *называется* ***множеством рациональных чисел*** *и обозначается буквой* $\mathbf{Q}$.

Таким образом, по определению

$$\mathbf{Q}\overset{\text{def}}{=}\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}\right\}. \qquad (3.5)$$

Множество $\mathbf{Q}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, т.е. для любых

$$a, b \in \mathbf{Q},\ m \in \mathbf{Z}:\ (a+b) \in \mathbf{Q},\ (a-b) \in \mathbf{Q},$$
$$a \cdot b \in \mathbf{Q},\ \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}\quad (b \neq 0) \text{ и } a^m \in \mathbf{Q}.$$

Выделим наиболее важные подмножества множества рациональных чисел:

1) $\mathbf{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{N} \right\}$ – множество положительных рациональных чисел;

2) $\mathbf{Q}^- = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}^-, n \in \mathbf{N} \right\}$ – множество отрицательных рациональных чисел;

3) $\mathbf{Z} = \left\{ \frac{m}{1} \right\}, m \in \mathbf{Z}$ – множество целых чисел;

4) $\mathbf{N} = \left\{ \frac{m}{1} \right\}, m \in \mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел является подмножеством множества $\mathbf{Z}$ целых чисел, а оно, в свою очередь, является подмножеством множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, т.е. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Справедливы также включения $\mathbf{Q}^+ \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^- \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Z}^- \subset \mathbf{Q}^-$.

3.4. Иррациональные числа

Простейший пример об измерении длины диагонали единичного квадрата показывает, что операция извлечения квадратного корня из рационального числа не всегда возможна на множестве $\mathbf{Q}$. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ и т.д. не являются рациональными, т.е. не могут быть представлены несократимыми дробями $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$.

Доказывается это утверждение однотипно для всех корней вида $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$, при соответствующих значениях $a \in \mathbf{Q}$. Докажем в качестве примера, что $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, т.е. не существует несократимой дроби $\frac{m}{n}$ такой, что $\frac{m}{n} = \sqrt{3}$. Допустим противное, а именно $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$ и потому существует несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, такая, что $\frac{m}{n} = \sqrt{3}$ или $m^2 = 3n^2$. Отсюда следует, что $m^2 \vdots 3$, а значит и $m \vdots 3$. Пусть $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbf{N}$, тогда

$$m^2 = 3n^2 \Leftrightarrow 9m_1^2 = 3n^2 \Leftrightarrow n^2 = 3m_1^2.$$

Отсюда аналогично делаем вывод о том, что $n^2 \vdots 3$ и $n = 3n_1$, $n_1 \in \mathbf{N}$. Но тогда $\frac{m}{n} = \frac{3m_1}{3n_1} = \frac{m_1}{n_1}$, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Поэтому не существует числа $a \in \mathbf{Q}$ такого, что $a = \sqrt{3}$.

Если все рациональные числа расположить на числовой прямой, то на ней останется бесконечное множество незаполненных «дырок». Эти дырки занимают так называемые иррациональные числа. Иррациональные числа не представимы конечными или бесконечными, но периодическими десятичными дробями. Их десятичное представление содержит бесконечное число цифр после запятой, не образующих периода какой-нибудь конечной длины.

Иррациональных чисел существенно больше (в определённом смысле), чем рациональных. Множество иррациональных чисел, естественно, не исчерпывается числами вида $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$, для соответствующих значений $a \in \mathbf{Q}$. В это множество входят числа вида $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\log_2 3$, $\mathrm{loq}_3 5$ и т.д., а также числа, имеющие свои имена: π (пи), число e.

Основное назначение чисел – измерение длины, площади, объема геометрических многообразий, а также значений различных физических величин (температуры, давления, массы, скорости, напряженности и т.д.). Для решения бытовых и многих научно-технических задач вполне достаточно множества рациональных чисел. Они позволяют вычислять искомые значения либо точно, если каждое такое значение является рациональным числом, либо приближенно, но с любой наперёд заданной точностью, если искомое значение не является рациональным числом.

Иррациональные числа необходимы, во-первых, для построения числовой системы, замкнутой относительно всех основных арифметических операций и, во-вторых, для создания на этой основе здания математического анализа, включающего в себя теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления.

Определение. *Множество бесконечных непериодических десятичных дробей называется* ***множеством иррациональных чисел.*** *Обозначим это множество буквой* $\mathbf{I}$ *:*

$$\mathbf{I} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots\}.$$

Здесь $\alpha_0 \in \mathbf{Z}$ – целая часть иррационального числа, $\alpha_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $i \in \mathbf{N}$, – цифры, образующие дробную часть иррационального числа. При этом никакая группа последовательных цифр $\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_{i+m}$ для любых $i, m \in \mathbf{N}$ не повторяется, т.е. десятичная дробь непериодическая.

Если множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел замкнуто относительно основных арифметических операций (сложение, вычитание, умножение и деление), то множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел не замкнуто относительно этих операций. Например, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$ – иррациональные числа, их сумма и разность - также иррациональные числа

$$\Big(\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \quad 3\sqrt{3} \in \mathbf{I},$$
$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} \in \mathbf{I}\Big),$$

а произведение этих чисел $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ является рациональным числом. Сумма иррациональных чисел $\sqrt{3}$ и $5 - \sqrt{3}$ является рациональным числом $\sqrt{3} + \left(5 - \sqrt{3}\right) = 5$, $5 \in \mathbf{Q}$. Любая четная степень иррационального числа $\sqrt{3}$ является рациональным числом $\left(\sqrt{3}\right)^{2n} = 3^n$, $3^n \in \mathbf{Q}$ при $n \in \mathbf{N}$.

3.5. Действительные числа

Определение. *Множество всех десятичных дробей (конечных и бесконечных) называется* ***множеством действительных чисел*** *и обозначается буквой* $\mathbf{R}$.

Таким образом, множество действительных чисел - это объединение всех рациональных и иррациональных чисел:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Множество действительных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня n-й степени (за исключением корня четной степени из отрицательного числа). Очень важным является следующее свойство действительных чисел.

Свойство непрерывности. *Если для любых чисел* $a \in A$, $A \subset \mathbf{R}$ *и* $b \in B$, $B \subset \mathbf{R}$ *выполняется неравенство* $a \le b$, *то существует число* $c \in \mathbf{R}$, *такое, что* $a \le c \le b$ *для всех* $a \in A$ *и всех* $b \in B$.

Это свойство означает, в частности, что между любыми двумя неравными действительными числами, но сколь угодно близкими друг к другу, расположено бесконечное множество отличных от них действительных чисел.

В частности, это свойство позволяет утверждать, что если последовательность действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ имеет конечный предел b, то $b \in \mathbf{R}$. Это свойство действительных чисел называется ещё свойством полноты.

Свойство полноты. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– некоторое числовое множество. Если любая сходящаяся последовательность*

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbf{X}$ *имеет своим пределом число* b *из этого же множества, то* ***множество*** $\mathbf{X}$ *называется* ***полным***.

Множество рациональных чисел не является полным. Следует это из того, что последовательность рациональных чисел $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$ сходится к иррациональному числу e $(e = 2{,}718281828459045...)$, т.е. $a_n \in \mathbf{Q}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin \mathbf{Q}$. На множестве действительных чисел всякая сходящаяся последовательность сходится к действительному числу, т.е. если $\{a_n\} \in \mathbf{R}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, то $b \in \mathbf{R}$.

Для любых двух действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из отношений: $a > b$, $a = b$, $a < b$. При этом по определению:

$$a > b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b > 0;$$

$$a < b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b < 0,$$

т. е. число a больше b тогда и только тогда, когда разность $a - b$ является положительным числом и, наоборот, $a < b$ тогда и только тогда, когда разность $a - b$ является отрицательным числом. Например, $\frac{1}{6} < 0{,}17$, так как $\frac{1}{6}^{\backslash 50} - \frac{17}{100}^{\backslash 3} = -\frac{1}{150} < 0$. Для сравнения положительных чисел, записанных в виде десятичных дробей $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2...$, можно пользоваться правилом: если $\alpha_0 > \beta_0$, то $a > b$, если же $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots$, $\alpha_i = \beta_i$, $\alpha_{i+1} > \beta_{i+1}$, то $a > b$.

Так в рассматриваемом примере $a = 0{,}1666.. = 0{,}1(6)$, $b = 0{,}17$ и $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, но $\alpha_2 = 6$, $\beta_2 = 7$ и $\alpha_2 < \beta_2$, поэтому $a < b$.

Пример 3.3. Сравните числа $0{,}23(147)$ и $\dfrac{1927}{8325}$.

Решение. Способ 1. Пусть $a = 23(147)$, $b = \dfrac{1927}{8325}$. Преобразуем число b.

$$b = \frac{1927}{8325} = \frac{1927 \cdot 4}{8325 \cdot 4} = \frac{7708}{33300}; \quad \frac{7708}{33300} = \frac{7708 \cdot 3}{33300 \cdot 3} = \frac{23124}{99900}.$$

В соответствии с правилом перевода смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную получаем:

$$124 = \overline{mnk} - 23 \Rightarrow \overline{mnk} = 124 + 23 = 147$$

и поэтому $\dfrac{1927}{8325} = \dfrac{23124}{99900} = 0{,}23(147)$. Таким образом, $a = b$.

Способ 2. $a = 0{,}23(147) = \dfrac{23147 - 23}{99900} = \dfrac{23124}{99900}$. Числитель и знаменатель дроби делятся на 3 и на 4. Поэтому $a = 0{,}23(147) = \dfrac{1927}{8325} = b$.

Ответ: $0{,}23(147) = \dfrac{1927}{8325}$.

Основные свойства числовых неравенств

1. *Если* $a > b$ *и* $b > c$*, то* $a > c$ *(свойство транзитивности).*

2. *Если* $a > b$*, то для любого* $c \in \mathbf{R}$*:* $a + c > b + c$.

3. *Если* $a > b$ *и* $c > 0$*, то* $ac > bc$*; если же* $c < 0$*, то* $ac < bc$. *Свойство 3 означает, что при умножении обеих частей верного неравенства на положительное число его знак не меняется.*

4. *Если* $a > b$ *и* $c > d$*, то* $a + c > b + d$*, т.е. верные неравенства одного знака можно складывать.*

5. *Если* $a > b$ *и* $c > d > 0$*, то* $a \cdot c > b \cdot d$*, т.е. верные неравенства одного знака с положительными числами можно почленно перемножать.*

6. *Если* $a > b$ *и* $c < d$*, то* $a - c > b - d$.

7. *Если* $a > b > 0$*, то* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Пример 3.4. Сравните три числа $\frac{19}{20}$; $\frac{3801}{4000}$ и $\frac{\sqrt{90}}{10}$.

Решение. Обозначим $a = \frac{19}{20}$; $b = \frac{3801}{4000}$; $c = \frac{\sqrt{90}}{10}$. Имеем $a = \frac{19}{20} = \frac{19 \cdot 200}{20 \cdot 200} = \frac{3800}{4000}$, т.к. $\frac{3800}{4000} < \frac{3801}{4000}$, то $a < b$. Сравним теперь числа a и c. $c = \frac{\sqrt{90}}{10} = \frac{2 \cdot \sqrt{9 \cdot 10}}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{18 \cdot 20}}{20}$. Поскольку знаменатели дробей $a = \frac{19}{20}$ и $c = \frac{\sqrt{18 \cdot 20}}{20}$ равны, то достаточно сравнить их числители. Имеем $\sqrt{18 \cdot 20} = \sqrt{(19-1)(19+1)} = \sqrt{19^2 - 1} < 19$. Поэтому $c < a$. В соответствии со свойством транзитивности из неравенств $a < b$ и $c < a$ следует неравенство $c < b$. Таким образом: $c < a < b$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{10} < \frac{19}{20} < \frac{3801}{4000}$.

3.6. Целая и дробная части действительного числа

Определение 1. *Целой частью действительного числа* x *называется наибольшее целое число, не превосходящее* x.

Обозначается целая часть числа x символом $[x]$. Например: $[5,3] = 5$; $[7,82] = 7$; $[-3,2] = -4$; $[-8,37] = -9$. График функции $y = [x]$ изображен на рис. 3.1.

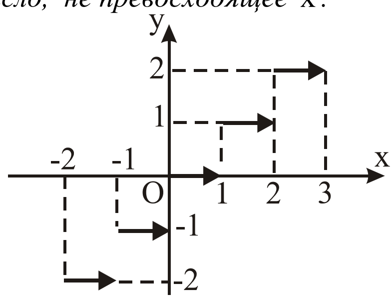


Рис. 3.1. График функции y=[x]

Из определения целой части действительного числа, свойств целых и действительных чисел следуют свойства.

1. *Для любого* $x \in R$*:*

$$\boxed{[x] \le x < [x]+1}.$$

2. *Для любого* $n \in Z$ *и любого* $x \in R$*:*

$$\boxed{[n+x] = n+[x]},$$

или в символьной записи $(\forall x \in R \forall n \in Z \ \Rightarrow \ [n+x] = n+[x])$.

Определение 2. Дробной *частью действительного числа* x *называется разность между этим числом и его целой частью.* Обозначается дробная часть числа x символом $\{x\}$. Таким образом, по определению $\{x\} = x-[x]$. График функции $y=\{x\}$ изображен на рис. 3.2.

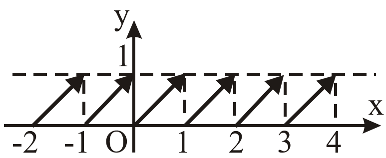


Рис. 3.2. График функции y={x}

Приведем основные свойства дробной части числа x.

1. *Любое действительное число* x *можно представить в виде суммы его целой и дробной частей, т.е.*

$$\boxed{x = [x]+\{x\}}.$$

2. *Для любого действительного числа* x *его дробная часть неотрицательна и меньше 1, т.е.*

$$\boxed{0 \le \{x\} < 1}.$$

3. *Прибавление к действительному числу* x *любого целого числа n не меняет его дробной части, т.е.*
$\forall x \in R \forall n \in Z \ \Rightarrow \ \{x+n\} = \{x\}$.

4. *Функция* $y=\{x\}$ *является периодической с основным периодом* $T=1$.

Рассмотрим примеры, в которых участвуют целая и (или) дробная части действительного числа x.

Пример 3.5. Решите уравнение $[2x-1] = x+\dfrac{3}{2}$.

Решение. Обозначим $2x-1=t$. Отсюда $x=\frac{t+1}{2}$, а уравнение преобразуется к виду $[t]=\frac{t}{2}+2$. Левая часть этого уравнения является целым числом $([t]\in Z)$. Поэтому и правая часть уравнения должна быть целым числом, т.е. t должно делиться на 2. Пусть $t=2k$, $k\in Z$. Тогда $[t]=2k$ и уравнение сводится к простейшему $2k=k+2$. Значит, $k=2$, $t=4$,

$$x=\frac{4+1}{2}=2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

Пример 3.6. Решите уравнение $\{x\}=\frac{x-1}{4}$.

Решение. Поскольку $0\le\{x\}<1$, то все x, являющиеся решением уравнения, должны удовлетворять неравенству

$0\le\frac{x-1}{4}<1$, или $1\le x<5$. Легко видеть, что $x=1$ является решением уравнения. Другие решения могут содержаться только среди чисел $x=2+t, x=3+t, x=4+t$, где $0\le t<1$. Пусть

а) $x=2+t$, $0\le t<1$. В этом случае $\{2+t\}=t$, а исходное уравнение преобразуется к виду $t=\frac{t+2-1}{4}$. Его решение $t=\frac{1}{3}$. Тогда $x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

б) $x=3+t$, $0\le t<1$, $\{3+t\}=t$,

$$t=\frac{t+3-1}{4}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{2}{3},\ x=\frac{11}{3}.$$

в) $x=4+t,\ 0\le t<1,\ \{4+t\}=t$. Однако в этом случае уравнение $t=\dfrac{t+3-1}{4}$ имеет решение $t=1$, не удовлетворяющее ограничению на переменную t $(0\le t<1)$.

Ответ: $x=1,\ x=\dfrac{7}{3},\ x=\dfrac{11}{3}$.

Замечание. *Решение примера 3.6 можно и удобно искать графическим методом. Для этого надо построить в одной системе координат графики функций* $y_1(x)=\{x\}$ *и* $y_2(x)=\dfrac{x-1}{4}$.

Пример 3.7. Решите уравнение $\{x\}\cdot[x]=[x]\cdot(2-x)-4x$.

Решение. Введем обозначение $t=[x]$. Тогда $\{x\}=x-[x]=x-t$ и уравнение преобразуется к виду

$$(x-t)\cdot t-t\cdot(2-x)+4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2-2t(x-1)-4x=0.$$

Решив это уравнение, получим простейшие уравнения

$$t=2x \text{ и } t=\text{-}2 \text{ или } [x]=2x \text{ и } [x]=-2.$$

Решим сначала первое уравнение. Прямая $y=2x$ проходит через начало координат и точку $(-1;-2)$. Поэтому $x=0$ является решением уравнения. Еще одно решение найдем из уравнения $2x=-1$ (см. рис. 3.3).

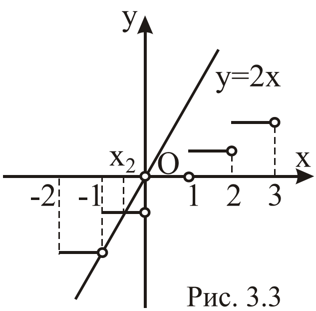


Рис. 3.3

Решением второго уравнения $[x]=-2$ являются все x из промежутка $(-1;-2]$.

Ответ: $(-1;-2]\cup\{-0{,}5;0\}$.

Пример 3.8. [15, с.117]. Определите, сколько раз в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$, заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{4n+2}\right]$, встречается число 15.

Решение. В соответствии с условием примера целая часть числа $\left[\sqrt{4n+2}\right]$ равна 15 при некоторых натуральных значениях n. Значит, для этих значений n должно выполняться двойное неравенство $15 \le \left[\sqrt{4n+2}\right] < 16$. Откуда

$$225 \le 4n+2 < 256 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{223}{4} \le n < \frac{254}{4}.$$

С учетом того, что n – натуральное число, получаем в итоге $56 \le n \le 63$. Значит, число 15 встречается в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ 8 раз $(8 = 63 - 56 + 1)$.

Ответ: 8 раз.

3.7. Степени действительного числа

3.7.1. Степень с целым показателем

Пусть $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$. Тогда по определению полагают

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n множителей}}, \qquad a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n},\ a \ne 0.$$

Таким образом, n-я степень числа a равна произведению n множителей, каждый из которых равен a. Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$. Также по определению полагают, что для любого $a \in \mathbf{R}$, $a \ne 0$: $a^0 = 1$.

В записи a^n число a называют **основанием степени**, а число n – **показателем степени**.

Например, $4^5 = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 1024$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4}$;

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$; $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = -\left(\frac{5}{3}\right)^{3} = -\frac{125}{27}$.

Свойства степеней ($a \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}$):

1. $a^n a^m = a^{n+m}$; 2. $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3. $a^n b^n = (ab)^n$;

4. $a^{nm} = (a^n)^m$; 5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$;

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, b \neq 0, a \neq 0.$

3.7.2. Арифметический корень. Корень нечетной степени

Пусть a – неотрицательное действительное число, $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$.

Определение 1. Арифметическим корнем *n-й степени из неотрицательного числа a называется такое* ***неотрицательное число*** *b, что $b^n = a$.*

Такое число b, и при этом единственное, существует для каждого неотрицательного числа a. Обозначают арифметический корень символом $\sqrt[n]{a}$; число a называют **подкоренным числом**, а n – **показателем корня**.

Из определения арифметического корня $\left(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\right)$ следует равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ для любого $a \geq 0$.

Необходимость введения понятия арифметического корня обусловлена тем, что корень четной степени $2n$ из отрицательного числа не существует. Действительно, для любого $b \in \mathbf{R}$ $b^{2n} = \left(b^2\right)^n \geq 0$ и, если $a < 0$, то равенство $b^{2n} = a$ невозможно ни при каких b.

Для нечетных значений $2n+1$ показателя корня из отрицательного числа a такие значения b $(b<0)$ существуют.

Определение 2. Корнем степени $2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, *из отрицательного числа* a *называется такое отрицательное число* b, *что* $b^{2n+1}=a$, *т.е.*

$$\boxed{\sqrt[2n+1]{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^{2n+1}=a}.$$

Корень степени $2n+1$ называется еще ***алгебраическим корнем***.

Например, $\sqrt[3]{-64}=-4$, так как $(-4)^3=-64$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$, так как $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$.

Свойства арифметических корней $(a \geq 0, b \geq 0, n, m \in \mathbf{N})$.

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

Важные частные случаи:

5. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a \leq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.
6. $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

   $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{-a}\cdot\sqrt[2n]{-b}$, если $a \leq 0$ и $b \leq 0$,

иначе: $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}$.

3.7.3. Степень с дробным показателем

Если показатель t степени числа a^t является дробным, т.е. $t = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, то для неотрицательных значений a $(a \geq 0)$ по определению полагают

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}}.$$

Для отрицательных чисел a $(a < 0)$ операция возведения в дробную степень не определена. В частности, это означает, что $\sqrt[3]{-8} = -2$, но выражение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не определено[1], тогда как для положительного числа $a = 8$: $\sqrt[3]{8} = 2$ и $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.

В соответствии с определением степени с дробным показателем $0^t = 0$ для любого $t \in \mathbf{Q}^+$. По определению полагают, что операция возведения в отрицательную дробную степень $\left(-\frac{m}{n}\right)$, $m, n \in \mathbf{N}$, определена только для положительных чисел a $(a > 0)$ и $a^{-\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

---

[1] Требование не отрицательности числа a при возведении в дробную степень $\frac{m}{n}$ является общим для стандартного школьного курса. При определении степенной функции с дробным показателем $x^{m/n}$ в школах и классах с повышенной математической подготовкой, а также в вузовских курсах от этого ограничения отказываются в тех случаях, когда знаменатель дроби m/n является нечетным числом. Например, считают, что функции $x^{1/3}$, $x^{2/5}$, $x^{3/7}$ определены для всех значений $x \in R$. В этом случае значение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ определено и равно $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Например, $8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.

Операция $0^{-\frac{m}{n}}$ не определена.

Пример 3.9. Вычислите

$$243^{0,2} : \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3} + (0,8)^{-4}(-1,6)^3 + (21,3)^0 \cdot \sqrt[5]{1024}.$$

Решение.

$$243^{0,2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3\,;\ \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3} = \left(\frac{27}{64}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}\,;$$

$$(0,8)^{-4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{4};\ (-1,6)^3 = -\left(\frac{8}{5}\right)^{3};\ (21,3)^0 = 1,$$

$$\sqrt[5]{1024} = 4.$$

Подставляя полученные числовые значения и выражения со степенью в исходное числовое выражение, получаем

$$3 : \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^4\left(-\left(\frac{8}{5}\right)^3\right) + 4 = 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 - \left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3 = 8 - \frac{5^4}{5^3} \cdot \frac{8^3}{4^4} =$$

$$= 8 - 5^{4-3} \cdot \frac{(4 \cdot 2)^3}{4^4} = 8 - 5 \cdot 4^{3-4} \cdot 2^3 =$$

$$= 8 - 5 \cdot 4^{-1} \cdot 8 = 8 - 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = -2.$$

Ответ: -2.

Замечание. 1. *Значение дроби* $\frac{8^3}{4^4}$ *можно вычислить иначе*

$$\frac{8^3}{4^4} = \frac{(2^3)^3}{(2^2)^4} = \frac{2^9}{2^8} = 2^{9-8} = 2.$$

2. *Легко заметить, что в выражении* $(0,8)^{-4} \cdot (0,16)^3$ *можно заменить* $1,6 = 2 \cdot 0,8$, *тогда*

$$(0{,}8)^{-4}(0{,}16)^3=(0{,}8)^{-4}(2\cdot 0{,}8)^3=(0{,}8)^{-4}\cdot 2^3\cdot 0{,}8^3=8\cdot(0{,}8)^{-4+3}=$$

$$=8\cdot(0{,}8)^{-1}=8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=8\cdot\frac{5}{4}=10\,.$$

Пример 3.10. Найдите множество значений величины a, для каждого из которых определено выражение

$$\left(a^2-3a+2\right)^{-2/3}\cdot\sqrt{3a-a^2}+\sqrt[5]{\frac{2a-3}{5a-4}}\,.$$

Решение. С учетом определения степени с дробным показателем выражение $\left(a^2-3a+2\right)^{-2/3}$ имеет смысл только при

$$\left(a^2-3a+2\right)>0\Leftrightarrow(a-1)(a-2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<1,\\ a>2.\end{array}\right.$$

Корень квадратный $\sqrt{3a-a^2}$ определён для неотрицательных значений подкоренного выражения, т.е.

$$3a-a^2\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad a(a-3)\le 0\quad\Leftrightarrow\quad 0\le a\le 3\,.$$

Корень нечетной степени $\sqrt[5]{\dfrac{2a-3}{5a-4}}$ определён для всех значений a, кроме $a=\dfrac{4}{5}$. В итоге имеем (рис. 3.4).

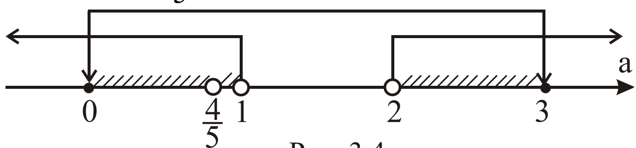


Рис. 3.4

Ответ: $a\in\left[0;\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(2;3]$.

3.7.4. Степень с иррациональным показателем

Невозможно определить степень положительного числа a $(a>0)$ с иррациональным показателем β $(\beta\in\mathbf{I})$ в виде конечной формулы, содержащей радикалы (корни) и степени, как это имело место для рациональных показателей степени. Обусловлено это невозможностью представления иррационального числа в виде обыкновенной дроби.

Для определения степени $a^{\beta}, a \in \mathbf{R}^{+}$, $\beta \in \mathbf{I}$, используют оценку этого числа снизу и сверху степенями с рациональными показателями того же числа a.

Определение 3. *Степенью* a^{β} *положительного числа* a *с иррациональным показателем* β *называют такое действительное число, которое обозначается* a^{β} *и удовлетворяет следующим условиям:*

а) если $a > 1$*, то для любых рациональных чисел* b_1, b_2*, таких, что* $b_1 < \beta < b_2$*, выполняется неравенство* $a^{b_1} < a^{\beta} < a^{b_2}$*;*

б) если $0 < a < 1$*, то для любых* $b_1, b_2 \in \mathbf{Q}$ *и удовлетворяющих условию* $b_1 < \beta < b_2$*, выполняется неравенство*

$$a^{b_2} < a^{\beta} < a^{b_1}.$$

В курсе математического анализа доказывается, что такое число a^{β} существует и что оно единственно для каждой пары чисел $a \in \mathbf{R}_{+}$ и $\beta \in \mathbf{I}$.

Так, например, 2^{π} – это такое действительное число, которое удовлетворяет каждому из неравенств

$$2^{3,14} < 2^{\pi} < 2^{3,15};$$
$$2^{3,141} < 2^{\pi} < 2^{3,142};$$
$$2^{3,1415} < 2^{\pi} < 2^{3,1416};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2^{3,14159265} < 2^{\pi} < 2^{3,14159266};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В этой бесконечной цепочке двойных неравенств в качестве рациональных чисел b_1 и b_2 выступают оценки иррационального числа π, взятые соответственно с недостатком (число b_1) и с избытком (число b_2).

Определение степени с рациональным показателем(п. 3.7.3) и с иррациональным показателем (п. 3.7.4) при положительном основании a позволяет говорить о степени действительного числа a $(a>0)$ с действительным показателем x, т.е. a^x.

Пусть $a>0$, $b>0$ и x, y – произвольные действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства степеней с действительными показателями

1. $\mathbf{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$.

2. $\mathbf{a^x : a^y = a^{x-y}}$.

3. $\mathbf{(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}}$.

4. $\mathbf{a^x \cdot b^x = (ab)^x}$.

5. $\mathbf{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$.

6. $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x}$.

Приведённые свойства лежат в основе методов решения многих примеров на вычисление значений числовых выражений и упрощение выражений с переменными. Очень важную роль эти свойства играют при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Пример 3.11. Упростите выражение

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a^{5/4}b^{2/3}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{a\sqrt{a^3}}\right)^2}{\left(\sqrt[5]{a^{3/2}b^4}\right)^{2/3} \cdot \left(\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}\right)^5 \cdot \sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}.$$

Решение. Обозначим дробь буквой A. Допустимые значения переменных: $a>0$ и $b>0$. Используя свойства степеней с дробными и целыми показателями $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{k/\ell} = a^{\frac{n\cdot k}{m\cdot\ell}}$ и др., получаем

$$A = \frac{a^{\frac{5\cdot4}{4\cdot3}} b^{\frac{2\cdot4}{3\cdot3}} a^{\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{4}}}{a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\cdot5}} \cdot b^{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{1\cdot5}{3\cdot3}} \cdot a^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}+\frac{5}{4}} \cdot b^{\frac{8}{9}}}{a^{\frac{1}{5}+\frac{5}{3}+\frac{1}{20}} \cdot b^{\frac{8}{15}+\frac{5}{9}}} =$$

$$= a^{\frac{5}{3}+\frac{5}{4}-\frac{1}{5}-\frac{5}{3}-\frac{1}{20}} \cdot b^{\frac{8}{9}-\frac{8}{15}-\frac{5}{9}} = a \cdot b^{-\frac{1}{5}} = \frac{a}{\sqrt[5]{b}}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{\sqrt[5]{b}}$.

Пример 3.12. Упростите числовое выражение

$$A=\sqrt{19-10\sqrt{3}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}+\sqrt{19+14\sqrt{3}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}\ .$$

Решение.

$$\sqrt{16-8\sqrt{3}}=2\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=2\left|\sqrt{3}-1\right|=2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Используя этот результат, получаем

$$A=\sqrt{19-10\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)}+\sqrt{19+14\sqrt{3}+2\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{21+12\sqrt{3}}\ .$$

Поскольку $A>0$, то возводя равенство в квадрат, находим

$$A^2=21-12\sqrt{3}+2\sqrt{21^2-\left(12\sqrt{3}\right)^2}+21+12\sqrt{3}=$$

$$=42+2\cdot 3\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=48,$$

откуда $A=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

Альтернативный способ упрощения числового выражения $A=\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{21+12\sqrt{3}}$ основан на выделении полных квадратов в составе подкоренных выражений. Если они являются квадратами некоторых числовых выражений, то должны выполняться равенства $a^2+b^2=21$ и $2ab=12\sqrt{3}$ или $ab=6\sqrt{3}$. Рассмотрим возможные варианты представления числа $6\sqrt{3}$ в виде произведения двух чисел:

$$1\cdot 6\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}=2\cdot 3\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}\ .$$

Первые три пары: $a=1$, $b=6\sqrt{3}$; $a=6$, $b=\sqrt{3}$ и $a=2$, $b=3\sqrt{3}$ не подходят, поскольку для каждой из них $a^2+b^2\neq 21$. Четвёртая пара ($a=3$, $b=2\sqrt{3}$) подходит, т.к. в этом случае $a^2+b^2=9+12=21$. В итоге

$$A=\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{3}\right|+\left|3+2\sqrt{3}\right|.$$

Но $\left|3+2\sqrt{3}\right|=3+2\sqrt{3}$, а $\left|3-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}-3$, поскольку $3<2\sqrt{3}$. Окончательно имеем $A=2\sqrt{3}-3+3+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

3.8. Числовые промежутки

Числовые промежутки делятся на:

- конечные или ограниченные;
- бесконечные или неограниченные.

1. Конечные (ограниченные) промежутки:

$[a;\, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, a \le x \le b\}$ – отрезок или сегмент;

$[a; b) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, a \le x < b\}$ – полуотрезок или полуинтервал;

$(a;\, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, a < x \le b\}$ – полуотрезок или полуинтервал;

$(a;\, b) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, a < x < b\}$ – интервал.

2. Бесконечные (неограниченные) промежутки:

$[a; +\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, x \ge a\}$ – замкнутый луч (замкнутая полупрямая);

$(a; +\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, x > a\}$ – открытый луч (открытая полупрямая);

$(-\infty; b] \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, x \le b\}$ – замкнутый луч (замкнутая полупрямая);

$(-\infty; b) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbf{R},\, x < b\}$ – открытый луч (открытая полупрямая);

$(-\infty; +\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}$ – числовая прямая (множество действительных чисел).

Длина каждого из конечных промежутков $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;b)$ равна $b-a$.

3.9. Модуль действительного числа

3.9.1. Простейшие уравнения и неравенства с модулем

Определение. *Модулем действительного числа* a *называется неотрицательное число, обозначаемое* $|a|$ *и определяемое как*

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Основные свойства модуля: $\forall a,\ b \in \mathbf{R}$.

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.　　2. $|a+b| \le |a| + |b|$.

3. $|a-b| \le |a| + |b|$.　　4. $|a-b| \ge |a| - |b|$.

5. $|a+b| \ge |a| - |b|$.

В частности, $|-a| = |a|$ и потому $|a-b| = |b-a|$, $|-a-b| = |a+b|$. Отметим также, что $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, и что $\forall\, a \in \mathbf{R}$: $-|a| \le a \le |a|$.

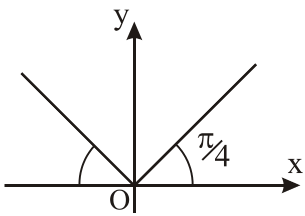


Рис. 3.5

График функции $y = |x|$ изображен на рис. 3.5. Простейшее уравнение с модулем $|x - x_0| = a$, где x_0, a – заданные действительные числа, при $a \ge 0$ равносильно, в соответствии с определением (3.6), каждой из совокупностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-x_0=a,\\ x-x_0\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-(x-x_0)=a,\\ \quad x-x_0<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-x_0=a,\\ x-x_0=-a;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_0+a,\\ x=x_0-a.\end{array}\right.$$

Таким образом, решением уравнения $|x-x_0|=a$ являются два числа $x_1=x_0-a$, $x_2=x_0+a$, удалённые на одинаковое расстояние от точки x_0.

Отмеченное свойство решений уравнения $|x-x_0|=a$ подсказывает ещё один способ его решения. Он основан на определении расстояния $\rho(x_1,x_2)$ между двумя точками x_1 и x_2 на числовой прямой. По определению

$$\rho(x_1,x_2)\overset{\mathrm{def}}{=}|x_2-x_1|. \tag{3.7}$$

С учетом этого определения решение уравнения $|x-x_0|=a$ заключается в поиске точек $x\in\mathbf{R}$ таких, что расстояние от каждой из них до точки x_0 равно a, т.е. $\rho(x,x_0)=a$.

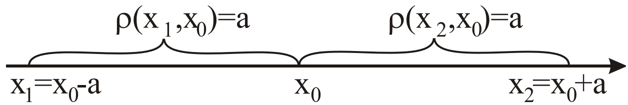


Рис. 3.6

Достаточно очевидно (рис. 3.6), что этими точками являются $x_1=x_0-a$ и $x_2=x_0+a$.

Решим неравенство $|x-x_0|<a$. В соответствии с определением модуля действительного числа имеем

$$|x-x_0|<a \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-x_0<a,\\ x-x_0\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-(x-x_0)<a,\\ \quad x-x_0<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x-x_0<a,\\ x-x_0>-a.\end{cases}$$

Последнюю систему неравенств можно записать в виде двойного неравенства

$$-a < x - x_0 < a \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - a < x < x_0 + a\,.$$

Таким образом, решением неравенства $|x - x_0| < a$ является интервал $(x_0 - a; x_0 + a)$ с центром в точке x_0 и радиусом a.

Графический метод решения неравенства

$$|x - x_0| < a$$

заключается в построении графиков функций

$$y_1 = |x - x_0|,\ y_2 = a$$

и в выделении множества точек $\{x\}$, в которых $y_1(x) < y_2$ (график функции $y_1(x)$ расположен ниже прямой $y_2 = a$, рис. 3.7).

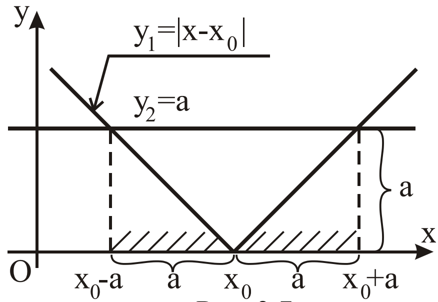


Рис. 3.7

Неравенство $|x - x_0| < a$ можно записать в равносильной форме $\rho(x, x_0) < a$. Решить неравенство $\rho(x, x_0) < a$ – значит найти все точки $\{x\}$, расстояние от каждой из которых до точки x_0 меньше a. Достаточно очевидно, что этим множеством является интервал $(x_0 - a; x_0 + a)$ (рис. 3.8).

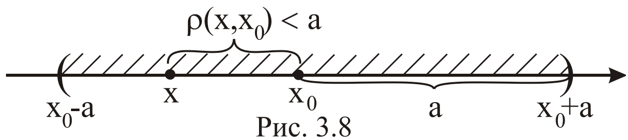


Рис. 3.8

В курсе математического анализа интервал с центром в точке x_0 и радиусом ε называется ε-окрестностью (эпсилон-окрестностью) точки x_0 и обозначается $U(x_0, \varepsilon)$ или $U_\varepsilon(x_0)$, а также $O_\varepsilon(x_0)$:

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \,|\, |x - x_0| < \varepsilon,\ x \in \mathbf{R}\}.$$

Здесь U – первая буква немецкого слова umgebung – окрестность.

Простейшие уравнения и неравенства с модулем и отвечающие им решения:

$|x-x_0|=a \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_0-a,\, x_2=x_0+a$;

$|x-x_0|<a \quad \Leftrightarrow \quad -a<x-x_0<a \quad \Leftrightarrow \quad x\in(x_0-a;\, x_0+a)$;

$|x-x_0|\le a \quad \Leftrightarrow \quad -a\le x-x_0\le a \quad \Leftrightarrow \quad x\in[x_0-a;\, x_0+a]$;

$$|x-x_0|>a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0>a, \\ x-x_0<-a; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$x\in(-\infty;\, x_0-a)\cup(x_0+a;+\infty);$$

$$|x-x_0|\ge a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-x_0\ge a, \\ x-x_0\le -a; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$x\in(-\infty;\, x_0-a]\cup[x_0+a\,;+\infty).$$

3.9.2. Уравнения и неравенства с модулем

Пример 3.13. Решите уравнение

$$|x+2|+|x-3|=a$$

для трёх значений параметра a: $a=3$, $a=5$ и $a=7$.

Решение. Способ 1. Аналитический. Нули выражений, находящихся под знаком модуля $(x=-2,\, x=3)$, разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;-2)$, $[-2;3)$, $[3;+\infty)$. Рассмотрим уравнение на каждом из этих промежутков:

1) $x<-2$. Тогда $|x+2|=-x-2$, $|x-3|=3-x$, и потому получаем $-x-2+3-x=a \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1-a}{2}$.

$a=3$: $\quad x=\dfrac{1-3}{2}=-1, \quad x\notin(-\infty,-2)$;

$a = 5: \quad x = \dfrac{1-5}{2} = -2, \quad x \notin (-\infty, -2);$

$a = 7: \quad x = \dfrac{1-7}{2} = -3, \quad x \in (-\infty, -2).$

Таким образом, на промежутке $(-\infty; -2)$ исходное уравнение имеет решение $x = -3$ только при $a = 7$;

2) $-2 \le x < 3$. На этом промежутке $|x + 2| = x + 2$, $|x - 3| = 3 - x$ потому

$$x + 2 + 3 - x = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 5.$$

Данное неравенство является верным только при $a = 5$. Поэтому на промежутке $[-2; 3)$ исходное уравнение имеет решение при $a = 5$, причем решением являются все $x \in [-2; 3)$;

3) $x \ge 3$. Здесь $|x + 2| = x + 2$, $|x - 3| = x - 3$ и

$$x + 2 + x - 3 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+1}{2};$$

$a = 3: \quad x = \dfrac{3+1}{2} = 2, \quad x \notin [3; +\infty);$

$a = 5: \quad x = \dfrac{5+1}{2} = 3, \quad x \in [3; +\infty);$

$a = 7: \quad x = \dfrac{7+1}{2} = 4, \quad x \in [3; +\infty).$

На рассматриваемом промежутке $[3; +\infty)$ решения имеют уравнения $|x + 3| + |x - 2| = 5$, $x = 3$ и $|x + 3| + |x - 2| = 7$, $x = 4$.

Объединяя результаты пунктов 1, 2, 3, получаем итоговый результат.

Ответ: $a = 3: \quad \varnothing$ (нет решения); $\quad a = 5: \quad x \in [-2; 3]$;
$a = 7: \quad x_1 = -3; x_2 = 4.$

Способ 2. Графический. Введём в рассмотрение функцию $y(x)=|x+2|+|x-3|$ и построим её график. Поскольку $y_1 = x+2$ и $y_2 = x-3$ – линейные функции, то кусочно-линейной будет функция $y(x)$. Поэтому для построения графика этой функции достаточно вычислить её значения в точках «излома» – в нулях подмодульных выражений: $y(-2)=5$, $y(3)=5$. При $x<-2$ $y=-2x+1$, т.е. угловой коэффициент $k=-2$ и изменению x на 1 соответствует изменение y на 2 единицы. Поэтому $y(-3)=5+2=7$. Аналогично при $x>2$: $y=2x-1$, $k=2$ и $y(4)=5+2=7$.

График функции $y(x)$ приведён на рис. 3.9. С учётом введённого обозначения исходное уравнение приняло вид $y(x)=a$ и теперь его решение заключается в нахождении значений x, при которых графики функций $y(x)$ и $y=a$ имеют общие точки. При $a=3$ графики обеих функций не имеют общих точек, при $a=5$ они совпадают на отрезке AB, т.е. для всех $x\in[-2;3]$, при $a=7$ – пересекаются в точках $C\left(x_1=-3\right)$ и $D\left(x_2=4\right)$.

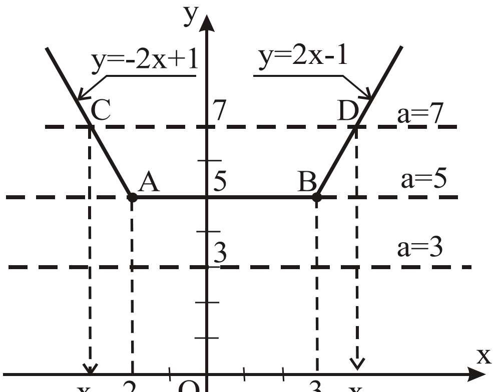


Рис. 3.9

Способ 3. Основан на использовании понятия расстояния между двумя точками на числовой прямой.

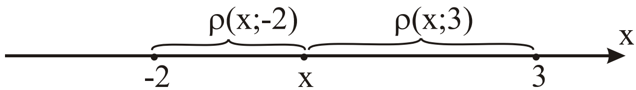


Рис. 3.10

В соответствии с условием задачи необходимо найти такие точки x на числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых (рис. 3.10) до точек (-2) и 3 равна a, т.е.

$$\rho(x;-2)+\rho(x;3)=a.$$

Из рис. 3.10 следует, что для любой точки x, $x\in[-2;3]$ сумма расстояний от нее до точек $x=-2$ и $x=3$ соответственно равна $\rho(x,-2)+\rho(x,3)=5$, а для любой точки x, лежащей вне отрезка $[-2;3]$ ($x\in\mathbf{R}\setminus[-2;3]$), эта сумма больше 5: $\rho(x,-2)+\rho(x,3)>5$ (рис. 3.11).

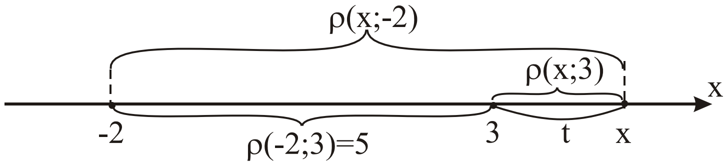


Рис. 3.11

Таким образом, $\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow\rho(x,-2)+\rho(x,3)\geq 5$. Поэтому уравнение $\rho(x,-2)+\rho(x,3)=a$ при $a<5$ и, в частности, при $a=3$, не имеет решений, при $a=5$, как уже установлено, решением являются все точки отрезка $[-2;3]$.

При $a=7$ уравнению $\rho(x,-2)+\rho(x,3)=7$ будут удовлетворять два значения x, расположенные на одинаковом расстоянии от точек $x=3$ и $x=-2$. Обозначим $\rho(x,3)=t$ при $x>3$ (рис.3.8). Тогда $\rho(x,-2)=\rho(-2,3)+\rho(x,3)=5+t$ и уравнение примет вид $t+5+t=7$, откуда $t=1$. Имеем $\rho(x,3)=1$ при $x>3$, т.е. $|x-3|=x-3=1 \quad\Rightarrow\quad x=4$. Аналогично находим $\rho(x,-2)=1$ при $x<-2$ или $|x+2|=-2-x=1 \quad\Rightarrow\quad x=-3$.

Способ 4. Графический. Уравнение $|x+2|+|x-3|=a$ можно переписать в равносильной форме $|x+2|=a-|x-3|$.

Введём в рассмотрение функции $y_1(x) = |x+2|$ и $y_2(x) = a - |x-3|$. Построим графики этих функций при $a = 3, 5, 7$ (рис. 3.12, рис. 3.13, рис. 3.14).

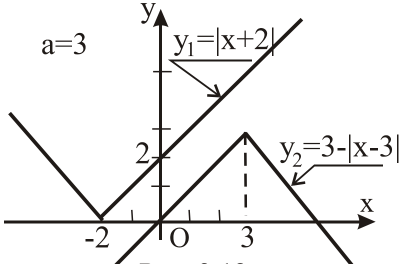


Рис. 3.12

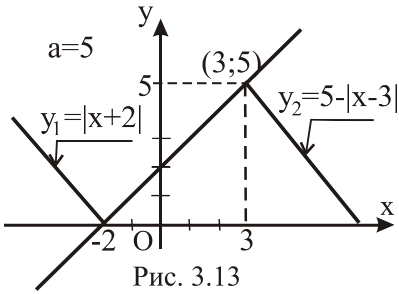


Рис. 3.13

Обратим внимание на то, что разноимённые (левые и правые) ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ параллельны. Из рис. 3.12 следует, что при $a = 3$ графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не имеют общих точек. При $a = 5$ (рис. 3.13) они совпадают для всех $x \in [-2; 3]$. При $a = 7$ графики функций $y_1(x)$

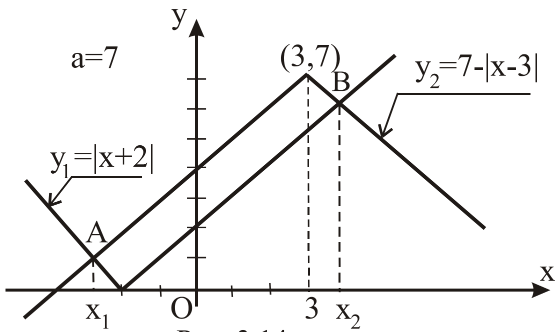


Рис. 3.14

и $y_2(x)$ пересекаются в двух точках A и B с абсциссами x_1 и x_2 соответственно. В точке A пересекаются левые ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поэтому $|x+2| = -x-2$ и $|x-3| = 3-x$. Из уравнения $-x-2 = 7-(3-x)$ находим $x_1 = -3$. В точке B пересекаются правые ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поэтому $|x+2| = x+2$ и $|x-3| = x-3$. Из уравнения $x+2 = 7-(x-3)$ находим $x_2 = 4$.

Ответ: $a=3:\varnothing$; $a=5:x\in[-2;3]$; $a=7:x_1=7, x_2=4$.

Пример 3.14. Найдите площадь множества точек D, все точки $(x;y)$ которого удовлетворяют неравенству

$$|x|+3|y|\le 6.$$

Решение. Для всех допустимых x и y $(|x|\le 6, |y|\le 2)$, $|-x|=|x|$, $|-y|=|y|$. Поэтому искомое множество D является симметричным относительно обеих осей $0x$ и $0y$. Отсюда следует, что достаточно построить часть D_1 этого множества, расположенную, например, в 1-й четверти

$$D_1:\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ x+3y\le 6, \end{cases}$$

отобразить его симметрично относительно оси $0x$ (оси $0y$), а затем полученное множество D_2 отобразить симметрично относительно оси $0y$ (оси $0x$) из правой (из верхней) полуплоскости в левую (в нижнюю) полуплоскость.

Множества D_1, D_2 и D приведены на рис. 3.15, рис. 3.16 и рис. 3.17 соответственно.

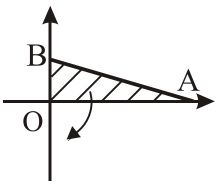


Рис. 3.15
Множество D_1

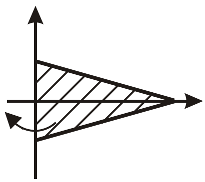


Рис. 3.16
Множество D_2

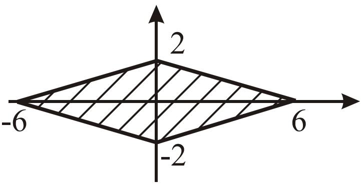


Рис. 3.17
Множество D

Множество D – ромб с диагоналями $d_1=12$ и $d_2=4$. Поэтому $S_D=\dfrac{1}{2}12\cdot 4=24$.

Ответ: 24.

Пример 3.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-4|x|-6|y|+9=0, \\ y=x-a \end{cases} \qquad (3.8)$$

имеет три различных решения.

Решение. Сначала преобразуем первое уравнение. Учтем, что $x^2=|x|^2$ и $y^2=|y|^2$. Выделим в левой части первого уравнения полные квадраты по обеим переменным:

$$\left(|x|^2-4|x|+4\right)+\left(|y|^2-6|y|+9\right)=4$$

или

$$\left(|x|-2\right)^2+\left(|y|-3\right)^2=4.$$

Данное уравнение определяет на координатной плоскости четыре окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, каждая радиусом 2 и с центрами в точках $(2;3)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$ и $(2;-3)$ соответственно (рис. 3.18).

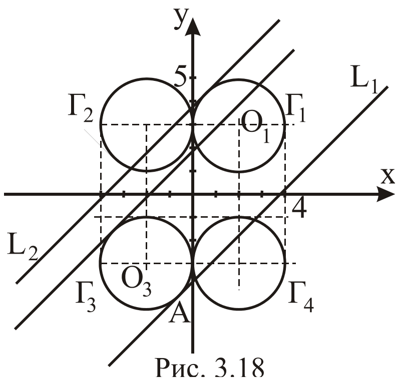


Рис. 3.18

Второе уравнение системы является уравнением семейства параллельных прямых с угловым коэффициентом $k=1$. Анализ взаимного расположения окружностей и прямых на рис. 3.18 позволяет заключить, что условиям задачи отвечают прямые L_1, L_2. Так, прямая L_1 касается окружности Γ_3 в точке A и пересекает окружность Γ_4 в двух точках, т.е. у данной прямой и окружностей три различных общих точки. Достаточно очевидно, что прямые L_1 и L_2 отсекают на оси ординат отрезки одинаковой длины. Поэтому достаточно найти значение параметра a, отвечающее L_1 или L_2. Пусть это будет прямая L_1.

Рассмотрим четыре различных способа продолжения решения примера.

Способ 1. Уравнение окружности Γ_3 имеет следующий вид (на Γ_3 $|x| = -x$, $|y| = -y$):

$$(-x-2)^2 + (-y-3)^2 = 4, \quad \text{или} \quad (x+2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

Система уравнений (3.8), будет иметь три различных решения тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = 4, \\ y = x - a, \end{cases}$$

имеет единственное решение и при этом $a > 3$. Данная система уравнений равносильна каждому из уравнений

$$(x+2)^2 + (x-a+3)^2 = 4,$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 + a^2 + 9 - 2ax + 6x - 6a - 4 = 0,$$

$$2x^2 + 2(5-a)x + a^2 - 6a + 9 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение, в свою очередь, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю, т.е.

$$(a-5)^2 - 2(a^2 - 6a + 9) = 0,$$

или

$$a^2 - 2a - 7 = 0.$$

Находим корни последнего уравнения:

$$a_1 = 1 + 2\sqrt{2} \text{ и } a_2 = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Условию $a > 3$ удовлетворяет первый корень. Таким образом,

$$a_{\text{наиб}} = 1 + 2\sqrt{2}, \quad \text{а} \quad a_{\text{наим}} = -1 - 2\sqrt{2}.$$

Способ 2. Основан на использовании формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой L: $ax + by + c = 0$

$$\rho(M_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c = 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3.9}$$

В данном случае (рис. 3.19) $\rho(O_3, L_1) = |\overline{O_3A}| = 2$.

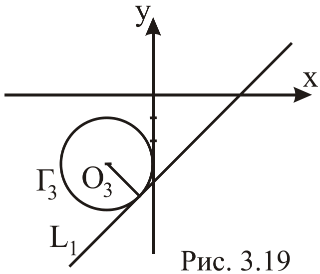


Рис. 3.19

При этом:

$$L_1 : x - y - a = 0,\ O_3(-2; -3).$$

В соответствии с формулой (3.9) получаем уравнение относительно параметра a .

$$2 = \frac{|-2-(-3)-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}},$$

или $|a-1| = 2\sqrt{2}$. Откуда $a = 1+2\sqrt{2}$ или $a = 1-2\sqrt{2}$. С учетом ограничения $a > 3$ получаем, что искомое значение $a = 1+2\sqrt{2}$. Это наибольшее значение параметра a, при котором исходная система уравнений имеет три различных решения [прямая L_1 касается окружности Γ_3 в точке A и пересекает окружность Γ_4 в двух точках (рис. 3.18)].

Способ 3. **Графический**. Прямая $L_1 : y = x - a$ образует угол 45° с положительным направлением оси Ox. Проведем через точку O_3 (центр окружности Γ_3) прямые, параллельные координатным осям (рис. 3.20). Получим равнобедренный прямоугольный треугольник AO_3B .

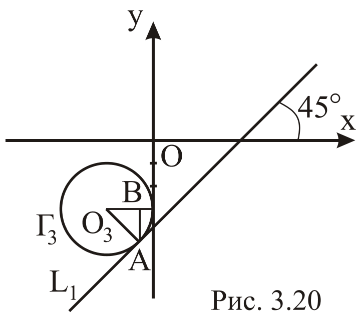


Рис. 3.20

Его гипотенуза равна радиусу окружности, т.е. $AO_3 = 2$, а катеты $BO_3 = AB = \sqrt{2}$. В результате легко находятся координаты точки A: $x_A = -2+\sqrt{2}$, $y_A = -3-\sqrt{2}$. Подставив эти значения в уравнение прямой L, получим $-3-\sqrt{2} = -2+\sqrt{2}-a$. Откуда $a = 1+2\sqrt{2}$.

Способ 4. Данный способ основан на использовании необходимых и достаточных условий касания графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой точке x_0:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0). \end{cases} \tag{3.10}$$

Прямая L_1 касается в точке A нижней дуги окружности Γ_3. Уравнение этой дуги $y=-3-\sqrt{4-(x+2)^2}$ или $y=-3-\sqrt{-x^2-4x}$. Условия (3.10) в нашем случае примут следующий вид

$$\begin{cases} x-a=-3-\sqrt{-x^2-4x}, \\ 1=\dfrac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Решим второе уравнение системы (3.11). Имеем

$$\sqrt{-x^2-4x}=x+2.$$

Возводя в квадрат обе части данного уравнения при условии $x+2\geq 0$, получаем квадратное уравнение $x^2+4x+2=0$. Его корни: $x_1=-2-\sqrt{2}$, $x_2=-2+\sqrt{2}$. Условию $x\geq -2$ удовлетворяет второй корень. Из первого уравнения системы находим $a=-2+\sqrt{2}+3+\left(-2+\sqrt{2}+2\right)$ или $a=1+2\sqrt{2}$.

Ответ: $a_{\text{наиб}}=1+2\sqrt{2}$, $a_{\text{наим}}=-1-2\sqrt{2}$.

Комментарии к решениям примера 3.14. *Наиболее простыми, очевидно, являются второй и третий способы. Однако они применимы, как правило, лишь в тех случаях, когда в состав системы входит линейное уравнение, задающее на плоскости прямую. Первый способ применим при условии, что задача сводится к поиску единственного решения квадратного уравнения, коэффициенты которого являются функциями параметра. Заметим, что задачи с такими свойствами достаточно часто встречаются на экзаменах.*

Наибольшей общностью обладает последний, четвертый способ. Правда, система уравнений (3.10), на которой он основывается, в реальных задачах, как правило, оказывается нелинейной. Достаточно заменить второе уравнение системы (3.8) на уравнение гиперболы, чтобы убедиться в этом. Незначительные, на первый взгляд, изменения существенно повышают сложность задачи. Такой, например, является задача - найти значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4|x| - 6|y| + 9 = 0, \\ xy = a \end{cases}$$

имеет два различных решения. Первые три способа здесь уже не применимы. Четвертый способ “работает”, но приводит к сложной нелинейной системе уравнений.

Среди задач с модулем для самостоятельной работы (глава 7, раздел 5) содержится аналогичный пример 5.25. Его удобно решать с помощью четвертого метода, хотя при этом придется преодолевать затруднения, обусловленные нелинейностью получающейся системы уравнений (3.10).

ГЛАВА IV

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

4.1. Метод математической индукции

Метод математической индукции является универсальным средством доказательства многих математических утверждений $A(n)$ относительно натурального аргумента n. Например,

$$A_1(n):\ \forall n \in \mathbf{N}\left(1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2\right),$$

или

$$A_2(n):\ \forall n \in \mathbf{N}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

Суть метода математической индукции заключается в следующем. Если некоторое утверждение $A(n)$, $n \in \mathbf{N}$, справедливо при $n=1$, то предполагая, что оно справедливо для некоторого произвольного $n=k$, $k>1$, доказываем его справедливость при $n=k+1$. Если это удаётся доказать, то утверждение $A(n)$ справедливо для любого натурального числа n.

Алгоритм метода математической индукции:

1. Проверяем справедливость утверждения $A(1)$, т.е. утверждения $A(n)$ при $n=1$. Это ***база индукции***.

2. Предполагаем справедливость $A(n)$ для некоторого произвольного $k \in \mathbf{N}$.

3. Доказываем справедливость утверждения $A(k+1)$. Это ***индукционный переход***.

Пример 4.1. Докажите тождество

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbf{N}.$$

Решение. 1. Проверим базу индукции. $n=1$: $1^2=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, $1=1$. База индукции установлена , переходим к шагу 2 алгоритма.

2. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (индукционное предположение).

3. Используя индукционное предположение, докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6(n+1)\right) = \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Утверждение доказано.

Пример 4.2. Докажем, что $\forall n \in \mathbf{N}\ \left(10^n + 18n - 1\right) \vdots\, 27$.

Решение. 1. $n = 1$: $10 + 18 \cdot 1 - 1 = 27$, $27 \vdots\, 27$.

2. Допустим, что $\left(10^n + 18n - 1\right) \vdots\, 27$ при некотором произвольном $n \in \mathbf{N}$.

3. Докажем, что число $\left(10^{n+1} + 18(n+1) - 1\right) \vdots\, 27$.

Имеем

$$10^{n+1} + 18(n+1) - 1 = 10\left(10^n + 18n - 1\right) - 10 \cdot 18n + 10 + 18n + 17 =$$

$$= 10\left(10^n + 18n - 1\right) - 162n + 27 = 10\left(10^n + 18n - 1\right) - 27(6n - 1).$$

Первое слагаемое делится на 27 по индукционному предположению, второе содержит множитель 27 и потому также делится на 27. Это означает, что утверждение доказано.

Пример 4.3 ***(неравенство Бернулли).***

$\forall x \in \mathbf{R}\ (x \geq -1)\ \forall n \in \mathbf{N}$, справедливо неравенство

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.1}$$

Доказательство.

1. $n = 1$: $1 + x = 1 + x$.

2. Допустим, что неравенство (4.1) выполняется для некоторого произвольного $n \in \mathbf{N}$.

3. Докажем, что и при $n := n + 1$ справедливо неравенство

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x. \tag{4.2}$$

Поскольку $1 + x \geq 0$, то, умножив обе части неравенства (4.1) на $(1 + x)$, получим верное неравенство

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x),$$

в котором

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Таким образом, утверждение $A(n + 1)$ доказано и тем самым доказано неравенство Бернулли (4.1). ■

Замечание. *Индукционный переход в данном примере (шаг 3 доказательства) осуществлен от n к* $(n + 1)$. *Запись* $n := n + 1$ *означает присваивание переменной n значения* $(n + 1)$.

Доказанное в примере 4.1 тождество можно ***вывести***, причём не одним способом. Приведём способ вывода этого и подобного им тождеств, обладающий достаточно большой степенью общности. Он основывается на известном утверждении.

Теорема 4.1. *Существует единственный многочлен*

$$Q_{m+1}(n) = b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_{m+1} n^{m+1} \tag{4.3}$$

такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(k) = Q_{m+1}(n),$$

где $P_m(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_m k^m$ *– заданный многочлен.*

В частности, каждая сумма $S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ является многочленом (4.3) степени $(m+1)$ относительно параметра n – верхнего предела суммирования.

Неизвестные коэффициенты $b_1, b_2, ..., b_{m+1}$ многочлена $Q_{m+1}(n)$ находятся методом неопределённых коэффициентов. Рассмотрим содержание и технологию этого метода на двух примерах.

Пример 4.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Решение. Обозначим $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$. В соответствии с теоремой 4.1 существует многочлен

$$Q_3(n) = An + Bn^2 + Cn^3$$

такой, что $S_2(n) = Q_3(n)$, т.е.

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = An + Bn^2 + Cn^3. \qquad (4.4)$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$, то согласно (4.4)

$$S_2(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = A(n+1) + B(n+1)^2 + C(n+1)^3. \qquad (4.5)$$

Вычтем из равенства (4.5) равенство (4.4)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= A(n+1-n) + B\left((n+1)^2 - n^2\right) + C\left((n+1)^3 - n^3\right)$$

или
$$(n+1)^2 = A + B(2n+1) + C\left(3n^2 + 3n + 1\right),$$

$$n^2 + 2n + 1 = 3C \cdot n^2 + (2B + 3C) \cdot n + (A + B + C).$$

Используя условие равенства двух многочленов, получаем систему уравнений

$$n^2: \quad 1 = 3C,$$

$$n: \quad 2 = 2B + 3C,$$

$$n^o: \quad 1 = A + B + C.$$

Решая эту систему, находим последовательно $C = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{6}$.

Подставив найденные значения коэффициентов A, B, C в (4.4), получим окончательно

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{n\left(1 + 3n + n^2\right)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Пример 4.5. Найдите сумму

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2).$$

Решение. Обозначим $S_3(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$. В соответствии с теоремой 4.1

$$S_3(n) = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 \tag{4.6}$$

$$S_3(n+1) \equiv \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= A(n+1) + B(n+1)^2 + C(n+1)^3 + D(n+1)^4. \tag{4.7}$$

Вычитая из равенства (4.7) равенство (4.6), получаем тождество

$$(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= A(n+1-n) + B\left((n+1)^2 - n^2\right) + C\left((n+1)^3 - n^3\right) + D\left((n+1)^4 - n^4\right)$$

или

$$n^3 + 6n^2 + 11n + 6 =$$

$$= D\left(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\right) + C\left(3n^2 + 3n + 1\right) + B(2n+1) + A.$$

Из данного тождества и условия равенства двух многочленов получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} n^3 &: \ 1 = 4D, \\ n^2 &: \ 6 = 6D + 3C, \\ n &: \ 11 = 4D + 3C + 2B, \\ n^o &: \ 6 = D + C + B + A. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдём $D = \frac{1}{4}$, $C = \frac{3}{2}$, $B = \frac{11}{4}$, $A = \frac{3}{2}$.

В соответствии с (4.6)

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n^4}{4} + \frac{3}{2}n^3 + \frac{11}{4}n^2 + \frac{3}{2}n,$$

или после преобразования

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Ответ: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Задачи, связанные с вычислением сумм вида $\sum_{k=1}^{n} P_m(k)$, $n \in \mathbf{N}$, где $P_m(k)$– многочлен степени m с действительными коэффициентами, возникают в различных разделах математики: в анализе временных рядов, при определении вычислительной эффективности (числа медленных и быстрых операций) конкретного численного алгоритма.

4.2. Бином Ньютона

Теорема 4.2. $\forall a, b \in \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ *справедлива* ***формула Ньютона***[1]

$$(a+b)^n = C_n^o a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \tag{4.8}$$

Или в компактной форме с использованием знака суммы $\sum$:

[1] Ньютон Исаак (Newton Isaac, 1643 – 1727) – английский физик и математик, разработал наряду с Готфридом Лейбницем основы дифференциального и интегрального исчислений, развил теорию степенных рядов, доказал теорему о биноме Ньютона.

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,$$

где $C_n^k=\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-k+1\right)}{k!}$, $k=1,2,\ldots,n$ (4.9)

– биномиальные коэффициенты, при этом по определению полагают $C_n^o=1$.

Биномиальные коэффициенты можно находить также по формуле (см. п.4.3.3)

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!},\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

где по определению $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$, а $0!=1$.

Справедливость формулы (4.8) – бинома Ньютона – доказывается, как правило, методом математической индукции. Предлагаем читателю самостоятельно провести доказательство формулы (4.8) методом математической индукции.

Мы же рассмотрим альтернативный методу математической индукции способ ***вывода*** формулы (4.8).

Поскольку $\left(a+b\right)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ *при* $a\neq0$*, то достаточно вывести формулу*

$$\left(1+h\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k h^k. \tag{4.10}$$

Очевидно, что выражение $\left(1+h\right)^n$ *является многочленом* n*-й степени относительно* h. *Введём обозначения*

$$S_n\equiv\left(1+h\right)^n=a_0^{(n)}+a_1^{(n)}h+a_2^{(n)}h^2+\ldots+a_n^{(n)}h^n,$$

(4.11)

$$S_{n+1}\equiv\left(1+h\right)^{n+1}=a_0^{(n+1)}+a_1^{(n+1)}h+a_2^{(n+1)}h^2+\ldots+a_{n+1}^{(n+1)}h^{n+1}.$$

В (4.11) $a_i^{(n)}$ $i=0,1,\ldots,n$*, и* $a_i^{(n+1)}$ $i=0,1,\ldots,n,n+1$*, – неопределённые коэффициенты, подлежащие определению.*

Поскольку $S_{n+1} = S_n \cdot (1+h)$*, то с учётом тождеств (4.11) получаем*

$$a_0^{(n+1)} + a_1^{(n+1)}h + a_1^{(n+1)}h^2 + \ldots + a_n^{(n+1)}h^n + a_{n+1}^{(n+1)}h^{n+1} =$$
$$= a_0^{(n)} + \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\right)h + \left(a_1^{(n)} + a_2^{(n)}\right)h^2 + \ldots +$$
$$+ \left(a_{n-1}^{(n)} + a_n^{(n)}\right)h^n + a_n^{(n)}h^{n+1}.$$

Отсюда, используя условие равенства двух многочленов (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях h*), получаем рекуррентные формулы*

$$\begin{aligned}
&h^{n+1}: \ a_{n+1}^{(n+1)} = a_n^{(n)}, \\
&h^n \ : \ a_n^{(n+1)} = a_{n-1}^{(n)} + a_n^{(n)}, \\
&h^{n-1}: \ a_{n-1}^{(n+1)} = a_{n-2}^{(n)} + a_{n-1}^{(n)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h^2 \ : \ a_2^{(n+1)} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)}, \\
&h \ : \ a_1^{(n+1)} = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}, \\
&h^0 \ : \ a_0^{(n+1)} = a_0^{(n)}.
\end{aligned} \qquad (4.12)$$

При $n=1$ *имеем* $(1+h)^1 = 1+h$*, и потому* $a_0^{(1)} = 1$*,* $a_1^{(1)} = 1$.

Теперь находим последовательно по рекуррентным формулам (4.12), двигаясь снизу вверх:

$n=2$: $a_0^{(2)} = a_0^{(1)} = 1$, $a_1^{(2)} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} = 1+1 = 2$, $a_2^{(2)} = a_1^{(1)} = 1$;

$n=3$: $a_0^{(3)} = a_0^{(2)} = 1$, $a_1^{(3)} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} = 1+2 = 3$,
$a_2^{(3)} = a_1^{(2)} + a_2^{(2)} = 2+1 = 3$, $a_3^{(3)} = a_2^{(2)} = 1$;

$n=4$: $a_0^{(4)} = 1$, $a_1^{(4)} = a_0^{(3)} + a_1^{(3)} = 1+3 = 4$,
$a_2^{(4)} = a_1^{(3)} + a_2^{(3)} = 3+3 = 6$, $a_3^{(4)} = a_2^{(3)} + a_3^{(3)} = 3+1 = 4$,
$a_4^{(4)} = a_3^{(3)} = 1$

и т.д.

Нетрудно видеть, что для произвольного $n \in \mathbf{N}$ $a_0^{(n)} = 1$*, а каждый последующий коэффициент* $a_k^{(n)}$*,* $k = 1,2,\ldots,n-1$ *(кроме* $a_n^{(n)}$*,* $a_n^{(n)} = 1$*), равен сумме двух соседних коэффициентов из предыдущей строки, а именно*

$$a_k^{(n)} = a_{k-1}^{(n-1)} + a_k^{(n-1)},\ k = 1,2,\ldots,n-1. \tag{4.13}$$

Коэффициент $a_n^{(n)}$ *равен* 1 *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

Если записать результаты вычисления биномиальных коэффициентов построчно для $n = 0, 1, 2, \ldots$*, то получим хорошо известную форму представления биномиальных коэффициентов в виде треугольника Паскаля*

$$\begin{array}{ll}
n=0: & 1\\
n=1: & 1\quad 1\\
n=2: & 1\quad 2\quad 1\\
n=3: & 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
n=4: & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
n=5: & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
n=6: & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Легко проверить, что коэффициенты в каждой строчке треугольника Паскаля совпадают с коэффициентами C_n^k*, вычисляемыми по формуле (4.9). Например, для* $n = 6$ *имеем*

$C_6^0 = 1$; $C_6^1 = \dfrac{6}{1} = 6$; $C_6^2 = \dfrac{6\cdot 5}{2!} = 15$;

$C_6^3 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$,

$C_6^4 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15$, $C_6^5 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!} = 6$, $C_6^6 = 1$.

Таким образом, коэффициенты $a_k^{(n)}$ *являются биномиальными коэффициентами* C_n^k*, т.е.* $a_k^{(n)} = C_n^k$*. Из формулы (4.12) сразу же получаем известную формулу*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \tag{4.14}$$

Из (4.10) и рекуррентных формул (4.12) с учётом (4.13) и (4.14) получаем окончательно

$$(1+h)^n = 1 + \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right)h + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right)h^2 + \ldots +$$
$$+ \left(C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\right)h^{n-1} + 1 \cdot h^n =$$
$$= 1 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + \ldots + C_n^{n-1} h^{n-1} + h^n,$$

что и требовалось доказать. ■

Отметим ещё некоторые свойства биномиальных коэффициентов

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$. (4.15)

Действительно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ а } C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2) $C_n^o + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. (4.16)

Это равенство получается моментально из формулы (4.10), если в ней принять $h = 1$.

$$(1+1)^n \equiv 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Пример 4.6. Решите уравнение

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^5 + y^5 = 242. \end{cases}$$

Решение. Возведём обе части первого уравнения в пятую степень. В соответствии с формулой бинома Ньютона (4.8) получаем

$$(x+y)^5 \equiv x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = 32.$$

Вычтем из полученного уравнения второе уравнение системы

$$5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = -210.$$

Преобразуем это уравнение с учётом первого уравнения системы

$$xy\left(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3\right) = -42,$$

$$xy\left((x+y)^3 - xy(x+y)\right) = -42,$$

$$xy\left(2^3 - 2xy\right) = -42.$$

Обозначив $xy = t$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 4t - 21 = 0.$$

Его корни $t = -3$ и $t = 7$, т.е. $xy = -3$ или $xy = 7$.

Решив системы

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 7, \end{cases}$$

получим, что первая система имеет решения $x = 3$, $y = -1$ и $x = -1$, $y = 3$, а вторая система не имеет действительных решений.

Ответ: $x = 3$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 3$.

4.3. Элементы комбинаторики

4.3.1. Правила комбинаторики

Включение в программу средней школы основ теории вероятностей и математической статистики естественным образом привело к необходимости изучения в школе элементов комбинаторики.

Комбинаторика[1] *– раздел математики, в котором изучаются задачи о способах формирования групп (комбинаций) элементов в соответствии с заданными правилами из некоторого*

---

[1] Комбинаторика – лат. combinare – соединять, сочетать.

конечного множества элементов и о ***методах подсчёта числа*** *возможных вариантов таких групп.*

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – конечное множество элементов некоторой природы (буквы, символы, детали, автомобили, люди и т.д.). Как правило, рассматриваются множества A элементов одной природы. Вместе с тем множество A может рассматриваться как объединение подмножеств A_k, $k = 1,2,...,m$, $m \le n$, элементы каждого из которых различаются по некоторому дополнительному признаку.

Например, если A – множество всех учеников 11 классов некоторой школы (района, города, региона), то его, в зависимости от целей исследования, можно рассматривать как объединение конечного числа подмножеств (по критерию успеваемости, по увлечениям и т.д.).

Другой пример: в урне 100 цветных шаров одинакового радиуса, из них 20 белых, 35 черных и 45 красных, тогда $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где A_1 – множество белых шаров, A_2 – чёрных, A_3 – красных.

Решение задач комбинаторики основывается на двух правилах.

Правило суммы. *Если* $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ *и элемент* $a_{i1} \in A_1$ *можно выбрать* m_1 *способами, элемент* $a_{i2} \in A_2$ – m_2 *способами, не связанными с выбором элемента* a_{i1} *и т.д.,* $a_{ik} \in A_s$ – m_s *способами,* $s \le k$*, то выбор одного из элементов* $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{is}$ *может быть осуществлён* $m_1 + m_2 + ... + m_s$ *способами.*

Пример 4.7. В урне 100 шаров: 20 белых, 35 черных и 45 красных. Сколько существует способов извлечь один шар:

а) белого или черного цвета;

б) произвольного цвета?

Решение. Один шар белого цвета можно извлечь 20 способами $(m_1 = 20)$, черного – 35 способами $(m_2 = 35)$, красного – 45 способами $(m_3 = 45)$. По правилу суммы в случае

а) $m_1 + m_2 = 20 + 35 = 55$,

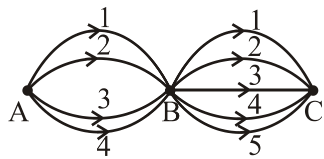
в случае

б) $m_1 + m_2 + m_3 = 20 + 35 + 45 = 100$.

Ответ: а) 55; б) 100.

Правило произведения. *Если элемент* $a_{i_1} \in A$ *можно выбрать* m_1 *способами, после выбора* a_{i_1} *элемент* $a_{i_2} \in A$ *можно выбрать* m_2 *способами и т.д., после выбора* $(s-1)$ *- го элемента* $a_{i_{s-1}}$ *элемент* a_{i_s} *можно выбрать* m_s *способами, то выбор всех элементов в указанном порядке может быть осуществлен* $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_s$ *способами.*

Пример 4.8. Из пункта A в пункт B можно проехать по 4 дорогам, а из B в C – по 5 дорогам. Сколько имеется различных путей из A в C через пункт B?



Решение. После того как выбрана конкретная дорога из A в B, то из B в C можно проехать по любой из 5 дорог. Аналогично для любой другой дороги из A в B продолжить движение из B в C можно вновь по любой из 5 дорог. Поэтому всего существует $4 \cdot 5 = 20$ способов (путей) проехать из пункта A в пункт C через пункт B.

Ответ: 20.

Пример 4.9. На каждой из 9 карточек написаны цифры от 1 до 9. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из 4 случайно выбранных карточек:

а) карточки не возвращаются (схема без возвращения);

б) число на выбранной карточке записывается, а карточка возвращается.

Решение. а) первое число (карточку с числом) можно выбрать 9 способами, взяв одну из 9 карточек. Второе число выбирается уже из 8 карточек, третье из 7 и, наконец, четвёртое из 6 карточек. По правилу умножения общее число способов выбора 4 карточек, т.е. различных четырёхзначных чисел, равно $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

б) если карточка после извлечения вновь возвращается в урну, то перед каждым новым извлечением карточки из урны в ней будет 9 карточек. Соответственно одну из 9 карточек можно выбирать 9 способами в *каждом* из четырёх извлечений. По правилу умножения общее число способов, т.е. различных четырёхзначных чисел будет равно $9^4 = 6561$.

Ответ: а) 3024; б) 6561.

4.3.2. Размещения

Определение 1. Размещением *из* n *элементов множества* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *по* m *элементов,* $0 \le m \le n$*, называются группы (комбинации) по* m *элементов, отличающиеся хотя бы порядком следования элементов.*

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, т.е. $n = 4$, а $m = 3$, то комбинации этих элементов по 3 в группе

$$\begin{array}{cccccc} abc, & acb, & bac, & bca, & cab, & cba; \\ abd, & adb, & bad, & bda, & dab, & dba; \\ acd, & adc, & dac, & dca, & cad, & cba; \\ bcd, & bdc, & cbd, & cdb, & dbc, & bdc \end{array}$$

образуют 24 размещения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m, читается «a из n по m». Справедлива теорема.

Теорема 4.3. *Число* A_n^m *размещений из* n *элементов по* m *элементов равно*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) \tag{4.17}$$

или, иначе,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{4.18}$$

$$\left(\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall m \in \mathbf{N}\ (1 \le m \le n) \qquad A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)\right).$$

Доказательство. *Первый элемент группы выбирается из* n *элементов, поэтому число способов выбора первого элемента равно* n. *Второй элемент размещения выбирается уже из* $(n-1)$ *элемента, т.е. может быть выбран* $(n-1)$ *способом. Аналогично*

3-й – $(n-2)$ *способами;*

……………………….

m*-й* – $(n-m+1)$ *способом.*

По правилу умножения общее число способов A_n^m *равно*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \quad \blacksquare$$

Определение 2. *Размещение из* n *элементов по* n *элементов называется* ***перестановкой****.*

Число перестановок обозначается P_n. Из теоремы 4.3 и определения перестановки следует, что

$$P_n = A_n^n = n! \tag{4.19}$$

Пример 4.10. Сколькими способами можно закрепить 8 автомобилей за 8 водителями, если за водителем может быть закреплён только один автомобиль?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 8 элементов (автомобилей), поэтому в соответствии с формулой (4.19) получаем:

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8 = 8! = 40320.$$

Ответ: 40320.

Пример 4.11. В следующий тур конкурса нужно выбрать три из 10 равноценных проектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В качестве первого проекта можно выбрать любой из 10, второго – любой из оставшихся 9 и третьего – любой из оставшихся восьми проектов.

Таким образом, всего $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способов.

Ответ: 720.

Пример 4.12. Докажите, что $\forall n \geq 2 \;\; \forall m (2 \leq m \leq n)$ число размещений A_n^m является чётным числом.

Решение. Если $n \geq 2$ и $2 \leq m \leq n$, то A_n^m содержит не менее двух множителей $n(n-1)...(n-m+1)$, среди которых как минимум одно число является чётным, значит, и A_n^m чётное число. ■

4.3.3. Сочетания

Определение 3. Сочетаниями *из* n *элементов по* m *элементов,* $1 \leq m \leq n$*, называются группы (комбинации) по* m *элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.*

Из определения сочетаний следует, что в отличие от размещений порядок следования элементов в группе не учитывается. Например, комбинации abc, acb, bac, bca, cab, cba являются *различными размещениями*, поскольку отличаются друг от друга порядком следования элементов. Тогда как *число сочетаний* в этом примере равно лишь 1, так как все 6 комбинаций имеют одинаковые элементы.

Таким образом, ***размещения – это упорядоченные группы*** элементов, а ***сочетания – неупорядоченные***.

Составим из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 размещения по 3 элемента (цифры), а затем вычеркнем размещения кроме одного, отличающиеся лишь порядком следования цифр. В соответствии с формулой (4.17) получим 24 группы размещений $\left(A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24\right)$:

$$
\begin{array}{llllll}
123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321; \\
124 & 142 & 214 & 241 & 312 & 421; \\
134 & 143 & 314 & 341 & 412 & 431; \\
234 & 243 & 324 & 342 & 423 & 432.
\end{array}
$$

В каждой строке группы элементов имеют одинаковый набор цифр: в первой $1,2,3$; во второй $1,2,4$; в третьей $1,3,4$ и в четвёртой $2,3,4$. Отличаются группы цифр в строке лишь порядком следования цифр. Поэтому в каждой строке нужно оставить лишь одну группу цифр. Пусть это будут первые группы в каждой строке. В итоге получим множество сочетаний из 4 элементов (цифр) по 3 элемента: 123, 124, 134, 234.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m.

Из m элементов можно получить $m!$ групп, имеющих этот набор элементов, но отличающихся порядком следования элементов, т.е. $m!$ перестановок из m символов. В рассмотренном примере каждая строка из групп цифр содержала $3! = 6$ перестановок.

Поскольку сочетания отличаются от размещений только тем, что в них не учитывается порядок следования элементов, а упорядочить m элементов можно $m!$ способами, то

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}, \tag{4.20}$$

или с учётом формулы (4.17)

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}, \tag{4.21}$$

а также

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{4.22}$$

Полученные результаты составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 4.4. *Число* C_n^m *сочетаний из* n *элементов по* m *элементов находится по одной из формул* (4.20)-(4.22).

Как уже отмечалось выше, по определению полагают $\forall n \in \mathbf{N}: C_n^o = 1$.

Пример 4.13. Сколько карточек спортлото «5 из 36» необходимо заполнить, чтобы гарантированно угадать: а) 3 номера; б) 4 номера; в) 5 номеров.

Решение. Порядок, в котором «выпадают» шары с номерами от 1 до 36 в лототроне не имеет значения. Поэтому искомые числа – это числа сочетаний из 36 соответственно по 3, по 4 и по 5.

В итоге имеем а) $C_{36}^3 = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7140$;

б) $C_{36}^4 = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!} = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 58905$;

в) $C_{36}^5 = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992$.

Ответ: а) 7140; б) 58905; в) 376992.

Пример 4.14. Сколькими способами можно выбрать 5 футбольных мячей из 10 одинаковых мячей для использования их в официальном турнире?

Решение. Порядок, в котором выбираются мячи здесь не существенен, поэтому искомое число способов равно числу сочетаний из 10 по 5, т.е.

$$C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$

Ответ: 252.

Пример 4.15. Из 10 судей в первом туре выбирается главный судья, а затем во втором туре – два его помощника. Сколько судейских бригад можно сформировать таким образом? Сколько среди них будет бригад с различным персональным составом (ранг судьи не учитывается)?

Решение. Главным судьёй может быть избран любой из 10 судей. Из оставшихся 9 нужно выбрать двух помощников. Из условия задачи следует, что помощники не упорядочиваются по какому-то принципу. Поэтому число способов, которыми могут быть выбраны 2 судьи из 9, равно числу сочетаний из 9 по 2, т.е. $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Общее число судейских бригад при таком способе формирования будет равно произведению числа способов избрания главного судьи $(n = 10)$ и числа способов избрания двух его помощников $(m = 36)$, т.е. $10 \cdot 36 = 360$.

В каждой бригаде из трех судей один является главным судьей. При этом по условию задачи каждый из трех судей может быть главным. Значит, из трех судей можно сформировать три бригады с *одинаковым персональным составом*, но в каждой из них будут *разные главные судьи*. Поэтому число бригад с различным персональным составом будет равно 360:3=120.

Заметим, что число бригад с одинаковыми правами каждого из трех судей (без учета ранга судьи) можно найти иначе. Оно равно числу сочетаний из 10 по 3, т.е. $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

Ответ: 360 и 120.

ГЛАВА V
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Элементы математической статистики

Математическая статистика является разделом математики, в котором изучаются методы обработки *результатов наблюдений* массовых явлений и экспериментальных данных, т.е. *числовых наборов*, с целью выявления скрытых закономерностей. Выявление закономерностей, которым подчинены случайные массовые явления, производится в результате вычисления и последующего анализа определенных количественных характеристик случайного процесса.

Исходным понятием в математической статистике является понятие ***выборки*** или ***выборочной совокупности***. ***Выборка объема n*** – это конечная последовательность чисел (***числовой набор***) $x_1, x_2, \ldots. x_n$, полученных в результате *измерений* (размер детали, вес груза и т.д.) или *наблюдений* за некоторым процессом. Если элементы выборки записать в порядке возрастания (неубывания), то такая запись выборочных данных называется ***вариационным рядом***.

Величина, равная разности между наибольшим числом x_{max} в выборке и наименьшим x_{min} называется ***размахом выборки.*** Размах выборки объемом n будем обозначать символом r_n. Таким образом, $r_n = x_{max} - x_{min}$.

Часто используемой числовой характеристикой выборочных данных является *медиана выборки*. ***Медианой выборки*** называется значение элемента выборки, приходящегося на середину *вариационного ряда.* Будем обозначать медиану символом x_{med}. Если объем выборки является нечетным числом $(2n+1)$, то $x_{med} = x_{n+1}$; если же количество элементов выборки равно $2n$, т.е. четно, то $x_{med} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Например, для упорядоченного по возрастанию набора чисел 2, 4, 7, 8, 11 с нечетным числом элементов $(n = 5)$ медиана равна 7; для набора – 2, 3, 6, 7, 13, 14, 14, 17 с четным числом элементов $(n = 8)$ медиана равна 10: $x_{med} = \frac{7+13}{2} = 10$.

Простейшей числовой характеристикой выборки является ***выборочное среднее***, в качестве которого выступает ***среднее арифметическое*** чисел, входящих в выборку, т.е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right), \tag{5.1}$$

или в компактной форме, с использованием знака суммы

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k ,$$

где n – объем выборки.

Для оценки степени рассеивания выборочных данных относительно выборочного среднего используется числовая характеристика, которая называется ***выборочным средним квадратическим отклонением*** и обозначается буквой S

$$S = \frac{1}{n}\sqrt{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2} . \tag{5.2}$$

Рассмотрим способы анализа выборочных данных на примерах.

Пример 5.1. Ежемесячное производство станков на станкостроительном заводе в течение одного года приведено в таблице.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
53	55	60	62	64	57	57	61	62	65	58	54

В первой строке таблицы записаны номера месяцев, а во второй – количество станков, произведенных в соответствующем месяце. Требуется найти основные числовые характеристики выборки.

Решение. Упорядочим выборку по возрастанию ее элементов: 53, 54, 55, 57, 57, 58, 60, 61, 62, 62, 64, 65. Построенный вариацион-

ный ряд позволяет сразу же найти наибольший x_{max} и наименьший x_{min} элементы выборки, ее размах r_{12} и медиану x_{med}. Имеем: $x_{max} = 65,\ x_{min} = 53,\ r_{12} = 65 - 53 = 12,\ x_{med} = 59$
$\left(x_{med} = \dfrac{58+60}{2} = 59 \right)$.

Найдем теперь по формуле (5.1) выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{53+54+55+57+57+58+60+61+62+62+64+65}{12} =$$

$$= \frac{708}{12} = 59,$$

а по формуле (5.2) - среднее квадратическое отклонение. Для вычисления выборочного среднего квадратического отклонения целесообразно сначала найти квадраты разностей $(x_k - \bar{x})^2$, $k = 1, 2, \ldots, 12$: $(53-59)^2 = 36$, $(54-59)^2 = 25$, $(55-59)^2 = 16$, $(57-59)^2 = 4$, $(58-59)^2 = 1$, $(60-59)^2 = 1$, $(61-59)^2 = 4$, $(62-59)^2 = 9$, $(64-59)^2 = 25$, $(65-59)^2 = 36$.
В итоге,

$$S = \frac{1}{12}\sqrt{36+25+16+4+4+1+1+4+9+9+25+36} =$$

$$= \frac{\sqrt{170}}{12} \approx 4{,}12.$$

Ответ: $x_{max} = 65,\ x_{min} = 53,\ r_{12} = 12,\ x_{med} = 59,$
$\bar{x} = 59,\ S \approx 4{,}12$.

Комментарий к примеру 5.1. *Как можно интерпретировать полученные результаты? Какова их практическая ценность? Можно отметить, что количество станков, производимых заводом за один месяц, отличается существенной нестабильностью. Максимальное отклонение от среднего значения достигает 6 единиц, что составляет более 10% от среднего количества изготавливаемых станков. Превышение* *среднего уровня наблюдается в марте – мае и в августе – октябре, а снижение объемов производства – в остальные месяцы года. Для выяснения причин такого явления нужен более тонкий анализ причинно-следственных связей.*

Рассмотрим еще один пример нахождения числовых характеристик выборочных данных (числовых наборов).

Пример 5.2. Стандартный размер некоторой детали должен быть равен $5{,}0 \pm 0{,}05$. Для контроля были выбраны по 10 деталей, изготовленных соответственно первым и вторым рабочими. Их размеры оказались равными соответственно

5,03, 4,93, 4,98, 5,06, 5,01, 4,96, 5,03, 5,04, 4,98, 5,02
– у первого рабочего и

5,01, 5,00, 4,98, 4,99, 4,98, 5,01, 5,03, 5,02, 4,97, 5,01
– у второго рабочего.

Требуется выполнить простейший статистический анализ данных выборок.

Решение. Приведенные последовательности чисел образуют две *выборки* объемом по 10 чисел каждая. Визуальный анализ выборок позволяет обнаружить несколько отличий в числовых данных, характеризующих качество работы каждого рабочего:

1) в первой выборке оказались две бракованные детали (4,93 и 5,06); во второй выборке все детали стандартные;

2) в первой выборке "рассеивание" данных (отклонение реального размера детали от стандартного) выше, чем во второй выборке. Эти выводы подтверждаются и числовыми характеристиками выборок.

Наибольший и наименьший элементы в каждой выборке равны: в первой $x_{max} = 5{,}06$, $x_{min} = 4{,}93$ и $x_{max} = 5{,}03$, $x_{min} = 4{,}97$ - во второй. Соответственно размах первой выборки $r_{10} = 5{,}06 - 4{,}93 = 0{,}13$ в 2 раза больше размаха $r_{10} = 5{,}03 - 4{,}97 = 0{,}06$ второй выборки.

Средний размер детали в первой выборке равен

$$\bar{x}_1 = (5{,}03 + 4{,}93 + 4{,}98 + 5{,}06 + 5{,}01 + 4{,}96 + 5{,}03 + 5{,}04 + $$
$$+ 4{,}98 + 5{,}02)/10 = 5{,}004,$$

а во второй

$$\bar{x}_2 = (5{,}01 + 5{,}00 + 4{,}98 + 4{,}99 + 4{,}98 + 5{,}01 + 5{,}03 + 5{,}02 + $$
$$+ 4{,}97 + 5{,}01)/10 = 5{,}000$$

При этом рассеивание размеров деталей относительно выборочного среднего в первой выборке значительно больше, чем во второй. Это подтверждается значениями выборочных средних квадратических отклонений в первой и во второй выборках.

Так, в первой выборке

$$S = \frac{1}{10}\sqrt{(5{,}03 - 5{,}004)^2 + (4{,}93 - 5{,}004)^2 + \ldots + (5{,}03 - 5{,}004)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{0{,}01442}}{10} = 0{,}012,$$

а во второй

$$S = \frac{1}{10}\sqrt{(5{,}01 - 5{,}0)^2 + (4{,}93 - 5{,}0)^2 + \ldots + (5{,}03 - 5{,}0)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{0{,}0034}}{10} \approx 0{,}006.$$

Значит, выборочное среднее квадратическое отклонение размера детали от среднего размера деталей в выборке у первого рабочего в 2 раза выше, чем у второго. ■

Простейший статистический анализ данных в примере 5.2 позволил увидеть и оценить количественно результаты изготовления однотипной детали двумя рабочими и в результате сравнить качество изготавливаемых ими деталей. Следует отметить, что использование методов математической статистики для обработки и анализа статистической информации позволяет принимать более обоснованные (в условиях высокой неопределенности) решения в самых различных областях человеческой деятельности.

Пример 5.3. Как изменятся выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое отклонение, если

а) каждый элемент выборки умножить на одно и то же число k;
б) к каждому элементу выборки прибавить одно и то же число a?

Решение. а) $\overline{x}_{нов} = \frac{1}{n}\left(k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + ... + k \cdot x_n\right) =$

$$= k\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = k \cdot \overline{x};$$

$$S_{нов} = \frac{1}{n}\sqrt{\left(kx_1 - k\overline{x}\right)^2 + \left(kx_{21} - k\overline{x}\right)^2 + ... + \left(kx_n - k\overline{x}\right)^2} =$$

$$= k \cdot \frac{1}{n}\ \sqrt{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + \left(x_n - \overline{x}\right)^2} = k \cdot S.$$

б) $\overline{x}_{нов} = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 + a\right) + \left(x_2 + a\right) + ... + \left(x_n + a\right)\right) =$

$$= \frac{\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) + n \cdot a}{n} = \frac{\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)}{n} + a = \overline{x} + a;$$

$$S_{нов} = \frac{1}{n}\sqrt{\left(\left(x_1 + a\right) - \left(\overline{x} + a\right)\right)^2 + \left(\left(x_2 + a\right) - \left(\overline{x} + a\right)\right)^2 + ...}$$

$$\overline{... + \left(\left(x_n + a\right) - \left(\overline{x} + a\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + \left(x_n - \overline{x}\right)^2} = S.$$

Ответ: а) умножатся на k; б) выборочное среднее увеличится (при $a > 0$) или уменьшится (при $a < 0$) на величину a; выборочное среднее квадратическое отклонение ***не изменится***.

Пример 5.4. Среднее арифметическое n чисел равно $\frac{76}{13}$. Среднее арифметическое положительных чисел в этой совокупности равно 12, а отрицательных – (-8). Найдите n, если известно, что положительных чисел не больше 50, а отрицательных больше 17.

Решение. Пусть положительных чисел x_k^+ в совокупности m, а отрицательных $\sum x_i^-$ – k чисел. По условию примера

$$\frac{1}{m}\sum x_k^+ = 12, \quad \text{а} \quad \frac{1}{k}\sum x_i^- = -8.$$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} = \frac{1}{m+k}\left(\sum x_k^+ + \sum x_i^-\right) = \frac{12m - 8k}{m+k} = \frac{76}{13}.$$

Уравнение $\frac{12m-8k}{m+k} = \frac{76}{13}$ преобразуется к виду $4m = 9k$. Отсюда следует, что $m = 9r, k = 4r$, $r \in N$. По условию примера $m \le 50$, а $k > 17$. Поэтому имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 9r \le 50, \\ 4r > 17. \end{cases}$$

Решением этой системы является единственное значение $r = 5$. При этом: $m = 9 \cdot 5 = 45$, $k = 4 \cdot 5 = 20$, $n = 45 + 20 = 65$. При таком распределении положительных и отрицательных чисел в совокупности среднее арифметическое 65 чисел равно:

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 45 - 8 \cdot 20}{65} = \frac{380}{65} = \frac{76}{13}.$$

Ответ: 65.

5.2. Начала теории вероятностей

5.2.1. Пространство элементарных исходов. Случайные события

В отличие от математической статистики в теории вероятностей абстрагируются от реального процесса или явления. Вместо набора чисел, являющихся результатом наблюдений или измерений, с которыми работает математическая статистика, в теории вероятностей строят математическую модель явления. В основе этой модели ряд новых понятий и соглашений (аксиом). Исходными из них являются понятия

- случайного эксперимента;
- элементарного исхода и пространства элементарных исходов;
- случайного события;
- относительной частоты и вероятности случайного события.

Понятийный аппарат теории вероятностей вводится в серии приводимых ниже определений.

Определение 1. Случайным *называется такой* ***эксперимент****, в результате осуществления которого может появиться (реализоваться) любой результат из некоторого, вполне определенного, множества возможных исходов эксперимента.*

Случайным, например, является эксперимент с подбрасыванием монеты или бросанием шестигранного игрального кубика, при условии, что и монета, и игральный кубик имеют однородное распределение плотности масс по объему. Напротив, эксперимент с “подбрасыванием” бутерброда хотя и является случайным, но его исход, как правило, предопределен. Точно так же исход эксперимента с бросанием игрального кубика станет более предсказуемым, если в одну из граней этого кубика запаять кусочек тяжелого металла (например, свинца или золота).

В результате осуществления случайного эксперимента реализуется один из конечного или бесконечного множества исходов. Например, при подбрасывании монеты на ее верхней грани может быть либо цифра (Ц), либо герб (Г). Предполагается, что вариант остановки монеты в положении на ребре невозможен. При бросании игрального кубика, после того как он зафиксируется в определенном положении, на его верхней грани может быть одна и только одна из шести цифр:1, 2, 3, 4, 5, 6.

Определение 2. Элементарными *называются такие* ***исходы*** *случайного эксперимента, которые* ***неделимы*** *и являются* ***взаимоисключающими****. Множество всех элементарных исходов, которые могут наступить в данном случайном эксперименте, называется* ***пространством элементарных исходов.***

Элементарные исходы будем обозначать буквой u или, если это необходимо, буквой u с индексами: $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а множество всех элементарных исходов, т.е. пространство элементарных исходов – прописной буквой U. Таким образом, пространство элементарных исходов – это множество U, где

- $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, если число исходов в данном эксперименте конечно;
- $U = \{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$, если число элементарных исходов в эксперименте бесконечно;
- $U = \{u | a \le u \le b\}$, если элементарный исход случайного эксперимента – это некоторое число из отрезка (интервала, полуинтервала).

Приведем примеры соответствующих пространств элементарных исходов. В примере с монетой им будет $U = \{u_1, u_2\}$ или более наглядно $U = \{Ц, Г\}$. В примере с игральным кубиком $U = \{u_1, u_2, ..., u_6\}$, где u_1 – элементарный исход, заключающийся в появлении цифры 1 на верхней грани кубика, u_2 – элементарный исход, заключающийся в появлении цифры 2 и т.д.

Примеры с игральным кубиком будут использоваться и дальше. Для придания обозначению пространства элементарных исходов в таких примерах лучшей "читаемости" наряду с обозначением $U = \{u_1, u_2, ..., u_6\}$, будем использовать и такое $U = \{1, 2, ..., 6\}$.

Предположим теперь, что монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет цифра. В этом случае пространство элементарных исходов содержит бесконечное множество элементарных исходов, а именно $U = \{Ц, ГЦ, ГГЦ, ГГГЦ, ...\}$.

Представим теперь, что есть некоторое устройство, из которого вылетают ядра. Особенность устройства заключается в том, что усилие, с которым выталкивается ядро, меняется случайным образом от некоторой минимальной величины $\overline{F}_{min}$ до максимальной $\overline{F}_{max}$. Соответственно этому меняется и расстояние d, на которое улетает ядро: от $d = a$ до $d = b$, $a < b$.

В таком случайном эксперименте пространство элементарных исходов – это отрезок $[a\,;b]$, т.е. $U=\{u|a\le u\le b\}$.

Еще одно важное понятие в теории вероятностей – *случайное событие.*

***Определение 3. Случайным событием** называется любое событие, которое может наблюдаться в случайном эксперименте.*

Случайные события будем обозначать заглавными буквами A, B, C и т.д. Рассмотрим примеры событий, которые можно рассматривать в случайном эксперименте с игральной костью.

Пример 5.5. Игральный кубик бросается один раз. Найдите пространство элементарных исходов данного случайного эксперимента и приведите примеры случайных событий.

Решение. Пространство элементарных исходов в данном эксперименте состоит из 6 исходов: $U=\{1,2,...,6\}$. Каждый элементарный исход k означает, что на верхней грани игрального кубика в момент ее остановки зафиксировано число k $(k=1,2,...,6)$. Рассмотрим теперь примеры случайных событий на данном пространстве элементарных исходов.

1) A – событие, заключающееся в том, что на верхней грани кубика будет зафиксировано одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти числа исчерпывают ***все*** возможные элементарные исходы, т.е. $A=U$, и потому в результате осуществления случайного эксперимента событие A обязательно происходит. Такие *случайные события* называются ***достоверными событиями.***

Значит, и само множество U, составляющее пространство элементарных исходов, может быть случайным событием.

2) B – событие, заключающееся в том, что выпадет четное число очков, т.е. $B=\{2,4,6\}$;

3) C – событие, заключающееся в том, что выпадет число 3, т.е. $C=\{3\}$;

4) D – событие, заключающееся в том, что выпадет число, большее 3, т.е. $D=\{4,5,6\}$;

5) E – событие, заключающееся в том, что выпадет нечетное число очков, т.е. $E=\{1,3,5\}$. ■

Обратим внимание на то, что объединением событий B и D, которое пока будем понимать как объединение множеств, является множество $A=U$ - *достоверное событие*, а пересечение множеств C и D – пустое множество $\varnothing$, которое называется ***невозможным событием***. *Невозможным событием* в условиях предыдущего примера является, например, появление 7 и более очков на верхней грани игрального кубика.

Со случайными событиями, рассматриваемыми в данном случайном эксперименте, можно оперировать так же, как с множествами. Незначительно меняется лишь терминология: слово “множество” заменяется словом “событие”. Приведем соответствующие определения.

Определение 4. Объединением событий A и B называется такое *событие* C, которое происходит, если ***происходит хотя бы одно*** из событий A или B.

Объединение событий обозначается символом $A\bigcup B$.

В условиях примера 5.5 событие $B\bigcup D=\{2,4,5,6\}$ происходит, если на верхней грани игрального кубика появляется одно из чисел $2,4,5,6$.

Определение 5. Пересечением событий A и B называется такое *событие* C, которое происходит тогда и только тогда, когда ***происходят одновременно*** события A и B.

Пересечение событий обозначается символом $A\bigcap B$.

В условиях примера 5.5 случайное событие $B\bigcap D=\{4,6\}$ происходит, если на верхней грани игрального кубика появляется одно из чисел $4,6$.

Определение 6. Противоположным *к случайному событию A, называется событие, состоящее в том, что событие A не происходит.*

Обозначается противоположное событие символом $\overline{A}$. Противоположное событие состоит из тех элементарных исходов пространства U, которые не содержатся в A. Так, в условиях примера 5.5: $\overline{B} = E$, $\overline{D} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{U} = \varnothing$. Каждое из этих равенств нужно понимать так: событие, противоположное к B, происходит, если на верхней грани игрального кубика появляется нечетное число; противоположное к D событие происходит, если на верхней грани кубика появляется одно из чисел $1, 2, 3$; событие, противоположное к множеству U, является *невозможным* событием.

Определение 7. *События A и B называются* ***несовместными****, если наступление одного из них в данном случайном эксперименте* ***исключает*** *наступление другого.*

Например, события B и E в примере 5.5 являются *несовместными*. Действительно, если в эксперименте с бросанием игрального кубика на ее верхней грани зафиксировано четное число, что означает наступление события B, то событие E (выпадение нечетного числа очков) в этом эксперименте произойти уже не может.

Для иллюстрации операций над событиями и доказательства равенств удобно пользоваться диаграммами Эйлера – Венна. На рисунке приведены иллюстрации к введенным операциям.

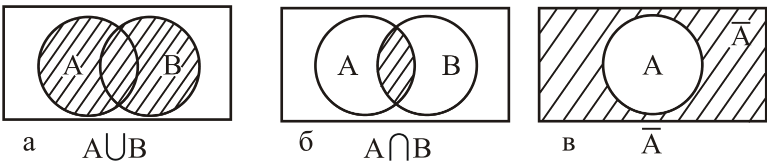


Рис. 5.1

5.2.2. Относительная частота. Вероятность события

Пространство элементарных исходов U позволяет описать каждое событие A, которое может произойти в результате рассматриваемого случайного эксперимента. *Следующим, важнейшим шагом* к построению математической модели случайного эксперимента является введение числовой характеристики, которая позволяла бы объективно оценивать шансы на наступления случайного события A при заданном комплексе условий.

Простейшей числовой характеристикой случайного события А в случайном эксперименте является *относительная частота* события А. Пусть случайный эксперимент проводится n раз. Событие А, наступление (или ненаступление) которого мы фиксируем в каждом эксперименте, наступило m раз.

Определение 8. Относительной частотой $\alpha(A)$ *события А называется число, равное отношению количества* m *наступлений события А к общему числу* n *проведенных экспериментов.*

Таким образом,

$$\boxed{\alpha(A)=\frac{m}{n}}. \tag{5.3}$$

Возможность использования *относительной частоты* в качестве *меры возможности наступления* события А в рассматриваемом случайном эксперименте основывается на свойстве *устойчивости* относительной частоты. Устойчивость относительной частоты заключается в том, что при многократном повторении случайного эксперимента (*при сохранении комплекса условий*, в которых он проводится), значения относительной частоты случайного события А группируются около некоторого числа. Например, если проведено 2000 экспериментов, в которых событие А наступило 398 раз, то относительная частота события А будет равна $398/2000=0{,}199$. Допустим, что проведены еще 4 серии по 2000 экспериментов с *сохранением комплекса условий*, в которых он проводился первый раз. Пусть получены следующие значения относительных частот в этих экспериментах: 0,199; 0,200; 0,201; 0,2009. Можно заметить, что среднее значение относительной частоты в пяти экспериментах равно приближенно $0{,}2$.

Если окажется, что при неограниченном увеличении числа экспериментов, относительная частота события А остается близкой к $0{,}2$, а среднее значение относительной частоты все меньше отличается от числа $0{,}2$, то это число назовем ***вероятностью события А***. Будем обозначать вероятность события А либо одной буквой p, если понятно о каком событии идет речь, либо символом $p(A)$, если необходимо подчеркнуть, что речь идет о вероятности события A.

Число $p(A)$ можно принять в качестве объективной числовой характеристики *возможности появления события* A в случайном эксперименте.

Определение вероятности события A, основанное на стабилизации относительной частоты события в большом числе серий экспериментов, называется в теории вероятностей частотным или мизесовским, по имени известного немецкого математика и механика Рихарда Мизеса (1883-1953).

Непосредственно из определения относительной частоты следуют ее свойства:

1) $0 \le \alpha(A) \le 1$;

2) $\alpha(U) = 1$;

3) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$, если события A и B несовместны и наблюдаемы в эксперименте.

Докажем третье свойство относительной частоты. Пусть проведено n экспериментов и событие A в них наступило m раз, а событие B – k раз, причем $m \le n$, $k \le n$ и $m + k \le n$. Тогда

$$\alpha(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \alpha(A) + \alpha(B). \blacksquare$$

Альтернативный способ определения вероятности случайного события в определенной степени произволен и основан на трех основных соглашениях, а именно:

1) $p(A) \ge 0$ для любого события A ;

2) $p(U) = 1$;

3) $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$, (5.4)

если события A и B ***несовместны***.

Наложенные ограничения вполне естественны, поскольку свойства вероятности случайного события должно согласовываться со свойствами относительной частоты. Свойства 1, 2, 3 вероятности называют аксиомами вероятности. Из них легко выводятся следующие свойства вероятности:

4) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;

5) $p(\varnothing) = 0$;

6) $0 \le p(A) \le 1$ для любого события A.

Рассмотрим простейшие *модели случайных экспериментов* и отвечающие им *способы определения вероятности* случайного события.

А. Классическое определение вероятности

Простейшей моделью вероятностного пространства является модель случайного эксперимента с ***конечным*** числом ***равновозможных*** элементарных исходов. *Равновозможность* элементарных исходов означает, что каждый элементарный исход имеет одинаковые (с другими исходами) шансы на наступление в рассматриваемом эксперименте.

Пусть пространство элементарных исходов U содержит n *равновозможных* исходов, а событию A *благоприятны (благоприятствуют)* m исходов. Таким образом, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $p(u_i) = \dfrac{1}{n}$.

Определение 9. Вероятность события A *равна отношению числа благоприятствующих ему исходов к общему количеству исходов, т.е.*

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}. \tag{5.5}$$

Рассматриваемая модель случайного эксперимента называется *классической* или *лапласовской.*

Пример 5.6. Монета подбрасывается три раза. Найдите вероятность того, что

а) ровно два раза выпадет герб (событие A);

б) герб не выпадет ни одного раза (событие B);

в) герб выпадет хотя бы один раз (событие C).

Решение. *Способ 1.* Пространство элементарных исходов в данном эксперименте состоит из 8 *равновозможных* исходов

$U=\{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}$, т.е. $n=8$.

а) Событие А содержит 3 исхода: $A=\{ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ\}$, т.е. m=3. В соответствии с формулой (5.5) $p(A)=\frac{3}{8}$;

б) Событию В благоприятствует лишь один исход – $B=\{ЦЦЦ\}$. Поэтому $p(B)=\frac{1}{8}$;

в) Событие С состоит из 7 равновозможных исходов $C=\{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ\}$ и потому $p(C)=\frac{7}{8}$.

Заметим, что вероятность события С можно найти проще, не обращаясь непосредственно к пространству элементарных исходов. Действительно, событие С является противоположным к событию В $\left(C=\overline{B}\right)$. *В соответствии с аксиомой 4) вероятности* $p(C)=1-p\left(\overline{B}\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Способ 2. Основан на использовании методов комбинаторики для подсчета как общего числа исходов в эксперименте, так и числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому случайному событию. В данном случае общее число исходов в эксперименте с трехкратным подбрасыванием монеты равно $2^3=8$ ($n=8$).

Событию А (в трех подбрасываниях герб выпадет два раза) благоприятствуют $C_3^2=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=3$ элементарных исхода $(m=3)$. Напомним, C_3^2 – число сочетаний из 3-х элементов по два элемента. В соответствии с формулой (5.5) $p(A)=\frac{3}{8}$.

Событию B (герб не выпадет ни одного раза в трех подбрасываниях) благоприятствует один $\left(C_3^0 = 1\right)$ элементарный исход $\left(m = 1\right)$. Поэтому $p(B) = \frac{1}{8}$.

Событие C является объединением трех несовместных событий D, A, E. Здесь D – событие, заключающееся в том, что в трех подбрасываниях монеты герб выпадет ровно один раз (число таких вариантов равно $C_3^1 = \frac{3}{1} = 3$, т.е. $m = 3$). Соответственно E – событие, заключающееся в том, что в трех подбрасываниях монеты герб выпадет три раза (число таких вариантов равно $C_3^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$ $\left(m = 1\right)$). Поэтому $p(D) = \frac{3}{8}$, $p(E) = \frac{1}{8}$. В соответствии с аксиомой 3) вероятности для несовместных событий $p(C) = p(D \cup A \cup E) = p(D) + p(A) + p(E)$. Значит, $p(C) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

К*ак уже отмечалось, вероятность события C проще найти по формуле* $p(C) = 1 - p(\overline{B})$.

Ответ: а) $p(A) = 0,375$; б) $p(B) = 0,175$;
в) $p(C) = 0,875$.

Пример 5.7. Бросаются два игральных кубика. Что вероятнее: на верхней грани каждого кубика будет одинаковая цифра или сумма выпавших очков не менее10?

Решение. Пространство элементарных исходов в данном случайном эксперименте состоит из 36 равновозможных исходов $U = \{(1,1);(1,2);\ldots;(1,6);(2,6);\ldots;(5,6);(6,6)\}$. Каждый элементарный исход u_i – это пара цифр (i, j), где I – число очков, выпавших на первом кубике, j – на втором. Пространство элементарных исходов U удобно переписать в виде матрицы размера 6×6

$$U=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\end{pmatrix}$$

Событие А – на каждом кубике выпала одинаковая цифра – состоит из 6 элементарных исходов: $(1,1);\ (2,2);\dots;\ (6,6)$. Поэтому $p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Событию В – сумма выпавших очков не менее10 – благоприятствуют также 6 элементарных исходов $(4,6);\ (5,5);\ (6,4);\ (5,6);\ (6,5);\ (6,6)$. Поэтому $p(B)=\frac{1}{6}$.

Ответ: события равновозможные, так как $p(A)=p(B)=\frac{1}{6}$.

Классическое определение вероятности “не работает” в моделях случайных экспериментов, отличных от классической модели с *конечным* числом *равновозможных* исходов. Нарушение любого из этих двух условий исключает возможность применения формулы (5.5) для вычисления вероятностей случайных событий. Достаточно, например, нарушить однородность игрального кубика, чтобы классическая модель нахождения вероятностей случайных событий в экспериментах с бросанием кубика перестала быть справедливой. В этом случае нужно создавать ***новую модель*** случайного эксперимента.

В. Модель с не равновозможными исходами.

Обобщением классической модели Лапласа является модель с ***конечным*** числом исходов, но уже ***не равновозможных***. Пусть $U=\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ - пространство элементарных исходов. Элементарные исходы *не равновозможные,* но при этом заданы вероятности $p(u_1), p(u_2), ..., p(u_n)$ наступления *каждого* из n элементарных исходов. Разумеется, что сумма заданных вероятностей элементарных исходов должна быть равна 1, т.е. $p(u_1)+p(u_2)+...+p(u_n)=1$. Вероятность события А в этом случае находится как сумма вероятностей элементарных исходов, входящих в событие А (благоприятствующих событию А).

Рассмотрим пример использования такой модели. Допустим, что тестирование игрального кубика дало следующие вероятности элементарных исходов

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

Вероятность появления не менее 4 очков при бросании такой игральной кости будет равна уже не 0,5 $\left(p(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0{,}5\right)$, что имеет место в случае идеального кубика и соответственно классической модели, а 0,65 $\left(p(A)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=0{,}65\right)$.

Создание новой модели потребуется и для случайных экспериментов с ***бесконечным числом не равновозможных*** исходов. Создание и использование таких моделей в настоящем пособии не рассматривается.

Важный класс задач вычисления вероятности случайного события составляют задачи, которые сводятся к вероятности попадания точки в некоторую область. В качестве такой области могут выступать отрезок $[a;b]$, а также интервал или полуинтервал на числовой прямой. Такой областью могут быть и часть плоскости или часть трехмерного пространства. Для решения подобных задач вводится понятие геометрической вероятности.

С. Геометрическая вероятность

Пусть пространство элементарных исходов U представляет собой отрезок $[a;b]$, а событие A заключается в попадании брошенной наугад на отрезок $[a;b]$ точки в некоторый промежуток $[c;d]\subset[a;b]$. Определим вероятность события A как отношение длины $d-c$ отрезка $[c;d]$ к длине $b-a$ отрезка $[a;b]$:

$$\boxed{p(A)=\frac{d-c}{b-a}}.$$

Если $U=(a;b)$ и (или) $A=(c;d)$, то вероятность события A вычисляется по той же формуле.

Для плоской фигуры G на плоскости вероятность попадания точки, брошенной наугад в область G, в некоторое подмножество D этой области $(D\subset G)$ находится по формуле

$$\boxed{p(A)=\frac{S_D}{S_G}}.$$

В этой формуле S_D и S_G – площади фигур D и G соответственно.

Приведенные формулы вычисления так называемой ***геометрической вероятности*** можно объединить в одной формуле, если ввести обозначение меры области: $\text{mes}U$ – для пространства элементарных исходов и $\text{mes}A$ – для события A. Тогда

$$\boxed{p(A)=\frac{\text{mes}A}{\text{mes}U}}. \qquad (5.6)$$

Обозначение $\text{mes}A$ является *эквивалентом* соответственно *длины* промежутка на прямой, *площади* фигуры на плоскости и *объема* тела в трехмерном пространстве.

Пример 5.8. Известно, что через данную станцию метро электропоезд проходит через каждые 5 минут. Найдите вероятность события, заключающегося в том, что пассажир, пришедший на станцию, будет ожидать электропоезд более 3 минут.

Решение. Пусть a – время ухода электропоезда, на который не успел пассажир, t $(a < t < a+5)$ – время прихода пассажира на станцию. Ждать более 3 минут ему придется, если $a < t < a+2$.

В данном примере пространство элементарных исходов U является полуинтервалом $(a\,;a+5]$ $\left(U = \{t \mid a < t \le a+5\}\right)$. Событию A отвечает (благоприятствует) интервал $(a\,;a+2)$, т.е. $A = \{t \mid a < t < a+2\}$. Учитывая, что $\mathrm{mes}U = a+5-a = 5$, а $\mathrm{mes}U = a+2-a = 2$, по формуле (5.6) получаем $p(A) = \frac{2}{5}$.

Ответ: 0,4.

Пример 5.9. В правильный треугольник со стороной a наугад бросается точка. Найдите вероятность попадания точки в круг, вписанный в данный треугольник.

Решение. Искомая вероятность равна отношению площади вписанного круга к площади треугольника. Учитывая, что радиус вписанного круга равен $\frac{\sqrt{3}a}{6}$, получаем: $\mathrm{mes}A = \frac{\pi a^2}{12}$. Площадь правильного треугольника равна: $\mathrm{mes}U = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Поэтому $p(A) = \left(\frac{\pi a^2}{12}\right) \Big/ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

5.2.3. Правила сложения и умножения вероятностей

Вероятность объединения *несовместных* событий, относящихся к одному эксперименту, вычисляется по формуле (5.4). Для совместных событий эта формула уже несправедлива. Вероятность объединения двух *совместных* событий А и В вычисляется по формуле

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}. \qquad (5.7)$$

Справедливость этой формулы со всей очевидностью вытекает из рис. 5.1, а.

Пример 5.10. В группе из 20 человек 12 учащихся изучают английский язык, 8 – немецкий. Из них 4 ученика изучают одновременно английский и немецкий языки. Найдите вероятность того, что произвольно выбранный из группы ученик изучает английский или немецкий язык.

Решение. Обозначим через А – событие, заключающееся в том, что выбранный ученик изучает английский язык, В – событие, заключающееся в том, что выбранный ученик изучает немецкий язык. События А и В в данном случае являются совместными (4 ученика изучают одновременно английский и немецкий языки). Условия примера соответствуют требованиям *конечности* числа элементарных исходов и их *равновозможности.* Поэтому вероятности событий можно вычислить по формуле (5.5):

$$p(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \quad p(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad p(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Искомую вероятность события $A \cup B$ найдем по формуле (5.7): $p(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Ответ: $p(A \cup B) = 0{,}8$.

Вероятность совместного наступления двух событий в случайном эксперименте, т.е. вероятность $p(A \cap B)$ пересечения событий А и В, существенно зависит от условий проведения эксперимента. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.11. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, вынимаются один за другим два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые для двух различных схем извлечения шаров из урны:

а) извлеченный шар возвращается в урну (***схема с возвращением***);

б) извлеченный шар не возвращается в урну (***схема без возвращения***).

Решение. а) *Схема с возвращением.* Введем события:

A – первый извлеченный шар белый;

B – второй извлеченный шар белый;

C – оба извлеченных шара белые.

Общее число *равновозможных* исходов в этом примере равно 10 ($n = 10$), событию A благоприятствуют 6 исходов (6 белых шаров). Поэтому $p(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Поскольку извлеченный шар возвращается в урну, то второй шар будет извлекаться из урны в тех же условиях, что и первый шар. Значит, и $p(B) = \frac{3}{5}$.

Вероятность события C, являющегося пересечением событий A и B, равна произведению вероятностей этих событий:
$p(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

б) *Схема без возвращения.* $p(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6$. Поскольку извлеченный шар не возвращен в урну, то в ней осталось 9 шаров. Цвет извлеченного шара нам не известен. Шансы наступления события B *зависят* не только от числа шаров, оставшихся в урне после извлечения из нее первого шара, но и от того, *наступило событие A, или нет*. Возникшую неопределенность можно снять только с помощью определенного соглашения.

Принято вычислять ***условную вероятность*** события B, в предположении, что *событие A* ***произошло***. Обозначается *условная вероятность* символами $p(B|A)$ или $p_A(B)$.

В нашем примере, в предположении наступления события A (первый извлеченный шар – белый), среди оставшихся в урне 9 шаров 5 шаров белые. Поэтому $p(B|A) = \frac{5}{9}$, а вероятность события C будет равна: $p(C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=0{,}3$.

Ответ: а) $0{,}36$; б) $0{,}3$.

Приведем определения, позволяющие записать правило умножения вероятностей.

Определение 10. *Событие B называется* ***независимым от события A,*** *если вероятность события B* ***не зависит*** *от того, произошло событие A или нет.*

Если же вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет, то событие B называется ***зависимым от события A****.*

Определение 11. Условной вероятностью *события B, называется вероятность этого события, вычисленная при условии, что* ***наступило*** *событие A.*

Аналогично определяется условная вероятность события A.

Значит, в общем случае вероятность совместного наступления двух событий должна быть равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, т.е.

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=p(B)\cdot p(A|B)}. \qquad (5.8)$$

Если события A и B независимы, т.е. $p(B|A)=p(B)$, то формула (5.8) преобразуется к виду

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)}. \qquad (5.9)$$

Рассмотрим еще один пример на применение правил сложения и умножения вероятностей.

Пример 5.12. Экзамен по математике проводится в два потока. Первый поток сдает экзамен с 9 часов, а второй – с 14. Потоки формируются случайным образом. При этом в первый поток отбирается треть студентов группы, а во второй – две трети. В первой группе Петя может сдать экзамен с вероятностью 0,9, а во второй - с вероятностью 0,75. Какова вероятность сдать экзамен для Пети?

Решение. Введем события: A – событие, заключающееся в том, что Петя сдаст экзамен; B – событие, заключающееся в том, что Петя попадет в первую группу. Тогда $\overline{B}$ – событие, заключающееся в том, что Петя попадет во вторую группу.

Из условий примера следует, что $p(B)=\frac{1}{3}$, а $p(\overline{B})=\frac{2}{3}$. Если Петя попадает в первую группу, то он сдает экзамен с вероятностью 0,9. Значит, *условная вероятность* $p(A|B)$ события A, в предположении, что произошло событие B, равна 0,9 ($p(A|B)=0{,}9$). Если же он попадает во вторую группу, то соответствующая *условная вероятность* $p(A|\overline{B})$ события A (при условии, что произошло событие $\overline{B}$), равна 0,75 ($p(A|\overline{B})=0{,}75$).

В данном примере событие A наступает, если реализуется одно из двух предположений (гипотез): B – Петя попадает в первую группу, или $\overline{B}$ - Петя попадает во вторую группу. В результате событие A является объединением двух *несовместных* событий: $A=(B\cap A)\cup(\overline{B}\cap A)$. Вероятность объединения двух *несовместных* событий найдем по формуле (5.4):

$$p(A)=p(B\cap A)+p(\overline{B}\cap A). \tag{5.10}$$

По формуле умножения вероятностей зависимых событий (5.8) находим $p(B\cap A)=p(B)\cdot p(A|B)$, $p(\overline{B}\cap A)=p(\overline{B})\cdot p(A|\overline{B})$. В итоге формула (5.10) примет следующий вид

$$\boxed{p(A)=p(B)\cdot p(A|B)+p(\overline{B})\cdot p(A|\overline{B})}. \tag{5.11}$$

Согласно этой формуле вероятность сдачи экзамена Петей равна: $p(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{1}{3}\cdot 0{,}75=0{,}8$.

Ответ: 0,8.

Если событие A может произойти *только вместе* с одним из трех *несовместных* событий (***гипотез***) B_1, B_2, B_3, причем в случайном эксперименте одно из этих событий *обязательно происходит,* то вероятность события A находится по формуле

$$\boxed{p(A)=p(B_1)\cdot p(A|B_1)+p(B_2)\cdot p(A|B_2)+p(B_3)\cdot p(A|B_3)}. \quad (5.12)$$

Определение 12. *Формула (5.12) называется формулой* ***полной вероятности.***

Пример 5.13. В урне находятся 100 разъемных шаров трех цветов: 10 шаров белого цвета, 30 – красного и 60 – синего. Внутри каждого шара с определенной вероятностью может находиться приз. В шарах белого цвета с вероятностью 0,7; красного – с вероятностью 0,5; синего – с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что наудачу взятый шар будет содержать приз.

Решение. Введем события: A – извлеченный шар содержит приз; B_1 – извлеченный шар белого цвета; B_2 – извлеченный шар красного цвета; B_3 – извлеченный шар синего цвета.

Для осуществления события A – обнаружения приза в шаре – необходимо сначала извлечь шар из урны, т.е. сначала должно осуществиться одно (и только одно) из трех несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3. Каждое из этих событий может произойти соответственно с вероятностью

$$p(B_1)=\frac{10}{100}=0{,}1;\ p(B_2)=\frac{30}{100}=0{,}3;\quad p(B_3)=\frac{60}{100}=0{,}6.$$

Вероятность обнаружить приз в извлеченном шаре – это одна из трех условных вероятностей:

$$p(A|B_1)=0{,}7;\ \ p(A|B_2)=0{,}5;\ \ p(A|B_3)=0{,}3.$$

Полную вероятность события A найдем по формуле (5.12) $p(A)=0{,}1\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}4$.

Ответ: 0,4.

Обобщение формулы полной вероятности на случай произвольного числа n гипотез имеет следующий вид:

$$\boxed{p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i)\cdot p(A|B_i)}. \quad (5.13)$$

5.2.4. Схема Бернулли

На практике часто встречается задача, в которой необходимо найти вероятность определенного числа m наступлений некоторого случайного события А в n случайных экспериментах. Предполагается, что эксперименты, называемые часто еще испытаниями, проводятся при *неизменяемом* комплексе условий и что *вероятность наступления события А от испытания к испытанию не меняется.* Эту модель называют ***схемой повторных испытаний***, а также ***схемой Бернулли.***

Примеров таких задач достаточно много: нахождение вероятности попадания в цель (мишень, хоккейные или футбольные ворота и т.д.) m раз в серии из n испытаний (выстрелов, бросков шайбы или ударов мяча по воротам); нахождение вероятности того, что в большой партии одинаковых деталей содержится определенное число бракованных деталей и т.д.

Сначала рассмотрим пример, который, с одной стороны, не относится к схеме Бернулли, с другой – позволяет понять (после определенного изменения условий задачи) появление формулы Бернулли.

Пример 5.14. Производится залп по цели из трех орудий. Вероятности попадания в цель для каждого орудия равны соответственно 0,9; 0,8; 0,6. Найдите вероятность того, что цель будет поражена

а) ровно одним снарядом;

б) двумя снарядами;

в) цель будет поражена.

Решение. Введем случайные события: A_1 - первое орудие попало в цель, $\overline{A}_1$ - первое орудие промахнулось; соответственно A_2, $\overline{A}_2$ и A_3, $\overline{A}_3$ - события, означающие попадание в цель или промах второго и третьего орудий. По условию примера $p(A_1)=0{,}9$, $p(\overline{A}_1)=0{,}1$; $p(A_2)=0{,}8$, $p(\overline{A}_2)=0{,}2$; $p(A_3)=0{,}6$, $p(\overline{A}_3)=0{,}4$.

Пусть далее В – событие, заключающееся в том, что цель после залпа из трех орудий будет поражена ровно одним снарядом, C – цель будет поражена двумя снарядами и D – цель будет поражена.

а) Поражение цели ровно одним снарядом может быть только в том случае, когда одно из трех орудий попало в цель, а два других при этом промахнулись. При этом попасть в цель могло любое из трех орудий. Поэтому

$$B = \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right).$$

События $\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right)$, $\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right)$ и $\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right)$ попарно несовместны, поэтому вероятность объединения трех несовместных событий будет равна сумме вероятностей каждого из этих событий, т.е.

$$p(B) = p\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right) + p\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) + p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right).$$

Попадание или непопадание в цель одного орудия не зависит от того попало или нет другое орудие в цель. Поэтому с учетом формулы умножения вероятностей для независимых событий получаем

$$p(B) = p(A_1)p\left(\overline{A}_2\right)p\left(\overline{A}_3\right) + p\left(\overline{A}_1\right)p(A_2)p\left(\overline{A}_3\right) + p(A_1)p\left(\overline{A}_2\right)p(A_3). \tag{5.14}$$

Подставив в эту формулу числовые значения вероятностей, найдем вероятность поражения цели ровно одним снарядом

$$p(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}116.$$

б) По аналогии с пунктом а) получаем

$$C = \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right),$$

$$p(C) = p(A_1)p(A_2)p\left(\overline{A}_3\right) + p(A_1)p\left(\overline{A}_2\right)p(A_3) + p\left(\overline{A}_1\right)p(A_2)p(A_3), \tag{5.15}$$

$$p(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}444.$$

в) Случайное событие D (цель поражена) является противоположным к событию E – цель не поражена. Учитывая, что $E = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ и $p(E) = p\left(\overline{A}_1\right)p\left(\overline{A}_2\right)p\left(\overline{A}_3\right)$, а также то, что $p(D) = 1 - p(E)$, получаем $p(D) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}992$.

Ответ: а) 0,116; б) 0,444; в) 0,992.

Возвратимся к схеме Бернулли. Допустим, что в условиях предыдущего примера вероятность попадания в цель каждого из трех орудий одинакова и равна p, а вероятность промаха соответственно также одинакова и равна $q = 1 - p$. Заметим, что такая постановка задачи равносильна тому, что производятся три выстрела из одного орудия, вероятность попадания в цель из которого при каждом выстреле постоянна и равна p. Эти условия соответствуют схеме Бернулли.

Легко видеть, что формула (5.14) в этом случае принимает следующий вид

$$p(B) = pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2 = C_3^1 pq^2,$$

а формула (5.15) преобразуется к виду

$$p(C) = p^2 q + p^2 q + p^2 q = 3p^2 q = C_3^2 p^2 q.$$

Эти частные результаты легко переносятся на общий случай – *найти вероятность наступления события A m раз в серии из n независимых испытаний.* Справедлива следующая

Теорема. *Вероятность того, что в серии из* n ***независимых испытаний,*** *в каждом из которых вероятность наступления события* A *равна* p*, а вероятность его не наступления равна* $q = 1 - p$*, событие* A *произойдет* m *раз может быть найдена по формуле Бернулли*

$$\boxed{p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0, 1, 2, \ldots, n}. \qquad (5.16)$$

Рассмотрим пример на применение этой формулы.

Пример 5.15. Вероятность попадания в кольцо баскетболистом Петровым из трех очковой зоны равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число попаданий им в кольцо при 6 бросаниях.

Решение. В данном случае $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. В соответствии с формулой (5.16) находим:

$$p_6(0) = C_6^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^6 = 0{,}000064;$$

$$p_6(1) = C_6^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^5 = 6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}00032 = 0{,}001536;$$

$$p_6(2) = C_6^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}0016 = 0{,}01536;$$

$$p_6(3) = C_6^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}008 = 0{,}08192;$$

$$p_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}04 = 0{,}24576;$$

$$p_6(5) = C_6^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^1 = 6 \cdot 0{,}32768 \cdot 0{,}2 = 0{,}393216;$$

$$p_6(6) = C_6^6 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}262144.$$

Таким образом, наиболее вероятное число попаданий в кольцо равно 5.

Ответ: 5.

ГЛАВА VI. НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Доказательство неравенств является хорошим способом развития и одновременно проверки математических способностей. Вместе с тем, многие неравенства в математике имеют огромное теоретическое и прикладное значение.

В данной главе рассматриваются простейшие неравенства и применение некоторых из них для решения определённых классов задач.

6.1. Доказательство неравенств

Пример 6.1. Докажите неравенство

$$\forall a, b \geq 0: \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{6.1}$$

т.е. среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ *любых двух неотрицательных чисел* a *и* b *не меньше их среднего геометрического* $\sqrt{ab}$.

Решение. Поскольку $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, $b = \left(\sqrt{b}\right)^2$ и потому

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0. \ \blacksquare$$

Следствия из неравенства (6.1).

$$\boxed{\forall a > 0: \quad a + \frac{1}{a} \geq 2}, \tag{6.2}$$

причём $$a + \frac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

$$\boxed{\forall a < 0: \quad a + \frac{1}{a} \leq -2}, \tag{6.3}$$

причём $$a + \frac{1}{a} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1.$$

Пример 6.2. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \left(\forall a, b \in \mathbf{R}\right). \tag{6.4}$$

Решение. Если $a+b\le 0$, то доказываемое неравенство справедливо. Пусть $a+b>0$. Предполагая, что неравенство (6.4) является верным и в этом случае, возведём обе его части в квадрат. Получим

$$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0,$$

а это неравенство верное, значит, и неравенство (6.4) является верным при $a+b>0$. ■

Пример 6.3. Докажите неравенство

$$\forall x,y,z>0:\quad \left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\ge 8. \qquad (6.5)$$

Решение.

$$A=\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)=\left(1+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)=$$

$$=1+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+1=$$

$$=2+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

В соответствии с (6.2): $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2$, $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\ge 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$.

Как следствие, $A\ge 2+2+2+2=8$. ■

Пример 6.4. Докажите неравенство

$$\forall a,b,c,d\ge 0:\quad \frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}. \qquad (6.6)$$

Решение. В соответствии с неравенством (6.1)

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ и $\frac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$, а также

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\ge$$

$$\geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}\ . \ \blacksquare$$

Пример 6.5. Докажите неравенство

$$\forall a, b, c \in \mathbf{R}: \quad (a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Решение. $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$ – верное неравенство. Преобразуем его

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2ab+2ac+2bc\ .$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства выражение $a^2+b^2+c^2$, получим искомое неравенство

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ ,$$

$$\text{или} \quad (a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right). \ \blacksquare$$

Пример 6.6. Докажите неравенство

$$\forall a, b, c > 0 \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}\ . \tag{6.7}$$

Решение. Если неравенство (6.7) справедливо, то верным является и неравенство, которое получается из (6.7) умножением обеих его частей на положительное число $a+b+c$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} \geq 9$$

или

$$3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 9,$$

а это неравенство верное, поскольку $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$.

Пример 6.7. Докажите неравенство

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! < (n+1)!\ . \tag{6.8}$$

Решение. $1 \cdot 1! < 2!$ – верное неравенство. Прибавив к обеим частям этого неравенства $2 \cdot 2!$, вновь получим верное неравенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! < 2! + 2 \cdot 2!,$$

но $$2! + 2 \cdot 2! = (1 + 2) \cdot 2! = 3!, \quad \text{т.е.} \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! < 3!,$$

а это неравенство (6.8) при $n = 2$.

Пусть верным является неравенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (n-1)(n-1)! < n!.$$

Прибавив к обеим его частям число $n \cdot n!$, получим с учётом того, что

$n! + n \cdot n! = n! \cdot (n+1) = (n+1)!$, неравенство (6.8). ■

Комментарий к неравенству (6.8). *Неравенство (6.8) является «точным» в том смысле, что прибавление к левой части этого неравенства единицы превращает его в равенство:* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + 1 = (n+1)!$.

Пример 6.8. (Неравенство Коши[1] – Буняковского[2]). Докажите, что для любых двух множеств чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \quad (6.9)$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

Решение. Докажем неравенство (6.9) методом математической индукции.

---

[1] Коши Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis, 1789 – 1857) – выдающийся французский математик, основные труды по математическому анализу и математической физике; ввел определения предела функции и непрерывности функции в точке.

[2] Буняковский Виктор Яковлевич (1804 – 1889) - русский математик, основные труды по теории чисел и теории вероятностей.

При $n=1$ доказываемое неравенство превращается в равенство $(a_1b_1)^2 = a_1^2 \cdot b_1^2$.

Если $n=2$, то (6.9) принимает следующий вид

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

или

$$(a_1b_1)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + (a_2b_2)^2 \le a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2,$$

что равносильно неравенству

$$2(a_1b_2)\cdot(a_2b_1) \le (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2, \qquad (6.10)$$

а это верное неравенство.

Допустим, что неравенство (6.9) выполняется при $n:=n-1$, т.е.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1})^2 \le$$
$$\le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2). \qquad (6.11)$$

Опираясь на это предположение, докажем справедливость неравенства (6.9) при $n:=n$. Для сокращения записей введём обозначения $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ – арифметические векторы и их скалярные произведения. Имеем

$$(\bar{a}; \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1},$$
$$\bar{a}^2 \equiv (\bar{a}, \bar{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2,$$
$$\bar{b}^2 \equiv (\bar{b}, \bar{b}) = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2.$$

В результате индукционное предположение (6.11) можно переписать в виде

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 \le \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2, \qquad (6.12)$$

а доказываемое неравенство (6.9) соответственно в виде

$$((\bar{a}, \bar{b}) + a_nb_n)^2 \le (\bar{a}^2 + a_n^2)(\bar{b}^2 + b_n^2)$$

или

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 + 2a_nb_n(\bar{a}, \bar{b}) + a_n^2b_n^2 \le \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2 + a_n^2\bar{b}^2 + b_n^2\bar{a}^2 + a_n^2b_n^2.$$

Последнее неравенство с учётом (6.11) приводится к виду

$$2a_n b_n(\bar{a},\bar{b}) \le a_n^2 \bar{b}^2 + b_n^2 \bar{a}^2$$

или, вновь возвращаясь к скалярной форме записи,

$$2(a_n b_1)(a_1 b_n) + 2(a_n b_2)(a_2 b_n) + \ldots + 2(a_n b_{n-1})(a_{n-1} b_n) \le$$
$$\le (a_n^2 b_1^2 + b_n^2 a_1^2) + (a_n^2 b_2^2 + a_2^2 b_n^2) + \ldots + (a_n^2 b_{n-1}^2 + a_{n-1}^2 b_n^2).$$

Последнее неравенство можно рассматривать как сумму $(n-1)$ верного неравенства типа (6.10) и потому оно является верным. Таким образом доказана справедливость неравенства (6.9) для произвольного $n \in \mathbf{N}$. ■

Комментарий к примеру 6.8. *Неравенство Коши – Буняковского в векторной форме*

$$(\bar{a},\bar{b})^2 \le (\bar{a},\bar{a}) \cdot (\bar{b},\bar{b}), \tag{6.13}$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *легко доказывается с использованием свойств скалярного произведения векторов и свойств квадратного трёхчлена.*

Введём в рассмотрение вектор $c = \bar{a} + \lambda\bar{b}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ *и найдём скалярный квадрат*

$$(\bar{c},\bar{c}) = (\bar{a} + \lambda\bar{b}, \bar{a} + \lambda\bar{b}) = \lambda^2(\bar{b},\bar{b}) + 2(\bar{a},\bar{b})\lambda + (\bar{a},\bar{a}).$$

Учитывая, что $(\bar{c},\bar{c}) \ge 0$, *то для любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *должно выполняться неравенство* $(\bar{b},\bar{b})\lambda^2 + 2(\bar{a},\bar{b})\lambda + (\bar{a},\bar{a}) \ge 0$.

Поскольку коэффициент при λ^2 *неотрицателен* $((\bar{b},\bar{b}) \ge 0)$, *то последнее неравенство будет выполняться тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трёхчлена в неравенстве неположителен, т.е.*

$$D_\lambda = (\bar{a},\bar{b})^2 - (\bar{a},\bar{a}) \cdot (\bar{b},\bar{b}) \le 0,$$

откуда сразу же следует неравенство (6.13) – векторный аналог неравенства (6.9).

Замечание. *Равенство в неравенстве Коши – Буняковского (6.9) имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}},$$

т.е., когда векторы $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *и* $\bar{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ *коллинеарны.*

Неравенство Коши-Буняковского имеет многочисленные и разнообразные применения в математике, в том числе и в элементарной. Несколько таких примеров рассматриваются ниже (примеры 6.9 – 6.12), другие – в следующем разделе 6.2.

Пример 6.9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z=16, \\ \dfrac{9}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}+\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$$

Решение. Введем в рассмотрение векторы

$$\bar{a}=\left(x\,;y;2\sqrt{z}\right) \quad \text{и} \quad \bar{b}=\left(\frac{3}{x};\frac{3}{y};\frac{1}{\sqrt{z}}\right),\ z>0,$$

вычислим скалярное произведение этих векторов и их модули с учетом уравнений системы

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=x\frac{3}{x}+y\frac{3}{y}+2\sqrt{z}\,\frac{1}{\sqrt{z}}=8,$$

$$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+4z}=\sqrt{16}=4,$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{9}{y^2}+\frac{1}{z}}=\sqrt{4}=2.$$

Поскольку в данном случае $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и, как следствие,

$$\frac{x}{\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{y}{\left(\frac{3}{y}\right)}=\frac{2\sqrt{z}}{\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)}.$$

Из этих уравнений следует, что $y^2=x^2$ и $z=\dfrac{x^2}{6}$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы, получим

$$x^2+x^2+4\cdot\frac{x^2}{6}=16 \qquad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{6}\,.$$

Тогда $y=\pm\sqrt{6}\,,\ \ z=1.$

Ответ: $\left(\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\,;1\right)$, $\left(-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\,;1\right)$, $\left(\sqrt{6}\,;-\sqrt{6}\,;1\right)$, $\left(-\sqrt{6}\,;-\sqrt{6}\,;1\right)$.

Пример 6.10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+4^{-y}+3^z=6, \\ 4^x+16^{-y}+9^z=9\,. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим векторы

$$\bar{a}=\left(2^x\,;4^{-y}\,;3^z\right) \qquad \text{и} \qquad \bar{b}=(1;1;1)\,.$$

Имеем

$$\left(\bar{a},\,\bar{b}\,\right)=1\cdot 2^x+1\cdot 4^{-y}+1\cdot=2^x+4^{-y}+3^z=6,$$

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\left(2^x\right)^2+\left(4^{-y}\right)^2+\left(3^z\right)^2}=\sqrt{4^x+16^{-y}+9^z}=\sqrt{9}=3,$$

$$\left|\bar{b}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\,.$$

В соответствии с формулой (6. 9) должно выполняться неравенство $\left(\bar{a},\,\bar{b}\,\right)\le\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$, т.е. в нашем случае $2^x+4^{-y}+3^z\le 3\sqrt{3}$.

Поскольку $3\sqrt{3}<6$, то получаем противоречие с первым уравнением системы. Это означает, что исходная система не имеет решений.

Ответ: не имеет решений.

Замечание. *Правые части уравнений системы в примере 6.10 можно изменить таким образом, что система будет иметь решение. Предлагаем читателю самостоятельно подобрать для правой части второго уравнения такое число при неизменном первом уравнении и найти решения полученной совместной системы.*

Пример 6.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x - 4\sin 2y + 4\sin 2z = 9, \\ \cos^2 x + \sin^2 y + \sin^2 2z = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим векторы

$$\bar{a} = (\cos x; \sin 2y; \sin 2z) \qquad \text{и} \qquad \bar{b} = (1; -2; 2).$$

С учетом введенных векторов исходная система может быть записана в следующем виде

$$\begin{cases} (\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{9}{2}, \\ |\bar{a}|^2 = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\bar{b} = \sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $|\bar{a}| = \dfrac{3}{2}$, $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 3 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$, то $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$. Из последнего равенства следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и потому

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin 2y}{-2} = \frac{\sin 2z}{2}.$$

Откуда $\sin 2y = -2\cos x$, $\sin 2z = 2\cos x$. Подставив правые части этих равенств в первое уравнение системы, получим

$$2\cos x - 4(-2\cos x) + 4 \cdot 2\cos x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Решив это простейшее уравнение и уравнения $\sin 2y = -1$, $\sin 2z = 1$, найдем решения системы.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m$,

$z = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $n, m, k \in Z$.

Пример 6.12. Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} . \qquad (6.14)$$

Решение. Выражение в левой части неравенства (6.14) называется среднеквадратическим n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а смысл неравенства (6.14) заключается в том, что среднее арифметическое n чисел меньше или равно их среднеквадратическому.

Введём в рассмотрение n – мерные векторы

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ и } \overline{b} = (1,1,\ldots,1)$$

и применим к ним неравенство Коши – Буняковского (6.13). Учитывая, что в данном случае

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = \sum_{k=`}^{n} a_k ,$$

$$\left(\overline{a}, \overline{a}\right) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ,$$

$$\left(\overline{b}, \overline{b}\right) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 = n ,$$

получаем неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ,$$

из которого, в свою очередь, следует неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} a_k^2} \quad \text{и} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \le \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{n} \le \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}} . \blacksquare$$

Пример 6.13. Докажите, что если произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge n . \qquad (6.15)$$

Решение. Приведём доказательство, следуя [3].

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Пусть среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хотя бы два не равны друг другу. Выберем из них два таких, что одно из них меньше 1, а другое больше 1. Не умаляя общности, можем считать, что это

x_1 и x_2 и пусть $x_1 < 1$, $x_2 > 1$. Тогда x_1 и x_2 удовлетворяют неравенству $x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2$. Действительно

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 - (1 + x_1x_2) > 0.$$

Заменив числа x_1, x_2 на 1 и x_1x_2 соответственно, получим набор из n чисел $1, x_1x_2, x_3, ..., x_n$ такой, что произведение этих чисел вновь равно 1, а сумма

$$1 + x_1x_2 + x_3 + ... + x_n < x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Если теперь $x_1x_2 = x_3 = ... = x_n = 1$, то

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > n.$$

Если же среди чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ хотя бы два вновь не равны друг другу, то среди них есть одно число меньше 1, а другое больше 1.

Пусть это x_1x_2 и x_3, тогда $x_1x_2 + x_3 > 1 + x_1x_2x_3$. Вновь заменим x_1x_2 и x_3 на 1 и $x_1x_2x_3$ соответственно. Получим новый набор из n чисел $1, 1, x_1x_2x_3, x_4, ..., x_n$, произведение которых равно 1, а сумма удовлетворяет неравенству

$$1 + 1 + x_1x_2x_3 + x_4 + ... + x_n < x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Продолжая, при необходимости этот процесс и дальше, получим на $n-1$ шаге (или раньше) неравенство

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-1 \text{ раз}} + x_1x_2...x_n < x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Но $x_1x_2...x_n = 1$ и потому окончательно получаем строгое неравенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > n,$$

в предположении, что хотя бы два числа $x_1, x_2, ..., x_n$ не равны 1. ■

Замечание. *Если* $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, *числа* $x_1, x_2, ..., x_n$ *положительны, то* $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ *тогда и только тогда, когда* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Пример 6.14. Докажите неравенство

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n > 0: \quad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}. \quad (6.16)$$

Решение. *Выражение в правой части неравенства (6.16) называется* ***средним геометрическим*** *n чисел* $a_1, a_2, ..., a_n$, *а само неравенство «говорит» о том, что среднее арифметическое* n *положительных чисел не меньше их среднего геометрического.*

Образуем из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ n новых чисел

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}, \quad ..., \quad x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}.$$

Они положительны, а их произведение равно 1. Значит эти числа удовлетворяют неравенству (6.15), т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} \geq n,$$

что равносильно доказываемому неравенству (6.16). ■

Комментарий к примеру 6.14

1. Доказанное неравенство (6.16) называется неравенством ***Коши*** *и часто записывается в виде*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

2. Знак равенства в (6.16) имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

6.2. Применение неравенств к решению задач

Неравенства (6.1) и его обобщение (6.16) можно использовать для нахождения наименьшего значения суммы двух, трёх и более переменных положительных величин.

Пример 6.15. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x + 16\sqrt{\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. Способ 1. Типовое решение примера проводится с использованием производной. Примем $t = \operatorname{tg} x$, $t > 0$, тогда $y = t + \frac{16}{\sqrt{t}}$. Заметим, что для положительных близких к нулю значений t функция $y(t)$ принимает сколь угодно большие значения за счёт слагаемого $16t^{-\frac{1}{2}}$, а при $t \to +\infty$ $y(t) \to +\infty$ - за счёт первого слагаемого.

Найдём производную $y'_t = 1 - 8t^{-\frac{3}{2}}$; и критические точки функции $y(t)$: $y'_t = 0$: $t^{\frac{3}{2}} = 8$, откуда $t_0 = 4$. При этом $y'_t < 0$ при $t < 4$ и $y'_t > 0$ при $t > 4$. Поэтому $t_0 = 4$ – точка локального минимума функции $y(t)$. В этой точке $y(t)$ принимает и наименьшее возможное значение $y(4) = 12$.

Способ 2. Воспользуемся неравенством Коши (6.16) при $n = 3$, т.е.

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Имеем

$$f(x) = \operatorname{tg} x + 16\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x + 8\sqrt{\operatorname{ctg} x} + 8\sqrt{\operatorname{ctg} x} \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \cdot 8\sqrt{\operatorname{ctg} x} \cdot 8\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 12.$$

Здесь приняли $a = \operatorname{tg} x$, $b = c = 8\sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

Ответ: $f_{\text{наим}} = 12$.

Комментарий к примеру 6.15. *Неравенство Коши можно применять лишь в тех случаях, когда есть уверенность, т.е. если доказано, что наименьшее значение выражения*

$$a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)$$

д о с т и г а е т с я *в условиях конкретного примера. В частности, если множество значений* $E(a_k(x))$ *каждого слагаемого* *совпадает с бесконечным промежутком* $(0,+\infty)$, *то применять неравенство Коши можно.*

Напомним, что наименьшее значение выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ *достигается при* $a_1(x)=a_2(x)=...=a_n(x)$.

Пример 6.16. Найдите наименьшее значение функции

а) $y=x^2+\dfrac{16}{x^2}$; б) $y=x^2+\dfrac{16}{x^2+4}$; в) $y=x^2+\dfrac{16}{x^2+8}$.

Решение. а) здесь $a(x)=x^2$ и $b(x)=\dfrac{16}{x^2}$ принимают все значения из промежутка $(0;+\infty)$. Поэтому применять неравенство Коши (при $n=2$) можно. Имеем

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}=8.$$

Значит, $f_{наим}=8$ и достигается при $x^2=\dfrac{16}{x^2}$, т.е. при $x=\pm 2$, $a(2)=b(2)=4$;

б) $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x^2+4}=x^2+4+\dfrac{16}{x^2+4}-4$. Положим $a(x)=x^2+4$, $b(x)=\dfrac{16}{x^2+4}$. Здесь $a(x)\in[4,+\infty)$, $b(x)\in(0;4]$, причём $E(a(x))\cap E(b(x))=4$;

$$a(x)+b(x)\ge 2\sqrt{\left(x^2+4\right)\cdot\frac{16}{x^2+4}}=8.$$

Достигается наименьшее значение при $x^2+4=\dfrac{16}{x^2+4}$, откуда $x_0=0$, $a_0=b_0=4$. Значит, и в этом случае можно применять неравенство Коши. Окончательно имеем $f_{наим}=8-4=4$;

в) в данном случае формальное применение неравенства Коши приводит к неправильному результату:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2+8} = x^2 + 8 + \frac{16}{x^2+8} - 8 \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\left(x^2+8\right)\frac{16}{x^2+8}} - 8 = 0\,.$$

Здесь $a(x) = x^2 + 8$, $a(x) \in [8,+\infty)$; $b(x) = \dfrac{16}{x^2+8}$, $b(x) \in (0;2]$, как следствие, $E(a(x)) \cap E(b(x)) = \varnothing$ и $a(x) = b(x)$ при $x^2 + 8 = 4$, что невозможно.

Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2+8}$ равно 2 и достигается при $x = 0$ (докажите!).

Ответ: а) $f_{наим} = 8$; б) $f_{наим} = 4$; в) $f_{наим} = 2$.

Пример 6.17. Точка M внутри круга делит хорду на отрезки длиной 9 и 36. Найдите наименьшую возможную длину хорды того же круга, проходящей через точку M.

Решение. Пусть x и y длины отрезков искомой хорды минимальной длины. В соответствии со свойством хорд окружности, проходящих через одну точку, получаем уравнение $xy = 9 \cdot 36$, связывающее переменные x и y. По условию задачи требуется найти наименьшее значение выражения $x + y$ – длины хорды – при условии, что $xy = 9 \cdot 36$.

Имеем $y = \dfrac{9 \cdot 36}{x}$, $x + y = x + \dfrac{9 \cdot 36}{x}$. Теперь необходимо найти наименьшее значение функции одной переменной $f(x) = x + \dfrac{9 \cdot 36}{x}$ при $0 < x < 45$. Применив неравенство Коши (6.1), получим

$$x+\frac{9\cdot 36}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{9\cdot 36}{x}}=36.$$

Достигается это значение при $x=y=18$.

Ответ: 36.

Пример 6.18. Найдите значение параметра a, при котором уравнение

$$\left(\sqrt{49+4\sqrt{3}}\right)^{2x+1}+16\left(\sqrt{49-4\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=a$$

имеет единственное решение.

Решение. Поскольку $\sqrt{49-4\sqrt{3}}=\frac{1}{49+4\sqrt{3}}$, то приняв $\left(\sqrt{49+4\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=t$, $t>0$, получим уравнение

$$t+\frac{16}{t}=a,\ \ a>0.$$

Учитывая, что при $t\in(0,+\infty)$ $t+\frac{16}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}=8$ и что уравнение $t=c$, т.е. $\left(\sqrt{49+4\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=c$, для любого $c\in(0,+\infty)$ имеет единственное решение, получаем что искомым значением параметра будет $a=8$.

Ответ: $a=8$.

Комментарий к примеру 6.18. *Разумеется, найти значение параметра* a *можно было и иначе. Уравнение* $t+\frac{16}{t}=a$ *и равносильное ему на множестве* $(0,+\infty)$ *квадратное уравнение* $t^2-at+16=0$ *имеют единственное решение, когда равен нулю дискриминант квадратного уравнения, т.е. при*

$$a^2-4\cdot 16=0\ \Rightarrow\ a=8.$$

ГЛАВА VII. УПРАЖНЕНИЯ

1. Натуральные и целые числа

1.1. Найдите канонические разложения на простые множители чисел:
а) 3528; б) 10725; в) 18900; г) 121303; д) 9971.

1.2. Исследуйте делимость на 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 чисел: а) 246; б) 3465; в) 1368; г) 4641.

1.3. Исследуйте делимость на 7, 9, 11, 13 чисел:

а) 164045; б) 49608; в) 19239; г) 43301.

1.4. Найдите НОД и НОК чисел:

а) 84 и 350; б) 924 и 2574.

1.5. Найдите НОД чисел:

а) 924 и 2574; б) 4788 и 11704

с помощью алгоритма Евклида.

1.6. Какая цифра x должна быть в составе числа $\overline{13x60}$, чтобы оно делилось на:

а) 2; б) 3; в) 5; г) 7; д) 8; е) 9; ж) 11.

1.7. Найдите все числа вида $\overline{36x3y}$, где x, y – цифры, которые делятся на: а) 28; б) 36; в) 28 и 36.

1.8. Найдите все числа вида $\overline{2x72y}$, где x, y – цифры, которые делятся на: а) 72; б) 88; в) 72 и 88.

1.9. Найдите все двузначные числа, в частности и вида $\overline{x0}$, разность между каждым из которых и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, кратна 7.

1.10. При умножении пятизначного числа $\overline{xy0zt}$ на 4 получили число $\overline{m0np0}$. Найдите первое число, если известно, что $m+n+p=14$ и $x, y, z, t \in \{1,2,...,9\}$.

1.11*. Найдите наименьшее и наибольшее трёхзначные натуральные числа, при делении каждого из которых на 5 в остатке получается 4, при делении на 6 – в остатке 2, а при делении на 7 – в остатке 3.

1.12*. Дано четырёхзначное натуральное число. Если первую цифру этого числа перенести на последнее место и к новому числу прибавить 300, то полученное в итоге число будет в 3 раза больше исходного. Найдите первоначальное число.

1.13*. Найдите трёхзначное число, если известно, что оно делится на 9 и в 42 раза больше суммы его цифр.

1.14*. При делении трёхзначного числа m на двухзначное n в частном получили 8, а в остатке 18. При делении этого же числа m на 25 в остатке получили 2. Найдите m и n, если известно, что m меньше 300.

1.15*. В условиях задачи 1.14 найдите все пары m и n $(100 \le m \le 999)$.

1.16. Одно натуральное число больше другого на 411. При делении большего числа на меньшее в частном получается 3, а в остатке 23. Найдите эти числа.

1.17. Найдите сумму одинаковых членов двух арифметических прогрессий: 1) 7, 26, 45, …, 957; 2) 4, 27, 50, …, 1039.

1.18. Напишите формулу общего члена и найдите сумму членов арифметической прогрессии, составленной из одинаковых членов прогрессий:

5, 23, 41, …, 1463 и 11, 41, 71, …, 1781.

1.19. Докажите, что для любого натурального n число $n^3 + 2n^2 + 3$ не делится на 5.

1.20. Найдите все целые значения n, при каждом из которых число $n^2 + n + 1$ делится на 3.

1.21. Докажите, что число $n^2 + n + 2$ не делится на 3 ни при каком целом n.

1.22. Найдите все целые значения n, при каждом из которых число $n^3 + 2n^2 + 7$ делится на 7.

1.23*. Докажите, что для любого целого числа n:

а) число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ делится на 24;

б) число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120;

в) число $(n^3 + 3n^2 - n - 3)\cdot(n^3 - 4n)$ делится на 720.

1.24*. Докажите, что если натуральное число n делится на 4, но не делится на 5, то число $n^4 - 36$ делится на 10.

1.25. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ делится на 128.

1.26. Докажите, что для любого натурального n число $n^6 - 2n^4 + n^2$ делится на 36.

1.27. Докажите, что сумма квадратов двух нечётных чисел не равна квадрату целого числа.

1.28*. Найдите все натуральные n, для каждого из которых число $n^4 - 5n^2 + 4n$ делится на 16.

1.29. Докажите, что для любого натурального n число $n^5 - n$ делится на 30.

1.30*. Найдите все натуральные n, для каждого из которых число $n^5 - n$ делится на 25.

1.31. Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

1.32. Найдите цифру, на которую оканчивается натуральное число: а) 27^{31}; б) 58^{50}; в) 34^{18}; г) 83^{97}; д) 72^{35}; е) 39^{47}.

1.33. На какую цифру оканчивается число:

а) $257^{114} + 118^{26}$; б) $146^{29} + 317^{123}$;

в) $2007^{2007} + 2008^{2008} + 2009^{2009}$; г) $42^{99} + 113^{30}$;

д) $274^{123} + 38^{43}$?

1.34. Найдите остаток от деления:

а) 26^{14} на 9; б) 17^{35} на 7; в) 42^{99} на 8.

1.35. Найдите остаток от деления:

а) $118^{118} + 214^{214}$ на 11; б) $214^{214} - 118^{118}$ на 11;

в) $118^{118} \cdot 214^{214}$ на 11.

1.36. Сравните числа:

а) $a = 36^{72}$ и $b = 72^{36}$; б) $a = 3^{500}$ и $b = 4^{400}$;

в) $a = 3^{28}$ и $b = 2^{44}$; г) $a = 3^{27}$ и $b = 2^{45}$.

1.37. Найдите сумму трёхзначных чисел, каждое из которых кратно 12 и 14.

1.38. Найдите сумму трёхзначных чисел, каждое из которых кратно хотя бы одному из чисел 12 или 14.

1.39. Сколько различных цифр и сколько нулей содержится в десятичной записи числа $40^{22} \cdot 25^{24}$?

1.40. Сколько знаков и сколько различных цифр содержится в десятичной записи числа $80^{20} \cdot 125^{15}$?

1.41. Сколько нулей содержится в десятичной записи числа 250!

1.42. Найдите кратность вхождения числа 2 в разложение на простые множители числа 250!

1.43. Найдите кратность вхождения числа 2 в разложение на простые множители числа $A = 160 \cdot 161 \cdot 162 \cdot \ldots \cdot 317 \cdot 318$.

1.44. Найдите наибольшее трёхзначное число, при делении которого на 36 в остатке получается 15, а при делении на 48 – в остатке 27.

1.45. Найдите все трёхзначные числа, при делении каждого из которых на 36 в остатке получается 23, а частное от деления такого числа на 42 равно 15.

1.46. Установите, какие числа из списка а…з могут, а какие не могут быть квадратом целого числа и почему?

а) 222111555;	б) 7683;	в) 438;	г) 729;
д) 765150;	е) 7225;	ж) 290114;	з) 87.

1.47. Докажите, что для нахождения квадрата целого числа, оканчивающегося на 5, т.е. $\left(\overline{m5}\right)^2$, $m \in \mathbf{N}$, нужно умножить m на $(m+1)$ и к полученному числу приписать справа 25. Например, $(75)^2 = \overline{(7 \times 8)25} = 5625$.

1.48. Квадрат двузначного числа записан с помощью цифр 0; 2; 3; 5. Найдите двузначное число и его квадрат.

1.49. Четырёхзначное число, не превосходящее 5000, является квадратом целого числа и записывается с помощью трёх цифр 0; 2; 5. Найдите все такие числа.

1.50. Может ли число $15n^3+10n+3$, $n\in\mathbf{N}$, быть квадратом целого числа.

1.51. Докажите, что число n^3+3n+5 может быть квадратом целого числа. Найдите первые три (в порядке возрастания) значения n, при каждом из которых n^3+3n+5 является квадратом целого числа.

1.52. Докажите, что сумма квадратов трёх последовательных чисел не может быть квадратом целого числа.

1.53. Найдите все целые значения n, при каждом из которых дробь $\dfrac{2n^2-5n}{n-3}$ является целым числом.

1.54. Найдите среднее арифметическое всех $n\in\mathbf{Z}$, при каждом из которых дробь $\dfrac{3n^2+2n-4}{n+2}$ является целым числом.

1.55. Найдите произведение всех $n\in\mathbf{Z}$, при каждом из которых дробь $\dfrac{2n^2+7n+3}{n^2+n-6}$ является целым числом.

1.56. Найдите все значения p, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-px-3x+3p}{x^2+x-6}=0$ имеет единственное решение.

1.57. Найдите все $a\in\mathbf{Z}$, при каждом из которых уравнение $x^2+ax+8=0$ имеет целые корни.

1.58. Сколькими способами можно составить сумму 1 рубль 59 копеек (159 коп.) из монет достоинством по 3 и 5 копеек?

1.59. Школа заказала комплект книг по математике. Книги укладывают в коробки двух типов. В коробки первого типа входит 20, а второго – 25 книг. Если все книги разместить в коробки первого типа, то потребуется 94 коробки, при этом одна из них будет заполнена частично; при размещении книг в коробки второго типа в одной коробке вновь окажется лишь 3 книги. Сколько книг в комплекте?

1.60. Неполное частное от деления некоторого числа $n \in \mathbf{N}$ на 70 на 11 больше неполного частного от деления n на 90 и на 5 меньше частного от деления n нацело на 65. Найдите это число.

1.61. Натуральное число n делится на 72; неполное частное от деления n на 45 на 22 больше неполного частного от деления n на 60, а остаток от деления n на 45 на 15 больше остатка от деления n на 60. Найдите n.

1.62. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 17 и сумма цифр которого равна 17.

1.63. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 23 и сумма цифр которого равна 23.

1.64. Найдите все натуральные n, для каждого из которых число n^8+4 делится на 10.

1.65. Найдите числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, если их произведение равно а) 1008; б) 1462; в) 3640.

2. Уравнения, системы уравнений и неравенства в целых числах

Найдите все целочисленные решения уравнений 2.1-2.4.

2.1. а) $7x-15y=41$; б) $42x-33y=102$;
в) $42x-33y=100$; г) $29x+47y=-10$.

2.2. а) $17x+31y=6$; б) $19x+36y=29$.

2.3. а) $2x^2+5xy-3y^2-7x+7y=7$;
б) $x^2+6xy+36y^2+4x+102y+63=0$.

2.4. а) $15xy-20x-18y+16=0$;
б) $x^2+2xy-5x-y+1=0$.

Найдите целочисленные решения систем уравнений 2.5-2.8.

2.5. $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 6x-y-z=3. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} x-2y+3z=-4, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x + 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z = 0. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 2x - y + 5z = 3, \\ 3x + 4y - 2z = 7. \end{cases}$

2.9. Найдите все целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 24x + 16y + 95 < 0, \\ x^2 + y^2 - 10x + 6y + 29 < 0, \\ y + x > 3. \end{cases}$$

2.10. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

3. Рациональные и действительные числа

3.1. Сравните числа:

а) $a = \dfrac{217}{218}$ и $b = \dfrac{220}{221}$; б) $a = 2{,}7(6)$ и $b = 2{,}76$;

в) $a = \dfrac{25}{9}$ и $b = 2{,}7778$; г) $a = -\dfrac{25}{9}$ и $b = -2{,}777$.

3.2. Обратите десятичную периодическую дробь в обыкновенную:

а) $0,(17)$; б) $2,(319)$; в) $0{,}37(253)$; г) $3{,}254(59)$.

3.3. Запишите рациональное число в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) $\dfrac{13}{33}$; б) $\dfrac{502}{495}$; в) $\dfrac{91}{333}$; г) $\dfrac{14233}{4950}$.

3.4. Решите уравнение

$$\frac{0,(17)x + 0,(3)}{0,(21) + 0,(19)x} = 3.$$

3.5. Решите уравнение

$$0,8(08)x^2-1,4(14)x-0,9(09)=0.$$

3.6. Вычислите

а) $6\cdot 1,2(7)-4\cdot 2,(5)$; б) $\dfrac{2\cdot 3,(12)-3\cdot 1,2(3)-0,0(63)}{5\cdot 1,(27)-2,(23)}$.

Результат запишите в виде десятичной периодической дроби.

3.7. Решите уравнение $3\cdot[x]=[3x]$.

3.8. Решите уравнение $\left[\dfrac{3x+13}{8}\right]=\dfrac{5x-6}{4}$.

3.9. Решите неравенство $\{x\}>x^2-4x+4$.

4. Степени действительного числа

4.1. Вычислите (примеры 4.1-4.6):

а) $3^4+(-3)^2+3\cdot(-3)^3$; б) $3^3\cdot 9^{-2}\cdot 27^2$; в) $\dfrac{(-3)^4\cdot 9^{-3}}{3^7\cdot(27)^{-4}}$;

г) $(3^2\cdot 5)^2$; д) $\left((3^2 2^3)^3-(3^3\cdot 2^2)^2\right):3^6$.

4.2. а) $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-3}\cdot 5^4$; б) $(-4)^{-2}\cdot 2^4+(-8)^{-3}\cdot 4^3$;

в) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5\cdot 54^{-3}\cdot 16^4$; г) $(-4)^5\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^4:343$.

4.3. а) $(2^3)^2$; б) 2^{3^2}; в) $\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right)^{-3}$; г) $\left(\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}\right)^{-1}$;

д) $\left((-8)^{-1}\right)^{-2}$; е) $(-2)^{2^3}$.

4.4. а) $\dfrac{7}{3^{-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot 12^{2}$; б) $\left(\left(\left(2^{-1}\right)^{2}\right)^{3}\right)^{0}$;

в) $\left(\left(2^{-1}\right)^{2}\right)^{-5}$; г) $\left(\left(2^{-2}\right)^{3}\right)^{2}\cdot 8^{5}$.

4.5. а) $2^{-7}\cdot 3^{-4}\cdot 18^{2}\cdot 20^{4}$; б) $63^{4}\cdot 49^{-2}\cdot 45^{-3}\cdot 625$;

в) $\dfrac{3^{4}\cdot 15^{-3}\cdot 2^{-6}}{3^{-3}\cdot 5^{2}\cdot 20^{-4}}$; г) $\dfrac{343\cdot 28^{-5}\cdot 32^{4}}{125^{-3}\cdot 625^{2}\cdot 56^{-2}\cdot 1024}$.

4.6. а) $5^{2}\cdot(1{,}6)^{-4}\cdot(1{,}92)^{3}-\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2}\cdot 18^{-3}\cdot 32^{2}$;

б) $6^{3}\left(3^{-1}+2^{-1}\right)\cdot\left(9^{-1}-6^{-1}+4^{-1}\right)$;

в) $(6{,}25)^{-2}\cdot(17{,}5)^{4}-2\cdot(3{,}75)^{-4}\cdot(11{,}25)^{3}\cdot(12{,}5)^{2}$.

4.7. Сравните числа a и b:

а) $a=2^{3^{2}}$, $b=\left(2^{3}\right)^{2}$; б) $a=9\cdot 36^{7}$, $b=2^{14}\cdot 3^{16}$;

в) $a=\left((-2)^{-3}\right)^{-5}$, $b=\left((-3)^{2}\right)^{3}$; г) $a=216^{8}$, $b=72^{10}$;

д) $a=216^{8}$; $b=72^{11}$.

4.8. Найдите числовое значение выражения

$\dfrac{a^{-3}\cdot b^{2}\cdot(ab)^{4}}{a^{8}\cdot b^{5}\cdot(ab)^{-7}}$ при $a=121$ и $b=2$.

4.9. Запишите выражение в виде $Aa^{m}b^{n}$, где $A\in\mathbf{R}$, $m,n\in\mathbf{Z}$:

а) $\dfrac{\left(2a^{2}\right)^{4}\cdot(3ab)^{-4}\cdot\left(18b^{3}\right)^{3}}{(48ab)^{3}\cdot\left(12a^{-1}\right)^{-3}}$; б) $\dfrac{\left(3a^{3}\right)^{-2}\cdot\left(-4ab^{2}\right)^{3}\cdot\left(24a^{2}b\right)^{2}}{\left(72ab^{2}\right)^{3}\cdot\left(27a^{-2}b\right)^{-2}}$.

4.10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}$ при $a<0$; б) $\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}$ при $a>0$;

в) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; г) $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}$; д) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt[6]{b}\right)^2$.

4.11. Решите уравнения:

а) $\sqrt[x^2+x]{3}=\sqrt[6]{3}$; б) $3^{\frac{1}{x^2+x}}=\sqrt[6]{3}$; в) $\sqrt[x^2-6]{2}=2^{\frac{1}{x}}$;

г) $2^{\frac{1}{x^2-6}}=2^{\frac{1}{x}}$; д) $\sqrt[2x^2+2]{5}=\sqrt[5x]{5}$; е) $5^{\frac{1}{2x^2+2}}=5^{\frac{1}{5x}}$.

4.12. Вычислите (примеры 4.12-4.16):

а) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{81\cdot 243^4}}}$; б) $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{32\sqrt{32}}}\cdot\sqrt[8]{2}$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{72}\cdot\sqrt[5]{216}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{12^4}\cdot\sqrt[4]{144}}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}}}}\cdot\sqrt[3]{54}+\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{3^{18}}}}\cdot\sqrt[4]{48}$.

4.13. а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{17+4\sqrt{15}}+\sqrt{17-4\sqrt{15}}$;

в) $\sqrt{13-2\sqrt{22}}-\sqrt{13+2\sqrt{22}}$;

г) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$.

4.14. а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; б) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt[3]{19\sqrt{7}-50}-\sqrt[3]{50+19\sqrt{7}}$.

4.15. а) $\sqrt{2+5\sqrt{2}-\sqrt{99-56\sqrt{3}-14\sqrt{98-40\sqrt{6}}}}$;

б) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{20-\sqrt{2}+\sqrt{39+\sqrt{8}-2\sqrt{68-24\sqrt{8}}}}$.

4.16. а) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ при $x\in[4;8]$;

б) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ при $x=16$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x=\sqrt{\dfrac{9}{8}}+\sqrt{\dfrac{8}{9}}$.

4.17. Сравните числа:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

4.18. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

4.19. Вычислите:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-3}-\dfrac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{7}}+\dfrac{10}{5-\sqrt{15}}$;

б) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{167}+\sqrt{169}}$.

4.20. Сравните числа:

а) $\sqrt{272\cdot 268}$ и 270; б) $\sqrt[3]{511\cdot 513}$ и 63;

в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и $1+\sqrt{20}$; г) $a=\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}}$ и $b=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[10]{125}}}$.

4.21. Найдите области определения функций:

а) $y=\left(2x^2+x-15\right)^{\frac{3}{5}}$; б) $y=\sqrt[5]{\left(2x^2+x-15\right)}$;

в) $y=\left(\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^{\frac{1}{3}}$; г) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x}$.

5. Модуль числа. Уравнения и неравенства с модулем

Вычислите значение числового выражения (примеры 5.1-5.9).

5.1. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

5.2. $\sqrt{15-4\sqrt{14}}+\sqrt{15+\sqrt{224}}$.

5.3. $\sqrt{25-4\sqrt{39}}+\sqrt{25+4\sqrt{39}}$.

5.4. $\sqrt{\sqrt{33-\sqrt{800}}+\sqrt{24+\sqrt{512}}}$.

5.5. $A=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-2x^2+1$, если $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{7}{6}}+\sqrt{\dfrac{6}{7}}\right)$.

5.6. $A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если

а) $x=\dfrac{\sqrt{44}+\sqrt{46}}{\sqrt{45}}$; б) $x=\sqrt{\dfrac{22}{23}}+\sqrt{\dfrac{23}{22}}$; в) $x=\sqrt{\dfrac{23}{22}}+\sqrt{\dfrac{21}{22}}$.

5.7. $A=\sqrt{x^2-6x+10-2\sqrt{x^2-6x+9}}$, если $x=\pi$.

5.8. $A=\sqrt{x^2-19x+89+\sqrt{121-22x+x^2}}$, если $x=3{,}5\pi$.

5.9. $A=\sqrt{\left(\dfrac{x^2+3}{2x}\right)^2-3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2}}$, если

а) $x=2$; б) $x=-2$; в) $x=\sqrt{2}$; г) $x=-\sqrt{2}$.

Решите уравнения (примеры 5.10-5.12).

5.10. а) $|2x+3|+|2x-5|=6$; б) $|2x+3|+|2x-5|=8$;

в) $|2x+3|+|2x-5|=12$.

5.11. а) $|x-4|-|x+2|=-6$; б) $|x-4|-|x+2|=0$;

в) $|x-4|-|x+2|=6$; г) $|x-4|-|x+2|=a$, $|a|>6$.

5.12. а) $|x-3|+|x+3|=3x$; б) $|x-3|+|x+3|=2x$;

в) $|x-3|+|x+3|=x+3$; г) $|x-3|+|x+3|=4+\dfrac{3}{2}|x|$;

д) $|x-3|+|x+3|=8-\dfrac{|x|}{2}$; е) $|x-3|+|x+3|+x=|x|$.

5.13. Дано множество точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $3|x-2|+2|x-8|-2x-y=0$. Найдите при этих условиях наименьшее возможное значение каждого из приведённых выражений:

а) $y+3x+2$; б) $y+x$; в) $4y+x-2$;

г) x^2+y^2; д) $x^2-12x+y^2+20$.

5.14. В условиях примера 5.13 найдите в каждом случае а) - д) координаты $(x;y)$ точек $M(x;y)$, в каждой из которых достигается соответствующее наименьшее значение.

5.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $u=x+y$ при условии, что координаты $(x;y)$ точек $M(x;y)$ удовлетворяют условию $x^2+y^2-4|x|-4y=0$.

5.16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-4|x|+3\right|=a$ имеет

а) три различных корня; б) шесть различных корней;
в) восемь различных корней.

5.17. Решите уравнение $\left|x^2-4|x|+3\right|=a$ для всех $a\in(0;1)$.

5.18. Найдите значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-2x-3\right|=x+a$ имеет три различных корня.

5.19. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ |x|+a-y=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

5.20. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 0, \\ y = |x - a| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5.21. Найдите наименьшее положительное значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 24, \\ x^2 - 2ax + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет два различных решения.

5.22. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 0, \\ 3|x| + 4|y| = a \end{cases}$$

имеет два различных решения.

5.23. Найдите множество значений параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $|x - a + 3| \le 5$ является решением неравенства $|x - 3a + 5| \le 7$.

5.24. Найдите множество значений параметра a, при каждом из которых все решения неравенства $|x - a + 3| \le 5$ являются одновременно решениями неравенства $|x - 3a + 5| \le 7$.

5.25. Найдите значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдите эти решения.

5.26. Найдите значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4|x|-9}{x-3}=a$$

а) не имеет решения; б) имеет единственное решение;
в) имеет два решения.

5.27. Найдите значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4|x|-9}{|x|-3}=a$$

а) не имеет решения; б) имеет единственное решение;
в) имеет два решения.

5.28. Найдите значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{4|x|-9}{|x|-3}\right|=a$$

а) имеет два решения; б) три решения; в) четыре решения.

5.29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\big||x-8|-4\big|=ax$ имеет три различных решения.

5.30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\Big|\big||x-8|-2\big|-3\Big|=ax$ имеет пять решений.

Найдите площадь фигуры на плоскости, заданной системой неравенств (примеры 5.31-5.40).

5.31. $\begin{cases} 3\cdot|x|+|y|\le 6, \\ |y|\le 3. \end{cases}$

5.32. $\begin{cases} y\ge |x|+x, \\ 7y\le 6x+24. \end{cases}$

5.33. $\begin{cases} 2|y|\ge \sqrt{3}(|x|+x), \\ x^2+y^2\le 15. \end{cases}$

5.34.* $\begin{cases} \big||x|-|y|\big|\le 2, \\ x^2+y^2\le 10. \end{cases}$

5.35. $\begin{cases} y \ge |x+2| + |x-2|, \\ y \le 16 - (|x+3| + |x-3|). \end{cases}$ **5.36.** $\begin{cases} y \ge x, \\ y \le \sqrt{8|x| - x^2}. \end{cases}$

5.37.* $\begin{cases} y \ge -8 + |x+3| + |x-3|, \\ y \le \sqrt{4|x| - x^2}. \end{cases}$ **5.38.** $\begin{cases} (y-2x)\left(y - \dfrac{x}{4}\right) \le 0, \\ |x| \le 4. \end{cases}$

5.39. $\begin{cases} (y-2x)\left(y - \dfrac{x}{2}\right) \le 0, \\ (y+x-27)\left(y - \dfrac{1}{5}(x-27)\right) \le 0. \end{cases}$

5.40. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 \le 9, \\ y^2 - 7y + 6 \le 0, \\ |y-x| \le 4. \end{cases}$

5.41. Найдите площадь фигуры на плоскости, точки $(x;y)$ которой удовлетворяют неравенству $\big||x|-4\big| + \big||y|-4\big| \le 6$.

5.42. Найдите площадь фигуры на плоскости, точки $(x;y)$ которой удовлетворяют неравенству:

а) $\sqrt{12x - x^2 - 20} \le y + 6 \le 14 - \sqrt{12x - x^2 - 20}$;

б) $\sqrt{12x - x^2 - 20} \le y + 6 \le 14 + \sqrt{12x - x^2 - 20}$.

5.43. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ на множестве $D: \big||x|-1\big| + \big||y|-1\big| \le 2$.

6. Метод математической индукции. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Выведите формулы (6.1-6.14), используя теорему 4.1 (см. примеры 4.4 и 4.5).

6.1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

6.2. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

6.3. $2+4+6+...+2n=n(n+1)$.

6.4. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

6.5. $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

6.6. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6.7. $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

6.8. $2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2(n(n+1))^2$.

6.9. $1^4+2^4+3^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

6.10. $1^4+3^4+5^4+...+(2n-1)^4=\dfrac{n(4n^2-1)(12n^2-7)}{15}$.

6.11. $2^4+4^4+6^4+...+(2n)^4=$

$=\dfrac{8n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15}$.

6.12. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

6.13. $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

6.14. $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+...+n(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

6.15. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

6.16. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+...+n(3n-1)=n^2(n+1)$.

6.17. $1\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+5\cdot 7\cdot 9+...+(2n-1)(2n+1)(2n+3)=$

$=n(n+2)(2n^2+4n-1)$.

6.18. Докажите тождества 6.1, 6.6, 6.9, 6.12-6.17 методом математической индукции.

6.19. Докажите справедливость тождеств а) – г) $\forall n \in \mathbf{N}$.

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-3)(2n+1)}=\dfrac{(n-1)(4n+1)}{3(4n^2-1)}$, $n \geq 2$.

Указание: $\forall n \in \mathrm{N}$: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;

$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$; $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$;

$\dfrac{1}{(2n-3)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, $n \geq 2$.

Докажите методом математической индукции делимость без остатка натурального числа $A(n)$, $n \in \mathbf{N}$, на $b \in \mathbf{N}$ (примеры 6.20 – 6.27).

6.20. $A(n)=n^3+5n$, $b=6$.

6.21. $A(n)=5^{n+3}+11^{3n+1}$, $b=17$.

6.22. $A(n)=6^{2n}+19^n-2^{n+1}$, $b=17$.

6.23. $A(n)=5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$, $b=19$.

6.24. $A(n)=3^{3n-1}+5\cdot 3^{n-2}$, $b=19$.

6.25. $A(n)=3^{2n+3}+40n-27$, $b=64$.

6.26. $A(n) = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 11$.

6.27. $A(n) = 7^{n+2} + 8^{2n+1}$, $b = 57$.

Вычислите без использования калькулятора с помощью бинома Ньютона.

6.28. $9^5 - 7^5$. **6.29.** $53^3 - 47^3$.

6.30. $72^4 - 68^4$. **6.31**. $55^5 - 45^5$.

6.32. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^5 - y^5 = 2882, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^6 + y^6 = 4160. \end{cases}$

6.33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^5 - y^5 = 3093. \end{cases}$$

6.34. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите:
а) $\left(\sqrt{3}+1\right)^4$; б) $\left(\sqrt{3}-1\right)^6$; в) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^4$.

Элементы комбинаторики

6.35. Сколькими способами можно распределить 6 подарочных наборов между 6 детьми?

6.36. В бригаде из 10 человек трое ежедневно посменно (в три смены) должны работать на кухне. Сколькими способами можно выбрать трёх человек на один день?

6.37. Гонщик должен проехать по маршруту $A \to B \to C \to D$. Известно, что из пункта A в пункт B можно проехать по 3 дорогам, из B в C – по 6, из C в D – по 12. Сколько различных маршрутов может выбрать гонщик?

6.38. Сколько различных пятизначных номеров можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 5 при условии, что нуль не может быть первой цифрой номера и все цифры номера различны?

6.39. Сколько различных шестизначных номеров можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 9 при условии, что нуль не может быть первой цифрой номера и все цифры номера различны?

6.40. В урне 6 черных и 4 белых шара. Сколько существует способов вынуть: а) 2 чёрных и 2 белых шара; б) 3 чёрных и 1 белый; в) 5 чёрных и 4 белых; г) 4 шара любого цвета?

6.41. Из 10 автомобилей марки «А» и 6 автомобилей марки «Б» нужно выбрать 5 автомобилей так, чтобы среди них было: а) 3 автомобиля марки «А»; б) не менее 3 автомобилей марки А. Сколькими способами это можно сделать?

6.42. Сколькими способами могут быть распределены 3 приза между: а) 20 участниками олимпиады; б) 3 победителями?

6.43. В коробке 6 красных, 4 зелёных и 8 синих карандашей. Сколько существует способов вынуть 3 карандаша: а) разных цветов; б) одного цвета?

6.44. Для перевозки 8 крупногабаритных изделий выделено 4 тягача. Один тягач может перевозить только одно изделие. Сколько имеется способов отбора четырёх изделий из 8?

6.45. Из 12 хоккеистов выбираются 3 хоккеиста для включения в национальную сборную. Каждый из них должен войти в состав одной из: а) трёх пятёрок; б) четырёх пятёрок. Сколько существует различных способов пополнения пятёрок?

6.46. Число A равно произведению n различных натуральных чисел, больших 1. Какое наибольшее и наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь A ?

6.47. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы в слове: а) КОРТЕЖ; б) АББАТ; в) БАЛАЛАЙКА?

Элементы математической статистики и теории вероятностей

6.48. Средний рост 10 баскетболистов равен 212 см. Рост самого высокого из них – 230 см. Найдите средний рост остальных 9 баскетболистов.

6.49. Предприятие получило две партии деталей общим весом 5060 кг. Средний вес ящика в первой партии равен 50 кг, а во второй – 51 кг. Сколько ящиков в каждой партии? Найдите средний вес одного ящика в поставке.

6.50. Для данного ряда чисел: 150, 162, 148, 181, 175, 182, 158, 153, 166, 183, 169, 176, 165, 158, 164 – роста (в сантиметрах) 15 учеников класса – составьте вариационный ряд, найдите рост самого высокого и самого низкого учеников, размах выборки, медиану, средний рост и среднее квадратическое отклонение.

6.51. Среди заданных 60 чисел есть положительные, отрицательные числа и нули, причем нулей не меньше 10, но меньше 15. Среднее арифметическое всех чисел равно 12, среднее арифметическое положительных чисел равно 20, отрицательных -5. Сколько положительных, отрицательных чисел и сколько нулей в заданном наборе?

6.52. В классе 25 учеников, из них 20 занимаются спортом, а 15 увлекаются музыкой. В каких пределах может изменяться вероятность события, заключающегося в том, что выбранный случайным образом ученик занимается спортом и одновременно увлекается музыкой?

6.53. В 800 испытаниях автомат отказал 5 раз. Найдите относительную частоту отказов автомата. Сколько раз может отказать автомат в 20000 испытаний?

6.54. Найдите вероятность того, что в наудачу записанном двузначном числе цифры: а) разные; б) одинаковые.

6.55. Даны отрезки длиной 1, 5, 7, 10, 12 см. Найдите вероятность того, что из наудачу выбранных трех отрезков можно построить треугольник.

6.56. Даны отрезки длиной 1, 6, 7, 10, 12 см. Найдите вероятность того, что из наудачу выбранных трех отрезков можно построить треугольник.

6.57. В урне 5 одинаковых пронумерованных от 1 до 5 шаров. Случайным образом по одному из урны извлекаются шары. Найдите вероятность того, что извлекаемые шары будут появляться с номерами, которые идут в возрастающем порядке.

6.58. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнил, что первая из них – четное число, отличное от нуля. Найдите вероятность того, что набрав их наудачу, он наберет их правильно.

6.59. В коробке находятся карточки, на которых записаны простые числа из первой сотни натуральных чисел (от 2 до 97). Случайным образом из коробки вынимаются две карточки. Найдите вероятность того, что числа на этих карточках являются близнецами (близнецы – простые числа, разность между которыми равна 2).

6.60. Решите задачу, аналогичную 6.59 для простых чисел из второй сотни натуральных чисел (от 101 до 199).

6.61. Вершинам правильного шестиугольника присвоены номера от 1 до 6. Найдите вероятность того, что случайно названные два номера вершин принадлежат одному ребру.

6.62. Три хоккеиста делают по одному броску в сторону ворот с большого расстояния. Вероятности попадания в ворота для каждого из них равны соответственно 0,8; 0,7; 0,5. Найдите вероятность того, что в ворота попадет: а) ровно одна шайба; б) две шайбы; в) три шайбы; г) не менее двух шайб; д) хотя бы одна шайба; е) ни одной шайбы.

6.63. Хоккеист Петров делает три броска по воротам. Вероятность забить шайбу вратарю хоккеистом Петровым равна 0,6. Найдите вероятность того, что Петров забьет в ворота: а) ровно одну шайбу; б) две шайбы; в) ни одной шайбы; г) хотя бы одну шайбу.

6.64. Игральный кубик бросается три раза. Найдите вероятности следующих событий:

а) первый раз выпадет 1, второй 2, третий 3;

б) выпадет набор $\{1, 2, 3\}$;

в) выпадут три одинаковых числа;

г) в каждом выбрасывании выпадет четное число.

6.65. Брошены два игральных кубика. Сумма выпавших очков на них равна 7. Найдите вероятность того, что:

а) на каждом из двух кубиков выпали не меньше 3 очков;

б) хотя бы на одном кубике выпало меньше 4 очков.

6.66. Брошены три игральных кубика. Известно, что на одном из них выпала цифра 3, а сумма очков на всех кубиках равна 11. Найдите вероятность того, что:

а) ровно на одном кубике выпало нечетное число очков;

б) хотя бы на одном кубике выпало нечетное число очков.

6.67. Монету бросают до первого появления герба. Найдите вероятность того, что для этого потребуется:

а) одно бросание; б) три бросания; в) пять бросаний.

6.68. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, а вторым 0,6. Найдите вероятность того, что:

а) цель будет поражена ровно одной пулей;

б) цель будет поражена; в) цель не будет поражена.

6.69. В коробке лежат 10 карточек с буквами А, М, Т, Е, И, К. При этом с буквами М и Т – по 2 карточки, с буквой А -3 карточки, с остальными буквами (Е, И, К)– по одной карточке. Из коробки без возврата вынимают по одной карточке. Найдите вероятность того, что карточки, расположенные в порядке их появления образуют слово “МАТЕМАТИКА”.

6.70. Два человека договорились встретиться в определенном месте в промежутке с 12 часов до 12 часов 30 минут. Причем договорились, что пришедший первым ждет другого не более: а) 10 минут; б) 15 минут. Найдите вероятность того, что встреча состоится.

6.71. В круговой конус с образующей, равной 21 см и радиусом основания 3 см вписан шар. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в конус, попадет в шар.

6.72. В коробке 6 красных, 4 зелёных и 8 синих карандашей (пример 6.43). Случайным образом из коробки извлекаются два карандаша. Найдите вероятность того, что извлеченные карандаши:

а) разного цвета; б) одного цвета; в) красного и синего цвета; г) первый красного цвета, а второй – синего.

6.73. В классе 24 ученика могут выполнить норматив по прыжкам в длину с вероятностью 0,9, а 6 учеников – с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик данного класса выполнит норматив.

6.74. Прибор может выйти из строя из-за неисправности хотя бы одного из трех блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока в течение заданного времени равны соответственно 0,9; 0,95; 0,86. Найдите вероятность выхода прибора из строя в течение заданного промежутка времени.

7. Неравенства и их применения

Докажите неравенства 7.1 – 7.15

7.1. $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x^4 + y^4 \geq xy\left(x^2 + y^2\right)$.

7.2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

7.3. $\forall x > 0, y > 0, z > 0: \ \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x} \geq x + y + z$.

7.4. $\forall x > 0, y > 0, z > 0: \ \dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{xz} + \dfrac{z}{xy} \geq \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{2}{z}$.

7.5. $\forall\, 0 < x \leq y \leq z: \ \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{x+z}{y} \leq \dfrac{(x+z)^2}{xz}$.

7.6. $n! < n^n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

7.7. $\forall n \in \mathbf{N}: \ \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$.

7.8. $\forall n \in \mathbf{N}: \ 2 \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

7.9. $\forall n \in \mathbf{N}\left(n \geq 2\right): \ n^n > (n+1)^{n-1}$.

7.10. $\forall n \in \mathbf{N}: \ (n!)^2 > n^n$.

7.11. $\forall n \in \mathbf{N}\left(n \geq 4\right): \ 2^n \geq n^2$.

7.12. $\forall n \in \mathbf{N}: \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

7.13. $\forall x > 0, \ y > 0: \ (x+y)\sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$.

7.14. $x_1 \le \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le x_n$, если $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

7.15. $$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le$$

$$\le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, т.е. ***среднее гармоническое*** n положительных чисел меньше или равно ***среднему геометрическому этих чисел***, а оно меньше или равно ***среднему арифметическому***, которое, в свою очередь, не превосходит их ***среднее квадратичное***.

Решите примеры 7.16-7.20 двумя способами: с помощью производной и с использованием неравенства Коши (5.16) для соответствующего значения n.

7.16. Найдите наименьшее значение функции
$$f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}} + 27x.$$

7.17. Необходимо изготовить коробку в виде прямоугольного параллелепипеда с фиксированным объёмом $v = 512$ см^3 и минимальной суммой длин рёбер. Найдите сумму длин рёбер такого параллелепипеда.

7.18. Найдите наименьшее значение функции:

а) $f(x) = 9\log_2^2 x + \log_x^2 16$;

б) $f(x) = \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x + 8\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x$.

7.19. Найдите значение параметра a, при котором уравнение
$$243\,\mathrm{tg}^2 x + 16\sqrt{2\,\mathrm{ctg}\, x} = a$$
имеет единственное решение.

7.20. Найдите множество значений функции:

а) $f(x)=\sqrt{4\log_3 x+\log_x 81}$;

б) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}+54x$.

7.21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x+2\cos 2y+3\cos 3z=3,\\ \cos^2 x+\cos^2 2y+\cos^2 3z=1.\end{cases}$$

7.22. Найдите наибольшее значение выражения $\cos x+2\cos 2y+3\cos 3z$ при условии, что $\sin x+\sin 2y+\sin 3z\geq\sqrt{6}$.

7.23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3,\\ x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x^2}{y^2}=3.\end{cases}$$

8. Задачи вступительных экзаменов в вузы

8.1. (МГУ, ВМиК) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?

8.2. (МГУ, геологический факультет). Упростите до целого выражение

$$2\cdot\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}}{\sqrt{7-\sqrt{5}}}\cdot 2\sqrt{11}.$$

8.3. (МГУ, мехмат). Разность $\sqrt{\left|20\sqrt{7}-53\right|}-\sqrt{20\sqrt{7}+53}$ является целым числом. Найдите это число.

8.4. (МГУ, мехмат). Найдите наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4\cdot 3^{2k+1}+3^k<1.$$

8.5. (МГУ, мехмат). Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющих уравнению:

а) $n^2=9m^2+7$; б) $n^2-mn-2m^2=7$.

8.6. (МГУ, мехмат). Является ли рациональным число:

а) $\mathrm{tg}5^\circ$; б) $\sin 25^\circ$; в) $\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$?

8.7. (МГУ, ВМиК) Найдите все целые числа n и m, для которых
$2nm+n=14$ и $nm\ge 9$.

8.8. (МГУ) Найдите все пары натуральных чисел n и m, удовлетворяющих условиям:

1) n и m имеют общий целый делитель, больший 4;
2) $45<m<n$;
3) $m+n\le 105$.

8.9. (МГУ, факультет почвоведения) Пусть $m=\sqrt{6}-\sqrt{7}$. Докажите, что число $m^2+\dfrac{1}{m^2}$ является целым.

8.10. (Олимпиада МПГУ) Можно ли, используя все цифры 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, составить восьмизначное число, являющееся квадратом целого числа?

8.11. (МЭСИ) Вычислите

а) $\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot 9$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

8.12. (МГУ, факультет ВМиК) Решите неравенство $[x]\cdot\{x\}<x-1$.

8.13. (Олимпиада “Ломоносов-2007”, ВМиК) Найдите все решения уравнения $[2x]-[x]=5$.

8.14. (МГУ, факультет ВМиК) Решите уравнение

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

8.15. Решите уравнение $2[x]=[2x]$.

8.16. (МГУ, биологический факультет) Найдите все пары целых чисел p и q, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} p^2+q^2<18p-20q-166, \\ 32p-q^2>p^2+12q+271. \end{cases}$$

8.17. (МГУ, факультет почвоведения) Найдите все целочисленные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$$

8.18. (МГУ, экономический факультет) Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3=1701y^3, \\ |x|\le 5. \end{cases}$$

8.19. (МФТИ) Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy+16x+13y+61=0.$$

8.20. (МГУ, факультет психологии) Найдите все положительные решения уравнения

$$2x^2-2xy+x+3y=36.$$

8.21. (МГУ, химический факультет) Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющих уравнению

$$\left(m^2+n^2\right)(m+n-5)=2mn.$$

8.22. (МГУ, экономический факультет) За время хранения вклада в банке проценты по нему прибавлялись ежемесячно сначала в размере 5 % в месяц, затем $11\frac{1}{9}$ %, потом $7\frac{1}{7}$ % и, наконец, 12 % в месяц. Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180 %. Определите срок хранения.

8.23. (МГУ, экономический факультет) Натуральные числа k, ℓ, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую последовательность, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на ℓ и m соответственно. Найдите числа k, ℓ, m, если известно, что при указанных условиях сумма $k+\ell+m$ максимальна.

8.24. (МГУ, мехмат) Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а 2 ученика – на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

8.25. (МГУ, экономический факультет) Линию, связывающую города А и Б, обслуживают самолёты трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолёты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолётов.

8.26. (МГУ, ВМиК) Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трёхкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трёхкомнатных квартир увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

8.27. (ГУ ВШЭ) Фирма при продаже катеров двух типов А и В имеет соответственно прибыль: по типу А – \$ 2000, по типу В – \$ 1000 за каждый катер. Спрос на катера диктует следующие ограничения: общее число катеров, проданных фирмой за неделю, – не менее 12 штук, но меньше 15 штук, число катеров типа В при этом составляет не более 25 % от общего числа проданных за неделю, причём не менее 2 штук. Вычислите максимальную прибыль фирмы за неделю и число проданных катеров каждого типа.

8.28. (ГУ ВШЭ) Жидкость налита в бутыли вместимостью по 40 литров, при этом одна из бутылей оказалась не совсем полной. Если же эту жидкость перелить в бутыли вместимостью по 50 литров, то такие бутыли будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если же эту жидкость перелить в бутыли вместимостью по 70 литров, то понадобится ещё на 4 бутыли меньше. При этом вновь одна бутыль будет не совсем полной. Сколько было литров жидкости?

8.29. (ГУ ВШЭ) Функция $x^3+\dfrac{27}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$ принимает наименьшее значение при

1) $x=\sqrt{6}$; 2) $x=\sqrt{12}$; 3) $x=\sqrt{3}$; 4) $x=3$; 5) $x=6$.

8.30. (ГУ ВШЭ) Наименьшее значение функции

$-\log_4\cos x-\log_{\cos x}16$ на промежутке $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ лежит в пределах **1**. $-\infty<y_{min}\le 2{,}5$. **2**. $2{,}5<y_{min}\le 3$. **3**. $3<y_{min}\le 3{,}5$. **4**. $3{,}5<y_{min}\le 4$. **5**. $4<y_{min}\le 999$.

8.31. (МГУ, мехмат) Найдите все тройки целых чисел x, y, z, для которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}}+\frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}}>\frac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}}+x^2+7x+11.$$

9. Задачи группы С6

9.1. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $2012!$ делится на 2^n.

9.2. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $2012!$ делится на 10^n.

9.3. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $2012!$ делится на 72^n.

9.4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $2012!$ не делится на n^n.

9.5. Найдите наибольшее простое число p, для которого существует натуральное число k, $k > 38$ такое, что $2012!$ делится на p^k.

9.6. Найдите все натуральные числа n, квадраты которых имеют вид $\overline{xyzz5}$, где x, y, z – цифры и $x \neq 0$.

9.7. Найдите все натуральные числа n такие, что сумма $1+2+\ldots+n$ является трехзначным натуральным числом, которое записывается одинаковыми цифрами.

9.8. (Олимпиада ГУ ВШЭ – 2010) Натуральные числа a, b, c имеют соответственно 6, 9, 10 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). Известно, что НОД(a, b, c)=15. Найдите НОД(a, b)$\times$ НОД(b, c).

9.9. Докажите, что разность между произвольным трехзначным числом и числом, полученным из него перестановкой первой и последней цифр делится на 99, т.е. $\left(\overline{xyz}-\overline{zyx}\right) \vdots 99$.

9.10. Найдите все пары натуральных чисел m и n, кратных 5 и удовлетворяющих уравнению $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{18}$.

9.11. Для какого наименьшего натурального числа n число $n!$ делится на: а) 640, б) 4480, в) 250?

9.12. Найдите все пары натуральных значений n и m, являющихся решением уравнений:

а) $3^n = n! + m!$; б) $4^{n-1} - n! = 8 \cdot 5^m$.

9.13. Решите в натуральных числах уравнение

$$n! + 5n + 13 = k^2.$$

9.14. Среднее арифметическое пяти чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равно 40. К первому числу x_1 прибавили 100, каждое из четырех других чисел умножили на 5. Среднее арифметическое полученных пяти чисел равно 180. Найдите первое число в исходной совокупности и сумму других четырех чисел этой же совокупности.

9.15. (ЕГЭ 2011) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (-5), среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (-18).

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

9.16. (ДЕМО ЕГЭ 2012) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (-3), среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (-8).

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

9.17. (Подготовка к ЕГЭ - 2010) Найдите наименьшее и наибольшее значения n, при которых уравнение $\left(x^2 + y^2\right)^{2010} = x^n y^n$ имеет решения в натуральных числах.

9.18. (Подготовка к ЕГЭ - 2010) Учебный год начинается 1 сентября и заканчивается 25 июня следующего года. Петя решил выполнять домашнее задание только в несчастливые дни, которыми он называет понедельники и пятницы, приходящиеся на 13 число месяца. Найдите все возможные значения числа несчастливых, по мнению Пети, дней в учебном году.

9.19. (Подготовка к ЕГЭ - 2010) Для десятичной записи двух натуральных чисел a и b используется не более 7 цифр, причем различных. Найдите все такие пары a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, меньшее удвоенного произведения чисел a и b на 12.

9.20. (Подготовка к ЕГЭ - 2010) Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

9.21. (ЕГЭ – 2011) Число N равно произведению 12 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь N?

9.22. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

9.23. [15, с. 111] Трехзначные числа m и n являются полными квадратами. Причем m получено из n уменьшением на число вида 111a, где a – натуральное. Найдите все такие пары чисел m и n.

9.24. Сумма всех членов двух геометрических прогрессий с одинаковым знаменателем равна 120. Произведение всех членов одной из них на первый член другой равно 12960. Найдите эти прогрессии.

9.25. Найдите минимальное натуральное значение n, при котором сумма $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n$ делится на 1144.

9.26. Найдите все решения в натуральных числах уравнения $(x+1)\cdot(y+1)^2=625\cdot y$.

9.27. (КИМ ЕГЭ-2010) Множество А состоит из натуральных чисел. Количество чисел в А больше 7. НОК всех чисел из А равно 210. Для любых двух чисел из А их НОД больше 1. Произведение всех чисел из А делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найдите числа, из которых состоит множество А.

9.28. (КИМ ЕГЭ-2012, декабрь 2011 г.) Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350. Может ли такая прогрессия состоять:

а) из четырех членов?

б) из пяти членов?

ОТВЕТЫ

1. Натуральные и целые числа

1.1. а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$; б) $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$; в) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$;
г) $7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 43$; д) $13^2 \cdot 59$.

1.2. а) делится на 2 и 3; б) делится на 3, 5, 7, 9, 11;
в) делится на 2, 3, 4, 8, 9; г) делится на 3, 7, 13.

1.3. а) делится на 7; б) делится на 9 и на 13; в) делится на 11;
г) $43301 = 19 \cdot 43 \cdot 53$, т.е. не делится ни на 7, ни на 9, ни на 11, ни на 13.

1.4. а) НОД(84; 350)=14; НОК(84; 350)=2100;
б) НОД(924; 2574)=66; НОК(924; 2574)=36036.

1.5. а) НОД(924; 2574)=66; б) НОД(4788; 11704)=532.

1.6. а) любая цифра; б) $x \in \{2; 5; 8\}$; в) любая цифра;
г) $x \in \{1; 8\}$; д) $x \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$; е) $x = 8$; ж) $x = 8$.

1.7. а) 36036, 36232, 36736, 36932; б) 36036, 36432, 36936;
в) 36036. **1.8.** а) 27720, 28728; б) 27720, 24728; в) 27720.

1.9. 70 и 7, 81 и 18, 92 и 29. **1.10.** 15065. **1.11.** 164 и 794.

1.12. 2814. **1.13.** 756. **1.14.** $m = 202$, $n = 23$.

1.15. $m = 202$, $n = 23$; $m = 402$, $n = 48$; $m = 602$, $n = 73$;
$m = 802$, $n = 98$. **1.16.** 605 и 194. **1.17.** 1135.

1.18. $C_k = 90k - 49$, $k = 1,2,\dots,16$; $\sum\limits_{k=1}^{16} C_k = 11456$.

1.20. $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. **1.22.** $n \in \{7k - 2\} \cup \{7k\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.28. $n \in \{4k\} \cup \{8k + 1\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.30. $n = 5^{k+1} + 1$; $n = 7 + 50(k - 1)$**;** $n = 32 + 50(k - 1)$;
$n = 18 + 50(k - 1)$; $n = 43 + 50(k - 1)$, $k \in \mathbf{N}$.

1.32. а) 3; б) 4; в) 6; г) 9; д) 8; е) 9. **1.33.** а) 3; б) 9; в) 8; г) 7; д) 6.

1.34. а) 1; б) 5; в) 0. **1.35.** а) 3; б) 4; в) 1.

1.36. а) $a > b$; б) $b > a$; в) $a > b$; г) $a < b$.

1.37. 5460. **1.38.** 71332. **1.39.** 4 цифры и 66 нулей.

1.40. 70 знаков и 6 различных цифр. **1.41.** 62. **1.42.** 244.

1.43. 159. **1.44.** 987. **1.45.** 699.

1.46. а…в, д, ж, з – не могут; $729 = 27^2$; $7225 = 85^2$.
1.48. 55 и 3025. **1.49.** 2025; 2500.
1.50. Нет, т.к. $\forall n \in \mathbf{N}$ остаток от деления этого числа на 5 равен 3. **151.** $n = 1$ $\left(9 = 3^2\right)$; $n = 4$ $\left(81 = 9^2\right)$; $n = 11$ $\left(1369 = 37^2\right)$. *Указание:* разбить множество $\mathbf{Z}$ на 3 класса.
1.53. $\{0; 2; 4; 6\}$. **1.54.** -2. **1.55.** 21. **1.56.** $p_1 = -3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$. **1.57.** $\{-9; -6; 6; 9\}$. **1.58.** 11. **1.59.** 1878. **1.60.** 3705.
1.61. 4032. **1.62.** 476. **1.63.** 1679. **1.64.** $n = 10k + 2$, $n = 10k + 4$, $n = 10k + 6$, $n = 10k + 8$, $k \in \mathbf{N_0}$.
1.65. а) 42 и 24; б) 43 и 34; в) 56 и 65.

2. Уравнения, системы уравнений и неравенства в целых числах

2.1. а) $x = 15m + 8$, $y = 7m + 1$, $m \in \mathbf{Z}$;
б) $x = 11m + 4$, $y = 14m + 2$, $m \in \mathbf{Z}$; в) $\varnothing$;
г) $x = -47m + 11$, $y = 29m - 7$, $m \in \mathbf{Z}$.
2.2. а) $x = 31m + 4$, $y = -17m - 2$, $m \in \mathbf{Z}$;
б) $x = -36m + 11$, $y = 19m - 5$, $m \in \mathbf{Z}$.
2.3. а) (1; 2); б) (3; -1); (-1; -1). **2.4.** а) (2; 2); б) (3; 1), (-2; 3), (0, 1). **2.5.** $x = 2m$, $y = 7m - 2$, $z = 5m - 1$, $m \in \mathbf{Z}$. *Указание:* принять $z = t$, $t \in \mathbf{R}$. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = 1 - t, \\ 6x - y = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5}(t + 1), \\ y = \dfrac{1}{5}(7t - 3), \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Затем найти $t \in \mathbf{Z}$, при каждом из которых $x \in \mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}$: $t + 1 = 5m$, $7t - 3 = 5k$, $m, k \in \mathbf{Z}$ т.д.
2.6. $x = m + 3$, $y = 5m + 2$, $z = 3m - 1$, $m \in \mathbf{Z}$.
2.7. $x = m$, $y = -m$, $z = 2m$, $m \in \mathbf{Z}$.
2.8. $x = -18m - 13$, $y = 19m + 16$, $z = 11m + 9$, $m \in \mathbf{Z}$.
2.9. (6; -2); (7; -3). **2.10.** (2; 2; 2).

3. Рациональные и действительные числа

3.1. а) $a < b$. *Указание:* $217 \cdot 221 = (219-2)(219+2) = 219^2 - 4$,

$218 \cdot 220 = (219-1)(219+1) = 219^2 - 1$;

б) $a > b$; в) $a < b$; г) $a < b$.

3.2. а) $\frac{17}{99}$; б) $\frac{2317}{999}$; в) $\frac{9304}{24975}$; г) $\frac{64441}{19800}$.

3.3. а) 0,(39); б) 1,0(14); в) 0,(273); г) 2,87(53).

3.4. –0,75. **3.5.** $x = -0{,}5$**;** $x = 2{,}25$**. 3.6.** а) –2,(5); б) 0,6.

3.7. $x \in \left[n; n + \frac{1}{3}\right)$**.** *Указание:* рассмотрите уравнение на промежутках: $n \le x < n + \frac{1}{3}$, $n + \frac{1}{3} \le x < n + \frac{2}{3}$ и $n + \frac{2}{3} \le x < n + 1$. **3.8.** $x = 12/5$, $x = 3$.

3.9. $x \in \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$. *Указание:* используйте сочетание графического и аналитического методов решения.

4. Степени действительного числа

4.1. а) 9; б) 243; в) 27; г) 2025; д) 496.

4.2. а) 40; б) 0,875; в) –1.(3); г) –1,75.

4.3. а) 64; б) 512 $\left(2^{3^2} = 2^9 = 512\right)$; в) 729; г) 0,0625; д) 64; е) 256.

4.4. а) 120; б) 1; в) 1024; г) 8. **4.5.** а) 5000; б) 45; в) 64,8; г) 320. **4.6.** а) 25; б) 35; в) 151.

4.7. а) $a > b$; б) $a = b$; в) $a < b$; г) $a > b$; д) $a < b$.

4.8. 256. **4.9.** а) $18a^{-2}b^2$; б) $-8a^{-6}b^4$.

4.10. а) 0; б) $2a$; в) $\sqrt[6]{a^5}$; г) $\sqrt[6]{a^{13}}$; д) $\sqrt[3]{a^2 b}$.

4.11. а) $x=-3$, $x=2$; б) $x=-3$, $x=2$; в) $x=3$; г) $x=-2$, $x=3$; д) $x=2$; е) $x=2$, $x=\frac{1}{2}$. **4.12.** а) 3; б) 4; в) $\frac{\sqrt[10]{3}}{4}$; г) 12.

4.13. а) 2; б) $4\sqrt{3}$ (решение: $A=\sqrt{17-4\sqrt{15}}+\sqrt{17+4\sqrt{15}}$,

$A^2=17-4\sqrt{15}+2\sqrt{289-240}+17+4\sqrt{15}$, $\quad A^2=48$,

$A=4\sqrt{3}$, т.к. $A>0$); в) $-2\sqrt{2}$; г) 6.

4.14. а) 2. *Решение:* пусть $A=\sqrt[3]{p+q}-\sqrt[3]{p-q}$, тогда

$$A^3=p+q-3\sqrt[3]{(p+q)^2}\sqrt[3]{p-q}+3\sqrt[3]{p+q}\sqrt[3]{(p-q)^2}-(p-q).$$

$$A^3=2q-3\sqrt[3]{p^2-q^2}\left(\sqrt[3]{p+q}-\sqrt[3]{p-q}\right),$$ но

$\sqrt[3]{p+q}-\sqrt[3]{p-q}=A$, поэтому получаем уравнение относительно A:

$$A^3=2q-3\sqrt[3]{p^2-q^2}\cdot A.$$

В нашем случае $p=5\sqrt{2}$, $q=7$, и поэтому

$$A^3=14-3\sqrt[3]{50-49}\cdot A, \quad A^3+3A-14=0.$$

Решением этого уравнения является единственное действительное число $A=2$. б) 3; в) –4. **4.15.** а) 3; б) 2; в) 5.

4.16. а) 4. *Указание:*

$$A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|.$$

б) $4\sqrt{3}$; в) 2.

4.17. а) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[6]{6}<\sqrt[5]{5}$. (*Указание:* $\sqrt[6]{6}=\sqrt[30]{6^5}=\sqrt[30]{7776}$, $\sqrt[5]{5}=\sqrt[30]{5^6}=\sqrt[30]{15625}$.)

4.18. а) $2+\sqrt{3}$; б) $2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$$\left(\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right).$$

4.19. а) 2; б) 6.

4.20. а) $\sqrt{272\cdot 268}=\sqrt{(270+2)(270-2)}=\sqrt{270^2-4}<270$;

б) $\sqrt[3]{511\cdot 513}>63$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}<1+\sqrt{20}$; г) $a<b$.

4.21. а) $D(y)=(-\infty;-3]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$; б) $D(y)=R$;

в) $D(y)=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\left([2\pi n;\ \pi+2\pi n]\cup\left[\frac{4}{3}\pi+2\pi n;\ \frac{7}{3}\pi+2\pi n\right]\right)$;

г) $D(y)=\mathbf{R}$.

5. Модуль числа. Уравнения и неравенства с модулем

5.1. $1-\sqrt{2}$. **5.2.** $4\sqrt{2}$. **5.3.** $2\sqrt{13}$. **5.4.** 3. **5.5.** $\frac{13}{84}$.

5.6. а) 2; б) $2\sqrt{\sqrt{\frac{22}{23}}+\sqrt{\frac{23}{22}}-1}$; в) 2. **5.7.** $4-\pi$. **5.8.** $3{,}5\pi-10$.

5.9. а) 0,5; б) 1,5; в) $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

5.10. а) нет решений; б) $x\in[-1{,}5;2{,}5]$; в) $x=-2{,}5$; $x=3{,}5$.

5.11. а) $x\in[4;+\infty)$; б) $x=1$; в) $x\in(-\infty;-2]$; г) нет решений.

5.12. а) $x=2$; б) $x\in[3;+\infty)$; в) $x=3$; г) $x=-8$, $x=-\frac{4}{3}$,

$x=\frac{4}{3}$, $x=8$; д) $x=-\frac{16}{5}$, $x=\frac{16}{5}$; е) $x\in(-\infty;-3]$.

5.13. а) 16; б) 10; в) 14; г) 50; д) –8.

5.14. а) $x=2$, $y=8$; б) $x\in[2;8]$, $y=10-x$; в) $x=8$, $y=2$;

г) $x=5$, $y=5$; д) $x=2$, $y=8$.

5.15. $u_{наим}=-4$; $u_{наиб}=8$. **5.16.** а) $a=3$; б) $a=1$; в) $a\in(0;1)$.

5.17. $x=\pm\left(2\pm\sqrt{1-a}\right)$; $x=\pm\left(2\pm\sqrt{1+a}\right)$. **5.18.** $a=1$; $a=3{,}25$.

5.19. $a=-4$. **5.20.** $a=2+2\sqrt{2}$. **5.21.** $a=3$. **5.22.** $a=16$.

5.23. $a\in[-5;7]$. **5.24.** $a\in[0;2]$.

5.25. $a=\pm\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$; $x=\pm3^{-\frac{1}{4}}$; $y=\pm\sqrt[4]{3}$.

5.26. а) $a\in(3;4]$; б) $a\in(-\infty;-4]\cup\{3\}\cup(4;+\infty)$; в) $a\in(-4;3)$.

5.27. а) $a\in(3;4]$; б) $a=3$; в) $a\in(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$.

5.28. а) $a\in\{0\}\cup(3;4]$; б) $a=3$; в) $a\in(0;\,3)\cup(4;+\infty)$.

5.29. $a=0{,}5$. **5.30.** $a\in\left\{\frac{1}{8};\frac{3}{10}\right\}$. **5.31.** 18. **5.32.** 12. **5.33.** 10π.

5.34. $10\pi+8-40\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **5.35.** 38. **5.36.** $12\pi+24$.

5.37. $4\pi+14$. **5.38.** 28. **5.39.** 162. **5.40.** $\frac{9}{8}\pi$. **5.41.** 256.

5.42. а) $112-16\pi$; б) 112. **5.43.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Метод математической индукции. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

6.28. 42242. *Указание:* $9^5-7^5=(10-1)^5-(10-3)^5$.

6.29. 45054. **6.30.** 5492480. Решение:

$$72^4-68^4=(70+2)^4-(70-2)^4=70^4+4\cdot70^3\cdot2+6\cdot70^2\cdot4+$$
$$+4\cdot70\cdot8+16-\left(70^4-4\cdot70^3\cdot2+6\cdot70^2\cdot4-4\cdot70\cdot8+16\right)=$$
$$=2\cdot\left(8\cdot70^3+32\cdot70\right)=16\cdot70\left(70^2+4\right)=1120\cdot4904=$$
$$=\left(10^3+10^2+20\right)\left(5\cdot10^3-10^2+4\right)=$$

$$= 5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 10^4 - 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 400 + 80 =$$
$$= 55 \cdot 10^5 - 10^4 + 2480 = 5492480.$$

Иначе: $72^4 - 68^4 = (72 - 68) \cdot (72 + 68) \cdot \left(72^2 + 68^2\right) =$
$$= 4 \cdot 140\left((70+2)^2 + (70-2)^2\right) = 1120 \cdot 4904 = ...$$

6.31. 318756250. *Указание:*
$$55^5 - 45^5 = 5^5\left(11^5 - 9^5\right) = 5^5\left((10+1)^5 - (10-1)^5\right).$$

6.32. а) $x = -3$, $y = -5$; $x = 5$, $y = 3$; б) $x = \pm 2$, $y = \pm 4$; $x = \pm 4$, $y = \pm 2$; $x = \pm 2$, $y = \mp 4$; $x = \pm 4$, $y = \mp 2$.

6.33. $x = -2$, $y = -5$; $x = 5$, $y = 2$.

6.34. а) $4\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$; б) $8\left(26 - 15\sqrt{3}\right)$; в) $16\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$.

Элементы комбинаторики

6.35. $P_6 = 720$. **6.36.** $A_{10}^3 = 720$. **6.37.** $3 \cdot 6 \cdot 12 = 216$.

6.38. $5 \cdot A_5^4 = 5 \cdot 5! = 600$. **6.39.** $9 \cdot A_9^5 = 136080$.

6.40. а) $C_6^2 C_4^2 = 90$; б) $C_6^3 C_4^1 = 80$; в) $C_6^5 C_4^4 = 6$; г) $C_{10}^4 = 210$.

6.41. а) $C_{10}^3 \cdot C_6^2$; б) $C_{10}^3 C_6^2 + C_{10}^4 C_6^1 + C_{10}^5$.

6.42. а) $A_{20}^3 = 6840$; б) $3! = 6$.

6.43. а) $C_6^1 C_4^1 C_8^1 = 192$; б) $C_6^3 + C_4^3 + C_8^3 = 80$.

6.44. $A_8^4 = 1680$. **6.45.** а) $P_3 \cdot A_{12}^3 = 7920$; б) $A_4^3 \cdot A_{12}^3 = 31680$.

6.46. 2^n – наибольшее количество делителей числа A ($2^n = C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n + 1$); $\dfrac{n(n+1)}{2}$ - наименьшее число делителей. *Указание*: число A может быть представлено произведением а) только различных простых чисел, б) среди множителей числа A есть простые и полученные из них составные числа, в) $A = p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdots p^n$, где p – простое число. Анализ ситуаций а), б), в) приводит к искомому результату. Если возникают затруднения с анализом общего случая, то можно предварительно рассмотреть частную задачу при $n = 4$.

6.47. а) $6! = 720$; б) $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$; в) $\dfrac{9!}{4!\cdot 2!} = 7560$.

Элементы математической статистики и теории вероятностей

6.48. 210 см. **6.49.** 40 и 60 ящиков; $\bar{x} = 50{,}6$ кг. *Указание*: составьте и решите в натуральных числах уравнение $50x + 51y = 5060$, где x – число ящиков в первой партии, y - число ящиков во второй партии.

6.50. $x_{наиб} = 183$, $x_{наим} = 148$, $r_{15} = 35$, $x_{med} = 164$, $\bar{x} = 166$, $\sigma \cong 11{,}1$. **6.51.** 38 положительных, 8 отрицательных и 14 нулей. *Указание*: см. решение примера (5.4) в подразделе 5.1.

6.52. $0{,}4 \le p \le 0{,}6$. **6.53.** 0,00625; 125 раз. **6.54.** а) 0,9; $\left(p(A) = \dfrac{9 \cdot 9}{9 \cdot 10}\right)$; б) 0,1; $\left(p(A) = \dfrac{9}{9 \cdot 10}\right)$. **6.55.** 0,3; $\left(p(A) = \dfrac{3}{C_5^3}\right)$.

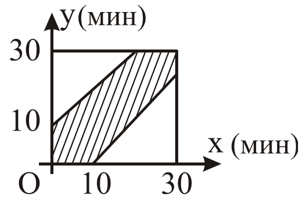
6.56. 0,4; $\left(p(A) = \dfrac{C_4^3}{C_5^3}\right)$. **6.57.** $\dfrac{1}{120}$; $(p(A) = 1/5!)$. **6.58.** $\dfrac{1}{40}$.

6.59. $0{,}02(3)$; $\left(p(A) = 7/C_{25}^2\right)$. **6.60.** 0,0(3). **6.61.** 0,4; $\left(p(A) = 6/C_6^2\right)$. **6.62.** а) 0,22; б) 0,47; в) 0,28; г) 0,75; д) 0,97; е) 0,03. **6.63.** а) 0,288; б) 0,432; в) 0,064; г) 0,936; **6.64.** а) $\dfrac{1}{216}$; $\left(p(A) = 1/6^3\right)$; б) $\dfrac{1}{36}$; $\left(p(A) = 3!/6^3\right)$; в) $\dfrac{1}{36}$; $\left(p(A) = 6/6^3\right)$; г) $\dfrac{1}{36}$; $\left(p(A) = C_3^2/6^3\right)$. **6.65.** а) $\dfrac{1}{3}$; $\left(p(A) = 2/6\right)$; б) 1.

6.66. а) $0{,}2$; $\left(p(A) = 1/5\right)$; б) 1. **6.67.** а) $0{,}5$; б) $0{,}125$; $\left(p(A) = 1/8\right)$; в) 0,03125; $\left(p(A) = 1/32\right)$. **6.68.** а) 0,44; б) 0,92; в) 0,08. *Указание*: введите события: A_1 – первый стрелок попал в цель, A_2 – второй стрелок попал, B – цель поражена ровно одной пулей, C – цель поражена двумя пулями, D – цель поражена, E – цель не поражена (оба стрелка промахнулись). Тогда $B=\left(A_1\cap\overline{A}_2\right)\cup\left(\overline{A}_1\cap A_2\right)$, $C=A_1\cap A_2$ и т.д. см. пример 5.14, глава 5, пункт 5.2.4. **6.69.** 0,0000066;

$$\left(p(A)=\frac{m}{n},\text{ где } m=1,\ n=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200\right).$$

6.70. а) $\frac{4}{9}\cong 0{,}56$; б) 0,75. *Указание*: пусть x –время прихода первого человека, а y – второго. Поскольку момент прихода каждого из них случаен, то $0\le x\le 30$, $0\le y\le 30$. Тогда пространство элементарных исходов в данной задаче – квадрат со стороной 30. Назначенная встреча – случайное событие A – состоится, если разность между x и y не превысит 10мин в случае а) и 15 мин – в случае б). Таким образом, событие A – это множество точек $(x;y)$ квадрата 30×30, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x-y|\le 10$ в случае а) и $|x-y|\le 15$ в случае б). Решением каждого из этих неравенств является область, заштрихованная на рисунке.



По формуле геометрической вероятности $p(A)=\frac{mesA}{mesU}$ находим:

а) $p(A)=\frac{30\cdot 30-2\cdot 1/2\cdot 20\cdot 20}{30\cdot 30}=\frac{5}{9}\cong 0{,}56.$

6.71. 0,375. **6.72.** а) $\frac{104}{153}$; б) $\frac{47}{153}$; в) $\frac{16}{51}$; г) $\frac{8}{51}$. *Указание*: примените формулу полной вероятности (4.31). Например, в случае а) два карандаша разного цвета могут быть извлечены следующим образом: первый красный, а второй зеленый или синий, либо первый зеленый, а второй красный или синий, либо первый синий, а второй красный или зеленый. Иначе, $A = \left(К \cap \left(З \cup С | К\right)\right) \cup \left(З \cap \left(К \cup С | З\right)\right) \cup \left(С \cap \left(К \cup З | С\right)\right)$. Здесь К, С, З – первые буквы названий соответствующих цветов (одновременно они обозначают случайные события), А - событие, заключающееся в том, что извлеченные из коробки карандаши имеют разный цвет. В соответствии с формулой полной вероятности $p(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{4+8}{17} + \frac{4}{18} \cdot \frac{6+8}{17} + \frac{8}{18} \cdot \frac{6+4}{17} = \frac{104}{153}$.

Альтернативный способ нахождения вероятностей случайных событий в данном примере можно построить на использовании формул комбинаторики. Так, в случае в) общее число различных вариантов извлечь 2 карандаша из 18 равно $n = C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$. Извлечь 1 карандаш красного цвета и 1 синего цвета можно $m = C_6^1 \cdot C_8^1 = 6 \cdot 8 = 48$ способами. Поэтому $p(C) = \frac{48}{153} = \frac{16}{51}$. **6.73.** 0,8. *Указание*: примените формулу полной вероятности (5.12).

6.74. 0,2647. $\left(p(A) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}86\right)$.

7. Неравенства и их применения

7.1. *Указание:* $x^4 + y^4 - xy\left(x^2 + y^2\right) = x^3(x-y) - y^3(x-y) =$
$= (x-y)\left(x^3 - y^3\right) \geq 0$ для $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

7.2. См. пример 5.5 (глава 5). **7.3.** *Указание*: умножьте обе части неравенства на xyz. **7.4.** *Указание:* умножьте обе части неравенства на xyz $(xyz > 0)$ и преобразуйте к виду $(x+y-z)^2 \geq 0$. **7.5.** *Указание: с* помощью тождественных преобразований приведите неравенство к виду $(x+z)(y-x)(y-z) \leq 0$, которое является верным при наложенных ограничениях на x, y и z. **7.7.** *Решение*: в силу неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a, b > 0$ имеем

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \cdot 1},\ \frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1) \cdot 2},\ \frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2) \cdot 3},$$

$$\ldots,\ \frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2 \cdot (n-1)},\ \frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot n}.$$

Перемножив приведённые n неравенств, получим $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n!)^2}$ или $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$. **7.8.** *Решение*: обозначим $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. В соответствии с неравенством Бернулли $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 2, т.е. $\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \geq 2$. Для доказательства ограниченности сверху последовательности $\{x_n\}$ разложим выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона (4.8):

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Оценим каждое слагаемое $\alpha_k = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k}$, $k = 0,1,2,...,n$, в составе разложения, начиная с α_2:

$$\alpha_k = \frac{n(n-1)(n-2)...n-(k-1)}{k!}\frac{1}{n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot...\cdot\frac{n-(k-1)}{n} =$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}.$$

Легко установить, что $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ для всех $k \ge 2$. Таким образом, $\alpha_k < \frac{1}{2^{k-1}}$ $\forall k \ge 2$ и, как следствие,

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Окончательно: $\forall n \in \mathbf{N}:\ 2 \le x_n < 3$. ■

7.9. *Указание:* $n^n > (n+1)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}$. Затем воспользоваться оценкой $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$. Неравенство $\frac{1}{3} > \frac{1}{n+1}$ справедливо для всех $n \ge 3$.

7.10. *Указание:* примените неравенства (5.1) и (5.4).

7.14. *Указание:* $\forall k \in \{2,3,...,n-1\}:\ x_1 \le x_k \le x_n \Rightarrow$
$\Rightarrow nx_1 \le x_1 + x_2 + ... + x_n \le nx_n$.

7.15. У*казание:* см. примеры 5.9 и 5.1 (глава 5).

7.16. 36. *Указание:* $f(x)=\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}+27x$, далее воспользуйтесь неравенством Коши (5.16) при $n=3$ (см. пример 5.12).

7.17. 96. *Указание:* $L=4(x+y+z)\geq 4\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=12\sqrt[3]{512}=96$.

7.18. а) 24; б) $4\sqrt{2}$. **7.19.** $a=60$. *Указание: способ 2*:

$$f(x)=243\operatorname{tg}^2 x+16\sqrt{2\operatorname{ctg} x}=$$

$$=243\operatorname{tg}^2 x+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\geq$$

$$\geq 5\sqrt[5]{243\operatorname{tg}^2 x\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\right)^4}=60.$$

7.20. а) $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$; б) $[18;+\infty)$. **7.21.** $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $y=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}+\pi m$, $z=\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{2}{3}+\frac{2\pi k}{3}$. **7.22.** $\sqrt{3}$. *Указание:* ввести векторы $\bar{a}=(\sin x;\sin 2y;\sin 3z)$, $\bar{b}=(\cos x;\cos 2y;\cos 3z)$, $\bar{c}=(1;1;1)$; применить неравенство Коши – Буняковского к скалярному произведению $(\bar{a},\bar{c})$: $\sqrt{6}\leq(\bar{a},\bar{c})\leq|\bar{a}|\cdot|\bar{c}|$. Откуда

$$|\bar{a}|^2=\sin^2 x+\sin^2 2y+\sin^2 3z\geq 2.$$

Аналогично оценить скалярное произведение $(\bar{b},\bar{c})$.

7.23. $x=1, y=1$.

8. Задачи вступительных экзаменов в вузы

8.1. $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}<\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$. **8.2.** –4. **8.3.** –10. **8.4.** $k=-2$.

8.5. а) $(4;1)$, $(4;-1)$, $(-4;1)$, $(-4;-1)$;

б) $(3;-2)$, $(-3;2)$, $(5;2)$, $(-5;-2)$.

8.6. а) нет; б) нет; в) нет. **8.7.** $m=-1$, $n=-14$.

8.8. $(48;54)$, $(48;56)$, $(49;56)$, $(50;55)$. **8.10.** Нет.

8.11. а) 18; б) 4. **8.12.** $[2;+\infty)$. **8.13.** $[4{,}5;\ 5{,}5)$.

8.14. $x=\frac{7}{15}$; $x=\frac{4}{5}$. *Указание:* ввести замену $\frac{15x-7}{5}=t$, тогда $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\left[\frac{10t+39}{40}\right]$. Из уравнения $\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t$ и свойств целой части действительного числа следует, что $t\le\frac{10t+39}{40}<t+1$. Решив полученное неравенство, найдем решение уравнения. **8.15.** $x\in\left[n;n+\frac{1}{2}\right)$. **8.16.** $(12;-8)$.

8.17. $(2;3)$. **8.18.** $(0;0)$, $(3;5)$, $(-3;-5)$. **8.19.** $(-6;-7)$, $(-4;3)$, $(4;-5)$. **8.20.** $(9;9)$, $(1;33)$. **8.21.** $(3;3)$, $(5;0)$, $(0;5)$, $(0;0)$. **8.22.** 12 месяцев. **8.23.** $k=27$, $\ell=189$, $m=1323$.

8.24. 24. **8.25.** По 2 самолёта каждого типа. **8.26.** 132.

8.27. $ 26000; 12 катеров типа А и 2 катера типа В. **8.28.** 850.

8.29. 3 $\left(x=\sqrt{3}\right)$. **8.30.** 2 $\left(2{,}5<y_{min}\le 3\right)$.

8.31. $(-3,-3,-4)$. *Указание:* Ввести обозначения:

$$\begin{cases}7+2x-4y+3z=m,\\ 2y+2z-5x=n.\end{cases}$$

Очевидно, n, m должны быть целыми положительными числами, т.е. $n, m\in\mathbf{N}$. С учетом введенных обозначений $3x+2y-5z-4=3-m-n$ и при этом $3-m-n>0$. Из последнего неравенства следует, что $\begin{cases}m+n<3,\\ m,n\in N\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}m=1,\\ n=1.\end{matrix}$

9. Задачи группы С6

9.1. 2004. *Указание:* см. пример 2.14, глава 2. **9.2.** 501. **9.3.** 500. **9.4.** 47. **9.5.** $p = 47,\ k = 42$. **9.6.** 135, 165, 185, 235, 265. *Указание:* см. пример 2.14, глава 2. **9.7.** 36. **9.8.** 15^3. *Указание:* так как $НОД(a, b, c) = 15 = 3 \cdot 5$, то $a = 15n,\ b = 15m,\ c = 15k$. Число a имеет 6 делителей только в том случае, когда n равно 3 или 5, т.е. $a = 3^2 \cdot 5$ или $a = 3 \cdot 5^2$. Аналогично рассмотрите числа b и c. Докажите, что $b = 3^2 \cdot 5^2$ и либо $c = 3^4 \cdot 5$, если $a = 3^2 \cdot 5$, либо $c = 3 \cdot 5^4$, если $a = 3 \cdot 5^2$. **9.10.** $(20;180)$, $(30;45)$, $(180;20)$, $(45;30)$. **9.11**. а) 8; б) 8; в) 15. **9.12.** а) $n = 1$, $m = 2$; *Указание:* 3^n - нечетное число для всех n, а число $n!+2m!$ - нечетно только при $n = 1$; б) $n = 4,\ m = 1$.

9.13. $n = 2,\ k = 5$. *Указание:* учесть, что $n!+5n$ при $n \ge 5$ оканчивается на 5, а $k^2 - 13$ не может оканчиваться на 5 ни при каких значениях k. **9.14.** $x_1 = 50,\ \sum_{k=2}^{5} x_k = 150$. **9.15.** а) 36; б) больше отрицательных; в) 16. **9.16.** а) 44; б) больше отрицательных; в) 17. *Указание:* при первом прочтении примера может сложиться впечатление, что на доске записано множество чисел, состоящее только из положительных и отрицательных чисел. Однако легко установить, что в этом случае задача не имеет решения. Действительно, если написано $n + m$ чисел, среди которых n – положительных и m – отрицательных, то в соответствии с условием примера получаем уравнение в натуральных числах (см. пример 5.4, глава 5) $\dfrac{4n - 8m}{n + m} = -3$. Это уравнение преобразуется к виду $7n = 5m$. Отсюда следует, что $n = 7r, m = 5r,\ r \in N$. По условию примера $40 < n + m < 48$. Учитывая, что $n + m = 12r$, получаем неравенство $40 < 12r < 48$, которое не имеет решения на множестве натуральных чисел. Поэтому, начиная решение задачи нужно предположить, что на доске записаны $n + m + k$ чисел, среди кото-

рых n – положительных, m – отрицательных и k нулей. В итоге уравнение в натуральных числах n, m, k будет иметь следующий вид $\frac{4n-8m+0\cdot k}{n+m+k}=-3$. **9.17.** $n_{наим}=2011,\ n_{наиб}=3015$. *Указание:* записать уравнение в равносильной форме $x^2+y^2=(xy)^{n/2010}$. Показать, что дробь $n/2010$ не может быть целым числом, и что равенство возможно только при четных x и y. Поскольку $n/2010=p/q$, $p,q\in N$ то $2010\vdots q$, $n=2010\cdot p/q$. Отсюда следует, что $n_{наим}$ достигается при $q=2010, p=2011$. Для нахождения $n_{наиб}$ доказать, что в этом случае $q=2$, и, что достигается $n_{наиб}$ при $x=y=2$. **9.18.** $n\in\{1,2,3,5\}$ - в високосный год, $n\in\{1,3,4\}$ - в обычный год. **9.19.** $(9;6)$, $(16;52)$, $(4;5716)$. *Указание:* рассмотреть возможные варианты: b – однозначное число, в этом случае имеем уравнение $10a+b=2ab-12$,
b – двузначное число, получаем уравнение $100a+b=2ab-12$, …, b – пятизначное число, в этом случае необходимо решить уравнение $100\,000a+b=2ab-12$. Для решения каждого из пяти уравнений можно выразить b через a, например, $b=\frac{10a+12}{2a-1}=5+\frac{17}{2a-1}$ из первого уравнения. Затем воспользоваться признаками делимости и ограничением на возможные значения числа b. **9.20.** $(12;8)$, $(23;9)$. **9.21.** 79. *Указание:* пусть $A=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_{12}$, где $p_1,p_2,\dots,p_{12}$ - различные натуральные числа. Если множители $p_1,p_2,\dots,p_{12}$ в составе числа A – различные простые числа, то число A имеет максимальное число делителей (2^n+1). Число различных делителей числа A будет уменьшаться, если среди его множителей будут не только различные простые числа, но и составные, полученные из этих простых чисел. Наконец, наименьшее число различных делителей будет в случае, когда число A имеет следующий вид:

$A = p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdots p^{12}$, где p - некоторое простое число. Легко видеть, что число различных делителей числа A в этом случае равно $\frac{1+12}{2} \cdot 12 + 1 = 79$. **9.22.** $(12;-8)$. *Указание:* выделить полные квадраты по переменным x и y в каждом неравенстве, получить оценки сверху для полных квадратов.
9.23. $(400;289)$, $(529;196)$, $(676;121)$. *Указание:* $(n-m)(n+m) = 3 \cdot 37 \cdot a$. Составить и решить системы двух линейных (относительно n и m) уравнений. **9.24.** 3, 6, 12, 24 и 5, 10, 20, 40. **9.25.** $n = 5$. *Указание:* найдите каноническое разложение числа 1144 и, используя теоремы об остатках, исследуйте делимость чисел k^n, $k = \overline{1,8}$ и $\sum_{k=1}^{8} k^n$ для последовательных значений n на простые числа, входящие в полученное каноническое разложение. **9.26.** $(99;4)$, $(23;24)$. *Указание:* $y + 1 = 5^k$, $k \in N$. **9.27.** $\{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.
9.28. а) **может**, например 216, 252, 294, 343; здесь $b_1 = 216, q = 7/6$; б) **не может**, так как из неравенств $210 \le b_1 < b_1 q^4 \le 350$ следует, что $q^4 \le \frac{350}{210} = \frac{5}{3} \Rightarrow q < \frac{7}{6}$.

С другой стороны, $b_1 q^4 = b_1 \frac{m^4}{n^4}$ и, значит b_1 должно делиться на n^4. Однако $n > 6$ и потому $b_1 > 6^4 > 350$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Алгебра.– М.: Физматлит, 2008. – 456 с.
2. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Последовательности, функции и графики.– М.: Физматлит, 2008. – 328 с.
3. *Седракян Н.М., Авоян А.М.* Неравенства. Методы доказательства. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.
4. *Иванов О.А.* Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. – М.: Изд. МЦНМО, 2009. – 384 с.
5. *Лунгу К.Н., Макаров Е.В.* Задачи по математике. – М.: Физматлит, 2008.– 336 с.
6. *Кравцев С.В., Макаров Ю.Н., Максимов В.Ф., Нараленков М.И., Чирский В.Г.* Методы решения задач по алгебре. – М.: Экзамен, 2001. – 544 с.
7. *Быков А.А.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы. в 2-х ч. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. Ч. 2. – 316 с.
8. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, Айрис-пресс, 1998. – 624 с.
9. *Фалин Г., Фалин А.* Линейные диофантовы уравнения. – М.: Чистые пруды, 2008. – 32 с.
10. *Хорошилова Е.В.* Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010.– 472 с.
11. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ – 2010: математика под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко– М.: АСТ «Астрель». 2010.
12. *Мирошин В.В.* О решении одной из задач С6 // Математика в школе. – 2010. – №5. – С. 3-4.
13. *Панферов В.С., Сергеев И.Н.* Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-центр, 2010. С. 45-46.
14. *Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов К.М., Ященко И.В.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. – М.: Изд-во МЦНМО. – 43 с.
15. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010/под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д.: Легион-М, 2009. – 480 с.

Н о в и к о в Анатолий Иванович

Элементарная математика и начала теории вероятностей.
Теория чисел, комбинаторика, начала
теории вероятностей, неравенства

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 29.02.12. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 15,75.
Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.