# НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

# ФОН НЕЙМАН

35

## Теория игр

## Камень, ножницы, теорема

DeAGOSTINI

ФОН НЕЙМАН Теория игр

35

DeA

# ФОН НЕЙМАН

Теория игр

ФОН НЕЙМАН

Теория игр

# Камень, ножницы, теорема

НАУКА. ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

**Наука. Величайшие теории:** выпуск 35: Камень, ножницы, теорема. Фон Нейман. Теория игр. / Пер. с итал. — М.: Де Агостини, 2015. — 168 с.

Джон фон Нейман был одним из самых выдающихся математиков нашего времени. Он создал архитектуру современных компьютеров и теорию игр — область математической науки, спектр применения которой варьируется от политики до экономики и биологии, а также провел аксиоматизацию квантовой механики. Многие современники считали его самым блестящим ученым XX века.

ISSN 2409-0069



Иллюстрации предоставлены:
Both Elöd: 71 (справа вверху); Corbis: 153 (вверху); Cordon Press: 67, 71 (слева), 117 (вверху); Elke Wetzig: 78; Genesis Prosthetics: 148; Getty Images: 71 (слева вверху), 93, 131, 153 (внизу); Jakub Hałun: 139; James E. Westcott/American Museum of Science and Energy: 113; Joan Pejoan (инфографика); Jon Sullivan: 135; Konrad Jacobs/MFO: 140; Open Library: 27; Oskay: 144; VinceB: 29 (внизу); Адальберт фон Росслер: 25; Армия США: 117 (внизу); Архив RBA: 21, 29 (слева вверху; справа), 37, 41, 47 (слева), 55; Венгерская академия наук: 30; Военно-воздушные силы США: 75; Документы Курта Гёделя/Институт перспективных исследований: 59; Институт Людвига фон Мизеса: 90; Лос-Аламосская национальная лаборатория: 47 (справа вверху); Министерство обороны США: 129; Национальная портретная галерея: 47 (слева вверху); Национальный архив Великобритании: 119; Национальный архив США: 99; Правительство США: 116.

# Содержание

# Введение

Кем был Джон фон Нейман? Если говорить об университетском образовании, то он, конечно же, был математиком, поскольку 12 марта 1926 года с отличием защитил докторскую диссертацию по этой науке в Будапештском университете. Мы также можем утверждать, что он был химиком, ведь в 1925 году фон Нейман получил диплом химического инженера в Высшей политехнической школе Цюриха. Говорят, что дерево познается по его плодам. Если рассматривать работы фон Неймана, то получается, что он принес плоды в самых разных научных дисциплинах, добившись больших успехов в алгебре, топологии и функциональном анализе, то есть в области чистой математики. В то же время он заложил математические основы теории, сегодня известной нам как теория игр, что делает его одним из самых выдающихся представителей прикладной математики. В любом случае, вне всяких сомнений, фон Нейман был одним из крупнейших математиков XX века. Часто даже говорят, что он был последним математиком, рассматривающим эту науку во всей ее полноте.

Однако если учесть, что фон Нейман с помощью гильбертовых пространств смог придать квантовой механике строгий формализм, если вспомнить, что он объединил в рамках одной теории два разных подхода, существовавших в 1920-е годы, — волновую механику Шрёдингера и матричную Гейзенберга, — мы должны будем назвать его гениальным физиком и теоретиком. Книга фон Неймана *«Математические основы квантовой механики»* стала одним из столпов, на которые опирается квантовая физика.

Если мы спросим у любого экономиста, знает ли он, кто такой фон Нейман, то в большинстве случаев получим положительный ответ: тысячи представителей этой профессии каждый день используют в работе теорию игр, которую фон Нейман вместе с немецким экономистом Оскаром Моргенштерном изложил в публикации *«Теория игр и экономическое поведение»*. Фон Нейман внес неоценимый вклад в историю экономики своей статьей *The Model of General Economic Equilibrium* (*«Модель общего экономического равновесия»*), опубликованной в 1937 году, — самой важной работой по математической экономике на сегодняшний день.

«Фон Нейман? Это отец современной информатики,— ответил бы нам программист. — Ведь именно ему пришла в голову гениальная идея. В самых первых компьютерах поменять программу означало заменить все электронные компоненты и расположить их по-новому, а фон Нейман создал особую архитектуру, благодаря которой можно было переделать любую программу в самой памяти машины. Сейчас на основе этой архитектуры работают все компьютеры. А еще фон Нейман создал систему для параллельных вычислений».

Получается, ученый был экспертом в кибернетике, а также первым, кто применил комбинаторику, математическую логику и теорию информации к созданию абстрактных автоматов, заложив устойчивую базу для развития искусственного интеллекта. Кроме того, именно фон Нейман создал первые модели клеточных автоматов, способных порождать на основе самих себя все более сложные устройства.

В этот длинный список заслуг нельзя не включить и вклад фон Неймана — военного стратега, который тесно сотрудничал со службами безопасности США и разработал математические основания для стратегий холодной войны. Его идеи сегодня повсеместно используются в такого рода операциях.

Мы могли бы считать фон Неймана классическим разносторонним ученым, какие часто встречались лишь в эпоху Возрождения. Однако это было бы не совсем справедливо, ведь и в физике, и в экономике, и в кибернетике, и в военных стратегиях он действовал как математик. Фон Нейман всегда определял базовую структуру, лежащую в основании каждой из этих дисциплин, и поднимал их все на уровень математической абстракции, доступный лишь настоящей науке, трансформируя таким образом чистую математику в прикладную.

На большинстве сохранившихся фотографий фон Нейман почти всегда стоит — он с кем-то разговаривает, пишет на доске, смотрит на компьютер... А подписи к фото словно подчеркивают, что в момент встречи с фотографом фон Нейман просто «проходил мимо». Его всегда кто-то ждал. Он всегда куда-то направлялся — в другое крыло здания, в другой город, в другую страну и даже на другой континент. Он всегда был в движении. Наверное, это лучше всего описывает личность фон Неймана. Его путешествия по миру отражали его научный поиск. Новые учреждения, здания, люди помогали встретиться с новыми задачами, ждущими своего решения. И в этом смысле математика была для фон Неймана не самоцелью, но ключом к другим областям науки.

В биографии ученого можно провести границу, разделяющую на до и после не только его частную жизнь, но и научную работу. Эта воображаемая линия проходит по Атлантическому океану и отделяет Европу от США. Хотя это и некоторое упрощение, но можно сказать, что в Европе фон Нейман занимался чистой математикой, а в Штатах посвятил себя прикладной.

В начале XX века в науке произошли глубокие изменения, повлекшие смену перспективы. Теория относительности и появление квантовой физики открыли двери в мир элементарных частиц. Деление атома на части или расщепление его ядра стало казаться возможным. Изменился сам подход к научным исследованиям. Речь больше не шла о маленьком коллективе ученых, работающих в небольшой и относительно недорогой лаборатории. Теперь необходимо было строить огромные здания, в которых мог поместиться ускоритель частиц или ядерный реактор, теперь, работая над одним проектом, необходимо было сотрудничать с сотнями ученых и техников. Впервые в истории потребовались миллионные инвестиции, чтобы осуществить всего один фундаментальный физический опыт.

К несчастью, эксперимент по расщеплению ядра — несомненно, самый амбициозный из всех, когда-либо выпадавших на долю ученых, — был поставлен в годы войны, когда речь шла не столько о подтверждении научных гипотез, сколько о жизнях людей. Эта сторона деятельности фон Неймана, совпавшая с его пребыванием в США, больше всего подвергалась критике. Великий ученый использовал свои знания для проектирования первой атомной бомбы, сделав возможным термоядерное оружие, имеющее самую большую разрушительную силу в истории.

Разумеется, трагические обстоятельства, в которых оказалось гражданское население в годы Второй мировой войны, повлияли не только на фон Неймана, но и на других ученых, так или иначе вовлеченных в работу на военную промышленность. До сих пор не прекращаются споры о том, какова ответственность исследователя за социальные и политические последствия, которые могут иметь его открытия, за последствия, которые влияют на нашу повседневную жизнь, когда научные озарения обретают техническое воплощение. Но верно и то, что в атомных исследованиях, в которых фон Нейман принимал такое активное участие, граница между наукой и техникой была очень широка. Однажды ученый заметил, что отдельный человек не должен чувствовать себя ответственным за ту эпоху и то общество, в которых ему выпало жить.

Иногда звучит мнение, что фон Нейман придерживался правых политических взглядов. Причиной этому, во-первых, могло быть еврейское происхождение ученого и генетический, переданный от предков страх перед антисемитизмом, а во-вторых — его негативное отношение к распространению коммунистических идей (возможно, оно сформировалось еще в юности, в Венгрии, во время волнений, вызванных действиями коммуниста Белы Куна). Так или иначе, фон Нейман действительно склонялся к лагерю «ястребов» и с полной отдачей работал на армию. Однако в критических ситуациях он был способен отложить в сторону свои политические пристрастия и, рискуя положением, помочь другу. Например, в разгар охоты на ведьм, когда Роберт Оппенгеймер, научный руководитель Манхэттенского проекта, подвергся преследованиям за антиамериканскую деятельность, фон Нейман добровольно дал показания о его преданности стране, хотя это несло серьезные репутационные риски.

Личность гениев часто вызывает жаркие споры. Их отношения с окружающими, особенно с самыми близкими людьми, часто отклоняются от обычных. Фон Нейман ненавидел некоторые сентиментальные ритуалы, считая их пустой тратой времени, но это не означает, что он изолировался от мира и тем более что ему были безразличны его близкие. У ученого было немного времени на семью; возможно, он нечасто проявлял теплые чувства к родным или близким. Однако фон Нейман был к ним внимателен и добр — как мог. Ему не была чужда и романтика. В переписке со второй женой ученого, Кларой Дан, проявляется его страстная и беспокойная натура. Если бы мы читали эти письма, ничего не зная об их авторе, то решили бы, что их написал влюбленный музыкант, художник или поэт.

Фон Нейман был гением, а гении обычно делают открытия, переворачивающие науку. В его случае таких открытий было несколько: в математике, физике, теории игр, военных стратегиях, теории клеточных автоматов, логике, информатике. В этом смысле он был прирожденным охотником: учуяв добычу, он бросался на нее во всеоружии, а если его оружие не подходило, то создавал новое.

Из всей этой обширной деятельности вырисовывается облик ученого, который не был физиком, информатиком или стратегом. Его добычей всегда была еще не решенная задача, а на такие задачи охотятся только математики.

**1903** 28 декабря в Будапеште (Венгрия) у Макса Неймана и Маргарет Канн рождается первенец Янош (Джон фон Нейман).

**1911** Фон Нейман начинает учебу в Лютеранской гимназии в Будапеште.

**1922** Вместе со своим учителем, Михаэлем Фекете, публикует первую статью по математике.

**1925** Фон Нейман получает диплом химического инженера в Цюрихе. Пишет докторскую диссертацию на тему аксиоматизации теории множеств.

**1926** Поступает в Гёттингенский университет, где работает рядом с Давидом Гильбертом.

**1928** Публикует свою первую статью по теории игр *«К теории стратегических игр»*.

**1929** Женится на Мариэтте Кёвеши.

**1930** Работает как приглашенный профессор в Принстонском университете.

**1933** Становится профессором в Институте перспективных исследований в Принстоне и приват-доцентом в Венском университете.

**1935** У фон Неймана рождается дочь Марина.

**1937** Получает американское гражданство и разводится с женой. Год спустя женится на Кларе Дан.

**1943** Поступает на работу в Лос-Аламосскую национальную лабораторию.

**1944** Выходит первое издание его книги *Theory of Games and Economic Behavior* (*«Теория игр и экономическое поведение»*).

**1947** Президент Трумэн вручает ученому медаль за заслуги, а Военно-морской флот — медаль за выдающиеся гражданские заслуги (Distinguished Civilian Service Medal).

**1948** Становится консультантом корпорации РЭНД (Research And Development Corporation).

**1951** Публикует *«Общую и логическую теорию автоматов»*. Фон Неймана избирают президентом Американского математического общества (AMS).

**1952** Становится членом Комиссии по атомной энергии США.

**1955** Фон Нейману ставят диагноз «рак кости», из-за чего год спустя он вынужден пересесть в инвалидное кресло.

**1956** Президент Эйзенхауэр вручает ему медаль Свободы (Medal of Freedom). Также ученый награждается премией Энрико Ферми. Его госпитализируют в военную больницу Уолтера Рида в Вашингтоне.

**1957** 8 февраля фон Нейман умирает в Вашингтоне в возрасте 54 лет.

ГЛАВА 1

# Венгрия: рождение математика

Уже в очень раннем возрасте фон Нейман демонстрировал качества, свойственные вундеркиндам, например склонность к языкам и фотографическую память. Едва повзрослев, уже в первые годы учебы в университете, он опубликовал работу по математике, которая вызвала восхищение в академических кругах и стала началом его блестящей международной карьеры.

В 1867 году Франц Иосиф I стал императором Австрии и королем Венгрии. В том же году он издал трактат, которым даровал Венгрии достаточную степень свободы. Но поскольку история этой страны, ее политические и культурные особенности несли реальную угрозу национальному единству Австрии, Венгрия не могла иметь собственные министерства обороны и иностранных дел. Разумеется, это серьезно мешало государственной независимости Венгрии, но, несмотря на это, венгры не противились союзу с Австрией, так как он гарантировал им необходимую защиту от экспансии со стороны Российской империи, угрозу которой страна постоянно ощущала.

В то время вся власть Австро-Венгерской империи была сосредоточена при королевском дворе в Вене. Там пытались построить государственное единство с учетом вклада в него венгерской культуры, которая была совсем не простой, учитывая, что в Венгрии проживало множество других народностей — хорваты, сербы, русины, словаки.

В конце XIX века Венгрия еще не вполне освободилась от феодализма, и ее экономика носила преимущественно аграрный характер. Развитие промышленности повлекло неизбежную концентрацию ресурсов в крупных городах. Большинство крестьян делали все возможное, чтобы переехать в столицу, Будапешт, в надежде улучшить свою жизнь и дать детям необходимое образование, которое позволило бы им достичь более высокого положения в обществе. Технический и культурный прогресс сыграл решающую роль в изменении социальной структуры страны. При прежнем, феодальном, строе высокое социальное положение передавалось только по наследству. Теперь же хорошее образование позволяло достичь статуса, соответствующего заслугам человека. Самой активной частью населения была еврейская община, численность которой в Будапеште превышала численность самих венгров.

Строительство фабрик на окраинах города привело к появлению промышленного района, который привлекал обедневших крестьян — будущий рабочий класс. Рабочие тоже жили бедно, но между ними и крестьянами существовала огромная разница: крестьянин всегда был слугой, а рабочий — гражданином, который, даже принадлежа к низам общества, обладал некоторыми правами, немыслимыми до сих пор. С другой стороны, на изменение социального уклада повлияло и появление либеральных профессий, неизбежное при промышленном развитии. Инженеры, архитекторы, врачи, адвокаты, журналисты подталкивали общество к избавлению от старых традиций, мешавших развитию. Венский двор, застывший в ритуалах и роскоши, начинал смотреть на эти изменения с тревогой. Опасение вскоре сменилось страхом, так как старая венская аристократия не только чувствовала свое бессилие перед социальными изменениями, но и с каждым днем все больше беднела. Все эти процессы в конце концов стали плодородной почвой для социальных конфликтов, которые трудно было сдерживать, и для зарождения социалистической идеологии. Относительный политический и культурный мир, которого с трудом добилась Венгрия, был потревожен.

## СЕМЬЯ НЕЙМАНОВ

Столица Венгрии появилась в результате объединения трех городов — Буды, Обуды и Пешта. «Буда» означает «вода», и скорее всего это название город получил из-за соседства с великим Дунаем. «Пешт» значит «печь» и, вероятно, относится к многочисленным термальным источникам, бьющим в городе. Официальное объединение трех городов произошло в соответствии с королевским декретом в 1873 году, и с тех пор столица Венгрии стала называться Будапештом.

> В математике не усваивают понятий, а постепенно привыкают к ним.
>
> **Джон фон Нейман**

Несмотря на это жители столицы продолжали использовать названия Буда и Пешт, различая их если не как два разных города, то по крайней мере как два отдельных квартала. Буда, расположенный на возвышенности на левом берегу Дуная, со своими великолепными замками и зданиями в стиле эпохи Возрождения и барокко, считался более древней частью города, аристократическим районом, в котором богатые семьи имели летние резиденции. Пешт, напротив, был современной, быстро развивающейся частью столицы. Здесь находилось здание парламента — оплота венгерской бюрократии, — открывались первые магазины, банки, становилась все более активной культурная жизнь.

В конце XIX века окрестности Пешта стали одним из самых крупных центров мукомольной промышленности всей Европы. Якоб Канн, выходец из еврейской семьи, переехавшей в Венгрию из Богемии, вовремя понял, что поставка устройств для помола может стать хорошим источником заработка. Благодаря производству мельничных жерновов он сколотил небольшое состояние, позволившее ему купить дом в Пеште, на берегу Дуная, и еще один, летний, в Буде. Дом в Пеште был четырехэтажным и находился на улице Вачи-Корют под номером 62. На первом этаже Канн расположил конторы своего процветающего торгового бизнеса, а на втором поселил свою семью. Два верхних этажа предназначались старшим дочерям в качестве приданого. Канн был главой еврейской семьи в самом ортодоксальном смысле этого слова и хотел, чтобы вся семья жила под одной крышей.

Его старшая дочь, Маргарет Канн, обручилась с евреем Максом Нейманом, превосходным адвокатом, который вскоре занялся банковским делом. Ко дню свадьбы он уже был директором банка Jelzáloghitel Hitelbank, расположенного в Пеште. Якоб Канн подарил молодоженам четвертый этаж дома. Третий уже занимала семья второй дочери, так что, как и планировал Якоб Канн, вся семья жила вместе и была очень дружной.

В этой стране, в этом городе и в этой сплоченной семье 28 декабря 1903 года родился первенец Нейманов. Четыре года спустя у него родился брат Михаль, а в 1911 году — еще один брат, Николас. Полное имя Яноша было Нейман Янош Лайош (в те времена сначала ставилась фамилия, а потом имя). За годы своей жизни Янош несколько раз менял имя, прежде чем оно приобрело знакомый нам вид.

Культурный бум, охвативший Венгрию в конце XIX века, привел к появлению меритократии. Значительная часть населения, усердно трудившаяся и усваивавшая прогрессивные культурные веяния, начала требовать для себя большего социального веса. Венская аристократия почувствовала, что над ней нависла угроза зарождающегося радикализма, которой можно было противостоять, увеличив экономическую мощь. Одним из немногих способов добиться этого была продажа дворянских титулов. И хотя старая аристократия выступала против того, чтобы дворянские фамилии становились предметом купли-продажи, идея была претворена в жизнь. Таким образом, в начале XX века у венгерской буржуазии было два пути: примкнуть к движениям радикального толка, которые боролись за социальные реформы, либо искать прибежища в среде аристократии, пользуясь всеми ее привилегиями. Дворянские титулы стоили дорого, но были хорошей инвестицией, особенно для тех, кто вращался во влиятельных кругах, как отец фон Неймана. Макс Нейман в 1913 году получил дворянский титул, и к его фамилии добавились символы знатности — приставка «фон» в австрийском варианте и «Маргиттаи» —

### ИСКУССТВО ФУГИ

Дедушка Джона фон Неймана был большим любителем музыки, и в его доме даже был граммофон — редкость и новинка в то время. В буржуазных семьях было принято создавать небольшие камерные оркестры. Молодой Янош научился играть на скрипке. Позже он забросил инструмент, но любовь к музыке сопровождала его на протяжении всей жизни. Одним из произведений, которые больше всего впечатлили фон Неймана, было «Искусство фуги» Баха, включающее в себя 14 фуг и 4 канона. Бах написал его, чтобы показать пример техники контрапункта, без определенного порядка и не для какого-то конкретного инструмента. Судя по всему, это произвело огромное впечатление на молодого Яноша, который увидел в композиции пример абстрагирования. По словам его брата Николаса, «Искусство фуги» навело Яноша на мысль о том, что компьютер может не иметь предустановленной программы. Так появилась архитектура вычислительных машин, которая с тех пор носит имя фон Неймана.

**Рукопись «Искусства фуги» Иоганна Себастьяна Баха.**

в венгерском. Полным именем его первенца на венгерском языке стало Маргиттаи Нейман Янош. Имя Джон он взял себе, став американским подданным. Такова история превращения Неймана Яноша в Джона фон Неймана.

## ДЕТСТВО ЯНОША

Янош рос в окружении многочисленных братьев и кузенов, которые жили в одном доме и вместе обедали, ужинали, играли и отмечали праздники. В результате Янош, в отличие от других сверходаренных детей, не был ни молчаливым, ни скрытным ребенком. Напротив, он вырос чрезвычайно общительным человеком, хотя и нельзя сказать, что очень уж открытым и разговорчивым. Его ум всегда был занят какими-то интеллектуальными задачами, и на проявление теплых чувств места уже не оставалось, так что Яноша несправедливо считали немного высокомерным. Его мать рассказывала, что однажды, когда она сидела у окна с потерянным взглядом и хмурым лицом, Янош подошел к ней и вместо того, чтобы попытаться понять, чем она обеспокоена, спросил: «Что ты считаешь?»

В доме говорили на нескольких языках, и гувернантки обучали детей английскому и французскому. Знание иностранных языков всегда было очень важным для еврейских семей, ведь они в любой момент могли быть вынуждены покинуть родину. А кроме того, знание немецкого языка считалось обязательным, так как для некоторых слоев венгерского общества Германия была одной из лучших стран, позволявших достичь высокого профессионального и социального статуса. Ценились и мертвые языки, перед которыми Макс Нейман испытывал настоящее благоговение. В то время в средних школах обязательными предметами были латынь и греческий, которые начинали изучать в 14 лет. Янош благодаря урокам своего отца уже в шесть лет знал несколько фраз на классическом греческом. Неудивительно, что, обладая такими способностями и находясь в такой благоприятной среде, мальчик проявлял склонность к языкам. Во взрослые годы фон Нейман говорил на венгерском — языке своей матери, а также на немецком, английском, французском и, конечно, латинском и греческом. Он неоднократно подчеркивал то, какую важную роль сыграли в его жизни мертвые языки: их изучение помогло ему лучше понять, какой должна быть внутренняя структура вычислительных машин.

> Бессмысленно быть точным, когда даже неизвестно, о чем идет речь.
>
> **Джон фон Нейман**

Удивительно, однако, что на Рождество в семье фон Нейманов пели немецкие народные песни рядом с наряженной елкой. Удивительно, поскольку речь шла о празднике, который еврейская община не отмечала. Якоб Канн, дедушка Яноша, был очень религиозным человеком и строго соблюдал все еврейские обряды, но следующие поколения не унаследовали эту религиозность. Янош не получил еврейского религиозного воспитания, но ритуалы иудаизма в его семье соблюдались, хотя часто только внешне. Среди этих традиций были занятия с раввином по введению в Тору. О том, насколько незначительное влияние имел на фон Неймана иудаизм, свидетельствует тот факт, что ученый без малейших угрызений совести перешел в католическую веру, когда этого потребовали обстоятельства — чтобы заключить свой первый брак. В течение всей жизни фон Нейман был агностиком, за исключением очень краткого периода незадолго до смерти, когда он попросил позвать к нему католического священника.

В биографиях математических гениев часто упоминаются два их качества: первое — это способности к языкам, второе — фотографическая память (возможно, они тесно связаны). Янош не был исключением и мог запомнить целую страницу из телефонной книги, прочитав ее всего два-три раза. Друзья часто устраивали ему проверку, и действительно, Янош зачитывал по памяти имена, фамилии, адреса и номера телефонов в том порядке, в каком они шли в справочнике, или в обратном, или вразброс. Однажды отец купил ему такую большую энциклопедию, что для нее пришлось выделить отдельную комнату. Маленький Янош проводил среди книг по нескольку часов в день. Он начал с первого тома и, не пропустив ни одного абзаца, дошел до последней страницы последнего тома (всего в энциклопедии по мировой истории было 20 томов). При этом

Янош не только запоминал всю информацию, но и анализировал ее. Уже в раннем возрасте мальчик заинтересовался отношениями между странами, в частности военными конфликтами и стратегиями, которые в них использовались. Янош пытался установить взаимосвязи, не обозначенные в тексте напрямую. Вообще его интерес к военным стратегиям проявился очень рано. Янош быстро научился играть в шахматы у отца, который почти всегда выигрывал, и в это время Макс Нейман понял, что его сын не умеет проигрывать. Но и еще раньше, когда Янош играл со свинцовыми солдатиками, он был в первую очередь стратегом. Его брат Михаль говорил, что Янош не устраивал парады и не убивал солдат: его военные следовали тактике, установленной в самом начале игры, а его самого

### КРИГШПИЛЬ — ВОЕННЫЕ ИГРЫ

Когда Янош был маленьким, он часто играл с братьями, особенно с Михалем, в военные игры. Но делал он это не так, как большинство детей (он никогда ничего не делал так, как другие), то есть проводя военные парады или битвы с участием свинцовых солдатиков. Братья играли в версию старой игры кригшпиль, что в переводе с немецкого означает буквально «военная игра». В 1824 году Георг фон Рассевиц, полковник артиллерии прусской армии, придумал настольную игру, представляющую собой поле битвы, на котором можно реализовывать различные стратегии. Очень скоро высшее военное командование оценило потенциал игры: ее можно было использовать для тренировок офицеров. Эта инициатива принесла свои плоды, что проявилось в военных победах над Австрией в 1866 году и несколько лет спустя — над Наполеоном III. Со временем появились разные версии кригшпиля на английском, немецком и французском языках, и многие страны использовали эту игру для обучения офицеров военным стратегиям. Кригшпиль, в который играл Янош со своими братьями, они придумали сами и сами рисовали на листе бумаги поля сражений, укрепления, горы, реки и другие необходимые для битвы элементы. Во время Первой мировой войны фон Нейман внимательно следил за всеми продвижениями и отступлениями войск, чтобы как можно точнее воспроизвести их в своем личном кригшпиле. Много лет спустя, когда ученый уже был в США, он продолжил играть в эту игру и часто посещал стратегический больше интересовало развитие битвы и движение отрядов, нежели война сама по себе.

## ВЕНГЕРСКОЕ ЧУДО

Около середины XIX века образовательная система Европы подверглась глубокой реформе. Промышленный переворот вызвал появление множества новых технологий, для применения которых требовались устройства и механизмы, до этого никогда не использовавшиеся. В программы открывающихся инженерных факультетов включали новые дисциплины, тре-

центр РЭНД (Research And Development Corporation) — исследовательскую лабораторию, в которой обучались американские военные.

**Прусские офицеры обсуждают военные стратегии за столом кригшпиля. Гравюра Адальберта фон Росслера (ок. 1884).**

бовавшие более продвинутых знаний по математике, чем давала обычная школа.

Изучение математики — долгий процесс, идущий постепенно, шаг за шагом. Это многоэтажное здание, для которого нужен прочный фундамент, закладывающийся еще в школе. В середине XIX столетия в Венгрии была начата реформа, полностью внедренная к началу XX века и породившая так называемое венгерское чудо, которое впоследствии стало предметом изучения историков науки. Это явление было представлено такими учеными, как физики Денеш Габор (1900–1979), Лео Силард (1898–1964), Эдвард Теллер (1908–2003), а также физик и математик Юджин Пол Вигнер (1902–1995). Некоторые из них были товарищами фон Неймана по учебе. Девизом реформы стала фраза «Обновление или смерть», и она была понята буквально. В то время получила развитие дискретная математика, расчищающая себе дорогу в царстве «непрерывной», оставшейся в наследство еще от времен Исаака Ньютона (1643–1727), и лежащая в основе математического анализа. Одним из главных представителей этого прогрессивного направления стал Давид Гильберт (1862–1943), великий немецкий математик, впоследствии оказавший большое влияние на фон Неймана. Ласло Рац (1863–1930), венгерский математик, занимавшийся средним образованием, был одним из авторов реформы школьной программы по математике, начатой в 1909 году. Нововведением в рамках реформы стало создание в 1894 году Középiskolai Matematikai Lapok — математического журнала для средней школы, редактором которого стал Рац. В нем печатали работы и учителей, и учеников, в основном он содержал довольно простые задачи. Этот журнал, как и учреждение математических конкурсов (например, «Этвёш»), сыграл решающую роль в воспитании нового поколения венгерских математиков.

## КРАСНОЕ И БЕЛОЕ

После Первой мировой войны Венгрия пережила краткий, но кровавый период режима Белы Куна — военного, сражавшегося в австро-венгерской армии и побывавшего в российском плену, откуда он вернулся на родину убежденным коммунистом. В марте 1919 года Бела Кун захватил власть и начал претворять в жизнь теории Маркса и Ленина. Это означало передачу власти пролетариату, большая часть которого фактически была крестьянами, перераспределение благ и установление политического террора, осуществляемого комиссарами, которых назначал сам Кун. Вандализм и насилие со стороны членов его партии сделали Будапешт крайне опасным городом, и семья Нейманов уехала в Австрию. Яношу было тогда 14 лет. Кун оставался у власти на протяжении еще пяти месяцев, а в августе 1919 года был свергнут адмиралом Миклошом Хорти, который установил еще более жесткий, крайне правый режим. Красный террор сменился белым. Было убито более 5 тысяч человек и примерно 100 тысячам пришлось уехать из страны. Евреи были активными членами предыдущего правительства (8 из 11 комиссаров Куна), и Макс Нейман избежал опасности только потому, что всегда твердо выступал против режима Куна и к тому же принадлежал к аристократии. Безопасности его семьи в тот момент ничто не угрожало, но в обществе к евреям относились с подозрением. Именно тогда многие интеллектуалы еврейского происхождения решили эмигрировать в Германию.

**Бела Кун выступает в городе Касса (современный Кошица в Словакии).**

## ЛЮТЕРАНСКАЯ ГИМНАЗИЯ

Как было принято в богатых семьях того времени, до десяти лет Янош занимался с учителями дома. Среднее образование он получил в Лютеранской гимназии Будапешта (Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium), элитной школе, которая, хоть и относилась к лютеранской церкви (все частные школы тогда финансировались какой-либо церковью — христианской, коптской или лютеранской), была толерантна к представителям других верований. Помимо уроков Янош занимался с раввином, который дал ему начальные знания иврита и понятий иудейской культуры, содержащихся в Торе.

В этой школе Янош проучился восемь лет. Он отлично успевал, но не перескочил ни через один класс — это могло бы отдалить его от других ребят и противоречило педагогическому подходу самого Ласло Раца, его учителя по математике. В школе поощрялась командная работа, и товарищи Яноша, с одной стороны, завидовали ему, а с другой — восхищались его интеллектуальными способностями. Там же Янош познакомился с Юджином Вигнером, который учился на класс старше. Позже, в 1963 году, Вигнер получил Нобелевскую премию. Он вспоминал, что Яношу очень нравилось разговаривать с ним, преимущественно о математике, и во время их долгих прогулок он всегда пытался перевести разговор на теорию множеств, которой был очарован уже в то время.

Рац быстро разглядел одаренность Яноша и предложил его отцу составить для мальчика индивидуальный план занятий. Макс сразу же согласился. Рац переговорил с Йожефом Кюршаком, известным математиком из Будапештского университета, который выбрал для Яноша в качестве частного преподавателя молодого математика Михаэля Фекете (1886–1957). Они занимались до самого окончания средней школы. На последнем году школьного обучения Янош и Фекете опубликовали совместную статью об одной теореме математического анализа в журнале *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (*«Ежегодный отчет Немецкого математического общества»*).

СЛЕВА ВВЕРХУ:
**Маргарет Канн, жена Макса Неймана, мать Джона фон Неймана.**

СПРАВА:
**Макс Нейман с сыном, маленьким Яношем Нейманом.**

ВНИЗУ:
**Фасад Лютеранской гимназии в Будапеште, куда Нейман поступил в 1911 году.**

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Математические олимпиады, как говорится в их уставе, являются «состязаниями среди юных школьников, и главная их цель состоит в стимулировании занятий математикой и развитии молодых талантов в этой области». Они возникли на основе национальных математических соревнований Этвёша. В 1894 году барону Лорану Этвёшу (1848–1919) предложили стать министром образования, чтобы способствовать установлению гражданских прав и религиозной свободы. В честь этого события Венгерское общество математики и физики решило организовать ежегодные соревнования для выпускников средних школ. Современное название олимпиад было принято в 1958 году, когда по инициативе Румынии прошла первая Международная математическая олимпиада. В ней приняли участие 7 стран, а сегодня она открыта для 80 стран всех пяти континентов. Фон Нейман, получивший национальную премию Этвёша, может считаться преолимпийским чемпионом.

**Венгерский физик и политик Лоран Этвёш, в честь которого были названы первые соревнования по математике в Венгрии, учрежденные в 1894 году.**

За эту статью Янош был удостоен национальной премии Этвёша. Для конкурса, в котором принимали участие все средние школы страны, требовалось глубокое знание математических понятий и принципов решения задач. Став лучшим в тот раз, Янош навсегда осознал свои удивительные способности.

## УЧЕБА В УНИВЕРСИТЕТЕ

Наверное, многие удивились бы, узнав, что один из самых ярких математиков XX века закончил химический факультет. Фон Нейман выбрал его не по зову сердца, а как компромисс между интересами отца и собственными желаниями. Еврейская семья в Европе вне зависимости от социальной или экономической ситуации должна была жить на чемоданах, готовой в любой момент к путешествию без обратного билета. Часто евреям в течение одного дня нужно было покинуть родину, бросив все нажитое, поэтому они прекрасно понимали, что главным богатством было не то, что можно положить в чемодан, а то, что находится в голове, — этого уж точно никто не может отнять. Каждый еврей должен был владеть хотя бы одним иностранным языком и иметь профессию, которая позволила бы заработать на жизнь. Конечно, многое зависело и от того, в какую страну пришлось бы переехать. Макс Нейман заранее подумал о том, чтобы обучить своих детей превосходному немецкому и дать им достаточные знания английского и французского, — эти страны в то время имели наибольший вес в мировой политике. Кроме того, Макс Нейман всегда хорошо относился к занятиям сына математикой. Его врожденная склонность к этой науке была так велика, что отец понимал: в конце концов Янош сделает ее своей профессией. Но в данном случае речь шла только об интеллектуальном развитии. Достойного экономического положения математика могла и не обеспечить. Макс Нейман попросил помощи у своего друга, физика и инженера Теодора фон Кармана (1881–1963), чтобы тот убедил Яноша выбрать более доходную профессию. Втроем они пришли к соглашению: Янош будет штудировать химическую инженерию, но при этом не оставит и математику. В последующие пять лет обучения в университете Янош занимался в таком интенсивном ритме, что выдержать его мог только человек с необыкновенными способностями.

Университетское образование в Венгрии было доступно далеко не всем и тем более ограничено для евреев, но список достижений фон Неймана открывал ему двери в любое европейское учебное заведение. В 1921 году он поступил на математический факультет Будапештского университета. Юноше нужен был только диплом: он не посетил ни одного занятия и приходил только на экзамены, на которых всегда получал самые высокие оценки. Одновременно с этим Янош два года, с 1921 по 1923 год, занимался химической инженерией в Берлинском университете, а последующие два, с 1923 по 1925 год, — изучал химию в Федеральном технологическом институте в Цюрихе, где и получил диплом. Университетское образование Неймана завершилось защитой докторской диссертации по математике (по теории множеств) в Будапештском университете в 1926 году. К 20 годам он сформулировал определение ординальных чисел, которое используется по сей день.

С этого момента карьера фон Неймана очень быстро пошла в гору, и вскоре он стал одним из самых известных математиков в мире. Янош работал профессором в Берлинском университете с 1926 по 1929 год и в Гамбургском — с 1929 по 1930 год.

Важной датой в его биографии стал 1927 год: фон Нейман получил Рокфеллеровскую стипендию для продолжения обучения в Гёттингенском университете, главном математическом центре Европы. Там он познакомился с Давидом Гильбертом, одним из выдающихся математиков XX века, который оказал огромное влияние на его научную деятельность.

ГЛАВА 2

# Германия: чистая математика

Самые важные исследования, проведенные фон Нейманом в Гёттингене под руководством Гильберта, были посвящены вопросам аксиоматизации. Чтобы лучше понять значение его достижений, нужно понимать, какую роль играли аксиомы на протяжении всей истории математики и какой глубокий кризис в аксиоматике наблюдался в начале XX века. Этот кризис поставил под вопрос сами основания математики.

В течение последней четверти XIX века главным центром математики в Европе был Берлинский университет, однако подход к науке в этом учреждении отличался довольно сильным пуризмом. Так, задачи решались прежде всего геометрическими методами. Применение элементов анализа Декарта и алгебры считалось отходом от математического метода, опирающегося на классическую геометрию.

Для пуристов точка, прямая или плоскость были интуитивно понятными объектами, которые можно представить и которые позволяли сформулировать и доказать теоремы исходя из законов логики и аксиом, установленных древнегреческим математиком и геометром Евклидом (ок. 325 — ок. 265 до н.э.). С аналитической же точки зрения, прямая считалась совокупностью точек, определяемых декартовыми координатами, и правила игры в этом случае диктовала абстрактная алгебра. Уже тогда математический анализ был развит достаточно, чтобы оперировать прямыми, плоскостями и кривыми на очень высоком уровне, не нуждаясь в том, чтобы «видеть» эти операции.

Университет немецкого Гёттингена стал флагманом этого нового подхода.

## ГЁТТИНГЕН

Гёттингенский университет был основан в 1734 году Георгом II, курфюрстом Ганновера. В 1866 году этот город был присоединен к Пруссии, что повлекло за собой важные изменения: прусское правительство считало, что университет имел ключевое значение для развития страны. В том же году ректором был назначен немецкий математик Феликс Клейн (1849–1925): он сохранил верность этому учебному заведению, отклоняя другие предложения работы, среди которых была и кафедра в Берлине. Клейн проработал здесь до самого выхода на пенсию в 1920 году, но продолжал читать лекции до 1924 года. Он разработал проект, известный как Эрлангенская программа, в рамках которой хотел установить новые связи между различ-

### ФЕЛИКС КЛЕЙН

Немецкий математик Феликс Клейн родился 25 апреля 1849 года в Дюссельдорфе, в семье важного прусского чиновника. Начальное образование ему дала мать. Затем Феликс два года отучился в частной начальной школе и в 1857 году поступил в Дюссельдорфское училище, где провел восемь лет и получил полное среднее образование. В 16 лет Клейн поступил в Боннский университет. Несмотря на то что его очень интересовала математика, он большую часть времени посвящал занятиям ботаникой. Через год после поступления в университет начал посещать семинары по физике, которые проходили под руководством Юлиуса Плюккера, физика и математика, в то время работавшего над своей книгой *Neue Geometrie des Raumes* (*«Новая геометрия пространства»*). Клейн так углубился в изучение этой темы, что после смерти Плюккера взял на себя составление второй части книги.

**Индивидуальная образовательная программа**
Отдавая себе отчет в том, что ему не хватает знаний в некоторых областях математики, особенно в интегральном исчислении, в 1869 году Клейн переехал в Гёттинген и в течение года посещал занятия Альфреда Клебша. Клейн никогда не придерживался стандартной академической программы и сам составлял учебный план. Во время учебы в Берлине в 1870 году он посещал не занятия по математике, а кофейни — правда, в обществе двух

ными областями математики и приблизить ее к физике. Эту программу Клейн воплотил в жизнь за десять лет. Его верным союзником стал Давид Гильберт, один из самых выдающихся ученых конца XIX — начала XX века, который, как считается, оказал наибольшее влияние на геометрию после Евклида.

Благодаря Гильберту в 1895 году началась новая эпоха в развитии Гёттингенского университета, а Математический институт Гёттингена прославился во всем мире. Гильберт разделял мнение Клейна о том, что университет должен открыться для международного сообщества и отойти от пуристских взглядов, чтобы способствовать объединению различных математических дисциплин, но при этом стараться избегать открытого столкновения с Берлинским университетом. И действительно, вскоре Гёттингенский университет прославился своей

выдающихся математиков — австрийца Отто Штольца (1842–1905), который уже заведовал математической кафедрой и приехал в Берлин, чтобы расширить свои познания, и норвежца Софуса Ли (1842–1899). Именно Ли открыл Клейну важность теории групп, разработанной Эваристом Галуа (1811–1832) и впоследствии оказавшей большое влияние на научную деятельность Клейна. По прошению Клебша Клейн получил звание ординарного профессора в Эрлангенском университете. Именно там, комментируя созданный им учебный план, Клейн впервые изложил свою знаменитую Эрлангенскую программу. За годы педагогической деятельности он преподавал математику в Мюнхене (1875–1880), Лейпциге (1880–1886) и Гёттингене (1886–1913), где создал институт прикладной математики. В 1882 году у Клейна на фоне серьезного психического расстройства произошел нервный срыв, и он прекратил заниматься наукой. Ученый умер в Гёттингене 22 июня 1925 года.

открытостью: здесь радушно принимали ученых и мыслителей с новаторскими идеями независимо от их происхождения или социального положения.

Гильберт придерживался твердой позиции по поводу роли математики по отношению к физике; однажды он даже заявил, что физика слишком сложна для самих физиков. Совместно с немецким математиком Рихардом Курантом (1888–1972) Гильберт издал книгу *Methoden der mathematischen Physik* (*«Методы математической физики»*, 1924), которая оказалась бесценной для физиков. Работа переиздается до сих пор и известна под кратким названием «книга Куранта — Гильберта».

## АКСИОМАТИКА

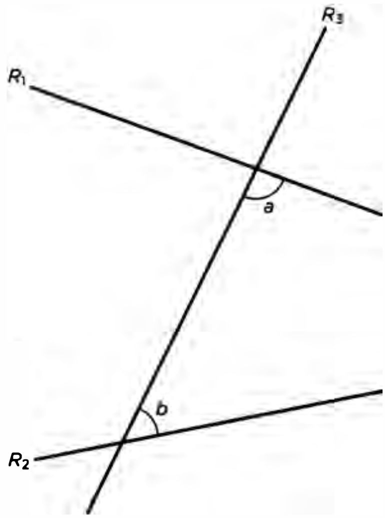
Такие элементарные понятия, как точка, прямая, плоскость, и их взаимоотношения, от простых до сложных, были систематизированы и упорядочены в период с 330 по 275 год до н.э. в одной из самых известных книг во всей истории человечества. Мы говорим о *«Началах»* Евклида. Этот труд состоит из 13 книг, в которых содержатся все знания по геометрии того времени. Евклид построил свою геометрию на трех ключевых понятиях: аксиомах, теоремах и постулатах. Теоремы относятся к неочевидным предложениям, которые можно доказать на основе аксиом и постулатов посредством логических рассуждений. Всего Евклид ввел 23 аксиомы (или определения) и 5 постулатов. Различие между аксиомой и постулатом очень важно для понимания сущности геометрии, описанной в *«Началах»*. Аксиома не нуждается в доказательстве, так как это ясное и очевидное утверждение. Например, первая аксиома Евклида гласит: «Точка есть то, что не имеет частей». Постулат же — предложение, которое, не будучи таким очевидным, как аксиома, считается истинным без доказательства.

Таким образом, математическое здание строится шаг за шагом на основе системы аксиом и логических правил, которые позволяют создавать теоремы. До появления неевклидовых

### ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ

В пятом постулате *«Начал»* Евклида — не таком ясном, как остальные четыре, — утверждается:

> «Если через две прямые проходит прямая, образующая с одной стороны внутренние углы, чья сумма меньше суммы двух прямых углов, то если продолжить эти прямые бесконечно, они встретятся с той стороны, с которой сумма двух углов меньше двух прямых углов».




Возьмем прямую $R_3$, проходящую через прямые $R_1$ и $R_2$ (см. рисунок). Внутренние меньшие углы, о которых идет речь в постулате, обозначены буквами $a$ и $b$. Согласно пятому постулату, если мы продолжим прямые $R_1$ и $R_2$, то они пересекутся в правой части рисунка. Недостаток в этом постулате простоты и очевидности, присущей первым четырем, всегда привлекал внимание геометров. Сам Евклид старался избегать этого постулата и впервые применил его только в доказательстве номер 29 книги I. Из-за этой попытки построить всю свою геометрию без пятого постулата Евклида даже называли первым неевклидовым геометром. Так или иначе, пятый постулат с самого начала вызывал вопросы. Справедлив ли он? И если да, действительно ли это независимый постулат? Или это теорема, которую можно доказать на основе четырех предыдущих постулатов?

геометрий этот фундамент казался достаточно прочным и вызывал полное доверие. Но среди постулатов Евклида было слабое звено — пятый постулат. Он стал одним из самых обсуждаемых в истории математики, предметом споров, длившихся более 2000 лет, и той трещиной, которая разрушила все здание.

Неевклидова геометрия — это любая геометрическая система, отрицающая истинность пятого постулата. Если вспомнить, что евклидова геометрия на протяжении 2000 лет считалась единственно возможным геометрическим подходом к изучению окружающего нас мира, то становится понятно: для ее отрицания требовалась определенная интеллектуальная дерзость. Создание таких альтернативных геометрий, казалось,

### ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА

В рамках евклидовой геометрии мы оперируем элементами, которые непосредственно принадлежат этому виду геометрии, — точками, прямыми, плоскостями, углами и так далее, а также преобразованиями, которые можно применить к этим элементам. Мы можем переносить их из одного места в другое, вращать их, удлинять, укорачивать или придавать им определенную симметрию. Некоторые преобразования обратимы, то есть если в ходе преобразования из точки $A$ мы переходим в точку $B$, то существует и другое преобразование, которое приводит нас из точки $B$ в точку $A$. Также, применяя два преобразования подряд, мы можем получить еще одно преобразование. Если имеется совокупность преобразований, отвечающих этому критерию (и еще нескольким, но в данном случае это не важно), то она называется группой преобразований. Некоторые объекты, с которыми мы имеем дело в геометрии, могут быть в большей или меньшей степени подвергнуты таким преобразованиям.

**Пример**

Предположим, что мы должны перенести окружность. Ее центром является определенная фиксированная точка, но при переносе она меняется. Если же мы оставим центр на месте и уменьшим длину окружности, изменится ее радиус. Но при всех этих преобразованиях одно свойство остается неизменным — соотношение между длиной окружности и ее диаметром. Феликс Клейн заметил, что изучение таких инвариантных свойств было определяющей характеристикой конкретного типа геометрии, в рамках которой можно сравнивать фигуры с одинаковыми свойствами. Тогда он предложил более общее и более абстрактное определение геометрии: она определялась парой $(X; G)$, где $X$ — множество объектов, а $G$ — множество преобразований, применяемых к ним. Все известные геометрии —

могло быть только математической игрой, забавой. И действительно, сначала дело обстояло именно так, но со временем эти геометрии стали мощным инструментом не только в математике (в таких областях, как динамические системы, автоморфная функция, теория чисел), они оказались необходимой системой измерений во многих областях современной физики. Если речь идет об относительно небольших расстояниях, евклидова и неевклидова геометрии практически эквивалентны. Однако если рассматривать расстояния в астрономии или в некоторых си-

евклидова, проективная, гиперболическая и так далее — попадали под эту классификацию. Она также открывала путь новым геометрическим системам, поскольку множество объектов $X$ могло состоять из абсолютно любых типов элементов. Клейн изложил свои идеи в докладе *«Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»*, представленном в 1872 году на математической кафедре Эрлангенского университета. Позднее доклад стал известен в математических кругах как Эрлангенская программа Феликса Клейна.


**Открытка 1916 года, на которой изображена улица на территории Эрлангенского университета.**

стемах современной физики (теории относительности или теории распространения волн), неевклидовы геометрии оказываются более точным инструментом.

В свете этого ученые заключили, что гиперболическая геометрия — один из видов неевклидовой — не менее обоснована, чем евклидова; другими словами, если в гиперболической геометрии и есть противоречия, то они есть и в геометрии Евклида. Последующее развитие теоретической физики показало, что евклидова геометрия необязательно наиболее соответствует «реальности».

Появление неевклидовых систем стало важным этапом не только в развитии самой геометрии. Речь шла о том, чтобы зайти за священную ограду непреложных истин, содержащихся в аксиомах, и сделать предметом изучения само внутреннее обоснование этих аксиом. Геометрия стала детонатором глубокого кризиса, который в итоге поразил один из столпов всей математической науки — теорию множеств.

## ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Теория множеств имеет большое значение для математики: являясь, в сущности, очень простой, она позволяет дать определения таким понятиям, как упорядоченная пара, соотношение, функция, разбиение множества, порядок, натуральные числа, рациональные, вещественные, комплексные числа, структура группы, кольцо, тело, векторное пространство и так далее,— список можно продолжать очень долго. Само же понятие множества — одно из основных в математике. Сложно найти хотя бы одну ее область, которая не была бы основана на нем, явно или не очень явно. Можно даже утверждать, что все математическое здание стоит на краеугольном камне теории множеств, которой пользуются математики, логики и, в меньшей степени, те, кто имеет дело с программированием.

Первая сложность в этой теории — само определение множества, но если ее преодолеть, все остальное работает прекрасно. Сформулировать же это определение, не используя само слово «множество» или его синонимы (совокупность, общность, последовательность и другие), очень трудно. Одна из лучших формулировок, в которой нет никаких синонимов (по крайней мере на первый взгляд), была предложена британским ученым Бертраном Расселом (1872–1970):

> «Множество суть одновременное рассмотрение различных элементов».

Это очень интересное определение, так как в нем множество представляется как направление мысли, и это означает, что речь идет действительно о базовом понятии. Представим, что мы пришли на прием, где никого не знаем, и начинаем скучать. Чтобы убить время, мы посмотрим на обувь, которую носят гости, и попробуем ее классифицировать по очень простому принципу «нравится — не нравится». Тем самым мы установим некое соотношение в точно определенном множестве: вся обувь на приеме. Перемена направления мысли состоит именно в том, чтобы рассмотреть одновременно ряд объектов, ограничить наше внимание только ими, сконцентрироваться только на них. Именно так мы и получили «множество обуви».

Существует два особых и теоретически неизбежных множества — пустое и универсальное. Пустое множество обозначается знаком $\emptyset$ и определяется как множество, не имеющее ни одного элемента. С философской точки зрения это очень противоречивое понятие, и в свое время у него было много противников. Ведь раз множество не содержит ни одного элемента, значит оно состоит из ничего, а поскольку «ничто» не существует, то не существует и пустого множества. Универсальное множество, напротив, имеет слишком много элементов, то есть оно просто-напросто слишком большое. В большинстве научных работ его обозначают буквой U. Определение универсального множества не такое четкое, как пустого. Считается, что оно включает в себя все множества, которые мы только можем рассмотреть. Поскольку в пустом множестве ничего нет, в U возникает соблазн включить все. Это означало бы, что U — множество всех возможных множеств, что не совсем правильно — не с метафизической точки зрения, на которую математики не обратили бы внимания, а с точки зрения внутренней логики самого понятия множества. Поэтому для универсального множества ставят условные ограничения. В приведенном выше примере, когда скучающий гость рассматривает обувь всех приглашенных на прием, мы можем считать универсальным множеством U «всю обувь, которая есть на приеме». Но для нас также удобно расширить это множество до всей обуви, произведенной в стране, если, например, мы рассматриваем определенные марки. Или мы легко могли бы принять за универсальное множество «всю обувь мира». Главное — множество должно быть достаточно большим, чтобы нам было удобно оперировать членами внутри него. Разумеется, если мы будем следовать такому алгоритму, то в наших универсальных множествах в итоге всегда будет бесконечное количество элементов. Неудивительно, что история теории множеств тесно связана с понятием бесконечности, в частности с понятием актуальной бесконечности и необходимостью создавать математические объекты с бесконечным количеством элементов.

Несмотря на то что первые понятия множеств были выведены еще Бернардом Больцано (1781–1848), создателем этой теории является Георг Кантор (1845–1918). Можно сказать, что она родилась в 1874 году в работе Кантора, опубликованной в престижном *«Журнале Крелля»* под названием *Über eine Eigenschaft des Ibegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (*«Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»*).

Впервые аксиомы для теории множеств вывел немецкий математик и логик Готлоб Фреге (1848–1925), который хотел придать ей логическую структуру. Эта серия аксиом должна была не только обеспечить правильность операций с множествами, но и неким образом, явно или нет, выявить само определение множества. Так или иначе, эта система аксиом просуществовала очень недолго, так как в теории был открыт коварный парадокс.

## ПАРАДОКС РАССЕЛА

В 1903 году Бертран Рассел доказал, что в теории множеств Кантора таится противоречие, и поставил под вопрос само определение множества. Кантор понял это, когда столкнулся с тем, что множество всех множеств не может существовать, так как множество никогда не может являться частью самого себя. Предположим, что существует два типа множеств, — те, что принадлежат сами себе, и те, которые не принадлежат. Назовем, например, множество всех существующих столов $M$. Пусть $m$ — произвольный стол. Следовательно, $m$ принадлежит $M$:

$$m \in M.$$

Разумеется, множество всех столов не является столом. Следовательно, мы можем утверждать, что

$$M \notin M.$$

Таким образом, это пример множества, не принадлежащего самому себе. Теперь рассмотрим множество $T$, состоящее из всех множеств, которые содержат более трех членов. Если мы возьмем множество $p$, образованное парой одинаковых элементов, то получим, что

$$p \notin T.$$

У множества $T$, разумеется, больше трех элементов — их бесконечное количество, поэтому

$$T \in T.$$

Следовательно, это пример множества, принадлежащего самому себе.

Тогда Рассел вводит следующее множество $R$:

«$R$ состоит из множеств, которые не являются элементами самих себя».

Исходя из предыдущих примеров, мы имеем:

$$M \in R \text{ и } T \notin R.$$

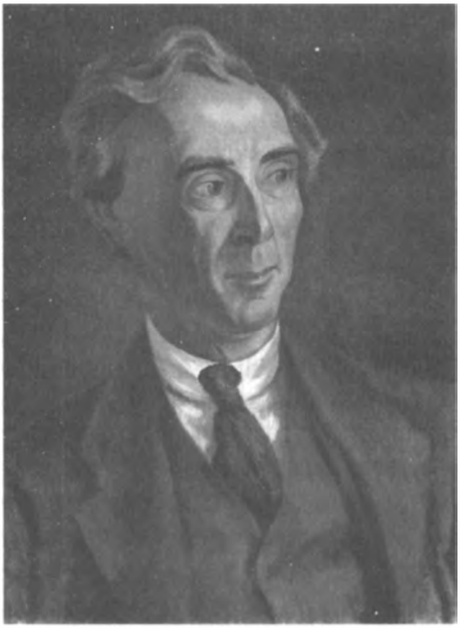
В этом случае вопрос Рассела звучит так:

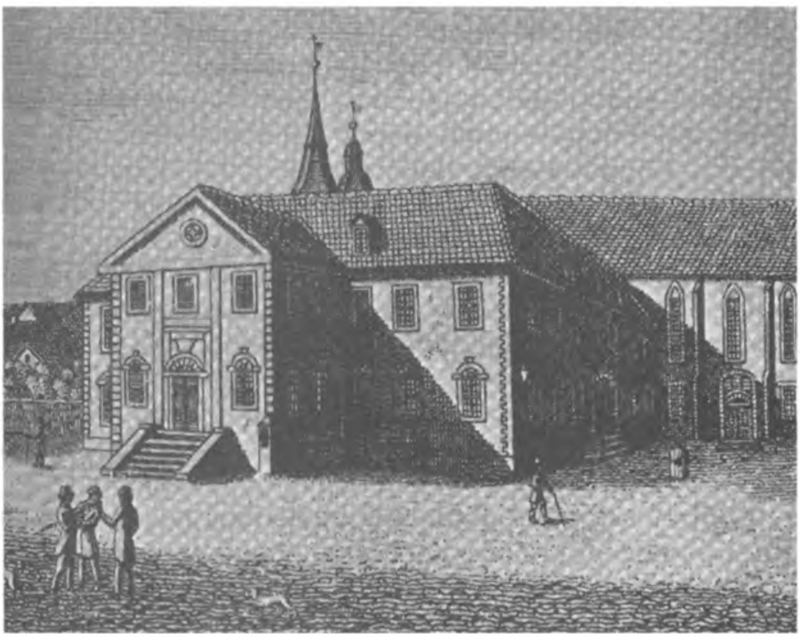
$$R \in R?$$

Если ответ да, то $R$ не может быть элементом $R$, так как содержит само себя и, следовательно, не принадлежит само себе. Если же ответ нет, то множество $R$ не принадлежит само себе. Таким образом, в любом случае мы получаем элемент, который одновременно и принадлежит, и не принадлежит некоему множеству, что является парадоксом, или, выражаясь языком логики, противоречием. Проблема, лежащая в его основе, заключалась в том, что в рамках теории Кантора ничто не запрещало образовывать такие множества, как множества Рассела. Следовательно, надо было создать такую аксиоматику, которая не оставила бы места множествам такого типа.

## МЕТОД ФОН НЕЙМАНА

Немецкий логик и математик Эрнст Цермело (1871–1953) сформулировал семь аксиом, с помощью которых не только хотел придать логическую основательность теории множеств, но и избежать таких спорных ситуаций, как в парадоксе Рассела. Для этого Цермело дал определение основным понятиям и их отношениям. За аксиому принималось существование самого множества, пустого множества, объединения и пересечения множеств, а также части множества. Таким образом гарантировалось точное существование множеств, на которых можно было основываться и которые позволяли доказать фундаментальные для анализа теоремы. В то же время из игры ис-





СЛЕВА ВВЕРХУ:
**Бертран Рассел, один из основателей аналитической философии. Портрет маслом кисти Роджера Фрая, 1923 год.**

СПРАВА ВВЕРХУ:
**В Гёттингенском университете фон Нейман (фотография 1940-х годов) познакомился с Давидом Гильбертом, чьи труды оказали на него большое влияние.**

СЛЕВА:
**Медная гравюра, на которой изображено здание Гёттингенского университета и библиотеки. Около 1815 года.**

ключались ненадежные множества, которые могли привести к парадоксам. Позже теория множеств Цермело была дополнена и расширена Абрахамом Галеви Френкелем (1891–1965). Так появилась система аксиом, ставшая известной как аксиоматика Цермело — Френкеля. Пользуясь сравнением Анри Пуанкаре (1854–1912), теперь овцы были окружены забором, который защищал их от волков, оставшихся снаружи, но при этом было неизвестно, не спрятался ли какой-нибудь волк внутри. Другими словами, система Цермело — Френкеля позволяла создавать все необходимые для математики множества, но не исключала вероятности существования множеств, принадлежащих самим себе, — затаившихся внутри ограды волков.

Существует такое бесконечное множество *А*, которое не является слишком большим.

**Джон фон Нейман**

Фон Нейман предложил для решения этой проблемы два способа, которые дополняли друг друга: аксиому регулярности и понятие класса. Обе эти модели он изложил в 1928 году в своей докторской диссертации *Die Axiomatisierung der Mengenlehere* (*«Аксиоматизация теории множеств»*), которую защитил в Будапештском университете.

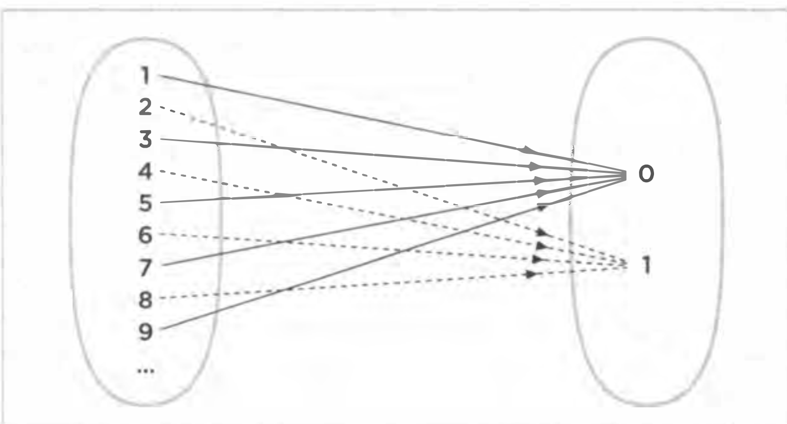
При помощи аксиомы регулярности и следуя аксиомам Цермело фон Нейман строил множества снизу вверх, так, что если одно множество принадлежало другому, то оно обязательно было первым в последовательности. При этом исключалась вероятность того, что множество принадлежит само себе. Важно подчеркнуть, что метод, использованный фон Нейманом для демонстрации этого результата, стал фундаментальным для многих доказательств теории множеств и используется по сей день.

Другой его метод, связанный с понятием класса, состоял в использовании функций для определения множеств.

## ФУНКЦИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Функция принадлежности, применяемая для множества, принимает только два значения — 0 и 1 — исходя из заданного критерия. Его устанавливают так, что все элементы, принимающие значение 1, — это именно те, что составляют множество, которое мы хотим определить. Рассмотрим множество всех четных чисел. С помощью функции $c$ его можно определить следующим образом: $c\ (4) = 1$; $c\ (7) = 0$; $c\ (31) = 0$; $c\ (220) = 1$. То есть функция $c$ равна 1, когда применяется к четному числу, и 0 — когда к нечетному (см. рисунок). Таким образом, множество всех четных чисел — это множество, образованное всеми числами, для которых функция принадлежности принимает значение 1. Следовательно, множества можно определять с помощью функций.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами — это особый вид соотношений между элементами первого и второго множеств. Например, если первое множество состоит из рубашек, а второе — из брюк, мы можем установить между ними следующее соответствие: каждой рубашке первого множества соответствует пара брюк такого же размера из второго. Тогда мы скажем, что брюки — отображение определенной рубашки. Может случиться, что у одной рубашки будет



размер XXL, а среди брюк не будет ни одной пары этого размера; тогда мы скажем, что у этой рубашки нет отображения. Или может быть, что одной рубашке соответствуют несколько пар брюк того же размера. В этом случае мы скажем, что у рубашки несколько отображений. Когда каждому элементу соответствует только одно отображение, мы говорим о взаимно однозначном отображении, или о биективной функции. Например, биективной будет функция, переводящая каждое число множества целых чисел в то же число, умноженное на два. Назовем эту функцию $f$. Мы получим, что $f(2) = 4$; $f(5) = 10$; $f(14) = 28$... Если вместо того чтобы записывать через функцию значения, которые принимает каждый элемент, мы запишем их в скобках, то получим тот же результат:

$$(2, 4)\ (5, 10)\ (14, 28).$$

Разница состоит только в том, что теперь функция определена через множество, элементы которого представляют собой пары. Итак, функция может быть представлена как множество парных элементов, а множество может быть выражено с помощью функции принадлежности. Идея о том, что множество основано на понятии принадлежности, относится к аксиоматике Цермело — Френкеля. Фон Нейман же (ему было всего 22 года, когда он разработал свою аксиоматику теории множеств) взял в качестве ключевого понятия функцию. Это формальное отличие имеет важное следствие: количество аксиом Цермело — Френкеля не определено изначально, теоретически оно может быть бесконечным, в то время как, следуя подходу фон Неймана, требуется всего 18 аксиом, к тому же первую можно включить во вторую как частный случай.

Еще одним достоинством метода фон Неймана было то, что модель множества основывалась не на принадлежности, а на классах функций, которые делились на множества и собственно классы. Последние настолько велики, что не могут содержаться в других классах. Множества же удовлетворяют ограничивающим условиям и могут входить в другие классы. Таким образом, внутри забора оставались только овцы, а все волки оказывались снаружи, поскольку то, что приводило к противоречиям, было рассмотрением не классов самих по себе, а возможности их вхождения самих в себя. Аксиоматика Цермело — Френкеля, дополненная фон Нейманом, используется и сегодня.

## КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

С самого зарождения физика была экспериментальной наукой. Физическая теория часто рождается в результате опыта и подтверждается другим опытом. В промежутке строятся рабочие гипотезы, даются определения терминам и выводятся формулы — в этом случае физика активно сотрудничает с математикой. Создание формул крайне важно, так как в числе прочего в них заложен большой потенциал предвидения и обобщения, что является следствием абстрактного характера математики. Если у нас есть сосуд с жидкостью, характеристики которой нам известны, и у сосуда есть слив, то мы можем измерить время, за которое вся жидкость вытечет. Имея в распоряжении подходящую физическую теорию, построенную на законах вытекания жидкости из сосуда (что обязательно подразумевает и существование определенных математических формул), мы сможем предположить, сколько времени будет затрачено для этого в сосудах разной формы с разными жидкостями разного объема.

> Гораздо легче лететь на самолете или даже управлять им, чем понять, почему он движется.
>
> **Джон фон Нейман**

Тесная связь математики и физики существовала не всегда. Как правило, эти науки шли разными путями, хотя в итоге всегда стремились друг к другу. Рано или поздно физика должна была прибегнуть к помощи математики, чтобы оформиться как точная наука. Появление в начале XX века новых теорий, таких как теория относительности и квантовая механика, требовало развития и новой математики, приспособленной к новым парадигмам. Так теоретическая или, как ее еще называют, математическая физика стала выходить на первый план, и благоприятные условия для этого создал Давид Гильберт в Гёттингенском университете.

### ДВЕ ВОЛНОВЫЕ ТЕОРИИ

В какой-то момент ньютонова физика уже не могла объяснить накопившиеся экспериментальные данные. Главные сложности возникли с двумя явлениями. Первым было излучение черного тела, которому никак не удавалось найти удовлетворительного объяснения. Второе касалось электрона, вращавшегося по орбите вокруг ядра: теоретически он должен был постепенно терять энергию и упасть на ядро, но этого не происходило. Помимо этого, по результатам некоторых экспериментов природа частиц оказывалась двойственной — они вели себя как волны и корпускулы одновременно. То же самое получалось и в некоторых экспериментах с фотонами. Например, при фотоэффекте они вели себя как частицы, а в эксперименте с двойной щелью проявляли волновую природу. Тогда появились две теории, объясняющие эти явления. Первая принадлежит Вернеру Гейзенбергу (1901–1976), вторая — Эрвину Шрёдингеру (1887–1961). Механика Гейзенберга была матричной, механика Шрёдингера — волновой, и, разумеется, для них требовались разные математические инструменты. По схеме Шрёдингера волновое уравнение, описывающее частицу, было дифференциальным, а его решение для электрона атома водорода совпадало с результатом, полученным опытным путем.

Все эти исследования проходили в Гёттингенском университете в 1925–1926 годах. Необходимо было как можно скорее найти математический инструмент, пригодный для использования в рамках обеих теорий. Как это часто происходило в истории науки, именно математический, сугубо абстрактный подход, не имевший ничего общего с конкретной физической реальностью, стал прекрасной основой для двух разных теорий. Их объединила теория функциональных полей Давида Гильберта. Однако это объединение в более широком смысле могло произойти только при наличии абстрактной системы аксиом, способной совместить оба подхода.

## АКСИОМАТИЗАЦИЯ ФИЗИКИ

Можно ли аксиоматизировать физику? Этот вопрос стоит на шестом месте в знаменитом списке 23 задач Гильберта, представленном на Международном математическом конгрессе в Париже. В оригинальном тексте доклада ученый писал:

> «...[изучение основ] физических наук, в том числе математики, имеет важное значение; в первую очередь речь идет о теории вероятностей и механике».

Аксиоматику теории вероятностей впервые установил советский математик Андрей Николаевич Колмогоров в 1933 году.

В области физики многие ученые, среди которых был и фон Нейман, достигли больших успехов, но они сомневались в возможности найти окончательное решение: результаты опытов были невероятно сложными и могли разрушить устойчивость системы аксиом. Таким образом, этот вопрос из списка 23 задач до сих пор остается открытым.

## АКСИОМАТИКА ФОН НЕЙМАНА

Фон Нейман аксиоматизировал квантовую механику таким образом, что параметры, определяющие положение частицы, могли быть установлены при помощи пяти аксиом, сформулированных для гильбертова пространства. Математические формулировки были достаточно абстрактны, чтобы оставаться полностью отделенными от экспериментальной физики. Эти результаты были изложены в различных статьях в журнале *Mathematische Annalen* (*«Математические анналы»*) в 1929–1930 годах.

Фон Нейман занимался еще одной проблемой, которая не давала покоя физикам и решение которой стало бы большим прогрессом в теории меры. В большинстве физических опытов всегда проводится некое измерение, и — каким бы точным ни был используемый инструмент — ошибка неизбежна. Поэтому важно знать, насколько велика эта ошибка, хотя бы приблизительно. В классической физике теория ошибок была достаточно развита и позволяла установить, насколько результаты эксперимента заслуживают доверия.

Но в рамках квантовой физики появилось новое понятие ошибки, для которого были неприменимы прежние теории.

### ДАВИД ГИЛЬБЕРТ

Немецкий математик Давид Гильберт родился 23 января 1862 года в Кёнигсберге (сегодня Калининград, Россия), столице Восточной Пруссии. Его отца, государственного чиновника, направили в этот город на работу в качестве судьи. Обстановка, в которой рос Гильберт, была чрезвычайно благоприятной для интеллектуального развития мальчика, преимущественно благодаря его матери, невероятно образованной женщине, любившей философию, астрономию и математику. В 18 лет, окончив школу, Гильберт начал изучать математику в Кёнигсбергском университете. Среди его прекрасных учителей были такие ученые, как Генрих Вебер и Фердинанд фон Линдеман. В этот период Гильберт впервые занялся теорией инвариантов и познакомился с математиком Германом Минковским (1864–1909), дружбу с которым сохранил на протяжении всей жизни. В 1892 году Гильберт получил место экстраординарного профессора в университете Кёнигсберга. Эта должность не только была престижной, но и давала ему финансовое положение, необходимое для создания семьи. В том же году Гильберт женился на Кете Ерош. Одним из поворотных моментов в его карьере было предложение Феликса Клейна (пошедшего наперекор мнению большинства преподавателей) стать ординарным профессором Гёттингенского университета в 1895 году. В конце весны 1920 года состояние Гиль-

Точные измерения здесь получить невозможно, самое большее — можно надеяться на статистические результаты. Объект измерения (например, атом или электрон) в квантовой физике имеет микроскопический размер, и на него оказывает воздействие сам инструмент измерения.

Представим, что мы хотим с помощью линейки определить положение коробка спичек, лежащего на столе, по отношению к его краям, и каждый раз ненамеренно сдвигаем его. Нечто похожее происходит в квантовой физике. Система аксиом, созданная фон Нейманом, позволяла описать процесс наблюдения и наблюдаемый объект как логические элементы, которые можно рассмотреть в ее рамках. Ему в голову пришла блестящая идея: принять, что наблюдение происходит не в течение определенного промежутка времени, а в одно мгновение, то есть имеет вневременной характер. Эти результаты фон Нейман из-

берта, страдавшего анемией, серьезно ухудшилось. В то время анемия была сложной болезнью, от которой не существовало эффективных лекарств. Несмотря на тяжелые физические и душевные испытания, ученый нашел силы для того, чтобы полностью посвятить себя изучению основ математики. К счастью, в 1927 году появился новый препарат от анемии, и Гильберт принимал его в числе первых пациентов, что, возможно, спасло ему жизнь. Последние десять лет ученый провел в изоляции из-за политики нацистской Германии. Гильберт умер 14 февраля 1943 года в Гёттингене. На похороны пришли всего несколько человек. Среди них были его жена, к тому времени полуслепая, и физик Арнольд Зоммерфельд (1868–1951), которому с трудом удалось приехать из Мюнхена.

Портрет Давида Гильберта в последние годы жизни.

ложил в одной из своих самых известных книг — *Mathematische Grundlangen der Quantenmechanik* (*«Математические основы квантовой механики»*), опубликованной в Берлине в 1932 году. В 1936 году он совместно с американским математиком Гарретом Биркгофом (1911–1996) дополнил работу подробным исследованием квантовой механики с точки зрения логики.

Фон Нейман понимал, что логика, описывающая явления квантовой физики, значительно отличается от той, к которой все привыкли. В логике высказываний существует конъюнкция, обозначаемая символом $\wedge$, она соответствует сочинительному союзу «и». Два высказывания $A$ и $B$, соединенные конъюнкцией, записываются как $A \wedge B$. Например, высказыванием $A$ может быть «Луиджи 34 года», а $B$ — «Луиджи брюнет», так что $A \wedge B$ читалось бы как «Луиджи 34 года, и он брюнет». Это утверждение будет верным, только если верны оба высказывания. Для конъюнкции соблюдается коммутативный закон, то есть порядок высказываний не влияет на их истинность или ложность. Сказать «Луиджи 34 года, и он брюнет» — то же самое, что «Луиджи брюнет, и ему 34 года». Но в квантовой физике все иначе.

Свет — это электромагнитная поперечная волна с двумя перпендикулярными плоскостями колебаний. Когда мы ставим поляризационный фильтр (такой, как в поляризационных очках) на пути луча света, то препятствуем прохождению одного из двух планов колебаний. Если же мы поставим два перпендикулярных поляризационных фильтра, свет не сможет пройти сквозь них.

Теперь возьмем третий фильтр, поляризованный по диагонали. Опытным путем было установлено, что если поставить его между двумя предыдущими, то свет сможет пройти. Разумеется, если мы поставим его после второго, свет не пройдет, так как ему помешают первые два. Назовем второй фильтр $A$, а третий — $B$ и поставим за фильтрами экран. Условимся, что когда на экран падает свет, это означает «истина», когда экран остается темным — «ложь». В таком случае $B \wedge A$ было бы «истиной», так как при таком расположении фильтров экран загорается. Напротив, $A \wedge B$ было бы «ложь», так как свет не смог бы пройти. Таким образом, $A \wedge B \neq B \wedge A$.

Все свои открытия в области логики, описывающей явления квантовой механики, Нейман изложил во втором издании *«Математических оснований квантовой механики»*, опубликованном в 1936 году.

## КРУШЕНИЕ ОСНОВ

Описанная выше логическая система предполагает некую механичность — в том смысле, что все операции с высказываниями следуют определенным правилам. Проще говоря, хоть это и не совсем правильно, важно следить за тем, что ты делаешь, но можно не думать о том, что ты делаешь. Можно создавать геометрические теоремы исключительно по правилам логики, не думая ни о прямых и плоскостях, ни о том, как они пересекаются и расходятся в пространстве. Мы могли бы «включить тумблер» и автоматически создать все возможные геометрические теоремы. Это сделало бы математику не только точной, но и совершенной наукой — наукой наук.

На протяжении 2000 лет аксиоматический метод в геометрии давал довольно хорошие результаты. Полагалось, что этот же метод можно применить и к другим областям науки. В конце XIX века арифметика уже обладала собственной системой аксиом, из которых можно было бы вывести целый ряд предложений, возводимых в ранг теорем. Этим и занимался Давид Гильберт, когда Гёдель сформулировал свою теорему, значительно ускорившую весь процесс.

В 1930 году Гёдель защитил докторскую диссертацию, написанную под руководством Ханса Хана (1879–1934). Она называлась *«Полнота аксиом логического функционального исчисления»* и была посвящена теме, тесно связанной с формалистской программой Гильберта. В начале сентября того же года Гёдель принял участие в конгрессе «Эпистемология точных наук», на котором также выступали Рудольф Карнап, Аренд

Гейтинг, Джон фон Нейман и Фридрих Вайсман. Гёдель четко заявил о своих сомнениях в выполнимости программы Гильберта и изложил некоторые свои результаты, демонстрирующие неполноту арифметики. Немногим позже, в 1931 году, когда ему было всего 25 лет, Гёдель опубликовал знаменитую теорему о неполноте, которая подрывала сами основы математики. Несмотря на то что в теореме говорилось о сугубо специализированных вещах, она очень быстро получила широкий международный резонанс. Благодаря этому в 1933 году ученый получил звание приват-доцента Венского университета.

### ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Теория состоит из совокупности аксиом и правил логического вывода, которые позволяют установить ряд теорем исходя из этих аксиом. Теория считается противоречивой, когда в ее рамках можно доказать и некое утверждение, и противоположное ему. Если теория не противоречива, то говорят, что она последовательна. С другой стороны, в рамках теории должна быть возможность доказать любое утверждение, если оно истинное. В этом случае теория считается полной.

Первая теорема Гёделя гласит, что в любой системе аксиом, к которой можно отнести арифметику целых чисел, существуют верные предложения, которые невозможно доказать в рамках этой системы. То есть если арифметическая теория непротиворечива, то она неполная. Это равноценно утверждению, что совершенной системы аксиом, включающей арифметику натуральных чисел, не существует, так как она либо противоречивая, либо неполная.

Фон Нейман, принимавший участие в знаменитом конгрессе в Кёнигсберге, сразу же заинтересовался идеями Гёделя. Сам фон Нейман установил систему аксиом для теории множеств и считал, что тема закрыта. Но ученому пришлось признать, что его система была неполной: не потому, что в ней были недостатки, а потому что любая такая система является неполной по определению. Фон Нейман не только согласился

## КУРТ ГЁДЕЛЬ

Курт Гёдель в период работы в Институте перспективных исследований в Принстоне (Нью-Джерси, США) в 1940-е годы.

Австрийско-американский математик, логик и философ Курт Гёдель (1906–1978) был младшим из двух сыновей Рудольфа и Марианны Гёделей, немецких иммигрантов, работавших в текстильной промышленности. После окончания учебы в Королевской гимназии Брно Курт в 1924 году уехал учиться в Венский университет. Он поступал туда с четкой целью изучать физику, но под влиянием преподавателей Филиппа Фуртвенглера и Ханса Хана занялся математикой. Уже в то время Гёдель страдал ревматической лихорадкой, и эта болезнь наложила свой отпечаток на характер ученого: он испытывал маниакальное волнение за свое здоровье и главным образом за все, что касалось питания. В 1920-е годы, несмотря на глубокий экономический кризис, Венский университет был культурным и научным центром страны. В 1926 году Гёдель был приглашен на философский семинар в кружок Морица Шлика (1882–1936), который посещали такие физики и математики, как Рудольф Карнап (1891–1970), Ханс Хан (1879–1934), Фридрих Вайсман (1896–1959) и Отто Нейрат (1882–1945). Они впоследствии и составили знаменитый Венский кружок. Философ Карнап и математик Карл Менгер ввели Гёделя в математическую логику. В то время кружок пристально следил за работами Людвига Витгенштейна (1889–1951) о языке для описания языка (метаязыке), и этот подход Гёдель хотел применить к математике. Но ученый не полностью разделял научные воззрения в духе логического позитивизма, царившие в кружке. Он придерживался скорее обратной позиции — чистого платонизма. Гёдель считал, что истина существует независимо от того, известна она нам или нет. В математике это означало, что теоремы не создаются, а открываются. Гёдель неоднократно подчеркивал, что к своим результатам он пришел, будучи вдохновленным этой платоновской метафизикой. В 1952 году Гарвардский университет наградил Гёделя степенью почетного доктора наук и назвал его «первооткрывателем самых важных математических истин этого столетия».

с этим, но и за рекордно короткий срок, всего за месяц, подготовил для Гёделя следствие его теоремы, которое стало известно как вторая теорема Гёделя. Согласно ей если арифметическая теория непротиворечива, то в ее рамках нет ни одного доказательства, что она таковой является. Эта вторая теорема немного запутанная, и из нее следует, что если теория вмещает в себя арифметику натуральных чисел, она не может подтвердить сама себя, то есть утверждать «теория $T$ непротиворечива». Для этой теории было разработано несколько символов; чтобы выразить утверждение «теория $T$ непротиворечива», можно записать, например, $C(T)$. Согласно второй теореме Гёделя, если $T$ непротиворечива, то $C(T)$ нельзя доказать на основе $T$.

Именно вторая теорема, которой сам Гёдель не придал большого значения и считал следствием первой, оказала наибольшее влияние на математическое научное сообщество. Ее всегда называли второй теоремой Гёделя, никогда не упоминая вклад фон Неймана.

Сегодня теории Гёделя обобщены и перенесены в самые разные области. Они применяются в информатике, особенно в случае невозможности решить проблему остановки. Эта проблема заключается в том, чтобы найти способ определить, может какой-либо компьютер с произвольным набором установленных программ остановиться после выполнения алгоритма или он зависнет. Еще одно следствие теоремы Гёделя для информатики относится к вирусам, так как доказывает, что «ни одна программа, которая не меняет операционную систему компьютера, не сможет определить все программы, которые ее меняют».

Гильберт довольно пессимистически отнесся к следствиям из теоремы Гёделя, так как очень надеялся на возможность установить такие основания математики, которые запустят самосозидательный процесс, и при помощи него, исходя из простых предложений, сформулированных в непротиворечивой логической системе, можно будет вывести сложные результаты. Гёдель не разделял этого пессимизма, так как не считал, что его теорема неполноты подразумевает ошибочность аксиоматического метода для развития теории математики. По его мнению, это был этап эволюции, на котором главную роль вновь начинала играть научная интуиция, как это и должно быть. Такой взгляд полностью соответствовал философии Гёделя, более близкой к платонизму, чем к логическому позитивизму. «Разрушающее» значение его теорем заключалось в том, что механический, точный аспект математики уходил на второй план, выдвигая на первый воображение и интуицию, возвращая математике место духовных наук, которое принадлежало ей по праву, как музыке и философии.

## ВЫВОДЫ

Программа Гильберта потерпела неудачу, но фон Нейман не разделял его пессимизма по поводу будущего математики. С практической точки зрения он считал аксиоматизацию множеств, освободившую математику от странных элементов, и последующую аксиоматизацию квантовой механики вполне успешными. Фон Нейман никогда не отказывался от идеи создания логических моделей и стремился как можно больше абстрагировать задачи даже в областях, далеких от математики, что он впоследствии применил в теории игр. Так что, хотя план и провалился, хотя аксиоматизация и не позволяла уничтожить все противоречия и странности, она, тем не менее, помогала их выявить и в какой-то мере контролировать.

Математика всегда давала свои плоды, и фон Нейман не видел причин для изменения ситуации. Несмотря на то что внутренняя правильность логической системы математики была поставлена под вопрос, в истории этой науки начиная с ее появления существовало великое множество доказательств ее эффективности. Фон Нейман утверждал, что в классической математике совершались полезные и одновременно изящные открытия, а ее основания были такими же твердыми и точными, как, например, существование электрона. Уж если, по его мнению, можно было принять правомочность такой науки, как физика, то не стоило сомневаться и в классической математике.

ГЛАВА 3

# Теория игр

Фон Нейман создал условия для возникновения новой математической теории, известной сегодня как теория игр. С этого момента игры перестали быть развлечением и превратились в сценарий, в котором двое или более человек могли развивать рациональные стратегии, чтобы повлиять на результат партии. Сценарии могли быть абсолютно разными, и для их реализации был необходим такой сложный и фундаментальный аспект, как принятие решений.

Игра — это деятельность, присущая не только человеку, но и большинству высших млекопитающих. Доказано, что игра сама по себе является неотъемлемой частью процессов обучения и развития многих важных качеств. Именно через игру животные учатся координировать свои движения, чтобы охотиться, нападать, защищаться, именно через игру человек развивает многие способности, используя различные элементы для симуляции реальности. Для игры важны три фактора: сценарий, случайность и заклад.

Сценарий игры — первый шаг к пониманию ее структуры, он позволяет создавать математические модели в очень простых ситуациях, таких как партия в шашки, или в очень сложных — например, в настоящем военном сражении.

В любой игре всегда в той или иной степени присутствует случай, который определяет уровень инициативы игроков при выборе стратегии. В играх, где случай почти не играет роли, например в шахматах, инициатива игроков имеет решающее значение. Напротив, в играх, целиком построенных на случае, например при подкидывании монеты, инициатива игроков ограничена закладом.

Заклад — это то, на что идет игра. Он может быть нематериальным — как, например, умения или честь игрока, а вот в игре в рулетку на кону может стоять даже жизнь. В любом случае во всех играх есть тот или иной заклад, даже когда никто ни на что не играет и когда нельзя определить, кто выиграл, а кто проиграл. Самая важная характеристика заклада состоит в том, что ему можно присвоить номер. В самом простом случае, когда речь идет о выигрыше или проигрыше, номера могут быть соответственно 1 и 0. Когда чему-то можно присвоить номер, значит, к нему можно применить математический подход.

Теория вероятностей и статистика появились как следствие систематического изучения игр, но, скорее, их предметом было предугадывание результата, а не сама природа игры. Уже в первых работах фон Неймана содержалась другая точка зрения, очень далекая от статистических подсчетов. В них игра проявила другую свою сущность: она предстала не как событие, зависящее главным образом от воли случая, а как конфликт интересов. В этом смысле исследования фон Неймана необходимо рассматривать как первые в своем роде. Именно из них позже появилась новая ветвь математики — теория игр.

Трудно сказать точно, когда и где фон Нейман впервые заинтересовался математическим аспектом теории игр, поскольку у нас нет об этом ни письменных, ни устных свидетельств. В конце 1926 года, еще будучи стипендиатом Гёттингенского университета, он поразил всех, собрав конференцию по теории игр в помещении Математического общества университета. После нее фон Нейман написал статью, которую направил в журнал *Mathematische Annalen*. Работа была опубликована год спустя под заголовком *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (*«К теории стратегических игр»*). Потом его будто бы оставил интерес к этой теме, но мы можем и ошибаться в своем предположении, потому что 18 лет спустя вместе с экономистом Оскаром Моргенштерном фон Нейман опубликовал книгу о теории игр, которая сегодня считается одной из самых важных из всего его наследия.

В своей первой работе ученый провел математическую формализацию антагонистических ситуаций, в которых участвуют два игрока. Особенно его интересовали возможные стратегии, которые могут развивать игроки в играх с нулевой суммой, по определению фон Неймана.

**ОСКАР МОРГЕНШТЕРН**

Немецкий математик и экономист Оскар Моргенштерн родился 24 января 1902 года в Гёрлице. В некотором смысле можно сказать, что он имел аристократическое происхождение: его мать была незаконной дочерью императора Фридриха III. В 1925 году Моргенштерн получил диплом по политическим и экономическим наукам в Венском университете. Благодаря Рокфеллеровской стипендии он провел четыре года в Принстоне, где получил постдипломное образование. В 1929 году Моргенштерн вернулся в Австрию и вступил в Mathematische Kolloquium — группу математиков, возглавляемую Карлом Менгером (1902–1985), который очень критически относился к знаменитому Венскому кружку. В 1938 году нацистское правительство отняло у Моргенштерна кафедру в Венском университете, ему пришлось эмигрировать в США, и позже он стал гражданином Америки. В 1970 году Моргенштерн получил кафедру экономики в Принстоне. Он проработал там до самой смерти, 26 июля 1977 года. Как и Менгер, Моргенштерн четко высказывался в пользу аксиоматизации экономической теории, отрицая направления, частично поддерживаемые Венским кружком, в которых предпочтение для теории экономического равновесия отдавалось математическим инструментам, с успехом применяемым в физике (например, исчисление бесконечно малых). Таким образом, еще до того как фон Нейман и Моргенштерн встретились в Принстоне, у них были одинаковые представления о том, какой подход следует применить к экономике, чтобы возвести ее в ранг науки.

## ИГРОКИ

Теория игр очень многогранна и может применяться не только в игровых ситуациях. Ее суть состоит в том, чтобы определить стратегию и формализовать принятие решений. Существует пример, который, благодаря своей необыкновенной простоте, часто используется, чтобы объяснить, какие цели преследует теория игр: разрезание торта.

Предположим, два человека должны поделить торт. Обычно в этом примере речь идет о детях: считается, что дети очень любят сладкое и потому хотят получить самый большой кусок, и это позволяет лучше понять ситуацию. Детский индивидуализм — идеальное качество для нужных нам игроков. Дележ торта будет происходить так: ребенок *A* будет резать торт, а ребенок *B* — первым выбирать себе кусок. Таким образом, ребенок *A* должен всегда помнить о ребенке *B* и о том, что после того, как он разрежет весь торт, *B* заберет себе самый большой кусок. Это условие является основополагающим для выбора наилучшей стратегии, которая, разумеется, состоит в том, чтобы разрезать торт на две равные части. Любой другой вариант опасен. Если, например, *A* подумает, что *B* — очень хороший и воспитанный ребенок и потому возьмет себе кусок поменьше, то он начнет резать торт на неравные куски. Но это решение содержит много рисков и основывается на догадках или дополнительной информации, которая не имеет ничего общего с игрой.

Это объяснение может показаться слишком простым, но в нем содержатся все ключевые элементы, определяющие сценарий, выбранный для теории игр. Ситуация типа «я играю только для того, чтобы приятно провести время, меня не беспокоит проигрыш, и вообще я могу позволить выиграть своему противнику» может быть вполне оправданной во многих сценариях, но не в теории игр. В ней игроки рассматриваются прежде всего как рациональные люди, чья цель — выиграть, а для этого им нужно думать о себе.

Требование к рациональности игроков довольно глубокое. Оно предполагает идеальную ситуацию, так как никто не в состоянии держать в уме все возможные ходы и каждый раз принимать нужное решение, чтобы выиграть любой ценой. Игры с простой структурой, такие как «ним», позволяют дойти до такого уровня без особого труда, поскольку в них деревья принятия решений имеют мало ветвей, и если оба игрока абсолютно рациональны в нужном нам смысле, то либо они придут к ничьей, либо выиграет тот, кто сделал первый ход. Другие игры, например го или шахматы, тоже обладают этими характеристиками, но уровень их сложности гораздо выше, и не допустить погрешностей фактически невозможно.

## ИГРА С ДВУМЯ ИГРОКАМИ И НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Обобщая, можно сказать, что игра — это процесс, в котором участвуют два или больше игроков, действующих по строго определенным правилам. Участники могут принимать решения, формирующие особую стратегию, которая может повлиять на ход игры. Цель игры — получить некую выгоду, поэтому одним из ключевых ее понятий является платеж — более общее понятие по сравнению с закладом. Платеж может существовать в виде приза вне самой игры, который делится между несколькими игроками, или же представлять собой штраф. Например, в соревновании двух игроков один выигрывает (получает положительный платеж), а второй проигрывает (получает отрицательный платеж).

Опираясь на понятие платежа, можно провести первую классификацию игр и разделить их на две большие группы: игры с нулевой и ненулевой суммой. В игре первого типа игроки борются за один приз или платеж, а сумма всех выигрышей равна сумме всех проигрышей. Игры, в которых можно одновременно выбирать несколько призов, называются играми с ненулевой суммой.

Спектр игр с нулевой суммой очень широк. Именно к этой категории относятся такие игры, как шашки или шахматы: когда один игрок получает очко, другой его теряет. Можно сказать, что один получает положительное очко, а второй — отрицательное. Такой сценарий фон Нейман назвал игрой с нулевой суммой для двух игроков. Эта схема включает в себя большое количество соревновательных игр. В них игрок получает все или ничего, борьба идет до конца, то есть игра заканчивается, когда один игрок побеждает, а другой проигрывает. Другими словами, игроки не могут сотрудничать друг с другом.

## ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА

Для анализа игр очень полезным инструментом оказывается так называемая платежная матрица (Pay-off Matrix). Она представляет собой двойную таблицу, где слева записываются возможные стратегии игрока *A*, а вверху — игрока *B*. Под стратегиями понимаются возможности, появляющиеся в ходе игры. В каждой ячейке таблицы указаны выигрыши или проигрыши каждого игрока, полученные в результате выбранной стратегии. Два числа, разделенные запятой или косой чертой, обозначают выигрыши и проигрыши первого и второго игрока соответственно.

| | | ИГРОК *B* | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| ИГРОК *A* | 1 | 10/2 | -3/5 |
| | 2 | 1/-6 | 4/8 |

Эта платежная матрица говорит нам, что если игрок *A* выберет стратегию 2, а игрок *B* — стратегию 1, то в результате выигрыш первого составит 1, а проигрыш второго — 6. Если же игрок *A* выберет стратегию 1, а *B* — 2, то проигрыш первого составит 3, а выигрыш второго — 5. Ниже приведен еще один, более простой способ изображения платежной матрицы с такой же расшифровкой.

| | B1 | B2 |
|---|---|---|
| A1 | 10,2 | -3,5 |
| A2 | 1,-6 | 4,8 |

При игре с нулевой суммой достаточно вставить одно число в каждую ячейку, так как выигрыш одного игрока будет равен потере другого.

СЛЕВА ВВЕРХУ:
**Джон фон Нейман за чаепитием с выпускниками в Институте перспективных исследований Принстона (IAS) в ноябре 1947 года.**

СПРАВА ВВЕРХУ:
**Бюст фон Неймана в Будапеште.**

СЛЕВА:
**В 1944 году Оскар Моргенштерн (на фото) и Джон фон Нейман выпустили совместную работу *Theory of Games and Economic Behavior* («*Теория игр и экономическое поведение*»).**

| | B1 | B2 |
|---|---|---|
| A1 | 9 | −3 |
| A2 | −2 | 14 |

Эта матрица показывает, что если игрок *A* выберет первую стратегию, а игрок *B* — вторую, то первый потеряет 3, а второй выиграет 3, и так далее для остальных ячеек.

Этот способ представления игры для двух человек с нулевой суммой в виде двойной таблицы фон Нейман назвал сведением к нормальной форме игры.

Разумеется, таблицы, приведенные выше, могут относиться только к очень простым играм, но это не означает, что их нельзя применить и к таким сложным, как шахматы, хотя в этом случае таблица была бы огромной. Но важны не размеры таблицы, а то, что игры такого типа можно привести к нормальной форме.

Предшественником фон Неймана в моделировании игр был французский математик Эмиль Борель (1871–1956), опубликовавший с 1921 по 1927 год серию работ по теории игр, целью которых было установить выигрышные стратегии вне зависимости от фактора удачи или психологического состояния игроков в момент принятия решений. Несмотря на то что их работы в чем-то схожи, фон Нейман всегда утверждал, что проводил свои исследования совершенно независимо от Бореля. Можно с точностью сказать, что математические результаты фон Неймана имеют более общий характер и отвечают на такие ключевые вопросы, которые никогда даже не поднимались в работах Бореля. Тем не менее некоторые ученые отстаивают важность его вклада и, говоря об этой схеме, называют ее теорией Бореля — Неймана.

## ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ

Для того чтобы установить выигрышную стратегию в игре, игроки должны отвечать двум требованиям.

1. Они оба должны быть рациональными.
2. Они оба должны выбирать свои стратегии, ориентируясь исключительно на личную выгоду.

Теперь представим, что игроки *A* и *B* участвуют в игре со следующей платежной матрицей.

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| A1 | −5 | 0 | −2 |
| A2 | 1 | −3 | −2 |
| A3 | 3 | 8 | −1 |

Она содержит три возможных выбора для каждого игрока. Предположим, что числа обозначают выигрыши или проигрыши в евро. Следовательно, речь идет об игре с нулевой суммой в ее нормальной форме. Проанализируем возможные стратегии игроков. Допустим, *B* выбирает первую стратегию. В таком случае лучшим вариантом для *A* будет третья стратегия: с ней он заработает 3 евро, тогда как с первой потеряет 5, а со второй выиграет всего 1. Если же *B* выберет вторую стратегию, то *A* тоже будет лучше следовать третьему варианту, так как он позволяет заработать больше всего. Наконец, если *B* выберет третью стратегию, то *A* проиграет в любом случае, но его проигрыш составит только 1 евро. Следовательно, для *A* лучшей стратегией, безусловно, будет третья, вне зависимости от выбора *B*.

У игрока *B* немного другая ситуация. Если *A* выберет первую стратегию, наилучшим вариантом будет *B*1. В случае *A*2, разумеется, следует выбрать *B*2, а в случае *A*3 *B* должен выбрать третью стратегию, так как с ней он потеряет меньше всего. При этом *B* не имеет ни малейшего понятия о том, как поступит *A*, и тем не менее он должен сделать свой выбор. Именно в этот момент строится следующее предположение: «*A* — рациональный игрок, и лучший вариант для него — *A*3; в этом случае *B*3 будет для меня выгоднее всего, и значит, я последую этой стратегии». Игрок *B* знает, что в противном случае он проиграет, и пытается свести этот риск к минимуму.

Исследуя эту схему, фон Нейман сделал следующее замечание: на каждой строке всегда есть число меньше остальных двух. Он назвал его минимальным значением. Например, в предыдущей таблице в первой строке стоят числа –5, 0, –2. Самое маленькое из них –5. Таким же образом, минимальное значение для второй строки –3, для третьей — –1. Фон Нейман взял самое большое из этих трех чисел, –1 (из всех трех вариантов оно является минимальным проигрышем), и назвал его максимином.

Затем он проделал то же самое для столбцов, но наоборот. Найдем самое большое, то есть максимальное, число в каждом столбце. В первом это будет 3, во втором 8, в третьем –1. Теперь определим самое маленькое из них, минимакс, которым в этом случае будет –1. Таким образом, в этой игре максимин и минимакс совпали в –1. И не случайно, ведь именно это и утверждается в теореме фон Неймана: «В большинстве игр с двумя участниками и нулевой суммой максимин всех строк всегда совпадает с минимаксом столбцов», и оно будет значением игры при оптимальной стратегии для обоих игроков.

Этот результат, известный как первая теорема о минимаксе, был опубликован в статье 1928 года *«К теории стратегических игр»*. В ней фон Нейман заложил общие основы будущей теории игр. Важно подчеркнуть еще раз: для того чтобы удовлетворить условиям теоремы фон Неймана, оба игрока должны быть рациональными, заботиться исключительно о собственных интересах и очень тщательно анализировать свои возможные стратегии. Эти критерии выполняются не во всех играх. Например, если один из игроков — природа, то в силу вступают произвольные факторы, и этот противник, разумеется, не осуществляет никакого анализа.

## БИТВА В МОРЕ БИСМАРКА

Теория игр имела и продолжает иметь тесную связь с так называемыми военными играми. Одним из первых случаев, когда она была применена на войне, стало сражение в море Бисмарка, состоявшееся 23 декабря 1942 года, в котором столкнулись стратегии американского генерала Джорджа Кенни и контр-адмирала Масатоми Кимуры. В конце боя были потоплены все транспортные суда и половина японских кораблей. Благодаря критерию минимакса командование США выбрало оптимальную стратегию и установило новую доктрину для разведывательных полетов. Японский флот должен был выйти из порта Рабаул на северо-востоке острова Новая

**Самолеты союзнической армии атакуют японский корабль во время сражения в море Бисмарка.**

Британия и направиться в порт Лае для подкрепления. У контр-адмирала Масатоми Кимуры было два варианта: выбрать северный маршрут, пролегавший по морю Бисмарка, где обычно были очень плохие климатические условия, или южный, с более благоприятными. Генерал Кенни должен был сконцентрировать все самолеты-разведчики на одном из этих двух маршрутов, учитывая при этом количество дней, которое ему потребовалось на бомбардировку, как только были бы замечены японские корабли. Применив к платежной матрице критерий минимакса, авторы стратегии выяснили, что при выборе северного маршрута предполагаемое количество дней для бомбардировки в любом случае равнялось бы 2, поэтому был сделан выбор в пользу следующей стратегии.

| | | Кимура | |
|---|---|---|---|
| | | **Северный маршрут** | **Южный маршрут** |
| **Кенни** | **Северный маршрут** | 2 | 2 |
| | **Южный маршрут** | 1 | 3 |

Любой, кто рассматривает арифметические методы для получения произвольных цифр, разумеется, грешник.

**Джон фон Нейман**

Логично было бы ожидать от ученого, решившего исследовать теоретические загадки игр, выбора в качестве модели шашек или шахмат. Фон Нейман был очень хорошо знаком с этими играми еще с детства. И тем не менее в статье 1928 года, в которой он доказал теорему о минимаксе, приводится тщательный анализ игры в... покер. Широко известно, что фон Нейман очень любил эту игру, хотя не всегда добивался в ней больших успехов. По его мнению, самым интересным аспектом покера был блеф, который делал выбор стратегии еще более сложным. В покере гораздо труднее математически установить оптимальную стратегию по сравнению с играми с двумя участниками и нулевой суммой. Несмотря на это фон Нейман придумал упрощенный вариант покера, который позволил ему включить эту игру в свои исследования.

## СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ

Представим, что игроки *A* и *B* участвуют в игре со следующей платежной матрицей.

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| A1 | –3 | –1 | 4 |
| A2 | 3 | 0 | 1 |
| A3 | 3 | –1 | –4 |

Когда игрок *A* выбирает стратегию 1, максимальный проигрыш имеет место, если стратегию 1 выберет и игрок *B*. Для *A* это означает потерю –3, что выделено жирным шрифтом в таблице ниже.

| | B1 | B2 | B3 | |
|---|---|---|---|---|
| **A1** | −3 | −1 | 4 | **−3** |
| **A2** | 3 | 0 | 1 | **0** |
| **A3** | 3 | −1 | −4 | **−4** |
| | **3** | **0** | **4** | |

Следуя этой схеме, постепенно записываются максимальные потери при каждой стратегии. Теперь возьмем игрока *A*. Для него наименьшим из всех значений будет 0, что соответствует стратегии 2. Это значение фон Нейман назвал значением игры. Если оно равно 0, как в этом примере, игру называют справедливой. Для игрока *B* также минимальное значение в этом случае равно 0, что соответствует стратегии 2.

Заметим, что обе стратегии минимакса совпадают в одной ячейке таблицы ($A2$–$B2$). Ее значение является минимальным на строке и максимальным в столбце. Эту точку называют седловой. Ее может и не быть, но если она есть, то влияет на стратегию обоих игроков. В предыдущей таблице мы видим, что никому из игроков невыгодно менять стратегию. Это ситуация равновесия, при которой игра достигает оптимального результата, так как стратегия минимакс одного игрока совпадает с минимаксом другого. Если в игре есть седловая точка, можно утверждать, что в ней есть стабильная стратегия. Это конец игры.

Изобразить седловую точку легко, если мы представим себе седло с двумя перпендикулярными плоскостями. Обозначим плоскость, которая соединяет седло со стременами, через *A*, а вторую, идущую от головы до хвоста, — *B*. Игрок, следующий в направлении *A*, должен подняться, чтобы достичь максимума в седловой точке, а игрок *B* должен спуститься, чтобы достичь в той же точке минимума.

Исходя из этого фон Нейман определил седловую точку как точку матрицы, обладающую следующими характеристиками.

1. Она имеет минимальное значение на своей строке.

**ДЖОН ФОРБС НЭШ**

Джон Форбс Нэш родился 13 июня 1928 года в Блюфильде, штат Вирджиния, США. Уже в очень раннем возрасте он проявил незаурядные способности к математике и оказался в числе десяти учеников его же возраста, получивших стипендию на учебу в Политехническом институте Карнеги. Там он сначала изучал инженерное дело и химию, а позже понял, что его настоящее призвание — математика. После института Нэш поступил в Принстонский университет. Там он заслужил восхищение сокурсников придуманной им настольной игрой, которая позже появилась в продаже под названием гекс. Увлечение играми было частью математических исследований Нэша. В 1950-е годы теория игр стала одной из самых интересных областей математики. Нэш внес ключевой вклад в первое экспериментальное изучение дилеммы заключенного (см. главу 5), а затем занялся играми с нулевой суммой, или некооперативными играми, в которых игроки преследуют прямо противоположные интересы. Одним из самых важных достижений ученого стало понятие так называемого равновесия Нэша. Впоследствии он основал на нем новую экономическую теорию, за которую получил Нобелевскую премию по экономике в 1944 году. Равновесие Нэша проявляется в ситуации, когда две стороны приходят на определенном этапе игры или в сделке к соглашению, нарушение или изменение которого причинит ущерб им обеим. Равновесие характеризует такую фазу игры, в которой ни один из ее участников не может увеличить выигрыш, изменив стратегию в одностороннем порядке.

2. Она имеет максимальное значение в своем столбце.

Если во время игры участник $A$ предположит, что $B$ не поменяет стратегию и, следовательно, сохранит свою, и участник $B$, в свою очередь, тоже подумает, что $A$ сохранит стратегию, то говорится, что игра достигла равновесия Нэша, названного так в честь американского математика Джона Форбса Нэша (р. 1928). В конкретной игре равновесия Нэша может не быть, или оно может быть одно либо их окажется несколько.

Не во всех играх с двумя игроками и нулевой суммой есть седловая точка. Рассмотрим очень простой пример с подбрасыванием двух монеток. Каждый игрок ставит 1 евро. Первый одновременно подбрасывает в воздух две монеты. Если на обеих выпадает орел или решка, он оставляет их обе себе. Но если выпал один орел и одна решка, монеты забирает второй игрок. Платежная матрица такой игры будет следующей.

| | Решка | Орел |
|---|---|---|
| Решка | 1 | −1 |
| Орел | −1 | 1 |

Легко убедиться, что разница между минимальным из максимальных значений и максимальным из минимальных составляет два евро. Изучая ситуации такого типа, фон Нейман еще больше отточил свою теорию игр и ввел различие между чистыми и смешанными стратегиями. К первым относятся игры, в которых игрок выбирает одну и ту же стратегию во всех раундах. Если оба игрока выбирают один и тот же путь, все партии будут одинаковыми. Напротив, в играх со смешанными стратегиями игрок меняет свое поведение от раунда к раунду произвольным образом.

Например, он может определить свою стратегию в зависимости от подброшенной монеты. В статье 1928 года Джон фон Нейман привел математическое доказательство того, что в каждой игре с двумя участниками и нулевой суммой, в которой можно играть с чистыми или смешанными стратегиями, стратегия минимакс каждого из игроков всегда привела бы к стабильной ситуации, седловой точке. На этом результате основана общая теория игр. Наконец, теорема о минимаксе утверждает, что в каждой конечной игре с двумя рациональными игроками, нулевой суммой и с чистой или смешанной стратегией всегда есть решение. Фон Нейман считал эту теорему краеугольным камнем теории игр.

## ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Первая теорема о минимаксе, доказанная фон Нейманом в 1928 году, может применяться к большинству игр с двумя участниками и нулевой суммой, главное условие — чтобы в каждый момент оба игрока точно знали, на какой стадии находится игра. Эти игры фон Нейман назвал играми с полной информацией. Играя в шахматы, шашки или трис, каждый игрок может видеть расположение фигур после хода. Если же один игрок закроет часть доски, это условие перестанет выполняться, и применить теорему будет нельзя.

Фон Нейман доказал вторую теорему о минимаксе, которая могла использоваться для игр с двумя участниками, нулевой суммой, но неполной информацией. Согласно этой теореме, определить выигрышную стратегию невозможно для одной партии, но возможно, если сыграть их несколько.

Очень простая игра, иллюстрирующая эти условия, — классическая «камень, ножницы, бумага». Платежная матрица такой игры, в которой игроки ставят по 1 евро в каждой партии, имела бы такой вид.

| | | B | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Камень | Бумага | Ножницы |
| A | Камень | 0 | −1 | 1 |
| | Бумага | 1 | 0 | −1 |
| | Ножницы | −1 | 1 | 0 |

Если, например, $A$ выбирает бумагу, а $B$ — камень, то $A$ выигрывает 1 евро, который, соответственно, проигрывает $B$. Ничья, когда никто не выигрывает и не проигрывает, соответствует значению 0.

Легко убедиться, что для этого примера теорема о минимаксе не работает, так как максимальный минимум для любой строки равен $-1$, в то время как минимальный максимум любого столбца — 1. Это происходит из-за того, что у игроков нет полной информации об игре. В одной-единственной партии отсутствует критерий, позволяющий выбрать одну из трех стратегий. Но если сыграть несколько раз, то можно обнаружить, что один из игроков следует определенной модели поведения. Согласно фон Нейману, лучшей стратегией будет положиться на волю случая, так как это помешает нашему противнику понять нашу схему игры. А если такой путь выберет и противник, то хотя ему не будет гарантирована победа, он получит разумный шанс сыграть вничью, а это один из способов минимизировать потери.

Таким образом, вторая теорема о минимаксе гласит, что минимальное из максимальных значений среднего результата игрока *A* совпадает с максимальным из минимальных значений среднего результата для игрока *B*.

Эта теорема имеет более общий характер по сравнению с предыдущей, так как ее можно применить к играм с двумя участниками и нулевой суммой вне зависимости от того, полная в них информация или нет.

## ТЕОРИЯ ИГР И ТОПОЛОГИЯ

Смысл теоремы о минимаксе элементарен, и его можно изложить обычным языком без специальных терминов, однако доказательство теоремы очень далеко от простоты. Сначала фон Нейман пытался доказать теорему, используя только алгебраические методы, но ему не удалось добиться удовлетворительных результатов. Тогда он обратился к топологии.

Топология — это область математики, изучающая свойства фигур, которые не меняются при трансформации — расширении, сжатии или растягивании (при условии, что при этом не совмещаются их разные точки и не создаются новые). Фигуры называются топологически эквивалентными, когда одну можно получить из другой при помощи трансформаций такого типа. Чтобы лучше понять, что происходит при этих трансформациях, представим себе некую эластичную плоскость (допустим, из резины или пластилина, довольно легко поддающихся деформации), на которую нанесен рисунок, например квадрат.

Растягивая поверхность в соответствующем направлении, мы можем получить из этого квадрата круг, или шестиугольник, или любой другой многоугольник. Главное, чтобы в ходе трансформации поверхность не разорвалась и никакие точки фигуры не наложились на другие. Трансформации, происходящие без разрывов, дыр и склеиваний, то есть посредством растягивания, сжатия или выравнивая, называются непрерывными.

Особым подвидом такого типа трансформаций являются те, при которых остается неподвижная точка. У некоторых пространств это свойство сохраняется при любом виде непрерывной трансформации, и оно позволяет классифицировать различные виды поверхностей. Из всех теорем, затрагивающих это понятие, нужно выделить теорему о неподвижной точке Брауэра, которую сформулировал голландский математик Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966). Теорема звучит сложновато, но ее можно легко объяснить. Представим себе, что мы плавно помешиваем ложкой в чашке с кофе. Согласно теореме Брауэра, как только кофе вернется в состояние покоя, в нем будет такая точка, которая окажется в том же самом положении, как когда мы его перемешивали. Из всех способов помешивания кофе есть один, при котором действие теоремы очевидно, — когда ложка движется вдоль стенок чашки. При таком круговом движении центр жидкости останется неподвижным — как глаз бури,— и именно он будет неподвижной точкой Брауэра.

Фон Нейман обнаружил тесную связь между теоремой о минимаксе и теорией неподвижных точек. Это помогло ему не только доказать свою теорему, но и годы спустя сделать важное дополнение теоремы неподвижных точек Брауэра.

## ВОЙНА ПОЛОВ

Несмотря на свое немного устрашающее название, война полов — классический пример теории игр, примененной к повседневной жизни, который позволяет нам овладеть базовыми понятиями теории и прийти к определенным социологическим выводам. Оригинальная схема была представлена Робертом Данканом Люче и Говардом Рейфой в книге *Games and Decisions* (*«Игры и решения»*). В игре участвует пара — мужчина и женщина, — они должны решить, как провести вечер воскресенья. Предлагается два варианта: пойти на футбольный матч или в кино. И у него, и у нее классические вкусы, так что с предпочтениями все понятно. Но добавляется еще одно условие, которое важнее личных предпочтений: провести вечер нужно вместе, а не отдельно, поскольку это один из немногих дней, когда можно побыть вдвоем. В таком случае его предпочтения будут стоять в следующем порядке.

1. Они вместе идут на матч.

2. Они вместе идут в кино.

3. Он идет на матч, а она в кино.

4. Он идет в кино, а она на матч.

На основе этого мы можем определить следующую платежную матрицу, где 1 обозначает лучший платеж, а 4 — худший.

| | Она на футбол | Она в кино |
|---|---|---|
| Он на футбол | 1,2 | 3,3 |
| Он в кино | 4,4 | 2,1 |

Эта матрица расшифровывается очень просто. Если они оба идут на матч, то он идет куда хочет, и одновременно проводит время с ней (первое условие); при этом она идет не туда, куда хочет, но проводит время с ним, а это второе условие. Если он идет на футбол, а она в кино, то каждый идет куда хочет, но отдельно друг от друга, а это для них обоих третий по предпочтительности вариант (3, 3).

Мы имеем дело с неповторяющейся игрой, то есть с такой, в которую играют только один раз, и в ней нельзя принимать решения исходя из прошлых стратегий. К тому же это игра с нетрансферабельной полезностью и некооперативная, так как предполагается, что в ней нельзя устанавливать предварительные соглашения типа «если ты пойдешь со мной в кино, я заплачу за твой билет».

Стратегия минимакса привела бы нас к следующей ситуации.

| | Она на футбол | Она в кино | |
|---|---|---|---|
| **Он на футбол** | 1,2 | 3,3 | **3** |
| **Он в кино** | 4,4 | 2,1 | **4** |
| | **4** | **3** | |

Самые большие потери для него составляют 3 и 4, поэтому его минимакс равен 3. Для нее — 4 и 3, и ее минимакс также равен 3. Это ситуация, в которой он идет на матч, а она в кино, где платежи составляют 3 и 3, что является лучшим вариантом для обоих. В данном случае стратегия минимакса не приводит к равновесию Нэша, так как один из игроков может поменять стратегию, чтобы получить больший выигрыш. Пока он в одиночестве идет на стадион, он может передумать и пойти в кино, получив таким образом больший платеж. Правда, при этом есть риск, что они оба передумают и понесут максимальные потери.

Сделав небольшое усилие, мы можем представить себе ситуацию, в которой все женщины любят футбол, а мужчины — кино. Но игра была бы в точности такой, как мы описали. Это значит, что игра симметрична. Внесем небольшое изменение, сделав ее асимметричной. Изменим порядок его предпочтений.

1. Они вместе идут на матч.

2. Он идет на матч, а она в кино.

3. Они вместе идут в кино.

4. Он идет в кино, а она на матч.

То есть он предпочитает пойти один на футбол, чем вместе в кино. В таком случае платежная матрица будет выглядеть следующим образом.

| | Она на футбол | Она в кино |
|---|---|---|
| **Он на футбол** | 1,2 | 2,3 |
| **Он в кино** | 4,4 | 3,1 |

При такой перспективе понятно, что независимо от ее выбора он всегда выберет футбол, поскольку это будет выигрышным решением в любом случае. А для нее, учитывая, что он всегда выберет футбол, лучшим решением будет пойти вместе с ним. Тогда это и будет седловой точкой, равновесием Нэша, то есть стратегией, которую всегда выберут оба игрока. В таком случае говорится, что есть доминирующий выбор или что у игрока есть доминирующая стратегия, которая для него предпочтительнее всех остальных. Могут быть случаи, когда доминирующей стратегией располагают оба игрока. Парадокс предыдущей ситуации состоит в том, что эта эгоистичная доминирующая позиция «я пойду на матч все равно, с тобой или без тебя» приводит к лучшему результату, чем в предыдущем случае.

## ТРАНСФЕРАБЕЛЬНАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ

В статье *«К теории стратегических игр»*, написанной в 1928 году, фон Нейман представил новый вариант игр с нулевой суммой и с количеством игроков большим 2. В их сценарии появилась новая переменная — возможные коалиции между игроками. Например, если имеется три игрока — $A$, $B$ и $C$, — может случиться, что двое из них — $A$ и $B$ — объединятся против третьего, как если бы они были одним игроком, заключая договор о дележе выигрышей. В играх, изучавшихся до сегодняшнего дня, соперники не могли общаться друг с другом, чтобы заключать предварительные договоры. В этом случае говорят об играх с нетрансферабельной полезностью. Напротив, те игры, в которых игроки еще до начала игры могут общаться и заключать договоренности, называются играми с трансферабельной полезностью, или кооперативными.

Например, представим себе группу из трех друзей — *A*, *B* и *C*, — которым надо поделить между собой 100 евро. Решать, как будет происходить дележ, они будут простым голосованием, то есть большинством голосов. Возможными коалициями будут *AB*, *AC*, *BC*, а также четвертая — *ABC*. С такими исходными данными можно установить бесконечное количество платежей:

A = 33; B = 33; C = 34
A = 70; B = 30; C = 0
A = 25; B= 70; C = 5
и так далее.

Таким образом, ни одна коалиция не будет стабильной. Анализ таких игр немного сложнее анализа некооперативных игр. В этом случае надо угадать, каковы шансы на создание стабильных коалиций, в которых распределение платежей будет происходить таким образом, что никто из их членов не будет заинтересован в выходе из коалиции. В обычной жизни такой анализ приводит к появлению некоего судьи, который сделает возможной оптимальную коалицию. Например, реальная ситуация, в которой необходим подобный метод, может возникнуть в Европарламенте, при распределении некоего бюджета между членами союза. Каждая страна имеет определенное количество депутатов с правом голоса.

Возможные коалиции между игроками являются фактором нестабильности, которым очень трудно управлять. В любом случае единственный способ применить здесь результаты для игр с двумя игроками и нулевой суммой — считать коалицию одним игроком. Если в некоем сценарии есть, например, четыре игрока *A*, *B*, *C* и *D* и создается коалиция между *A*, *B* и *C*, то эта группа игроков рассматривается как один игрок, соперничающий с *D*, то тогда можно применить схему игры с двумя игроками и нулевой суммой.

Теорема о минимаксе и результаты теории игр имеют свои ограничения. Разумеется, они не являются безошибочным способом выиграть в любой игре, даже если речь идет о двух рациональных игроках. Эта теория предлагает прежде всего наилучший способ принятия решения. Рациональный игрок, играющий против нерационального, может создать техники игры, не имеющие ничего общего с теорией игр. Самое главное, что была создана математическая теория, способная моделировать сценарии и абстрагировать конкретные ситуации, чтобы рассмотреть их с точки зрения математической логики. В этом смысле теория игр имеет много общего с аксиоматизацией теории множеств и квантовой механикой — это и вызвало интерес фон Неймана и было основной причиной, по которой он занимался настолько отличными друг от друга областями. Он поднимал до уровня науки дисциплины, которым ранее этот уровень был несвойственен, как это случилось с экономической теорией.

## ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

На первом этапе своего становления любая наука развивает методы наблюдения, которые позволяют точно описать предмет исследования. Следующим шагом является формулировка законов, как правило эмпирических, которые описывают поведение этого предмета. С этого момента теория должна быть в состоянии предположить, как будет развиваться система с течением времени. Научное описание такой сложной системы планет, как наша, утратило бы большую часть своего значения, если бы с его помощью нельзя было определить, например, дату, точное время и место солнечного затмения. Однако для того чтобы этот прогноз был научным результатом, а не плодом догадок, необходимо, чтобы теория была математизирована. Это значит, что ее законы должны описываться совокупностью уравнений. И когда говорится, что физика перестала быть натурфилософией и превратилась в науку, подразумевается, что благодаря новым методам исчисления законы ньютоновой механики были записаны в виде формул.

Галилей подробно описал свободное падение тел, но необходимо было дождаться появления исчисления бесконечно малых, что позволило свести законы механики к математическим формулам и узнать с высокой степенью точности, сколько времени требуется камню, чтобы достичь земли, и какова его скорость.

## НАУКА И ЭКОНОМИКА

В начале XX века в некоторых естественных науках, таких как химия и биология, были внедрены методы математического исчисления. Но для общественных наук этот процесс оказался (и является таковым до сих пор) гораздо более сложным, так как в них всегда действует человеческий фактор, подразумевающий некоторую непредсказуемость. Тем не менее у экономики изначально было больше шансов, чем у какой-либо другой науки, ведь она, в конце концов, имела дело с числами. С другой стороны, это было одной из причин, по которым многие не соглашались с тем, чтобы такая деликатная материя, как человеческое поведение, рассматривалась отстраненно, с помощью чисел.

Прогнозирование всегда было одним из самых интересных аспектов экономической теории и одновременно самым слабым ее местом. В этом смысле экономика очень похожа на метеорологию, с той только разницей, что инструменты последней гораздо более совершенны. Метеорология может и не предсказать какое-то атмосферное явление, но когда оно произойдет, она будет в состоянии детально описать его причины, что в большинстве случаев неподвластно экономике, для которой многие кризисы являются совершенной неожиданностью.

Такое положение вещей кажется логичным, ведь метеорология ближе к физическим наукам, чем экономика, и, следовательно, ее легче математизировать. Не случайно фон Нейман однажды заявил, что экономика в своем развитии отстала на миллион миль от такой науки, как физика.

## ТОЧКА ЗРЕНИЯ ФОН НЕЙМАНА

Хотя до 1937 года фон Нейман не опубликовал ни одной работы по экономике, его интерес к этой теме зародился довольно давно, еще во время бесед с отцом за семейными завтраками. Почти с самого начала фон Нейман подумал о том, чтобы отставить инструменты и методы математического анализа, несмотря на хорошие результаты, которые они дали в области ньютоновой механики.

Он полагал, что эти методы переоценены и не могут принести существенную пользу экономической теории. Фон Нейман больше полагался на то, что мы сегодня называем дискретной математикой. Используя методы, очень похожие на те, что были применены в теории игр, и обобщив теорему Брауэра о неподвижной точке, в 1937 году фон Нейман опубликовал работу *Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes* (*«Об экономической системе уравнений и обобщении теоремы Брауэра о неподвижной точке»*), в которой доказывал существование математического параметра, представляющего равновесие цен.

Возможно, главная ценность этой статьи заключалась в том, что теория Неймана основывалась на системе аксиом, созданных им независимо от их экономического значения. Его методология была очень похожа на его же подход к аксиоматизации теории множеств или квантовой механики. Речь шла о том, чтобы начать с нуля и четко определить элементы, которые участвовали бы в рассмотрении.

Теория игр была создана в чисто математическом ключе, и фон Нейман хотел придать ей новое значение, заставить ее перешагнуть эти ограничения. Его новой целью стала эконо-

### КАРЛ МЕНГЕР И ИСЧИСЛЕНИЕ МОРАЛИ

Австрийский экономист Карл Менгер был отцом известного во всем мире математика, также Карла Менгера.

Человеческий фактор всегда имел большое значение для создания какой-либо экономической теории — не только из-за вносимой им непредсказуемости, но и потому, что он учитывает элементы морали. В этом смысле интересно, что на Моргенштерна, а затем и на фон Неймана оказали влияние идеи Карла Менгера (1840–1921), прославившегося своей работой *«Основания политической экономии»*. Менгер, на чью философию сильно повлиял Витгенштейн, представлял моральный кодекс как правила игры, которые поддерживают, упорядочивают и структурируют человеческие взаимоотношения в определенной группе, составляющей общество. Таким образом, будет столько разных моралей, сколько групп будет взято в расчет. Для анализа этих общественных кодексов Менгер предлагал использовать логику и комбинаторику, отбрасывая математический анализ, модный в то время, но дававший ничтожные результаты применительно к экономической теории. Именно в таком подходе Менгер видел большие возможности для улучшения работы с экономической теорией, что и было частично реализовано с появлением теории игр и, главным образом, теоремы о минимаксе, примененной к анализу рыночного равновесия.

мика. Прежде эта наука использовала те же методы, что и классическая механика, а также прибегала к инструментам математического анализа, в частности вариационному исчислению. Применение теории игр, комбинаторики и конверсии означало большие изменения. Необходимо также добавить, что работы фон Неймана знаменовали рождение математики, которую мы называем прикладной. На этом пути у ученого был спутник — не математик и не физик, а экономист.

### ТЕОРИЯ ИГР И ЭКОНОМИКА

В 1934 году в Принстоне фон Нейман познакомился с Оскаром Моргенштерном (1902–1977), немецким экономистом, чье имя уже имело некоторую известность в Венском кружке. Моргенштерн явно предпочитал общаться с математиками, нежели с экономистами, и сразу же заинтересовался подходом фон Неймана. Они оба критически относились к тому, как до этого рассматривалась экономическая теория, и стали работать над текстом, который должен был быть первым в ряду лекций фон Неймана в Принстоне. Однако для начала Моргенштерну требовалось усовершенствовать свои математические знания до уровня, необходимого для этой работы. Фон Нейман посоветовал ему несколько книг. Надо отдать должное таланту и усердию Моргенштерна, ведь достичь необходимого уровня для того, чтобы на равных работать с фон Нейманом, было нелегкой задачей.

Текст, который должен был стать обычным вступлением к серии лекций, является одной из важнейших работ по экономической теории, написанных по сегодняшний день. Он также послужил основой не только для последующего ее развития, но и для только что появившейся теории игр. Книга, написанная фон Нейманом и Моргенштерном, была опубликована в 1944 году под названием *Theory of Games and Economic Behavior* (*«Теория игр и экономическое поведение»*) и считается одной из главных работ венгерского ученого. В ней теория игр предстала как полная, завершенная теория, которая могла стать основой новой ветви математической науки.

Авторы доказали, что любая игра с количеством игроков $n$ и ненулевой суммой может быть сведена к игре с количеством игроков $n + 1$ и нулевой суммой. То, что в теории игр главным образом рассматриваются игры с двумя игроками и нулевой суммой, объясняется тем, что, во-первых, их проще анализировать, а во-вторых, они в каком-то смысле являются общим случаем для $n + 1$ числа игроков в игре с нулевой суммой.

Разумеется, сложность анализа возрастает с увеличением числа игроков. Чтобы решить эту проблему, фон Нейман и Моргенштерн использовали матрицы с $n$ измерениями и функции с $n$ переменными. Применение теории игр к поведению экономических агентов произошло естественным путем — их стали рассматривать как субъекты антагонистической игры, чьей целью было получить выигрыш, снизив риски. В таких играх, разумеется, участники могли создавать коалиции.

Главное свойство математики, по моему мнению, — это ее особенная связь с естественными науками, или, обобщая, со всеми науками, интерпретирующими опыт на более высоком уровне, нежели чисто описательный.

**Джон фон Нейман**

Может показаться парадоксальным, но часто книги, оказавшие наибольшее влияние на развитие определенной науки, читают меньше всего. В этом можно найти некую логику, если вспомнить, что для их чтения необходимо обладать очень глубокими знаниями, следовательно, они могут быть интересны только узкому кругу специалистов. С другой стороны, эти специалисты обычно обладают признанным авторитетом, который может сделать книгу известной и вне сугубо профессионального круга, причем настолько, что она вызовет интерес средств массовой информации и даже станет модной. Нечто подобное произошло с *«Теорией игр и экономическим поведением»* — книгой, полной формул и тяжелой для чтения, явно адресованной только специалистам. Газета *«Нью-Йорк Таймс»* посвятила ей длинную статью, в которой объяснялись революционные последствия нового подхода. Вскоре все специалисты (и, как часто бывает в таких случаях, многие, кто таковыми не являлся) заявили, что появление этой книги ознаменовало новую эпоху в развитии экономической теории. И все же за пять лет было продано всего около 4000 экземпляров. Многие покупатели

## ГЁДЕЛЬ И КОНСТИТУЦИЯ

Однажды вечером Оскару Моргенштерну позвонил Курт Гёдель и сказал, что нашел противоречия в Конституции США. При этом на следующий день Гёдель должен был предстать перед судьей Филипом Форманом для заключительной процедуры принятия американского гражданства, которая носила исключительно формальный характер. Разумеется, математик досконально изучил Конституцию и не намерен был молчать об обнаруженных противоречиях. Тогда Моргенштерн решил позвонить Эйнштейну (который тогда был уже очень известен) и попросить его пойти к судье вместе с ними. На следующий день они предстали перед судьей втроем. Как и следовало ожидать, Гёдель завел речь о формулировке пятой статьи, которая ставила под вопрос устойчивость всей системы. К счастью, Моргенштерну и Эйнштейну удалось убедить судью в благих намерениях Гёделя, и тот смог поклясться на Конституции без каких-либо проблем. Ему очень повезло и со спутниками, и с судьей.

**Эйнштейн любил проводить время в обществе Гёделя. Вдвоем они совершали долгие прогулки по кампусу Принстонского университета.**

были не математиками и не экономистами, а профессиональными игроками. Вероятно, они были очень расстроены, открыв книгу и обнаружив 165 страниц, заполненных математическими формулами.

Фон Нейман и Моргенштерн сравнивали уровень, на котором тогда находилась экономическая теория, с уровнем физики до появления теорий Ньютона и Кеплера. Они считали неприемлемым интуитивный подход, лишенный серьезной теоретической базы, при котором объяснение основывалось на туманной терминологии без четких определений. Ученые прекрасно отдавали себе отчет в том, что развитие экономики требует создания новой математики, которой на тот момент не существовало.

ГЛАВА 4

# США: прикладная математика

До 1940 года Нейман в основном занимался исследованиями в области чистой науки. Но начиная с этого момента большая часть его работ была посвящена прикладной математике. Многие идеи ученого, учитывая трагические события тех лет, были применены в военных целях, а остальные, например разработка новой архитектуры компьютеров, стали важными инструментами восстановления общества после войны.

В конце XIX века уровень преподавания математики в США был гораздо ниже, чем в Европе. То, что в Америке учили на первых курсах университета, в Германии входило в программу средней общеобразовательной школы. Это касалось не только математики, но и всех технических дисциплин, для изучения которых она была необходима. Помимо этого, в большинстве университетов США платили за преподавание, а не за исследовательскую работу, поэтому тем, кто хотел такой работой заниматься, надо было самостоятельно искать себе спонсоров.

Необходима была глобальная реформа, в рамках которой появились бы специализированные журналы и математические ассоциации, оказывавшие информационную поддержку для получения финансирования и исследовательских стипендий. Первым центром, сделавшим шаги в этом направлении, был университет Джона Хопкинса в Балтиморе. В нем были созданы постдипломные курсы, а также, в 1878 году, начал выходить журнал *American Journal of Mathematics*, первый математический журнал в США, стимулировавший исследования в этой науке. Десять лет спустя было создано общество American Society of New York, в которое принимали не только преподавателей математики, но и инженеров, студентов и всех, кто интересовался этой дисциплиной. Число членов общества быстро росло, оно стало известным во всей стране, и в 1894 году было решено переименовать его в American Mathematic Society («Американское математическое общество»), более известное под аббревиатурой AMS.

В 1861 году появился Massachusetts Institute of Technology (сокращенно MIT, Массачусетский технологический институт), быстро ставший одним из крупных образовательных центров США. Однако, как это видно из его названия, институт был создан с целью дать студентам скорее технические, нежели научные знания. В то время приоритетом образовательной политики оставалась прикладная сторона обучения, а фундаментальная исследовательская деятельность стояла на втором месте. Тем не менее растущая потребность в глубоких знаниях по физике и математике именно для развития техники, а также новые сведения в области только что появившейся кван-

### НАЦИЗМ И ГЁТТИНГЕНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Одной из ошибок, совершенных нацистами, было изгнание из научного сообщества всех евреев. Так немцы своими руками лишили себя огромного количества физиков и математиков, которые могли бы принять участие в создании ядерной бомбы. За исключением Вернера Гейзенберга и Вернера фон Брауна, немецкое правительство уже перед началом войны стало избавляться от ученых, утверждая, что еврейской науке нельзя доверять. Чтобы оправдать свои действия, нацисты пытались заручиться поддержкой ученых и интеллектуалов. Однако Давид Гильберт четко обозначил свою точку зрения еще в начале Первой мировой войны, отказавшись подписать манифест, в котором правительство декларировало интеллектуальную подоплеку военных действий. Когда нацизм стал насаждать свои селективные критерии, Гильберт сделал все, что было в его силах, и даже воззвал к Веймарской конституции, чтобы главных математиков не увольняли из Гёттингенского университета. Но эта борьба не увенчалась успехом, о чем свидетельствует и его горький ответ нацистскому министру образования. Когда тот спросил ученого, как обстоят дела с математикой в университете после того, как его «очистили» от евреев, Гильберт коротко ответил: «Математика в Гёттингене? Ее больше нет».

товой механики, приходящие из Европы, сделали для многих ученых очевидной важность создания факультетов, где преподавались бы такие новые дисциплины, как теоретическая физика. Финансовую поддержку этой инициативе стал оказывать частный сектор посредством фондов и пожертвований. Одним из самых крупных был фонд Рокфеллера, оказывавший существенную помощь по введению новаторских научных подходов в университетское образование. Его директор, Абрахам Флекснер (1866–1959), был инициатором создания исследовательского центра в области математики, построенного рядом с Принстоном. Так появился Институт перспективных исследований Принстона (Institute for Advanced Study, IAS), впоследствии вошедший в число основных математических центров в мире. Одним из самых выдающихся его сотрудни-

**Берлин, 1933 год. Сожжение книг еврейских и других авторов, считавшихся антинемецкими.**

ков был Освальд Веблен (1880–1960), всемирно известный американский математик, эффективно совмещавший научную и организаторскую деятельность. Помимо прочего, ему принадлежит заслуга разработки структуры центра и инициатива приглашения на работу авторитетных математиков для совместных исследований. Так начался новый этап, когда поток ученых, пересекавших Атлантический океан, впервые изменил вектор. Теперь уже не американцы ехали в Германию, чтобы расширять свои знания, а немцы приезжали на учебу в США. Приток ученых усилился с приходом к власти нацистов.

Нам могло бы показаться, что компьютерные технологии достигли своего предела, но делать подобные заявления надо с большой осторожностью, так как через пять лет они могут прозвучать очень глупо.

**Джон фон Нейман**

В начале XX века Гёттингенский университет все еще был мировым математическим центром, но в США уже появился Принстон, способный соперничать с ним и даже достичь такой же известности.

Освальд Веблен и фон Нейман познакомились на Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 году. Не было бы преувеличением сказать, что эта встреча стала для венгерского ученого судьбоносной. Они не только обменялись научными взглядами, как это и происходит на подобных мероприятиях. Также Веблен рассказал фон Нейману о своем проекте по созданию в Принстоне центра, посвященного чистой математике и еще одной области, к которой фон Нейман питал особый интерес, — математической физике. США уже успели прославиться как страна возможностей, земля обетованная, и Веблен открывал фон Нейману дверь в этот мир. Решающим толчком стала тяжелая ситуация, сложившаяся в Европе накануне Второй мировой войны.

## ПЕРВЫЕ КОНТАКТЫ

Фон Нейман всегда выступал против нацизма. И все же нельзя сказать, что его переезд как еврейского ученого сначала в Германию, а потом в США был вызван антисемитскими настроениями, так как в обоих случаях его главной мотивацией был поиск лучших условий работы.

В декабре 1929 года ученый женился на Мариэтте Кёвеши, его давней невесте и дочери врача из Будапешта. Чтобы заключить брак, фон Нейману пришлось перейти в католичество, против чего никто не возражал, хотя его еврейская семья была довольно консервативной. В 1935 году у ученого родилась единственная дочь, Марина. Через год после свадьбы фон Нейман стал приходящим профессором Принстонского университета, а в 1933 году его назначили профессором в Институте перспективных исследований. Фон Нейману было всего 29 лет, он был самым молодым профессором в престижном научном центре, где работали такие ученые, как Эйнштейн, Дирак, Тьюринг и Гёдель.

Постепенное прохождение фон Нейманом всех ступеней иерархии не было связано с его академическими заслугами. Профессионализм ученого никто не ставил под вопрос, скорее дело объяснялось политической и экономической ситуацией в Штатах, в частности законами страны об иммиграции. Когда нацистские чистки выплеснулись через границы Германии и затронули другие страны — Чехословакию, Венгрию, Польшу и Италию, — ученым еврейского происхождения пришлось выехать, а возможный выбор стран был ограничен. Разумеется, США были перспективным направлением, но попасть туда было не так просто. Из-за экономического кризиса рабочих мест было немного. Профессора, которым удалось сохранить работу, были вынуждены целыми днями заниматься только преподаванием. Иметь такой университетский контракт, который позволял бы вести исключительно исследовательскую работу, было роскошью, а массовое прибытие европейских ученых расценивалось как угроза их американскими коллегами. Несмотря на довольно враждебные условия, фон Нейман, в то время уже пользовавшийся международной известностью, сумел совершить быстрое восхождение по иерархической лестнице и профессионально утвердиться в США. В 1937 году он получил американское гражданство и в том же году начал работать в Исследовательской баллистической лаборатории (Ballistics Research Laboratory).

Преподавал фон Нейман сравнительно недолго, с 1930 по 1933 год, и он не отличался особым талантом в этой области. Говорил он слишком быстро, не останавливаясь для объяснений и почти не давая студентам времени делать записи.

Предвоенные годы фон Нейман посвятил исследованиям. Совместно с Гарретом Биркгофом в 1936 году он опубликовал *The Logic of Quantum Mechanics* (*«Логику квантовой механики»*), а в 1936–1937 годах в Институте перспективных исследований вышли его *Lectures on Continuous Geometry* (*«Лекции по непрерывной геометрии»*), которые заложили основы для дальнейшего развития теории решеток. Это был период постоянных поездок в Европу и по США, насыщенный событиями не только в профессиональной, но и в личной жизни. Через два года после свадьбы жена ученого влюбилась в физика Джона Бардина Купера и оставила мужа, забрав с собой дочь. Мариэтта временно поселилась в Неваде, где легче было получить развод. В качестве причин, побудивших ее принять такое решение, она назвала на процессе «насилие и жестокость». Иногда этот факт упоминается, чтобы обличить недостатки характера и эмоциональную нестабильность фон Неймана и подчеркнуть, что у гениев часто возникают трудности в общении с другими людьми. Однако эта версия не может считаться достоверной: согласно некоторым свидетельствам, фон Нейман с женой договорились о таких показаниях с единственной целью — ускорить процедуру. После развода Янош и Мариэтта поддерживали теплые отношения и условились, что дочь останется с матерью до 12 лет, а подростковый период проведет с отцом. Мариэтта считала очень важным, чтобы дочь могла прожить эти годы рядом с таким выдающимся человеком, как фон Нейман.

Люди считают математику сложной только потому, что не понимают, насколько сложна жизнь.

**Джон фон Нейман**

Вплоть до 1936 года фон Нейман проводил каждое лето в Европе, пока нацистские власти не сделали жизнь ученых и большинства граждан в Германии и оккупированных странах невозможной. Осенью 1938 года он попросил у дирекции Принстонского университета разрешения отлучиться в поездку, чтобы решить некоторые личные вопросы. Ученый отправлялся на собственную свадьбу с Кларой Дан, с которой уже встречался до этого и в которую вновь влюбился во время частых поездок в Европу. Клара, происходившая из богатой буржуазной семьи, была замужем, однако к тому времени получила развод.

Осенью 1938 года она написала фон Нейману письмо, в котором беспокоилась по поводу политической ситуации и говорила о своем желании эмигрировать — например, в США. Фон Нейман, недолго думая, отправился в Будапешт, чтобы жениться во второй раз. Во время этого последнего его путешествия в Европу ученый не упустил возможности встретиться со всеми, с кем запланировал, особенно с датским физиком Нильсом Бором (1885–1962) в Копенгагене. Нельзя забывать, что в то время такие перемещения были сопряжены с риском, так как нацистский режим в Германии все усиливался. Джон фон Нейман и Клара Дан поженились 17 ноября, а через несколько дней после этого пересекли Европу и сели на корабль Queen Mary, который отвез их в США. Это была конечная точка их путешествия. Со временем туда же переехала вся семья фон Неймана.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Физика рождается из наблюдений за повторяющимися явлениями, которые позволяют ученым создать сценарий, способный воспроизвести эти явления насколько можно точно или сделать точные измерения, если речь идет о природных феноменах, так как их нельзя повторить в разумных масштабах. Конечной целью является нахождение закона, который, если и не может полностью объяснить природу явления, то способен прогнозировать, что произойдет в будущем. В этом смысле можно сказать, что физика — предсказательная наука. Например, в случае с гравитацией мы наблюдаем, что тела притягиваются к Земле. Мы также можем провести эксперименты, кидая разные предметы с разных высот и делая измерения, как в свое время поступил Галилей. Все полученные данные будут относиться к области так называемой экспериментальной физики и в идеале приведут к формулировке закона. Например, Ньютон установил закон всемирного тяготения посредством формулы, точно описывающей, как две любые массы притягиваются друг к другу. Пока никто не смог объяснить причину этого притяжения, но мы знаем, что оно есть, а это позволяет нам предсказывать поведение массы, которая испытывает на себе влияние гравитационного поля.

Конечным результатом вышеописанного процесса будет одна или несколько математических формул. Появления исчисления бесконечно малых позволило использовать математические инструменты для этого и других законов, что привело к созданию новых формул, которые, в свою очередь, получили новые физические интерпретации.

Мы говорим о физике как об общей науке. Однако, расширяя наш пример, с помощью закона тяготения мы можем рассчитать, как будет вести себя масса, подброшенная под определенным углом с определенной скоростью. Нам известно, что она будет двигаться по параболе. Так как мы знаем уравнение этой параболы, то сможем определить ее высоту и максимальную длину, а также время, которое масса затратит на прохождение всего пути, и скорость в каждой его точке. Все эти данные имеют огромную важность для баллистики.

Здесь мы имеем дело с прикладной физикой, которая выходит за рамки общей науки и применяется в сфере технологий. На первый взгляд эта схема кажется простой: наблюдение, измерение, гипотеза, закон, который можно записать математически, практическое применение и создание новых технологий. Однако, как это всегда бывает со схематичными объяснениями, эта последовательность слишком упрощена.

Обычно процессы развиваются не только в одном направлении. Иногда приходится несколько раз делать шаги вперед и назад. Созданный механизм, например пушка или межконтинентальная ракета, никогда не работает с первой попытки, следовательно, приходится менять теорию и переписывать формулы. Очень часто над большими научными и техническими проектами работают математики, физики и технологи из разных областей. Среди математиков есть те, кто больше занимается теоретической математикой, и те, кто предпочитает прикладную. Сегодня это различие проводится ясно, но в то время, когда фон Нейман начинал работать в Штатах, его не существовало. Если в мире и был математик, способный создать в своем уме картину полной, объединенной чистой и прикладной математики, это был именно фон Нейман.

## УРАВНЕНИЯ

Не всегда, но в большинстве случаев связующим звеном между чистой и прикладной математикой являются уравнения.

То, что уравнение можно сформулировать, не означает, что его можно решить. В истории математики решению уравнений были посвящены целые столетия. Если у нас есть уравнение, которое позволяет рассчитать все составляющие траектории пули, но мы не знаем, как его решить, от него не будет никакой пользы. Решить уравнение значит найти все его решения. Например, решением уравнения

$$x + 3 = 5$$

будет $x = 2$.

Однако у такого уравнения, как

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

не будет однозначного решения. Мы можем предпринять множество попыток в поисках решения, но уравнения такого типа решаются определенным способом. Это уравнение второй степени, и его изучают в школе. Алгоритм решения дает нам числа 1 и 2. Если бы мы не знали этого алгоритма, нам пришлось бы действовать методом подбора. В данном конкретном случае мы все довольно быстро нашли бы ответ, но в таком уравнении, как

$$2{,}34x^4 + 23{,}56x^3 - 0{,}65x^2 + 11{,}370x - 36{,}62 = 0,$$

подбор будет титаническим трудом с мизерными шансами на успех. В качестве альтернативы такую работу можно поручить машине — сегодня мощность процессоров позволяет справиться с этой задачей. Работа математика в таких случаях может быть очень полезной не только для того, чтобы создать уравнения, но и для того, чтобы определить интервал решений. Например, если мы знаем, что искомые числа находятся в промежутке от 0 до 10, это, несомненно, упростит поиск решений методом подбора.

В начале своей жизни в Америке фон Нейман, придя на работу в Лабораторию баллистических исследований, занимался задачей гидродинамической неустойчивости, входящей в область механики твердого тела. Это основополагающий инструмент баллистики, в котором задействованы дифференциальные уравнения в частных нелинейных производных, представляющие большую аналитическую сложность. Ученый задумался о том, чтобы решать такие уравнения при помощи числовых методов. Так родился его интерес к новым электронным вычислительным машинам и возможностям, которые они открывали. Фон Нейман уже знал, что вычисления могут вызывать большие сложности. Разумеется, речь идет не об уравнениях второй степени, а об уравнениях, для решения которых еще не существует алгоритма. Они требовали долгих часов вычислений — computes по-английски. Люди, чья работа заключалась в этих вычислениях, так и назывались — компьютеры. По неизвестной причине женщин на этой должности всегда было больше, чем мужчин.

### ПЕРВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ

Одно из значений слова «компьютер» — «считать», «тот, кто считает». Таким образом, предшественники этих машин — аппараты, способные производить вычисления, то есть автоматически совершать арифметические операции. В общем смысле компьютером называется аппарат, в который можно ввести данные (input) и от которого мы ожидаем результат, то есть выходные данные (output).

Уровень автоматизма и сложность производимых операций являются определяющими факторами в развитии вычислительных машин. Тот факт, что вместо того чтобы самим руками передвигать костяшки на счетной доске, мы доверяем вычислительную операцию электромеханическому устройству, означает большой технический прогресс. Было это устройство спроектировано для сложения длинных чисел или же для решения дифференциальных уравнений — технический вопрос, но другого толка. В любом случае счетные устройства появились вследствие необходимости избавить человека от абсолютно механических вычислений, во время которых надо не думать, а выполнять один и тот же рутинный процесс. Следовательно, для него можно написать программу.

В отличие от общих наук, в которых вклад одного человека может привести к удивительным результатам, технологии обычно развиваются поступательно и более медленно. Для того чтобы создать механизмы с шестеренками, стержнями и сцеплением, нужен не только соответствующий чертеж, но и фабрика, которая может изготовить комплектующие. Именно поэтому знаменитые машины (аналитическая и дифференциальная) британского ученого Чарльза Бэббиджа (1791–1871) не получили распространения, хотя уже в наши дни они построены для одного музея и прекрасно там работают. Эти машины считаются одной из основ эры информатики, особенно если рассматривать их вместе с результатами британского математика Ады Августы Байрон (1815–1852), графини Лавлейс, создавшей первый в истории язык программирования. Это повлекло за собой появление основного элемента в эволюции вычислительных машин — сегодня мы называем его программным обеспечением, software. С этого момента у компьютера появились «тело» и «душа» — hardware (аппаратное обеспечение) и software. В связи с этим стоит упомянуть о работе британского математика Джорджа Буля (1815–1864) *«Исследование законов мышления»*, вышедшей в 1854 году. В ней впервые появилась так называемая булева алгебра — новая алгебра логики, в которой переменные могут принимать только два значения (0 и 1), а основными операциями являются AND (и), OR (или) и NOT (нет). На их основе разрабатывали логику современных компьютеров. Наконец, нельзя не вспомнить о французском торговце Жозефе Жаккаре (1752–1834), который еще в 1801 году, задолго до появления первых вычислительных машин, создал автоматический станок, устройство которого было основано на нескольких перфокартах, способных хранить информацию о повторяющихся процессах.

Появление компьютеров нового поколения обычно относят к 1890 году, когда правительство США решило провести перепись населения. Подсчет результатов должен был продлиться десять лет. Однако при помощи устройства Германа Холлерита (1860–1929), чье аппаратное обеспечение основывалось на перфокартах Жаккара, а программное — на булевой алгебре, перепись завершилась за рекордно короткий срок — за два года. Немного позже, в 1924 году, была создана первая компания по производству подобных вычислительных машин, International Business Machine Corporation (IBM).

Фон Нейман впервые стал использовать перфокарты для математических вычислений. Его брат Николас вспоминал, что эта идея пришла ему в голову, когда они еще жили в доме своих родителей в Будапеште. Их отец, который всегда хотел заинтересовать сыновей миром бизнеса, часто подробно рассказывал им о влиянии экономики на общество и культуру. Банк, директором которого был Макс Нейман, недавно инвестировал в инновационную ткацкую фабрику. Деньги были нужны для закупки станков Жаккара.

Фон Нейман знал, как важна была связь теории с практикой, устанавливаемая посредством опытов. Данные, полученные опытным путем, помогали скорректировать теорию.

Введение новых методов исчисления способствовало большому прогрессу в науке, и фон Нейман полагал, что применение компьютеров стало бы серьезным шагом в этом направлении. Однако для этого требовались новые числовые методы. Особое значение имеет вклад фон Неймана в создание методов числовой стабильности, вычисления обратных матриц и приближения функций в дискретных точках.

Благодаря исследованиям в области баллистических траекторий и распространяющихся волн фон Нейман стал востребованным экспертом у военной элиты. Но это было только начало эксперимента, который привел к реализации одного из самых выдающихся научных проектов и одновременно с этим стал одним из самых ярких примеров разрушительных возможностей человека. И ученый фон Нейман принял наиболее активное участие в этом проекте.

## АТОМНАЯ БОМБА

Шел 1944 год. Перед союзниками забрезжила возможность победы. Роммель проиграл битву в Северной Африке, Италия больше не хотела следовать за сумасшествием Гитлера, а американские войска завоевали Сицилию, стратегический пункт для контроля над Средиземным морем. Советская армия выиграла битву под Сталинградом и начала наступление, хотя ей и мешало плохое состояние дорог после одной из самых суровых зим в Восточной Европе. Однако до конца войны было еще далеко. Немецкая армия прочно засела в оккупированных странах, и ни один солдат союзников не мог туда проникнуть. В сентябре того же года вермахт запустил «Фау-2», улучшенную версию «Фау-1». Это была первая военная ракета, созданная на секретном полигоне в Пенемюнде под руководством инженера Вернера фон Брауна. Это оружие вызывало панику: его было очень трудно обнаружить, а подлетало оно неслышно, так как двигалось со скоростью, превышающей скорость звука. Эти ракеты имели большой психологический эффект, но как оружие были весьма спорными. Больше людей погибло при работе над «Фау-2», чем от нее самой на поле боя. Главные недостатки ракеты объяснялись двумя факторами: во-первых, ее навигационным устройствам ракеты недоставало точности, а во-вторых, ее взрывная мощность была относительно слабой. «Фау-2» вмещала 975 кг аммотола (смеси аммиачной селитры и тротила), которые, если ракета была точно направлена на цель, могли привести к катастрофическим последствиям, но если она падала недалеко от городской застройки (как это и происходило чаще всего), то просто создавала кратер средних размеров.

Однако немцы утверждали, что они располагают секретным оружием, которое способно переломить ход войны и подарить им победу. Разумеется, речь шла не об улучшении навигационной системы ракеты, а о замене взрывного вещества: последствия взрыва должны быть настолько разрушительными, что точность воздействия уже не имела значения. Немцы собирались создать первую атомную бомбу в истории. Для этого у них были все необходимые компоненты: тяжелая вода производилась на норвежском предприятии Norsk Hydro, уран поставлялся с самого большого месторождения в мире в Бельгийском Конго. Германия имела явное преимущество, но она потеряла шанс использовать самых блестящих ученых.

Первая атомная бомба основывалась на процессе расщепления ядра обогащенного урана, которое сопровождалось уменьшением массы (см. рисунок). Эйнштейн в рамках своей теории относительности вывел знаменитое уравнение $E = m \cdot c^2$,

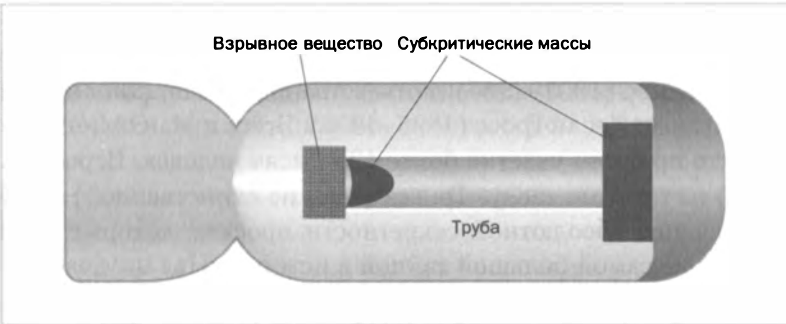



Схема взрывного механизма, в котором одна из субкритических масс выстреливается посредством условного взрывного вещества и попадает в другую субкритическую массу.

согласно которому уменьшение массы вызывает выброс энергии (так как скорость света *c* — постоянная величина). Первым, кто понял, что имеющихся знаний достаточно для создания атомной бомбы, был венгерский физик Лео Силард (1898–1964). Именно он спроектировал устройство и в 1933 году запатентовал свою разработку, чтобы никто не смог ею воспользоваться. В 1939 году Силард переехал в Нью-Йорк, где вместе с итальянским физиком Энрико Ферми (1901–1954) начал работу над первым ядерным реактором в мире. Именно тогда было решено, что наиболее подходящий элемент для провоцирования цепной реакции — уран.

Узнав, что немцы уже работают над ядерной бомбой, Лео Силард вместе с Эдвардом Теллером (1908–2003) и Юджином Вигнером (1902–1995) — все трое были венгерскими евреями — убедили Эйнштейна написать президенту Рузвельту письмо, предупреждавшее его об опасности. Так родился Манхэттенский проект.

## МАНХЭТТЕНСКИЙ ПРОЕКТ

Президент США Франклин Делано Рузвельт подписал 7 декабря 1941 года приказ о создании атомной бомбы. Была образована междисциплинарная команда при участии различных отделений университетов Колумбии, Калифорнии и Чикаго.

Ее целью было создание первой бомбы, основанной на делении ядра. Научным директором проекта был назначен Роберт Оппенгеймер (1904–1967), а ответственным со стороны армии стал генерал Лесли Гровс (1896–1970). Всего в Манхэттенском проекте приняли участие более 125 тысяч человек. Вероятно, одной из главных заслуг Гровса (если не единственной) было обеспечение абсолютной секретности проекта, который стал чуть ли не самой большой тайной в истории. Над ним работали всемирно известные ученые, такие как Ричард Фейнман, Эдвард Теллер, Энрико Ферми, Ричард Уилкинс, Станислав Улам, Луис Злотин, Клаус Фукс, а также фон Нейман, спроектировавший механизм поджигания.

Фон Нейман, уже давно работавший в области гидродинамики, разработал устройство, которое при детонации производило ударную волну, а та, в свою очередь, вызывала немедленное сжатие ядра плутония. Объем этого ядра был достаточно большим для того, чтобы масса плутония была меньше критической. При равномерном сокращении объема ядро достигало сверхкритической массы. Математическая модель, лежащая в основе изобретения, базировалась на системе конечно-разностных уравнений, а для их решения требовался компьютер, способный производить огромное количество сложных вычислений за кратчайшее время. Фон Нейман разработал алгоритм, необходимый для решения уравнений, но вполне вероятно, что без помощи компьютера его предложение было бы невыполнимым. Манхэттенский проект длился 2 года, 3 месяца и 16 дней. Первая атомная бомба в истории была взорвана в пустыне рядом с городом Аламогордо 16 июля 1945 года.

## ENIAC

В июле 1943 года в Электротехнической школе Мура при Пенсильванском университете началось строительство нового компьютера, которому суждено было стать краеугольным камнем в истории вычислительных машин. Его назвали

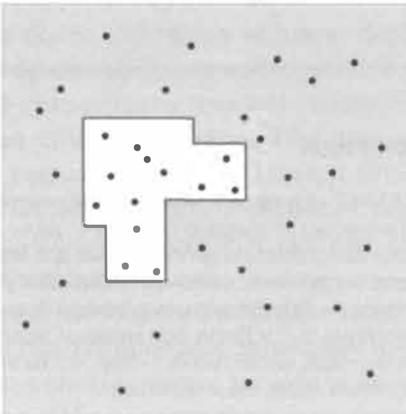
ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer — электронный числовой интегратор и вычислитель). Это был проект высочайшей секретности, который имел кодовое название PX. ENIAC считается первым компьютером в истории, хотя

## ОК-РИДЖ

В 1942 году правительство США построило секретный город Ок-Ридж (штат Теннесси) площадью более 24 тысяч га, где должны были располагаться все предприятия, необходимые для Манхэттенского проекта, а также жить все сотрудники, включая техников и ученых, — несколько десятков тысяч человек. Объект охраняла американская армия, и очень немногие, в числе которых был и Джон фон Нейман, могли покидать территорию. При въезде в Ок-Ридж висел плакат: «Все, что ты видишь, делаешь или слышишь здесь, должно здесь же и остаться».


**Плакат при въезде в Ок-Ридж, призывающий сохранять секретность всего происходящего на этой территории.**

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО**



Метод Монте-Карло — группа численных методов, используемых в статистике для апроксимации сложных математических выражений, для которой нет алгоритма вычисления. Он состоит в симуляции случайных переменных. Одно из самых простых известных устройств для генерирования таких случайных чисел — рулетка казино. Именно поэтому данному методу дали имя культовой столицы азартных игр. Дилетанты считают, что метод Монте-Карло помогает выигрывать в рулетку, но на самом деле этот статистический метод никак не связан с азартными играми. Существует простой способ проиллюстрировать идею, на которой он основан. Представим себе квадратную доску со стороной 1, внутри которой находится геометрическая фигура неправильной формы, площадь которой мы хотим вычислить (см. рисунок). Мы могли бы взять для примера любую фигуру с изогнутыми кра-

некоторые полагают, что пальма первенства принадлежит «Колоссу» (Colossus), запущенному в середине февраля 1944 года в Блетчли-парке — военном объекте, расположенном в графстве Бакингемшир, Англия. Идея «Колосса» была предложена ученым-программистом Аланом Тьюрингом (1912–1954), а проект — математиком Максом Ньюманом (1897–1984). Устройство было использовано для расшифровки кода «Энигмы».

Создание ENIAC спонсировала армия, на него было затрачено примерно 8000 долларов. Устройство имело 30 м в длину и весило 32 тонны. Его 17 468 клапанов (вакуумных трубок) излучали так много тепла, что температура в комнате, где находился ENIAC, могла подниматься до 50 °C. Компьютер мог ями и, разумеется, любую фигуру, описываемую математической функцией. Теперь расположим количество *N* точек случайным образом. Такой сценарий мог бы иметь место в реальной жизни, например когда имеется некое количество градинок, выпавших на огороженное пространство. Сосчитаем количество *N'* точек, находящихся внутри той фигуры, площадь которой нам надо узнать. Предположим, что $N = 40$, а $N' = 13$. Коэффициент $N/N' = 0,32$ будет апроксимацией искомой площади. Легко доказать, что погрешность будет пропорциональна определенной величине, так что для каждой последующей цифры после запятой, которую мы хотим получить, будет необходимо в сто раз увеличивать объем вычислений. Хотя метод основан на простом алгоритме, для его применения необходимы вычислительные устройства. Фон Нейман опирался на идею, предложенную американским математиком польского происхождения Станиславом Уламом (1909–1984), которого фон Нейман пригласил для работы над Манхэттенским проектом. Улам рассказывал, что мысль пришла ему в голову, когда он во время болезни раскладывал сложный пасьянс. Тогда Улам подумал: вместо того чтобы каждый раз проводить детальный анализ каждого возможного решения, гораздо интересней играть наугад, подсчитывая количество задействованных карт. Фон Нейман применил этот метод для обнаружения нейтронов, порожденных радиоактивным материалом, вдоль радиуса сферы. В 1947 году он отправил официальное предложение по использованию метода в Лос-Аламосскую национальную лабораторию. Этот документ стал первым известным нам формальным описанием метода Монте-Карло.

держать в памяти всего 20 чисел. Но главным недостатком аппарата было то, что для замены программы нужно было заново его конфигурировать — примерно так, как это делает телефонистка на старой телефонной станции. Конфигурирование могло занимать несколько дней. Еще одной серьезной проблемой ENIAC было то, что он чаще был в починке, чем в работе. Несмотря на это ENIAC использовался на протяжении десяти лет, и за этот период он выполнил больше вычислений, чем было сделано за всю историю человечества до этого.

Фон Нейман начал заниматься ENIAC совершенно случайно. Американский математик Герман Хайн Голдстайн (1913–2004) поступил на военную службу в начале Второй мировой войны. Он имел звание лейтенанта и работал в BRL, баллистической лаборатории в Абердине, штат Мериленд. Голдстайн был специалистом по подготовке таблиц стрельбы и прекрасно понимал, что необходимо срочно автоматизировать длинные и утомительные вычисления. Поэтому он согласился быть посредником между школой Мура в Филадельфии, которая занималась созданием ENIAC, и полигоном в Абердине. Летом 1944 года Голдстайн случайно встретился с фон Нейманом на железнодорожном вокзале Абердина. Поскольку у того было множество обязательств перед различными государственными организациями, ему, одному из немногих ученых, разрешалось покидать базу Аламогордо. Голдстайн не был лично знаком с фон Нейманом, но знал его по конфе-

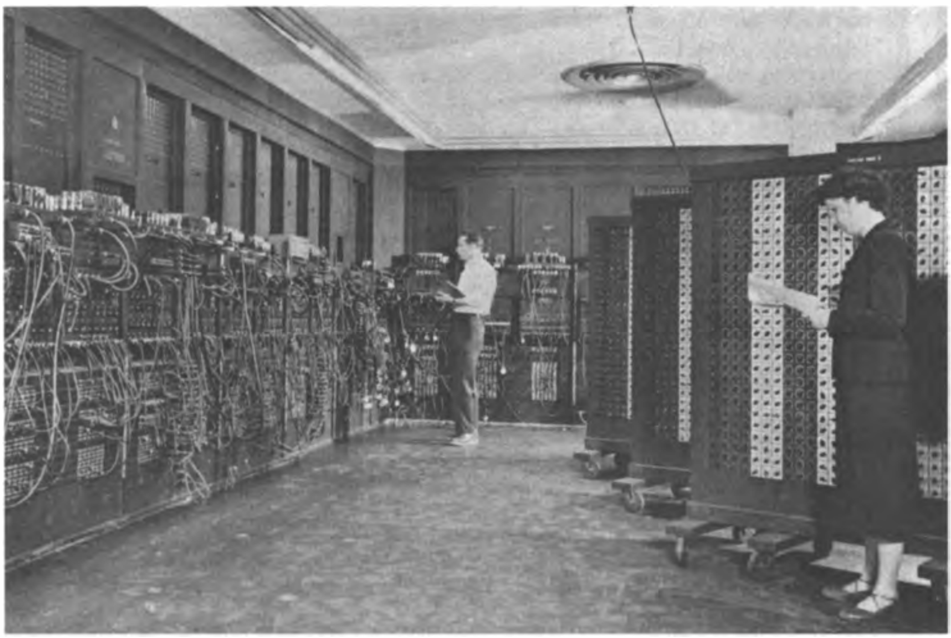
### EDVAC: ШАГ ВПЕРЕД

Джон фон Нейман (слева) и Роберт Оппенгеймер перед EDVAC.

Несмотря на усовершенствования, сделанные фон Нейманом, возможности ENIAC были очень ограниченны. После войны ученый участвовал в работе над проектом нового компьютера, который должен был учесть ошибки ENIAC. Новая машина, EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer), была гораздо быстрее предыдущей (ENIAC совершал 333 операции в секунду, в то время как EDVAC — 20 тысяч). К тому же он был полностью основан на архитектуре фон Неймана. Ученый не ограничился разработкой структуры компьютера — он также работал над алгоритмами, которые позволили бы совершать более сложные математические операции, чем простые вычисления, доступные до этого компьютерам. Фон Нейману удалось создать алгоритмы для решения различных типов уравнений, вычисления обратной матрицы, нахождения собственного вектора и вычисления соответствующего собственного значения, а также нахождения максимальных и минимальных значений функций с несколькими переменными.

ВВЕРХУ:
**Фон Нейман со своей второй женой Кларой Дан в 1954 году.**

ВНИЗУ:
**Два оператора работают с контрольной панелью ENIAC в Электротехнической школе Мура при Пенсильванском университете, 1940-е годы.**

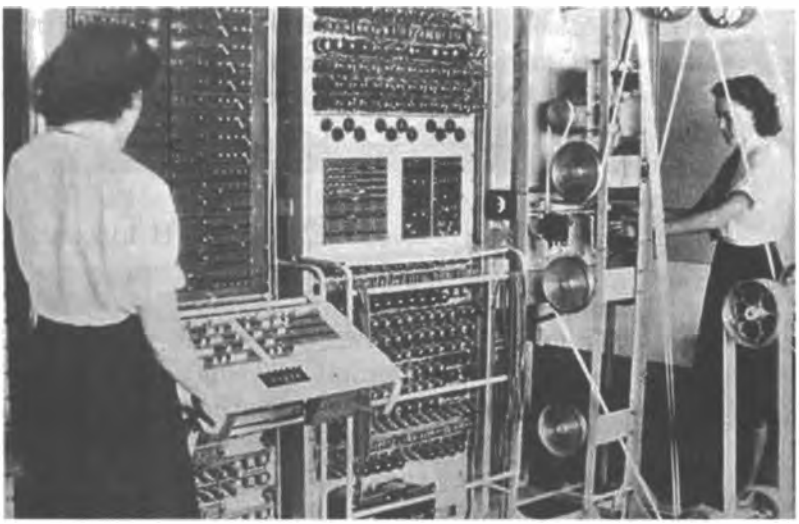


ренциям, поэтому решил все-таки подойти к ученому. Математики любопытны по своей природе и всегда интересуются работой друг друга. Разговор касался малозначительных тем, пока Голдстайн не упомянул, что работает над новым компьютером. Тут поведение фон Неймана изменилось, и, по словам самого Голдстайна, он начал допрос с пристрастием. Вопросы выдавали в нем эксперта, и Голдстайн решил пригласить коллегу в исследовательский центр Мура, чтобы лично познакомить его с инженерами Джоном Мокли и Джоном Преспером Экертом, работавшими над ENIAC. В этой истории, конечно, странно, что двое людей, каждый из которых работал над

### «КОЛОСС»

Британский математик Алан Тьюринг (1912–1954) считается одним из отцов современной информатики благодаря своей статье 1931 года под названием «*О вычислительных числах*». Эта работа была признана математическим сообществом одним из главных достижений столетия. В ней намечались основы того, что сегодня называется машиной Тьюринга, — теоретической схемы, содержащей базу, на которой позже были созданы компьютерные программы. С момента этой публикации карьера Тьюринга быстро пошла в гору. В итоге он стал профессором математики в Королевском колледже Кембриджа, где и проработал до 4 сентября 1939 года. На следующий день после того, как Англия объявила Германии войну, Тьюринг вошел в команду криптоаналитиков Блетчли-парка. Им удалось добиться больших успехов в расшифровке кодов «Энигмы» — машины, которую использовали немцы при передаче сообщений. Тьюринг продемонстрировал такой выдающийся талант к расшифровке, что стал главным криптоаналитиком Великобритании. Целью специалистов Блетчли-парка были немецкие подводные лодки. Если бы им удалось расшифровать послания, которые немецкое командование отправляло на субмарины при помощи «Энигмы», то их можно было бы перехватить до выполнения задания. Тьюринг спроектировал «Колосс» — электромеханическую машину для расшифровки кодов. Большие шумные устройства прозвали «бомбами». Они занимали в Блетчли несколько ангаров и не только сыграли решающую роль в криптоанализе Тьюринга, но и послужили основой для компьютеров, появившихся годы спустя. Криптография в то время была военной тайной, как и эти огромные машины, показавшие свою эффективность в дешифровке. Это были настоящие прародители современных сверхсекретным проектом, едва познакомившись, стали обсуждать свои исследования в здании железнодорожного вокзала. Оказавшись перед новым компьютером, фон Нейман спросил у Экерта, какова логическая структура системы. Это был ключевой вопрос, после которого инженеры ENIAC сразу же захотели начать сотрудничество. Оно продлилось до самого конца войны. Фон Нейман решил создать совокупность инструкций, которые отражали бы все этапы, проходимые при решении задачи с помощью ручки и бумаги. Эти инструкции могли быть сохранены в центральной памяти. Для того чтобы все данные могли поместиться в компьютере, надо было добавить к нему

компьютеров. Неудивительно, что и ENIAC — первый компьютер, к которому имел отношение фон Нейман,— тоже был военной тайной, ведь он использовался для создания первой атомной бомбы.



**«Колосс», один из первых компьютеров в истории. Был сконструирован в Блетчли-парке в 1943 году и приведен в действие в феврале 1944 года.**

новую составляющую, помимо той, в которой происходили вычисления, так, чтобы, с одной стороны, можно было вводить и данные, и программы, а с другой — получать результаты. Так фон Нейман начинал обрисовывать понятие программного обеспечения (software), хорошо знакомое нам сегодня.

Итак, в 1945 году в Лос-Аламосской национальной лаборатории началась работа над новым компьютером с сохраняемыми в памяти программами.

## АРХИТЕКТУРА КОМПЬЮТЕРОВ

Система, которую сегодня мы называем архитектурой фон Неймана, основана на понятии сохраняемой в памяти программы. В наши дни такие вычислительные машины еще существуют. Это, например, карманный калькулятор: на нем можно выполнить ряд сложных вычислений, но нельзя написать текст. Напротив, если нам нужна программа обработки текстов, мы можем легко установить ее и начать работу. Но так было не всегда. Как мы уже упоминали, в первых компьютерах, таких как ENIAC, поменять программу означало поменять всю структуру устройства, для этого нужно было сначала нарисовать на бумаге эскиз, а затем переделать систему проводов машины.

Для упрощения операций ENIAC фон Нейман перепробовал несколько вариантов проводки, но понимал, что как бы он ни оптимизировал систему, этого недостаточно — компьютер все равно имеет ограничения. Идея ученого заключалась в том, что данные программы, которые в конце концов можно выразить в битах в виде 0 и 1, должны сохраняться в памяти вместе с другими данными. Это позволяет менять адресацию памяти и сами программы во время работы. Большинство современных компьютеров основаны на этой архитектуре.

Она предполагает наличие пяти составляющих (см. рисунок на следующей странице).

1. Арифметико-логическое устройство.

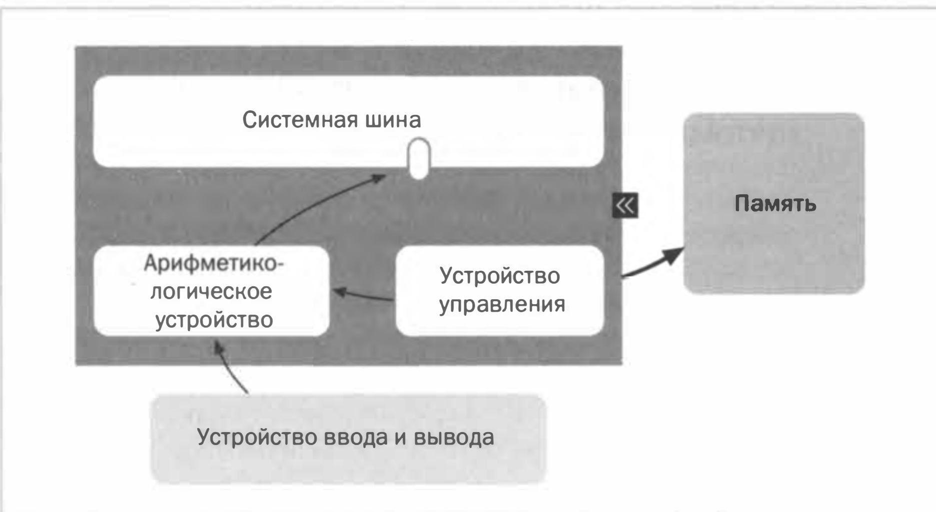
2. Память.

3. Устройство ввода и вывода.

4. Устройство управления.

5. Системная шина (данные, адреса и управление).

Идея сохранения программ вместе с данными была высказана еще Аланом Тьюрингом в статье 1936 года, опубликованной Лондонским математическим обществом. В ней подробно описывалась так называемая универсальная вычислительная машина — теоретическая модель компьютера, сегодня известная как машина Тьюринга. В ней содержались и данные, и программы, а память была бесконечной. Вполне вероятно, что фон Нейман знал о работах Тьюринга, так как они общались в 1936–1937 годах, когда Тьюринг работал в Принстонском университете. К тому же этот проект был представлен в Кем-



бридже в 1935 году. Совершенно точно, что в работах и Тьюринга, и фон Неймана описываются компьютеры с хранимыми программами, однако работа фон Неймана была опубликована раньше, поэтому эта архитектура носит его имя.

ГЛАВА 5

# Электронный мозг

**В последние годы жизни фон Нейман по-новому объединил прикладную математику, применявшуюся главным образом в военных целях, с чистой. В результате ученый занялся исследованием логической структуры репродукции живых существ и работой над клеточными автоматами, а также математикой, на которой основана работа нашего мозга. Ученый рассматривал мозг как нейронную сеть, которую можно сконструировать с помощью компьютера.**

В конце Второй мировой войны многие ученые захотели отойти от военных задач и вернуться к привычной академической деятельности. В этих обстоятельствах основной костяк исследователей, работавших на Министерство обороны США, сокращался с каждым днем. Однако из-за огромного прогресса в создании ядерного оружия в мире сохранялось военное напряжение, для которого появился эвфемизм «холодная война».

К сугубо профессиональным мотивам ученых добавлялись и этические. Научное сообщество разделилось на две группы. С одной стороны были те, кто не хотел принимать участие в наращивании ядерного вооружения, с другой — те, кто считал это единственной гарантией достижения мира во всем мире. Несомненно, фон Нейман относился к последним. Ситуация осложнялась еще и тем, что исследования в области оружия массового поражения не только не прекратились, но и двигались все дальше: появилась термоядерная бомба — самый большой разрушительный механизм, когда-либо созданный человеком.

## ВОДОРОДНАЯ БОМБА

Существует мнение, что термоядерное оружие, или водородная бомба, — самый значительный научный проект в истории. Вычислительные задачи, которые пришлось решать в ходе его разработки, были гораздо сложнее тех, с которыми столкнулись участники Манхэттенского проекта. Чтобы справиться с ними, фон Нейман создал новые программы для вычислительной техники, которая выпускалась на основе архитектуры, спроектированной им самим. Он даже задался вопросом, превышает ли объем предстоящих вычислений те, что выполнены за всю историю человечества. Однако ученый быстро пришел к выводу, что это невозможно, учитывая вычисления, которые делают дети в школе.

Принцип действия водородной бомбы основывается на энергии, высвобождаемой в результате синтеза двух ядер — дейтерия и трития (двух изотопов водорода), которые образуют ядро гелия и порождают цепную реакцию нейтронов с последующим выбросом энергии. Для этого синтеза нужно огромное количество энергии — столько, сколько получается в результате ядерного взрыва. Таким образом, к его получению ведет процесс деления — синтеза — деления. Вначале провоцируется ядерный взрыв, порождающий энергию, достаточную для того, чтобы расплавить ядра и, в свою очередь, высвободить еще больше энергии, которая пойдет на расщепление новых ядер,— энергия, получившаяся при этом, и будет результатом взрыва. Из этого краткого описания уже понятно, что используемые вычисления были гораздо сложнее тех, которые применялись при конструировании первой бомбы. Однако вся вычислительная часть была готова за шесть месяцев — рекордно короткий срок для того времени.

Первая водородная бомба была взорвана 1 ноября 1952 года на атолле Эниветок Маршалловых островов. Температура в центре взрыва превышала 15 миллионов градусов. Взрыв первой водородной бомбы встретил критику и пробудил немало страхов, однако фон Нейман защищал проект при помощи по меньшей мере любопытного рассуждения. Он понимал, что радиоактивное загрязнение представляет собой немалую угрозу для окружающей среды, и тем не менее считал, что любое действие имеет свою цену. Ученый приводил в пример количество человеческих жертв, связанных с появлением автомобилей.

Работа фон Неймана над ядерной энергией, к тому же в самом разрушительном ее виде, привела к двум серьезным последствиям. Одно из них было психологическим, второе — физическим; оба проявились к концу жизни ученого. Первое воплотилось в растущем пессимизме, от которого фон Нейману так и не удалось отделаться. Ученый считал, что технологии, созданные человеком, намного превысили его способности контролировать их. Он был твердо убежден, что ядерный холокост может быть отложен на некоторое время, но в конце концов неизбежен. Больше всего его расстраивала неспособность правительств придерживаться необходимой политики, чтобы избежать трагического конца. Вторым последствием был рак кости, который и стал причиной смерти ученого. Скорее всего, заболевание стало результатом радиоактивного облучения на протяжении длительного времени: фон Нейман вел себя слишком легкомысленно и не предпринимал необходимых мер безопасности.

## ХОЛОДНАЯ ВОЙНА

После того как Советский Союз 22 августа 1949 года взорвал свою первую атомную бомбу, ядерный конфликт между США и СССР был неизбежен. Ядерное вооружение позволяло главным мировым державам стереть с лица Земли любого противника, просто нажав на кнопку. По крайней мере все были в этом уверены. Вполне вероятно, что размеры ядерных арсеналов того времени были преувеличены, но совершенно точно: молниеносная ядерная атака могла полностью разрушить большие города, в которых находились органы власти мировых держав.

Фон Нейман был не единственным воинственно настроенным ученым. Британский математик Бертран Рассел, в то время пользовавшийся большой популярностью, тоже выступал за войну предупредительного характера. Но его высказывания были не такими острыми, как слова фон Неймана, поскольку Рассел предоставлял противнику альтернативу: сдайся, покорись США — и ты избежишь ядерного холокоста. Венгерский ученый же утверждал, что удар должен быть неожиданным: не нужно никого предупреждать.

## МАТЕМАТИКА ВОЙНЫ

Сегодня этот набор символов ничего или почти ничего не сказал бы несведущему лицу:

$$\frac{db(t)}{dt} = -\kappa_r \cdot r(t) \qquad b(0) = B$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\kappa_b \cdot b(t) \qquad r(0) = Rw.$$

Математик же увидит здесь дифференциальные уравнения с начальными условиями. Но оба они вряд ли заподозрят, что перед ними — одна из многочисленных моделей сражений НАТО. Здесь указаны боевое подразделение, количество операций, проведенных за время $t$, и тому подобные параметры. Несомненно, уровень сложности современных военных стратегий делает математику необходимым инструментом. С другой стороны, это неудивительно, учитывая, что высокий технологический уровень современного оружия требует использования сложнейших устройств, таких как большие компьютеры, сложные сети коммуникации и несколько контролирующих спутников. Сегодня уже не обязательно владеть азами геометрии или дифференциального исчисления, как требовалось раньше, но необходимо быть экспертами в области криптографии, теории вероятностей и теории игр, и на этом список не заканчивается. Математика приобретала все большее значение в военном образовании, особенно в инженерном деле. Во время Первой мировой войны, с появлением гидролокаторов и новых аэродинамических теорий, большинство технологий ждало появления математической базы. Это появление было таким ошеломляющим, что французский математик Эмиль Пикар (1856–1941), профессор по дифференциальному исчислению в Сорбонне, начал трево-

Его идея предупредительной атаки состояла в том, чтобы как можно скорее уничтожить военную мощь СССР, не дожидаясь провокаций и, по возможности, пока граждане Союза будут спать. При оценке такого подхода фон Неймана надо учитывать два аспекта: эмоциональный и рациональный. Первый относится к началу его жизни, когда семье ученого пришлось бежать из Будапешта от красного террора Белы Куна, и в глазах фон Неймана коммунизм получил черную метку. С другой стороны, ученый был рациональным математиком с холодным

житься, опасаясь, что в будущем студенты математики будут заниматься только прикладной математикой. Время показало, что его опасения были необоснованны.

**Военные маневры НАТО. Технический прогресс значительно изменил облик военных кораблей.**

умом, он думал в терминах стратегий и решений, которые находили выражение в числах, уравнениях, моделях и аксиомах. В таком сугубо рациональном смысле сценарий войны был сценарием игры, в которую он часами играл еще ребенком со своим братом Михалем, сидя перед доской с кригшпилем.

Фон Нейман был экспертом в теории игр, что, как мы уже видели, подразумевает способности принимать решения и определять стратегии. Эти два качества особенно ценятся на войне. Неудивительно, что список организаций (так или иначе относящихся к военной элите), которые консультировал фон Нейман, был очень длинным. Его часто критиковали за слишком большую приверженность военным интересам и за то, что математик его уровня тратит большую часть своего времени на решение вопросов, на первый взгляд очень далеких от чистой науки. В этом была большая доля правды, но необходимо также учесть, что именно в этих кругах, как в случае с корпорацией РЭНД, ученый мог получить все необходимые инструменты, прежде всего финансовые, чтобы свободно воплощать научные идеи, реализация которых в противном случае могла натолкнуться на серьезные препятствия. В сложившейся ситуации военные круги, движимые прагматическими мотивами, были более гибкими. Гораздо большей критики заслуживали академические организации, которые всегда с большой сдержанностью относились к новым проектам.

## ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННОГО

В период работы в РЭНД фон Нейман заинтересовался математической подоплекой на первый взгляд очень простой задачи — дилеммы заключенного. Однако она таила много сложностей и к тому же перекликалась со сценарием сдерживания ядерной гонки, над которым в то время велась интенсивная работа.

Когда Мерил Флад и Мелвин Дрешер, исследователи центра РЭНД, придумали эту простую игру, которую Альберт

## ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РЭНД

После окончания Второй мировой войны большинство ученых, работавших на службы безопасности США, вернулись на свои прежние рабочие места в университетах или поступили на работу в частные компании. В армии произошла самая настоящая утечка мозгов. Тогда в 1946 году военно-воздушными силами американской армии была основана корпорация РЭНД (RAND, Research And Development). В 1947 году она стала независимой от армии. Организация была создана как think tank — хранилище идей. Ее сотрудники должны были «думать о немыслимом», в ней развивались исследовательские проекты, спектр которых варьировался от межконтинентальных ракет до исландской фонетики. Фон Нейман был принят на работу в РЭНД в декабре 1948 года со специальным контрактом на 200 долларов в месяц, который не обязывал его даже присутствовать на месте. Его просто попросили, чтобы то время, которое он тратил на бритье каждое утро, он посвящал просмотру какого-либо проекта, над которым работал центр, и сообщал свое мнение о нем.

**Главное здание центра РЭНД на пляже Санта-Моники, 1958 год.**

Вильям Такер, еще один сотрудник этой организации, назвал дилеммой заключенного, они и представить себе не могли, что создали одну из главных задач теории игр.

Дилемма заключенного состоит в следующем. Два члена преступной группировки попали в тюрьму. У полиции есть основания подозревать, что они совершили преступление, за которое следует наказание в виде шести лет заключения, но у нее недостаточно доказательств. Без главной улики их могут осудить всего на год тюрьмы за меньшее преступление. Полиция предлагает им такой уговор: если один даст показания против другого, то его освободят, а второго приговорят к десяти годам. Если они оба обвинят друг друга, им обоим дадут по четыре года тюрьмы. Бандитов держат в раздельных камерах, чтобы ни один из них не знал, какое решение принял второй. Если мы назовем заключенных *A* и *B*, то суть ситуации можно отразить в следующей платежной матрице.

| | ***B* не обвиняет *A*** | ***B* обвиняет *A*** |
|---|---|---|
| ***A* не обвиняет *B*** | 1,1 | 10,0 |
| ***A* обвиняет *B*** | 0,10 | 4,4 |

Поскольку они не могут согласовать свои стратегии, принятие решений становится непростой задачей. Сначала кажется, что самым выигрышным поведением будет самое эгоистичное, которое учитывает интересы конкретного заключенного. Тогда в случае осуждения ему придется провести в тюрьме самое большое четыре года по сравнению с максимальным наказанием в десять лет, а если повезет и второй преступник воздержится от обвинения, то можно вообще избежать срока.

Такой ход мысли кажется довольно разумным, но надо иметь в виду, что второй заключенный рассуждает точно так же. Поэтому вполне вероятно, что в конце концов обоим дадут по четыре года. Эта стратегия может считаться доминантной. Тем не менее ясно, что это не самое лучшее решение, ведь если они оба откажутся давать показания друг против друга, то срок составит всего один год. Таким образом, лучшей стратегией будет кооперация, но это значит, что мы должны быть уверены в позиции нашего партнера, а гарантий у нас нет.

Существует целая область математики, изучающая подобные ситуации, которые считаются стратегическими играми. Игра начинается с числовой таблицы, иногда очень сложной, а стратегиями являются наилучшие из возможных ходов игроков. Если использовать холодный интеллект, теорию вероятностей, так называемое математическое ожидание и алгебру, то мы получим рациональные выводы, согласно которым для каждого игрока лучше всего не следовать эгоистическим побуждениям. То, что один игрок считает лучшим для себя вариантом, может таковым и не быть, если учитывать возможные действия остальных игроков. Очень часто идеальным решением, или оптимальной стратегией, будет кооперация. Так все получают максимальный возможный выигрыш с наименьшими потерями. Опытные данные показывают, что в дилемме заключенного игроки предпочитают обвинять, нежели доверять, и с точки зрения математики ошибаются.

Если вопрос о дилемме заключенного возникает в неформальной обстановке, например за обедом между друзьями, которые хотят немного поразмышлять за чашкой кофе, мы можем быть уверены в двух вещах: во-первых, размышлять они будут долго, а во-вторых, не придут ни к какому заключению. Дело в том, что у дилеммы заключенного нет удовлетворительного решения, так как эта ситуация больше похожа на парадокс, чем на логическую загадку. Два возможных варианта, которые кажутся правильными (оба кооперируют или оба обвиняют), очень трудно объяснить с рациональной точки зрения.

Мы знаем, что в ситуациях такого типа на принятие решения могут влиять самые разные факторы, например мораль или эмоции. Можно положиться на интуицию, довериться предсказаниям гадалки или просто кинуть кости и уповать на волю случая. Но в любом случае останется открытым вопрос: существует ли метод, позволяющий принять это решение рациональным способом? Можно ли придать этой задаче математический характер? Желание математизировать реальность, присущее фон Нейману, заставило его заинтересоваться дилеммой заключенного.

Интересно и даже в какой-то степени неизбежно отставить в сторону при рассмотрении этой задачи факторы морального толка («предавать товарища нехорошо» или «за такой выбор меня будет мучить совесть»), так как они еще больше запутывают и не помогают принять решение. Нечто похожее происходит с кооперативными стратегиями. Кооперация предпочтительней не из-за этического аспекта, который не относится к сфере математики: она просто является наилучшей стратегией для получения максимального выигрыша с минимальным риском в конкретной игре, в которой есть конфликт интересов.

Чтобы избежать такой путаницы, лучше всего представить дилемму как игру в казино, в которой можно выиграть или проиграть какое-то количество денег, а не как трагический рассказ, в котором идет речь о жизни людей. Такой метод предлагает Вильям Паундстоун в своей книге *Prisoner's dilemma* (*«Дилемма заключенного»*, 1992).

Речь идет об игре с двумя участниками, которая проходит всего один раз. Чтобы повторить ее, придется поменять обоих игроков. Единственное условие, которое стоит перед участниками, — одержать победу, как и в любой другой игре. Это кажется очевидным, но на самом деле нуждается в уточнении. Если игрок в покер хочет обмануть соперника с помощью блефа, нет смысла говорить, что это противоречит моральным принципам. Это глупо, ведь участники должны придерживаться правил без обмана и, главное, играть, чтобы выиграть. Такой подход особенно важен, когда теория игр выходит за рамки простого времяпрепровождения и применяется в военном сценарии.

Вернемся к дилемме в версии с казино: в ней участники играют за столом, под которым размещен электронный аппарат, невидимый противнику. Каждый игрок должен принять решение, сотрудничает он с соперником или нет. Крупье объявляет, в какой момент игроки могут нажимать на соответствующие кнопки. После того как установлен размер заклада, платежная матрица может иметь следующий вид.

## КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

В кооперативных играх участники преследуют общую цель, например выиграть выборы, улучшить управление компанией или повысить ее прибыль. Для достижения этой цели они объединяются в корпорации. Создается ситуация, обратная так называемым некооперативным, или антагонистическим, играм, в которых решающее значение имеет индивидуальная стратегия. Яркий пример обоих понятий можно найти в военных играх. Во время холодной войны существовало нестабильное равновесие между двумя мощными мировыми державами — СССР и США. Они вели антагонистическую игру с односторонними стратегиями. Было понятно, что такая некооперативная игра может иметь фатальные последствия для участников, и, таким образом, были заключены договоренности об остановке гонки ядерных вооружений.

**Пейнтбол — кооперативная игра, в которой симулируются военные действия.**

### Объединение ради победы

Примером кооперативных игр могут быть ролевые игры. Они похожи на театральную постановку, в которой участники играют роли вымышленных персонажей, следуя указаниям рассказчика, придумывающего сценарий, но игроки вольны решать, что им делать в установленных рамках. Таким же образом, если играть в домино каждый за себя, это будет некооперативная игра, если играть парами — кооперативная.

| | ***B* сотрудничает** | ***B* не сотрудничает** |
|---|---|---|
| ***A* сотрудничает** | (2, 2) | (0, 3) |
| ***A* не сотрудничает** | (3, 0) | (1, 1) |

Получается, что при кооперации каждый выигрывает 2 евро, если ни один не сотрудничает — по одному, если один сотрудничает, а второй нет, то первый не получает ничего, а второй — 3 евро. В последнем случае игрок, что называется, остается в дураках, и большая часть участников пытается избежать этого всеми силами.

Эта платежная матрица может иметь несколько вариантов, например проигрыши в ней могут обозначаться отрицательными числами. Это приблизило бы нас к дилемме заключенного в ее классической версии, но она может использоваться как модель для изучения дилеммы, если удовлетворяет следующим требованиям: один из результатов должен представлять собой приз (то есть когда оба игрока сотрудничают, оба получают 2 евро), другой — наказание (когда оба не сотрудничают), а третий (не сотрудничает только один) — предусматривать приз для одного из них с выигрышем больше, чем при обоюдной кооперации.

## ТЕОРИЯ АБСТРАКТНЫХ АВТОМАТОВ

Было бы ошибкой полагать, что после войны вся научная деятельность фон Неймана была сконцентрирована исключительно на военных проектах. Из его биографии ясно видно, что его ум никогда не был занят чем-то одним.

Одной из основных задач, над которыми фон Нейман работал в этот период своей жизни, был универсальный самовоспроизводящийся клеточный автомат. Эта задача затрагивала вопрос репродукции — великой загадки жизни. Ученый хотел доказать, что это явление подчиняется не таинственным законам, а более или менее простым математическим правилам — настоящему языку природы.

Универсальный автомат фон Неймана — это машина, состоящая из модуля, который при помощи четких инструкций и имеющихся материалов может смоделировать все что угодно, а также имеет необходимые инструкции для воспроизведения себя самого. Фон Нейману пришлось добавить одно условие, чтобы избежать так называемой бесконечной регрессии: где-то в машине должны содержаться инструкции, описывающие ее саму. Таким образом, эти инструкции должны были содержать другие инструкции, которые их описывают, и так далее. Но в любом случае машина не может иметь такую бесконечную регрессию. Чтобы решить эту проблему, фон Нейман добавил третий элемент — репродуктор инструкций. Таким образом, полная версия устройства состояла из конструктора, списка программ-инструкций и репродуктора. В первой фазе список программ-инструкций подвергался интерпретации, а во второй — просто копировался.

Для создания самовоспроизводящегося устройства в компьютере необходимо было сделать автомат, который не уступал бы машине Тьюринга. Теоретически для этого можно использовать логические выражения NOT-AND-OR (нет-и-или). Например, можно сделать выражение NOT с так называемым планерным ружьем Госпера, но эта схема слишком сложна, чтобы описывать ее здесь. Фон Нейман доказал, что при таких условиях клеточный автомат с 200 тысячами состояний смог бы самовоспроизводиться, однако его описание превышает наши вычислительные способности.

Если однажды клеточный автомат фон Неймана будет создан, это значит, что где-то появится робот, окруженный материалами, который примется за работу и по истечении определенного времени создаст свою точную копию. Потом их станет две, потом четыре и так далее в геометрической прогрессии. Однако фон Нейман не мог предвидеть того (и сегодня никто не может этого сделать), как эти роботы будут вести себя по отношению к людям. Это важный вопрос, ведь за короткое время количество роботов стало бы огромным, и их становилось бы все больше.

В 1948 году фон Нейман спроектировал универсальный конструктор. Эта машина, следуя заданным инструкциям, могла собрать другую машину из материалов, находящихся рядом. Нечто подобное мы можем наблюдать на любой роботизированной фабрике. Но ученый хотел пойти еще дальше и снабдить машину инструкциями и материалами, необходимыми для создания точной копии самой себя; другими словами, он хотел создать клеточный автомат. Природа, в которой мы живем, изобилует клеточными автоматами, ДНК — один из них. Любопытно, что фон Нейман — один из самых выдающихся теоретиков XX века — хотел преодолеть теорию с помощью своей самовоспроизводящейся машины, которую назвал «Кинематон».

Пока фон Нейман сражался с многочисленными техническими трудностями, возникшими при создании «Кинематона», его друг, американский математик польского происхождения Станислав Улам, дал ему хороший совет. Если фон Нейман хотел досконально изучить законы, на которых основывался этот процесс, ему надо было отложить в сторону ручную сборку и заняться виртуальной моделью. Тогда ученый изменил свою тактику и создал простую бесконечную матрицу, в которой можно было представить каждую клетку, как если бы перед нами лежал разграфленный листок, и каждая графа была бы занята. Все клетки должны иметь некое состояние, а их число должно быть конечным. В оригинальной модели фон Неймана для каждой клетки существовало 29 состояний. Идея заключалась в том, что, исходя из заданных правил, каждое состояние каким-то образом зависело от состояния соседних клеток и от своего предыдущего. Таким образом, система напоминала живые системы, по крайней мере в том смысле, что клетки могли меняться и входить в контакт с другими, находящимися в похожем или таком же состоянии. Итак, фон Нейман хотел исследовать очень сложную структуру при помощи очень простой модели — клеточных автоматов.

## КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ

Клеточный автомат — это математическая абстракция клеточных процессов, которые наблюдаются в живых организмах. Его можно определить как динамическую систему, состоящую

## РОБОТОТЕХНИКА

**Робот, играющий на фортепиано. Шанхайский музей науки и техники, Китай.**

Термин «робот», происходящий от чешского слова robota (подневольный труд), впервые появился в театральной пьесе *«Россумские универсальные роботы»* чешского драматурга Карела Чапека. Она была поставлена в январе 1921 года в Праге. Действие в ней разворачивается вокруг фабрики, на которой создают механических существ для службы человеку. В конце пьесы роботы уничтожают людей. Робототехника — прикладная наука, на основе которой при помощи кибернетики и технической инженерии можно построить машину, управляемую специальной программой и способную обращаться с предметами, а также в некоторой мере взаимодействовать с окружающей средой. Ее цель — замена людей на ряде однообразных, а также слишком тяжелых для человека или просто опасных операций. Тело робота состоит из механических элементов из металла или пластика и двигается благодаря сервомотору. Нервная система сформирована электропроводами, в венах течет смазывающее масло. Его мозг не просто похож на компьютер — это и есть компьютер. Однако часто встречается ошибочное представление о том, что робот должен походить на человека (в узком понимании посудомоечная машина — тоже робот). Робот должен отвечать трем основным характеристикам.

1. Его можно запрограммировать, как и компьютер.

2. Он должен быть машиной, способной выполнять конкретные действия в окружающей его среде.

3. Он должен быть гибким.

Третье свойство вытекает из двух предыдущих, так как, с одной стороны, подразумевает способность оперировать широким спектром программ, а с другой — взаимодействовать со средой разными способами.

**КИБЕРНЕТИКА**

Кибернетика — это наука, изучающая различные формы коммуникации, которые могут возникать между двумя механизмами, и законы, управляющие коммуникацией между человеком и машиной. Отцом кибернетики считается венгерский математик Норберт Винер (1894–1964). В 1948 году он написал книгу *«Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине»*, которая стала бестселлером и позволила автору улучшить свое — до этого нестабильное — материальное положение.

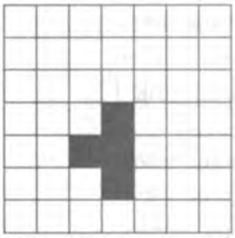
**Норберт Винер.**

из двух компонентов: пространства клетки и правил поведения. По определению клеточное пространство — это пространство фон Неймана, в котором его элементы, называемые клетками, находятся в состоянии, определяемом либо конечным числом значений $\{v_1, ..., v_n\}$, либо любым непрерывным значением. Это определение может показаться немного путаным, но его цель — показать, что даже если результат выглядит как очень простая игра, он не лишен математического формализма. Но чтобы выражаться понятнее, сведем рассуждения к простой формулировке, которая и используется в теоретических описаниях. Для начала пространство фон Неймана становится двумерным, чтобы его можно было представить на листке, в котором каждый квадратик обозначает клетку. Из двух множеств значений мы не будем рассматривать непрерывное множество, так как весь процесс происходит во внутренних механизмах компьютера, а они всегда работают с дискретными величинами. Из возможных множеств $\{v_1, ..., v_n\}$ этих дискретных значений оставим только два — {1, 0}. Первое означает, что клетка жива, второе — что она мертва. Мы также можем выбрать два разных цвета. Итак, возьмем лист бумаги в клетку и ограничим нашу зону работы, например, квадратом со стороной 7 клеток. Затем возьмем черный фломастер и закрасим клетки (см. рисунок 1 на следующей странице).

У нас появится пространство, в котором есть живые клетки, обозначенные черным цветом, и мертвые, обозначенные белым. Теперь остается только установить правила развития, то есть детально описать, как эти клетки будут развиваться в своей среде. Если вышеупомянутый рисунок представляет собой фазу 1, у нас должен быть какой-то критерий, чтобы перейти к фазе 2 и, разумеется, чтобы перейти от фазы 2456 к фазе 2457. Говоря математическим языком, нам нужен алгоритм, который, если известно состояние фазы $N$, позволяет сконфигурировать состояние фазы $N + 1$. Поскольку в нашей решетке на данный момент нет никаких странных элементов вроде пакменов или тому подобных, на каждую из наших клеток могут действовать только другие клетки из ее окрестности. Одна из самых простых окрестностей — это окрестность по сторонам света (север, юг, запад, восток); то есть клетка может взаимодействовать только с клетками, расположенными над ней, под ней или по сторонам от нее. В этом случае она называется окрестностью фон Неймана. Если к этому мы прибавим диагонали, то получим так называемую окрестность Мура. Становится понятно, что возможности определения окрестностей почти безграничны. Мы можем сказать, например, что влиять будут только клетки, которые находятся на определенном расстоянии $r$. Существуют очень сложные правила окрестностей, которые описываются посредством матричных функций, но мы их не будем рассматривать в этой книге. Начнем с вышеуказанного клеточного пространства и определим правила, которые действуют для окрестности Мура.

1. Клетки с четным количеством живых соседних клеток умирают.

РИС. 1



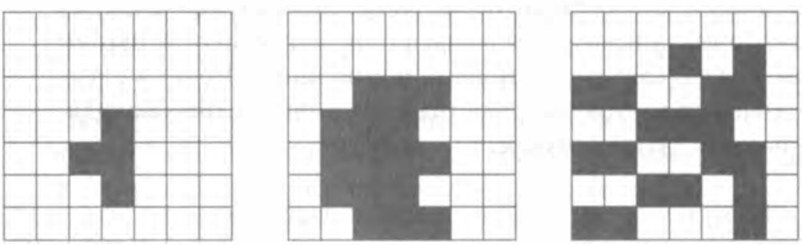
2. Клетки с нечетным количеством живых соседних клеток порождают живую клетку.

Таким образом, мы получим три фазы, показанные на рисунке 2.

Можно также начать с меньшего количества ячеек и установить другие правила. Несомненно, дойти до определенной фазы и наблюдать за результатом (существуют простые компьютерные программы, которые могут быстро показать нам фазу 1000) — интереснейшее занятие. Мы увидим удивительные фигуры и ситуации: можно создать устойчивые конфигурации, вымершие виды, натюрморты, хищников или структуры, которые двигаются в решетке, не теряя своей формы.

Это вариант игры «Жизнь», созданной британским математиком Джоном Хортоном Конвеем в 1970 году. Помимо того что это просто очень интересная игра, имеющая важное применение в математике, она может быть полезным инструментом в исследованиях и помогает понять некоторые сложные природные процессы, так как является мощной моделью, которую можно применить, например, при изучении влияния разлива нефти на морскую фауну.

РИС. 2



## ОТ МЕЧТЫ ЛЕЙБНИЦА К МЕЧТЕ ФОН НЕЙМАНА

Развитие человеческой мысли скрыто от нас, оно следует законам, которые пока не удалось выявить. Однако в истории науки были великие мыслители, считавшие, что если можно было бы обозначить идеи номерами и присвоить каждой свое число, то достаточно было бы произвести вычисления с этими числами, чтобы узнать, какие из них верные, а какие ложные. Собственно, это и было мечтой Готфрида Лейбница (1646–1716). Немецкий поэт Фридрих Гёльдерлин (1770–1843) однажды сказал: «Когда человек мечтает, он король, когда размышляет — нищий». Несомненно, Лейбниц очень походил на короля...

Тем не менее для таких научных деятелей, как Паскаль, Лейбниц или Декарт, склонных в своих размышлениях если не к прагматизму, то, по крайней мере, к некоей конкретике, размышлять означало воплощать свои идеи на практике. И в этот момент мечта могла обернуться кошмаром. Следовательно, нас не должно удивлять, что результаты их первых выводов воплощались в вычислительных машинах, ведь вычисление — одна из первых абстрактных операций, выполняемых человеческим разумом. К тому же время показало, что действие самых продвинутых «думающих» машин, которые мы способны сделать, основано на вычислениях по строго определенным правилам компьютерной алгебры. Эта сложная и очень специализированная область математики, появившаяся вместе с информатикой, начала зарождаться еще в сознании философов и математиков.

> Истина слишком сложна, нам дано лишь немного приблизиться к ней.
>
> **Джон фон Нейман**

Вычислительная машина, спроектированная Лейбницем, была сложнее машины Паскаля, так как могла не только складывать и вычитать, но и умножать, делить и извлекать квадратные корни. Между началом ее создания и днем, когда Лейбниц

## ИГРА «ЖИЗНЬ»

Интерактивное табло, на котором идет игра «Жизнь». Музей искусства Сан-Хосе, Калифорния.

Два специалиста по клеточным автоматам могли бы вести диалог такого рода.

— Я уже несколько недель работаю над «Жизнью 4555».

— Очень интересно. А я — над «Жизнью 5766». Ищу модель того, как распространяются пожары в лесах.

Чтобы этот разговор был понятен, надо знать значения этих четырех цифр. Первая обозначает минимальное количество клеток, которое должно окружать живую клетку для того, чтобы она не умерла. Вторая — то же самое, но наоборот: это максимальное число. Третья — это минимальное число живых клеток в окружении для того, чтобы у клетки была возможность вновь ожить. Четвертая и последняя — максимальное число соседних клеток для того, чтобы ожить. То, что сегодня называется игрой «Жизнь», является математической теорией, простой и очень любопытной. Ее возможное применение может быть теоретическим или практическим, например при изучении репродукции раковых клеток, зараженных деревьев в лесу, распространения пожаров или роста кристаллов.

увидел ее в собранном виде, прошло почти 23 года. Ученый дал ей говорящее название — Getrocknetsrechenmaschine (ступенчатая вычислительная машина). Действительно, она производила умножение путем последовательного сложения, но ее механизмы были слишком сложны технически для того времени, и она никогда не работала нормально. Несмотря на свою неудачу, Лейбниц посвятил себя размышлению над революционной идеей: если числа можно было бы представить на основании 2, это не только упростило бы механизмы машины, но и позволило бы применить к процессу вычисления бинарную логику.

По Лейбницу, мир делится на два разных уровня. Физический уровень погружен в пространство и время, события в нем развиваются по своим законам (у всего есть следствие и причина), и его явления объясняются с помощью механики. Второй уровень — метафизический, в нем нет ни времени, ни пространства, ни причин, ни следствий, только числа. Сущность этого уровня Лейбниц ясно описал в следующем отрывке:

> «Рассуждая с метафизической точки зрения, мы не более правы, когда говорим, что корабль движет воду и создает воронки, чем когда утверждаем, что вода сама создает их и вследствие этого корабль движется в соответствии с ними».

Исходя из этого Лейбниц пытался найти универсальный язык, который включал бы все термины метафизического мира и способы их взаимодействия, чтобы породить новые истины и иметь возможность контролировать этот механизм взаимодействия. Благодаря работе над такой задачей Лейбниц стал считаться отцом символической логики. Он предложил присвоить простые числа простым терминам и их произведения — всем остальным. Для воплощения этой идеи на практике Лейбниц создал алгебру всего с двумя связками — отрицанием и соединением, — заложив основы бинарной логики.

Воплотилась ли мечта Лейбница в жизнь? Некоторые ее аспекты — да, а некоторые, возможно, не воплотятся никогда. Британский математик Ада Лавлейс (1815–1852) — первый программист в истории — возможно, знала об амбициозном замысле Лейбница, так как однажды, говоря о компьютерах, заметила:

> «Аналитическая машина не имеет претензий на создание чего-либо. Она может выполнить все что угодно — при условии, что знает верный способ. Она может провести анализ, но не в состоянии вскрыть аналитические связи или открыть истины. Ее потенциал заключается в том, чтобы помочь нам сделать возможным то, о чем у нас уже есть первоначальные знания».

Лейбниц мечтал о машине, которая сможет соперничать хотя бы с частью человеческого разума. Фон Нейман же мечтал о создании универсального языка, с помощью которого это было бы возможным.

## ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

В 1943 году двое американских ученых — нейролог и кибернетик Уоррен Маккалок (1898–1969) и логик Уолтер Питтс (1923–1969) — создали вычислительную модель, симулирующую работу нервной системы. В ней существовали узлы, связанные друг с другом, как аксоны связывают дендриты в биологических системах. Так появились искусственные нейронные сети (ANN, от Artificial Neural Networks). Фон Нейман работал над расширением и развитием сетей, предложенных Маккалоком и Питтсом.

ANN в основном делятся на два типа: биологические, которые пытаются воспроизвести такие свойства, как слух или зрение, и ориентированные на практическое применение, но мало напоминающие биологические системы. Джон фон Нейман подсчитал, какое примерно количество информации сохраняется в нашей памяти за среднюю по продолжительности жизнь. В результате он получил число, равное $2{,}8 \cdot 10^{20}$ (280 000 000 000 000 000 000 бит), что очень сложно себе представить, как бы мы ни старались.

Фон Нейман рассматривал нервные клетки как электронные устройства, способные порождать биты: 1 — когда они порождают электрический импульс и 0 — когда находятся в состоянии покоя. Эта система чрезвычайно сложна и сочетает в себе электрохимические и механические процессы, но ее основа должна включать логическую и арифметическую части, обе из которых одинаково важны. Из этого ученый сделал вывод, что мозг можно рассматривать так же, как и современные вычислительные машины, и возвращался к логической структуре как к инструменту для создания модели. Он мог бы применить такую модель и к языку, в неформальном его понимании. По этому поводу фон Нейман сделал заявление, в котором проявился его онтологический подход к математике. Дословно он сказал, что «такие языки, как греческий или санскрит, представляют собой факты истории, а не абсолютную логическую необходимость». В первом случае речь идет о процессе обучения, выполняемом центральной нервной системой, в то время как во втором — о процессе, являющемся частью самой структуры, а он должен иметь тесную связь с математикой. Это все равно что заявить, что математика не «придумана» людьми, а является частью самой их природы.

В декабре 1949 года в университете штата Иллинойс фон Нейман прочел лекцию Theory and Organization of Complicated Automata («Теория и организация клеточных автоматов»). Схема была следующей: если рассматривать мозг как вычислительную машину, то когда мы используем его для коммуникации с другим человеком, мы делаем это при помощи вторичного языка, который является продуктом первичного языка, хранящегося в нервной системе. Эти два языка изначально могут очень отличаться друг от друга.

Точность, эффективность и глубина математики заставляют предположить, что первичный язык нашей нервной системы должен быть к ней очень близок. То есть наш разум — по крайней мере изначально — имеет математическую природу. Фон Нейман изложил все эти результаты в рукописи, которую не успел закончить и которая была опубликована в незавершенном виде после его смерти под названием *The Computer and the Brain* (*«Компьютер и мозг»*).

## ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ

Начиная с 1950-х годов фон Нейман консультировал множество государственных и частных компаний. Он был членом комитета по консультированию Национальной баллистической лаборатории в Мэриленде, артиллерийского отдела военно-

## БИОНИКА

Бионическая рука.

Развитие кибернетики привело к появлению бионики — науки, которая занимается симуляцией действий человека и животных. В ней воплотились достижения биологии и электроники, позволившие исследовать принципы, по которым устроены живые существа. Сегодня бионику применяют в создании моделей молекул белка и нуклеиновых кислот. Несмотря на большой технический прогресс в области бионики, пока выполнена лишь малая часть из намеченного в 1950-е годы. Можно даже сказать, что бионика стала провалом по сравнению с информатикой. Но это и неудивительно. Возьмем для примера хотя бы сетчатку глаза, выполняющую до 10 миллионов распознаваний в секунду,— для ее воссоздания требуется компьютер, обрабатывающий более миллиарда инструкций в секунду. Все биологическое аппаратное обеспечение, обрабатывающее изображение в сетчатке, весит около 20 миллиграмм, а весь мозг — примерно 1500. Для воссоздания их деятельности потребовалась бы машина размером с персональный компьютер, способный обрабатывать более 100 миллиардов инструкций в секунду. И это притом, что на сегодняшний день способности ПК могут сравняться лишь с мозгом маленьких аквариумных рыбок.

морского флота США в Вашингтоне, Лос-Аламосской лаборатории, директором проекта по разработке электронного компьютера Института перспективных исследований Принстона, проекта по особому оружию Вооруженных сил США и группы оценки систем в той же организации. Начиная с 1952 года ученый стал членом Комиссии по атомной энергии США, а в 1955 году принес присягу как член этой комиссии по указу президента страны Дуайта Эйзенхауэра. Его способности работать и принимать решения в очень сложных условиях привели к тому, что фон Нейман посвящал много времени занятиям, далеким от чистой науки.

Финансовое положение ученого было довольно хорошим: только от Института перспективных исследований Принстона он получал 12 500 долларов в год. Он жил со своей матерью, женой Кларой и дочерью Мариной в большом доме под номером 26 по Весткут-роад и часто устраивал светские рауты, на которых присутствовали разные знаменитости. Сам фон Нейман тоже был известным персонажем: средства массовой информации, в том числе радио и телевидение, часто просили его прокомментировать какую-либо тему, иногда даже вмешиваясь в его личную жизнь.

Летом 1955 года ученый начал жаловаться на сильные боли в левом плече. Поначалу он подумал, что причиной тому было его недавнее падение, но боль, которая должна была бы отступить через несколько дней, все не проходила. Фон Нейману пришлось сделать хирургическую операцию. Именно тогда ему был поставлен диагноз — рак кости. Позже выяснилось, что это был вторичный рак, вызванный раком простаты. Самой популярной версией причины болезни было то, что фон Нейман не предпринимал необходимых мер безопасности, предусмотренных протоколом, когда работал в радиоактивной среде. Многие намекали: он был немного самоуверенным и считал, что ничто не сможет ему навредить, даже облучение, которому он подвергался, как и большинство участников Манхэттенского проекта. Действительно, не один он заболел раком.

Не будем описывать, как чувствует себя человек, которому поставили диагноз «рак в последней стадии». Врачи давали ему полтора года жизни. В 1955 году болезнь поразила спинной мозг ученого, и ему пришлось пересесть в инвалидное кресло. Фон Нейману предоставили все необходимые условия для того, чтобы он продолжал консультационную деятельность и закончил некоторые свои проекты. Среди них были создание баллистической ракеты и более научная задача — разработка искусственного мозга, который смог бы постепенно, маленькими шагами, приблизиться к мозгу человека.

В последний раз фон Нейман появился на публике в феврале 1956 года — в Белом доме, когда президент Эйзенхауэр вручил ему медаль Свободы (Medal of Freedom). После этого он уже не выходил из дома. На конец марта того года была запланирована авторитетная конференция Силлмана в Йельском университете. Фон Нейман был приглашен выступить на ней и рассказать о своей работе по взаимодействию компьютера и мозга. Поскольку сам ученый не мог принять в ней участие, университет предложил, чтобы кто-то другой прочел текст выступления за него. Однако фон Нейману не удалось завершить эту последнюю задачу, и рукопись так и не была обнародована. В апреле 1956 года он был госпитализирован в больницу Уолтера Рида, из которой больше не вышел. Несмотря на плохое состояние здоровья, фон Нейман попросил оборудовать ему временный кабинет, где он мог бы продолжить работу.

Из-за сильных болей врачам пришлось давать ученому большие дозы морфина, что отразилось на его мыслительных способностях, и это постепенное ухудшение интеллекта было самым нестерпимым следствием для фон Неймана. Незадолго до смерти он удивил всех, обратившись к религии: до сих пор ученый был убежденным агностиком. Возможно, фон Нейман искал утешения, которого нигде больше не мог найти. Но все было бесполезно, поскольку, по свидетельству близких, на протяжении последнего года его дни и ночи были непрекращающейся адской мукой.

Джон фон Нейман умер в Вашингтоне 8 февраля 1957 года в возрасте 54 лет.

Вы будите меня среди ночи, чтобы сказать, что я прав? Будите, если я ошибаюсь!

**Джон фон Нейман**

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЗГЛЯДЫ ФОН НЕЙМАНА

В математике можно провести разделение на чистую науку и прикладную. Сегодня в большинстве университетов они считаются разными дисциплинами, но так было не всегда. В начале XX века технический прогресс требовал от инженеров все большего использования математики и если не создания, то по крайней мере адаптации различных математических инструментов к их работе. С другой стороны, новые открытия, которые произвели революцию в физике (главным образом теория относительности и квантовая механика), породили математическую физику — самостоятельную дисциплину на границе чистой и прикладной математики. Хотя это не всегда признается, но обычно между чистыми и прикладными науками существует некоторая дистанция. В этом контексте термин «чистая» можно понимать в самом буквальном смысле. По мнению пуристов, теоретические исследования не должны зависеть от материальных потребностей окружающего мира. Случай фон Неймана действительно уникален, поскольку его гений проявился как в чистой теории, так и в создании математических инструментов и даже механических устройств для решения вполне конкретных задач. Ему были одинаково подвластны обе области. Ученый занимался такими задачами чистой математики, как аксиоматизация теории множеств и квантовая механика, а также получил прекрасные результаты в таких земных вопросах, как экономическая теория, баллистика и проектирование взрывателя атомной бомбы. Немногие ученые могли похвастаться подобной универсальностью, которой фон Нейман посвятил любопытные размышления в своей статье *The Mathematician* (*«Математик»*). Она была опубликована в полном собрании его сочинений, и в ней говорится о двойственной природе математической науки, по отношению к которой фон Нейман в конце концов занимает четкую позицию.

Я ехал по дороге, деревья справа выстраивались в идеально правильную линию на скорости 60 км/час. Вдруг одно из них встало прямо передо мной.

**Джон фон Нейман**

Кажется, что из-за высокого уровня абстракции чистая математика может быть очень далека от того, что мы называем реальностью. Однако фон Нейман утверждал, что в математике всегда присутствует эмпирический зародыш, то есть она всегда основывается на каком-либо прямом реальном опыте. Он приводил два примера. Первый — геометрия, дисциплина, вместе с которой родилась математика. Сама этимология этого слова является достаточным доказательством, так как подразумевает измерение предметов. Аксиоматизация, проведенная Евклидом, отдаляет ее от эмпиризма и превращает в чистую науку. Многовековая проблема пятого постулата объясняется, по мнению фон Неймана, тем, что это единственный из всех пяти постулатов, в котором появляется бесконечное пространство, далекое от нашего опыта. Оно вновь находит свое место в реальности с момента использования неевклидовой геометрии в таких областях физики, как, например, теория всеобщей относительности. Второй пример — исчисление (исходная точка современной математики), зародившееся в трудах немецкого астронома и математика Иоганна Кеплера (1571–1630), когда тот пытался вычислить объемы фигур с изогнутыми поверхностями, что в конце концов привело к появлению понятия интегралов.

Фон Нейман привел и третий пример, в котором углублялся в область логики и философии. Может показаться, что в них нет ничего эмпирического, как в случае с теорией множеств, заставившей пересмотреть основания математики. От таких абстрактных систем можно ожидать абсолютной строгости, которая развеивает и тень сомнения по поводу истинности устанавливаемых истин. И тем не менее теоремы Гёделя нанесли удар математике и не оставили ей шанса на обретение непротиворечивых логических оснований. Перед лицом этого

ВВЕРХУ:
**16 февраля 1956 года президент Дуайт Эйзенхауэр наградил фон Неймана, члена Комиссии по атомной энергии, медалью Свободы за его ценный вклад в работу над безопасностью США.**

ВНИЗУ:
**Фон Нейман читает лекцию о своей работе над вычислительными машинами в Американском философском обществе.**

отрицания непротиворечивости фон Нейман предложил принимать математику такой, какая она есть, — как реальность, которую мы исследуем, так же как мы принимаем существование электрона, — а это в каком-то смысле возвращает данной науке ее эмпирический характер. Дословно он сказал следующее:

> «Многие из лучших математических открытий вдохновлены опытом, и с трудом можно представить себе существование строгого математического понятия, неизменного и отделенного от всего человеческого опыта».

Впоследствии фон Нейман утверждал, что, напротив, перед математикой стоит риск вырождения. Он сравнил математику и физику. Последняя функционирует в гораздо более узких областях и имеет гораздо меньше ответвлений. Из этого вытекают два важных следствия. Во-первых, теоретический физик потенциально может иметь общие сведения, которые позволяют ему иметь представление по крайней мере о половине всего познаваемого в предмете его изучения, в то время как профессиональный математик, например сам фон Нейман, едва ли может надеяться на то, что знает хотя бы о четверти. А сегодня этот объем, несомненно, существенно сократился. Второй аспект относится к самой природе исследовательской работы. Перед лицом проблемы физик чувствует себя обязанным найти решение, так как обычно она тормозит развитие всей теории, и ученый не может обойти ее вниманием. Для математика же дела обстоят по-другому. Если он не может найти решение какой-либо проблемы, он просто отложит ее и перейдет к другой — математическая теория от этого не пострадает. Фон Нейман даже утверждал, что выбор конкретной задачи определяется исключительно эстетическими вкусами.

В конце статьи он предупреждал об опасности того, что математика может слишком далеко отойти от своих источников. Слишком узкая специализация абстрактной математики и ее постоянное отдаление от реальности могут привести к вырождению. Фон Нейман писал:

«В любом случае, если дело дойдет до этой точки, мне кажется, что единственным спасением будет возвращение к источнику: к введению более или менее эмпирических идей. Я убежден, что это необходимое условие для того, чтобы математика сохраняла свою свежесть и жизнеспособность, и что оно будет действенным и в будущем».

В наше время создается порядка 200 тысяч математических теорем в год. Разумеется, никто не в состоянии проверить даже малую часть тех истин, которые они предлагают. Прогнозы фон Неймана сбылись, причем в своей худшей части.

# Список рекомендуемой литературы


ASPRAY, W., *John von Neumann y los orígenes de la computación moderna*, Barcelona, Gedisa, 1993.

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

DAVIS, M.D., *Teoría del juego*, Madrid, Alianza Universidad, 1977.

HEIMS, S.J., *J. von Neumann y N. Wiener*, Barcelona, Editorial Salvat, 1986.

ISRAEL, G. y MILLÁN GASCA, A., *El mundo como un juego matemático*, Tres Cantos (Madrid), Nivola, 2001.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Universidad, 1999.

MOSTERÍN, J., *Los lógicos*, Madrid, Espasa Calpe, 2000.

NEUMANN, J. von, *El ordenador y el cerebro*, Barcelona, Antoni Bosch editor, 1999. —: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, Madrid, Instituto de Matemáticas Jorge Juan, 1949.

ODIFREDDI, P., *La matemática del siglo XX*, Madrid, Katz Barpal Editores, 2006.

PEÑA, R., *De Euclides a Java: Historia de los algoritmos y de los lenguajes de programación*, Madrid, Nivola, 2006.

POUNDSTONE, W., *El dilema del prisionero*, Madrid, Alianza, 2006.

STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

# Указатель

ДЛЯ ЗАМЕТОК 

**Наука. Величайшие теории**
**Выпуск № 35, 2015**
**Еженедельное издание**

РОССИЯ
**Издатель, учредитель, редакция:**
ООО «Де Агостини», Россия
**Юридический адрес:** Россия, 105066, г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 3, стр. 1
*Письма читателей по данному адресу не принимаются.*

**Генеральный директор:** Николаос Скилакис
**Главный редактор**: Анастасия Жаркова
**Старший редактор:** Дарья Клинг
**Финансовый директор**: Полина Быстрова
**Коммерческий директор:** Александр Якутов
**Менеджер по маркетингу:** Михаил Ткачук
**Менеджер по продукту:** Надежда Кораблёва

**Для заказа пропущенных выпусков и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, обращайтесь по телефону «горячей линии» в Москве:**
**☎ 8-495-660-02-02**
**Телефон бесплатной «горячей линии» для читателей России:**
**☎ 8-800-200-02-01**

**Адрес для писем читателей:**
Россия, 600001, г. Владимир, а/я 30, «Де Агостини», «Наука. Величайшие теории»
*Пожалуйста, указывайте в письмах свои контактные данные для обратной связи (телефон или e-mail).*

**Распространение:** ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

Свидетельство о регистрации СМИ в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-56146 от 15.11.2013

УКРАИНА
**Издатель и учредитель:**
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
**Юридический адрес:**
01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского, 119
Генеральный директор: Екатерина Клименко

**Для заказа пропущенных выпусков и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в Украине:**
**☎ 0-800-500-8-40**
**Адрес для писем читателей:**
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Наука. Величайшие теории»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Свидетельство о регистрации печатного СМИ Государственной регистрационной службой Украины
КВ № 20525-10325Р от 13.02.2014

БЕЛАРУСЬ
**Импортер и дистрибьютор в РБ:**
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, 48а, литер 8/к, тел./факс: + 375 (17) 331 94 41
**Телефон «горячей линии» в РБ:**
**☎ + 375 17 279-87-87**
**(пн-пт, 9.00–21.00)**
**Адрес для писем читателей:**
Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Наука. Величайшие теории»

КАЗАХСТАН
**Распространение:**
ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право изменять розничную цену выпусков. Издатель оставляет за собой право изменять последовательность выпусков и их содержание.

**Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат»**
**150049, Ярославль, ул. Свободы, 97**
Формат 70 х 100 / 16.
Гарнитура Petersburg
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 6,804.
Тираж: 20 000 экз.
Заказ № 1509980.



ISSN 2409-0069

12+ Данный знак информационной продукции размещен в соответствии с требованиями Федерального закона от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».

Коллекция для взрослых, не подлежит обязательному подтверждению соответствия единым требованиям установленным Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности продукции, предназначенной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011 от 23 сентября 2011 г. № 797

*Дата выхода в России 05.09.2015*

Джон фон Нейман был одним из самых выдающихся математиков нашего времени. Он создал архитектуру современных компьютеров и теорию игр — область математической науки, спектр применения которой варьируется от политики до экономики и биологии, а также провел аксиоматизацию квантовой механики. Многие современники считали его самым блестящим ученым XX века.

ISSN 2409-0069
00035
9 772409 006778



12+

Рекомендуемая розничная цена: 289 руб.