

А.Х. Мирзаджанзаде

М.М. Хасанов

Р.Н. Бахтизин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕФТЕГАЗОДОБЫЧИ

нелинейность
неравновесность
неопределенность



Москва ♦ Ижевск

2004

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Рецензент

д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. РАН М.А. Ильгамов

Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н.

Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 368 стр.

Рассмотрены проблемы моделирования, контроля и управления технологическими процессами, связанными с движением структурированных неоднородных жидкостей со сложными (неравновесными и нелинейными) характеристиками. Показано, что при описании таких сред необходимо использовать представления теории самоорганизации, отражающие наиболее общие свойства сложных природных объектов.

Из-за отсутствия надежных теоретических предпосылок модели сложных систем имеют, как правило, идентификационный характер. В связи с этим часть книги посвящена рассмотрению методов и примеров решения обратных задач нефтепромысловой механики.

При управлении сложными системами часто приходится сталкиваться с недостатком информации, поэтому в книгу введена глава о методах моделирования и принятия решений в условиях неопределенности.

Предлагаемый материал имеет междисциплинарный характер, в связи с чем первые главы содержат доступное широким массам читателей вводное изложение основ теории самоорганизации и теории решения обратных задач.

Книга предназначена для инженеров, научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся проблемами моделирования сложных технологических процессов.

ISBN 5-93972-328-4

© А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин, 2004

© Институт компьютерных исследований, 2004

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Содержание

Введение.....	5
Глава 1. Теория самоорганизации и сложные системы	13
1.1. Фракталы.....	14
1.2. Детерминированный хаос	28
1.3. Репликации нелинейной динамики.....	45
1.4. Применение фрактальных характеристик для контроля и управления технологическими процессами.....	58
1.5. Управление процессами нефтегазодобычи с помощью малых физических полей	74
Библиографический список к главе 1	83
Глава 2. Обратные задачи нефтегазодобычи.....	86
2.1. Методы решения обратных коэффициентных задач.....	90
2.2. Регуляризация некорректно поставленных задач.....	112
2.3. Выбор сложности идентифицируемой модели.....	114
2.4. Нечеткие алгоритмы решения обратных задач.....	123
2.5. Оценка начальных запасов газовых месторождений	130
2.6. Регуляризация методов обработки кривых восстановления давления.....	139
2.7. Оценка извлекаемых запасов нефти на основе феноменологических моделей.....	146
2.8. О методах идентификации модели упругого пласта.....	153
2.9. Оценка добывных возможностей скважин по данным нормальной эксплуатации	160
Библиографический список к главе 2	169
Глава 3. Моделирование движения сложных сред.....	172
3.1. Описание нестационарных процессов в неньютоновских средах	172
3.2. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации.....	177
3.3. Масштабная инвариантность временных иерархий в процессах релаксации вязкоупругих сред	180
3.4. Моделирование нестационарной фильтрации в пластах с фрактальной структурой	192
3.5. О колебаниях расхода при фильтрации полимерных растворов ..	200
3.6. О фильтрационных характеристиках с учетом сорбционной способности	204
3.7. Метод построения оценок решения уравнений фильтрации газированной жидкости	212
3.8. Периодические и стохастические автоколебания в ротационных вискозиметрах	218
3.9. Исследование устойчивости работы штангового насоса.....	226
Библиографический список к главе 3	234

Глава 4. Процессы самоорганизации в газожидкостных системах вблизи давления насыщения.....	238
4.1. Исследование реологических свойств газожидкостных систем вблизи давления насыщения акустическими методами	239
4.2. Изучение свойств газожидкостных смесей в предпереходных состояниях	245
4.3. Процессы зародышеобразования в газоконденсатных системах..	256
4.4. Стохастические колебания при течении жидкостей с зародышами газа	261
4.5. Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа	270
Библиографический список к главе 4	279
Глава 5. Моделирование и принятие решений в условиях неопределенности	280
5.1. Безэталонное измерение и идентификация с помощью порядковых статистик	281
5.2. Учет априорной информации с помощью Паде-аппроксимаций .	296
5.3. Метод асимптотических координат	307
5.4. Гиперболические законы распределения	321
5.5. Нечеткие алгоритмы принятия решений	337
5.6. Принятие решений в условиях неопределенности как игра с природой	343
5.7. Системный анализ процессов разработки нефтяных месторождений.....	350
5.8. Синергетика принятия решений.....	359
Библиографический список к главе 5	365

*В родстве со всем, что есть, уверясь
И знаясь с будущим в быту,
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту.
Но мы пощажены не будем,
Когда ее не утаим.
Она всего нужнее людям,
Но сложное понятней им.*

Б.Л. Пастернак

ВВЕДЕНИЕ

Вечная загадка мира – его познаваемость.

А. Эйнштейн

Задачи контроля и управления технологическими процессами часто приводят к необходимости моделирования движения структурированных неоднородных сред, характеризующихся сложными (неравновесными и нелинейными) реологическими свойствами. Это типично, например, для процессов нефтегазодобычи, связанных с фильтрацией и движением по трубам таких жидкостей, как парафинистые и асфальтено-смолистые нефти, нефтеводогазовые смеси, буровые растворы, растворы полимеров и поверхностно-активных веществ.

Как правило, сведения о свойствах отдельных элементов структурированных сред и особенностях процессов взаимодействия между ними отсутствуют или же получение их затруднительно. Поэтому для изучения кооперативных эффектов, имеющих место при движении реофизически сложных жидкостей, целесообразно использовать представления теории самоорганизации, отражающие наиболее общие свойства поведения сложных систем. В этой связи уместно вспомнить высказывание К. Гельвеция: «Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов».

Теория самоорганизации изучает поведение сложных систем, условия их устойчивости, природу неустойчивостей и эволюцию систем вдали от термодинамического равновесия. Немецкий физик Г. Хаген предложил для этой науки название *синергетика* (от греческого *sinergia* – совместное действие, сотрудничество).

Методы синергетики, представляющие собой не что иное, как методы нелинейной физики, дают возможность описать многие процессы, наблюдающиеся в системах, внешне не имеющих ничего общего друг с другом, с помощью одних и тех же математических моделей, число которых относительно невелико.

Таким образом, синергетика предоставляет нам некоторые *veritates aeternae et universales* (вечные истины и универсалии), существование которых признавали схоластики.

Авторы считают, что необходимо широкое внедрение идей синергетики в теорию и практику реофизически сложных сред. Как говорил Н. Винер, «важные исследования задерживаются из-за того, что в той или иной области неизвестны результаты, уже давно ставшие классическими в смежной области».

В книге приводятся примеры синергетического подхода в самых различных науках – от физики до социологии. Подчеркнем, что это – не результат эклектичной «разбросанности» авторов, а желание убедить читателя в эффективности синергетики как универсального средства для моделирования и выработки стратегии управления.

Усложнение физического содержания моделей за счет учета нелинейности, неравновесности и неоднородности, присущих реальным системам, приводит к выявлению новых синергетических эффектов (усиление, потеря устойчивости с возникновением колебаний, образование упорядоченных структур и т. д.), наличие которых подтверждается специально поставленными экспериментами и позволяет предложить новые методы контроля и управления сложными природными системами.

Опыт, полученный нами и нашими коллегами, убедительно показал, что разумное (с привлечением здравого смысла) усложнение моделей позволяет раскрыть дополнительные возможности в разработке новых технологий. Однако цель, которую преследуют авторы, – не построение изоциально сложных моделей, а выявление новых, практически полезных эффектов. Хотя М. Фарадей и предупреждал, что «лекции, которые на самом деле учат, не могут быть популярными», авторы стремились максимально, где это возможно, упростить изложение.

Интересы авторов лежат в области нефтегазодобычи, поэтому изложение в основном ведется на примере соответствующих задач, однако рассмотренные в монографии подходы имеют более общий характер и могут быть с успехом использованы в самых разных областях науки.

Отметим, что развитие плодотворных идей синергетики в применении к системам нефтегазодобычи в настоящее время привело к созданию, под руководством одного из авторов, новой отрасли науки – реотехнологии, занимающейся вопросами поиска эффективных средств и способов добычи, транспорта и хранения нефти путем целенаправленного использования нелинейных и неравновесных реологических и физико-химических свойств сред, взаимодействующих с физическими полями с проявлением синергетических эффектов.

Некоторые исследователи до сих пор убеждены, что описание процессов нефтедобычи можно проводить только на основе дифференциальных уравнений движения жидкостей и газов в пористых средах и трубах.

Однако такой подход не позволяет выявить многие существенные свойства пласта. Как всякие большие системы, объекты нефтегазодобычи требуют использования целой иерархии моделей – от дифференциальных до интегральных, от детерминированных до адаптивных, – способных описать не только различные уровни организации систем, но и взаимодействие между этими уровнями. В монографии показаны некоторые возможные «подступы» к решению этого сложнейшего клубка задач. Тем самым эта книга может оказать некоторую помощь в достойной встрече обрушившегося на нас в настоящее время «девятого вала» компьютеризации систем управления технологическими процессами нефтегазодобычи.

Исследования последних лет показывают, что явления в средах со сложной неупорядоченной структурой часто обнаруживают масштабную инвариантность (фрактальность) пространственных и временных свойств. Это обстоятельство позволяет выработать некоторые общие методы моделирования сложно построенных сред и в ряде случаев облегчает описание протекающих в них процессов.

В связи с этим мы сочли необходимым в первой главе работы подробно рассмотреть основные представления о фракталах и привести примеры использования фрактальных характеристик при анализе объектов нефтегазодобычи.

Одним из самых интересных и важных разделов синергетики является теория так называемого динамического хаоса. В настоящее время изучен целый класс систем, которые в некоторых областях фазового пространства, называемых «странными аттракторами», проявляют хаотические свойства. *(Напомним, что аттракторами называются участки фазового пространства, притягивающие к себе траектории движения. Так, поскольку в бывшем СССР все пути вели в г. Москву, то этот город можно было назвать аттрактором. Сейчас, в результате многих перестроечных лет, произошла бифуркация – Москва скорее напоминает странный аттрактор.)*

В монографии на ряде конкретных примеров показано, что проявление хаотического поведения имеет место и при движении реофизически сложных сред.

При анализе промысловой информации принято использовать очищенные, сглаженные сигналы, предполагая, что хаотическая составляющая представляет собой только помеху. Однако рассмотренные примеры показывают, что случайные колебания, возникающие в нефтегазодобыче, часто имеют детерминированный характер. Они порождаются самой системой и поэтому могут служить источником информации о ее внутренних характеристиках.

Количественной мерой, характеризующей состояния динамических систем нефтегазодобычи, может служить фрактальная размерность странного аттрактора. Нижняя оценка этой величины определяется путем вы-

числения корреляционной размерности по известной методике Паккарда–Такенса. Отметим, что процедура Паккарда–Такенса позволяет, кроме всего прочего, идентифицировать, каким является источник случайных сигналов – детерминированным или «шумовым». Если диагностируется детерминированный хаос, то это означает, что система управляема, т. е. что некоторым изменением параметров можно упорядочить ее движение.

Как показывает анализ, графики временных рядов замеров, снятых при нормальной работе объектов нефтегазодобычи, часто имеют фрактальную структуру (наподобие береговой линии), что, по-видимому, является следствием пространственно-временной фрактальности явлений, определяющих эволюцию рассматриваемых систем. Исходя из этого, предложено использовать фрактальные характеристики временных рядов замеров – размерность Хаусдорфа и показатель Херста – в качестве диагностических критериев, определяющих состояние объектов управления.

Теория самоорганизации показывает, что траектория в фазовом пространстве, описывающая эволюцию системы со сложно организованной внутренней структурой, оказывается очень чувствительной к малым возмущениям, обладая многими точками бифуркации.

В такой ситуации резко возрастает роль малых величин и эффектов, которые, будучи задействованы вовремя, позволяют управлять процессами самоорганизации, направляя их желательным образом (как маленький «целенаправленный» ослик, который, будучи привязан к хвосту огромного буйствующего быка, может незаметно привести его к нужному для ослика месту). Малые эффекты играют роль спускового крючка, запускающего в действие скрытые резервы систем. В этом механизме заключается причина часто наблюдаемого, но труднообъяснимого влияния малых физических полей на технологические процессы. В связи с отмеченным нами приводится ряд примеров использования физических полей в нефтегазодобыче.

Из-за отсутствия надежных теоретических предпосылок модели сложных систем имеют, как правило, *идентификационный* характер. Это означает, что структура моделей и их параметры восстанавливаются (как характеристики «черного ящика») на основе анализа промышленно-экспериментальной информации путем постановки и решения обратных задач.

Проблема заключается в том, что многие обратные задачи являются некорректно поставленными из-за неустойчивости их решений относительно неизбежных погрешностей замеров. Для преодоления этого затруднения необходимо создавать регуляризующие (т. е. помехоустойчивые) алгоритмы идентификации математических моделей технологических процессов.

Во второй главе монографии рассмотрены наиболее часто встречающиеся типы обратных задач. Опыт практических расчетов позволил авторам найти ряд эффективных алгоритмов решения обратных задач, описание которых приводится в книге.

Как показывает опыт, излишнее усложнение модели может привести к неустойчивости алгоритмов идентификации и лишить идентификационную модель предсказательной силы. Здесь должен быть применен известный принцип оккамистов: «*entia praeter necessitatem non esse multiplicanda*» («сущности не должны быть умножаемы сверх необходимости»). В связи с этим авторы уделяют повышенное внимание вопросам выбора оптимальной сложности идентифицируемой модели. Эта проблема не может быть до конца формализована, поэтому для ее решения в монографии предлагается использовать методы нечеткой логики. Вообще, некорректные задачи в последовательной постановке с неизбежностью приводят к необходимости использования нечеткой терминологии. Однако в существующей литературе на это обстоятельство обращается мало внимания. Авторы в какой-то мере восполняют этот пробел, рассматривая нечеткие алгоритмы решения некорректно поставленных задач. Рассмотренные в монографии методы решения обратных задач иллюстрируются рядом примеров.

Много внимания уделяется построению и идентификации малопараметрических *холистических* (от англ. *whole* – «целое») моделей процессов нефтегазодобычи, позволяющих получить целостное описание систем и избежать неустойчивости решения обратных задач, связанных с излишней сложностью моделей.

Привлекается также внимание к богатым возможностям, которые может дать использование *пассивных* экспериментов, т. е. данных, полученных в результате наблюдения за нормальной эксплуатацией объектов управления. Поскольку *активные* эксперименты в промышленных условиях проводятся (в силу множества объективных и субъективных причин) крайне редко, пассивные эксперименты оказываются, по существу, единственным реальным источником обновления информации. И здесь регулирующие помехоустойчивые алгоритмы решения обратных задач оказываются особенно ценными, поскольку анализ данных нормальной эксплуатации есть, по существу, «анализ шумов».

Третья глава посвящена вопросам моделирования движения сложно построенных сред. Наиболее важными здесь, на наш взгляд, являются разделы, в которых показано, что движение реофизически сложных сред сопровождается процессами самоорганизации, которые могут привести к образованию диссипативных структур и смене детерминированного поведения хаотическим. Установлены закономерности переходов, которые могут быть использованы при назначении оптимальных режимов функционирования систем нефтегазодобычи и создании реотехнологических способов воздействия на них.

Поведение реофизически сложных систем во многом определяется происходящими в них релаксационными процессами. В современной механике релаксация описывается обычно путем введения взаимопроникающих сред, обменивающихся друг с другом массой или энергией (модели

трещиновато-пористой среды, «активной» и «неактивной» насыщенности, теплопроводности в многокомпонентных средах и т. д.).

Идейно эти модели тесно связаны с описанием релаксирующих систем, данным де Гроотом. Согласно последнему явление релаксации в физической системе можно описать как перенос энергии между двумя подсистемами, имеющими разность температур. Эти подсистемы заполняют одно и то же пространство, и поэтому в любой точке системы существуют две температуры, не равные друг другу, и вся система не находится в состоянии термодинамического равновесия. Так, например, в феноменологической теории парамагнитной релаксации такими подсистемами являются спин-система и кристаллическая решетка. В теории акустической релаксации вся система разделяется на внутреннюю, или вибрирующую, систему и на внешнюю, или трансляционную, подсистему. В газовом разряднике такими подсистемами являются ионы и электроны.

Релаксационные явления в реофизически сложных средах связаны с взаимодействием структурных единиц, образующих иерархию взаимопроницающих подсистем различной сложности, причем эволюция на каждом уровне организации определяется своим характерным временем релаксации.

В монографии показано, что иерархия времен релаксации реофизически сложных сред масштабно-инвариантна, т. е. имеет фрактальную структуру. Это приводит к тому, что эволюция системы в целом описывается достаточно простыми зависимостями, имеющими универсальный характер. Отмеченное обстоятельство существенно упрощает моделирование релаксационных процессов в реофизически сложных средах и экспериментальное определение релаксационных характеристик. Получено, что в ряде случаев самоподобность релаксационных процессов может привести к алгебраическому закону затухания и, тем самым, к необходимости использования реологических моделей и уравнений состояния, содержащих дробные производные. Выведены уравнения движения реофизически сложных сред, учитывающие временную фрактальность процессов релаксации.

Из полученных в монографии результатов можно сделать вывод о том, что нефтяной пласт должен рассматриваться в качестве открытой, диссипативной системы, способной к самоорганизации и содержащей огромный источник непознанной и потому не востребованной энергии. По-видимому, самоорганизующийся пласт во многих случаях в состоянии «настраиваться» на оптимальный режим функционирования.

В четвертой главе монографии рассмотрены необычайно интересные и практически важные явления, имеющие место при движении газожидкостных систем в предпереходных условиях, т. е. в области давлений, близких к давлению фазового перехода (чуть выше давления насыщения жидкости газом или давления конденсатообразования в газоконденсатных системах). В этих областях происходит аномальное изменение реологических, теплофизических и релаксационных свойств газожидкостных систем.

Предполагается, что отмеченные эффекты связаны с существованием «микророзродышей» – мельчайших газовых пузырьков или капелек конденсата, кооперативное действие которых проявляется при приближении к давлению перехода. Показано, что возникновение и взаимодействие зародышей новой фазы приводит к синергетическим эффектам, целенаправленное использование которых может открыть новые возможности управления технологическими процессами добычи и транспорта нефти и газа. Предложены уравнения движения сред с зародышами газа, анализ которых показал возможность нарушения устойчивости стационарных режимов и возникновения периодических и стохастических автоколебаний. Приведены результаты экспериментов, подтверждающих эти теоретические результаты.

Ситуации, с которыми сталкиваются специалисты, управляющие сложными технологическими процессами, разнообразны, а получение необходимой дополнительной информации затруднительно или вообще невозможно. В борьбе с этими трудностями люди выработали ряд эффективных методов моделирования и принятия решений в условиях неопределенности. Некоторые из этих методов, наиболее близкие интересам авторов, рассмотрены в заключительной, пятой главе книги.

Поскольку многие из приемов, используемые при принятии решений в сложных ситуациях, имеют эвристическую основу и требуют широкого использования опыта и интуиции, мы не стремились к излишней формализации изложения, а пытались раскрыть идеи на простых примерах.

Мы не согласны с У. Моррисом, который считает, что «изучение моделей не эквивалентно изучению моделирования», и надеемся, что некоторые общие подходы и принципы донести до читателя нам все же удалось.

Один музыкант сказал: «Симфония лежит между однотонным ревом заводской трубы и какофонией восточного базара». Если считать, что рев трубы – это доведенный до крайности порядок, а гомон базара – полный хаос, то это суждение можно отнести не только к пятой, но и к другим главам.

В заключение следует отметить, что мы не претендуем на безусловное авторство всех идей, примеров и сравнений, встречающихся в нашей книге, даже если соответствующие ссылки отсутствуют. Авторы много лет занимались рассматриваемыми проблемами, изучили сотни оригинальных работ, поэтому может оказаться, что они, сами того не замечая, владеют некоторыми чужими мыслями, как своими.

Как говорил французский моралист Ж. Лабрюйер, «за тысячелетия существования человечества многое сказано, но это не означает, что все сказанное понято». Поэтому мы считаем полезным повторить то, что, быть может, уже сказано другими.

Вспомним также Б. Паскаля, который говорил: «Пусть не корят меня, что я не сказал ничего нового: ново уже само расположение материала;

игроки в мяч бьют по одному и тому же мячу, но не с одинаковой меткостью».

Эта книга является вторым, существенно переработанным изданием нашей монографии, напечатанной в издательстве «Гилем» Академии наук Республики Башкортостан (г. Уфа) в 1999 г. Добавлены новые примеры практического применения описываемых авторами методик. Часть материала значительно сокращена, что позволило включить совершенно новую главу о моделировании и принятии решений в условиях неопределенности.

Результаты, приведенные в данной монографии, получены нами в тесном сотрудничестве с И. М. Аметовым, И. Ш. Ахатовым, А. А. Болотовым, Г. Т. Булгаковой, А. В. Гладковым, Т. И. Зайнетдиновым, Н. Т. Карачуриным, А. Р. Латыповым, Р. А. Майским, А. М. Мамедзаде, Г. Х. Меликовым, Р. К. Мухаметшиным, Г. М. Панаховым, Т. Ш. Салаватовым, А. А. Сулеймановым, Б. А. Сулеймановым, А. Г. Телиным, Р. А. Хабибуллиным, И. Ф. Хатмуллиным и многими другими друзьями и коллегами из АГНА (г. Баку), ВНИИнефти (г. Москва), УГНТУ, ИПТЭР, Уфимского филиала ЮганскНИПИнефти (г. Уфа). Мы глубоко благодарны им, а также нашим близким, чья поддержка всегда помогает нам в нашем труде.

Глава 1

ТЕОРИЯ САМООРГАНИЗАЦИИ И СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ

Трудно поверить, какую огромную экономию мысли может осуществить одно хорошо подобранное слово. Часто достаточно изобрести одно новое слово, и это слово становится творцом.

А. Пуанкаре

*Сверх всяких ожиданий, убеждение
(я бы лучше сказал, мечта!)
в существовании гармонии в природе
находит все новые и новые подтверждения
в истории физики.*

Г. Вейль

Теория самоорганизации – это междисциплинарная область науки, занимающаяся изучением появления и развития упорядоченных во времени и пространстве процессов и структур [1–5]. Немецкий физик Г. Хаген (H. Haken) в начале 1970-х годов предложил для этой науки название *синергетика* (от греческого *synergia* – совместное действие, сотрудничество).

В рамках самой теории самоорганизации пока еще не получены впечатляющие научные результаты: основные модели синергетики были найдены и исследованы в основном до ее возникновения. Поэтому синергетика – это скорее не отдельная наука, а термин, говорящий об общности математических задач и методов исследования нелинейных явлений в разных областях науки.

Заслуга ее создателей в том, что им на основе анализа известных моделей удалось выявить универсальные законы возникновения и развития сложных систем и сложного поведения. Наличие универсальности весьма информативно, поскольку сведения о свойствах отдельных элементов сложных систем и процессах взаимодействия между ними зачастую отсутствуют или получение их затруднительно. В таких условиях знание о наиболее общих чертах кооперативных эффектов позволяет существенно восполнить недостаток информации.

Здесь уместно провести аналогию с таким универсальным законом, как II закон термодинамики: сколь бы сложной ни была схема предлагаемого очередным изобретателем вечного двигателя, мы можем, не разбирая ее детально, утверждать, что двигатель не будет работать.

Развитие теории самоорганизации показало, что основные особенности геометрии и динамики сложных природных объектов часто удается описать с помощью достаточно простых детерминированных моделей. Обнаружение детерминированной основы в совершенно случайных, на первый взгляд, явлениях – важнейшее достижение синергетики, позволяющее надеяться на широкую применимость ее результатов при контроле и управлении процессами в сложных системах.

Подчеркнем еще раз, что эта простота универсальна – одни и те же базовые модели описывают кооперативное поведение в системах самой различной природы. В этом проявляется *самоподобность* Природы – свойство, позволяющее ей наиболее «экономными» способами построить все наблюдаемое нами разнообразие объектов и явлений. Несколько упрощая, мы можем сказать, что Природа, быть может, владеет немногими простыми методами конструирования, но она искусно применяет их в различных сочетаниях на многих иерархических уровнях организации сложных систем, порождая таким образом свои самые совершенные творения.

Наиболее зримо самоподобность Природы проявляется в биологической эволюции. Известно, например, что *онтогенез* – индивидуальное развитие организмов – подобен (в своей шкале времени) *филогенезу* – развитию групп (видов, родов), к которым эти организмы принадлежат.

Множество фактов проявления самоподобности в объектах и явлениях неживой и живой природы было найдено Бенуа Б. Мандельбротом (B. B. Mandelbrot), который для обозначения этого свойства ввел понятие *фрактала* – структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны друг другу [6–9].

1.1. Фракталы

*Весь предшествующий опыт
убеждает нас в том,
что природа представляет собой
реализацию простейших
математически мыслимых элементов.*

А. Эйнштейн

Фрактальная геометрия позволяет раскрыть неожиданную простоту построения сложных природных систем и предоставляет методы их качественного и количественного описания. Для моделирования неупорядоченных систем теория фракталов играет такую же роль, как генераторы случайных чисел – для моделирования случайных процессов. Так, синтетические фрактальные пейзажи, полученные средствами компьютерной графики, выглядят настолько правдоподобно, что большинство воспринимает их как естественные. Повсеместное распространение компьютеров и

компьютерной графики позволяет использовать фрактальные представления для исследования геометрии сложных объектов во многих областях естественных наук.

Рассмотрим некоторые математические сведения, необходимые для введения количественных мер фрактальных свойств.

1.1.1. Идеальные фракталы

Примером идеального фрактала является треугольник В. Серпинского (W. Sierpinski), который впервые описал его в 1916 г. Этот объект может быть получен путем построения, начинающегося с равностороннего треугольника (рис. 1.1).

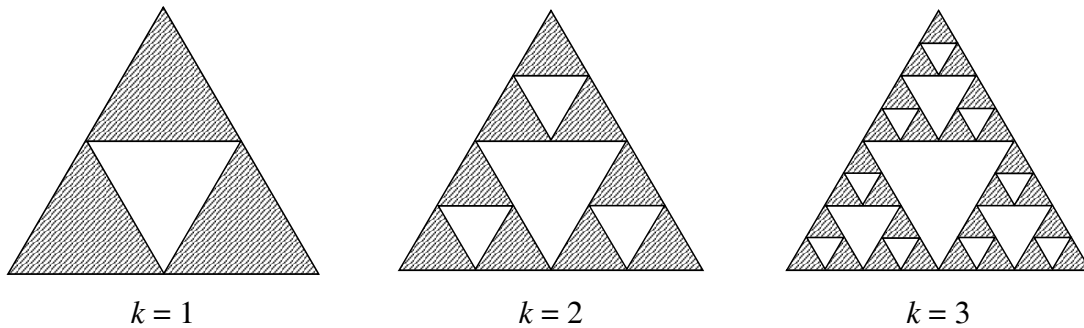


Рис. 1.1. Треугольник Серпинского

На первом этапе исходный треугольник делится на 4 равносторонних треугольника, средний из которых выбрасывается. С каждым из оставшихся треугольников поступают так же. На k -м этапе мы будем иметь 3^k треугольников, которые при $k \rightarrow \infty$ образуют некоторое «всюду дырявое» множество точек.

Это множество масштабно-инвариантно, поскольку увеличение в 2^k любого из маленьких треугольников, полученных на k -м этапе построения, приводит к тому же самому множеству (этим свойством ковер Серпинского напоминает куклу-матрешку).

Еще одним примером фрактального объекта является кривая Коха, названная так в честь Хельге фон Коха, описавшего ее в 1904 г. Способ построения этой кривой ясен из рис. 1.2.

Легко уловить связь между этими структурами и примерами нигде не дифференцируемых непрерывных функций, построенных К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и его последователями.

Рассмотрим, например, функцию Вейерштрасса–Мандельброта, задаваемую в виде сходящегося ряда [9]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b^n (1 - \cos a^n x),$$

где $0 < b < 1$, $ab > 1$.

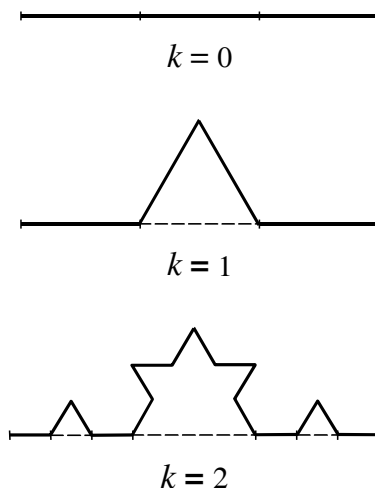


Рис. 1.2. Кривая Коха

Легко видеть, что продифференцированный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (ba)^n \sin a^n x$$

расходится, поэтому функция не дифференцируема ни в одной точке. График этой функции представляет собой масштабно-инвариантную (т. е. фрактальную) кривую, что можно показать аналитически.

Действительно,

$$\begin{aligned} f(ax) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n (1 - \cos a^{n+1} x) = \frac{1}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^{n+1} (1 - \cos a^{n+1} x) = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k (1 - \cos a^k x) = \frac{1}{b} f(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если участок кривой $f(x)$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{a}\right]$

растянуть в a по оси x и в b^{-1} раз по оси y , то в результате получится исходная кривая на участке $[0, 1]$. Поскольку коэффициенты растяжения по осям x и y не совпадают, то $f(x)$ называют (в отличие от кривой Коха) *не самоподобной, а самоаффинной*.

Нигде не дифференцируемые функции многие выдающиеся математики считали надуманными «патологическими» структурами, не имеющими никакого отношения к реальности. Так, Пуанкаре в «Науке и методе» писал: «Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь». Ш. Эрмит в своем письме к Т. Стилтгесу был еще более эмоционален: «Я в ужасе отворачи-

ваюсь от этой страшной чумы: функций, не имеющих производных» [10]. Оказалось, однако, что эти функции связаны с фракталами – объектами, которые, как уже отмечалось, широко распространены в природе и естественным образом происходят из очень конкретных задач.

Весьма важным примером фрактальной кривой является траектория броуновской частицы. Ее фрактальность проявляется в том, что, увеличивая разрешение микроскопа и уменьшая время между фиксациями местоположениями броуновской частицы, мы вновь получим подобные друг другу блуждания. График зависимости координаты броуновской частицы от времени (винеровский процесс) является самоаффинной кривой и также нигде не дифференцируется.

Отметим, что в формальной логике также имеются аналоги математических «монстров» типа кривой Коха – это известные с древних времен логические парадоксы, например внутренне противоречивое высказывание «Я лгу». Ведь если содержание этого суждения истинно, то его автор лжет, но тогда и само высказывание лживо, что приводит к противоречию.

В работе [11] показано, что общей основой парадоксальных фигур (фракталов) и высказываний являются бесконечные итерации некоторых алгоритмов обработки. Так, генератор кривой Коха можно представить как машину с обратной связью, процессорный блок (блок обработки) которой производит деление отрезков на три равные части, отбрасывание средней части и построение на ее месте «крышки» (см. рис. 1.2). Результат обработки «затравки» – единичного отрезка – по схеме обратной связи передается на вход процессорного блока для получения нового «поколения» кривых – и так до бесконечности.

В случае суждения «Я лгу» блок обработки меняет значение логической переменной на противоположное («true» на «false» и наоборот). Если «затравкой» является предположение о том, что высказывание «Я лгу» истинно, то после обработки оно будет признано ложью и по схеме обратной связи будет отправлено на вход процессора, что порождает бесконечную цепочку значений логической переменной $TFTFTF \dots$ ($T = \text{"true"}$, $F = \text{"false"}$). Таким образом, парадоксы являются логическими фракталами, которые должны стать предметом рассмотрения новой фрактальной логики [11].

Фракталы оказываются тесно связанными и с **цепными дробями**, при построении которых также многократно повторяется одна и та же операция. Возьмем, например, дробь $\frac{103993}{33102}$. Наибольшее число, не превосходящее эту дробь, – это число 3:

$$\frac{103993}{33102} = 3 + \frac{4687}{33102}.$$

«Перевернем» остаток:

$$\frac{103993}{33102} = 3 + \frac{1}{\frac{33102}{4687}}.$$

Прделаем такие же операции с дробью $\frac{33102}{4687}$ и т. д. В результате получим цепную дробь

$$\frac{103993}{33102} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}.$$

Если число иррациональное, то соответствующая ей цепная дробь будет бесконечной.

Между прочим, дробь $\frac{103993}{33102}$ является одним из рациональных приближений числа π , а полученная из нее конечная цепная дробь представляет собой «начало» бесконечного разложения π :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}.$$

Итак, любое число α может быть представлено в виде

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где a_0, a_1, a_2, \dots – целые положительные числа. При использовании таких дробей в практических вычислениях важным является вопрос о том, насколько большими могут быть коэффициенты разложения a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)? Ведь если число a_n достаточно велико, то, оборвав цепную дробь на $n - 1$ шаге, мы получим хорошее приближение.

Р. О. Кузьмин доказал (см. брошюру В. И. Арнольда «Цепные дроби», 2001), что вероятность появления числа k среди коэффициентов разложения a_0, a_1, a_2, \dots случайно взятого числа α в цепную дробь равна

$$p_k = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Если $k > 1$, то

$$p_k \approx \frac{1}{k^2 \ln 2},$$

т. е. распределение вероятностей является асимптотически гиперболическим. В дальнейшем гиперболические распределения (по выражению Б. Мандельброта, «ближайшие родственники фракталов») еще не встретятся в этой книге (см., например, разделы 1.3.2 и 5.4).

Согласно теореме Кузьмина наиболее часто встречается единица – чуть меньше половины случаев ($p_1 = 0,42$). Если все числа a_0, a_1, a_2, \dots положить равными в точности единице, то получим число

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению

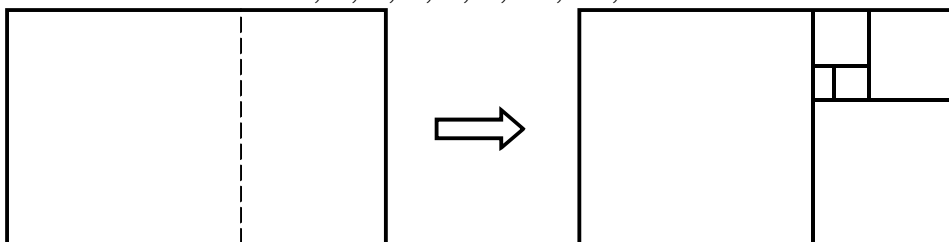
$$1 + \frac{1}{x} = x \quad \text{или} \quad x^2 - x + 1 = 0,$$

откуда $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$

Это число, известное с древних времен, называется «золотым сечением» (aurea section) и лежит в основе всех природных гармоний. Не случайно композиционная структура картин-шедевров мирового искусства определяется именно золотым сечением. Обращаясь к более прозаичному предмету, отметим, что почтовые открытки делают в форме прямоугольника, отношение сторон которого равно «золотому числу». Если от такого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то оставшийся прямоугольник будет подобен исходному. Если снова отрезать квадратик, снова получим прямоугольник, подобный исходному, и т. д. (опять бесконечные итерации!).

Кстати, золотое сечение тесно связано с числами Фибоначчи, т. е. с бесконечной последовательностью чисел, два первых члена которой равны 1, а следующие вычисляются как сумма двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,



Легко показать, что

$$\lim \frac{\Phi_n}{\Phi_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

где Φ_n – n -е число Фибоначчи.

Связь чисел Фибоначчи с фракталами проявляется и в алгоритме их вычисления путем бесконечного повторения одной и той же операции суммирования. Числа Фибоначчи также еще появятся в этой главе (см. раздел 1.2.1).

Интересный пример лингвистического фрактала приводит Д. Хофштадтер [11, 12]. В переводе М. Эскиной, это – суждение «БОГ, Одолевающий Гения», где слово «БОГ» является одновременно аббревиатурой, составленной из первых букв слов «БОГ», «Одолевающий», «Гения». В свою очередь, таким же образом могут быть расшифрованы слова «Одолевающий» и «Гения». В итоге получится бесконечно разворачивающаяся последовательность суждений, в которых слово «БОГ» оказывается бесконечным сокращением самого себя.

1.1.2. Фрактальная размерность

При рассмотрении фрактальных объектов обычные количественные характеристики (длина, площадь, масса и т. д.) оказываются неприменимыми. Так, длина кривой Коха на k -м этапе построения равна

$$L_k = 4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \infty$, то истинная длина этой кривой бесконечно велика. При измерении длины с помощью линейки будет определена лишь кажущаяся длина, поскольку какие-то детали фрактальной кривой всегда окажутся меньше самого мелкого деления линейки. Ясно, что значение кажущейся длины растет с ростом разрешающей способности измерительного инструмента. Таким образом, длина фрактальной кривой не поддается четкому определению.

В связи с этим для количественной характеристики свойств фрактала используется *размерность* фрактала.

Знакомая всем размерность (мы, не вдаваясь в излишние объяснения, будем называть ее *топологической* размерностью) может принимать только целочисленные значения: линия имеет размерность 1, плоскость – 2, пространство – 3. Топологическая размерность D_T кривой Коха равна, конечно, единице. Но для того, чтобы оценить, как «плотно» кривая Коха заполняет плоскость, может быть введена так называемая размерность Хаусдорфа–Безиковича D_H (F. Hausdorff, 1918 г. и A. S. Besicovitch).

Практически эта величина может быть определена путем измерения длины кривой с помощью циркуля с уменьшающимся раствором ε (см. рис. 1.3).

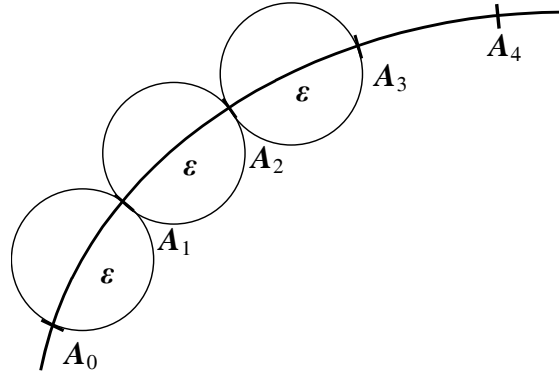


Рис. 1.3. Измерение длин кривых

При этом длина кривой приближенно оценивается как длина ломаной $A_0A_1A_2\dots$, где A_i – точки «засечек», произведенных циркулем. Ясно, что $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$, где $N(\varepsilon)$ – число «засечек». В случае обычных гладких (регулярных) кривых при уменьшении ε длина $L(\varepsilon)$ стремится к конечному пределу L_0 – истинной длине кривой (см. рис. 1.4, а).

Поэтому в пределе малых ε

$$N(\varepsilon) = \frac{L_0}{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

В случае же фрактальной кривой, как уже отмечалось, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = \infty$

(рис. 1.4, б). Оказывается, что для таких кривых $L(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d}$ при малых ε , откуда

$$N(\varepsilon) = \frac{c}{\varepsilon^{D_H}}, \tag{1.2}$$

где показатель $D_H = 1 + d$ и называется *размерностью Хаусдорфа–Безиковича*.

Так, если с помощью циркуля с раствором $\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ измеряется длина кривой Коха, то получится

$$N(\varepsilon) = 4^k = 3^{k \frac{\ln 4}{\ln 3}},$$

откуда

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{\ln 4}{\ln 3}}.$$

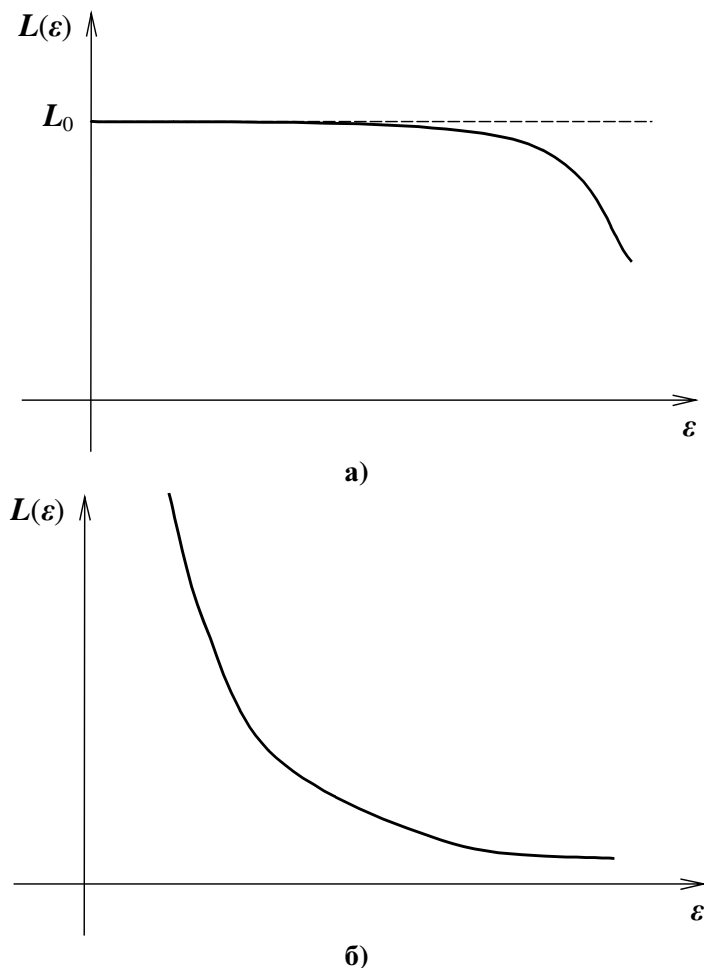


Рис. 1.4. Различные асимптотики $L(\varepsilon)$

Таким образом, размерность Хаусдорфа кривой Коха равна

$$D_H = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Этот пример показывает, что фрактальная кривая имеет дробную размерность. Собственно, термин «фрактал» обязан своим происхождением именно этому обстоятельству: латинское слово *fractus* означает «сло-манный», «дробный».

Из (1.1) следует, что для регулярной кривой $D_H = 1$, т. е. размер-ность Хаусдорфа совпадает с топологической размерностью D_T .

То, что размерность фрактальной кривой лежит между единицей и двойкой, означает, что она занимает промежуточное положение между ли-нией и плоскостью. В то время как гладкая кривая заполняет в точности одномерное пространство, фрактальная кривая за счет своей бесконечной разветвленности как бы выходит за пределы одномерного пространства.

Размерность Хаусдорфа является количественной мерой того, на-сколько «плотно» фрактальное множество заполняет окружающее его евк-лидово пространство.

Можно показать, что траектория броуновской частицы, движущейся по плоскости, имеет размерность $D_H = 2$, т. е. она практически полностью заполняет все двумерное пространство.

Заметим, что величину $N(\varepsilon)$ можно также определить как число кружков диаметром ε , полностью покрывающих рассматриваемую кривую. При вычислении размерности D_H может быть использовано покрытие кривой не кружками, а квадратиками с уменьшающейся стороной. В том случае, когда фрактальное множество вложено в трехмерное евклидово пространство, оно покрывается сферами или кубиками.

Существует ряд других определений размерности фрактальных множеств. Так, пусть $N_S(r)$ – число в r раз уменьшенных копий фрактала, необходимых для покрытия исходного множества. Тогда

$$N_S(r) = r^{D_S},$$

где показатель D_S называется *размерностью подобия*.

Например, ковер Серпинского при $k = 2$ (см. рис 1.1) может быть покрыт тремя треугольниками, являющимися в 2 раза уменьшенными копиями исходного множества. Следовательно,

$$3 = 2^{D_S},$$

откуда $D_S = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58$.

Можно показать, что в данном случае размерность подобия совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича.

1.1.3. Реальные фракталы

Фрактальная самоподобность характерна для множества реальных систем. Она проявляется в геометрии деревьев и русел рек, строении легких, ветвлении кровеносных сосудов, динамике сердечных биений, изменении уровней водных поверхностей, турбулентности и т. д. Так, если рассматривать нейроны (нервные клетки) через микроскоп с небольшим увеличением, то можно отчетливо увидеть отходящие от тела клетки асимметричные разветвленные отростки (дендриты). При несколько большем увеличении можно наблюдать еще меньшие ответвления, отходящие от крупных ветвей. При еще большем увеличении обнаруживается новый уровень структуры: ответвления от ответвлений и т. д. (Тут можно вспомнить шуточное стихотворение «Если глянуть в микроскоп – там на клопе тоже клоп» [13].)

На каждом уровне масштаба структура ветвей нейрона подобна (хотя и не обязательно идентична, как в случае идеальных фракталов) структурам, наблюдаемым как в более крупных, так и в более мелких масштабах.

Кипящая вода представляет собой фрактальную смесь паровой и жидкой фаз, в которой пузырьки пара содержат водяные капли, а каждая из этих капель – мелкие пузырьки газа, которые, в свою очередь, содержат еще более мелкие капли воды, и т. д. [14].

Отличие реальных фракталов от идеальных заключается в том, что первые обладают характерным минимальным линейным размером (например, таким как радиус атома или молекулы), в то время как идеальные фракталы имеют бесконечно тонкую структуру. На практике существует и характерный максимальный размер фрактала ξ (так называемый *радиус корреляции*). Реальная среда как бы составлена из фрактальных блоков размерами ξ и поэтому на масштабах, больших ξ , может считаться обычным (евклидовым) объектом.

Образование фрактальных структур в природе происходит за счет таких механизмов, как кластерообразование при агрегации отдельных частиц, осадкообразование, развитие неустойчивости поверхности раздела при вытеснении из пористой среды одной жидкости другой, перемешивание жидкостей, растрескивание материалов, пробой диэлектриков и т. д.

Фрактальные размерности реальных объектов можно определить путем покрытия их фотографий квадратиками $\varepsilon \times \varepsilon$ и нахождением связи между числом квадратов $N(\varepsilon)$ и длиной сторон квадратов ε . Согласно (1.2)

$$\ln N(\varepsilon) = \ln C - D_H \ln \varepsilon. \quad (1.3)$$

Поэтому в координатах $(\ln \varepsilon, \ln N(\varepsilon))$ должна получиться прямая линия, по угловому коэффициенту которой определяется величина D_H . Если точки $(\ln \varepsilon, \ln N(\varepsilon))$ не лежат на одной прямой, то изучаемый объект нельзя признать фрактальным.

Следуя [13], можно утверждать, что реальные фрактальные структуры представляют собой след хаотических процессов. Где бы в природе в результате хаотического процесса ни формировался тот или иной объект (берег моря, атмосфера, геологический разлом и т. д.), повсюду с большой вероятностью можно обнаружить фракталы (в контуре береговой линии, в форме облаков, в конфигурации скальных образований).

Повсеместная распространенность фракталов во многом объясняется тем, что они могут быть получены наложением двух простейших преобразований – растяжения и наложения, часто встречающихся в природе. Проиллюстрируем это (не очень строгое) утверждение на примере преобразования подковы (рис 1.5, а–в), итерации которого приводят (рис 1.5, г, д) к образованию фрактальной структуры [15].

Аналогичные преобразования имеют место при перемешивании жидкостей, когда имеют место периодически повторяющиеся вытягивания и изгибы участков жидкостей с возвращением их в исходное положение. Поэтому если в сосуд с краской капнуть несколько капель краски другого

цвета и начать перемешивать, то через некоторое время капли растянутся в тонкие слои, образующие фрактальную структуру [16, 17]. Получаемая при этом картина удивительно похожа на узоры, встречающиеся иногда на поверхности камней, подобранных на берегу. Возможно, эти породы образовались при застывании смеси, полученной перемешиванием расплавов минералов различного цвета.

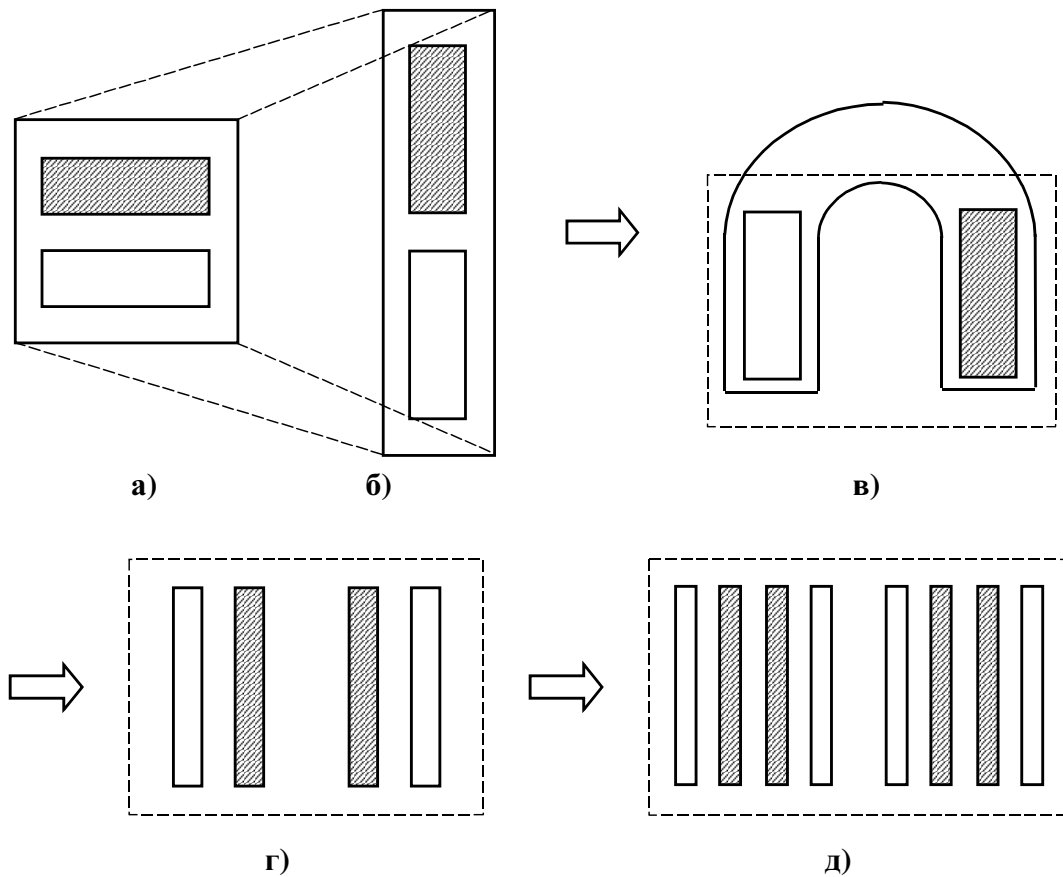


Рис. 1.5. Преобразование подковы

Много фракталоподобных образований содержится в человеческом организме [18]. Они играют важную роль в поддержании нормального функционирования организма. Так, фракталоподобная структура артерий и вен осуществляет равномерное кровоснабжение разных участков органов, фрактальные ответвления и складки значительно увеличивают поверхность всасывания в кишечнике, способствуют распределению, сбору различных веществ (в кровеносных сосудах, желчных протоках и бронхиалах) и информации (в нервной системе).

Последовательные изломы, изгибы и ветвления позволяют линейной структуре (кривой Коха, например) «почти» заполнить пространство. Точно таким же образом линейная система артерий почти сплошь пронизывает трехмерный организм, обеспечивая его бесперебойное кровоснабжение.

Образно говоря, здесь фрактал выступает как способ организовать взаимодействие пространств различной размерности [13].

Фрактальные структуры, благодаря своей избыточности и нерегулярности, являются устойчивыми системами и хорошо противостоят повреждениям. Следовательно, и в технологических системах следует использовать или целенаправленно создавать фрактальные объекты в целях увеличения прочности и надежности конструкций и интенсивности процессов.

Исключительная эффективность функционирования человеческого мозга также может быть объяснена фрактальностью организации процессов переработки информации. Покажем это на примере фрактальной модели мозга [19], представляющей собой квадрат, содержащий один прямоугольник и два квадрата вдвое меньшего размера, масштабно-инвариантных первому квадрату (рис. 1.6).

Входной сигнал, подведенный к большому квадрату, идет к первому прямоугольнику и обрабатывается здесь за время τ_0 . Затем результаты обработки поступают на меньшие квадраты, прямоугольники которых отсылают их к еще меньшим квадратам, и т. д. Предположив, что для обработки сигнала в модулях вдвое меньшего размера требуется вдвое меньше времени, получим *скейлинговый закон*

$$\tau_n = \frac{\tau_0}{2^n}.$$

Отсюда следует, что даже если мозг бесконечно сложен, то при $\tau_0 = \frac{1}{2}$ на обработку сигнала всеми его уровнями потребуется всего лишь

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\tau_0}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ с.}$$

Вот почему человек, находясь в подчас сложнейшей ситуации, успевает почти мгновенно обработать поступающую информацию и принять адекватное решение.

Наблюдение изображений фракталов успокаивает и вызывает чувство облегчения и уверенности, что связано с постоянством формы фрактала при его увеличении. Точно так же действует постоянный ритм церковного богослужения или рефрен колыбельной песни.

Музыкальные произведения в основе своей также фрактальны, поскольку правила их создания аналогичны правилам, которые с помощью повторяющихся предписаний позволяют творить фрактальные образы. Такие гениальные музыканты, как Моцарт или Бах, находят свои собственные правила, шестым чувством определяя тот единственный момент, когда необходимо перейти от старых правил к новым [14].

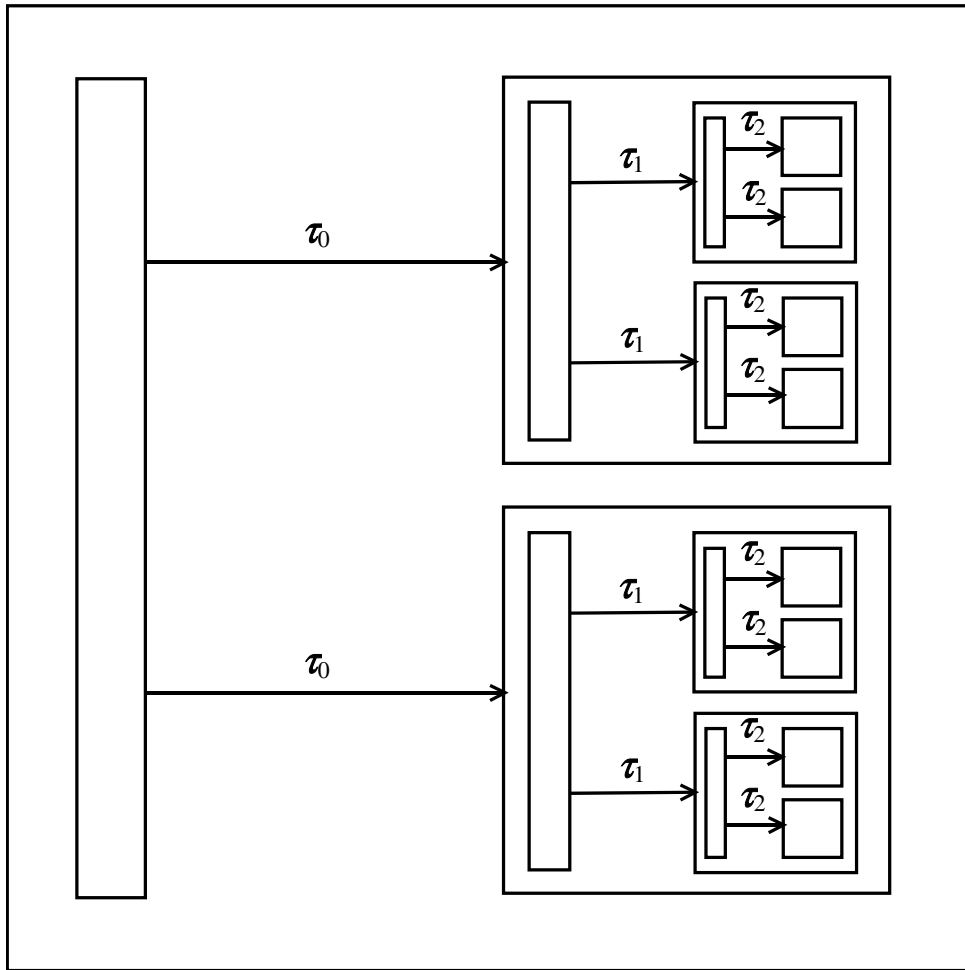


Рис. 1.6. Фрактальная модель мозга

Отметим, что самоподобной в каком-то смысле является и история науки. Американский методолог Джеральд Холтон показал [13], что научная мысль из века в век ходит по одним и тем же кругам, рассматривая (на все более высоком уровне) одни и те же вечные темы: тему первичных частиц, тему происхождения сложных форм из простых, тему самопроизвольного появления новшеств и т. д. По этому поводу С. В. Мейен отметил: «Будь это шахматная партия, любой арбитр давно бы признал ничью ввиду повторения ходов».

Одной из таких вечных тем является и само понятие фрактальности. Ведь еще Лейбниц в «Монадологии» писал: «Всякую часть материи можно представить наподобие сада, полного растений, и пруда, полного рыб. Но каждая ветвь растения, каждый член животного, каждая капля его соков есть опять такой же сад или такой же пруд» [13].

1.2. Детерминированный хаос

*Совершенно случайный рисунок –
увы, также и наиболее скучный...
Непредсказуемость (случайность)
желательна с точки зрения
разнообразия или неожиданности,
но если мы хотим, чтобы
рисунок выглядел привлекательно,
необходима некоторая упорядоченность.*

Дж. Пирс

Изучение ньютоновской динамики приучило нас к мысли о том, что если заданы силы, действующие между частицами, а также начальные положения и скорости частиц, то уравнения движения позволяют предсказать развитие системы с любой степенью точности для любого сколь угодно позднего момента времени. Это убеждение укрепляется удивительной точностью, с которой механика предсказывает движение планет, моменты солнечных затмений, рассчитывает движение космических ракет. Случайность, наблюдаемую в реальном мире, мы обычно связываем с внешними шумами, наличием очень большого числа степеней свободы или же с квантовыми эффектами.

Настоящим потрясением для научного мира было осознание того, что неупорядоченные, непредсказуемые движения возможны в детерминированных *динамических системах*, т. е. объектах, эволюция которых описывается некоторой системой дифференциальных или разностных уравнений, задающих правило однозначного определения будущего, исходя из заданных начальных условий [2–5, 15, 20, 21].

Хаотическое состояние, в котором могут находиться динамические системы без источников случайных шумов, получило название *детерминированного (или динамического) хаоса*.

Детерминированный хаос отличается от обычного (или *шумового*) хаоса, понимаемого как состояние полной дезорганизации. Хаос в динамических системах относится к ограниченной случайности, им можно управлять и даже прогнозировать на короткие промежутки времени вперед.

Различие между этими двумя видами хаоса подобно различию между шумом в переполненном случайными людьми зале и шумом, создаваемым музыкантами оркестра, готовящимися к началу выступления. Достаточно одного жеста дирижера, чтобы шум в оркестровой яме затих, в то время как овладеть вниманием толпы практически невозможно.

Следует отметить, что необходимым условием возникновения хаотического движения является наличие особой *нелинейности*.

Различается детерминированный хаос в *консервативных* системах, в которых механическая энергия (или какой-либо ее аналог) сохраняется, и в *диссипативных* системах (системах с «трением»). Мы в дальнейшем будем рассматривать в основном диссипативные системы.

Выявление и анализ детерминированного хаоса оказывается весьма полезным при управлении сложными движениями в самоорганизующихся системах.

Во-первых, если в некоторой динамической системе диагностируется динамический хаос, то можно надеяться, что некоторым изменением параметров (настройкой) можно упорядочить ее движение.

Во-вторых, переход от детерминированного к хаотическому движению происходит по некоторым универсальным сценариям, число которых невелико. Информация об этих сценариях может быть использована для назначения режимов работы, исключающих возникновение хаотических колебаний.

В-третьих, в современной теории нелинейных динамических систем развиты новые методы количественного анализа хаотических колебаний, которые с успехом могут быть использованы для идентификации характера движения и состояния объектов управления.

Возникновение хаотических движений в детерминированных системах возможно, если траектории движения обнаруживают сильную зависимость от начальных условий (траектории «разбегаются»). Впервые на это при изучении неинтегрируемых движений трех тел обратил внимание А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1892 г.), который писал: «...иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным...» Подобные идеи о возможности проявления хаотических движений в детерминированных системах высказывались также Биркгофом (G. D. Birkhoff, 1935 г.).

Таким образом, детерминированный хаос проявляется в том случае, когда задача Коши для уравнений движения является некорректно поставленной.

Напомним, что математическая задача называется корректно поставленной, если:

- 1) ее решение существует;
- 2) оно единственно;
- 3) решение устойчиво относительно малых изменений исходных данных (т. е. малые изменения исходных данных ведут к малому изменению решения).

Из предыдущего ясно, что возникновение детерминированного хаоса связано с нарушением третьего условия (условия устойчивости).

Простейшая механическая система, в которой наблюдается «разбегание» траекторий, представляет собой бильярдный шар, ударяющийся и упруго отскакивающий от сторон эллиптического бильярдного стола (рис. 1.7).

Если начальное положение шара (1) чуть-чуть изменится (положение 2), то уже через несколько соударений шар будет двигаться по совершенно другой траектории. Эта неустойчивость приводит к тому, что при сохранении энергии для столов определенной формы шар случайно блуждает по столу, никогда не повторяя свою траекторию.

Известным литературным примером, иллюстрирующим сильную зависимость эволюции системы от начальных условий, является научно-фантастический рассказ Р. Бредбери «...И грянул гром», в котором гибель бабочки, случайно раздавленной в прошлом путешественником во времени, так влияет на ход истории, что приводит к существенному изменению настоящего.

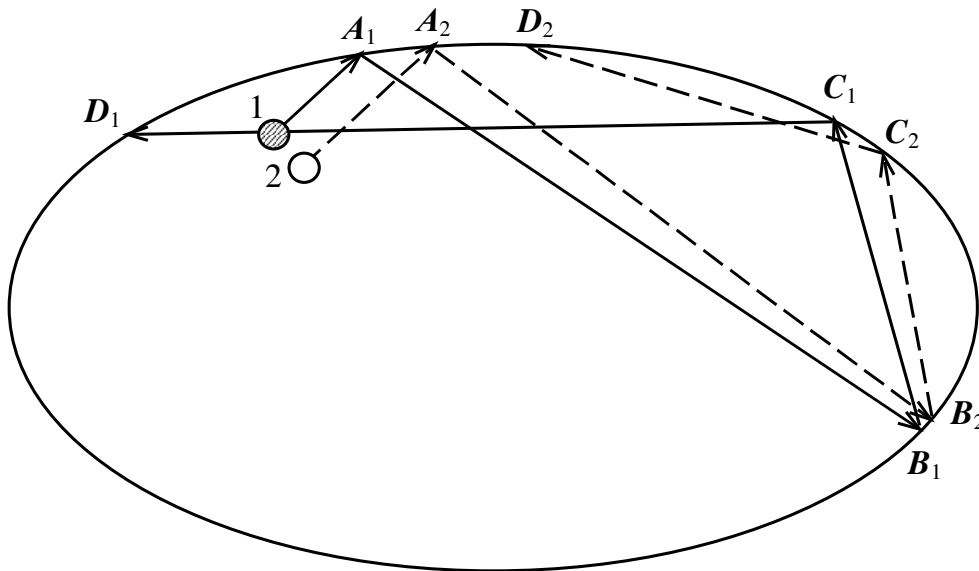


Рис. 1.7. «Разбегание» траекторий бильярдного шара

Приведем еще один простой пример, иллюстрирующий нарушение устойчивости.

Пусть последовательность задается следующей рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим поведение получаемых по этой формуле последовательностей в зависимости от начальной точки x_0 из отрезка $[0, 1]$.

Возьмем сначала в качестве x_0 десятичные числа с одним знаком после запятой. Так, например, для $x_0 = 0,1$ получим $x_1 = 0,8$, $x_2 = -0,6$, $x_3 = 0,2$, $x_4 = -0,6$, $x_5 = 0,2$ и т. д., то есть последовательность вышла на предельный цикл из двух чисел.

Аналогичная картина наблюдается для всех других чисел с одним знаком после запятой, кроме $x_0 = 0,5$. В этом случае получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, ..., т. е. последовательность сходится.

Рассмотрим теперь в качестве x_0 числа с двумя знаками после запятой. Например, $x_0 = 0,12$. В этом случае последовательность выходит на цикл, содержащий 10 чисел.

Расчеты показывают, что аналогичная картина будет наблюдаться для всех чисел, кроме 16 чисел вида $0,05 \times (i + 10(j - 1))$, $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$; $j = 1, 2$, и трех чисел вида $0,25 \times k$, $k = 1, 2, 3$.

Для чисел с тремя знаками после запятой имеем четыре варианта поведения траектории предельного цикла. К предыдущим 3 вариантам добавляется вариант, в предельном цикле которого 50 чисел.

Продолжая увеличивать число знаков после запятой в x_0 , можно наблюдать дальнейшее усложнение динамики системы.

Этот пример наглядно показывает, что желание считать как можно с большей «точностью» может привести не только к бесполезной потере времени, но и к потере адекватности описания за счет перехода на траектории движения, радикально отличающиеся от истинных. Таким образом, при моделировании нелинейных систем необходимо особое внимание обращать на определение оптимальной сложности модели (см. по этому поводу также раздел 2.3 данной книги).

1.2.1. Странный аттрактор

Эволюцию динамических систем удобно представить в геометрической форме, используя фазовое пространство. Рассмотрим, например, движение маятника с трением, описываемое системой уравнений

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \frac{x}{l} - \alpha v, \\ \frac{dx}{dt} = v, \end{cases}$$

где x – отклонение маятника от точки равновесия, m – масса маятника, α – коэффициент трения, v – скорость движения маятника, l – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

На фазовой плоскости (x, v) движение маятника представляется в виде спирали, наматывающейся на точку $O(0, 0)$ (рис. 1.8, а). Эта точка как бы «притягивает» к себе все траектории движения, из каких бы точек они не исходили. Поэтому точка равновесия $O(0, 0)$ называется *аттрактором* этой динамической системы (от слова *attract* – притягивать).

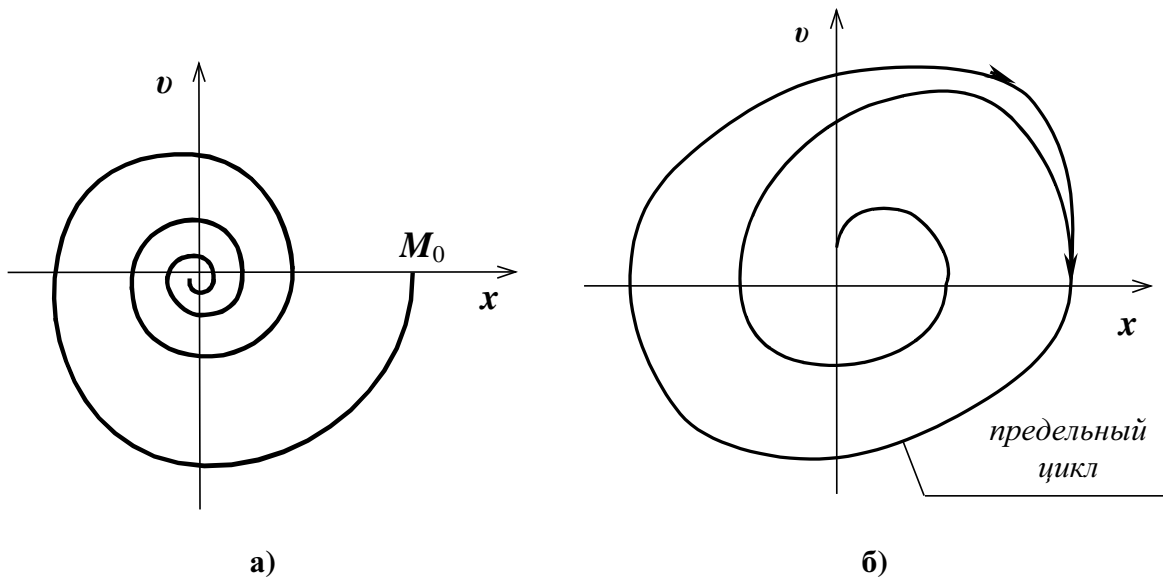


Рис. 1.8. Аттракторы динамических систем

Поскольку часто нас интересует только установившееся движение, то при рассмотрении диссипативных систем можно ограничиться нахождением их аттракторов – областей фазового пространства, притягивающих траектории. Это значительно облегчает исследование динамических систем.

Кроме точек равновесия динамические системы могут иметь аттракторы в виде *предельных циклов* – замкнутых кривых в фазовом пространстве (см. рис. 1.8, б). Так как при движении по замкнутой кривой изображающая точка все время возвращается в некоторое фиксированное состояние, то предельный цикл соответствует периодическим колебаниям.

При изменении параметров динамической системы может меняться число аттракторов и их устойчивость. Подобные явления называются *бифуркациями*, а те значения параметров, при которых изменяются качественные свойства движения, называются *критическими* или *бифуркационными*.

Приведем любопытный пример с натуральными числами, в котором проявляются аналоги понятий аттрактора и бифуркации. Возьмем любое натуральное двузначное число a (напр., $a = 27$). Поменяв между собой цифры этого числа, получим число a^* , которое назовем *инверсным* к a (в нашем случае $a^* = 72$). Далее поступим следующим образом. Вычислим разность этих чисел (из большего вычитаем меньшее, для нашего примера $b = a - a^* = 72 - 27 = 45$) и рассмотрим сумму полученного числа и инверсного к нему $b + b^*$ (для нашего примера $45 + 54 = 99$). Можно убедиться, что при вышеприведенной последовательности действий с любыми двузначным числом в ответе получится 99 или 0 (в случае одинаковых цифр в числе, например 44), т. е. с какого бы двузначного числа мы не начинали, в конце приходим к 0 или 99! Таким образом, эти два числа являются как бы «притягивающими числами» и исполняют роль

бы «притягивающими числами» и исполняют роль своеобразных аттракторов.

Посмотрим теперь, что будет происходить, если те же действия провести с трехзначными числами. Непосредственным перебором убеждаемся, что для трехзначных чисел количество «аттракторов» также будет равно двум (0 для «симметричных» чисел типа 333, 121, ... и 1089 для всех прочих чисел). А вот для четырехзначных чисел число «аттракторов» будет уже равно пяти (0,990, 9999, 10890, 10989), т. е. происходит своеобразная «бифуркация». Продолжая эксперименты с увеличением числа цифр (перебор осуществляется с помощью несложной компьютерной программы), определим соответствующее количество «аттракторов». Для натуральных чисел с количеством цифр от 1-го до 11-ти результаты расчетов приведены в таблице:

Количество цифр в числе	Количество «аттракторов»
1	1
2, 3	2
4, 5	5
6, 7	13
8, 9	34
10, 11	89

Из таблицы видна закономерность проявления «бифуркаций»: увеличение числа «аттракторов» происходит с увеличением числа цифр на два.

Числа в правой колонке таблицы удивительным образом связаны с числами Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., т. е. число «аттракторов» увеличивается по закону чисел Фибоначчи с нечетными номерами. Обнаруженная закономерность может быть строго доказана.

Данный пример мы приводим также для того, чтобы показать, как через «простое» можно проиллюстрировать такие достаточно сложные понятия, как аттрактор и бифуркация. Неслучайно одним из проявлений интеллекта считают умение видеть различие в сходном и сходство в различном.

Рассмотрим теперь явление бифуркаций на примере динамической системы.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + y - x(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \lambda y - y(x^2 + y^2).$$

Перейдя к полярным координатам, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим

$$\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = r \sin \varphi + \lambda r \cos \varphi - r^3 \cos \varphi,$$

$$\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = \lambda r \sin \varphi - r \cos \varphi - r^3 \sin \varphi,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Сложив первое уравнение, умноженное на $\cos \varphi$, со вторым уравнением, умноженным на $\sin \varphi$, и отняв от второго уравнения, умноженного на $\cos \varphi$, первое уравнение, умноженное на $\sin \varphi$, получим

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\lambda - r^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что исходная система имеет решения, соответствующие постоянным значениям $r = r_c$. Они могут быть найдены из условия $\frac{dr}{dt} = 0$, откуда $r_c = r_0 = 0$ и $r_c = r_1 = \sqrt{\lambda}$ (при $\lambda > 0$).

Первое решение соответствует точке покоя $O(0, 0)$, а второе – предельному циклу, представляющему собой движение по окружности с радиусом против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$.

Исследуем устойчивость этих решений.

Предположим, что система в момент времени была выведена из положения равновесия $O(0, 0)$ и отклонилась от нее на малое расстояние ε . Полагая $r = r_0 + \varepsilon = \varepsilon$, получим из (1.4) с точностью до линейных по ε членов

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \varepsilon,$$

откуда с учетом начального условия имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\lambda t}. \quad (1.5)$$

Согласно (1.5) при $\lambda < 0$ значение ε экспоненциально убывает со временем, т. е. точка $O(0, 0)$ является устойчивой точкой равновесия (аттрактором).

При $\lambda > 0$ начальное малое отклонение растет по закону $e^{\lambda t}$, т. е. точка равновесия теряет устойчивость.

Для исследования устойчивости предельного цикла положим $r = r_1 + \varepsilon_1$, что дает

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -2\lambda \varepsilon_1,$$

откуда $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 e^{-2\lambda t}$, т. е. $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $\lambda > 0$ (устойчивый предельный цикл), а при $\lambda < 0$ отклонение от предельного цикла со временем возрастает.

Величина λ в (1.5), характеризующая экспоненциальную скорость расхождения (или схождения) двух исходно близких траекторий с $\varepsilon_0 = 0$

и $\varepsilon_0 > 0$, называется *показателем Ляпунова*. Потеря устойчивости движения происходит в тот момент, когда показатель Ляпунова становится положительным. Из этого примера ясно, что показатель Ляпунова определяет чувствительность траектории к изменению начальных условий. Поэтому эта величина может быть использована в качестве количественной характеристики, «измеряющей» детерминированный хаос.

Таким образом, при постепенном увеличении от отрицательных значений к положительным в точке $\lambda = 0$ происходит бифуркация: устойчивая точка равновесия переходит в устойчивый предельный цикл. Эта бифуркация называется бифуркацией Хопфа (Е. Hopf, 1942 г.). Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 1.9.

Точка покоя и предельный цикл являются примерами *инвариантных множеств* – встроенных в фазовое пространство объектов, отображающих себя на себя в ходе эволюции системы.

Совокупность инвариантных множеств, имеющих в фазовом пространстве данной динамической системы, во многом определяет характер движения, поэтому эта совокупность называется *фазовым портретом системы*.

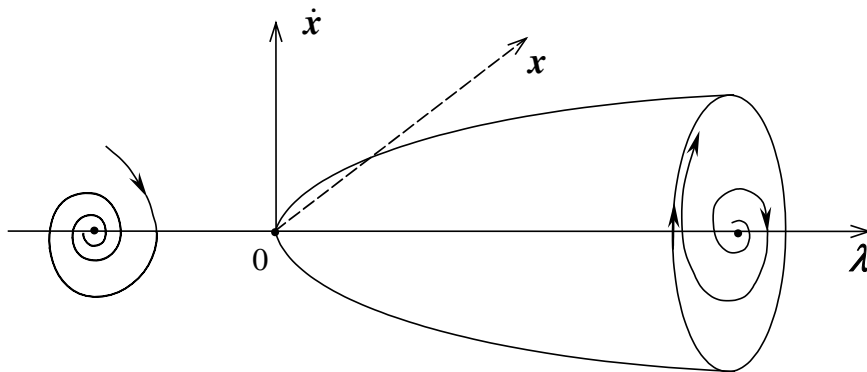


Рис. 1.9. Бифуркация Хопфа

Решающую роль в определении структуры фазового портрета играет теорема единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанная с именами О. Коши (А. Cauchy, 1820–30 гг.) и Э. Пикара (Е. Picard, 1891–96 гг.). Эта теорема утверждает, что при довольно «мягких» условиях на функции $f_i(x)$ существует единственное решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_i|_{t=0} &= x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{1.6}$$

если только начальное состояние не представляет собой точку покоя.

При рассмотрении фазового пространства это означает, что пересечение двух траекторий в точках, отличных от точки покоя, невозможно.

Если же говорить о предсказуемости движения, то именно единственность решения задачи Коши долгое время поддерживала уверенность в невозможности случайных движений динамических систем. Однако, как уже отмечалось, движение может стать непредсказуемым, если траектории неустойчивы относительно малого изменения начальных значений.

«Разбегание» траекторий само по себе еще не приводит к стохастическому поведению. Необходимо еще существование некоторых статистических закономерностей, наличие средних по времени величин, связанных с тем, что система вновь и вновь возвращается в состояния, близкие к исходным. Такие движения возможны, если в фазовом пространстве имеются незамкнутые траектории, бесконечно и беспорядочно блуждающие внутри некоторой ограниченной области. Подобные траектории образуют инвариантные множества, которые в случае диссипативных систем являются аттракторами.

Более подробные исследования показывают, что аттракторы, на которых реализуются хаотические движения, имеют фрактальную структуру, т. е. характеризуются дробной размерностью. Причину этого легко понять, если процесс перепутывания траекторий представить себе как перемешивание «фазовой жидкости».

Возьмем множество траекторий, которые в начальный момент времени исходят из близких точек, образующих маленький фазовый объем – каплю «фазовой» жидкости. Предположим, что эта «капля» отличается по цвету от остальной жидкости внутри рассматриваемой области фазового пространства (рис. 1. 10).

Если в этой области есть устойчивая точка покоя, то «капля» стянется в эту точку (см. рис. 1.10, а). При наличии аттрактора в виде предельного цикла капля через некоторое время растянется вдоль него и «окрасит» лишь узкий пояс в его окрестности (см. рис. 1.10, б). На аттракторе хаотической системы (см. рис. 1.10, в) капля жидкости испытывает повторное влияние растяжения и изгиба, что, как мы уже убедились на примере преобразования подковы (п. 1.1.3), приводит к образованию фрактальной структуры. При этом «капля» хорошо перемешивается с неокрашенной жидкостью и образует характерные разводы, более или менее равномерно окрашивая всю притягивающую область.

За связь с непредсказуемым хаотическим движением, а также за наличие фрактальной структуры аттракторы динамических систем, демонстрирующих хаотическое движение, получили название *странных аттракторов* (strange attractor). Понятие о странных аттракторах было введено Рюэлем и Таккенсом (D. Ruelle, F. Takens, 1971 г.) при обсуждении перехода к турбулентности.

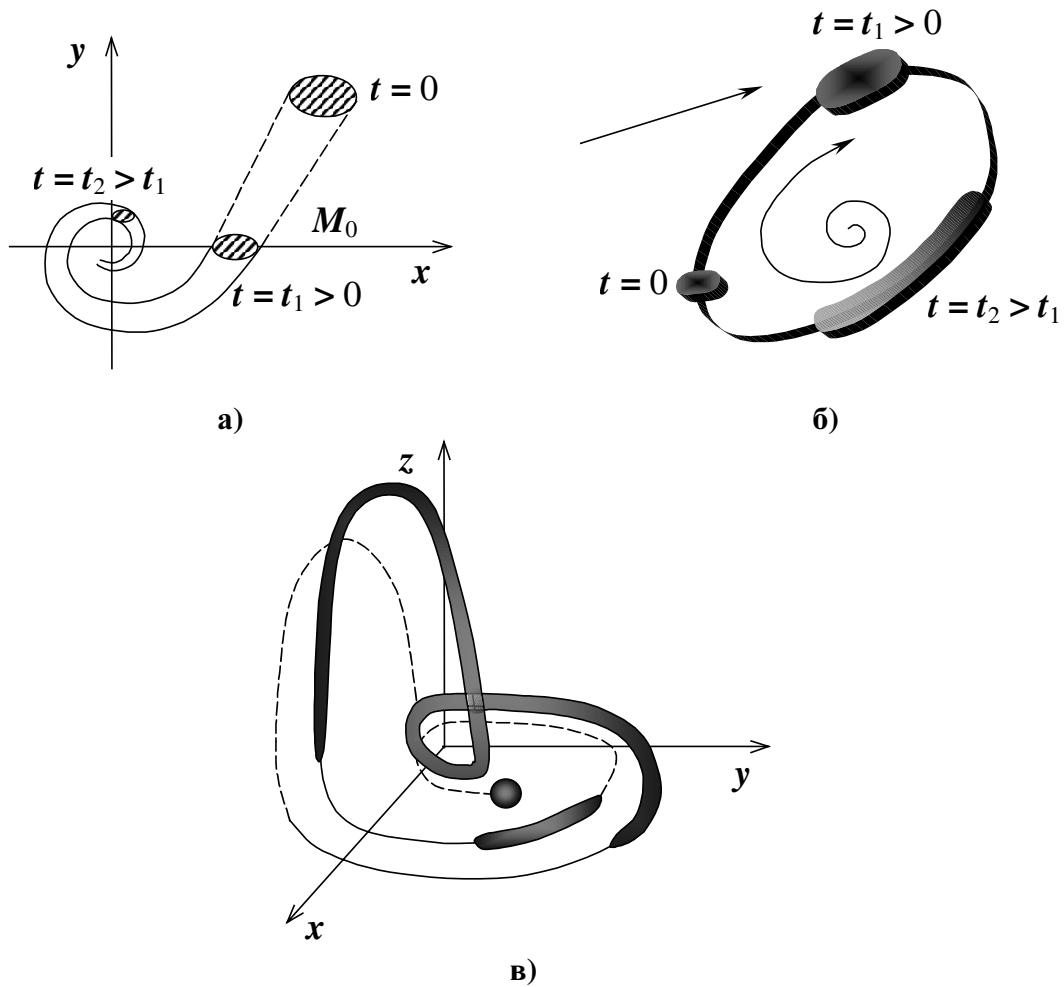


Рис. 1.10. Эволюции капли «фазовой» жидкости

Хаотические движения детерминированных систем впервые обнаружил американский метеоролог Э. Н. Лоренц (E. N. Lorenz, 1963 г.), исследовавший систему вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.7)$$

При $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ эта система имеет странный аттрактор с размерностью $D = 2,05 \pm 0,01$, изображение которого, образованное интегральными кривыми в фазовом пространстве, удивительно напоминает крылья бабочки с узором, похожим на разводы, получаемые при перемешивании красок.

Отметим, что система (1.7) была выведена Лоренцем при упрощенном моделировании процессов тепловой конвекции в земной атмосфере. Из наличия у этой системы странного аттрактора следует, что погода и

климат в своей основе непредсказуемы, так что долгосрочный прогноз погоды невозможен. Чувствительность к начальным условиям, ведущую к хаосу в системе (1.7), Э. Лоренц назвал «эффектом бабочки», поскольку потоки воздуха в атмосфере Земли при такой чувствительности могут зависеть от взмаха крыльев бабочки. Говорят также, что полет мухи в Кембридже может привести к изменению погоды в Индии [15].

Еще одним проявлением аналогии между перемешиванием жидкостей и детерминированным хаосом является следующий удивительный опыт, описанный в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» [22].

Если налить немного глицерина в промежуток между стенками двух коаксиальных цилиндрических стаканов близких диаметров (рис. 1.11), капнуть туда несколько капель краски и повернуть внутренний стакан примерно на 10 оборотов, то краска и глицерин хорошо перемешаются. Однако если после этого вы повернете его на столько же оборотов в обратном направлении, то краска отделится от глицерина и ее распределение будет примерно таким же, как до вращения.

Если же краска и глицерин перемешиваются достаточно долго, то возврат к первоначальному состоянию невозможен.

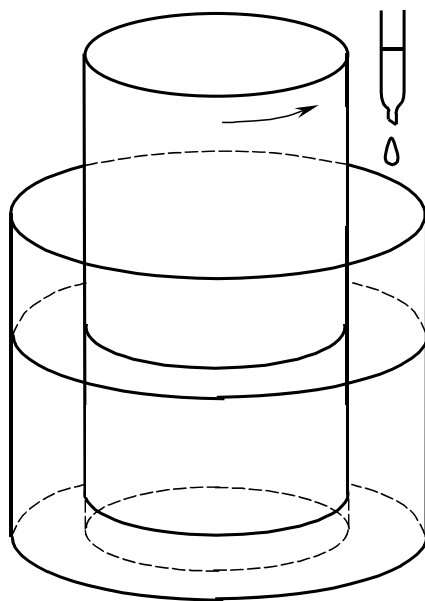


Рис. 1.11. Перемешивание краски и глицерина

Точно так же движение динамических систем, подверженных динамическому хаосу, можно обратить на малых масштабах времени, когда неустойчивость не успевает себя проявить.

Так, если после нескольких соударений бильярдного шара со стенками (см. рис. 1.7) заставить его двигаться с той же скоростью, но в обратном направлении, то весьма вероятно, что шар повторит свою траекторию

и вернется в исходную точку. Если же число соударений при прямом движении столь велико, что шар «забывает» о своем первоначальном положении, то обратить движение уже не удастся, как не удастся собрать капли краски после достаточно долгого вращения стакана в описанном выше опыте.

Примеры проявления детерминированного хаоса, рассмотренные выше, связаны с расхождением траекторий по закону $e^{\lambda t}$, где λ – показатель Ляпунова. Для таких систем непрерывная зависимость решений от начальных условий нарушается лишь при $t \rightarrow \infty$. В работе [23] хаос такого рода предложено называть «слабым» (weak) хаосом. Там же отмечено, что возможны хаотические движения, связанные с нарушением непрерывной зависимости решений от начальных условий за конечное (и даже сколь угодно малое) время.

Для иллюстрации этого вида неустойчивости рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (1.8)$$

Эта задача имеет тривиальное решение $u \equiv 0$. Если же вместо (1.8) рассмотреть слегка отличное (возмущенное) начальное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx,$$

то получим

$$u = f(x, t) \equiv \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{sh} nt.$$

Легко видеть, что $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. новое начальное усло-

вие стремится к невозмущенному, однако новое решение при сколь угодно малом времени может (за счет члена $\operatorname{sh} nt$) сколь угодно сильно отличаться от невозмущенного решения $u \equiv 0$.

Хаос, связанный с неустойчивостью такого типа, называется «сильным» (strong) и может проявиться, например, при распространении возмущений в средах, нелинейные свойства которых приводят к смене гиперболического типа уравнений движения на эллиптический [23]. В частности, это возможно в эластичных средах, имеющих падающий участок на зависимости напряжения от растяжения.

1.2.2. Хаос и размерность систем

Возможность проявления детерминированного хаоса в динамических автономных системах вида (1.6) существенно зависит от их размерности. Можно показать, что в двумерном пространстве хаотические траектории невозможны, поскольку в нем могут существовать только такие аттракторы, как точки равновесия, бесконечность и предельные циклы. Допустим, например, что диссипативная система имеет (рис. 1.12) два инвариантных множества – точку равновесия P и предельный цикл C [15]. (Напомним, что инвариантными называются множества точек в фазовом пространстве, по которым, раз попав на них, все остальное время движется изображающая точка.)

Траектория, начинающаяся внутри кривой C , остается там навсегда, так как в противном случае она пересекла бы эту кривую, что, по теореме единственности, невозможно. Той же теоремой запрещены и самопересечения траектории движения. Тогда единственно возможными остаются движение к точке P (см. рис. 1.12, а) или движение к предельному циклу C (см. рис. 1.12, б).

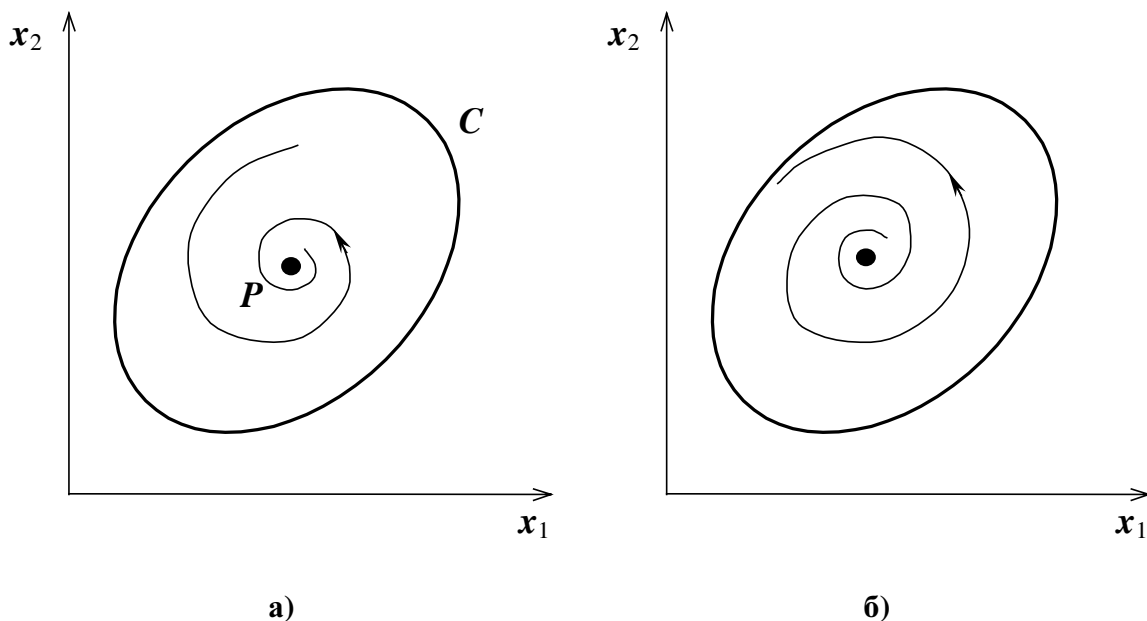


Рис. 1.12. Точка равновесия и предельный цикл

Для трехмерных систем и систем более высокого порядка ограничения, накладываемые теоремой единственности, оказываются более слабыми, поскольку траектории имеют возможность избегать друг друга, выходя из плоскости в пространство. Благодаря этой гибкости оказывается возможным одновременное осуществление двух условий стохастичности:

а) все (или почти все) соседние траектории внутри некоторой области разбегаются;

б) все они остаются внутри некоторого ограниченного объема фазового пространства.

В случае неавтономных уравнений хаос возможен и в системах второго порядка. Так, в некоторой области изменения параметров хаотичными могут стать колебания нелинейного осциллятора под воздействием внешней периодической силы, описываемые уравнением Г. Дюффинга (G. Duffing, 1918 г.)

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + ax + bx^3 = F \cos \omega t. \quad (1.9)$$

Заметим, что формально неавтономное уравнение второго порядка можно записать в виде системы трех автономных уравнений. Так, (1.9) может быть переписано в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y - ax - bx^3 + F \cos z, \\ \frac{dz}{dt} = \omega. \end{cases}$$

Это в какой-то мере объясняет возникновение хаотических движений в неавтономных системах второго порядка.

То, что периодическое возмущение может привести к случайному поведению, иллюстрирует простая механическая система, представляющая собой шарик в плоском ящике с неровным дном (рис. 1.13).

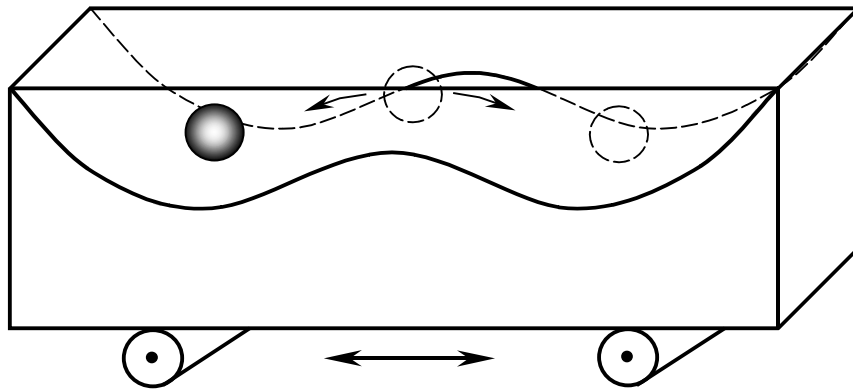


Рис. 1.13. Хаотическое движение шарика в ящике с неровным дном

Когда этот прибор покоится, шарик имеет два устойчивых и одно неустойчивое положения равновесия. Если же ящик совершает горизонтальные периодические движения достаточно большой амплитуды, то шарик начинает беспорядочно перепрыгивать из одной ямы в другую. «Разбегание» траекторий в этой системе связано с наличием неустойчивой точки равновесия на вершине среднего холмика.

Если рассматривать уравнения с отклоняющимся аргументом, то хаотические решения могут иметь место и в случае более простых систем – обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, x(t - \tau)) \quad (1.10)$$

и даже алгебраических уравнений

$$x = f(x(t), x(t - \tau))$$

или

$$x_n = f(x_n, x_{n-1}), \quad (1.11)$$

где $x_n = x(n\tau)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\tau > 0$ – временная задержка (лаг).

Введение отклоняющегося аргумента в дифференциальные уравнения позволяет уменьшить их размерность и тем самым избежать трудностей при идентификации математических моделей, содержащих ненаблюдаемые (т. е. не измеряемые напрямую) физические переменные (см. также раздел 3.1). Следовательно, уравнения с отклоняющимися аргументами являются образами некоторых систем более высокой размерности, наподобие двумерных теней от объемных предметов на стенах пещеры Платона. Поэтому неудивительно, что в случае дифференциально-разностных и разностных уравнений хаос может проявиться и в системах, порядок которых меньше не только трех, но и двух.

Вспомним также о том, что порядок обыкновенного дифференциального уравнения совпадает с числом начальных условий, необходимых для однозначного определения его решения. Поскольку постановка начальной задачи для уравнения (1.10) требует задания значений x на всем интервале, содержащем бесконечно большое число точек, то порядок уравнения с отклоняющимся аргументом можно считать (по этому критерию) бесконечно большим. Это является еще одним объяснением возможности возникновения хаоса в системах с запаздыванием.

В качестве примера уравнения вида (1.10), допускающего хаотические решения, приведем уравнение Маки–Гласса (M. C. Mackey, L. Glass, 1977 г.)

$$\frac{dx}{dt} = -bx + a \left[\frac{x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)} \right], \quad n > 1, \quad (1.12)$$

описывающего процессы регенерации больных кровяных шариков при хронической лейкемии [20].

Примером разностного уравнения, имеющего хаотические решения, является логистическое отображение

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad (1.13)$$

введенное в 1845 г. П. Ф. Ферхюльстом для описания динамики популяций в закрытой среде (x_n – относительная численность особей популяции в n -й год). Линейный член в правой части (1.13) описывает рост или рождение,

а нелинейный член ответственен за ограничение роста, связанное с недостатком энергетических или пищевых ресурсов (величина $1 - x_n$ пропорциональна «свободной» части жизненного пространства).

Модель (1.13) весьма полезна для иллюстрации некоторых закономерностей перехода к хаосу, поэтому исследуем ее более подробно.

Графическое решение уравнения (1.13) может быть получено путем построения графика функции $f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$ в координатах (x_n, x_{n+1}) (рис. 1.14).

Динамика системы (1.13) изобразится ломаной кривой 123456..., которая «притягивается» к точке равновесия P (рис. 1.14).

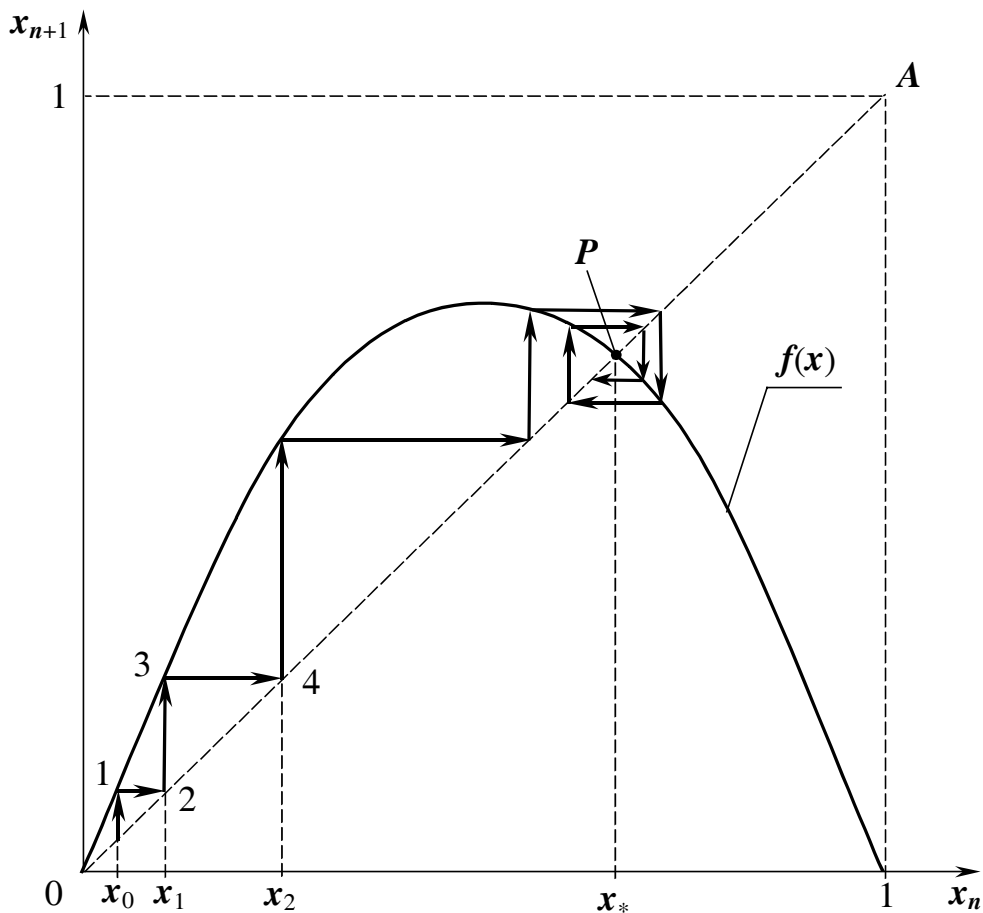


Рис. 1.14. Логистическое отображение

Отметим, что точки равновесия x_* определяются из решения уравнения $x_* = f(x_*) \equiv \mu x_*(1 - x_*)$.

Для функции, представленной на рис. 1.14, это уравнение имеет два решения:

$$x_* = 0 \quad \text{и} \quad x_* = 1 - \frac{1}{\mu},$$

т. е. кроме точки P имеется еще одна точка равновесия – начало координат O . Построив ломаную траекторию, выходящую из любой близкой к O точки, можно показать, что эта точка равновесия является неустойчивой: малейшее смещение вправо от O приводит к быстрому росту величины этого смещения.

Рассмотрим типы движений, возникающих при различных значениях параметра μ .

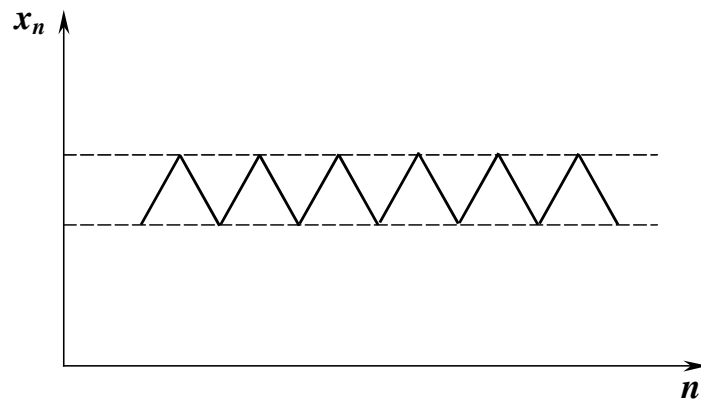
1. $0 < \mu \leq 1$. Система имеет только одно положение равновесия $x_* = 0$, и оно устойчиво. Так, если $\mu = 0,5$ и $x_0 = 0,8$, то $x_1 = 0,08$, $x_2 = 0,0368$, $x_3 = 0,0177$, ...
2. $1 < \mu \leq 3$. При $\mu = 1$ происходит бифуркация, в результате которой точка равновесия $x_* = 0$ теряет устойчивость и появляется новый аттрактор $x_{*2} = 1 - \frac{1}{\mu}$. Так, если $\mu = 2$ ($x_{*2} = 0,5$) и $x_0 = 0,1$, то $x_1 = 0,18$, $x_2 = 0,2952$, $x_3 = 0,4161$, $x_4 = 0,4859$, $x_5 = 0,4996$, ...
3. $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$. При $\mu = \mu_1 = 3$ точка равновесия x_{*2} становится неустойчивой и вместо нее появляется устойчивый предельный цикл, соответствующий колебаниям с периодом 2 (рис. 1.15, а).
4. $1 + \sqrt{6} < \mu \leq \mu_\infty = 3,5699$. При $\mu = \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ двукратный цикл сменяется четырехкратным (см. рис. 1.15, б), который, в свою очередь, при $\mu = \mu_3 \approx 3,54$ сменяется циклом периода 8, и т. д.

Таким образом, за счет последовательного удвоения периода, движение постепенно усложняется до тех пор, пока при значении $\mu_\infty \approx 3,56994$ не произойдет переход к хаосу (см. рис. 1.15, в). Величина μ_∞ является точкой сгущения последовательности бифуркационных значений $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, причем, начиная с некоторого n , выполняется асимптотический закон Фейгенбаума [24]

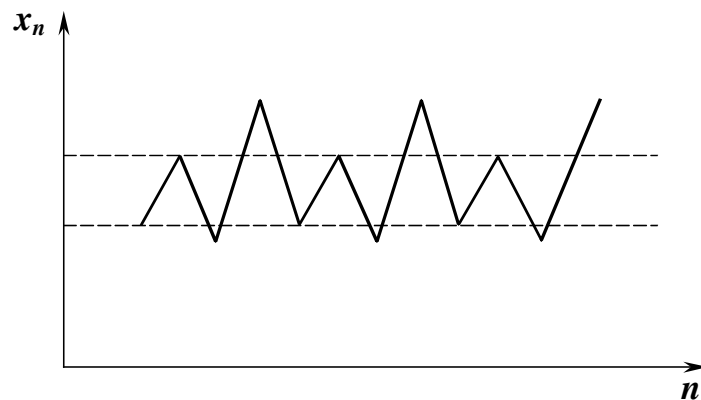
$$\mu_n = \mu_\infty - \frac{c}{\delta^n}, \quad (1.14)$$

где $\delta = 4,66920$ – число Фейгенбаума.

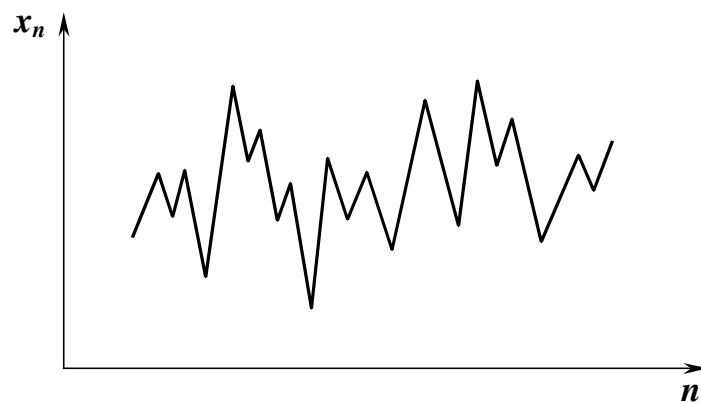
Закон (1.14) имеет универсальный характер, поскольку он проявляется во многих численных и физических экспериментах в системах самой различной природы. Можно утверждать, что переход к хаосу путем последовательного удвоения периода движения, подчиняющийся закону (1.14), является одним из универсальных сценариев возникновения случайных движений в детерминированных системах. Другие возможные пути перехода к хаосу широко обсуждаются в специальной литературе [4, 5, 15, 20, 21].



а)



б)



в)

Рис. 1.15. Усложнение движения по логистическому закону

1.3. Репликации нелинейной динамики

Согласно Г. Хакену [2, 25] синергетику следует рассматривать как наиболее разработанную теорию самоорганизации, которая может быть применена к широкому кругу разнообразных явлений в сложных системах самой различной природы. В этом качестве синергетика уже стала социо-

культурным феноменом, оказавшим мощное влияние на все науки, изучающие сложные природные объекты. Всем им свойственна эмергентность (от англ. emerge – «появляться»), т. е. наличие интегративных свойств, не выводимых из известных свойств элементов и способов их соединения. Взаимодействие микроскопических элементов приводит к появлению на макроскопическом уровне качественно новых свойств и особенностей. Цель синергетики состоит в том, чтобы соединить эти два уровня – микро- и макроскопический. Она показала, что в большинстве случаев новые структуры создаются не некоей организующей рукой, а самими системами.

Под влиянием внешних потоков энергии и вещества структурные модули, составляющие сложные системы, взаимодействуют друг с другом нелинейным образом, хаотично «пробуя» различные формы коллективного поведения.

По мере возрастания интенсивности внешних потоков система подходит к точке выбора (бифуркации), после которой начинает преобладать некоторый выделенный тип кооперативного поведения.

Синергетика предложила также способы «сжатия» огромного количества информации, которую необходимо было бы обработать при описании системы как совокупности ее отдельных частей. Такое «сжатие» возможно, поскольку изменения системы в макроскопических масштабах управляются **параметрами порядка**, число которых невелико (принцип подчинения). В определенном смысле параметры порядка действуют как кукловоды, заставляющие кукол плясать [25].

Известным физическим примером, иллюстрирующим этот принцип, является кювета с жидкостью, подогреваемой снизу. Параметром порядка здесь является разность температур между нижней и верхней поверхностями жидкости. Как показывают опыты, когда разность температур превышает некоторое критическое значение, внезапно становится видимым макроскопическое конвективное движение жидкости, порождающее ячеистую структуру наподобие пчелиных сот (ячейки Бенара, см. рис. 1.16). Здесь изменением одного параметра удается организовать управление движением огромного количества молекул, подверженных хаотическому тепловому движению.

Примером аналогичной бифуркации в коллективном поведении общества людей является появление единого ритма в аплодисментах зрителей по окончании всем понравившегося концерта: эти аплодисменты переходят в едиனுдушные ритмические хлопки, когда управляющий параметр системы (энтузиазм аудитории) превосходит некоторый порог [14].

Следует, однако, отметить, что в последнем примере управляющий параметр не задается извне (как температура подогрева жидкости в кювете), а вырабатывается самой системой. В системах живой природы (в отличие от физических систем) управляющие параметры в определенном

смысле можно рассматривать как переменные. Но, по сравнению с действиями, которые они вызывают, они меняются более «медленно».

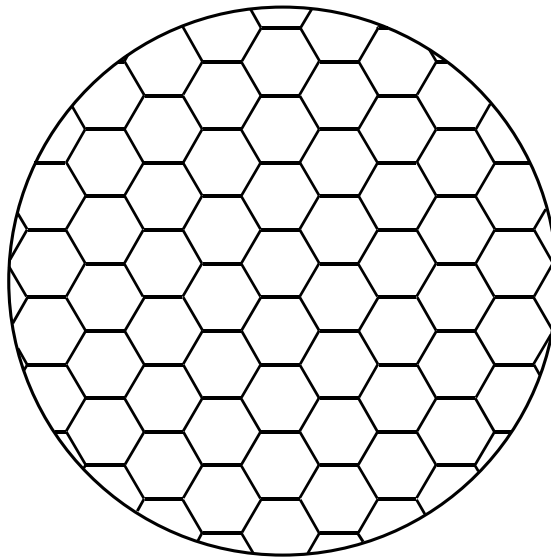


Рис. 1.16. Вид сверху на подогреваемую снизу жидкость при конвекции Бенара

Синергетика предоставляет возможность построения моста между естественными науками и науками о человеке. В частности, она дает некоторое представление о том, как поток неупорядоченных сигналов, воспринимаемых органами чувств, преобразуется в упорядоченные сигналы [14].

В работе [26] построена синергетическая модель социокультурной эволюции, позволяющая провести плодотворные аналогии между динамикой фотонов в лазере и взаимодействием информационных «квантов» или **мемов** (от англ. *meme* – «память») в человеческом сообществе. По Р. Доккинзу, в основе эволюции культуры лежит репликатор (от *replicate* – «отражать», «копировать») – самовоспроизводящаяся единица информации, культурный образец [26]. Репликатор создает свои более или менее точные копии (реплики, мемы), которые сами могут быть репликаторами, мутируют и конкурируют с другими репликаторами. Культурная эволюция, согласно этой модели, представляет собой цепь переходов к новому стилю мышления (новому порядку) через хаос в моменты бифуркаций, когда побеждают наиболее активные мемы. Аналогично этому, когда плотность фотонов в лазере становится выше критической, между усиливающимися волнами света возникает конкуренция, и, в конце концов, одна волна побеждает все остальные – возникает когерентное излучение.

Двигателями культурной эволюции являются изобретатели новых репликаторов. Архетип таких генераторов идей составляет бессознательная противоположность устоявшемуся мнению, тому, что человек настойчиво утверждает в своем сознании, уступая сложившимся нормам. К. Г. Юнг называет такого культурного героя **трикстером** (от *trick* – «трюк») [26].

Типичным примером такого процесса самоорганизации общественного сознания является история становления самой синергетики, видимой нам как история структурирования мышления новым репликатором, несущим идею самоорганизации (самоорганизация теории самоорганизации [26]; трикстерами синергетики справедливо считать Г. Хакена и Б. Мандельброта). Эта идея, зародившись в физике (нелинейной динамике), проникает в самые различные области науки. В каком-то смысле в этом проявляется «историческая тенденция физики проглотить предметы, которые до этого казались никоим образом с ней не связанными» [27]. Следует подчеркнуть, что синергетику не следует рассматривать как очередной рецидив механицизма («физикализма» [25]). Она признает, что, кроме законов физики, существуют еще и другие, дополнительные законы, связанные с возникновением новых качеств сложных систем.

В. В. Тарасенко отмечает [11], что введение фрактальной концепции шло не по пути изменения или введения новой, неевклидовой аксиоматики, а по пути создания устойчивых **практик узнавания** фрактала в феноменах математики и природы. По существу, Мандельброт разрушил евклидианскую исследовательскую программу. Он и представление о фрактале вводил фрактально: вначале он ввел «затравку» – сам термин «фрактал», – а затем запустил интересующий механизм самоорганизации научного понятия путем развития ассоциаций между термином «фрактал» и объектами природы [11].

Отметим, что трикстер – далеко не идеальный герой, он часто ассоциируется с плутом и обманщиком, способным изменять свой облик, любящим коварные розыгрыши и злые выходки. Подобно Меркурию, его природа двойственна – наполовину животное, наполовину божественное [26]. Может быть, в этом причина того, что на ранних этапах развития теории новые идеи часто используются без должного критического анализа, имеющиеся данные «подгоняются» под модную теорию. Не миновала чаша сия и синергетику. Тем не менее в конкурентной борьбе идей репликации синергетики уверенно побеждают, насыщая науки о сложных природных системах новыми постановками задач и предоставляя новые методы анализа и управления. Ниже приведены некоторые примеры применения синергетических подходов в различных областях человеческой деятельности и, в частности, в нефтяной науке.

1.3.1. Хаос и порядок

Хаос и порядок образуют диалектическую пару категорий, неотделимых друг от друга. Как уже отмечалось, в сложных системах, управляемых малым числом параметров порядка, возможно возникновение структур с хаотичной динамикой. Такой вид хаоса является детерминирован-

ным, и синергетика позволяет обнаружить детерминированную основу, порядок в этих случайных колебаниях. Но одновременно, согласно И. Пригожину, и хаос лежит в основе порядка, поскольку эволюция сложных систем есть цепь бифуркаций, в окрестностях которых возникает хаос, помогающий сменить старый порядок на новый. Таким образом, хаос несет и конструктивное начало.

(Конечно, переходный хаос может привести и к негативным результатам. Так, 15 июля 1977 г. Нью-Йорк внезапно погрузился в темноту. Причиной катастрофы был переход энергетической системы города из равновесного состояния в хаотическое, вызванный дисбалансом выработки и потребления электроэнергии. Неожиданно из энергетической системы города выпал крупный потребитель. Системы автоматики и диспетчерской службы не успели отключить эквивалентную этому потребителю, по существу, работающую на него генерирующую станцию. Образовался разрыв между генерацией энергии и ее потреблением, и в результате энергетическая система перешла из состояния равновесия в хаотическое.)

Отметим, что понятие красоты также оказывается неразрывно связанным с диалектической парой «порядок – хаос».

Истинно красивым является что-то неожиданное, новое (хаос), внезапно прерывающее установившееся, привычное (порядок). Чтобы подчеркнуть новизну, должна существовать привычная основа [28]. Так, во время хоровода повторяющиеся движения танцоров, вставших в круг, время от времени прерываются неожиданными элементами, придающими танцу красоту и притягательность.

Идея хаоса как парадоксальной, изменчивой основы видимого порядка вещей была близка русской классической литературе. Набоков писал: «Мир Гоголя сродни таким концепциям в современной физике, как «вселенная-гармошка» или «вселенная-взрыв»; он не похож на спокойно вращавшиеся подобно часовому механизму миры прошлого века. В литературном стиле есть своя новизна, как и в пространстве, но не многим из русских читателей хочется нырнуть стремглав в гоголевский магический хаос».

Ди Культер, директор Института педагогических исследований в Боулдере, считает, что слушание джазовой музыки стимулирует творческую работу и помогает решать вопросы, которые не поддаются простым решениям [29]. Джаз врывается в хаос и из хаоса создает порядок. Культер считает, что музыка Майлза Дэвиса, Джона Колтрейна и авангардного композитора Джона Кейджа способна завести слушателя в область тета-сознания – область высокотворческих волн мозга, которые связаны с художественным и духовным прозрением.

В то же время музыка Моцарта стимулирует генерацию мозгом бета-волн обычного сознания (но очень качественных). И наоборот, рок, рэп и другие музыкальные жанры, которые основаны на ритмах и являются ин-

тенсивным отражением понятия времени, хороши для развития способностей детей. «Некоторые из наших районов являются зонами войны, – считает Культер. – Для того чтобы выжить в таких условиях, подросткам нужно развивать достоинство и самосознание. Эта музыка помогает им сфокусироваться. Она заостряет их способность к самоорганизации».

Несмотря на то, что у джаза общие корни с роком и рэпом, он не является средством выживания. Он не управляется ритмами и не является расслабляющим. «В некотором смысле джаз представляет собой идеальное состояние, – говорит Культер. – Он заставляет обращать внимание на то, на что нужно ответить, не будучи уверенным в том, что последует дальше. Наша жизнь напоминает джаз. Если мы хотим прожить ее достойно, нас должен привлекать джаз своей непредсказуемостью». Эта музыка, утверждает Ди Культер, чрезвычайно тонкая. «Вам нужно почувствовать ритм, для того чтобы чувствовать все извивы джаза. Сложность заложенных в джаз мыслей просто поражает меня. Чувство времени, юмор, внимание, уважение и качество слушания, заложенные в джазе, просто потрясают».

В одном из недавних интервью Уинтон Марсалис, виртуозный трубач и блестящий дирижер джазового ансамбля в Нью-Йорке, сказал: «Исполнение джаза показывает, как нивелировать различия, даже тогда, когда они представляют собой противоположности. Вот почему детям обязательно нужно слушать джаз. Джаз учит вас, как вести диалог, обеспечивает цельность. Возможно, наше внутреннее устройство должно быть построено по Моцарту, но для того чтобы познавать мир, чтобы знать, как вести себя в аэропорту, совершать покупки в крупном супермаркете, «шарить» по интернету, чтобы функционировать социально в этом мире, нам нужно понимать джаз. Джаз помогает выйти из этого мира и вернуться к нему, оркеструя все жизненные фазы таким образом, чтобы не было нервного срыва».

1.3.2. Пределы прогноза

Синергетическое представление эволюции сложных систем как цепи бифуркаций, в окрестности которых проявляется сильная неустойчивость (траектории «разбегаются»), привело к установлению факта существования **горизонта прогноза**, т. е. конечного интервала времени, в пределах которого возможен динамический прогноз [30]. Так, по некоторым оценкам, горизонт прогноза в метеорологии составляет около одного месяца.

Вызывает сожаление тот факт, что нефтяная наука (по крайней мере в России) не уделяет достойного внимания изучению возможностей прогноза в своей области. Так, при защите проектов разработки нефтяных месторождений принято обсуждать так называемые «госплановские» формы – подробные таблицы с прогнозом добычи нефти, числа работающих и

бездействующих скважин, темпов бурения и других технологических показателей, – составленные на десятки лет вперед. В то же время объективное сравнение проектных показателей с фактическими показывает, что предел динамического прогноза в нефтяной промышленности не намного превышает один год. При обсуждении прогнозных значений коэффициента извлечения нефти – доли общих запасов нефти, которая может быть добыта за весь период разработки месторождения – идут жаркие дискуссии о величине третьего (!) знака после запятой, когда исходные данные известны с погрешностью в среднем от 30 до 50%.

Невозможность долговременного прогноза связана также с тем [31], что спектр распределения энергии E по частотам f в сложных системах часто имеет степенной вид

$$E \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad (1.15)$$

где $\beta \sim 1$.

Сигналы с распределением вида (1.15) называются *фликкер-шумом* (от англ. flicker – «мерцание»). Спектр (1.15) принадлежит к широко распространенному классу гиперболических зависимостей, встречающихся в рекордно большом числе наук, от сейсмологии и метеорологии до экономики и лингвистики.

Столь большая распространенность объясняется тем, что зависимость (1.15) тесно связана с фрактальностью, являясь масштабно-инвариантной [6].

Гиперболический спектр распределения означает, что медленные процессы в сложных системах имеют большую интенсивность. В качестве аналогии, еще раз иллюстрирующей универсальность этого распределения, приведем пример стареющего человека: в молодости он движется широкими шагами (частота шагов мала) и брызжет энергией, а в старости мелко семенит (большая частота шагов), теряя остатки сил.

Тот факт, что значительная часть энергии связана с очень медленными процессами, и ограничивает возможности долгосрочного прогноза. Сколь долго бы мы ни накапливали информацию о процессах, идущих в системе, всегда найдутся явления, которые начинают проявляться позже [31].

В истории различных стран также наблюдается связь между масштабом («энергией») социальных движений и характерными временами развития [32]. Вот почему Россию, с ее огромными размерами и большими временами эволюционных циклов, всегда преследуют крупные потрясения, да и сама она берется за решение только «великих» задач.

Еще одна причина трудностей прогноза заключается в том, что, как уже отмечалось ранее, управляющие параметры сложных систем являются

их внутренними переменными. Это может привести к **эффекту Эдипа** (К. Поппер, 1943 г.), состоящему в том, что предсказание (прогноз) может влиять на прогнозируемое событие [30]. Классическим примером эффекта Эдипа является влияние предсказаний Маркса и Энгельса на историческое развитие капиталистического мира [33]. Будем надеяться, что популярные сейчас мрачные прогнозы относительно вымирания населения России, полученные путем экстраполяции существующих тенденций, подтолкнут правительство (и население!) к энергичным мерам, которые сделают прогнозируемое невозможным.

Вот еще один пример своеобразной связи будущего с настоящим: начиная некоторое дело, мы часто мысленно видим его результат, ради которого все и делается. Без этого будущего нет настоящего. В этом смысле жизнь любого человека зависит от жизни его ребенка не в меньшей, а иногда в гораздо большей степени, чем от жизни его родителей.

Эффект Эдипа необходимо принимать во внимание при прогнозе цен на нефть в ходе технико-экономического обоснования крупных инвестиционных проектов в нефтяной промышленности.

Еще более ограничивает предсказательную силу наук, связанных с человеческой деятельностью, **парадокс Хайека** [33]. Фридрих фон Хайек, нобелевский лауреат по экономике, показал, что проявления законов экономики или социологии зависят от общественного сознания и традиций, сложившихся в обществе. Очевидно, что это существенно затрудняет формулировку объективных законов экономики. Получается, что экономика как наука есть, а законов у нее нет. Хайек исследовал огромную область, находящуюся между инстинктом и разумом, – область традиций – и выяснил, что традиции лежат в основе многих поступков и общественных движений. На языке синергетики можно сказать, что традиции являются влиятельными параметрами порядка в человеческом обществе. Необходимо отметить, что традиции не являются результатом сознательного творчества. Они возникают естественным путем самоорганизации.

Парадоксом Хайека, в частности, объясняются трудности, возникающие при попытках модернизации нефтяной промышленности России. Может оказаться, что внедрение современных технологий будет более эффективным, если оно будет производиться с учетом традиций, менталитета имеющегося технического персонала.

Итак, долгосрочный прогноз в сложных системах невозможен. Для таких систем первостепенной задачей науки является не точный расчет эволюции, а установление общих принципов, идей, запретов, сценариев, качественной картины явлений [31]. Мы вряд ли сможем предсказать пути развития, но мы можем определить спектр возможных путей и на этой основе принять обоснованные управленческие решения.

1.3.3. Холистический подход к описанию сложных систем

Холистический (от англ. whole – «целый») подход подразумевает глобальное описание и необходим в случае сложных систем, когда традиционные редукционистские методы не позволяют выполнить обозримый анализ тенденций из-за чрезмерно большого числа значимых переменных.

Возможность холистического описания связана со «сжатием» информации за счет введения параметров порядка. Как правило, холистические модели представляют собой «медленные» уравнения, связывающие друг с другом эти параметры.

Примером холистического взгляда на мир является картина «Гранат и ангел» Сальвадора Дали (см. рис. 1.17). Здесь изображены все этапы развития граната: от зернышка к веточке, цветку и плоду. Симптоматично то, что в христианстве гранат является символом бессмертия души и воскресения.

Переход от редукционизма к холистическому описанию означает переход от детерминистских моделей к феноменологическим. Покажем необходимость такого перехода на примере моделей, описывающих эволюцию объектов нефтедобычи.

В настоящее время при математическом моделировании процессов разработки нефтяных месторождений превалирует дедуктивный подход, заключающийся в расчете фильтрационных течений в реальном пласте на основе численного решения уравнений движения жидкостей и газов в пористой среде.

Господствует убеждение в том, что к описанию месторождения в целом можно перейти, только поняв и описав в деталях частные механизмы и уравнения. Это – методология механистического редукционизма, лежащая в основе мышления большинства современных исследователей и основанная на успехах классической механики, основатели которой рекомендовали «гипотез не измышлять» (И. Ньютон) и выводить все результаты, исходя из единых законов движения.

Однако обширный опыт моделирования сложных природных объектов, накопленный в различных областях науки, показывает, что дедуктивный подход, несмотря на свою привлекательность, может иметь только ограниченное применение [30, 31, 34, 35, 36].

Детерминированные модели (а модели дедуктивного уровня принято называть именно так) полезны как инструмент для проведения математических экспериментов, целью которых является выработка стратегии (идеологии) управления. Расчеты с использованием дедуктивных моделей, реализованных в виде стандартных пакетов программ (ECLIPSE, MORE и т. д.), весьма продуктивны, поскольку заменяют собой дорогостоящие натурные эксперименты, но они не могут быть использованы для реального мониторинга или же для прогноза реальной динамики развития.

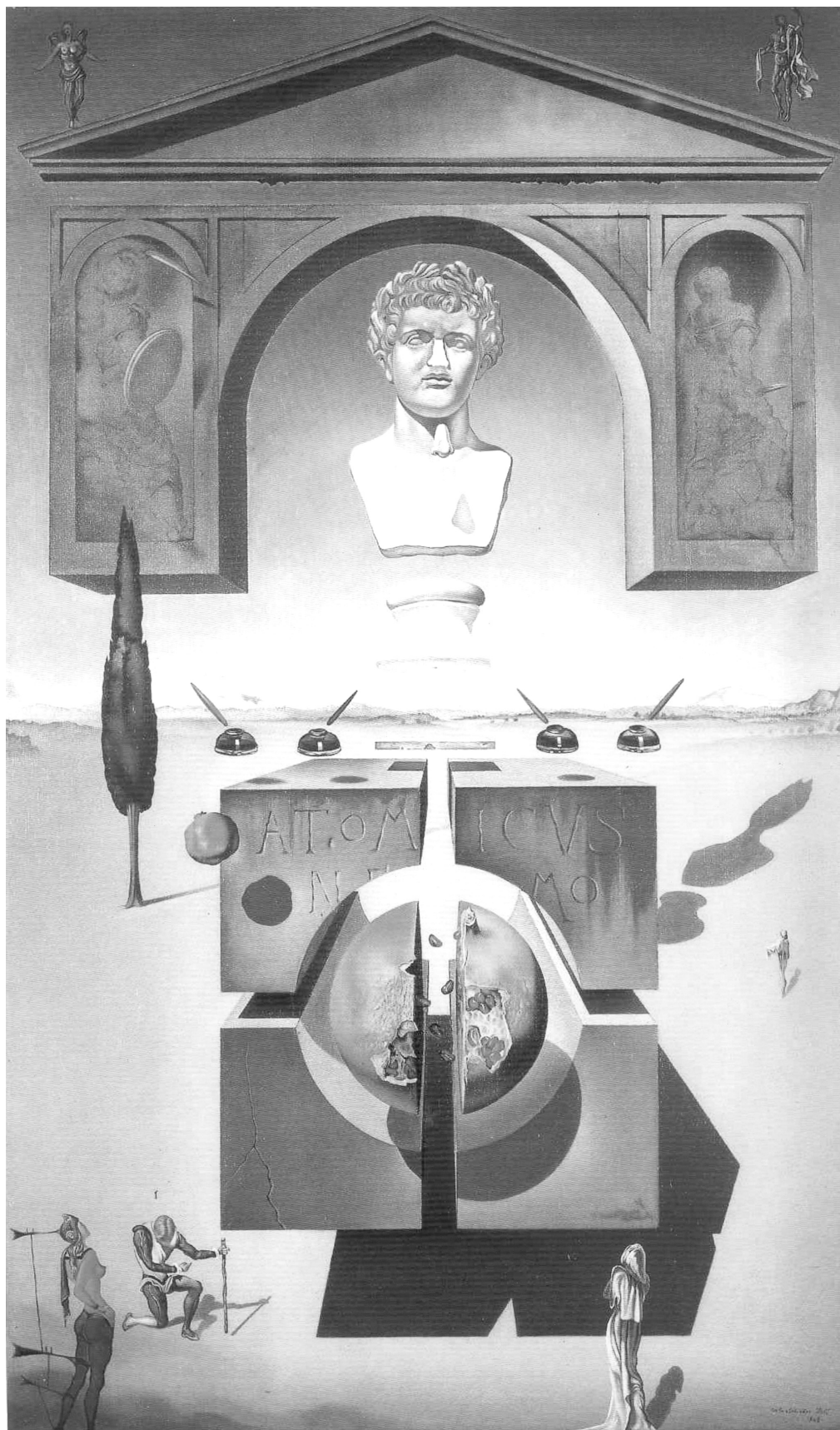


Рис. 1.17. Сальвадор Дали: «Гранат и ангел»

Это так же верно, как и то, что нельзя надеяться описать человеческое мышление, решая квантово-химические уравнения движения молекул, из которых состоит мозг.

И дело здесь не только в том, что дедуктивные модели оказываются избыточно сложными. Основная проблема связана с утратой целостности описания при попытках построения детерминированных моделей [36].

Так, предположим, что в нашем распоряжении имеется симулятор, идеально точно описывающий все особенности фильтрации многофазных многокомпонентных жидкостей в сложно построенных неоднородных пластах. Но даже с помощью этого инструмента реальную добычу нефти невозможно будет предсказать точно, поскольку, например, динамика бурения скважин (от которой, в основном, и зависят темпы отбора нефти) дедуктивным образом не может быть определена. Она обычно вводится в программу «руками» и может оказаться сколь угодно далекой от реализованной впоследствии динамики бурения, определяемой инвестором с учетом его финансовых возможностей и потребностей рынка в нефти. Невозможно также заранее спрогнозировать динамику аварий, влияние сезонных ограничений и пресловутого «человеческого фактора».

Наряду с этими ограничениями, носящими внешний характер, имеются и внутренние трудности детерминированных моделей – отсутствие достоверной информации о детальном геологическом строении пласта и большие погрешности в промысловых данных. Так, точность геолого-геофизических материалов настолько низка [37], что трехмерные геологические и (особенно) гидродинамические модели, построенные с помощью сейсмических данных и определения проницаемости по ГИС, не более чем фикция (погрешность определения проницаемости по ГИС – 100%). В этих условиях интегральные одно- или двумерные модели более точны, чем трехмерные, поскольку ошибки при интегрировании взаимно погашаются.

Итак, дедуктивное описание месторождения может быть получено только за счет пренебрежения погрешностями данных и разрыва большого числа связей, соединяющих пласт с внешним окружением (другими объектами разработки, насосным и поверхностным оборудованием, системами управления и принятия решений).

Поэтому применение дедуктивных (детерминированных) моделей и приводит к потере целостности. Вследствие этого управление процессами разработки крупных месторождений на основе детерминированных моделей затруднено – часто прямое вмешательство, основанное на знании частных факторов, не приводит в случае сложных систем к запланированному перед началом вмешательства результату [34, 36].

Задачи реального управления (мониторинга) процессами разработки нефтяных месторождений требуют привлечения иного подхода, когда сразу ищутся законы, описывающие систему в целом. Такого рода модели называются феноменологическими [34], и они оказываются весьма плодотворными.

творными, когда детальная, микроскопическая картина явлений слишком сложна. В качестве примера отметим, что типично феноменологической наукой является термодинамика, в которой законы, обусловленные микроскопическим движением молекул, выводятся из опыта и сразу представляются в виде соотношений между макроскопическими параметрами (такими как давление и температура).

При использовании феноменологических моделей история нефтяного месторождения становится историей именно всего месторождения, а не историей отдельных скважин, пластов и объектов разработки. Нефтяное месторождение рассматривается как сложная иерархически устроенная система, «погруженная» во внешнюю среду (систему управления, сеть трубопроводов и элементов поверхностного обустройства и т. д.) и чутко реагирующая на сигналы, поступающие от последней.

Следуя [38], можно сказать, что с помощью феноменологии целостность пробивается через детерминизм, как трава сквозь асфальт.

Великолепный пример холистического описания тенденций мирового развития приведен О. Доброчеевым в работе [32]. В ней отмечается, что на наших глазах происходит переход к качественно новому состоянию мирового устройства, характеризующемуся глобализацией финансовых и политических структур. По мнению автора, взаимодействие отдельных человеческих сообществ (племен, народностей, государств) в процессе хаотического расширения и конкуренции в какой-то момент приведет к самопроизвольному возникновению самоподобных социально-экономических образований, аналогично тому, как в нагреваемой снизу жидкости самопроизвольно возникают ячейки Бенара. Параметром порядка в данном случае является отношение характерной длины коммуникационных взаимодействий (корреляционной длины) к диаметру земного шара. В конце 20-го века развитие Интернета и мирового финансового рынка привело к бифуркационному состоянию, после прохождения которого, как считает автор статьи, существующий полярный мир превратится в ячеистый (см. рис. 1.18, на котором грядущее устройство мира специально представлено в виде, напоминающем ячейки Бенара, рис. 1.16).

О. Доброчеев приводит также оценку времени, необходимого для полного оформления этой картины мира. Наблюдаемые сегодня процессы политической структуризации – распад такой сверхкрупной системы, как СССР и консолидация мелких государств Западной Европы – позволяют предположить, что будущие ячейки будут иметь размеры США или Китая (около 10 млн. км²). Из исследований Н. Кондратьева известно, что характерное время циклов экономического и политического развития в структурах такого размера составляет около 50 лет. Для окончательного оформления «ячеистого» мира потребуется несколько таких циклов, т. е. порядка 100 лет.

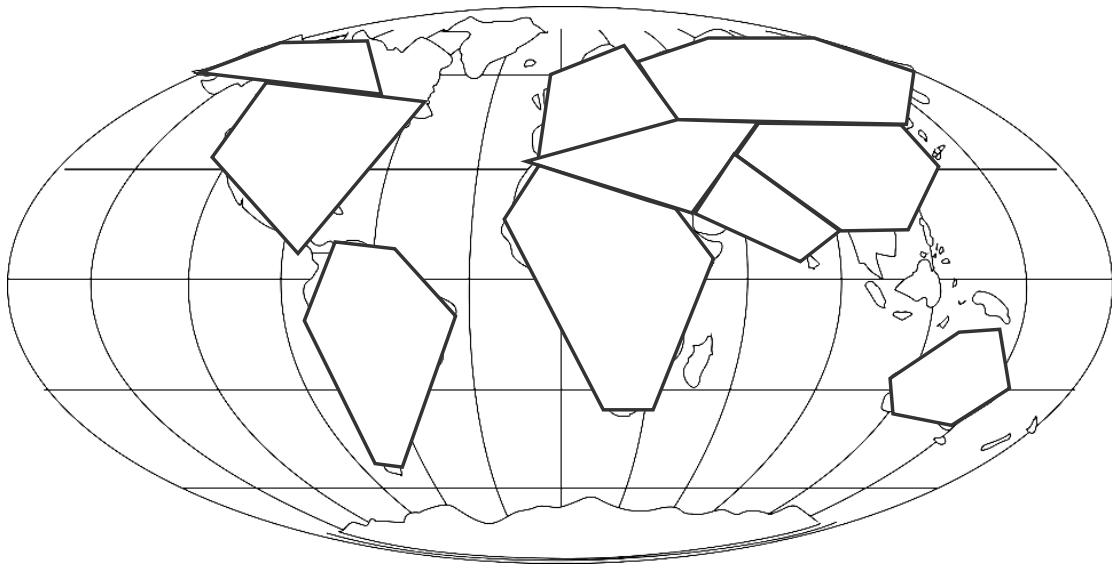


Рис. 1.18. Будущая сотовая модель мира

Интересно оценить зависимость периода циклов развития от размеров государства. Считая, что процессы переноса в экономической географии имеют диффузионный характер, можно по аналогии с характерным временем диффузии написать:

$$T \sim \frac{L^2}{D},$$

где T – продолжительность циклов развития, L – характерный размер страны, D – показатель связи типа коэффициента диффузии.

Таким образом, продолжительность цикла пропорциональна площади государства. Поскольку площадь России составляет около 17 млн. км², то длительность циклов для нее должна составить $50 \cdot 1,7 = 85$ лет. Эта оценка хорошо коррелирует с циклами в 80 лет, характеризующими Россию последних столетий (1825 – 1905 – 1985).

Приведенный пример, кроме всего прочего, обращает внимание на то, что процессы самоорганизации могут существенно зависеть от пространственных ограничений.

Во многих случаях форма важнее, чем содержание, и граница важнее того, что она ограничивает [33]. С этим эффектом связан феномен малых стран. Экономогеограф Б. Н. Зимин показал, что малые страны обладают повышенной экономической и социальной эффективностью по сравнению с большими странами (пример: Швейцария, Скандинавские страны). Критическую численность населения малой страны можно оценить исходя из того, что эффект малой страны – это эффект пирамиды прямого восприятия: большинство жителей страны знакомо друг с другом либо лично, либо через своих представителей [33].

Будем считать, что государственная «пирамида» малых стран имеет 7 уровней: высшее руководство – парламент – регионы – округа – посел-

ки – кварталы – дома. Предположим также, что среднее число людей, воспринимающих друг друга «напрямую», равно 10 и каждый «обитатель» j -го уровня государственной пирамиды представляет 10 человек низшего, $(j + 1)$ -го уровня. Легко подсчитать, что на таком «дереве» могут «расположиться» только $10^7 = 10$ млн. чел. Таким образом, малая страна не может иметь более 10–12 млн. человек населения.

Эффект границ (размеров) следует учесть при организации нефтедобывающего хозяйства. Может оказаться, что размер цехов (или других самостоятельных подразделений) будет влиять на эффективность разработки не менее, а даже более, чем выбор системы разработки.

1.4. Применение фрактальных характеристик для контроля и управления технологическими процессами

Анализ промышленной и экспериментальной информации показывает, что случайные колебания, возникающие в технических системах, часто имеют детерминированный характер. Они порождаются самой системой и поэтому могут служить важным источником информации о ее внутренних характеристиках. В частности, о состоянии объекта управления можно судить по оценкам размерности странного аттрактора, полученным известными методами теории динамических систем [20, 21, 25, 31].

Еще одно возможное применение фрактальных характеристик в технической диагностике связано с тем, что графики временных рядов замеров, снятых при нормальной работе объектов управления, часто имеют фрактальную структуру (наподобие береговых линий), что, по-видимому, является следствием пространственно-временной фрактальности явлений, определяющих эволюцию рассматриваемых систем. Исходя из этого можно предложить использовать фрактальные характеристики временных рядов замеров – размерность Хаусдорфа и показатель Херста [6, 9] в качестве диагностических критериев, определяющих состояние объектов управления. В настоящем разделе приведены конкретные примеры технологических ситуаций, в которых применение фрактальных характеристик позволяет получить практически важную информацию по данным нормальной эксплуатации, т. е. без проведения активного эксперимента.

1.4.1. Корреляционная размерность

В нелинейной динамике применяются методы регистрации детерминированных хаотических колебаний и их количественного анализа, основанные на применении таких мер, как фрактальные размерности, энтропия

Колмогорова, показатели Ляпунова [1, 4, 5, 20, 21, 25, 31]. Широко применяемой мерой упорядоченности движения является корреляционная размерность ν , которая является нижней оценкой хаусдорфовой размерности странного аттрактора и определяется через корреляционный интеграл

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N h(\varepsilon - I \vec{x}_i - \vec{x}_j I) \right], \quad (1.16)$$

где $h(z)$ – функция Хевисайда:

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

\vec{x}_i – вектор, описывающий положение изображающей точки в фазовом пространстве в момент времени $t_i = t_0 + i\tau$, $i = 1 \dots N$, τ – некоторый заданный промежуток времени, N – объем выборки.

Величина $C(\varepsilon)$ определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше ε . При малых ε корреляционный интеграл $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^\nu$, поэтому размерность ν можно определить по наклону зависимости $\ln C$ от $\ln \varepsilon$, полученной расчетом $C(\varepsilon)$ по (1.16) при различных значениях ε для достаточно больших N (конкретные рекомендации по проведению соответствующих вычислений приведены там же). Часто оказывается, что измеряемой является лишь одна из координат вектора $\vec{x}(t)$. В этом случае размерность странного аттрактора может быть восстановлена с помощью процедуры Паккарда–Такенса [20, 21], описание которой приводится ниже.

Пусть x_i – реализация одной из координат фазового пространства системы $x(t)$: $x_i = x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Введем в рассмотрение новое фазовое пространство (пространство вложения) размерности m , точки которого определяются векторами $\vec{Y}_j^{(m)} = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1}\}$, сконструированными из последовательных значений величины x ($j = 1, 2, \dots, n = N - m + 1$). При изменении t мы получим в этом пространстве траекторию, воспроизводящую некоторое множество, корреляционную размерность которого ν_m можно вычислить через корреляционный интеграл

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n h \left(\varepsilon - \left| \vec{Y}_j^{(m)} - \vec{Y}_k^{(m)} \right| \right)$$

по наклону зависимости $\ln C_m$ от $\ln \varepsilon$. Изменяя размерность векторов \vec{Y} проанализируем зависимость ν_m от m . Очевидно, что при малых m размерность ν_m с ростом m должна увеличиваться. Однако если регистрируемый случайный сигнал есть проявление детерминированного хаоса, то при

некотором $m = m_0$ величина v_m перестает расти. Достигнутое при этом значение v_{m_0} принимается за размерность ν странного аттрактора исходной системы и называется *размерностью реализации*. Если же рост v_m продолжается без насыщения, то это свидетельствует о том, что наблюдаемый сигнал шумовой (т. е. невоспроизводим с помощью алгоритма).

Таким образом, обычный шумовой случайный процесс можно рассматривать как движение системы на аттракторе бесконечной размерности. Конечная размерность ν означает, что данный сигнал можно воссоздать с помощью динамической системы. При решении задач управления технологическими процессами важно отличать детерминированный хаос от обычных «шумов» или помех. Дело в том, что наличие внутреннего порядка в детерминированном хаосе позволяет, в принципе, управлять им, в то время как шумовой хаос неуправляем.

Показано, что минимальное число динамических переменных, необходимое для описания наблюдаемого движения, равно $[\nu] + 1$, где $[\nu]$ – целая часть ν . Эта оценка может быть использована, в частности, для решения одной из самых сложных задач, возникающих при идентификации модели рассматриваемого процесса, – задачи определения ее сложности.

При реконструкции динамического аттрактора по замерам одной переменной возникает вопрос: какой размерности должно быть вложенное пространство, чтобы отобразить все топологические особенности исходного аттрактора? Ф. Такенсом доказано, что для почти любых наблюдаемой реализации $x(t)$ и времени задержки τ аттрактор вложенного пространства размерности m будет иметь те же свойства (ту же размерность), что и исходный, если только $m \geq m_0 = 2D + 1$, где D – хаусдорфова размерность странного аттрактора [20].

Величина корреляционной размерности является мерой упорядоченности движения и в качестве таковой может служить диагностическим критерием, определяющим состояние объектов управления.

Пример. Диагностирование состояния породоразрушающего инструмента

В процессе бурения возникает задача оценки степени износа долота с целью своевременной его замены. Косвенная оценка состояния бурильного инструмента по изменению механической скорости проходки не всегда надежна, поскольку уменьшение скорости проходки может быть связано с изменением свойств разбуриваемых пород, а не с износом долота. Оказалось, что для этой цели могут быть использованы значения корреляционной размерности, характеризующие пульсации давления промывоч-

ной жидкости. Для примера на рис. 1.19 приведены зависимости $v_m = v_m(m)$, полученные для неизношенного (кривая 1) и изношенного (кривая 2) долота по данным, снятым на станции АГКС 4 при турбинном бурении в Альметьевском УБР. Вид этих зависимостей (рост с насыщением) свидетельствует о том, что зарегистрированные колебания давления промывочной жидкости имеют детерминированную основу.

Рассмотрим математическую модель, которая позволяет выявить некоторые возможные причины возникновения динамического хаоса в процессе бурения. В рамках расчетной схемы, представленной в [39], уравнение продольных колебаний вала турбобура можно записать в виде

$$M\ddot{x} + f\dot{x} + F(x) = A\sin \omega t,$$

где M – масса вала, f – коэффициент вязкого трения, x – продольное смещение вала от равновесного состояния, $F(x)$ – упругая восстанавливающая сила, определяемая жесткостью резины подпятников и корпуса шпинделя, $A\sin \omega t$ – периодические возмущения со стороны забоя, возникающие при вращении шарошек.

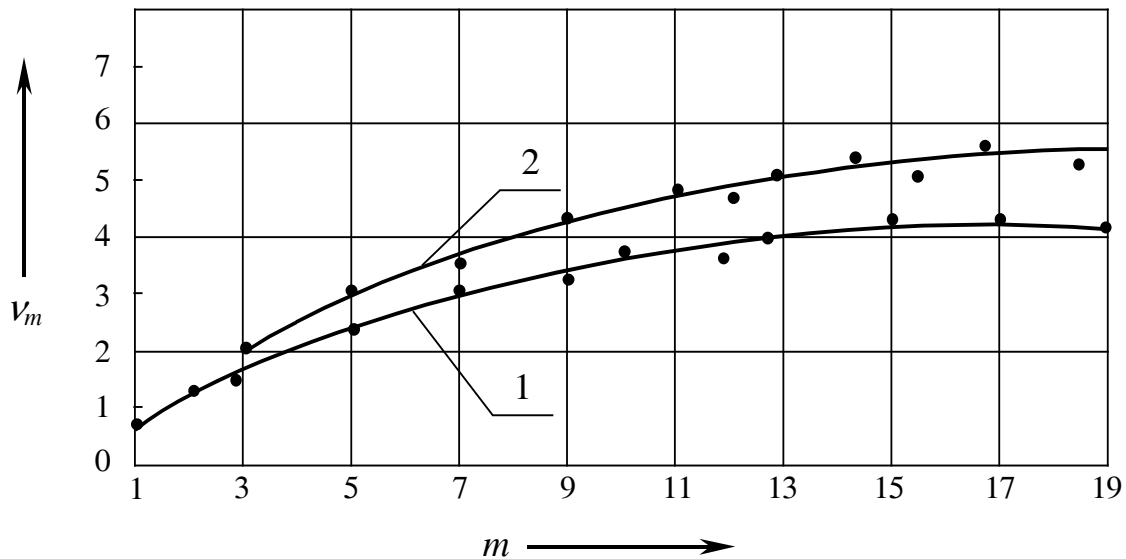


Рис. 1.19. Зависимость v_m от размерности m

Аппроксимируя упругую силу $F(x)$ гладкой кривой, можно положить $F(x) = kx + bx^3$, что приводит к уравнению

$$M\ddot{x} + f\dot{x} + kx + bx^3 = A\sin \omega t, \tag{1.17}$$

представляющему собой уравнение Дюффинга.

Как известно [20], при достаточно большой амплитуде возмущающей силы и при частотах, принадлежащих интервалу неоднозначности амплитудно-частотной характеристики, уравнение (1.17) допускает существование хаотических колебаний.

Следовательно, возникновение детерминированного хаоса можно объяснить нелинейными колебаниями вала турбобура под действием периодических возмущений, испытываемых долотом на забое.

Как правило, значение корреляционной размерности по мере износа долота растет (см. рис. 1.19). Следовательно, величину V можно использовать в качестве критерия, определяющего степень износа породоразрушающего инструмента.

Из вида модельного уравнения (1.17) ясно, что изменение корреляционной размерности может быть вызвано изменением амплитуды или частоты возмущающей силы. Следовательно, на величину V могут влиять поломка или неравномерное изнашивание зубьев долота (поскольку эти причины приводят к возникновению колебаний с частотой, меньшей, чем частота колебаний от зубчатости долота, и с амплитудой, превышающей амплитуду последних). Увеличение амплитуды вынуждающей силы может быть также вызвано износом опор качения шарошек. Своевременное диагностирование этого вида износа по величине V может позволить избежать заклинивания шарошек и, тем самым, предотвратить возможную аварию.

Предложенный критерий дополняет другие методы косвенной оценки состояния бурильного инструмента (по изменению скорости проходки, по результатам спектрального анализа пульсаций давления и т. д.) и, применяясь с ними, может повысить успешность принимаемых технологических решений.

1.4.2. Фрактальные характеристики графиков временных рядов замеров

Для повышения надежности диагностирования, наряду с корреляционной размерностью, следует использовать и другие диагностические критерии. Как показывает анализ экспериментальных данных, в качестве таковых могут быть использованы фрактальные характеристики временных рядов замеров.

Часто графики временных рядов замеров оказываются фрактальными (т. е. состоят из частей, которые в каком-то смысле подобны целому). В количественном смысле такие кривые характеризуются размерностью Хаусдорфа D , которая может быть определена путем покрытия кривой прямоугольниками с уменьшающимися сторонами $\varepsilon a \times \varepsilon b$ (раздел 1.1).

Подсчитав число $N(\varepsilon)$ прямоугольников, необходимых для покрытия кривой, рассматривают зависимость $N(\varepsilon)$ от ε . Для фрактальных кривых при

малых ε асимптотически $N(\varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon^D}$ или $\ln N = \ln C - D \ln \varepsilon$.

Размерность Хаусдорфа можно определить по углу наклона зависимости $\ln N$ от $\ln \varepsilon$. Следует отметить, что соотношение сторон прямоугольников покрытия $a:b$ определяется нетривиальным образом с учетом соотношения временных масштабов и масштабов изменения измеряемых величин.

Еще одной величиной, характеризующей фрактальные свойства временных рядов, является показатель Херста [6, 9].

Вновь выделим из исходной выборки x_1, x_2, \dots, x_N массивы данных $(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1})$, содержащих m последовательных замеров ($k = 1, \dots, N-m+1$). Определим по каждому из этих массивов размах

$$R_k = E_{\max} - E_{\min},$$

где

$$E_{\max} = \max_{1 \leq l \leq m} \left(\sum_{j=1}^l (x_{k+j-1} - M_k) \right), \quad E_{\min} = \min_{1 \leq l \leq m} \left(\sum_{j=1}^l (x_{k+j-1} - M) \right).$$

Здесь M_k – среднее по выделенному массиву значение x .

$$M_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l x_{k+j-1}.$$

Рассмотрим приведенное значение размаха, осредненного по всем массивам объема m :

$$\left(\frac{R}{S} \right)_m = \frac{1}{r} \sum_k \frac{R_k}{S_k}, \quad S_k = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_{k+j-1} - M_k)^2},$$

где r – число массивов объема m , S_k – стандартное отклонение.

Показано, что для временных рядов многих природных процессов величина $\left(\frac{R}{S} \right)_m$ растет с увеличением m по степенному закону

$$\left(\frac{R}{S} \right)_m = C m^H,$$

показатель которого H называется показателем Херста и определяется по углу наклона прямой

$$\ln \left(\frac{R}{S} \right)_m = \ln C + H \ln m.$$

Показано, что для хаотических сигналов при отсутствии долговременной статистической корреляции $H = 0,5$. При наличии же некоторого запаздывания, «памяти», показатель H увеличивается, причем для большинства природных процессов $H \approx 0,7 \dots 0,8$.

Для самоаффинных кривых величины H и D связаны друг с другом [9]:

$$H = 2 - D.$$

При подсчете H и D по реальным кривым это равенство выполняется только приближенно. Оно может быть использовано для проверки достоверности оценок фрактальных характеристик. Так, если в результате расчетов получены значения $D = 1,6$ и $H = 0,8$, то можно предположить, что при вычислениях допущена ошибка: $1,6 > 2 - 0,8 = 1,2$.

Одним из преимуществ описанного выше R/S -анализа является то, что он приводит к робастной мере статистики временных рядов, поскольку даже очень сильно негауссовские случайные процессы с независимыми значениями характеризуются одним и тем же значением $H = 0,5$ [6, 9].

Пример. Диагностирование режима работы газлифтной скважины

В газлифтной скважине подъем нефти осуществляется пузырьками газа, закачиваемого в нижнем конце подъемных труб. Проблема заключается в том, что зависимость дебита жидкости Q от расхода газа V имеет не монотонный вид: излишнее увеличение V приводит (за счет проскальзывания газа) к снижению к.п.д. газлифта и уменьшению дебита добываемой жидкости. Почти все известные методы нахождения оптимального значения расхода газа основаны на анализе так называемых регулировочных кривых: экспериментально определяемых зависимостей $Q = Q(V)$. Такой подход требует исследования газлифтных скважин на нескольких режимах работы, различающихся темпами закачки газа, что связано с перерасходом рабочего агента (газа), а также (в случае высокодебитных скважин) со значительными потерями добычи нефти. Положение осложняется тем обстоятельством, что такие исследования нужно производить достаточно часто, поскольку условия работы газлифтных скважин все время меняются.

Анализ лабораторных и промысловых экспериментов показывает, что временные ряды замеров дебита жидкости $Q(t)$, снятые при работе на неэффективной (нисходящей) ветви регулировочной кривой $Q = Q(V)$, обладают фрактальными характеристиками, существенно отличающимися от фрактальных характеристик временных рядов замеров, снятых на эффективной (восходящей) ветви. Это связано, по всей видимости, с потерей устойчивости стационарного режима работы газлифта, имеющей место при излишнем увеличении расхода закачиваемого газа [35]. В области неустойчивости возникают автоколебания, амплитуда которых значительно превышает амплитуду обычного «шума», наблюдающегося при работе в оптимальном режиме (в качестве примера рассмотрим рис. 1.20, на котором представлены замеры дебита жидкости, полученные на скв. 929 месторождения Котур-Тапе).

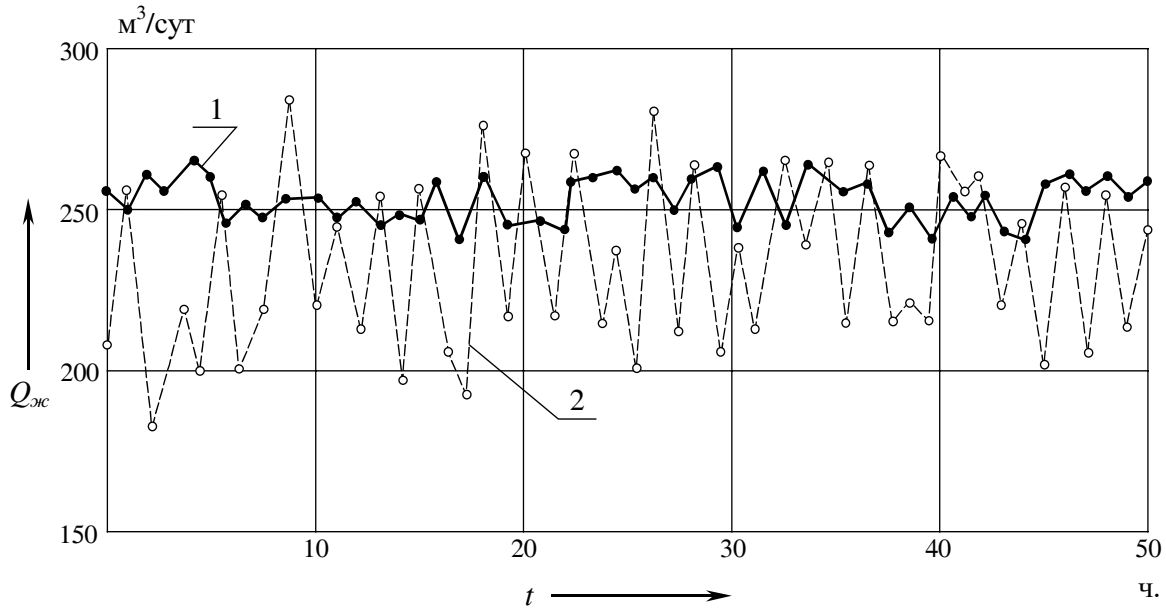


Рис. 1.20. Замеры дебита жидкости
 1 – эффективная ветвь регулировочной кривой,
 2 – неэффективная (нисходящая) ветвь.

В табл. 1.1 приведены значения показателя Херста, вычисленные по временным рядам замеров дебита жидкости, снятых на нескольких газлифтных скважинах этого же месторождения при работе в двух различных режимах. Как видим, при переходе на неэффективную ветвь значение H уменьшается. Обращает на себя внимание тот факт, что работа в оптимальном режиме характеризуется значениями H , принадлежащими области $0,7 < H < 0,8$, в которой чаще всего и располагаются показатели Херста природных процессов [6, 9].

Таблица 1.1

Значения показателя Херста

№ скважины	H	
	эффективная ветвь	неэффективная ветвь
620	0,73	0,52
929	0,71	0,50
716	0,76	0,53
1320	0,75	0,49

Таким образом, показатель Херста может быть использован для диагностирования режима работы газлифтной скважины по данным нор-

мальной эксплуатации (т. е. при работе на одном фиксированном режиме закачки газа). Это позволяет избежать затрат, связанных с проведением активных экспериментов по экспериментальному определению зависимости $Q = Q(V)$ (см. выше). При первом взгляде на рис. 1.20 может показаться, что в качестве диагностического признака можно использовать и более привычные статистические характеристики (относительное квадратичное отклонение, например). Однако анализ показывает, что величина показателя Херста является более информативным признаком. Кроме того, мы предполагаем, что фрактальные характеристики будут не заменять собой другие более известные признаки, а использоваться наряду с ними для повышения надежности принимаемых с их помощью решений.

1.4.3. Вейвлет-анализ в задачах диагностирования

Соображения о фрактальном характере природных объектов позволяют объяснить повышенное внимание к сравнительно новому методу обработки временных рядов замеров – вейвлет-анализу [40–42]. Этот метод заключается в разложении исходного сигнала по базисным функциям, полученным из некоторого прототипа (mother wavelet) путем сжатий, растяжений и сдвигов по времени. Английский термин «wavelet» означает «маленькая волна» или «всплеск». Этим названием подчеркивается то обстоятельство, что вейвлеты быстро спадают до нуля за пределами некоторого конечного интервала в отличие, например, от бесконечно осциллирующих синусоид, по которым сигнал раскладывается в рамках традиционного анализа Фурье. Компактность вейвлетов позволяет осуществить локальный анализ сигналов и проследить изменчивость их частотно-масштабных характеристик.

Поэтому основные приложения вейвлет-анализа заключаются в локализации особых точек (точек разладки) и проведении частотно-временного анализа сигналов. Из описания способа построения вейвлетов ясно, что они должны быть идеальным инструментом для раскрытия масштабно-инвариантных (фрактальных) свойств временных рядов. Если добавить, что вейвлет-анализ хорошо приспособлен к анализу нестационарных сигналов, то станет ясно, что он может стать мощной альтернативой преобразованию Фурье.

Вейвлет-анализ нашел широкое применение при диагностировании состояний объектов управления, поскольку его использование позволяет адекватным образом исследовать масштабно-инвариантную динамику сложных технических систем. Преимуществом вейвлет-анализа также является возможность локальной оценки разномасштабных частотных характеристик временных рядов, что особенно ценно при решении задач распознавания разладок.

Ниже описана методология вейвлет-анализа и приведены примеры его использования в задачах диагностики.

Вейвлет-преобразование

Многие трудности, возникающие при анализе процессов с помощью преобразования Фурье, связаны с тем, что «архитектура» реальных сигналов не может быть адекватным образом описана с помощью бесконечных гармоник.

Как правило, регистрируемые сигналы нестационарны, их частотные и масштабные характеристики со временем меняются, причем очень важно локализовать моменты, соответствующие изменению этих характеристик (моменты разладок), поскольку они, как правило, связаны с изменением состояния объектов управления.

Преобразование Фурье не позволяет решать задачу локализации. Например, оно не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с разными частотами, от сигнала, состоящего из тех же синусоид, включающихся одна за другой [40] (см. рис. 1.21).

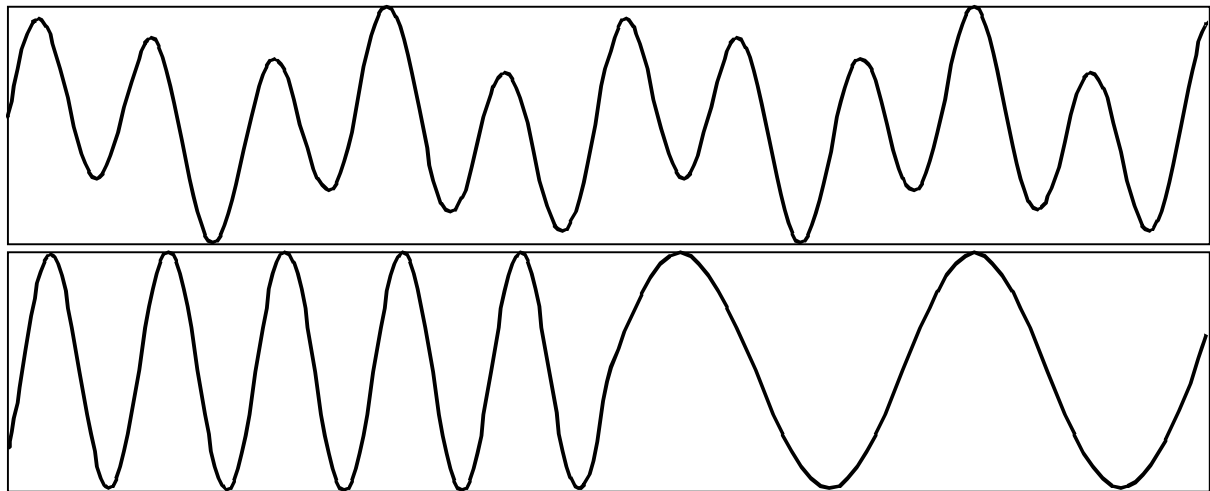


Рис. 1.21. Два сигнала с подобными Фурье-спектрами

Частично эта трудность снимается за счет использования оконного преобразования Фурье

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\Delta t, t - \tau)\exp(-i\omega t)dt,$$

где $f(t)$ – анализируемая функция, $g(\Delta t, t - \tau)$ – функция, достигающая максимума в точке $t = \tau$ (в центре окна) и быстро спадающая до нуля за пределами интервала $\left(\tau - \frac{\Delta t}{2}, \tau + \frac{\Delta t}{2}\right)$.

Таким образом, величина Δt имеет смысл ширины окна. Результаты оконного преобразования Фурье удобно представлять на плоскости время-частота (см. рис. 1.22, а). На рисунке 1.22 вертикальные линии указывают границы окон, а горизонтальные – различные значения частоты. Образованные этими линиями прямоугольники соответствуют гармоникам определенной частоты ω , локализованным с помощью окна с определенным центром $t = \tau$. Степень корреляции анализируемого сигнала с такими локализованными гармониками (определяемую коэффициентами разложения $F(\omega, \tau)$) отображают путем закрашивания прямоугольников в различные цвета (чем меньше значение $F(\omega, \tau)$, тем темнее цвет).

Для сравнения, на рис. 1.22, б представлены результаты простого (не оконного) Фурье-преобразования в проекции на ту же плоскость $\tau - \omega$. Как видим, это преобразование хорошо локализует частоту, но не позволяет получить временное разрешение.

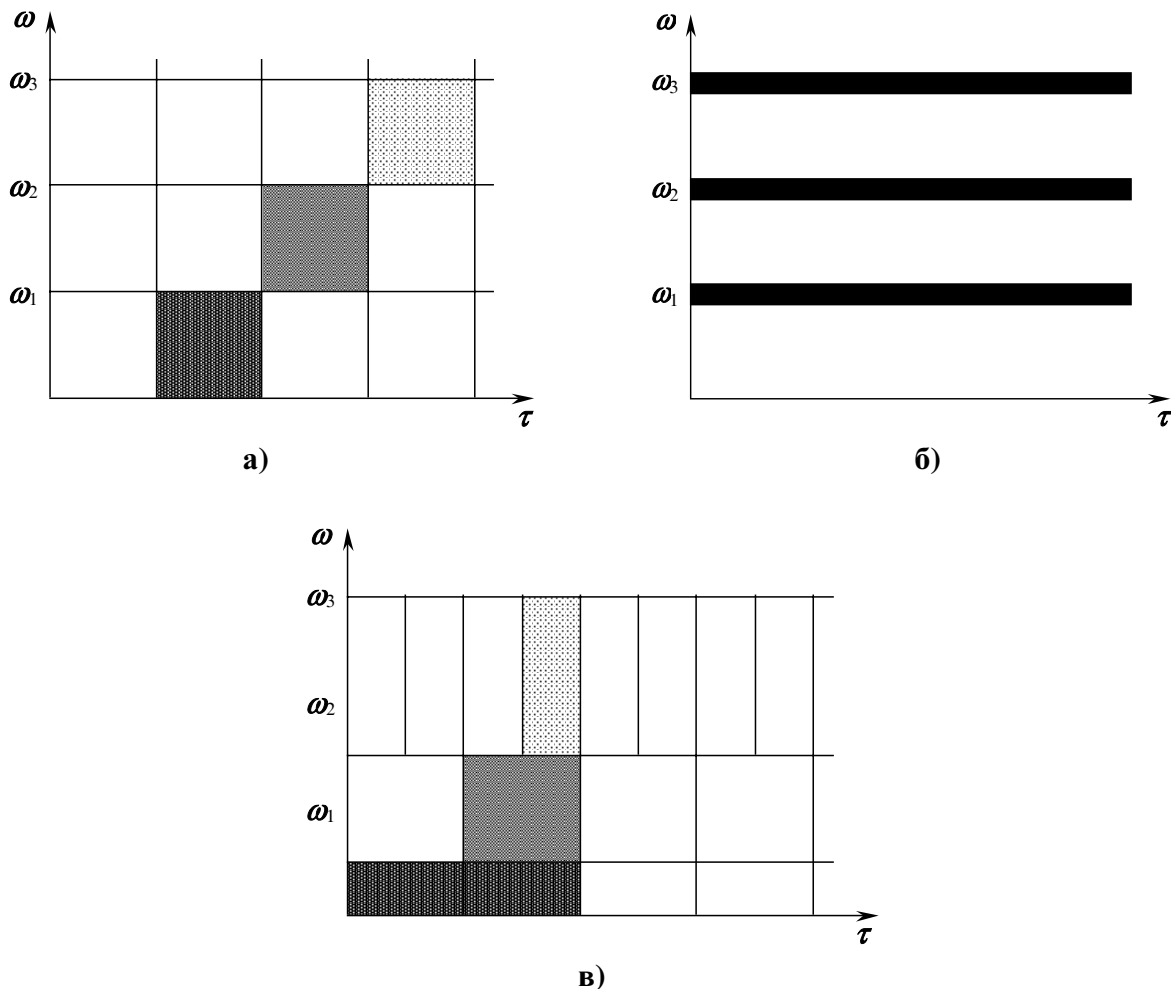


Рис. 1.22. Частотно-временная локализация преобразований

- а) – оконное преобразование Фурье;
- б) – простое преобразование Фурье;
- в) – вейвлет-преобразование.

Оконное преобразование Фурье локализует анализ, но не учитывает то обстоятельство, что реальные сигналы обычно представляют собой сумму составляющих, частота которых тем больше, чем меньше их продолжительность. Вследствие этого высокочастотная информация должна быть извлечена из относительно малых интервалов времени, а низкочастотная информация добывается на более продолжительных отрезках времени [40]. Иными словами, ширина окна должна уменьшаться с увеличением частоты, что для оконного преобразования Фурье не выполняется (см. рис. 1.22, а и сравните с рис. 1.22, в).

Конечно, при практическом применении Фурье-анализа все упомянутые выше нюансы в той или иной мере учитывались путем проведения различных экспериментов с окнами переменной ширины. Наконец, эта (зачастую интуитивная) деятельность привела, вместе с осознанием масштабной инвариантности природных процессов, к появлению формализованного аппарата вейвлет-анализа.

Интегральное вейвлет-преобразование функции $f(t)$ записывается в виде [40]

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{s\tau}(t) dt,$$

где $\psi_{s\tau}(t)$ – вейвлет-функции, полученные из некоторого материнского вейвлета $\psi_0(t)$ растяжением по горизонтали в s раз, сжатием по вертикали в \sqrt{s} раз и сдвигом по оси времени на отрезок τ :

$$\psi_{s\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t-\tau}{s}\right).$$

Обратное вейвлет-преобразование имеет вид [40]

$$F(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0\left(\frac{t-\tau}{s}\right) w(s, \tau) \frac{ds d\tau}{s^2},$$

где C – нормализующий коэффициент,

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty,$$

где $\hat{\psi}_0(\omega)$ – Фурье-образ функции $\psi_0(t)$.

Вейвлеты представляют собой всплески, образованные несколькими осцилляциями, быстро спадающими до нуля за пределами базового интервала. В табл. 1.2 приведены наиболее часто употребляемые вейвлеты. Отметим, что первые два вейвлета комплекснозначны, и на рисунках изображены их вещественные и мнимые (штриховые линии) части.

Основные признаки вейвлет-функции:
она должна быть ограничена:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(t)|^2 dt < \infty,$$

и иметь нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t) dt = 0.$$

Часто для подавления медленно меняющихся составляющих сигнала $f(t)$ требуют равенства нулю не только нулевого, но и нескольких первых моментов:

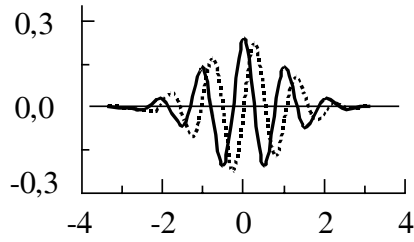
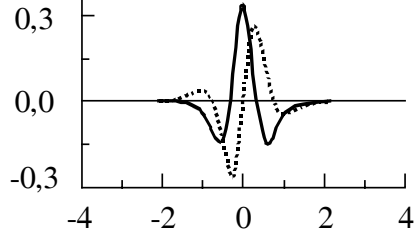
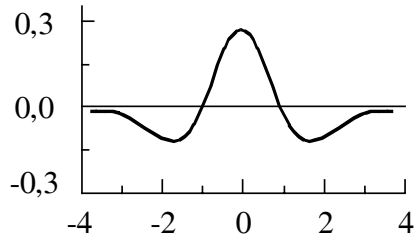
$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi_0(t) dt = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Полная энергия сигнала может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде [40]

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{C} \iint w^2(s, \tau) \frac{ds d\tau}{s^2}.$$

Таблица 1.2

Основные типы вейвлетов

<p>а) Вейвлет Morle:</p> $\psi(t) = \pi^{-1/4} \cdot e^{jt} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$	
<p>б) Вейвлет Paul:</p> $\psi(t) = (1-it)^{-2}$	
<p>в) Вейвлет DOG:</p> $\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$	

Таким образом, величина $w^2(s, \tau)$ характеризует плотность энергии в пространстве (τ, s) .

Поскольку сжатие вейвлета приводит к увеличению частоты его осцилляций, то разложение по вейвлетам подобно оконному преобразованию Фурье с шириной окна, уменьшающейся при увеличении частоты гармоники (см. рис. 1.22, в). Изменчивость частотно-временного окна позволяет вейвлет-анализу одинаково хорошо выявлять и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов, т. е. «увидеть и лес, и деревья» [42].

Диагностирование с помощью вейвлетов

Из сказанного выше ясно, что вейвлет-анализ колебаний («шумов»), зарегистрированных в ходе нормальной эксплуатации объектов управления, может стать эффективным инструментом диагностики. Преимуществом этого метода перед анализом Фурье является адекватность изменчивой, разномасштабной структуре реальных сигналов.

Вейвлет-представление позволяет:

- локализовать особые точки;
- проанализировать частотную и амплитудную изменчивость сигнала;
- выявить нерегулярные выбросы функции и её производных;
- вычислить фрактальные характеристики сигнала.

В качестве одной из иллюстраций возможностей метода рассмотрим вейвлет-преобразование двух модельных сигналов (см. рис. 1.21) с помощью материнского вейвлета МНАТ.

В верхней части рис. 1.23 приведены распределения значений коэффициентов разложения $w(s, \tau)$ (по горизонтали – переменная τ , по вертикали – ось s в логарифмическом масштабе, светлые тона соответствуют большим значениям коэффициентов w). Как видим, МНАТ-преобразование позволяет четко различить два сигнала и обнаружить момент разладки для второго сигнала.

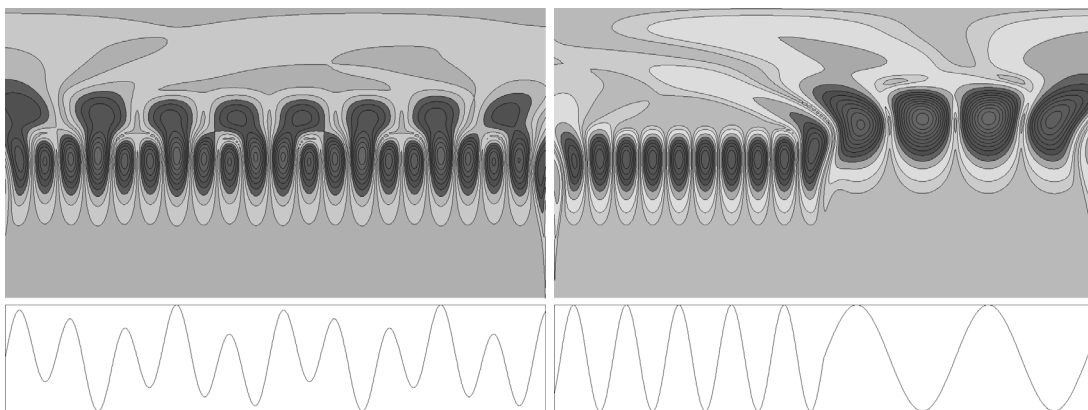


Рис. 1.23. Результат вейвлет-преобразования (МНАТ) для модельных сигналов

В ряде случаев вейвлет-представление можно рассматривать как формализацию приемов анализа временных рядов, разработанных ранее, исходя из других позиций. Так, существует глубокая связь между методами обнаружения системы состояния по изменению производной сигнала [43] и вейвлет-анализом. Для иллюстрации этого рассмотрим МНАТ-преобразование функции с особенностью – разрывом производной (рис. 1.24). Вейвлет-преобразование (верхняя часть рис. 1.24) точно указывает на расположение особенности [41].

Эту точку можно было бы обнаружить и напрямую, путем численного дифференцирования временного ряда. Однако, как известно, дифференцирование экспериментальных данных является некорректной операцией из-за неустойчивости относительно ошибок замеров (см. [44], а также раздел 2.1.3). Поэтому диагностирование по производной при наличии «шумов» затруднительно. А вот вейвлет-преобразование, как показывают расчеты, дает устойчивые результаты даже при достаточно большой «зашумленности» данных. Регуляризирующие алгоритмы вычисления производных связаны с удалением шумов и перемасштабированием, что и делает вейвлет-преобразование. Таким образом, вейвлет-анализ обладает регуляризирующими свойствами.

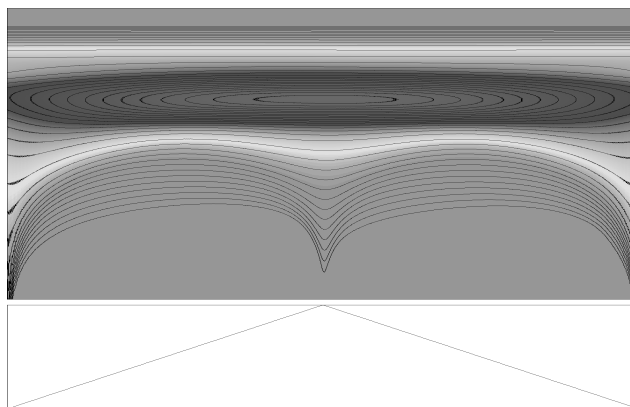


Рис. 1.24. Вейвлет-преобразование функции с разрывом производной

Пример диагностирования состояния оборудования с помощью вейвлет-анализа

В заключение рассмотрим конкретный пример использования вейвлет-анализа для диагностирования состояния бурильного долота по измерениям случайных колебаний давления промывочной жидкости $P(t)$ и осевой нагрузки на долото $G(t)$, произведенным в ходе бурения скважины.

На рис. 1.25 приведены результаты вейвлет-анализа колебаний осевой нагрузки $G(t)$ в начале (а) и конце (б) работы долота, которое после подъема на поверхность оказалось практически неизношенным. На рис. 1.25, а (новое долото) различаются многочисленные периодически по-

вторяющиеся детали в верхней части, что соответствует низкочастотным модам. Для рис. 1.25, б (незначительно поврежденное долото) характерно появление высокочастотных составляющих в нижней части картины.

На рис. 1.26 представлено вейвлет-преобразование колебаний $G(t)$ в начале и конце работы долота, которое после подъема оказалось сильно изношенным.

В низкочастотной области на протяжении всего интервала масштабы деталей сохраняются, прослеживается похожая на периодическую структура. Когда долото изношено (рис. 1.26, б), в высокочастотной области появляется большое количество мелкомасштабных деталей, что говорит о наличии хаотических колебаний долота, вызванных его повреждениями.

Расчеты показали, что для параллельной количественной оценки технического состояния долота могут быть использованы величины:

$$X_G = \frac{E(G^K)}{E(G^H)} \quad \text{и} \quad X_P = \frac{E(P^K)}{E(P^H)},$$

где $E(G)$ и $E(P)$ – полная энергия колебаний давления промывочной жидкости и осевой нагрузки, верхние индексы H и K обозначают начало и конец работы одним долотом. (Отметим, что пределы интегрирования при вычислении энергии в начале и в конце долбления должны быть одинаковыми.)

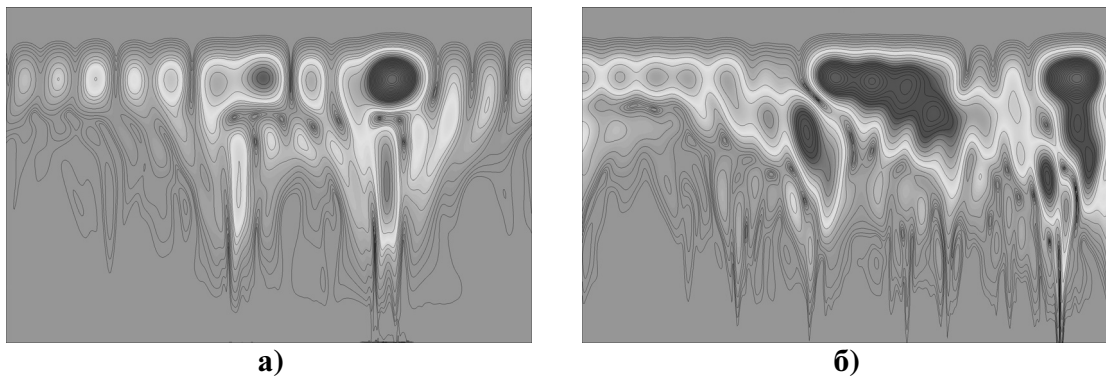


Рис. 1.25. Масштабно-временная развертка для неизношенного долота в начале и в конце интервала бурения

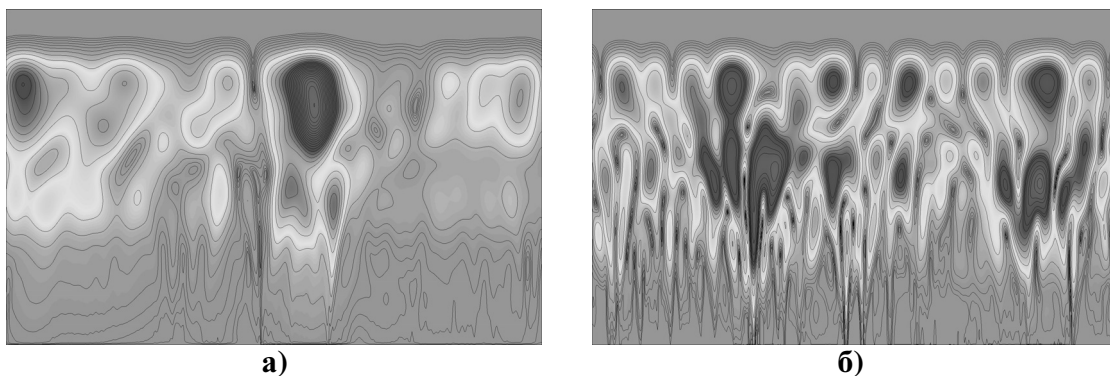


Рис. 1.26. Масштабно-временная развертка для изношенного долота в начале и в конце интервала бурения

Оказалось, что для изношенных долот $X_p \geq 3$, $X_G \geq 5$. Эти неравенства являются, наряду с рисунками вида 1.25–1.26, диагностическими критериями, определяющими состояние бурового оборудования.

1.5. Управление процессами нефтегазодобычи с помощью малых физических полей

В последние годы получены убедительные свидетельства возможности влияния слабых электрических и магнитных полей на технологические процессы.

Эти эффекты возможны, только если существуют некие механизмы, усиливающие влияние малых полей. По нашему мнению, такими «усилителями» являются неустойчивости, сопровождающие процессы в сложных природных системах, обладающих многими точками бифуркации.

Синергетика показала, что неустойчивость является символом нашего физического мира и что именно неустойчивость и флуктуации отвечают за поразительное многообразие и богатство окружающих нас форм и структур.

В мире неустойчивостей единая система расслаивается на две подсистемы, одна из которых называется *динамической*, а вторая – *управляющей* или *информационной* подсистемой [45]. Элементы управляющей подсистемы могут сильно влиять на динамику всей системы сравнительно малыми возмущениями (сигналами).

Таким образом, эффективное управление сложными объектами может быть осуществлено на пути создания иерархических систем с информационным поведением. В частности, богатые возможности для этого кроются в использовании малых физических полей.

Классическим полем, на котором «царствуют» малые величины, является область фазовых переходов. Именно в точке рождения новой фазы малые физические поля могут сослужить роль «спускового крючка», радикально влияющего на ход всего процесса. Так, весьма ощутимо влияние магнитного поля на процесс кристаллизации перенасыщенных растворов [46]. Показано, что магнитное поле значительно увеличивает скорость кристаллизации (до двух раз), что представляет большой интерес для интенсификации технологических процессов получения и очистки веществ путем кристаллизации из растворов.

На что конкретно действуют слабые электромагнитные поля? Одними из возможных «агентов влияния» могут служить двойные электрические слои, формирующиеся на границах раздела фаз. Так, экспериментально установлено [47], что при кристаллизации воды и водных растворов, а также ряда других диэлектриков на границе фаз образуется двойной электрический слой, состоящий из примесных ионов. Он вызывает появление

значительной (до сотни вольт) разности потенциалов между твердой и жидкой фазами – так называемого потенциала замерзания (эффект Воркмана–Рейнольдса). Неравномерное движение фазовых границ в процессе роста кристаллов вызывает собственное электромагнитное излучение, взаимодействующее с внешним магнитным полем. Это и может привести к обратному влиянию внешних полей на процесс кристаллизации.

Теоретические и практические исследования по электромагнитной обработке базируются на современной теории устойчивости и коагуляции дисперсных систем Дерягина–Ландау–Фервея–Овербека (теория ДЛФО), которая рассматривает агрегативную устойчивость как результат баланса вандерваальсовых сил и сил электростатического отталкивания между дисперсными частицами [48, 49]. Влияние электромагнитных полей на характеристики сложных систем объясняется такими эффектами, как поляризация двойных электрических слоев, электрофорез, структурообразование в неполярных и полярных средах и т. д. [50].

Многими исследователями отмечалась существенная роль физических полей в процессах массопереноса в пористых средах [51]. Такие эффекты тесно связаны с образованием двойного электрического слоя и электризацией жидкости при движении ее относительно твердой поверхности. Источником дополнительной электризации жидкости при движении в пористых средах является наличие в ней второй фазы (пузырьков газа, частиц песка, парафина и др.), что увеличивает число активных частиц, являющихся центрами образования двойных электрических слоев.

В работе М. И. Давидзона [52] влияние магнитного поля на воду объясняется электрическими полями, возникающими при движении диамагнитных сред в магнитном поле. Таким образом, электрические и магнитные эффекты взаимосвязаны друг с другом.

На физическом уровне «отклик» жидкости на электромагнитную обработку может быть изучен методами радиоспектрометрии [53]. Так, изучение спектров ЭПР (электронного парамагнитного резонанса) показало, что электро-, магнито- и барообработка гетерогенных сред приводит к существенному изменению концентрации парамагнитных центров, сопоставимому с изменениями, имеющими место при термообработке этих же сред. (Напомним, что упомянутые физические поля называются малыми из-за малости энергий, связанных с ними, по сравнению с энергией теплового движения.)

Для примера на рис. 1.27 приведен график изменения интенсивности линии поглощения J (в долях от исходной интенсивности), полученный при исследовании методом ЭПР образца нефти после обработки его электрическим полем.

Как видим, электрообработка приводит к уменьшению J в два раза. С течением времени эффект обработки «затухает».

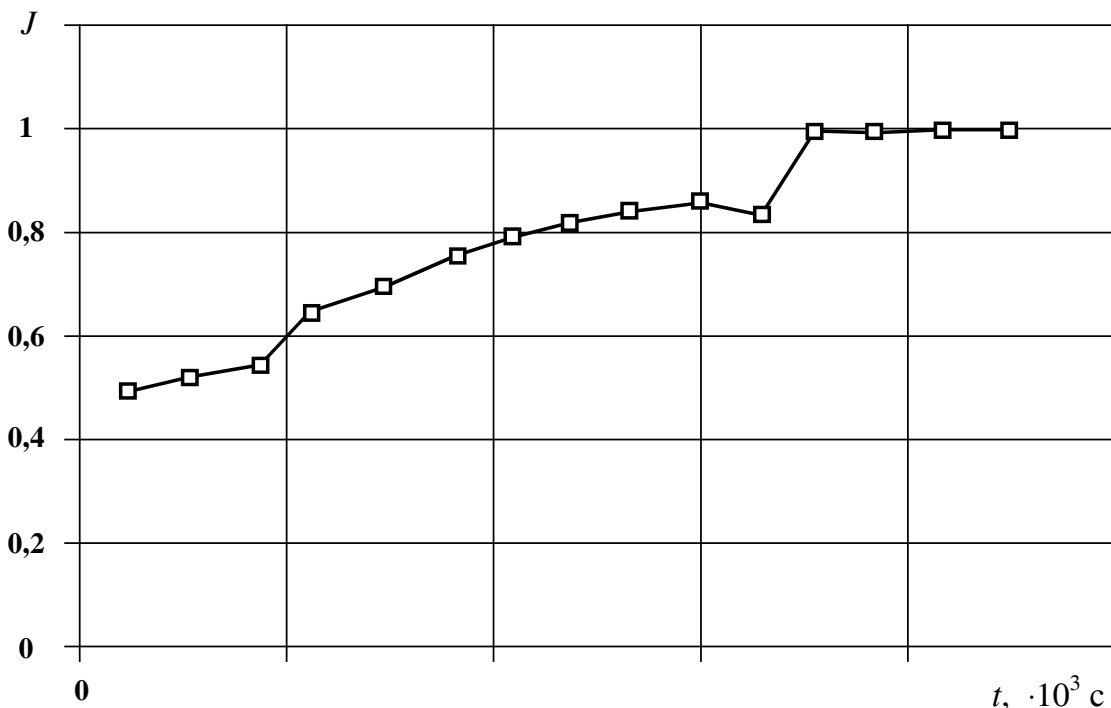


Рис. 1.27. Изменение интенсивности линии поглощения нефти после обработки электрическим полем

Под руководством одного из авторов на протяжении многих лет ведутся работы по применению физических полей для повышения эффективности процессов нефтегазодобычи. В результате разработан ряд ресурсосберегающих технологий, позволяющих повысить производительность добывающих и приемистость нагнетательных скважин, эффективно бороться с коррозией, парафиноотложением, управлять процессом солеотложения и т. д. Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

1.5.1. Влияние электромагнитных полей на движение гетерогенных сред

Многочисленные эксперименты показывают, что обработка вытесняющего агента электромагнитными полями может позволить значительно увеличить полноту вытеснения нефти из пористой среды [54]. Так, на рис. 1.28 приведены зависимости коэффициента вытеснения β от времени, полученные с помощью простой (кривая 1) и электрообработанной (кривая 2) воды. Опыты проводились на модели пласта, представляющей собой колонку высокого давления, наполненную смесью кварцевого песка (70%) с монтмориллонитовой глиной (30%). Колонка насыщалась трансформаторным маслом, которое затем вытеснялось водой типа «Шаллар». Электрообработка производилась конденсатором, на обкладках которого создавалась напряженность 3000 В/м. Как видим, обработка воды приводит к существенному увеличению коэффициента вытеснения.

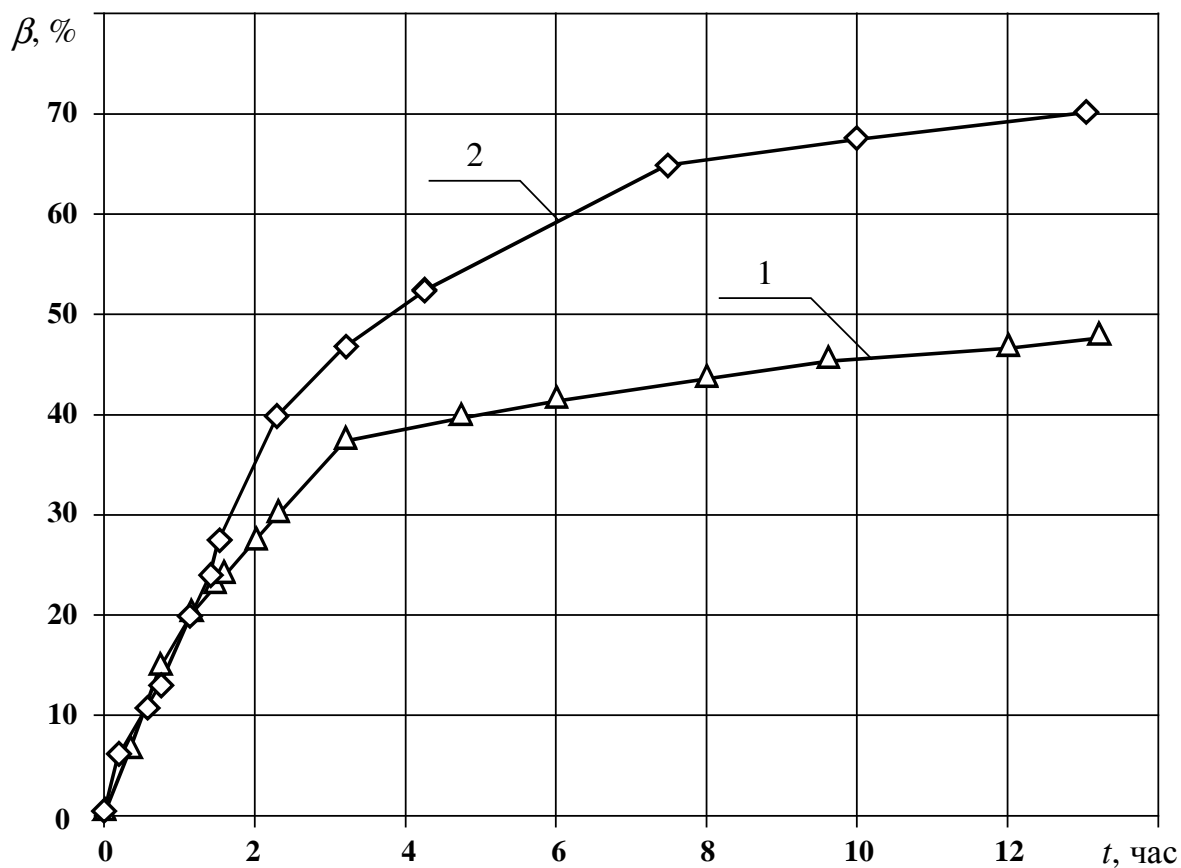


Рис. 1.28. Вытеснение нефти обычной и электрообработанной водой

Если вязкость воды намного меньше вязкости нефти, то скорость фильтрации вытесняющей жидкости (воды) намного превосходит скорость фильтрации нефти. Это приводит к потере обратной связи между движением двух жидкостей и, как следствие, к неустойчивости границы раздела с образованием так называемых «вязких пальцев». На первый взгляд, древовидная структура вязких пальцев совершенно не упорядочена. Однако анализ экспериментальных структур, полученных в ячейках Хеле–Шоу, показывает, что они имеют фрактальную структуру. Для примера рассмотрим результаты экспериментов, в ходе которых в радикальной ячейке Хеле–Шоу вода вытесняла трансформаторное масло. На рис. 1.29 приведены фрактальные структуры, образованные вязкими пальцами, при отношениях вязкостей масла (μ_2) и воды (μ_1), равных $\mu_1/\mu_2 = 1/20$ (а) и $\mu_1/\mu_2 = 1/10$ (б).

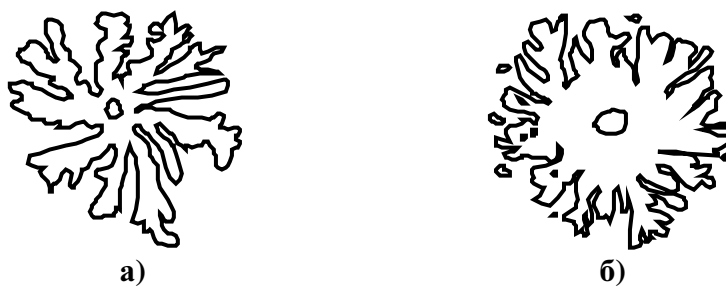


Рис. 1.29. «Вязкие пальцы» в ячейке Хеле–Шоу

Мерой изрезанности этих структур может служить размерность Хаусдорфа D , которая позволяет количественно оценить степень неустойчивости границы раздела.

Рассмотрим результаты лабораторных исследований по вытеснению нефти водными растворами полиакриламида (ПАА) с концентрациями 0,02–0,05% с применением омагниченных растворов ПАА.

Омагничивание растворов ПАА производилось путем прокачки их со скоростью 0,3 м/с через медную трубку, вставленную в зазор сердечника электромагнита напряженностью 40000 А/м.

Как и следовало ожидать, при увеличении концентрации полимера устойчивость вытеснения возрастает (см. рис. 1.30).


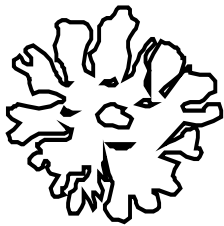
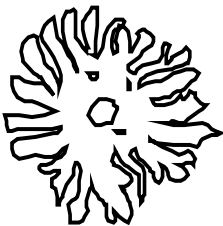
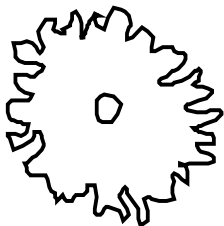
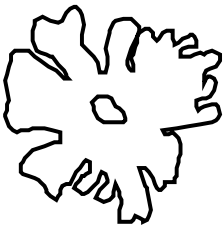
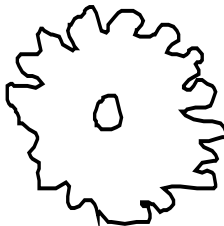
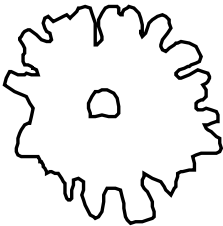
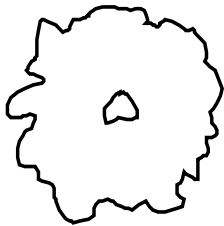
Концентрация раствора полимера	Без обработки	С магнитной обработкой
0,02%		
0,03%		
0,04%		
0,05%		

Рис. 1.30. Влияние магнитного поля на устойчивость вытеснения

Магнитная обработка вытесняющего агента делает структуру менее изрезанной, т. е. повышает устойчивость границы раздела. Эти результаты наводят на мысль о том, что применение магнитного поля может позволить уменьшить требуемую концентрацию полимера, т. е. может послужить основой ресурсосберегающих технологий.

В качестве еще одного примера опишем результаты экспериментов по изучению влияния магнитного поля на гидравлические характеристики глинистых растворов.

В ходе опытов определялась пропускная способность капилляра при движении по нему 1) глинистого раствора, 2) глинистого раствора с добавками поверхностно-активного вещества МЛ-72 и 3) глинистого раствора в постоянном магнитном поле, создаваемом электромагнитом, между полюсами которого располагался капилляр (изготовленный из немагнитного материала).

На рис. 1.31 приведены зависимости пропускной способности капилляра $\frac{Q}{\Delta p}$ от перепада давления на его концах Δp (Q – расход глинистого раствора), полученные для этих трех случаев.

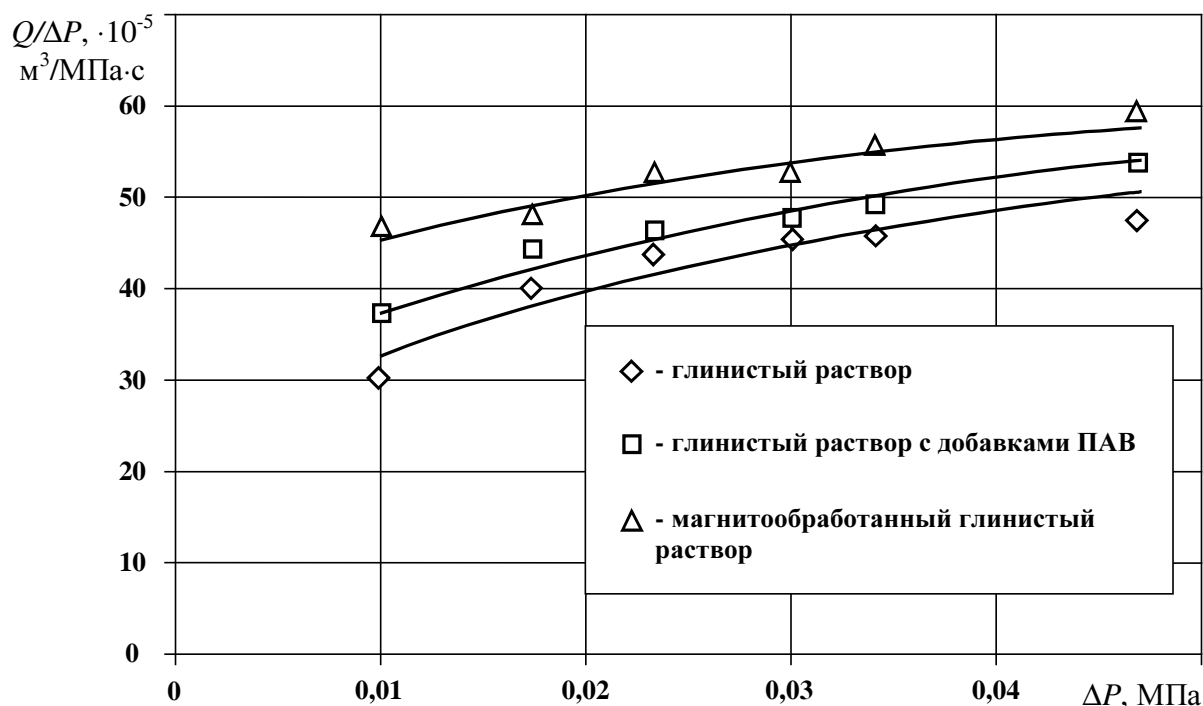


Рис. 1.31. Зависимость пропускной способности капилляра от перепада давления

Как видим, магнитное поле увеличивает пропускную способность капилляра. Можно предположить, что это влияние обусловлено воздействием магнитного поля на электрические заряды, возникающие у стенок ка-

пилляра при движении глинистого раствора. Косвенным подтверждением этого является то, что потенциал течения, измеряемый в ходе экспериментов, в присутствии магнитного поля оказывается значительно ниже. (Отметим, что добавка ПАВ также уменьшает величину потенциала течения.)

1.5.2. Магнитные поля в борьбе с осложнениями

С помощью магнитных полей можно оказывать влияние на выпадение солей. В ходе одного из экспериментов растворы солей, соответствующие по составу пробам пластовых вод НГДУ «Правдинскнефть» ОАО «Юганскнефтегаз», обрабатывались магнитным полем, после чего изучалась динамика выпадения карбоната кальция при различных температурах термостатирования. Установлено (см. рис. 1.32), что обработка магнитным полем в 1,5 раза увеличивает скорость солеобразования.

На рис. 1.33 представлена зависимость количества выпавшей соли от напряженности магнитного поля. Как видим, с ростом напряженности магнитного поля до 30 кА/м количество выпавшей соли достаточно сильно растет, а дальнейшее увеличение напряженности вызывает лишь незначительный рост солеобразования.

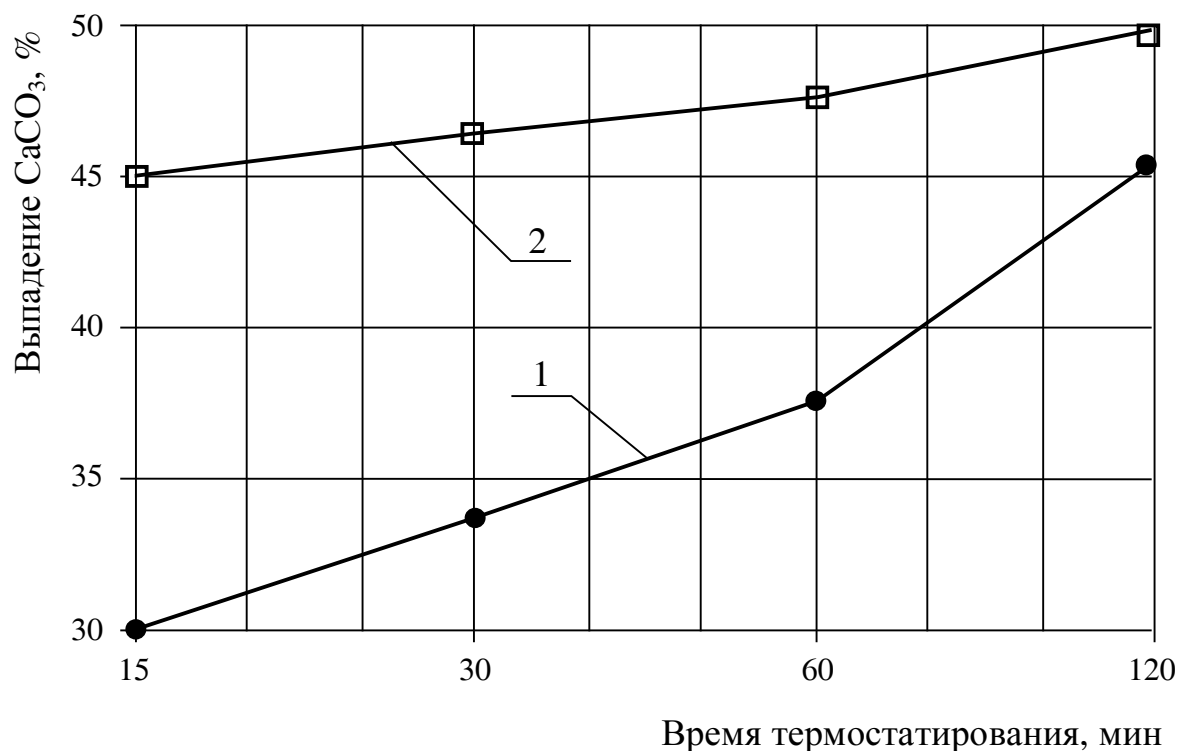


Рис. 1.32. Динамика выпадения карбоната кальция

1 – без магнитной обработки раствора;

2 – с магнитной обработкой

Таким образом, с помощью установок, создающих магнитное поле, можно управлять процессами солеотложения. Например, вызвав интенсивное солеотложение с помощью магнита и отфильтровав выпавшие кристаллы соли, можно затем транспортировать продукцию скважин без риска отложения соли на рабочих поверхностях оборудования.

В качестве еще одного примера укажем на опыт установки постоянных магнитов в скважинах, подверженных интенсивному парафиноотложению. В итоге удалось снизить число ремонтов скважинного оборудования более чем в 7 раз и полностью отказаться от химических способов борьбы с асфальтопарафинистыми отложениями.

Весьма эффективным оказалось применение магнитного поля при борьбе с гидратообразованием. Известно, что в процессе разработки нефтяных месторождений с применением газлифтного способа эксплуатации скважин, а также при эксплуатации газоконденсатных скважин одной из основных проблем является гидратообразование.

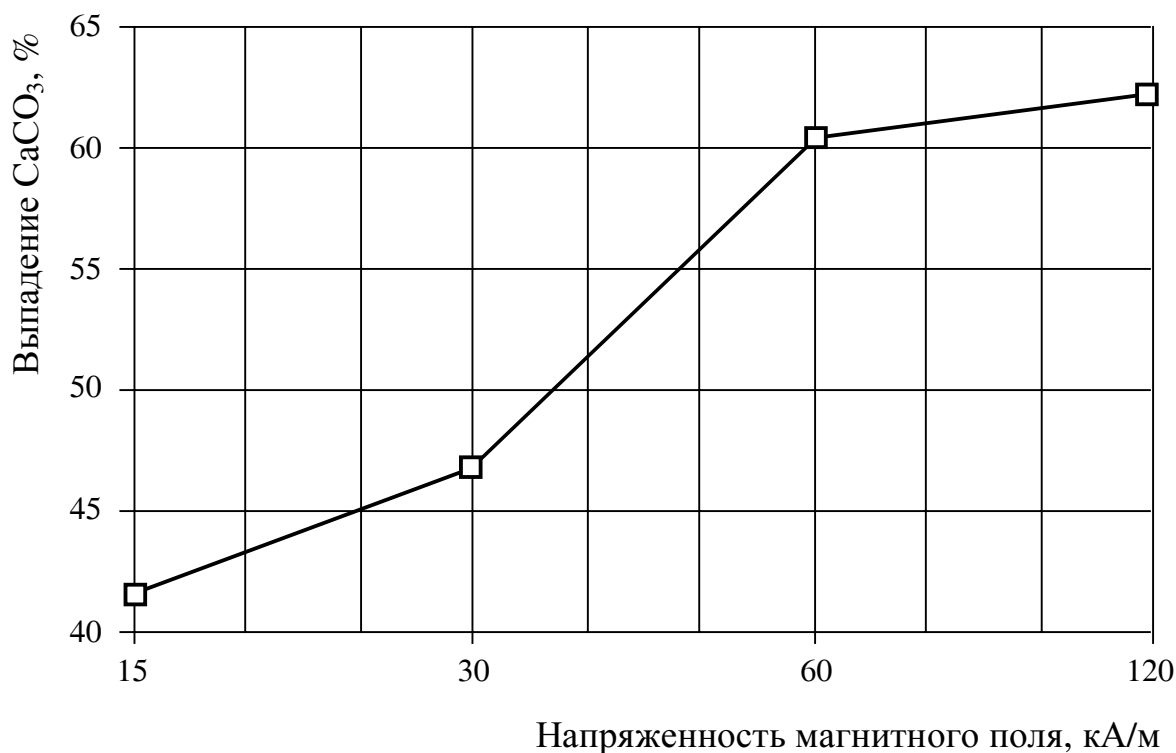


Рис. 1.33. Зависимость количества выпавшей соли от напряженности магнитного поля

В настоящее время одним из основных методов борьбы против образования гидратов является добавление различных химических реагентов (чаще всего метанола). Это связано с большими затратами и отрицательно влияет на окружающую среду. Лабораторные исследования, проведенные на кафедре «Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений» Азербайджанской нефтяной академии, показали, что образование газогидратов

может быть предотвращено путем обработки потока газа постоянным магнитным полем. Промысловые эксперименты, проведенные на газлифтных скважинах месторождения «Бахар» НГДУ «Гум адасы», подтвердили эту возможность, позволив долгое время эксплуатировать скважины без использования метанола.

Ряд других примеров ресурсосберегающих технологий нефтегазодобычи, основанных на применении малых физических полей, приведен в работе [55].

Библиографический список к главе 1

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – М.: Мир, 1979. – 348 с.
2. *Хаген Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
3. Синергетика: Сб. статей / Под ред. *Б.Б. Кадомцева.* – М.: Мир, 1984. – 248 с.
4. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
5. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
6. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002. – 654 с.
7. *Соколов И. М.* Размерности и другие геометрические показатели в теории протекания // УФН. – 1986. – Т. 150, № 2. – С. 221–225.
8. Фракталы в физике / Под ред. *Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.* – М.: Мир, 1988. – 672 с.
9. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
10. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
11. *Тарасенко В. В.* Фрактальная логика. – М.: Прогресс-Традиция, 2002. – 160 с.
12. *Хофштадтер Д.* Гегель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. – Самара: Бахрах-М., 2001.
13. *Чайковский Ю. В.* Излом творения // Химия и жизнь. – 1993. – № 7. – С. 18–22.
14. *Кальоти Дж.* От восприятия к мысли. – М.: Мир, 1998. – 221 с.
15. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. – М.: Мир, 1990. – 342 с.
16. *Khanhar D. V., Rising H., Ottino J. M.* Analyses of chaotic mixing in two model systems // J. of Fluid Mechanics. – 1986. – V. 172, № 11. – P. 419–451.
17. *Оттино Дж. М.* Перемешивание жидкостей // В мире науки. – 1989. – № 3. – С. 34–44.
18. *Голдбергер Э. Л., Ригми Д. Р., Уэст Б. Дж.* Хаос и фракталы в физиологии человека // В мире науки. – 1990. – № 4. – С. 25–32.
19. *Дьедни А. К.* О разуме, машинах и метафизике // В мире науки. – 1990. – № 2. – С. 82–86.
20. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 562 с.
21. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
22. *Уокер Дж.* Физический фейерверк. – М.: Мир, 1989. – 298 с.

23. *Zak M.* Two types of chaos in non-linear mechanics // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. – 1985. – V. 20, № 4. – P. 297–308.
24. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*. – 1983. – Т. 141. № 2. – С. 343–374.
25. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга: синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. – М.: ПЕР СЭ, 2001. – 351 с.
26. *Соснин Э. А., Поизнер Б. Н.* Лазерная модель творчества (от теории доминанты к синергетике). – Томск: ТГУ, 1997. – 148 с.
27. *Дойч Д.* Структура реальности. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – 400 с.
28. Красота и мозг. Биологические аспекты эстетики. – М.: Мир, 1995.
29. *Кэмпбелл Д. Дж.* Эффект Моцарта. – Минск: ООО «Попурри», 1999. – 320 с.
30. Пределы предсказуемости: Сб. статей / Ред. *Ю. Кравцов*. – М.: Центрком, 1997.
31. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2002. – 300 с.
32. *Доброцеев О.* Не многополюсный, а ячеистый // *Независимая газета*, 16.05.2001, С. 16.
33. *Шупер В.* Пружина территориального развития // *Знание – сила*, 2000, № 3. – С. 46–52.
34. *Капица С. П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества. – М.: Международная программа образования, 1999. – 240 с.
35. *Мирзаджанзаде А. Х., Султанов Ч. А.* Диакоптика процессов нефтеотдачи пластов. – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1995. – 366 с.
36. *Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Подземная гидродинамика: задачи и возможности // *Нефтяное хозяйство*, 1987, № 2. – С. 30–33.
37. *Иоффе О. П., Лысенко В. Д.* Выступления на научно-практической конференции / В кн. Проектирование и разработка нефтяных месторождений (материалы научно-практической конференции в г. Москве, ЦКР, 6–8 апреля 1999 г.). – М.: ВНИИОЭНГ, 1999. – С. 389–391.
38. *Баранцев Р. Г.* Что же такое асимптотические методы? / В кн. *Андрианов И. В., Маневич Л. И.* Асимптотология: идеи, методы, результаты. – М.: Аслан, 1994. – 159 с.
39. *Ишемгузин Е. И.* Нелинейные колебания элементов буровых машин. – Уфа: Изд-во УНИ, 1988. – 65 с.
40. *Астафьева Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН*, 1996. Т. 166, № 11. – С. 1145–1170.
41. *Левкович-Маслюк Л.* Дайджест вейвлет-анализа в двух формулах и 22 рисунках // «Компьютерра» 1998, № 8.

42. *Lori M. Bruce, Jiang Li, Mathew Burns, Wavelets: Seeing the Forest and the Trees* / <http://www.ee.unlv.edu/~bruce/dipg/wavelets.html>.
43. *Огибалов М. П., Мирзаджанзаде А. Х.*, Механика физических процессов. – М., Изд-во Моск. Ун-та – 370 с.
44. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
45. *Кадомцев Б. Б.* Динамика и информация. – М.: Наука, 1997.
46. *Горский Ф. К., Михлин М. Е.* Влияние магнитного поля на кристаллизацию перенасыщенных растворов. В сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». – Минск, 1962. – С. 400–403.
47. *Шибков А. А., Желтов М. А., Королев А. А.* Собственное электромагнитное излучение растущего льда // *Природа*, 200, № 9.
48. *Дерягин Б. В., Ландау Л. Д.* // *ЖЭТФ*, 1941 – С. 802.
49. *Кройт Г. Р.* Наука о коллоидах. – М.: ИЛ, 1955. – 538 с.
50. *Шилов В. Н., Эстела-Льюис В. Р.* Поверхностные силы в тонких пленках и дисперсных системах. – М.: Наука, 1972. – С. 115–132.
51. *Сургучев М. Л., Желтов Ю. В., Симкин Э. М.* Физико-химические микропроцессы в нефтегазоносных пластах. – М.: Недра, 1984. – 215 с.
52. *Давидзон М. И.* О действии магнитного поля на слабопроводящие водные системы // *Изв. ВУЗов. Физика*, 1985, № 4.
53. *Салаватов Т. Ш., Гезалов Х. Б., Керимов М. К.* Исследование методом ЭПР механизма барообработки неньютоновских нефтей // *ДАН Азерб. ССР*, 1981, Т. 37, № 2. – С. 56–59.
54. *Мамед-Заде А. М., Салаватов Т. Ш., Эйдельман Л. Р.* Влияние обработанной магнитным полем воды на фильтрационные характеристики пористых сред, содержащих глину // *Азерб. нефт. хоз-во*, 1984, № 9. – С. 19–22.
55. *Мирзаджанзаде А. Х., Алиев Н. А. и др.* Фрагменты разработки морских нефтегазовых месторождений. – Баку: Елм, 1997. – 408 с.

Глава 2

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕФТЕГАЗОДОБЫЧИ

Правильная постановка вопроса свидетельствует о некотором знакомстве с предметом.

Ф. Бекон

К прямым задачам математической физики относят задачи нахождения следствий заданных причин (например, определение полей при заданных источниках).

Обратными задачами в этом понимании являются задачи отыскания неизвестных причин заданных следствий. (Например, определение характеристик источников поля по значениям поля, измеренным в некоторых областях пространства.)

Обратные задачи имеют исключительно важное значение при решении вопросов моделирования, контроля и управления технологическими процессами в сложных системах. В частности, это относится к процессам нефтегазодобычи, связанным с фильтрацией и движением по трубам структурированных многокомпонентных многофазных жидкостей, обладающих сложными реологическими свойствами (нефтей с парафинистыми и асфальтено-смолистыми включениями, нефтеводогазовых смесей, буровых растворов полимеров и поверхностно-активных веществ и т. д.).

Часто описание сложных систем затрудняется отсутствием теоретических предпосылок, которые позволили бы построить обоснованную априорную модель рассматриваемого процесса, т. е. выписать в явном виде систему моделирующих уравнений, задать значения параметров в этой системе и указать начальные и граничные условия. В таких случаях постановка и решение обратных задач позволяет путем анализа экспериментальной информации выбрать адекватную модель, оценить ее параметры и определить, если это необходимо, недостающие начальные и граничные условия.

Процедуры подобного рода называются *идентификацией* математической модели процесса, а полученные таким образом модели называются *идентификационными*.

В отдельных случаях структура модели может быть определена заранее (например, выведена обычным путем из законов сохранения), и речь идет только об оценке неизвестных параметров (задача идентификации в узком смысле слова).

Наряду с повышением надежности расчетов, результаты решения обратных задач могут быть использованы в диагностических целях (например, для оценки эффективности воздействия на объекты управления).

Так, определение и сравнение параметров уравнения пьезопроводности по кривым восстановления давления, снятым до и после обработки скважины, позволяет оценить результативность этой обработки.

Рассмотрим более подробно постановку некоторых типов обратных задач.

Обратная коэффициентная задача

Пусть изучаемый в эксперименте процесс моделируется решением задачи

$$L_{\theta}[u] = g(x, \theta), \quad x \in X \subset R^k, \quad (2.1)$$

с дополнительными условиями

$$l_{\theta}[u] = h(x, \theta), \quad x \in \partial X. \quad (2.2)$$

Здесь $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ – набор так называемых контролируемых переменных, $\theta \in \Omega$ – совокупность некоторых параметров, $L_{\theta}[\cdot]$ – детерминированный дифференциальный оператор, зависящий от θ , R^k – евклидово пространство размерности k , ∂X – граница множества X .

При заданных θ задача (2.1)–(2.2) интерпретируется как обычная начально-краевая задача математической физики и является прямой задачей определения «следствия» (решения) u по «причинам» – набору известных θ , g , h и заданных L_{θ} и l_{θ} .

Если же величины θ неизвестны, то возникает следующая обратная задача: оценить исходные параметры θ и функцию отклика $u = u(x, \theta)$ для модели (2.1)–(2.2) по экспериментальным данным, если в эксперименте наблюдаются некоторые функционалы $b[u]$ от отклика u [1, 2].

Экспериментальные данные, предоставляющие информацию для определенных оценок $\hat{\theta}$ и $\hat{u} = u(x, \hat{\theta})$, могут быть заданы в виде системы наблюдений

$$\begin{aligned} y_{ir} &= u(x_i, \theta) + \varepsilon_{ir}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \\ r &= 1, 2, \dots, r_i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где y_{ir} – результат r -го измерения u в точке x_i , ε_{ir} – ошибка этого измерения.

Оценки параметров $\hat{\theta}$, полученные с помощью случайных величин y_{ir} , сами являются случайными величинами. Смещенность или несмещенность, а также дисперсия оценок определяется статистическими методами на основе некоторых предположений о распределении случайных величин ε_{ir} и о виде функции отклика $u(x, \theta)$.

Мы будем считать, что параметры θ принадлежат евклидовому пространству размерности m :

$$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \in \Omega \subset R^m.$$

Более общий случай принадлежности искомым характеристикам функциональному пространству сводится к рассматриваемому подходящей параметризацией:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i(x),$$

где $f_i(x)$ – заданные базисные функции.

Дополнительные условия (2.2), а также правая часть (2.1) могут быть известны с ошибками и лишь в отдельных точках.

Пример. Обратная коэффициентная задача теплопроводности

Пусть $u = u(x, t)$ является решением краевой задачи теплопроводности:

$$\begin{aligned} L[u] &\equiv u_t - a(x, t) u_{xx} = g(x, t), \\ 0 &< x < l; \quad 0 < t < T; \\ u|_{x=0} &= u_0(t); \quad u|_{x=l} = u_1(t), \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u^0(x), \quad x \in X = \{0 < x < l\}. \end{aligned}$$

Функции g , u^0 , u_0 , u_1 заданы, требуется определить коэффициент теплопроводности $a(x, t)$.

Представив $a(x, t)$ в виде

$$a(x, t) = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i(x, t),$$

сведем задачу к получению оценок $\{\theta_i\}$ по результатам измерений $y_{ij} = u(x_i, t_j, \theta) + \varepsilon_{ij}$.

Интерпретация косвенных измерений

Пусть объект исследования характеризуется элементами $u \in F$; если элемент u не доступен для прямого изучения, то изучается какое-либо его косвенное проявление $g(x)$, $x \in X$.

Элемент $g(x)$ функционально зависит от u :

$$A[u] = g(x), \tag{2.4}$$

где $A[\cdot]$ – некоторый детерминированный оператор.

Обратная задача, связанная с интерпретацией косвенных изменений, заключается в оценке элемента u по некоторым функционалам $b[g(x)]$ от правой части (2.4) при заданном A .

Например, могут производиться измерения в точках $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$:

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon(x_i).$$

Требуется найти оценку \hat{u} для модели (2.4).

Оператор A в (2.4), как правило, является вполне непрерывным, так что он не может иметь непрерывного обратного оператора A^{-1} [3]. Это приводит к неустойчивости решения обратной задачи (2.4) относительно экспериментальных погрешностей: даже малые ошибки в измерении g могут привести к недопустимо большим ошибкам в определении u . Поэтому говорят, что обратная задача (2.4) некорректно поставлена [4–6].

После работ Ж. Адамара (J. Hadamar, 1923 г.) считалось, что некорректно поставленные задачи нецелесообразно изучать, поскольку ошибки замеров неизбежны, однако насущные потребности практики все чаще приводили к необходимости их рассмотрения.

В конце концов интуитивные методы повышения устойчивости обратных задач, выработанные поколениями инженеров и математиков-прикладников, оформились в хорошо разработанную теорию построения устойчивых (регуляризирующих) алгоритмов решения некорректных задач [4–6], элементы которой будут рассмотрены чуть ниже.

Пример. Задача определения формы электрического импульса на входе кабеля $u(t)$ по результатам записи его на выходе кабеля формулируется в виде

$$\int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau = g(t), \quad (2.5)$$

где $K(t)$ – импульсная функция кабеля.

В ходе эксперимента проводятся наблюдения

$$y(t) = g(t) + \varepsilon(t), \quad (2.6)$$

где $g(t)$ – сигнал на входе кабеля, $\varepsilon(t)$ – ненаблюдаемая ошибка измерения g в момент времени t .

Обратная задача определения $u(t)$ по наблюдениям (2.6) параметризацией $u(t) = \sum_{\alpha=1}^m \theta_{\alpha} f_{\alpha}(t)$, где $\{f_{\alpha}(t)\}$ – некоторая базисная система функций, может быть сведена к решению методом наименьших квадратов системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^m K_{\beta\alpha} \hat{\theta}_{\alpha} = y(t_{\beta}), \quad (2.7)$$

где $K_{\beta\alpha} = \int_0^{t_{\beta}} K(t_{\beta} - \tau) f_{\alpha}(\tau) d\tau$.

Следствием некорректности задачи (2.5) является плохая обусловленность системы (2.7), что на практике приводит к «разбалтыванию» решений $\hat{\theta}$ при больших m . Первоначальный подход в этом случае состоял в том, чтобы варьировать величину m в зависимости от величины ошибки ε . Затем появились более тонкие методы решения такого рода задач.

2.1. Методы решения обратных коэффициентных задач

2.1.1. Регрессионный анализ

Если удастся решить прямую краевую задачу (2.1–2.2) и получить явный вид функции $u = u(x, \theta)$, где неизвестные θ присутствуют в виде параметров, то получение оценок $\hat{\theta}$ сводится к обычной задаче регрессионного анализа [1, 7–9]. Решение прямой задачи, как правило, нелинейно зависит от θ , так что мы приходим к задаче поиска оценок в случае нелинейной регрессии. Примем обычные для регрессионного анализа предположения о ненаблюдаемых ошибках:

$$E[\varepsilon_{ir}] = 0, E[\varepsilon_{ir} \cdot \varepsilon_{i'r'}] = \delta_{ii'} \delta_{rr'} \sigma_i^2,$$

где $E[\cdot]$ – знак усреднения, $\delta_{ii'} = \begin{cases} 1, & i = i'; \\ 0, & i \neq i'. \end{cases}$

В качестве оценок неизвестных параметров θ используем оценки метода наименьших квадратов:

$$\hat{\theta}_N = \text{Arg inf}_{\theta \in \Omega} \Phi(\theta), \quad \Phi(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i^2} [y_i - u(x_i, \theta)]^2, \quad (2.8)$$

$$y_i = \sum_r y_{ir} / r_i; \quad p_i = \frac{r_i}{N}; \quad N = \sum_i r_i,$$

где $\text{Arg inf } \Phi(\theta)$ – значение θ , при котором $\Phi(\theta)$ достигает минимума.

Множитель $\frac{1}{\sigma^2}$ в дальнейшем можно опустить, заменив u и y на $\frac{1}{\sigma}u$ и $\frac{1}{\sigma}y$.

Метод стохастической аппроксимации

Потребовав минимизации функционала $\Phi(\theta)$ в среднем, вместо (2.8) получим оценки

$$\hat{\theta}^* = \text{Arg inf}_{\theta \in \Omega} \Phi^*(\theta), \quad \text{где } \Phi^*(\theta) = E[\Phi(\theta)].$$

Непосредственное определение оценок $\hat{\theta}^*$ затруднено из-за отсутствия информации о функции распределения случайных величин y_{ir} , поэтому для оценки величин $\hat{\theta}^*$ может быть использована итерационная градиентная процедура

$$\hat{\theta}^{(s+1)} = \hat{\theta}^{(s)} - \rho(s) \nabla_{\theta} \Phi(\theta^{(s)}), \quad (2.9)$$

где $\nabla_{\theta} \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_m} \right\}$.

Здесь $\rho(s)$ – число, определяющее величину шага и выбираемое обычно таким, чтобы удовлетворялось условие монотонности $\Phi(\theta^{(s+1)}) \leq \Phi(\theta^{(s)})$.

Можно показать [10], что если применяется алгоритм (2.9) и

а) $\sum_{s=1}^{\infty} \rho(s) = \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \rho^2(s) < \infty;$

б) $\inf \left\{ (\theta - \theta^*)^T \nabla_{\theta} \Phi(\theta) \right\} \leq 0 \quad (\varepsilon > 0),$

$$\varepsilon < (\theta - \theta^*)^T (\theta - \theta^*) < \frac{1}{\varepsilon};$$

в) $E \left[\nabla_{\theta}^T \Phi \cdot \nabla_{\theta} \Phi \right] \leq d(1 + \theta^T \theta) \quad (d > 0),$

то последовательность $\left\{ \hat{\theta}^{(s)} \right\}$ сходится к θ^* при $s \rightarrow \infty$ с вероятностью, равной 1 и в среднеквадратичном смысле, т. е.

$$P \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \hat{\theta}^{(s)} - \theta^* = 0 \right\} = 1,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E \left[(\hat{\theta}^{(s)} - \theta^*)^T (\hat{\theta}^{(s)} - \theta^*) \right] = 0.$$

Здесь θ^T – транспонированный вектор θ .

Решение обратных задач методами теории чувствительности

При решении обратных коэффициентных задач путем итерационной минимизации невязки большое значение имеет вопрос выбора величины и направления каждого последующего «шага» в пространстве искомых параметров.

Оптимизация «маршрута» поиска может быть осуществлена с помощью исследования чувствительности решений прямых задач относительно варьирования значений коэффициентов моделей [11, 12].

Используя аппарат теории чувствительности, коэффициенты θ можно искать при помощи итерационной процедуры

$$\theta^{(s+1)} = \theta^{(s)} + \Delta\theta^{(s)}, \quad (2.10)$$

где смещения $\Delta\theta^{(s)}$ определяются из условия минимизации функционала

$$\psi(\Delta\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i^2} \left[u(x_i, \theta^{(s)}) + \Delta\theta^T h(x_i, \theta^{(s)}) - y_i \right]^2,$$

$$h(x_i, \theta^{(s)}) = \left\| \frac{\partial u}{\partial \theta_1}, \frac{\partial u}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \theta_m} \right\|^T.$$

Матрица чувствительности $h(x_i, \theta^{(s)})$ определяет «отклик» решения прямой задачи на малые изменения значений коэффициентов θ .

Пример.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^m \theta_k \frac{d^k u}{dt^k} + u = \theta_0$$

с начальными условиями

$$u^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Необходимо оценить параметры θ_j ($j = 0, 1, \dots, m$) по замерам

$$y_i = u(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Легко увидеть, что функции чувствительности

$$h_j(t, \theta) = \frac{\partial u(t, \theta)}{\partial \theta_j}$$

могут быть найдены из решения задачи

$$\sum_{k=1}^m \theta_k \frac{d^k h_0}{dt^k} + h_0 = 1,$$

$$\sum_{k=1}^m \theta_k \frac{d^k h_j}{dt^k} + \frac{d^j h_j}{dt^j} + h_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$h_l(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

Оценки коэффициентов θ определяются по алгоритму (2.10), где величины $\Delta\theta^{(s)}$ находятся путем решения уравнений

$$\sum_{l=0}^m A_{jl}^{(s)} \Delta\theta_l^{(s)} = B_j^{(s)}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

где

$$A_{jl}^{(s)} = \sum_{i=1}^h h_j(t_i, \theta^{(s)}) h_l(t_i, \theta^{(s)}),$$

$$B_j^{(s)} = \sum_{i=1}^h [y_i - u(t_i, \theta^{(s)})] \cdot h_l(t_i, \theta^{(s)}).$$

2.1.2. Оценивание параметров с помощью замены дифференциального уравнения конечно-разностным

Мы предполагали до сих пор, что прямая начально-краевая задача (2.1)–(2.2) может быть решена точно. Однако это возможно далеко не всегда. В тех случаях когда точное решение задачи (2.1)–(2.2) не удается получить, для определения параметров может быть произведена замена операторов L_θ и l_θ их конечно-разностными аналогами.

Рассмотрим, например, задачу оценки коэффициента теплопроводности a для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0).$$

Переходя к дискретной координате с шагом Δx и к дискретному времени с шагом Δt , получим уравнение [13]

$$u_{k,s} - u_{k,s-1} = \theta(u_{k+1,s} - 2u_{k,s} + u_{k-1,s}), \quad (2.11)$$

где $\theta = \tilde{a} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $|a - \tilde{a}| \leq \xi$, ξ – методическая ошибка замены дифференци-

ального уравнения конечно-разностным.

Требуется оценить θ по системе наблюдений $y_{k,s} = u_{k,s} + \varepsilon_{k,s}$, где

$$u_{k,s} = u(x_k, t_s), \quad x_k = k \cdot \Delta x \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{l}{\Delta x} \right),$$

$$t_s = s \cdot \Delta t \quad (s = 0, 1, \dots),$$

$$E[\varepsilon_{k,s}] = 0, \quad \text{т. е. } E[y_{k,s}] = u_{k,s},$$

$$E[\varepsilon_{k,s} \cdot \varepsilon_{k',s'}] = \delta_{kk'} \delta_{ss'} \sigma^2.$$

Для решения задачи перепишем (2.11) в виде

$$u_{k,s} = u_{k,s-1} + \theta(u_{k+1,s} - 2u_{k,s} + u_{k-1,s}). \quad (2.12)$$

Заменим теперь в правой части (2.12) все u на результаты их наблюдений. Получим в итоге некоторую оценку для $u_{k,s}$:

$$\hat{u}_{k,s} = y_{k,s-1} + \theta(y_{k+1,s} - 2y_{k,s} + y_{k-1,s}).$$

В качестве оценки параметра θ можно принять величину $\theta^* = \text{Arginf } F^*(\theta)$, $F^*(\theta) = E \left[\sum_{k,s} (\hat{u}_{k,s} - y_{k,s})^2 \right]$, и использовать для ее определения метод стохастической аппроксимации (2.1.1).

Рассмотрим случай, когда разности $y_k - y_{k\pm 1}$ измеряются в малом числе точек x_k . В этих условиях необходимая точность оценок обеспечивается достаточно большим числом измерений по времени ($s \rightarrow \infty$).

Исходя из (2.9), получим следующий алгоритм определения оценок $\theta^{(s)}$ в момент $s\Delta t$:

$$\hat{\theta}^{(s)} = \hat{\theta}^{(s-1)} - \rho(s) \left\{ \nabla_{\theta} F^{(s)}(\theta) \right\}_{\theta = \hat{\theta}^{(s-1)}},$$

где $\nabla_{\theta} F^{(s)}(\theta) = \nabla_{\theta} \left\{ \frac{1}{2} \sum_k (\hat{u}_{k,s} - y_{k,s})^2 \right\} + f^{(s)}$, $f^{(s)}$ – добавка, обеспечивающая несмещенность оценок $\theta^{(s)}$.

Так, если конечные разности измеряются в одной точке, можно положить [13]

$$\nabla_{\theta} F^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2} \nabla_{\theta} \left\{ \left(\hat{u}_{k,s} - y_{k,s} \right)^2 \right\} + 2\sigma^2(1 + 3\theta).$$

Легко проверить, что

$$E \left[\left\{ \nabla_{\theta} F^{(s)}(\theta) \right\}_{\theta = \hat{\theta}^{(s-1)}} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \hat{\theta}^{(s-1)} = \theta_n,$$

так что добавка $2\sigma^2(1 + 3\theta)$ действительно обеспечивает несмещенность оценки θ .

2.1.3. Некорректность операции дифференцирования экспериментальных функций

В предыдущем разделе были рассмотрены алгоритмы решения обратных задач, основанные на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений. Этот подход следует применять с большой осторожностью, поскольку конечно-разностная аппроксимация эквивалентна непосредственному дифференцированию экспериментальных функций, чревату большими погрешностями [4–6].

Проиллюстрируем это обстоятельство следующим простым примером.

Пусть дано уравнение

$$\frac{du}{dt} + \theta(u - 1) = 0. \quad (2.13)$$

Требуется определить параметр θ по замерам $y_i = u(t_i) + \varepsilon_i$, произведенным в дискретные моменты времени $t_i = i\Delta t$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Заменяя производную конечно-разностной аппроксимацией $\frac{du}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$, получим из (2.13)

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{(1 - y_i)\Delta t}, \quad (2.14)$$

где $\hat{\theta}^{(i+1)}$ – оценка параметра θ , полученная после $(i+1)$ -го замера.

Легко показать, что предложенный алгоритм неустойчив. Действительно, по формуле Тейлора, имеем

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + u'(t_i)\Delta t + u''(t_i)\frac{(\Delta t)^2}{2} + o(\Delta t)^2,$$

откуда

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} - u'(t_i) \approx \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{\Delta t} + u''(t_i)\frac{\Delta t}{2}.$$

Для относительной погрешности определения производной $u'(t_i)$ получим выражение

$$\frac{\delta u'}{u'} = \frac{\theta \delta u'}{1 - u} \leq \frac{\theta}{1 - u} \left(\frac{2\varepsilon}{\Delta t} + |u''|\frac{\Delta t}{2} \right), \quad (2.15)$$

где ε – абсолютная ошибка величины u .

Так как в первом слагаемом правой части (2.15) величина Δt стоит в знаменателе, то ясно, что при малых Δt дифференцирование экспериментальных функций является неустойчивой операцией: малые погрешности ε приводят к большим ошибкам в определении u' .

Процедуру вычисления u' можно регуляризовать, увеличивая промежуток времени между замерами Δt . Однако при этом увеличивается ошибка, допускаемая при конечно-разностной аппроксимации производной.

Минимальная ошибка, согласно (2.15), достигается при $\frac{2\varepsilon}{\Delta t} = |u''|\frac{\Delta t}{2}$

или $\Delta t = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{|u''|}}$. При таком значении Δt $\frac{\delta u'}{u'} \approx \frac{\theta}{1 - u}\sqrt{|u''|\varepsilon}$.

Рассмотрим следующий математический эксперимент. В качестве замеров y_i возьмем «зашумленные» значения решения уравнения (2.13) при $\theta = 1$ и начальном условии $u(0) = 0$:

$$y_i = 1 - e^{-t_i} + \varepsilon_i, \quad |\varepsilon_i| \leq 0,01, \quad (2.16)$$

и используем их для оценки величины θ по формуле (2.14). Считая $u \sim 0,5$, $u'' = e^{-t} \sim 0,5$, получим, что оптимальное значение Δt в этих условиях равно 0,2. На рис. 2.1. приведены оценки величины θ для разных моментов времени при $\Delta t = 0,02$ и $\Delta t = 0,2$ (см. рис. 2.1, а и б соответственно).

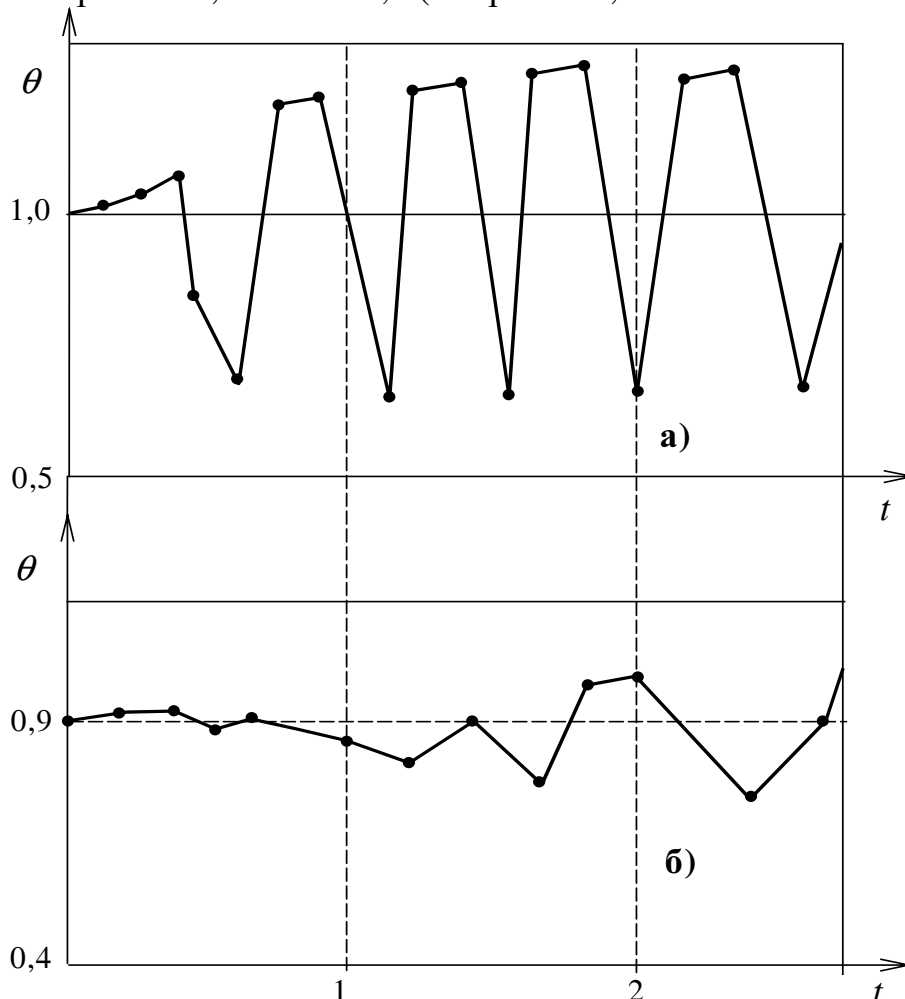


Рис. 2.1. Оценки величины θ для разных моментов времени при $\Delta t = 0,02$ и $\Delta t = 0,2$

Как видим, при $\Delta t = 0,02$ проявляется неустойчивость решения обратной задачи. Увеличение промежутка времени между замерами до $\Delta t = 0,2$ устраняет неустойчивость при $t \leq 1$, но приводит к смещению оценки на 10%. При $t > 1$ неустойчивость появляется за счет уменьшения величины $1-u$.

Операция интегрирования, являясь обратной операцией дифференцирования, в отношении воздействия на погрешности обладает также противоположными свойствами: при интегрировании погрешности экспериментальных функций сглаживаются. В ряде случаев, подвергая дифференциальное уравнение различным интегральным преобразованиям, можно получить выражения, в которых будут отсутствовать производные экспери-

ментальных функций, что избавит от необходимости дифференцирования последних.

Так, проинтегрировав уравнение (2.13) по времени, получим

$$\theta = \frac{u(t_l) - u(t_1)}{\int_{t_1}^{t_l} (1-u) dt}. \quad (2.17)$$

Подставив вместо значений $u(t_i)$ замеры y_i и произведя численное интегрирование, получим оценку

$$\hat{\theta} = \frac{y_l - y_1}{\Delta t \sum_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)}. \quad (2.18)$$

В выражении (2.17) отсутствуют производные экспериментальной функции, поэтому (2.18) дает достаточно точный результат. Так, использование данных математического эксперимента (2.16) при $\Delta t = 0,02$ и $l = 10$ приводит к оценке $\hat{\theta}$, отличающейся от истинного значения $\theta = 1$ не более чем на 0,3%.

2.1.4. Применение преобразования Лапласа при решении обратных задач

Если алгоритм определения параметров линейной модели связан с получением точного решения прямой задачи, то целесообразно осуществить преобразование Лапласа по следующим трем причинам.

1. Как правило, аналитическое решение модели проще получить в пространстве изображений, чем во временной области.
2. Преобразование Лапласа является интегральным преобразованием, что приводит к сглаживанию погрешностей экспериментальных функций.
3. Часто, исходя из точного решения в изображениях, удастся получить асимптотики при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$ решений во временной области и эффективно использовать их при решении обратных задач.

В связи с этим методы решения обратных задач, основанные на применении преобразования Лапласа, находят весьма широкое применение.

Эксперименты, предназначенные для определения параметров моделей, проводятся во временной области, поэтому для того, чтобы можно было осуществить оценивание, необходимо либо решение прямой задачи преобразовать ко времени t , либо экспериментальные данные о процессе перевести в пространство изображений по Лапласу. Ниже рассматриваются оба этих способа.

Оценивание во временной области

Если решение прямой задачи может быть переведено во временную область, то используют обычные приемы минимизации суммы квадратов отклонений (раздел 2.1.1). Для облегчения процедуры обращения рассматриваются асимптотики $s \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) или $s \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$).

Рассмотрим пример эффективного применения преобразования Лапласа при решении обратной задачи определения коэффициента диффузии раствора поверхностного активного вещества (ПАВ) в ходе следующего эксперимента.

Вертикальная стеклянная трубка нижним концом погружена в раствор ПАВ с постоянной концентрацией c_0 . В начальный момент времени в трубке находится столб чистой воды высотой h_0 , удерживаемый силами поверхностного натяжения. Раствор ПАВ начинает диффундировать в воде, за счет чего происходит понижение уровня воды в капилляре, причем это изменение уровня замеряется.

Исходя из формулы $c|_{x=h} = (h_0 - h) \frac{\rho g r}{2k}$, где $k = -\frac{d\sigma}{dc}$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, h – высота столба жидкости, можно вычислить концентрацию в верхней части столба (величина k определяется в предварительных опытах).

Таким образом, для определения коэффициента диффузии необходимо решить обратную задачу оценки величины D из переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial c}{\partial t} + h' \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h(t), \quad (2.19)$$

$$c|_{t=0} = 0, \quad (2.20)$$

$$c|_{x=0} = c_0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=h(t)} = 0, \quad (2.21)$$

$$c|_{x=h(t)} = f(t), \quad (2.22)$$

где $h(t)$ и $f(t)$ – экспериментально определяемые функции (табл. 2.1).

Перейдя к безразмерным переменным

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}$$

и пренебрегая членами порядка $h' \frac{\partial c}{\partial x}$, получим из (2.19)–(2.22)

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial \bar{x}^2},$$

$$c|_{\tau=0} = 0, \quad c|_{\bar{x}=0} = c_0, \quad \frac{\partial c}{\partial x}|_{\bar{x}=1} = 0,$$

$$c|_{\bar{x}=1} = f^*(\tau) = f(\bar{t}), \quad (2.23)$$

где $D_1 = \frac{Dt_0}{h_0^2}$, $t_0 = 1,8 \cdot 10^5$ с, $\tau = \int_0^{\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{h^2(t)}$.

Таблица 2.1
Значения экспериментально определяемых функций $h(t)$ и $f(t)$

$t, \text{с}$	$h \cdot 10^2, \text{см}$	$c \cdot 10^3, \%$
0	1,4200	0,04
75600	1,3598	0,0502
79200	1,3536	0,0564
82800	1,3464	0,0636
86400	1,3368	0,0732
90000	1,3290	0,0810
93100	1,3176	0,0924
97200	1,3086	0,1014
100800	1,2992	0,1108
104400	1,2901	0,1199
108000	1,2812	0,1288
111600	1,2736	0,1364
115200	1,2633	0,1467
162000	1,1680	0,2420
165000	1,1648	0,2452
169200	1,1560	0,2540
172800	1,1516	0,2584
176400	1,1458	0,2642
180000	1,1422	0,2678

Далее, применяя преобразование Лапласа по переменной τ , получим

$$s \hat{c} = D_1 \frac{d^2 \hat{c}}{d\bar{x}^2},$$

$$\hat{c} \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{c_0}{s}, \quad \frac{d \hat{c}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \text{где } \hat{c}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} c(x, \tau) d\tau.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\hat{c} = \frac{c_0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{D_1}} (1 - \bar{x})}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{D_1}}}.$$

Используя соотношение (2.23), получим

$$\frac{c_0}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{D_1}}} = F^*(s), \quad (2.24)$$

где

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f^*(\tau) d\tau.$$

Известно, что коэффициент диффузии растворов ПАВ имеет порядок $10^{-10} - 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, поэтому мы можем воспользоваться для начального временного интервала следующей асимптотикой:

$$\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{D_1}} \approx \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{D_1}}\right)}{2}.$$

С учетом этого из (2.24) следует равенство

$$\frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D_1}}\right)}{s} = \frac{F^*(s)}{2c_0}.$$

Переходя в этом равенстве к оригиналам, получим

$$\Phi^*\left(\frac{1}{2\sqrt{D_1\tau}}\right) = \frac{f(\bar{t})}{2c_0}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = 2\sqrt{D_1} \Phi^{*-1}\left(\frac{f(\bar{t})}{2c_0}\right),$$

где

$$\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

а через Φ^{*-1} обозначена функция, обратная к Φ^* .

Обозначая $Y_1 = \Phi^{*-1}\left(\frac{f(\bar{t})}{2c_0}\right)$, $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$, получим

$$Y_2 = \alpha Y_1, \quad \alpha = 2\sqrt{D_1},$$

т. е. в координатах (Y_1, Y_2) экспериментальные данные должны спрямляться, и угловой коэффициент этой прямой определяет коэффициент диффузии D . Результаты обработки экспериментальных данных в координатах (Y_1, Y_2) приведены на рис. 2.2, из которого видно, что в данном случае $\alpha = 1$, т. е. $D = 0,26 \cdot 10^{-9} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

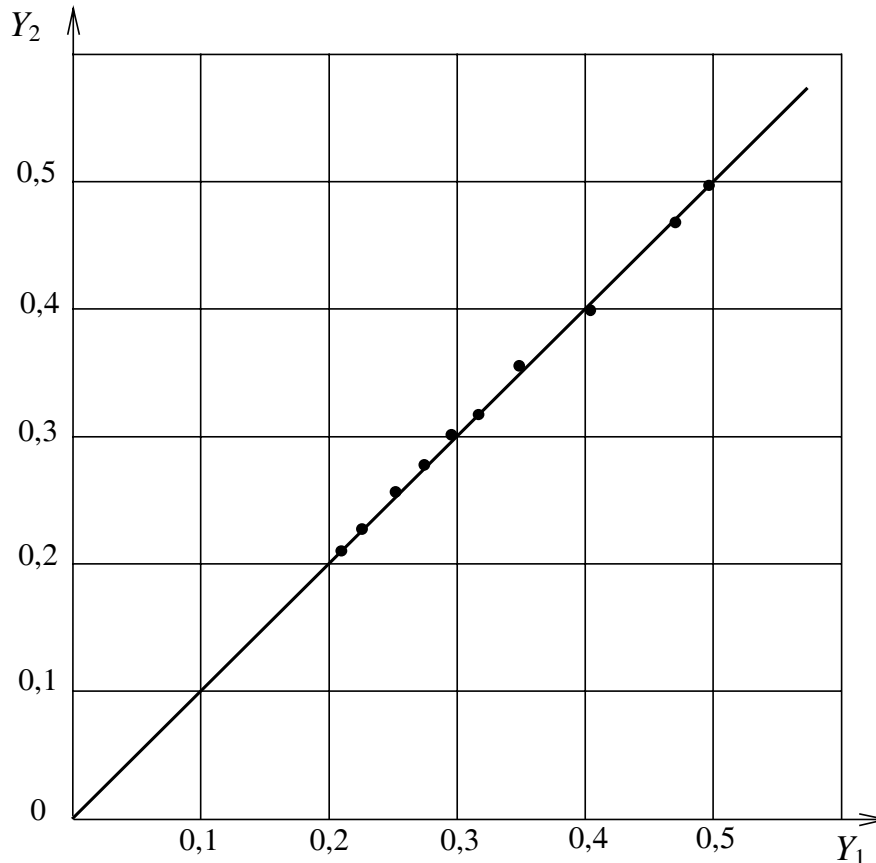


Рис. 2.2. Изменение высоты столба жидкости $h(t)$ в капилляре

На рис. 2.3 приведено сопоставление экспериментальных точек с графиком функции $h(t)$, полученной по формулам решения прямой задачи с определенным выше коэффициентом диффузии D .

Оценивание в пространстве изображений

Если решение прямой задачи получено в пространстве изображений и обращение его затруднительно, то удобнее провести оценивание параметров θ в s -плоскости. Пусть $y(t)$ – результаты замеров величины u , $u(t, \theta)$ – решение прямой задачи, $G(s)$ и $V(s, \theta)$ – их изображения. Оценивание параметров в пространстве изображений требует минимизации отклонения функции $V(s, \theta)$ от $G(s)$. Интеграл $G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$ можно вы-

числить любым из способов численного интегрирования. В частности, может быть использована формула

$$G(s) = \frac{1}{s} y_0 + \frac{1}{s^2} \sum_{i=0} (y_{i+1} - y_i) \frac{(e^{-st_i} - e^{-st_{i+1}})}{t_{i+1} - t_i},$$

где $y_i = y(t_i)$, $t_0 = 0$.

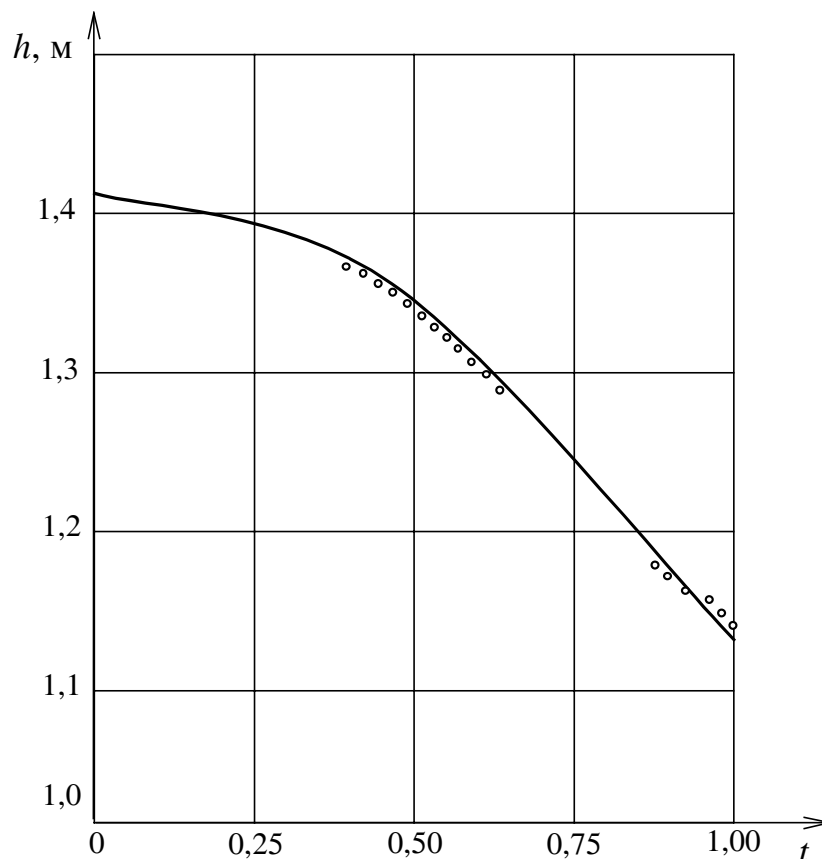


Рис. 2.3. Результаты обработки экспериментальных данных в координатах (Y_1, Y_2)

Отметим, что метод оценивания параметров, который дает равные веса ошибкам в s -области, не гарантирует равные веса ошибок во временной области. Так, если $y(t) = u(t, \theta) + \varepsilon(t)$, то минимизация выражения

$$\int_{s_1}^{s_2} |G(s) - V(s, \theta)| ds$$

в s -области эквивалентна минимизации $\int_0^{\infty} W(t) |\varepsilon(t)| dt$ во временной области,

где весовая функция $W(t) = \frac{\exp(-s_1 t) - \exp(-s_2 t)}{t}$. В результате ранние моменты времени «вешают» больше, чем поздние.

Вводя увеличенные веса при меньших величинах s , можно уменьшить вес, придаваемый ошибкам при малых временных.

Чтобы провести оценивание, необходимо использовать дискретные действительные значения переменной $s = s_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Для каждого s_i должны быть вычислены величины $G(s_i)$ и $V(s_i, \theta)$, и, наконец, выражение $\sum_{i=1}^N [G(s_i) - V(s_i, \theta)]^2$ должно быть минимизировано по параметрам θ .

В ряде случаев вычисления могут быть значительно упрощены за счет рассмотрения асимптотик решения $V(s, \theta)$ при $s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$.

Пример.

Для решения задач оперативного контроля за работой магистральных трубопроводов большое значение имеет вопрос определения коэффициента гидравлического сопротивления по результатам технологических измерений, проводимых в процессе эксплуатации трубопроводов. При этом измеряются давления на входе и выходе трубопровода и расход продукта.

Неустановившееся движение сжимаемой жидкости в трубопроводах описывается известной системой линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + 2a\rho w, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где p – давление, w – среднеобъемная скорость, ρ – плотность жидкости, $2a$ – коэффициент сопротивления, c – скорость звука.

Задаются следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho w|_{t=0} &= 0; & p|_{t=0} &= 0, \\ \rho w|_{x=0} &= \varphi_0(t); & p|_{x=0} &= f_0(t). \end{aligned}$$

Требуется определить коэффициент a по дополнительному граничному условию, заданному, например, в виде

$$p|_{x=l} = \Psi_0(t), \quad (2.26)$$

где l – длина трубопровода.

Исключая ρw , для определения давления $p(x,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{2al}{c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}}$$

с дополнительными условиями

$$\bar{p}|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} \right|_{t=0} = 0;$$

$$\bar{p}|_{\bar{x}=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{x}=0} = -\frac{\rho_0 w_0 c}{p_0} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{2al}{c} \varphi \right),$$

где $\bar{x} = \frac{x}{l}$, $\bar{t} = \frac{c}{l}t$, $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$, $f = \frac{f_0}{p_0}$, $\varphi = \frac{\varphi_0}{\rho_0 w_0}$, p_0 , ρ_0 , w_0 – характерные значения соответствующих величин.

Применив преобразования Лапласа, получим, опуская черточку над безразмерными переменными,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \left(s^2 + \frac{2al}{c} s \right) U,$$

$$U|_{x=0} = F(s), \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{\rho_0 w_0 c}{p_0} \left(s + \frac{2al}{c} \right) \Phi,$$

где U , F , Φ – изображения функций p , f , φ .

Отсюда

$$U(x,s) = F \operatorname{ch} \gamma x - \Phi_1 \operatorname{sh} \gamma x, \quad (2.27)$$

$$\text{где } \gamma = \sqrt{s^2 + \frac{2al}{c} s}, \quad \Phi_1 = \frac{\rho_0 w_0 c \left(s + \frac{2al}{c} \right)}{p_0 \gamma} \Phi.$$

Если Ψ_1 – изображение функции $\frac{\Psi_0}{p_0}$, то из (2.26) и (2.27) получим

$$\Psi_1 = F \operatorname{ch} \gamma - \Phi_1 \operatorname{sh} \gamma.$$

Для упрощения рассмотрим асимптотику $s \rightarrow 0$. Ограничиваясь линейными по s членами, получим

$$\tilde{\Phi}(s) = \frac{\rho_0 w_0 c}{p_0} \left(s + \frac{2al}{c} \right), \quad (2.28)$$

$$\text{где } \tilde{\Phi}(s) = \frac{F(s) - \Psi_1(s)}{\Phi(s)}.$$

Как следует из (2.28), зависимость между $\tilde{\Phi}(s)$ и s изображается прямой, не проходящей через начало координат. Придав s несколько действительных значений, получим из (2.28) систему, решение которой методом наименьших квадратов позволяет оценить величины $\frac{\rho_0 w_0 c}{\rho_0}$ и $2a$.

2.1.5. Метод детерминированных моментов

Одним из эффективных методов решения обратных задач является метод детерминированных моментов [8]. Детерминированным моментом n -го порядка называется выражение

$$M_n = \int_0^{\infty} t^n (u_{\infty} - u(t)) dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где u_{∞} – предельное значение характеристики процесса $u(t)$.

Эти моменты могут быть определены как по экспериментальной зависимости $y(t)$ (обозначим их через M_n^{ϑ}), так и по теоретической зависимости $u(t, \theta)$, получаемой из решения прямой задачи (обозначим их $M_n^T(\theta)$). Приравняв соответствующие теоретические и экспериментальные значения моментов, получим соотношения для определения параметров модели θ :

$$M_n^T(\theta) = M_n^{\vartheta}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где число соотношений N определяется количеством неизвестных параметров модели. Кроме того, из величины моментов можно составлять диагностические критерии адекватности выбираемой модели реальному процессу.

Предполагается, что кривая $y(t)$ задана на достаточно большом интервале $[0, T]$ так, что $y(T) \approx u_{\infty}$ и $\int_0^T (u_{\infty} - y(t)) t^n dt \approx 0$, поэтому экспериментальные значения моментов вычисляются по приближенной формуле

$$M_n^{\vartheta} \approx \int_0^T [u_{\infty} - y(t)] t^n dt. \quad (2.29)$$

При проведении расчетов на практике интеграл (2.29) берется численно. Вычисление теоретических значений моментов $M_n^T(\theta)$ существенно упрощается, если прямая задача решена операционным методом. Легко показать [8], что если $\tilde{u}(s, \theta)$ – изображение функции $u(t, \theta)$, то

$$M_n^T(\theta) = (-1)^n \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{u_{\infty}}{s} - \tilde{u}(s, \theta) \right].$$

Пример 1.

Определение параметров пласта по данным нестационарных исследований.

Рассмотрим неустановившуюся фильтрацию однофазной жидкости после остановки скважины. Как известно, этот процесс описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad 0 < r_0 \leq r \leq R_0 < \infty, \\ p(r, 0) &= p_{\text{стац}} = p_0 - \frac{Q_0 \mu}{2\pi \kappa h} \ln \frac{R_0}{r} = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r}, \\ p(R_0, t) &= p_0, \quad 2\pi r_0 h \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} p(r_0, t) = Q(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь приняты следующие обозначения: r_0 , R_0 – радиусы скважины и контура питания; p_0 – давление на контуре питания; Q_0 , $Q(t)$ – стационарный и текущий расходы на забое скважины.

Дополнительное условие для решения обратной задачи по определению параметров пласта задано в виде кривой восстановления давления

$$p_0 - p(r_0, t) = \Delta p(r_0, t).$$

Задача (2.30) в изображениях по Лапласу имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{p}}{dr} \right) - \frac{s}{\chi} \tilde{p} &= -\frac{p_{\text{стац}}}{\chi}, \\ \tilde{p}(R_0, s) &= \frac{p_0}{s}, \quad \frac{d}{dr} \tilde{p}(r_0, s) = \frac{p_*}{r_0} \cdot \frac{\tilde{Q}(s)}{Q_0}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p}(r, s) &= \int_0^{\infty} p(r, t) \exp(-st) dt, \\ \tilde{Q}(s) &= \int_0^{\infty} Q(t) \exp(-st) dt. \end{aligned}$$

Решение задачи (2.31) представляется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(r, s) &= \frac{p_*}{r_0} \left[\frac{Q(s)}{Q_0} - \frac{1}{s} \right] \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{s}} \times \\ &\times \frac{K_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) - K_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) I_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right)}{K_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) + I_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right) K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}} \right)} + \frac{p_{\text{стац}}}{s}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $K_0(x)$, $K_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента.

Введем следующие детерминированные моменты:

$$M_n = \frac{1}{\Delta p(r_0, 0)} \int_0^{\infty} \Delta p(r_0, t) t^n dt,$$

$$m_n = \frac{1}{Q_0} \int_0^{\infty} Q(t) t^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисление моментов производится по экспериментальным данным $\Delta p(r_0, t)$ и $Q(t)$. С другой стороны, можно записать

$$M_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} \left[(-1)^n \Delta \tilde{p}(r_0, s) \right] \cdot \frac{1}{\Delta p(r_0, 0)}, \quad (2.33)$$

$$m_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} \left[(-1)^n \tilde{Q}(s) \right] \cdot \frac{1}{Q_0},$$

где $\Delta \tilde{p}(r_0, s) = \int_0^{\infty} \Delta p(r_0, t) \exp(-st) dt$.

Используя (2.32), (2.33) после ряда элементарных преобразований, получим следующие равенства:

$$M_0 = \frac{p_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left(\frac{R_0^2}{4\chi} + m_0 \ln \frac{R_0}{r_0} \right),$$

$$M_1 = \frac{p_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left(\frac{5}{8} \frac{R_0^4}{16\chi^2} + m_0 \frac{R_0^2}{4\chi} + m_1 \ln \frac{R_0}{r_0} \right),$$

$$M_2 = \frac{p_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left(\frac{23}{27} \frac{R_0^6}{64\chi^3} + \frac{5}{4} m_0 \frac{R_0^4}{16\chi^2} + 2m_1 \frac{R_0^2}{4\chi} + m_2 \ln \frac{R_0}{r_0} \right).$$

Используя выражения для M_0 и M_1 и формулу Дюпюи

$$p_* \ln \frac{R_0}{r_0} = \Delta p(r_0, 0), \quad (2.34)$$

можно определить параметры пласта из следующей системы:

$$\frac{R_0^2}{\chi} = \frac{32}{5} \left(\frac{M_1 - m_1}{M_0 - m_0} - m_0 \right),$$

$$\frac{\kappa h}{\mu} = \frac{R_0^2}{\chi} \cdot \frac{Q_0}{8\pi \Delta p(r_0, 0)} \cdot \frac{1}{M_0 - m_0}, \quad (2.35)$$

$$\ln \frac{R_0}{r_0} = \frac{\kappa h}{\mu} \cdot \frac{2\pi \Delta p(r_0, 0)}{Q_0}.$$

Следует отметить, что использование равенства (2.34) не является принципиальным, так как вместо него можно воспользоваться выражением для M_2 .

В качестве примера обработки рассмотрим кривую восстановления давления, представленную в табл. 2.2.

Моменты, рассчитанные по этим данным, равны:

$$M_0 = 7,3 \cdot 10^3 \text{ с}, \quad m_0 = 6,6 \cdot 10^3 \text{ с},$$

$$M_1 = 4,1 \cdot 10^7 \text{ с}^2, \quad m_1 = 3,3 \cdot 10^7 \text{ с}^2.$$

Используя эти значения, из (2.35) получим параметры пласта:

$$\frac{R_0^2}{\chi} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ с}, \quad \frac{kh}{\mu} = 29 \cdot 10^{-14} \frac{\text{м}^3}{\text{Па} \cdot \text{с}}, \quad \ln \frac{R_0}{r_0} = 11,1.$$

Таблица 2.2

Параметры кривой восстановления давления

$t, \text{ с}$	0	$6 \cdot 10^3$	$12 \cdot 10^3$	$18 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	$30 \cdot 10^3$
$\Delta p(r_0, 0), \text{ МПа}$	4,84	2,03	0,90	0,38	0,15	≈ 0
$Q(t), \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$	793	307,2	109,3	47,3	15,2	≈ 0

Пример 2.

Рассмотрим следующий метод диагностирования реологических свойств вязкоупругопластичных нефтей по данным наблюдения их движения по трубам.

Реологическая модель, описывающая движение вязкоупругопластичных сред, имеет вид

$$\theta \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau - \tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial r} \right), \quad (2.36)$$

где τ – напряжение сдвига, $v = v(r, t)$ – скорость среды на расстоянии r от оси трубы; τ_0 – предельное напряжение сдвига; μ – вязкость среды; θ , λ – времена релаксации.

Для конкретных сред некоторые из параметров τ_0 , θ , λ могут оказаться равными нулю.

Пусть нефть в трубе первоначально покоится. В момент времени $t=0$ перепад давления вдоль оси трубы скачкообразно увеличивается от нуля до постоянного значения $\frac{p_0 - p_1}{L}$, после чего в процессе установления стационарного режима течения производятся замеры средней по сечению

скорости течения $w = w(t)$. Пренебрегая сжимаемостью среды, изменение средней скорости можно описать моделью

$$\theta \frac{d^2 w}{dt^2} + (1 + 2a\lambda) \frac{dw}{dt} + 2aw = \frac{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}}{\rho L},$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{dw}{dt}|_{t=0} = 0,$$

где $ra = \frac{8\mu}{\rho R^2}$, ρ – плотность среды, R, L – радиус и длина трубы, p_0, p_1 – давления в начале и конце трубы.

Легко получить, что детерминированные моменты

$$M_i = \int_0^{\infty} (w_{\infty} - w(t)) t^i dt, \quad i = 0, 1$$

определяются выражениями

$$M_0 = \frac{1 + 2a\lambda}{2a} \cdot w_{\infty},$$

$$M_1 = \frac{p_0 - p_1}{2a\rho\ell} \left[\left(\frac{1 + 2a\lambda}{2a} \right) - \frac{\theta}{2a} \right],$$

где $w_{\infty} = \frac{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}}{2a\rho L}$ – предельное значение скорости течения.

Для диагностирования реологических свойств воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{1 + 2a\lambda}{2a} - \frac{\theta}{1 + 2a\lambda}, \quad (2.37)$$

$$\frac{M_0}{w_{\infty}} = \frac{1 + 2a\lambda}{2a}, \quad (2.38)$$

$$\frac{w_{\infty}\rho L}{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}} = \frac{1}{2a}. \quad (2.39)$$

Анализ этих выражений показывает, что возможно выполнение следующих условий:

$$\text{I.} \quad \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_0}{w_{\infty}} = \frac{w_{\infty}\rho L}{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}} = \frac{1}{2a} \quad (\theta = 0, \lambda = 0);$$

$$\text{II.} \quad \frac{M_1}{M_0} \neq \frac{M_0}{w_{\infty}} = \frac{w_{\infty}\rho L}{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}} = \frac{1}{2a} \quad (\theta \neq 0, \lambda = 0);$$

$$\text{III. } \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_0}{w_\infty} \neq \frac{w_\infty \rho L}{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}} = \frac{1}{2a} \quad (\theta = 0, \lambda \neq 0);$$

$$\text{IV. } \frac{M_1}{M_0} \neq \frac{M_0}{w_\infty} \neq \frac{w_\infty \rho L}{p_0 - p_1 - 2\tau_0 \frac{L}{R}} = \frac{1}{2a} \quad (\theta \neq 0, \lambda \neq 0).$$

Значения параметров τ_0 и $2a$ можно определить по формуле (2.39), измеряя $\frac{p_0 - p_1}{L}$ и w_∞ для двух установившихся режимов течения с разными скоростями. Затем можно подсчитать значения отношений $\frac{M_1}{M_0}$, $\frac{M_0}{w_\infty}$, которые должны удовлетворять одному из условий I–IV. Определив, таким образом, какие из параметров θ и λ существенные, их численные значения можно найти по формулам (2.37), (2.38).

2.1.6. Решение обратных задач методом модулирующих функций

В предыдущем разделе были приведены алгоритмы определения параметров моделей, использующие решения краевых задач, полученные в пространстве Лапласа. Применимость этих алгоритмов ограничена следующими причинами.

1. Использование преобразования Лапласа возможно только для линейных моделей.
2. Форма теоретического решения может быть такова, что определить параметры оказывается затруднительным.
3. Для аппроксимации весьма сложных реальных граничных и начальных условий используется ограниченное число простых соотношений. В ряде случаев это может привести к столь большим погрешностям в определении параметров, что использование краевой задачи для идентификации модели становится невозможным.

В связи с этим ниже рассматривается метод модулирующих функций, позволяющий определить параметры модели без использования решений краевых задач [14]. По этому методу идентифицируемое дифференциальное уравнение заменяется некоторыми интегральными аналогами, из которых составляются алгебраические уравнения относительно искомых параметров. При этом получаются выражения, в которых отсутствуют производные экспериментальных функций, чем ликвидируются трудности, связанные с непосредственным дифференцированием экспериментальных

функций. Следует отметить, что применение метода модулирующих функций требует привлечения большого объема экспериментальной информации. Это является неизбежной платой за возможность нахождения оценок параметров без решения прямой задачи. Для примера рассмотрим задачу определения коэффициента температуропроводности a в уравнении

$$u_t - au_{xx} = g \quad (2.40)$$

по результатам наблюдений

$$y_{ij} = u(x_i, t_j) + \varepsilon_{ij}.$$

Умножим (2.40) на функции $\Psi(x) = (x - x_i)^2 (x_i' - x)^2$ и $\Phi(t) = (t - t_j)(t_j' - t)$ такие, что

$$\Psi(x_i) = \Psi(x_i') = 0; \quad \Psi'(x_i) = \Psi'(x_i') = 0; \quad \Phi(t_j) = \Phi(t_j') = 0, \quad (2.41)$$

и проинтегрируем по x и t в пределах $[x_i, x_i']$ и $[t_j, t_j']$. Выполнив интегрирование по частям, получим алгебраическое уравнение

$$A_{ii'jj'} a = B_{ii'jj'}, \quad (2.42)$$

$$\text{где } A_{ii'jj'} = \int_{t_j}^{t_j'} \int_{x_i}^{x_i'} u \Phi \Psi'' dx dt, \quad B_{ii'jj'} = - \int_{t_j}^{t_j'} \int_{x_i}^{x_i'} (u \Phi' + g \Phi) \Psi dx dt.$$

Как видим, производные экспериментальной функции заменены производными точно известных функций $\Psi(x)$ и $\Phi(t)$, дифференцирование которых является корректной операцией. Так как экспериментальные данные представлены в виде дискретных измерений, то вычисление интегралов производится численно, по формулам приближенного вычисления интегралов. При этом вместо значений $U(x, t)$ подставляются соответствующие значения замеров y .

Функции $\Psi(x)$ и $\Phi(t)$, позволяющие, благодаря свойствам (2.41), избавиться от дифференцирования экспериментальных данных, называются *модулирующими* функциями. Выбирая различные интервалы $[x_i, x_i']$ и $[t_j, t_j']$, а также различные функции $\Psi(x)$ и $\Phi(t)$ (удовлетворяющие условиям (2.41)), можно получить систему уравнений вида (2.42), которая решается относительно a методом наименьших квадратов. Для того чтобы определить статистические свойства оценок \hat{a} , нужно оценить воздействие интегральных операторов на случайные поля $y(x_i, t_j)$. Можно показать, что метод модулирующих функций обладает резкими сглаживающими свойствами [14]. Дисперсия оценки параметра по методу модулирующих функций может быть сделана весьма малой, если привлекается достаточно большой объем экспериментальной информации.

Рассматривая более общий случай, отметим, что для того, чтобы «снять» производную n -степени $\frac{\partial^n u}{\partial z^n}$, нужно использовать модулирующую функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \dots = \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 0, \\ \varphi(\beta) = \varphi'(\beta) = \dots = \varphi^{(n-1)}(\beta) = 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi \frac{\partial^n u}{\partial z^n} dx = (-1)^n \int_{\alpha}^{\beta} u \varphi^{(n)} dz.$$

2.2. Регуляризация некорректно поставленных задач

*Пойди туда, не знаю куда,
принеси то, не знаю что.*

*Одна из первых
некорректно
поставленных задач.*

Как уже говорилось ранее, многие обратные задачи, связанные с интерпретацией косвенных наблюдений, оказываются некорректными. Как показывают многочисленные примеры, неустойчивость всегда обусловливается тем, что решение задачи ищется в слишком широком классе.

Устойчивость задачи можно восстановить некоторым сужением класса возможных решений за счет привлечения какой-либо дополнительной (априорной) информации количественного или качественного характера. Иными словами, некорректно поставленные задачи возникают тогда, когда мы стремимся смоделировать процесс, не обладая для этого достаточной информацией. Различные способы решения некорректных (по Адамару) задач отличаются видом используемой дополнительной информации.

Итак, рассмотрим обратную задачу оценки u по системе наблюдений $y_i = g(x_i) + \varepsilon_i$ для модели

$$A[u] = g(x), \quad u \in F, \quad g \in G, \quad (2.43)$$

где оператор A осуществляет непрерывное взаимно однозначное отображение $F \rightarrow G$.

Будем предполагать единственность решения обратной задачи (2.43), т. е. предположим, что если для некоторой функции $\bar{g}(x)$ уравнение (2.43) имеет решение \bar{u} , то только одно.

Задача (2.43) становится корректной, если сузить класс возможных решений u до некоторого компакта M . Это следует из топологической теоремы, согласно которой взаимно однозначное и непрерывное отображение

компактного пространства M в метрическое пространство N есть гомеоморфизм [4–6]. Компакт M называется *классом корректности задачи* (2.43).

Задача (2.43), в постановке которой указано, что u принадлежит компактному M , называется *корректной по Тихонову* (условно корректной). Одним из способов устойчивого решения уравнения (2.43) является минимизация функционала $\|Au - g\|$ на множестве корректности M ($\|g\|$ – норма элемента g в G). Элемент

$$u_\delta = \operatorname{Arg\,in}_{u \in M} f \|Au - g_\delta\|$$

называется *квазирешением* уравнения (2.43) [4]. Предполагается, что вместо \bar{g} эксперимент дает g_δ такое, что $\|\bar{g} - g_\delta\| \leq \delta$; при $\delta \rightarrow 0$, в силу условной корректности задачи, $u_\delta \rightarrow \bar{u}$. Квазирешение определено так, что не обязательно $g_\delta \in N = AM$.

На рис. 2.4 изображена ситуация, когда $g_\delta \notin AM$. В этом случае квазирешение u_δ есть решение уравнения $Au_\delta = \varphi_\delta$, где φ_δ – проекция g_δ на множество N . Часто множество корректности M можно задать с помощью некоторого неотрицательного неоднородного функционала Ω :

$$M = \{u \in F | \Omega(u) \leq m\}.$$

В этом случае естественен также альтернативный методу квазирешения подход – минимизация функционала $\Omega(u)$ на множестве $\|Au - g_\delta\| \leq \delta$.

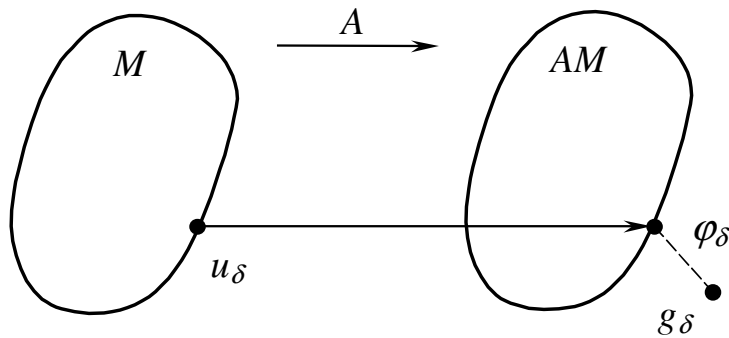


Рис. 2.4. Квазирешение некорректно поставленной задачи

Обычно величина функционала Ω (называемого стабилизирующим) характеризует гладкость решения u . Можно показать [5], что этот метод эквивалентен минимизации функционала

$$M^\alpha [u, g_\delta] = \|Au - g_\delta\|^2 + \alpha \Omega(u) \quad (2.44)$$

на всем пространстве, причем положительный параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ должен, по идее метода, определяться по невязке из условия

$$\|Au_\delta^\alpha - g_\delta\| = \delta,$$

где u_δ^α – экстремаль функционала (2.44).

При таких α имеет место сходимость $u_{\delta}^{\alpha(\delta)} \rightarrow \bar{u}$, если $\delta \rightarrow 0$. Обозначим через $R_{\alpha}(g_{\delta})$ оператор, ставящий в соответствие элементу g_{δ} элемент u_{δ}^{α} :

$$u_{\delta}^{\alpha} = R_{\alpha}(g_{\delta}),$$

$R_{\alpha}(g_{\delta})$ называется *регулирующим оператором* для задачи (2.43) [4–6].

При практическом применении метода параметр α остается, по существу, неопределенным. Обычно проводят расчеты с несколькими значениями параметра α , составляющими геометрическую прогрессию (например, $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$). Из полученных результатов выбирают наилучший – чтобы решение не было ни слишком сглаженным (слишком большие α), ни слишком «разболтанным» (слишком малые α).

В качестве стабилизатора можно взять, например, выражения типа

$$\Omega_n[u(s)] = \int_a^b ds \sum_{\kappa=0}^n p_{\kappa}(s) \left(\frac{d^{\kappa} u}{d s^{\kappa}} \right)^2, \quad (2.45)$$

где $p_{\kappa}(s)$ – весовые функции, $p_{\kappa}(s) > 0$.

Отметим, что регуляризирующий функционал (2.44) со стабилизатором

$$\Omega_2[u] = \int_a^b \left(\frac{d^2 u}{d s^2} \right) ds$$

предложен Филлипсом (D. L. Phillips) для случая

$$A[u(s)] = \int_a^b K(x, s) u(s) ds, \quad c \leq x \leq d.$$

2.3. Выбор сложности идентифицируемой модели

Если в задаче меньше трех переменных, это не задача; если больше восьми – она неразрешима.

Из сборника «Физики шутят»

Успех дела зависит от упрощения и от обоснования этого упрощения.

В. Акимов

Априорные сведения о структуре модели изучаемого процесса часто отсутствуют, поэтому вид модели приходится восстанавливать в ходе решения обратной задачи (идентификация в широком смысле этого слова). Как показывает опыт, в условиях неустойчивости большое значение имеет

выбор оптимальной сложности математической модели. Излишнее усложнение модели может привести к неустойчивым алгоритмам идентификации и, как правило, лишает идентификационные модели предсказательной силы.

В качестве простого примера рассмотрим задачу восстановления эмпирической зависимости $y = F(x)$ по экспериментально замеренным точкам $\{x_i, y_i\}, i = 1, \dots, 4$ (рис. 2.5).

Отклонения экспериментальных точек от графика функции $F(x)$, показанного на рис. 2.5 пунктирной линией, объясняются неизбежными ошибками замеров.

Зависимость $y = F(x)$ можно аппроксимировать следующими моделями возрастающей сложности:

I) $y = a x + b;$

II) $y = a x^2 + b x + c;$

III) $y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$

где коэффициенты a, b, c, d определяются методом наименьших квадратов.

Полученные таким образом зависимости для моделей I и III представлены на рис. 2.5 кривыми 1 и 2 соответственно. Как видно, модель III аппроксимирует зависимость $y = F(x)$ хуже, чем более простая модель I, особенно при попытке экстраполяции («прогноза») за интервал $[x_1; x_4]$.

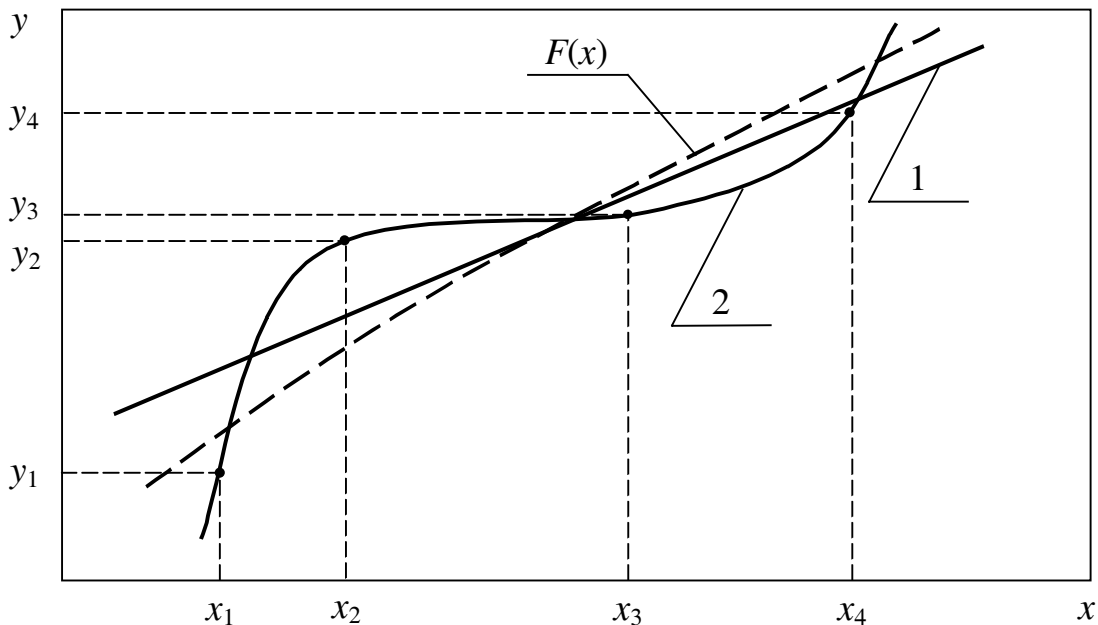


Рис. 2.5. Аппроксимация функции полиномами различной сложности

Для слишком сложной модели малые ошибки замеров, незаметные на интервале интерполяции, на этапе прогноза становятся «монстрами», радикально меняющими поведение кривой. По сходному поводу Я. Б. Зель-

дович писал: «Положение вещей напоминает сказку Андерсена, в которой тень, отделившись от человека, начинает жить самостоятельно, делает карьеру и, наконец, заставляет самого человека служить ей» (цитата, приведенная в [15]).

Таким образом, при выборе разумной сложности математической модели необходим всесторонний анализ, принципы которого не до конца формализуемы. Как отмечается в [15], «умение правильно выбрать математическую модель находится на грани науки и искусства. Оно требует не только необходимых математических и прикладных знаний и опыта, но также вкуса и чувства соразмерности».

Метод структурной минимизации среднего риска

Итак, при постановке и решении задач идентификации моделей по эмпирическим данным ограниченного объема возникает проблема правильного соотношения сложности идентифицируемой модели с количеством и уровнем погрешности имеющихся данных. Эта проблема может быть решена при помощи метода структурной минимизации среднего риска [16, 17]. Оказывается, что если на допустимом множестве решений задать структуру, то наряду с минимизацией эмпирического риска (невязки) внутри элементов структуры появляется дополнительная возможность минимизации по элементам структуры. Это позволяет найти решение, дающее более глубокий гарантированный минимум среднего риска, чем решение, доставляющее минимум эмпирического риска на всем допустимом множестве решений. По существу, метод структурной минимизации среднего риска является способом формализации давно применяемого на практике приема регуляризации за счет огрубления модели (см. также [8]).

Рассмотрим сущность этого метода на примере классической задачи восстановления функциональной зависимости $y = F(x)$ по эмпирическим данным, представленным в виде совокупности замеров (выборки) $\{x_i; y_i\}$, где y_i – результат измерения y при $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, l – число замеров (объем выборки). Обращаясь к вероятностной интерпретации погрешностей в исходных данных, введем аддитивную помеху ε :

$$y_i = F(x_i) + \varepsilon_i,$$

где случайная величина ε имеет нулевое математическое ожидание $E[\varepsilon] = 0$ и конечную дисперсию $D[\varepsilon] < \infty$. Несмотря на то, что задачи восстановления эмпирической зависимости не относят к некорректно поставленным, при ограниченном объеме выборки возникает проблема правильного соотношения «сложности» приближающей (пробной) функции с объемом и качеством (уровнем погрешности) исходных данных. Использование излишне сложных моделей, содержащих большое число искомым параметров,

приводит в случае малых выборок к неустойчивости, подобной неустойчивости некорректно поставленных задач.

Предполагая, что класс функций, в котором ищется регрессия $y(x)$, является параметрическим с параметрами a , задачу восстановления эмпирической зависимости можно свести к минимизации функционала

$$I(a) = \iint (y - F(x, a))^2 P(y|x) dx dy, \quad (2.46)$$

называемого *функционалом среднего риска* [16, 17]. Здесь $P(y|x)$ – плотность вероятности реализации значения y при заданном значении x . Как правило, вид функции $P(y|x)$ (характеризующий статистические свойства случайных ошибок) неизвестен, поэтому на практике вместо (2.46) минимизируется так называемый *функционал эмпирического риска*

$$I_0(a) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - F(x_i; a))^2,$$

построенный по случайной выборке $\{x_i; y_i\}$.

Показано [16, 17], что для величины функционала среднего риска могут быть получены верхние оценки вида

$$I(a) \leq I_m(a) = I_0(a) \Omega\left(\frac{l}{h}; \frac{\ln \eta}{l}\right), \quad (2.47)$$

справедливые с вероятностью $1-\eta$. Величина h называется емкостью класса функций $F(x, a)$ и определяет сложность идентифицируемой модели. В частном случае, если множество функций состоит из конечного числа N элементов $F_1(x, a), F_2(x, a), \dots, F_n(x, a)$, то $h \sim \ln N$, а если рассматривается класс линейных по параметрам функций

$$F(x, a) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (2.48)$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ – некоторая ортонормированная система функций, то $h = n$, т. е. емкость класса функций (сложность модели) равна в этом случае числу искоемых параметров n .

Величина $\frac{l}{h}$ определяет относительный объем выборки. Структура второго сомножителя в (2.47) такова, что с ростом $\frac{l}{h}$ величина $\Omega\left(\frac{l}{h}; \frac{\ln \eta}{l}\right)$ уменьшается, стремясь к единице. Функционал эмпирического риска с увеличением $\frac{l}{h}$, как правило, увеличивается. Таким образом, существует некоторое оптимальное значение $\frac{l}{h}$, при котором верхняя оценка среднего риска (его гарантированное значение) достигает минимума. Это значение $\frac{l}{h}$ и определяет оптимальную сложность модели.

При некоторых весьма общих предположениях могут быть получены точные оценки величины Ω [16, 17], но они оказываются малоприменимыми, поскольку требуют знаний о статистических свойствах случайных ошибок ε , а эта информация, как правило, отсутствует. Кроме того, строгие верхние оценки величины Ω оказываются весьма завышенными и могут привести к слишком «осторожным» по отношению к увеличению сложности модели алгоритмам.

Поэтому на практике эти оценки используются лишь для того, чтобы определить структуру критерия Ω , характер его зависимости от величин $\frac{l}{h}$ и $\frac{\ln \eta}{l}$. А значения констант, входящих в выражения для Ω , задаются исходя из априорных соображений или же подбираются на основе ретроспективного анализа опыта решения подобных задач.

Так, при восстановлении одномерной регрессии в классе функций (2.48) рекомендуется использовать критерий

$$\Omega = \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{n \left(\ln \frac{l}{n} - \ln \eta \right)}{l}}} \right]_{\infty}, \quad \text{где } [z]_{\infty} = \begin{cases} z, & z \geq 0, \\ \infty, & z < 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

При проведении расчетов задаются некоторыми значениями n , при каждом n методом наименьших квадратов определяют параметры a , а затем вычисляют $I_0(a)$ и по формулам (2.47)–(2.49) – функционал среднего риска $I_m(a)$.

Оптимальным признается то значение n , при котором величина $I_m(a)$ минимальна.

Пример. Обработка данных вискозиметрических исследований.

При обработке данных вискозиметрических экспериментов с реофизически сложными средами оценки реологических параметров часто оказываются неустойчивыми относительно малых экспериментальных ошибок. Это может быть связано, в частности, с тем, что достоверные результаты могут быть получены лишь в ограниченной области значений скорости сдвига, поскольку при слишком малых и слишком больших значениях скорости сдвига в неньютоновских средах могут иметь место явления, вносящие погрешности в измерения и искажающие истинную картину течения в рабочем зазоре ротационного прибора.

Качество решения задач восстановления зависимостей при ограниченном объеме выборки зависит не только от точности аппроксимации исходных данных, но еще и от таких факторов, как гладкость аппроксимирующей функции, ее «сложность» и т. д. Ниже приводится алгоритм обработки данных реологических экспериментов, позволяющий учесть это обстоятельство и использовать априорную информацию для повышения устойчивости результатов в условиях малых выборок.

Пусть результаты реологических экспериментов представлены в виде выборки $\dot{\gamma}_1, \tau_1, \dot{\gamma}_2, \tau_2; \dots; \dot{\gamma}_l, \tau_l$, где τ_i – значение касательного напряжения при скорости сдвига $\dot{\gamma}_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$), l – объем выборки. (Для примера, см. данные вискозиметрического исследования нефти месторождения Кюрсангя, приведенные в табл. 2.3.) Предположим, что зависимость $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ описывается реологической моделью вида $\tau = f(\dot{\gamma}; a_1, \dots, a_k)$, где f – некоторая заданная функция, содержащая неизвестные параметры a .

Таблица 2.3

Данные вискозиметрических исследований

$\dot{\gamma}, 1/\text{с}$	3,0	5,4	9,0	26,2	27,0	48,6	81,0	145,8
$\tau, 10^{-1} \text{ Па}$	12,2	16,7	22,8	31,5	43,2	56,3	85,4	121,5

В соответствии с методом структурной минимизации среднего риска зададим множество моделей различной сложности (структуру). Ограничимся рассмотрением следующих четырех уравнений.

I. $\tau = a_1 \dot{\gamma}$	(Модель ньютоновской жидкости; сложность модели $n = 1$, $a_1 = \mu$ – вязкость)
II. $\tau = a_1 + a_2 \dot{\gamma}$	(Модель Шведова–Бингама; $n = 2$, $a_1 = \tau_0$, $a_2 = \mu$)
III. $\tau = a_1 \dot{\gamma}^{a_2}$	(Степенная модель; $n = 2$)
IV. $\tau = a_1 + a_2 \dot{\gamma}^{a_3}$	(Модель Гершеля–Бакли; $n = 3$)

Здесь сложность модели определяется числом искомых параметров. Оценки значений реологических параметров \hat{a} в этих моделях определяются по исходной выборке $(\dot{\gamma}_i, \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, путем минимизации функционала эмпирического риска:

$$\hat{a} = \arg \inf I_0(a),$$

где

$$I_0(a) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l [\tau_i - f(\dot{\gamma}_i, a)]^2.$$

Устойчивость решения обратной задачи обеспечивается за счет выбора из четырех представленных соотношений модели оптимальной (в смысле минимума среднего риска) сложности.

Для практических расчетов применяется оценка

$$I_m(a) = \left[\frac{I_0(\hat{a})}{1 - \sqrt{\frac{n[\ln(l) + 1] - \ln \eta}{l}}} \right]_{\infty}.$$

Результаты расчетов по изложенной схеме приведены в табл. 2.4, из которой видно, что оптимальной является степенная модель III.

Таблица 2.4

Результаты расчетов

№	Сложность	$I_0, 10^{-2} \text{ Па}^2$	$I_m, 10^{-2}, \text{ Па}^2$	μ
I	$n = 1$	154	1200	0,1751
II	$n = 2$	26,6	1822	0,1028
III	$n = 2$	14,0	962	0,0747
IV	$n = 3$	11,1	∞	0,0845

(Отметим, что для моделирования ситуации, в которой возможно снятие замеров только в ограниченной области изменения $\dot{\gamma}$, «обучение» модели, т. е. определение параметров a , производится по неполным данным – шести экспериментальным точкам с номерами от второй до седьмой.)

Для иллюстрации на рис. 2.6 приведены реологические кривые $\tau = (\dot{\gamma})$, соответствующие модели III (кривая 1) и II (кривая 2). Как видим, зависимость, восстановленная по методу структурной минимизации среднего риска, удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные.

Отметим, что для повышения устойчивости при обработке данных реологических исследований можно использовать методы регуляризации, рассмотренные в разделе 2.2.

По методу А. Н. Тихонова, реологические параметры a определяются из условия минимума функционала

$$\Phi_{\alpha}(a) = I_0(a) + \alpha W(a),$$

где $W(a)$ – стабилизирующий функционал, α – параметр регуляризации.

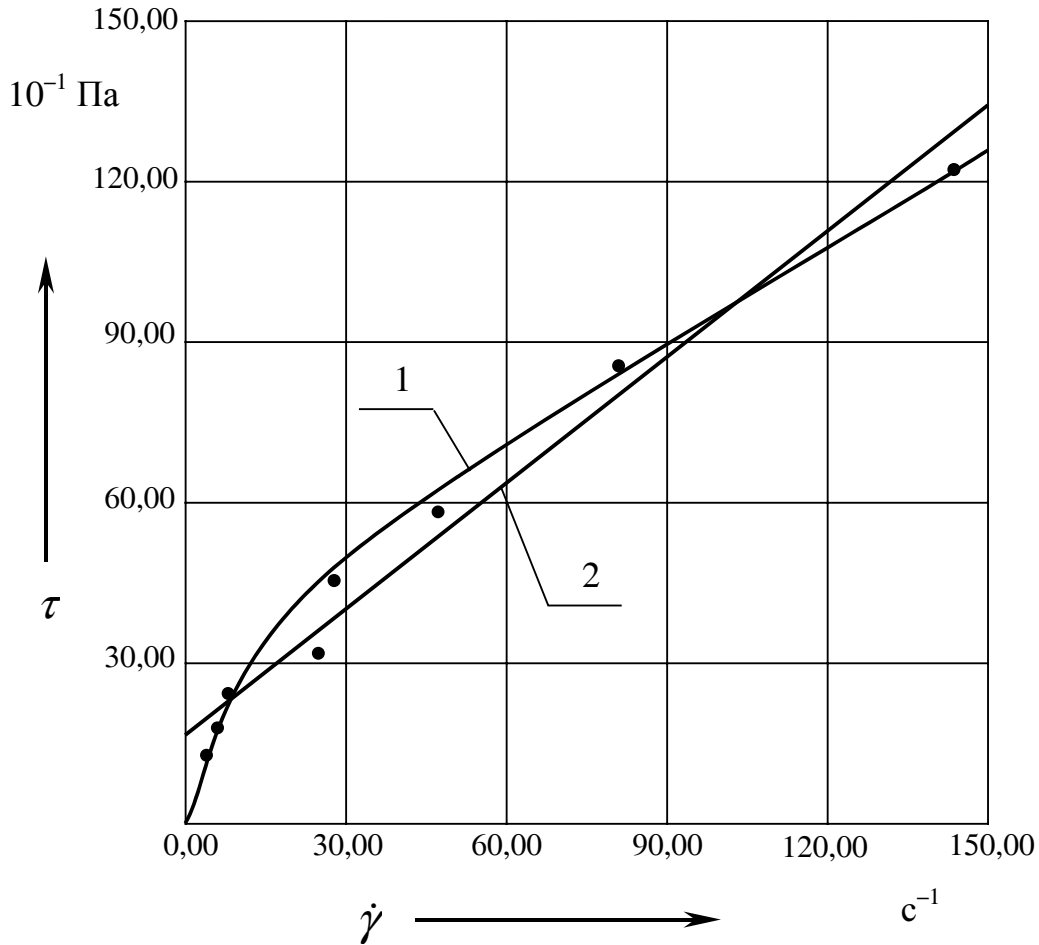


Рис. 2.6. Определение реологической модели по методу структурной минимизации среднего риска

Значения параметров $a = a^{(\alpha)}$, минимизирующие функционал Φ_α , существенно зависят от величины α . При $\alpha = 0$ кривая $\tau = f(\dot{\gamma}, a)$ наиболее близка к экспериментальным точкам. Однако это приводит к тому, что все ошибки эксперимента при обработке исходных данных сохраняются. Увеличение α приводит к «сглаживанию» этих ошибок, но ценой того, что отклонение экспериментальных точек от кривой $\tau = f(\dot{\gamma}, a)$ становится больше. «Оптимальное» значение α определяется из условия

$$I_0(a^{(\alpha)}) \approx \sigma^2,$$

где σ – среднеквадратичное отклонение измерений τ (предполагается, что оценка величины σ известна).

В ходе расчетов вначале задается некоторое малое значение $\alpha = \alpha_0$. Из решения систем уравнений

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial a} = 0$$

определяются соответствующие значения параметров $a^{(\alpha_0)}$. Затем определяется невязка $I_0(a^{(\alpha_0)})$, которая сравнивается с величиной σ^2 . Ес-

ли $I(a^{(\alpha_0)}) < \sigma^2$, то α придается новое значение $\alpha = \alpha_1 > \alpha_0$, а если $I_0(a^{(\alpha_0)}) > \sigma^2$, то должно быть $\alpha_1 < \alpha_0$. Таким образом, вычисления производятся до тех пор, пока при некотором $\alpha = \alpha_*$ величина $I(a^{(\alpha_*)})$ не станет близкой к значению σ^2 . Функция $\tau = f(\dot{\gamma}, a^{(\alpha_*)})$ принимается за реологическую модель исследуемой среды.

В качестве примера вновь рассмотрим данные вискозиметрического исследования нефти месторождения Кюрсангя, приведенные в табл. 2.3 (среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 0,4 \cdot 10^{-1}$ Па). Для описания реологической кривой выберем трехпараметрическую модель Гершеля–Бакли

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^m.$$

Известно, что величина предельного напряжения сдвига τ_0 , получаемая из опытов, часто является аппроксимационной [19]. Для учета этой априорной информации выберем стабилизирующий функционал в виде $W = \tau_0^2$. Тем самым конструируется алгоритм обработки вискозиметрических данных, с большой «неохотой» признающий наличие у изучаемого вещества предельного напряжения сдвига.

В ходе расчетов минимум функционала

$$\Phi_\alpha(\tau_0, K, m) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\tau_i - \tau_0 - K\dot{\gamma}_i^m)^2 + \alpha\tau_0^2$$

определяется градиентным методом (как и выше, при определении функционала эмпирического риска учитывались неполные данные – только шесть точек). При различных α были получены значения реологических параметров τ_0 , m и невязки I_0 , приведенные в табл. 2.5. Поскольку $\sigma^2 \approx 16 \cdot 10^{-2}$ Па², то счет прерывается при $\alpha = 0,3$.

Поскольку значение τ_0 , соответствующее $\alpha = 0,3$, мало по сравнению со среднеквадратичным отклонением σ , можно считать, что предельное напряжение сдвига отсутствует. Этот вывод соответствует результату, полученному выше методом структурной минимизации среднего риска.

Таблица 2.5

Результаты расчетов по методу А. Н. Тихонова

α	$\tau_0, 10^{-3}$ Па	m	$I_0, 10^{-2}$ Па ²
0	1270	0,97	10,7
0,1	780	0,88	13,0
0,2	397	0,78	15,2
0,3	220	0,73	16,0
0,5	110	0,70	16,7
2,0	19	0,67	17,3
5,0	8	0,67	17,3

2.4. Нечеткие алгоритмы решения обратных задач

*Есть правила для выбора решения,
но нет правила для выбора этих правил.*

Из сборника «Физики шутят»

*Человек, имеющий одни часы,
твердо знает, который час.
Человек, имеющий несколько часов,
ни в чем не уверен.*

*Закон Сегала (Из энциклопедии
афоризмов Н. Л. Векишина)*

Многие практически важные задачи сводятся к поиску экстремума некоторого функционала и могут быть сформулированы в следующей общей форме.

Пусть B – некоторое подмножество топологического пространства, на котором определен функционал $I(x)$, ограниченный снизу на непустом множестве $B_0 \subset B$. Требуется найти элементы $x^* \in B_0$, для которых

$$I(x^*) = \inf \{I(x) : x \in B_0\}. \quad (2.50)$$

На практике, как правило, точный функционал неизвестен, а вместо него имеются некоторые «приближенные» функционалы I_ε , аппроксимирующие I с некоторой погрешностью ε : $\|I - I_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Задача минимизации (2.50) называется корректно поставленной на множестве A допустимых приближенных функционалов, если ее решение не только существует и единственно, но и обладает свойством устойчивости, т. е. при уменьшении погрешности приближенное решение x_ε^* стремится к точному решению x^* : $x_\varepsilon^* \rightarrow x^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$x_\varepsilon^* = \operatorname{arg\,inf} \{I_\varepsilon(x) : x \in B_0\}.$$

Однако это условие часто не выполняется, поэтому актуальной является проблема получения устойчивых приближенных решений некорректно поставленных задач.

Как уже отмечалось выше, для регуляризации такого рода задач на их решения накладываются дополнительные ограничения, вытекающие из некоторых априорных соображений. Не ограничивая общности, можно считать, что эти ограничения сводятся к минимизации некоторого функционала $\Omega(x)$ (стабилизатора). Поскольку минимум функционала достигается, как правило, на элементе x^{**} , отличном от x^* , то мы имеем типичную двухкритериальную задачу в следующей нечеткой постановке: «найти

такие x , при которых $I_\varepsilon(x)$ и $\Omega(x)$ становятся как можно меньше». Обычно эту задачу сводят к однокритериальной, вводя модифицированный сглаживающий функционал (раздел 2.2):

$$M_\varepsilon^\alpha[x] = I_\varepsilon(x) + \alpha\Omega(x), \quad \alpha > 0, \quad x \in B_0. \quad (2.51)$$

Величина параметра регуляризации α подбирается таким образом, чтобы удовлетворялось условие (принцип невязки)

$$\|I_\varepsilon\| = \varepsilon \quad (2.52)$$

(не теряя общности, можно считать, что $\inf I = 0$).

Однако при решении практических задач информация о величине «ошибки» зачастую отсутствует. К тому же, кроме условия (2.52), могут быть введены и другие, не менее разумные принципы выбора α . Опыт решения реальных (а не модельных) задач показывает, что определение параметра регуляризации α является трудно формализуемой процедурой, имеющей субъективный характер.

Если априорная информация столь сложна, что ее формализация требует использования многих регуляризаторов Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то сглаживающий функционал должен иметь вид

$$M_\varepsilon^\alpha[x] = I_\varepsilon(x) + \alpha_1\Omega_1 + \alpha_2\Omega_2 + \dots + \alpha_n\Omega_n.$$

В этом случае одного условия (2.52) не хватит для определения всех параметров регуляризации α_i .

В конечном счете, затруднения, возникающие при подборе α , вызваны тем, что сведение многокритериальных задач к однокритериальным всегда связано с соображениями субъективного характера, а существующие ныне алгоритмы явным образом это никак не учитывают.

В то же время теория решения многокритериальных задач достаточно хорошо развита, поэтому целесообразно рассмотреть возможные применения ее результатов для решения некорректно поставленных задач.

Как известно, анализ многокритериальных задач не приводит к выделению единственного решения (минимизирующего элемента), а сводится к построению множества Парето – совокупности решений, характеризующейся тем, что ни для одного из них не существует доминирующего (лучшего по всем критериям сразу) решения [20]. Окончательный же выбор того или иного решения из множества Парето должен осуществить эксперт (лицо, принимающее решение), исходя из своего опыта, интуиции или привлекая какие-то другие соображения.

Однако в целях автоматизации процессов обработки экспериментальной информации необходимо выработать некоторые формальные правила решения некорректных задач, применяемые без участия человека. В этом случае целесообразно использовать методы теории нечетких множеств, поскольку сама формулировка многокритериальных задач имеет нечеткий, расплывчатый характер.

2.4.1. Нечеткие множества

Нечеткие множества – это объекты, о принадлежности к которым можно судить только с некоторой долей уверенности. Они введены Л. Заде для формализации качественного, словесного описания объектов и преследуемых целей [21].

Нечетким множеством A в U называется совокупность пар вида $(u, \mu_A(u))$, где $u \in U$, а $\mu_A(u)$ – функция $u \mapsto [0;1]$, называемая функцией принадлежности нечеткого множества A . Близость функции $\mu_A(u)$ к 1 является количественной мерой уверенности в том, что элемент u принадлежит множеству A . Если возможна четкая, однозначная классификация элемента u по принадлежности к A , то функция принадлежности вырождается в характеристическую функцию

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A, \\ 0, & u \notin A. \end{cases}$$

Вид функции принадлежности определяется представлениями экспертов, которые устанавливают те элементы $u \in U$, для которых $\mu_A(u) = 1$ или 0 (т. е. те области, для которых возможна четкая классификация), а затем задают тот или иной закон изменения функции μ_A от 0 до 1 в интервале нечеткой классификации. Например, нечеткое множество $A =$ «малое число» можно задать функцией принадлежности

$$\mu_A(u) = \varphi(u; u_1; u_2; m);$$

$$\varphi(u; u_1; u_2; m) = \begin{cases} 1, & u \leq u_1 \\ \left(1 - \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}\right)^m, & u_1 < u < u_2, \\ 0, & u \geq u_2 \end{cases} \quad (2.53)$$

где u_1, u_2 – числа, которые признаются (в данной ситуации) безусловно малым и безусловно большим соответственно.

В этом выражении показатель степени m характеризует степень падения уверенности в малости числа u при его отклонении от u_1 и назначается экспертом. Так, если речь идет о числах, малых по сравнению с единицей, можно задать $u_1=0, u_2=1, m=4$. Тогда $\mu_A(0,5) \approx 0,06$, $\mu_A(0,1) \approx 0,66$, что достаточно хорошо согласуется с интуитивным представлением о степени малости чисел 0,5 и 0,1 по сравнению с единицей.

Над нечеткими множествами производятся операции, соответствующие комбинациям нечетких терминов и целей. Рассмотрим некоторые из них.

а) **Пересечением** нечетких множеств A_1, A_2, \dots, A_n называется нечеткое множество C , соответствующее логической связке «и». Оно обозначается

$$C = \bigcap_k A_k, \quad k=1, \dots, n,$$

и определяется как нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_c(u) = \min(\mu_{A_1}(u), \mu_{A_2}(u), \dots, \mu_{A_n}(u)). \quad (2.54)$$

Использование операции пересечения в форме (3.54) часто приводит (как и все максиминные критерии) к слишком пессимистическим алгоритмам принятия решения. Поэтому часто оказывается целесообразным принятие более «гибкого» определения:

$$\mu_c(u) = (\mu_{A_1}(u), \mu_{A_2}(u), \dots, \mu_{A_n}(u))^{1/n}.$$

б) **Объединение** нечетких множеств A_1, A_2, \dots, A_n соответствует логической связке «или» и обозначается $C = \bigcup_k A_k, k = 1, \dots, n$. Его функция

принадлежности может быть определена как

$$\mu_c(u) = \max(\mu_{A_1}(u), \mu_{A_2}(u), \dots, \mu_{A_n}(u)),$$

или

$$\mu_c(u) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(u)}{\sup_u \left(\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(u) \right)},$$

или

$$\mu_c(u) = \begin{cases} t, & t \leq 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases} \quad t = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(u).$$

Рассмотренные нами операции над нечеткими множествами облегчают формализацию многокритериальных задач. Так, решение задачи минимизации критериев I_1, I_2, \dots, I_n может быть сведено к максимизации функции принадлежности

$$\mu = (\mu_1(I_1), \mu_2(I_2), \dots, \mu_n(I_n))^{1/n},$$

где $\mu_i(I_i)$ – функция принадлежности нечеткого множества «малые I_i », $i = 1, 2, \dots, n$.

2.4.2. Нечеткие постановки некорректных задач

Рассмотрим задачу минимизации по аргументу функционала $I_\varepsilon(x)$, неустойчивую относительно малых погрешностей ε . Предположим, что для обеспечения устойчивости ее решения привлекаются некоторые дополнительные сведения априорного характера, формализованные в виде требования минимальности функционалов $I_1(x), I_2(x), \dots, I_n(x)$. Таким образом, поиск устойчивого решения некорректной задачи сводится к решению многокритериальной задачи минимизации $n+1$ функционалов $I_\varepsilon, I_1, I_2, \dots, I_n$.

Используя подходы теории нечетких множеств, эту задачу можно свести к определению элементов $x^* \in B$, доставляющих максимум функции принадлежности

$$\mu = (\mu_\varepsilon(I_\varepsilon), \mu_1(I_1), \mu_2(I_2), \dots, \mu_n(I_n))_{n+1}^{\frac{1}{2}},$$

где $\mu_\varepsilon(I_\varepsilon)$ – функция принадлежности к нечеткому множеству «малые I_ε ».

Пример.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b, \quad x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad (2.55)$$

где A – ненулевая действительная матрица размера $m \times n$, $b \neq 0$.

Предположим, что вместо точного значения вектора b задано его приближение b_ε такое, что $\|b - b_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Приближенное решение (2.55) определяется как такой вектор $x_\varepsilon^* \in R^n$, для которого

$$I_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = \inf \{ I_\varepsilon(x) : x \in R^n \}, \quad \text{где } I_\varepsilon(x) = \|Ax - b_\varepsilon\|.$$

Как известно, в случае плохо обусловленных систем это решение неустойчиво относительно малых возмущений ε . Регуляризация задачи может быть достигнута за счет привлечения некоторой априорной информации. Пусть, например, известно, что искомые решения не должны быть слишком велики, т. е. требуется минимизировать норму $I_1(x_\varepsilon^*) = \|x_\varepsilon^*\|$.

Тогда устойчивое решение будет соответствовать максимуму функции принадлежности

$$\mu(x) = (\mu_\varepsilon(I_\varepsilon(x)) \mu_1(I_1(x)))^{\frac{1}{2}},$$

где $\mu_\varepsilon(I_\varepsilon) = \varphi(I_\varepsilon; 0; I_\varepsilon^*; m_1)$, $\mu_1(I_1) = \varphi(I_1; 0; I_1^*; m_2)$, функция φ задается выражением (2.55), I_ε^* и I_1^* – значения функционалов I_ε и I_1 , признаваемые большими. Эти величины, а также показатели степени и задаются экспертно, исходя из существа рассматриваемых задач.

Отметим, что в рамках традиционного подхода [5] устойчивое решение (2.53) следовало бы искать путем минимизации модифицированного сглаживающего функционала

$$M_\varepsilon^\alpha[x] = \|Ax - b_\varepsilon\| + \alpha \|x\|.$$

Сравнивая два рассмотренных выше подхода к решению некорректно поставленных задач, можно заметить, что при использовании теории нечетких множеств субъективный момент проявляется при выборе вида функций принадлежности $\mu_\varepsilon(I_\varepsilon)$ и $\mu_i(I_i)$. Подчеркнем, что нечеткий подход обеспечивает большую гибкость и учет большего числа «нюансов» при формализации априорной информации, поскольку возможности варьиро-

вания вида функций принадлежности намного богаче, чем возможности варьирования одного параметра α .

2.4.3. Нечеткий подход к выбору сложности идентифицируемой модели

С общей точки зрения, метод структурной минимизации среднего риска является средством формализации нечетко поставленной задачи «увеличить точность аппроксимации эмпирических данных, используя как можно более простые модели». При этом требуется минимизировать два критерия – функционал эмпирического риска $I_0(a)$ и критерий «относительной простоты модели» $\Omega\left(\frac{l}{h}; \frac{\ln \eta}{l}\right)$, причем при определении величины Ω неизбежно, как следует из раздела 2.3.1, привлечение субъективных соображений. И вновь, как и при построении регуляризующих алгоритмов, двухкритериальная задача сводится к однокритериальной путем введения обобщенного критерия

$$I_m(a) = I_0(a) \Omega\left(\frac{l}{h}; \frac{\ln \eta}{l}\right).$$

Легко видеть, что более естественным способом формализации задачи выбора оптимальной сложности модели является привлечение аппарата теории нечетких множеств. Используя рассмотренные выше подходы, можно потребовать максимума критерия

$$\mu(a, n) = (\mu_0(I_0(a, n)) \mu_c(n))^{0,5}, \quad (2.56)$$

где $\mu_0(I_0)$ и $\mu_c(n)$ – функции принадлежности нечетких множеств «малые значения эмпирического риска» и «малая сложность модели». Эти функции могут быть, например, определены как

$$\mu_0(I_0) = \Psi\left(\frac{I_0}{I_1}; m_1\right), \quad \mu_c(n) = \Psi\left(\frac{n}{0,5l}; m_2\right), \quad \Psi(t, m) = \begin{cases} 1 - t^m, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (2.57)$$

где I_1 – значение функционала эмпирического риска, соответствующее некоторому начальному числу параметров n (например, $n = 2$), m_1 и m_2 – показатели степени, определяющие отношение алгоритма к уменьшению эмпирического риска и увеличению сложности модели. (Так, если $m_2 < 1$, то уже при малых n модель считается сложной, а при $m_2 > 1$ число параметров может быть увеличено.)

Пример 1.

Рассмотрим математический эксперимент, заключающийся в восстановлении функциональной зависимости $y = F(x)$ по выборке $\{x_i; y_i\}$, «приготовленной» путем вычисления y_i по формуле

$$y_i = b_1 + b_2 x_i + b_3 x_i^2 + \varepsilon_0 \xi_i,$$

где ξ_i – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-1, 1]$ (вычисляется с помощью стандартных генераторов случайных чисел), ε_0 – уровень погрешности, $i = 1, 2, \dots, l$. При проведении расчетов принимались следующие значения параметров: $b_1 = b_2 = b_3 = \varepsilon_0 = 0,01$, а значения x_i задавались случайным образом в интервале $[0, 1]$.

Функциональная связь между y и x восстанавливалась в классе полиномов $y = \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1}$ путем минимизации функционала эмпирического риска

$$I_0(a) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \left(y_i - \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \right)^2.$$

В табл. 2.6 приведены значения I_0 , функционала среднего риска I_m (по выражениям (2.45) и (2.47)) и нечеткого критерия μ (по (2.56) и (2.57)), соответствующие полиномам различной сложности.

Таблица 2.6**Результаты математического эксперимента**

Число параметров модели	$l=20$			$l=8$		
	I_0	I_m	μ	I_0	I_m	μ
$n=1$	2,65	8,63	0,447	0,335	2,607	0,5
$n=2$	2,32	7,57	0,419	0,328	22,5	0,6997
$n=3$	0,10889	0,46	0,111	0,017	∞	0,195
$n=4$	0,10269	0,57	0,124	0,016	∞	0,219
$n=4$	0,10254	0,75	0,139	0,014	∞	0,205

Результаты математического эксперимента показывают, что при достаточно большом числе экспериментальных точек оба метода выбора модели оптимальной сложности дают правильный результат ($n = 3$), но при малых выборках метод СМСР становится излишне грубым и выбирает более простую модель, чем следует.

Пример 2.

В последнем столбце табл. 2.4 представлены значения нечеткого критерия μ , построенного с целью отбора реологической модели оптимальной сложности по данным вискозиметрических исследований, приведенных в разделе 2.3.1. Как видим, оптимальной вновь признается степенная модель Оствальда, что соответствует результату, полученному ранее с помощью метода структурной минимизации среднего риска.

2.5. Оценка начальных запасов газовых месторождений

*Почему бы Вам не разбавить
Ваши мысли поучительными примерами?*

Д. К. Максвелл (проповеднику)

Для эффективной разработки газовых месторождений необходимо уже на ранней стадии разработки достоверно оценить начальные балансовые и извлекаемые запасы месторождения.

Как известно, одним из распространенных методов подсчета запасов газа, наряду с объемным, является метод, основанный на использовании уравнения материального баланса и сводящийся к экстраполяции зависимости приведенного давления $p^* = p/z$ от накопленной добычи газа Q . Эта зависимость в условиях проявления чисто газового режима имеет прямолинейный характер. Графической интерпретацией метода в этом случае является линейная экстраполяция p/z -зависимости до уровня $p^* = 0$. При этом отрезок, отсекаемый на оси Q , служит для оценки начальных запасов газа.

Однако прямолинейная зависимость p^* от Q может быть нарушена за счет проявления водонапорного режима, влияния горного давления и других осложняющих факторов. Отметим, что очень часто причины, ведущие к отклонению p/z -зависимости от прямой, действуют с некоторым запаздыванием [22, 23].

В связи с вышеизложенным в данном разделе рассматриваются следующие две практически важные задачи:

- ранняя оценка запасов газа по начальным данным разработки месторождения (когда, в частности, не успевают проявить себя причины, нарушающие прямолинейность p/z -зависимости);
- оценка запасов газа в условиях проявления (с запаздыванием) деформируемости горных пород.

2.5.1. Оценка запасов газа по начальному участку p/z -зависимости

Математически задача экстраполяции p/z -зависимости сводится к определению параметров прямой $p^* = a + bQ$ методом наименьших квадратов (МНК) по значениям p_i, Q_i ($i=1, r, \dots, l$), полученным в ходе разработки месторождения (начальные запасы оцениваются как $-\frac{a}{b}$). При этом решается система алгебраических уравнений

$$A \cdot x = U,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} l & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix}, \quad x = (a, b)^T, \quad U = \left(\sum_{i=1}^l p_i; \sum_{i=1}^l p_i Q_i \right)^T,$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^l Q_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^l Q_i^2.$$

В связи с невозможностью точного определения средневзвешенного пластового давления (особенно в начальный период) значения коэффициентов a и b , а следовательно и запасов, найденных из решения этой системы, определяются с погрешностью Δx , уровень которой зависит от уровня погрешности определения правой части ΔU и обусловленности матрицы A [5]:

$$\|\Delta x\| \leq \mu \|\Delta U\|,$$

где μ – обусловленность матрицы A .

Нетрудно показать, что стремление использовать как можно более короткие начальные участки $\frac{p}{z}$ -зависимости приводит к увеличению обусловленности μ , поэтому даже малые ошибки в определении p^* и Q могут привести к большим ошибкам в определении начальных запасов газа.

Для получения устойчивого решения можно воспользоваться регуляризирующим методом наименьших квадратов (РМНК), когда при неточно заданной правой части \tilde{U} такой, что $\|U - \tilde{U}\| \leq \delta$, в качестве решения выбирается вектор x_α , минимизирующий функционал (см. раздел 2.2)

$$M^\alpha[x, \tilde{U}] = \|Ax - \tilde{U}\|^2 + \alpha \Omega(x),$$

где параметр α определяется из условия $\|Ax_\alpha - \tilde{U}\| = \delta$, $\Omega(x) = \left(Q_0 + \frac{a}{b} \right)^2$ – стабилизирующий функционал. При этом для определения априорно задаваемой величины Q_0 можно использовать величину запасов газа, опреде-

ленную объемным методом, которая (хотя бы только в первом приближении) оценивается уже на этапе разведочного бурения и тем более известна на этапе опытно-промышленной эксплуатации.

Для апробации вышеизложенного подхода нами были проведены расчеты по данным о динамике приведенного средневзвешенного пластового давления и суммарного добытого количества газа Коробковского месторождения [23] (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Динамика разработки Коробковского месторождения

Дата определения	p^* , МПа	Q , млрд. м ³
1954–1955 гг.	16,42	0,00
30.03.1963 г.	15,36	0,63
30.06.1963 г.	15,14	1,14
30.09.1963 г.	14,86	1,78
30.12.1963 г.	14,43	2,69
30.03.1964 г.	14,18	3,66
30.06.1964 г.	13,91	4,56
30.09.1964 г.	13,69	5,39
30.12.1964 г.	13,34	6,57
30.03.1965 г.	12,98	7,78
30.06.1965 г.	12,71	8,90
30.09.1965 г.	12,36	10,00
30.12.1965 г.	12,00	11,20

В табл. 2.8 приведены результаты модельных расчетов по исследованию устойчивости оценок начальных запасов газа относительно малых погрешностей в данных. В ходе этих расчетов на реальные значения приведенного давления накладывался случайный «шум» заданного уровня. В столбцах 2, 4, 6 табл. 2.8 приведены пределы изменения оценок начальных запасов, полученных обычным методом наименьших квадратов при различных реализациях «шумов». В столбцах 3, 5, 7 приведены аналогич-

ные оценки, полученные по алгоритму РМНК, причем в качестве априорной величины Q_0 (столбец 8) были выбраны несколько значений запасов газа, покрывающих интервал изменения начальных запасов, подсчитывавшихся неоднократно к тому времени объемным методом [23].

Таблица 2.8
Предельные значения начальных запасов при неточной исходной информации

Точки	Уровень погрешности, %						Q_0 , млрд. м ³
	0,5		1,0		1,5		
	МНК	РМНК	МНК	РМНК	МНК	РМНК	
2–5	30,5..40,2	27,4...33,8	27,3..47,9	25,5...33,1	24,7..59,6	26,0...32,7	100
		27,1...33,7		24,9...32,8		25,3...32,3	70
		26,9...33,5		24,1...32,5		24,5...31,7	50
		26,7...33,4		23,4...32,2		23,8...31,3	40
2–4	27,9..50,9	25,2...35,4	22,9..88,4	24,8...35,1			100
		24,5...35,2		24,0...34,6			70
		23,8...34,9		23,0...34,0			50
		22,1...33,6		22,1...33,6			40
2–3	21,8.. ..110,7	24,3...38,5					100
		23,3...38,0					70
		21,0...37,5					50
		20,9...37,3					40

Как видим, ошибки в определении запасов по алгоритму РМНК значительно меньше, причем на априорную информацию – значения начальных запасов газа, определяемые объемным методом – не нужно накладывать жестких ограничений по точности.

В табл. 2.9 приведены результаты исследования чувствительности оценок начальных запасов газа относительно изменения параметра регуляризации α при фиксированном значении априорных запасов $Q_0 = 70$ млрд. м (утвержденных ГКЗ в 1960 г.).

Как видно, найденные оценки начальных запасов сравнительно устойчивы. Надо отметить, что получение более подробной информации в период с 1965 по 1968 годы позволило ВНИИНГП оценить запасы в 42,2 и 47,1 млрд. м³ (по объемному методу и методу падения давления соответственно), а по отдельным данным – в 37,7 млрд. м³ [23]. Таким образом, оценки, полученные по информации о начальной стадии разработки, с достаточной для практики точностью совпадают с приведенными выше.

Таблица 2.9

**Начальные запасы газа по массивной залежи
Коробковского месторождения с использованием РМНК**

Параметры	Интервал точек		
	2–5	2–4	2–3
Параметр регуляризации α	5,3	4,2	2,7
Начальные запасы газа, млрд. м ³	39,5	41,7	42,7

2.5.2. Оценка запасов газа в деформируемых пластах

При разработке газовых месторождений с высоким пластовым давлением существенную роль играют процессы деформации пласта. Изменения парового объема Ω происходят под влиянием эффективного напряжения σ :

$$\Omega = \Omega(\sigma),$$

где

$$\sigma = p_2 - p,$$

где p_2 и p – значения горного и пластового давлений соответственно.

Как показывает анализ лабораторных и промысловых исследований, процессы деформации горных пород носят неравновесный характер. Поэтому при деформации необходимо учесть время λ , необходимое для установления равновесных значений Ω при изменениях эффективного напряжения σ , а также некоторое время задержки (лаг) θ , с которым значения σ следуют за изменением пластового давления p (величина θ имеет смысл характерного времени перераспределения горного давления).

Тогда линейное уравнение, описывающее кинетику деформационных процессов, может быть выписано в виде

$$\lambda \frac{d\alpha\Omega}{dt} + \alpha\Omega = \alpha_0\Omega_0 - \beta[p_0 - p(t - \theta)], \quad (2.58)$$

где α – коэффициент газонасыщенности, α_0 , Ω_0 и p_0 – начальные значения соответствующих величин, β – деформационный коэффициент.

Если время задержки θ мало, то деформация пласта проявляется уже на ранней стадии разработки месторождения. Если же время задержки достаточно велико, то начальный участок p/z -зависимости прямолинейный (по нему можно получить предварительную оценку начальных запасов по методу, рассмотренному выше) и только на временах порядка θ отклоняется от прямой.

Уравнение материального баланса имеет вид

$$\frac{\alpha_0 \Omega_0 p_0}{z_0} = \varphi \frac{p_1 Q}{z_1} + \frac{\alpha \Omega p}{z}, \quad (2.59)$$

где $\varphi = \frac{T_0}{T_1}$, T_0 и T_1 – пластовая и нормальная атмосферная температуры, z – коэффициент сверхсжимаемости, z_0 и z_1 – его значения при пластовых и атмосферных (нормальных) условиях, p_1 – нормальное атмосферное давление.

Введя обозначения

$$Q_\infty = \frac{\alpha_0 \Omega_0 p_0 z_1}{z_0 \varphi p_1}; \quad \omega = \frac{\alpha \Omega z_1}{\varphi p_1},$$

уравнения (2.58), (2.59) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q_\infty - Q &= \omega P^*; \quad \omega(0) = \omega_0, \\ \lambda \frac{d\omega}{dt} + \omega &= \omega_0 - \beta_1 [p_n^* - p^*]_\theta, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $\omega_0 = \frac{\alpha_0 \Omega_0 z_1}{p_1}$; $\beta_1 \approx \beta \frac{z_1 z_0}{\varphi p_1}$; $[p_n^* - p^*]_\theta = (p_n^* - p^*(t - \theta))h(t - \theta)$, Q_∞ – начальные извлекаемые запасы газа, $p^* = \frac{p}{z}$, $h(t)$ – функция Хевисайда, а в уравнение (2.58) для упрощения введено p^* вместо p .

Пусть имеются данные по изменению приведенного пластового давления p_i^* и суммарного отбора Q_i в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, l$.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{t_l}, \quad f_1 = \frac{p^*}{p_0^*}, \quad y = \frac{Q}{Q_l}; \\ g &= \frac{p_0^*(\omega - \omega_0)}{Q_l}; \quad a_1 = \frac{Q_\infty}{Q_l}; \quad a_2 = \frac{\omega_0 p_0^*}{Q_l}; \\ a_3 &= \frac{\lambda}{t_l}, \quad a_4 = \frac{\beta_1 p_0^{*2}}{Q_l}; \quad f_2 = f_1(\tau - \theta) - 1. \end{aligned}$$

Тогда (2.60) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_1 - y(\tau) &= [g(\tau) + a_2] f_1(\tau); \\ a_3 \frac{dg}{d\tau} + g &= a_4 f_2(\tau); \\ g(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Таким образом, необходимо по значениям y_i , $f_{1i} = f_1(\tau_i)$ оценить коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , θ .

Предположим, что значение θ задано. Значения остальных коэффициентов будем оценивать по алгоритму, использующему теорию чувствительности (см. раздел 2.1.1)

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} + \Delta a_i^{(k)}; \quad i = 1, \dots, 4,$$

где $\Delta a_i^{(k)}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(\Delta y, u_i) = \sum_{j=1}^4 (u_j, u_i) \Delta a_j,$$

$$\Delta y = \tilde{y} - y; \quad (u, v) = \int_0^1 u v d\tau,$$

y – решение системы (2.61) при $a_i = a_i^{(k)}$, \tilde{y} – экспериментальные замеры, u_i – функции чувствительности: $u_1 = 1$, $u_2 = -f_1$, $u_3 = -v_3 f_1$, $u_4 = -v_4 f_1$, а v_3 и v_4 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$a_3 \frac{dv_3}{d\tau} + v_3 = -\frac{dg}{d\tau}; \quad (2.62)$$

$$a_3 \frac{dv_4}{d\tau} + v_4 = f_2(\tau);$$

$$v_3(0) = v_4(0) = 0.$$

Система (2.62) на каждой итерации решается численно методом Рунге–Кутты. Интегралы (u, v) также берутся численно.

Такого рода расчеты проводятся при различных значениях θ . Вычисления прекращаются, когда будет достигнуто удовлетворительное согласие расчетных кривых с экспериментальными данными. При этом начальные запасы газа оцениваются как $Q_\infty = a_1 Q_l$.

Пример. Анализ p/z -зависимости месторождения Зеварды

В табл. 2.10 приведена зависимость приведенного пластового давления месторождения Зеварды от суммарного отбора газа в период с 1979 по 1988 гг. с интервалом $\Delta t = 0,5$ газа.

Согласно этим данным, начальные запасы газа, полученные линейной экстраполяцией p/z -зависимости, увеличиваются по мере извлечения газа. Появление «кажущихся» запасов связано с уменьшением темпа падения давления, что, в свою очередь, может быть объяснено процессами деформации коллектора под действием горного давления (многочисленные исследования показали, что внедрение законтурной воды в пласт и «подпитка» газом извне – другие возможные причины замедления темпа падения давления – на месторождении Зеварды не наблюдаются).

Таблица 2.10

p/z-зависимость для месторождения Зеварды

№	Дата	<i>p/z</i> , МПа	<i>Q</i> , млрд куб. м.
1	06.78	42,92	0,000
2	12.78	42,79	0,207
3	06.79	42,74	1,714
4	12.79	42,26	3,354
5	06.80	42,05	5,746
6	12.80	41,56	9,982
7	06.81	40,96	12,223
8	12.81	40,51	16,043
9	06.82.	39,55	20,610
10	12.82	38,78	25,007
11	06.83	38,40	29,480
12	12.83	37,70	34,185
13	06.84	36,56	38,903
14	12.84	36,00	43,172
15	06.85	35,80	47,930
16	12.85	35,45	51,504
17	06.86	34,34	55,706
18	12.86	33,80	58,029
19	06.87	33,30	62,464
20	12.87	32, 91	66,708
21	06.88	33,21	71,129
22	12.88	32,57	75,491

Для описания динамики падения пластового давления мы вначале использовали модель (2.61) с $a_3 = 0$, т. е. учитывали только время задержки. В табл. 2.11 приведены значения времени задержки θ и соответствующие этим временам значения нормированного отклонения расчетных кривых от экспериментальных (критерия Тейла).

Как видим, наименьшее значение критерия Тейла достигается при $\theta = 16\Delta t = 8$ годам. При этом полученные оценки запасов газа равны 277,6 млрд м³. Отметим, что результаты расчетов устойчивы по отношению к небольшим изменениям θ : при изменении времени задержки от $13\Delta t$ до $18\Delta t$ значения Q_∞ меняются всего лишь от 269 до 280 млрд м³. Прогнозная кривая падения давления (при темпах добычи 10 млрд м³ в год) приведена на рис. 2.7.

Учет в (2.61) времени запаздывания a_3 приводит практически к тем же результатам.

Таблица 2.11

Результаты идентификации модели

№	Время задержки, Δt	Критерий Тейла	Начальные запасы, млрд куб. м.
1	0	0,04127	470,3
2	1	0,00481	346,4
3	2	0,00747	182,2
4	3	0,01004	165,7
5	4	0,00815	194,8
6	5	0,00648	217,3
7	6	0,00576	231,5
8	7	0,00499	242,8
9	8	0,00446	250,2
10	9	0,00397	255,0
11	10	0,00356	260,0
12	11	0,00329	264,6
13	12	0,00312	268,0
14	13	0,00303	271,1
15	14	0,00297	273,9
16	15	0,00288	276,4
17	16	0,00284	277,6
18	17	0,00300	283,4
19	18	0,00340	287,7
20	19	0,00387	291,9
21	20	0,01445	290,8
22	21	0,01128	294,6

Нами была также произведена обработка начального участка p/z -зависимости по линейной модели методами МНК и РМНК. Сводная информация по оценке запасов приведена в табл. 2.12.

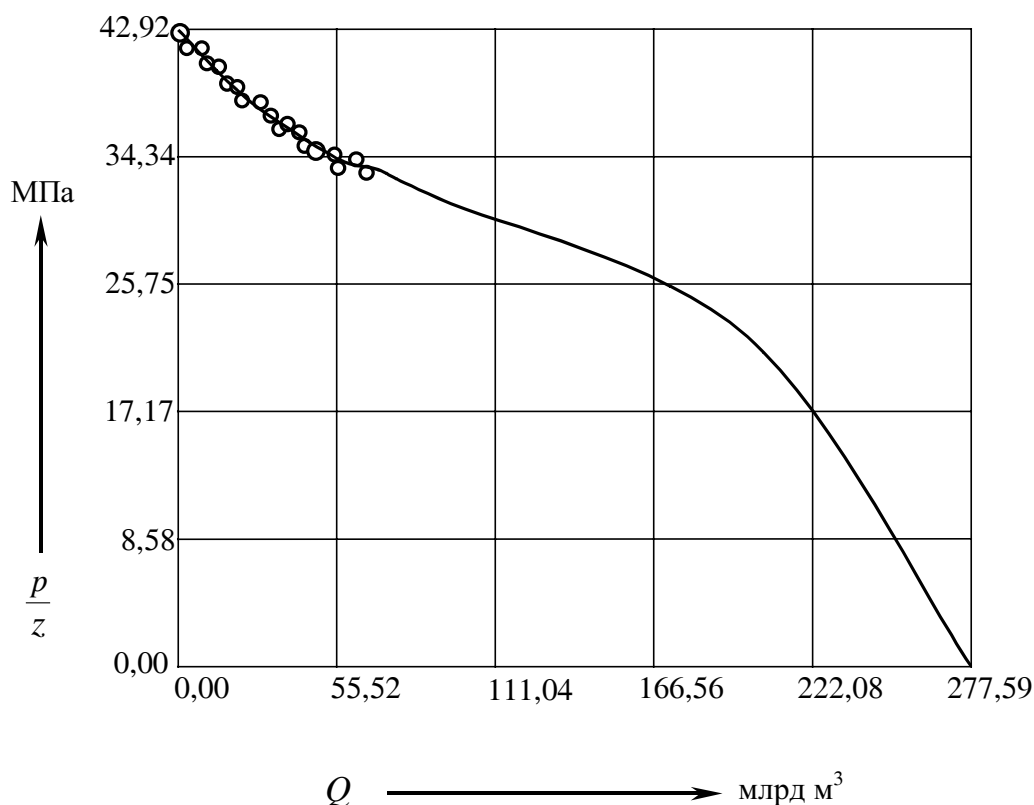


Рис. 2.7. Прогноз падения пластового давления на месторождении Зеварды

Таблица 2.12

Сравнение результатов различных методов идентификации

Метод	Запасы, млрд м ³
Объемный метод	280,00
МНК (точки 1–5)	316,92
РМНК (точки 1–5)	279,82
Деформационная модель с запаздыванием	277,59

Таким образом, на основании оценок запасов, полученных различными методами, можно считать запасы месторождения Зеварды лежащими в пределах от 278 до 280 млрд м³.

2.6. Регуляризация методов обработки кривых восстановления давления

Одним из методов получения ценной информации о коллекторских свойствах пласта являются гидродинамические исследования скважин. Наиболее распространенным видом исследования является снятие кривой

восстановления давления (КВД) на забое скважины. Суть метода заключается в остановке скважины, регистрации зависимости забойного давления от времени и последующем решении обратной задачи по определению фильтрационных характеристик пласта. Задача интерпретации КВД давно перешла в разряд классических, методы ее решения в различных постановках хорошо известны и широко используются на практике [24–27].

Однако при применении этих методов возникают методические трудности, которые обычно не замечают или замалчивают. Дело в том, что очень часто обратная задача определения фильтрационных характеристик пласта по КВД оказывается некорректно поставленной: ее решения неустойчивы относительно ошибок, которые неизбежно содержатся в замерах. В частности, неустойчивость проявляется в условиях малых выборок, когда в координатах метода удается спрямить только небольшой участок КВД. Последнее может быть связано, например, с тем, что не удается обеспечить стационарный режим работы скважин, окружающих исследуемую, на весь период проведения исследования. Изменения режимов работы скважин ближайшего окружения приводят к появлению дефектных участков КВД, которые следует исключить из анализа. Очень часто приходится также обрабатывать так называемые «недовосстановленные» КВД, полученные в экспериментах, прерванных по техническим причинам или же из-за желания уменьшить потери нефти вследствие простоя скважины.

В настоящем разделе обращается внимание на то, что обязательным этапом обработки КВД является проверка полученных результатов на устойчивость. Предложены регуляризирующие (повышающие устойчивость) алгоритмы интерпретации КВД, основанные на известных методах решения некорректно поставленных задач.

2.6.1. Неустойчивость результатов интерпретации КВД

На рис. 2.8 приведена кривая восстановления давления снятия, на скв. 1139 Приобского нефтяного месторождения (ОАО «Юганскнефтегаз»).

По методике МДХ (Миллер, Дэйс, Хатчинсон) при достаточно больших временах динамика забойного давления $P(t)$ описывается уравнением [24–26]

$$\Delta P(t) = a \cdot \ln t + b,$$

где t – время с момента остановки скважины, $\Delta P(t)$ – изменение забойного давления,

$$\Delta P(t) = P(t) - P_0,$$

$$a = \frac{Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}, \quad b = a \cdot \ln \left(\frac{2.25 \cdot \chi}{r_C^2} \right),$$

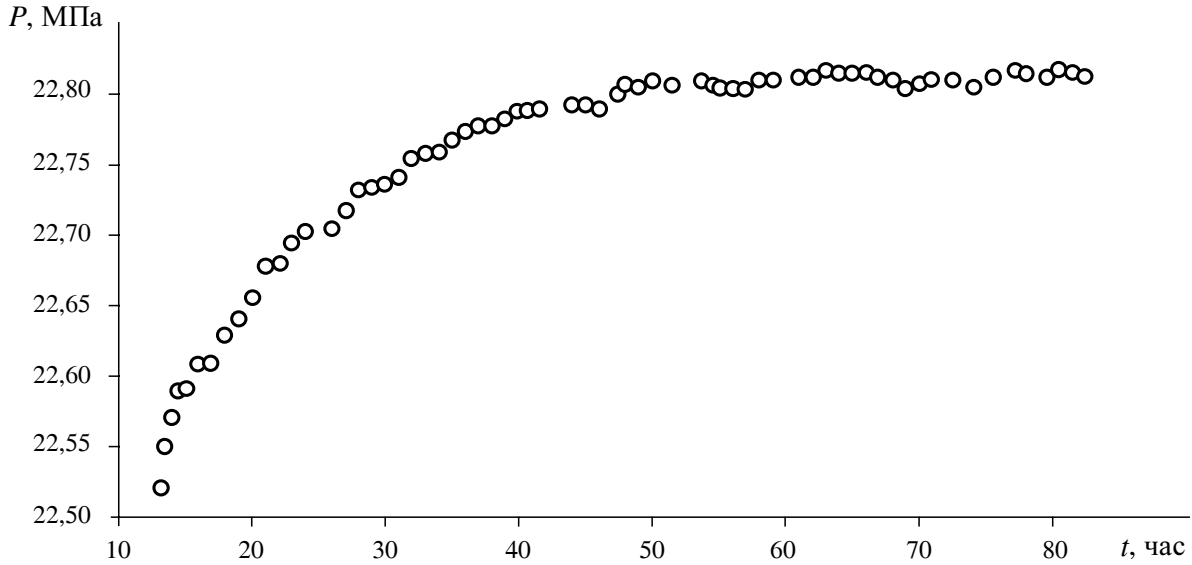


Рис. 2.8. Кривая восстановления давления (скв. 1139 Приобского месторождения)

P_0 и Q_0 – забойное давление и дебит (приведенный к пластовым условиям) скважины до остановки, χ – коэффициент пьезопроводности,

$$\chi = \frac{k}{\mu t \beta},$$

β – сжимаемость пластовой системы, r_C – приведенный радиус скважины, учитывающий ее несовершенство, ε – коэффициент гидропроводности,

$$\varepsilon = \frac{k \cdot h}{\mu},$$

k , t и h – проницаемость, пористость и мощность пласта, μ – вязкость жидкости.

Пусть ε_* – некоторое характерное значение коэффициента гидропроводности. Переходя к безразмерным переменным

$$\overline{\Delta P} = \frac{\Delta P}{\Delta P_*}, \quad \overline{t} = \frac{2,25 \cdot \chi}{r_0^2} \cdot t, \quad \overline{r_C} = \frac{r_C}{r_0},$$

где $\Delta P_* = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_*}$, $\chi_* = \frac{\varepsilon_*}{h \cdot \beta}$, r_0 – истинный (геометрический) радиус скважины, получим

$$\overline{\Delta P} = \overline{a} \cdot \ln \overline{t} + \overline{b} \quad (2.63)$$

и

$$\overline{a} = \frac{1}{\overline{\varepsilon}}, \quad \overline{b} = \overline{a} \cdot (\ln \overline{\varepsilon} + 2 \cdot S). \quad (2.64)$$

Здесь S – скин-фактор, определяемый через приведенный радиус:

$$S = \ln \left(\frac{r_0}{r_C} \right) = -\ln \overline{r_C}.$$

В дальнейшем мы будем для простоты опускать черточку над безразмерными величинами.

Согласно (2.63) в полулогарифмических координатах $\ln t - \Delta P$ график КВД представляет собой прямую линию, тангенс угла наклона которой определяет величину a , а отрезок, отсекаемый прямой на оси ΔP , – величину b . На практике, в координатах $\ln t - \Delta P$ спрямляется только некоторый участок КВД, через который и проводится прямая. Величины a и b определяются методом наименьших квадратов (МНК) путем минимизации отклонения прямой (2.63) от точек спрямляемого участка (невязки).

$$I(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a \cdot x_j + b - y_j)^2, \quad (2.65)$$

где $y_j = \Delta P(t_j)$, $x_j = \ln t_j$, $\Delta P(t_j)$ – значение ΔP , измеренное в момент времени t_j , $j=1,2,\dots,n$, n – объем выборки (число экспериментальных точек на спрямляемом участке).

Формулы, по которым вычисляются a и b , имеют вид

$$a = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{D_x}, \quad b = \frac{\langle x^2 \rangle \cdot \langle y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle x \cdot y \rangle}{D_x}, \quad (2.66)$$

где D_x – дисперсия величины x , $D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, а угловые скобки означают усреднение: $\langle c \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$.

Обращая уравнение (2.64), при заданных значениях β и h определяют фильтрационные характеристики пласта и скин-фактор:

$$\varepsilon = \frac{1}{a},$$

$$S = 0.5 \cdot \left(\frac{b}{a} + \ln a \right).$$

На рис. 2.9 приведен график рассматриваемой нами КВД (рис. 2.8) в размерных координатах $\ln t - \Delta P$. Прямая 1 на этом рисунке проведена методом наименьших квадратов через спрямляемый участок AB . Определив параметры a и b этой прямой, можно, казалось бы, оценить фильтрационные характеристики пласта и считать задачу решенной.

Однако даже из рисунка видно, что полученные при этом результаты будут очень неустойчивыми, поскольку прямую приходится проводить через широкое «облако» точек малой протяженности. Указанное на рисунке положение прямой 1 есть всего лишь случайный результат, полученный при данной случайной реализованной выборке данных. Если бы была снята еще одна КВД, экспериментальные точки из-за ошибок замеров могли бы расположиться иначе, и это привело бы к совершенно другой прямой.

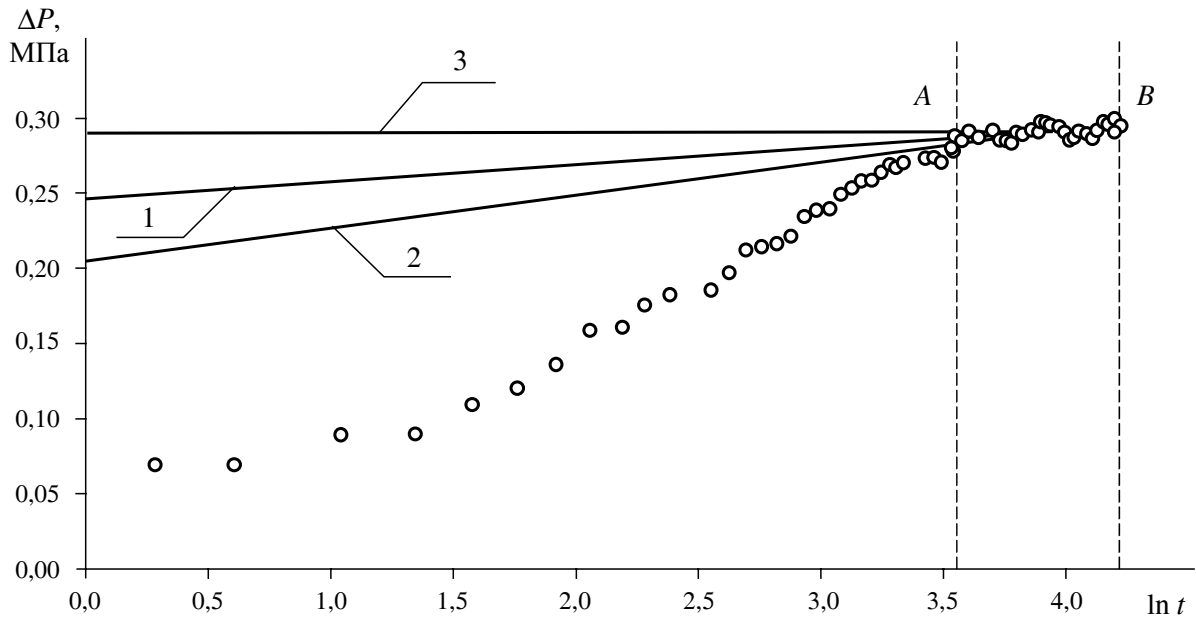


Рис. 2.9. Результаты численного эксперимента по наложению «шума»

Для того чтобы смоделировать эту ситуацию нами, был проведен математический эксперимент, в ходе которого исходная выборка замеров $\{\Delta P(t_i)\}$ заменялась на выборки, полученные путем наложения на прямую 1 случайных «шумов». При этом методом Монте-Карло моделировались равномерно распределенные ошибки величиной порядка 1%.

На рис. 2.9 прямыми 2 и 3 ограничена область, в которой лежат прямые, полученные по таким модельным выборкам. Как видим, малые ошибки в определении ΔP приводят к значительным ошибкам в определении фильтрационных параметров пласта (например, разброс значений ε составляет 200%).

Если обратиться к расчетным формулам (2.66), то становится ясно, что отмеченная неустойчивость вызвана малостью знаменателя D_x , т. е. малостью длины спрямляемого участка. Малые ошибки, содержащиеся в числителях уравнений (2.66), возрастают за счет деления на величину D_x , близкую к нулю. Иными словами, желание провести прямую через «облако» точек приводит к плохо обусловленной системе уравнений.

2.6.2. Регуляризирующий метод обработки КВД

Итак, задача интерпретации КВД по методу МДХ является некорректно поставленной. Для повышения устойчивости ее решения необходимо привлечь методы регуляризации некорректных задач, заключающиеся в том, что на искомые параметры накладываются дополнительные ограничения, вытекающие из некоторых априорных соображений.

При обработке КВД в качестве такой априорной информации могут выступать оценки величины коэффициента гидропроводности, полученные предварительно другими методами. Например, коэффициент гидропроводности можно рассчитать, оценив среднюю проницаемость пласта по данным геофизических исследований и отборам керна. Полезную информацию могут дать также данные нормальной эксплуатации скважины (гидропроводность можно оценить по формуле Дюпюи, зная дебит и задавшись некоторыми примерными значениями депрессии и скин-фактора).

Пусть ε_0 – предварительная (размерная) оценка коэффициента гидропроводности, полученная одним из перечисленных выше методов. Эта информация может быть формализована в виде требования минимизации функционала

$$\Omega(a) = (a - a_0)^2, \quad (2.67)$$

где $a_0 = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0}$ (величина a в (3.52) уже безразмерна).

Таким образом, задача становится двухкритериальной – требуется найти такие значения a и b , при которых функционалы (2.65) и (2.67) становятся как можно меньше. Переходя к однокритериальной постановке, сведем эту проблему, согласно разделу 2.2, к минимизации регуляризующего функционала

$$M(a, b) = I(a, b) + \alpha \cdot \Omega(a),$$

где α – параметр регуляризации ($\alpha > 0$).

Ясно, что чем больше значение α , тем более устойчивым является решение.

Легко показать, что значения $a = \tilde{a}$ и $b = \tilde{b}$, доставляющие $M(a, b)$ минимум, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{\langle x \cdot y \rangle + \alpha \cdot a_0 - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{D_x + \alpha}; \\ \tilde{b} &= \frac{(\langle x^2 \rangle + \alpha) \cdot \langle y \rangle - \langle x \rangle \cdot (\langle x \cdot y \rangle + \alpha \cdot a_0)}{D_x + \alpha}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Как видим, в знаменателях дробей появилось положительное число α , что устраняет деление на малое число D_x и делает задачу устойчивой.

Как уже отмечалось в разделе 2.5, описанный алгоритм устойчивой оценки параметров можно назвать регуляризующим методом наименьших квадратов (РМНК).

Величина α определяется из принципа невязки

$$I_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b}) \approx D_P,$$

где $I_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b})$ – значение невязки (2.65), полученное при данном значении α , D_P – дисперсия ошибок измерения давления.

Для определения значения параметра регуляризации может быть предложен и другой подход. Задаваясь различными возрастающими значениями α , при каждом из них проводят описанный выше математический эксперимент, рассматривая разные выборки замеров $\{\Delta P(t_i)\}$, «приготовленные» методом Монте-Карло, и оценивая соответствующий разброс искомых параметров. За оптимальное значение принимается значение α , при котором относительная ошибка определения a и b достигает заданной величины. Такой алгоритм определения параметра α может быть назван **принципом Монте-Карло**.

Пример расчетов

Изложенная методика была использована при интерпретации рассмотренной выше КВД.

Привлекая данные ГИС и информацию о вязкости нефти, мы получили априорную оценку гидропроводности $\varepsilon_0 = 3,80 \text{ м}^3/\text{Па}\cdot\text{с}$. Дебит скважины в пластовых условиях до ее остановки был равен $Q_0 = 70 \text{ м}^3/\text{с}$. Мощность пласта составляет $h = 8,2 \text{ м}$, сжимаемость пластовой системы $\beta = 12 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$. При обезразмеривании исходных данных мы положили $\varepsilon_* = \varepsilon_0$. В табл. 2.13 приведены результаты применения РМНК к обработке КВД при различных значениях α .

В четвертом и пятом столбцах этой таблицы приведены относительные ошибки определения величин $\bar{\varepsilon}$ и S . Здесь σ_{ε} и σ_S – среднеквадратичные отклонения от средних для оценок $\bar{\varepsilon}$ и S , полученные в численных экспериментах по наложению 1%-го «шума» на исходные замеры. В шестом столбце приведена величина

$$\Psi = \frac{\sqrt{I_{\alpha}} - \sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0}},$$

характеризующая относительное увеличение невязки I при увеличении параметра регуляризации α . Здесь I_0 – невязка, полученная по МНК, т. е. при $\alpha = 0$.

Таблица 2.13

Обработка КВД регуляризирующим методом

α	$\bar{\varepsilon}$	S	$\frac{\sigma_{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}, \%$	$\frac{\sigma_S}{S}, \%$	$\Psi, \%$
0	13	11	260	245	0
0,001	8,2	7,8	132	150	0,0006
0,01	5,1	8,7	94	90	0,003
0,1	6,3	6,2	34	47	0,2
0,5	3,93	3,45	2,6	3	4
1	3,8	3,3	0,8	1	6

Оптимальным признается значение $\alpha = 0,50$, при котором относительная ошибка определения $\bar{\varepsilon}$ и S порядка 3%. При этом значении α $\bar{\varepsilon} = 3,93$ ($\varepsilon = 13,0$ м³/Па·с) и $S = 3,45$.

Сравнивая значения Ψ при $\alpha = 0,50$ и $\alpha = 0$ видим, что учет априорной информации не приводит к заметному увеличению невязки.

На рис. 2.10 показан разброс положений прямой $a \cdot \ln t + b$, вызванный наложением «шумов» на исходные данные, при применении РМНК с $\alpha = 0,50$. Наглядно видно, что устойчивость решения обратной задачи значительно повысилась.

Таким образом, интерпретация КВД не должна быть ограничена простым расчетом фильтрационных параметров по готовым формулам. Необходимо исследовать полученные результаты на устойчивость, для чего рекомендуется провести численные эксперименты по наложению на исходные данные «шумов», моделирующих случайные ошибки измерений. Если численный эксперимент покажет, что при данном качестве исходной информации результаты расчетов неустойчивы, необходимо использовать регуляризирующие (повышающие устойчивость) алгоритмы, заключающиеся в привлечении априорной информации о пределах, в которых могут лежать искомые параметры.

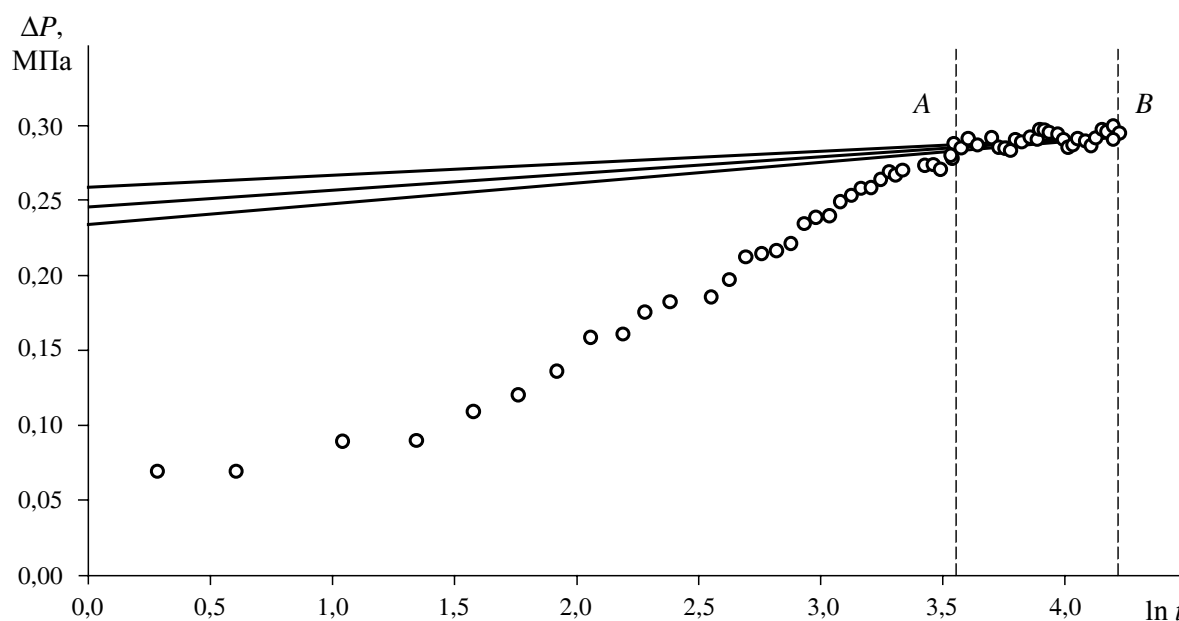


Рис. 2.10. Результаты численного эксперимента по наложению «шума» с регуляризацией

2.7. Оценка извлекаемых запасов нефти на основе феноменологических моделей

Как правило, нефтяные месторождения России эксплуатируются с применением заводнения. В настоящее время существует множество мето-

дов оценки начальных извлекаемых запасов (НИЗ) для таких месторождений по характеристикам вытеснения – зависимостям накопленного отбора нефти от накопленного отбора жидкости, представленным в той или иной форме [28–34].

Как и любые задачи долгосрочного прогноза, экстраполяция промышленных данных этими моделями очень чувствительна к малым погрешностям, содержащимся в исходной информации. Поэтому большое значение имеет обоснованный выбор вида уравнений, аппроксимирующих динамику накопленной добычи нефти.

Для устойчивой оценки НИЗ могут быть использованы эволюционные модели, основанные на универсальном законе роста сложных природных систем – логистическом уравнении [35]. В рамках этого подхода устойчивость долгосрочного прогноза обеспечивается за счет привлечения априорной информации об универсальных законах развития. Здесь легко прослеживается аналогия с некорректно поставленными задачами, регуляризация которых также производится с помощью априорной информации.

Многочисленные примеры из разных областей наук показывают, что эволюции сложных систем присуще свойство самоподобия. В связи с этим в настоящем разделе рассмотрены возможности применения в задачах прогноза добычи нефти модели С. П. Капицы [36], описывающей самоподобный (автомодельный) рост.

Обычная практика применения прогнозных моделей подразумевает их «обучение», т. е. подбор «наилучших» параметров моделей из условия минимального отклонения расчетных кривых от экспериментальных точек. При этом широко используется метод выравнивания – переход к некоторым специальным координатам, в которых характеристики вытеснения линеаризуются относительно искомых параметров. Однако это преобразование приводит к появлению систематических ошибок (ошибок модели), существенно ухудшающих качество долгосрочного прогноза. Поэтому ниже «обучение» модели предлагается проводить в пространстве исходных переменных, что приводит к необходимости решения задач нелинейной регрессии. В связи с этим рассматривается эффективный метод численного поиска параметров нелинейных моделей, базирующийся на идеях генетических алгоритмов [37, 38].

Апробация предложенного способа оценки извлекаемых запасов (включающегося в прогнозе динамики добычи нефти по модели С. П. Капицы, параметры которой определяются с помощью генетического алгоритма) показала, что он обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционно применяемыми методами.

2.7.1. Эволюционные модели роста накопленной добычи нефти

В работе [35] динамику накопленной добычи нефти предлагается описать с помощью моделей, основанных на универсальном логистическом законе:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V \left(1 - \frac{V}{V_\infty} \right), \quad (2.68)$$

где V – накопленная добыча нефти, t – время, V_∞ – начальные извлекаемые запасы нефти $\left(V_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} V \right)$, α – постоянная скорости роста.

Согласно (2.68) на начальном этапе развития нефтяного месторождения наблюдается экспоненциальный рост добычи нефти, а относительная скорость отбора нефти

$$\xi = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

монотонно уменьшается, поскольку

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\alpha}{V_\infty} \frac{dV}{dt} < 0$$

(отметим, что если единицей измерения времени является год, то $\xi = \frac{Q}{V}$, где Q – годовая добыча нефти).

Однако экспоненциальный рост и экспоненциальная асимптотика логистической кривой не удовлетворяют весьма существенному условию эволюции сложных природных систем – условию самоподобия (автомоделности) развития. Последнее может быть выражено в виде требования постоянства относительной скорости роста [36]

$$\frac{dV}{V} \frac{(t - T_1)}{dt} = \alpha = \text{const}, \quad (2.69)$$

где T_1 – некоторое опорное значение времени (точка автомодельности).

Условию (2.69) удовлетворяет гиперболический рост по закону

$$V = \frac{C}{(T_1 - t)^\alpha}, \quad (2.70)$$

где C – постоянная интегрирования.

Легко видеть, что функция (2.70) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{dV}{dt} = C_1 V^\gamma \quad (2.71)$$

и

$$\frac{dV}{dt} = \frac{C_2}{(T_1 - t)^{\alpha+1}}, \quad (2.72)$$

где $C_1 = \alpha C^{-1/\alpha}$, $\gamma = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$, $C_2 = \alpha C$.

В математической физике решения вида (2.70) известны как режимы с обострением и подробно изучены в исследованиях динамики и взрывного поведения нелинейных систем [39]. В момент времени T_1 , согласно (2.70) и (2.72), значение накопленной добычи нефти становится бесконечно большим, поэтому степенное решение (2.72) верно только как промежуточно-асимптотическое [40].

Для устранения особенности в точке $t = T_1$ С. П. Капица предложил добавить в знаменатель правой части уравнения (2.72) регуляризующее слагаемое $\tau^{\alpha+1}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{C_2}{(T_1 - t)^{\alpha+1} + \tau^{\alpha+1}}. \quad (2.73)$$

В работе [36] показано, что уравнение (2.73) при $\alpha = 1$ хорошо описывает динамику численности народонаселения Земли. При $\left| \frac{T_1 - t}{\tau} \right| \gg 1$ уравнение (2.73) сводится к модели (2.72), описывающей автомодельную эволюцию.

Положив $\alpha = 1$ и $C_2 = Q_0 \tau^2$, получим следующее уравнение, описывающее динамику накопленной добычи нефти:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{Q_0 \tau^2}{(T_1 - t)^2 + \tau^2}. \quad (2.74)$$

При $t = T_1$ $\frac{dV}{dt} = Q_0$, поэтому постоянная Q_0 имеет смысл максимального значения годового отбора нефти.

Решение (2.74) имеет вид

$$V = C_3 + Q_0 \tau \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t - T_1}{\tau} \right), \quad (2.75)$$

где C_3 – постоянная интегрирования.

Считая, что $V \approx 0$ при $\frac{T_1 - t}{\tau} \gg 1$, можно положить $C_3 = Q_0 \tau \frac{\pi}{2}$. При этом

$$V = Q_0 \tau \cdot \operatorname{arcctg} z, \quad (2.76)$$

где $z = \frac{T_1 - t}{\tau}$.

Согласно (2.75) и (2.76) в момент $t = T_1$ происходит «перестройка» системы: гиперболический рост накопленной добычи сменяется ростом с насыщением (см. рис. 2.11, где приведена безразмерная накопленная добыча нефти $\frac{V}{V_\infty}$, $V_\infty = \pi Q_0 \tau$).

Легко видеть, что величина τ имеет смысл характерного времени «перестройки».

Модель (2.74) радикально отличается от логистической модели не-монотонным характером изменения. Действительно, из (2.74) и (2.75) можно получить

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1 - 2z \cdot \operatorname{arccctg} z}{[\tau(z^2 + 1)\operatorname{arccctg} z]^2}.$$

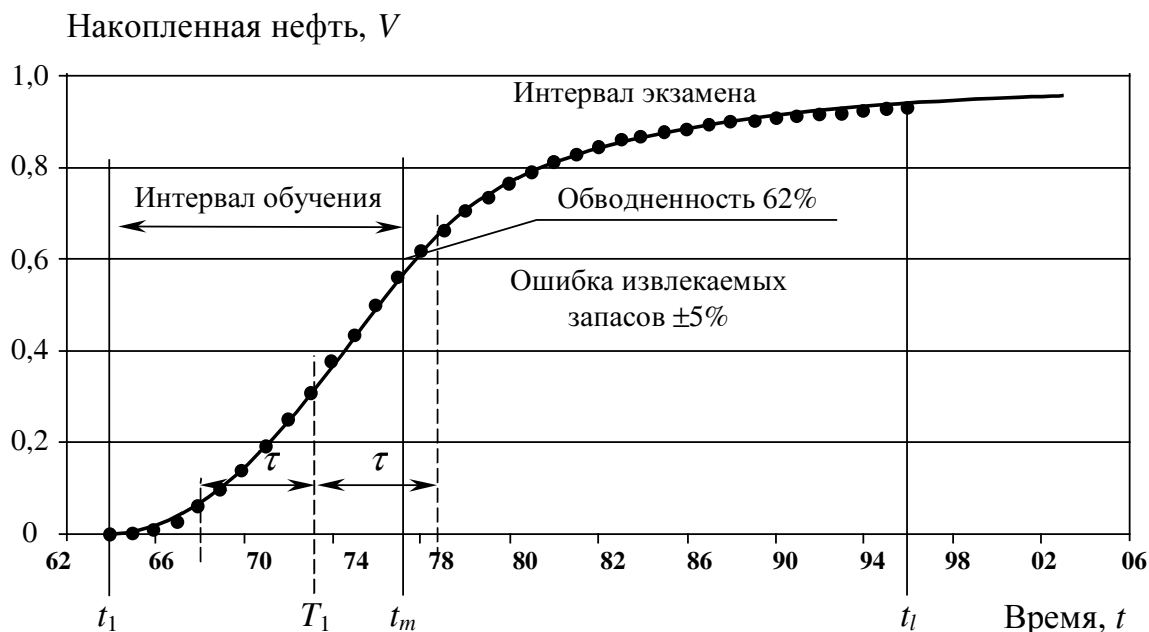


Рис. 2.11. График накопленной добычи нефти Усть-Балыкского месторождения, пласт БС2+3

● - фактические данные; — - модель С. П. Капицы

Легко показать, что $z = z_* \approx 0,43$ при $\frac{d\xi}{dt} = 0$, т. е. функция ξ имеет максимум (см. рис. 2.12) в момент времени [36]:

$$t_* = T_1 - 0,43\tau. \quad (2.77)$$

При практическом применении модели (2.74) параметры Q_0 , T , τ определяются из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных данных, представленных в виде выборки $\{t_i; V_i\}$, где V_i – значение накопленной добычи нефти в момент времени t_i , $i = 1, 2, \dots, l$.

При этом промежуток времени $[t_1, t_1]$ делится на два интервала: интервал обучения $[t_1, t_m]$ и интервал экзамена $[t_m, t_1]$. Данные первого интервала используются для подбора значений параметров Q_0 , τ и T_1 путем минимизации невязки

$$I_1(Q_0, \tau, T_1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [V(t_i; Q_0, \tau, T_1) - V_i]^2, \quad (2.78)$$

где $V(t_i; Q_0, \tau, T_1)$ – решение уравнения (2.74), полученное при данных значениях Q_0 , τ , T_1 и начальном условии

$$V|_{t=t_1} = V_1. \quad (2.79)$$

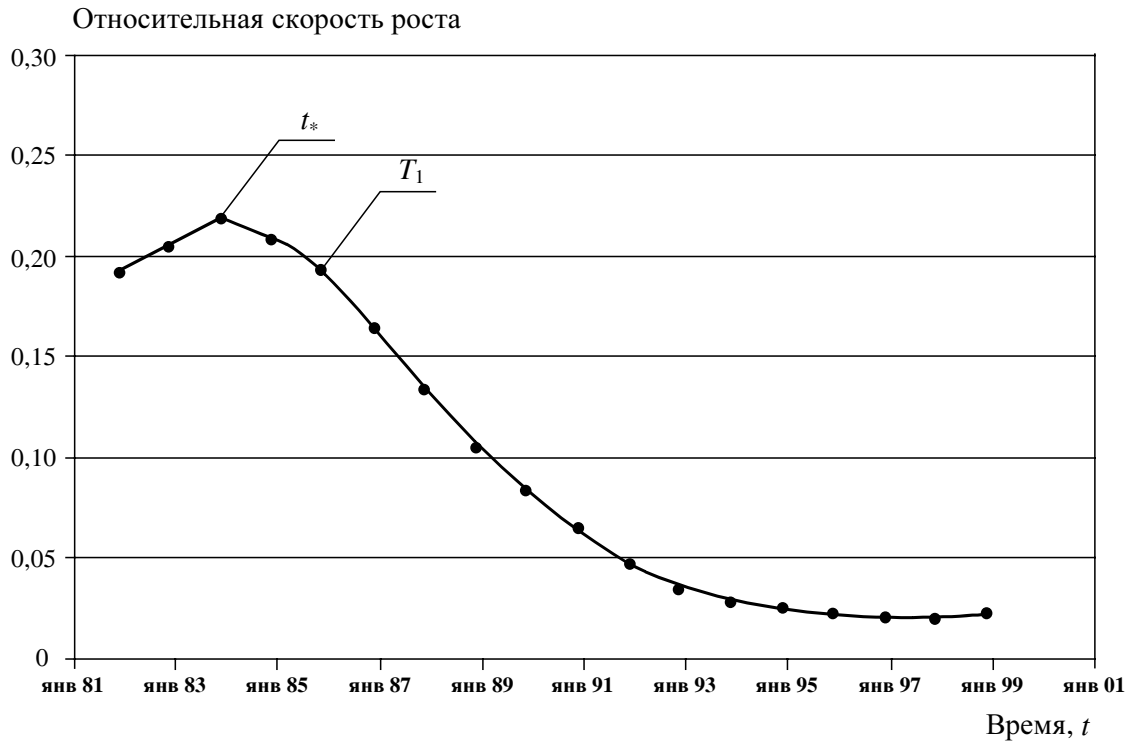


Рис. 2.12. Наличие максимума относительной скорости роста

Затем на интервале экзамена вычисляется невязка

$$I_2(Q_0, \tau, T_1) = \frac{1}{(l-m)} \sum_{j=m+1}^l [V(t_j; Q_0, \tau, T_1) - V_j]^2,$$

которая определяет качество прогноза по модели (2.74). Значения Q_0 , τ , T_1 , минимизирующие невязку I_2 , используются для экстраполяции значений накопленной добычи нефти за пределы интервала $[t_1, t_l]$ и, в частности, для оценки извлекаемых запасов нефти по формуле

$$V_\infty = V_1 + Q_0 \tau \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{t_1 - T_1}{\tau} \right) \right]. \quad (3.34)$$

Последнее выражение легко получить из (2.75), приняв во внимание условие (2.79) и перейдя к пределу $t \rightarrow \infty$, когда $V \rightarrow V_\infty$ и

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{t - T_1}{\tau} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

2.7.2. Решение обратных задач с помощью генетических алгоритмов

Решение обратной задачи по определению параметров Q_0 , τ , T_1 на интервале обучения сводится к поиску минимума невязки (2.78), т. е. к задаче нелинейного программирования.

Эффективный поиск оптимальных значений Q_0 , τ , T_1 может быть организован с помощью генетических алгоритмов (ГА) [37, 38].

В основе ГА лежит постепенное приближение к оптимальному решению, реализуемое путем создания «популяции» возможных решений и организации «эволюции» этих решений путем их попарного «скрещивания» и «воспроизводства» потомства (новых возможных решений) со случайными «мутациями». Каждая особь (возможное решение) оценивается мерой ее «приспособленности» согласно тому, насколько оно удовлетворяет критерию качества данной оптимизационной задачи. Воспроизводить «потомство» имеют возможность только наиболее «приспособленные» решения. Менее приспособленные особи «воспроизводят» потомков с меньшей вероятностью, так что те свойства, которыми они обладают, будут постепенно исчезать из популяции в процессе эволюции.

Скрещивание наиболее приспособленных особей приводит к тому, что исследуются наиболее перспективные участки пространства поиска. В конечном счете, популяция будет сходиться к оптимальному решению задачи.

Наличие наследственности является преимуществом ГА по сравнению с совершенно случайными методами поиска решений (например, методом Монте-Карло), когда на новом шаге поиска никак не используется информация о результатах предыдущих проб.

Скорость определения минимума невязки I_1 повышается при ограничении области поиска оптимальных значений параметров Q_0 , τ , T_1 .

Заметное сужение области поиска может обеспечить условие

$$|T_1 - 0.43\tau - t_*| \leq \Delta t_*,$$

полученное с учетом равенства (2.77). Здесь t_* – момент времени, при котором относительная скорость отбора ξ , определенная по данным истории разработки месторождения, принимает максимальное значение, Δt_* – погрешность оценки t_* .

Исходя из потенциала добывающих скважин, можно также получить достаточно надежную интервальную оценку максимальной добычи

$$Q'_0 < Q_0 < Q''_0.$$

Оценка величины T_1 может быть получена путем аппроксимации гиперболой начального участка кривой роста накопленной добычи нефти.

Для крупных месторождений Западной Сибири (500 и более скважин) был проведен анализ точности прогноза модели (2.74) и широко распространенных характеристик вытеснения (моделей С. Н. Назарова–Н. В. Сипачева, А. М. Пирвердяна и других).

Среднеквадратичное отклонение на интервале экзамена от фактических данных приведено на рис. 2.13.

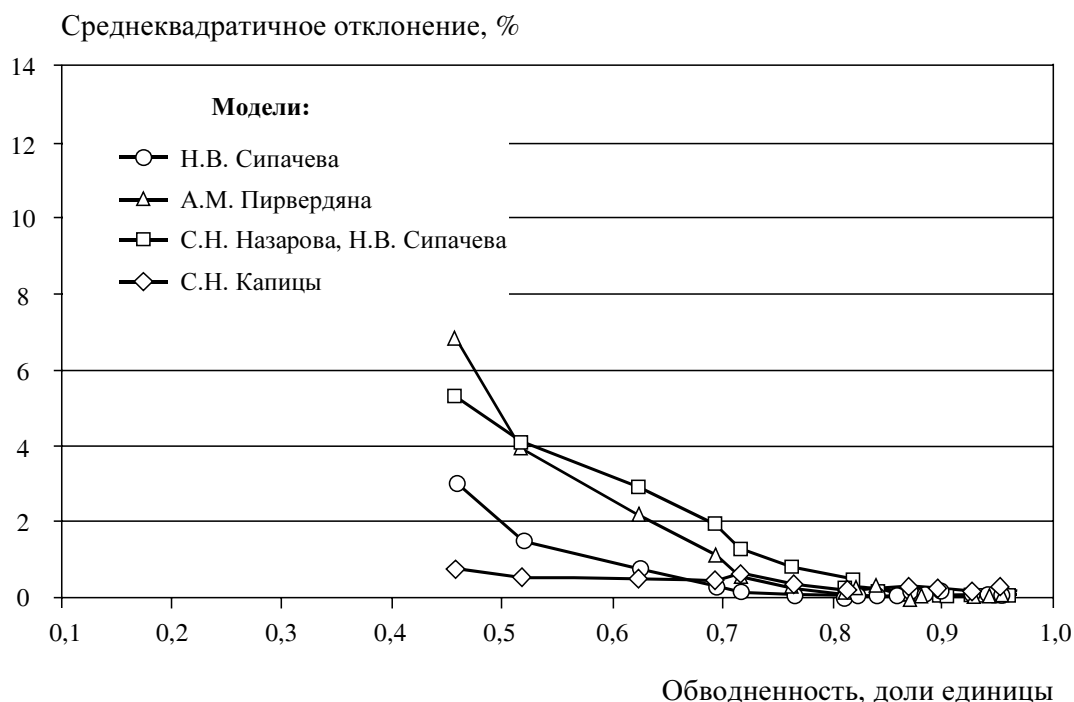


Рис. 2.13. Зависимость среднеквадратичного отклонения прогноза добычи нефти от обводненности на интервале обучения

Легко заметить, что среднеквадратичное отклонение прогноза добычи нефти по модели (2.74) даже при малых значениях обводненности (порядка 45% на правом конце интервала обучения) приводит к приемлемым результатам. Таким образом, эту модель можно использовать уже на ранних стадиях разработки крупных месторождений для обоснованного прогноза добычи нефти.

2.8. О методах идентификации модели упругого пласта

Математическое моделирование процессов нестационарной фильтрации осложняется отсутствием надежных априорных оценок сжимаемости коллекторов и насыщающих их флюидов. Реальные значения коэффициента эффективной сжимаемости пласта могут довольно сильно отличаться от обычно принимаемых значений ($\approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$). Поэтому сжимаемость пластовых систем целесообразно определять опытным путем, на основе решения обратной задачи идентификации модели упругого пласта

по промысловым данным о закачке и отборе жидкостей, а также о динамике пластового давления. В настоящем разделе рассматриваются некоторые общие подходы к этой проблеме и обсуждаются конкретные алгоритмы расчетов.

Решение поставленной задачи весьма чувствительно (в связи с малой сжимаемостью пород и флюидов) относительно точности определения разности объемов закачанной воды и отобранной жидкости. Одним из источников погрешностей служит то, что расход воды измеряется со значительно меньшей точностью, чем добыча нефти. В случае многопластовых систем данные по отбору нефти также ненадежны, поскольку разделение продукции по пластам производится приближенно, часто чисто расчетным путем.

Следует также учесть, что на поддержание пластового давления расходуется не весь зарегистрированный объем закачанной воды, поскольку возможны утечки воды через литологические окна, связывающие разные пласты, а также потери воды из-за негерметичности поверхностных водоводов и обсадных колонн нагнетательных скважин. Иногда могут наблюдаться и обратные перетоки из соседних пластов. Дополнительные сложности могут быть связаны с вторжением в продуктивный пласт законтурной воды.

При формализованном описании утечки и вторжение воды могут быть учтены введением в уравнение материального баланса некоторых дополнительных членов и поправочных коэффициентов. Поскольку априорная информация о проявлении подобных процессов зачастую отсутствует, то задача идентификации математической модели упругого пласта должна быть поставлена в широком смысле: требуется определить не только параметры (коэффициенты) модели, но и саму структуру модели. Последнее необходимо потому, что вид модели косвенным образом учитывает проявление тех или иных процессов, влияющих на баланс жидкостей.

Как уже отмечалось в разделе 2.3, при обработке экспериментальных данных качество решения задач идентификации существенно зависит от сложности моделей. Излишнее усложнение модели приводит, как правило, к повышенной неустойчивости решения обратной задачи, поэтому ниже основное внимание уделяется проблеме выбора оптимальной сложности модели упругого пласта.

Простейшее уравнение материального баланса можно записать в виде

$$b \frac{dP}{dt} = Q_z - Q_n - Q_e, \quad (2.80)$$

$$P|_{t=t_0} = P_0,$$

где $b = \beta V_{\Pi}^0$, β и V_{Π}^0 – коэффициент эффективной сжимаемости и поровый объем пласта, P – среднее пластовое давление, Q_z , Q_n , Q_e – объемы

(в пластовых условиях, в единицу времени) закачанной воды, отобранной нефти и отобранной воды соответственно, P_0 – давление в начальный момент времени t_0 .

Рассмотрим некоторые возможные модификации модели (2.80).

Учет изменения объема пласта. Активный объем пласта, учитываемый в уравнении материального баланса, является переменной величиной, поскольку:

а) объем пласта, вовлеченный в разработку, растет по мере освоения месторождения в соответствии с ростом числа скважин;

б) значения пластового давления измеряются, как правило, на активно разрабатываемых участках и, следовательно, характеризуют только эти участки.

Считая, что характерное время изменения давления намного меньше, чем характерное время увеличения «активного» объема пласта, можно предложить следующее уравнение материального баланса:

$$bf(t) \frac{dP}{dt} = Q_3 - Q_H - Q_6, \quad (2.81)$$

где $f(t)$ – монотонно возрастающая функция времени, стремящаяся при $t \rightarrow \infty$ к 1.

Учет потерь воды. Считая, что потери воды, вследствие негерметичности водоводов и обсадных колонн нагнетательных скважин, пропорциональны общему расходу закачанной воды, получим уравнение

$$bf(t) \frac{dP}{dt} = kQ_3 - Q_H - Q_6, \quad (2.82)$$

где k – коэффициент, определяющий долю «полезно» использованной воды.

Учет перетоков жидкости. Полагая, что величина перетоков жидкости между пластами или же из законтурной области к залежи (и обратно) пропорциональна разности соответствующих давлений, уравнение материального баланса при наличии перетоков можно записать в следующем общем виде:

$$bf(t) \frac{dP}{dt} = Q_3 - Q_H - Q_6 - \lambda_{\Pi}(P - P_{\Pi}) - \lambda_{\kappa}(P - P_{\kappa}),$$

где P_{Π} – давление в пласте, прилегающем к данному, P_{κ} – законтурное давление, λ_{Π} , λ_{κ} – коэффициенты, определяющие интенсивность перетоков (в частных случаях они могут быть вместе или в отдельности быть равными нулю).

После некоторых упрощений получим модель

$$bf(t) \frac{d\Delta P}{dt} + \lambda \Delta P = Q_3 - Q_H - Q_6 + q, \quad (2.83)$$

где $\Delta P = P - P_0$, $\lambda = \lambda_{\Pi} + \lambda_{\kappa}$, $q = \lambda_{\Pi} P_{\Pi} + \lambda_{\kappa} P_{\kappa} - \lambda P_0$.

Если учесть еще и потери закачиваемой воды, то получим

$$bf(t)\frac{d\Delta P}{dt} + \lambda\Delta P = kQ_3 - Q_H - Q_6 + q. \quad (2.84)$$

Уравнение (2.84) может быть упрощено, если предположить наличие связи между величинами Q_3 и P :

$$Q_3 = \lambda_H(P_H - P),$$

где P_H – давление нагнетания, λ_H – коэффициент, определяющий приемистость нагнетательных скважин.

Тогда, преобразуя (2.84), получим следующее уравнение, аналогичное (2.82):

$$bf(t)\frac{dP}{dt} = k'Q_3 - Q_H - Q_6 + q', \quad (2.85)$$

где $k' = k + \frac{\lambda}{\lambda_H}$, $q' = \lambda_{\Pi}P_{\Pi} + \lambda_{\kappa}P_{\kappa} - \lambda P_H$.

Динамика роста объема пласта. Анализ промысловых данных показывает, что в начальный период разработки месторождения число скважин растет экспоненциально, а затем темпы ввода скважин уменьшаются, поскольку вступают в силу ограничения, связанные с конечностью объема месторождения. Такая динамика типична для всех процессов роста в сложных природных системах. Поэтому естественно предположить, что функция $f(t)$, описывающая увеличение объема пласта, вовлеченного в разработку, подчиняется универсальному логистическому закону (см. предыдущий раздел).

$$\lambda_a \frac{df}{dt} = f(1 - f), \quad f|_{t=0} = f_0, \quad (2.86)$$

где λ_a – характерное время разбуривания месторождения.

Уравнение (2.86) совместно с одним из уравнений (2.81)–(2.85) представляет собой математическую модель упругого пласта. Предполагается, что параметры b , k , λ , q должны определяться по промысловым данным путем решения обратной задачи.

Отметим, что сведения, которые позволили бы априори выбрать наиболее приемлемую модель, чаще всего отсутствуют. Поэтому идентификация модели упругого пласта состоит из двух тесно взаимосвязанных задач:

- 1) определение структуры модели, т. е. выбор одного из уравнений (2.81)–(2.85) для описания динамики пластового давления;
- 2) оценка параметров выбранной модели.

На первый взгляд, проблема выбора модели упругого пласта может быть решена предельно просто: достаточно воспользоваться наиболее общим соотношением (2.84) и в ходе решения обратной задачи оценить значения его коэффициентов. Наличие потерь или перетоков жидкости можно диагностировать по отклонению значения k от 1, а λ (и q) – от 0.

Однако, как уже отмечалось, использование излишне сложных моделей, содержащих большое число искомым параметров, может привести к неустойчивости решений обратных задач. Поэтому необходимо использовать методы выбора оптимальной сложности модели (раздел 2.3).

Метод структурной минимизации среднего риска. Одним из наиболее эффективных способов формализованного выбора оптимальной сложности модели является метод структурной минимизации среднего риска (СМСР).

Пусть P_i – замеры пластового давления, снятые в моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots, l$), $R_i(a)$ – соответствующие значения давления, рассчитанные по одной из моделей (2.81)–(2.85), a – набор некоторых фиксированных значений параметров моделей (b, k, λ и т. д.). При идентификации модели упругого пласта параметры a определяются из условия минимальности отклонения расчетных значений давления от реальных, причем в качестве меры отклонения принимается функционал эмпирического риска

$$I_0(a) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (P_i - R_i(a))^2.$$

Качество аппроксимации экспериментальных данных в условиях малой выборки определяется функционалом среднего риска $I(a)$, для которого могут быть построены верхние оценки вида (см. раздел 2.3)

$$I(a) \leq I_m(a) = I_0(a) \Omega\left(\frac{l}{n}; \frac{\ln \eta}{l}\right),$$

где n – число искомым параметров (b, k, λ и т. д.).

Нечеткий подход к выбору сложности модели. Привлекая аппарат теории нечетких множеств (раздел 2.4), можно потребовать максимума критерия

$$\mu(a, n) = (\mu_0(I_0(a)) \mu_c(n))^{\frac{1}{2}},$$

где $\mu_0(I_0)$ и $\mu_c(n)$ – функции принадлежности нечетких множеств «малые значения эмпирического риска» и «малая сложность модели». Эти функции могут быть, например, определены в виде (2.57).

Пример 1.

В табл. 2.14 приведены показатели накопленных отборов нефти и воды, а также закачиваемой жидкости по пласту БС₁₀ одного из месторождений ОАО «Юганскнефтегаз».

Расчеты показали, что для этого пласта наилучшей является модель вида (2.82) с $k \approx 0,95$, т. е. «полезно затрачиваемыми» для данного месторождения являются 95% закачиваемой воды.

Таблица 2.14

Показатели разработки пласта

Дата	Нефть, тыс. т	Вода, тыс. т	Закачка, тыс. т	Число скважин	Пластовое давление, МПа
1979	3110,0	17,5	2006,1	60	21,9
1980	5724,3	76,3	5691,0	121	21,7
1981	9650,7	235,7	10796,9	186	21,4
1982	15014,3	481,5	20794,0	293	22,9
1983	21485,4	1842,9	32363,1	351	23,5
1984	28099,3	4778,0	45406,8	376	23,9
1985	32972,3	8396,6	59478,5	371	24,3
1986	37537,4	13864,7	73977,9	428	25,3
1987	41721,0	20358,1	88110,9	461	25,3
1988	45368,7	26625,3	102998,9	505	25,6
1989	48641,0	33188,1	116661,9	519	25,4
1990	51407,8	39819,3	129283,2	500	26,0
1991	53731,9	47265,9	141741,6	538	26,1
1992	55430,3	55639,2	152728,9	480	26,9
1993	56783,8	63742,5	159748,7	444	26,7
1994	57904,7	68942,7	165541,5	444	26,2
1995	59025,6	74142,9	171334,3	444	

Идентификация параметров модели позволяет прогнозировать динамику пластового давления при заданных годовых режимах эксплуатации месторождения. Так, было рассчитано изменение давления в контуре пласта БС₁₀ при годовом отборе жидкости $Q_{жс} = 7585,3$ тыс. т и годовой закачке $Q_3 = 5792,8$ тыс. т воды. При таких объемах к концу 1997 г. давление должно стать равным начальному пластовому давлению 24,9 МПа (рис. 2.14).

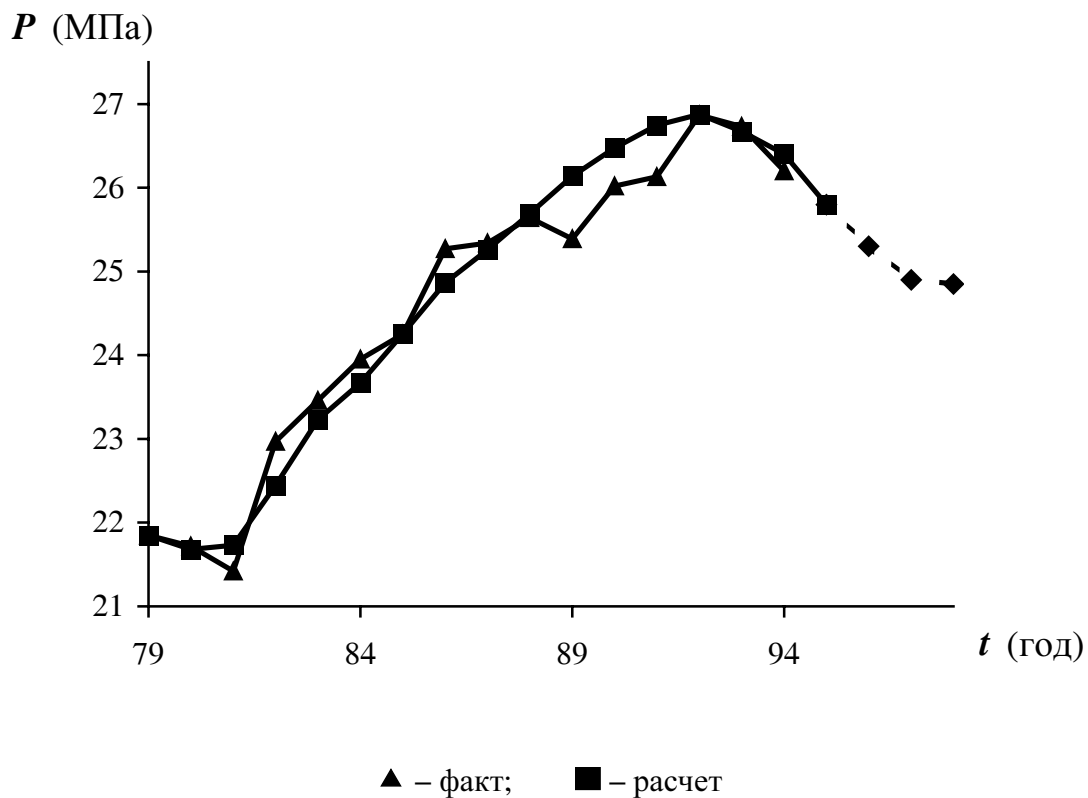


Рис. 2.14. Динамика изменения пластового давления

Пример 2.

Объем пласта BC_8 значительно меньше объема рассмотренного выше пласта BC_{10} . Поскольку небольшие по объему нефтеносные объекты подвержены значительному влиянию законтурных вод, то в качестве начального приближения была взята модель (2.84), учитывающая перетоки через контур нефтеносности. Расчеты оценки сложности модели по методу структурной минимизации функции среднего риска подтвердили правильность этого выбора.

Трехпараметрическая модель (2.84) позволяет оценить не только коэффициент «полезно» используемой закачиваемой жидкости (для данного пласта $k \approx 0,96$), но и объемы перетоков через контур нефтеносности (рис. 2.15). Как видим, на начальной стадии эксплуатации пласта до начала заводнения происходило вторжение законтурной воды, а на поздней стадии – отток жидкости.

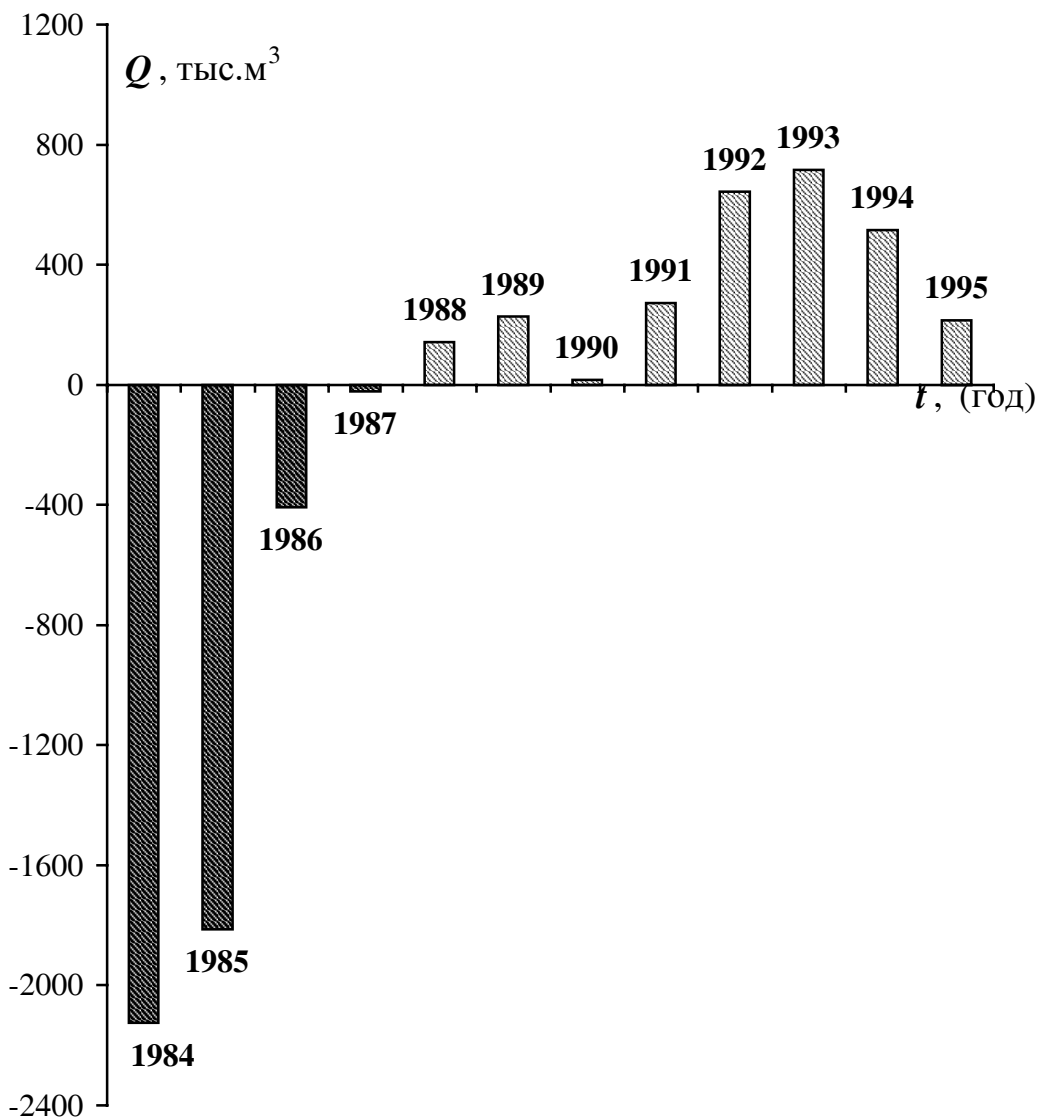


Рис. 2.15. Объемы перетоков

2.9. Оценка добывных возможностей скважин по данным нормальной эксплуатации

Практически во всех работах, посвященных анализу разработки нефтяных месторождений, отмечается недостаточность исследований скважин и пластов. Справедливости ради, следует отметить, что наблюдаемая тенденция небезосновательна. Инженеры-нефтяники испытывают растущую неудовлетворенность дорогостоящими исследованиями, результаты которых зачастую оказываются неустойчивыми относительно ошибок замеров, неоднозначными (см. раздел 2.6) и потому во многом субъективными, зависящими от личности и квалификации интерпретатора. Растет также понимание того, что, при всем желании, чисто технически невозможно охва-

тить регулярными исследованиями достаточно представительное множество скважин.

По нашему мнению, для решения проблем, связанных с дефицитом промысловых исследований, следует более широко использовать идеологию **пассивных экспериментов**, заключающихся в регистрации и анализе данных текущей (нормальной) эксплуатации объектов исследования. Пассивные эксперименты, в отличие от **активных**, не требуют прямого вмешательства в работу объектов и принудительного изменения режимов их работы.

В области исследований пластовых систем к активным экспериментам относятся промысловые геофизические исследования, снятие кривых восстановления давления, индикаторные исследования. На проведение таких экспериментов и не хватает обычно ни сил, ни средств.

Пассивные эксперименты включают в себя замеры динамического уровня, дебита скважин, затрубного и устьевого давлений, давления на приеме насоса, оборудованного датчиком давления, и т. д.

Поскольку такого рода замеры не требуют остановки скважины, они могут проводиться регулярно, образуя продолжительные временные ряды и являясь источником ценнейшей информации. Необходимо отметить, что пластовые системы редко работают в стационарном режиме, всегда наблюдаются случайные колебания давлений и дебитов около их средних значений («шумы»), а также долговременные трендовые изменения. Поэтому пассивные эксперименты, как и активные, позволяют получить данные в некотором интервале режимов работы. Конечно этот интервал уже, чем в случае активных экспериментов, но это с лихвой компенсируется значительно большими объемами доступной информации. (Отметим, что на инженерном жаргоне исследование шумов называется «шумометрией».)

Ниже рассмотрена задача оценки величины забойного давления по замерам их динамического уровня и затрубного давления. Для решения этой задачи разработан и апробирован алгоритм расчета гидростатического давления в скважине с учетом газа, выделяющегося из нефти. Показано, что этот алгоритм может быть использован также для интерпретации результатов исследования скважин с ЭЦН, оборудованных датчиками давления на приеме и регуляторами частоты вращения двигателя.

2.9.1. Алгоритм определения забойного давления

Если давление на приеме насоса больше давления насыщения (свободного газа нет), то забойное давление легко оценить, подсчитав вес столба нефти в затрубном пространстве и вес столба водонефтяной смеси на участке от забоя до приема насоса.

При появлении свободного газа задача усложняется, поскольку определение плотности газожидкостных смесей является нелегкой проблемой. Рассмотрим алгоритм расчета распределения давления в скважине до приема насоса и в затрубном пространстве с учетом газа, выделяющегося из нефти при давлении ниже давления насыщения. Предлагаемый алгоритм является обобщением известных методик [41–44] и в качестве определяющего параметра включает скорость всплытия пузырьков газа – величину, которую предполагается определять из тестовых промысловых экспериментов.

Пренебрегая плотностью газа и потерями на трение, распределение давления P можно определить уравнениями

$$\frac{dP}{dx} = \rho_{нв}(P)(1 - \alpha)g, \quad (2.87)$$

$$P|_{x=H_c} = P_3$$

(на участке от забоя до приема насоса) и

$$\frac{dP}{dx} = \rho_n(p)(1 - \alpha)g, \quad (2.88)$$

$$P|_{x=H_n} = P_{ПР}$$

(в затрубном пространстве), где $\rho_n(P)$, $\rho_{нв}(P)$ – плотность нефти и водонефтяной смеси при заданном давлении P , α – истинное объемное содержание газа; g – ускорение свободного падения; x – вертикальная координата (ось x направлена вниз, ее начало расположено на уровне устья скважины); P_3 – забойное давление; $P_{ПР}$ – давление на приеме насоса; H_c – глубина скважины; H_n – глубина подвески насоса.

Плотности $\rho_n(P)$ и $\rho_{нв}(P)$ вычисляются по известным формулам [41–44]. Содержание газа в затрубном пространстве существенно зависит от скорости всплытия пузырьков газа v_n и коэффициента сепарации газа в затрубное пространство на приеме насоса k_c ($k_c \approx 0,5$ при отсутствии газосепаратора и $k_c \approx 0,8$ при его наличии).

Оценка забойного давления по замеру динамического уровня H_D представляет собой обратную задачу, решаемую в два этапа:

- на первом этапе при известных PVT -свойствах флюидов, дебита жидкости, обводненности, затрубного давления газа, глубины скважины и глубины спуска насоса строится зависимость динамического уровня от забойного давления $H_D = f(P_3)$;
- на втором этапе по замеренному значению динамического уровня \tilde{H}_D путем обращения функции $f(P_3)$ находится оценка забойного давления $\tilde{P}_3 = f^{-1}(\tilde{H}_D)$. Графически это сводится к проведению пря-

мой $H_D = \bar{H}_D$ и определению точки ее пересечения с графиком функции $H_D = f(P_3)$.

Функция $H_D = f(P_3)$ строится численно, для чего задаются значения забойного давления

$$P_3^i = P_3^{\min} + (i-1) \frac{P_3^{\max} - P_3^{\min}}{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

из некоторого интервала $[P_3^{\min}, P_3^{\max}]$. При каждом значении P_3^i производится численное интегрирование (2.87) «снизу-вверх» с начальным условием $P|_{x=H_c} = P_3^i$.

При $x = H_H$ интегрирование прекращается и определяется давление на приеме насоса P_{np}^i . После этого интегрируется уравнение (2.88) с начальным условием $P|_{x=H_H} = P_{np}^i$.

Глубина x , на которой давление P становится равным заданному значению затрубного давления $P_{затр}$, определяет значение динамического уровня H_D^i .

Соединив точки $\{P_3^i, H_D^i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) отрезками прямых, получим зависимость

$$H_D = f(P_3).$$

На рис. 2.16 показаны возможные виды зависимости H_D от P_3 . Кривая вида 1 соответствует невысоким газовым факторам и небольшим дебитам жидкости. В этом случае коэффициент истинного газосодержания мал. Если на приеме насоса давление P_3 выше давления насыщения $P_{нас}$, зависимость динамического уровня от забойного давления линейная. При снижении давления на приеме насоса ниже давления насыщения зависимость $H_D = f(P_3)$ искривляется.

При больших значениях газового фактора и дебита нефти график функции $H_D = f(P_3)$ может иметь продолжительный пологий участок (кривая 2 на рис. 2.16). На этом участке происходит резкое снижение плотности газонефтяной смеси в затрубном пространстве. Поэтому, несмотря на уменьшение забойного давления, уровень нефти в затрубном пространстве практически не изменяется. Этот факт может объяснить часто отмечаемую парадоксальную ситуацию, когда заглубление насоса приводит к увеличению дебита скважины, а динамический уровень H_D остается постоянным.

Отличие кривой 2 от 1 в полной мере проявляется, если вспомнить о том, что динамический уровень определяется с некоторой погрешностью.

Фактически, мы имеем не точечный замер \tilde{H}_D , а некоторый интервал (отрезок CD на рис. 2.16), длина которого зависит от точности измерения H_D . В случае кривой 1 малые ошибки в определении динамического уровня ведут к столь же малым ошибкам в оценке забойного давления P'_3 (отрезок $A'B'$). Но в случае кривой 2, если измеренные значения H_D соответствуют пологому участку, малый отрезок CD может «растянуться» до очень большого отрезка $A''B''$, соответствующего большой ошибке оценки забойного давления P''_3 . В этой ситуации для улучшения оценки P_3 следует привлечь некоторую дополнительную информацию.

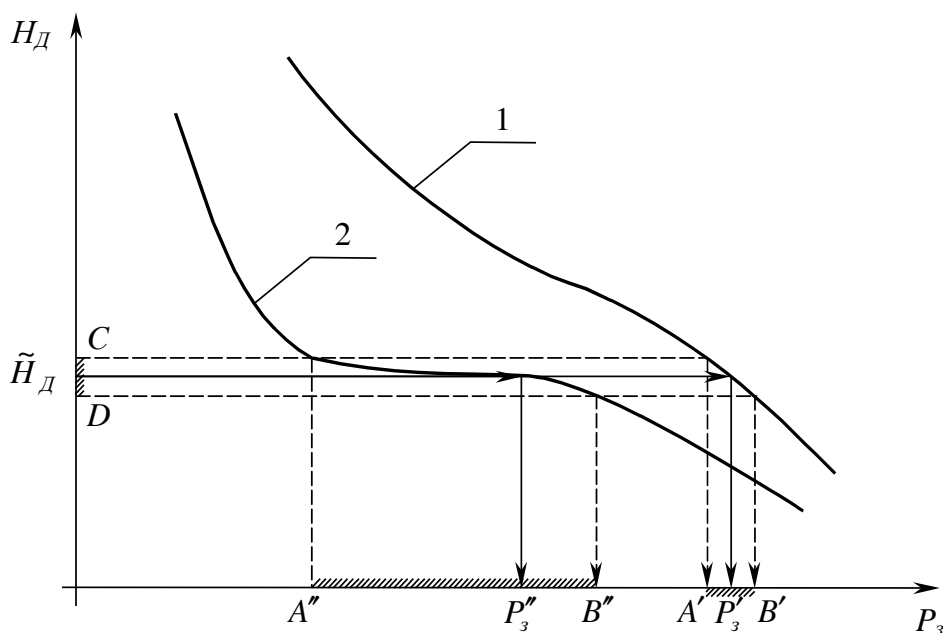


Рис. 2.16. График зависимости динамического уровня от забойного давления

В частности, для этой цели могут быть использованы замеры зависимости затрубного давления от времени, полученные при закрытии затрубной задвижки.

2.9.2. Скорость роста затрубного давления

Для оценки количества газа, поступающего в затрубное пространство, могут быть использованы кривые увеличения затрубного давления при перекрытии затрубной задвижки [45].

При проведении опытов измеряется скорость роста давления в момент закрытия задвижки $t = 0$: $F = \left. \frac{dP_{затр}}{dt} \right|_{t=0}$.

Расчетное значение этой величины определяется следующим образом.

Объем газа в межтрубном пространстве

$$V_{\Gamma} = A \cdot H_{\text{Д}},$$

где A – площадь кольцевого сечения затрубного пространства.

Поведение газа, находящегося в межтрубном пространстве, описывается уравнением состояния для реальных газов

$$P_{\text{затр}} V_{\Gamma} = z \frac{m}{M} RT,$$

где m – масса газа, кг; z – коэффициент сверхсжимаемости; M – молярная масса газа, кг/моль; R – универсальная газовая постоянная; T – температура.

При мгновенном перекрытии межтрубного пространства изменение массы газа в затрубном пространстве описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\rho_{\Gamma}(P_{\text{затр}}) V_{\Gamma} + A \int_{H_{\text{Д}}}^{H_{\text{н}}} \alpha \rho_{\Gamma}(P) dx \right), \quad (2.89)$$

где $\rho_{\Gamma}(P)$ – плотность газа.

Изменение массы газа вызвано его притоком в затрубное пространство, поэтому

$$\frac{dm}{dt} = k_c Q_{\Gamma}(P_{\text{нр}}) \rho_{\Gamma}(P_{\text{нр}}), \quad (2.90)$$

где $Q_{\Gamma}(P_{\text{нр}})$ – расход свободного газа у приема насоса.

Экспериментальными исследованиями доказано, что при перекрытии затрубной задвижки динамический уровень меняется в пределах нескольких десятков метров. Таким образом, изменением $\frac{dV_{\Gamma}}{dt}$, ввиду его малости, можно пренебречь. Считая температуру в затрубном пространстве и коэффициент сверхсжимаемости z постоянными, получим из (2.89) и (2.90) следующую формулу для скорости роста давления в затрубном пространстве

$$F = \frac{dP_{\text{затр}}(0)}{dt} = \frac{k_{\text{цен}} Q_{\Gamma}(P_{\text{нр}}) P_{\text{нр}}}{A \left[H_{\text{Д}} + \int_{H_{\text{Д}}}^{H_{\text{н}}} \alpha dx \right]}. \quad (2.91)$$

Используя (2.91), одновременно с построением расчетной зависимости $H_{\text{Д}} = f(P_3)$ можно построить зависимость $F = F(P_3)$. Эта функция может быть использована для оценки забойного давления по замеру F . Отметим, что для повышения надежности оценок следует стараться одновременно измерять и $H_{\text{Д}}$, и F , а затем подбирать значения P_3 , хорошо согласующиеся с обоими замерами.

2.9.3. Подбор эмпирических коэффициентов

Описанная выше модель содержит ряд параметров (таких как скорость всплытия пузырьков v_n , коэффициент сепарации k_c , например), которые, по существу, являются эмпирическими коэффициентами, которые могут быть уточнены из условия наилучшего удовлетворения экспериментальным данным.

Так, скважина может быть оборудована насосом, на приеме которого устанавливаем манометр. Если одновременно с замерами давления на приеме \tilde{P}_{np} определяются значения динамического уровня \tilde{H}_D и скорость роста давления в затрубном пространстве \tilde{F} при перекрытии затрубной задвижки, то параметры v_n и k_c могут быть найдены из условия минимизации отклонения расчетных значений давления на приеме P_{np} от фактических \tilde{P}_{np} и расчетной скорости изменения давления F от фактического изменения \tilde{F} :

$$I_1 = \sum_{i=1}^l [\tilde{P}_{np}(i) - P_{np}(\tilde{H}_D(i))]^2 \rightarrow \min,$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^l [\tilde{F}(i) - F(\tilde{H}_D(i))]^2 \rightarrow \min,$$

где $\tilde{P}_{np}(i)$, $\tilde{F}(i)$, $\tilde{H}_D(i)$ – i -е замеры, $P_{np}(\tilde{H}_D(i))$, $F(\tilde{H}_D(i))$ – расчетные значения P_{np} и F , полученные при $H_D = \tilde{H}_D(i)$, l – число замеров.

Эта двухкритериальная задача может быть сведена к однокритериальной проблеме минимизации невязки $I = I_1 + \delta I_2$, где $\delta = \left(\frac{P_{np}^*}{F^*} \right)^2$ – ко-

эффициент, учитывающий различие в масштабах изменения и размерности P_{np} и F , P_{np}^* и F^* – их характерные значения.

Приведем конкретный пример. По предложенному алгоритму нами были обработаны данные по 30 скважинам Приразломного месторождения (ОАО «Юганскнефтегаз»), оборудованным насосами с газосепараторами и датчиками давления на приеме.

Наилучшие согласования между расчетными и фактическими значениями давления на приеме (см. рис. 2.17) получены при $k_c = 0,75$ и $v_n = 0,25$ м/с.

Найденные значения эмпирических коэффициентов могут быть использованы для расчета забойного давления по динамическому уровню в скважинах, не имеющих насосов с датчиками давления.

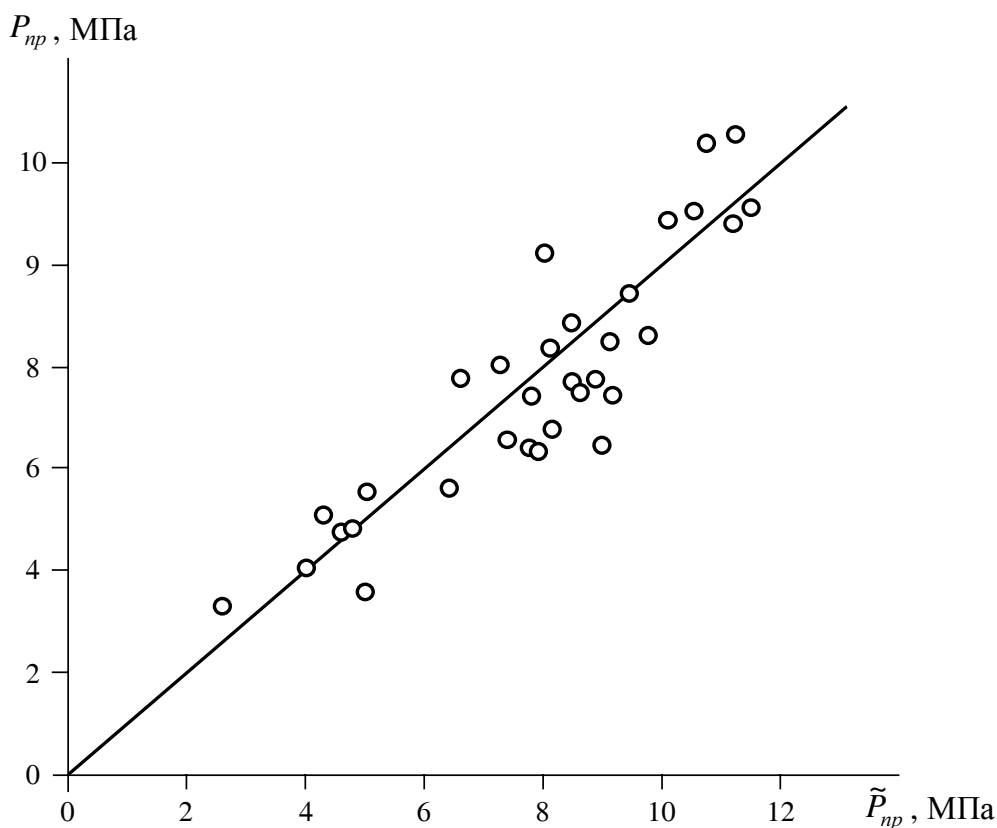


Рис. 2.17. Зависимость расчетного давления на приеме насоса от фактического давления

2.9.4. Исследования скважин, оборудованных насосами с датчиками давления и регуляторами подачи

Описанные выше алгоритмы могут быть использованы при интерпретации данных исследования скважин с помощью ЭЦН, оборудованных датчиками давления на приеме и регуляторами скорости вращения двигателя. Определяя дебит на различных режимах работы насоса и одновременно замеряя динамический уровень и давление на приеме, можно рассчитать значения забойного давления и, тем самым, получить расчетную индикаторную кривую.

В этом случае предлагается следующий алгоритм интерпретации результатов. Возможны следующие варианты.

1. УЭЦН оборудованы датчиками давлений, что позволяет замерять давление на приеме \tilde{P}_{np} . Тогда, интегрируя уравнение (2.88) по схеме «сверху-вниз» на каждом режиме, определяют давление на приеме насоса P_{np} при известном затрубном давлении. Затем из сопоставления расчетных и фактических значений P_{np} корректируют эмпирические коэффициенты. Интегрируя уравнение (2.87) по схеме «сверху-вниз», на каждом ре-

жиме определяют забойное давление при известном давлении на приеме. Зная значения $Q_{жс}$ на каждом режиме, строят индикаторную кривую $P_з = P_з(Q_{жс})$.

2. ЭЦН не оборудованы датчиками давления. В этом случае на каждом режиме работы ЭЦН проводят опыты по закрытию затрубной задвижки и определяют скорость роста давления F и динамический уровень $H_д$. По значениям F и $H_д$ оценивается забойное давление. Прделав эти вычисления для всех режимов работы ЭЦН, строят индикаторную кривую.

Библиографический список к главе 2

1. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН. – 1970. – Т. 102, № 3.
2. Успенский А. Б. Обратные задачи математической физики – анализ и планирование экспериментов // Математические методы планирования эксперимента. – Новосибирск: Наука, 1981.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
4. Тихонов А. Н., Иванов В. К., Лаврентьев М. М. Некорректно поставленные задачи // Дифференциальные уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1970. – 407 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
7. Федоров В. В. Активные регрессионные эксперименты // Математические методы планирования эксперимента. – Новосибирск: Наука, 1981.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 958 с.
9. Успенский А. Б., Федоров В. В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – С. 122–140.
10. Цыпкин Я. З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 1.
11. Петров Б. Н., Крутько П. Д. Применение теории чувствительности в задачах автоматического управления // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 300–305.
12. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
13. Живоглядов В. П., Каинов В. Х. О применении метода стохастических аппроксимаций к проблеме идентификации // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 10. – С. 54–60.
14. Георгиевский В. Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.
15. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
16. Ванник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 448 с.

17. *Алгоритмы* и программы восстановления зависимостей / Под ред. В. Н. Вапника. – М.: Наука, 1984. – 816 с.
18. *Мацевитый Ю. М.* О регуляризации загрузлением и повышение точности при решении обратных задач // ИФЖ. – 1987. – Т. 53 – С. 302–306.
19. *Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Зайцев Ю. В.* Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. – М.: Недра, 1972. – 200 с.
20. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
21. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенного решения. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
22. *Технология* добычи природных газов / Под ред. А. Х. Мирзаджанзаде. – М.: Недра, 1987. – 414 с.
23. *Закиров С. Н. и др.* Теория водонапорного режима газовых месторождений. – М.: Недра, 1976. – 240 с.
24. *Бузинов С. Н., Умрихин И. Д.* Гидродинамические методы исследования скважин и пластов: – М.: Недра, 1973. – 248 с.
25. *Кульпин Л. Г., Мясников Ю. А.* Гидродинамические методы исследования нефтегазоводоносных пластов.: – М.: Недра, 1974. – 200 с.
26. *Bourdarot G.* Well Testing: Interpretation Methods. – Paris: Editions Technip, 1998.
27. *Вахитов Г. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М. и др.* Методическое руководство по диагностированию свойств пласта по данным гидродинамических исследований. – М.: ВНИИнефть, 1983. – 46 с.
28. *Камбаров Г. С., Алмамедов Д. Г., Махмудова Т. Ю.* К определению начального извлекаемого запаса нефтяного месторождения // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1974. – № 3. – С. 22–23.
29. *Пирвердян А. М., Никитин П. И., Листенгартен Л. Б.* К вопросу о прогнозе добычи нефти и попутной воды при разработке слоисто-неоднородных коллекторов // АНХ. – 1970. – № 11. – С. 19–22.
30. *Назаров С. Н., Сипачев Н. В.* Методика прогнозирования технологических показателей поздней стадии разработки нефтяных залежей // Изв. вузов. Сер. Нефть и газ. – 1972. – № 10. – С. 41–45.
31. *Казаков А. А.* Прогнозирование показателей разработки месторождений по характеристикам вытеснения нефти водой. // РНТС Нефтепромышленное дело. – М.: ВНИИОЭНГ. – 1976. – С. 5–7.
32. *Максимов М. И.* Метод подсчета извлекаемых запасов нефти в конечной стадии эксплуатации нефтяных пластов в условия вытеснения нефти водой // Геология нефти. – 1959. – № 3. – С. 42–48.
33. *Сазонов Б. Ф.* Совершенствование технологии разработки нефтяных месторождений при водонапорном режиме. – М.: Недра, 1973. – 423 с.
34. Методическое руководство по определению начальных извлекаемых запасов нефти в залежах, находящихся в поздней стадии разработки

- (при водонапорном режиме) (РД 39-9-1069-84). – М.: ВНИИнефть, 1984.
35. *Мирзаджанзаде А. Х., Султанов Ч. А.* Диакоптика процессов нефтеотдачи пластов. – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1995. – 366 с.
 36. *Капица С. П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества. – М.: Международная программа образования, 1999 – 240 с.
 37. *David Beasley, David R. Bull, Ralph R. Martin.* An overview of Genetic Algorithms. Part 1, Fundamentals.
 38. *Батищев Д. И.* Генетические алгоритмы решения многоэкстремальных задач / под ред. Я. Е. Львовича, Воронеж, 1995.
 39. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.
 40. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – М., 1985.
 41. *Brill J. P., Mukherjee H.* Multifase flow in wells. – Richardson, Texas, 1999.
 42. Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений / Под ред. И. М. Муравьева. – М.: Недра, 1970. – 446 с.
 43. Сборник задач по технологии и технике нефтедобычи / Мищенко И. Т., Сахаров В. А., Грон В. Г., Богомольный Г. И. – М.: Недра, 1984. – 272 с.
 44. Справочная книга по добыче нефти / Под ред. Ш. К. Гиматудинова. – М.: Недра, 1974. – 704 с.
 45. *Podio A. L., Tarrillion M. I., Roberts E. T.* Laboratory work improves calculations // Oil and Gas. – Aug. 15, 1980. – P. 137–146.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД

Классическая наука была связана с уверенностью во всемогуществе познания и с детерминизмом; она обещала человеку власть над миром. Похоже, что уверенность в возможности этой власти постепенно исчезает. Мы идем от мира уверенности к миру сомнений. Любопытно, что этот переход имеет свои положительные стороны. Наука становится все более всеобъемлющей, способной к постижению мира во всей его сложности.

И. Пригожин

3.1. Описание нестационарных процессов в неньютоновских средах

Согласно представлениям структурно-кинетической теории [1–5] процессы разрушения и восстановления структуры в неньютоновских средах можно схематично представить как прямую и обратную химические реакции.

Пусть N_0 – число структурных связей в единице объема материала до начала разрушения структуры, $N(t)$ и $N_1(t)$ – число разрушенных и неразрушенных связей соответственно, $s(t) = \frac{N(t)}{N_0(t)}$ и $s_1(t) = 1 - s(t)$ – доли (или концентрации) этих связей.

Ясно, что чем больше концентрация неразрушенных связей, тем больше связей может распасться в единицу времени. В то же время увеличение концентрации разрушенных связей приводит к возрастанию интенсивности их восстановления (поскольку увеличивается вероятность встречи разорванных «концов» пространственной сетки). Поэтому по мере тиксотропного разрушения структуры при $\dot{\gamma} = \text{const}$ скорость разрушения связей уменьшается, а скорость восстановления связей растет. В конце концов скорости образования и разрушения структуры станут равными друг другу и наступит динамическое равновесие, характеризующееся некоторым стационарным значением $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ (τ и $\dot{\gamma}$ – напряжение и скорость сдвига).

Последовательное развитие этих представлений с использованием подходов, разработанных в теории химических реакций, приводит к кинетическим уравнениям вида

$$\frac{ds}{dt} = f(s, \dot{\gamma}), \quad (3.1)$$

моделирующим нестационарные процессы в неньютоновских средах. Эффективная вязкость материалов μ_a считается некоторой функцией величины s , требующей специального задания: $\mu_a = \mu_a(s)$.

Простейшее линейное уравнение вида (3.1) можно записать по аналогии с кинетическим уравнением первого порядка:

$$\frac{ds}{dt} = k_1(\dot{\gamma})s_1 - k_2(\dot{\gamma})s, \quad (3.2)$$

где $k_1 = k_1(\dot{\gamma})$ и $k_2 = k_2(\dot{\gamma})$ – константы скоростей «реакций» разрушения и восстановления связей, в общем случае зависящие от скорости сдвига $\dot{\gamma}$.

Зависимость $\mu_a = \mu_a(s)$ в линейном приближении может быть задана соотношением

$$\mu_a = \mu_0 - (\mu_0 - \mu_\infty)s. \quad (3.3)$$

Согласно (3.3) при $s=0$ (неразрушенная структура) $\mu = \mu_0$, а при $s=1$ (полностью разрушенная структура) $\mu_a = \mu_\infty$.

Из (3.2) и (3.3) легко получить уравнение

$$\lambda(\dot{\gamma}) \frac{d\mu_a}{dt} + \mu_a = \mu_S(\dot{\gamma}), \quad (3.4)$$

где $\lambda(\dot{\gamma}) = \frac{1}{k_1 + k_2}$, $\mu_S(\dot{\gamma}) = \mu_0 - \Delta\mu \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2}$, $\Delta\mu = \mu_0 - \mu_\infty$.

Решение (3.4) с начальным условием $\mu_a(0) = \mu_0$ имеет (при $\dot{\gamma} = \text{const}$) вид

$$\mu_a = \mu_S + (\mu_0 - \mu_S) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right).$$

Согласно этому соотношению, $\mu_a \rightarrow \mu_S$ при $\frac{t}{\lambda} \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $\mu_S(\dot{\gamma})$ определяет равновесное (стационарное) значение вязкости, соответствующее данному значению $\dot{\gamma}$. Поскольку уже при $t \geq 3\lambda$ $e^{-t/\lambda} \approx 0$, то величина $\lambda(\dot{\gamma})$ имеет смысл характерного времени установления равновесия.

Обобщением (3.2) является нелинейное кинетическое уравнение, предложенное Денни и Бродки (D. A. Denny, R. S. Brodkey, 1962 г.) [1]:

$$\frac{ds}{dt} = k_1(1-s)^n - k_2s^m, \quad (3.5)$$

где n и m – постоянные, аналогичные стехиометрическим коэффициентам, используемым в химической кинетике.

В теории Денни и Бродки принимается, что $k_2 = \text{const}$, а константа скорости разрушения является возрастающей функцией скорости сдвига:

$$k_1 = k_0 \dot{\gamma}^p.$$

Предполагается также, что эффективная вязкость определяется соотношением (3.3).

При достаточно продолжительном деформировании с постоянной скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ устанавливается равновесное состояние, определяемое условием $\frac{ds}{dt} = 0$, которое можно, используя (3.3) и (3.5), переписать в виде

$$k_0 \left(\frac{\mu_a - \mu_\infty}{\Delta\mu} \right)^n \dot{\gamma}^p = k_2 \left(\frac{\mu_0 - \mu_a}{\Delta\mu} \right)^m. \quad (3.6)$$

Соотношение в неявном виде определяет равновесную зависимость кажущейся вязкости от скорости сдвига $\mu_a = \mu_a(\dot{\gamma})$. Существенным недостатком подобных теорий является наличие большого числа констант, не поддающихся теоретической оценке, поэтому они вряд ли могут быть использованы для непосредственного описания экспериментальных данных. Модели такого рода предназначены, скорее, для выявления качественных особенностей нестационарных процессов в реологически сложных средах.

Рассмотрим некоторые возможные пути уточнения кинетических моделей неньютоновских сред.

Как известно, скорость диссипации механической энергии в единице объема жидкости равна $W = \mu_a \dot{\gamma}^2$. Естественно предположить, что часть этой энергии тратится на разрушение структурных связей, поэтому константу скорости разрушения k_1 можно считать функцией величины W . Это позволяет уточнить вид зависимости k_1 от скорости сдвига:

$$k_1 = k_1(\mu_a(s) \dot{\gamma}^2).$$

Повреждения пространственной «сетки» могут служить центрами, в окрестностях которых процессы деструкции резко ускоряются («где тонко, там и рвется»), поэтому константу скорости разрушения структуры можно считать возрастающей функцией концентрации разрушенных связей s .

Приведенные выше соображения можно учесть, например, в следующем кинетическом уравнении:

$$\frac{ds}{dt} = -k_2 s + k_0 \mu_a(s) \dot{\gamma}^2 s(1-s), \quad (3.7)$$

где k_0 – некоторая постоянная.

Эффективная вязкость сильнее всего меняется также на начальной стадии разрушения структуры, поэтому линейная связь (3.3) качественно

неверна. Вместо нее целесообразно использовать экспоненциальные зависимости вида

$$\mu_a(s) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp\left(-\frac{s}{s_0}\right). \quad (3.8)$$

Здесь величина s_0 определяет область, в которой эффективная вязкость меняется наиболее значительно (рис. 3.1).

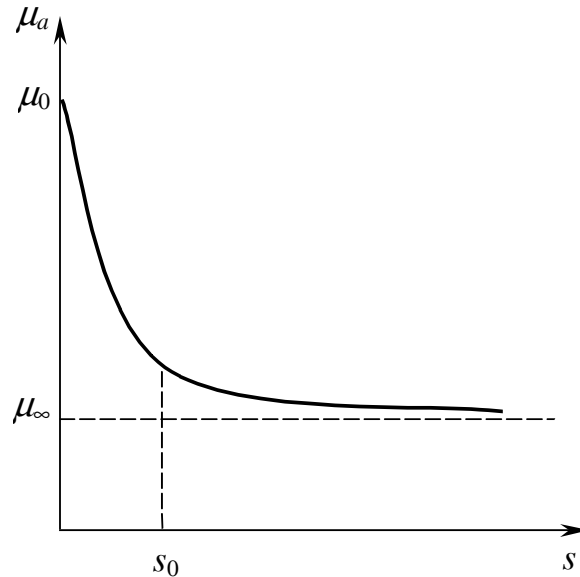


Рис. 3.1. Зависимость эффективной вязкости от концентрации разрушенных связей

Для описания нестационарных процессов в реопектических средах (характеризующихся образованием структурных связей под действием деформаций) может быть предложено кинетическое уравнение

$$\frac{dq}{dt} = k_2 q \dot{\gamma} - k_1 q^m \dot{\gamma}^2, \quad (3.9)$$

где q – концентрация структурных связей, образовавшихся в результате сдвиговых деформаций, k_1 и k_2 – константы скоростей разрушения и восстановления связей, m – порядок «реакции» разрушения структуры.

Согласно (3.9) при малых $\dot{\gamma}$ имеет место структурообразование, интенсивность которого пропорциональна скорости сдвига. С увеличением $\dot{\gamma}$ второй член в правой части (3.9) начинает превышать первый, т. е. процессы разрушения структуры превалируют над процессами структурообразования. Это вполне согласуется с тем, что реопектические эффекты на практике наблюдаются лишь при достаточно малых скоростях сдвига. Из (3.9) следует, что скорость структурообразования пропорциональна концентрации структурных связей. Это связано с предположением о том, что уже существующие связи служат центрами, ускоряющими образование новых,

аналогично тому, как зародыши ускоряют зарождение новой фазы. Поскольку увеличение концентрации образовавшихся при сдвиге связей должно привести к увеличению скорости деструкции по сравнению со скоростью структурообразования, константа m в (3.9) должна удовлетворять условию $m > 1$.

Считая, что состояние неньютонической среды можно характеризовать всего лишь одной переменной – концентрацией связей – мы тем самым неявно считаем все структурные связи одинаковыми. Это, конечно, не так, поскольку реофизически сложные среды состоят из структурных единиц различного масштаба (молекул, их ассоциатов, макромолекул, кластеров, ассоциатов кластеров и т. д.), образующих некоторую иерархически построенную систему. Реологическое поведение структурных единиц и теснота связи между ними на каждом уровне этой иерархии различны. Поэтому эффективную вязкость среды следует считать функцией многих переменных $\mu_a = \mu_a(s_1, s_2, \dots, s_n)$, где s_i – концентрация разрушенных связей, существовавших между структурными единицами i -го уровня ($i = 1, 2, \dots, n$). Соответственно вместо кинетического уравнения (3.1) следует рассмотреть системы вида

$$\frac{ds_i}{dt} = f_i(\dot{\gamma}, s_1, s_2, \dots, s_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

При построении таких моделей делаются более или менее правдоподобные рассуждения об основных структурных единицах и схеме «реакций» с их участием (см., например, [5, 6]). Однако практическая ценность подобных теорий весьма мала, поскольку «внутренние» переменные s_i являются *ненаблюдаемыми* – в настоящее время еще не разработаны методы экспериментального определения этих величин. Отметим, что в случае одной переменной s модель (3.1) может быть, в принципе, переписана относительно наблюдаемой величины μ_a (см., например, уравнение 3.4).

Система (3.10) содержит большое число теоретически не определяемых параметров, подбором которых можно объяснить любые экспериментальные данные, поэтому проверка ее адекватности невозможна. Более того, одним и тем же экспериментальным данным могут удовлетворять различные наборы параметров. Все это лишает модели вида (3.10) предсказательной силы.

Приведем анекдот, прекрасно описывающий ситуацию с подобными теориями, в которых параметры «подгоняют» под экспериментальные результаты [7].

Офицер северян во время гражданской войны в США видит на дверях амбаров множество от руки нарисованных мишеней, в середине каждой из которых – след пули, попавшей точно в «яблочко». «Кто это тут упрежнялся? Неплохой стрелок», – говорит он. «Да это Билли Джонс баловался с кольцом. Но если честно, то он совсем не умеет стрелять». «Как же

так?» «Так он сначала стреляет, а уже потом рисует круги вокруг пробоины».

Иными словами, сложность модели (3.10) не соответствует объему доступной теоретической и экспериментальной информации. Приемлемым выходом в этой ситуации может стать использование дифференциально-разностных моделей (т. е. дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом) вида

$$\frac{ds(t)}{dt} = f(\dot{\gamma}(t), s(t), s(t - \eta)). \quad (3.11)$$

Возможность замены системы (3.10) одним уравнением (3.11) физически можно объяснить тем, что цепочка «реакций» разрушения крупных структурных единиц на более мелкие (или восстановления крупных структурных единиц из мелких) приводит к некоторому *запаздыванию* в процессах структурообразования. Наличие отклоняющегося аргумента в модели (3.11) позволяет в какой-то мере учесть это запаздывание, не выписывая в явном виде кинетические уравнения для всех иерархических уровней.

Для примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Исключив переменную y , получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + x = 0,$$

имеющее частное решение $x = C \cdot \sin t$. Легко проверить, что эта функция является одновременно и решением уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x \left(t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, дифференциально-разностное уравнение первого порядка с отклоняющимся аргументом в каком-то смысле аппроксимирует систему дифференциальных уравнений.

3.2. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации

При решении задач нестационарной фильтрации через пористые среды обычно за основу принимается закон Дарси. Этим самым предполагается, что равновесное состояние между градиентом давления и скоростью достигается мгновенно. На самом же деле оно достигается с некоторым запаздыванием, которое обусловлено:

а) инерцией скорости и запаздыванием его значения от значения градиента давления;

б) релаксацией давления и запаздыванием значения градиента давления от значения скорости;

в) сложностью структуры пористой среды и запаздыванием установления равновесного состояния в его микропорах;

г) запаздыванием переупаковки частиц, изменения пористости и проницаемости и т. п.

Выявление эффектов, связанных с явлениями запаздывания, может оказаться полезным для изучения фильтрации неньютоновских нефтей, растворов полимеров, смесей, эмульсий и пр.

Чтобы учесть запаздывание скорости v или давления p , эти величины обычно [8] заменяют на $v + \lambda_v \dot{v}$ и $p + \lambda_p \dot{p}$, где точка означает полную производную по времени. В линейном приближении вместо закона Дарси будем иметь уравнение

$$v + \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (3.12)$$

аналогичное реологическому уравнению жидкости Фрелиха и Сакка [9], где λ_v и λ_p – время релаксации скорости и давления соответственно.

Уравнение (3.12) при $\lambda_p=0$ есть известное обобщение закона Дарси с учетом инерционных членов. Обстоятельный его вывод, опирается на предположение, что вязкие силы трения можно считать объемными. Нам представляется целесообразным писать инерционный член по аналогии, а время λ_v определять экспериментально.

При $\lambda_v=0$ уравнение (3.12) дает фильтрационный аналог жидкости Максвелла, а λ_p есть время релаксации давления. Физический смысл его состоит в том, что если в заданной точке остановить фильтрационное течение, то градиент давления примет нулевое значение не сразу, а постепенно:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim a \exp\left(-\frac{t}{\lambda_p}\right). \quad (3.13)$$

При учете явлений запаздывания граничные условия для давления при нестационарной фильтрации следует определять из (3.12). Например, если начать закачку в галерею с переменной скоростью $v = at$, то градиент давления G на входе найдется из решения задачи

$$a(t + \lambda_v) = -\frac{k}{\mu} (G + \lambda_p \dot{G}), \quad G(0) = 0. \quad (3.14)$$

Время релаксации давления для маловязких чистых жидкостей имеет порядок 10^{-10} с. Оно зависит от размеров молекул, возрастая при переходе от низших гомологов к высшим. У полимеров, обладающих очень длинными молекулами, время релаксации огромно. Релаксационные процессы перегруппировки цепных молекул под действием внешних сил протекают чрезвычайно медленно, не заканчиваясь иногда в течение многих суток и

даже месяцев [10]. При фильтрации в неоднородной пористой среде следует ожидать наличия множества одновременно идущих процессов с весьма различными временами релаксации, соответствующими молекулярным взаимодействием различных масштабов и неоднородностям геометрии пор.

При обычных предположениях теории упругого режима [11, 12] соотношение (3.12) приводит к уравнению нестационарной фильтрации вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_{жс} + \beta_c)},$$

идентичному полученному в теории трещиновато-пористых сред.

Здесь m и k – пористость и проницаемость среды, μ – вязкость жидкости, $\beta_{жс}$ и β_c – сжимаемость жидкости и пористой среды.

Механизм обмена жидкостью между блоками и трещинами объясняет возникновение релаксации давления. Вместе с тем релаксация давления в пористой среде может быть обусловлена не только этой причиной. Многие результаты, полученные при изучении фильтрации в трещиновато-пористых средах, могут быть интерпретированы более широко – для сред со сложной геометрией пор или составных (песок + глина + ...) пористых сред, характеризующихся микронеоднородностью.

Если рассматривать задачу о восстановлении давления в полубесконечном линейном пласте с начальным распределением давления $p(x,0) = ax$, то, взяв граничное условие (2.14) при $x = 0$, для определения давления можно получить формулу

$$p(0,t) = \frac{2a\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi\lambda_p\lambda_v}} \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{t-\tau} \exp\left(-\frac{\lambda_p + \lambda_v}{2\lambda_p\lambda_v}\tau\right) I_0\left(\frac{\lambda_p + \lambda_v}{2\lambda_p\lambda_v}\tau\right) d\tau.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что для малых времен

$$p(0,t) \approx \frac{4}{3} at \sqrt{\frac{\chi t}{\pi\lambda_p\lambda_v}},$$

т. е. вместо крутого (пропорционального \sqrt{t}) роста давления, характерного для классической модели, происходит весьма медленный (пропорциональный $t\sqrt{t}$) его рост. Для больших значений времен имеет место асимптотическая формула

$$p(0,t) \sim 2a\sqrt{\chi t/\pi} \left\{ 1 - \frac{\lambda_p + \lambda_v}{4t} - \frac{3\lambda_p^2 + 4\lambda_p\lambda_v + 3\lambda_v^2}{32t^2} - \dots \right\},$$

т. е. поведение давления будет почти таким же, как и при $\lambda_p = \lambda_v = 0$.

В работе [13] приводятся кривые восстановления давления (КВД) для составных пористых сред, полученные на линейных лабораторных моделях. Эти кривые имеют ярко выраженный линейный начальный участок,

тогда как классическая теория дает зависимость типа \sqrt{t} . Линейный характер на начальном участке хорошо объясняется, если принять $\lambda_p \neq 0$ при $\lambda_v = 0$, причем для коротких моделей не пьезопроводность, а время релаксации определяет процесс [14].

3.3. Масштабная инвариантность временных иерархий в процессах релаксации вязкоупругих сред

Многие практически и теоретически важные задачи приводят к необходимости моделирования процессов релаксации в реофизически сложных средах. Такие среды встречаются при производстве самых разнообразных материалов (резины, пластмасс, тканей, красок, смазок, пищевых продуктов и др.) [9, 15–19]. Исключительно большое значение они имеют также в процессах, связанных с добычей нефти [19–21]. Интерес к ним обусловлен огромным разнообразием новых эффектов, могущих возникнуть в релаксирующих материалах. Изучение их реологии способствует лучшему пониманию и усовершенствованию технологических процессов, рациональной разработке новых высокоэффективных технологий и продуктов.

Релаксационные явления в реофизически сложных средах связаны с медленным развитием процессов перегруппировки структурных единиц различного масштаба. (Так, в случае полимеров таковыми являются гибкие молекулы, их отдельные сегменты или же пачки, образованные этими молекулами.) Эти процессы приводят к запаздыванию изменений деформации от изменения напряжения (гистерезис, упругое последствие, релаксация напряжения и т. д.) и могут быть описаны с помощью моделей упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью. Механические модели вязкоупругих тел полезны для понимания качественных особенностей явлений релаксации, но их применение к количественному описанию реальных материалов требует построения очень сложных систем, состоящих из большого числа различных пружин и вязких элементов (что связано с наличием иерархии структурных единиц различного масштаба, приводящей к иерархии широко распределенных времен релаксации). Ясно, что сложные модели не могут оказаться эффективными – слишком велики трудности, связанные с определением многочисленных релаксационных параметров по экспериментальным данным, а также с решением задач моделирования движения сред с широким спектром времен релаксации.

Ниже показано, что отмеченные затруднения могут быть преодолены за счет конкретизации структуры временных иерархий, определяющих релаксацию в реофизически сложных средах. Проведен анализ эксперимен-

тальных данных, который показывает, что распределение времен релаксации в этих средах может оказаться масштабно-инвариантным, т. е. иметь фрактальную структуру. Показано, что наличие временной фрактальности позволяет облегчить описание процессов релаксации, приводя на больших временах к универсальным релаксационным функциям достаточно простого вида [22, 23]. Показано также, что в ряде случаев возможно использование реологических моделей, содержащих производные дробного порядка.

3.3.1. Релаксация напряжения в вязкоупругих средах

Многоуровневые процессы релаксации в вязкоупругих средах описываются моделью обобщенного тела Максвелла с функцией релаксации

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right),$$

где λ_i – характерное время релаксации на i -м уровне организации структуры; G_i – коэффициент, определяющий «вклад» i -го уровня в общий процесс релаксации.

Масштабно-инвариантное распределение релаксационных параметров проявляется в скейлинговых законах вида

$$G_n = \frac{G_0}{l_1^n} = G_0 \exp(-nl), \quad l = \ln l_1; \quad (3.15)$$

$$\lambda_n = \lambda_0 m_1^n = \lambda_0 \exp(nm), \quad m = \ln m_1, \quad (3.16)$$

или вместо (3.16)

$$\lambda_n = \lambda_0 n^{\nu}. \quad (3.17)$$

Таким образом, при наличии временной масштабной инвариантности $\ln G_n$ должен линейно уменьшаться с увеличением n .

Существование такой зависимости подтверждается данными работы [18], в которой приведены значения G_n и λ_n для нескольких иерархических уровней образцов монодисперсного и полидисперсного полистиролов. По этим данным линейной является и зависимость от номера уровня логарифма времени релаксации, что может быть проявлением закона (3.16).

Выбрав скейлинговые законы (3.15) и (3.16) и преобразовав сумму в функции релаксации в интеграл, получим

$$\Phi(t) = G_0 \int_0^{\infty} \exp(-xl) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_0} \exp(-xm)\right) dx.$$

Для определения асимптотики этого интеграла на больших временах сделаем замену переменной $z = \exp(-\lambda t)$ и по методу Лапласа получим

$$\Phi(t) \approx \frac{G_0}{m} \Gamma\left(\frac{l}{m}\right) \left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^{-l/m}, \quad (3.18)$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Если же времена релаксации задаются законом (3.17), то, как легко показать, верна асимптотика

$$\Phi(t) \sim \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/(\nu+1)}\right], \quad \lambda = \frac{\lambda_0 l^{-\nu}}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-(\nu+1)}. \quad (3.19)$$

Таким образом, масштабная инвариантность процессов релаксации существенно упрощает их описание и позволяет использовать достаточно простые универсальные функции релаксации вида (3.18) и (3.19).

Отметим, что функция релаксации вида (3.18) с показателем степени, равным $-1/2$, может быть получена в рамках молекулярной теории вязкоупругости Рауса и Бикки [18]. Однако эта теория не в состоянии объяснить часто наблюдаемое на практике отклонение значения показателя степени от указанной величины и, тем более, происхождение функций релаксации вида (3.19).

Масштабная инвариантность распределения релаксационных параметров может послужить для объяснения принципа температурно-временной суперпозиции [18], который выражается связью

$$\Phi(k(T)t) = k_1(T)\Phi_0(t), \quad (3.20)$$

где $\Phi(t)$ и $\Phi_0(t)$ – функции релаксации при температурах T и T_0 , T_0 – некоторая характеристическая температура, k , k_1 – коэффициенты, зависящие от температуры ($k(T_0) = k_1(T_0) = 1$).

Действительно, если считать, что скейлинговые показатели l , m не зависят от температуры, то из (3.18) получим (3.20) при

$$k(T) = \frac{\lambda_0(T)}{\lambda_0(T_0)}, \quad k_1(T) = \frac{G_0(T)}{G_0(T_0)}.$$

В качестве примера нами была рассмотрена кривая релаксации напряжения в образце монодисперсного полистирола, приведенная в [18]. Расчеты показали, что эта кривая релаксации напряжения вполне удовлетворительно описывается законом (3.19) при $\frac{1}{\nu+1} = 0,50$.

3.3.2. Реологические модели в дробных производных

Рассмотрим теперь вязкоупругое тело, представляемое множеством последовательно соединенных тел Кельвина–Фойхта. Тогда связь между

скоростью деформации и напряжением определяется соотношением [15, 16]

$$D\gamma(t) = \frac{\tau(t)}{\mu} + \int_0^t \psi(t-\xi) d\tau(\xi), \quad \psi(t) = \sum_n \frac{1}{\mu_n} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right), \quad (3.21)$$

где $\gamma(t)$ – величина сдвига, μ – вязкости элементов, λ – времена релаксации, $D = \frac{d}{dt}$.

Как и выше, предположим наличие масштабной инвариантности распределения релаксационных параметров:

$$\mu_n = \mu_0 \exp(l'n), \quad \lambda_n = \lambda_0 \exp(nm).$$

Тогда (см. 3.18)

$$\psi(t) \approx Lt^{-\varepsilon_1}, \quad L = \Gamma(\varepsilon_1) \frac{\tau_0^{\varepsilon_1}}{\mu_0 m} \quad (3.22)$$

и (3.21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D\gamma(t) &= \mu^{-1} \tau(t) + \alpha D^{-\varepsilon} D\tau(t); \\ \varepsilon &= 1 - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = l'/m, \quad \alpha = L \Gamma(\varepsilon); \\ D^{-\varepsilon} f(t) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^t (t-\xi)^{\varepsilon-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.23)$$

($D^{-\varepsilon} f(t)$ – дробная производная порядка $-\varepsilon$).

Принимая $G_n = G_0 \exp(-l \cdot n)$ и учитывая, что $\lambda_n = \frac{\mu_n}{G_n}$, получим

$$\lambda_n = \mu_0 G_0^{-1} \exp((l' + l)n),$$

откуда $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon < 1$.

Таким образом, наличие временной масштабной инвариантности приводит к необходимости использования реологических моделей в дробных производных. Отметим, что подобные модели вводились (исходя из других соображений) и ранее (см., например, [16, 17, 24]). Полученный нами результат имеет также связи с работами [23, 25], в которых показано, что временная самоподобность процессов приводит к уравнениям в дробных производных. Подчеркнем, что реологический закон с дробными производными получен нами для модели, включающей всего лишь различные пружины и вязкие элементы, в отличие от работы [17], в которой постулируется существование самостоятельного типа деформации – высокоэластичной деформации, которая не может быть сведена к сумме упругости и вязкого трения.

3.3.3. Процессы релаксации при объемной деформации

Рассмотрим теперь процессы релаксации при объемной деформации. В ряде экспериментов [26, 27] было замечено, что если сосуд заполнить структурированной жидкостью (например, нефтью с асфальтено-смолистыми примесями), а затем создать в сосуде избыточное давление и герметически закрыть его, то давление в сосуде медленно падает до некоторого стационарного значения. Релаксационные процессы такого рода связаны с перегруппировкой макромолекул и кластеров, образованных ими. При быстром сжатии такая система претерпевает мгновенную упругую деформацию, величина которой определяется коэффициентом объемной упругости среды в начальном состоянии. Затем происходит медленная перегруппировка структурных единиц различной сложности, что за счет уплотнения среды приводит к некоторому уменьшению ее объема и, как следствие, к некоторому уменьшению давления.

Процесс релаксации давления можно описать обобщенной моделью Максвелла, если изменение давления δp считать аналогичным напряжению τ , относительное изменение плотности $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$ – аналогом деформации γ

(ρ_0 – начальная плотность среды) и положить $G_i = \frac{1}{\beta_i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), где β_0 – равновесная (при $t \rightarrow \infty$) сжимаемость среды, β_i – мгновенная сжимаемость вязкоупругих структурных единиц.

Записав баланс сил для модели обобщенного тела Максвелла, получим

$$\begin{aligned} \tau &= G_0 \gamma + \sum_{i=1} \mu_i \dot{\gamma}_i, \\ \lambda_i \dot{\gamma}_i + \gamma_i &= \gamma, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где γ_i – смещение i -го вязкого элемента, $\lambda_i = \frac{\mu_i}{G_i}$ – время релаксации i -го звена.

Переходя к величинам δp и $\delta \rho$, из (3.24) легко получить

$$\rho_0 \beta_m \delta p(t) = \delta \rho(t) - \int_0^t \psi(t - \xi) \delta \rho(\xi) d\xi,$$

где $\psi(t) \equiv \beta_m \sum_{i=1} \frac{1}{\beta_i \lambda_i} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right)$, β_m – мгновенная сжимаемость среды, определяемая соотношением

$$\frac{1}{\beta_m} = \sum_{i=0} \frac{1}{\beta_i}.$$

Отсюда, вновь приняв скейлинговые законы вида (3.15), (3.16), получим, аналогично (3.23),

$$\rho_0 \beta_m \delta p = \delta p - \beta' D^{-\varepsilon'} \delta p. \quad (3.25)$$

Таким образом, уравнение состояния вязкоупругих сред также может содержать дробные производные (отметим, что степени производных в (3.23) и (3.25) могут различаться, хотя мы сохраняем для них одно и то же обозначение).

В качестве примера рассмотрим данные следующего опыта, проведенного Г. М. Панаховым. Термостатируемый контейнер высокого давления заполнялся структурированной нефтью, содержащей примеси в виде парафинов и смол. После заполнения контейнер тщательно вакуумировали, а затем производили мгновенное повышение давления путем быстрого нагнетания в контейнер небольшой порции нефти из бомбы PVT. После этого контейнер закрывался и производилась регистрация падения давления во времени. Результаты одного из таких опытов, в ходе которого давление в закрытом контейнере упало от 5 МПа до 4,64 МПа, приведены ниже.

$t \times 10^{-2}, \text{ с}$	0	1,5	3	6	15	30	60
$p, \text{ МПа}$	5,00	4,91	4,85	4,78	4,72	4,68	4,65

Предположим, что релаксация давления в контейнере описывается уравнением (3.25). Для идентификации этой модели воспользуемся операционным методом [28, 29].

Поскольку плотность нефти в процессе релаксации давления не меняется, то, осуществив преобразование Лапласа, получим из (3.25)

$$\ln(1 - su) = \ln \beta' - \varepsilon' \ln s, \quad (3.26)$$

где $u = \frac{1}{\delta p(0)} \int_0^\infty \exp(-st) \delta p(t) dt$, $\delta p(0) = \frac{1}{\rho_0 \beta_m} \delta p(0)$.

Таким образом, если объемная релаксация действительно описывается моделью (3.25), то кривая изменения давления должна спрямиться в координатах $Y = \ln(1 - su)$, $\ln s$. Для проверки этого факта мы задавались различными значениями s из интервала $[5/T; 20/T]$ (T – время снятия экспериментальной кривой; в нашем случае $T = 6000$ с) и вычисляли изображение функции $\delta p(t)$ по формуле

$$U(s) = \frac{\delta p(0)}{s} + \frac{1}{s^2} \sum_i \left[\frac{\delta p(t_{i+1}) - \delta p(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (e^{-st_i} - e^{-st_{i+1}}) \right].$$

Результаты проведенных вычислений свидетельствуют, что кривая релаксации действительно спрямляется в указанных координатах. По углу наклона прямой было найдено $\varepsilon = 0,78$.

Полученные нами результаты могут быть использованы для вывода уравнений движения релаксирующих сред. Прежде всего, рассмотрим движение структурированной релаксирующей жидкости в трубе радиуса R . Реологическое уравнение среды запишем в виде (ср. с (3.23))

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\tau}{\mu} + \alpha D^{-\varepsilon} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (3.27)$$

где $v(r, t)$ – составляющая скорости вдоль оси трубы.

Осредняя (3.27) по сечению трубы, в рамках квазистационарного приближения [30] можно получить следующее уравнение движения:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha D^{-\varepsilon} D \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad 2a = \frac{8\mu}{\rho_0 R^2}, \quad (3.28)$$

где w – средняя по сечению скорость, $\frac{\partial p}{\partial x}$ – градиент давления вдоль оси трубы.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

при учете (3.25) можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad c_0 = (\beta_m \rho_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

где c_0 – «мгновенная» скорость звука в среде.

Исключая из (3.28) и (3.29) скорость, получим уравнение движения релаксирующей жидкости в виде

$$(D + 2a)p = c_0^2 (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) \left(1 + \alpha D^{-\varepsilon} D \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (3.30)$$

Уравнения фильтрации, как известно, можно получить, пренебрегая в (3.28) инерционным членом $\frac{\partial w}{\partial t}$ и полагая $\frac{1}{2a} = \frac{k}{\mu}$, где теперь w – скорость фильтрации, k – проницаемость пористой среды. Следуя известной методике (например, [11]), в этом случае получим следующий аналог (3.30):

$$Dp = \chi (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) \left(1 + \alpha D^{-\varepsilon} D \right) \operatorname{div}(\operatorname{grad} p), \quad \chi = \frac{k}{\eta m \beta},$$

где χ – коэффициент пьезопроводности, m – пористость, β – сжимаемость пласта.

3.3.4. Примеры неэкспоненциальных законов

Универсальные законы релаксации вида (3.18) или (3.19) применимы для описания многих процессов нефтегазодобычи. Рассмотрим некоторые примеры.

КВД в трещиновато-пористых пластах

По методике П. Полларда, кривая восстановления давления (КВД) в остановленной скважине, эксплуатирующей трещиновато-пористый пласт, описывается суммой трех экспонент

$$\Delta p(t) = \Delta p_{\infty} - \sum_{j=1}^3 A_j \exp\left(-\frac{t}{\lambda_j}\right),$$

где $\Delta p(t)$ – изменение давления, Δp_{∞} – предельное значение давления Δp , A_j и λ_j – величины, определяющие вклад и характерное время фильтрационных процессов в загрязненной призабойной зоне ($j=1$), трещинах ($j=2$) и поровых блоках ($j=3$),

$$\Delta p_{\infty} = \sum_{j=1}^3 A_j.$$

В реальности система трещин и блоков имеет фрактальную структуру, поэтому для описания релаксационных процессов, связанных с ними, следует использовать неэкспоненциальный закон Кольрауша. Таким образом, вместо формулы Полларда можно предложить модель вида

$$\Delta p(t) = \Delta p_{\infty} - A_1 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) - A_2 \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda_2}\right)^{\beta_2}\right] - A_3 \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda_3}\right)^{\beta_3}\right].$$

Кинетика влияния техногенных факторов на проницаемость пористой среды

Известно, что закачка сточных вод, содержащих механические примеси, а также остаточные «следы» нефтепродуктов и химреагентов приводят к существенному ухудшению коллекторских характеристик призабойной зоны пласта. Таковы же последствия биозаражения пласта бактериями, привнесенными извне, а также образования труднорастворимых солей в результате нагнетания вод, несовместимых с пластами.

Простейшая математическая модель, описывающая уменьшение проницаемости при фильтрации жидкости с примесями, имеет вид

$$\frac{ds}{dt} = q - \alpha s,$$

где s – массовое содержание в единице объема пор частиц примеси, осевших на поверхности пор скелета пористой среды, q – скорость увеличения содержания загрязняющих частиц за счет закачки свежих порций жидкости с примесями, α – коэффициент, определяющий скорость выноса загрязняющих частиц потоком жидкости (предполагается, что скорость выноса пропорциональна содержанию осевших частиц).

Аппроксимируя в первом приближении зависимость проницаемости пористой среды от степени ее загрязненности линейной функцией, примем

$$k = k_0 - \varepsilon s,$$

где k_0 – проницаемость незагрязненной пористой среды.

Выразив s через k , получим

$$\lambda \frac{dk}{dt} + k = k_\infty,$$

где λ – характерное время загрязнения, $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, k_∞ – предельное значение проницаемости, $k_\infty = k_0 - \varepsilon \frac{q}{\alpha}$.

Как правило, $k_\infty \ll k_0$, поэтому можно положить $k_\infty = 0$, что после интегрирования дает

$$k = k_0 e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Согласно этой модели уменьшение проницаемости вследствие загрязнения пористой среды должно описываться простой экспоненциальной зависимостью. Однако эксперименты показывают, что это справедливо только для пористых сред, представленных хорошо отсортированным кварцевым песком узких фракций. Экспериментальные данные, полученные в насыпных пористых средах из песка широких фракций, уже не подчиняются экспоненциальной зависимости. Промысловые исследования также приводят к кривым падения приемистости нагнетательных скважин, отличным от экспоненты.

Отмеченные факты можно объяснить многомасштабностью размеров поровых каналов. Пусть $\rho(r)dr$ – объемное содержание поровых каналов масштаба r , $k_0(r)$ и $\lambda(r)$ – проницаемость и характерное время загрязнения для этих каналов. Тогда суммарная проницаемость пористой среды выражается интегралом

$$k = \int_0^{\infty} \rho_1(r) e^{-\frac{t}{\lambda(r)}} dr,$$

где $\rho_1(r) = k_0(r)\rho(r)$.

Как и все неупорядоченные природные системы, реальные пористые среды характеризуются масштабно-инвариантным (фрактальным) распределением пор по размерам. Поэтому можно предположить, что $\rho_1(r)$ и $\lambda(r)$ удовлетворяют зависимостям

$$\rho_1(r) = \rho_0 \exp(-\delta r); \quad \lambda(r) = \lambda_0 r^\nu.$$

При этих предположениях асимптотика интеграла легко определяется по методу Лапласа и приводит к «растянутому» экспоненциальному закону (закону Кольрауша)

$$k = k_0 \exp(-\alpha t^\beta),$$

где $\beta = \frac{1}{\nu + 1}$.

Для примера на рис. 3.2 приведена зависимость проницаемости керн пласта БС₁₀ Мамонтовского месторождения от объема прокаченной через него жидкости при фильтрации поочередно с водой 5 оторочек водонефтяной эмульсии, содержащей 0,5% железной окалины. Суммарный объем эмульсии составляет 10% объема пор $V_{пор}$, начальная проницаемость керн пласта равна 0,134 мкм².

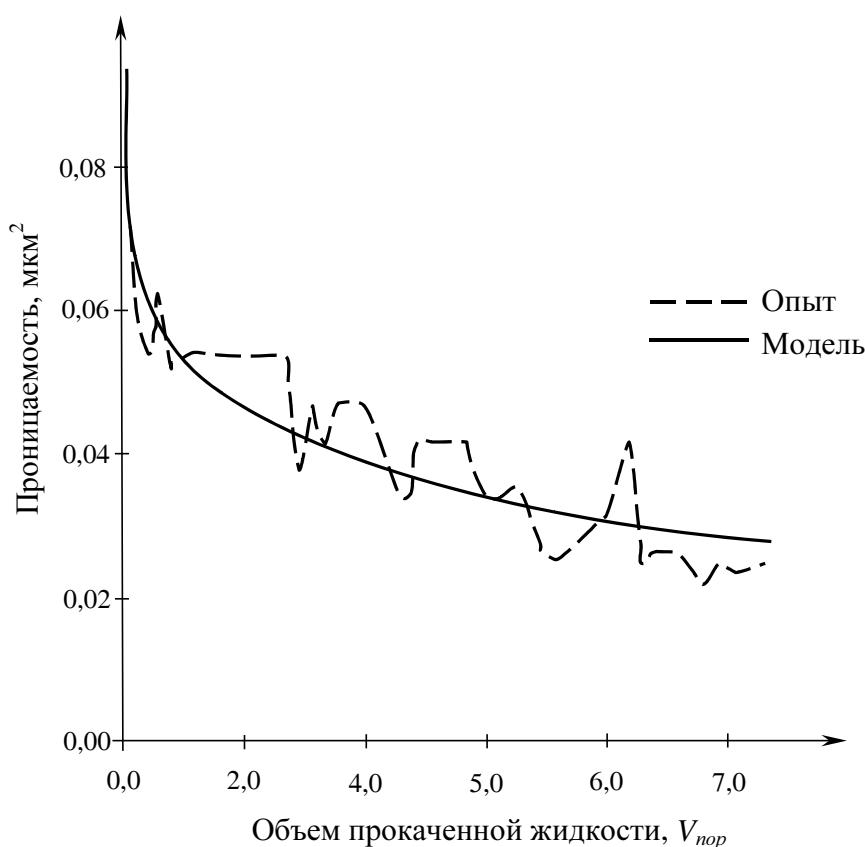


Рис. 3.2. Динамика уменьшения проницаемости

Расчеты показали, что экспериментальная зависимость хорошо описывается выведенной нами формулой, если принять $\alpha = 0,57$, $\beta = 0,32$, $t = V_{\text{пор}}$. Обратная задача определения коэффициентов α и β решалась методами теории чувствительности (см. раздел 2.1.1).

Динамика набухания глин

В настоящее время в нефтяной промышленности находят широкое применение технологии, основанные на взаимодействии химических реагентов с монтмориллонитовыми глинами. В частности, полимерглинистые суспензии используются для изоляции промытых зон пласта и увеличения нефтеотдачи. Кроме того, применение химреагентов позволяет за счет их взаимодействия с глинистым цементом значительно изменять проницаемость и пористость глиносодержащих коллекторов.

Для количественной оценки влияния минерализации воды и закачки реагентов на набухание глин проводятся лабораторные исследования (например, с помощью прибора Жигача–Ярова) зависимости коэффициента набухания от времени.

При обработке данных этих исследований необходим выбор модели, адекватным образом описывающей динамику набухания. Учитывая фрактальную иерархичность строения глин, для обработки кривых набухания можно предложить многоэкспоненциальную зависимость вида

$$k = k_{\infty} - \sum_{i=1}^N A_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right),$$

где k – коэффициент набухания; k_{∞} – асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) значение k ; λ_i – характерное время набухания структурных единиц i -го уровня, A_i – «вклад» этого уровня в общий процесс набухания.

Для определения величин A_i и λ_i воспользуемся X-методом А. Тобольского [8], первоначально предназначенным для оценки времени релаксации напряжения сдвига полимеров.

Суть этого метода заключается в том, что кривая $k(t)$ перестраивается в координатах $(t, \ln(k_{\infty} - k))$. При этом в перестроенной кривой выделяется прямолинейный участок (соответствующий большим временам), который описывается зависимостью

$$\ln(k_{\infty} - k) = \ln A_N - \frac{t}{\lambda_N},$$

по которой оцениваются значения A_N и λ_N (нумерация уровней ведется в порядке возрастания времени релаксации; через N мы обозначили номер высшего наблюдаемого в данной шкале времени уровня организации).

Затем строят график $\ln(k_\infty - k - A_N)$ от t и, повторяя те же операции, оценивают величины (A_{N-1}, λ_{N-1}) , (A_{N-2}, λ_{N-2}) и т. д.

Для иллюстрации на рис. 3.3 показаны типичная кривая набухания и результаты ее обработки по одно- и многоэкспоненциальной зависимостям. Как видим, последняя модель весьма хорошо описывает кривые набухания глин. В табл. 3.1 приведены значения A_i , λ_i , полученные при обработке кривых набухания глины в различных растворах.

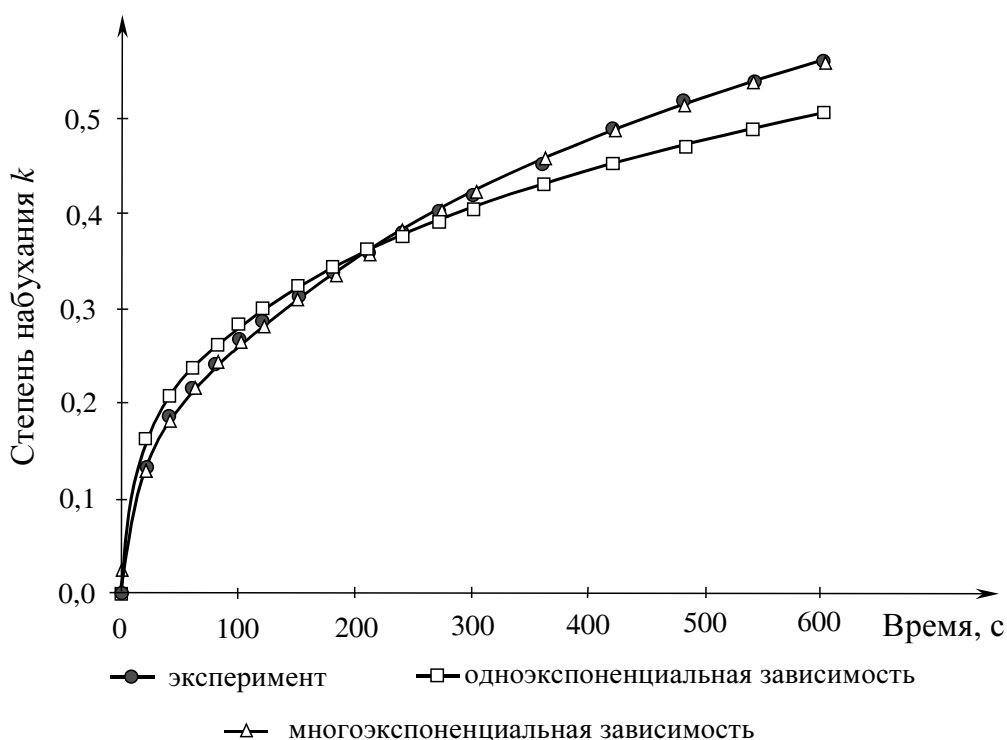


Рис. 3.3. Корреляция между экспериментальными и расчетными данными о кинетике набухания бентонитовой глины

На рис. 3.4 приведены зависимости $\ln \lambda_i$ от номера уровня i . Как видим, эти зависимости могут быть описаны линейным уравнением

$$\ln \lambda_i = a + bi,$$

откуда

$$\lambda_i = \lambda_0 m^i,$$

где $\lambda_0 = e^a$, $m = e^b$.

Таблица 3.1

Результаты обработки кривых набухания бентонита

Раствор	i	A_i	λ_i, c	$\ln \lambda_i$
Пластовая вода (Мамонтовское месторождение, пласт Б ₁₁)	$N-3$	0,167	17,2	2,84
	$N-2$	0,372	211	5,35
	$N-1$	0,194	5800	8,67
	N	0,063	585645	13,28

Водопроводная вода	$N-3$	0,128	29,0	3,37
	$N-2$	0,324	362	5,89
	$N-1$	1,087	8484	9,05
	N	0,485	443820	13,00
Полиглицерин 0,5%	$N-4$	0,147	13,7	2,62
	$N-3$	0,198	298	5,70
	$N-2$	0,618	4267	8,39
	$N-1$	0,818	98720	11,50
	N	0,094	2158346	14,58

Отсюда следует, что иерархия времен $\{\lambda_i\}$ масштабно-инвариантна (т. е. фрактальна), поскольку, как легко видеть,

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = m = \text{const}.$$

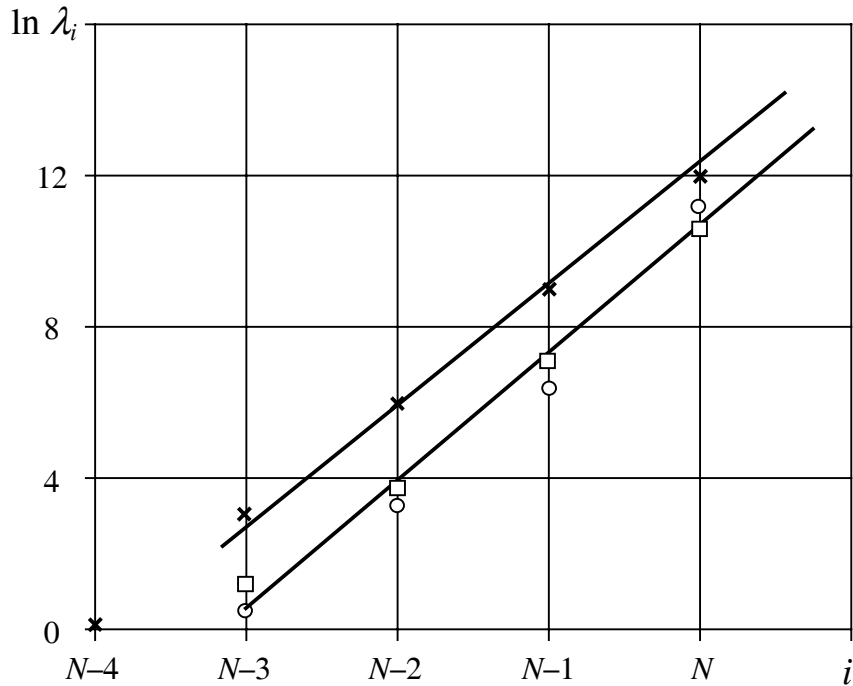


Рис. 3.4. Зависимость логарифма характерного времени набухания от номера уровня

○ – пластовая вода; □ – водопроводная вода; * – полиглицерин 0,5%

3.4. Моделирование нестационарной фильтрации в пластах с фрактальной структурой

Традиционно пласт с ухудшенной проницаемостью описывается при помощи модели, состоящей из двух различных пространственно одно-

родных зон: «загрязненной» призабойной зоны и расположенной за ней зоны с большей проницаемостью. В ряде случаев эта несколько схематичная модель может быть уточнена за счет принятия некоторых дополнительных предположений о структуре пласта с ухудшенной проницаемостью. В условиях, когда какие-либо теоретические или экспериментальные исследования структуры «загрязненного» пласта отсутствуют, полезную информацию могут дать некоторые положения теории организации сложных систем. Так, можно ожидать, что зоны пласта с ухудшенной проницаемостью обладают, как и многие другие системы с неупорядоченной структурой, фрактальными свойствами (см. главу 1). Для примера на рис. 3.5 схематически изображен загрязненный пласт в рамках зонально неоднородной (а) и фрактальной (б) моделей.

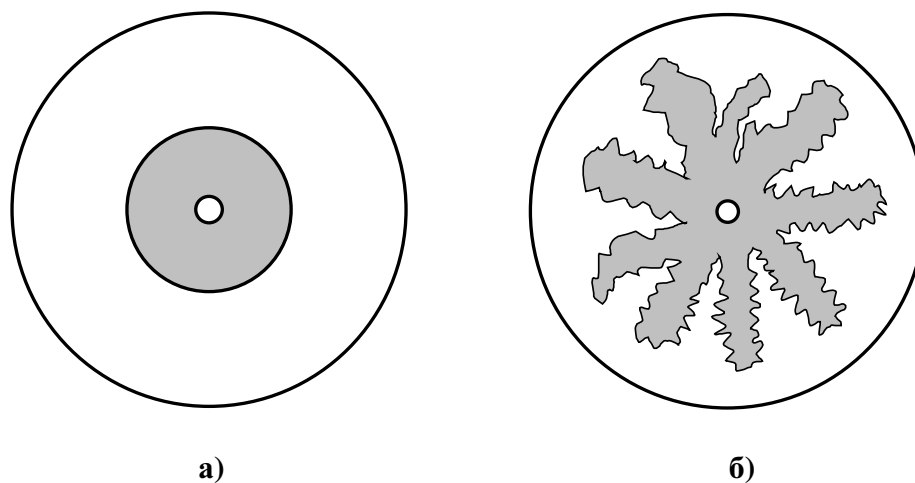


Рис. 3.5. Модели неоднородного пласта

Подчеркнем, что речь здесь идет о пористых средах с крупномасштабной фрактальной структурой. Этот термин введен нами для того, чтобы подчеркнуть отличие последних от мелкомасштабных фрактальных структур теории протекания [22, 31, 32] и подразумевает выполнение неравенства

$$\xi \gg l,$$

где l – характерный масштаб изменения градиента давления, ξ – длина корреляции. (Реальная система с фрактальными свойствами на масштабах, больших ξ , является однородной. Грубо говоря, ее можно представить себе как состоящую из фрактальных блоков размерами ξ .)

Причины, которые приводят к образованию крупномасштабных фрактальных структур в изначально однородной пористой среде, весьма разнообразны. Практически все механизмы необратимого роста, рассматриваемые в литературе [22, 32], могут проявить себя в процессах нефтегазодобычи. Так, известно, что фракталы могут образовываться вязкими

пальцами, возникающими при вытеснении из пористой среды одной жидкости другой. Поэтому можно ожидать, что крупномасштабные фрактальные структуры возникают при закачке в пласт воды, газа и других агентов, поддерживающих пластовое давление, а также при вскрытии пласта за счет проникновения фильтратов буровых и цементных растворов. Достаточно общими механизмами образования фрактальных структур являются агрегация, ограниченная диффузией, и осаждение. Отсюда следует, что фрактальные структуры в пористой среде могут образоваться при ее загрязнении – в ходе заиливания призабойной зоны, отложения твердых углеводородов, выпадения конденсата и т. д.

3.4.1. Уравнение нестационарной фильтрации на фракталах

Выведем, следуя [33], уравнение нестационарной радиальной фильтрации в средах с крупномасштабной фрактальной структурой. Пусть $M(r,t)dr$ – масса флюида в кольцевом элементе пласта единичной мощности, образованном цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$:

$$M(r,t)dr = N(r)M_0(r,t)dr, \quad (3.31)$$

где $N(r)dr$ – число узлов фрактала в кольцевом элементе

$$N(r) = CDr^{D-1}, \quad (3.32)$$

D – размерность фрактала, $M_0(r,t)$ – масса флюида в одном узле фрактала.

Закон сохранения массы флюида можно записать в виде

$$\frac{\partial M(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(r,t)}{\partial r}, \quad (3.33)$$

где $G(r,t)$ – массовый расход флюида через цилиндрическую поверхность радиуса r .

Связь между расходом флюида и градиентом давления принимается в виде

$$G(r,t) = -\rho \frac{K(r)}{\mu} N(r) \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.34)$$

где ρ и μ – плотность и вязкость жидкости, p – давление.

Величину $K(r)$ естественно назвать проводимостью фрактала, отнесенной к одному его узлу. Выражение (3.34) следует рассматривать как соотношение, определяющее величину $K(r)$ аналогично тому, как закон Дарси в форме

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$$

определяет проницаемость пористой среды k .

Проводимость фрактальных структур подчиняется степенному закону

$$K(r) = \frac{K_1}{r^\theta}, \quad (3.35)$$

где θ – показатель, описывающий аномальность проводимости, имеющую место из-за весьма специфического способа комбинирования проводящих узлов во фрактальную решетку.

С учетом сжимаемости флюида

$$\frac{\partial M_0}{\partial t} = \rho V_0 \beta_0 \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.36)$$

где β_0 – сжимаемость жидкости, V_0 – объем узла фрактала.

Из уравнений (3.31)–(3.36) в линейном приближении получим уравнение пьезопроводности на фрактале

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\chi}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.37)$$

где $\chi = \frac{K_1}{\mu V_0 \beta_0}$, $\alpha = D - 1$, $\beta = D - 1 - \theta$.

Уравнение (3.37) аналогично уравнению пьезопроводности в евклидовом пространстве размерности d :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\chi}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (3.38)$$

Однако величины α и β в (3.37) могут быть дробными и отличаются ($\theta \neq 0$) друг от друга.

3.4.2. Обработка кривых восстановления давления в пластах с фрактальной структурой

Как уже отмечалось, крупномасштабные фрактальные структуры могут образоваться при вытеснении из пористой среды нефти водой. Поэтому уравнение (3.37) может быть использовано для интерпретации данных гидродинамического исследования скважин, нагнетающих воду в нефтеносные пласты, а также добывающих скважин, в продукции которых содержится большое количество воды (в этих случаях подвижностью нефти можно пренебречь и рассматривать однофазную фильтрацию во фрактальной среде).

Наличие фрактальных структур может быть связано также с загрязнением прискважинных зон пласта (см. выше). Очистка этих зон, сводящаяся к разрушению фрактальных структур, требует значительных затрат времени и средств. Поэтому для уменьшения вероятности проведения очи-

сток «вхолостую» необходимо разработать способы диагностирования наличия крупномасштабных фракталов в окрестностях скважины и методы определения их характеристик. Покажем, что эта задача может быть решена путем использования данных гидродинамического исследования пластов.

Прежде всего, рассмотрим исследования на установившихся режимах фильтрации. Из (3.37) при $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ легко получить $Q_0 = K_0(p_k - p_c)$,

где $K_0 = \frac{\lambda(1-\beta)}{r_k^{1-\beta} - r_c^{1-\beta}} \approx \frac{\lambda(1-\beta)}{r_k^{1-\beta}}$ – коэффициент продуктивности скважины,

$\lambda = \frac{K_1 CD}{\mu}$, Q_0 – дебит жидкости в стационарном режиме, r_c , r_k – радиусы

скважины и некоторого контура, на котором поддерживается постоянное давление p_k , p_c – давление на забое скважины. Поскольку и при отсутствии фракталов связь между Q_0 и $p_k - p_c$ линейна, то исследование на установившихся режимах фильтрации не позволяют выявить наличие фракталов.

Эта задача может быть решена путем обработки кривых восстановления давления (КВД) в остановленных скважинах. Рассмотрим, например, операционный метод обработки КВД (см. [34] и раздел 2.1.4). Пусть в ходе исследований замеряются дебит жидкости $Q(t)$ и давление на забое скважины $p_c(t)$:

$$\lambda r_c^\beta \frac{\partial p(r_c, t)}{\partial r} = Q(t), \quad (3.39)$$

$$p(r_c, t) = p_c(t)$$

при условиях

$$p(r, 0) = p_0(r), \quad p(r_k, t) = p_k = \text{const}. \quad (3.40)$$

Здесь $p_0(r)$ – распределение давления, соответствующее стационарному режиму фильтрации до остановки скважины. Осуществив преобразование Лапласа

$$u(r, s) = \int_0^\infty p_1(r, t) e^{-st} dt,$$

получим

$$\frac{1}{r^\alpha} \left(r^\beta u_r' \right)' - \frac{s}{\chi} u = 0, \quad (3.41)$$

$$-\lambda r_c^\beta u_r'(r_c, s) = F(s), \quad (3.42)$$

где

$$p_1 = p(r, t) - p_0(r),$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} (Q_0 - Q(t)) e^{-st} dt,$$

$Q_0 = \lambda r_c^\beta \frac{\partial p_0}{\partial r}$ – стационарный дебит до остановки скважины.

Решение (3.41) имеет вид

$$u = Z^\nu [C_1 I_\nu(Z) + C_2 K_\nu(Z)],$$

где I_ν, K_ν – модифицированные функции Бесселя,

$$\nu = 1 - \frac{D}{2 + \theta}, \quad Z = r^\gamma \sqrt{\frac{s}{\gamma^2 \chi}}, \quad \gamma = 1 + \frac{\theta}{2}.$$

Определив постоянные интегрирования C_1 и C_2 из условий (3.40), (3.42), получим

$$u(r_c, s) = \frac{F(s) r_c^{1-\beta}}{\lambda \gamma Z_c} \frac{[I_\nu(Z_k) K_\nu(Z_c) - I_\nu(Z_c) K_\nu(Z_k)]}{[I_{\nu-1}(Z_c) K_\nu(Z_k) + I_\nu(Z_k) K_{1-\nu}(Z_c)]}, \quad (3.43)$$

где Z_c и Z_k – значения Z при $r = r_c$ и $r = r_k$.

При $s \ll \frac{\chi}{r_k^{2\gamma}}$

$$I_\nu(Z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{Z}{2}\right)^\nu, \quad K_\nu(Z) \approx \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{Z}\right)^\nu$$

и (3.43) принимает вид

$$\frac{1}{\Psi(s)} \approx K_0 + A s^\nu, \quad (3.44)$$

где

$$\Psi(s) = \frac{u(r_c, s)}{F(s)}, \quad A = \frac{\lambda(2 + \theta)^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu) \chi^\nu}.$$

Таким образом, кривая восстановления давления при наличии фрактальных структур должна спрямиться в координатах $\frac{1}{\Psi(s)}, s^\nu$. По положению этой прямой можно определить коэффициент продуктивности K_0 и величину A , характеризующую нестационарную фильтрацию в пластах с крупномасштабными фрактальными структурами. Величина ν находится путем подбора. Однако возможно и ее независимое определение путем использования инвариантных решений уравнения (3.37). Так, в [33] приведено автомодельное решение типа точечного источника

$$p = \frac{1}{t^{1-\nu}} \exp\left(-\frac{r^{2+\theta}}{(2+\theta)^2 t}\right).$$

Из этого решения следует, что падение давления в скважине после мгновенной закачки некоторой порции жидкости происходит по закону $p_c \sim \frac{1}{t^{1-\nu}}$. Спрямляя кривую падения давления в координатах $\ln p - \ln t$, можно по углу наклона прямой определить величину ν .

Поскольку $\frac{r_c}{r_k} \ll 1$, то существуют такие s , для которых $\frac{\chi}{r_k^2} \ll s \ll \frac{\chi}{r_c^2}$. Взяв такие значения s , вместо (3.44) имеем

$$\Psi(s) \approx \frac{1}{A} s^{-\nu}$$

или

$$\ln \Psi(s) = \ln \frac{1}{A} + \nu \ln \frac{1}{s}. \quad (3.45)$$

В случае плоскорадиальной фильтрации в евклидовом пространстве, описываемой уравнением (3.38), вместо (3.39) имеем

$$\frac{2\pi k h}{\mu} r_c \frac{\partial p(r_c, t)}{\partial r} = Q(t),$$

где k – проницаемость, h – толщина пласта.

Вместо (3.44) при этом получается соотношение [34, 35]

$$\Psi(s) = b + f \ln \left(\frac{1}{s} \right),$$

где

$$f = \frac{\mu}{4\pi k h}, \quad b = f \cdot \ln \left(\frac{1,26 \chi}{r_c^2} \right).$$

Таким образом, в случае фильтрации на фрактале кривая изменения давления спрямляется в координатах $\left(\ln \left(\frac{1}{s} \right), \ln \Psi \right)$, а в случае плоскорадиальной фильтрации в евклидовом пространстве – в координатах $\left(\ln \left(\frac{1}{s} \right), \Psi \right)$. Тот факт, что КВД спрямляется в координатах $\left(\ln \left(\frac{1}{s} \right), \ln \Psi \right)$, может свидетельствовать о необходимости проведения мероприятий, направленных на разрушение фрактальной структуры. Поэтому при выборе скважин, подлежащих воздействию, целесообразно учесть также результаты обработки кривых изменения давления по изложенной выше методике.

Для примера на рис. 3.6 и 3.7 представлены КВД, снятые в скважине № 151 Манчаровского нефтяного месторождения (НГДУ «Чекмагуш-нефть»), соответственно, до и после проведения термогазохимического

воздействия. Как видно, до воздействия диагностируется наличие крупномасштабной фрактальной структуры. После воздействия (которое оказалось успешным) КВД спрямляется в координатах $\left(\ln\left(\frac{1}{s}\right), \Psi\right)$, что, по видимому, свидетельствует о разрушении фрактала.

Отметим, что нестационарная фильтрация в неоднородном пласте, проницаемость которого изменяется по степенному закону вида (3.35), формально также может быть описана уравнением (3.37) при $D = d = 2$. Однако неоднородность, как правило, связана с загрязнением призабойной зоны, поэтому проницаемость пласта увеличивается с удалением от скважины. В этом случае $\theta < 0$ и $\nu = 1 - \frac{2}{2 - |\theta|} < 0$, так что прямая в координатах

таж $\left(\ln\left(\frac{1}{s}\right), \ln \Psi\right)$ должна быть направлена вниз.

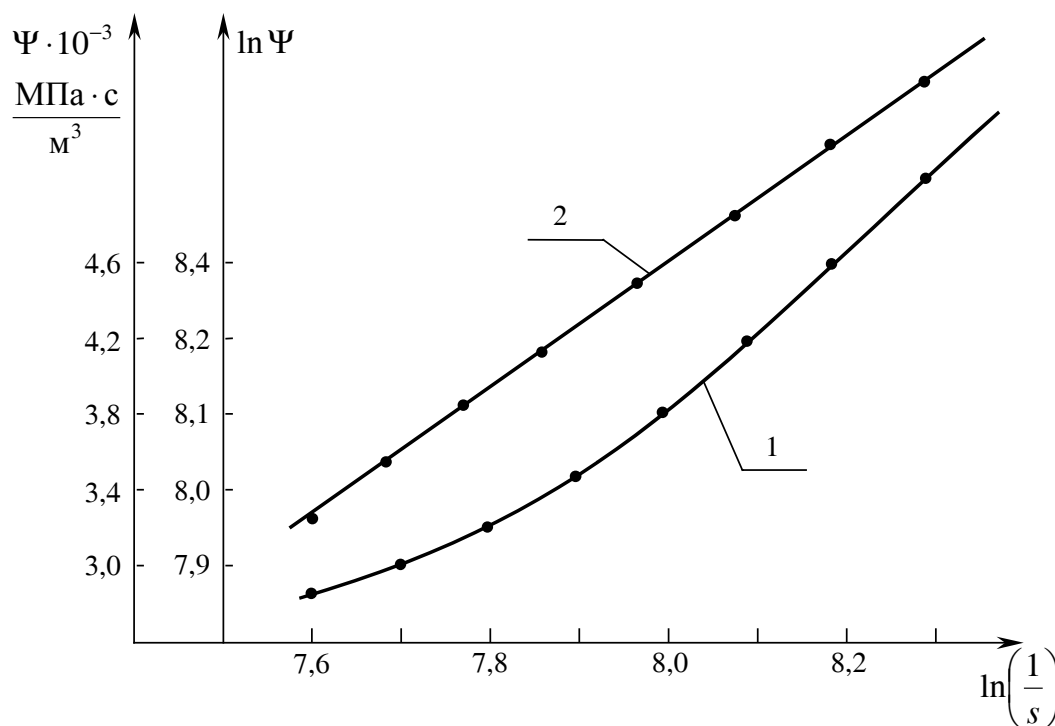


Рис. 3.6. КВД, снятая в скважине № 151 Манчаровского нефтяного месторождения (НГДУ «Чекмагушнефть») до воздействия ТХГВ:

1 – зависимость Ψ от $\ln\left(\frac{1}{s}\right)$;

2 – зависимость $\ln \Psi$ от $\ln\left(\frac{1}{s}\right)$

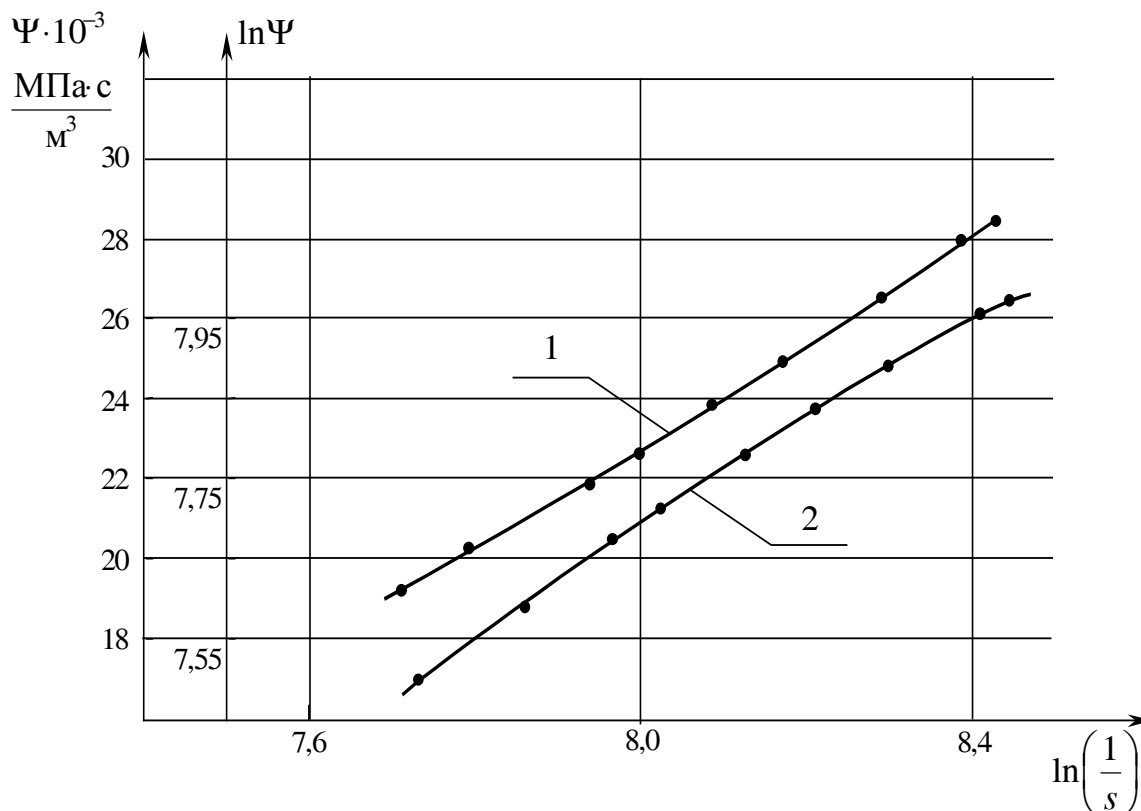


Рис. 3.7. КВД, снятая в скважине № 151 Манчаровского нефтяного месторождения (НГДУ «Чекмагушнефть») после воздействия ТХГВ:

1 – зависимость Ψ от $\ln\left(\frac{1}{s}\right)$, 2 – зависимость $\ln \Psi$ от $\ln\left(\frac{1}{s}\right)$

3.5. О колебаниях расхода при фильтрации полимерных растворов

Нелинейные эффекты при фильтрации неньютоновских сред могут привести к потере устойчивости стационарного режима фильтрации [36–39]. Подобные явления наблюдались нами в ряде лабораторных экспериментов, в которых изучалась фильтрация растворов полиакриламида (ПАА) через колонку, набитую кварцевым песком. Проницаемость пористой среды по воздуху составляла $3,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$. В ходе экспериментов давления на входе и выходе колонки поддерживались постоянными и в течение достаточно долгого времени замерялся расход фильтрующейся жидкости. Опыты показали, что при малых перепадах давления устанавливается стационарное значение расхода. Но при достижении некоторого критического перепада давления Δp_* (зависящего от концентрации ПАА в растворе) стационарные режимы фильтрации теряют устойчивость, наблюдаются незатухающие колебания расхода $Q(t)$. Для примера на рис. 3.8 представ-

лена зависимость расхода раствора ПАА концентрации 0,075% от времени при $\Delta p = 0,6$ МПа.

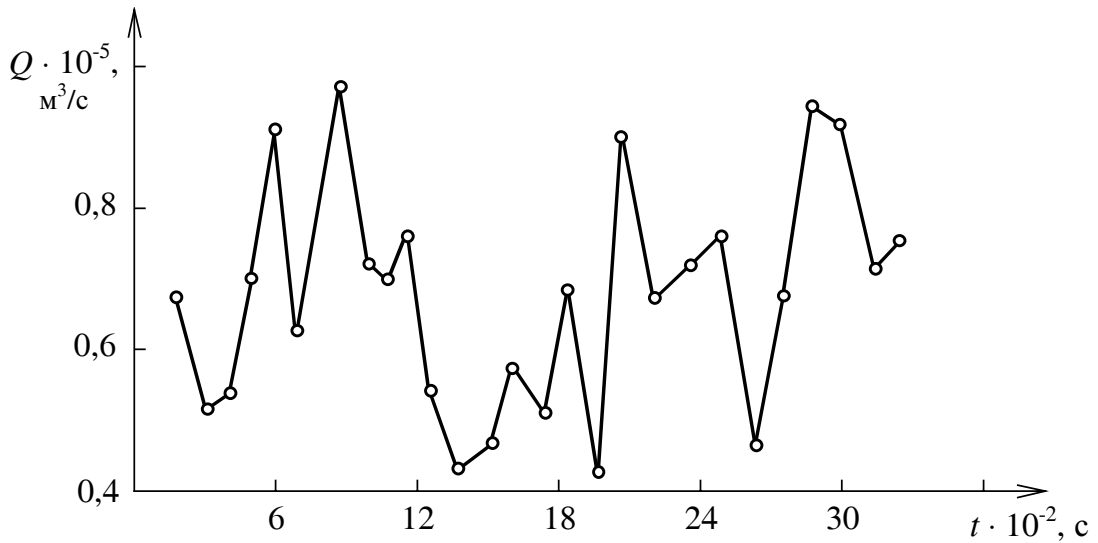


Рис. 3.8. Зависимость расхода раствора ПАА от времени

Колебания расхода имеют нерегулярный характер. Степень нерегулярности (хаотичности) можно оценить по размерности Хаусдорфа для графика $Q = Q(t)$. Величина D определяется (см. главу 1) в процессе измерения длины l кривой $Q = Q(t)$ с помощью циркуля с раствором ε . В ходе измерения начинают с исходной точки P_0 . Описав окружность радиусом ε с центром в P_0 , отмечают точку первого выхода кривой из круга P_1 . Вторая точка P_2 получается при перенесении центра окружности в точку P_1 и т. д. Если обозначить через $l(\eta)$ длину возникающей ломаной линии $P_0P_1P_2\dots$, приближенно описывающей кривую, то длина кривой будет $l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon)$.

Как показывают непосредственные изменения, $l(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\gamma}$ для экспериментальных кривых $Q = Q(t)$ при не слишком малых ε . Следовательно, графики функций $Q = Q(t)$ можно считать фрактальными кривыми с размерностью $D = \gamma + 1$. Естественно предположить, что чем больше размерность экспериментальной кривой, тем менее упорядочен процесс, отображением которого является эта кривая. Нужно отметить тот факт, что после установления хаотического режима фильтрации дальнейшее увеличение перепада давления приводит не к увеличению, а к уменьшению размерности Хаусдорфа кривых $Q = Q(t)$, что свидетельствует о более упорядоченном протекании процесса фильтрации при больших значениях величины Δp .

Рассмотрим модель, позволяющую объяснить возникновение колебаний расхода при фильтрации полимерных растворов. Для простоты воспользуемся идентификационным подходом, согласно которому исследуемая система рассматривается как передаточное звено, на вход которого подается сигнал постоянной величины – перепад давления Δp , а на выходе наблюдается изменение скорости фильтрации во времени $v(t)$. Согласно § 3.2 нестационарные процессы фильтрации можно в рамках этого подхода описать сосредоточенной моделью вида

$$\lambda \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = c \frac{\Delta p}{L}, \quad (3.46)$$

где λ – время пьезопроводности, L – длина колонки.

Вследствие проявления полимерными растворами неньютоновских свойств коэффициент c зависит от скорости фильтрации. Поскольку структурные преобразования в полимерных системах характеризуются явлениями запаздывания, то эту зависимость можно представить в виде $c|_{t=t_1} = c(v(t_1 - T))$, где T – время запаздывания (см. § 3.1).

Конкретизируем вид функции $c(v)$. Для этого отметим, что в стационарном режиме из (3.46) следует $v = c(v) \frac{\Delta p}{L}$. При малых скоростях фильтрации полимерных растворов проявляется наличие начального градиента $\frac{\Delta p_0}{L}$, поэтому функция $c(v)$ должна удовлетворять условию $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{c(v)} = \frac{\Delta p_0}{L}$.

Следуя [26], предположим, что при быстром движении клубки полимеров затвердевают в наиболее узких местах пор. Это приводит к уменьшению коэффициента фильтрации при больших значениях v . Для определенности представим функцию $c(v)$ с отмеченными выше свойствами в виде [40]

$$c(v) = \frac{L}{\Delta p_0} \frac{v}{1 + Mv^N}, \quad N > 1. \quad (3.47)$$

Переходя к безразмерным переменным $t \rightarrow \frac{t}{\lambda}$, $\tau = \frac{T}{\lambda}$, $v \rightarrow \frac{v}{v_0}$, $v_0 = M^{-\frac{1}{N}}$, $B = \frac{\Delta p}{\Delta p_0}$, получим из (3.46), (3.47)

$$\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{Bv(t - \tau)}{1 + v^N(t - \tau)}. \quad (3.48)$$

Как показывает анализ [40, 41], уравнение (3.48) имеет точку равновесия $v=0$, которая при $B > 1$ (т. е. при $\Delta p > \Delta p_0$) теряет устойчивость. При этом система переходит в новое положение равновесия $v = v_1 = (B-1)^{1/N}$. Дальнейшее увеличение параметра B приводит к тому, что в критической точке $B = B_0$ стационарный режим фильтрации со скоростью $v = v_1$ также становится неустойчивым. В системе возникают периодические и стохастические колебания. Значение B_0 может быть получено методом D -разбиений [41] и равно $B_0 = \frac{N}{N-1+\sec\eta}$, где величина η

определяется из уравнения $\tau = -\eta \operatorname{ctg}\eta$, $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$.

Приведем некоторые количественные оценки. Время пьезопроводности λ имеет порядок $\frac{L^2}{\chi}$, где χ – коэффициент пьезопроводности. Эту величину определяли по кривым восстановления давления, снятым предварительно на колонке. Было получено $\lambda \sim 0,5-1$ мин. Время запаздывания T зависит от концентрации полимера и меняется от 5–10 мин до 1–2 ч [26]. Для полимерных растворов, использованных в наших экспериментах, можно принять $T \sim 5$ мин. Считая, что $\lambda \sim 1$ мин, получаем оценку $\tau \approx 5$. Легко подсчитать, что при таком значении τ $B_0 \approx \frac{N}{N-2,1}$. Для получения оценок величины N у нас нет необходимых данных, но тот факт, что потеря устойчивости стационарной фильтрации полимерных растворов наблюдалась экспериментально, является косвенным свидетельством того, что величина N достаточно велика (при $\tau = 5$, по крайней мере, $N > 2,1$).

Выбор функции $c(v)$ в виде (3.47) предполагает, что при увеличении скорости фильтрации величина c стремится к нулю. Более общим является случай, когда коэффициент фильтрации при больших v стремится к некоторому асимптотическому значению, отличному от нуля. Поэтому нами проведены расчеты с функцией $c(v)$ вида

$$c(v) = v \left[\exp(-v^N) + \frac{G}{Av+1} \right],$$

для которой $\lim_{v \rightarrow \infty} c(v) = \frac{G}{A} > 0$.

В этом выражении была использована экспонента, а не степенная функция вида $\frac{1}{1+v^N}$ для того, чтобы проверить устойчивость полученных результатов относительно смены способа параметризации функции $c(v)$.

Расчеты показали, что эффекты возникновения периодических и стохастических автоколебаний имеют место и в этом случае. Приведем здесь результаты, полученные при $A = 10$, $G = 2$, $N = 5$, $\tau = 5$. Вначале увеличение параметра B ведет через цепь бифуркаций удвоения периода в точках $B_1 \approx 1,20$; $B_2 \approx 1,46$; $B_3 \approx 1,60$; ... к установлению хаотического режима. Дальнейшее увеличение B приводит к тому, что движение в системе упорядочивается. Возникают предельные циклы, периоды которых по мере роста B последовательно уменьшаются вдвое, т. е. возникают обратные бифуркации Фейгенбаума [42]. Наконец, при некотором достаточно большом значении B вновь устанавливается стационарное состояние.

Обратный переход от хаоса к стационарному состоянию, обнаруженный при исследовании предложенной модели, может послужить объяснением тому факту, что увеличение перепада давления приводит к уменьшению нерегулярности зависимостей $Q = Q(t)$.

Таким образом, нами показано, что колебания расхода при фильтрации полимерных растворов можно объяснить тремя причинами: наличием начального градиента давления, эффектом «запирания» потока клубками полимерных молекул и существованием некоторого времени запаздывания в процессах структурных преобразований в полимерных системах. Качественные выводы, сделанные из анализа предложенной модели, находятся в соответствии с экспериментально полученными результатами.

Данные результаты могут найти широкое применение при разработке стратегии управления закачкой растворов полимеров в нефтеносные пласты. Они позволяют, в частности, назначить режимы закачки, исключая возникновение хаотических колебаний.

3.6. О фильтрационных характеристиках с учетом сорбционной способности

Стационарное движение газа в пористых средах может быть описано различными законами фильтрации: линейным (законом Дарси), двучленным, с начальным градиентом давления. При экспериментальном определении вида закона фильтрации обычно используют данные стационарных исследований, изменяя значения перепада давления и дожидаясь установления стационарных значений расходов, соответствующих данным перепадам давления. Время, необходимое для установления стационарного режима фильтрации, определяют из гидродинамических соображений. Однако в определенных условиях стабилизация фильтрационного потока может происходить в течение длительного времени, многократно превышающего гидродинамическое время. В частности, к «затягиванию» процесса установления стационарной фильтрации могут привести медленные сорбцион-

ные процессы. Это необходимо учитывать при обработке экспериментальных данных [43].

Влияние сорбированного газа на фильтрационные характеристики может быть весьма ощутимым. Дело в том, что при проведении исследований по определению фильтрационных свойств за время исследований через модель проходит объем газа, составляющий незначительную часть от объема газа, заключенного в порах, причем с увеличением размеров модели эта величина уменьшается. Так, например, простой расчет показывает, что время, необходимое для фильтрации через модель одного порового объема газа при проницаемости $\sim 10^{-15} \text{ м}^2$, длине модели $L \sim 10 \text{ м}$, перепаде давления $\Delta P \sim 0,1 \text{ МПа}$ и давлении в модели $P \sim 1 \text{ МПа}$, имеет величину порядка суток и более. Поэтому массообмен между сорбированным и свободным газом может ощутимо влиять на характеристику фильтрационного потока.

Сорбция (соответственно десорбция) газа происходит весьма медленно. Оценки показывают, что характерные времена этих процессов для лабораторных экспериментов составляют не менее 10^4 с . Следует, однако, учитывать наличие как поверхностной, так и объемной сорбции, т. е. диффузию молекул газа внутрь зерен породы. Известно, что среднее время трехмерной диффузии значительно больше, чем двухмерной при одинаковых геометрических размерах (например, диффузия в шаре и круге одного радиуса). Поэтому стабилизация сорбционного, а следовательно, и гидродинамического режима происходит в течение времени, значительно превышающего реальные времена наблюдений при проведении экспериментов. Исходя из этого, ниже рассматривается модель фильтрации газа с учетом кинетики сорбции в изотермических условиях.

Система уравнений линейной фильтрации газа с учетом сорбционного обмена имеет обычный вид:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \rho \bar{v} + f, \quad \bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \quad (3.49)$$

где m – пористость, ρ – плотность, \bar{v} – скорость фильтрации, k – проницаемость, μ – вязкость, P – давление, f – член, характеризующий сорбционный массообмен.

Процесс сорбции газа породой можно рассматривать как двухэтапный – осаждение молекул на поверхности и диффузия внутрь блока зерен породы. Поскольку диффузионный процесс, как более медленный, является лимитирующим этапом, можно рассматривать сорбцию газа как диффузию внутрь зерен породы, а кинетику поверхностной сорбции учитывать в граничных условиях.

Для расчета диффузии молекул газа в твердом теле необходимо выбрать определенную модель. В дальнейшем будет использоваться одномерное уравнение диффузии (нетрудно показать, что при использовании

других расчетных моделей, например цилиндрической или сферической диффузии, получаемые формулы будут иметь аналогичную структуру). Обозначим через l размер области диффузии, через C – массу сорбированного газа в единице объема скелета породы. Уравнение диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l \quad (3.50)$$

необходимо дополнить начальным и граничными условиями. В качестве начального условия примем

$$C(0, x) = C_1. \quad (3.51)$$

В сечении $x = 0$ имеем естественное условие

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, 0) = 0. \quad (3.52)$$

В сечении $x = l$ происходит попадание молекул газа на поверхность блока породы. Пусть $a(P)$ – изотерма сорбции. Тогда, учитывая кинетический характер сорбционного процесса, условие при $x = l$ можно записать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{C - a(P)}{T} \Big|_{x=l}, \quad (3.53)$$

где T – параметр размерности времени.

Для определения массообмена между свободным и сорбированным газом необходимо определить величину

$$q = -D \frac{\partial C(l, t)}{\partial x}. \quad (3.54)$$

Нетрудно заметить, что величины f и q связаны соотношением

$$f = s(1 - m)q, \quad (3.55)$$

где s – удельная поверхность пористой среды.

Таким образом, уравнения (3.49)–(3.55) составляют полную замкнутую систему фильтрации газа с учетом сорбции.

Применим для решения задачи (3.50)–(3.53) преобразование Лапласа с параметром σ . Опуская промежуточные выкладки, получим выражение для изображения потока \bar{q} :

$$\bar{q} = - \frac{(\sigma D)^{1/2}}{1 + \sigma t} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{D}} l \right) \left(\bar{a} - \frac{C_1}{\sigma} \right), \quad (3.56)$$

где \bar{a} – изображение функции $a[P(t)]$.

Из (3.56) следует, что поток $q(t)$ можно представить в виде свертки

$$q(t) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F(t - \tau) [a(P(\tau)) - C_1] d\tau, \quad (3.57)$$

где $F(t)$ – ядро, конкретное выражение для которого приводится ниже.

Далее рассматривается одномерная фильтрация. Используя (3.49), (3.50) и (3.57), получаем уравнение фильтрации газа с учетом сорбции (газ принимается идеальным):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{m\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{(1-m)sP_0}{m\rho_0} q(t).$$

Примем, что изотерма сорбции линейна, т. е. $a(P) = aP$. Учитывая (3.57) и проводя обычную линеаризацию, вместо последнего уравнения получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^2}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} - b \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F(t-\tau) [P^2(\tau, y) - P_1^2] d\tau; \\ \chi &= \frac{kP_{cp}}{m\mu}; \quad b = \frac{2(1-m)saP_0}{m\rho_0}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где P_1 – начальное давление; P_{cp} – среднее давление.

Проанализируем на основе уравнения (3.58) особенности фильтрации газа в сорбируемых средах. Вначале упростим уравнение (3.58). Известно, что коэффициент диффузии молекул газа в твердом теле имеет величину порядка $10^{-9} \div 10^{-8}$ с. Поэтому характерное время диффузионного процесса может значительно превышать гидродинамическое время. Так, например, для блоков размером 10^{-2} см это время составляет порядка нескольких суток, что значительно превышает обычные времена традиционных лабораторных исследований на кернах. Для блоков размером $10^{-1} \div 10^0$ см времена диффузии соизмеримы с периодом эксплуатации залежи. Исходя из приведенных оценок, в уравнении (3.58) можно пренебречь членом в левой части, в результате чего получается

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} = \beta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F(t-\tau) [P^2(\tau, y) - P_1^2] d\tau, \quad \beta = b\chi^{-1}, \quad (3.59)$$

где $F(t)$ – оригинал функции $(\sigma^{-1}D)^{1/2}(1 + \sigma T)^{-1} \text{thl} \sqrt{\sigma D^{-1}}$.

Очевидно, что решения уравнения (3.59) описывают квазистационарные фильтрационные течения, когда медленные изменения характеристик потока определяются процессами диффузии.

Рассмотрим одномерную фильтрацию газа через образец длиной L при заданном перепаде давления. Для этого необходимо решить уравнение (3.59) при условиях

$$P^2(0, y) = P_1^2; \quad P^2(t, L) = P_1^2(t); \quad P^2(t, 0) = P_2^2(t); \quad P_1(0) = P_1.$$

Применим для решения задачи (3.58), (3.59) преобразование Лапласа, обозначив $u = P^2$:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \beta \bar{F} \sigma \cdot u = \gamma^2 u; \quad u(L) = P_1^2; \quad u(0) = \bar{P}_2^2.$$

Решая сформулированную задачу для объемного расхода газа, получаем

$$\bar{Q} \approx \frac{k}{2\mu P_0} \frac{P_1^2 - P_2^2}{L} \left(1 + \beta \frac{L^2 \sqrt{D\sigma}}{1 + \sigma T} \text{thl} \sqrt{\frac{\sigma}{D}} \right). \quad (3.60)$$

Переходя к оригиналам, для больших значений t будем иметь

$$Q(t) \approx \frac{k}{2\mu P_0 L} \left[\Delta P^2(t) + \frac{2\beta L^2 \cdot D}{3l} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-\tau) \Delta P^2(\tau) d\tau \right], \quad (3.61)$$

где $\Delta P^2 = P_1^2(t) - P_2^2(t)$; $R(t) \approx \frac{\exp\left(-\frac{t}{T}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \sqrt{D} \cdot t}{l}\right)}{\frac{\pi^2 \sqrt{D}}{4l} - \frac{1}{T}}$.

Если $T \ll \frac{l^2}{D} = T_1$, т. е. диффузия является лимитирующей стадией процесса, то (3.61) упрощается:

$$Q(t) = \frac{k}{2\mu P_2 L} \left(\Delta P^2 + \frac{2\beta L^2 \cdot D}{3l} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right) \Delta P^2(\tau) d\tau \right). \quad (3.62)$$

Сравним соотношения (3.61) и (3.62) при постоянном значении разности квадратов давления ΔP^2 . В соотношении (3.62) дебит $Q(t)$ монотонно уменьшается от $Q(0) = \frac{k}{2\mu P_0 L} \left(1 + \frac{2\beta L^2 D}{3l} \right) \Delta P^2$ до $Q(\infty) = \frac{k}{2\mu P_0 L} \Delta P^2$.

С учетом кинетики сорбции, т. е. при $T \neq 0$, при постоянном ΔP^2 дебит $Q(t)$ меняется от $Q(0)$ до $Q(\infty)$ немонотонно, проходя через максимум при

$$t_1 = \left(\frac{\pi^2 \sqrt{D}}{4l} - \frac{1}{T} \right)^{-1} \ln \frac{\pi^2 \sqrt{DT}}{4l}.$$

При $D = 0$ из (3.62) получаем линейную связь между ΔP^2 и Q . Отметим, что эта связь остается линейной, несмотря на зависимость от времени, поскольку полученное решение справедливо при временах, значительно превышающих гидродинамическое время установления режима течения, равное $\frac{L^2}{\chi}$.

Рассмотрим влияние диффузии на зависимость $Q = Q(\Delta P^2)$. Не трудно показать, что сорбция газа породой оказывает существенное влияние на фильтрационные характеристики. С этой целью проведем следующую

щий иллюстративный расчет. Перепишем (3.62) в безразмерных переменных, приведя его к виду

$$y(t) = x(t) + a \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right) x(\tau) d\tau, \quad (3.63)$$

$$y(t) = \frac{2\mu L \cdot P_2}{k} Q(t), \quad x(t) = \frac{\Delta P^2}{P_2^2}; \quad a = \frac{2\beta L^2 D}{3l}.$$

Положим $a=1$, что является реальным значением. Пусть $x(t)$ изменяется ступенчато через интервал времени $T_2 = 0,1T_1$. Поскольку течение квазистационарное, примем, что период времени T_2 также значительно превышает гидродинамическое время установления режима. При этом в течение времени наблюдения на одном режиме расход $Q(t)$ меняется не более чем на 7–8%, что находится в пределах погрешности обычных экспериментов на керне. Таким образом, формально традиционная методика экспериментальных исследований выполняется. Тем не менее вид зависимости $Q - \Delta P^2$ определяется в данном случае последовательностью изменения перепада давления. На рис. 3.9 представлены расчетные зависимости, полученные при увеличении (кривая 1) и уменьшении (кривая 2) перепада давления. В первом случае полученная зависимость характерна для двучленного закона фильтрации.

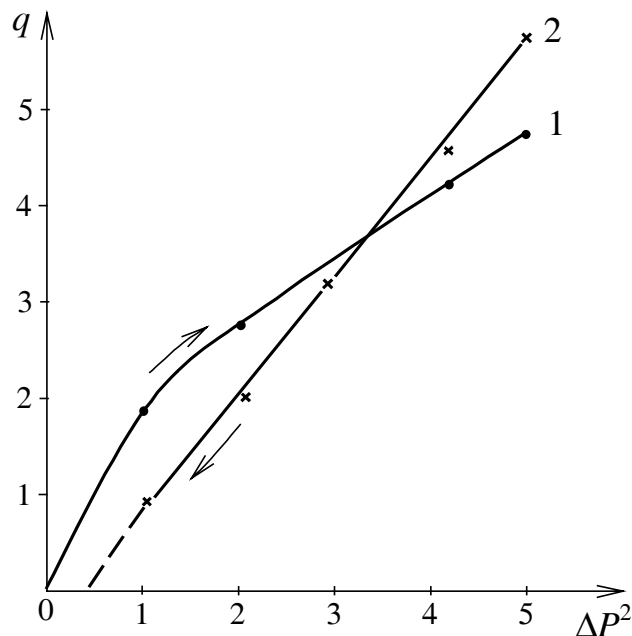


Рис. 3.9. Расчетные зависимости q от ΔP^2 :

- 1 – при увеличении перепада давления,
- 2 – при уменьшении перепада давления

На рис. 3.10 эта зависимость перестроена в координатах $\frac{x}{y} - y$, как это обычно делается для проверки справедливости двучленного закона. Вторая зависимость на рис. 3.9 соответствует закону фильтрации с начальным градиентом давления. При немонотонном изменении депрессии зависимость может иметь различный вид (например, S-образная кривая). Кроме того, если по полученным данным определить коэффициент продуктивности (проницаемости) керна, это значение будет кратно отличаться от истинного.

Более сложная ситуация возникает, когда фильтрация газа происходит в неоднородной среде. Пусть, например, в составе пористой среды имеются низкопроницаемые включения, в частности глинистые. Известно, что движение газа через глину начинается при создании определенного критического начального градиента давления. В этом случае газ, сорбированный породой в низкопроницаемых зонах, при снижении давления выделяется не сразу, а после достижения определенного перепада давления между низко- и высокопроницаемой частями и, наоборот, – при повышении давления. При этом фильтрация газа происходит по высокопроницаемой части. Таким образом, рассматриваются две равномерно перемещенные среды с различными параметрами. В соответствии с этим в первом уравнении системы (3.49) поток f представляется в виде двух слагаемых: $f = f_1 + f_2$, где f_1 – поток десорбируемого газа из высокопроницаемой среды, f_2 – то же из низкопроницаемой.

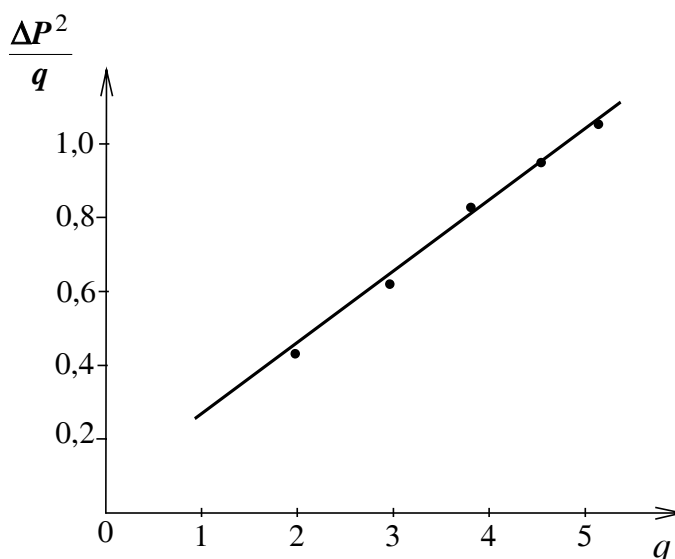


Рис. 3.10. Расчетные зависимости q от ΔP^2

Величина потока f_1 подсчитывается по формулам (3.55) и (3.57). При определении потока f_2 следует учесть наличие критического перепа-

да давления ΔP_0 между низко- и высокопроницаемыми частями пористой среды. Это можно сделать, представив поток f_2 в виде (см. (3.57)):

а) при снижении давления

$$f_2 = s(1-m)q_2 = \begin{cases} -(1-m)s \frac{\partial}{\partial t} \int F_2(t-\tau) [a_2 P(\tau) + \Delta P_0] - C_{1,2} d\tau \\ \text{при } P_1 - P > \Delta P_0, \\ 0 \quad \text{при } 0 < P_1 - P < \Delta P_0, \end{cases} \quad (3.64)$$

б) при повышении давления

$$f_2 = \begin{cases} -(1-m)s \frac{\partial}{\partial t} \int F_2(t-\tau) [a_2 (P(\tau) - \Delta P_0) - C_{1,2}] d\tau \\ \text{при } P - P_1 > \Delta P_0, \\ 0 \quad \text{при } 0 < P - P_1 < \Delta P_0. \end{cases} \quad (3.65)$$

Функция F_2 совпадает с определенной выше функцией F с точностью до значений параметров. Повторяя вывод уравнения (3.62), легко получим выражение для расхода $Q(t)$ в данном случае:

$$Q(t) = \frac{k}{2\mu P_0 L} \left[\Delta P^2(t) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\beta_1 L^2 D_1}{3l_1} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right) \Delta P^2(\tau) d\tau + \frac{2\beta_2 L^2 D_2}{3l_2} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right) \left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right) (\Delta P_2(\tau) - \gamma) d\tau \right) \right], \quad (3.66)$$

где индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к высоко- и низкопроницаемым частям пористой среды.

Последнее слагаемое в правой части (3.66) обращается в ноль при $|\Delta P^2| < \gamma$. Как следует из (3.66), при достижении определенного перепада давления на зависимости $Q(t) = Q[\Delta P^2(t)]$ будет наблюдаться излом, что подтверждается результатами экспериментальных исследований.

Рассматриваемая модель допускает обобщение на случай полидисперсной пористой среды, состоящей к тому же из разнородного материала. В этом случае каждый компонент пористой среды обладает своими физико-химическими и геометрическими параметрами: $-l_i$, D_i , T_i , $T_{1,i}$. С учетом этого соотношение (3.61) примет вид

$$Q(t) = \frac{k}{2\mu P_0 L} \left[\Delta P^2(t) + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(t-\tau) \Delta P^2(\tau) d\tau \right], \quad (3.67)$$

где

$$H_i(t) = \frac{2L\beta \cdot D_i}{3l_i} \frac{\exp\left(-\frac{t}{T_i}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \sqrt{D_i}}{4l_i}\right)}{\frac{\pi^2 \cdot \sqrt{D_i}}{4l_i} - \frac{1}{T_i}}.$$

Пусть осуществляется режим с $\Delta P^2 = \text{const}$. Тогда вместо (3.67) получается

$$Q(t) = \frac{k}{2\beta P_0 L} \Delta P^2 \left[1 + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \right], \quad (3.68)$$

где $\varphi_i(t) = \left(\frac{\pi \sqrt{D_i}}{4l_i} - \frac{1}{T_i} \right)^{-1} \left[\frac{1}{T_i} \exp\left(-\frac{t}{T_i}\right) \right] - \frac{4l_i}{\pi^2 \sqrt{D_i}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \sqrt{D_i}}{4l_i}\right).$

$\varphi_i(t)$ – функция, имеющая один максимум или один минимум

при $t_i = \left(\frac{\pi^2 \sqrt{D_i}}{4l_i} - \frac{1}{T_i} \right)^{-1} \ln \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{D_i} \cdot T_i}{4l_i}$. Поскольку все t_i различны, как сле-

дует из (3.68), расход $Q(t)$ при большом n будет представляться в виде суммы случайных колебаний и постоянной величины. При этом в случае достаточно большого времени наблюдения, когда $\varphi_i(t) \rightarrow 0$, будет иметь место стабилизация расхода.

Проведенные расчеты показывают, что при фильтрации газа в сорбируемых средах использование обычных методик определения законов фильтрации по исследованиям зависимостей $Q = Q(\Delta p)$ требует учета существенной нестационарности процесса. Необходимо проводить исследования в течение весьма длительного времени. Более того, характерное время переходного процесса в пористой среде, как это отмечалось выше, может быть соизмеримо со временем разработки газовой залежи. В этих условиях само понятие закона фильтрации газа как стационарной зависимости между вектором скорости фильтрации и градиентом давления теряет смысл. Поэтому фильтрационные характеристики необходимо определять одновременно с сорбционными.

3.7. Метод построения оценок решения уравнений фильтрации газированной жидкости

Точные решения нелинейных уравнений стационарной фильтрации газированной жидкости найдены в [44–46]. В [47] при некоторых допуще-

ниях система уравнений газированной жидкости сведена к уравнению теплопроводности. Приближенный метод расчета неустановившегося течения газированной жидкости дан в [48], где истинная картина течения заменена расчетной схемой последовательной смены стационарных состояний. Эта же задача решена методом осреднения в [49].

В данном разделе при определенных условиях, наложенных на искомые функции, строятся оценки решений уравнений нестационарной фильтрации газированной жидкости в одномерном пласте. Полученные оценки могут быть использованы как приближенные решения с известной погрешностью или для проверки точности различных приближенных методов.

Отметим, что применению теорем сравнения к оценке решений уравнений нелинейной фильтрации посвящены работы [50–52]. Методы построения оценок решения различных задач теплопроводности даны в [53, 54].

1. Получим сначала вспомогательные соотношения. Пусть в области $D\{0 < x < l; t > 0\}$ с границей Γ задано уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.69)$$

Пусть функция $u(x, t)$ является решением первой краевой задачи для уравнения (3.69) в области D . Предположим, что выполняются условия

$$\frac{\partial k}{\partial x} \leq 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0. \quad (3.70)$$

По теореме сравнения с учетом (3.70) получаем, что функция $u(x, t)$ ограничена снизу функцией $u_1(x, t)$, которая совпадает с $u(x, t)$ на границе Γ области D и удовлетворяет уравнению

$$k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k_1(x; t) \leq k_1.$$

Для построения верхней оценки функции $u(x, t)$ введем

$$y = \int_0^x \frac{\partial x}{k(x, t)}.$$

При этом уравнение (3.69) перейдет в

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^x \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial t} dx,$$

а область D преобразуется в область $D^*\{0 < y < y(t); t > 0\}$ с границей Γ ,

где $y(t) = \int_0^l \frac{dx}{k(x, t)}$.

Рассмотрим функцию $u_2(x, t)$, являющуюся решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = k_1 \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

$$u_2(0, t) = u(0, t), \quad u_2(y, 0) = u(y, 0), \quad u_2(y_2, t) = u(l, t)$$

в области $D_2\{0 < y < y_2; t > 0\}$, где $k_1 y_2 = l$, $k_1 \geq k(x, t)$.

Отсюда, в силу условия $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$, получаем $u_2(y_2, t) \geq u(y_2, t)$.

Отсюда с учетом (3.70) по теореме сравнения получаем, что в области $D_2\{0 < y < y_2; t > 0\}$ имеет место соотношение $u_2(y, t) \geq u(y, t)$.

Подчеркнем, что построение верхней и нижней оценок решения уравнения (3.69) не зависело от свойств функции $k(x, t)$, требовалось лишь знание границ изменения коэффициентов и выполнение условий (3.70).

2. Для одномерного случая уравнения нестационарной фильтрации газированной жидкости граничные и начальные условия имеют вид [46]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[PF(\sigma) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = a_1 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha P \sigma + P), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[k_n(\sigma) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = a_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (3.71)$$

$$P(0, t) = P_c, \quad P(l, t) = P_k > P_c, \quad \sigma(l, t) = \sigma_1, \quad (3.72)$$

$$P(x, 0) = P_k, \quad \sigma(x, 0) = \sigma_1.$$

Здесь $a_1 = m \mu_1 k^{-1}$, $a_2 = m \mu_2 k^{-1}$, m – пористость, k – абсолютная проницаемость, μ_1 , μ_2 – вязкость газа и нефти (принимаются постоянными), $\alpha = c s^{-1} - 1$, $c = \rho_1 P^{-1}$ (газ считается идеальным), s – коэффициент растворимости газа в нефти (принимается постоянным), ρ_2 – плотность газа при давлении P , $F(\sigma) = k_1(\sigma) + s \mu_1 (c \mu_2)^{-1} k_2(\sigma)$; $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ – фазовые проницаемости, соответственно, для газа и нефти, σ – насыщенность порового пространства нефтью, P_c – давление на галерее скважин, P_k – давление на контуре питания, σ_1 – начальное значение нефтенасыщенности.

Учитывая условия (3.72), сделаем физически очевидные предположения о монотонном поведении искомых функций

$$\frac{\partial P}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} \geq 0. \quad (3.73)$$

Обозначим $\sigma(0, \infty) = \sigma_2$. Тогда, как следует из (3.72), (3.73), при $0 < x < l$, $t > 0$ имеем

$$\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1. \quad (3.74)$$

Оценим неизвестную величину σ_2 . Для этого найдем стационарное решение системы (3.71).

Введем функции

$$H_1(x) = \int_{P_c}^P k_2(\sigma) dP, \quad H_2(x) = \int_{P_c}^P PF(\sigma) dP,$$

$$\frac{d^2 H_1}{dx^2} = \frac{d^2 H_2}{dx^2} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{k_2(\sigma)}{PF(\sigma)} = \text{const}.$$

Тогда величину можно определить из соотношения

$$\frac{k_2(\sigma_2)}{F(\sigma_2)} = \frac{P_c k_2(\sigma_1)}{p_k F(\sigma_1)}. \quad (3.75)$$

Перейдем к построению оценок решений системы (3.71). Исключив из системы (3.71) величину $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[PF(\sigma) \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{a_1 \alpha P}{a_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(\sigma) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = a_1 (1 + \alpha \sigma) \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.76)$$

Рассмотрим случай $\alpha > 0$.

По теореме сравнения имеем

$$P'(x, t) \leq P(x, t) \leq P''(x, t), \quad (3.77)$$

где функции $P'(x, t)$, $P''(x, t)$ являются, соответственно, решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[P'F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_k}{a_2} k_2(\sigma) \right] \frac{\partial P'}{\partial x} \right\} = a_1 (1 + \alpha \sigma) \frac{\partial P'}{\partial t}; \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[P''F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_k}{a_2} k_2(\sigma) \right] \frac{\partial P''}{\partial x} \right\} = a_1 (1 + \alpha \sigma) \frac{\partial P''}{\partial t} \quad (3.79)$$

и удовлетворяют условиям (3.72).

Представим уравнения (3.78), (3.79) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{F(\sigma)}{(P')^n} - \frac{a_1 \alpha P_k k_2(\sigma)}{a_2 (P')^{n+1}} \right] \frac{\partial (P')^{n+2}}{\partial x} \right\} = \frac{a_1 (1 + \alpha \sigma)}{(P')^{n+1}} \frac{\partial (P')^{n+2}}{\partial t}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{F(\sigma)}{(P')^n} - \frac{a_1 \alpha P_k k_2(\sigma)}{a_2 (P')^{n+1}} \right] \frac{\partial (P')^{n+2}}{\partial x} \right\} = \frac{a_1 (1 + \alpha \sigma)}{(P')^{n+1}} \frac{\partial (P')^{n+2}}{\partial t}. \quad (3.81)$$

Величина постоянной $n \geq 0$ в (3.80), (3.81) выбирается из условия $n(\alpha + 1) \geq \alpha(1 + n) \frac{P_k}{P_c}$. Далее предположим, что справедливы неравенства

ва

$$k_1(\sigma) + \frac{a_1}{a_2} \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{P_k}{P_c} \right) \right] k_2(\sigma) > 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left\{ k_1(\sigma) + \frac{a_1}{a_2} \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{P_k}{P_c} \right) \right] k_2(\sigma) \right\} \leq 0.$$

Очевидно, что неравенства (3.82) выполняются при не слишком малых σ , так как $a_1 a_2^{-1} \sim 10^{-2}$, $\alpha \sim 1$. Условия (3.82) вместе с (3.73) позволяют применить к уравнениям (3.80), (3.81) результаты п. 1.

Получаем, что функция $P_1(x, t)$, которая является в D нижней оценкой для $P(x, t)$:

$$P'(x, t) \leq P(x, t) \leq P''(x, t),$$

удовлетворяет уравнению

$$A_1 \frac{\partial^2 (P_1^{n+2})}{\partial x^2} = \frac{\partial (P_1^{n+2})}{\partial t}, \quad (3.83)$$

$$A_1 = P_k^{n+1} P_c^{-n} \max_{\sigma_2 < \sigma \leq \sigma_1} \left[\frac{F(\sigma) - a_1 a_2^{-1} \alpha P_c^h P_k^{-h} k_2(\sigma)}{a_1 (1 + \alpha \sigma)} \right],$$

и условиям (3.72).

Функция $P_2(y, t)$, являющаяся верхней оценкой для функции $P(y, t)$ в области $D_2 \{0 < y < l_2; t > 0\}$

$$P_2(y, t) \geq P''(y, t) \geq P(y, t),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 (P_2^{n+2})}{\partial y^2} = A_2 \frac{\partial (P_2^{n+2})}{\partial t}, \quad y = P_c^n \int_0^l \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right]^{-1} dx,$$

$$A_2 = a_1 P_c^{-2n-1} \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[(1 + \alpha \sigma) F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right],$$

$$l_2 P_c^{-n} \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right] = l$$

и условиям (3.71).

Решения соответствующих задач имеют вид

$$P_1^{n+2}(x, t) = P_c^{n+2} + (P_k^{n+2} - P_c^{n+2}) \left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 A_1 t}{l^2}\right) \sin \frac{\pi m x}{l} \right], \quad (3.84)$$

$$P_2^{n+2}(y, t) = P_c^{n+2} + (P_k^{n+2} - P_c^{n+2}) \left[\frac{y}{l_2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 t}{A_2 l_2^2}\right) \sin \frac{\pi m y}{l_2} \right]. \quad (3.85)$$

Для определения расхода жидкости или газа при $x=0$ необходимо оценить величину $\frac{\partial P(0, t)}{\partial x}$.

Учитывая условия (3.70), (3.82), (3.83), из (3.84), (3.85) получаем

$$\frac{\partial P_1(0, t)}{\partial x} \leq \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} \leq P_c^n \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right] \frac{\partial P_2(0, t)}{\partial y}.$$

Используя (3.84), (3.85), окончательно находим

$$\begin{aligned} & \left(P_k^{n+2} - P_c^{n+2} \right) l^{-1} P_c^{-n-1} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{\pi^2 m^2 A_1 t}{l^2} \right) \right] \leq \\ & \leq \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} \leq B \left(P_k^{n+2} - P_c^{n+2} \right) l^{-1} P_c^{-n-1} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{\pi^2 m^2 t}{A_2 l_2^2} \right) \right], \quad (3.86) \\ & B \min_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right] = \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c^n}{a_2 P_k^n} k_2(\sigma) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha < 0$. Аналогично предыдущему имеем $P'(x, t) \leq P(x, t) \leq P''(x, t)$, где функции $P'(x, t)$ и $P''(x, t)$ являются, соответственно, решениями уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_c}{a_2 P'} k_2(\sigma) \right) \frac{\partial (P')^2}{\partial x} \right] - \frac{a_1 (1 + \alpha \sigma)}{P'} \frac{\partial (P')^2}{\partial t}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_k}{P''} k_2(\sigma) \right) \frac{\partial (P'')^2}{\partial x} \right] = \frac{a_1 (1 + \alpha \sigma)}{P''} \frac{\partial (P'')^2}{\partial t} \end{aligned}$$

и удовлетворяют условиям (3.72). При этом предполагается, что $1 + \alpha \sigma > 0$. Условия (3.70) в данном случае выполняются, что легко проверяется непосредственно.

Повторяя те же рассуждения, что и в случае $\sigma > 0$, приходим к следующим результатам.

Нижняя и верхняя функции для $P^2(x, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_1^2(x, t) &= P_c^2 + \left(P_k^2 - P_c^2 \right) \left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp \left(- \frac{\pi^2 m^2 B_1 t}{l^2} \right) \sin \frac{\pi m x}{l} \right], \\ P_2^2(y, t) &= P_c^2 + \left(P_k^2 + P_c^2 \right) \left[\frac{y}{l_2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp \left(- \frac{\pi^2 m^2 t}{B_2 l_2^2} \right) \sin \frac{\pi m y}{l_2} \right], \\ y &= \int_0^x \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_k}{a_2 P_c} k_2(\sigma) \right]^{-1} dx, \quad l_2 = \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[F(\sigma) - \frac{a_1 \alpha P_k}{a_2 P_c} k_2(\sigma) \right] l, \\ B_1 &= P_k \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} a_1^{-1} (1 + \alpha \sigma)^{-1} \left[F(\sigma) - a_1 a_2^{-1} \alpha k_2(\sigma) \right], \\ B_2 &= a_1 P_c^{-1} \max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} \left[(1 + \alpha \sigma) \left(F(\sigma) - a_1 a_2^{-1} \alpha P_k P_c^{-1} k_2(\alpha \sigma) \right) \right]. \end{aligned}$$

Для величины $\frac{\partial P(0,t)}{\partial x}$ получаем оценки

$$\frac{P_k^2 - P_c^2}{2lP_c} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 B_1 t}{l^2}\right) \right] \leq \frac{\partial P(0,t)}{\partial x} \leq \frac{P_k^2 - P_c^2}{2lP_c},$$

$$\frac{\max_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} [F(\sigma) - a_1 a_2^{-1} \alpha P_k P_c^{-1} k_2(\sigma)]}{\min_{\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1} [F(\sigma) - a_1 a_2^{-1} \alpha P_k P_c^{-1} k_2(\sigma)]} \cdot \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 t}{B_2 l^2}\right) \right]. \quad (3.87)$$

В качестве примера рассмотрим случай $\mu_1 = 0.05\mu_2$, $s = c$, $\sigma_1 = 0,96$.

Для фазовых проницаемостей примем

$$k_1 = (1 - \sigma)^3 (1 + 3\sigma), \quad k_2(\sigma) = \sigma^4.$$

При $P_k = 1,1 P_c$ величина насыщенности σ изменяется в пределах $0,94 < \sigma < 0,96$. Максимальная погрешность оценок (3.86) составляет 3%. При $P_k = 1,2 P_c$, соответственно, имеем $0,94 < \sigma < 0,96$, погрешность равна 6%.

Следует отметить, что если известны значения функции $\sigma(x,t)$ при $x = 0$, то легко получить оценки более точные, чем (3.86), (3.87).

3.8. Периодические и стохастические автоколебания в ротационных вискозиметрах

Опыт реологии тиксотропных сред показывает, что в ряде случаев экспериментальное определение их реологических параметров затрудняется невозможностью поддержания стационарных режимов течения. Так, при постоянном числе оборотов двигателя вискозиметра величина измеряемого касательного напряжения может меняться во времени достаточно сложным образом. Качественное описание этого эффекта приведено в [55]. Аналогичные осложнения возможны и в случае капиллярного вискозиметра, что, в частности, подтверждается опытами по исследованию колебательных режимов истечения полимерных растворов из капилляра [56]. Это явление в научной литературе получило название *эластичной турбулентности*. Для его объяснения привлекалась гипотеза проскальзывания жидкости у стенок вискозиметра или капилляра [57–59]. Высказывалось также предположение о том, что причиной возникновения эластичной турбулентности являются происходящие в процессе течения структурные перестройки [60].

Рассмотрим математическую модель, описывающую движение тиксотропной жидкости в зазоре между цилиндрами ротационного вискозиметра. Считая толщину зазора малой по сравнению с радиусами цилиндров, примем плоскую схему течения, согласно которой исследуемая жид-

кость находится между двумя параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии h .

Нижняя бесконечно протяженная пластина неподвижна, а верхняя – подвижная – обладает достаточно большой площадью, чтобы можно было бы пренебречь краевыми эффектами. Верхняя пластина приводится в поступательное движение с помощью пружины, один конец которой прикреплен к пластине, а другой движется с постоянной скоростью u_0 .

Сдвиговое течение жидкости между пластинами описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad 0 < y < h, \quad (3.88)$$

где v , ρ , μ – соответственно скорость, плотность и вязкость жидкости, y – расстояние от нижней пластины.

Уравнение движения верхней пластины имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - Q \mu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h} + fx = 0, \quad (3.89)$$

где x – абсолютное удлинение пружины, f – коэффициент ее жесткости, m , Q – масса и площадь верхней пластины.

Система уравнений (3.88), (3.89) замыкается с помощью граничных условий вида

$$v(0, t) = 0, \quad v(h, t) = u_0 - \frac{dx}{dt}. \quad (3.90)$$

Вязкость тиксотропной жидкости зависит от степени ее структурированности. В качестве количественной характеристики степени структурированности жидкости будем использовать концентрацию разрушенных в процессе течения связей s . Зависимость вязкости жидкости от концентрации s примем в виде

$$\mu(s) = \frac{\exp(-\sigma s^\beta) - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)} \mu_0 + \frac{1 - \exp(-\sigma s^\beta)}{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)} \mu_*, \quad (3.91)$$

где σ , β – некоторые положительные постоянные.

В соответствии с этой параметризацией при $s = 0$ вязкость жидкости максимальна и равна μ_0 . По мере разрушения связей (с увеличением s) вязкость уменьшается по нелинейно-экспоненциальному закону, достигая своего минимального значения μ_* при $s = s_*$.

Для описания процессов разрушения–восстановления связей между структурными элементами среды при сдвиговом течении введем следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha \left\{ s - s_* \left[1 - \exp(-\gamma \mu(s) \dot{\epsilon}^2) \right] \right\}, \quad (3.92)$$

где α и γ – положительные постоянные, $\dot{\epsilon} = \partial v / \partial y$ – скорость сдвига.

В соответствии с (3.92) равновесные значения концентрации разрушенных связей определяются уравнением

$$s = s_* \left[1 - \exp(-\gamma \mu(s) \dot{\epsilon}^2) \right].$$

Легко видеть, что с увеличением $\dot{\epsilon}$ ненулевой корень этого уравнения увеличивается, приближаясь к своему максимальному значению s_* .

Разложение правой части уравнения (3.92) в ряд

$$s_* \left[1 - \exp(-\gamma \mu(s) \dot{\epsilon}^2) \right] \approx s_* \gamma \mu(s) \dot{\epsilon}^2$$

показывает, что при малых значениях скорости сдвига скорость разрушения связей прямо пропорциональна интенсивности вязкой диссипации энергии в потоке.

Система уравнений (3.88)–(3.92) после введения безразмерных переменных

$$V = \frac{v}{v_0}, \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad X = \frac{\alpha x}{v_0}, \quad S = \frac{s}{\beta \sqrt{\sigma}}, \quad v(s) = \mu(s) \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}$$

приобретает вид

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right), \quad (3.93)$$

$$\varepsilon = \rho \alpha h^2 \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*};$$

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \lambda v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + FX = 0 \quad (3.94)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad V(1, \tau) = 1 - \frac{dX}{d\tau}, \quad (3.95)$$

$$v(S) = p + \exp(-S^\beta), \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -S + A \left\{ 1 - \exp \left(-GSv(S) \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right\}, \quad (3.97)$$

$$\lambda = \frac{Q}{m \alpha h} \left[\frac{\mu_0 - \mu_*}{1 - \exp(-A^\beta)} \right], \quad F = \frac{f}{m \alpha^2},$$

$$p = \frac{\mu_* - \mu_0 \exp(-A^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}, \quad A = S_* \beta \sqrt{\sigma},$$

$$G = \frac{\gamma}{\beta \sqrt{\sigma}} \cdot \frac{v_0^2}{h^2} \cdot \frac{\mu_0 - \mu_*}{1 - \exp(-A^\beta)}.$$

Приведенная постановка задачи может быть упрощена с учетом малости параметра ε (т. е. фактически малости массы жидкости в зазоре). Пренебрегая в (3.93) членом $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau}$, получим

$$v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} = \text{const.}$$

Решение этого уравнения неединственно. Оно может быть сконструировано как совокупность пространственных структур – «доменов», представляющих собой области с различными значениями концентрации S_i и скорости сдвига $\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_i$ (концентрация и скорость сдвига внутри каждого «домена» не зависят от η) [3, 61]. При этом граничное условие (3.95) выполняется, если

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_i H_i = 1 - \frac{dX}{d\tau}, \quad \sum_{i=1}^N H_i = 1,$$

где N – число «доменов», H_i – толщина i -го домена.

Тогда система уравнений в частных производных (3.93)–(3.97) сводится к нелинейной динамической системе вида

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - \lambda B + FX = 0, \quad B = \frac{1 - \frac{dX}{d\tau}}{\sum_{i=1}^N \frac{H_i}{v(S_i)}},$$

$$\frac{dS_i}{d\tau} = -S_i + A \left[1 - \exp\left(\frac{-GS_i B^2}{v(S_i)}\right) \right],$$

$$v(S_i) = p + \exp(-S_i^\beta).$$

Исследование этой системы было проведено нами численно при следующих значениях параметров: $N = 2$, $\lambda = 25$, $F = 17$, $A = 4$, $p = 0,1$, $H_1 = H_2 = 0,5$, $\beta = 10$. Рассматривалось влияние величины безразмерной скорости сдвига $\dot{E} = \sqrt{G}$ на характер движения системы.

Результаты расчетов суммированы на рис. 3.11, где показана зависимость безразмерного касательного напряжения T от \dot{E} .

Эта зависимость характеризует положения равновесия рассматриваемой динамической системы, к которым, в случае устойчивости, решение стремится с течением времени. На рисунке эти устойчивые ветви отмечены жирными линиями. При малых значениях скорости сдвига ($\dot{E} < 0,95$) структурные связи в жидкости не разрушаются. Имеет место простое сдвиговое течение жидкости с большой вязкостью, в которой не происходит

разрушения поля течения на доменные структуры. Если в начальный момент времени по каким-либо причинам часть структурных связей нарушена, т. е. $S_i(0) \neq 0$, то эти разрушенные связи со временем полностью восстанавливаются.

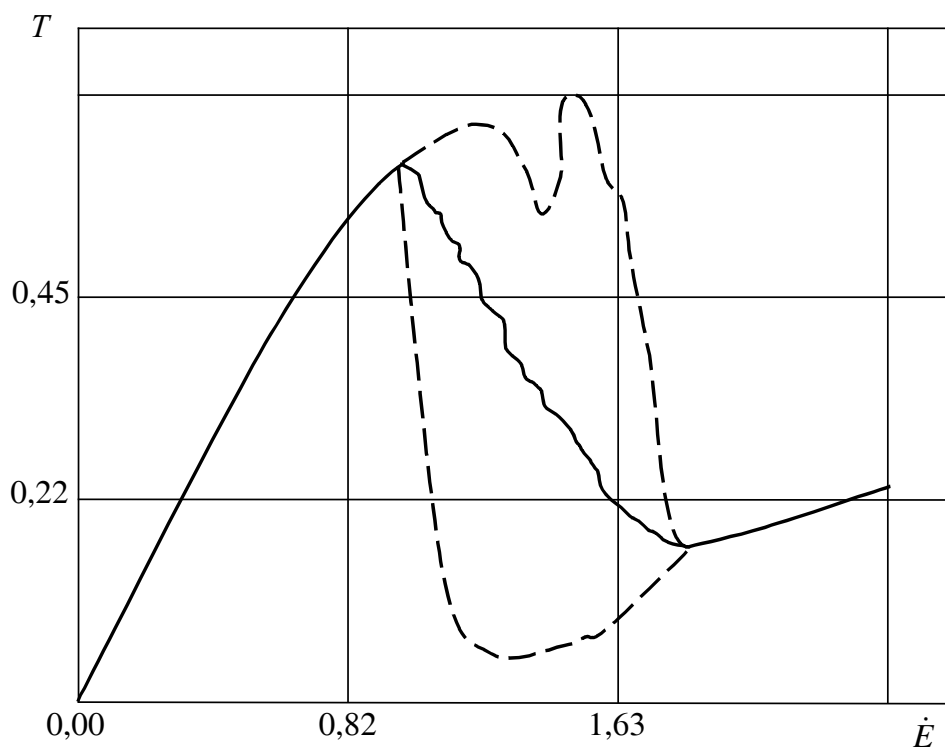


Рис. 3.11. Зависимость T от \dot{E}

С увеличением скорости сдвига ($\dot{E} > 0,95$) происходит разделение поля течения на «доменные» структуры с разрушением части связей вблизи подвижной стенки. При этом нулевое состояние $S_i = 0$ теряет устойчивость с рождением нового положения равновесия $S_i \neq 0$, которое, в свою очередь, при дальнейшем увеличении \dot{E} теряет устойчивость с образованием предельного цикла. Размах колебаний величины касательного напряжения (T_{\max} и T_{\min}) показан на рис. 3.11 пунктирными линиями. Средние по времени значения T при этих колебаниях изображены тонкой сплошной линией.

При дальнейшем увеличении скорости сдвига \dot{E} имеет место процесс последовательного удвоения периода автоколебаний, приводящий к хаосу при $\dot{E} = \dot{E}_{\infty} = 1,517$. Наблюдающиеся при этом стохастические колебания величины касательного напряжения показаны на рис. 3.12.

Анализ соответствующего этому аттрактору отображения Лоренца (связи между последовательными экстремумами напряжения, рис. 3.13) показывает, что в исследуемой системе переход к хаосу реализуется по

классическому сценарию Фейгенбаума. Об этом свидетельствует также то, что значения параметра \dot{E}_n^2 , при которых происходит удвоение периода, подчиняются закону Фейгенбаума:

$$G_n - G_\infty = \frac{C}{\delta^n},$$

где в данном случае $C = 6,54$.

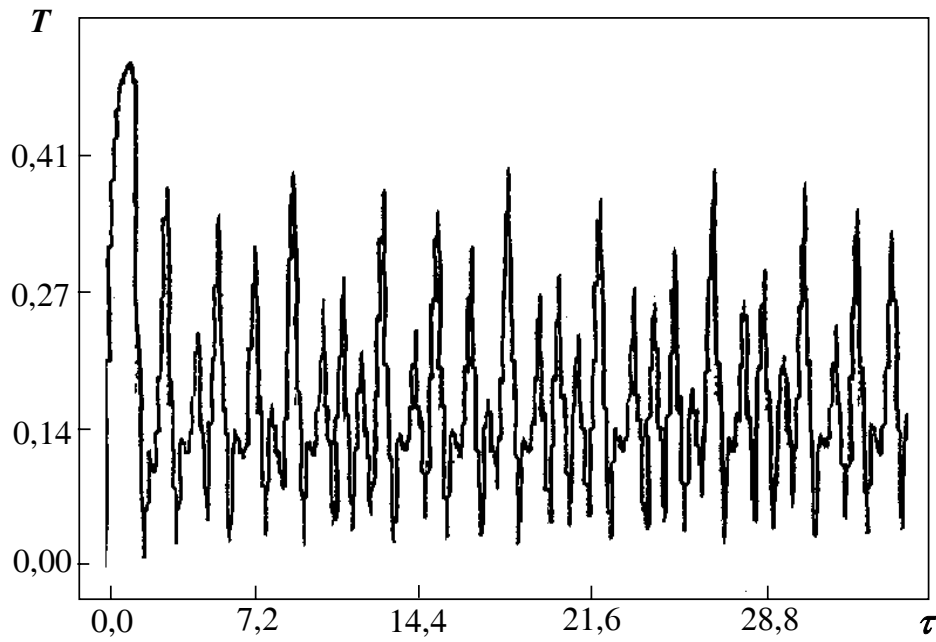


Рис. 3.12. Хаотические колебания касательного напряжения

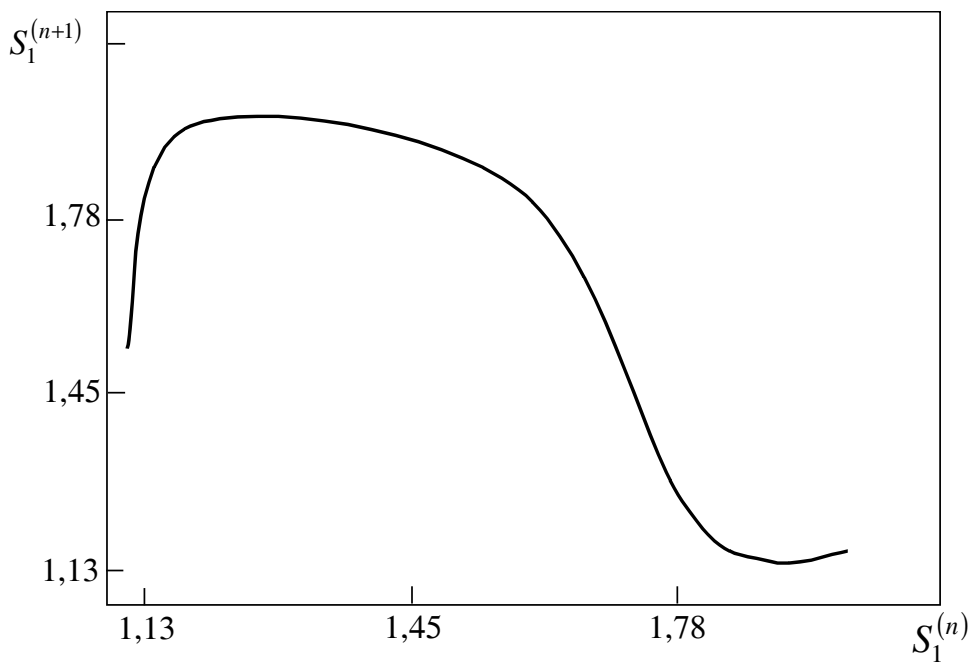


Рис. 3.13. Одномерное отображение

Для существования стохастического поведения необходимо выполнение условия размешивания, что обеспечивается экспоненциальным разбеганием траекторий в каждой точке аттрактора (см. главу 1). Характер этого разбегания можно оценить, исследуя энтропию Колмогорова, которая определяется выражением [40, 62]

$$K = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{R(\tau)}{R(0)} \right),$$

где $R(0)$ и $R(\tau)$ – расстояния между двумя точками в фазовом пространстве, соответственно, в начальный момент времени и через промежуток времени, равный τ .

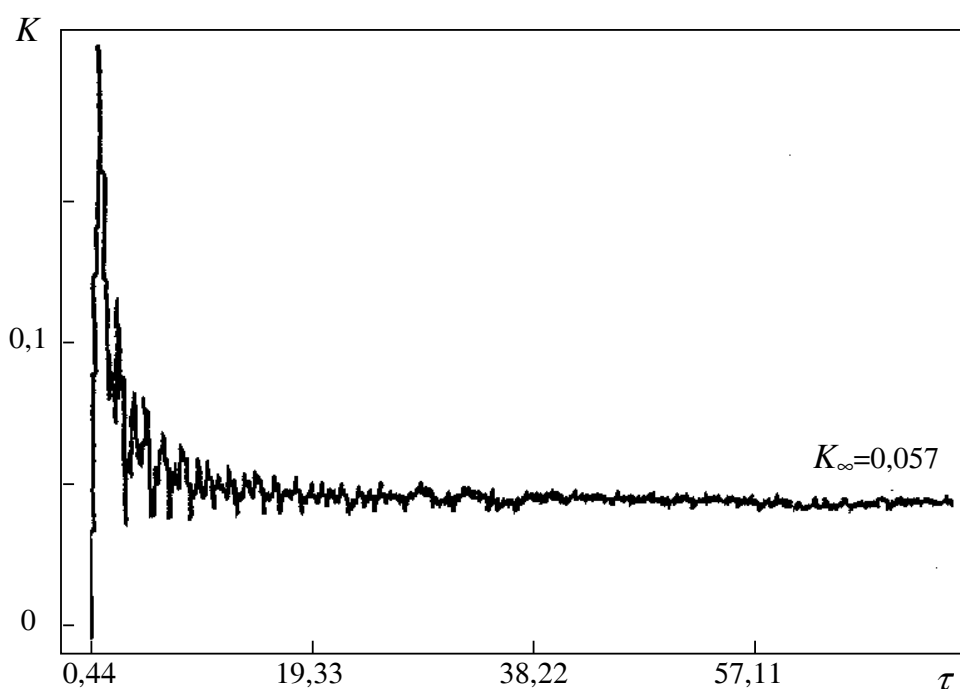


Рис. 3.14. Энтропия Колмогорова

Зависимость энтропии Колмогорова от τ показана на рис. 3.14. Для стохастического процесса при $\tau \rightarrow \infty$ величина энтропии должна быть больше нуля. Из рис. 3.14 видно, что со временем величина энтропии Колмогорова выходит на положительный стационарный уровень $K_{\infty} = 0,057$.

При дальнейшем увеличении скорости сдвига ($\dot{E} > 1,67$) имеет место обратный каскад бифуркаций Фейгенбаума, который при значении $E = 1,87$ приводит к исчезновению автоколебаний с образованием устойчивого равновесия. Это равновесие характеризуется высокой степенью разрушения структурных связей ближнего к подвижной стенке «домена». С увеличением \dot{E} число этих разрушенных связей возрастает, асимптотически стремясь к своему максимальному значению.

Для подтверждения полученных результатов рассмотрим результаты вискозиметрических экспериментов, проведенных С. А. Коневым с расплавом парафина (нонодекан). Оказалось, что при температурах, близких к температуре кристаллизации парафина, значения касательного напряжения τ испытывают незатухающие колебания, график которых представлен на рис. 3.15. Для этой кривой нами были вычислены корреляционная размерность ν (см. главу 1) и энтропия Колмогорова. Результаты расчетов корреляционной размерности приведены на рис. 3.16, из которого видно, что наблюдаемые хаотические колебания являются детерминированными, причем число динамических переменных, необходимых для описания рассматриваемого процесса, равно 4. Отметим, что вышеприведенные численные результаты были получены нами при анализе динамической системы, которая также имеет четвертый порядок.

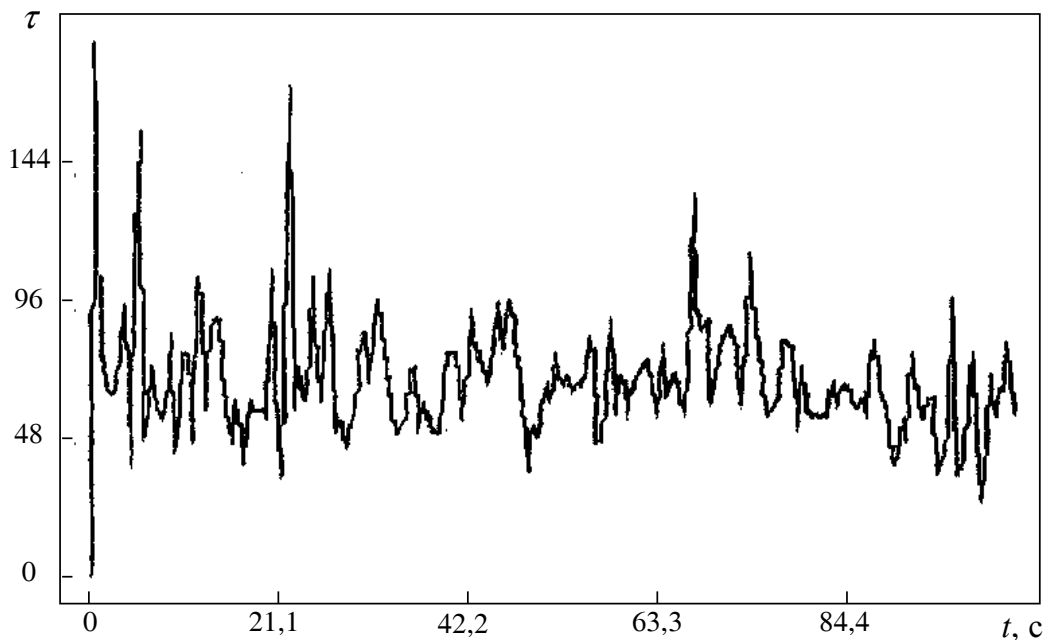


Рис. 3.15. Замеры касательного напряжения

Оценка снизу для энтропии Колмогорова вычислялась по формуле [62]

$$K = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{C_n(r)}{C_n(0)} \right)$$

и оказалась равной $K = 0,1$, что по порядку совпадает со значением, соответствующим модельной системе. Здесь $C_n(r)$ – корреляционный интеграл (см. раздел 1.4).

Полученные нами результаты позволяют по-новому взглянуть на эффект эластичной турбулентности и могут быть полезными при разработке нетрадиционных методов обработки данных реометрических экспериментов.

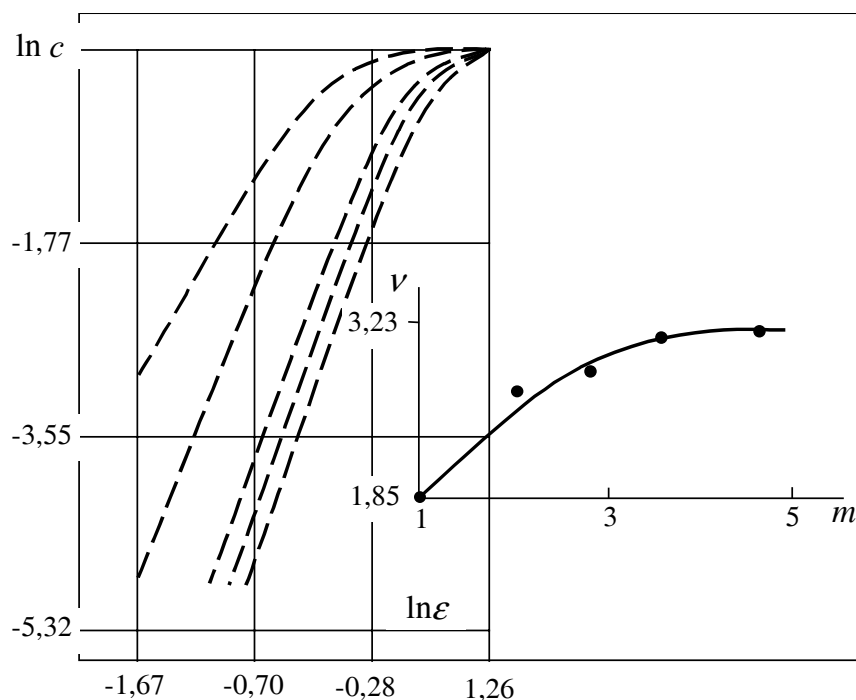


Рис. 3.16. Вычисление корреляционной зависимости

3.9. Исследование устойчивости работы штангового насоса

При откачке маловязких жидкостей штанговым глубинным насосом возникают колебания колонны штанг, приводящие к резкому увеличению инерционных нагрузок на штангу и возникновению пульсаций давления в скважине.

Для исследования этих эффектов были проведены промышленные испытания [63], в ходе которых осуществлялась запись давления $P(t)$ при работе штангового насоса в скважине № 116 НГДУ «Аксаковнефть» (рис. 3.17).

Запись производилась с помощью дистанционных тензометрических датчиков давления, электронного потенциометра Н-135 и дублирующего его шлейфового осциллографа. Жидкость перекачивалась по замкнутому циклу: насос – НКТ – затрубное пространство – насос. Рабочими жидкостями были пластовая вода (вязкость $\mu \approx 1,0$ мПа·с), дегазированная нефть с вязкостью $\mu \approx 0,05$ Па·с и эмульсия с водосодержанием 64,5%, эффективная вязкость которой в рабочей зоне градиента сдвига составляла $\mu \approx 0,54$ Па·с.

Из рис. 3.17 видно, что откачка воды сопровождается хаотическим изменением давления жидкости в НКТ. С увеличением вязкости жидкости пульсации давления уменьшаются. Откачка эмульсии происходит без пульсаций давления, что свидетельствует о полном затухании вибрации штанг под действием вязкого трения.

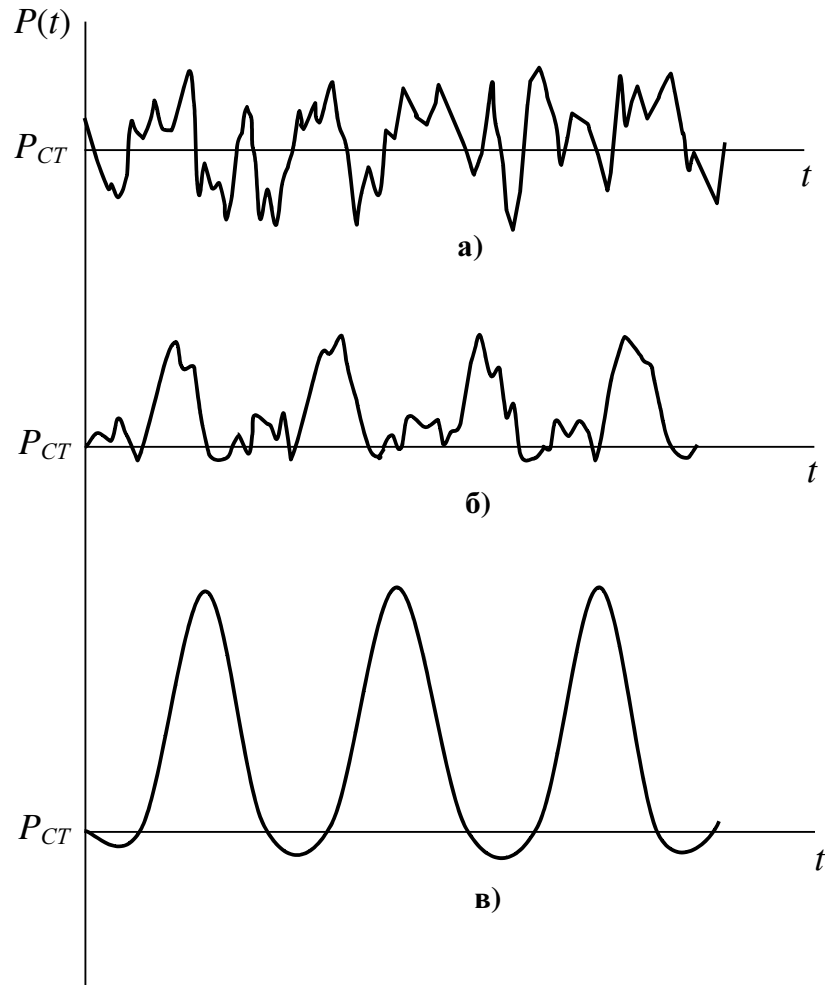


Рис. 3.17. Пульсации давления в скважине:
 а) – $\mu \approx 1,0$ мПа·с; б) – $\mu \approx 50$ мПа·с; в) – $\mu \approx 540$ мПа·с

Степень нерегулярности (хаотичности) изменения давления P в трубах можно оценить по размерности Хаусдорфа D для графика зависимости $P = P(t)$ (см. раздел 3.5 и главу 1). Для кривых а) и б) на рис. 3.17 получены значения $D = 1,31$ и $D = 1,15$ соответственно. Аппроксимируя зависимость D от логарифма μ прямой линией, получим (рис. 3.18), что при $D = 1$ величина $\mu \geq 0,58$ Па·с. Эта величина соответствует вязкости эмульсии в НКТ, для которой получена кривая в) (третья точка на рис. 3.18).

Более глубокий анализ может быть произведен с помощью вычисления корреляционной размерности ν (см. раздел 1.4).

На рис. 3.19 приведена зависимость корреляционного интеграла $\ln C(\varepsilon)$ от $\ln \varepsilon$, полученная для кривой а) из рис. 3.17 при $m = 2$. На рис. 3.20 приведена зависимость $\nu_m = \nu_m(m)$ для этой же кривой. Вид этой кривой (рост с насыщением) свидетельствует о том, что случайные пульсации давления имеют детерминированную основу.

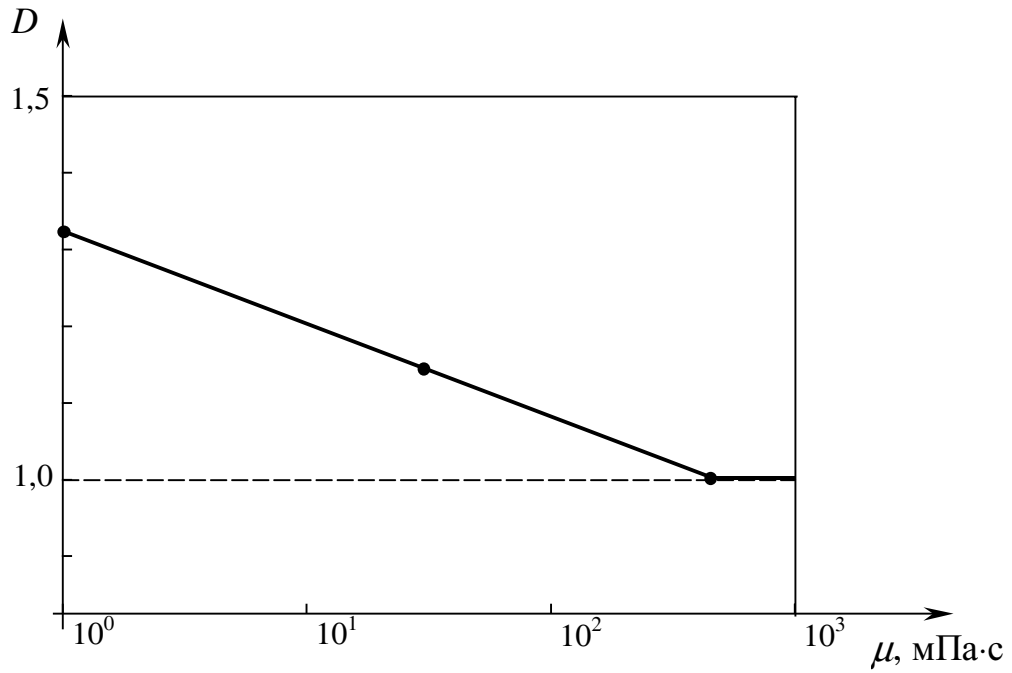


Рис. 3.18. Зависимость размерности Хаусдорфа от вязкости жидкости в НКТ

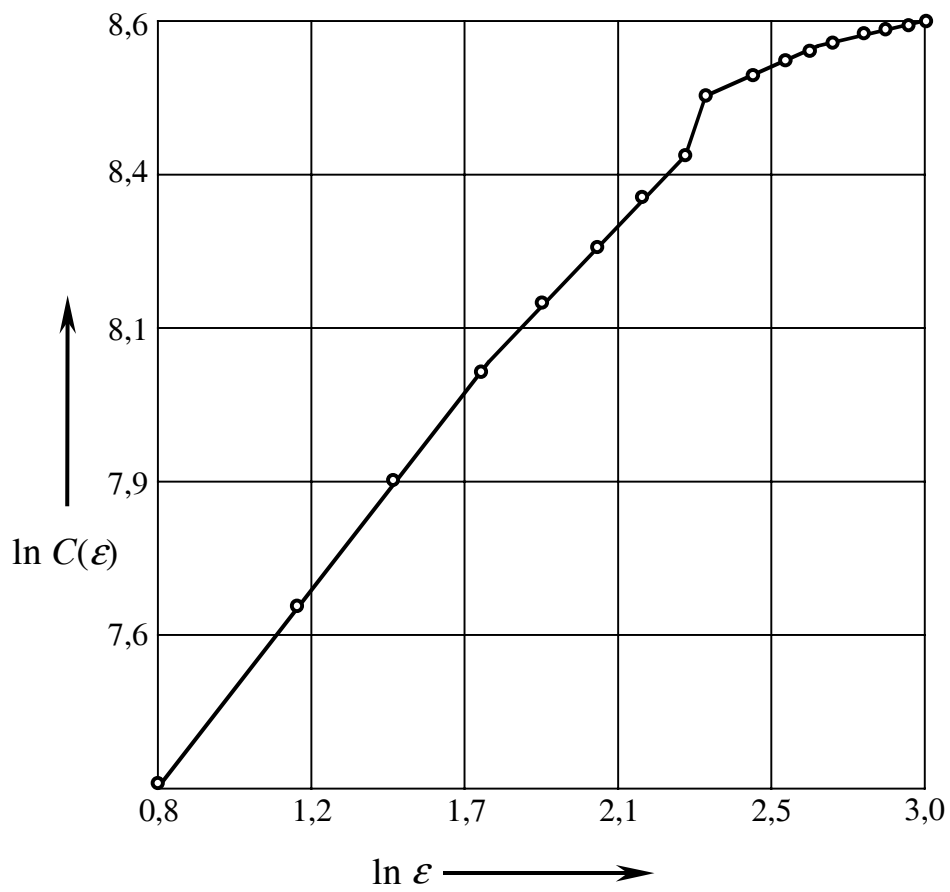


Рис. 3.19. Зависимость $\ln C$ от $\ln \epsilon$ при $m = 2$

Область применения размерностных характеристик не ограничивается определением того, каким является источник случайных сигналов – шумовым или детерминированным. Более ценным является использование размерностей D и ν для диагностирования режимов работы насоса (утечки, заклинивания, рост динамических составляющих нагрузок на колонну и т. д.).

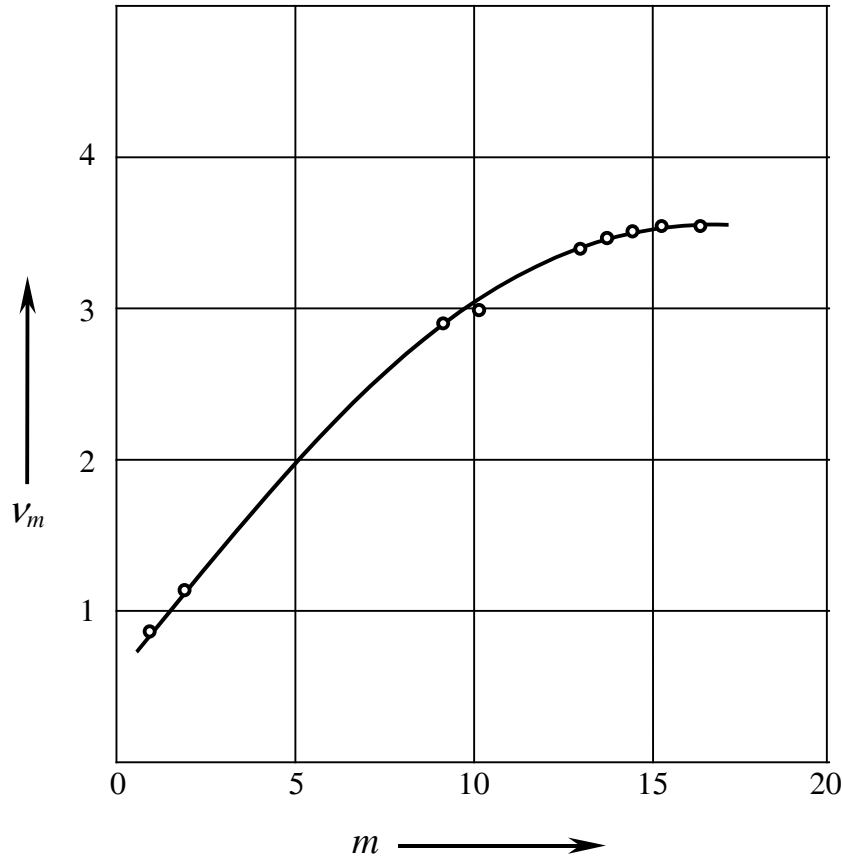


Рис. 3.20. Зависимость ν_m от m

Поскольку предельное значение корреляционной размерности $\nu \approx 3,6$, то минимальное число динамических переменных, необходимое для моделирования работы штангового насоса, равно $[3, 6] + 1 = 4$.

Следовательно, сосредоточенная динамическая модель ШГН должна представлять собой систему из четырех уравнений. Из физических соображений ясно, что эти уравнения должны учесть инерцию и упругость колонны штанг, а также инерцию и сжимаемость жидкости.

Уравнение колебания штанг можно записать в виде

$$M \frac{dv}{dt} = F_c + F_{mp} + K(\xi - x) - f_{нл}\eta(\nu)(P_{mp} - P_{np}) - G_{um}^1, \quad (3.98)$$

где x – перемещение плунжера; ξ – перемещение точки подвеса колонны штанг; M – масса колонны штанг;

$$K = \frac{E f_{ум}}{L};$$

E – модуль упругости металла штанг; $f_{ум}$ – площадь сечения штанг; $f_{пл}$ – площадь сечения плунжера насоса; $P_{мп}$ – давление жидкости над плунжером; $P_{пр}$ – давление на приеме; $G'_{ум}$ – вес штанг в жидкости;

$$\eta(v) = \begin{cases} 1, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0; \end{cases}$$

где v – мгновенная скорость штанг; F_c – сила полусухого трения штанг о трубы; $F_{тр}$ – сила гидродинамического трения.

При выводе (3.98) мы пренебрегли силой сопротивления в клапанах насоса и трением в плунжерной паре насоса ввиду их относительной малости.

Согласно [64] силу полусухого трения F_c можно представить в виде

$$F_c = -C_{ум} \varphi [f_{пл} \eta(v) (P_{мп} - P_{пр}) + G'_{ум}] \text{sign } v, \quad (3.99)$$

где $C_{ум}$ – коэффициент трения; φ – средний угол искривления ствола скважины, рад.;

$$\text{sign } v = \begin{cases} +1, & v > 0, \\ -1, & v < 0. \end{cases}$$

Поскольку коэффициент трения покоя больше коэффициента трения скольжения, величина $C_{ум}$ зависит от скорости штанг v . Эту зависимость можно аппроксимировать гладкой функцией вида

$$C_{ум} = K_{\Pi} \left\{ 1 - K_y \left[1 - \exp\left(\frac{-|v|}{v_0}\right) \right] \right\}, \quad (3.100)$$

где величина K_{Π} имеет смысл коэффициента трения покоя, а K_y определяет долю, на которую уменьшается коэффициент трения при скорости штанг, в кратное число раз превышающей некоторое характерное значение скорости v_0 .

Гидродинамическое трение штанг с учетом движения жидкости схематично можно представить в виде

$$F_{ТР} = -\alpha(v - u),$$

где u – средняя скорость движения жидкости; α – коэффициент трения, зависящий от вязкости нефти и глубины подвески насоса.

Движение жидкости в НКТ опишем следующим уравнением:

$$m \frac{du}{dt} = \alpha(v - u) - \alpha_c u + (P_{мп} - P_{вых}) f_{мп} - G_{жс}, \quad (3.101)$$

где m – масса жидкости; $G_{жс}$ – вес столба жидкости в НКТ; α_c – коэффициент, определяющий трение на стенке труб ($\alpha = \alpha_c$); $f_{мп}$ – площадь сечения труб; $P_{вых}$ – давление в верхнем сечении НКТ.

Для того чтобы система уравнений (3.98)–(3.101) была замкнутой, запишем дополнительные уравнения сохранения массы для столба жидкости в подъемнике. Пренебрегая упругостью труб, получим

$$W_0 \beta \frac{dP}{dt} = f_{nl} v \eta(v) - f_{mp} u, \quad (3.102)$$

где W_0 – объем жидкости в НКТ; β – сжимаемость жидкости.

Для упрощения выписанной модели сделаем ряд преобразований. Рассмотрим равновесное состояние системы, имеющее место при $\xi = 0$, $v = u = 0$. Из (3.98) и (3.101) получим

$$-(1 - K_{II} \varphi) [f_{nl} (P_0 - P_{np}) + G'_{um}] - Kx_0 = 0, \quad (3.103)$$

$$(P_0 - P_{вых}) f_{mp} - G_{жс} = 0, \quad (3.104)$$

где P_0 , x_0 – равновесные значения давления и перемещения плунжера.

Отсюда

$$P_0 = P_{вых} + \frac{G_{жс}}{f_{mp}}, \quad (3.105)$$

$$x_0 = -\frac{1}{K} (1 - K_{II} \varphi) [f_{nl} (P_0 - P_{np}) + G'_{um}]. \quad (3.106)$$

Перемещение полированного штока опишем упрощенной гармонической зависимостью

$$\varepsilon = A \cdot \sin \omega t,$$

где A – длина полухода полированного штока.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{|x_0|}; \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_*}; \quad \bar{P} = \frac{P - P_0}{P_*};$$

$$\bar{t} = nt \quad (n - \text{число качаний}), \quad P_* = \frac{K|x_0|}{f_{nl}};$$

$$v_* = A \cdot \omega; \quad u_* = \sigma \cdot v_*; \quad \sigma = \frac{f_{nl}}{f_{mp}}.$$

Тогда из (3.98)–(3.106) получим систему уравнений:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 2\pi\gamma\bar{v}, \quad (3.107)$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = K'_{II} \psi(v) (H_0 + H) \text{sign } v - K'_{II} H_0 - H - \alpha_1 (\bar{v} - \sigma \bar{u}) - \bar{x} + \gamma \sin 2\pi \bar{t}, \quad (3.108)$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \alpha (\bar{v} - \sigma_1 \bar{u}) + \delta \bar{P}, \quad (3.109)$$

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{t}} = \beta_1 [\bar{v} \eta(\bar{v}) - \bar{u}], \quad (3.110)$$

где

$$H_0 = \frac{f_{nl}(P_0 - P_{np}) + G'_{um}}{K|x_0|} = \frac{1}{1 - K'_{II}},$$

$$H = \eta(v)\bar{P} - \lambda[1 - \eta(v)], \quad K'_{II} = K_{II}\varphi,$$

$$\lambda = \frac{f_{nl}(P_0 - P_{np})}{K|x_0|} = \frac{(P_0 - P_{np})}{P_*},$$

$$\varphi(v) = 1 - K_y \left[1 - \exp\left(-\frac{|\bar{v}|}{\bar{v}_0}\right) \right],$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi M \gamma n^2}{K}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha v_*}{K|x_0|}; \quad \sigma_1 = \sigma \left(1 + \frac{\alpha_c}{\alpha} \right).$$

$$\beta_1 = \frac{u_* f_{mp}}{W_0 \beta P_* n}, \quad \nu = \frac{\alpha v_*}{\mu u_* n}, \quad \delta = \frac{P_* f_{nl}}{\mu u_* n}.$$

Система уравнений (3.107)–(3.110) представляет собой динамическую модель штанговой установки. Неавтономные нелинейные системы с трением, к которым относится и модель (3.107)–(3.110), допускают самые разнообразные решения – от хаотических колебаний до периодических движений. Для выявления характера колебаний проведем численный анализ выписанной системы уравнений.

Прежде всего, оценим значения коэффициентов системы (3.107)–(3.110). Примем, что диаметр плунжера равен 0,0043 м, диаметр НКТ – 0,062 м, штанг – 0,022 м, глубина подвески насоса – 1000 м, плотность жидкости – 900 кг/м³, плотность металла штанг – 7850 кг/м³, модуль упругости штанг – 0,2·10¹² Па, вязкость жидкости изменяется от 10⁻³ (вода) до 500·10⁻³ Па·с (эмульсия). Число ходов насоса $n = 7 \text{ мин}^{-1} \approx 0,12 \text{ с}^{-1}$, величина $A = 1,25$ м. Вес колонны штанг в жидкости составляет 2,6·10⁴ Н, вес столба жидкости в НКТ – 2,4·10⁴ Н, давление на приеме насоса 2,5·10⁶ Па. Давление жидкости на устье (верхнее сечение НКТ) примем равным нулю. Коэффициент гидродинамического трения примем для упрощения одинаковым для обоих ходов штанг и равным $\alpha = 40\mu_* \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, где $\mu_* = \mu_{жс} / \mu_в$, т. е. равно отношению вязкости жидкости в НКТ к вязкости воды.

Считая, что $K_{II} \approx 0,2 \dots 0,3$, угол $\varphi \approx 0 \dots 0,2$, получим оценку $K'_{II} \approx 0,02 \dots 0,06$. Все предварительные расчеты сведем в табл. 3.2.

Для получения численных решений системы (3.107)–(3.110) нами был использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,01$. Расчеты приведены для $K'_{II} \approx 0,06$, $K_y = 0,5$, $\bar{v}_0 = 0,1$ и коэффициентов, значения которых приведены в табл. 3.2.

Расчеты показали, что при значениях вязкости $\mu_* > 100$ в системе устанавливаются колебания с периодом, равным периоду качаний балансира. При уменьшении вязкости предельный цикл, соответствующий этим колебаниям, теряет устойчивость, и в системе устанавливаются колебания удвоенного периода. При дальнейшем уменьшении вязкости жидкости в НКТ движение все более усложняется, пока, наконец, не установятся хаотические колебания, подобные тем, что приведены на рис. 3.17, а.

Таблица 3.2

Оценки значений коэффициентов модели

Параметр	Его оценка	Параметр	Его оценка
P_0	8 МПа	ξ	0,005
x_0	-0,45 м	σ_1	0,5
P_*	20 МПа	σ	1,0
v_*	1,0 м/с	α_1	$0,001 \mu_*$
u_*	0,5 м/с	ν	$0,3 \mu_*$
γ	3	δ	400
λ	0,3	β_1	0,8

Кривые изменения давления во времени, полученные на скважине и теоретически с помощью динамической модели, близки по форме, что позволяет рекомендовать предложенную модель для анализа работы ШГН.

Библиографический список к главе 3

1. *Виноградов Г. В., Малкин А. Я.* Реология полимеров. – М.: Химия, 1977. – 439 с.
2. *Ребиндер П. А.* Избранные труды. Кн. 2. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
3. *Столин А. М., Худяев С. И., Бучацкий Л. М.* К теории сверханомалии вязкости структурированных систем // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, № 2. – С. 430–433.
4. *Свалов А. М.* Об одной модели тиксотропной системы // Колл. журн. – 1978. – № 49. – С. 799–802.
5. *Харин В. Т.* Реология вязкоупругих тиксотропных жидкостей, масел, полимерных растворов и расплавов. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. – 1984. – № 3. – С. 21–26.
6. *Хусаинов И. Г.* Кинетический подход к описанию тиксотропных процессов // Изв. вузов. Сер. Нефть и газ. – 1991. – № 4. – С. 64–68.
7. *Абрагам А.* Время вспять или физик, физик, где ты был. – М.: Наука, 1991. – 392 с.
8. *Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.* Основы молекулярной акустики. – М.: Наука, 1964. – 514 с.
9. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 216 с.
10. *Каргин В. А., Слонимский Г. Л.* Краткие очерки по физикохимии полимеров. – М.: МГУ, 1967. – 175 с.
11. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
12. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 467 с.
13. *Мустафаев С. Д., Османов Э. Н.* Экспериментальное исследование начального перепада давления при фильтрации неньютоновских жидкостей // Нефть и газ. – 1973. – № 8. – С. 51–54.
14. *Алишаев М. Г.* О нестационарной фильтрации с релаксацией давления / Сб. тр. МОПИ Гидромеханика. – 1974. – Вып. 3. – С. 166–177.
15. *Лодж А.* Эластичные жидкости. – М.: Наука, 1984. – 443 с.
16. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 199 с.
17. *Слонимский Г. Л.* О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140, № 2. – С. 343–346.
18. *Тобольский А.* Свойства и структура полимеров. – М.: Химия, 1964. – 332 с.
19. *Шульман З. П., Хусид Б. М.* Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. – Минск: Наука и техника, 1983. – 285 с.
20. *Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Зайцев Ю. В.* Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. – М.: Недра, 1972. – 300 с.

21. Гидродинамика трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов / А. Х. Мирзаджанзаде, А. К. Галлямов, В. И. Марон и др. – М.: Недра, 1984. – 287 с.
22. Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти – М.: Мир, 1988. – 672 с.
23. *Нигматуллин Р. Р.* Особенности релаксации системы с «остаточной» памятью // ФТТ. – 1985. – Т. 27, № 5. – С. 1583–1585.
24. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 401 с.
25. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
26. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Механика физических процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 370 с.
27. *Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М.* Прогнозирование промышленной эффективности методов теплового воздействия на нефтяные пласты. – М.: Недра, 1983. – 205 с.
28. *Баренблатт Г. И. и др.* Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 11. – С. 84–91.
29. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 958 с.
30. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 354 с.
31. *Соколов И. М.* Размерности и другие геометрические показатели в теории протекания // УФН. – 1986. – Т. 150, № 2. – С. 221–225.
32. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
33. *O'Shaughnessy B., Procaccia I.* Diffusion on fractals // Phys. rev. A. – 1985. – V. 32. № 5. – P. 3073–3083.
34. *Баренблатт Г. И., Борисов Ю. А., Каменецкий С. Г., Крылов А. П.* Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. – 1957. – № 11. – С. 84–91.
35. *Бузинов С. Н., Умрихин И. Д.* Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. – М.: Недра, 1973. – 248 с.
36. *Мирзаджанзаде А. Х., Дурмишьян А. Г., Ковалев А. Г. и др.* Разработка газоконденсатных месторождений. – М.: Недра, 1967. – 356 с.
37. *Мирзаджанзаде А. Х., Керимов З. Г., Копейкис М. Г.* Теория колебаний в нефтепромысловом деле. – Баку, 1976. – 363 с.
38. *Мирзаджанзаде А. Х., Хасиев А. М., Аметов И. М.* Технология и техника добычи нефти. – М.: Недра, 1986. – 216 с.
39. *Бернадинер М. Г., Ентов М. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. – М.: Недра, 1975. – 200 с.

40. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
41. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
42. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. – 1983. – Т. 141, № 2. – С. 343–374.
43. *Мирзаджанзаде А. Х. и др.* О законе фильтрации газа в пористой среде // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184, № 4. – С. 794–795.
44. *Христианович С. А.* О движении газированной жидкости в пористых породах. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
45. *Розенберг М. Д.* Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. Докл. АН СССР, Нов. сер., 1953, т. 39, № 2.
46. *Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К., Суворов Н. И., Шовкринский Т. Ю.* Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных массах. М., Недра, 1969.
47. *Миллионщиков М. Д.* Движение газированной нефти в пористой среде. Ин. сб. АН СССР, 1949, т. 5, вып. 2.
48. *Царевич К. А.* Гидромеханические приемы приближенного расчета дебитов нефти и газа из скважин при сплошной и сгущающейся системах разработки для нефтяных месторождений с газовым режимом. Тр. ВНИИ, вып. 6. М, Гостоптехиздат, 1954.
49. *Глоговский М. М.* К расчету дебитов скважин при режиме растворенного газа. Тр. ВНИИ, вып. 19. М., Гостоптехиздат, 1954. –I /–
50. *Пирвердян А. М.* Об одном способе оценок приближенных решений уравнений нестационарной фильтрации нефти и газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
51. *Пирвердян А. М.* Об оценках некоторых приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
52. *Ентов В. М.* Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации. ПММ, 1965, т. 29, вып. 11.
53. *Аметов И. М., Даниелян Ю. С.* Применение теорем сравнения в теории теплопроводности. Инж.-физ. ж., 1973, № 2.
54. *Даниелян Ю. С., Аметов И. М.* Об оценках решений задач Стефана. Нефть и газ, 1973, № 4.
55. *Белкин И. М., Виноградов Г. В., Леонов А. И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.
56. *Myerholtz R. W.* Oscillating flow behavior of high-density polyethylene melts // J. Appl. Polimer. Sci. – 1967. V. 2. – № 5. – P. 300–307.

57. Буевич Ю. А., Леонов А. И. Автоколебания в куэттовском течении несжимаемой максвелловской жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 2. – С. 305–311.
58. Каракин А. В., Леонов А. И. Об автоколебаниях при истечении полимерных растворов из капилляра // ПМТФ. – 1968. – № 3. – С. 110–114.
59. Pearson J. R. A., Petrie C. J. S. On the melt flow instability of extruded polymers // Proceeding of the 4-th Interational Congress on Rheology. Providence. R.I. – 1963. Part 3. – P. 205–211.
60. Overdiep W. S., Van Vrevelen D. W. Studies of non-newtonian flow. 1. Criterian of flow instability // J. of applied polimer science. – 1965. V. 9, № 8. – P. 302–311.
61. Столин А. М., Худяев С. И. Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при аномалии вязкости // ДАН СССР. – 1981. – Т. 260, № 5. – С. 1180–1184.
62. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
63. Хасанов М. М., Валеев М. Д., Уразаков К. Р. О характере колебаний давления жидкости в НКТ глубиннонасосных скважин // Изв. вузов. Сер. Нефть и газ. – 1991. – № 11. – С. 32–36.
64. Справочное пособие по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Добыча нефти / Под ред. Ш. К. Гиматутдинова. – М.: Недра, 1983. – 455 с.

Глава 4

ПРОЦЕССЫ САМООРГАНИЗАЦИИ В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СИСТЕМАХ ВБЛИЗИ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕНИЯ

*Полезно время от времени
ставить знак вопроса
на вещах, которые тебе давно
представляются несомненными.*

Б. Рассел

*Теории приходят и уходят,
а экспериментальные факты остаются.*

Из научного фольклора

Экспериментальные и теоретические исследования, проведенные в последнее время с газосодержащими жидкостями, показали, что в предпереходных условиях (т. е. в области давлений, превышающих давление насыщения, но близких к нему) реологические и релаксационные свойства газожидкостных систем во многом определяются наличием «микророзродышей» – мельчайших газовых пузырьков, кооперативное действие которых проявляется при приближении к давлению насыщения. Существование подобных образований предполагают также в теории кавитации, чтобы объяснить резкое уменьшение реальной кавитационной прочности по сравнению с теоретической [1–3]. Некоторые оценки характеристик микророзродышей получены в опытах по изучению скорости и коэффициента поглощения звука, кавитационных шумов [3] и дифракции лазерного пучка.

Предпереходные явления могут быть объяснены в рамках теории Я. И. Френкеля, в соответствии с которой вблизи давления насыщения в жидкости имеется динамическая «популяция» зародышей, образованная гетерофазными флуктуациями плотности газа.

Однако ряд опытов говорит о существовании стабильных пузырьков. Возможные причины существования стабильных пузырьков, рассматриваемые в литературе, требуют наделения газожидкостных систем некоторыми дополнительными свойствами. Гарвей и др. предположили, что ядра нерастворенного газа могут существовать в субмикроскопических гидрофобных трещинах, имеющих на стенках сосудов или на поверхности примесных твердых частиц [1, 2]. Ряд авторов считает, что существование стабильных зародышей газа связано со следами ПАВ, которые адсорбируются на поверхности пузырька и создают пленку, упругость которой пре-

пятствует его схлопыванию [1, 3]. В работе [4] предполагается, что стабилизация пузырьков обеспечивается выделением на их поверхности пленок ПАВ с отрицательным поверхностным натяжением. Однако в рамках этой модели возникает проблема устойчивости поверхности раздела относительно малых отклонений от сферической формы. П. Айзенберг связывает стабилизацию пузырьков со взаимодействием между ионами, адсорбированными на поверхности пузырька, и свободными ионами, находящимися в объеме жидкости [1].

Несмотря на обилие предположений, следует признать, что причины, ведущие к образованию зародышей, и механизмы, обеспечивающие их стабильное существование, к настоящему времени до конца не выяснены.

Ясно одно: в «чистых» жидкостях существование стабильных микророзродышей газа невозможно.

Естественно предположить, что зародыши новой фазы образуются не только в жидкостях с растворенным газом. В данной главе приведены результаты лабораторных исследований, которые показывают, что зародышеобразование имеет место и в газоконденсатных смесях: при приближении к давлению выпадения конденсата образуются зародыши жидкой фазы, существенно влияющие на фильтрационные характеристики пористых сред.

4.1. Исследование реологических свойств газожидкостных систем вблизи давления насыщения акустическими методами

Фильтрация газожидкостных систем в пористой среде вблизи давления насыщения сопровождается неравновесными эффектами [1, 2]. С целью детального изучения реологических свойств растворов газов в жидкости при давлениях, близких к давлению выделения газа, была выполнена серия экспериментальных исследований.

В пористой среде с проницаемостью $35 \cdot 10^{-15}$ м², представленной смесью кварцевого песка со средним размером частиц 10^{-4} м и монтмориллонита, размещенной в термостатируемой медной трубке длиной 6 м и диаметром 10^{-2} м, исследовалась фильтрация растворов углекислого газа в широком интервале концентраций и температур при давлениях, близких к давлению насыщения.

В результате проведенных работ обнаружен эффект, состоящий в значительном, более чем в 2–3 раза, увеличении удельного расхода флюида вблизи давления насыщения. На рис. 4.1 приведена зависимость удельного расхода раствора углекислого газа в *n*-гексане концентрацией 0,225 мольных долей при температуре 298 К от перепада давлений Δp в начале и в конце образца пористой среды.

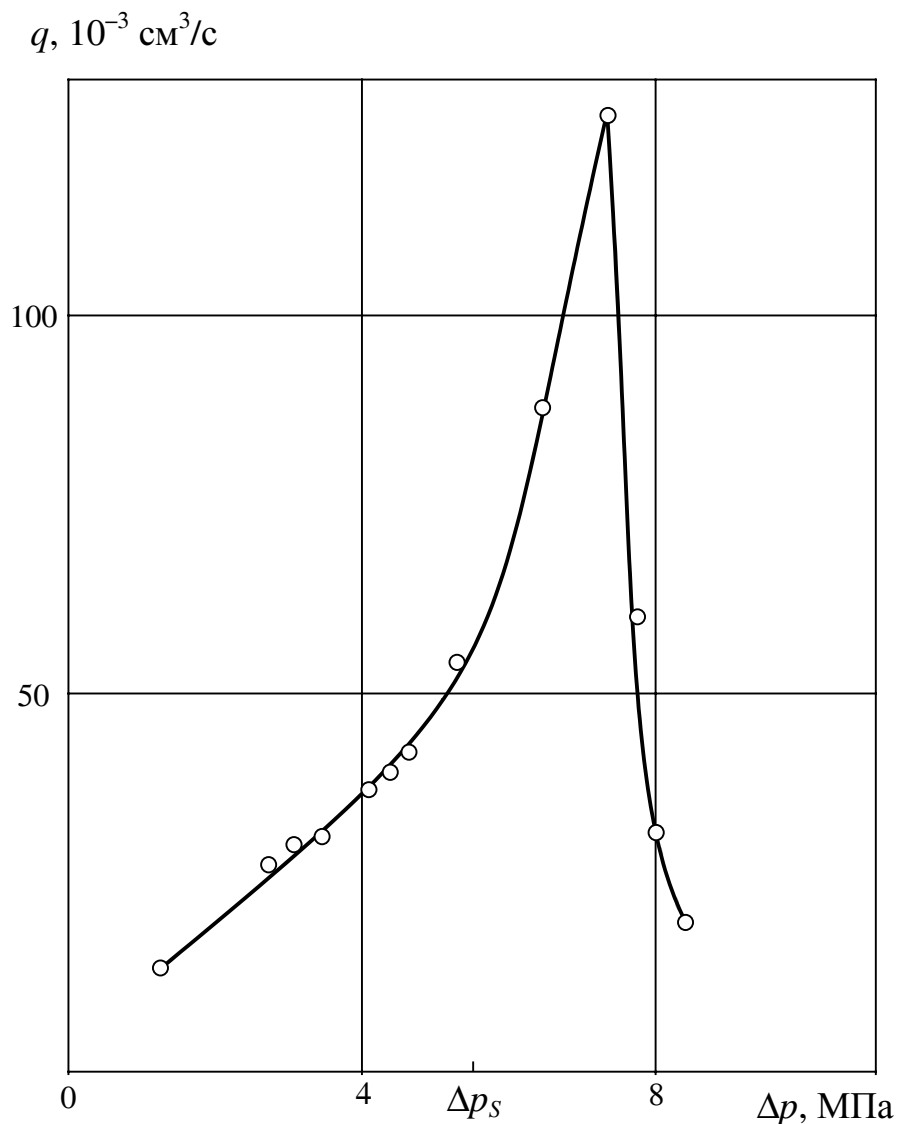


Рис. 4.1. Зависимость удельного расхода раствора углекислого газа в *n*-гексане концентрацией 0,225 мольных долей при температуре 298 К от перепада давлений ΔP

При давлениях, значительно превышающих давление насыщения, удельный расход раствора пропорционален перепаду давления в соответствии с законом Дарси. При некотором давлении p_s , характеризующемся резким возрастанием затухания ультразвуковых колебаний, наблюдается увеличение удельного расхода, продолжающееся при снижении давления до достижения давления насыщения (появления в объеме раствора пузырьков газа). Значения этих давлений для данной системы соответственно равны 3,8 и 3,2 МПа. Таким образом, изменение перепада давлений на 0,6 МПа в окрестности фазового перехода в этой системе приводит к возрастанию расхода более чем в 2,5 раза. Активное выделение газа при давлении 3,2 МПа вызывает быстрое снижение расхода вследствие уменьшения проницаемости пористой среды для двухфазной системы «газ–жидкость».

Одновременно с изучением фильтрации раствора через пористую среду проводились измерения вязкости, поглощения и скорости звука в растворе в ультразвуковом автоклаве [5], включенном в гидросистему с пористой средой. На рис. 4.2 приведена зависимость вязкости (кривая 1) и поглощения звука (кривая 2) частотой 15,7 МГц от давления при $T=298$ К в растворе *n*-гексан- CO_2 концентрацией 0,225 мольных долей газа.

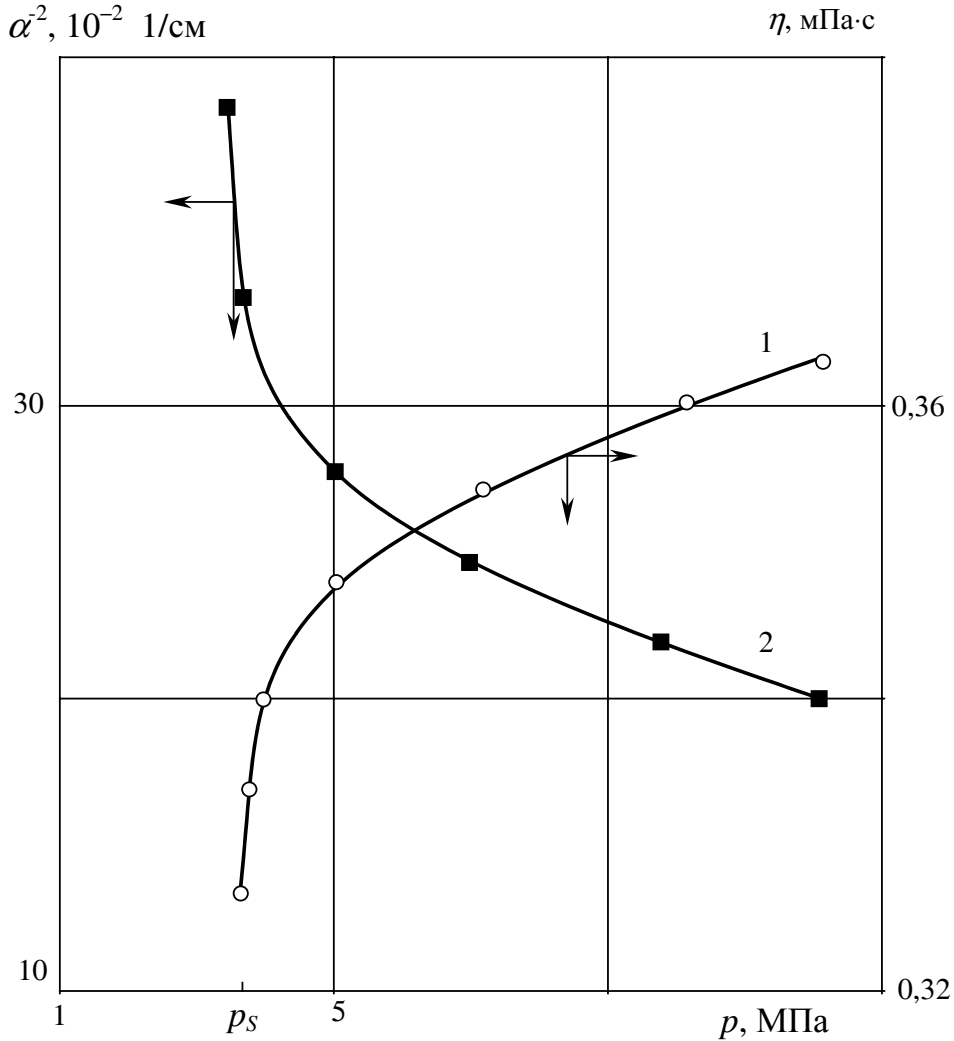


Рис. 4.2. Зависимость вязкости (1) и поглощения звука (2) от давления

При давлении, равном p_s , имеет место значительное уменьшение вязкости раствора и резкое возрастание поглощения звука. В табл. 4.1 приводятся результаты измерения вязкости η ($\text{мПа}\cdot\text{с}$) данной системы для других концентраций C при различных температурах T (К) и давлениях p (МПа). Во всех рассмотренных случаях отмечается существенное снижение вязкости растворов вблизи давления насыщения. Этот факт может служить объяснением обнаруженного эффекта увеличения удельного расхода газожидкостных растворов в окрестности давления насыщения при фильтрации их в пористых средах.

Таблица 4.1

Вязкость раствора при различных значениях давления и температуры

T, K	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 7,5$	$p = 12$	$p = 15$	$p = 20$
$C = 0,14$								
298	0,37	0,33	0,35	0,36	0,37	0,39	0,39	0,40
232	–	0,32	0,29	0,31	0,32	0,33	0,33	0,34
343	–	–	0,29	0,26	0,27	0,27	0,28	0,29
$C = 0,31$								
295	–	–	0,30	0,26	0,29	–	0,31	0,32
323	–	–	0,24	0,22	0,24	–	0,26	0,27
343	–	–	–	0,22	0,18	–	0,22	0,24

Уменьшение вязкости и рост поглощения звука в растворах в области давления насыщения могут быть удовлетворительно объяснены в рамках теории предпереходных давлений [6]. Однофазный раствор газа в жидкости рассматривается как гетерогенная дисперсная система, состоящая из раствора и микронеоднородностей в виде зародышей газа, расположенных на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны. Статистическое распределение рассеивателей (зародышей газа) характеризуется функцией N_n , равной числу зародышей в единице объема, содержащих n молекул. Полный термодинамический потенциал такой системы можно записать в виде [6]

$$\Phi = N_l \varphi_l + \sum_{n=0} N_n (\varphi_g n + an^{2/3}) + kT \left(N_l \ln \frac{N_l}{F} + \sum_{n=0} N_n \ln \frac{N_n}{F} \right), \quad (4.1)$$

$$F = N_l + \sum_{n=0} N_n n,$$

где F – полное число частиц в системе, N_l – число молекул в растворе, φ_l – химический потенциал раствора, φ_g – химический потенциал газа, a – величина, пропорциональная поверхностному натяжению γ .

Равновесное распределение зародышей выше давления насыщения с учетом выражения (4.1) можно представить соотношением

$$N_n = N_l \exp \left[- \frac{(\varphi_g - \varphi_l) n + an^{2/3}}{kT} \right]. \quad (4.2)$$

Принимая, что зародыши новой фазы в процессе изменения внешних параметров (например, давления) изменяют свой радиус от некоторого

значения r до r_k при давлении насыщения и $an^{2/3} \approx 4\pi r^2 \gamma$, преобразуем соотношение (4.2) к виду

$$N_n = N_t \exp \left[- \frac{4\pi\gamma \left(r^2 - \frac{2}{3} \frac{r^3}{r_k} \right)}{kT} \right]. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что при увеличении размеров зародышей, вызванном снижением давления в системе, число их N_n уменьшается. Описывая вязкость η такой дисперсной системы известным соотношением Эйнштейна, получим с точностью до постоянной η_0

$$\eta \cong \eta_0 \left\{ 1 + \exp \left[- \frac{4\pi\gamma \left(r^2 - \frac{2}{3} \frac{r^2}{r_k} \right)}{kT} \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4.) справедливо при $r < r_k$, когда вязкость уменьшается при приближении к давлению насыщения, и при $r > r_k$, когда в системе появляются пузырьки газа и вязкость увеличивается. Такое поведение вязкости характерно и для нефти с растворенным газом. В табл. 4.2 приведены данные для нефти одного из месторождений Западной Сибири при $T = 293$ К (ρ – плотность нефти).

Таблица 4.2

Значения ρ , η для нефти одного из месторождений Западной Сибири при $T = 293$ К и различных давлениях p

p , МПа	7,6	8,0	8,8	10,4	11,2	12,8	16
ρ , кг/м ³	799,1	799,4	799,9	801	801,5	802,6	804,7
η , МПа·с	2,15	2,00	1,96	2,10	2,21	2,24	2,32

При снижении давления от 11 МПа до давления насыщения (8,4 МПа) вязкость пластовой нефти уменьшается на 11%.

Увеличение проницаемости пористой среды в предпереходных условиях может быть объяснено не только уменьшением вязкости флюида. При

приближении к давлению насыщения возможно образование стабильных микрочастиц, которые адсорбируются на поверхности пористой среды. Появление этого слоя приводит (вследствие эффекта «газового подшипника») к снижению фильтрационных сопротивлений и росту расхода флюида, который достигает своего максимума при давлении, немного превышающем давление насыщения. В непосредственной близости от давления насыщения увеличение размеров частиц приводит к возникновению дополнительных гидравлических сопротивлений за счет закупоривания микропор, поэтому расход флюида начинает уменьшаться. При снижении давления до уровней, меньших p_n , выделяется свободный газ, что ведет к резкому увеличению фильтрационных сопротивлений.

Отметим, что во всех исследованных газожидкостных системах плотность и скорость звука не имеют особенностей в окрестности давления насыщения.

Возрастание поглощения звука в области давления насыщения обусловлено, по-видимому, следующим. Распространение звука в среде с микронеоднородностями в виде частиц новой фазы сопровождается рассеянием мощности излучения W на длине x [7]

$$W = W_0 e^{-\alpha x}, \quad \alpha = \sigma N_n,$$

где σ – сечение рассеяния.

Принимая размеры частиц новой фазы порядка 10^{-8} м, можно найти собственную частоту частицы [7]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3p}{r^2 \rho'}}. \quad (4.5)$$

Здесь p – давление газа в частице, ρ' – плотность газа. Считая газ в частице совершенным, запишем (4.5) в виде

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (4.6)$$

где R – универсальная постоянная, μ – молярная масса газа.

Для случая растворов углекислого газа $\omega_0 = 4 \cdot 10^{10}$ Гц. Частота ω внешних колебаний равна $15,7 \cdot 10^6$ Гц. Сечение рассеяния при $\omega < \omega_0$ определяется по формуле [7]

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi r^2 \left(\frac{\omega r}{v} \right)^4 \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2, \quad \beta' = \frac{3}{\rho' r^2 \omega_0^2}, \quad \beta = \frac{1}{\rho v^2}. \quad (4.7)$$

Здесь v – скорость звука в среде с неоднородностями, β' – сжимаемость газа, β – сжимаемость среды с неоднородностями, ρ – плотность среды.

С учетом выражений для β' и β и соотношения (4.6) формула (4.7) примет вид

$$\sigma = \frac{4}{9} \frac{\pi}{R^2 T^2} r^6 (V')^2 \rho^2 \omega^4,$$

где V' – молярный объем газа.

Величина α , характеризующая рассеяние мощности звука на единице длины, выражается в виде

$$\alpha = \frac{4}{9} \frac{\pi}{R^2 T^2} r^6 (V')^2 \rho^2 \omega^4 N_n. \quad (4.8)$$

Из соотношения (4.8) следует, что влияние увеличения размеров зародышей в окрестности давления насыщения превалирует над влиянием уменьшения их числа N_n , что и обуславливает возрастание поглощения звука.

4.2. Изучение свойств газожидкостных смесей в предпереходных состояниях

Эффекты зародышеобразования наиболее отчетливо проявляются при фильтрации многокомпонентных сред в пористых средах. Экспериментальное исследование этих эффектов затрудняется отсутствием надежных методов, позволяющих напрямую диагностировать наличие зародышей новой фазы.

Так, оптический метод [8] не применим для газожидкостных систем, находящихся в пористой среде. Ультразвуковой метод [9, 10] очень чувствительный и тонкий, однако сложность реализации не способствует его широкому распространению.

В практике наибольшее применение нашел объемный метод [11], согласно которому о начале зародышеобразования судят по изменению угла наклона графика зависимости изменения объема системы от изменения давления.

Как известно, для бинарных систем объемный метод дает хорошие результаты, но при определении давления зародышеобразования в многокомпонентных системах, каковыми являются нефти, фазовые превращения происходят не при фиксированном значении давления, а в некоторой области, что сильно снижает точность метода.

Отмеченное обусловило необходимость создания способа более надежного и достоверного определения момента зародышеобразования в бомбе PVT и в пористых средах.

В проведенных нами экспериментах появление зародышей фиксировалось по изменению разности потенциалов. Лабораторная установка (рис. 4.3) состояла из фильтрационной колонки 1, потенциометра с высо-

ким входным сопротивлением URV-2М, электромагнита со специальным наконечником 3, реостата 4, выпрямителя типа УСА-4Л (5), амперметра 6, бомб высокого давления PVT 7 и 12, образцовых манометров 8, бачка для продавочной жидкости 9, измерительных прессов 10 и 13, ультратермостата 11.

В бомбе PVT и фильтрационной колонке с помощью термостата поддерживалась постоянная температура, равная 313 К.

Эксперименты проводились следующим образом.

Фильтрационная колонка заполнялась пористой средой, после чего производилась вертикально-вибрационная трамбовка с периодическим добавлением новых порций пористой среды.

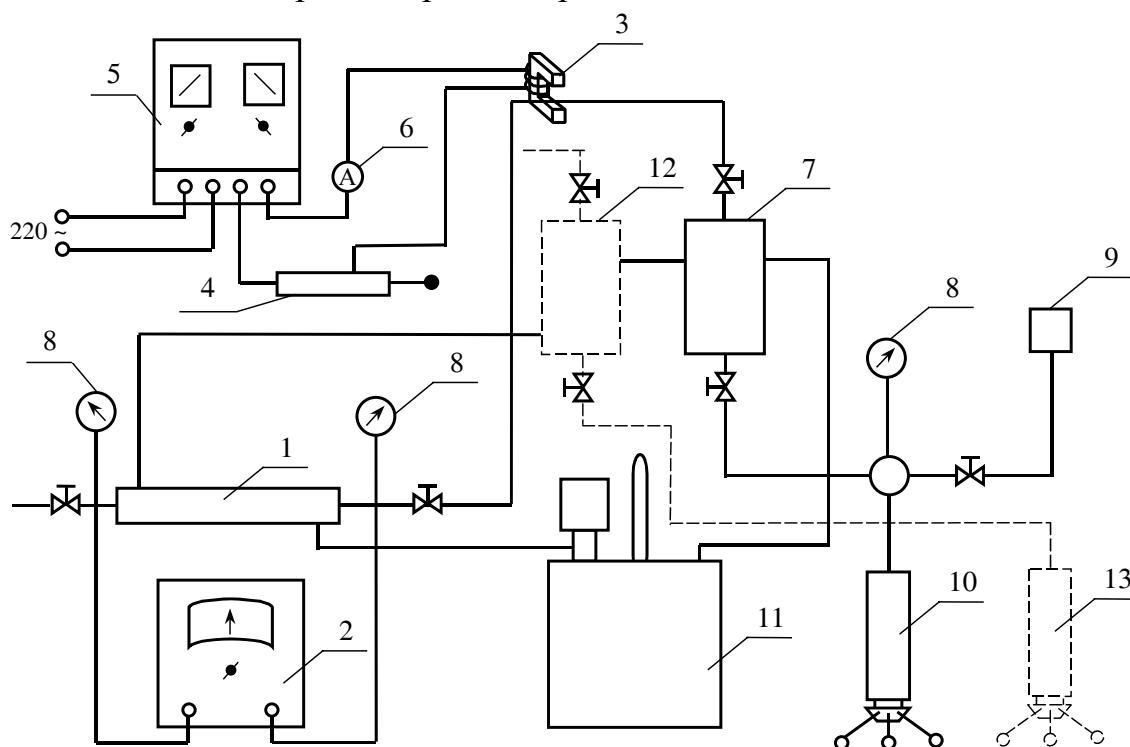


Рис. 4.3. Схема экспериментальной установки

Объем пор определялся как весовым способом, так и закачкой в пористую среду воздуха. Проницаемость пористой среды по воздуху определялась по известной методике. Через пористую среду прокачивалось пять-семь поровых объемов негазированной жидкости. При этом, с целью лучшей очистки пористой среды от заземленных пузырьков воздуха, производилась попутная барообработка, заключающаяся в периодическом увеличении давления в фильтрационной колонке с последующим резким снижением давления на ее выходе. Избавление от пузырьков воздуха происходит за счет частичного их растворения при повышении давления и проскальзывания воздуха при создании больших перепадов давления между входом и выходом колонки.

Далее фильтрационная колонка соединялась с бомбой PVT, после чего газожидкостная смесь прессом вытеснялась в пористую среду.

Для определения давления зародышеобразования в пористой среде газожидкостная смесь выдерживалась в фильтрационной колонке не менее 12 часов. Затем колонка отключалась от бомбы и подключалась к измерительному прессу 10, при помощи которого давление в пористой среде снижалось и определялось соответствующее изменение объема. К выводам фильтрационной колонки присоединялся потенциометр URV, с помощью которого определялась разность потенциалов U и электрическое сопротивление R . Для примера на рис. 4.4 приведены экспериментальные кривые, полученные для газированного трансформаторного масла в пористой среде, состоящей из 30% глины и 70% кварцевого песка. Давление начала зародышеобразования (15 МПа) фиксировалось по скачку величин R и U .

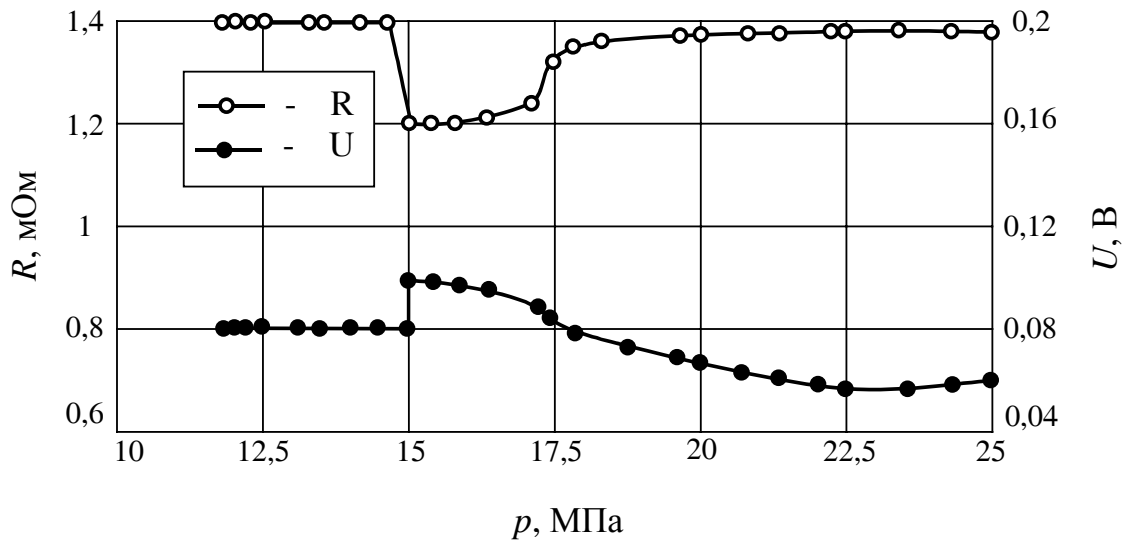


Рис. 4.4. Диагностирование фазового перехода по измерениям разности потенциалов и сопротивления

Затем часть газированной жидкости из бомбы PVT переводилась в колонку высокого давления, предварительно освобожденную от пористой среды и откакумированную, и определялось давление зародышеобразования в свободном объеме (рис. 4.5).

Как видим, в пористой среде зародышеобразование происходит значительно раньше.

На описанной выше установке были также продублированы эксперименты по изучению влияния зародышеобразования на фильтрационные характеристики пористых сред, описанные в разделе 4.1.

В опытах пористая среда представляла собой смесь кварцевого песка с глиной или карбонатом в различных процентных соотношениях. Газожидкостная смесь состояла из трансформаторного масла и природного газа. Предварительно определялось давление насыщения p_n рекомбинированной пробы объемным методом. Все эксперименты проводились при по-

стоянной температуре $T = 308$ К, которая достигалась путем термостирования всех узлов установки. Были проведены опыты с газожидкостными системами различной газонасыщенности. Все подготовительные операции, связанные с насыщением пористой среды газожидкостной смесью, производились согласно вышеприведенной схеме.

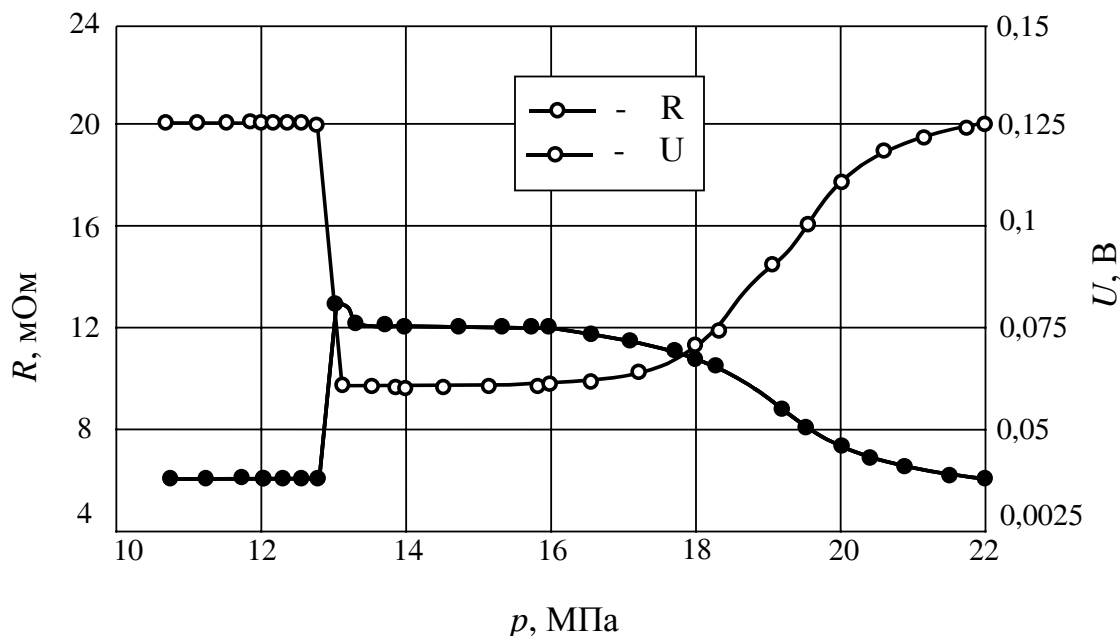


Рис. 4.5. Измерение разности потенциалов и сопротивления

Для выявления влияния микрочастиц газа на фильтрационные процессы использовались стационарные и нестационарные методы исследования, заключающиеся в установлении индикаторной зависимости и регистрации кривых восстановления давления. Опыты начинались с давления, превышающего величину давления зародышеобразования в 3 раза.

Методика проведения экспериментов была следующей. В колонке устанавливали постоянный перепад давления, и газожидкостная смесь фильтровалась при заданном уровне среднего давления до тех пор, пока не прокачивался, как минимум, один объем порового пространства. Для точности опытов перепад давления на концах колонки не превышал 0,2–0,25 МПа. После проведения стационарных и нестационарных исследований давление в системе снижалось до следующего уровня и проводились аналогичные замеры. Эксперименты проводились до тех пор, пока давление в системе не достигало величины давления насыщения.

На рис. 4.6 и 4.7, соответственно, приведены зависимости расхода флюида от относительного давления $\frac{p}{p_n}$ для глинизированной и карбонат-

ной пористой сред. Как видно, при достижении определенного уровня давления, превышающего давление p_n приблизительно вдвое, наблюдается увеличение расхода жидкой фазы (при постоянном градиенте давления).

Максимальное значение расхода достигается при уровне давления $p \approx 1,3p_n$ и превышает значение расхода, замеренного при $p \gg p_n$, в 1,6–2 раза.

При дальнейшем приближении к давлению p_n расход начинает снижаться и при $p = p_n$ составляет лишь 40–50% от максимального значения.

Полученные результаты сопоставлялись с данными нестационарных гидродинамических исследований. Для примера на рис. 4.8 приведены кривые восстановления давления $\Delta p = \Delta p(t)$, снятые на выходе колонки в глинизированной пористой среде ($\Delta p = p_2 - p_0$, p_2 – давление на выходе колонки, p_0 – его значение перед прекращением фильтрации).

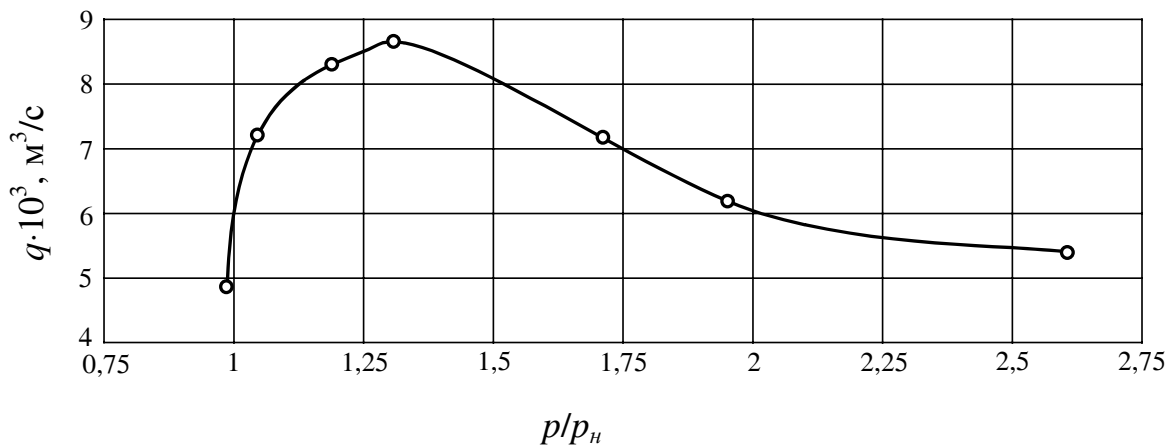


Рис. 4.6. Зависимость расхода от давления в глинизированной пористой среде

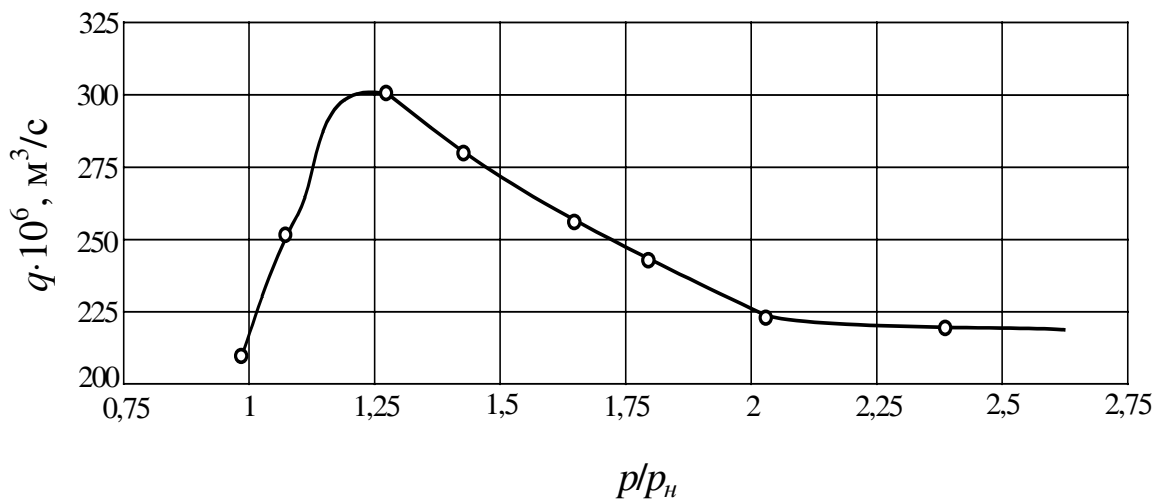


Рис. 4.7. Зависимость расхода от давления в карбонатной пористой среде

Кривая 1 на рис. 4.8 соответствует области давлений намного выше давления насыщения, а кривая 2 – интервалу давлений, характеризующемуся зародышеобразованием.

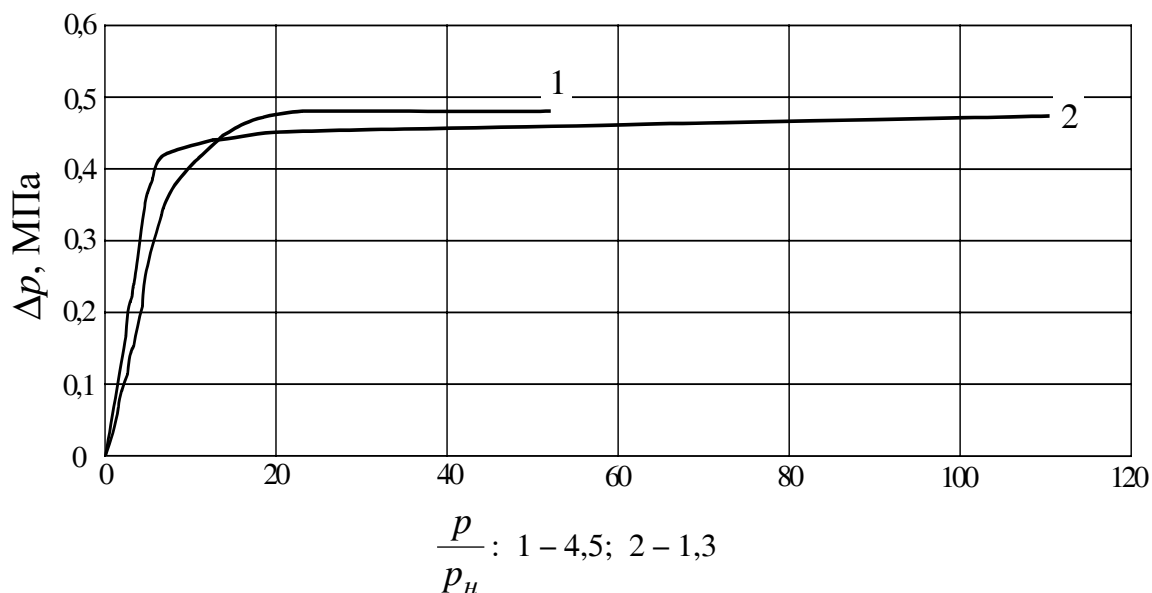


Рис. 4.8. Кривые восстановления давления

Из рисунка видно, что при образовании микрородышей газа кривые восстановления давления имеют длинные «хвосты», свидетельствующие о неравновесности системы. Эти кривые могут быть описаны законом Кольрауша («растянутой экспонентой»), что характерно для процессов релаксации в сложных системах (гл. 4).

На рис. 4.9 приведена зависимость коэффициента пьезопроводности χ от уровня давления, полученная путем обработки КВД методом детерминированных моментов (гл. 3).

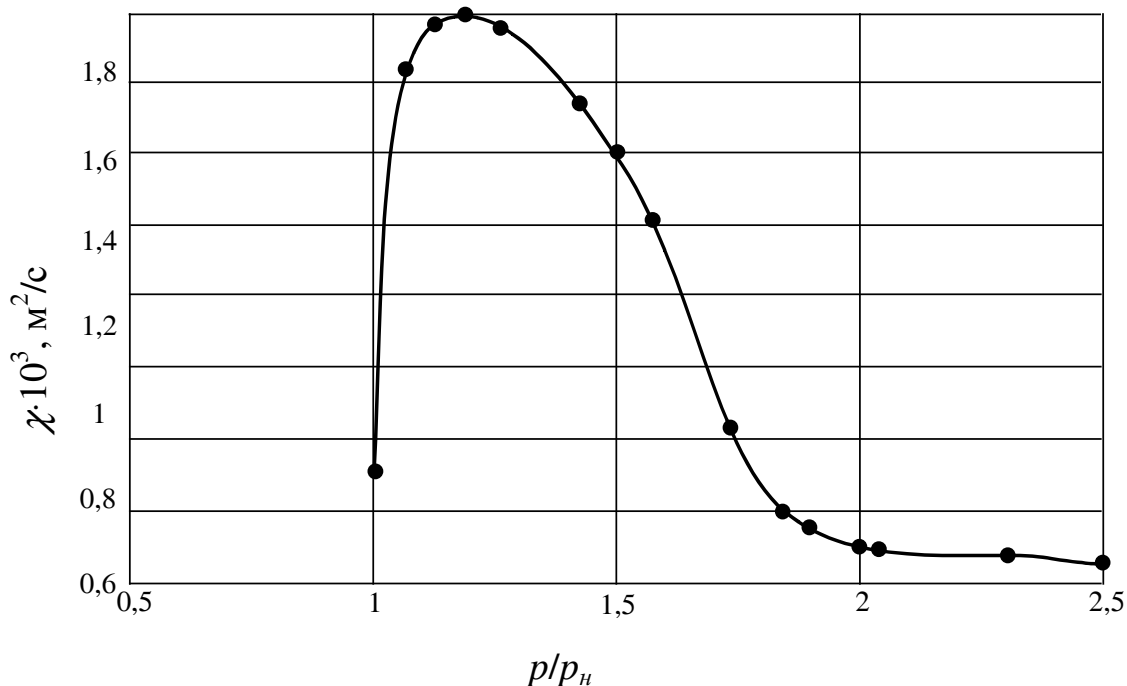


Рис. 4.9. Зависимость коэффициента пьезопроводности от давления

Как видно, вблизи давления насыщения, равного 4,9 МПа, значение пьезопроводности увеличивается более чем в три раза.

Возникновение зародышей новой фазы вблизи критической точки перехода обнаруживается в аномальном изменении термодинамических свойств систем.

Начиная с некоторого значения давления (намного больше давления насыщения p_n), производился ступенчатый спуск давления (шаг Δp не более 0,5 МПа) в темпе, обеспечивающем адиабатичность процесса, и при этом измерялось соответствующее изменение температуры ΔT , на основе чего определялось соотношение $\frac{C_p}{\alpha_p} = \frac{dp}{dT} T$ в зависимости от уровня давления.

На рис. 4.10 показана характерная зависимость C_p / α_p от p для системы вода + CO₂ с газовым фактором 2 см³/см³. Как видно, в интервале давлений, существенно превышающих значение p_n , C_p / α_p практически остается постоянным. Но по мере приближения давления к значению p_n соотношение C_p / α_p постепенно возрастает, достигая максимального значения при p_n .

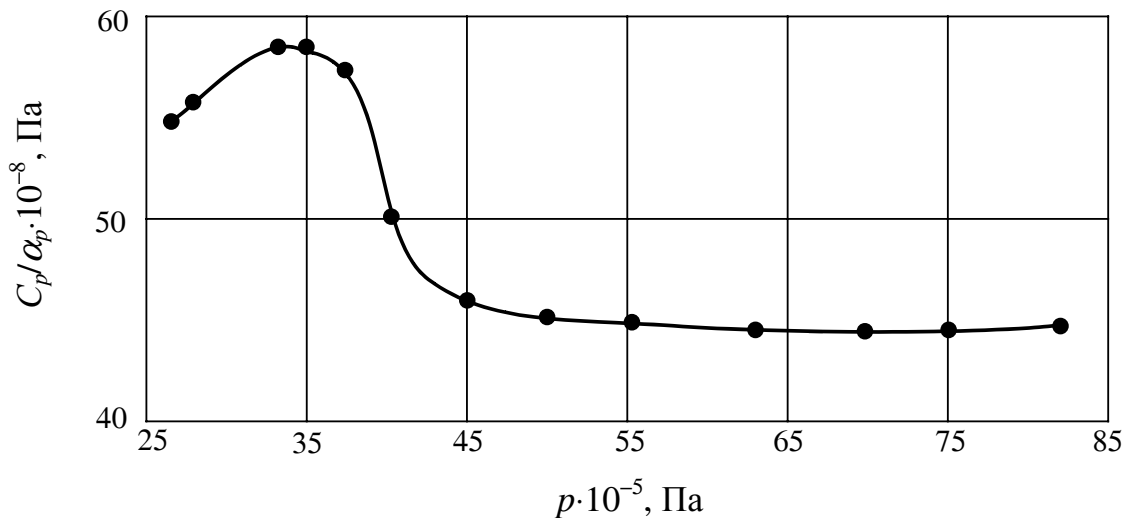


Рис. 4.10. Зависимость термодинамических характеристик от давления

Аналогичные эксперименты были проведены также в системах, содержащих сложный по составу газ. Так, на рис. 4.11 приведены результаты, полученные для смеси «трансформаторное масло + природный газ».

Как видим, в предпереходной области зависимость $\frac{C_p}{\alpha_p}$ от p носит немонотонный характер. Имеются два максимума, один из которых соответствует давлению насыщения, определенному объемным методом. Дру-

гой же максимум соответствует существенно большим давлениям (на 1–2 МПа).

В области микрзародышеобразования проявляется также неравно-весность процессов объемной деформации.

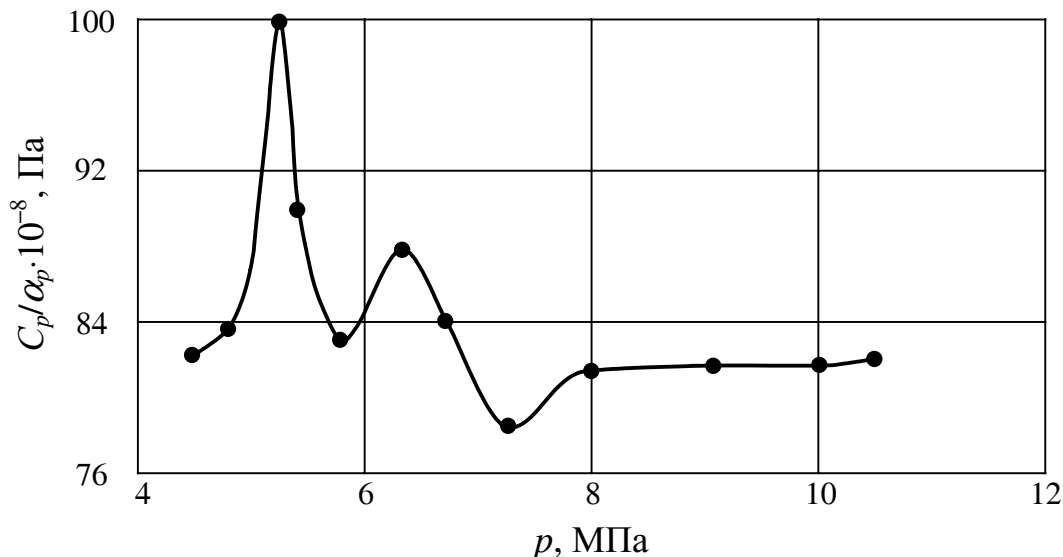


Рис. 4.11. Термодинамические характеристики сложной смеси

Сущность этого явления заключается в том, что после быстрой нагрузки (или разгрузки) жидкости с зародышами газа наблюдается релаксация давления – оно медленно снижается (или возрастает) до некоторого стационарного значения. Медленный прирост или снижение давления связаны со структурными изменениями, в результате которых система перепаковывается в энергетически удобную структуру.

Отметим, что аналогичные эффекты можно наблюдать при объемном нагружении тяжелых нефтей с содержанием смол и асфальтенов.

Релаксационные свойства газожидкостных систем в предпереходных условиях исследовались с помощью лабораторной установки, состоящей из бомбы PVT, гидравлического пресса с измерительной шкалой, термостата, манифольда, образцовых манометров, бачка для продавочной жидкости (см. рис 4.3). Бомба PVT состояла из двух камер: камеры высокого давления, в которой помещалась исследуемая среда, и камеры для продавочной жидкости (масло), которая подавалась с помощью пресса. Бомба PVT помещалась в термостатируемую рубашку и устанавливалась на шарнирах. Для подготовки рекомбинированной пробы в камеру высокого давления помещалась жидкость и подавался газ под большим давлением. Путем интенсивного перемешивания производилось растворение газа в жидкости.

Объемным методом определялось давление насыщения p_n , после чего система подвергалась барообработке путем циклического нагружения

до уровня давления p_0 , намного превышающего величину давления p_n . Таким образом, в системе устанавливалось термодинамическое равновесие. Далее с помощью гидравлического пресса производилась разгрузка системы с постоянным темпом изменения давления до уровня p_1 . (Величина снижения давления $\Delta p = p_0 - p_1$ составляла 0,2–1,0 МПа, а диапазон темпов изменения давления $\frac{dp}{dt} = 0,1 - 5$ МПа/мин.)

После разгрузки по показаниям образцового манометра регистрировалось увеличение давления в системе до равновесного значения. Затем производилось очередное снижение давления на ту же величину Δp и с тем же темпом изменения давления и проводились аналогичные замеры.

Ниже приведены результаты исследований на рекомбинированных пробах, составленных из трансформаторного масла с природным газом и воды с углекислым газом. В первом случае исходное давление p_0 составляло 13 МПа. Снижение давления производилось на величину $\Delta p = 1,0$ МПа. Для карбонизированной воды с давлением насыщения $p_n = 0,81$ МПа начальный уровень составлял $p_0 = 2,5$ МПа, а величина нагрузки $p = 0,25$ МПа. Все опыты проводились при постоянной температуре $T = 308$ К, которая достигалась путем термостатирования всех основных узлов установки.

На рис. 4.12 приведены кривые, полученные в одной серии таких экспериментов.

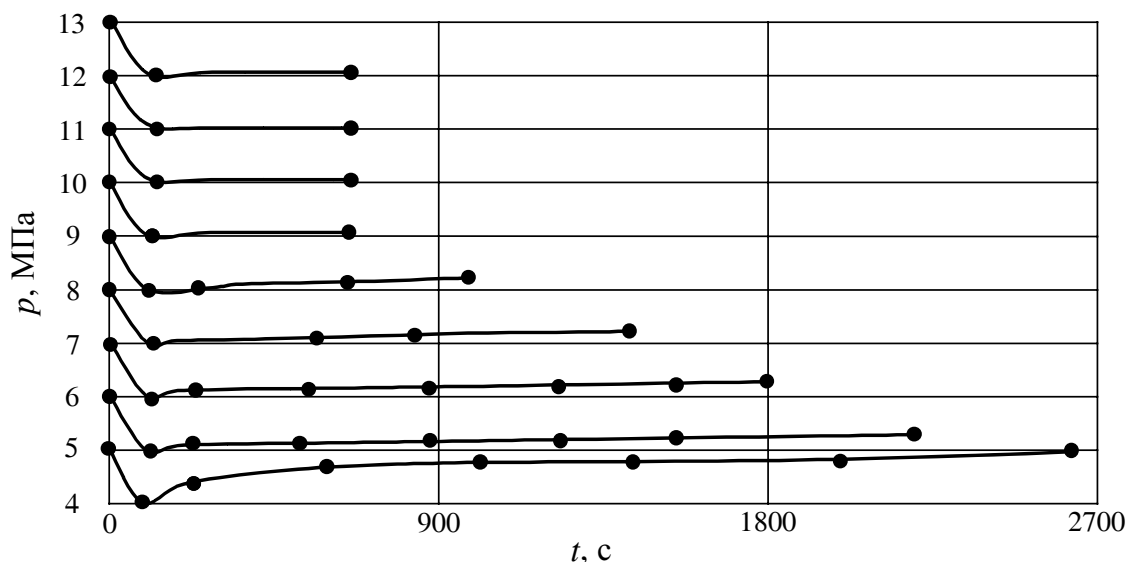


Рис. 4.12. Релаксация давления

Опыты показали, что при давлениях, намного превышающих давление p_n , релаксационные явления не наблюдаются. При приближении к давлению насыщения после разгрузки имеет место прирост давления, ве-

личина которого возрастает по мере приближения к точке фазового перехода. В описанных опытах изменение давления наблюдается, начиная с 9 и 15 МПа для первой и второй пробы соответственно. В табл. 4.3 и 4.4 сведены результаты экспериментов (δp – прирост давления, T – время релаксации).

Таблица 4.3

**Результаты экспериментов со смесью
«трансформаторное масло + природный газ»**

№ п/п	p_0 , МПа	p_1 , МПа	$\frac{dp}{dt}$, МПа/мин	δp , МПа	T , с
1	2	3	4	5	6
1	13	12	1,0	–	–
2	12	11	1,0	–	–
3	11	10	1,0	–	–
4	10	9	1,0	0,05	960
5	9	8	1,0	0,15	1500
6	8	7	1,0	0,3	1620
7	7	6	1,0	0,35	1800
8	6	5	1,0	0,38	2700
9	5	4,3	1,0	0,61	3600
1	13	12	0,5	–	–
2	12	11	0,5	–	–
3	11	10	0,5	–	–
4	10	9	0,5	0,02	600
5	9	8	0,5	0,09	1080
6	8	7	0,5	0,18	1560
7	7	6	0,5	0,2	1800
8	6	5	0,5	0,25	2400
9	5	4,3	0,5	0,39	2700

Для изучения влияния микрочастиц газа на эффективность вытеснения нефти из послойно-неоднородных пластов были проведены экспериментальные исследования на модели пласта с двойной проницаемостью. Установлено, что при фильтрации газожидкостной смеси в условиях зародышеобразования ($p \approx 1,3p_n$) отношение расходов в высоко- и низкопроницаемых средах становится близким к единице, т. е. наблюдается выравнивание фронта вытеснения.

На рис. 4.13 показано изменение коэффициента нефтеотдачи η при вытеснении трансформаторного масла обычной и карбонизированной водой в предпереходных условиях.

Таблица 4.4
Результаты экспериментов со смесью «вода + углекислый газ»

№ п/п	p_0 , МПа	p_1 , МПа	$\frac{dp}{dt}$, МПа/мин	δp , МПа	T , с
1	2,5	2,25	0,16	–	–
2	2,25	2,0	0,16	–	–
3	2,0	1,75	0,16	–	–
4	1,75	1,5	0,16	0,008	960
5	1,5	1,25	0,16	0,02	1080
6	1,25	1,0	0,16	0,04	1320
7	1,0	0,85	0,16	0,055	2340

Как видно, в случае применения карбонизированной воды наблюдается увеличение нефтеотдачи, особенно в низкопроницаемом пласте. Это ведет к увеличению суммарного отбора из пласта. Кроме этого, заметно снижается объем прокачиваемой воды (приблизительно на 70%).

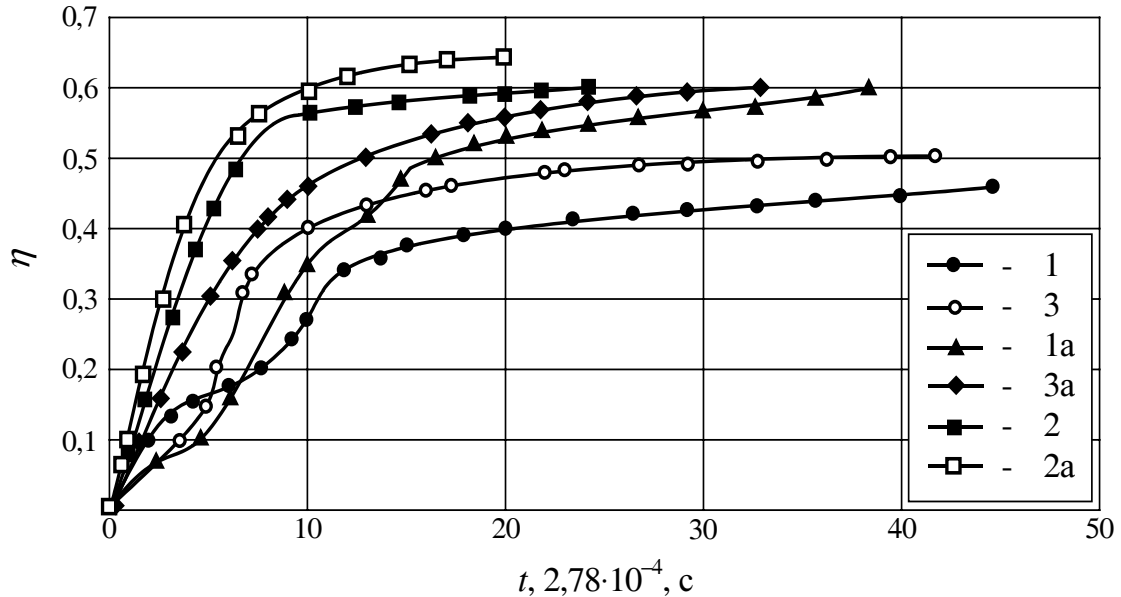


Рис. 4.13. Динамика вытеснения нефти:

- 1 – низкопроницаемый пласт, вытеснение обычной водой;
- 1а – низкопроницаемый пласт, вытеснение карбонизированной водой;
- 2 – высокопроницаемый пласт, вытеснение обычной водой;
- 2а – высокопроницаемый пласт, вытеснение карбонизированной водой;
- 3 – суммарный коэффициент вытеснения обычной водой;
- 3а – суммарный коэффициент вытеснения карбонизированной водой.

4.3. Процессы зародышеобразования в газоконденсатных системах

Как показывают эксперименты, стабильные зародыши фазы могут образоваться и в газоконденсатных системах при приближении к давлению выпадения конденсата.

Исследования особенностей этих процессов были проведены на лабораторной установке (рис. 4.14), состоящей из: 1 – бомбы PVT; 2 – измерительного пресса; 3 – образцового манометра; 4 – датчика давления; 5 – усилителя; 6 – самопишущего прибора; 7 – термостата.

В ходе экспериментов газоконденсатная смесь, состоящая из природного газа и нормального гексана (газовый фактор $4800 \text{ см}^3/\text{см}^3$, давление насыщения конденсата $17,5 \text{ МПа}$), помещалась в бомбу PVT при начальном давлении $p_0 = 35 \text{ МПа}$. Система термостатировалась при температуре 333 К .

Далее давление в бомбе PVT уменьшалось путем отбора газоконденсатной смеси с постоянным темпом $0,9 \text{ см}^3/\text{мин}$. После достижения давления $p_1 = p_0 - \Delta p_0$, где $\Delta p_0 = 0,8 \text{ МПа}$, бомба PVT закрывалась. Поскольку достижение температурного равновесия в бомбе PVT требует определенного времени, то в закрытой бомбе PVT наблюдался медленный рост давления до некоторого равновесного значения p_1^∞ .

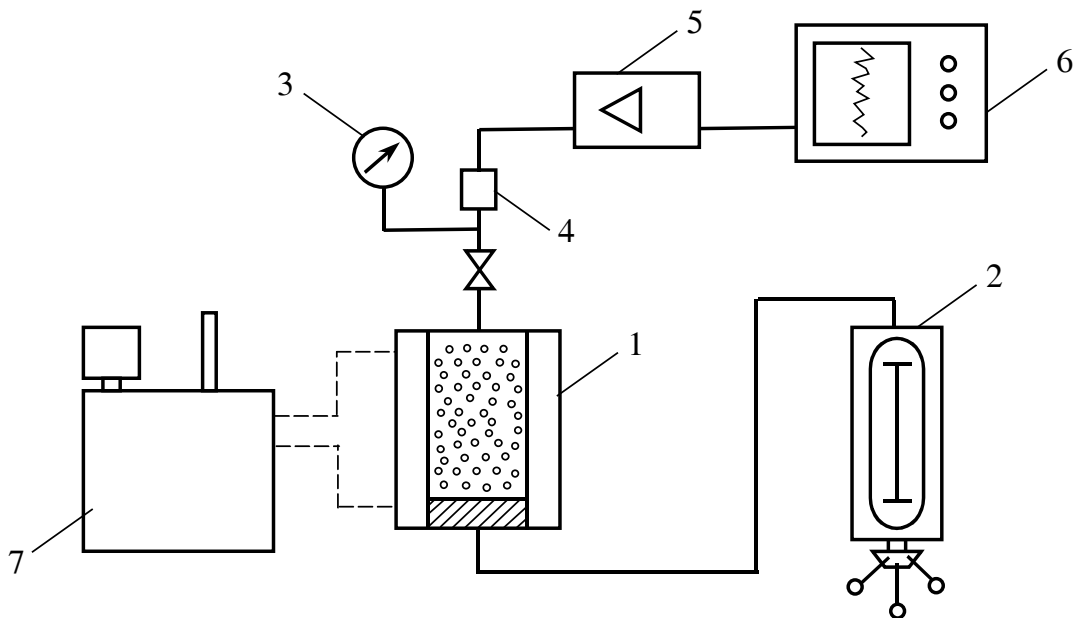


Рис. 4.14. Схема экспериментальной установки

Затем вновь с тем же темпом начинался отбор газоконденсатной смеси из бомбы PVT до достижения давления $p_2 = p_0 - 2\Delta p_0$, после чего наблюдалась релаксация давления до значения $p_2^\infty > p_2$.

Путем обработки кривых релаксации давления определялась зависимость приращения давления $\Delta p_i = p_i^\infty - p_i$ и времени релаксации λ_i от уровня давления p_i , $i = 1, 2, \dots$ (рис. 4.15 и 4.16).

Как видно из этих рисунков, при приближении давления к давлению конденсатообразования наблюдается резкое усиление неравновесных свойств газоконденсатной смеси. Это может быть объяснено тем, что в предпереходной области (около 23 МПа) начинается образование микророзродышей конденсата, максимальным образом проявляющих себя при давлении около 20,5 МПа.

Следующая серия экспериментов была посвящена исследованию особенностей фильтрации газоконденсатной смеси в предпереходных условиях.

Для изучения влияния микророзродышей конденсата на характеристики пористой среды при давлениях, превышающих давление начала конденсации, использовались стационарные и нестационарные методы исследования, заключающиеся в установлении индикаторной зависимости и регистрации кривых восстановления давления на насыпной фильтрационной модели, представляющей собой колонку, набитую измельченным кварцевым песком с проницаемостью $0,02 \text{ мкм}^2$.

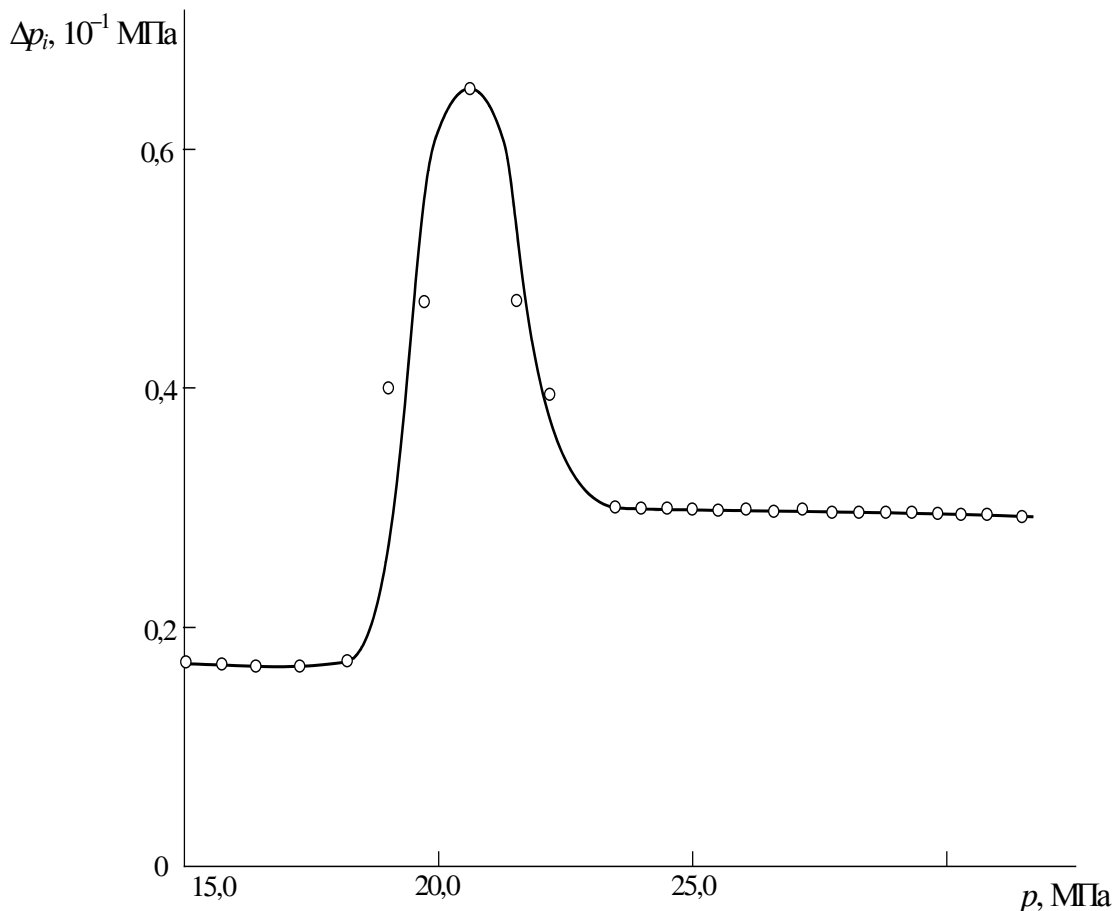


Рис. 4.15. Зависимость значения Δp_i от уровня давления

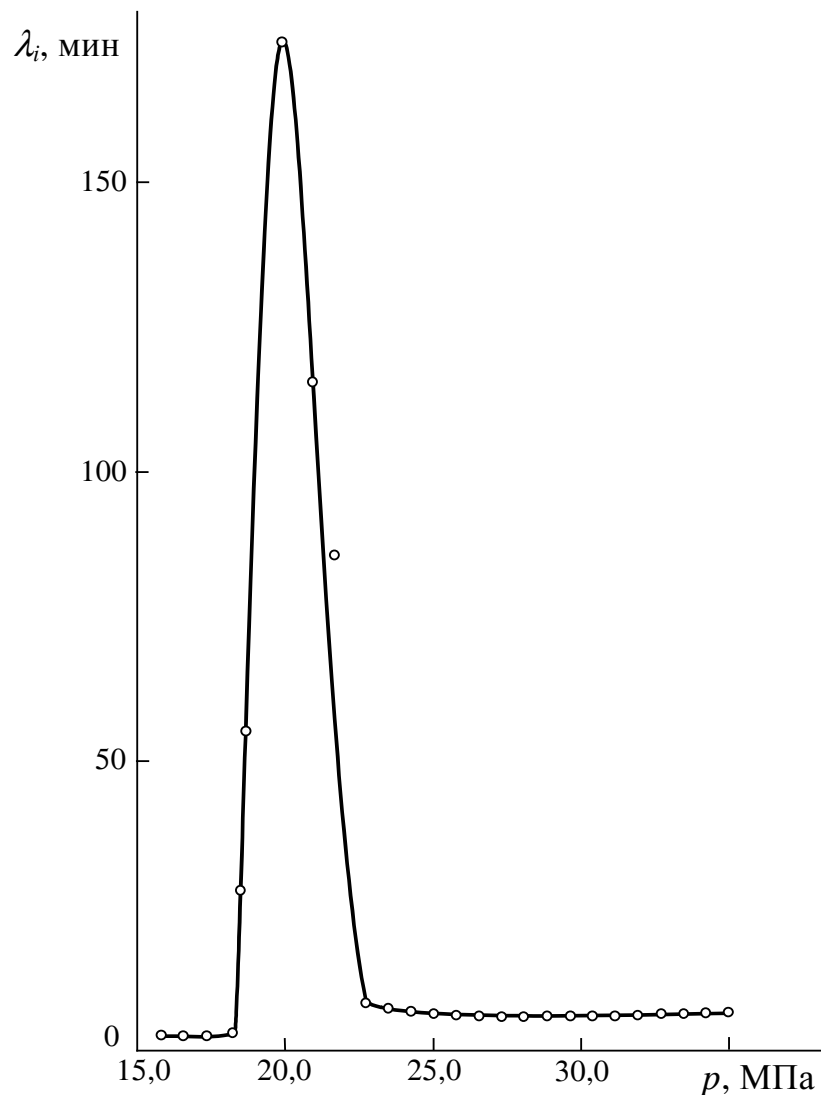


Рис. 4.16. Зависимость времени восстановления давления от уровня давления

Исследуемая газоконденсатная система полностью аналогична смеси природного газа и гексана, использованной в описанных выше экспериментах.

Индикаторные кривые и КВД снимались при различных уровнях давления в фильтрационной колонке.

В ходе экспериментов давление в колонке ступенчато уменьшалось с шагом $\Delta p_0 = 1,6$ МПа, начиная со значения $p_0 = 33,6$ МПа.

На каждом уровне на модели пласта создавался перепад давления 0,8 МПа, поддерживаемый постоянным. После установления равновесной фильтрации определялся расход газа Q_G . На рис. 4.17 представлена зависимость этой величины от уровня давления. Как видно из графика, в предпереходных условиях наблюдается значительное улучшение фильтрационных свойств, что аналогично явлениям, имеющим место при фильтрации газожидкостной смеси с зародышами газа (раздел 4.1, 4.2).

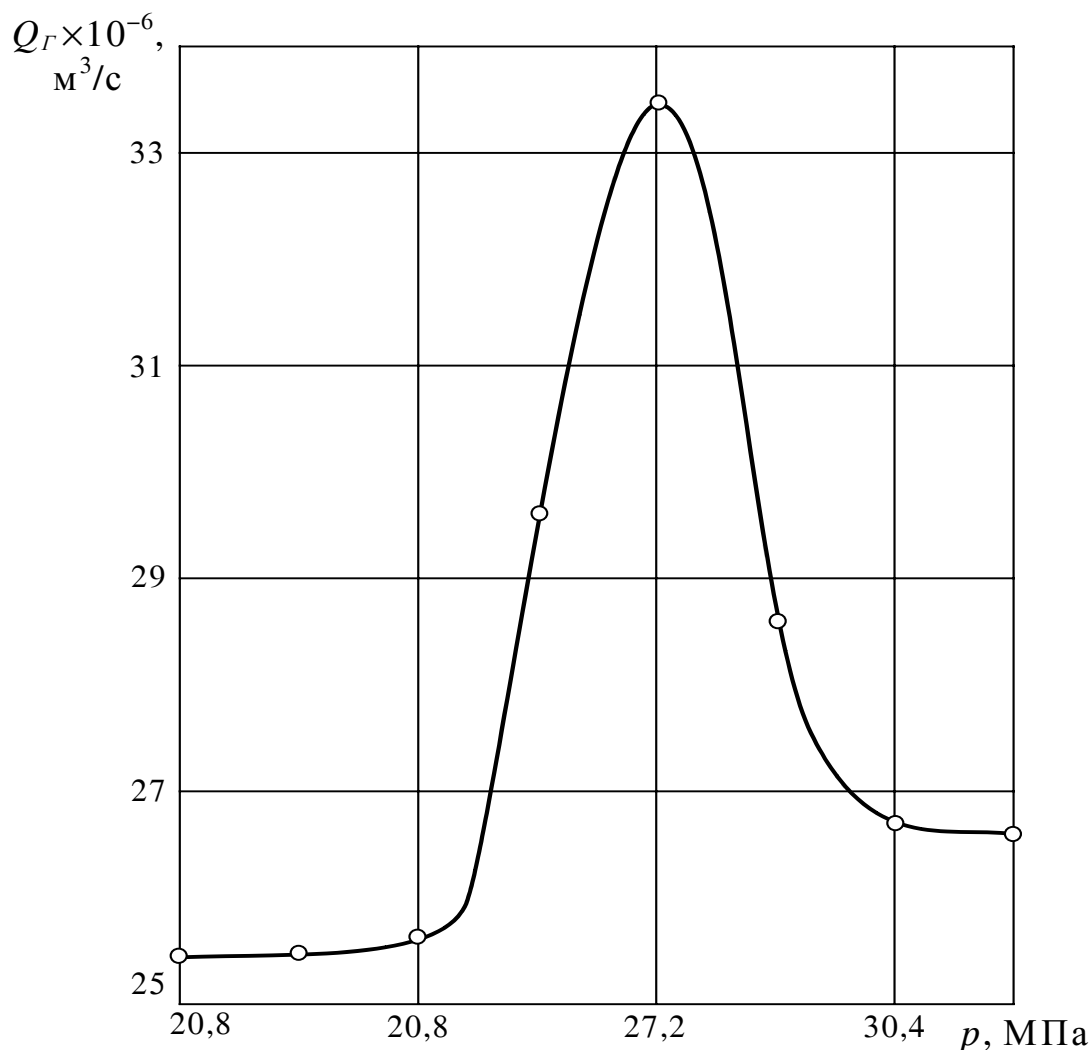


Рис. 4.17. Зависимость расхода газа от уровня давления

Максимальное значение расхода имеет место при давлении 27,2 МПа и превышает расход, замеренный при 32 МПа, примерно на 20%. Дальнейшее снижение давления приводит к уменьшению дебита газа и при приближении к давлению начала конденсации составляет примерно 70% от максимального значения расхода газа.

Выявленные закономерности могут быть объяснены появлением на поверхности пор микророзодышей конденсата. Вначале они способствуют улучшению фильтрационных характеристик пористой среды, но дальнейшее снижение давления приводит к увеличению размеров микророзодышей, вследствие чего фильтрационные сопротивления вновь возрастают.

Кроме замеров расхода газа, на каждом уровне давления производились нестационарные гидродинамические исследования. При этом перекрывался выход фильтрационной колонки, давление на входе поддерживалось постоянным, а на выходе снимались кривые восстановления давления $\Delta p(t)$.

На рис. 4.18 показаны кривые восстановления давления, характерные для области давлений выше зоны образования микрородышей (кривая 1); зоны микрородышеобразования (кривая 2); области выпадения конденсата (кривая 3). Видно, что быстрее всего восстановление происходит при давлениях, значительно превышающих давление начала конденсации. Образование микрородышей существенно замедляет этот процесс.

Для сравнения полученных данных кривые восстановления были перестроены в полулогарифмических координатах (y, t) , где

$$y = -\ln\left(1 - \frac{\Delta p(t)}{\Delta p_{\infty}}\right),$$

$\Delta p(t)$ – изменение давления на выходе модели пласта, Δp_{∞} – асимптотическое значение Δp :

$$\Delta p_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta p(t).$$

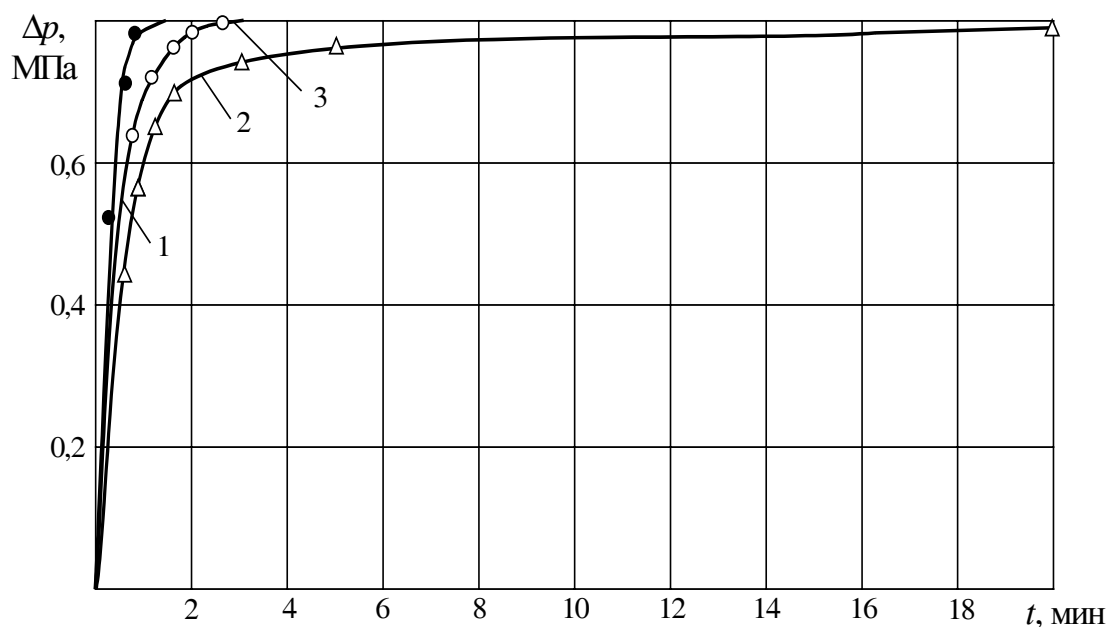


Рис. 4.18. Кривые восстановления давления:

- 1 – выше давления образования микрородышей;
- 2 – в зоне образования зародышей;
- 3 – в области выпадения конденсата

Из рис. 4.19 видно, что при давлениях, значительно превышающих давление начала конденсации, перестроенные кривые восстановления давления (КВД) имеют прямолинейный вид. Это же наблюдается и для КВД, снятых в пористой среде после выпадения конденсата.

В области зародышеобразования зависимость $y(t)$ отличается от прямолинейной, т. е. кривая восстановления не может быть описана одноэкспоненциальной зависимостью. Впрочем, это характерно для всех сложных иерархически построенных систем (раздел 4.1).

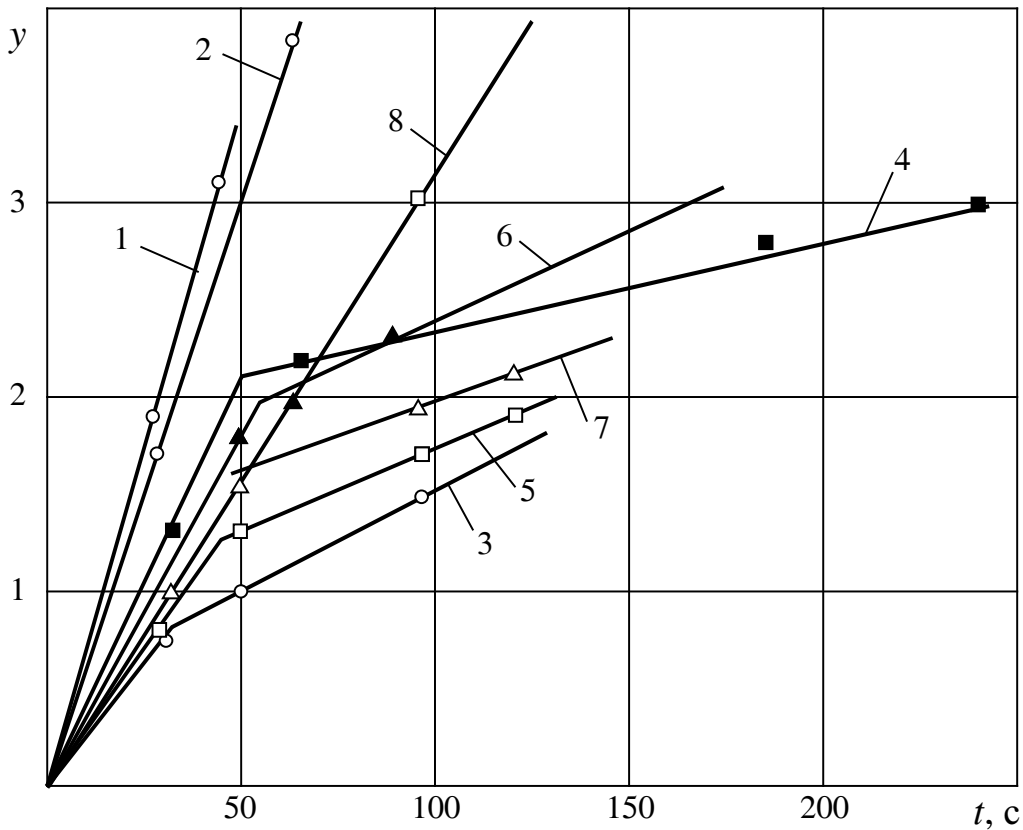


Рис. 4.19. Обработка кривых восстановления давления:

1 – 32 МПа; 2 – 30,4 МПа; 3 – 28,8 МПа; 4 – 27,2 МПа;
5 – 25,6 МПа; 6 – 24 МПа; 7 – 22,4 МПа; 8 – 20,8 МПа

Выявленные нами эффекты могут найти широкое применение в практике разработки газоконденсатных месторождений.

Так, производительность скважин может быть значительно повышена, если давление в призабойной зоне пласта будет соответствовать области образования зародышей конденсата.

При отсутствии априорной информации начало образования микрозародышей можно оценить по результатам нестационарных гидродинамических исследований скважин (по изменению вида КВД).

4.4. Стохастические колебания при течении жидкостей с зародышами газа

Для исследования влияния зародышей газа на течение газожидкостной системы в трубе в области предпереходных состояний была проведена серия лабораторных экспериментов. На участке трубы длиной $L = 1,4$ м и диаметром $D = 0,04$ м снимались расходные характеристики $\Delta p = \Delta p(G)$ (Δp – перепад давления, G – массовый расход) для ламинарного изотерми-

ческого течения раствора углекислого газа в воде. Давление на входе p_1 поддерживалось постоянным, расход G регулировался с помощью крана, установленного на конечном участке трубы. При этом давление на всем исследуемом участке трубы было выше давления насыщения $p_n = 0,1$ МПа. Массовый расход определялся весовым методом с помощью электронных весов ВН 500 с точностью до $5 \cdot 10^{-5}$ кг. Перепад давления определялся дифференциальным манометром, в качестве рабочей жидкости которого использовался четыреххлористый углерод (с плотностью 1600 кг/м^3). Погрешность измерения перепада давления составляла ≈ 4 Па. Были проведены 5 серий экспериментов при следующих величинах давления p_1 : $1,25 \cdot p_n$, $1,40 \cdot p_n$, $1,75 \cdot p_n$, $2,50 \cdot p_n$, $3,00 \cdot p_n$. Следует отметить, что перепад давления Δp , достигаемый в опытах, пренебрежимо мал по сравнению с этими значениями, поэтому давление по длине трубы меняется незначительно. Анализ расходных характеристик показывает, что в предпереходной области происходит увеличение пропускной способности трубы $k = \frac{G}{\Delta p}$. Максимум увеличения k наблюдается при $p_1 = 1,4$ и составляет 10%. Можно предположить, что эти явления вызваны образованием зародышей газа, которые адсорбируются на поверхности стенок трубы и повышают ее пропускную способность за счет эффектов типа «газового подшипника» (см. выше).

Следующая серия экспериментов была проведена с целью исследования динамики изменения пропускной способности трубы под влиянием зародышей газа. В качестве рабочей жидкости было выбрано трансформаторное масло, насыщенное углекислым газом при давлении $p_n = 0,1$ МПа. В ходе экспериментов длительное время поддерживалось течение масла в трубе с внутренним диаметром 0,01 м и длиной 1,85 м при давлении $1,15 p_n$ и через равные промежутки времени ($\Delta t = 5$ мин) производились замеры массового расхода и перепада давления. Анализ полученных таким образом данных показал, что в масштабе времени $t \gg t_0$ (где $t_0 = \frac{L\rho D^2}{G}$ – время прохождения частиц жидкости через трубу, ρ – плотность жидкости) наблюдается изменение пропускной способности трубы k , причем на характер зависимости k от времени существенно влияет скорость течения жидкости. Для примера на рис. 4.20 показаны зависимости $k = k(t)$, полученные при различных значениях расхода. Там же обычным образом показана погрешность определения k . Оказалось, при $v > 0,05$ м/с (где $v = \frac{4G}{\pi\rho D^2}$ – средняя скорость течения) пропускная способность трубы со временем практически не меняется (см. рис. 4.20, а). При уменьшении ско-

рости ($v \approx 0,04$ м/с) пропускная способность после начала прокачки газожидкостной системы монотонным образом увеличивается до некоторого нового стационарного значения (см. рис. 4.20, б).

Дальнейшее уменьшение скорости течения ($v < 0,02$ м/с) приводит к тому, что изменение пропускной способности принимает колебательный характер. Поскольку характерные времена изменения пропускной способности намного больше времени прохождения частицами газожидкостной системы трубы t_0 , то можно предположить, что колебания пропускной способности связаны с накоплением зародышей газа в пристенных областях трубы и их последующим выносом.

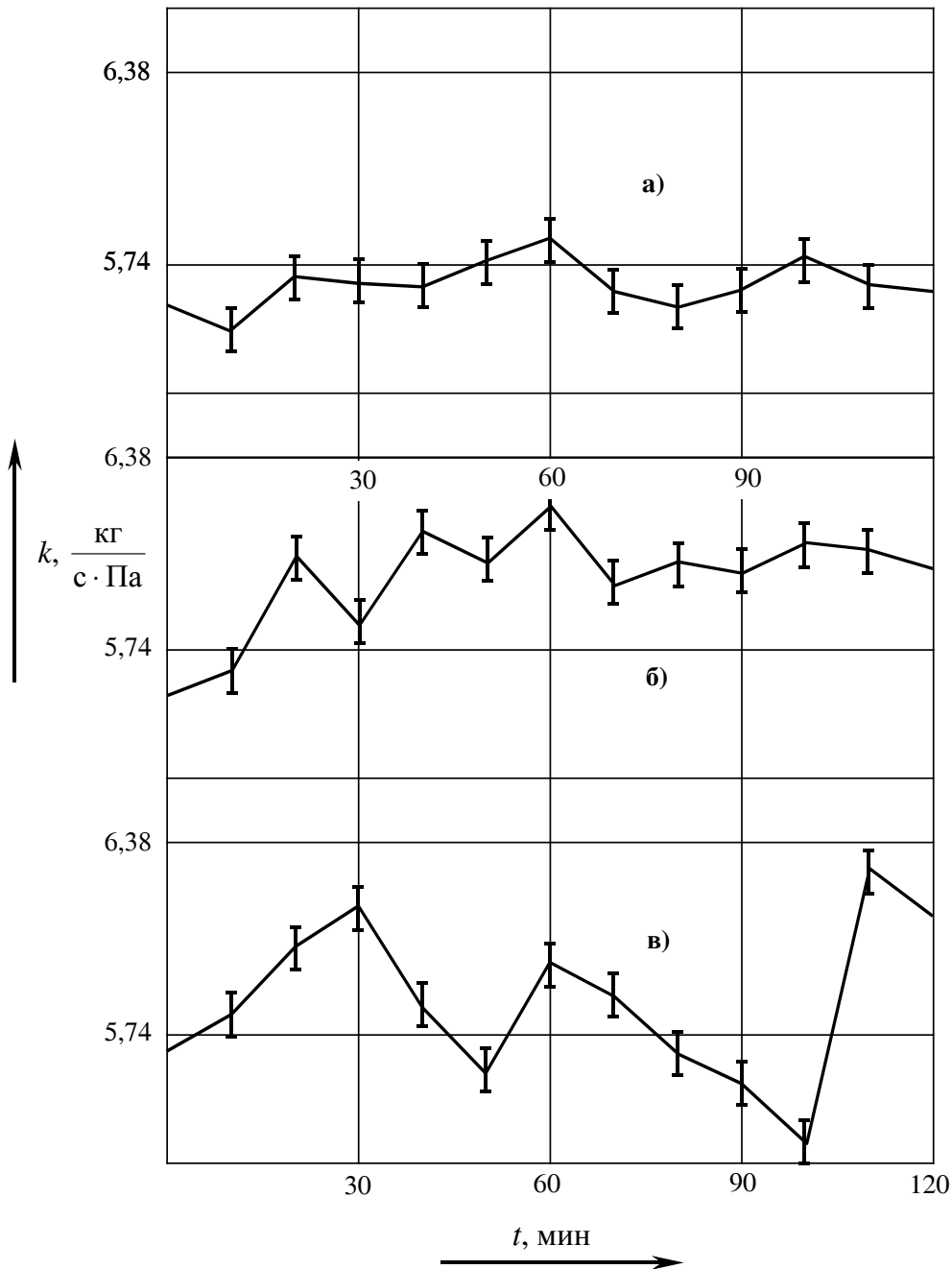


Рис. 4.20. Зависимость $k = k(t)$

Для описания этих процессов рассмотрим следующую эвристическую модель. Предположим, что в пристенных областях трубы скапливаются зародыши газа двух видов – «мелкие» и «крупные», радиусами R_1 и R_2 соответственно. Зародыши радиуса R_1 первоначально находятся в объеме жидкости и осаждаются на стенках при протекании жидкости по трубе. Центрами осаждения зародышей радиуса R_1 являются зародыши радиуса R_2 , поэтому скорость осаждения мелких зародышей пропорциональна численности крупных зародышей. Будем считать, что в дальнейшем часть мелких зародышей с какой-то скоростью покидает стенки трубы. Взаимодействие оставшихся мелких зародышей со стенками трубы нарушает их стабильность, и они постепенно растут за счет диффузионного притока молекул газа из объема жидкости, достигая за некоторое время τ размеров крупных зародышей. Зародыши радиуса R_2 , взаимодействуя с потоком жидкости, изменяют гидродинамическую обстановку в пристенных областях, что увеличивает пропускную способность трубы. Будем считать, что крупные зародыши могут быть вынесены потоком жидкости, поэтому скорость их уменьшения пропорциональна расходу G .

Сделанные выше предположения приводят к следующей системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающей процессы накопления и выноса зародышей:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \alpha N_2 - \gamma N_1 - F(N_1(t - \tau)), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\delta G N_2 + F(N_1(t - \tau)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где N_1 и N_2 – численности мелких и крупных зародышей на стенках трубы; α и γ – коэффициенты, характеризующие скорости, с которыми мелкие зародыши осаждаются на стенках и покидают их; δ – коэффициент, характеризующий скорость выноса крупных зародышей; $F(N_1)$ – функция, определяющая интенсивность образования крупных зародышей из мелких. Зададим следующую параметризацию функции $F(N_1)$:

$$F(N_1) = \frac{\beta N_1}{1 + M N_1^s}, \quad (4.10)$$

где β , M , s – некоторые постоянные ($s > 1$). При $N_1 > [(s-1)M]^{-1/s}$ функция (4.10) монотонно убывает, что объясняется уменьшением интенсивности образования крупных зародышей при больших N_1 из-за наличия пространственных ограничений.

Расход жидкости в условиях описанного выше эксперимента находится из уравнений

$$\begin{aligned} G &= K(p_1 - p_2), \\ p_2 - p_0 &= CG, \end{aligned}$$

где p_1 – давление на входе трубы, p_2 – давление в конце трубы перед краном, p_0 – давление после крана (атмосферное давление), C – коэффициент, характеризующий сопротивление крана. Исключив p_2 , получим,

$$G = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{K} + C}, \quad (4.11)$$

где $\Delta p_0 = p_1 - p_0$ – постоянный в условиях опыта перепад давления. Как уже отмечалось, пропускная способность трубки при наличии зародышей увеличивается, причем относительное изменение достигает 10%. Поэтому зависимость K от N_2 можно параметризовать в виде

$$K = \frac{K_0}{1 - \mu N_2}, \quad (4.12)$$

где $\mu > 0$ и величина μN_2 мала. Подставив (4.10)–(4.12) в (4.9), получим после обезразмеривания

$$\frac{dn_1}{dt} = v n_2 - n_1 - \sigma \cdot \frac{n_1(t - \tau)}{1 + n_1^s(t - \tau)}, \quad (4.13)$$

$$\varepsilon \frac{dn_2}{dt} = -\frac{n_2}{1 - n_2} + \lambda \frac{n_1(t - \tau)}{1 + n_1^s(t - \tau)},$$

$$q = \frac{1}{1 - n_2},$$

где
$$n_i = \frac{N_i}{N_{i0}} \quad (i = 1, 2),$$

$$N_{10} = M^{-1/s}, \quad N_{20} = \frac{1 + CK_0}{\mu},$$

$$t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \tau \rightarrow \frac{\tau}{t_0}, \quad t_0 = \frac{1}{\gamma},$$

$$v = \frac{\alpha N_{20}}{\gamma N_{10}}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \sigma,$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\sigma G_0}, \quad \lambda = \frac{\beta N_{10}}{\sigma G_0 N_{20}},$$

$$g = \frac{G}{G_0}, \quad G_0 = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{K_0} + C}.$$

Анализ показывает, что при $r = v\lambda - \sigma < 1$ система (4.13) имеет единственное состояние равновесия – точку $O(0, 0)$. При $r > 1$ существует

еще одно равновесное значение – точка $O_1(n_{10}, n_{20})$, где n_{10} – решение уравнения

$$\frac{\nu\lambda}{1+n_{10}^s+\lambda n_{10}}=1+\frac{\sigma}{1+n_{10}^s},$$

$$n_{20}=n_{10}\left(1+\frac{\sigma}{1+n_{10}^s}\right)\cdot\frac{1}{\nu}.$$

При малых μ величиной λn_{10} можно пренебречь. При этом

$$n_{10}=(r-1)\frac{1}{s}. \quad (4.14)$$

Используя метод D -разбиений [12], построим области устойчивости стационарных решений.

Для нулевого решения получим характеристическое уравнение

$$\varepsilon p^2 + (\varepsilon + 1)p + 1 + (\sigma \varepsilon p - r)e^{-p\tau} = 0. \quad (4.15)$$

Произведем D -разбиение в плоскости $(\sigma - r)$. Подставив в (4.15) $p = i\omega$, получим

$$\begin{aligned} \sigma \varepsilon \omega \sin \omega \tau - r \cos \omega \tau &= \varepsilon \omega^2 - 1, \\ \sigma \varepsilon \omega \cos \omega \tau + r \sin \omega \tau &= -(\varepsilon + 1)\omega. \end{aligned}$$

Определитель этой системы $\Delta = \varepsilon \omega$. Следовательно, границы D -областей определяются особой прямой $r = 1$ и кривой, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\varepsilon \omega} \left[(\varepsilon \omega^2 - 1) \sin \omega \tau - (\varepsilon + 1) \omega \cos \omega \tau \right], \\ r &= - \left[(\varepsilon + 1) \omega \sin \omega \tau + (\varepsilon \omega^2 - 1) \cos \omega \tau \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

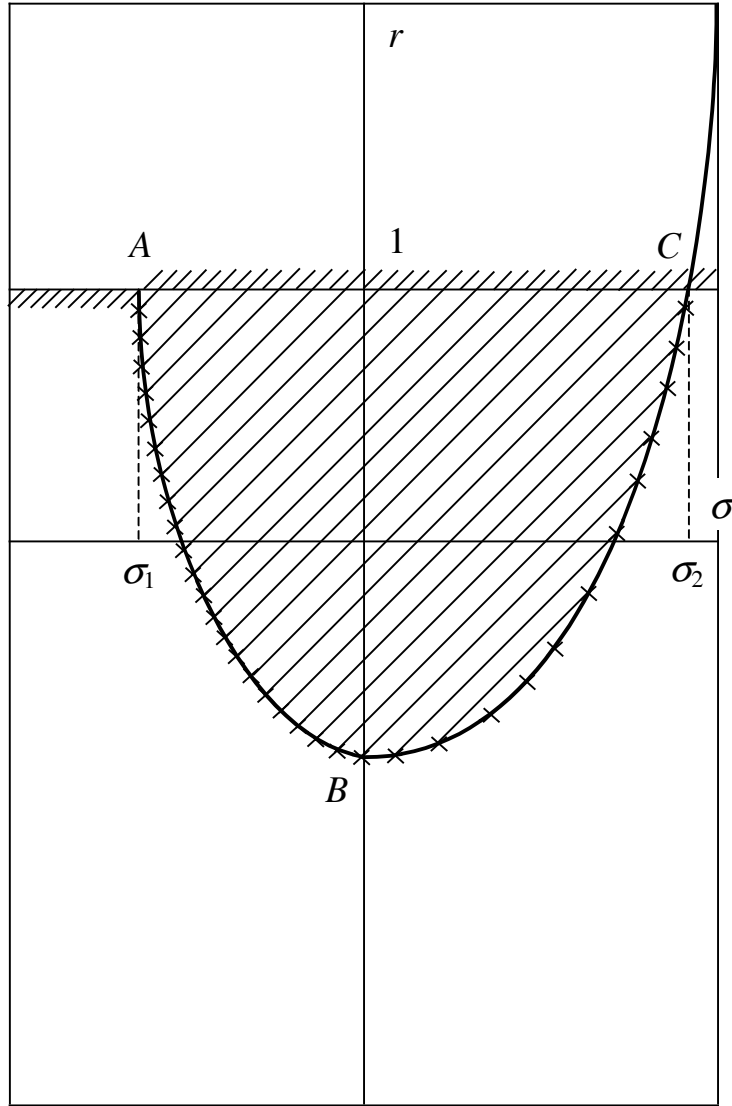
Соответствующее D -разбиение представлено на рис. 4.21, заштрихованная область есть область устойчивости $D(0)$. В параметрической форме дуга ABC определяется уравнениями (4.16) при $0 < \omega < \omega^1$, где ω^1 – наименьший положительный корень уравнения

$$(\varepsilon + 1)\omega \sin \omega \tau + (\varepsilon \omega^2 - 1)\cos \omega \tau = -1.$$

Из рис. 4.21 ясно, что система устойчива при

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2; \quad r_* < r < 1, \quad \text{где } \sigma_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma = \frac{1}{\varepsilon}(\tau + \varepsilon + 1).$$

$\sigma_2 = \sigma(\omega^1)$, $r_* = \Psi(\sigma_1, \varepsilon, \tau)$, $\Psi(\sigma, \varepsilon, \tau)$ – уравнение дуги ABC . При $r > 1$ система аperiodически неустойчива, а при $r < r_*$ – периодически неустойчива. Из приведенного выше анализа следует, что для всех σ , ε , τ при $r > 1$ точка равновесия $O(0, 0)$ теряет устойчивость (здесь не рассматривается периодическая неустойчивость стационарного решения $O(0, 0)$, поскольку величины n_1 и n_2 могут принимать только положительные значения). При этом у системы (4.13) появляется новое положение равновесия $O(n_{10}, n_{20})$. Исследуем устойчивость этой точки.

Рис. 4.21. *D*-разбиение

Соответствующее характеристическое уравнение получается из (4.15) заменой ε на $\varepsilon_0 = \varepsilon(1 - n_{20})^2$, σ на $\sigma_0 = \sigma f$, r на

$$r_0 = \left[\nu \lambda (1 - n_{20})^2 - \sigma \right] f,$$

где

$$f = \frac{1 + (1 - s)n_{10}^s}{(1 + n_{10}^s)^2}.$$

Для простоты рассмотрим случай малых μ , когда n_{10} определяется выражением (4.14) и $1 - n_{20} \approx 1$. При этом

$$\varepsilon_0 = \varepsilon, \quad \sigma_0 = \frac{-\sigma[(s-1)(r-1)-1]}{r^2},$$

$$r_0 = -\frac{(s-1)(r-1)-1}{r}.$$

Из рис. 4.21 следует, что если $\sigma_0 < \sigma_1$, $\sigma_0 > \sigma_2$ или $r_0 < r_m$, где $r_m = \Psi(0, \varepsilon, \tau)$, то стационарное решение (n_{10}, n_{20}) неустойчиво. При $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ точка равновесия O_1 устойчива, если $r_0 > \Psi(\sigma_0, \varepsilon, \tau)$, и периодически неустойчива, если $r_0 < \Psi(\sigma_0, \varepsilon, \tau)$.

Численные расчеты показывают, что при переходе через границу периодической неустойчивости, вследствие увеличения значения r , вначале возникают периодические колебания $n_1(t)$, $n_2(t)$, а затем через каскад бифуркаций удвоения периода – хаотические колебания.

Поскольку, как легко видеть,

$$r = \sigma \left(\frac{\alpha}{\delta G_0} - 1 \right),$$

то при постоянных σ , α и δ все эти бифуркации связаны с уменьшением G_0 – расхода в отсутствие зародышей. Поэтому при проведении расчетов фиксировались значения величин ν , σ , $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\varepsilon}$ и варьировался пара-

метр $b = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\delta G_0}{\gamma}$. Оказалось, что при уменьшении расхода после потери

устойчивости точки равновесия O_1 вначале возникают периодические колебания величин n_1 , n_2 , а затем через каскад бифуркаций удвоения периода – хаотические колебания. Так, численное интегрирование (4.13) при $\tau = 5$, $N = 5$, $\nu = 20$, $\sigma = 0,5$, $\lambda_1 = 1$ показало, что при $b = b_0 \approx 8,2$ происходит переход от точки равновесия O_1 к предельному циклу. В точках $b_1 \approx 6,5$, $b_2 \approx 5,58$, $b_3 \approx 5,38$ происходят бифуркации удвоения периода, которые завершаются переходом к хаотическому движению в точке сгущения $b = b_\infty \approx 5,31$. Для примера на рис. 4.22 представлена зависимость $G = G(t)$, соответствующая хаотическим колебаниям, возникающим при $b = 5,25$.

Из полученных выше результатов следует, что при достаточно больших значениях G_0 накопления зародышей на стенках не происходит. При уменьшении расхода система переходит в новое стационарное состояние, характеризующееся большим значением пропускной способности трубки. Дальнейшее уменьшение расхода приводит к возникновению вначале периодических, а затем хаотических колебаний пропускной способности. Эти выводы находятся в согласии с приведенными выше экспериментальными данными.

Расчеты показывают, что периоды автоколебаний порядка τ . Поскольку характерные времена изменения пропускной способности трубы составляют 30–60 мин (см. рис. 4.20), то такой же порядок должно иметь время роста зародышей. Характерное время диффузионного прито-

ка $\tau_D \sim \frac{R_0^2}{D}$, где R_0 – радиус зародышей, D – коэффициент диффузии молекул газа в жидкости. Так как $D \sim 10^{-9}$ м²/с, то $\tau_D \sim 10^3$ с лишь при $R_0 \sim 10^{-3}$ м. Оценки радиусов зародышевых пузырьков газа дают намного меньшие значения [1], следовательно, скорость роста зародышей лимитируется не скоростью диффузии.

По всей видимости, переход молекулы газа из растворенного состояния в стабильный зародыш требует преодоления некоторого потенциального барьера U , что и уменьшает скорость роста зародышей. При этом

$$\tau \sim e^{\frac{U}{k_B T}},$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – температура.

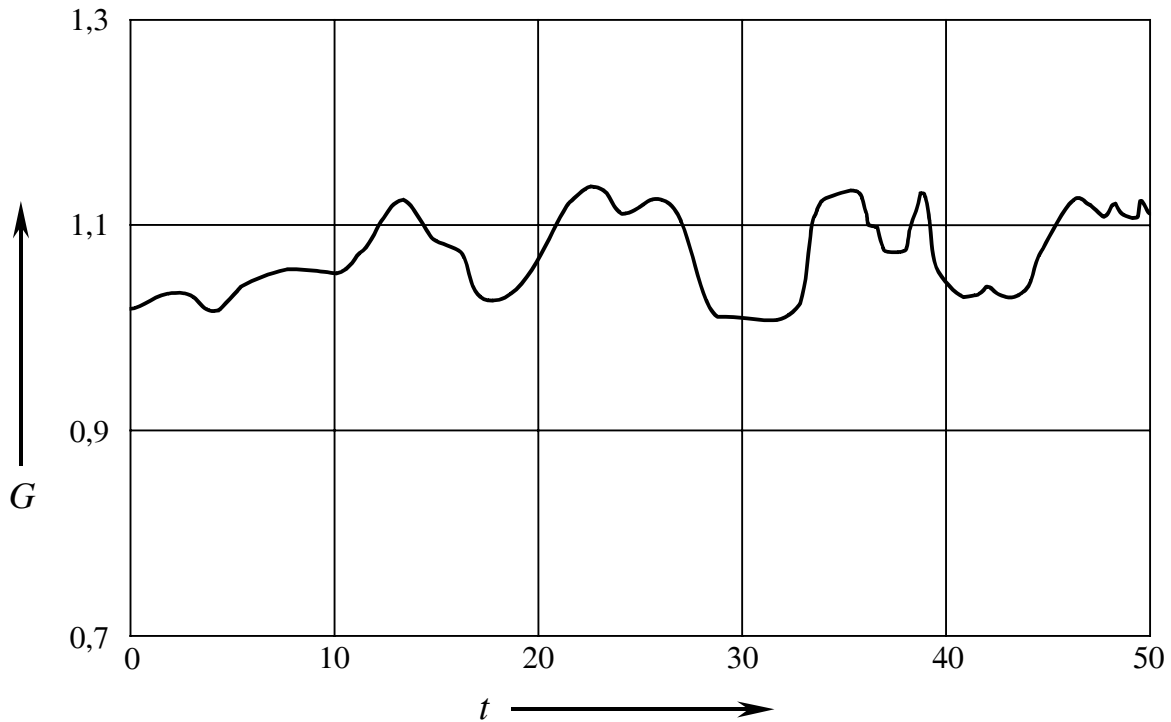


Рис. 4.22. Хаотические колебания расхода

Полученные результаты могут найти широкое применение при контроле и управлении процессами медленного течения газожидкостных систем при давлении выше давления насыщения. Отметим, в частности, тот факт, что конструктивные особенности некоторых турбинных расходомеров таковы, что в них образуются «застойные» зоны с пониженной скоростью течения нефти. При этом могут возникнуть колебания численностей зародышей газа, что, в свою очередь, может привести к колебаниям коэффициента преобразования расходомера. Анализ рассмотренной выше модели может позволить выработать рекомендации по устранению нежелательных явлений такого рода.

4.5. Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа

В настоящем разделе выведены уравнения, описывающие нестационарную фильтрацию газожидкостных систем в предпереходных условиях. Показано, что если скорость образования зародышей газа достаточно велика, то стационарные режимы фильтрации могут стать неустойчивыми. При этом возникают периодические автоколебания, усложнение которых может привести к детерминированному хаосу.

Анализ экспериментальных данных, приведенных в разделе 4.2, позволяет предположить, что при движении газожидкостной смеси в направлении уменьшения давления происходит образование и рост микророзодышей газа, часть из которых может быть вынесена фильтрационным потоком, а часть скапливается в порах, изменяя фильтрационные характеристики среды.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$m\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.17)$$

где m – пористость, β_0 – сжимаемость пористой среды, v – скорость фильтрации, определяемая законом Дарси

$$v = -\frac{k(s)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Здесь μ – вязкость жидкости, $k(s)$ – коэффициент проницаемости, зависящий от s – концентрации зародышей газа, адсорбированных на стенках пор. Для простоты зависимостью вязкости μ от концентрации зародышей в объеме жидкости пренебрегаем.

Изменение числа микророзодышей определяется уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha s + q, \quad (4.18)$$

где α – коэффициент, определяющий скорость выноса микророзодышей, q – скорость их воспроизводства.

Будем считать, что уже существующие зародыши являются центрами, на которых со скоростью, пропорциональной скорости уменьшения давления, образуются новые зародыши. Учитывая также время τ , необходимое для роста и перераспределения микророзодышей, получим соотношение

$$q(x, t) = -\alpha s(x, t - \tau) \frac{dp(x, t - \tau)}{dt}, \quad (4.19)$$

где a – коэффициент пропорциональности, $\frac{dp}{dt}$ – скорость изменения давления, определяемая выражением

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.20)$$

Первый член суммы (4.20) обычно мал [13], поэтому мы будем в дальнейшем им пренебрегать.

Из (4.17)–(4.20) следует, что фильтрация газожидкостных систем с микрочастицами газа описывается системой уравнений

$$m\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k(s)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \alpha s = \left[\varphi(s) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right]_{\tau}, \quad (4.22)$$

где $\varphi(s) = \frac{\alpha s k(s)}{m\mu}$, $[q]_{\tau} = q(t - \tau)$.

Рассмотрим стационарные решения системы (4.21)–(4.22), удовлетворяющие граничным условиям

$$p|_{x=0} = p_1, \quad p|_{x=l} = 0, \quad (4.23)$$

и устойчивость этих стационарных решений.

Положив $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$, получим из (4.21)–(4.22)

$$\frac{k(s)}{\mu} \frac{dp}{dx} = -v_0 = \text{const}, \quad \alpha s = \varphi(s) \left(\frac{dp}{dx} \right)^2.$$

Эта система имеет очевидное решение $s = s_0 = 0$, $p = p_0(x) = p_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)$, которому соответствует значение скорости фильтрации $v_0 = k(0) \frac{p_1}{l\mu}$. Стационарные значения s , отличные от нуля, определяются из уравнения

$$k(s) = a v_0^2 \frac{\mu}{\alpha}. \quad (4.24)$$

Если уравнение (4.24) имеет решение, то стационарные решения системы (4.21)–(4.22) не единственны. Они представляют собой пространственные структуры, состоящие из «доменов» – областей с различными значениями $s = s_i = \text{const}$, характеризующихся постоянным градиентом

давления $\nabla p_i = \sqrt{\frac{\alpha s_i}{\varphi(s_i)}}$. Такие структуры рассматривались ранее в работах [14, 15]. Граничные условия (4.23) выполняются, если

$$-\sum_i \nabla p_i l_i = p_1 \quad \left(\sum_i l_i = l \right),$$

где l_i – суммарная протяженность «доменов» со значениями $s = s_i$.

Поскольку нашей целью не является рассмотрение всех возможных случаев, конкретизируем вид функции $k(s)$, приняв

$$k(s) = k_0 \left[\exp(-\gamma s^n) + G \right],$$

где γ, n, G, k_0 – положительные константы. Предполагается, что фильтрация происходит в области давлений, характеризующихся уменьшением проницаемости при понижении давления (раздел 4.2). Легко видеть, что при этом уравнение (4.24) может иметь только одно решение, которое мы будем обозначать через s_1 .

Проведем линейный анализ устойчивости стационарных режимов фильтрации с однородным по x распределением микророзодышей. Пусть $s' = s - s_i$, $p' = p - p_0(x)$ – малые отклонения от стационарных значений ($i = 0$ или 1). Переходя к безразмерным переменным, получим из (4.21)–(4.23)

$$\lambda \frac{\partial p'}{\partial t} = k_1(s_i) \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - k_1'(s_i) \frac{\partial s'}{\partial x}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + s' = A_1 \left[\varphi_1'(s_i) s' - 2\varphi_1(s_i) \frac{\partial p'}{\partial x} \right]_{\tau}, \quad (4.26)$$

$$p'|_{x=0} = p'|_{x=1} = 0, \quad (4.27)$$

$$x \rightarrow \frac{x}{l}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_*}, \quad \tau \rightarrow \frac{\tau}{t_*}, \quad t_* = \frac{1}{\alpha},$$

$$s' \rightarrow \frac{s'}{s_*}, \quad s_* = \gamma^{-1/n}, \quad p' \rightarrow \frac{p'}{p_1},$$

$$k_1(s) = \exp(-s^n) + G, \quad \varphi_1(s) = s k_1(s),$$

$$A_1 = \frac{ak_0 p_1^2}{\alpha m \mu l^2}, \quad \lambda = \frac{m \mu \beta_0 l^2}{k_0 t_*},$$

где λ – безразмерное время пьезопроводности.

Разложив функции s' и p' в ряды Фурье

$$p' = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t) \sin(\mu_j x), \quad s' = Y_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(t) \cos(\mu_j x),$$

где $\mu_j = j \cdot \pi$, получим из (4.25) и (4.26)

$$\frac{dY_0(t)}{dt} + Y_0(t) = rY_0(t - \tau), \quad (4.28)$$

$$\lambda_j \frac{dZ_j(t)}{dt} + Z_j(t) = k'_1(s_i)Y_j(t), \quad (4.29)$$

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + Y_j(t) = rY_j(t - \tau) - A_1 s_i Z_j(t - \tau), \quad (4.30)$$

$$Z_j = \mu_j k_1(s_i) X_j, \quad r = A_1 \phi'_1(s_i), \quad \lambda_j = \frac{\lambda}{k_1(s_i) \mu_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Характеристическое уравнение, полученное из (4.28) подстановкой $Y_0 \sim e^{\chi t}$, имеет вид

$$\chi + 1 - r \exp(-\chi \tau) = 0.$$

Анализ этого уравнения показывает, что точка равновесия $Y_0 = 0$ устойчива, если $|r| < 1$, апериодически неустойчива при $r > 1$ и колебательно неустойчива при $r < -1$ и достаточно больших τ [12]. Характеристическое уравнение, соответствующее системе (4.29)–(4.30), записывается в виде

$$\lambda_j \chi^2 + (\lambda_j + 1) \chi + 1 - e^{-\chi \tau} [r(\lambda_j \chi + 1) - F] = 0, \quad (4.31)$$

$$F = 2A_1 k'_1 s_i.$$

Для его исследования воспользуемся методом D -разбиений [12], который заключается в выделении на плоскости параметров областей с различным порядком устойчивости. Области, в которых характеристическое уравнение имеет k корней с положительной действительной частью, обозначаются символом $D(k)$. Поскольку границы этих областей соответствуют переходу корней через мнимую ось, то в параметрическом виде они могут быть определены, если в (4.31) положить $\chi = i \cdot \omega$. При этом получается система

$$\begin{aligned} r(\cos \omega \tau + \lambda_j \omega \sin \omega \tau) - F \cos \omega \tau &= 1 - \lambda_j \omega^2, \\ r(\lambda_j \omega \cos \omega \tau - \sin \omega \tau) + F \sin \omega \tau &= (\lambda_j + 1) \omega, \end{aligned}$$

определитель которой $\Delta = \lambda_j \omega$ равен нулю при $\omega = 0$. Этому значению ω соответствует особая прямая $r = F + 1$. При $\omega \neq 0$ границы D -областей задаются уравнениями

$$\begin{aligned} F &= (1 + \lambda_j^2 \omega^2)(\omega \cos \omega \tau + \sin \omega \tau) \Delta^{-1}, \\ r &= \left[(1 - \lambda_j^2 \omega^2) \sin \omega \tau + (\lambda_j + 1) \omega \cos \omega \tau \right] \Delta^{-1}, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} F &= F_0 = \tau + 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} r = F_0 + 1. \end{aligned}$$

Для примера на рис. 4.23 показано D -разбиение, полученное при $\tau = 5$ для значения $\lambda = 2$. Здесь прямые 1 и 2 представляют собой графики функций $r = 1 + F$ и $r = 1 + \frac{F}{2}$ соответственно. При нахождении области устойчивости $D(0)$ использовано то обстоятельство, что точка $F = 0$, $r = 0$ принадлежит ей, поскольку при этих значениях F и r оба корня уравнения (4.31) отрицательны.

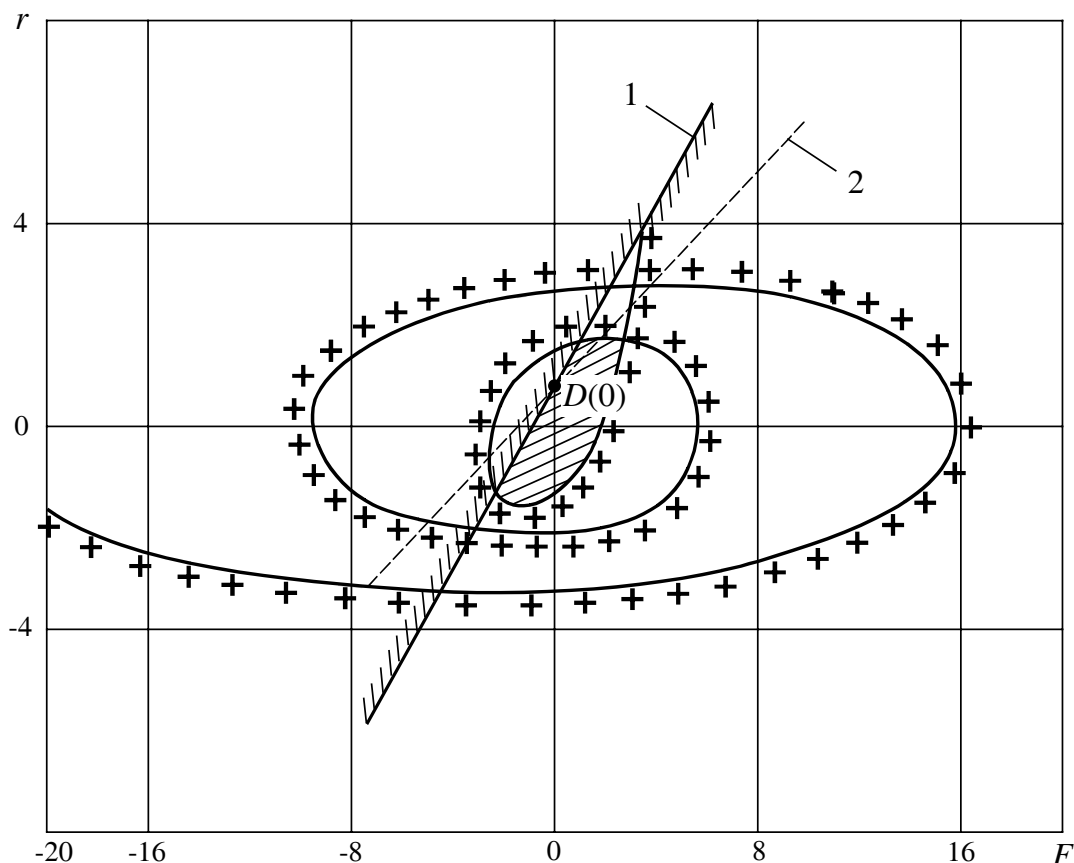


Рис. 4.23. D -разбиение на плоскости $F - r$ ($\tau = 5$, $\lambda = 2$):

$$1 - \text{прямая } r = 1 + F; \quad 2 - \text{прямая } r = 1 + \frac{F}{2}$$

Как видим, при малых перепадах давления система (4.22)–(4.23) имеет единственное устойчивое стационарное решение, соответствующее значению $s = 0$. Увеличение перепада давления приводит к потере устойчивости этого решения. Поскольку при $s = 0$ $F = 0$, то это происходит при $r = A(1 + G)$. Одновременно появляется еще одно стационарное значение $s = s_1$, определяемое из уравнения

$$A_1 [\exp(-s_1^n) + G] = 1. \quad (4.32)$$

Это значение существует до тех пор, пока величина A_1 не становится больше $\frac{1}{G}$. (Легко видеть, что при $A_1 G > 1$ уравнение (4.32) не имеет решения.) В точке $s = s_1$

$$r = A_1 (s_1 k_1(s_1))' = A_1 [k_1(s_1) + s_1 k_1'(s_1)] = 1 + \frac{F}{2}$$

и $F < 0$, поэтому это состояние всегда неустойчиво (см. рис. 4.23).

Таким образом, при $A_1 > \frac{1}{1+G}$ система (4.21)–(4.23) не имеет устойчивых стационарных решений.

Для того чтобы проанализировать особенности процессов фильтрации в области неустойчивости, вновь рассмотрим систему уравнений (4.21)–(4.22), которую можно переписать, используя ранее введенные переменные, в виде

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_1(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s = A_1 \left[\varphi_1(s) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right]_{\tau}, \quad (4.34)$$

$$p'|_{x=0} = p'|_{x=1} = 0. \quad (4.35)$$

Для простоты пренебрегаем в уравнении (4.33) величиной λ . Это упрощение позволяет представить нестационарные процессы, описываемые моделью (4.33)–(4.35), в виде эволюции пространственных структур из «доменов», в пределах каждого из которых концентрация микророзродышей и градиент давления постоянны.

Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ – интервал, занятый i -м «доменом», s_i и ∇p_i – концентрация микророзродышей и градиент давления в этом «домене», $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$.

Из (4.33) при $\lambda = 0$ получим цепочку равенств

$$k_1(s_1) \nabla p_1 = k_2(s_2) \nabla p_2 = \dots = k_m(s_m) \nabla p_m$$

или

$$k_1^*(s_1)(1 - p_1) = k_2^*(s_2)(p_1 - p_2) = k_m^*(s_m)p_{m-1}, \quad (4.36)$$

$$p_i = p|_{x=x_i}, \quad k_1^*(s_1) = \frac{k_1(s_1)}{(x_i - x_{i-1})}.$$

Решив систему (4.36) относительно p_i ($i = 1, \dots, m-1$), можно представить ∇p_i в виде функций величин s_1, s_2, \dots, s_m . Подставив эти значения ∇p_i в (4.34), получим систему уравнений

$$\frac{ds_i}{dt} + s_i = A_1 \varphi_1(s_i(t - \tau)) \nabla p_i^2(s_1(t - \tau), \dots, s_m(t - \tau)), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

которая является дискретным аналогом системы (4.33)–(4.35) в предположении малости времени пьезопроводности.

Для того чтобы выявить особенности поведения системы в области неустойчивости стационарных режимов фильтрации, были проведены численные расчеты при $m = 2$. Рассматривалась система двух уравнений

$$\frac{ds_1}{dt} + s_1 = A \left[s_1 k_1(s_1) (1-p)^2 \right]_{\tau}, \quad \frac{ds_2}{dt} + s_2 = A \left[s_2 k_1(s_2) p^2 \right]_{\tau}, \quad (4.37)$$

$$p = \left(\frac{k_1(s_2)}{k_1(s_1)} + 1 \right)^{-1}, \quad A = 4 \cdot A_1,$$

при следующих значениях параметров: $n = 10$, $G = 0,2$, $\tau = 5$.

Расчеты показали, что при $A < A^{(1)} = \frac{4}{1+G} = 3,33\dots$ система (4.37) имеет устойчивую точку равновесия $s_1 = s_2 = 0$, которая соответствует стационарной фильтрации со скоростью фильтрации $v = \frac{k_0 p_1}{\mu l}$.

При $A > A^{(1)}$, как показано выше, однородные по x распределения микрочастиц являются неустойчивыми. До тех пор пока величина A не достигнет некоторого критического значения $A^{(2)} > A^{(1)}$, система (4.37) имеет две устойчивые точки равновесия $s_1 = s_c$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_2 = s_c$. То, какая из этих точек реализуется, зависит от начальных условий: к нулю стремится та величина s_i , которая в начальный момент времени меньше.

Таким образом, при $A^{(1)} < A < A^{(2)}$ устанавливается стационарный режим фильтрации с неоднородным распределением микрочастиц.

При $A > A^{(2)}$ рождаются два устойчивых предельных цикла, для которых одна из величин s_i равна нулю, а вторая периодически изменяется. На рис. 4.24 приведен график зависимости скорости фильтрации от времени $v = v(t)$, полученный при $A = 3,9$.

При $A = A^{(3)} > A^{(2)}$ начинается каскад бифуркаций удвоения периода, заканчивающийся при $A \approx 4,3$ переходом к хаотическому движению.

Дальнейшее увеличение величины A через последовательность обратных бифуркаций Фейгенбаума приводит к переходу от странного аттрактора к предельному циклу, а затем вновь через последовательность удвоений периода к хаотическому режиму колебаний, после чего притягивающей точкой становится бесконечность: $s_1, s_2 \rightarrow \infty$. Появление последней цепочки бифуркаций, ведущей к хаосу, связано, видимо, с тем, что при $AG(1-p)^2 > 1$ вновь существует только одно стационарное значение $s = s_0 = 0$.

Приведенные выше результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы.

При малых перепадах давления скорость выноса микрочастиц газа превосходит скорость их воспроизводства, поэтому концентрация микрочастиц равна нулю. Увеличение перепада давления приводит к тому, что в пористой среде накапливаются микрочастицы, забивающие наиболее узкие места поровых каналов, что приводит к уменьшению расхода. Напомним, что рассматривается область давлений, в которой проницаемость уменьшается с увеличением числа частиц. При этом состоянии с однородным по пространству распределением микрочастиц становятся неустойчивыми, происходит самопроизвольное разбиение на «домены» с различающимися значениями концентрации микрочастиц. Дальнейшее увеличение перепада давления приводит к возникновению автоколебаний, которые, по сценарию М. Фейгенбаума, переходят в динамический хаос.

Теоретические результаты, полученные выше, подтверждаются экспериментами, проведенными к.т.н. Г. Х. Меликовым (Азербайджанская гос. нефтяная академия), который исследовал колебания расхода жидкости Q , возникающие при фильтрации трансформаторного масла с растворенным в нем природным газом в предпереходных условиях. Для примера на рис. 4.25 приведена кривая $Q = Q(t)$, полученная при значениях давления на входе и выходе модели пласта, равных 7 и 4,5 МПа (давление насыщения $P_n = 3,7$ МПа). Отметим качественную схожесть этой кривой с расчетной кривой, показанной на рис. 4.24.

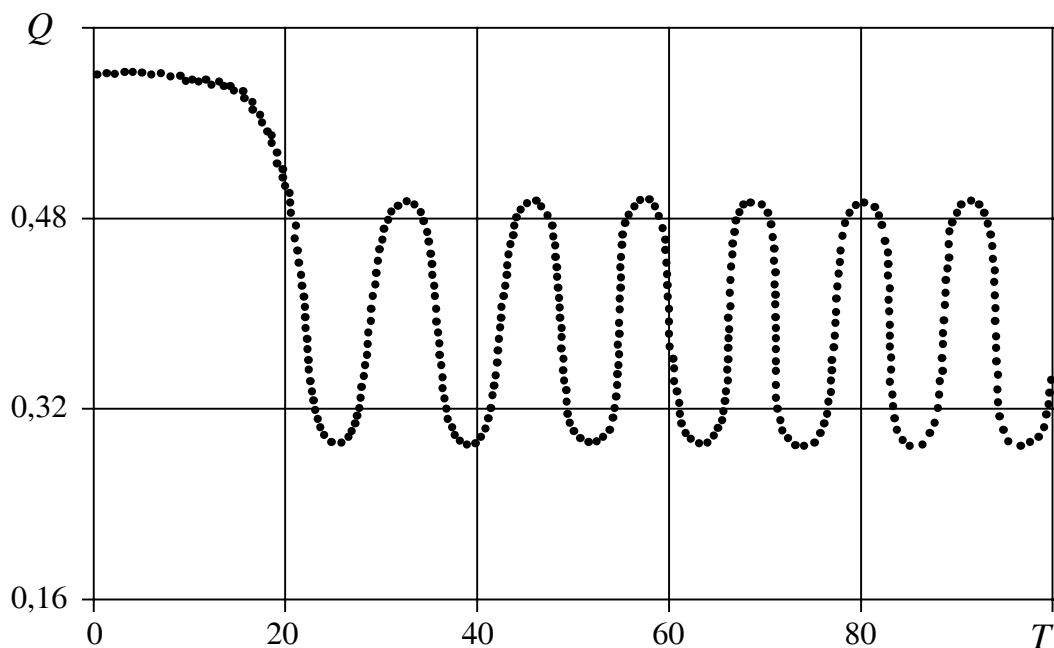


Рис. 5.24. Зависимость расхода жидкости от времени при $A = 3,9$

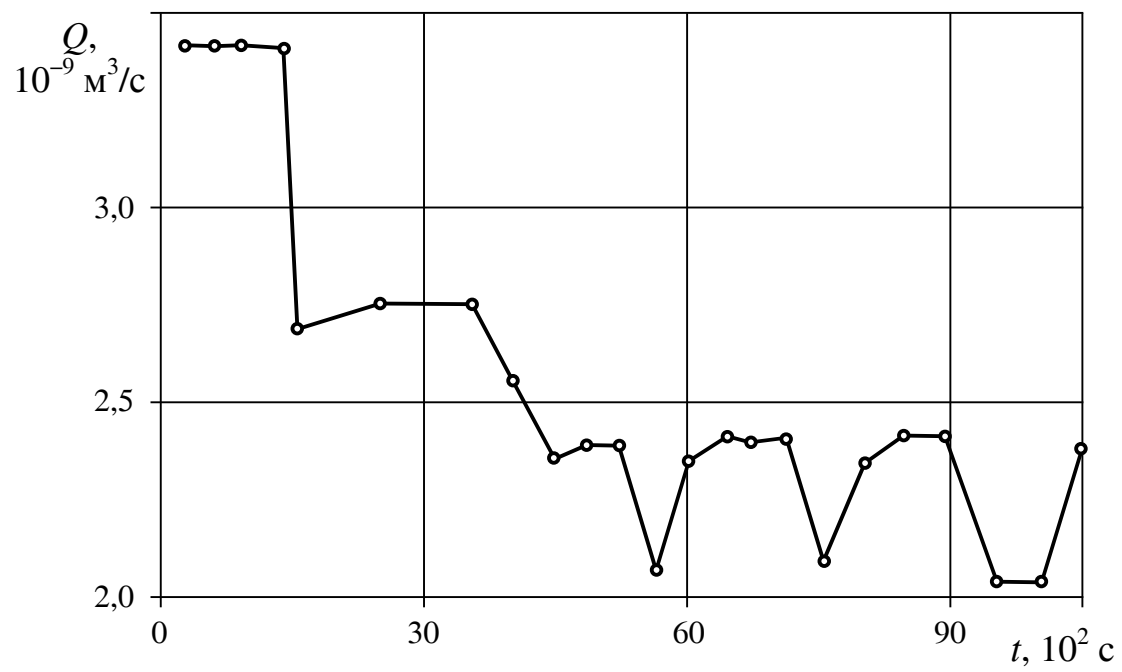


Рис. 5.25. Зависимость расхода жидкости от времени

Библиографический список к главе 4

1. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. – М.: Мир, 1974. – 687 с.
2. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. – Л.: Судостроение, 1966. – 439 с.
3. *Сиротюк М. Г.* Стабилизация газовых пузырьков в воде // Акустический журнал. – 1970. – Т. 16, № 4. – С. 567–569.
4. *Бувечич Ю. А.* О докритическом образовании зародышей в жидкостях с поверхностно-активным веществом (ПАВ) // ИФЖ. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 394–401.
5. *Нематулаев У., Белинский Б. А.* Установка для одновременного измерения акустических параметров и сдвиговой вязкости в широком интервале температур и давлений // Ультразвуковая техника: Научно.-техн. реф. сб. – 1966. – № 5. – С. 8–13.
6. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975. – 592 с.
7. *Исакович М. А.* Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 495 с.
8. *Фокеев В. М.* Определение давления насыщения углекислоты в воде // Изв. вузов. Сер. Геология и разведка. – 1959. – № 6. – С. 87–89.
9. *Болотов А. А., Белинский Б. А.* О двух методах определения давления насыщения газожидкостных систем в пористой среде / Тр. ВНИИ. – М.: ВНИИ, 1970. – № 37. – С. 71–75.
10. *Савинихина А. В.* Применение ультразвуковых колебаний для определения давления насыщения пластовых жидкостей / Тр. ВНИИ. – М.: ВНИИ, 1958. – № 15. – С. 137–145.
11. *Тривус Н. А., Виноградов К. В.* Исследование нефти и газа в пластовых условиях. – Баку: Азнефтеиздат, 1955. – 288 с.
12. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
13. *Петрушевский Е. И., Рамамат М. С.* О влиянии неравновесности на процесс выделения конденсата из газа // Изв. вузов. Сер. Нефть и газ. – 1963. – № 11 – С. 61–66.
14. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при сверханомалии вязкости // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 5. – С. 1180–1184.
15. *Джумгазиева С. Х.* Численное исследование одного уравнения с частными производными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1982. – Т. 23, № 4. – С. 839–847.

Глава 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

*Ученый обладает огромным опытом
сосуществования с неведением,
сомнением и неопределенностью,
и, по-моему, этот опыт имеет
очень важное значение...*

*Мы, ученые, к этому привыкли
и считаем само собой разумеющимся,
что быть неуверенным в чем-то
абсолютно нормально, что вполне
возможно жить и не знать.*

Р. Фейнман

Занимаясь моделированием реальных технологических процессов, исследователь обнаруживает, что оказался в мире неопределенности, связанной с недостаточностью информации, зашумленностью данных, неустойчивостью решений и нечеткостью постановок задач. (Недостаток информации мы понимаем расширенно, относя к этому и недостаток глубины понимания – неразвитость интуиции.) Для преодоления этих трудностей современная прикладная математика разработала ряд эффективных методов моделирования и принятия решений, применение которых требует известной изобретательности, поскольку формализовать эти методы до конца не удастся: слишком сложны изучаемые объекты.

Некоторые из таких методов авторы применяют в своей работе и описывают ниже. При этом они не пытаются сформулировать какие-то строгие правила и алгоритмы: моделирование сложных систем – не только наука, но и искусство. Аналогичным образом поступают музыканты, проводя мастер-классы: часто они просто играют различные музыкальные отрывки, давая некоторые разъяснения. Да и при изучении наук, как отмечал И. Ньютон, примеры полезнее правил.

Мы хотели бы, кроме всего прочего, обратить внимание на важность «быстрых», аналитических расчетов. К сожалению, многие сейчас считают такие методы изжившими себя, полагаясь на численные расчеты с помощью ЭВМ как на панацею от всех бед. Однако, по нашему убеждению, «быстрые» оценки являются необходимым этапом постановки математических задач и выбора методов их решения. Только после тщательного изучения задачи с помощью аналитических методов можно обратиться к компьютеру, но и тогда его нужно постоянно «вести за руку».

Основой смелости и безошибочности поведения в повседневной жизни человека являются опыт и интуиция. Аналог этих понятий вводится с помощью термина «априорная информация». Говоря, что метод основан на привлечении априорной информации, мы просто хотим подчеркнуть, что опыт и интуиция нужны не только на этапе решения математических задач, но и на этапе их **постановки**. Многие задачи без привлечения априорной информации не могут быть решены; при ближайшем рассмотрении оказывается, что они попросту неправильно (некорректно) поставлены. И исправить ситуацию можно только за счет привлечения дополнительной информации априорного характера (см. по этому поводу также гл. 2).

Использование априорной информации часто приводит к результатам, которые, на первый взгляд, кажутся невозможными: «ниоткуда» появляются новые данные, неустойчивые алгоритмы становятся устойчивыми, ненадежные решения – надежными.

Из приведенных ниже примеров будет видно, что априорная информация может быть привнесена в задачу самыми различными способами. Так, при анализе случайных величин огромную пользу может оказать априорная информация о **виде** функции распределения. Наиболее полно эти сведения используются в рамках теории порядковых статистик.

5.1. Безэталонное измерение и идентификация с помощью порядковых статистик

Знанию всегда предшествует предположение.

В. Гумбольдт

Рассмотрим некоторую случайную величину X , характеризуемую плотностью распределения вероятности $f(x)$ и интегральной функцией распределения $F(x)$. Обозначим через E , D и σ математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины X :

$$E = E[X] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\sigma^2 = D[X] = E[X^2] - E^2.$$

Пусть (x_1, x_2, \dots, x_n) – выборка объема n , образованная из n случайных реализаций X . Переставим элементы этой выборки так, чтобы они были ранжированы по величине, т. е. расположены в ряд по возрастанию. Полученную при этом упорядоченную выборку обозначим $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$. Про величину, стоящую на r -м месте в этой выборке, говорят, что она имеет ранг r . Из генеральной совокупности X можно об-

разовать множество таких упорядоченных выборок. Разумеется, элементы, имеющие один и тот же ранг r , в разных выборках будут разными. Иначе говоря, они являются реализациями некоторой случайной величины, которую мы будем обозначать $X_{(r)}$. Ранжированная выборка, таким образом, может быть представлена в виде набора случайных величин $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$. Элемент $X_{(r)}$ этой выборки (совокупность значений x с рангом r в выборках объема n) называется r -й **порядковой статистикой**, а раздел статистики, изучающей свойства упорядоченных выборок, называется теорией порядковых статистик [1–3].

Для примера, представим себе генеральную совокупность в виде кучи щебня, состоящей из камней, вес которых распределен случайным образом [1]. Выбрав наудачу n камней, отранжируем их с помощью рычажных весов. Обратим внимание на то, что в данном случае весы нужны только как **компаратор** (от англ. compare – «сравнивать») – устройство для попарного сравнения значений случайной величины, – поэтому гири не нужны.

Предположим, что после упорядочивания выборки камни раскладываются в n ящиков, на которых написаны цифры, обозначающие соответствующие ранги. Многократно повторив эту процедуру, мы можем приступить к статистическому анализу каждого ящика. Если исходная куча щебня велика (в пределе – бесконечно велика), то отбор любого количества камней не изменяет статистические характеристики кучи щебня в целом. Тогда веса камней, содержащихся в каждом ящике, будут случайными величинами, математическое ожидание и дисперсия которых могут быть определены исходя из функции распределения генеральной совокупности.

Так, если веса камней в куче щебня распределены равномерно, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \quad x > b \end{cases}$$

(a и b – веса самого маленького и самого большого камня в куче), то средние и дисперсии порядковых статистик определяются выражениями [1]

$$\begin{aligned} E_r &= E[X_{(r)}] = a + \frac{r}{n+1}(b-a), \\ \sigma_r^2 &= D[X_{(r)}] = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}(b-a)^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Будем характеризовать отклонение случайных реализаций порядковой статистики $X_{(r)}$ от среднего E_r величиной $\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{(b-a)}$. Из (5.1) следует, что с увеличением объема выборок значение ε_r уменьшается асимпто-

тически по закону $\frac{1}{n}$ для крайних порядковых статистик ($r=1$ и $r=n$) и по закону $\frac{1}{\sqrt{4n}}$ для средних рангов $\left(r \approx \frac{n}{2}\right)$. Для примера на рис. 5.1 приведены значения ε_r для разных рангов при нескольких значениях n . Как видим, даже при сравнительно небольших объемах выборок отклонение порядковых статистик от их средних значений мало. Так, при $n=23$ веса камней в ящике № 23 в среднем всего лишь на 4% отличаются от среднего E_{23} .

5.1.1. Безэталонное измерение («взвешивание без гирь»)

Итак, мы показали, что при достаточно больших объемах выборок «разброс» случайных реализаций порядковых статистик мал. Применительно к примеру с кучей щебня это означает, что веса камней, находящихся в r -м ящике, мало отличаются друг от друга и от математического ожидания E_r . Отсюда следует поразительный вывод [1]: оказывается, мы можем определить веса камней, не имея гирь! Нужно только, чтобы мы знали функцию распределения камней по весам и имели компаратор (например, рычажные весы), с помощью которого камни могут быть отранжированы. После этого в качестве оценки веса камня, занявшего r -е место в ряду, можно принять заранее вычисленное значение математического ожидания r -й порядковой статистики E_r . При этом допускается ошибка $x(r) - E_r$, относительная величина которой может быть сколь угодно малой. Так, для равномерного распределения при $n=1000$ относительная ошибка такой оценки не превышает 2% даже в середине выборки.

Если весов нет, то довольно точное ранжирование может произвести человек, сравнивая камни, находящиеся в двух его руках (это делает полученный результат еще более удивительным).

Обращаясь к практике нефтегазодобычи, отметим, что некоторые опытные цеховые работники могут оценить дебит скважины без всяких замеров, просто приложив руки к выкидной арматуре. Очевидно, что при этом они, сами того не подозревая, подсознательно применяют алгоритмы порядковых статистик. Роль компаратора в данном случае вновь исполняет человек, ориентируясь на гул, создаваемый многофазным потоком, и температуру труб. Неявным образом используются также сведения о возможных пределах изменения и виде закона распределения дебита.

Таким образом, пользуясь свойствами порядковых статистик, можно получить количественные оценки (иногда сколь угодно точные), не имея эталона (безэталонное измерение).

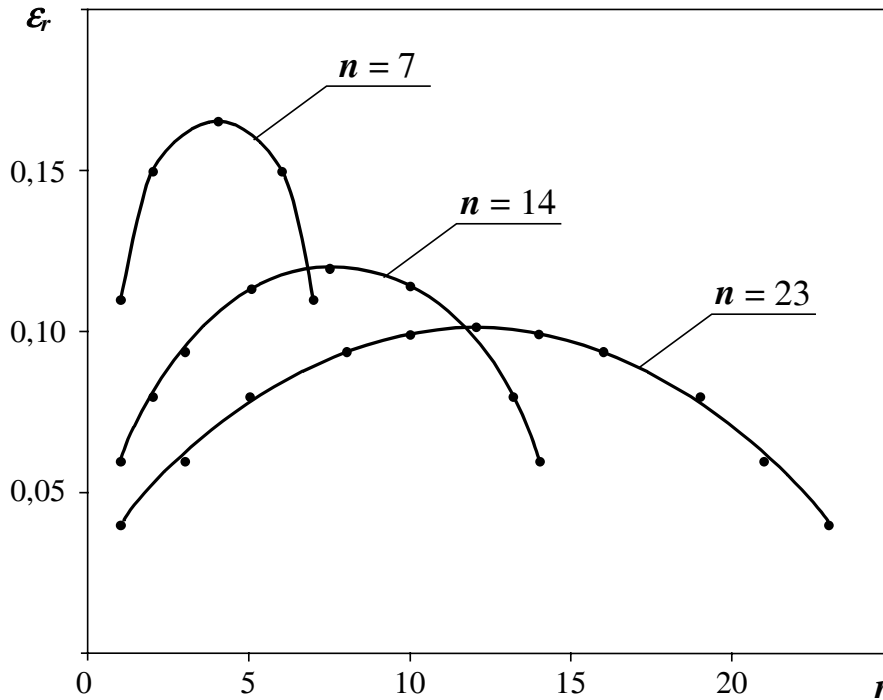


Рис. 5.1. Зависимость относительного отклонения порядковых статистик от ранга

Нетрудно видеть, что секрет успеха – в априорной информации, а именно в информации о законе распределения генеральной совокупности. Без знания функции распределения, конечно, ничего подобного сделать нельзя.

Мощным источником дополнительной информации является также операция ранжирования. Это можно показать количественно, оценив изменение энтропии в ходе упорядочивания. Поскольку число различных реализаций выборки равно $n!$ и все реализации равновероятны, то энтропия выборки до ранжирования равна [1]

$$H = -\ln\left(\frac{1}{n!}\right) = \ln n!.$$

Упорядоченная же выборка может быть реализована только одним способом, т. е. ее энтропия равна нулю. Как известно, уменьшение энтропии является мерой информации, поступившей в систему. Следовательно, процесс ранжирования приводит к «накачке» выборки информацией в объеме $\ln n!$.

Знание законов распределения немного может дать наблюдателю, снабженному измерительным прибором: с его помощью можно лишь несколько улучшить измерительную процедуру. Как мы видим, качественно иная ситуация возникает, когда измерительного прибора нет. В этом случае знание закона распределения позволяет **восстановить** отсутствующую информацию. В первом приближении в качестве оценки любого значения величины X можно выбрать среднее по генеральной выборке $E(X)$, но

эта оценка слишком грубая. Если же имеется компаратор, то можно организовать достаточно точное измерение с помощью упорядоченных выборок большого объема. В этом случае n величин «помогают» друг другу «измерить» самих себя.

5.1.2. Практическая реализация расчетов

При практическом применении описанных выше алгоритмов необходимо решить задачу определения математических ожиданий порядковых статистик E_r ($r = 1, 2, \dots, n$) при известной функции распределения. Для этого можно воспользоваться готовыми статистическими таблицами, в которых приведены значения E_r при разных значениях n для ряда наиболее часто встречающихся функций распределения. Отметим, что эти таблицы составлены для нормированных распределений (равномерного распределения с $a = 0$, $b = 1$, нормального закона с $E = 0$, $\sigma = 1$ и т. д.). Поэтому при их применении необходимо осуществить преобразование к нормированным случайным величинам:

$$\tilde{x} = \frac{x - a}{b - a}$$

для равномерного распределения и

$$\tilde{x} = \frac{x - E}{\sigma}$$

для нормального закона.

При достаточно больших объемах выборок можно использовать приближенную формулу [1, 4, 5]

$$F(E_r) = \frac{r - 1}{n - 1}.$$

Обращая функцию распределения, получим

$$E_r = \Phi\left(\frac{r - 1}{n - 1}\right), \quad (5.2)$$

где $\Phi(z) \equiv F^{-1}(z)$.

Часто информация о законе распределения случайной величины является неполной – мы знаем **вид** функции распределения, но не знаем значений **параметров** этой функции (например, математического ожидания и дисперсии). В этой ситуации оказывается необходимым все же сделать несколько прямых замеров с помощью эталонов.

Пусть, например, известно, что величина x распределена по некоторому двухпараметрическому закону, значения параметров которого однозначно связаны с математическим ожиданием E и дисперсией σ^2 . Предположим также, что в нашем распоряжении имеются таблицы математических ожиданий порядковых статистик \tilde{E}_r , составленные для нормализо-

ванной функции распределения заданного вида (т. е. для функции с $E = 0$ и $\sigma = 1$). Математические ожидания ненормализованных величин определяются с помощью табличных значений \tilde{E}_r по очевидной формуле

$$E_r = E + \sigma \tilde{E}_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Для определения неизвестных значений E и σ необходимо напрямую измерить значения двух реализаций величины X . Если в выборке объемом n эти измеряемые значения имеют ранги r_1 и r_2 , то E и σ могут быть найдены из условий

$$E_{r_1} = x(r_1), \quad E_{r_2} = x(r_2),$$

что, с учетом (5.3), приводит к системе

$$\begin{aligned} E + \sigma \tilde{E}_{r_1} &= x(r_1), \\ E + \sigma \tilde{E}_{r_2} &= x(r_2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $x(r_1)$, $x(r_2)$ – измеренные значения случайной величины.

Решив (5.4) относительно E и σ , можно оценить и значения остальных элементов упорядоченной выборки:

$$x(r) = E + \sigma \tilde{E}_r \quad (r = 1, 2, \dots; n, i \neq r_1, r_2).$$

Надежность оценок E и σ может быть повышена, если удастся сделать более чем два прямых замера. При этом мы имеем переопределенную систему уравнений

$$E + \sigma \tilde{E}_{r_k} = x(r_k), \quad k = 1, 2, \dots, m < n,$$

которую необходимо решать методом наименьших квадратов.

Описанная процедура оценок полезна в тех случаях, когда измерения с помощью эталонов можно организовать только для некоторых членов выборки или когда замеры слишком дороги. Так, вновь возвращаясь к задаче об измерении веса камней, предположим, что мы знаем: они распределены по равномерному закону, но параметры распределения a и b неизвестны. Гирь у нас нет, но они есть у меркантильного соседа, который за каждый замер с помощью его гирь требует 100 долларов. Для прямого измерения веса 1000 камней нам понадобилось бы 100 тысяч долларов. Если же привлечь алгоритмы порядковых статистик, то можно ограничиться взвешиванием (всего лишь за 200 долларов) двух камней $x(r_1)$ и $x(r_2)$ в ранжированной выборке, определить a и b из системы

$$\begin{cases} a + (b - a) \frac{r_1}{n + 1} = x(r_1), \\ a + (b - a) \frac{r_2}{n + 1} = x(r_2) \end{cases} \quad (5.5)$$

и оценить веса остальных камней в выборке объемом $n = 1000$ по формуле

$$x_{(r)} = a + (b - a) \frac{r}{n+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq r_1, r_2.$$

Еще одним примером безэталонных измерений по рассматриваемой схеме являются дети в школе, устроившие соревнование «Кто выше?»; если несколько ребят знают свой точный рост, то это позволит оценить рост всех остальных детей.

При реализации описанной выше процедуры частичного «взвешивания» важным является следующий вопрос: где должны быть расположены элементы упорядоченной выборки, предназначенные для прямого измерения?

Как следует из (5.1) и рис. 5.1, в случае равномерного распределения наименьшей дисперсией обладают крайние статистики, поэтому в (5.5) можно было бы положить $r_1 = 1$, $r_2 = n$. Однако крайние точки часто оказываются выбросами, поэтому этот рецепт нужно применять с известной осторожностью. В каждом конкретном случае необходимо тщательно анализировать представительность крайних значений. В некоторых случаях, возможно, окажется необходимым взять не крайнее, а второе слева или справа значение. Основная идея сохраняется всегда: для равномерного распределения более ценными являются крайние замеры.

Наоборот, в случае нормального распределения больший вес имеют центральные статистики. Так, при оценке математического ожидания **одно** центральное наблюдение значит больше, чем половина выборки [1]. Однако если для определения параметров E и σ берутся замеры из самого центра упорядоченной выборки, то расстояние между замерами может оказаться слишком малым, что приводит к плохой обусловленности системы (5.4). Это и понятно, поскольку надежные оценки дисперсии невозможно получить по центральным замерам – нужно захватить «крылья» гауссовского «колокола».

Таким образом, выбор статистик, по замерам которых планируется оценить параметры распределения, является неформальной задачей. Но приведенных выше соображений вполне достаточно для организации практических вычислений.

Пример 1. Безэталонное измерение расхода газа в газлифтной скважине

При эксплуатации газлифтных скважин стремятся поддерживать некоторый оптимальный режим работы, однако значения расхода газа V_2 и дебита нефти Q испытывают случайные колебания вокруг своих средних значений. Такого рода колебания в ходе нормальной эксплуатации («шумы») совершенно естественны, и их измерения могут служить источником

ценной информации. Однако осуществление полноценных замеров иногда может быть связано с затруднениями.

Предположим, что у нас имеется возможность беспрепятственно измерять дебит нефти в динамике, но имеются всего лишь несколько прямых замеров расхода газа. В этой ситуации остальные значения V_2 можно оценить методами порядковых статистик по замерам дебита нефти. Эта возможность связана с тем, что в окрестности оптимального режима работы функция $Q = Q(V_2)$ монотонно возрастает, т. е. дебит нефти может послужить компаратором для ранжирования неизвестных значений расхода газа. Известен и закон распределения случайных колебаний V_2 – он нормальный.

Приведем модельный пример, иллюстрирующий практическую реализацию этой идеи. В табл. 5.1 приведены замеры расхода газа и соответствующих дебитов нефти, полученные в ходе эксплуатации одной из скважин месторождения Грязева Сопка [5]. Исходная выборка отранжирована по значениям дебита нефти Q .

Забудем на время о том, что значения V_2 нам известны. Проверим, можно ли восстановить эти значения, имея только два замера: $V_2 = 550$ м³/сут. и $V_2 = 690$ м³/сут., полученные при $Q = 5,6$ т/сут. и $Q = 8,5$ т/сут. соответственно?

В этом примере объем выборки $n = 20$. Для вычисления нормализованных математических ожиданий \tilde{E}_r порядковых статистик воспользуемся приближенной формулой (5.2).

Таблица 5.1

Результаты расчетов по оценке значений расхода газа

r	Q , м ³ /сут.	V_2 , м ³ /сут.	$\frac{r-1}{n-1}$	\tilde{E}_r	V_{2p} , м ³ /сут.
1	3,5	500	–	–	–
2	3,9	510	0,053	–1,62	469
3	4,8	530	0,105	–1,25	509
4	5,3	540	0,158	–1,01	532
5	5,6	550	0,210	–0,80	550
6	5,6	570	0,263	–0,63	568
7	5,8	580	0,316	–0,48	582
8	6,1	600	0,368	–0,33	596
9	6,4	630	0,421	–0,20	609
10	7,0	645	0,474	–0,07	622
11	7,0	650	0,526	0,07	635

12	7,6	660	0,570	0,20	648
13	8,0	670	0,632	0,33	662
14	8,4	680	0,684	0,48	675
15	8,5	690	0,737	0,63	690
16	8,7	700	0,790	0,80	707
17	8,8	710	0,842	1,01	726
18	10,1	20	0,895	1,25	750
19	10,3	740	0,947	1,62	786
20	10,7	750	–	–	–

Обращение нормальной функции распределения с $E=0$ и $\sigma=1$ производится с помощью таблиц математической статистики (см., например, [6]). Полученные в результате расчетов значения \tilde{E}_r приведены в пятом столбце табл. 5.1 (крайние статистики отброшены как непредставительные). Математическое ожидание E и среднеквадратичное отклонение σ расхода газа определяется из системы вида (5.4):

$$\begin{cases} E - 0,80\sigma = 550, \\ E + 0,63\sigma = 690, \end{cases}$$

откуда

$$E = 628 \text{ м}^3/\text{сут.}, \quad \sigma = 98 \text{ м}^3/\text{сут.}$$

В последнем столбце табл. 5.1 приведены восстановленные значения расхода газа, найденные по формуле

$$V_{zp} = 628 + 98 \tilde{E}_r.$$

Сравнение действительных и расчетных значений расхода газа (см. рис. 5.2) показывает удовлетворительное соответствие оценок реальным замерам (ошибка не более 3%).

Пример 2. Точные измерения грубыми приборами

Итак, при безэталоном взвешивании камней из кучи щебня требуется определить веса хотя бы двух из них. Даже для этих двух замеров, если мы хотим обеспечить необходимую точность, нужен целый набор гирь разного веса: от килограммовых до граммовых. А что если у нас всего две гири, например, весом 5 кг и 0,5 кг? Порядковые статистики могут помочь и в этом случае. И не нужно пытаться найти камни, веса которых совпадут с весами имеющихся гирь: вероятность найти такие камни крайне мала. Нужно просто добавить гири в кучу камней, чтобы они тоже приняли участие в ранжировании. После упорядочивания они сами и сыграют роль двух опорных «камней». Если число камней в выборке достаточно велико, то точность измерений будет сколь угодно большой.

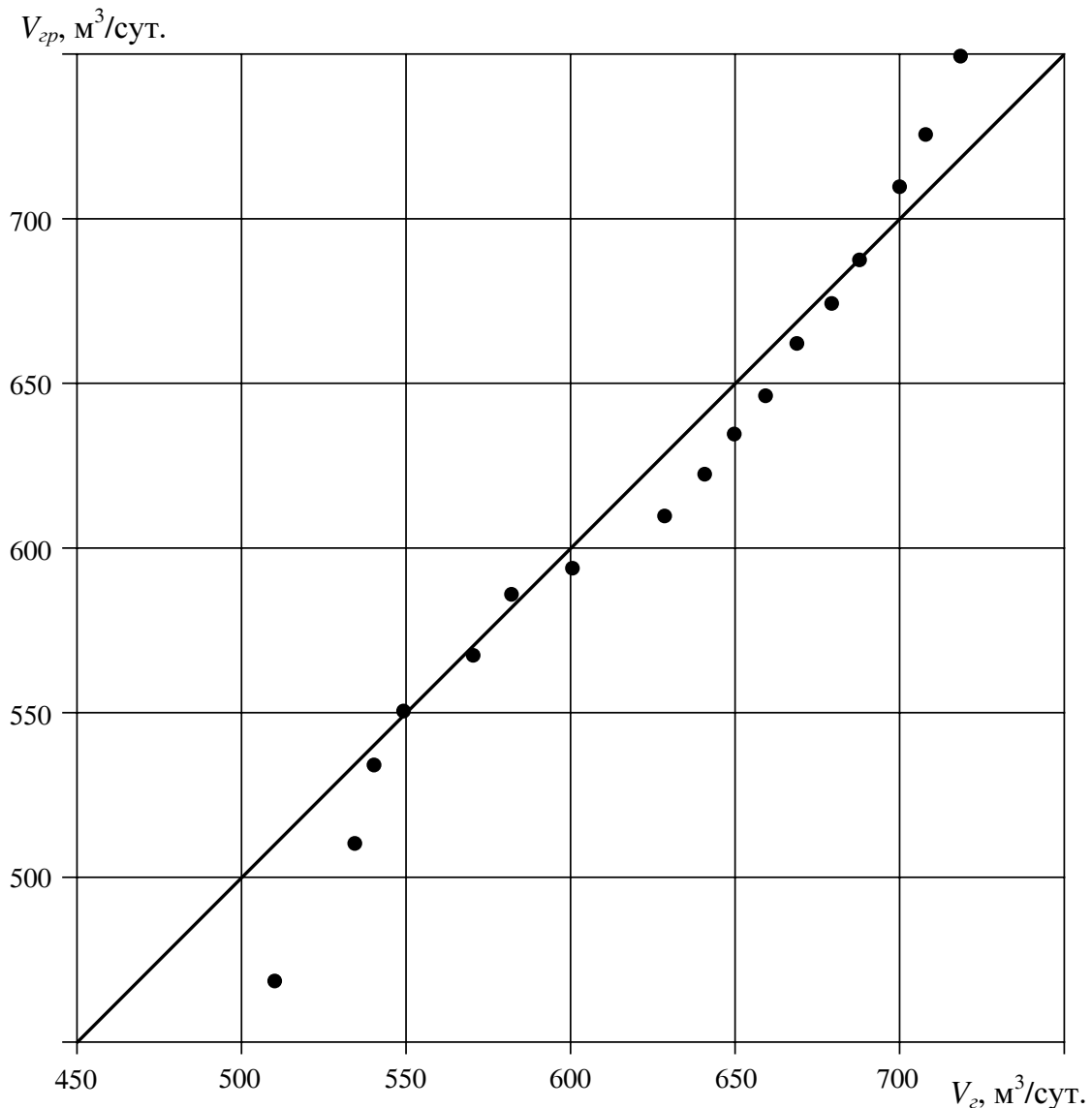


Рис. 5.2. Сравнение расчетных и действительных значений расхода газа

Этот простой пример показывает, что идеи безэталонного измерения могут быть использованы для повышения точности замеров с помощью приборов с грубой шкалой.

Пример 3. Определение проницаемости по данным геофизического исследования скважин (ГИС)

Основные трудности при создании трехмерных гидродинамических моделей нефтяных месторождений связаны с определением распределения проницаемости по глубине. Гидродинамические исследования скважин и данные нормальной эксплуатации (т. е. данные о продуктивности скважи-

ны) позволяют оценить только среднюю по мощности пласта проницаемость

$$k_m = \frac{1}{h} \int_0^h k(z) dz,$$

где $k(z)$ – проницаемость горных пород на глубине z (отчет идет от подошвы пласта), h – толщина пласта.

Восстановить функцию $k(z)$ по данным исследования кернов невозможно, поскольку это требует огромного объема лабораторных исследований, да и обеспечить достаточно полный вынос керна затруднительно.

Прямое определение проницаемости по каротажным кривым, снимаемым в ходе геофизических исследований скважин, также невозможно, поскольку они позволяют оценить только объемные характеристики (такие как пористость, насыщенность), а проницаемость является динамической, не объемной характеристикой. В этом смысле каротажные кривые похожи на мгновенный фотоснимок: если сфотографирован бегущий по улице человек, то по одному снимку можно оценить его массу (объемную характеристику), прикинув рост бегуна путем сравнения с высотой домов, но скорость бега (динамическую характеристику) можно найти, только оценив пройденную дистанцию по двум снимкам, снятым в разные моменты времени.

Несмотря на это, предпринимаются попытки оценить проницаемость по каротажным кривым косвенным путем, определив сначала по данным ГИС пористость и насыщенность связанной водой s_{CB} , а затем привлекая корреляционные зависимости вида $k = \varphi(m, s_{CB})$. Так, часто используют соотношения

$$k = A \frac{m^\alpha}{s_{CB}^\beta}, \quad (5.6)$$

где A , α и β – эмпирические коэффициенты [7].

Однако погрешность таких оценок весьма велика. Тем не менее корреляции, подобные (5.6), верно отражают качественную тенденцию (рост проницаемости с увеличением пористости и уменьшением насыщенности связанной водой). Это наводит на мысль использовать соотношения вида (5.6) в качестве **компараторов**, с помощью которых можно ранжировать неизвестные значения проницаемости. А для количественной оценки проницаемости можно использовать метод безэталонных измерений.

Принято считать, что проницаемость является случайной величиной, распределенной по логнормальному закону. Эта информация может быть использована при вычислении математических ожиданий порядковых статистик. Неизвестные параметры распределения (математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение), свои для каждой скважины, могут быть

определены по замерам проницаемости керна, а также по значениям средней проницаемости k_m , оцененным исходя из данных гидродинамических исследований или нормальной эксплуатации скважин. Детали расчетов, в силу их очевидности, мы здесь не приводим.

5.1.3. Безэталонная идентификация

Многие задачи идентификации можно представить в виде проблемы «черного ящика», на вход которого подается сигнал x , а на выходе наблюдается отклик y . Измеряя различные значения x_i и соответствующие им значения y_i , по выборке $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, восстанавливают функциональную зависимость $y = \varphi(x)$ (см. рис. 5.3 а). Как видим, в классической схеме идентификации предполагается **наблюдаемость** (измеряемость) входа и выхода.

Однако описанная выше процедура безэталонных измерений позволяет поставить совершенно новую задачу идентификации: определение характеристик «черного ящика» с ненаблюдаемым входом [1].

Это возможно при выполнении следующих двух условий:

- входной сигнал x представляет собой случайную величину с **известным законом распределения** (см. рис. 5.3 б);
- зависимость $y = \varphi(x)$ **монотонно** возрастает или монотонно убывает.

Последнее условие означает, что величина y может служить компаратором, необходимым для ранжирования значений x .

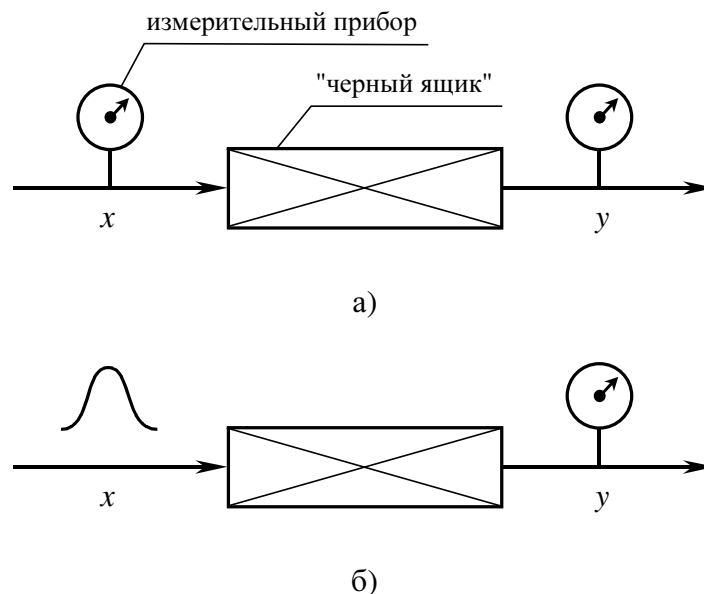


Рис. 5.3. Схема идентификации

Предположим, что мы измерили n значений y_i при различных (неизмеренных) значениях x_i . Отранжировав выборку $\{y_i\}$, мы, тем самым, отранжируем и выборку $\{x_i\}$ (не теряя общности, можно считать функцию $\varphi(x)$ монотонно неубывающей). В соответствии с алгоритмом безэталонных измерений мы можем теперь вместо неизвестных ранжированных значений $x_{(r)}$ взять их оценку через порядковые средние $\hat{x}_{(r)} = E_r$ и идентифицировать зависимость $y = \varphi(x)$ по связи между $y_{(r)}$ и $\hat{x}_{(r)}$. В этом и состоит идея **безэталонной идентификации**.

Отметим, что после ранжирования наблюдения становятся коррелированными, в то время как классический метод наименьших квадратов требует некоррелированности данных. Поэтому при безэталонной идентификации рекомендуется использовать обобщенный метод наименьших квадратов [1, 2].

Если известен только **вид** функции распределения x , то **параметры** ее могут быть определены путем прямого измерения некоторых реализаций x , как это описывалось выше.

Пример 4. Математический эксперимент по восстановлению линейной зависимости

Пусть x – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0; 1]$, y – переменная, связанная с ней функциональной зависимостью $y = 2x + 1$. Воспользовавшись генератором случайных чисел, образуем выборку $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) случайных реализаций x и связанную с ней выборку «наблюдений» $\{y_i\}$, где $y_i = 2x_i + 1$, после чего произведем ранжирование по величине y (см. табл. 5.2).

Таблица 5.2

Исходные данные для математического эксперимента

r	$x_{(r)}$	$y_{(r)}$	$\hat{x}_{(r)}$
1	0,105	1,210	0,090
2	0,118	1,236	0,182
3	0,178	1,356	0,273
4	0,346	1,692	0,364
5	0,425	1,850	0,455
6	0,433	1,866	0,545
7	0,728	2,456	0,636
8	0,754	2,508	0,727
9	0,961	2,922	0,818
10	0,964	2,928	0,909

Предположим теперь, что сами значения $x(r)$ каким-то образом утеряны, сохранилась лишь информация о том, что x – равномерно распределенная случайная величина из интервала $[0; 1]$. Тогда упорядоченным значениям $y(r)$ можно поставить в соответствие оценки

$$\hat{x}(r) = E_r = \frac{r}{n+1}, \quad n = 10$$

и построить зависимость $y(r)$ от $\hat{x}(r)$ (см. табл. 5.2 и рис. 5.4, где точки $(\hat{x}(r), y(r))$ представлены черными кружками).

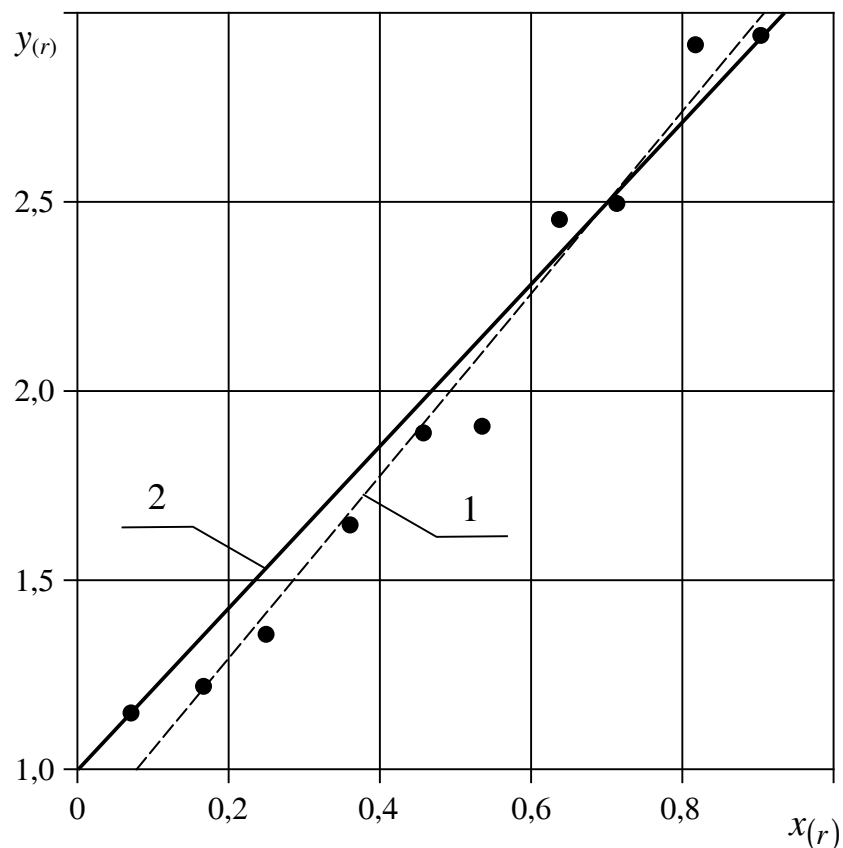


Рис. 5.4. Зависимость $y(r)$ от $\hat{x}(r)$.

По расположению точек видно, что зависимость между $y(r)$ и $\hat{x}(r)$ можно искать в виде линейной функции

$$y(r) = a \hat{x}(r) + b.$$

Используя стандартный метод наименьших квадратов, получим $a = 2,36$, $b = 0,80$ (прямая 1 на рис 5.4).

Качество идентификации (напомним, что точные значения параметров $a = 2$, $b = 1$) может быть улучшено, если для определения a и b ис-

пользовать только крайние статистики (как уже отмечалось, в случае равномерного закона распределения наиболее информативны именно они). Тогда легко получить

$$a = \frac{\hat{y}(n) - \hat{y}(1)}{\hat{x}(n) - \hat{x}(1)} = 2,1, \quad (6.7)$$

$$b = \frac{\hat{x}(n) \hat{y}(1) - \hat{y}(n) \hat{x}(1)}{\hat{x}(n) - \hat{x}(1)} = 1,0$$

(прямая 2 на рис. 5.4). Эти значения параметров очень близки к точным.

Отметим, что соотношения (5.7) могут быть получены и другим путем, а именно при применении обобщенного метода наименьших квадратов, разработанного, как мы уже отмечали, для коррелированных данных [1].

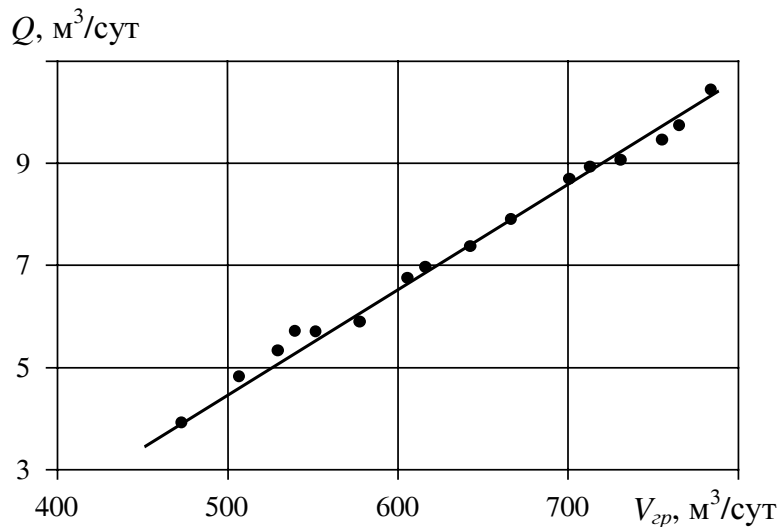


Рис. 5.5. Зависимость дебита нефти от расхода газа

Пример 5. Безэталонная идентификация характеристики газлифтной скважины

Результаты расчетов, проведенных выше в примере 1, позволяют провести безэталонную идентификацию рабочей характеристики газлифтной скважины, т. е. определить зависимость $Q = Q(V_2)$. Для этого построим (см. рис. 5.5) зависимость между дебитом нефти Q и расчетным расходом газа $V_{зр}$ (второй и шестой столбцы табл. 5.1). Аппроксимируя эту зависимость (в рассматриваемом диапазоне изменения V_2) прямой, получим

$$Q = 2,0 \cdot 10^{-2} V_2 - 5,4.$$

Эта зависимость может быть использована для расчета объема газа, потребного для обеспечения заданного дебита нефти. Отсюда может быть получен еще один результат: из вида зависимости $Q = Q(V_2)$ следует, что рабочая точка находится далеко от той области, где функция $Q(V_2)$ имеет экстремум. Поэтому можно рекомендовать переход к новому рабочему режиму с большим расходом газа (около $800 \text{ м}^3/\text{сут.}$).

5.2. Учет априорной информации с помощью Паде-аппроксимаций

При построении приближенных глобальных решений уравнений часто используют метод продолжения функций, локально («в малом») удовлетворяющих этим уравнениям. В великолепной книге И. В. Андрианова и Л. И. Маневича [8] показано, что эффективным инструментом продолжения решений являются Паде-аппроксимации, определение которых, без излишней строгости, можно дать следующим образом.

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n, \quad x \rightarrow 0, \quad (5.8)$$

и/или

$$f(x) = \sum_{k=0} b_k x^{-k}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Тогда Паде-аппроксимацией функции $f(x)$ называется дробно-рациональная функция

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i}{\sum_{j=0}^n \beta_j x^j}, \quad (5.10)$$

коэффициенты α_i , β_j которой подбираются таким образом, чтобы члены разложения (5.10) при $x \rightarrow 0$ и/или $x \rightarrow \infty$ совпадали с членами разложения (5.8) и/или (5.9) (при этом число членов, остающихся в разложениях, определяется общим числом независимых неизвестных коэффициентов α и β).

Опыт показывает, что переход к дробно-рациональным функциям позволяет более адекватно учесть априорную информацию об особенностях и асимптотиках изучаемых зависимостей. Приведем несколько примеров, показывающих, как Паде-аппроксимации позволяют провести эффективные расчеты «на пальцах» и восстановить информацию «из ничего».

5.2.1. Продолжение асимптотических разложений

Решение уравнения

$$\varepsilon x^5 + x = 1 \quad (5.11)$$

можно попытаться искать в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n. \quad (5.12)$$

Подставив (5.12) в (5.11) и приравняв члены при одинаковых степенях ε , получим

$$x = 1 - \varepsilon + 5\varepsilon^2 - 35\varepsilon^3 + 285\varepsilon^4 - \dots$$

Коэффициенты этого ряда могут быть выражены явно [8]:

$$a_n = \frac{(-1)^n (5n)!}{n!(4n+1)!},$$

что приводит к следующей оценке радиуса сходимости:

$$R = \frac{4^4}{5^5} \approx 0,08.$$

Таким образом, разложение (5.12) применимо только при очень малых ε . Так, при $\varepsilon = 2$ первые два члена ряда (5.12) дают оценку

$$x \approx 1 - \varepsilon + 5\varepsilon^2 = 19,$$

в то время как точное решение (5.11) при этом значении равно $x \approx 0,69$.

Тем не менее разложение (5.12) полезно и при больших значениях ε , поскольку оно может быть продолжено с помощью Паде-аппроксимации. Заметив, что при $\varepsilon \rightarrow \infty$ решение (5.11) асимптотически стремится к $\varepsilon^{-1/5}$, Паде-аппроксимацию решения можно искать в виде

$$x = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i \varepsilon^i}{\sum_{j=0}^m \beta_j \varepsilon^j + \alpha_m \varepsilon^{m+0,2}}.$$

Для простоты в числителе ограничимся первыми двумя степенями ε , а в знаменателе сохраним только член с наибольшей степенью. Тогда получим

$$x = \frac{1 - \varepsilon + 5\varepsilon^2}{1 + 5\varepsilon^{5,2}}. \quad (5.13)$$

Легко видеть, что первые два члена разложения этой функции в окрестности $\varepsilon = 0$ совпадают с членами ряда (5.12). Подставив в (5.13) $\varepsilon = 2$, получим $x \approx 0,79$, что является неплохим приближением.

Качество оценок может быть значительно улучшено за счет привлечения большего числа варьируемых параметров.

Следует отметить, что в этом примере мы вышли за рамки первоначального определения Паде-аппроксимации, используя дробные степени ε .

5.2.2. Характеристики многофазных систем

Основные трудности моделирования движения многофазных систем связаны с заданием реологических и теплофизических свойств. В [8] показано, что Паде-аппроксимации эффективны при решении и таких задач. Рассмотрим, например, соотношения, определяющие зависимость вязкости суспензии (жидкости со взвешенными в ней твердыми частицами) от концентрации взвешенных частиц. В 1905 г. А. Эйнштейн в своей работе, посвященной теории флуктуационного (броуновского) движения, получил знаменитую формулу

$$\mu = 1 + 2,5c, \quad (5.14)$$

где μ – отношение эффективной вязкости суспензии к вязкости жидкости, c – объемная концентрация твердых частиц.

Позднее, после довольно сложных расчетов, было получено следующее приближение [9]:

$$\mu = 1 + 2,5c + 5c^2. \quad (5.15)$$

Но даже без обращения к экспериментальным данным, на основе априорных соображений, можно заключить, что как зависимость (5.14), так и зависимость (5.15) верны только для очень малых значений c .

Физическая интуиция подсказывает, что функция $\mu(c)$ должна иметь особенность внутри интервала $[0, 1]$, связную с тем, что даже при не очень больших значениях c частицы оказываются упакованными настолько плотно, что суспензия практически перестает течь: $\mu \rightarrow \infty$. Ясно, что зависимости (5.14), (5.15) не отражают это обстоятельство.

В этой ситуации логично обратиться к Паде-аппроксимации, поскольку дробно-рациональные функции допускают разрывы.

Применение Паде-преобразования к формуле Эйнштейна заключается в аппроксимации вязкости функцией

$$\mu = \frac{1}{1 + \beta c}.$$

Коэффициент β находится из условия $\mu \approx 1 - \beta c = 1 + 2,5c$ при $c \rightarrow 0$. Отсюда $\beta = -2,5$ и

$$\mu = \frac{1}{1 - 2,5c}. \quad (5.16)$$

Более точная аппроксимация

$$\mu = \frac{1 + 0,5c}{1 - 2c} \quad (5.17)$$

получается Паде-преобразованием формулы (5.15).

На рис. 5.6 зависимости (5.14)–(5.17) представлены кривыми 1–4 соответственно. Как видим, зависимость (5.7) хорошо описывает экспериментальные результаты Кригера [9], представленные на рисунке черными кружками.

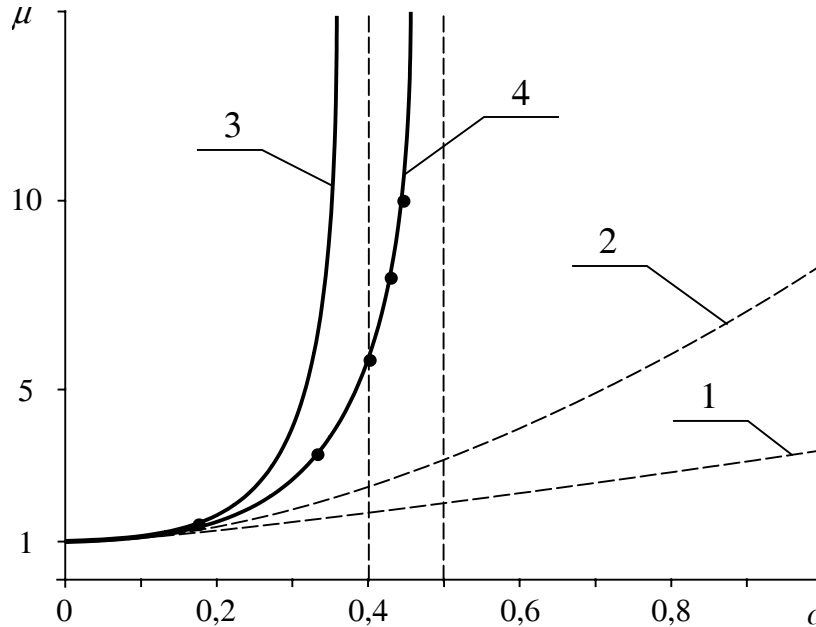


Рис. 5.6. Зависимость вязкости суспензии от концентрации твердых частиц
● – экспериментальные точки; 1–4 – расчетные кривые.

Этот красивый пример, приведенный в [8], наглядно показывает, как априорная информация (в данном случае информация об особенности функции) позволяет восстановить вид зависимости, опираясь на сведения о ее поведении в «малом».

5.2.3. Приток к несовершенной скважине

Скважина, вскрывающая пласт толщиной h только частично (см. рис. 5.7), называется несовершенной по характеру вскрытия. Для расчета радиального притока к такой скважине удобно использовать обобщение формулы Дюпюи в форме

$$Q = \frac{2 \pi k h (P_k - P_c)}{\mu B_0 \left[\ln \frac{R_k}{r_c} + S \right]}, \quad (5.18)$$

где Q – дебит скважины, k – проницаемость в горизонтальном направлении, μ и B_0 – вязкость и объемный фактор жидкости, R_k – радиус контура питания, r_c – радиус скважины, P_k – давление на контуре питания, P_c – давление на забое скважины, S – скин-фактор.

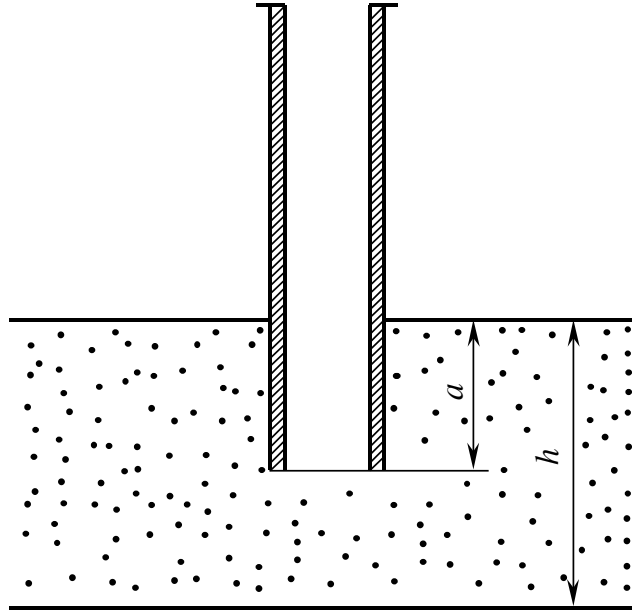


Рис. 5.7. Несовершенная по степени вскрытия скважина

Величина S характеризует уменьшение дебита скважины из-за неполного вскрытия и зависит [10] от двух безразмерных величин

$$\delta = \frac{h}{r_c} \sqrt{\frac{k}{k_1}} \quad \text{и} \quad \tilde{h} = \frac{a}{h},$$

где a – толщина вскрытой части пласта, k_1 – вертикальная проницаемость пласта.

Вообще говоря, зависимость $S = S(\tilde{h}, \delta)$ должна быть определена из решения фильтрационной задачи о радиальном притоке к несовершенной скважине, но в точной постановке эту задачу решить сложно.

Приближенное решение легко получить методом Паде-аппроксимации. При построении аппроксиманта учтем естественное требование $S \rightarrow \infty$ ($Q \rightarrow 0$) при $\tilde{h} \rightarrow 0$, а также поведение функции $S = S(\tilde{h}, \delta)$ в малой окрестности точки $\tilde{h} = 1$.

Разложение решения вблизи $\tilde{h} = 1$, полученное асимптотическими методами, имеет вид (подробности расчетов не приводим)

$$S = (A + 4,60)z + (A - 7,29)z^2 + (A + 50,34)z^3 + \dots, \quad (5.19)$$

где $z = 1 - \tilde{h}$, $A = \ln(4\delta)$.

С учетом априорного требования $S \rightarrow \infty$ при $\tilde{h} \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 1$) будем искать Паде-аппроксимацию в виде

$$S = \frac{\alpha z + \beta z^2}{1 - (1 + \gamma)z + \gamma z^2}. \quad (5.20)$$

Разложив (5.20) в ряд в окрестности $z = 0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z в (5.19) и (5.20), получим систему

$$\begin{cases} \alpha = A - 4,60, \\ \beta - \alpha(1 - \gamma) = A + 7,9, \\ (1 + \gamma)(\alpha + \beta) + \alpha\gamma^2 = A - 50,3, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} \alpha = A - 4,6, \\ \beta = 4,85A - 10,4, \\ \gamma = -4,85. \end{cases}$$

Таким образом, окончательно получим

$$S = \frac{(A - 4,6)(1 - \tilde{h}) + (4,85A - 10,5)(1 - \tilde{h})^2}{1 - (1 + 4,85)(1 - \tilde{h}) + 4,85(1 - \tilde{h})^2}. \quad (5.21)$$

На рис. 5.8 приведены зависимости коэффициента гидродинамического совершенства скважины

$$\eta = \frac{\ln \frac{R_K}{r_c}}{\ln \frac{R_K}{r_c} + S(h, \delta)}$$

от степени вскрытия пласта \tilde{h} , полученные с учетом формулы (5.21) для $\frac{R_K}{r_c} = 1250$ при $\delta = 100$ (кривая 1) и $\delta = 1000$ (кривая 2). Для сравнения

здесь же приведены данные В. И. Щурова, полученные на электрон-аналоговых моделях (кружки), и результаты численного расчета из работы [11] (квадратики) для тех же значений $\frac{R_K}{r_c}$ и δ .

Как видим, во всей области изменения \tilde{h} , представляющей интерес ($\tilde{h} > 0,1$), мы имеем хорошее совпадение результатов. Кривые 1' и 2' на рис 5.8 представляют собой графики разложений (5.19) и приведены для иллюстрации того, насколько эффективен переход к Паде-аппроксимантам.

5.2.4. Построение корреляций для остаточной нефтенасыщенности и коэффициента вытеснения

Одной из основных физико-химических характеристик нефтяного пласта является коэффициент вытеснения нефти водой

$$\beta = \frac{s_{HH} - s_{HO}}{s_{HH}},$$

где s_{HH} и s_{HO} – начальная и остаточная нефтенасыщенность.

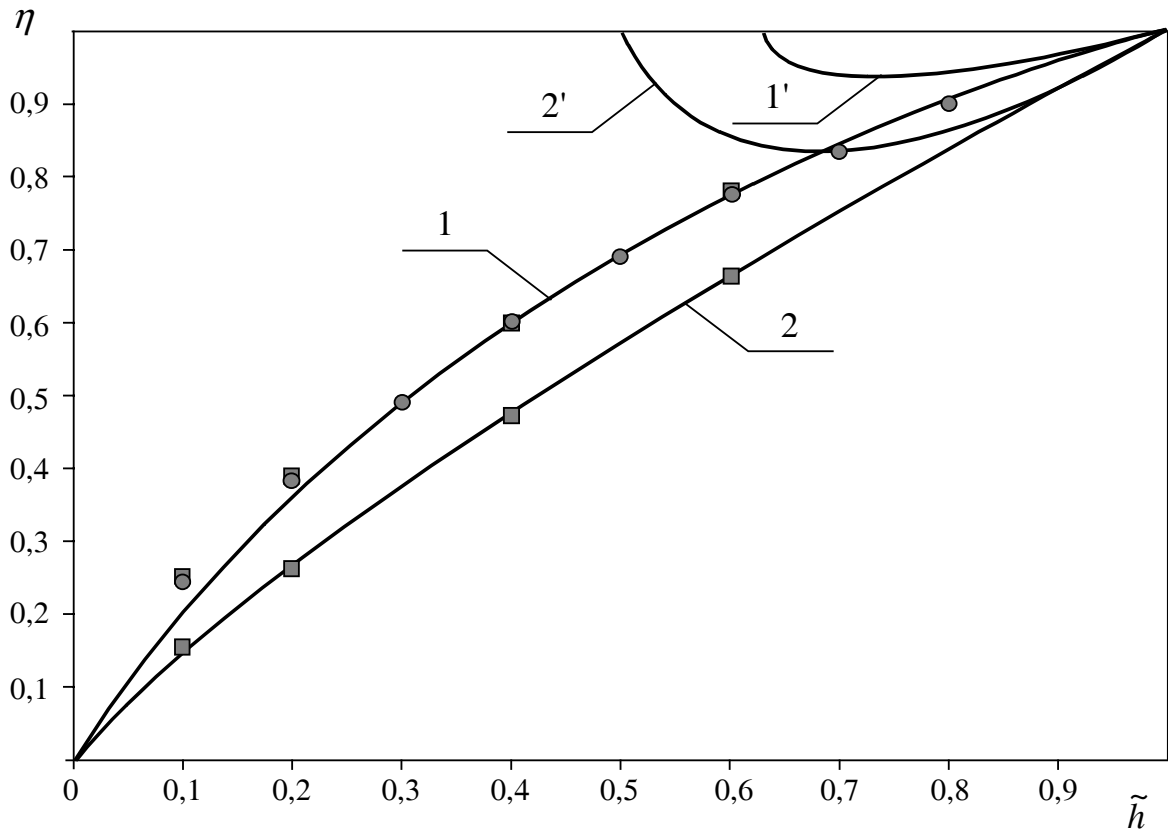


Рис. 5.8. Зависимость коэффициента совершенства скважины от степени вскрытия пласта

В настоящее время при проектировании используются осредненные статические зависимости, устанавливающие связь коэффициента вытеснения с параметрами, определяющими фильтрационно-емкостные свойства пласта и условия вытеснения нефти водой. Часто в проектах разработки месторождений Западной Сибири применяют корреляции, связывающие коэффициент вытеснения с проницаемостью пласта k , в виде

$$\beta = a \lg^2 k + b \lg k + c, \quad (5.22)$$

где a , b , c – эмпирические коэффициенты, определяемые из данных лабораторных исследований кернов [12]. При этом пласты различных месторождений объединяются в несколько групп (АС, ВС и т. д.), внутри которых для всех объектов разработки принимается зависимость (5.22) с одними и теми же коэффициентами.

Подобный усредненный подход был оправдан в период массового ввода в разработку крупных месторождений с хорошими фильтрационными характеристиками. Однако в настоящее время, когда осваиваются площади с трудноизвлекаемыми запасами, необходимо увеличить надежность технологических решений за счет повышения точности расчетов.

В связи с этим обоснование коэффициента вытеснения необходимо производить индивидуально для каждого пласта. Но при этом объем экспериментальных данных, используемых для оценки эмпирических коэф-

эффициентов, резко уменьшается, поскольку при выводе корреляционных зависимостей должны привлекаться только результаты исследований, проведенных на кернах рассматриваемого объекта.

Требуется также уточнение модели (5.22), поскольку в водонефтяных зонах залежей коэффициент вытеснения нефти зависит не только от проницаемости, но и от начальной нефтенасыщенности пласта [13, 14] (зависимости $\beta = \beta(k)$ применимы только в чисто нефтяных зонах, начальная нефтенасыщенность которых определяется насыщенностью связанной водой, хорошо коррелируемой с проницаемостью). Если идти по пути условнения зависимости (5.22) путем введения новых членов, зависящих от s_{nn} , то это еще более усугубит проблемы, связанные с нехваткой данных для определения большого числа эмпирических коэффициентов.

Эти затруднения могут быть преодолены за счет более осмысленного выбора класса функций, в котором ищется зависимость $\beta = \beta(k, s_{nn})$. Структура идентифицируемой модели должна явным образом учитывать априорную информацию о механизмах вытеснения нефти водой. (Вообще говоря, это является универсальным рецептом: структура пробных функций в задачах восстановления зависимостей должна быть подобрана с учетом особенностей моделируемых процессов.) Прежде всего, обратим внимание на то, что, с точки зрения подземной гидродинамики, более правильно ставить задачу определения не коэффициента вытеснения, а остаточной нефтенасыщенности как функции проницаемости и начальной нефтенасыщенности $s_{no} = f(k, s_{nn})$. Коэффициент вытеснения есть величина вторичная, зависящая; она полностью определяется значениями s_{nn} и s_{no} . Отметим, что в современных гидродинамических пакетах программ, предназначенных для моделирования процессов разработки, коэффициент вытеснения напрямую вообще не используется: он закладывается в модель лишь косвенно, путем задания значений s_{nn} и s_{no} (s_{nn} определяется как критическая нефтенасыщенность, при которой фазовая проницаемость нефти становится равной нулю). Последнее не означает, однако, что нужно вообще отказаться от такого понятия, как коэффициент вытеснения. Эта величина является важной интегральной характеристикой, привычным контрольным параметром, с помощью которого можно судить об адекватности расчетов.

На рис 5.9 представлен типичный вид зависимости остаточной нефтенасыщенности от начальной (точками показаны результаты одной из серии лабораторных экспериментов, проведенных на кернах с близкими значениями проницаемости). Будем искать ее в виде обобщенной (допускающей дробные степени) Паде-аппроксиманты

$$s_{no} = \frac{\alpha + \gamma s_{nn}}{1 + \delta s_{nn}^p}, \quad (5.23)$$

где α , β , δ – коэффициенты, в общем случае зависящие от проницаемости, p – некоторое постоянное число, $0 < p \leq 1$.

Приведем априорные соображения о поведении зависимости $s_{HO} = s_{HO}(s_{HH})$ вблизи нуля и единицы.

При малых значениях нефтенасыщенности нефть оказывается защемленной в порах капиллярными силами и вытеснить ее не удастся. Поэтому при $s_{HH} \rightarrow 0$ $s_{HO} \approx s_{HH}$ или

$$s_{HO} = s_{HH} + o(s_{HH}^2), \quad (5.24)$$

т. е. кривая $s_{HO}(s_{HH})$ в точке $s_{HH} = 0$ касается биссектрисы.

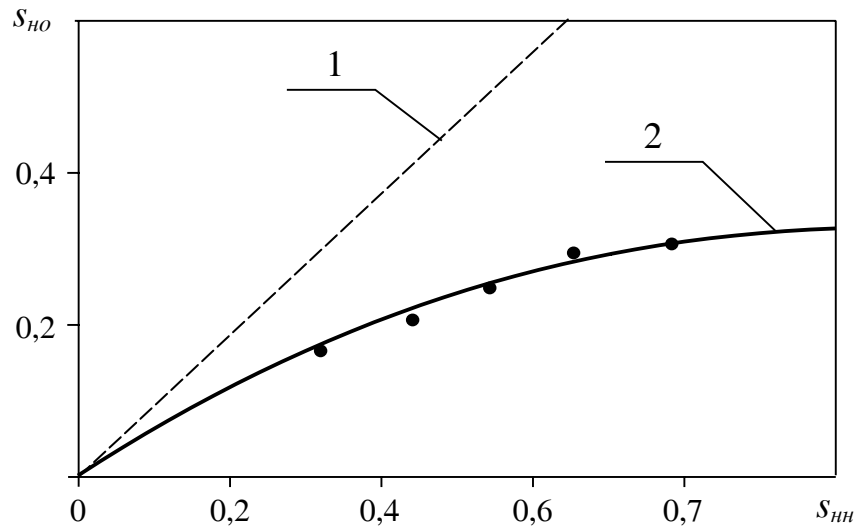


Рис. 5.9. Зависимость s_{HO} от s_{HH} при постоянной проницаемости

● – экспериментальные точки; 1 – прямая $s_{HO} = s_{HH}$,

2 – Паде-аппроксимация зависимости s_{HO} от s_{HH} по формуле (6.26).

При малых s_{HH}

$$\frac{1}{1 + \delta s_{HH}^p} \approx 1 - \delta s_{HH}^p + \delta^2 s_{HH}^{2p} - \dots,$$

что при подстановке в (5.23) дает

$$s_{HO} \approx \alpha - \alpha \delta s_{HH}^p + \gamma s_{HH} - \gamma \delta s_{HH}^{1+p} \dots \quad (5.25)$$

Приравнивая первые члены разложений (5.24) и (5.25), получим $\alpha = 0$, $\gamma = 1$.

При увеличении s_{HH} график зависимости s_{HO} от s_{HH} быстро отходит от прямой $s_{HH} = s_{HO}$ и выполаживается, стремясь к параболе $s_{HO} = \frac{1}{\delta} s_{HH}^{1-p}$ (см. рис. 5.9). Для определенности положим $1 - p = \frac{1}{2}$, откуда $p = \frac{1}{2}$.

С увеличением проницаемости подвижность нефти увеличивается, что приводит к уменьшению остаточной нефтенасыщенности, поэтому параметр δ является возрастающей функцией проницаемости. Аппроксимируя ее степенной зависимостью $\delta = \lambda k^\sigma$, получим окончательно

$$s_{no} = \frac{s_{nn}}{1 + \lambda k^\sigma s_{nn}^{1/2}}, \quad (5.26)$$

откуда

$$\beta = 1 - \frac{1}{1 + \lambda k^\sigma s_{nn}^{1/2}}, \quad (5.27)$$

где λ , σ – эмпирические коэффициенты ($\sigma > 0$), определяемые по данным исследований кернов. Отметим, что зависимость (5.26) спрямляется в координатах $X = \ln \left[\left(\frac{s_{nn}}{s_{no}} - 1 \right) s_{nn}^{-1/2} \right]$, $X = \ln k$:

$$X = \ln \lambda + \sigma X. \quad (5.28)$$

Используя (5.28), легко найти $\ln \lambda$ и σ обычным методом наименьших квадратов.

Как видим, использование априорной информации существенно упростило модель, позволив с помощью всего лишь двух эмпирических коэффициентов (вместо трех в (5.22)) учесть еще и зависимость коэффициента вытеснения от начальной нефтенасыщенности.

Это позволяет компенсировать недостаток экспериментальной информации и получить обоснованные расчетные формулы по ограниченному объему лабораторных данных.

В принципе, модель (5.26) можно уточнить, считая показатель степени p в (5.23) неизвестным и определяя его одновременно с λ и σ .

В любом случае опыт показывает, что значение $p = \frac{1}{2}$ является хорошим первым приближением.

В заключение приведем пример еще одной априорной оценки: опытному специалисту сразу ясно, что возможные значения показателя степени в уравнении (5.26) ограничены неравенством

$$\sigma < 1. \quad (5.28)$$

Это следует из того, что одни и те же изменения проницаемости проявляют себя неодинаково на различных участках шкалы проницаемостей. Поэтому проявления проницаемости часто нелинейны, вместо k мы воспринимаем результат нелинейного сжатия, которое можно описать операциями $k \rightarrow \lg k$ или $k \rightarrow k^\sigma$, где $0 < \sigma < 1$. Не зря в зависимостях, связывающих проницаемость с объемными характеристиками пласта, фигурирует $\lg k$ (см., например, (5.22)).

Подчеркнем, что априорные оценки типа (5.28) имеют исключительно важное значение как средство контроля и повышения устойчивости расчетов при решении задач восстановления зависимостей по выборкам малого объема.

В работах [13, 14] зависимость остаточной нефтенасыщенности от начальной предлагается аппроксимировать выражением

$$s_{HO} = \frac{s_{HH} + \varphi \frac{v}{m} s_{HH}^2}{1 + \theta \frac{v}{m} s_{HH}},$$

где v – средняя скорость фильтрации, m – пористость, φ , θ – эмпирические коэффициенты.

По форме это соотношение также представляет собой Паде-аппроксиманту. Поскольку скорость фильтрации пропорциональна проницаемости, то оно позволяет учесть и зависимость остаточной нефтенасыщенности от проницаемости. Но структура этой аппроксиманты не во всем удовлетворяет сформулированным нами априорным представлениям.

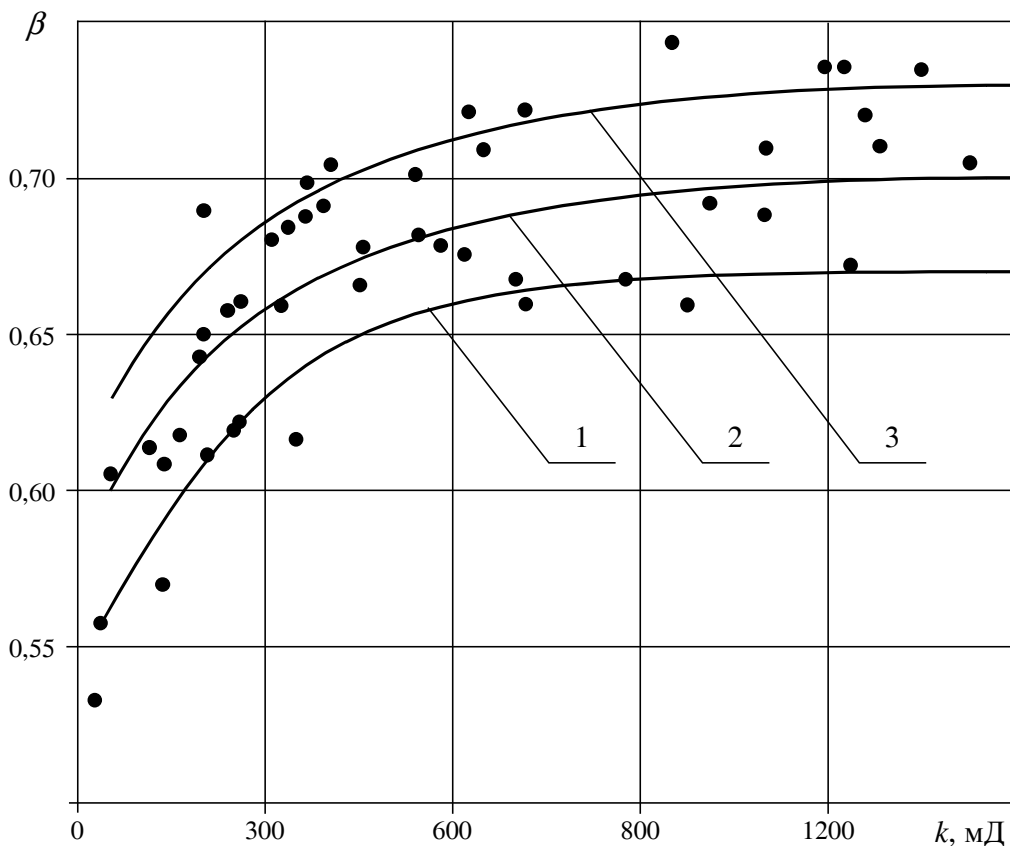


Рис. 5.10. Зависимость коэффициента вытеснения от проницаемости при различных s_{HH} .

● – экспериментальные точки, 1 – $s_{HH} = 0,5$, 2 – $s_{HH} = 0,65$, 3 – $s_{HH} = 0,85$

Пример. Обработка данных исследования кернов одного из пластов Нефтеюганского региона по описанным выше алгоритмам привела к зависимости

$$s_{ho} = \frac{s_{nn}}{1 + k^{0,15} s_{nn}^{1/2}}, \quad (5.29)$$

где проницаемость измеряется в миллидарси. В этом случае, действительно, $\sigma = 0,15 < 1$.

На рис. 5.10 приведены графики функций $\beta = \beta(k)$, полученные с использованием (5.29), при $s_{nn} = 0,5$, $s_{nn} = 0,65$ и $s_{nn} = 0,85$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Как видим, большой разброс значений коэффициента вытеснения при фиксированных значениях проницаемости, наблюдающийся при проведении лабораторных исследований, можно объяснить влиянием начальной нефтенасыщенности.

5.3. Метод асимптотических координат

Положим, что имеется некоторая величина F , зависящая от двух параметров p и q . Пусть в условиях эксперимента задавались определенные значения параметра $q = q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ и определялась зависимость F от p при фиксированных q . В том случае, когда вид полученных кривых в плоскости (p, F) носит качественно сходный характер, часто удается подобрать специальные координаты, с помощью которых исследуемую сложную двумерную поверхность $F = F(p, q)$ удастся описать с помощью нескольких более простых плоских кривых (при этом семейство кривых в плоскости $(p - F)$, соответствующих различным значениям q , сжимается в одну универсальную кривую).

В качестве примера рассмотрим экспериментальные зависимости дебита жидкости Q от расхода газа V и диаметра подъемника d , полученные [15] на лабораторной установке, моделирующей работу газлифтной скважины (см. рис. 5.11).

Перейдем к переменным

$$x = \frac{V - V_0(d)}{V_m(d) - V_0(d)}, \quad (5.30)$$

$$y = \frac{Q}{Q_m(d)},$$

где $V_0(d)$ – расход газа, при котором начинается подъем жидкости ($Q \rightarrow 0$ при $V \rightarrow V_0$), $V_m(d)$ – расход газа, соответствующий максимальному дебиту жидкости $Q_m(d)$.

Тогда все пять кривых на рис. 5.11 можно представить в виде одной универсальной зависимости $y = f(x)$, показанной на рис. 5.12. Характер-

ные величины $V_0(d)$, $V_m(d)$, $Q_m(d)$ в зависимости от диаметра подъемника приведены на рис. 5.13. Кривая $y = f(x)$ может быть аппроксимирована аналитической зависимостью

$$y = x^\alpha \exp(1 - x^\alpha), \quad \alpha = \begin{cases} 0,9; & 0 \leq x \leq 1; \\ 0,5; & x > 1 \end{cases}. \quad (5.31)$$

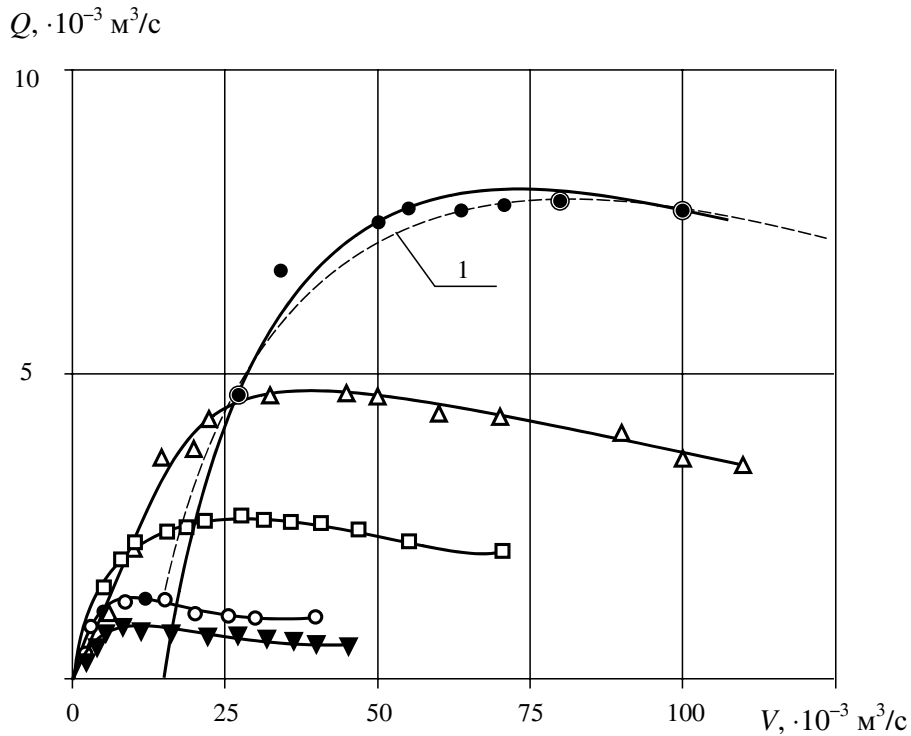


Рис. 5.11. Зависимости $Q = Q(V)$ для подъемников различного диаметра

● – $d = 0,100$ м, Δ – $d = 0,075$ м, \square – $d = 0,063$ м, \circ – $d = 0,050$ м,
 \blacktriangledown – $d = 0,038$ м, 1 – восстановленная по трем точкам зависимость

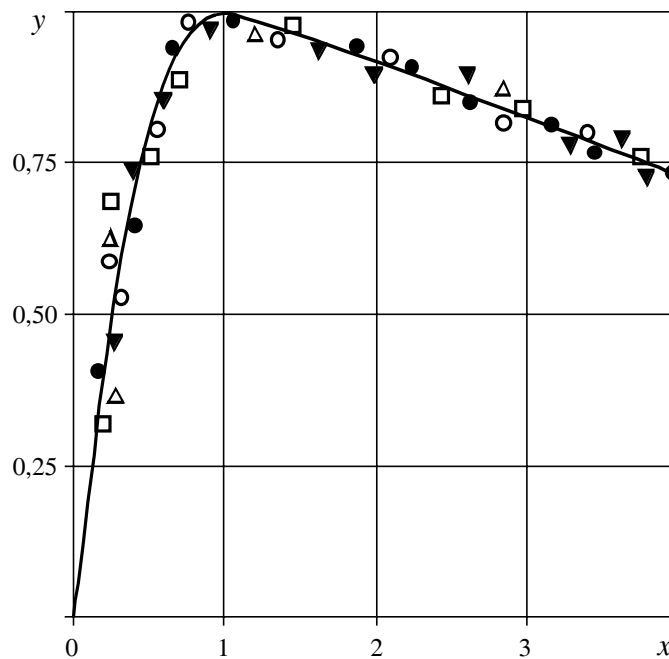
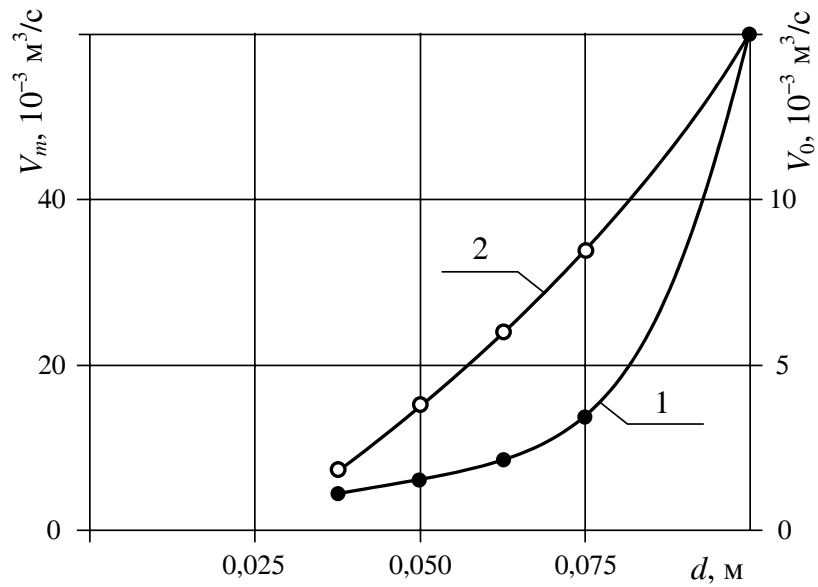
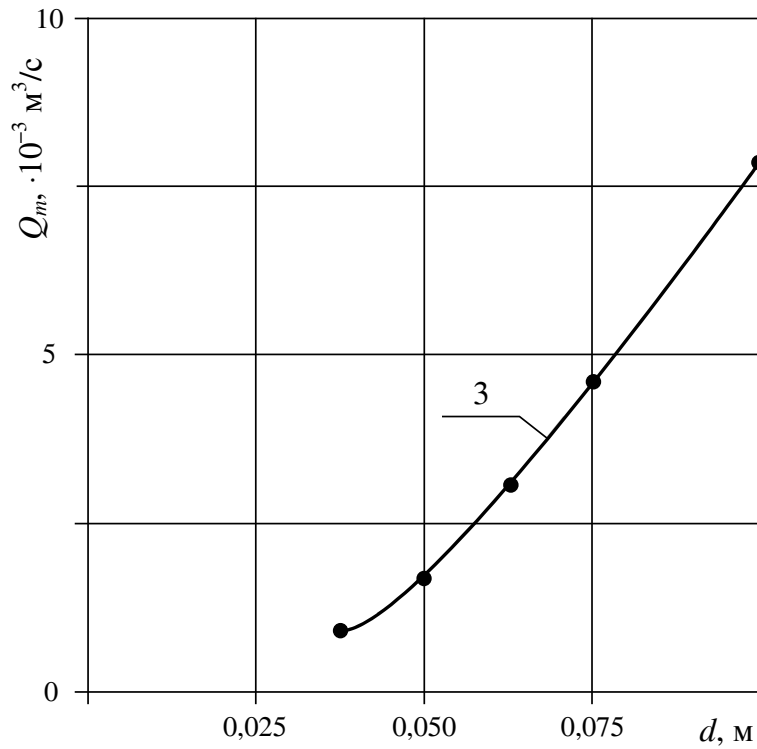


Рис. 5.12. Нормированная зависимость дебита жидкости от расхода газа

● – $d = 0,100$ м, Δ – $d = 0,075$ м, \square – $d = 0,063$ м, \circ – $d = 0,050$ м, \blacktriangledown – $d = 0,038$ м



а)



б)

Рис. 5.13. Зависимости характеристических величин от диаметра подъемника
 1 – $V_0(d)$, 2 – $V_m(d)$, 3 – $Q_m(d)$

Теперь для любого подъемника нам достаточно знать значения трех величин $V_0(d)$, $V_m(d)$, $Q_m(d)$, чтобы рассчитать зависимость $Q(V)$ по формуле

$$Q = Q_m \left(\frac{V - V_0}{V_m - V_0} \right)^\alpha \exp \left[1 - \left(\frac{V - V_0}{V_m - V_0} \right)^\alpha \right].$$

Описанный способ нормирования кривых родственен простому обезразмериванию и широко применяется при обработке экспериментальных данных. В работе [16] он назван **методом асимптотических координат**, поскольку вид нормирующих преобразований устанавливается путем изучения поведения кривых в некоторых предельных случаях ($p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $F'_p \rightarrow 0$ и т. д.). Так, в нашем случае характеристические точки определяются условиями $Q = 0$ и $\frac{dQ}{dV} = 0$.

Представление исследуемой двумерной поверхности с помощью плоских кривых (в нашем примере – представление зависимости $Q = Q(V, d)$ набором кривых, приведенных на рис. 5.12–5.13) облегчает построение аналитической формулы, описывающей эту поверхность. Другим, и более важным, преимуществом метода асимптотических координат является то, что нормированная кривая, носящая универсальный характер, пригодна для единообразного описания различных процессов, протекающих в сходных условиях. В этом качестве нормированные кривые являются удобным инструментом для **моделирования по аналогии**, т. е. для **перенесения** характеристик хорошо изученных объектов на менее изученные подобные объекты.

5.3.1. Восстановление характеристик газлифтных скважин

Предположим, что у нас имеется некоторое множество газлифтных скважин, работающих в примерно одинаковых условиях, часть из которых была тщательно исследована на различных режимах работы с получением регулировочных кривых $Q = Q(V)$. Представив эти кривые в асимптотических координатах вида (5.30), можно определить вид зависимости $y = f(x)$ и считать, что регулировочные кривые остальных, неисследованных, скважин в координатах (x, y) имеют такой же вид.

Это позволяет существенно упростить исследование второй группы скважин: вместо того чтобы проводить полномасштабные эксперименты, на каждый из них достаточно сделать замеры Q и V при трех различных режимах закачки газа. Тогда неизвестные значения характеристических величин V_0 , V_m , Q_m определяются путем решения относительно них системы из трех уравнений

$$f\left(\frac{V_i - V_0}{V_m - V_0}\right) = \frac{Q_i}{Q_m}, \quad (5.32)$$

где Q_i , V_i – дебит жидкости и расход газа на i -м режиме работы скважины ($i = 1, 2, 3$).

Определив V_0 , V_m , Q_m , можно восстановить всю зависимость $Q = Q(V)$ по формуле

$$Q = Q_m f \left(\frac{V - V_0}{V_m - V_0} \right).$$

В частности, оптимальный расход газа, V_{on} , определяемый условием

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{Q}{V} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dQ(V_{on})}{dV} = \frac{Q_{on}}{V_{on}},$$

находится из выражения

$$V_{on} = V_0 + (V_m - V_0)x_{on},$$

где x_{on} есть корень уравнения

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{\tilde{V}_0 + x}, \quad (5.33)$$

$$\tilde{V}_0 = \frac{V_0}{V_m - V_0}, \quad Q_{on} - \text{дебит жидкости при } V = V_{on}.$$

Заметим, что поскольку функция $f(x)$ немонотонна, то единственное решение системы (5.32) можно получить только при условии, что про каждую точку (V_i, Q_i) заранее известно, на какой ветви зависимости $Q(V)$ – левой или правой – она находится.

Из вида кривых $Q = Q(V)$ (см., например, рис. 5.12) ясно, что без априорной информации, представленной в виде универсальной функции, восстановить зависимость $Q(V)$ всего лишь по трем точкам невозможно.

Таким образом, применение метода асимптотических координат дало возможность уменьшить число замеров при исследовании газлифтных скважин. Это очень существенно, поскольку исследование скважин на многих режимах работы связано с перерасходом газа (на правой ветви регулировочной кривой), а также с потерями добычи нефти (на левой ветви).

Универсальная кривая $y = f(x)$ дает формализованное представление априорной информации о результатах исследований, проведенных ранее на других скважинах. Надежное восстановление зависимости $Q = Q(V)$ по малому числу замеров возможно потому, что при учете априорной информации происходит «обогащение» информации о данной скважине – она пополняется и уточняется за счет предыдущего опыта исследования подобных скважин.

Для апробации предложенного алгоритма попытаемся восстановить зависимость $Q = Q(V)$ для $d = 0,100$ м по трем экспериментальным точкам (27,1; 4,67), (79,5; 7,83), и (100,7; 7,67) обведенным на рис. 5.11 кружками.

Численное решение системы в этом случае дает $Q_m = 7,8 \cdot 10^{-3}$ м³/с, $V_0 = 12 \cdot 10^{-3}$ м³/с. Зависимость $Q = Q(V)$, определяемая при найденных

значениях параметров, представлена на рис. 5.11 штриховой линией. Оптимальный режим, получаемый по уравнению 5.33, характеризуется величинами $V_{on} = 29,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$, $Q_{on} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$.

5.3.2. Расчет притока нефти к скважине с забойным давлением ниже давления насыщения

В настоящее время при расчете индикаторных кривых (зависимостей дебита нефти Q от забойного давления P_c) для скважин, работающих при забойном давлении ниже давления насыщения, широко используются результаты исследования Вогеля [17], который путем численного решения уравнений движения газированной нефти при разных значениях параметра пласта и пластового давления получил семейства кривых, типичный вид которых представлен на рис. 5.14. Эти кривые соответствуют различным стадиям истощения пласта и характеризуются двумя параметрами – пластовым давлением P_{Ri} (определяемым по значению P_c при $Q = 0$) и максимальным дебитом Q_{mi} , достигаемым при $P_c = 0$ (i – номер кривой в семействе). При расчете каждой серии кривых начальное пластовое давление принималось равным давлению насыщения ($P_{R1} = P_{нас}$).

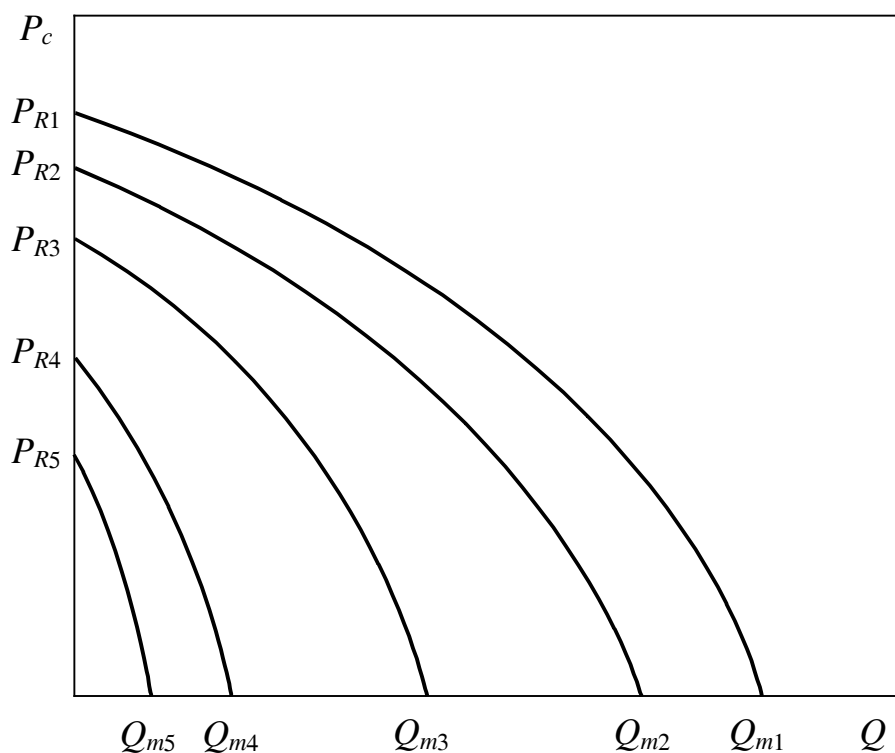


Рис. 5.14. Индикаторные кривые при различных значениях пластового давления

Переходя к асимптотическим координатам

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{Q_m}, \quad \tilde{P} = \frac{P_c}{P_R},$$

мы получим набор кривых (см. рис. 5.15), которые могут быть довольно точно аппроксимированы единой зависимостью. Вогель предложил искать эту зависимость в виде полинома второй степени и пришел к уравнению

$$\tilde{Q} = 1 - 0,2\tilde{P} - 0,8\tilde{P}^2. \quad (5.33)$$

Путем многочисленных расчетов им было показано, что уравнение (5.33) действительно универсально: оно применимо для пластов с самыми различными фильтрационными характеристиками и PVT -свойствами флюидов. Ошибка, допускаемая при применении уравнения Вогеля, в среднем не превышает 10%. Поскольку это уравнение не содержит в явном виде значения газового фактора, оно применимо и для обводненных скважин, если под Q понимать дебит жидкости [18].

При разработке месторождений методом заводнения пластовое давление, как правило, поддерживается выше давления насыщения, т. е. скважины работают (при $P_c < P_{нас}$) в режиме **локального разгазирования**, когда газ в свободном виде выделяется только в некоторой области вблизи скважины (размеры этой области обычно не превышают несколько десятков сантиметров).

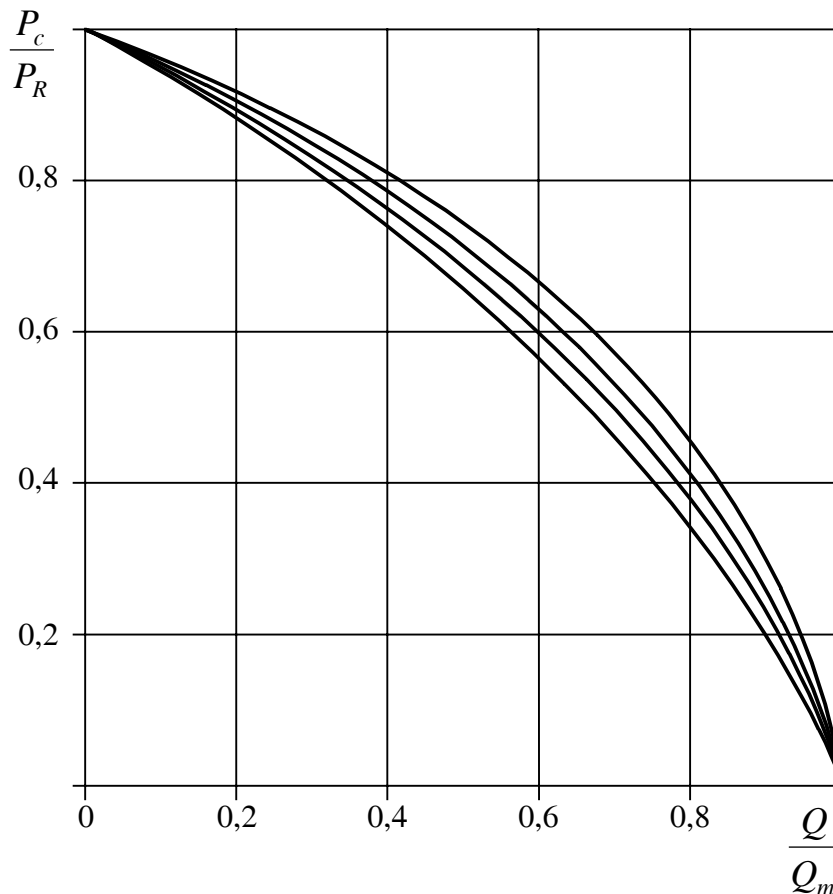


Рис. 5.15. Индикаторные кривые в асимптотических координатах

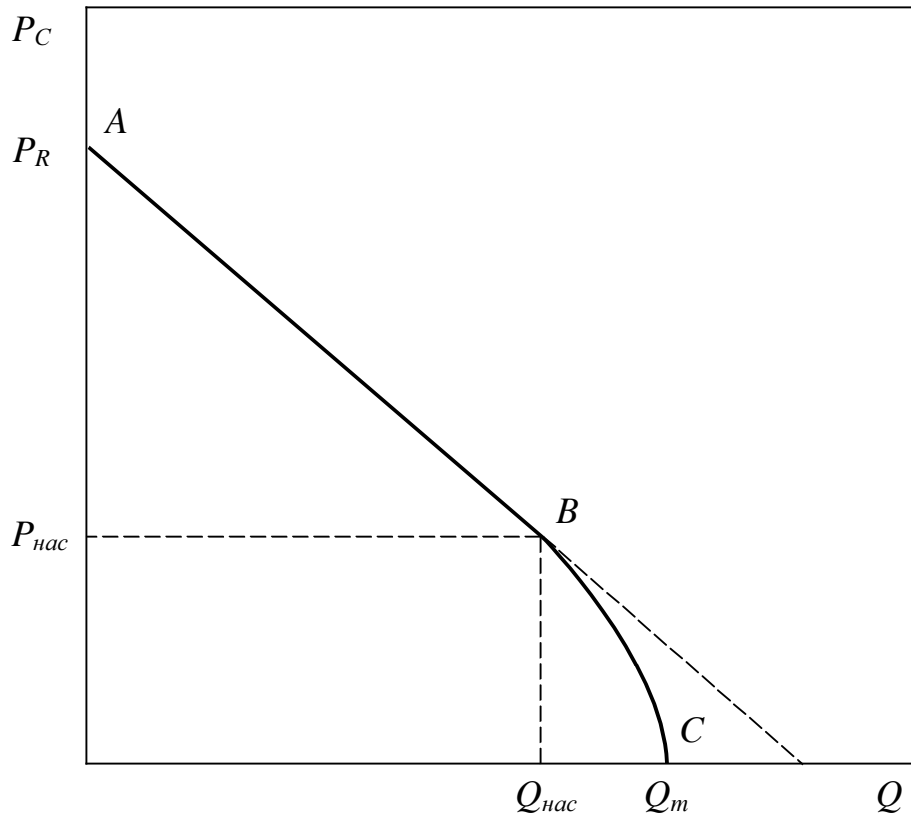


Рис. 5.16. Композитная индикаторная кривая

Для определения дебита скважины в условиях локального разгазирования предложено [18] использовать композитную индикаторную кривую (рис. 5.16), при построении которой используют следующие предположения:

- при $P_c < P_{нас}$ (участок AB на рис. 5.16) зависимость Q от P_c прямолинейна:

$$Q = K(P_R - P_c), \quad (5.34)$$

где K – коэффициент продуктивности скважины в отсутствие газа;

- при $0 < P_c < P_{нас}$ отрезок индикаторной кривой (участок BC) подобен кривой Вогеля, т. е. описывается уравнением (5.33) с

$$\tilde{Q} = \frac{Q - Q_{нас}}{Q_m - Q_{нас}}, \quad \tilde{P} = \frac{P_c}{P_{нас}}$$

или

$$\frac{Q - Q_{нас}}{Q_m - Q_{нас}} = 1 - 0,2 \left(\frac{P_c}{P_{нас}} \right) - 0,8 \left(\frac{P_c}{P_{нас}} \right)^2, \quad (5.35)$$

где

$$Q_{нас} = K(P_R - P_{нас});$$

- кривая BC касается прямой AB , т. е. углы их наклона в точке B равны:

$$\frac{dQ}{dP_c}(P_{нас} + 0) = \frac{dQ}{dP_c}(P_{нас} - 0)$$

или

$$-K = -\frac{1,8}{P_{нас}}(Q_m - Q_{нас}). \quad (5.36)$$

С учетом (5.34)–(5.36) получим окончательно

$$Q = \begin{cases} K(P_R - P_c), & P_c > P_{нас} \\ Q_{нас} + \frac{KP_{нас}}{1,8} \left[1 - 0,2 \left(\frac{P_c}{P_{нас}} \right) - 0,8 \left(\frac{P_c}{P_{нас}} \right)^2 \right], & P_c < P_{нас} \end{cases}. \quad (5.37)$$

Результаты Вогеля с аналитической точки зрения

Итак, Вогель обнаружил замечательный факт существования универсальной формы представления индикаторных кривых. Из предыдущего ясно, что при дальнейшем использовании и обобщении этого результата на случай $P_R > P_{нас}$ были приняты следующие предположения:

1. Индикаторная кривая при $P_c < P_{нас}$ описывается полиномом второй степени.
2. Углы наклона прямолинейного и криволинейного участков индикаторной кривой в точке $P = P_{нас}$ равны.

Рассмотрим с позиций теории фильтрации газированной жидкости, насколько обоснованы эти предположения.

Уравнение стационарной совместной фильтрации нефти и газа можно записать в виде [19, 20]

$$G \left(1 - \frac{P}{P_{нас}} \right) = \frac{\rho_z(P)}{\rho_{zc}} \frac{f_z(S_z)}{f_n(S_z)} \frac{\mu_n(P)}{\mu_z(P)} B(P), \quad (5.38)$$

где G – газовый фактор, $\text{м}^3/\text{м}^3$; ρ_z – плотность газа при данных условиях, $\text{кг}/\text{м}^3$; ρ_{zc} – плотность газа в нормальных условиях, $\text{кг}/\text{м}^3$; f_n , f_z – относительные фазовые проницаемости нефти и газа; S_z – насыщенность газом, $\mu_n(P)$, $\mu_z(P)$ – вязкость нефти и газа при пластовой температуре и давлении P , Па·с; $B(P)$ – объемный коэффициент нефти.

Соотношение (5.38) можно переписать в безразмерном виде

$$g(s_z) = \eta(P_r),$$

где

$$g(s_2) = \frac{f_r(s_2) \mu_{HO}}{f_H(s_2) \mu_{20}},$$

$$\eta(P_r) = \frac{G(1-P_r) \varphi_r(P_r)}{B_0 \beta(P_r) \lambda(P_r) \varphi_H(P_r)},$$

$$P_r = \frac{P}{P_{нас}}, \quad \varphi_2(P_r) = \frac{\mu_2(P_r)}{\mu_{20}}, \quad \varphi_H(P_r) = \frac{\mu_H(P_r)}{\mu_{HO}},$$

$$\lambda = \frac{\rho_2(P_r)}{\rho_{2c}}, \quad \beta(P_r) = \frac{B(P_r)}{B_0},$$

μ_{HO} , μ_{20} – вязкости нефти и газа при давлении насыщения, Па·с, B_0 – объемный фактор нефти при $p = p_{нас}$.

Обращая функцию $g(s_2)$, получим из (6.39)

$$s_2 = \psi(P_r) = g^{-1}[\eta(P_r)].$$

Следовательно, в режиме стационарной фильтрации газированной жидкости насыщенность газом s_2 в каждой точке пласта однозначным образом связана с давлением. Это, в свою очередь, позволяет связать значения фазовых проницаемостей с давлением:

$$f_2(s_2) = f_2[\psi(P_r)],$$

$$f_H(s_2) = f_H[\psi(P_r)],$$

и линеаризировать уравнения фильтрации путем введения функции

$$H(P_r) = P_{нас} \int_0^{P_r} \alpha(P_r) dP_r,$$

где $\alpha(P_r) = \frac{f_H[\psi(P_r)]}{\varphi_H(P_r) \beta(P_r)}$.

Эта функция называется *псевдодавлением* или (в отечественной литературе) функцией Христиановича.

Показано, что уравнения фильтрации газированной жидкости могут быть получены из уравнений однофазной фильтрации путем простой замены давления P на псевдодавление $H(P)$. В частности, формула Дюпюи для радиального притока жидкости к скважине примет вид [19]:

$$Q = K [H(P_{Rr}) - H(P_{Cr})], \quad (5.40)$$

где $K = \frac{2\pi k h}{B_0 \mu_{HO} \left[\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + S \right]}$, P_{Rr} – приведенное пластовое давление

ние $\left(P_{Rr} = \frac{P_R}{P_{нас}} \right)$, P_{Cr} – приведенное значение забойного давления, k и h –

проницаемость и мощность пласта, R – радиус зоны дренирования скважины, r_c – радиус скважины, S – скин-фактор (предполагается, что $P = P_R$ при $r = R$).

Прямое вычисление функции $H(P_r)$ представляет собой нелегкую задачу, основные трудности которой связаны с заданием относительных фазовых проницаемостей нефти и газа. Однако вид этой функции можно определить и без вычислений, используя только отмеченный Вогелем факт существования универсальной зависимости.

Действительно, из (5.40) следует

$$\frac{Q}{KH(R_{Rr})} = 1 - \frac{H(P_{cr})}{H(P_{Rr})}. \quad (5.41)$$

Как показал Вогель, правая часть (5.41) должна зависеть не от P_c и P_R в отдельности, а только от их отношения P_c/P_R . Это возможно, если функция $H(P_r)$ представляет собой степенную функцию:

$$H(P_r) = P_{нас} H_1 P_r^m, \quad (5.42)$$

где H_1 – некоторая постоянная.

Тогда (5.41) можно переписать в виде, подобном (5.33):

$$\tilde{Q} = 1 - \tilde{P}^m, \quad (5.43)$$

если принять

$$Q_m = KP_{нас} H_1 P_{Rr}^m. \quad (5.44)$$

Значение показателя степени m можно определить из условия равенства производных правых частей (5.33) и (5.43) в точке $P_r = 1$. Легко показать, что из этого условия следует $m = 1,8$.

Коэффициент H_1 в уравнении (5.42) связан со значением относительной фазовой проницаемости нефти на границе зоны разгазирования.

Действительно, из определения функции $H(P_r)$ как интеграла с переменным верхним пределом P_r следует

$$\left. \frac{dH}{dP_r} \right|_{P_r=1-0} = P_{нас} \left(\frac{f_H(s_z)}{\beta(P_r)\varphi_H(P_r)} \right) \Big|_{P_r=1}. \quad (5.45)$$

Поскольку свободный газ становится подвижным только при достижении некоторой критической газонасыщенности s_{z0} , то на границе разгазирования происходит скачок газонасыщенности от нуля до s_{z0} . При этом относительная фазовая проницаемость нефти скачком уменьшается от 1 до значения $f_H(s_{z0})$. Поскольку $\beta(1) = 1$, $\varphi_H(1) = 1$, то из (6.45) следует

$$\left. \frac{dH}{dP_r} \right|_{P_r=1-0} = P_{нас} f_H(s_{z0}).$$

С другой стороны, дифференцирование (5.24) дает

$$\left. \frac{dH}{dP_r} \right|_{P_r=1-0} = P_{нас} H_1 m.$$

Из двух соотношений следует

$$H_1 = \frac{f_H(s_{z0})}{m}. \quad (5.46)$$

Итак, Вогелю следовало искать зависимость $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\tilde{P})$ не в виде полинома $\tilde{Q} = 1 - a\tilde{P} - b\tilde{P}^2$ с двумя эмпирическими коэффициентами a и b , а в виде функции $\tilde{Q} = 1 - \tilde{p}^m$ с одним неизвестным параметром m . Зависимость, предложенная Вогелем, не соответствует физическому содержанию задачи. Следует, однако, отметить, что сами по себе эти две функции весьма близки друг к другу (см. рис. 5.17).

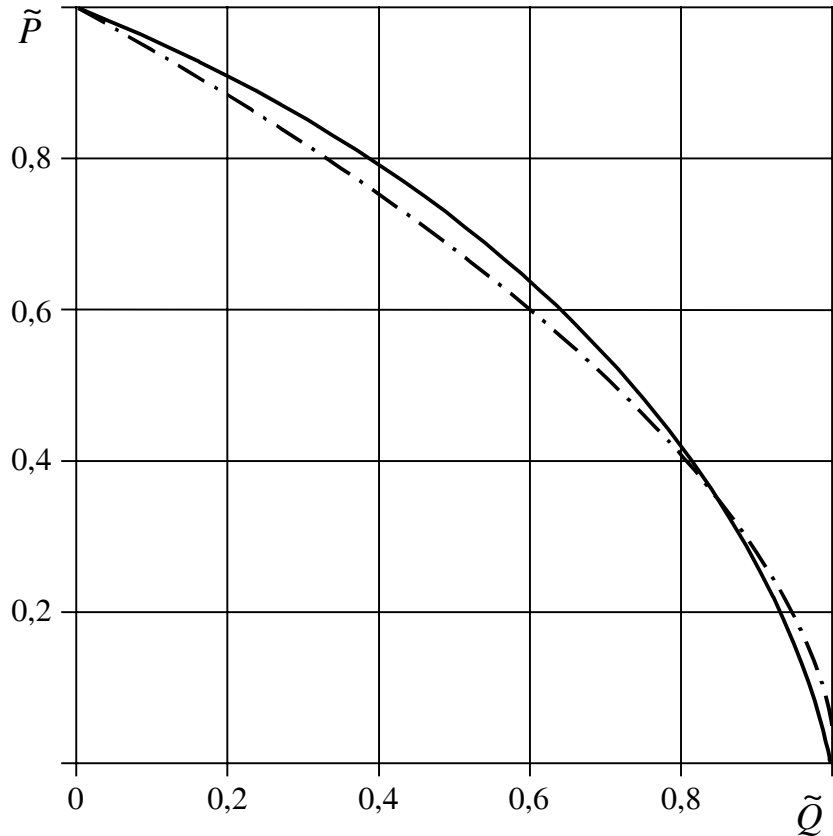


Рис. 5.17. Графики универсальных индикаторных кривых, полученных по разным формулам:

— кривая Вогеля, уравнение (5.33)
 - . - . - кривая, полученная по уравнению (5.43) при $m = 1,8$

А теперь более внимательно проанализируем структуру композитной индикаторной кривой. Пусть $P_R > P_{нас}$ и r_* – радиус зоны разгазирования вблизи скважины. Движение в области $r > r_*$ можно рассмотреть как од-

нофазную фильтрацию к «укрупненной» скважине с радиусом r_* и забойным давлением $P_{нас}$, поэтому здесь применима формула Дюпюи в виде

$$P_R - P_{нас} = \frac{B_0 \mu_{н0} Q}{2\pi k h} \ln\left(\frac{R}{r_*}\right). \quad (5.47)$$

(Предполагается, что изменением произведения объемного фактора нефти на ее вязкость при $P > P_{нас}$ можно пренебречь, считая $\beta(P_r)\varphi_H(P_r) = 1$ при $P_r > 1$ [21].)

Для области разгазирования $r_c < r < r_*$ по аналогии с (5.40) имеем

$$H(1) - H(P_{cr}) = \frac{B_0 \mu_{н0} Q}{2\pi k h} \left[\ln\left(\frac{r_*}{r_c}\right) + S \right]. \quad (5.48)$$

Сложив уравнения (5.47) и 5.48) и учитывая соотношение

$$\ln\left(\frac{R}{r_*}\right) + \ln\left(\frac{r_*}{r_c}\right) = \ln\left(\frac{R}{r_c}\right),$$

получим

$$Q = K(P_R - P_{нас}) + K[H(1) - H(P_{cr})].$$

Принимая во внимание уравнения (5.42), (5.46) и обобщая на случай $P_c > P_{нас}$, имеем

$$Q = \begin{cases} K(P_R - P_c), & P_c > P_{нас}, \\ Q_{нас} + \frac{KP_{нас} f_H(s_{z0})}{1,8} \left[1 - \left(\frac{P_c}{P_{нас}}\right)^{1,8} \right], & P_c < P_{нас}. \end{cases} \quad (5.49)$$

Легко видеть, что угол наклона индикаторной кривой, описываемой уравнением (5.49), скачком меняется в точке $P = P_{нас}$. Действительно,

$$\left. \frac{dQ}{dP_c} \right|_{P_c = P_{нас} + 0} = -K,$$

$$\left. \frac{dQ}{dP_c} \right|_{P_c = P_{нас} - 0} = -K f_H(s_{z0}).$$

Этот слом индикаторной кривой связан со скачком газонасыщенности, который, как уже отмечалось, имеет место на границе зоны разгазирования.

Следовательно, предположение о гладкости индикаторной кривой, которое используется при построении композитной кривой Вогеля [18], неверно.

Отметим, что это предположение ведет к завышению прироста дебита нефти, достигаемого при снижении забойного давления от $P_{нас}$ до нуля, в $1/f_H(s_{z0})$ раз. Поскольку относительная фазовая проницаемость нефти в области малых газонасыщенностей меняется достаточно рез-

ко $f_H(s_{20}) \approx 0,8$, то оценка прироста дебита нефти может быть завышена на 20%–30%.

Полученные выше соотношения являются, по существу, уточнением формулы Фетковича [22], который предложил аппроксимировать функцию

$$\alpha(P_r) = \frac{f_H}{\varphi_H \beta}$$

на интервале $0 < P_r < 1$ ($0 < P < P_{нас}$) линейной функцией, проходящей через начало координат (см. рис. 5.18, прямая 1), что, как легко видеть, также приводит к степенной зависимости H от P_r вида (5.42) с $m = 2$.

Согласно нашему подходу функция $\alpha(P_r)$ аппроксимируется зависимостью

$$\alpha(P_r) = f_H(s_{20}) P_r^{m-1}, \quad (5.50)$$

которая может быть получена путем дифференцирования (5.42) с учетом (5.46). Кривая 2 на рис. 5.18 представляет собой график функции (5.50) при $f_H(s_{20}) = 0,8$ и $m = 1,8$.

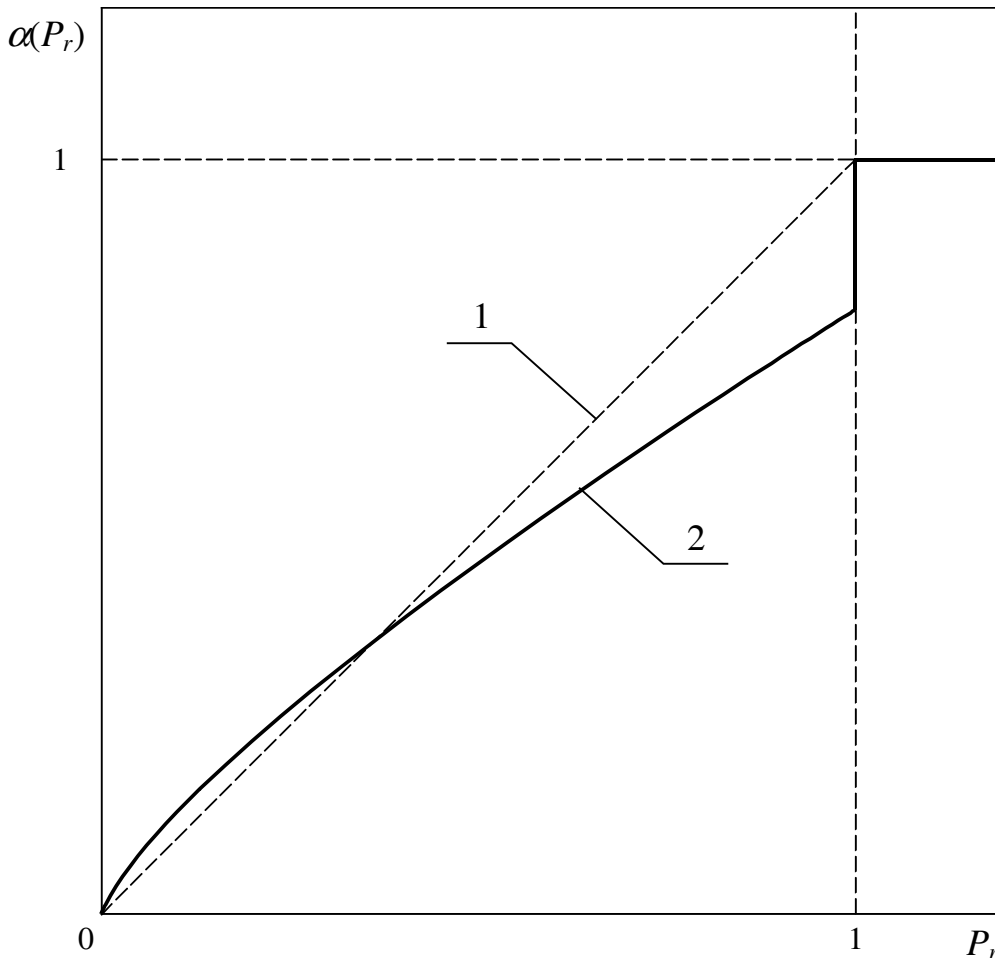


Рис. 5.18. Аппроксимации функции $\alpha(P_r)$:
1 — аппроксимация Фетковича, 2 — формула (5.50) с $f_H(s_{20}) = 0,8$ и $m = 1,8$

Как видим, основное отличие между этими зависимостями состоит в том, что аппроксимация Фетковича не учитывает скачка функции $\alpha(P_r)$ в точке $P_r = 1$. Вместо этого снижение фазовой проницаемости нефти в зоне разгазирования предлагалось учитывать путем введения в уравнения притока псевоскина [22]. Предложенный нами подход является более естественным.

Уравнение (5.49) можно переписать в виде

$$Q = K(P_R - P_{c1}),$$

где

$$P_{c1} = \begin{cases} P_c, & P_c > P_{нас}, \\ P_{нас} \left[1 - \frac{f_n(s_{z0})}{1,8} \left(1 - \left(\frac{P_c}{P_{нас}} \right)^{1,8} \right) \right], & P_c < P_{нас}. \end{cases}$$

Таким образом, в режиме локального разгазирования увеличение фильтрационных сопротивлений за счет выделения газа может быть учтено путем замены истинного значения забойного давления эффективным давлением P_{c1} . Оказывается [23], что при описании взаимодействия пласта и скважины этот прием более удобен, чем общеизвестный подход, заключающийся в замене газированной жидкости однородной фазой с некоторой повышенной эффективной вязкостью [24].

5.4. Гиперболические законы распределения

Опыт реального применения методов математической статистики достаточно быстро убеждает в том, что информация о виде функции распределения совершенно необходима для получения надежных и практически полезных результатов. Так, в разделе 5.1 мы показали, что значение закона распределения случайной величины позволяет (при наличии компаратора) восстановить недостающие замеры с помощью процедуры безэталонных измерений. Но даже при наличии эталонов объем и качество имеющихся данных, как правило, таковы, что обоснованное определение одновременно вида функции распределения и ее параметров не представляется возможным. В такой ситуации рекомендуется применять непараметрические статистики, но за отказ от знания вида закона распределения приходится платить некоторой расплывчатостью ответов, получаемых непараметрическими методами. Таким образом, вопрос о виде функции распределения является одной из важнейших проблем практической статистики.

Принято считать, что универсальными законами распределения, которым подчиняется большинство случайных величин в природе, являются

нормальный и логнормальный законы. Некоторое теоретическое обоснование этому убеждению дает центральная предельная теорема, но часто нормальная функция распределения используется только в силу удобства и привычности.

Б. Мандельброт показал, что не менее универсальным законом распределения является гиперболический [25]. Гиперболические (степенные) законы распределения являются ближайшими «родственниками» фракталов – с этим и связана их широкая распространенность (мы уже упоминали об этом в главе 1).

5.4.1. Формы представления и свойства гиперболических зависимостей

Случайная величина X называется гиперболически распределенной, если

$$P(X \geq x) = \frac{A}{x^\alpha}, \quad 0 < x < \infty, \quad (5.51)$$

где $P(X \geq x)$ – вероятность того, что $X \geq x$, A , α – некоторые постоянные положительные величины.

Если случайная величина дискретна, то вместо (5.51) используется соотношение

$$N_r(X \geq x) = \frac{A}{x^\alpha}, \quad (5.52)$$

где $N_r(X \geq x)$ – общее число случаев, в которых $(X \geq x)$.

Предположив, что дискретные значения X ранжированы в порядке убывания, получим

$$N_r(X \geq x_{(r)}) = r,$$

где $x_{(r)}$ – значения x , имеющие ранг r .

Тогда, обращая (5.52), получим

$$x_{(r)} = \frac{B}{r^\beta}, \quad (5.53)$$

где $B = A^{1/\alpha}$, $\beta = 1/\alpha$.

Это соотношение позволяет оценить значение случайной величины по ее рангу, т. е. оказывается еще одним примером применения порядковых статистик (см. раздел 5.1).

Гиперболическое распределение, представленное в виде (5.51)–(5.52) называют законом Парето, в честь итальянского экономиста Вильфредо Парето, обнаружившего, что количество людей с доходом, превышающим некоторую величину x , уменьшается с ростом x гиперболически.

Дискретный закон распределения в форме (5.53) впервые ввел Джордж Ципф для описания частоты употребления в текстах слов различ-

ной величины. Й. Корчак показал, что закону (5.53) подчиняется также распределение числа озер [25].

Согласно (5.51) при $x \rightarrow 0$ $P(X \geq x) \rightarrow \infty$. Но эта расходимость не существенна, поскольку реальные величины (доходы граждан, длина слов, размеры островов) всегда имеют ограничения снизу (и сверху). В этом смысле соотношения (5.51)–(5.53) имеют промежуточно-асимптотический характер.

Как уже отмечалось в главе 1, гиперболические зависимости масштабно-инвариантны. Для уточнения этого утверждения рассмотрим условное распределение

$$g(x, x_0) = P(X \geq x | X \geq x_0),$$

определяющее вероятность того, что $X \geq x$ при условии $X \geq x_0$. Поскольку, по правилу умножения вероятностей,

$$P(X \geq x) = P(X \geq x | X \geq x_0) \cdot P(X \geq x_0),$$

то

$$g(x, x_0) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x_0)}, \quad (5.54)$$

где $\lambda(x) = P(X \geq x)$.

Функция $g(x, x_0)$ при различных значениях x_0 соответствует различным уровням рассмотрения исследуемой системы. Так, если речь идет о доходах, то функция $g(x, x_0)$ определяет распределение доходов среди населения, уровень жизни которого выше предела, определяемого величиной x_0 .

Распределение доходов будет масштабно-инвариантным, если функции $g(x, x_0)$ при разных x_0 **подобны** друг другу, т. е. если $g(x, x_0)$ зависит не от x и x_0 в отдельности, а только от их безразмерной комбинации x/x_0 :

$$g(x, x_0) = g_1\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Подставив сюда $x_0 = 1$, имеем

$$g_1(x) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(1)},$$

откуда

$$\frac{\lambda(x)}{\lambda(x_0)} = \frac{\lambda(x/x_0)}{\lambda(1)}. \quad (5.55)$$

Прологарифмировав (5.55) и осуществив преобразование

$$\ln \lambda = U(z), \quad z = \ln x,$$

получим

$$U(z) - U(z_0) = U(z - z_0) - U(0), \quad (5.65)$$

где $z_0 = \ln x_0$.

Переходя к пределу $z_0 \rightarrow z$, из (5.56) можно получить

$$U'(z) = U'(0) = \text{const},$$

что возможно, если только функция $U(z)$ линейна:

$$U(z) = a + bz$$

или

$$\ln \lambda(x) = a + b \ln x,$$

откуда и следует (5.51) с $A = e^a$, $\alpha = -b$.

Таким образом, гиперболическое распределение (и только оно) удовлетворяет условию масштабной инвариантности (5.55).

Легко видеть, что условное распределение $g(x, x_0)$ имеет вид

$$g(x, x_0) = P(X \geq x | x \geq x_0) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha}, & x \geq x_0 \end{cases}.$$

Соответствующая функция плотности распределения определяется как

$$f(x) \equiv -\frac{dg(x, x_0)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(\alpha+1)}, & x \geq x_0 \end{cases}. \quad (5.57)$$

В какой-то мере универсализм гиперболических распределений можно объяснить тем, что они характерны для систем, образование которых контролируется процессами *кластеризации*. А этот механизм достаточно широко распространен в природе [26]. Так, в социологии давно известен феномен, который можно выразить словами «успех порождает успех». Часто употребляемые слова становятся все более употребительными, крупные города разрастаются быстрее, часто цитируемые статьи все чаще цитируются и т. д. Все это – примеры социальной кластеризации, феномена, которому Р. Мертон дал название «эффект Матфея», имея в виду библейское изречение «имущему дается».

Гиперболическая функция описывает резко неоднородное, асимметричное распределение. Покажем это, воспользовавшись координатами Ципфа.

Пусть $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)})$ – ранжированная в порядке убывания выборка значений аддитивной величины x , распределенной по закону (5.53), N – объем выборки, $\sigma(n)$ – сумма первых n значений $x_{(r)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$); σ_0 – сумма всех значений x :

$$\sigma(n) = \sum_{r=1}^n X_{(r)}, \quad \sigma_0 = \sigma(N).$$

Введем безразмерные переменные

$$\mu = \frac{\sigma(n)}{\sigma(N)}, \quad \nu = \frac{n}{N}.$$

Легко видеть, что величина μ представляет собой долю σ_0 , «накопленную» в результате n реализаций, а ν – соответствующая доля реализаций. Так, если говорить о доходах, то μ есть доля совокупных доходов, принадлежащих ν -й части населения; если объем выборки велик, то сумму можно заменить интегралом и считать $n \gg 1$. Тогда, в предположении $\beta < 1$, получим

$$\sigma = \int_1^n \frac{B}{r^\beta} dr = \frac{B}{1-\beta} (n^{1-\beta} - 1) \approx \frac{B}{1-\beta} n^{1-\beta},$$

откуда

$$\mu = \nu^{1-\beta}.$$

График этой зависимости при $\beta = 0,85$ (значение, характерное для распределения доходов) представлен на рис. 5.19 (кривая ACB). Этот график (так называемая кривая Лоренца) наглядно показывает неравномерность распределения, описываемого гиперболическим законом: уже при малых значениях ν величина μ близка к единице. Так, при $\nu = 0,2$ $\mu = 0,8$. На примере распределения доходов это означает, что всего лишь 20% населения получают 80% доходов, в то время как остальные 80% имеют всего лишь 20% доходов. В более общем виде это правило, называемое **принципом Парето**, формулируется так: «В больших системах 80% случаев вызываются 20% причин и наоборот». Следует отметить, что граничные значения 80% и 20% достаточно условные, поскольку при других значениях β это может быть 90% и 10% или 70% и 30% и т. д.

Легко видеть, что абсолютно равномерное распределение доходов описывается прямой AB ($\beta = 0$). Чем сильнее кривая Лоренца отклоняется от прямой AB , тем больше неравномерность распределения, поэтому мерой неоднородности может служить величина

$$L = \frac{S_{ACBA}}{S_{ABE}},$$

представляющая собой отношение площади криволинейной фигуры $ACBA$ к площади треугольника ABE . Эта величина называется коэффициентом Лоренца (или Джини [27]). Поскольку $S_{ABE} = 0,5$ и

$$S_{ACBA} = \int_0^1 \nu^{1-\beta} d\nu - S_{ABE} = \frac{1}{2-\beta} - \frac{1}{2},$$

то

$$L = \frac{\beta}{2 - \beta}.$$

Очевидно, что $0 < L < 1$.

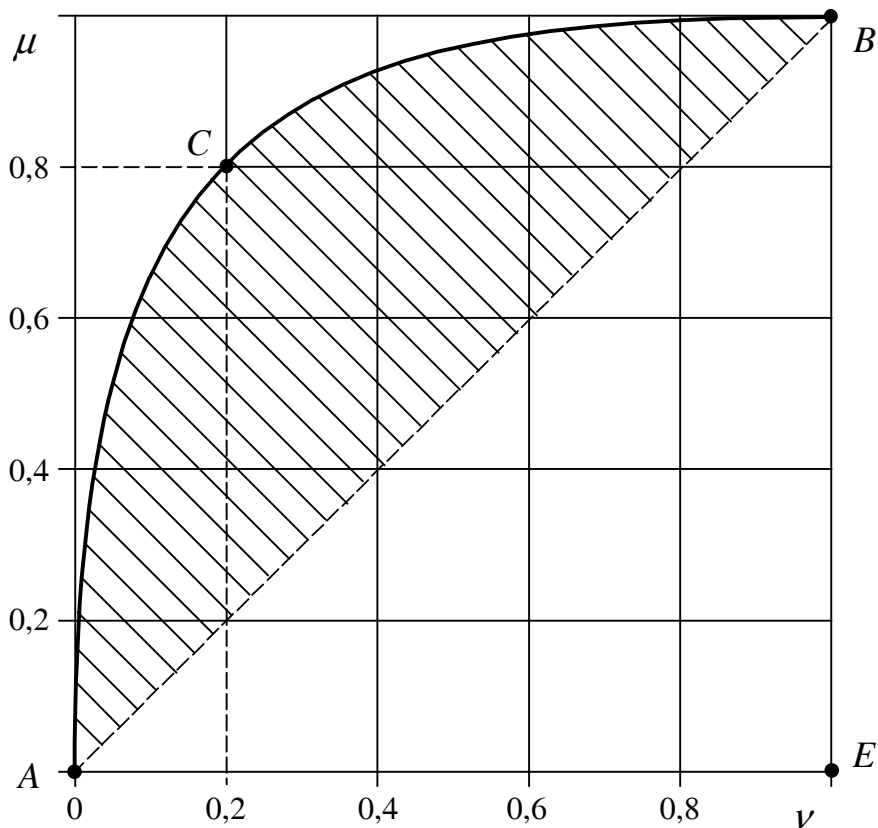


Рис. 5.19. Кривая Лоренца

Следует подчеркнуть, что коэффициент Лоренца определяется по интегрированным данным, поэтому эта величина устойчива к погрешности данных, что является общим свойством всех интегральных методов (см. раздел 2.1.3).

Ограничение $\beta < 1$, принятое нами, не является обязательным. Соотношения, подобные полученным выше, могут быть выведены и при $\beta > 1$, если считать выборку ограниченной ($N < \infty$). Правда, полученные при этом формулы будут несколько сложнее.

5.4.2. Закон Парето в оценке запасов углеводородов

Начиная с работы Крига [28], было принято считать, что распределение запасов минеральных богатств, включая нефть и газ, подчиняется лог-нормальному закону. Однако в 1962 г. Б. Мандельброт показал, что это

распределение является гиперболическим [29] и в ранговом виде может быть выражено в виде

$$r = \frac{A}{V^\alpha} \quad (5.58)$$

или

$$\ln r = \ln A - \alpha \ln V,$$

где V – запасы природных ресурсов в месторождении, имеющем ранг r в упорядоченном (по убыванию запасов) множестве всех месторождений данного региона.

Таким образом, в двойных логарифмических координатах ($\ln r - \ln V$) мы получаем прямую, типичный вид которой представлен на рис. 5.20. Для месторождений нефти и газа обычные значения α лежат в интервале от 0,8 до 1,1 [29].

Гиперболичность распределения запасов объясняется тем, что расположение «ловушек» нефти и газа во многом определяется рельефом, а любой природный рельеф является масштабно-инвариантным. В распределении запасов проявляется и кластеризация. Например, некоторые регионы мира, такие Средний Восток или Западная Сибирь, содержат непропорциональные большие запасы нефти по сравнению с другими регионами. В то же время, распределение запасов в самих этих регионах также крайне неравномерно.

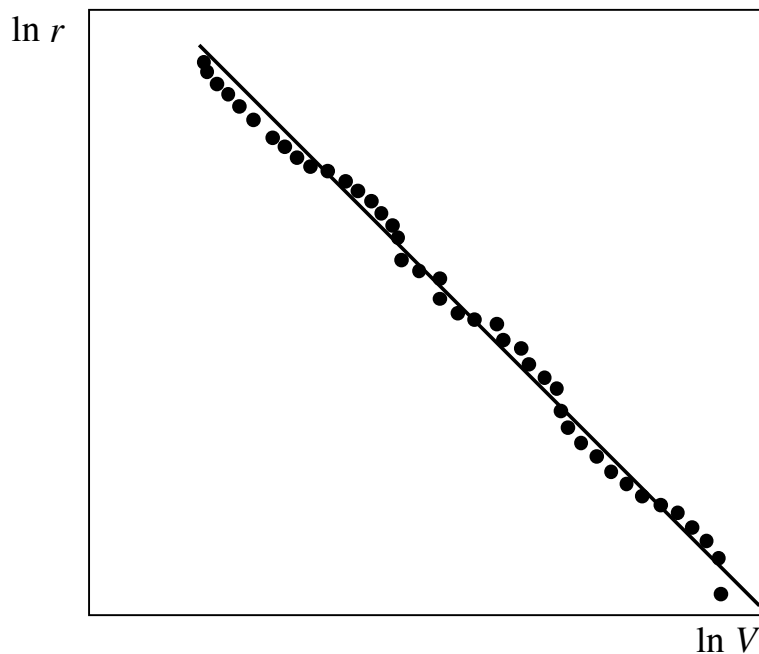


Рис. 5.20. Зависимость ранга месторождения от величины запасов

Следует отметить, что гиперболическое распределение запасов становится явно видимым только для хорошо разведанных регионов. Дело в том, что форма распределения разведанных запасов меняется по мере открытия новых месторождений (см. рис. 5.21). Как правило, вначале откры-

ваются наиболее крупные месторождения, а затем – все большее число мелких месторождений. По этой причине на ранней стадии распределение разведанных запасов напоминает логнормальное (см. кривую для момента времени t_0 на рис. 5.21). Со временем, по мере увеличения числа открытий, кривая распределения все больше приближается к гиперболе. Правая ветвь кривой распределения меняется мало. Это означает, что после накопления достаточного объема информации закон Парето может быть использован для оценки объема запасов, оставшихся к какому-то моменту времени неоткрытыми. Линия AB на рис. 5.22 делит разведанные месторождения на две категории. Месторождения первой категории (справа от линии AB) хорошо разведаны, поэтому они подчиняются закону в координатах $\ln V - \ln r$ и ложатся на прямую CA . Месторождения второй категории (они расположены слева от прямой AB) открыты на все, поэтому представляющие их точки отклоняются от прямой CA . Продолжив прямую CA , мы можем оценить величину неоткрытых еще запасов (область 3 на рис. 5.22). Подчеркнем, что эта возможность неразрывно связана с масштабной инвариантностью иерархии запасов. Только то обстоятельство, что распределение мелких месторождений подобно распределению крупных, позволяет нам, «обучившись» на примере уже открытых месторождений, сделать обоснованный прогноз запасов еще неоткрытых месторождений. При этом закон Парето становится полезным инструментом количественной оценки величины неразведанных запасов.

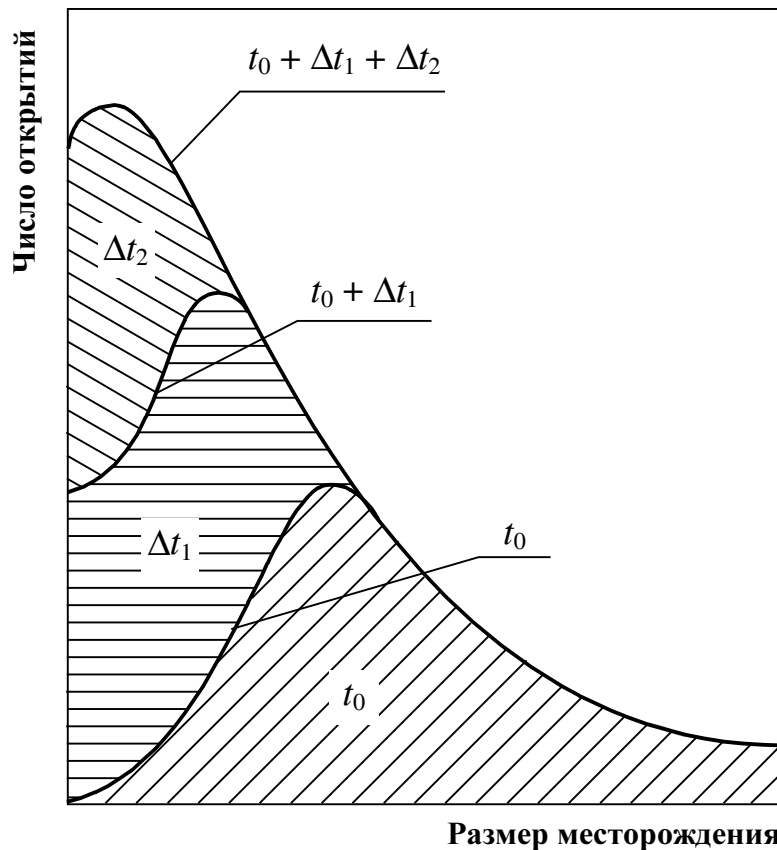


Рис. 5.21. Распределение размеров разведанных месторождений

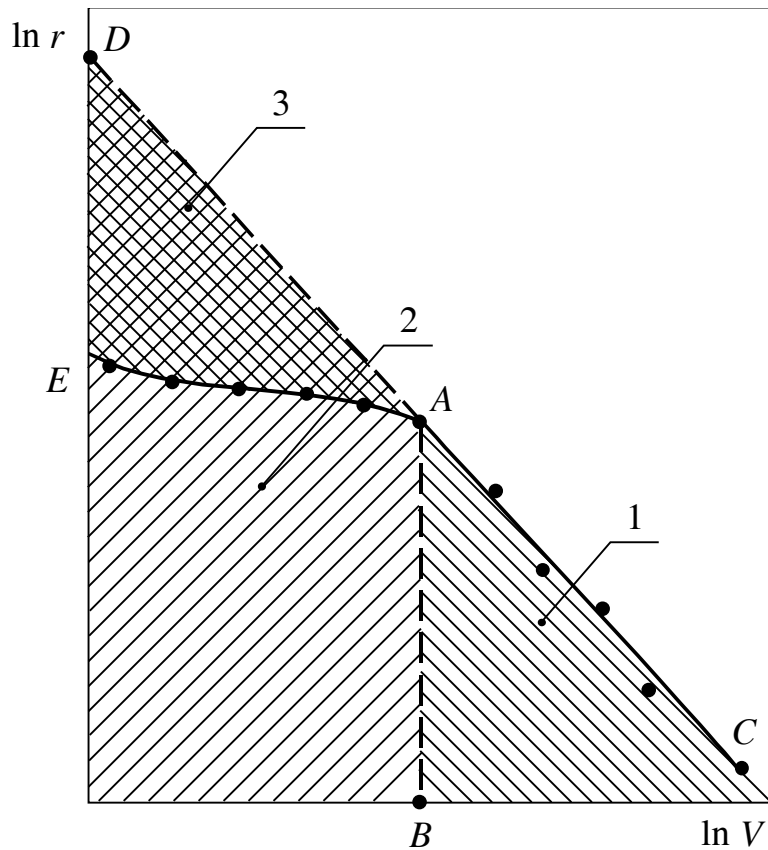


Рис. 5.22. Зависимость ранга разведанных месторождений от запасов.
 1 – запасы, подчиняющиеся закону Парето;
 2 – запасы из категории недоразведанных;
 3 – неоткрытые запасы.

Оценки запасов, полученные с помощью закона Парето, превышают прогнозные значения, которые дает применение логнормального закона, поскольку гиперболическое распределение допускает существование большого числа мелких месторождений.

Фрактальность распределения запасов нефти и газа может быть подтверждена с помощью анализа пространственного распределения «сухих» скважин и скважин, в которых был зарегистрирован приток углеводородов [29]. Для этого карта расположения скважин в некотором регионе делится на квадратные ячейки с длиной стороны ε и подсчитывается общее число N_ε ячеек, в которые попадает хотя бы одна продуцирующая («дающая» нефть или газ) скважина. При уменьшении ε число N_ε растет по закону

$$N_\varepsilon \sim \frac{1}{\varepsilon^D},$$

где D – фрактальная размерность (обычно $D \approx 1,5$).

Отметим, что если бы запасы были распределены равномерно, то величина D была бы равна в точности двум.

Фрактальные представления все глубже проникают в нефтяную науку, революционным образом изменяя мышление ученых и инженеров. Некоторое представление об этом процессе может дать динамика числа публикаций с применением теории фракталов (см. рис. 5.23, построенный по данным до 1992 г., взятым из [29]). Как мы видим, начиная с 80-х годов наблюдается взрывоподобный подъем интереса к фракталам в физике и химии. Рост числа статей в науках о Земле и нефтяном деле слегка запаздывает, но совершенно очевидно, что интерес геологов, геофизиков и нефтяных инженеров к теории фракталов будет стремительно расти по мере того, как они будут осознавать ее пользу.

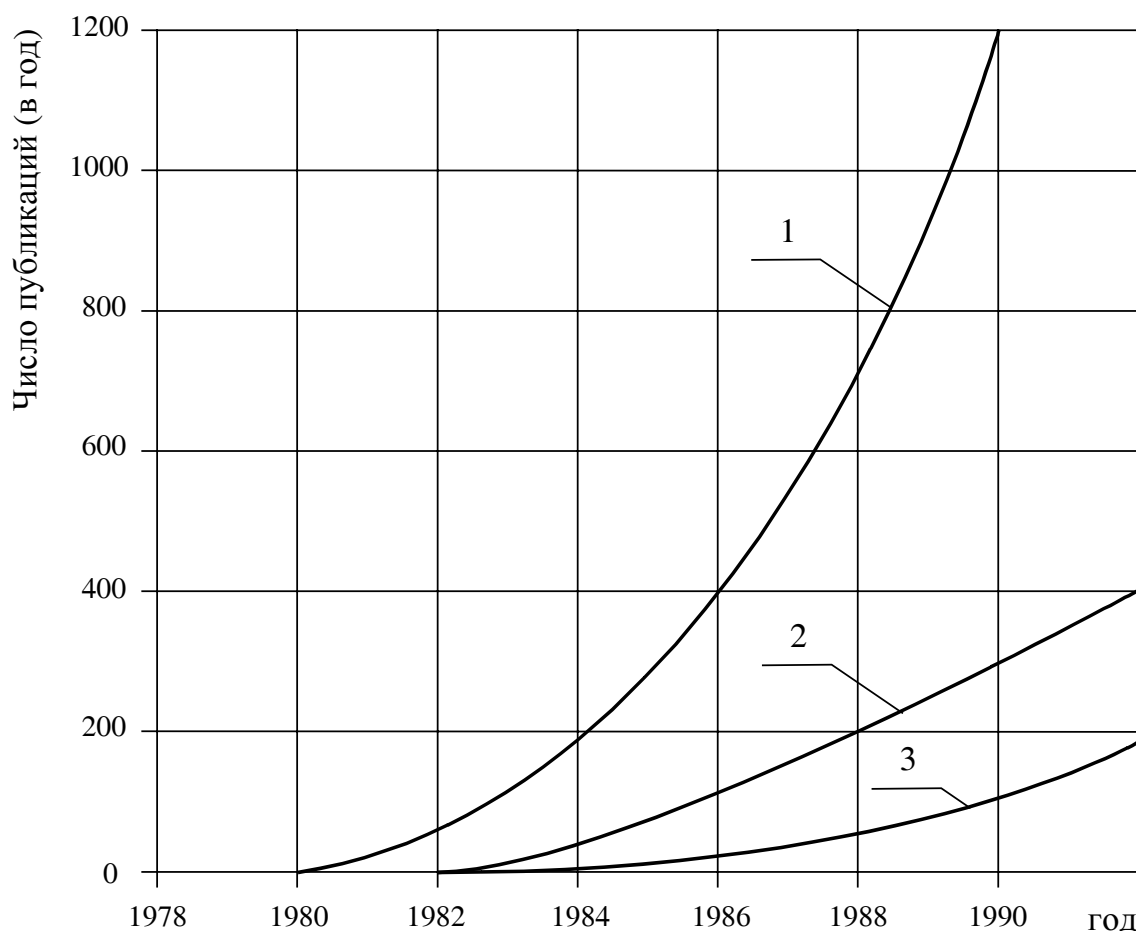


Рис. 5.23. Динамика числа статей и книг, в которых используется теория фракталов
1 – в физике, 2 – в химии, 3 – в нефтяном деле и науках о Земле.

5.4.3. Коэффициент охвата сеткой скважин фрактально-распределенных запасов нефти

Все нефтяные залежи в той или иной степени прерывисты, т. е. состоят из множества нефтенасыщенных песчаных тел (линз), отделенных друг от друга непроницаемыми породами.

Ясно, что в этих условиях полнота извлечения нефти тем больше, чем плотнее сетка пробуренных скважин. Для количественной оценки вовлеченности запасов нефти в разработку вводят так называемый коэффициент охвата пласта сеткой скважин K_c , определяемый как

$$K_c = \frac{V_c}{V_0},$$

где V_0 – суммарный объем нефтенасыщенных песчаных тел, V_c – объем коллекторов, вовлеченных в разработку пробуренными скважинами.

Прерывистый пласт обычно моделируют случайным образом расположенными песчанистыми линзами характерного размера ℓ . Показано, что при этом коэффициент охвата сеткой K_c экспоненциально зависит от плотности сетки скважин [31, 32]:

$$K_c = e^{-aS/\ell^2}, \quad (5.59)$$

где S – площадь пласта, приходящаяся на одну скважину, $a > 0$ – постоянный коэффициент.

Однако моделирование прерывистых пластов с помощью «набора» линз одного характерного размера не позволяет адекватным образом учесть фрактальность их строения.

Как известно, геологические структуры образовались в результате бесчисленных повторений растяжений, сжатий, подъемов, опусканий, передвижения продуктов эрозии на протяжении миллионов лет. На примере преобразования пекаря (см. раздел 1.1) мы уже видели, что подобные процессы всегда приводят к образованию фракталов. Поэтому прерывистость пластов фрактальна, и вместо набора линз одного размера мы имеем масштабно-инвариантную иерархию линз различного размера, распределенных по закону Парето.

Предположим, что для каждого уровня иерархии характерна экспоненциальная зависимость коэффициента охвата запасов от плотности сетки скважин, подобная (5.59). Тогда коэффициент охвата сеткой скважин всего пласта будет представлять собой сумму экспонент, взятую по всем видам иерархических уровней. Перейдя от суммы к интегралу, по аналогии с разделом 3.3 получим

$$K_c = \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} w(\ell) e^{-aS/\ell^2} d\ell,$$

где $w(\ell)d\ell$ – доля общего объема коллекторов пласта, приходящаяся на линзы с размерами от ℓ до $\ell + d\ell$, ℓ_{\min} и ℓ_{\max} – нижняя и верхняя границы изменения ℓ .

Предполагая, что распределение линз-коллекторов определяется законом Парето, примем

$$w(\ell) = \frac{A_1}{\ell^{\alpha_1}},$$

откуда

$$K_c = A_1 \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \frac{1}{\alpha_1 \ell} \exp(-aS\ell^{-2}) d\ell. \quad (5.60)$$

Величина α_1 связана с показателем степени α в (5.58).

Действительно,

$$w(\ell) d\ell = w_1(V) dV, \quad (5.61)$$

где $w_1(V)$ – плотность распределения по объему, а величины V и dV соответствуют ℓ и $d\ell$.

Согласно разделам 5.4.1, 5.4.2 $w_1(V) \sim \frac{1}{V^{\alpha+1}}$, где $\alpha \approx 1$.

Для фрактальных объектов обычные соотношения между объемом и длиной ($V \sim \ell^3$) принимают вид [25]

$$V \sim \ell^{D_V},$$

где D_V – дробная размерность ($D_V \geq 3$).

С учетом этого $dV \sim D_V \ell^{D_V-1} d\ell$ и (5.61) можно представить в виде

$$w(\ell) d\ell \sim \frac{D_V \ell^{D_V-1}}{\ell^{D_V(\alpha+1)}} d\ell = \frac{D_V d\ell}{\ell^{\alpha D_V + 1}}.$$

Таким образом, $\alpha_1 = \alpha D_V + 1$.

Поскольку $\alpha \approx 1$, $D_V \approx 3$, то $\alpha_1 \approx 4$. Подстановкой $\ell = z^{aS}$ интеграл (5.60) сводится к типу интегралов, асимптотика которых при больших aS может быть получена методом Лапласа. После не очень громоздких вычислений можно получить

$$K_c \approx \left(\frac{S_0}{S} \right)^\gamma, \quad \frac{S}{S_0} \gg 1, \quad (5.62)$$

где $\gamma = \frac{\alpha_1 - 1}{2}$, $S_0 = A_1^{1/\gamma} \frac{\gamma}{ae} \left(\frac{\pi}{2\gamma} \right)^{1/2\gamma}$, e – основание натурального логарифма.

Таким образом, в прерывистом пласте с фрактальной структурой коэффициент охвата сеткой уменьшается с уменьшением плотности сетки скважины не по экспоненциальной, а по более медленной степенной зависимости. Наиболее зримо различие между (5.59) и (5.62) проявляется в поведении относительной скорости изменения коэффициента охвата

$$\xi = -\frac{1}{K_c} \frac{dK_c}{dS}.$$

Легко видеть, что для экспоненциальной зависимости $\xi = \text{const}$, в то время как для (5.62)

$$\xi = \frac{\gamma}{S} \rightarrow 0 \quad \text{при } S \rightarrow \infty.$$

Следовательно, влияние плотности сетки скважины на коэффициент охвата велико только при малых S . При увеличении расстояния между скважинами зависимость K_c от S выполаживается. Надо сказать, что этот факт уже отмечался некоторыми исследователями. Для учета переменности ξ вместо (5.59) предлагается использовать «растянутую» экспоненту

$$K_c = e^{-aS^c}, \quad 0 < c < 1.$$

Обратите внимание, что это – не что иное, как закон Кольрауша, имеющий самое прямое отношение к фрактальным структурам (см. раздел 3.2). Из нашего рассмотрения следует, однако, что более правильным будет использовать степенную зависимость (5.62).

5.4.4. Закон Парето в нефтегазодобыче

Гиперболический закон описывает не только распределение запасов, он характерен также для многих систем и процессов, связанных с добычей нефти и газа. Наиболее ярко это проявляется в асимметрии многих показателей разработки, приводящей к закономерностям, подобным принципу «80%–20%» Парето. Например, основная часть притока жидкости в скважину обычно поступает из пропластков, занимающих лишь малую часть всей продуктивной мощностью пласта. Анализ фонда скважин показывает, что обычно небольшая часть скважин (20%–30%) обеспечивает «львиную» долю общей добычи (80%–70%) месторождения. Распределение скважин по дебиту нефти описывается, как правило, законом Парето (см. типичный пример на рис. 5.24).

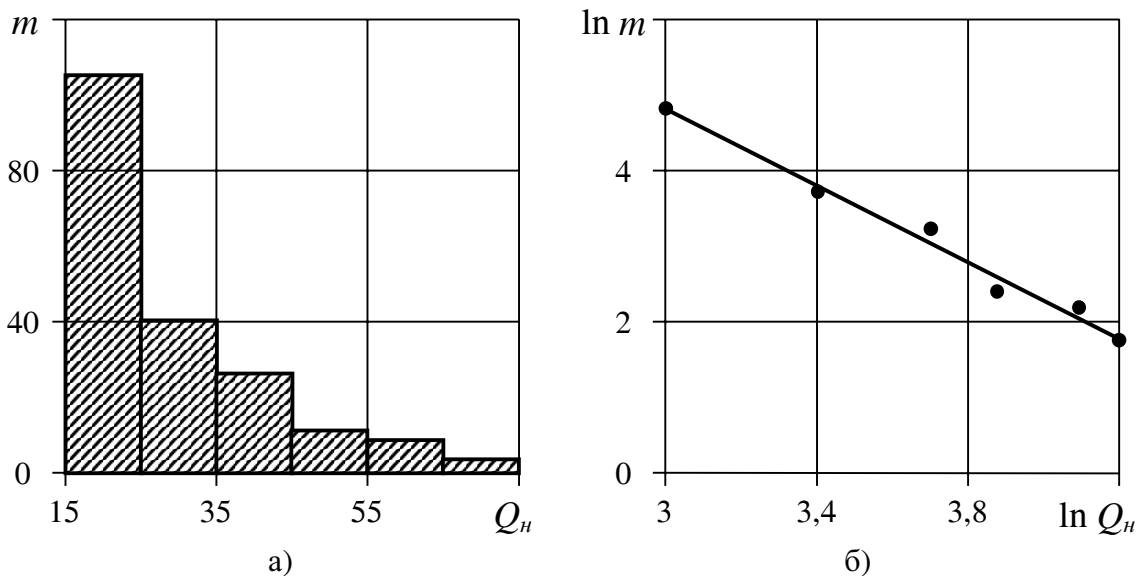


Рис. 5.24. Распределение скважин по дебиту нефти

а) гистограмма зависимости числа скважин m от дебита нефти Q_H ;

б) зависимость $\ln m$ от $\ln Q_H$

Выделение на основе принципа Парето основных объектов, являющихся определяющими для данного технического процесса, позволяет правильно планировать и организовать необходимые геолого-технические мероприятия. Например, анализ бездействующего фонда скважин с использованием закона Парето позволяет выделить 20%–30% скважин, определяющих основную долю «отложенной» добычи и подлежащих первоочередному ремонту.

Закон Парето может послужить основой для построения некоторых диагностических процедур. Так, если рассматриваемая выборка неоднородна, то в логарифмических координатах мы получим не одну, а несколько прямых. При этом точки, лежащие на одном отрезке, можно считать принадлежащими одной выборке. Для примера на рис. 5.25 приведена зависимость между коэффициентом нефтеотдачи η и рангом месторождения в упорядоченной (по значениям η) выборке из 61 залежи Волго-Уральской нефтегазоносной провинции. Как видно из рисунка, выделяются два прямолинейных участка, что соответствует двум типам месторождений. Подобные разбиения могут служить основой для дифференцированного подхода к оптимизации разработки месторождений различного типа.

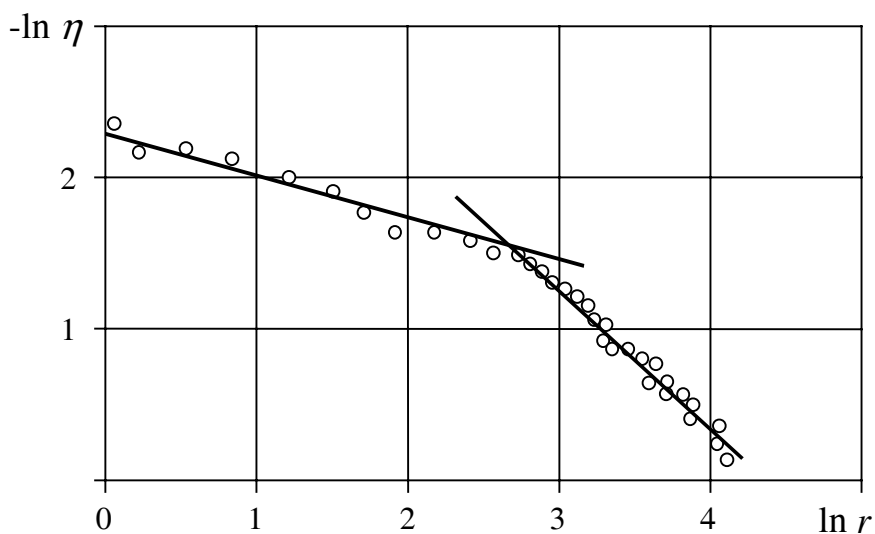


Рис. 5.25. Зависимость логарифма коэффициента нефтеотдачи от логарифма ранга месторождения

На рис. 5.26 приведены зависимости логарифма дебита нефти скважины от логарифма ее ранга, построенные для одного из участков месторождения Саматлор, до и после обработки скважин этого участка полимернокислотным реагентом в целях интенсификации добычи. Как видим, скважины участка подразделяются на две группы – высокодебитных и низкодебитных скважин, – которые по-разному реагируют на проведенную обработку. Заметный положительный эффект получен только на скважинах второй группы, поэтому при применении этой технологии интенсифи-

кации на других участках месторождения следует вначале разбить скважины на две группы, используя координаты Парето, и проводить обработку только на скважинах второй группы.

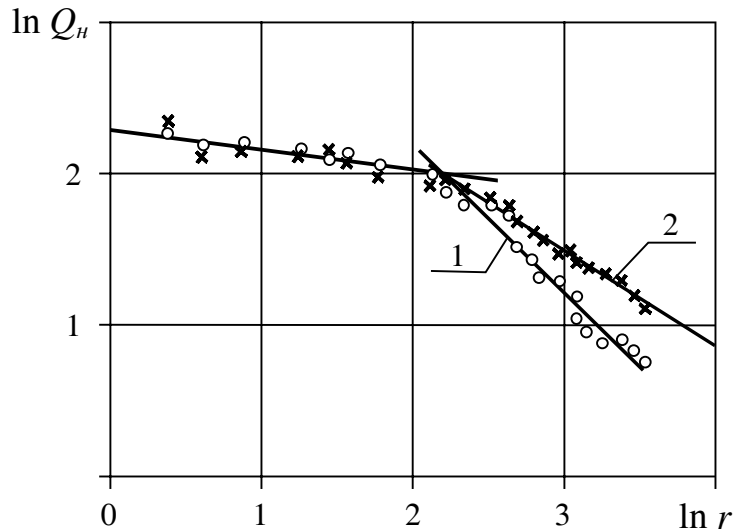


Рис. 5.26. Зависимость логарифма дебита Q_n скважин от логарифма ранга r :
 ○ – до обработки (прямая 1); × – после обработки (прямая 2)

Одной из целей оптимизации разработки нефтяных месторождений является достижение однородности режимов работы скважин и выработки запасов нефти. Поэтому построение кривых Лоренца (см. раздел 5.4.1) в координатах «доля скважин» – «доля добычи» может оказаться весьма полезным инструментом для оценки неоднородности работы фонда скважин, а также для оценки изменения неоднородности после проведения тех или иных мероприятий. Количественные оценки могут быть получены путем вычисления значений коэффициента Лоренца (Джини).

Кривая Лоренца может быть использована также для оценки неоднородности строения пласта [33, 34]. Пусть k_i , m_i , h_i ($i = 1, 2, \dots, N$) – проницаемость, пористость и мощность i -го пропластка в разрезе пласта. Ранжируя пропластки в порядке убывания проницаемости, получим упорядоченную выборку $\{k_{(i)}, m_{(i)}, h_{(i)}\}$, с помощью которой вычислим частичные суммы

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_{(i)} h_{(i)}}{\sum_{i=1}^N k_{(i)} h_{(i)}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\sum_{i=1}^n m_{(i)} h_{(i)}}{\sum_{i=1}^N m_{(i)} h_{(i)}}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В случае однофазной фильтрации величина μ имеет смысл доли фильтрационного потока, притекающей к скважине через поры, занимающие долю ν от общего объема пор, вскрытых данной скважиной.

Для примера, на рис. 5.27 приведена кривая Лоренца, характеризующая послойную неоднородность одного из участков пласта A_{4-6} Мамонтовского месторождения.

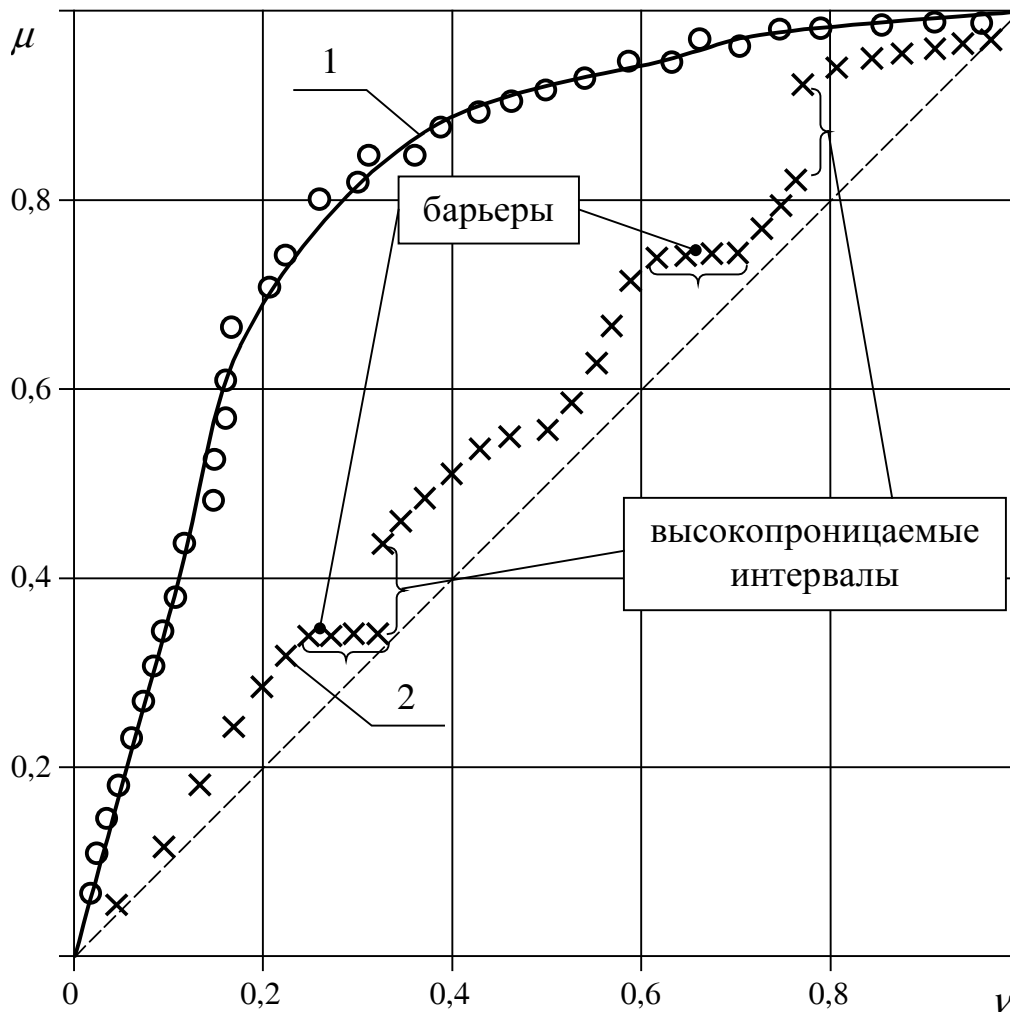


Рис. 6.27. Кривая Лоренца для неоднородного пласта

1 – Кривая Лоренца ($L = 0,73$);

2 – зависимость μ от v для стратиграфически упорядоченных данных;

○ – ранжированные данные; ✕ – неранжированные данные.

Как видим, 80% притока к скважине обеспечивается всего лишь 25% общей мощности пласта, что объясняется большой неоднородностью пласта ($L = 0,73$). На рис. 5.27 приведена также кривая $\mu = \mu(v)$ (кривая 2), полученная для тех же данных, упорядоченных не по проницаемости, а стратиграфически (т. е. согласно глубине залегания). В работе [35] такие кривые предложено использовать для выделения так называемых «элементов потока» (flow units) – интервалов с более или менее однородными свойствами. Так, на кривой 2 хорошо видны высокопроницаемые интервалы и интервалы, образованные низкопроницаемыми породами (барьеры).

Подобные кривые могут оказаться очень полезными при обосновании необходимого числа слоев при создании трехмерных гидродинамических моделей.

Обратим внимание на то, что кривая 2 выглядит более изломанной, чем кривая 1, хотя они обе получены в результате **интегрирования** данных. Следовательно, ранжирование, используемое при построении кривой Лоренца, еще более «сглаживает» данные. В этом смысле операция ранжирования сама по себе подобна операции интегрирования. Это и понятно, поскольку при определении ранга единичного значения нужно «просмотреть» всю выборку.

5.5. Нечеткие алгоритмы принятия решений

Как правило, принятие решений при управлении процессами разработки нефтяных месторождений (в частности, при определении желательности проведения или при оценке эффективности того или иного геолого-технического мероприятия) не может быть произведено с помощью одного единственного критерия (показателя эффективности). Так, при рассмотрении вопроса об остановке высокообводненных скважин следует принять во внимание не только величину обводненности продукции, но также гидродинамические последствия, связанные с перераспределением фильтрационных потоков воды и возможным «запечатыванием» запасов нефти. Еще один пример: анализ промысловых данных показывает, что эффективность ОПЗ скважин существенно зависит от большего числа геолого-геофизических (степень неоднородности пласта по разрезу, доля наиболее продуктивного прослоя в общей продуктивности) и промыслово-технологических (дебит нефти, обводненность продукции, темпы изменения дебитов нефти и жидкости) факторов, учет которых необходим при выборе скважин для проведения мероприятий.

Таким образом, типичной для задач контроля и управления процессами разработки месторождений является многокритериальность – наличие ряда показателей W_1, W_2, \dots, W_n , одни из которых желательно обратить в максимум, другие – в минимум. Существенной особенностью многокритериальных задач является невозможность нахождения решения, одновременно удовлетворяющего всем критериям. Решение, обращающее в максимум один какой-то показатель, как правило, не обращает ни в максимум, ни в минимум другие. В такой ситуации математический анализ позволяет решить только ограниченную задачу «выбраковки» из множества возможных решений заведомо неудачных, уступающих другим по всем критериям решений. В результате отбрасывания заведомо непригодных решений образуется так называемое множество Парето – совокупность решений, характерных тем, что ни для одного из них не существует доминирующего

(лучшего по всем показателям сразу) решения. Таким образом, математический анализ сужает область, в которой ищется решение, делает ее более обозримой. Окончательный же выбор в пользу того или иного варианта из множества Парето должен осуществить человек, способный взять на себя ответственность за принятое решение (такого человека принято называть ЛПР – Лицо, Принимающее Решение (см. раздел 2.4)).

Однако в тех случаях когда решение приходится принимать многократно (при анализе режимов работы большего числа скважин, например), или же когда выбор решения передается автоматизированным системам управления, необходимо выработать некоторые формальные правила, применяемые без участия человека. Эти правила основываются на эвристических методах принятия компромиссных решений и обобщают опыт, интуицию специалистов в данной области (экспертов). Как правило, формализация процедур принятия решения осуществляется путем сведения многокритериальной задачи к однокритериальной, т. е. путем составления обобщенного критерия W , являющегося какой-то функцией критериев W_i . Часто в качестве обобщенного показателя применяют взвешенную сумму частных критериев, в которую каждый из них входит с каким-то весом α_i , отражающим его важность:

$$W = \sum \alpha_i W_i.$$

Веса α_i подбираются с учетом мнения экспертов.

Еще один способ решения многокритериальных задач связан с использованием теории нечетких множеств.

Пользуясь операциями пересечения, определенными в теории нечетких множеств, обобщенный критерий W можно представить в виде

$$W = \max_a \min[\mu_1(W_1), \mu_2(W_2), \dots, \mu_n(W_n)],$$

или

$$W = \max_a \mu_1(W_1) \cdot \mu_2(W_2) \cdot \dots \cdot \mu_n(W_n),$$

или

$$W = \max_a [\mu_1(W_1) \cdot \mu_2(W_2) \cdot \dots \cdot \mu_n(W_n)]^{1/n},$$

где a – множество возможных решений, $\mu_i(W_i)$ – функция принадлежности нечеткого множества «оптимальное значение критерия W_i ».

Специального рассмотрения требует вопрос об оптимальном числе критериев, учитываемых при принятии решения. Очень часто, стремясь получить более точный результат, пытаются учесть как можно больше факторов, однако это может привести к противоположному эффекту – резко снижается надежность и достоверность выводов, поскольку, как правило, степень понимания явления уменьшается с увеличением числа переменных, фигурирующих в его описании. Поэтому из всего многообразия критериев следует выделить главные, наиболее влияющие, и принимать решения только с учетом этих критериев.

5.5.1. Формализация процедур принятия решения при планировании геолого-технических мероприятий

Оптимизация работы фонда скважин подразумевает проведение на них (по мере необходимости) широкого спектра геолого-технических мероприятий (ГТМ), таких, например, как:

- интенсификация притока;
- контроль воды (снижение обводненности продукции);
- вывод скважины из бездействия;
- перевод скважины на другой объект эксплуатации;
- зарезка второго ствола;
- уплотняющее бурение;
- бурение скважин-дублеров;
- остановка скважины и т. д.

При подготовке решений о проведении этих ГТМ должны быть учтены следующие критерии:

- величина остаточных запасов нефти, сосредоточенных вблизи скважины (отдельно по всем объектам разработки, через которые проходит данная скважина);
- степень послойной и зональной неоднородности пласта;
- соответствие обводненности продукции степени выработки пласта;
- характеристики работы близлежащих скважин;
- динамика продуктивности скважины;
- история обводнения продукции скважины;
- обеспеченность отбора закачкой;
- вероятность успеха планируемого ГТМ;
- экономическая эффективность ГТМ.

Комбинируя эти критерии с помощью нечетких алгоритмов, можно создать обобщенные критерии целесообразности проведения различных ГТМ.

Так, принятие положительного решения о проведении водоизоляционных работ в добывающей скважине возможно, если выполняются следующие условия:

- обводненность продукции высока;
- степень выработки запасов мала;
- неоднородность пласта велика.

Формализация этого нечеткого правила может быть осуществлена в виде требования максимизации критерия

$$W = \sqrt[3]{\mu_1(B)\mu_2(V_{ocm})\mu_3(L)}, \quad (5.63)$$

где $\mu_1(B)$, $\mu_2(V_{ocm})$, $\mu_3(L)$ – функции принадлежности нечетких терминалов «высокая обводненность продукции B », «большие остаточные извлекающие запасы V_{ocm} » и «высокая послойная неоднородность пласта L_0 » соответственно.

Функцию $\mu_1(B)$ можно задать в виде

$$\mu_1(B) = \begin{cases} 0, & B < B_0 \\ \left(\frac{B - B_0}{B_m - B_0} \right)^2, & B_0 \leq B \leq B_m, \\ 1, & B > B_m \end{cases} \quad (5.64)$$

где B – доля воды в продукции, B_0 и B_m – значения обводненности, принимаемые экспертами безусловно малыми и безусловно большими (например, $B_0 = 0,5$, $B_m = 0,9$).

Аналогично можно задать

$$\mu_2(V_{ост}) = \begin{cases} \frac{V_{ост}}{V_m}, & V_{ост} \leq V_m, \\ 1, & V_{ост} > V_m, \end{cases}$$

где $V_{ост}$ – остаточные извлекаемые запасы в области дренирования скважины, V_m – значение $V_{ост}$, признаваемое безусловно большим, и

$$\mu_3(L) = \begin{cases} 0, & L < L_0 \\ \frac{L - L_0}{L_m - L_0}, & L_0 \leq L \leq L_m, \\ 1, & L > L_m \end{cases}$$

где L – коэффициент Лоренца, характеризующий послойную неоднородность пласта (см. раздел 5.4.4), L_0 , L_m – значения L , характерные для практически однородного и очень неоднородного пласта (обычно $L_0 = 0,5$, $L_m = 0,9$).

Вычислив значения критерия (5.63) для всех высокообводненных скважин, можно затем отранжировать их по величине W , что дает возможность выделить наиболее перспективные скважины и включить их в график работ ремонтных бригад.

5.5.2. Карты целесообразности проведения мероприятий («алгебра карт»)

Аппарат теории нечетких множеств позволяет также решить задачу визуализации информации, используемой при подготовке и принятии решений. В своей повседневной работе нефтяники широко используют карты, отображающие распределение анализируемых параметров по площади месторождения (карты проницаемости, давлений, нефтенасыщенности, неоднородности пласта и т. д.). При решении многокритериальных задач необходимо построить карты по всем критериям. Совместный анализ всех этих карт (расположенных рядом) затруднителен как по чисто техниче-

ским причинам, так и потому, что рассматриваемые параметры, как правило, разнородны и разномасштабны. Вместо этого можно построить карту обобщенного показателя, учитывающего все критерии, и анализировать лишь одну эту карту.

Таким образом, нечеткие множества позволяют осуществить «наложение» различных карт друг на друга. Согласно операциям объединения и пересечения нечетких множеств карты могут складываться и умножаться, то есть аппарат нечетких множеств позволяет ввести «алгебру карт».

Пакеты программ, реализующие такую «алгебру», могут с успехом использоваться при мониторинге процессов разработки, а также в проектной работе – при анализе истории эксплуатации и подготовке расчетных вариантов.

Так, при планировании работ по применению потокоотклоняющих технологий с целью повышения нефтеотдачи пласта могут быть использованы карты распределения обобщенного критерия

$$W_B = \sqrt{\mu_1(B) \mu_2(\xi)}, \quad (5.65)$$

где $\mu_1(B)$ и $\mu_2(\xi)$ – функции принадлежности к нечетким множествам «высокая обводненность продукции B » и «малая выработка пласта ξ ».

Функция $\mu_1(B)$ задается выражением (5.64), а функцию $\mu_2(\xi)$ можно определить соотношением

$$\mu_2(\xi) = \xi,$$

где $\xi = h/h_0$, h_0 и h – начальная и текущая нефтенасыщенная толщина пласта.

Карта целесообразности проведения потокоотклоняющих работ (карта W_B) получается в результате совмещения трех первичных карт обводненности, начальных и остаточных нефтенасыщенных толщин.

На рис. 5.28 приведены карты W_B для двух участков Мамонтовского месторождения (ОАО «Юганскнефтегаз»), построенные перед проведением на этих участках работ по закачке большеобъемных гелевых систем (БГС) – оторочек полиакриламида со сшивателем – фирмой «Технология-сервис».

Как видно из этого рисунка, значения обобщенного критерия W_B на первом участке значительно выше, чем на втором. Неудивительно, что закачка БГС на первом участке дала великолепные результаты, в то время как применение этой потокоотклоняющей технологии на участке 2 практически ничего не дало. Отметим также, что большинство скважин, положительно отреагировавших на закачку БГС, находятся в областях со значениями $W_B > 0,6$. Следует подчеркнуть, что карты W_B можно использовать не только для выбора участков воздействия, но и при подборе конкретных нагнетательных скважин, в которые следует закачать реагент.

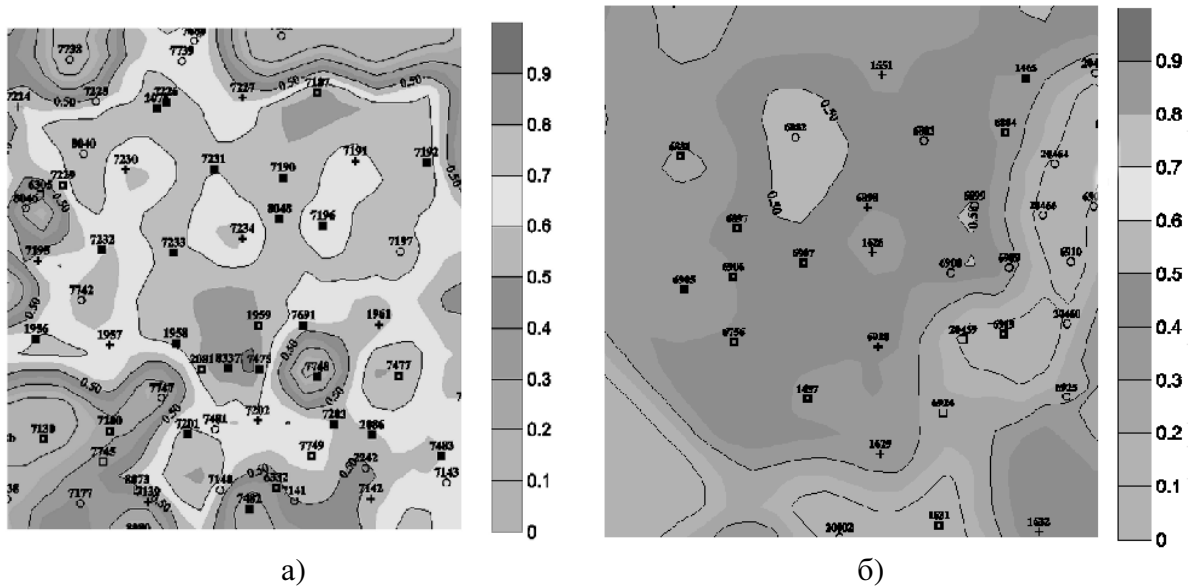


Рис. 5.28. Карты целесообразности применения потокоотклоняющих технологий
а) участок 1, б) участок 2.

⊕ — нагнетательные скважины;

⊕ — обработанные нагнетательные скважины;

■ — добывающие скважины, положительно отреагировавшие на применение БГС;

■ — добывающие скважины, слабо отреагировавшие на применение БГС;

□ — добывающие скважины, отрицательно отреагировавшие на применение БГС;

○ — добывающие скважины, не входящие в область реагирования, либо длительное время находящиеся в бездействующем фонде.

Критерий W_B позволяет получить и некоторые количественные оценки. Так, на рис 5.29 приведена зависимость удельного технологического эффекта $\Delta = \frac{\Delta Q_H}{Q_{H_0}}$ (отношения дополнительной добычи нефти ΔQ_H

к базовой добыче нефти за период существования эффекта Q_{H_0}) от среднего значения W_B , полученная обработкой результатов закачки БГС на нескольких участках Мамонтовского месторождения. Эта зависимость с учетом практического ограничения $\Delta \leq 1$ может быть описана соотношением

$$\Delta = \begin{cases} 0, & W_B < 0,2, \\ 2\mu - 0,4, & 0,2 \leq W_B \leq 0,7, \\ 1, & W_B > 0,7. \end{cases}$$

Анализ проведенных обработок показал также, что «коэффициент полезного действия» полимера, определяющий массу дополнительно добытой нефти на одну тонну полимера, линейно увеличивается с увеличением W_B :

$$\frac{\Delta Q_H}{M} = 1700 W_B,$$

где M — масса закачанного полимера.

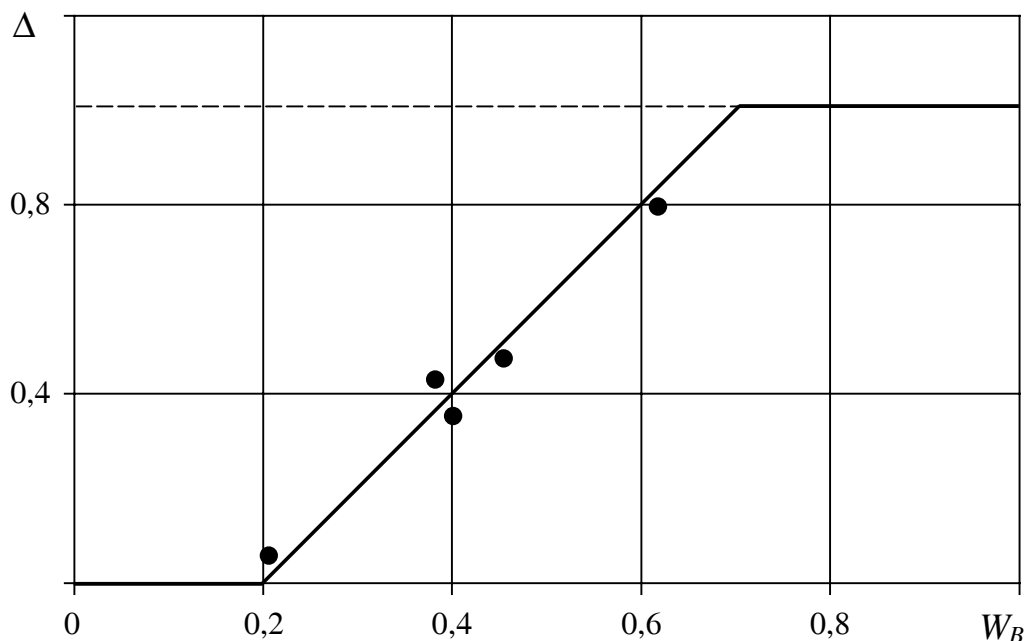


Рис. 5.29. Зависимость удельного технологического эффекта Δ от среднего значения обобщенного критерия W_B .

Эти соотношения могут быть использованы для определения необходимого объема закачки реагента на участках, перспективных с точки зрения закачки БГС. Расчет W_B , таким образом, позволяет не только выбрать участки для проведения обработок, но и оценить их ожидаемую технологическую эффективность.

5.6. Принятие решений в условиях неопределенности как игра с природой

Наука о разработке нефтяных месторождений является одной из немногих прикладных наук, имеющих дело с системой, которую в целом нельзя ни увидеть, ни взвесить, ни измерить, ни исследовать.

Ф. Крейг

В настоящее время инженеры всех нефтедобывающих предприятий вооружены методиками расчетов и компьютерными программами, позволяющими осуществить грамотный дизайн планируемых геолого-технических мероприятий. Однако это не означает, что принятие решений в нефтегазодобыче становится рутинной деятельностью, не требующей особо изощренного ума. Основные проблемы, с которыми сталкиваются инженеры

ры-нефтяники в повседневной работе, связаны с тем, что параметры пласта, входящие в расчетные формулы, как правило, неизвестны или известны с очень большой погрешностью. Таким образом, часто решения приходится принимать в условиях неопределенности.

Ранее этому обстоятельству не уделяли должного внимания, но в настоящее время анализу неопределенности и рисков, связанных с неопределенностью, придается все большее значение. С точки зрения качества имеющихся данных выделяют следующие три условия принятия решений:

- в условиях определенности, когда данные известны точно и в полном объеме;
- в условиях риска, когда случайные данные можно описать в терминах теории вероятности, а основным критерием является математическое ожидание параметра, определяющего качество решения;
- в условиях неопределенности, когда имеющиеся данные трудно или невозможно классифицировать по степени значимости и когда к случайным величинам нельзя применить аппарат теории вероятностей, поскольку неизвестны функции распределения или другие статистические характеристики этих величин.

Приведенное уточнение терминов весьма полезно, поскольку часто в этом вопросе происходит путаница понятий. Так, иногда анализ неопределенности проводят методом Монте-Карло, «разыгрывая» случайные реализации значений некоторых параметров согласно заданным функциям распределения вероятностей. Очевидно, что тем самым задача переводится на уровень решения в условиях риска. В реальности же, как правило, имеет место существенная неопределенность, когда функции распределения вероятностей неизвестны и, следовательно, анализ рисков с помощью метода Монте-Карло неприменим.

В этой ситуации задачи принятия решений принято формулировать в терминах теории игр, представляя их как «игру с природой» [37, 38]. В настоящей работе рассмотрены различные игровые критерии, которые могут служить полезным инструментом повышения эффективности решений, принимаемых при управлении процессами нефтегазодобычи в условиях неопределенности. Для большей наглядности изложение ведется на конкретном примере, связанном с дизайном гидроразрыва пласта (ГРП).

5.6.1. Матрица выигрышей

При игровом подходе анализ имеющихся возможностей производится с помощью так называемой *матрицы выигрышей* (или *платежей*) A , столбцы которой ($j = 1, 2, \dots, n$) соответствуют возможным состояниям Природы, а строки ($i = 1, 2, \dots, m$) – возможным действиям («стратегиям») Лица, Принимающего Решение (ЛПР). Элемент матрицы A_{ij} , стоящий на

пересечении i -й строки и j -го столбца, определяет выигрыш, получаемый при реализации i -й стратегии, когда Природа находится в состоянии j .

Для примера предположим, что перед ЛПР поставлена задача определения оптимального количества пропанта M , необходимого для проведения операции ГРП. Количество пропанта определяет оптимальную длину трещины, которую необходимо создать для получения наибольшего прироста дебита нефти [36]. Необходимая геометрия трещины существенно зависит от проницаемости пласта в окрестности скважины k , но точное значение проницаемости неизвестно, известны только пределы, в которых она может меняться (от 5 мД до 14 мД). В этой ситуации под состоянием Природы понимаются различные значения проницаемости, а под стратегиями «игрока» (ЛПР) – различные значения количества пропанта, необходимого для проведения операции. Остальные параметры ГРП (тип закачиваемого пропанта, виды жидкостей гидроразрыва и т. д.) в данном регионе, после отработки технологии ГРП на первых скважинах, практически не меняются.

Таблица 5.3 представляет собой матрицу выигрышей A , элементами которой являются значения NPV (Net Present Value), определяющие эффективность гидроразрыва (в млн. долларов за 5 лет). В ходе расчетов мощность пласта принималась равной 10 м, депрессия – 9 МПа, проницаемость пропантной пачки – 260 Д, вязкость нефти – 4 сП, цена одной тонны нефти – 100 долларов, стоимость ГРП определялась по сложившимся нормативам затрат. Скин-фактор до ГРП принимался равным нулю, а скин-фактор после ГРП вычислялся по известным методикам [36].

Таблица 5.3

Матрица выигрышей (млн. долл.)

i	Количество пропанта M , т.	Проницаемость k , мД				
		$k_1 = 5$	$k_2 = 6$	$k_3 = 8$	$k_4 = 11$	$k_5 = 14$
1	4500	0,34	0,42	0,51	0,62	0,75
2	9000	0,37	0,47	0,59	0,73	0,90
3	13500	0,39	0,51	0,65	0,82	1,02
4	18000	0,40	0,53	0,69	0,87	1,09
5	22500	0,40	0,54	0,71	0,91	1,15
6	27000	0,39	0,54	0,72	0,94	1,19
7	31500	0,37	0,53	0,72	0,95	1,22
8	36000	0,34	0,52	0,72	0,96	1,24
9	40500	0,32	0,50	0,71	0,96	1,26
10	45000	0,29	0,48	0,70	0,96	1,27

Расчеты проводились для пяти возможных значений проницаемостей, образующих геометрическую прогрессию

$$k_j = k_1 d^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 5,$$

$$k_1 = 5 \text{ мД}, \quad d = 1.3.$$

5.6.2. Критерии принятия решений в условиях неопределенности

Если бы вероятности P_j реализации различных значений k_j ($j = 1, 2, \dots, n$) были известны, то это означало бы принятие решения в условиях риска. При этом оптимальное решение определялось бы из условия максимизации математического ожидания NPV

$$E_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} P_j \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Однако мы рассматриваем ситуацию, когда распределение вероятностей P_j неизвестно, то есть случай принятия решения в условиях неопределенности. Для анализа этой ситуации разработаны следующие критерии, отличающиеся по степени консерватизма, проявляемого ЛПР [37, 38].

Критерий Лапласа.

Этот критерий опирается на принцип недостаточного основания, который гласит, что если распределение вероятностей состояний Природы неизвестно, то нет причин считать их различными. Следовательно, используется достаточно оптимистичное предположение о равенстве всех P_j :

$$P_j = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом необходимо выбрать стратегию, обеспечивающую максимальное значение величины

$$L_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

представляющей собой среднее арифметическое (по данной строке) значение выигрыша.

Следует отметить, что принцип недостаточного обоснования, по некоторым сведениям, впервые сформулировал Я. Бернулли, но, тем не менее, критерий носит имя Лапласа.

Максиминный критерий (критерий Вальда)

Этот критерий основан на очень осторожном поведении пессимистично настроенного ЛПР и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших. В качестве оптимальной выбирается стратегия, обеспечивающая максимум величины

$$W_i = \min_j A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Величина W_i представляет собой минимальное значение выигрыша, достигаемого при данной стратегии i .

Часто элементы матрицы A_{ij} представляют собой не выигрыши, а, наоборот, потери (платежи). В этом случае критерий Вальда будет стремиться минимизировать максимальные потери, то есть станет минимаксным.

Критерий Севиджа.

Этот критерий призван несколько «смягчить» пессимизм максиминного критерия и сводится к замене матрицы выигрышей A_{ij} матрицей упущенных доходов (то есть потерь)

$$B_{ij} = M_j - A_{ij},$$

где M_j – максимальный выигрыш, достигаемый при j -м состоянии Природы:

$$M_j = \max_i A_{ij}.$$

Затем к матрице B_{ij} применяется минимаксный критерий, то есть минимизируется величина

$$S_i = \max_j B_{ij}.$$

В качестве примера действия критерия Севиджа рассмотрим матрицу выигрышей

$$\begin{pmatrix} \$3000 & \$19000 \\ \$5000 & \$4000 \end{pmatrix}.$$

Применение максимального критерия приводит к выбору решения $i = 2$ с максимально возможным выигрышем \$5000. Легко, однако, видеть, что в данном случае разумнее было бы выбрать первое решение, поскольку даже в наихудшем случае выигрыш был бы не намного меньше (\$3000), а в случае реализации второго состояния Природы выигрыш составил бы \$19000 !

Применяя критерий Севиджа, мы бы получили $M_1 = \$5000$, $M_2 = \$19000$ и матрицу упущенной выгоды

$$B = \begin{pmatrix} \$2000 & \$0 \\ \$0 & \$15000 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь минимаксным критерием, мы выбрали бы первое решение, что более соответствует нашим интуитивным предпочтениям.

Критерий Гурвица.

Этот критерий позволяет охватить весь спектр подходов к принятию решения – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного – и сводится к максимизации величины

$$G_i = \alpha A_i^{\max} + (1 - \alpha) A_i^{\min},$$

где α – так называемый *показатель оптимизма*, $0 \leq \alpha \leq 1$, A_i^{\max} и A_i^{\min} – максимальное и минимальное значения выигрыша на i -й строке матрицы A_{ij}

$$A_i^{\max} = \max_j A_{ij}; \quad A_i^{\min} = \min_j A_{ij}.$$

Если $\alpha = 0$, то критерий Гурвица становится консервативным и его применение эквивалентно применению обычного максиминного критерия. Если $\alpha = 1$, то критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, поскольку рассчитывает на наилучшую из наилучших альтернатив. Основываясь на свой опыт, ЛПР сам выбирает надлежащее значение α из интервала $[0; 1]$. В отсутствие какой-либо дополнительной информации наиболее разумным представляется выбор $\alpha = 0,5$.

5.6.3. Анализ результатов расчетов

В таблице 5.4 приведены значения различных критериев, рассчитанные по данным табл. 5.3.

Темным фоном выделены строки (решения), являющиеся оптимальными с точки зрения того или иного критерия. Как видим, наилучшим решением, удовлетворяющим практически всем критериям, является дизайн ГРП с массой закаченного пропанта $M = 22500$ кг и полудлиной трещины $\ell = 130$ м. Более осторожный подход (с позиций критериев Вальда и Севиджа) приводит к значениям массы $M = 13000 - 22000$ кг, что, соответственно, приводит к меньшим значениям полудлины трещины.

Таблица 5.4

Результаты вычислений с использованием различных критериев

Масса пропанта, кг	Средняя полудлина трещины, м	Средняя ширина трещины, мм	Критерии						
			Лапласа L	Вальда W	Севиджа S	Гурвица G			
						$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,8$
4500	60	3	0,50	0,32	-0,05	0,39	0,47	0,55	0,63
9000	85	4	0,57	0,34	-0,03	0,44	0,54	0,64	0,74
13500	103	5	0,63	0,36	0,00	0,48	0,59	0,71	0,83
18000	117	6	0,66	0,36	0,00	0,49	0,62	0,76	0,89
22500	129	7	0,68	0,36	0,00	0,50	0,64	0,78	0,92
27000	139	8	0,69	0,34	0,00	0,49	0,65	0,80	0,95
31500	148	8	0,69	0,32	0,00	0,48	0,64	0,81	0,97
36000	156	9	0,69	0,30	0,00	0,47	0,64	0,81	0,98
40500	163	10	0,68	0,27	0,00	0,45	0,62	0,80	0,98
45000	169	11	0,66	0,24	0,00	0,42	0,61	0,79	0,98

Для облегчения выбора при большом числе скважин, основываясь на методы теории нечетких множеств, можно предложить формальный критерий выбора окончательного решения: максимизация функции принадлежности

$$\mu_i = \sqrt{\mu_1(L_i) \mu_2(W_i) \mu_3(S_i) \mu_4(G_i)}, \quad (5.66)$$

где $\mu_1(L)$, $\mu_2(W)$, $\mu_3(S)$, $\mu_4(G)$ – функции принадлежности к нечетким множествам «большие L », «большие W », «малые S », «большие G » соответственно, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \mu_k(x) &= \varphi(x), \quad k = 1, 2, 4, \\ \mu_3(x) &= 1 - \varphi(x), \end{aligned}$$

где $\varphi(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$, x_{\max} и x_{\min} – максимальное и минимальное значения критерия x .

Так, для критерия Лапласа $L_{\min} = 0,5$, $L_{\max} = 0,69$ (см. табл. 5.4), так что

$$\mu_1(L) = \frac{L - 0,5}{0,69}.$$

Применение нечеткого критерия (5.66) приводит (при критерии Гурвица с $\alpha = 0,4$) к заключению, что оптимальное значение массы пропанта лежит в интервале от 22000 кг до 36000 кг, что соответствует средней полудлине трещины от 120 до 150 м при ширине около 8 мм.

Проведенный анализ позволяет, кроме всего прочего, наглядно показать цену, которую приходится платить за пренебрежение исследованиями скважин.

В табл. 5.5 приведены элементы матрицы Севиджа

$$B_{ij} = M_j - A_{ij},$$

подсчитанные для $i = 5$ ($M = 22500$ кг). Эти величины определяют выгоду, которую мы упускаем, выбирая то или иное значение полудлины трещины. Как видим, в наиболее худшем случае ($k = 14$ мД) упущенная выгода составляет 0,1 млн. долларов, что сравнимо со стоимостью самого ГРП. Даже среднее значение упущенной выгоды (~30 тыс. долларов) кратно превышает стоимость гидродинамических исследований скважин (~10 тыс. долларов), которые, будь они проведены, позволили бы более обоснованно выбрать полудлину трещины. Эти оценки позволяют утверждать, что проведение тщательных гидродинамических исследований перед каждым ГРП позволило бы выиграть около 20 тыс. долларов на скважину в том случае, когда ГРП проводятся массировано, (что является одним из условий повышения эффективности этой операции). Экономический эффект может оказаться очень большим. Так, если компания проводит в год около 500 ГРП, то обязательные гидродинамические исследования, проводимые перед осуществлением операции, могут привести к выигрышу около 10 млн. долларов. Для сравнения отметим, что эта сумма

соизмерима с годовыми расходами некоторых крупных компаний на научно-исследовательские работы.

Несмотря на некоторую условность подобных расчетов, приведенные цифры позволяют оценить, по крайней мере, порядок потерь, связанных с недостатком информации.

Таблица 5.5

Упущенная выгода при $M=22500$ кг (в млн. долларов)

k , мД	5 мД	6 мД	8 мД	11 мД	14 мД
22500	0,006	0,000	0,008	0,038	0,101

Таким образом, в условиях неопределенности игровые подходы оказываются более соответствующими содержанию задач, чем методы, основанные на «разыгрывании» случайных состояний природы методом Монте-Карло. Применение последнего требует знания вероятностей распределения неизвестных параметров, а эта информация, зачастую, отсутствует.

Рассмотренные выше критерии принятия решений могут быть использованы при анализе ситуаций самого различного масштаба: от дизайна ГТМ на отдельных скважинах до составления проектов разработки крупных месторождений. Следует подчеркнуть, что эти методы дают намного больше, чем обычный анализ чувствительности решений относительно изменения исходных данных. Если анализ чувствительности позволяет просто оценить пределы изменения выигрыша, то игровые методы предлагают одновременно и формальные алгоритмы выбора решений.

5.7. Системный анализ процессов разработки нефтяных месторождений

Как уже неоднократно отмечалось, системы любой природы, независимо от природы составляющих элементов и отношений между ними, подчиняются некоторым общим закономерностям [39], знание которых облегчает принятие решений в условиях неопределенности. В частности, важную информацию, необходимую для управления, предоставляют исследования универсальных сценариев развития природных систем, количественных закономерностей чередования эволюционных и критических (переходных) периодов.

В основе многих динамических процессов лежит экспоненциальный закон, в соответствии с которым скорость изменения характеристики x пропорциональна ее текущему значению

$$\frac{dx}{dt} = kx(t), \quad (5.66)$$

где k – константа роста.

Для систем, развитие которых происходит при более или менее постоянных внутренних и внешних условиях, экспоненциальная зависимость описывает весь процесс развития. Однако при постепенном изменении этих условий могут быть достигнуты критические значения параметров, при которых экспоненциальное развитие теряет устойчивость и в системе появляются колебания («флаги катастроф» [40]), присущие процессам кризисного типа. В такие моменты начинают функционировать адаптационные механизмы, формирующие новые режимы экспоненциальной эволюции с иными значениями темпа роста.

В работе [41] неустойчивости такого типа предлагается анализировать с помощью динамического уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = kx(t - \tau), \quad (5.67)$$

где τ – характерное время запаздывания.

Поскольку с ростом системы ее инерционность возрастает, время запаздывания τ считается возрастающей функцией времени.

Для процессов, описываемых моделью (5.67), существуют экспоненциальные режимы развития

$$x = x_0 e^{ut},$$

которые являются стабильными при выполнении условия [41]

$$u\tau < 1,29. \quad (5.68)$$

При постепенном увеличении времени запаздывания наступает критический момент, когда неравенство (5.68) перестает выполняться. Экспоненциальная эволюция с темпом развития u становится неустойчивой, и включаются процессы самоорганизации, приводящие к уменьшению темпа роста. При этом вновь начинает выполняться неравенство (5.68), что обеспечивает стабильный рост до тех пор, пока увеличение τ не приведет к новым кризисным явлениям. В [41] показано, что в период перестройки темп роста u уменьшается (при 10%-м «запасе прочности») до значения $u = \frac{0,9}{\tau}$.

Таким образом, величина скачка в темпах роста, которая должна иметь место при достижении временем запаздывания критического уровня, будет составлять величину

$$\frac{1,29}{\frac{0,9}{\tau}} = \frac{1,29}{0,9} = 1,43.$$

На плоскости τ – u процесс развития по описанной схеме можно изобразить в виде ступенчатой линии, представленной на рис. 5.30.

В основном, этот сценарий развития соответствует представлениям Шмальгаузена, который считал, что процессы роста начинаются экспоненциальной фазой, которая в дальнейшем переходит в степенной закон, характеризующийся убыванием константы скорости роста [42].

Уменьшение темпов роста можно учесть в явном виде, если перейти к модели с константой роста, зависящей от времени. Аппроксимируя функцию $k(t)$ гиперболической зависимостью, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_0}{t^\alpha} x(t). \quad (5.69)$$

Решение этого уравнения с начальным условием

$$x|_{t=t_0} = x_0 \quad (5.70)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \ln x &= k_1 t^\beta + \ln c, \\ x &= x_0 \exp\left[k_1(t^\beta - t_0^\beta)\right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

при $0 \leq \alpha < 1$ ($\beta = 1 - \alpha \leq 1$, $k_1 = \frac{k_0}{1 - \alpha}$, c – постоянная интегрирования)

и

$$\ln x = k_0 \ln t + \ln c, \quad (5.72)$$

$$x = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{k_0}$$

при $\alpha = 1$.

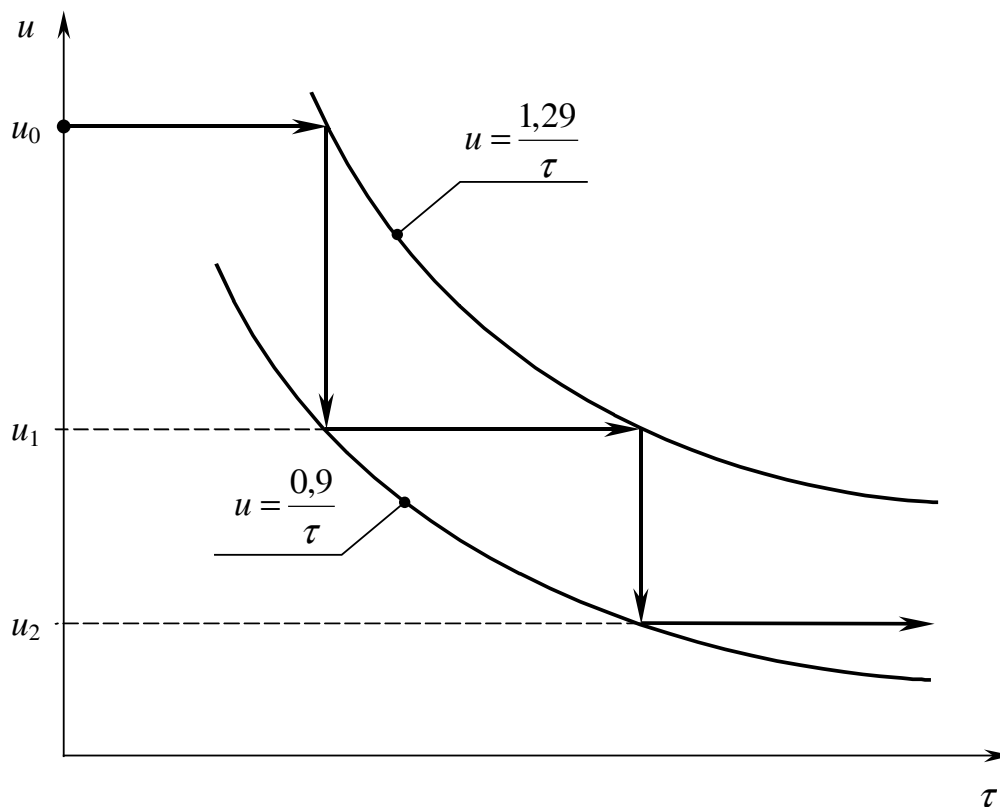


Рис. 5.30. Эволюция сложных систем

Случай $\alpha = 1$ замечателен тем, что задача (5.69), (5.70) инвариантна относительно преобразований $x \rightarrow \frac{x}{x_0}$, $t \rightarrow \frac{t}{t_0}$ при всех значениях t_0 . Следовательно, эволюция системы в этом случае самоподобна (ср. с разделом 5.4). Зависимость (5.72) называется *аллометрической* и означает, что кривая $x = x(t)$ может быть спрямлена в координатах $\ln t - \ln x$.

Развитие, происходящее в соответствии с аллометрической моделью, перекрывает существенно более длительные интервалы времени, чем развитие по экспоненциальному закону. Однако диапазон действия аллометрической модели также ограничен, поэтому в координатах $\ln t - \ln x$ кривая развития делится на ряд прямолинейных участков, переходы между которыми соответствуют критическим явлениям на более высоком иерархическом уровне системы.

Введя переменную $t' = \ln t$, уравнение (5.69) при $\alpha = 1$ можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt'} = k_0 x.$$

Для описания «словом» аллометрической кривой нужно учесть зависимость параметра k_0 от времени. Считая, что развитие на всех уровнях иерархии идет подобным образом, получим

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{k'_0}{t'} x,$$

откуда

$$\ln x = k'_0 \ln t' + \ln c',$$

т. е. кривая роста должна быть линейна в координатах $\ln t - \ln \ln x$.

Подставив $t'' = \ln t'$ и повторив всю цепочку рассуждений, можно получить модель еще более высокого уровня и т. д.

Описанные выше универсальные законы роста могут быть применены для анализа кривых накопленной добычи нефти $V_H(t)$ при решении задач прогноза технологических показателей и выявления критических точек – моментов времени, соответствующих количественному изменению состояния разработки нефтяных месторождений.

На первом этапе разработки, соответствующем росту темпа отбора нефти за счет интенсивного разбуривания, кривая добычи описывается моделью

$$\frac{dV_H}{dt} = \frac{k_0}{t^\alpha} V_H,$$

а на заключительной стадии, характеризующейся снижением темпов отбора, применима модель

$$\frac{dV_H}{dt} = \frac{k_0}{t^\alpha} (V_{H0} - V_H), \quad (5.73)$$

где $V_{н0}$ – начальные извлекаемые запасы нефти (предел V_n при $t \rightarrow \infty$). Отметим, что уравнение (5.73) по виду совпадает с кинетическим уравнением Колмогорова, описывающим процессы кристаллизации металлов [43].

В качестве примера рассмотрим динамику добычи нефти и воды на месторождении Фортис (компания ВР). Анализ кривой накопленной добычи нефти с использованием приведенных выше моделей показывает, что критические точки, соответствующие изменениям темпа отбора нефти и темпа обводнения, приходятся на 47, 73, 110, 163 месяца разработки месторождения (см. рис. 5.31, 5.32). Отметим, что промежутки времени между двумя последовательными критическими точками ($T_1 = 26$ мес., $T_2 = 37$ мес. и $T_3 = 53$ мес.) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \frac{T_3}{T_2} \approx 1,43,$$

что находится в соответствии с общей теорией критических уровней развития природных систем [41].

Одним из важнейших качественных показателей состояния разработки нефтяных месторождений является степень упорядоченности фильтрационных потоков. Для количественной оценки этого показателя могут быть использованы различные характеристики, позволяющие определить неравномерность распределения добычи нефти, газа и воды по добывающим и закачку воды по нагнетательным скважинам. В частности, весьма информативным показателем является коэффициент Лоренца (Джини), который в каждый данный момент времени вычисляется путем ранжирования (в порядке убывания) скважин по значениям дебитов нефти (газа) или воды или жидкости и построения зависимости накопленной доли суммарной добычи

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{Q}$$

от относительного числа скважин

$$\nu = \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

q_i – дебит i -й скважины ($i = 1, 2, \dots, N$), Q – суммарный дебит всех скважин,

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i,$$

N – общее число скважин, участвующих в анализе.

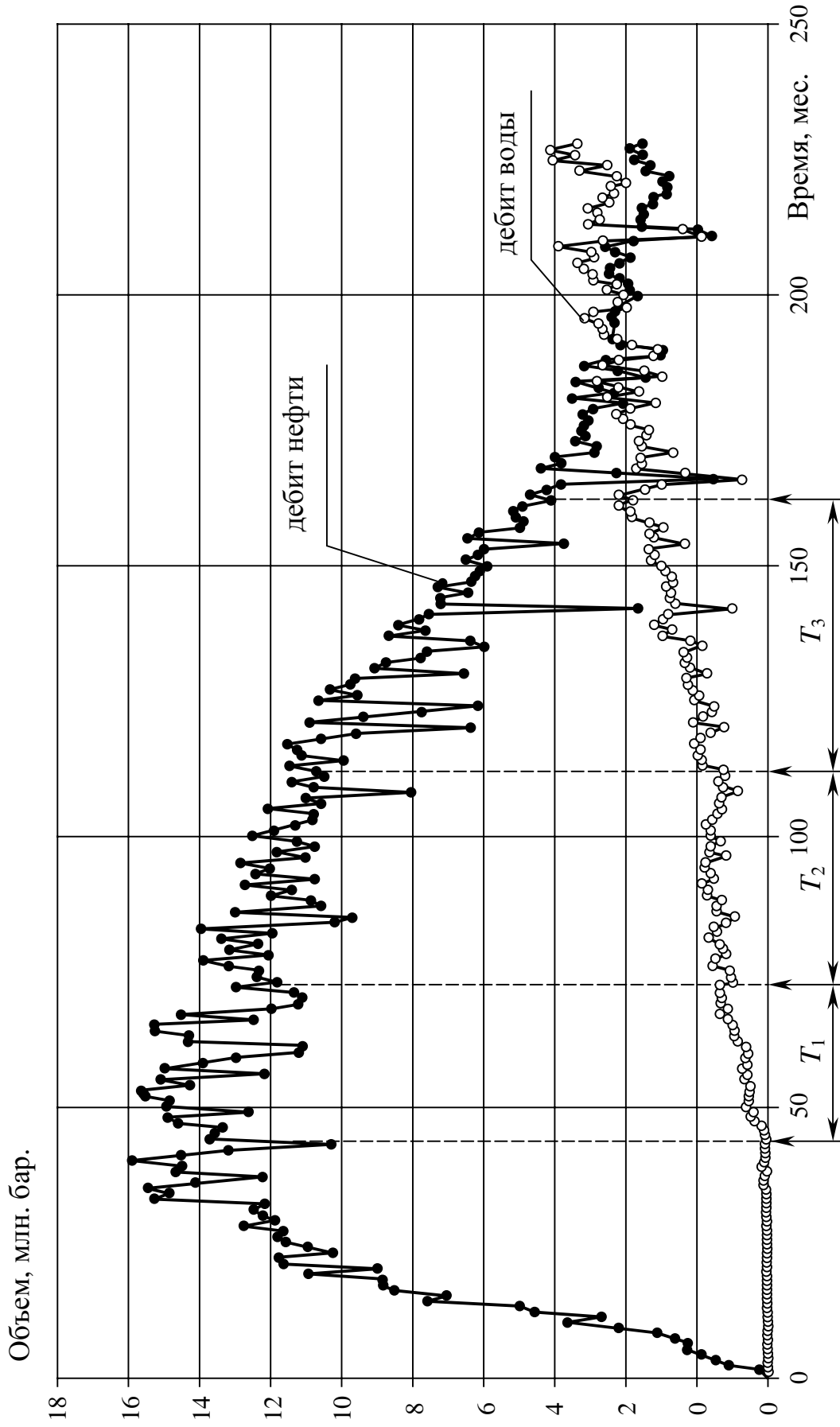


Рис. 5.31. Динамика отборов нефти и воды на месторождении Фортис

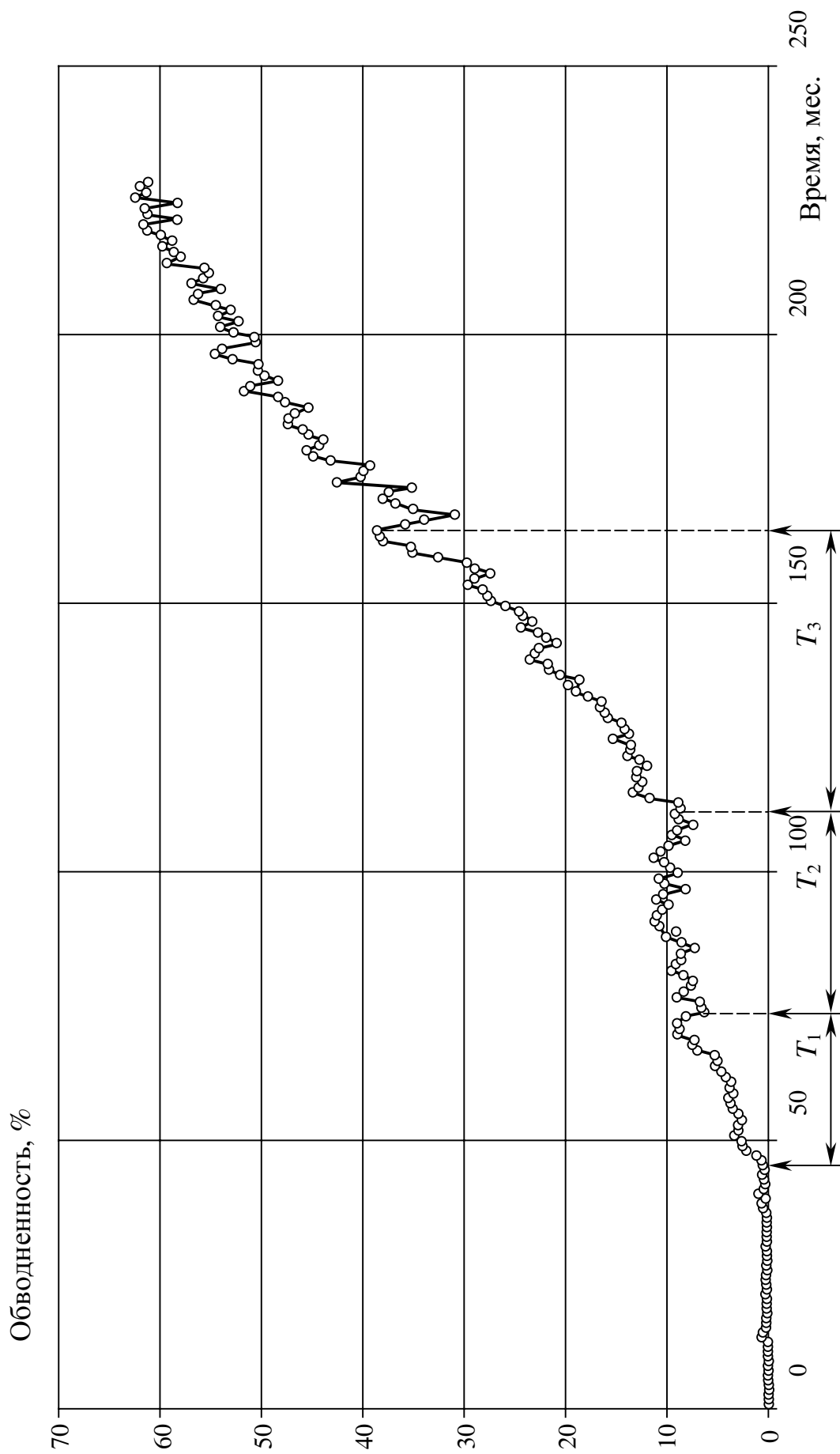


Рис. 5.32. Динамика обводненности продукции месторождения Фортис

Определив площадь S под кривой $\mu = \mu(v)$, коэффициент Лоренца–Джини можно определить по формуле (см. раздел 5.4)

$$L = \frac{S - 0,5}{0,5} = 2S - 1.$$

Анализируя динамику изменения коэффициента L , можно получить представление о гидродинамическом состоянии пласта и наметить мероприятия, призванные упорядочить фильтрационные потоки и повысить полноту извлечения нефти.

Для примера на рис. 5.33 приведена зависимость коэффициента Лоренца–Джини от времени, построенная по данным разработки месторождения Магнус. Как видим, с августа 1987 г. по июль 1994 г. месторождение разрабатывалось достаточно равномерно, о чем свидетельствуют низкие значения коэффициента Лоренца–Джини по нефти ($L \approx 0,3$). Этот период характеризуется примерно равными уровнями отбора и закачки жидкости (показатель компенсации близок к единице). Однако после июля 1994 г. интенсивность закачки была повышена, что немедленно сказалось на неравномерности отбора нефти (см. рис. 5.33). Повышенные значения коэффициента Лоренца–Джини до августа 1987 г. объясняются неустойчивостями, свойственными ранней стадии становления системы поддержания пластового давления (неустойчивой компенсацией). Из этого анализа следует вывод о том, что наиболее оптимальным режимом разработки этого месторождения является поддержание закачки воды на уровне отбора жидкости (сбалансированное заводнение).

Степень упорядоченности фильтрационных потоков можно характеризовать также значениями энтропии. Для этого в каждый данный момент времени строится гистограмма распределения дебитов нефти (или газа, воды, жидкости), т. е. определяется доля

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

скважин, имеющих дебиты в интервале $(q_i, q_i + \Delta q)$, где

$$q_i = q_0 + i\Delta q,$$

$$\Delta q = \frac{q_m - q_0}{m},$$

Δq – длина частичного интервала, m – общее число частичных интервалов, на которые делится весь диапазон изменения дебита, q_0 и q_m – минимальное и максимальное значения дебита, n_i – число скважин, имеющих дебит в интервале $(q_i, q_i + \Delta q)$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, N – общее число скважин.

Энтропия вычисляется по известной формуле теории информации [45]

$$\mathcal{E} = - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \ln p_i .$$

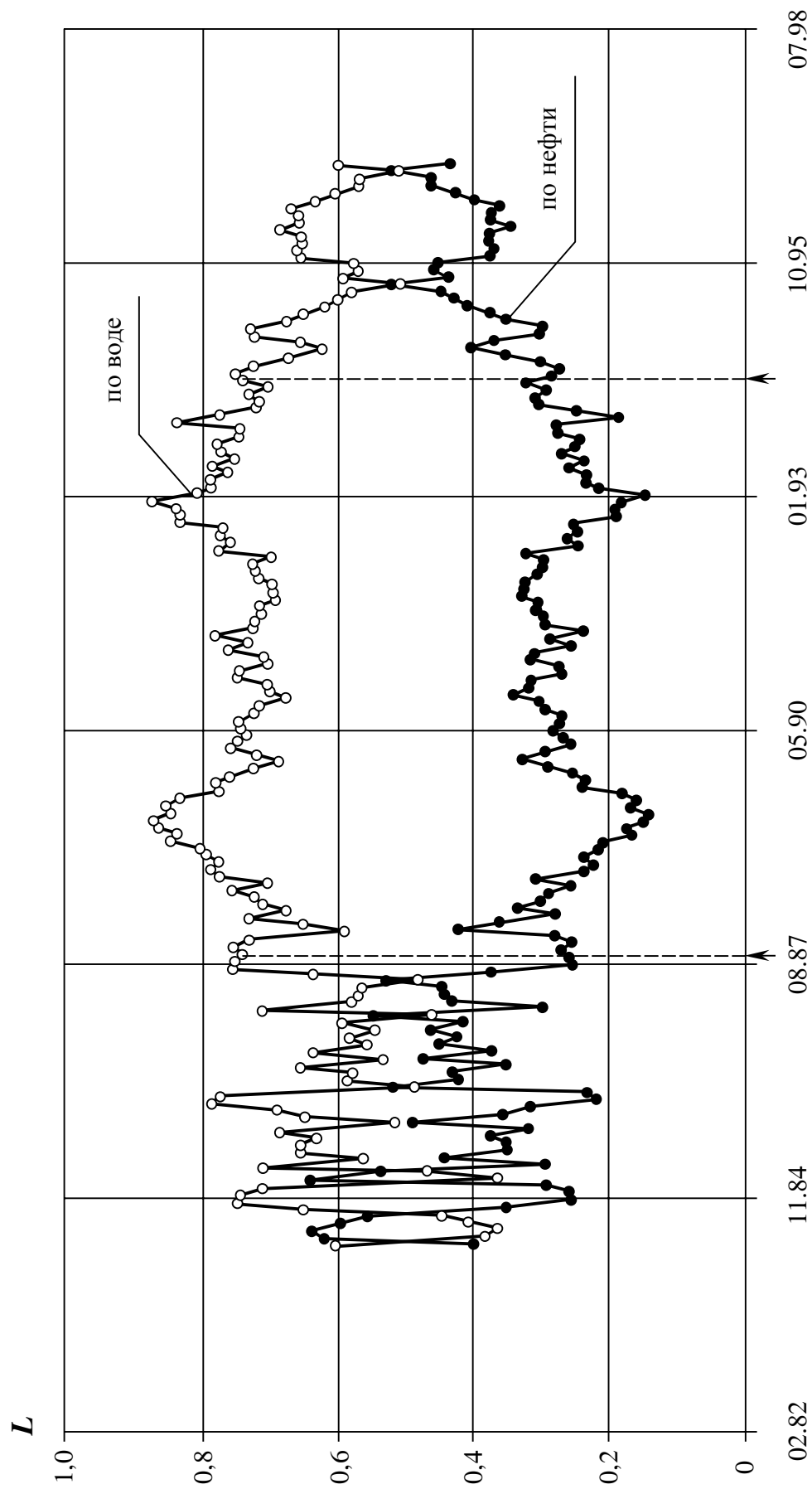


Рис. 5.33. Динамика значений коэффициента Лоренца (Джини) по дебитам нефти и воды месторождения Магнус

Возвращаясь к рассмотренному выше месторождению Магнус, отметим, что, как показывают расчеты, на участке сбалансированного заводнения энтропия принимает наименьшее значение.

Вообще, энтропия оказывается весьма полезным инструментом динамического анализа процессов разработки и находит все большее применение в мониторинге нефтяных и газовых месторождений [44].

5.8. Синергетика принятия решений

Информация, относительно которой нужно принять решение, практически никогда не бывает полной. Пользуясь математической терминологией, можно было бы сказать, что проблема принятия решения некорректно поставлена. В этом разделе мы, следуя книге Г. Хакена [46], кратко расскажем о том, как процессы принятия решений могут быть описаны на языке синергетики.

Как человек восполняет недостаток информации? В основном, путем использования сходства между данной ситуацией и аналогичными ситуациями, с которыми он встречался в прошлом (то есть методом аналогий, об этом мы уже говорили ранее). Показательны в этом смысле случаи, когда люди оказываются на грани жизни и смерти. Многие свидетельствуют, что в такие мгновения человек вспоминает (в обратной последовательности) всю свою жизнь. Таким образом, мозг лихорадочно ищет в жизненном опыте схожие моменты, чтобы в считанные секунды найти единственно верное решение. Помогает ему в этом то, что, согласно исследованиям профессора Я. Мияситы, человек никогда ничего не забывает. Вся воспринятая им информация хранится в височных долях серого вещества мозга, и обычные проблемы с памятью – это всего лишь трудности «считывания» информации.

В работах Г. Хакена с сотрудниками показано, что процесс поиска аналогов при принятии решений можно описать нелинейными уравнениями, схожими с известными каноническими уравнениями синергетики, характеризующимися множеством особых точек и сложной динамикой.

Известным механическим аналогом, используемым при наглядном представлении нелинейной динамики, является движение шарика по криволинейной поверхности. Используя этот подход, мы можем идентифицировать принятые решения найденные аналоги с дном долин, а процесс поиска решений – с нахождением шарика на склоне холма (см. рис. 5.34). Интересную ситуацию моделируют на этом рисунке точки *C* и *D* – два близлежащих минимума. Если шарик подвержен влиянию малых спонтанных возмущений, то он будет бесконечно долго колебаться между *C* и *D*. Эти осцилляции между двумя или более решениями («муки выбора») всем знакомы и увековечены в парадоксе «Буриданов осел». Подобные осцил-

ляции между двумя решениями возникают и при разглядывании неоднозначных картин. Так, на известной картине мы сначала видим портрет Эйнштейна, а потом – трех купающихся девушек, потом опять портрет Эйнштейна и т. д. Все видели и другие подобные изображения – куб Неккера или картины «Юная красавица или дряхлая старуха?», «Ваза или два профиля?» (см. рис. 5.35) и др.

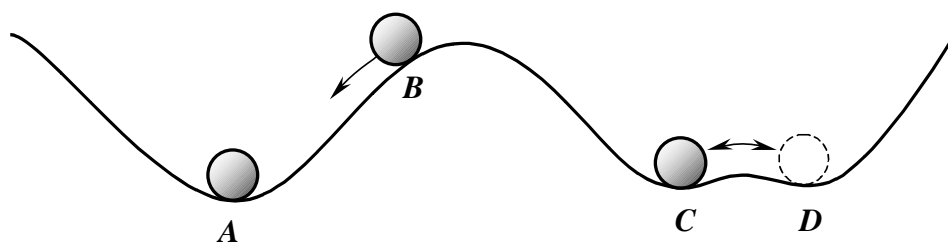


Рис. 5.34. Механическая модель динамики принятия решения
A – принятие решения; *B* – поиск решения;
C и *D* – осцилляции между двумя решениями

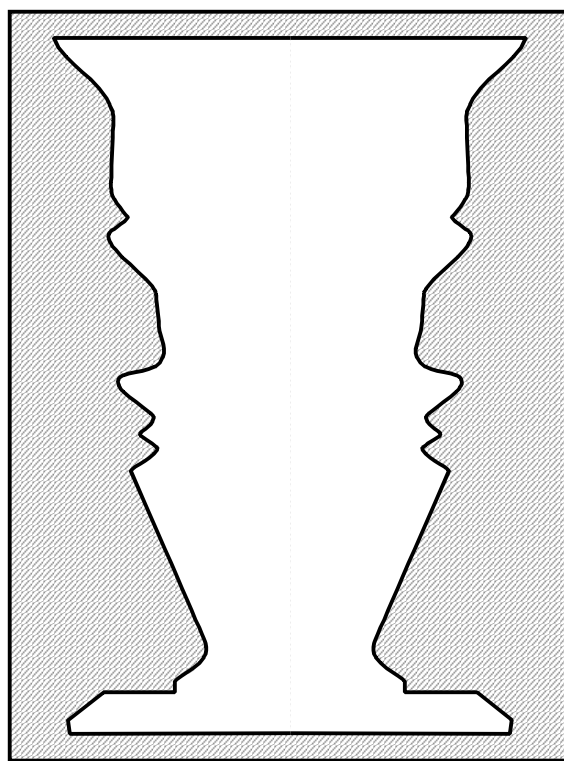


Рис. 5.35. Ваза или два профиля?

В общих чертах процесс узнавания аналогов можно описать следующим образом [46]. В памяти человека хранится информация о множестве различных жизненных ситуаций и оптимальных алгоритмов действия в этих ситуациях (**информационные паттерны**). После того как жизнь «предъявила» человеку новую ситуацию, в его мозге начинается конку-

рентная борьба между паттернами, в результате которой побеждает один из паттернов, наиболее близкий к анализируемой действительности. Здесь уместно вновь привести аналогию с лазером (см. раздел 1.3), в котором волна одной частоты побеждает все остальные. Самое общее представление о математических моделях, описывающих динамику распознавания, можно дать на следующем примере.

В задаче об определении оптимальной длины трещины ГРП (см. раздел 5.6) неопределенным является распределение вероятностей p_j различных значений проницаемости k_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Расчеты показывают, что решение этой задачи существенно зависит от того, к какому из следующих четырех видов (паттернов) относится реальное распределение:

- 1) вероятности p_j растут с ростом k_j ;
- 2) вероятности p_j уменьшаются с ростом k_j ;
- 3) вероятности p_j имеют экстремум внутри интервала изменения k ;
- 4) вероятности p_j не зависят от проницаемости (равномерное распределение).

Если паттерн зафиксирован, то даже значительные изменения распределения вероятностей (не выводящие за пределы паттерна) не могут сильно повлиять на выбор оптимальной стратегии.

Для простоты будем считать, что проницаемость может принимать только три значения ($n = 3$). Тогда возможные виды распределения вероятностей (возможные состояния Природы) грубо можно представить в виде следующих четырех векторов:

$$P_1 = \left\{ \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; \frac{5}{9} \right\}, \quad P_2 = \left\{ \frac{5}{9}; \frac{1}{3}; \frac{1}{9} \right\}, \quad P_3 = \left\{ \frac{2}{9}; \frac{5}{3}; \frac{2}{9} \right\}, \quad P_4 = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\},$$

координаты которых представляют собой вероятности реализации трех значений проницаемости. Поскольку

$$P_4 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2),$$

то только первые три паттерна являются линейно независимыми. Поэтому паттерн P_4 в дальнейшем мы не будем рассматривать.

Еще раз отметим, что нас не должна смущать некоторая кажущаяся произвольность выбора конкретного вида векторов P_k , поскольку принимаемые решения достаточно устойчивы относительно сдвигов и поворотов P , не выводящих их за пределы определенных выше паттернов.

При отсутствии дополнительной информации мы не можем отдать предпочтение ни одному из паттернов P_k ($k = 1, 2, 3$), поэтому решение принимается игровыми методами (см. предыдущий раздел). Но ситуация начинает изменяться после того, как на данном месторождении начинаются работы по гидроразрыву пласта. Анализ результатов уже сделанных

ГРП позволяет апостериори оценить проницаемость пласта в окрестности скважин, подвергшихся гидроразрыву. Таким образом, мы получаем некоторое представление о том, какое распределение проницаемости характерно для данного месторождения в действительности. Сравнивая это представление с исходными паттернами, мы можем определить, какой из них наиболее соответствует появившимся данным. В дальнейшем дизайн ГРП производится в соответствии с выбранным паттерном, если, конечно, новые данные не заставят нас изменить представление о распределении вероятностей.

В книге Г. Хакена [46] процессы, протекающие в человеческом мозге при «распознавании» паттерна, предложено описать динамическими моделями вида

$$\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = f(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_0, \quad (5.74)$$

где $\mathbf{Q}(t) = \{q_1(t); q_2(t); q_3(t)\}$, $q_j(t)$ – оценка вероятности реализации значения проницаемости k_j ($j=1, 2, 3$), изменяющаяся в ходе решения, $\mathbf{Q}_0 = \{q_1(0); q_2(0); q_3(0)\}$ – вектор начальных значений q_j , определяемый по результатам первых ГРП.

В соответствии с (5.74) вектор \mathbf{Q} «проявляется» со временем, как фотография, преобразуясь из \mathbf{Q}_0 в один из (наиболее близких) векторов-паттернов \mathbf{P}_k .

Мера близости вектора \mathbf{Q} к паттернам \mathbf{P}_k характеризуется **параметрами порядка** $\xi_k(t)$, определяемыми как коэффициенты разложения.

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) \mathbf{P}_k. \quad (5.75)$$

Пусть \mathbf{P}_k^+ – сопряженные векторы, определяемые соотношениями ортогональности

$$(\mathbf{P}_i^+ \mathbf{P}_k) = \delta_{ik},$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$ а круглые скобки обозначают скалярное произведение

векторов. Умножив (5.74) на \mathbf{P}_ℓ^+ и образуя скалярное произведение, получим

$$\xi_\ell = \mathbf{P}_\ell^+ \mathbf{Q}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n. \quad (5.76)$$

Согласно [46] уравнение (5.74) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \mathbf{P}_k - B \sum_{i \neq k} \sum_{k=1}^n \xi_i^2 (\xi_k \mathbf{P}_k) - C \mathbf{Q} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (6.77)$$

$$\lambda_k, B, C \geq 0.$$

Структура этого уравнения сформирована по аналогии с известными уравнениями синергетики. Первый член в правой части описывает «притяжение» Q к паттернам P_k . Это притяжение тем больше, чем больше ξ_k – «сходство» между Q и P_k . Величина λ_k называется *параметром внимания* – она определяет, насколько человек помнит о паттерне P_k . Параметр внимания λ_k позволяет учесть эффекты **гистерезиса**, имеющие место в процессах принятия решений: человек даже при изменившихся обстоятельствах часто делает то, что делал в последний раз. Это происходит потому, что на новые обстоятельства человек не сразу обращает внимание, для них параметр λ мал. Введение параметра внимания позволяет также смоделировать поэтапное принятие решений [46]. Сосредотачивая внимание на каком-то паттерне, человек делает выбор. Если это решение оказывается неудачным, он полагает равным нулю параметр внимания, соответствующий сорвавшейся попытке. Затем он предпринимает новую попытку, сосредотачивает внимание на новом решении и т. д. В результате таких проб и ошибок в человеческом сознании вырабатывается целая иерархия параметров внимания, которые при анализе новой ситуации он последовательно, один за другим, испытывает, начиная с наибольших.

Второй член в правой части (5.77) описывает конкуренцию паттернов. Третий член создает ограничения на рост параметров внимания и, таким образом, учитывает эффекты торможения, ведущие к тому, что все процессы роста в биологических системах идут с насыщением. Подставив (5.75) в (5.77) и скалярно умножив это уравнение на P_ℓ^+ , получим с учетом (5.76)

$$\frac{d\xi_\ell}{dt} = \left(\lambda_\ell - B \sum_{i \neq \ell}^n \xi_i^2 - C \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \xi_\ell. \quad (5.78)$$

$$\xi_\ell(0) = P_\ell^+ Q_0.$$

Вернемся к примеру о распределении вероятностей различных значений проницаемости. Используя известные алгоритмы линейной алгебры, легко вычислить векторы, сопряженные векторам P_k :

$$P_1^+ = \left\{ \frac{1}{8}; -1; \frac{19}{8} \right\};$$

$$P_2^+ = \left\{ \frac{19}{8}; -1; \frac{1}{8} \right\};$$

$$P_3^+ = \left\{ -\frac{3}{2}; 3; -\frac{3}{2} \right\}.$$

Предположим, что после проведения ГРП на первых 7 скважинах анализ их результатов показал, что в трех случаях проницаемость была минимальной, в двух – средней и в двух – максимальной. Следовательно,

$$\mathbf{Q}_0 = \left\{ \frac{3}{7}; \frac{2}{7}; \frac{2}{7} \right\},$$

откуда

$$\xi(0) = \mathbf{P}^+ \mathbf{Q}_0 = \{0,43; 0,77; -0,21\}. \quad (5.79)$$

Численное интегрирование (5.78) с начальным условием (5.79) при $\lambda_k = 1$ и для B и C из довольно широкого диапазона значений приводит к решению

$$\xi = \{0; 1; 0\}.$$

Таким образом, выбирается паттерн \mathbf{P}_2 . Распределение вероятности, даваемое этим паттерном, и используется для расчета оптимальной длины трещины ГРП. Отметим, что при этом уровень задачи меняется: от игровых методов в условиях неопределенности мы переходим к принятию решений в условиях риска.

В заключение отметим, что мы не случайно завершаем пятую главу именно этим разделом. Читателю могло показаться, что глава о принятии решений в условиях неопределенности «выпадает» из общей канвы книги. Последний раздел позволяет нам выявить ее единство, «замкнуть» изложение, вновь вернувшись к синергетике.

Библиографический список к главе 5

1. *Ефимов А. Н.* Порядковые статистики – их свойства и приложения. – М.: Знание, 1980. – 64 с.
2. Введение в теорию порядковых статистик. – М.: Статистика, 1970.
3. *Кендалл М. Дж.* Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975.
4. *Мирзаджанзаде А. Х.* Принятие решений в газодобыче. – М.: ЦП НТО НГП им. акад. И. М. Губкина, 1987. – 49 с.
5. Методическое руководство по определению технологических показателей нефтегазоконденсатодобычи на основе косвенной информации. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1987. – 24 с.
6. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
7. *Balan V., Mohaghegh S., Ameri S.* State-Of-The-Art in Permeability Determination From Well Log Data: Part 1 – A Comparative Study, Model Development. – SPE Paper 30978, 1995.
8. *Андреанов И. В., Маневич Л. И.* Асимптология: идеи, методы, результаты. – М.: АЛАН, 1994. – 159 с.
9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982.
10. *Щуров В. И.* Технология и техника добычи нефти. – М.: Недра, 1983. – 510 с.
11. *Reynolds A. C., Chen J. C., Raghavan R.* Pseudoskin Factor Caused by Partial Penetration. – SPE Paper 121178.
12. *Касов А. С., Вашуркин А. И., Свищев М. Ф.* Фильтрационные характеристики пород – коллекторов месторождений Западной Сибири // Обз. инф. ВНИИОЭНГ, сер. «Нефтепромысловое дело», 1981. – 36 с.
13. *Черемисин Н. А., Сонич В. П., Батурин Ю. Е., Дроздов В. А.* Условия формирования остаточной нефтенасыщенности в полимиктовых коллекторах при заводнении // Нефт. хоз-во, 1997, № 9. – С. 40–45.
14. *Черемисин Н. А., Сонич В. П., Батурин Ю. Е.* Методика обоснования остаточной нефтенасыщенности при водонапорном режиме эксплуатации пластов // Нефт. хоз-во, 1997, № 9. – С. 58–61.
15. *Багдасаров В. Г.* Теория, расчет и практика эрغازлифта. – М.: Ленинград: Гостоптехиздат, 1947. – 371 с.
16. *Дильман В. В., Полянин А. В.* Методы модельных уравнений и аналогий. – М.: Химия, 1988. – 304 с.
17. *Vogel J. V.* Inflow Performance Relationships for Solution Gas Drive Wells // JPT, Jan., 1968.
18. *Beggs H. D.* Production Optimization. – Tulsa: OGCI Publ., 2000.
19. *Muskat M.* Physical Principles of Oil Productions. – McGraw-Hill, New York, 1949.
20. *Щелкачев В. Н., Ланук Б. Б.* Подземная гидравлика. – Ижевск: РХД, 2001. – 736 с.

21. *Ahmed T. H.* Reservoir Engineering Handbook. – Gulf Professional Publishing, 2001.
22. *Fetkovich M. J.* The Isochronal Testing of Oil Wells // SPE Paper 4529, 1973.
23. *Хасанов М. М., Мукминов И. Р., Бачин С. И.* К расчету притока жидкости к скважинам, работающим в условиях локального разгазирования // Нефтепромысловое дело, 2000, № 8–9. – С. 2–9.
24. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки / Ш. К. Гиматудинов, Ю. П. Борисов, М. Д. Розенберг и др. – М.: Недра, 1983. – 463 с.
25. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Инст. компьютер. исс., 2002. – 656 с.
26. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
27. *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1: Distribution Theory. – New York, Mac Millian Publishing Co, 1997.
28. *Krige D. G.* A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand // South Africa, v. 52, 1951. – P. 119–139.
29. Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes / Edited by Ch. C. Barton and P. R. La Pointe – New York: Plenum Press, 1995.
30. *Drew L. J., Schuenemeyer J. H., Bawiek W. J.* Estimation of the future rates of oil and gas discoveries in the Western Gulf of Mexico // U.S. Geological Survey Professional Paper 1252, 1982.
31. *Щелкачев В. Н.* Влияние на нефтеотдачу плотности сетки скважин и их размещения // Нефтяное хозяйство, 1974, № 6. С. 26–30.
32. *Мухарский Э. Д., Лысенко В. Д.* Проектирование разработки нефтяных месторождений платформенного типа. – М.: Недра, 1972. – 238 с.
33. *Forrest F. Craig Jr.* The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding. – New York, 1993.
34. *Jensen J. L., Corbett P. W. M., Lake L. W., Gagin D. J.* Statistics for Petroleum Engineers and Geoscientists. – Amsterdam: Elsevier, 2000.
35. *Gunter G. W., Finneran J. M., Hartman D. J., Miller J. P.* Early Determination of Reservoir Flow Units Using an Integrated Petrophysical Method // SPE Paper 38679, 1997.
36. *Economides M. J., Hill A. D., Ehlig-Economides Ch.* Petroleum Production Systems. – Prentice Hall PTR: New Jersey. 1994.
37. Методическое руководство по применению игровых методов при проектировании разработки нефтяных месторождений (РД-39-080-91). – М.: ВНИИнефть, 1990. – 46 с.
38. *Taha Х. А.* Введение в исследование операций. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
39. *Bertalanffy L. von.* General System Theory: Foundations, Development, Applications. – New York.: Braziller, 1968.

40. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. – М.: Мир, 1984.
41. *Жирмунский А. В., Кузьмин В. И.* Критические уровни в развитии природных систем. – Л.: Наука, 1990. – 223 с.
42. *Шмальгаузен И. И.* Рост и дифференцировка / Избр. труды. – Киев: Наукова думка, 1984.
43. *Колмогоров А. Н.* К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР, 1937, № 5. – С. 355–359.
44. *Мирзаджанзаде А. Х., Алиев Н. А., Юсифзаде Х. Б. и др.* Фрагменты разработки морских нефтегазовых месторождений. – Баку: Изд-во «Елм», 1997. – 408 с.
45. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.
46. *Хакен. Г.* Принципы работы головного мозга. – М.: ПЕР СЭ, 2001. – 351 с.

Мирзаджанзаде Азат Халилович

Хасанов Марс Магнавиевич

Бахтизин Рамиль Назифович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕФТЕГАЗОДОБЫЧИ

НЕЛИНЕЙНОСТЬ, НЕРАВНОВЕСНОСТЬ, НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Широбоков

Компьютерная верстка С.В. Высоцкий

Корректор З.Ю. Соболева

Подписано в печать 20.02.04. Формат 60 × 84 ¹/₁₆.
Усл.печ.л. 21,39. Уч.изд.л. 21,76. Гарнитура Times.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Заказ №184.

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru