М. М. Лаврентьев
Л. Я. Савельев

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

М. М. Лаврентьев
Л. Я. Савельев

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
НОВОСИБИРСК 2010

УДК 517.5
ББК 22.162
Л13

Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.

Теория операторов и некорректные задачи. — 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — 912 с.

ISBN 978–5–86134–162–2.

Книга написана по материалам курсов математического и функционального анализа, различных специальных курсов, читавшихся авторами в Новосибирском государственном университете. Использованы также результаты исследований, проводившихся в Институте математики Сибирского отделения РАН. Кратко описывается язык теории множеств и элементы общей, линейной, полилинейной алгебр. Вводится топологический язык и подробно описываются основные понятия анализа для векторных пространств и многообразий. Рассматриваются наиболее часто встречающиеся пространства гладких и обобщенных функций, их преобразования, классы линейных и нелинейных операторов. Особое внимание уделяется спектральной теории и теоремам о неподвижных точках. Кратко излагается теория степени отображения. В новом издании добавлена часть, в которой излагаются элементы теории вероятностей. В части, посвященной некорректным задачам, описываются уравнения с частными производными, интегральные и операторные уравнения, задачи интегральной геометрии.

Книгу можно использовать как учебное и справочное пособие по функциональному анализу. В ней много примеров. Она также представляет определенный интерес для специалистов.

Научный редактор С. И. Кабанихин

Л$\frac{1602080000\text{–}06}{\text{Я}82(03)\text{–}10}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–162–2

В первых двух частях книги описываются общие математические понятия и некоторые разделы теории операторов. В третьей части излагаются элементы теории вероятностей. Четвертая часть посвящена некорректным задачам математической физики. Эта часть имеет самостоятельное значение и вместе с тем служит важным примером применения методов математического и функционального анализа. Первые три части книги написаны Л. Я. Савельевым, четвертая часть — М. М. Лаврентьевым (первые две главы этой части написаны С. И. Кабанихиным).

В части *Основные понятия* кратко описываются язык теории множеств, элементы общей, линейной и полилинейной алгебр. Вводится топологический язык и подробно рассматриваются фундаментальные понятия анализа: предел, дифференциал, интеграл. Специальный раздел посвящен анализу на многообразиях.

В части *Операторы* описываются основные пространства функций и классы операторов — линейных и нелинейных. Рассматриваются различные виды обобщенных функций и их преобразований. Излагаются элементы теории линейных операторов. Особое внимание уделяется спектральной теории. Доказываются основные теоремы о неподвижных точках нелинейных преобразований, кратко излагается теория степени отображения. Отдельная глава посвящена матричным операторам на бесконечномерных нормированных пространствах.

В части *Теория вероятностей* кратко описываются элементы этой теории. Прослеживается ее связь с теорией операторов. Рассматриваются дискретные, непрерывные и общие вероятностные пространства. Отдельная глава посвящена случайным процессам, среди которых выделяются марковские процессы и мартингалы, тесно связанные с операторами.

Часть *Некорректные задачи* посвящена задачам математической физики, интегральным и операторным уравнениям, эволюционным уравнениям и задачам интегральной геометрии. Рассматриваются также вопросы аналитического продолжения.

Детальная проработка отдельных тем, многочисленные примеры и задачи позволяют использовать книгу как учебное пособие по некоторым разделам математического и функционального анализа. А широкий охват материала и подробные ссылки с комментариями — как справочное пособие. К научной части книги относятся параграфы, содержащие ряд новых результатов. Там описана общая модель линейного и непрерывного продолжения векторной меры до интеграла. Доказана теорема единственности для нового типа уравнений с интегродифференциальными операторами. Приведены примеры некорректности задачи Радона, доказана слабая некорректность задачи, рассмотрена задача с неполными данными. Доказана теорема единственности для специальной задачи интегральной геометрии.

Новое издание книги дополнено и переработано. В нем исправлены погрешности, замеченные в первом издании.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой части книги описываются разделы теории множеств, общей и линейной алгебр, геометрии пространств, широко применяемые в математическом и функциональном анализе.

Глава «Теория множеств» посвящена абстрактному математическому языку, который используется в современном математическом анализе. В ней определяются нужные понятия и сообщаются нужные сведения из теории множеств. Абстрактный математический язык позволяет просто формулировать предложения, кратко излагать рассуждения и пояснять суть дела. Его абстрактность компенсируется конкретностью примеров. Логические связки *если — то, только если, если и только если* (коротко *ессли* или *эквивалентно*) часто заменяются стрелками $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$. Вместо выражений *для каждого* и *для некоторого* используются символы $\forall$ и $\exists$. Формулируется общий принцип индукции и эквивалентные ему предложения, использующиеся при доказательствах многих важных теорем.

Глава «Алгебра» посвящена элементам общей, линейной и полилинейной алгебр. В ней описываются те разделы, которые часто используются в математическом и функциональном анализе. Много внимания уделено алгебраическим системам: полугруппам, группам, кольцам, полям, векторным пространствам и алгебрам. Описываются нормированные и евклидовы пространства, их геометрия. В отдельном пункте излагаются элементы полилинейной алгебры и тензорного исчисления.

Глава «Анализ» посвящена теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислениям. Описываются сходимость по направлению в топологических пространствах, дифференцирование в векторных пространствах и интегрирование по мере. Отдельный параграф посвящен анализу на многообразиях.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

В книге используется наивная теория множеств. Эта теория основана на предположении, что множества обладают всеми нужными свойствами. Глава посвящена краткому описанию теоретико-множественного языка и правил операций с множествами.

1.1. Множества

Понятие множества формально не определяется. Считается, что приписываемые множествам свойства не противоречат друг другу и соответствуют содержанию.

1.1.1. Элементы и части множеств

Каждое (непустое) *множество* определяется своими *элементами.* Рассматривается также *пустое множество* O, не имеющее элементов. Множества обычно обозначаются прописными латинскими буквами, а их элементы — строчными.

1. Запись $a \in E$ читается: *элемент a принадлежит множеству E*. Отрицание этой принадлежности записывается как $a \notin E$. Если элементы $a, b, c, \ldots$ множества E определяются перечислением, то говорят, что *множество E состоит из элементов* $a, b, c, \ldots$, и пишут $E = \{a, b, c, \ldots\}$. Порядок, в котором записываются элементы, не играет роли.

Равными считаются множества, состоящие из одних и тех же элементов. Равенство множеств A и B записывается $A = B$, а его отрицание $A \neq B$.

Множества, состоящие из одного элемента, называются *элементарными* и часто отождествляются со своими элементами.

2. Множество A, каждый элемент которого принадлежит множеству B, называется *частью* (или *подмножеством*) B.

Говорят также, что A *содержится в* B или B *содержит* A, и пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отрицание этого записывается $A \nsubseteq B$ или $B \nsupseteq A$. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A *строго содержится в* B или B *строго содержит* A, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

Считается, что пустое множество O содержится в каждом множестве E.

Вместо *содержится* и *содержит* говорят также *включается* и *включает*.

Из определений следует, что равенство $A = B$ эквивалентно включениям $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Нередко часть множества E удобно записывать $\{x \in E \mid \ldots\}$, указывая после черты определяющее эту часть свойство. Иногда черта заменяется двоеточием. Если ясно, какое множество E имеется в виду, то вместо $x \in E$ пишут просто x.

Непустые и неравные E части множества E называются *собственными*.

Для каждого множества E существует *класс* $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$, составленный из всех частей E. Термин *класс*, как правило, употребляется здесь для множеств, элементы которых сами являются множествами. Это позволяет избегать сочетаний *множество множеств* или *множество подмножеств*.

Пример. Рассмотрим множество $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ цифр. Частями F являются, например, множество $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ четных цифр и множество $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ нечетных. Множество $C = \{2, 4, 6, 8\}$ строго содержится в A. Множество $D = \{0, 1\}$ не содержится ни в A, ни в B.

1.1.2. Алгебра множеств

Для класса $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ всех частей множества E определены операции объединения, пересечения и дополнения.

1. Обозначим через X, Y, Z произвольные множества класса $\mathscr{P}$. Множество $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ *или* } y \in Y\} \in \mathscr{P}$, составленное из всех элементов, принадлежащих множеству X или множеству Y, называется *объединением* X, Y.

Множество $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ *и* } y \in Y\} \in \mathscr{P}$, составленное из всех элементов, принадлежащих множеству X и множеству Y, называется *пересечением* X, Y.

Множество $Y \setminus X = \{y \mid y \in Y \text{ *и* } y \notin X\} \in \mathscr{P}$, составленное из всех элементов, принадлежащих множеству Y, но не принадлежащих множеству X, называется *дополнением* X *до* Y. Дополнение X до E называется просто *дополнением* X и обозначается X' или X^c. Ясно, что $Y \setminus X = Y \setminus (X \cap Y) = Y \cap X'$.

2. Если $X \cap Y = O$, то говорят, что множества X и Y *не пересекаются* или *дизъюнктны.* Из определений следует, что $X \cap Y = O$ эквивалентно $Y \subseteq X'$.

Класс, каждые два множества которого не пересекаются, будем называть *дизъюнктивным.* По определению, пустой класс и класс, состоящий ровно из одного множества, дизъюнктивны.

3. Объединение, пересечение и дополнение подчинены правилам, которые легко проверить:

$$X \cup X' = E, \quad X \cap X' = O \tag{1}$$

— *разбиение*;

$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X \tag{2}$$

— *идемпотентность*;

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X \tag{3}$$

— *коммутативность*;

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \tag{4}$$

— *ассоциативность*;

$$\begin{gathered}(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z),\\ (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)\end{gathered} \tag{5}$$

— *дистрибутивность*;

$$X \cup (X \cap Y) = X, \quad X \cap (X \cup Y) = X \tag{6}$$

— *поглощение*;

$$(X \cup Y)' = X' \cap Y', \quad (X \cap Y)' = X' \cup Y' \tag{7}$$

— *двойственность*;

$$(X')' = X \tag{8}$$

— *инволютивность*.

Класс $\mathscr{P}$ с операциями $\cup$, $\cap$, $'$ образует *булеву алгебру множеств.*

4. Операции объединения и пересечения можно обобщить. Рассмотрим произвольный класс $C \subseteq \mathscr{P}$. Множество

$$\cup\mathscr{C} = \{x \mid x \in C \text{ для некоторого } C \in \mathscr{C}\} \in \mathscr{P},$$

составленное из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному множеству класса $\mathscr{C}$, называется *объединением множеств класса* $\mathscr{C}$.

Класс $\mathscr{C}$, объединение множеств которого содержит A, называется *покрытием множества* A. Дизъюнктивный класс $\mathscr{D}$ такой, что $\cup\mathscr{D} = A$, называется *разбиением множества* A. (При этом часто предполагается еще, что все множества класса $\mathscr{D}$ непустые.)

Множество

$$\cap\mathscr{C} = \{x \mid x \in C \text{ для каждого } C \in \mathscr{C}\} \in \mathscr{P},$$

составленное из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств класса $\mathscr{C}$, называется *пересечением множеств класса* $\mathscr{C}$.

Если класс $\mathscr{C}$ состоит из множеств $A, B, C, \ldots$, то их объединение и пересечение записываются так:

$$A \cup B \cup C \cup \ldots, \quad A \cap B \cap C \cap \ldots.$$

В частности, если $\mathscr{C} = \{A, B\}$, то

$$\cup\{A, B\} = A \cup B, \quad \cap\{A, B\} = A \cap B$$

в соответствии с определениями объединения и пересечения множеств $X = A$, $Y = B$.

5. **Пример.** Для множеств A, B, C, D, F из примера в 1.1.1 верны равенства

$$A \cup B = F, \quad A \cap B = O, \quad A' = B, \quad B' = A,$$
$$A \setminus C = \{0\}, \quad A \setminus D = C, \quad A \cap C = C, \quad A \cap D = \{0\},$$
$$B \cup C \cup D = F, \quad B \cap C \cap D = O.$$

Замечание. Так как в книге используется наивная теория множеств, то корректность предлагаемых определений не обсуждается. В формализованных теориях она обеспечивается аксиомами (см. [53, гл. 2]).

1.1.3. Декартовы произведения

Это понятие больше связано с геометрией, чем с алгеброй. Оно формализует переход от прямой к плоскости и пространству. Определение декартова произведения основано на понятии упорядоченной пары.

1. Рассмотрим: произвольный элемент a множества A, произвольный элемент b множества B, элементарные множества $\{a\}$ и $\{b\}$, множество $\{a, b\}$.

Класс $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, составленный из множеств $\{a\}$ и $\{a, b\}$, называется *упорядоченной парой с первым элементом a и вторым элементом b.* Подчеркнем, что в этом определении используется только понятие множества. Термин *первый* для элемента $a \in A$, $a \neq b$ оправдывается тем, что $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$, но $\{b\} \notin \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Условимся вместо *упорядоченная пара* иногда говорить коротко *пара* и вместо (a, b) писать ab.

Пусть $x \in A$, $y \in B$. Тогда равенство $(x, y) = (a, b)$ упорядоченных пар эквивалентно равенству $x = a$ их первых элементов и равенству $y = b$ их вторых элементов.

Упражнение. Доказать это утверждение.

Если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$. По определению, $(a, a) = \{\{a\}\}$ для каждого $a \in A \cap B$.

2. Множество $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$, составленное из всех упорядоченных пар с первыми элементами из A и вторыми элементами из B, называется *декартовым произведением множества A на множество B.* Если $A \neq B$ и $A \neq O$, $B \neq O$, то $A \times B \neq B \times A$.

Пример. Пусть $A = B = F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда декартово произведение $A \times B = F \times F$ состоит из упорядоченных пар $00, 01, \dots, 09, 10, 11, \dots, 19, \dots, 90, 91, \dots, 99$.

3. Будем непустые классы непустых множеств называть *невырожденными.* Рассмотрим невырожденный дизъюнктивный класс $\mathscr{D}$. Всякое множество Y, составленное из элементов множеств класса $\mathscr{D}$ так, что каждому множеству $X \in \mathscr{D}$ принадлежит ровно один элемент $y \in Y$, назовем *выборкой для $\mathscr{D}$.*

Предположим, что верна

Аксиома выбора. *Для каждого невырожденного дизъюнктивного класса множеств существует хотя бы одна выборка.*

Множество $\prod \mathscr{D}$ всех выборок для $\mathscr{D}$ называется *декартовым произведением множеств класса* $\mathscr{D}$. Аксиома выбора утверждает, что $\prod \mathscr{D} \neq O$ для каждого невырожденного дизъюнктивного класса $\mathscr{D}$. Если класс $\mathscr{D}$ состоит из множеств $A, B, C, \ldots$, то декартово произведение $\prod \mathscr{D}$ записывается также $A \times B \times C \times \cdots$.

Пример. Пусть $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и класс $\mathscr{D}$ состоит из множеств $A = \{1\} \times F$, $B = \{2\} \times F$, $C = \{3\} \times F$. Тогда

$$\prod \mathscr{D} = \{\{(1, x), (2, y), (3, z)\} \mid x, y, z \in F\}.$$

Произвольный элемент множества $F \times F \times F$ удобно записывать в виде последовательности $xyz = 000, 001, \ldots, 999$.

1.2. Соответствия

Формально соответствие определяется как множество упорядоченных пар. Содержание этого понятия интуитивно понятно.

1.2.1. Образы и прообразы

Каждая часть S декартова произведения $A \times B$ называется *соответствием* между множеством A и множеством B. Вместо $(x, y) \in S$ часто пишут xSy или $S\colon x \to y$. Вместо $S \subseteq A \times B$ пишут также $S\colon A \to B$.

1. Множество $S(x) = \{y \mid (x, y) \in S\} \subseteq B$ называется *образом элемента* $x \in A$ при соответствии S. Этот образ может быть пустым. Объединение $S(X) = \cup\{S(x) \mid x \in X\}$ образов $S(x)$ всех элементов $x \in X$ называется *образом множества* $X \subseteq A$ при соответствии S. В частности, множество $S(A) \subseteq B$ называется *образом соответствия* S. Это множество обозначают еще $\operatorname{Ran} S$.

2. Соответствие $S^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in S\} \subseteq B \times A$ называется *обратным к* S. Образ $S^{-1}(y) \subseteq A$ элемента $y \in B$ при S^{-1} называется *прообразом* y *при* S. Он может быть пустым. Образ $S^{-1}(Y) \subseteq A$ множества $Y \subseteq B$ при S^{-1} называется *прообразом* Y *при* S. Ясно, что $S^{-1}(Y) = \cup\{S^{-1}(y) \mid y \in Y\}$. Множество $S^{-1}(B) \subseteq A$ называется *областью определения* соответствия S. Говорят также, что S *определено на* множестве $S^{-1}(B)$. Это множество обозначают еще $\operatorname{Dom} S$ и коротко называют *областью* соответствия S.

3. Из определений следует, что

$$\operatorname{Dom} S = \{x \in A \mid y \in S(x) \text{ для некоторого } y \in B\},$$
$$\operatorname{Ran} S = \{y \in B \mid y \in S(x) \text{ для некоторого } x \in A\}.$$

(Условие в первом равенстве означает, что $S(x) \neq O$, а во втором — что $S^{-1}(y) \neq O$.) Если $\operatorname{Dom} S = A$, то соответствие S называют *всюду определенным.* Если $\operatorname{Ran} S = B$, то соответствие S называют *накрывающим* или *накрытием.*

Пусть $S \subseteq T \subseteq A \times B$. Тогда говорят, что S есть *сужение* соответствия T, а T есть *продолжение* соответствия S. Включение $S \subseteq T$ эквивалентно включениям $\operatorname{Dom} S \subseteq \operatorname{Dom} T$ и $S(x) \subseteq T(x)$ для каждого $x \in \operatorname{Dom} S$.

4. Рассмотрим множества A, B, C и соответствия $S \subseteq A \times B$, $T \subseteq B \times C$. Равенство $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in A)$ определяет соответствие $TS \subseteq A \times C$, которое называется *композицией соответствий S и T.* Область $\operatorname{Dom}(TS)$ может быть пустой, если $\operatorname{Ran} S$ и область $\operatorname{Dom} T$ не пересекаются.

Из определений следует, что $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

Композицию соответствий S и T можно изобразить диаграммой: это особенно удобно, когда приходится составлять композиции из нескольких соответствий. Вместо *композиция* часто говорят *произведение.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "TS"'] & & B \arrow[dl, "T"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Пример. Пусть $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $F \times F = \{00, 01, \dots, 09; 10, 11, \dots, 19; \dots 90, 91, \dots, 99\}$. Соответствие $S = \{01, 02, \dots, 09, 12, \dots, 19, \dots, 89\} \subseteq F \times F$ устанавливает *строгий порядок для F*: при нем $y \in S(x)$ означает, что $y > x$. Соответствие $S^{-1} = \{10, 21, 20, \dots, 98, \dots, 91, 90\} \subseteq F \times F$ устанавливает *обратный порядок для F*: при нем $y \in S^{-1}(x)$ означает, что $y < x$.

Соответствие $T = \{00, 11, 24, 39\} \subseteq F \times F$ определяет возведение цифры в квадрат: при нем $z \in T(y)$ означает, что $z = y^2$. Заметим, что $T(S(0)) = T(\{1, 2, 3, \dots, 9\}) = \{1, 4, 9\}$, $T(S(1)) = T(\{2, 3, \dots, 9\}) = \{4, 9\}$, $T(S(2)) = T(\{3, \dots, 9\}) = \{9\}$, $T(S(3)) = \dots = T(\{9\}) = O$. Поэтому композиция $TS = \{01, 04, 09, 14, 19, 29\} \subseteq F \times F$.

1.2.2. Функции

Среди соответствий выделяются однозначные, у которых образ каждого элемента либо пуст, либо состоит ровно из одного элемента. Их называют функциями.

1. Соответствие $f \subseteq A \times B$, при котором для каждого $x \in \operatorname{Dom} f \subseteq A$ существует единственный $y \in \operatorname{Ran} f \subseteq B$, составляющий образ $f(x)$, называется *однозначным.* Однозначное соответствие $f \subseteq A \times B$ называется также *функцией из A в B.* Говорят еще, что функция $f \subseteq A \times B$ *определена в A и изменяется в B.* Вместо $\{y\} = f(x)$ обычно пишут $y = f(x)$. Элемент y называется *значением* функции f, соответствующим элементу x.

Упражнение. Доказать, что композиция функций есть функция.

Замечание. По данному определению функция есть некоторое множество упорядоченных пар. Если пользоваться наглядными представлениями, то можно сказать, что это определение отождествляет функцию с ее графиком. Иногда график $f \subseteq A \times B$ выделяют и соответствие между A и B определяют как тройку (A, B, f). Все это позволяет оперировать с функциями как с множествами, что часто бывает удобно.

2. Всюду определенные функции называют *отображениями.* Если функция $f \subseteq A \times B$ имеет область $\operatorname{Dom} f = A$, то говорят, что f отображает A *в* B. Если, кроме того, $\operatorname{Ran} f = B$, то говорят, что f отображает A *на* B. Когда f отображает A в B, вместо $f \subseteq A \times B$ обычно пишут $f\colon A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Множество всех отображений A в B обозначается B^A.

3. Обратное к функции $f \subseteq A \times B$ соответствие $f^{-1} \subseteq B \times A$ может не быть функцией. Однозначное соответствие, обратное к которому тоже однозначно, называется *взаимно однозначным.* Взаимно однозначное отображение множества A в множество B называется *вложением A в B.* Взаимно однозначное отображение множества A на B называют *наложением A на B.* Такое отображение называется еще *изоморфизмом A на B.* Множества, для которых существует изоморфизм, называются *изоморфными.* Изоморфизм A на B называют еще *подстановкой A на B*, а изоморфизм A на A — *автоморфизмом* или *перестановкой A.* Все это — взаимно однозначные накрытия.

Примеры. 1) Пусть $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $F \times F = \{00, 01, \ldots, 09; 10, 11, \ldots, 19; \ldots 90, 91, \ldots, 99\}$. Соответствие $f = \{00, 12, 24, 36, 48\}$ есть функция с областью $\operatorname{Dom} f = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и образом $\operatorname{Ran} f = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Обратное соответствие $f^{-1} = \{00, 21, 42, 63, 84\}$ тоже есть функция с областью $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Ran} f$ и образом $\operatorname{Ran} f^{-1} = \operatorname{Dom} f$. Соответствие f взаимно однозначно. Оно отображает множество $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ на множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Эти множества изоморфны.

2) Отображение $X \to y$ ($X \in \mathscr{D}$, $y \in X$) дизъюнктивного класса $\mathscr{D}$ на свою выборку Y есть изоморфизм (1.1.3, 3).

Замечание. Подчеркнем, что важно указывать множества, между которыми устанавливается соответствие. Одно и то же множество пар f в примере содержится в декартовых произведениях $A \times B$ и $F \times F$. Но в $A \times B$ соответствие f является изоморфизмом, а в $F \times F$ — нет.

4. Рассмотрим множества A, B, C, вложения $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ и их композицию $h = gf\colon A \to C$.

Предложение. *Композиция h вложений f, g есть вложение.*

□ Докажем, что h является вложением. Пусть $h(x) = h(y)$ для некоторых $x, y \in A$. Это значит, что $g(f(x)) = g(f(y))$. Так как g взаимно однозначно, то $f(x) = f(y)$. И так как f взаимно однозначно, то $x = y$. Композиция h взаимно однозначна. ■

Следствие. *Композиция h изоморфизмов f, g есть изоморфизм.*

□ По доказанному остается показать, что композиция $h = gf$ накрывающих отображений g, f является накрытием. Возьмем произвольный элемент $z \in C$. Так как g накрывает C, то $g(y) = z$ для некоторого $y \in B$. Так как f накрывает B, то $f(x) = y$ для некоторого $x \in A$. Следовательно, $h(x) = g(f(x)) = z$ и h накрывает C. ■

5. Часто удобно заменять множества некоторыми функциями, называемыми индикаторами.

Рассмотрим множество U, класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех частей U и множество $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Для каждого множества $X \in \mathscr{P}$ определена функция $\operatorname{ind} X\colon U \to \mathbb{B}$ со значениями $\operatorname{ind} X(u) = 1$ при $u \in X$ и $\operatorname{ind} X(u) = 0$ при $u \notin X$. Функции на U со значениями в $\mathbb{B}$ называются *индикаторами на U*. Функция $\operatorname{ind} X$ называется *индикатором части X множества U*. Обозначим $\mathscr{I} = \mathscr{I}(U)$ множество всех индикаторов на U.

Соответствие ind между $\mathscr{P}$ и $\mathscr{I}$, при котором каждому множеству $X \in \mathscr{P}$ соответствует его индикатор $\operatorname{ind} X \in \mathscr{I}$, есть изоморфизм $\mathscr{P}$ на $\mathscr{I}$. Изоморфизм $\mathrm{ind}\colon \mathscr{P} \to \mathscr{I}$ позволяет отождествлять множества из $\mathscr{P}$ с их индикаторами из $\mathscr{I}$.

Упражнение. Доказать, что $\mathrm{ind}\colon \mathscr{P} \to \mathscr{I}$ есть изоморфизм.

Замечание. Таким образом, функции можно считать множествами специального типа, а множества — функциями специального типа.

6. Функции можно считать операторами общего типа, *абстрактными операторами.* Изучаемые в дальнейшем операторы выделяются специальными областями определения и изменения, а также специальными свойствами устанавливаемого соответствия между этими областями.

Все общие понятия и утверждения для соответствий и функций переносятся в теорию операторов. Особенно часто там используются свойства образов, прообразов и композиции. Сложные композиции хорошо поясняются диаграммами со стрелками.

1.2.3. Семейства множеств

Термин *семейство* является синонимом термина *функция.* Он употребляется обычно при специальной записи значений функции с помощью индексов, которая часто бывает удобна.

1. Рассмотрим множество I. Его элементы будем называть *индексами.* Отображение $f\colon I \to B$ множества I в множество B условимся называть также *семейством элементов множества B, имеющим множество индексов I*. Вместо $f(i)$ будем также писать f_i $(i \in I)$, а вместо f писать (f_i). Таким образом, $f = (f_i)$. Когда нужно, указывают множество индексов и пишут (f_i) $(i \in I)$.

Для каждого семейства множеств $X_i \in \mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ можно определить *объединение* $\cup X_i$ и *пересечение* $\cap X_i$:

$$\cup X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ \textit{для некоторого} } i \in I\},$$
$$\cap X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ \textit{для каждого} } i \in I\}.$$

Эти определения согласуются с данными в 1.1.2 для объединения и пересечения класса множеств. Когда нужно, указывают множество индексов и пишут $\bigcup\limits_{i\in I}$, $\bigcap\limits_{i\in I}$.

Из определений следуют равенства

$$\cup X_i = O, \quad \cap X_i = E \quad (i \in O)$$

для частей семейства E с пустым множеством индексов I. Семейство с пустым множеством индексов называется *пустым семейством.*

Семейство непустых множеств X_i, объединение которых $X = \cup X_i$ содержит множество A, называется *покрытием* A. Если $X = A$ и среди множеств X_i нет пересекающихся, то покрытие (X_i) называют *разбиением* A.

Каждый дизъюнктивный класс $\mathscr{D}$ непустых множеств $X \subseteq E$ можно считать также семейством — тождественным отображением $\mathscr{D}$ на себя. В этом случае роль индексов играют сами множества $X \in \mathscr{D}$. Если $\cup\mathscr{D} = E$, то класс $\mathscr{D}$ тоже называют *разбиением* множества E. Иногда для упрощения рассуждений покрывающие множества не предполагаются непустыми.

Декартово произведение дизъюнктивного класса D, составленного из множеств $\{i\} \times X_i = \{(i, x_i) \mid x_i \in X_i\}$ $(i \in I)$, называется *декартовым произведением семейства множеств* X_i $(i \in I)$ и обозначается $\prod X_i$ или $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Элементами этого произведения являются семейства $x = (x_i)$ элементов $x_i \in X_i$ $(i \in I)$:

$$\prod X_i = \{x = (x_i) \mid x_i \in X_i \text{ для каждого } i \in I\}$$

или, что то же самое,

$$\prod X_i = \{f\colon I \to X \mid f(i) \in X_i \text{ для каждого } i \in I\}.$$

Элементами этого произведения являются функции $f\colon I \to X$ со значениями $f(i) \in X_i$ для каждого индекса $i \in I$. По определению, декартово произведение пустого семейства множеств пусто.

2. Действия с семействами множеств подчинены правилам, которые легко проверить. Запишем их в виде тождеств. Рассмотрим: множества индексов A и B, семейства множеств X_α $(\alpha \in A)$ и Y_β $(\beta \in B)$, перестановку $p\colon A \to A$, множество индексов C и семейство частей $A(\gamma)$ $(\gamma \in C)$ множества A, покрывающее A. Верны правила:

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_{p(\alpha)} = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha\in A} X_{p(\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \tag{1}$$

— *коммутативность*;

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{\gamma\in C}\Bigg(\bigcup_{\alpha\in A(\gamma)} X_\alpha\Bigg), \quad \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcap_{\gamma\in C}\Bigg(\bigcap_{\alpha\in A(\gamma)} X_\alpha\Bigg) \tag{2}$$

— *ассоциативность*;

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\cap\left(\bigcup_{\beta\in B} Y_\beta\right)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\cap Y_\beta),$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\cup\left(\bigcap_{\beta\in B} Y_\beta\right)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\cup Y_\beta) \tag{3}$$

— *дистрибутивность*;

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\right)'=\bigcap_{\alpha\in A} X'_\alpha,\quad \left(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)'=\bigcup_{\alpha\in A} X'_\alpha \tag{4}$$

— *двойственность*;

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in B} Y_\beta\right)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\times Y_\beta),$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\times\left(\bigcap_{\beta\in B} Y_\beta\right)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\times Y_\beta) \tag{5}$$

— *декартова дистрибутивность*.

Если $A=B$, то последнее равенство можно упростить:

$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right)\times\left(\bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in A}(X_\alpha\times Y_\alpha). \tag{6}$$

Упражнение. Доказать эти тождества.

4. Рассмотрим: множества E и F, семейство $X_i\subseteq E$, множество $Y\subseteq F$ и семейство $Y_j\subseteq F$, отображение $f\colon E\to F$. Для образов и прообразов верны равенства

$$f(\cup X_i)=\cup f(X_i); \tag{7}$$
$$f^{-1}(\cup Y_j)=\cup f^{-1}(Y_j),\quad f^{-1}(\cap Y_j)=\cap f^{-1}(Y_j); \tag{8}$$
$$f^{-1}(Y')=f^{-1}(Y)'. \tag{9}$$

Для образа пересечения верно только включение

$$f(\cap X_i) \subseteq \cap f(X_i). \tag{10}$$

Упражнение. Доказать соотношения (7)–(10).

Пример. Пусть $E = F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $X_2 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ и $f\colon E \to F$ определяется равенствами $f(0) = f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 3$, $f(4) = f(5) = 5$, $f(6) = f(7) = 7$, $f(8) = f(9) = 9$. Тогда $f(X_1) = f(X_2) = X_1$, $X_1 \cap X_2 = O$ и $f(X_1 \cap X_2) = f(O) = O \subset X_1 = f(X_1) = f(X_2) = X_1$.

Рассмотрим еще $Y_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Заметим, что $f^{-1}(Y_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f^{-1}(Y_2) = \{2, 3, 4, 5\}$, $f^{-1}(Y_3) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и

$$Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \{3, 4, 5\}, \quad f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \cap f^{-1}(Y_3) = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Следовательно, $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3) = \{2, 3, 4, 5\} = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \cap f^{-1}(Y_3)$.

Этот пример поясняет тождества (8) и включение (10).

6. Объединение $\cup$ и пересечение $\cap$ семейства множеств могут служить примерами абстрактных операторов. Областью определения этих операторов служит множество $F(I, \mathscr{P})$ отображений множества индексов I в класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ всех частей данного множества E. А областью изменения — сам класс $\mathscr{P}$. Каждому отображению $f\colon I \to \mathscr{P}$ ставятся в соответствие множества $\cup f = \bigcup\limits_i f_i$ и $\cap f = \bigcap\limits_i f_i$, принадлежащие $\mathscr{P}$.

Равенства (1)–(10) описывают свойства операторов $\cup$ и $\cap$.

1.3. Отношения

Соответствия в $E \times E$ называются *отношениями* для множества E. Среди них выделяют эквивалентности и порядки. Заметим, что соответствие между множествами A и B есть отношение для $E = A \cup B$.

1.3.1. Рефлексивность, транзитивность, симметричность

Эти свойства отношений часто встречаются. Их можно считать главными.

1. Отношение $R \subseteq E \times E$, при котором $x \in R(x)$ для каждого $x \in E$, называется *рефлексивным.* При нем каждый элемент множества соответствует самому себе (и, возможно, еще некоторым другим): $x \to x$.

Отношение $R \subseteq E \times E$, при котором для каждых $x, y, z \in E$ из $y \in R(x)$ и $z \in R(y)$ следует $z \in R(x)$, называется *транзитивным.* При нем соответствие передается через каждый промежуточный элемент: $x \to y$, $y \to z \Rightarrow x \to z$.

Отношение $R \subseteq E \times E$, при котором для каждых $x, y \in E$ из $y \in R(x)$ следует $x \in R(y)$, называется *симметричным*: $x \to y \Rightarrow y \to x$. Симметричное отношение совпадает с обратным к нему: $R = R^{-1}$.

Отношение $R \subseteq E \times E$, при котором для каждых $x, y \in E$ из $y \in R(x)$ и $x \in R(y)$ следует $x = y$, называется *антисимметричным*: $x \to y$, $y \to x \Rightarrow x = y$. При нем могут соответствовать друг другу только равные элементы.

2. Примеры. В примере п. 1.2.1 отношения S, T транзитивны и антисимметричны. Их композиция TS тоже.

Рассмотрим отношение $R = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ равенства цифр. Оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Отношение $R \cup S$ порядка для цифр рефлексивно и транзитивно.

В примере 1 из п. 1.2.2 отношение f не транзитивно: если $y = 2x$ и $z = 2y$, то $z \neq 2x$ при $x \neq 0$.

1.3.2. Эквивалентности

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение называется *эквивалентностью.* Если R — эквивалентность для множества E, то вместо $y \in R(x)$ и $x \to y$ часто пишут $x \sim y$.

1. Эквивалентности характеризует

Теорема. *Каждая эквивалентность для множества определяет некоторое его разбиение на непустые части. Обратно: каждое такое разбиение множества определяет некоторую эквивалентность для него.*

□ Рассмотрим эквивалентность R для множества E и класс $\mathscr{D}$ всех различных образов $R(x)$ элементов $x \in E$. Докажем, что $\mathscr{D}$ есть разбиение E. В самом деле, так как R рефлексивно, то $x \in R(x)$, и поэтому $\mathscr{D}$ покрывает E. Возьмем $a, b \in E$ и $R(a), R(b) \in \mathscr{D}$. Пусть $x \in R(a)$, $y \in R(b)$ и существует $c \in R(a) \cap R(b)$, т. е. $x \sim a$, $y \sim b$ и $c \sim a$, $c \sim b$. Тогда, так как R симметрично и транзитивно: $c \sim a$, $c \sim b \Rightarrow a \sim c$, $c \sim b \Rightarrow a \sim b$ и $x \sim a$, $a \sim b \Rightarrow x \sim b \Leftrightarrow x \in R(b) \Rightarrow R(a) \subseteq R(b)$. Точно так же $y \sim b$, $a \sim b \Rightarrow y \sim b$, $b \sim a \Rightarrow y \sim a \Leftrightarrow y \in R(a) \Rightarrow R(b) \subseteq R(a)$. Значит, $R(a) = R(b)$. Следовательно, если $R(a) \neq R(b)$, то $R(a) \cap R(b) = O$. Класс $\mathscr{D}$ дизъюнктивен и является разбиением множества E.

Докажем обратное. Рассмотрим разбиение $\mathscr{D}$ множества E на непустые части и определяемое им отношение R для E, при котором каждому элементу $x \in E$ соответствуют все элементы из покрывающего x множества $X \in \mathscr{D}$. По определению, R равно объединению декартовых квадратов $X \times X$ множеств $X \in \mathscr{D}$. Так как $x \in X = R(x)$, то R рефлексивно. Если $y \in X = R(x)$, то $X = R(y)$, $x \in R(y)$ и R симметрично. Равенство $R(x) = R(y)$ при $y \in R(x)$ дает $z \in R(x)$ для $z \in R(y)$. Значит, R транзитивно. Таким образом, R есть эквивалентность. ■

Определяемое эквивалентностью R разбиение множества E называется *фактор-классом*, полученным факторизацией E по R, и обозначается E/R. Множества класса E/R называются *фактор-множествами*. Эквивалентными являются элементы, принадлежащие одному и тому же фактор-множеству.

2. Примеры. 1) Простейшей эквивалентностью является равенство элементов. Ему соответствует разбиение множества на элементарные части:

$$R = \{(x, x) \mid x \in E\}, \quad \mathscr{D} = \{\{x\} \mid x \in E\}.$$

2) Соответствие цифр по четности есть эквивалентность, определяемая разбиением

$$\mathscr{D} = \{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}\}$$

множества $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3) Рассмотрим множество высказываний, которые отождествлены с частями некоторого множества U так, что логическая связка $A \Rightarrow B$ означает $A \subseteq B$. В этом случае логическая эквивалентность $A \Leftrightarrow B$ высказываний A и B означает равенство $A = B$ множеств. Это равенство есть эквивалентность для класса $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех частей множества U.

3. Более сложный пример эквивалентности связан с определением мощности множества, которая формализует интуитивное представление о числе элементов множества.

Рассмотрим множество U и класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех его частей. Обозначим символом $\leftrightarrow$ отношение для $\mathscr{P}$, определяемое изоморфизмом множества на множество: запись $X \leftrightarrow Y$ означает, что множества X и Y из $\mathscr{P}$ изоморфны (т. е. существует взаимно однозначное отображение X на Y). Отношение $\leftrightarrow$ есть эквивалентность. В самом деле, оно рефлексивно (так как тождественное отображение X на X является изоморфизмом), транзитивно (так как композиция изоморфизмов X на Y и Y на Z есть изоморфизм X на Z) и симметрично (так как обратное соответствие для изоморфизма X на Y является изоморфизмом Y на X).

Значит, класс $\mathscr{P}$ разбивается на непустые попарно непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из изоморфных друг другу множеств. Изоморфные множества называют *равномощными*, а составленные из них классы — *мощностями*. В частности, класс $0 = \{O\}$, составленный из пустого множества O, и $1 = \{\{x\} \mid x \in U\}$, составленный из всех элементарных множеств $\{x\} \in \mathscr{P}$, есть мощности.

Класс множеств, изоморфных X, называется *мощностью* или *кардинальным числом множества* X и обозначается $|X|$. Этот класс зависит от выбранного универсального множества U, частями которого являются множества, составляющие $|X|$. Чтобы подчеркнуть такую зависимость, можно писать $|X|_U$ вместо $|X|$. По определению Дедекинда, множество X, не изоморфное никакой своей части, называют *конечным* и пишут $|X| < \infty$. В противном случае его называют *бесконечным* и пишут $|X| = \infty$. Ясно, что каждая часть конечного множества конечна. Правила действий с кардинальными числами подробно описаны в [53, гл. 5] и [11, гл. 3].

Упражнение. Доказать, что если множество A конечно, а множество B бесконечно, то $|A \cup B| = |B|$.

Критерий равенства мощностей формулирует

Теорема Берштейна. *Множества A и B эквивалентны ессли A вкладывается в B и B вкладывается в A.*

Доказательство можно найти в книге [53, гл. 1, следствие 4.4].

Замечание. В описываемой наивной теории множеств считается, что введение универсального множества позволяет избежать некоторых парадоксов, связанных с множеством всех множеств [53, II.3]. Существование класса всех частей данного множества обеспечивается аксиомой степени [53, II.2]. Поэтому, как правило, в книге термин *класс множеств* означает *класс частей некоторого универсального множества.* Формально все эти понятия не определяются.

1.3.3. Порядки

Отношение, которое рефлексивно и транзитивно, назовем *порядком.* Как правило, рассматриваются порядки, обладающие некоторыми дополнительными свойствами. Но эти свойства в разных случаях разные. Например, симметричный порядок есть эквивалентность. Каждое транзитивное отношение можно превратить в порядок, объединив это отношение с равенством. Не предполагается, что порядок определен для всех элементов. Поэтому его иногда называют *частичным.*

1. Рассмотрим порядок R на множестве E. Вместо $(x,y)\in R$ будем писать $y \succeq x$ и говорить, что элемент y *следует* за элементом x.

Среди порядков выделяются антисимметричные. Обычно именно они и называются *порядками.* А рефлексивные и транзитивные отношения называют *предпорядками.* Условимся для антисимметричных порядков писать $y \geq x$ вместо $y \succeq x$ и говорить, что y *больше* x. По определению антисимметричного отношения из $x \geq y$ и $y \geq x$ следует $y = x$.

Обратное к порядку R для E отношение R^{-1} есть тоже порядок для E. Вместо $(x, y) \in R^{-1}$ будем писать $y \preceq x$ и говорить, что элемент y *предшествует* элементу x. Если порядок R антисимметричен, то обратный порядок R^{-1} тоже антисимметричен. Условимся в этом случае писать $y \leq x$ вместо $y \preceq x$ и говорить, что y *меньше* x.

Отрицание, как всегда, записывается перечеркиванием.

Порядок, который в данном случае считается прямым и обозначается $\succeq$, в другом может считаться обратным и обозначаться $\preceq$. Эти термины и обозначения очень условны.

Когда $y \succeq x$ и $y \not\preceq x$, будем писать $y \succ x$ и говорить, что элемент y *строго следует* за элементом x. Вместо $y \geq x$ и $y \not\leq x$ будем писать $y > x$ и говорить, что элемент y *строго больше* элемента x. Заметим, что благодаря антисимметричности условие $y \not\leq x$ можно записать $y \neq x$. Аналогичный смысл имеют записи $y \prec x$ и $y < x$ и термины *строго предшествует*, *строго меньше.*

Элементы x и y , для которых $y \succeq x$ или $x \succeq y$, называются *сравнимыми.* Порядок, при котором каждые два элемента сравнимы, называется *линейным.* При линейном антисимметричном порядке имеет место *трихотомия*: $y > x$ либо $y = x$, либо $y < x$.

Пример. Множество мощностей подмножеств данного множества линейно упорядочено [53, гл. 1, следствие 5.5].

Элементы x и y , для которых $y \succeq x$ и $x \succeq y$, называются *порядково эквивалентными* или, коротко, просто *эквивалентными.* Легко проверить рефлексивность, транзитивность и симметричность такой эквивалентности. Она обозначается $\equiv$.

Упражнение. Проверить, что $\equiv$ есть эквивалентность.

Множество E и порядок $\succeq$ для него образуют *упорядоченное множество* $(E, \succeq)$. Его часто обозначают просто E.

Примеры. Обычный порядок для цифр можно записать $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. Он линеен и антисимметричен.

Пары цифр можно упорядочить по их первым элементам: для каждых цифр a, b, x, y отношение $ab \leq xy$ означает, что $a \leq x$. Этот порядок не антисимметричен. При нем, в частности, $12 \leq 13$ и $13 \leq 12$, хотя $12 \neq 13$.

Включение $\supseteq$ есть порядок для класса $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех частей множества U. Он антисимметричен, но нелинеен, когда в U существуют различные элементы.

2. Рассмотрим произвольную часть X множества E и порядок $\succeq$ для E.

Про элемент $b \in E$, следующий за каждым $x \in X$, говорят, что он *следует за множеством* X, и пишут $b \succeq X$. Про элемент $a \in E$, предшествующий каждому $x \in X$, говорят, что он *предшествует множеству* X, и пишут $a \preceq X$.

Порядок для множества E, при котором за каждыми элементами x и y следует некоторый элемент z, называется *направлением.* Множество с направлением называется *направленным.* Иногда вместо *направленное множество* говорят *сеть.* (Это связано с изображением элементов в виде узлов сети.)

Подчеркнем, что направление может не быть антисимметричным, а быть только рефлексивным и транзитивным.

3. Если порядок для E антисимметричен, то вместо b *следует за* X говорят, что b *ограничивает* X *сверху* или что b *мажорирует* X, является *мажорантой* X. И вместо a *предшествует* X говорят, что a *ограничивает* X *снизу* или что a является *минорантой* X. Принадлежащую множеству X мажоранту называют его *наибольшим элементом* и обозначают $\max X$. А принадлежащую множеству X миноранту называют его *наименьшим элементом* и обозначают $\min X$. Наименьший элемент называют часто *начальным*, а наибольший — *последним* или *конечным.* Эти элементы не всегда существуют.

Наименьшая мажоранта множества X называется его *верхней гранью* и обозначается $\sup X$. Наибольшая миноранта множества X называется его *нижней гранью* и обозначается $\inf X$. Грани множества X могут не принадлежать ему и могут не существовать. Понятия граней обобщают понятия наибольшего и наименьшего элементов.

Элемент, для которого в E не существует строго большего, называется *максимальным.* А элемент, для которого в E не существует строго меньшего, называется *минимальным.* Эти понятия обобщают понятия наибольшего и наименьшего элементов упорядоченного множества.

Если наибольший и наименьший элементы для упорядоченного множества существуют, то они единственны. А максимальных и минимальных элементов может быть много. Но для множества $\{x, y\}$ из двух сравнимых элементов x, y эти понятия совпадают. Наименьший из них обозначается $\min\{x, y\}$ или $x \wedge y$, а наибольший — $\max\{x, y\}$ или $x \vee y$. Использование всех этих понятий для частичных порядков требует аккуратности.

Примеры. Рассмотрим класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех частей множества U и порядок $\supseteq$ для $\mathscr{P}$. Ясно, что $U = \max \mathscr{P}$ и $O = \min \mathscr{P}$.

Из определений вытекает, что $\sup\{X, Y\} = X \cup Y$, $\inf\{X, Y\} = X \cap Y$ для каждых $X, Y \in \mathscr{P}$ и что $\sup C = \cup C$, $\inf C = \cap C$ для каждого класса $C \subseteq \mathscr{P}$.

В множестве $E = \{00, 01, \dots, 09, 10, 20, \dots, 90\}$ с порядком $00 < 01 < \dots < 09$; $10 < 20 < \dots < 90$ есть два максимальных и два минимальных элемента.

4. Рассмотрим упорядоченные множества E, F. Условимся порядки для них обозначать одинаково $\succeq$. Отображение $f : E \to F$, при котором $f(y) \succeq f(x)$ для всех $y \succeq x$ из E, называется *монотонным.* Говорят еще, что монотонное отображение *сохраняет порядок.* Если $f(y) \preceq f(x)$ для всех $y \succeq x$ из E, то f называется *антимонотонным.* Оно меняет порядок на обратный.

Монотонные отображения множеств с антисимметричными порядками называют еще *возрастающими*, а антимонотонные — *убывающими.* Рассмотрим множества E, F с антисимметричными порядками $\geq$. Отображение $f : E \to F$, при котором $f(y) > f(x)$ для всех $y > x$ из E, называется *строго возрастающим.* Если $f(y) < f(x)$ для всех $y > x$ из E, то отображение f называется *строго убывающим.*

Строго возрастающее взаимно однозначное отображение f упорядоченного множества E в упорядоченное множество F, для которого f^{-1} строго возрастает, называется *вложением* E *в* F. Если $f(E) = F$, то такое вложение называется *изоморфизмом* E *на* F, а сами упорядоченные множества E и F *изоморфными*. Все эти понятия для упорядоченных множеств получаются из аналогичных понятий для множеств добавлением требования о сохранении порядка.

Порядки для E и F, при которых существует изоморфизм упорядоченного множества E на упорядоченное множество F, называются *эквивалентными*.

Примеры. Пусть для множеств $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa\}$ и $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ определены порядки $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon < \zeta < \eta < \theta < \iota < \varkappa$ и $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. Тогда отображение $f\colon E \to F$, при котором $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 1$, $f(\gamma) = 2$, $f(\delta) = 3$, $f(\varepsilon) = 4$, $f(\zeta) = 5$, $f(\eta) = 6$, $f(\theta) = 7$, $f(\iota) = 8$, $f(\varkappa) = 9$, есть сохраняющий порядок изоморфизм E на F. Эти упорядоченные множества изоморфны. Алфавитный порядок для букв из E и обычный порядок для цифр F эквивалентны.

5. Порядки для множеств A, B и порядок для элементов каждой пары (x, y), принадлежащий декартову произведению $A \times B$, позволяют определить порядок для $A \times B$. Обычно это делается одним из двух способов: координатным или лексикографическим.

При *координатном порядке* неравенство $(x, y) \succeq (a, b)$ в $A \times B$ означает, что $x \succeq a$ в A и $y \succeq b$ в B. При *лексикографическом порядке* неравенство $(x, y) \succeq (a, b)$ в $A \times B$ означает, что: (1) $x \succ a$ в A или (2) $x \equiv a$ в A и $y \succeq b$ в B (сначала устанавливается порядок по первой координате, а потом уже по второй, если первые координаты порядково эквивалентны). Легко проверить рефлексивность и транзитивность таких порядков для $A \times B$.

Упражнение. Сделать это.

При координатном порядке $A \times B$ называется *декартовым произведением упорядоченных множеств* A и B, а при лексикографическом порядке — их *лексикографическим произведением*. Ясно, что если неравенство $(x, y) \succeq (a, b)$ верно покоординатно, то оно верно и лексикографически. Но не наоборот.

Пример. Пусть $A = \{1, \ldots, 9\}$, $B = \{0, 1, \ldots, 9\}$ и $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. Тогда $A \times B = \{10, 11, \ldots, 19; \ldots; 90, 91, 99\}$ и лексикографический порядок определяется неравенствами $10 < 11 < \ldots < 19 \ldots 90 < 91 < 99$. При координатном порядке неравенства $10 < 11 < \cdots < 19$ и $< 90 < 91 < 99$ верны, а неравенство $19 < 90$ — нет. Покоординатно пары 19 и 90 не сравнимы.

Определим отношение порядка для мощностей $|X|$, $|Y|$ множеств X, Y следующим образом: $|X| \le |Y|$ означает, что X вкладывается в Y. Ясно, что отношение $\le$ рефлексивно. Из предложения о композиции вложений и теоремы Берштейна следует, что оно транзитивно и антисимметрично.

По определению, мощность декартова произведения $A \times B$ множеств A, B равна произведению их мощностей

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Если хотя бы одно из этих множеств бесконечно, то $|A \times B| = |A| \vee |B|$. В частности, если A бесконечно, а B счетно, то $|A \times B| = |A|$ [11, гл. 3, § 6, п. 3, следствие 4].

Следовательно, класс $\mathscr{D}(A)$ всех счетных частей бесконечного множества A ($|A| = \infty$) имеет ту же мощность, что и A. Это верно и для класса $\mathscr{K}(A) \subseteq \mathscr{D}(A)$ всех конечных частей $\mathscr{K}$:

$$|A| = |\mathscr{K}(A)| = |\mathscr{D}(A)| \quad (|A| = \infty).$$

Если $|X| \ge 1$ и $|Y| \ge 2$, то мощность множества $Y^X = \mathscr{F}(X, Y)$ всех отображений X в Y строго больше мощности X: $|Y^X| > |X|$. В частности, при $Y = \{0, 1\}$ множество индикаторов на X эквивалентно классу $2^X = \mathscr{P}(X)$ частей X и $|2^X| = |\mathscr{P}(X)| > |X|$ по *теореме Кантора* [53, гл. 5, § 3, теорема 2] и [11, гл. 3, § 3, теорема 2].

Легко проверить, что если порядки для A и B антисимметричны, то координатный и лексикографический порядки для $A \times B$ тоже антисимметричны. В этом случае условие $x \equiv a$ в определении лексикографического порядка можно заменить условием $x = a$. Если порядки для A и B линейны, то лексикографический порядок для $A \times B$ тоже линеен. Но координатный может не быть линейным, как в примере.

Нетрудно убедиться в том, что декартово и лексикографическое произведения направленных множеств тоже являются направленными множествами.

6. Порядки для попарно непересекающихся множеств и антисимметричный порядок для составленного из них класса $\mathscr{D}$ позволяют определить порядок для объединения $\cup\mathscr{D}$. При этом порядке неравенство $y \succeq x$ для элементов $x \in X$, $y \in Y$ множеств $X \in \mathscr{D}$, $Y \in \mathscr{D}$ означает, что: (1) $Y > X$ в классе $\mathscr{D}$ или (2) $Y = X$

и $y \succeq x$ в множестве X. Объединение $\cup\mathscr{D}$ с таким порядком называется *порядковой суммой* множеств класса $\mathscr{D}$. Будем обозначать ее также $\sum\mathscr{D}$.

Пример. Рассмотрим класс $\mathscr{D}$, составленный из множеств $X = F = \{0, 1, \ldots, 9\}$, $Y = (F\backslash\{0\})\times F = \{10, 11, \ldots, 99\}$, $Z = Y\times X = \{100, 101, \ldots, 999\}$. Для множеств X, Y, Z порядки определены неравенствами $0 < 1 < \cdots < 9$, $10 < 11 < \cdots < 99$, $100 < 101 < \cdots < 999$, а порядок для класса $\mathscr{D}$ — неравенствами $X < Y < Z$. Объединение $\cup\mathscr{D} = X\cup Y\cup Z$ становится порядковой суммой $\sum\mathscr{D} = X + Y + Z$, если к выписанным неравенствам добавить $9 < 10$ и $99 < 100$.

Легко проверить, что если порядки для множеств антисимметричны, то предлагаемый порядок для объединения тоже антисимметричен. Так же сохраняется порядковая линейность: если каждое множество, сам класс линейно упорядочены, то и объединение линейно упорядочено.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Замечание. Порядок, предложенный при определении порядковой суммы множеств дизъюнктивного класса $\mathscr{D}$, связан с лексикографическим. При нем сначала устанавливается порядок между множествами, которым принадлежат выбранные элементы, и только потом, если эти множества равны, сравниваются сами элементы, т. е. используется лексикографический порядок для специальных пар (X, x) из $\mathscr{D}\times\cup\mathscr{D}$, в которых $X \in \mathscr{D}$ и $x \in X$. Пары (X, y), в которых $X \in \mathscr{D}$ и $y \notin X$, не рассматриваются.

1.4. Индукция

Здесь доказаны несколько теорем для множеств с некоторыми специальными порядками. Эти теоремы часто используются в математических рассуждениях. Все рассматриваемые порядки антисимметричны.

1.4.1. Хорошо упорядоченные множества

Множество E с порядком $\geq$, при котором каждая непустая часть E имеет наименьший элемент, называется *вполне* или *хорошо упорядоченным.* Порядок $\geq$ в этом случае называется *хорошим.* Ясно, что каждый хороший порядок линеен.

Обратный для хорошего порядка $\geq$ порядок $\leq$ может не быть хорошим. В частности, порядок $\leq$ не хороший, когда при порядке $\geq$ в непустом множестве E нет наибольшего элемента.

Пустое множество хорошо упорядочено пустым порядком.

1. Каждые элементы a, b множества E с линейным порядком $\geq$, удовлетворяющие неравенству $a \leq b$, определяют интервалы

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}, \quad [a, b[= \{x \mid a \leq x < b\},$$
$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

в E, имеющем *начало* a и *конец* b. Интервал $[a, b]$ называется еще *отрезком.* Произвольный интервал с началом a и концом b будем обозначать $|a, b|$. Элементы a и b называют еще *левым и правым концами* такого интервала.

Заметим, что при $a = b$ отрезок $[a, a] = \{a\}$ точечный, а все остальные интервалы $]a, a[= [a, a[=]a, a] = O$ пустые. Интервалы $]a, b[$ могут быть пустыми и при $a \neq b$.

Для каждого элемента $a \in E$ определены интервалы

$$]a, \rightarrow[= \{x \mid a < x\}, \quad [a, \rightarrow[= \{x \mid a \leq x\}$$

в E с началом a. Произвольный интервал с началом a будем обозначать $|a, \rightarrow|$. Заметим, что такой интервал может быть отрезком $[a, b]$, если множество E имеет наибольший элемент $b = \max E$. Рассматриваются еще интервалы

$$]\leftarrow, b[= \{x \mid x < b\}, \quad]\leftarrow, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

в E с концом b.

2. Рассмотрим непустое хорошо упорядоченное множество E, его первый элемент $a = \min E$ и произвольную часть X.

Теорема. *Пусть для каждого $x \in E$ из $[a, x[\subseteq X$ следует $x \in X$. Тогда $X = E$.*

$\square$ Возьмем дополнение $X' = E \setminus X$. Если $X \neq E$, то $X' \neq O$, и так как E хорошо упорядочено, есть $b = \min X' \in X'$. Вместе с тем $[a, b[\subseteq X$ и по условию $b \in X$. Предположение $X \neq E$ приводит к противоречию. $\blacksquare$

Доказанная теорема выражает *принцип индукции для хорошо упорядоченных множеств.*

Замечание. Так как $[a, a[= O \subseteq X$, то в условии принципа индукции содержится требование $a \in X$.

1.4.2. Дискретные множества

По общему определению, *дискретным* называется линейно упорядоченное множество E, в котором для каждого элемента $x \neq a = \min E$, $x \neq b = \max E$ существуют непосредственно предшествующий $x_- = \max\,]\leftarrow, x[$ и непосредственно следующий $x_+ = \min\,]x, \rightarrow[$ элементы. Кроме того, если $a \neq b$, то существуют a_+ и b_-. Пустое и одноэлементное множества считаются дискретными. Если в E нет наименьшего и наибольшего элементов, то сказанное верно для всех $x \in E$.

Здесь определение дискретности будет сформулировано для хорошо упорядоченных множеств, чтобы не усложнять терминологию. Там, где встретятся линейно упорядоченные дискретные множества и понадобится общее определение, это будет оговариваться.

1. В хорошо упорядоченном множестве E для каждого элемента x (кроме наибольшего b) существует *непосредственно следующий* за x элемент $x_+ = \min\,]x, \rightarrow[$.

Хорошо упорядоченное множество E, для каждого элемента x которого (кроме наименьшего a) существует *непосредственно предшествующий* элемент $x_- = \max\,]\leftarrow, x[$, называется *дискретным.* По определению, в дискретном множестве E для каждого элемента $x \neq a = \min E$, $x \neq b = \max E$ существуют непосредственно предшествующий x_- и непосредственно следующий x_+ элементы. Кроме того, если $a \neq b$, то существуют a_+ и b_-. Порядок, при котором множество дискретно, называется *дискретным.*

Упражнение. Доказать теорему Данжуа о том, что все линейные порядки для данного множества эквивалентны и дискретны ессли это множество конечно [80, Введение, п. 2.11.1].

Дискретное множество, у которого есть последний элемент (конец), называется *конечным дискретным множеством.* Пустое множество с пустым порядком считается дискретным. Непустые дискретные множества, у которых нет последнего элемента, называют *бесконечными дискретными множествами.*

Элементы x_+, x_- называют коротко *следующими за* x и *предшествующими* x, когда не рассматриваются другие элементы.

Лемма. *Лексикографическое произведение $A \times B$ конечных дискретных множеств A, B есть конечное множество.*

$\square$ Возьмем множество $Z \subseteq A \times B$, $Z \neq O$, составленное из пар $z = xy$, и множество $X = \{x \mid xy \in Z$ при некотором $y \in B\}$ $\subseteq A$. Существуют $a = \min X$, $c = \max X$. Рассмотрим множества $Y(a) = \{y \mid ay \in Z\}$, $Y(c) = \{y \mid cy \in Z\}$ и элементы $b = \min Y(a)$, $d = \max Y(c)$. При лексикографическом порядке $ab = \min Z$, $cd = \max Z$. Следовательно, при нем $A \times B$ есть конечное дискретное множество. $\blacksquare$

Пример. Множество $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ с обычным порядком $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$ дискретное. По определению, $0 = \min E$, $9 = \max E$ и $0_+ = 1$, $9_- = 8$. Для всех остальных цифр непосредственно предшествующие и следующие выписаны рядом в строке: $1_- = 0$, $1_+ = 2$, $2_- = 1$, $2_+ = 3, \ldots$.

2. Рассмотрим: непустое дискретное множество E с порядком $\geq$, наименьший элемент $a = \min E$, произвольную часть X множества E.

Теорема. *Пусть* (1) $a = \min E \in X$ *и* (2) *для каждого* $x \in E$ $x \neq b = \max E$ *из* $x \in X$ *следует* $x_+ \in X$. *Тогда* $X = E$.

$\square$ Эта теорема вытекает из доказанной теоремы п. 1.4.1,2. В самом деле, по условию (1) выполнено необходимое условие $a \in X$ при $x = a$ этой теоремы. А для каждого $x > a$ из $[a, x[= [a, x_-] \subseteq X$ следует $x_- \in X$ и, по условию (2), $x = (x_-)_+ \in X$. $\blacksquare$

Теорема выражает *принцип индукции для дискретных множеств*.

Если множество E бесконечно, то оговорка $x \neq b = \max E$ в теореме не нужна.

3. На бесконечном дискретном множестве E определен *оператор сдвига* T, ставивший в соответствие каждому $x \in X$ непосредственно следующий за ним элемент x_+. Образом оператора T является множество $T(E) = E \setminus \{a\}$ $(a = \min E)$.

На множестве $E \setminus \{a\}$ определен оператор S, который каждому не равному a элементу $y \in E$ ставит в соответствие непосредственно предшествующий ему элемент y_-. Образом оператора S является множество $S(E \setminus \{a\}) = E$.

Из определений следует, что $S(T(x)) = (x_+)_- = x$ $(x \in E)$, $T(S(y)) = (y_-)_+ = y$ $(y \in E,\ y \neq a)$, т. е. оператор S является обратным для оператора T. В связи с этим оператор S называют *оператором обратного сдвига*.

1.4.3. Теорема Цорна

Эта теорема часто применяется при индуктивных рассуждениях. Она утверждает, что при определенных условиях в упорядоченном множестве каждый элемент мажорируется некоторым максимальным элементом.

1. Рассмотрим множество E и порядок $\geq$ для него. Этот порядок определяет порядок для каждой части D множества E. Такой индуцированный порядок для D может быть линейным. Тогда D называется *линией* в E. Линия, не содержащаяся ни в какой другой, называется *максимальной*. Она является максимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех линий в E.

Следующее утверждение эквивалентно аксиоме выбора.

Принцип Хаусдорфа. *Каждая линия в упорядоченном множестве содержится в некоторой максимальной линии.*

Принцип не указывает, как нужно продолжать линию до максимальной.

2. Упорядоченное множество, в котором каждая линия ограничена сверху, условимся называть *линейно мажорированным.* Из принципа Хаусдорфа следует

Теорема Цорна. *В линейно мажорированном множестве каждый элемент меньше некоторого максимального.*

□ Рассмотрим множество E и порядок $\geq$. Пусть $a \in E$. Тогда $L = \{a\}$ — линия в E. По принципу Хаусдорфа в E есть максимальная линия $M \supseteq L$. Если множество E линейно мажорировано, то существует элемент $b \in E$, ограничивающий M сверху. В частности, $a \leq b$.

Элемент b максимальный. В самом деле, если $b < c$ для некоторого $c \in E$, то $x \leq b < c$ для всех $x \in M$ и $N = M \cup \{c\}$ — линия в E. Это противоречит максимальности линии M. ■

Замечание. Аксиома выбора, принцип Хаусдорфа и теорема Цорна эквивалентны. Краткое доказательство этой эквивалентности дано в [39].

1.5. Натуральные числа

Эти числа позволяют описывать порядок элементов в хорошо упорядоченных множествах и количество этих элементов. Роль натуральных чисел в математике выражает знаменитое высказывание Л. Кронекера: «*Натуральные числа создал Бог. Все остальные — дело рук человеческих*». Формально натуральные числа определяются системой аксиом [53, гл. 3]. Здесь дано их краткое описание на языке наивной теории множеств. Подробнее см. [80, Введение, гл. 2].

1.5.1. Десятичные натуральные числа

Представление натуральных чисел с помощью десяти цифр из множества $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ наиболее употребительно. Поэтому целесообразно использовать его и для описания этих чисел.

Рассмотрим еще множество $F_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ненулевых цифр. Опишем множество $\mathbb{N}$ десятичных натуральных чисел индуктивно как дискретное бесконечное множество.

Сперва определим бесконечный дискретный класс множеств, составленный с помощью F_0 и F. Начальным элементом этого класса служит множество $a = F_0$. Каждый следующий элемент x_+ является декартовым произведением данного элемента x на множество F: $x_+ = x \times F$ $(x \in \mathbb{N})$. В частности,

$$a_+ = F_0 \times F = \{10, 11, \ldots, 19;\ 20, 21, \ldots, 29; \ldots 90, 91, \ldots, 99\},$$
$$(a_+)_+ = F_0 \times F \times F, \quad ((a_+)_+)_+ = F_0 \times F \times F \times F.$$

Будем предполагать, что начальный элемент a и правило перехода $x \to x_+$ определяют хорошо упорядоченный класс

$$\mathscr{N} = \{F_0, F_0 \times F, F_0 \times F \times F, \ldots\}.$$

Ясно, что этот класс дизъюнктивный. Для каждого из множеств класса $\mathscr{N}$ можно определить лексикографический порядок. Порядковая сумма

$$\mathbb{N} = \sum \mathscr{N}$$

и есть *упорядоченное множество десятичных натуральных чисел.*

1.5.2. Теорема об изоморфизме

Кроме десятичной, существуют много других записей натуральных чисел. Основанием для этого служит

Теорема. *Для каждых бесконечных дискретных множеств A и B существует единственный монотонный изоморфизм A на B.*

$\square$ 1) *Существование.* Обозначим $a = \min A$, $b = \min B$ и рассмотрим соответствие $\varphi\colon A \to B$, при котором $\varphi(a) = b$ и $\varphi(x_+) = \varphi(x)_+$ $(x \in A)$. Возьмем множество X, составленное из всех тех $x \in A$, для которых φ определено и строго монотонно на отрезке $[a, x]$. Пусть $\varphi(x) = Y$. Из определения φ вытекает, что $a \in X$, $b \in Y$. Кроме того, для каждых $x \in A$, $y \in B$ из $x \in X$, $y \in Y$ вытекает, что $(x_+) \in X$, $(y_+) \in Y$. По принципу индукции из сказанного следует, что $X = A$, $Y = B$ и φ есть нужный изоморфизм.

2) *Единственность.* Рассмотрим произвольный монотонный изоморфизм ψ, отображающий A на B. Из определений вытекает, что $\psi(a) = b = \varphi(a)$ и для каждого $x \in A$ равенство $\psi(x) = \varphi(x)$ влечет $\psi(x_+) = \psi(x)_+ = \varphi(x)_+ = \varphi(x_+)$. По принципу индукции отсюда следует, что $\psi = \varphi$. $\blacksquare$

Из теоремы вытекает

Следствие. *Каждое бесконечное дискретное множество изоморфно упорядоченному множеству десятичных натуральных чисел.*

Поэтому в качестве упорядоченного множества натуральных чисел можно выбрать любое бесконечное дискретное множество. В частности, можно взять множество двоичных натуральных чисел, определяемое по аналогии с помощью множеств $B_0 = \{1\}$ и $B = \{0, 1\}$.

Как правило, говоря о натуральных числах, не отмечают способ их записи и называют $\mathbb{N}$ *упорядоченным множеством натуральных чисел* или *натуральным рядом.* Элементы $\mathbb{N}$ называют также *номерами*, когда с их помощью упорядочивают элементы какого-либо множества.

1.5.3. Счетные множества

По мощности множества делятся на конечные и бесконечные, счетные и несчетные.

Каждое конечное множество изоморфно некоторому отрезку натурального ряда. Если конечное множество K изоморфно отрезку $[1, n] \subseteq \mathbb{N}$, то говорят, что *$K$ состоит из n элементов*, и пишут $|K| = n$.

Счетным называется каждое множество, изоморфное множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Мощность произвольного счетного множества D, равная мощности $\mathbb{N}$, обозначается символом ω: $|D| = |\mathbb{N}| = \omega$. Будем вместо ω использовать также символ ∞.

Несчетным называется каждое множество, не изоморфное никакой части множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Примером служит множество $F(\mathbb{N})$ всех преобразований $\mathbb{N}$ [53, V.5].

Замечание. Конечные и счетные множества обладают общим свойством: они изоморфны частям множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Элементы каждого конечного или счетного множества можно занумеровать. В связи с этим удобно включать класс конечных множеств в класс счетных и делить счетные множества на конечные и бесконечные.

Упражнения. Доказать следующие утверждения. 1) Образ счетного множества при всяком отображении есть счетное множество. 2) Образ конечного множества при всяком отображении есть конечное множество. 3) Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ изоморфно $\mathbb{N}$. 4) Объединение счетного семейства счетных множеств есть счетное множество.

2. АЛГЕБРА

Абстрактный алгебраический язык позволяет сжато и точно формулировать многие важные утверждения теории операторов. Глава посвящена его описанию.

2.1. Общая алгебра

В параграфе описываются некоторые основные алгебраические системы.

2.1.1. Полугруппы

Так называются самые простые из широко используемых в математике алгебраических систем — в них только одна операция, которая предполагается ассоциативной. Алгебраическая теория полугрупп подробно изложена в книге [44].

1. *Полугруппой* называется пара (H, h), составленная из множества H и отображения $h\colon H \times H \to H$ (*операции*). Чаще всего операция h называется *сложением* или *умножением* и обозначается соответственно $+$ или $\cdot$. Результат сложения называется *суммой*, результат умножения — *произведением*. Для них используются стандартные обозначения: $h(x, y) = x+y$ или $h(x, y) = x\cdot y$. Вместо $x \cdot y$ часто пишут просто xy. Полугруппа с операцией сложения называется *аддитивной*, полугруппа с операцией умножения — *мультипликативной*.

Будем вместо (H, h) использовать также краткое обозначение H.

Предполагается, что операция в полугруппе *ассоциативна*:

$$h(h(x, y), z) = h(x, h(y, z)) \quad (x, y, z \in H).$$

Для аддитивной и мультипликативной полугрупп ассоциативность выражается равенствами

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad (xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in H).$$

Она позволяет в суммах и произведениях группировать члены произвольным образом. Естественно в соответствии со свойствами операции h разделить пары (H, h) на *ассоциативные* и *неассоциативные* полугруппы. Первые кратко называются *полугруппами*, а вторые — *группоидами*.

Примеры. 1) Аддитивная и мультипликативная полугруппы $(\mathbb{N}, +)$ и $(\mathbb{N}, \cdot)$ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Аналогичные полугруппы для множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел.

2) Полугруппа $(\mathscr{F}, \circ)$, составленная из множества $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E)$ всех преобразований данного множества E и композиции $\circ$ таких преобразований. Для этой полугруппы часто используется мультипликативная запись, и композиция $\beta \circ \alpha$ преобразований β, α обозначается $\beta\alpha$.

3) Полугруппы $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$, составленные из множества $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ всех частей данного множества E, объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ таких частей соответственно.

2. Полугруппа (H, h) называется *коммутативной* или *абелевой*, если ее операция h симметрична:

$$h(x, y) = h(y, x) \quad (x, y \in H).$$

Для аддитивной и мультипликативной полугрупп коммутативность выражается равенствами

$$x + y = y + x, \quad xy = yx \quad (x, y \in H).$$

По индукции определяются сумма $\sum x_i$ и произведение $\prod x_i$ конечного семейства элементов x_i $(1 \le i \le n)$.

Полугруппы в примерах 1 и 3 абелевы, а полугруппа преобразований в примере 2 не абелева.

Элемент $e \in H$ называется *нейтральным* для полугруппы (H, h), если

$$h(e, x) = h(x, e) = x \quad (x \in H).$$

Ясно, что он единственный. В аддитивном случае нейтральный элемент называется *нулем* и обозначается 0, а в мультипликативном — *единицей* и обозначается 1:

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad (x \in H).$$

В мультипликативной полугруппе $(H, \cdot)$ нуль определяется равенством
$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad (x \in H).$$

Пусть в полугруппе (H, h) есть нейтральный элемент e. Тогда для некоторых элементов $x \in H$ существуют *обратные элементы* $x^{-1} \in H$, определяемые равенствами

$$h(x, x^{-1}) = h(x^{-1}, x) = e.$$

Если обратный элемент x^{-1} существует, то он единственный. В частности, $e^{-1} = e$. В мультипликативной записи определяющее обратный элемент равенство имеет вид $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. В аддитивной записи вместо x^{-1} пишут $-x$ и определяющее обратный элемент равенство имеет вид $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Примеры. 1) $(\mathbb{N}, +)$ не имеет нейтрального элемента.

2) Нейтральным элементом полугруппы $(\mathscr{F}, \circ)$ служит тождественное преобразование id, определяемое равенством $\mathrm{id}(x) = x$ $(x \in E)$. Обратным элементом для автоморфизма $f \in \mathscr{F}$ является обратный автоморфизм f^{-1}, определяемый равенствами $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ $(x \in E)$.

3) В $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ нейтральными элементами являются соответственно пустое множество O и все множество E. Обратные в этих полугруппах существуют только для нейтральных элементов.

3. Пусть (G, g) и (H, h) — полугруппы. Если $G \subseteq H$ и $g \subseteq h$ (g есть сужение h), то говорят, что (G, g) является *подполугруппой* (H, h), и пишут $(G, g) \subseteq (H, h)$. Таким образом, по определению,
$$(G, g) \subseteq (H, h) \Longleftrightarrow G \subseteq H, g \subseteq h.$$

Множество $(G, g) \subseteq G \times G \times G \times G = G^4$ является частью множества $(H, h) \subseteq H \times H \times H \times H = H^4$.

Если $h(H \times G) \subseteq G$ или $h(G \times H) \subseteq G$, то полугруппа (G, g) называется *левым* или *правым идеалом* полугруппы (H, h) соответственно расположению H. Левый идеал, являющийся одновременно и правым, называется *двусторонним* или просто *идеалом*. В коммутативной полугруппе левые и правые идеалы не различаются.

В аддитивной и мультипликативной полугруппах определяющее правый идеал включение можно заменить соотношениями

$$x + y \in G, \quad xy \in G \quad (x \in G,\ y \in H).$$

Примеры. 1) Пусть $(2\mathbb{N}, \cdot)$ и $(\mathbb{N}, \cdot)$ — мультипликативные полугруппы четных и всех натуральных чисел. Ясно, что $(2\mathbb{N}, \cdot)$ является идеалом в $(\mathbb{N}, \cdot)$. Но аддитивная полугруппа $(2\mathbb{N}, +)$ не является идеалом в $(\mathbb{N}, +)$.

2) Выберем элемент $c \in E$ и преобразование $\gamma \in \mathscr{F} = \mathscr{F}(E)$ с образом $\gamma(E) = c$. Ясно, что $\gamma \circ \alpha = \gamma$ для любого $\alpha \in \mathscr{F}$ и $(\gamma, \circ)$ есть правый идеал в $(\mathscr{F}, \circ)$. В то же время, если в E есть элемент $b \neq c$, то $\beta \circ \gamma = \beta \neq \gamma$ для $\beta \in \mathscr{F}$ с образом $\beta(E) = b$, и $(\gamma, \circ)$ не является левым идеалом в $(\mathscr{F}, \circ)$.

3) Выберем множество $C \subseteq E$ и класс $\mathscr{P}(C)$ всех частей C. Ясно, что $C \cap X \subseteq C$ для любого $X \subseteq E$ и $(\mathscr{P}(C), \cap)$ есть идеал в $(\mathscr{P}(E), \cap)$. В то же время $(\mathscr{P}(C), \cup)$ не является идеалом в $(\mathscr{P}(E), \cup)$.

4. Среди идеалов в полугруппе (H, h) выделяются *собственные* идеалы (G, g), для которых $O \subset G \subset H$ (т. е. $G \neq O$ и $G \neq H$). А среди них выделяются *максимальные*, не содержащиеся ни в каких других собственных идеалах полугруппы (H, h).

Предложение. *Каждый собственный идеал полугруппы с нейтральным элементом содержится в некотором максимальном.*

□ Рассмотрим упорядоченное по включению множество $(\mathscr{E}, \subseteq)$ всех собственных идеалов полугруппы (H, h), содержащих данный идеал (G, g). Каждая линия $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}$ имеет мажоранту $M = \cup\mathscr{L}$, равную объединению всех идеалов $L \in \mathscr{L}$. В самом деле, $L \subseteq M$, и если $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, то, так как $L_1 \subseteq L_2$ или $L_1 \supseteq L_2$, верно $h(a_1, a_2) \in L_1$ или $h(a_1, a_2) \in L_2$ и $h(a_1, a_2) \in M$. Так как нейтральный элемент не принадлежит ни одному собственному идеалу $L \in \mathscr{L}$, то он не принадлежит и их объединению M. Значит, $M \in \mathscr{E}$. По теореме Цорна в множестве $\mathscr{E}$ есть наибольший элемент. Он и является нужным максимальным идеалом. ■

Замечание. Данное доказательство типично. Так доказываются многие аналогичные предложения.

Пример. Пусть $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, а сложение и умножение определяются таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

В полугруппе $(\mathbb{B}, +)$ нет собственных идеалов. В полугруппе $(\mathbb{B}, \cdot)$ единственным собственным идеалом является $(\{0\}, \cdot)$. Он поэтому и максимальный.

5. Элементы x полугруппы (H, h), для которых верно равенство $h(x, x) = x$, называются *идемпотентами*. Название связано с мультипликативной записью $x^2 = x \cdot x = x$. Ясно, что нейтральный элемент e является идемпотентом. В полугруппах $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ все элементы являются идемпотентами:

$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X \quad (X \in \mathscr{P}).$$

Для множества $I = I(H)$ идемпотентов полугруппы (H, h) существует *естественный порядок*:

$$x \leq y \Leftrightarrow h(x, y) = h(y, x) = x \quad (x, y \in J).$$

Так определенное отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Упражнение. Доказать это утверждение.

Для полугрупп $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ естественными порядками являются $\supseteq$ и $\subseteq$:

$$X \cup Y = X \Leftrightarrow X \supseteq Y, \quad X \cap Y = X \leftrightarrow X \subseteq Y.$$

6. Сохраняющее операцию отображение $\varphi \colon G \to H$ называется *гомоморфизмом* полугруппы (G, g) в полугруппу (H, h):

$$\varphi(g(x, y)) = h(\varphi(x), \varphi(y)) \quad (x, y \in G).$$

Будем использовать для таких гомоморфизмов запись $\varphi \colon (G, g) \to (H, h)$. Если гомоморфизм φ накрывающий ($\varphi(G) = H$), то говорят, что (H, h) *гомоморфна* (G, g).

Аддитивный гомоморфизм $\alpha \colon (G, +) \to (H, +)$ определяется равенством

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) \quad (x, y \in G).$$

Мультипликативный гомоморфизм $\beta \colon (G, \cdot) \to (H, \cdot)$ определяется равенством

$$\beta(xy) = \beta(x)\beta(y) \quad (x, y \in G).$$

Встречаются также гомоморфизмы $\varphi \colon (G, +) \to (H, \cdot)$ и $\psi \colon (G, \cdot) \to (H, +)$, которые определяются равенствами

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \psi(xy) = \psi(x) + \psi(y) \quad (x, y \in G).$$

На гомоморфизмы переносятся определения для произвольных отображений: взаимно однозначные гомоморфизмы называются *вложениями*, накрывающие вложения называются *наложениями* или *изоморфизмами*, изоморфизмы полугруппы на себя — *автоморфизмами.* Запись $(G, g) \simeq (H, h)$ или $G \simeq H$ означает, что эти полугруппы изоморфны: существуют изоморфизм $\varphi\colon G \to H$ и обратный изоморфизм $\varphi^{-1}\colon H \to G$.

Упражнение. Доказать, что отображение, обратное изоморфизму полугруппы на полугруппу, является изоморфизмом.

Примеры. 1) Отображение $\varphi(n) = 2n$ является изоморфизмом $(\mathbb{N}, +)$ на $(2\mathbb{N}, +)$.

2) Отображение $\varphi(X) = X'$ является изоморфизмом $(\mathscr{P}, \cup)$ на $(\mathscr{P}, \cap)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ на $(\mathscr{P}, \cup)$. Это следует из правила двойственности

$$(X \cup Y)' = X' \cap Y', \quad (X \cap Y)' = X' \cup Y' \quad (X, Y \in \mathscr{P}).$$

Изоморфизм φ равен обратному изоморфизму φ^{-1} благодаря инволютивности операции дополнения для множеств.

7. Каждая полугруппа (H, h) изоморфна некоторой подполугруппе $(\mathscr{T}(H), \cdot)$ полугруппы $(\mathscr{F}(H), \cdot)$ преобразований множества H [44, § 1.3].

Элементами множества $\mathscr{T}(H)$ служат *операторы левого сдвига*, определяемые для каждого $x \in H$ равенством $\tau_x(z) = h(x, z)$ $(z \in H)$. Так как благодаря ассоциативности h

$$\tau_x(\tau_y(z)) = h(x, h(y, z)) = h(h(x, y), z) = \tau_{h(x,y)}(z) \quad (x, y, z \in H),$$

то $(\mathscr{T}(H), \cdot)$ есть полугруппа. Ясно, что $\mathscr{T}(H) \subseteq \mathscr{F}(H)$. Выписанные для операторов τ_x, τ_y, $\tau_{h(x,y)}$ равенства означают, что $\tau_{h(x,y)} = \tau_x \cdot \tau_y$ $(x, y \in H)$. Следовательно, отображение $\tau\colon H \to \mathscr{T}(H)$ есть гомоморфизм (H, h) *на* $(\mathscr{T}(H), \cdot)$ или *в* $(\mathscr{F}(H), \cdot)$.

Упражнение. Найти условия, при которых этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Пример. Для $(\mathbb{N}, +)$ и $(\mathbb{N}, \cdot)$ операторные представления изоморфны этим полугруппам. Так что натуральные числа можно считать операторами.

Вместо операторов левого сдвига можно рассматривать операторы *правого сдвига.* В коммутативном случае они равны и называются просто *операторами сдвига.*

8. С каждым множеством E естественно связывается полугруппа, составленная из множества $\mathscr{R} = \mathscr{R}(E)$ всех отношений для E и композиции $\circ$ для этих отношений. Будем использовать мультипликативную запись и вместо $T \circ S$ писать TS (или ST), вместо $R(x)$ писать Rx (или xR) для $R, S, T \in \mathscr{R}$. Правая или левая записи выбираются по соглашению. Чаще используются TS и Rx.

Заметим, что $\mathscr{R} = \mathscr{P}(E \times E)$: каждое отношение R есть часть множества $E \times E$. Отношение R можно рассматривать как отображение $E \to \mathscr{P}(E)$, при котором $R(x) = \{y \mid (x, y) \in \mathscr{R}\}$ для $x \in E$, и считать, что $\mathscr{R} = \mathscr{F}(E, \mathscr{P}(E))$.

Проверим ассоциативность произведения отношений. Возьмем произвольные отношения $R, S, T \in \mathscr{R}$ и элемент $x \in E$. Из определения композиции соответствий следует, что

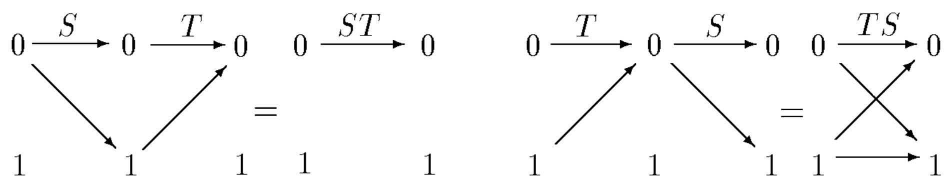
$$((TS)R)(x) = (TS)(R(x)) = T(S(R(x))) = T((SR)(x)),$$

и, значит, $(TS)R = T(SR)$. Таким образом, $(\mathscr{R}, \circ) = (\mathscr{R}, \cdot)$ есть полугруппа.

Полугруппа $(\mathscr{F}, \circ) = (\mathscr{F}, \cdot)$ преобразований множества E вкладывается в полугруппу $(\mathscr{R}, \cdot)$ и является ее подполугруппой. Тождественное преобразование I служит единицей $(\mathscr{R}, \cdot)$. Пустое отношение O является нулем $(\mathscr{R}, \cdot)$.

Полугруппа $(\mathscr{R}, \cdot)$ некоммутативна: в общем случае $ST \neq TS$.

Пример. Пусть $E = \mathbb{B} = \{0,1\}$, $\mathscr{R}(E) = \mathscr{R}(\mathbb{B}) = \mathscr{P}(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) = \mathscr{P}\{00, 01, 10, 11\}$ (всего $2^4 = 16$ отношений), $S = \{00, 01\}$, $T = \{00, 10\}$. Тогда $ST = \{00\} \neq \{00, 01, 10, 11\} = TS$. Такие композиции можно пояснить диаграммами.



Этот пример поясняет также двойственность функциональной и операторной записей $(ST)(x) = S(T(x))$ и $x(ST) = (xS)T$.

Заметим еще, что в примере S и T как соответствия обратны друг другу: $(0,0) \leftrightarrow (0,0)$, $(0,1) \leftrightarrow (1,0)$. Но они не являются обратными элементами друг для друга в полугруппе $(\mathscr{R}(E), \cdot)$. Обращение соответствий может не совпадать с их алгебраическим обращением.

Соответствия и, в частности, отношения иногда называют *многозначными функциями* или *многозначными абстрактными операторами*. Их значениями являются множества.

10. Предложение. *Композиция гомоморфизмов полугрупп есть гомоморфизм.*

□ Рассмотрим полугруппы F, G, H, гомоморфизмы $\alpha\colon F \to G$, $\beta\colon G \to H$ и их композицию $\gamma = \beta\alpha\colon F \to H$. Докажем, что γ является гомоморфизмом. Используем аддитивную запись:

$$\begin{aligned}\gamma(x+y) &= \beta(\alpha(x+y)) \\ &= \beta(\alpha(x)+\alpha(y)) = \beta(\alpha(x))+\beta(\alpha(y)) = \gamma(x)+\gamma(y)\end{aligned}$$

для всех $x, y \in F$. Значит, γ есть гомоморфизм. ■

Композиция изоморфизмов множеств есть изоморфизм множеств (1.2.3, 4). Поэтому из доказанного предложения вытекает

Следствие. *Композиция изоморфизмов полугрупп есть изоморфизм.*

Упражнения. Доказать для произвольных отношений $R, S, T \in \mathscr{R}(E)$ утверждения:

1) $R \subseteq S \Rightarrow RT \subseteq ST$, $TR \subseteq TS$.

2) $RS \subseteq SR \Rightarrow RS = SR$ для симметричных R, S.

3) Если S^{-1} — обратный S автоморфизм множества E, то S^{-1} — обратный S элемент полугруппы $(\mathscr{R}(E), \cdot)$.

2.1.2. Группы

Полугруппа, в которой есть нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный, называется *группой*. Группам посвящены главы 2 и 7 книги [17]. Различные определения группы обсуждаются в [44, § 1.1].

1. Все общие определения и предложения, сформулированные для полугрупп, переносятся на группы.

Подполугруппа группы, сама являющаяся группой, называется *подгруппой* рассматриваемой группы. Так как подгруппе вместе с каждым элементом принадлежит обратный ему, то ей принадлежит и нейтральный элемент группы, равный результату операции с ними.

Примеры. 1) Полугруппы $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ не являются группами: $X \cup Y = O$ только при $X = Y = O$ и $X \cap Y = U$ только при $X = Y = U$ $(\mathscr{P} = \mathscr{P}(U), U \neq O)$.

2) Полугруппа $(\mathscr{R}, \cdot)$, составленная из всех преобразований универсального множества U и их композиций, не является группой. А полугруппа $(\mathscr{A}, \cdot)$, составленная из автоморфизмов U, является группой, так как обратным для $R \in \mathscr{A}$ элементом служит обратный автоморфизм $R^{-1} \in \mathscr{A}$.

3) Аддитивная полугруппа $(\mathbb{B}, +)$ с $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ есть группа: $0 + 0 = 0$, $1+1 = 0$. Назовем $(\mathbb{B}, +)$ *бинарной группой.* Мультипликативная полугруппа $(\mathbb{B}, \cdot)$ не является группой. А полугруппа $(\mathbb{B} \setminus \{0\}, \cdot) = (\{1\}, \cdot)$ — является.

2. Классическим примером абелевой группы служит аддитивная группа $(\mathbb{Z}, +)$ целых чисел. Она получается из полугруппы $(\mathbb{N}, +)$ с помощью стандартных приемов — добавлением нуля и обратных элементов.

Каждому натуральному числу n ставится в соответствие *целое отрицательное* число $-n$. Множество всех таких чисел обозначается $-\mathbb{N}$. Множеством *целых чисел* называется объединение $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Сложение для $\mathbb{Z}$ определяется по известным правилам. Вместе они составляют абелеву группу $(\mathbb{Z}, +)$.

Порядок для $-\mathbb{N}$ определяется порядком для $\mathbb{N}$: отношение $-m \leq -n$ эквивалентно $m \geq n$. Кроме того, $-m < 0 < n$ для любых $-m \in -\mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Порядок для $\mathbb{Z}$ согласован со сложением: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ $(x, y, z \in \mathbb{Z})$. Вместе они образуют *упорядоченную группу* $(\mathbb{Z}, +, \leq)$.

Четные натуральные числа $2n$ определяют отрицательные числа $-2n$. Их объединение $2\mathbb{Z} = (-2\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup (2\mathbb{N})$ с индуцированным сложением составляют подгруппу $(2\mathbb{Z}, +)$ *четных* целых чисел.

Кроме сложения для $\mathbb{Z}$ по известным правилам определяется умножение. Вместе они составляют мультипликативную полугруппу $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Она тоже коммутативна, как и $(\mathbb{Z}, +)$, но не является группой.

Упражнение. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно.

3. В дальнейшем для большей ясности вместо общей будут, как правило, использоваться аддитивная или мультипликативная записи операций.

Легко проверить единственность нейтрального элемента e группы $(G, \cdot)$: если $ax = xa = x$ для каждого $x \in G$, то $a = ae = e$. Для каждого элемента $x \in G$ обратный элемент x^{-1} тоже единственный: если $yx = xy = e$ для некоторого $y \in G$, то $y = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = x^{-1}$. В группе $(G, \cdot)$ уравнения $ax = b$

и $ya = b$ для каждых элементов a, b имеют единственные решения $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$. Можно сказать, что эти уравнения *корректно разрешимы*. Разрешимость уравнений $ax = b$ и $ya = b$ выделяет мультипликативные группы из полугрупп.

Существование и однозначная определенность обратных элементов в группе позволяет определить *обратную операцию*. Для сложения — *вычитание*, для умножения — *деление*. Результаты соответственно называются *разностями* и *частными*: $x + (-y) = x - y$, $x \cdot y^{-1} = x/y$.

Благодаря существованию обратных элементов единственным идемпотентом группы является нейтральный элемент.

Для аддитивной и мультипликативной групп определяются также автоморфизмы $\alpha\colon x \to -x$ и $\beta\colon x \to x^{-1}$ $(x \in G)$. В группе $(\mathbb{Z}, +)$ при таком автоморфизме положительные числа переходят в отрицательные и наоборот. Автоморфизмы α и β являются *инволюциями*: $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = \mathrm{id}$, $\beta^2 = \beta \circ \beta = \mathrm{id}$.

С помощью целых чисел определяются *целые кратные* и *целые степени* элементов. Это делается индуктивно:

$$0 \cdot x = 0, \quad 1 \cdot x = x, \quad (n+1) \cdot x = n \cdot x + x, \quad (-n) \cdot x = -(n \cdot x);$$
$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x, \quad x^{-n} = (x^n)^{-1}$$

для всех элементов группы x и натуральных чисел n. Здесь элементы группы $(\mathbb{Z}, +)$ являются *операторами*, действующими на группах $(G, +)$ и $(G, \cdot)$. По индукции выводятся и правила действия с кратными и степенями: $(m+n)x = mx + nx$, $x^{m+n} = x^m x^n$ для всех элементов группы x и целых чисел m, n.

4. Среди подгрупп $(F, +)$, $(F, \cdot)$ групп $(G, +)$, $(G, \cdot)$ выделяются *нормальные подгруппы* или *нормальные делители* $(F, +)$, $(F, \cdot)$ групп $(G, +)$, $(G, \cdot)$, определяемые равенствами

$$x + F = F + x, \quad x \cdot F = F \cdot x \quad (x \in G).$$

В абелевой группе все подгруппы нормальные.

Пример. Элемент $xyx^{-1}y^{-1}$ называется *коммутатором* элементов x, y мультипликативной группы $(G, \cdot)$. Подгруппа $(K, \cdot)$, порожденная множеством всех коммутаторов, называется *коммутантом* группы $(G, \cdot)$. Эта подгруппа нормальна.

Замечание. Каждая подгруппа содержит нейтральный элемент группы. Поэтому в группе нет собственных идеалов: равенства $F + G = F$, $FG = F$ или $G + F = F$, $GF = F$ возможны только при $F = G$.

5. Гомоморфизмы групп вместе с операцией сохраняют нейтральный элемент и обратные элементы. Для *аддитивного гомоморфизма* $\alpha\colon (F, +) \to (G, +)$ верны равенства

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y), \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(-x) = -\alpha(x) \quad (x \in F).$$

Определяющим является первое, остальные из него следуют:

$$\alpha(0) + \alpha(x) = \alpha(0 + x) = \alpha(x) = \alpha(x + 0) = \alpha(x) + \alpha(0),$$
$$\alpha(-x) + \alpha(x) = \alpha(-x + x) = \alpha(0) = \alpha(x - x) = \alpha(x) + \alpha(-x).$$

Для *мультипликативного гомоморфизма* $\beta\colon (F, \cdot) \to (G, \cdot)$ верны аналогичные равенства

$$\beta(xy) = \beta(x)\beta(y), \quad \beta(1) = 1, \quad \beta(x^{-1}) = ((\beta(x))^{-1} \quad (x \in F).$$

Вместе с понятием гомоморфизма с полугрупп на группы переносятся понятия *вложения*, *изоморфизма* и *автоморфизма*.

Примеры. 1) Отображение $\alpha\colon n \to 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) является изоморфизмом $(\mathbb{Z}, +)$ на $(2\mathbb{Z}, +)$.

2) Отображение $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$ с образами $\alpha(2n) = 0$ и $\alpha(2n + 1) = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) является гомоморфизмом $(\mathbb{Z}, +)$ на $(\mathbb{B}, +)$.

3) Отображение $\beta\colon x \to x^{-1}$ ($x \in G$) взаимно однозначно, но $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Если $(G, \cdot)$ абелева, то β — автоморфизм.

Прообраз $\varphi^{-1}(e) \subseteq F$ нейтрального элемента $e \in G$ при гомоморфизме $\varphi\colon F \to G$ называется *ядром гомоморфизма* φ и обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$. Для аддитивных и мультипликативных гомоморфизмов α, β ядра определяются равенствами

$$\operatorname{Ker}\alpha = \alpha^{-1}(0) = \{x \in F \mid \alpha(x) = 0\},$$
$$\operatorname{Ker}\beta = \beta^{-1}(1) = \{x \in F \mid \beta(x) = 1\}.$$

В примерах 1–3: $\operatorname{Ker}\alpha = \{0\}$, $\operatorname{Ker}\alpha = 2\mathbb{Z}$, $\operatorname{Ker}\beta = \{1\}$.

Лемма. *Гомоморфизм является вложением ессли его ядро состоит из нейтрального элемента.*

□ Пусть $\alpha\colon (F,+) \to (G,+)$ и $x, y, z \in F$. Тогда если $\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y$, то, в частности, $\alpha(z) = 0 = \alpha(0) \Rightarrow z = 0$ и $\operatorname{Ker}\alpha = \{0\}$. Обратно, если $\alpha(z) = 0 \Rightarrow z = 0$, то $\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow 0 = \alpha(x) - \alpha(y) = \alpha(x - y) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Гомоморфизм α взаимно однозначен. ■

Упражнение. Провести доказательство для $\beta\colon (F,\cdot) \to (G,\cdot)$.

6. Лемма. *Ядро гомоморфизма составляет нормальную подгруппу.*

□ Пусть $\alpha\colon (F,+) \to (G,+)$, $N = \operatorname{Ker}\alpha$, $u \in N$, $v \in N$, $x \in G$.

1) Так как $\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v) = 0 + 0 = 0$, то $u + v \in N$. Кроме того, $\alpha(0) = 0$ влечет $0 \in N$ и $\alpha(-u) = -\alpha(u) = -0 = 0$ влечет $-u \in N$. Значит, $(N,+)$ — подгруппа F.

2) Пусть $x + u = y$ — произвольный элемент $x + N$. Тогда $u = -x+y$ и $0 = \alpha(u) = -\alpha(x)+\alpha(y)$, $\alpha(x) = \alpha(y)$. Следовательно, $0 = \alpha(y)-\alpha(x) = \alpha(y-x)$ и $y-x = v \in N$, $y = v+x \in N+x$, $x+N \subseteq N + x$. Аналогично доказывается противоположное включение. Значит, $x + N = N + x$ и N — нормальная подгруппа. ■

Упражнение. Доказать, что каждая нормальная подгруппа является ядром некоторого гомоморфизма.

7. Каждая нормальная подгруппа N определяет некоторое отношение эквивалентности для группы G, согласованное с операцией. И тем самым определяет новую группу G/N, гомоморфную G. Эта конструкция очень важна. Поэтому она описывается подробно.

Лемма A. *Отношение $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$ $(x, y \in G)$ есть согласованная со сложением эквивалентность для $(G,+)$.*

□ 1) В самом деле, $0 = x - x \in N \Rightarrow x \sim x$, $x \sim y \Rightarrow y - x = -(x - y) \in N \Rightarrow y \sim x$ и $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x - y, y - z \in N \Rightarrow x - z = (x-y)+(y-z) \in N \Rightarrow x \sim z$. Отношение $\sim$ есть эквивалентность.

2) Пусть $a, b, x, y \in G$ и $x \sim a$, $y \sim b$, $x - a = u \in N$, $y - b = v \in N$, $v - a = -a + w$ для некоторого $w \in N$ (так как $N + (-a) = (-a) + N$). Тогда $(x + y) - (a + b) = x + y - b - a = x + v - a = x - a + w = u + w \in N$ и $x + y \sim a + b$. Отношение $\sim$ согласовано со сложением. ■

Лемма B. $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ $(x, y \in G)$ *есть согласованная с умножением эквивалентность для $(G,\cdot)$.*

Упражнение. Доказать лемму B по аналогии с леммой A.

Введем удобные обозначения:

$$\bar{a} = a + N \ (a \in (G,+)), \quad \bar{a} = aN \ (a \in (G,\cdot)), \quad \overline{G} = G/N.$$

Из определений следует, что элементы a, b группы G эквивалентны, если и только если соответствующие элементы $\bar{a}$, $\bar{b}$ фактор-группы $\overline{G}$ равны: $a \sim b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

Следствие A. *Класс $\overline{G} = G/N$ множеств $\bar{a} = a+N$ $(a \in G)$ является разбиением множества G элементов группы $(G,+)$. Равенство*

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad (a,b \in G)$$

определяет сложение для $\overline{G}$. Сложение ассоциативно, для него существуют нейтральный и обратные элементы.

□ 1) То, что $\overline{G}$ есть разбиение G, вытекает из леммы A и теоремы 1.3.2, 1.

2) Однозначность определения суммы для $\overline{G}$ следует из согласованности эквивалентности $\sim$ со сложением для G: $\bar{x} = \bar{a}, \bar{y} = \bar{b} \Rightarrow x + y = a + b \Rightarrow \overline{x+y} = \overline{a+b}$ $(a,b,x,y \in G)$.

3) Ассоциативность сложения для G обеспечивает ассоциативность сложения для $\overline{G}$: $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{(b+c)} = \overline{a + (b+c)} = \overline{(a+b)+c} = \overline{(a+b)} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ $(a,b,c \in G)$.

Так как $\bar{a}+\bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a} = \overline{0+a} = \bar{0}+\bar{a}$ $(a \in G)$, то $\bar{0}$ является нейтральным элементом для сложения. А так как $\bar{a} + \overline{(-a)} = \overline{a+(-a)} = \bar{0} = \overline{(-a)+a} = \overline{(-a)} + \bar{a}$, то $\overline{-a} = -\bar{a}$ $(a \in G)$. ■

Следствие B. *Класс $\overline{G} = G/N$ множеств $\bar{a} = aN$ $(a \in G)$ является разбиением множества G элементов группы $(G,\cdot)$. Равенство*

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \quad (a,b \in G)$$

определяет умножение для $\overline{G}$. Умножение ассоциативно, для него существуют нейтральный и обратные элементы.

Упражнение. Доказать следствие B по аналогии со следствием A.

Следствия A и B означают, что $(G/N,+)$ и $(G/N,\cdot)$ являются группами. Они называются *фактор-группами* групп $(G,+)$ и $(G,\cdot)$ по нормальным подгруппам $(N,+)$ и $(N,\cdot)$.

Примеры. 1) Пусть $(G,+) = (\mathbb{Z},+)$ и $(N,+) = (2\mathbb{Z},+)$. Тогда фактор-группа $(G/N,+) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$ изоморфна бинарной группе $(\mathbb{B},+)$.

2) Для каждой нормальной подгруппы F группы G определена фактор-группа G/F. В частности, для подгруппы $F = \{e\}$, составленной из нейтрального элемента, $G/\{e\}$ изоморфна G. А фактор-группа G/G изоморфна *тривиальной группе* $\{e\}$.

3) Для каждого гомоморфизма $\varphi\colon F \to G$ определена фактор-группа $F/\operatorname{Ker}\varphi$. В частности, такой группой является $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$.

Замечание. Из определений следует, что мощности фактор-множеств, являющихся элементами фактор-группы G/N, равны мощности нормальной подгруппы N. Пусть множества G, N и $\overline{G}$ состоят соответственно из p, n и $\bar{p}$ элементов. Тогда $p = \bar{p}\cdot n$, $\bar{p} = p/n$. Этим и объясняется термин *нормальный делитель* для нормальной подгруппы N.

8. Для группы G и фактор-группы $\overline{G}$ существует *естественный гомоморфизм* $\bar{\varphi}\colon x \to \bar{x}$ $(x \in G)$. В аддитивном и мультипликативном случаях верны равенства

$$\bar{\varphi}(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y} = \bar{\varphi}(x)+\bar{\varphi}(y) \quad (x,y \in (G,+)),$$
$$\bar{\varphi}(xy) = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} = \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) \quad (x,y \in (G,\cdot)).$$

С помощью естественного гомоморфизма удобно описывать общие свойства эквивалентных элементов группы. В частности, гомоморфизм $(\mathbb{Z},+)$ на группу $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$, изоморфную $(\mathbb{B},+)$, хорошо описывает свойства четности.

В связи с естественными гомоморфизмами часто используется

Предложение. *Композиция гомоморфизмов групп является гомоморфизмом.*

$\square$ Рассмотрим группы F, G, H, гомоморфизмы $\alpha\colon F \to G$, $\beta\colon G \to H$ и их композицию $\gamma = \beta\alpha\colon F \to H$. По предложению в 2.1.1, 10 отображение γ является гомоморфизмом соответствующих полугрупп. По сказанному в п. 5 гомоморфизм γ сохраняет нейтральный и обратный элементы. $\blacksquare$

Следствие. *Композиция изоморфизмов групп является изоморфизмом.*

Пример. Пусть $F = G = H = \mathbb{Z}$ и $\alpha(x) = 2x$, $\beta(y) = 2y$. Тогда $\gamma(x) = 2(2x) = 4x$ $(x \in \mathbb{Z})$.

9. Рассмотрим группу G, ее нормальную подгруппу N, фактор-группу G/N и группу $\bar{G}$. Если отождествлять изоморфные группы, то гомоморфными образами данной группы будут ее фактор-группы и только они.

Теорема. 1) *Пусть* $\varphi\colon G \to \bar{G}$ *— гомоморфизм* G *на* $\bar{G}$ *и* $N = \operatorname{Ker}\varphi$. *Тогда* $\bar{G}$ *изоморфна* G/N.

2) *Пусть* $\bar{G}$ *изоморфна* G/N. *Тогда существует накрывающий гомоморфизм* $\varphi\colon G \to \bar{G}$ *с ядром* $\operatorname{Ker}\varphi = N$.

□ 1) По лемме п. 6 ядро $N = \operatorname{Ker}\varphi$ есть нормальная подгруппа и поэтому определена фактор-группа G/N. Возьмем естественный гомоморфизм $\bar{\varphi}\colon G \to G/N$, обратное соответствие $\varphi^{-1}\colon \bar{G} \to G$ и композицию $\gamma = \bar{\varphi}\varphi^{-1}\colon \bar{G} \to G/N$. Соответствие γ однозначно. В самом деле, по условию для каждого $\bar{a} \in \bar{G}$ существует $a \in G$ такой, что $\varphi(a) = \bar{a}$. Если $x \in G$ и $\varphi(x) = \bar{a}$, то $\varphi(x) = \varphi(a)$, $x \sim a$ и $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(a)$. Поэтому $\gamma(\bar{a}) = \{\bar{\varphi}(x) \mid \varphi(x) = \bar{a}\} = \bar{\varphi}(a)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & & \bar{G} \arrow[dl, "\gamma"] \\ & G/N & \end{tikzcd}$$

Отображение γ вместе с φ и $\bar{\varphi}$ является гомоморфизмом. Действительно, пусть $\bar{a} = \varphi(a)$ и $\bar{b} = \varphi(b)$. Тогда $\bar{a}+\bar{b} = \varphi(a)+\varphi(b) = \varphi(a+b) = \overline{a+b}$ и $\gamma(\bar{a}+\bar{b}) = \gamma(\overline{a+b}) = \bar{\varphi}(a+b) = \bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b)$.

Гомоморфизм γ имеет нулевое ядро: $\operatorname{Ker}\gamma = \gamma^{-1}(N) = \varphi(\bar{\varphi}^{-1}(N)) = \varphi(0) = \bar{0}$. По лемме п. 5 отсюда следует, что γ есть изоморфизм $\bar{G}$ на G/N.

2) Пусть $\gamma\colon \bar{G} \to G/N$ — изоморфизм и $\gamma^{-1}\colon G/N \to \bar{G}$ — обратный ему. Тогда по предложению 2.1.1,10 композиция $\varphi = \gamma^{-1}\bar{\varphi}\colon G \to \bar{G}$ гомоморфизмов $\bar{\varphi}$ и γ^{-1} есть гомоморфизм. Так как $\bar{\varphi}$ отображает G на G/N, а γ^{-1} отображает G/N на G, то φ отображает G на $\bar{G}$. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\bar{0}) = \varphi^{-1}(\gamma(\bar{0})) = \bar{\varphi}^{-1}(N) = N$. ■

Из теоремы о гомоморфизмах вытекают эффективные следствия.

10. Рассмотрим группу G, ее подгруппу F и нормальный делитель N. Будем использовать мультипликативную запись и обозначения $AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$ для $A, B \subseteq G$.

Теорема. $F/(F \cap N) \simeq FN/N$.

□ Из определений следует, что $F \cap N$, FN — подгруппы группы G, $F \subseteq FN$, $N \subseteq FN$, а $F \cap N$ и N — нормальные делители F и FN. Рассматриваемые фактор-группы определены.

Доказательство теоремы поясняет диаграмма на следующей странице. На диаграмме γ обозначает естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N, а α и β — его сужения на F и FN. Отображения $\imath$, $\jmath$, $\bar\imath$, $\bar\jmath$ обозначают тождественные вложения, которые являются гомоморфизмами. Равенство $\operatorname{Ker}\gamma = N$ следует из определения γ.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\gamma"] & \overline{G} = G/\operatorname{Ker}\gamma = G/N \\
FN \arrow[u, "\jmath"] \arrow[r, "\beta"] & \overline{FN} \simeq FN/\operatorname{Ker}\beta = FN/N \arrow[u, "\bar\jmath"] \\
F \arrow[u, "\imath"] \arrow[r, "\alpha"] & \overline{F} \simeq F/\operatorname{Ker}\alpha = F/(F\cap N) \arrow[u, "\bar\imath"]
\end{tikzcd}$$

По теореме о гомоморфизмах $\bar F \simeq F/\operatorname{Ker}\alpha$, $\overline{FN} \simeq FN/\operatorname{Ker}\beta$. При этом $\operatorname{Ker}\beta = \beta^{-1}(\bar 0) = (\jmath^{-1}\gamma\jmath)^{-1}(\bar 0) = \jmath^{-1}\gamma^{-1}\jmath(\bar 0) = \jmath^{-1}\gamma^{-1}(\bar 0) = \jmath^{-1}(N) = FN \cap N = N$, $\operatorname{Ker}\alpha = \alpha^{-1}(\bar 0) = (\imath^{-1}\beta\imath)^{-1}(\bar 0) = \imath^{-1}\beta^{-1}\imath(\bar 0) = \imath^{-1}\beta^{-1}(\bar 0) = \imath^{-1}(N) = F \cap N$. Горизонтальные равенства доказаны.

Из определений следует, что $\gamma^{-1}(\bar F) = FN$. Поэтому $\overline{FN} = \gamma(FN) = \gamma(\gamma^{-1}(\bar F)) = \bar F$. Значит, $\bar\imath\colon \bar F \to \overline{FN}$ — тождественный изоморфизм и $F/(F\cap N) \simeq \bar F = \overline{FN} \simeq FN/N$. ■

Это следствие теоремы о гомоморфизмах называется *первой теоремой об изоморфизме.*

Упражнение. Доказать, что FN — подгруппа, а $F \cap N$ — нормальный делитель группы G.

11. Рассмотрим группу G, ее нормальный делитель N и нормальный делитель $M \subseteq N$.

Теорема. $G/N \simeq (G/M)/(N/M)$.

□ Ясно, что M — нормальный делитель и группы N. Доказательство поясняется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & \overline{G} = G/N \simeq (G/M)/(N/M) \\
 & \overline{\overline{G}} = G/M \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Здесь γ и β обозначают естественные гомоморфизмы на фактор-группы, а $\alpha = \gamma\beta^{-1}$ — композицию обратного к β соответствия β^{-1} с гомоморфизмом γ. Докажем, что $\alpha\colon \bar{\bar{G}} \to \bar{G}$ есть гомоморфизм. Пусть $x \in G$ и $\beta(x) = \bar{\bar{x}} \in \bar{\bar{G}}$. Тогда $\beta^{-1}(\bar{\bar{x}}) = xM$ и $\alpha(\bar{\bar{x}}) = \gamma(\beta^{-1}(\bar{\bar{x}})) = \gamma(xM) = xM \cdot N = x \cdot MN = xN = \gamma(x) = \bar{x} \in \bar{G}$ (так как $M \subseteq N$ и $1 \in M$, то $MN = N$). Соответствие α однозначно. Пусть $x, y \in G$ и $\bar{\bar{x}} = \beta(x)$, $\bar{\bar{y}} = \beta(y)$. Тогда $\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} = \beta(x)\beta(y) = \beta(xy) = \overline{\overline{xy}}$ и $\alpha(\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}) = \alpha(\overline{\overline{xy}}) = \gamma(\beta^{-1}(\overline{\overline{xy}})) = \gamma(xyM) = \gamma(xM \cdot yM) = \gamma(xM) \cdot \gamma(yM) = \gamma(\beta^{-1}(x)) \cdot \gamma(\beta^{-1}(y)) = \alpha(\bar{\bar{x}})\alpha(\bar{\bar{y}})$. Значит, α — гомоморфизм $\bar{\bar{G}}$ в $\bar{G}$. По теореме о гомоморфизмах $\bar{G} \simeq \bar{\bar{G}}/\operatorname{Ker}\alpha$. Ядро $\operatorname{Ker}\alpha = \alpha^{-1}(\bar{0}) = (\gamma\beta^{-1})^{-1}(\bar{0}) = \beta(\gamma^{-1}(N)) = \beta(N) = \{\beta(x) \mid x \in N\} = \{x \in M \mid x \in N\} = N/M$. ■

Это следствие теоремы о гомоморфизмах называется *второй теоремой об изоморфизме.* Она описывает последовательную факторизацию группы. Такая факторизация бывает полезна при описании общих решений уравнений.

Пример. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

Упражнение. Используя теоремы об изоморфизмах, доказать, что

$$(FM/M)/((F \cap N)/(F \cap M)) \simeq FN/N.$$

Получить такие теоремы как следствия этого равенства при $M = \{1\}$ (первую) и при $F = G$ (вторую).

Из доказанных теорем вытекает следующее полезное предложение. Рассмотрим группы F, G, H и накрывающие гомоморфизмы $\beta\colon G \to F$, $\gamma\colon G \to H$.

Предложение. *Гомоморфизм $\alpha\colon F \to H$ такой, что $\alpha\beta = \gamma$ существует ессли $\operatorname{Ker}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$. Когда этот гомоморфизм существует, он единственный.*

□ Пусть $M = \operatorname{Ker}\beta$, $N = \operatorname{Ker}\gamma$. По по теореме о гомоморфизмах существуют изоморфизмы $\varphi\colon F \to G/M$, $\psi\colon H \to G/N$. Если $M \subseteq N$, то существует естественный гомоморфизм $G/M \to (G/M)/(N/M)$ и по второй теореме об изоморфизме существует гомоморфизм $(G/M)/(N/M) \simeq G/N$. Следовательно, существует накрывающий гомоморфизм $\bar{\alpha}\colon G/H \to G/N$. Нужный гомоморфизм $\alpha = \psi^{-1}\bar{\alpha}\varphi$.

Если гомоморфизм α, для которого верно равенство $\alpha\beta = \gamma$, существует, то $\beta(x) = 0 \Rightarrow \gamma(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(0) = 0$ $(x \in G)$ и $\operatorname{Ker}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$.

Единственность гомоморфизма α следует из равенств $\bar{\alpha} = \psi\alpha\varphi^{-1}$ и $\alpha = \psi^{-1}\bar{\alpha}\varphi$. ■

Доказательство поясняет диаграмма ($\bar{\beta}\colon G \to G/M$, $\bar{\gamma}\colon G \to G/N$ — естественные гомоморфизмы).

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\psi"] & & G/N \\
& G \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[ur, "\bar{\gamma}"] \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\bar{\beta}"'] & \\
F \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & G/M \arrow[uu, "\bar{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

12. Каждая группа G изоморфна группе $\mathscr{T} = \mathscr{T}(G)$ *операторов левого сдвига.* Сдвиг τ_a на элемент $a \in G$ в аддитивной и мультипликативной записях определяется равенствами

$$\tau_a(x) = a + x, \quad \tau_a(x) = ax \quad (x \in G).$$

В п. 2.1.1, 7 было доказано, что $(\mathscr{T}, +)$ и $(\mathscr{T}, \cdot)$ являются полугруппами. Когда G — группа, они тоже являются группами. Нейтральным является сдвиг на нейтральный элемент, обратными — сдвиги на обратные элементы:

$$\tau_0(x) = 0 + x = x, \quad \tau_1(x) = 1 \cdot x = x;$$
$$\tau_a(\tau_{-a}(x)) = a + (-a + x) = x, \quad \tau_a(\tau_{a^{-1}}(x)) = a(a^{-1}x) = x;$$
$$\tau_a\tau_{-a} = \tau_0 = \mathrm{id}, \quad \tau_a\tau_{a^{-1}} = \mathrm{id}\,.$$

Вместо левых сдвигов можно рассматривать правые. Для абелевых групп они совпадают.

13. Рассмотрим множество E, абелеву группу $(F, +)$ и связанную с ними абелеву группу $(\mathscr{F}, +)$, составленную из множества $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, F)$ всех отображений E в F и сложения, определяемого для $f, g \in \mathscr{F}$ равенством

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in E).$$

Нейтральным элементом для $\mathscr{F}$ служит постоянная 0. Обратным для $f \in \mathscr{F}$ является отображение $-f \in \mathscr{F}$, для которого $(-f)(x) = -f(x)$ $(x \in E)$. Коммутативность сложения для $\mathscr{F}$ обеспечивается коммутативностью сложения для F.

Если $(E, +)$ — полугруппа, то для группы $(\mathscr{F}, +)$ каждый элемент $a \in E$ с помощью сдвига задает *разностный оператор* $\Delta_a\colon f \to \Delta_a f$ $(f \in \mathscr{F})$, для которого функция $\Delta_a f$ определяется равенством

$$\Delta_a f(x) = f(a + x) - f(x) \quad (x \in E).$$

Оператор Δ_a *аддитивен* (является гомоморфизмом группы $(\mathscr{F}, +)$ в себя):

$$\begin{aligned}\Delta_a(f+g)(x) &= (f(a+x)+g(a+x)) - (f(x)+g(x))\\ &= (f(a+x)-f(x)) + (g(a+x)-g(x))\\ &= \Delta_a f(x) + \Delta_a g(x) \quad (f, g \in \mathscr{F}).\end{aligned}$$

Из определений следует, что

$$\Delta_a f = f\tau_a - f \quad (f \in \mathscr{F}).$$

14. Пусть $(E,+) = (\mathbb{N},+)$, $(F,+) = (\mathbb{Z},+)$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ и $a = 1$. Тогда для разностного оператора $\Delta = \Delta_1$ и функции $f \in \mathscr{F}$ функция $\Delta f \in \mathscr{F}$ определяется равенством

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

В частности, если $f(x) = x$, то $\Delta f(x) = 1$, а если $f(x) = x^2$, то $\Delta f(x) = 2x+1$.

Рассмотрим функцию $g \in \mathscr{F}$ и решим разностное уравнение

$$\Delta f = g, \quad \Delta f(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Из определений следует, что $f(2) = f(1) + g(1)$ и $f(x+1) = f(x) + g(x)$ $(x \in \mathbb{N})$. По принципу индукции функция f определяется своим значением $f(1)$ и равенством

$$f(x+1) = f(1) + \sum_{1\le n\le x} g(n) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, при любой правой части $g \in \mathscr{F}$ решение уравнения $\Delta f = g$ *существует*, но *не единственно*. В частности, решением *однородного* разностного уравнения $\Delta f = 0$ является любая постоянная $f(x) = f(1) = c \in \mathbb{Z}$ $(x \in \mathbb{N})$. Говорят, что задача о решении уравнения $\Delta f = g$ *некорректно поставлена*.

Для того чтобы поставить задачу *корректно*, т. е. обеспечить *существование* и *единственность решения* $f \in \mathscr{F}$ уравнения $\Delta f = g$ при любой правой части $g \in \mathscr{F}$, нужно добавить начальное условие $f(1) = c$. Оно вместе с равенством для $f(x+1)$ определяет единственное решение уравнения $\Delta f = g$. Обозначим

$\mathscr{F}_c$ множество всех $f \in \mathscr{F}$, у которых $f(1) = c$. Сказанное означает, что при любой правой части $g \in \mathscr{F}$ уравнение $\Delta f = g$ имеет решение $f \in \mathscr{F}_c$, *единственное в этом множестве.*

При $c = 0$ множество $\mathscr{F}_0=\{f \in \mathscr{F} \mid f(1) = 0\}$ образует подгруппу группы $\mathscr{F}$. Сужение $\Delta_0\colon \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}$ оператора $\Delta\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ является изоморфизмом: $\operatorname{Ker}\Delta_0 = \{f_0 \in \mathscr{F}_0 \mid \Delta_0 f_0 = 0\} = 0$. При любом $g \in \mathscr{F}$ уравнение $\Delta_0 f_0 = g$ имеет единственное решение $f_0 = \Delta_0^{-1} g \in \mathscr{F}_0$. Оно определяется равенствами

$$f_0(1) = 0, \quad f_0(x+1) = \sum_{1 \le n \le x} g(n) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Оператор Δ_0^{-1}, обратный разностному оператору Δ_0, является *оператором суммирования.*

Упражнение. Решить уравнения $\Delta f = g$ для $g(x) = x^m \, (x \in \mathbb{N})$ при $m = 1, 2, 3$.

Группа $(\mathscr{C}, +)$ постоянных последовательностей целых чисел является ядром разностного оператора Δ. Она изоморфна группе $(\mathbb{Z}, +)$ целых чисел. Таким образом, $\operatorname{Ker}\Delta \simeq \mathbb{Z}$. Рассмотрим фактор-группу $(\bar{\mathscr{F}}, +) = (\mathscr{F}/\mathscr{C}, +)$ группы $(\mathscr{F}, +)$ по подгруппе $(\mathscr{C}, +)$ постоянных. Элементами $\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F}/\mathscr{C}$ являются множества $\bar{f} = f + \mathscr{C}$, составленные из последовательностей $f + c$ целых чисел $f(n) + c$ $(n \in \mathbb{N})$. Для них тоже определен разностный оператор $\bar{\Delta}$. Он преобразует $\bar{f}$ в $\bar{\Delta}\bar{f} = \Delta f$. Из сказанного об уравнении $\Delta f = g$ следует, что решение $\bar{f} \in \bar{\mathscr{F}}$ уравнения $\bar{\Delta}\bar{f} = g$ при любой правой части $g \in \mathscr{F}$ существует и единственно. Задача теперь *поставлена корректно.*

Оператор $\bar{\Delta}\colon \bar{\mathscr{F}} \to \mathscr{F}$ является изоморфизмом. В самом деле, $\bar{\Delta}$ — гомоморфизм, как и Δ. Его ядро $\operatorname{Ker}\bar{\Delta} = \{\bar{f} \in \bar{\mathscr{F}} \mid \bar{\Delta}\bar{f} = 0\} = \{f + c \mid f \in \mathscr{F}, c \in \mathscr{C}, \Delta f = 0\} = \mathscr{C} = \bar{0}$.

Замечание. Таким образом, можно корректировать постановку задачи двумя способами: добавляя условия и тем самым ограничивая множество допустимых решений или переходя к фактор-множествам. Уравнение $\Delta f = g$ без начального условия $f(1) = c$ иногда называют *неопределенным* или *некорректным.* Добавление начального условия делает его *определенным* или *корректным.*

15. *Прямое произведение* $(P, +)$ семейства абелевых полугрупп с нулем $(G(i), +)$ $(i \in I)$ составляется из декартова произведения $P = \prod G(i)$ множеств $G(i)$ и поиндексного сложения:

$$(x+y)(i) = x(i) + y(i) \quad (x = (x(i)),\ y = (y(i)) \in P).$$

Ясно, что $(P, +)$ — абелева полугруппа.

Если $G(i)$ — абелевы группы, то и их прямое произведение абелева группа: $x = 0 \Leftrightarrow x(i) = 0$ и $-x = (-x(i))$ $(i \in I)$.

Прямой суммой абелевых полугрупп $(G(i), +)$ $(i \in I)$ с нулем называется подполугруппа $S = \sum G(i)$ полугруппы $P = \prod G(i)$, образованная финитными семействами $x = x(i) \in P$ $(|\{i : x(i) \neq 0\}| < \infty)$. Если $G(i)$ — абелевы группы, то и их прямая сумма $S = \sum G(i)$ — абелева группа (подгруппа группы P).

Упражнение. Проверить корректность данного определения и сформулированное утверждение.

Пример 1. Пусть E — множество, $(F, +)$ — абелева полугруппа с нулем и $G(x) = F$ $(x \in E)$. Тогда $\prod G(x) = \mathscr{F} = \mathscr{F}(E, F)$ — множество всех функций $f \colon E \to F$, а сложение определяется равенством $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in E;\ f, g \in \mathscr{F})$. Вместо $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, F)$ пишут также $\mathscr{F} = F^E$. Прямую сумму $\sum G(x)$ образуют финитные функции $f \colon E \to F$ $(|\operatorname{supp} f| < \infty)$.

Пример 2. Пусть $\mathbb{K}$ — бесконечное поле, $s^n \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ — n-я степень со значениями $s^n(\xi) = \xi^n$ $(\xi \in \mathbb{K})$ и $G(n) = \mathbb{K}s^n = \{\alpha s^n \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ — порожденная ею аддитивная группа: $(\alpha + \beta)s^n = \alpha s^n + \beta s^n$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$. Аддитивная группа $G = \mathscr{M}(\mathbb{K})$ полиномов является прямой суммой степенных групп $G(n) = \mathbb{K}s^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Группа $\mathscr{M}(\mathbb{K})$ полиномов является подгруппой аддитивной группы $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ функций. Полином $p \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ со значениями $p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \dots + \alpha_n\xi_n$ $(\alpha_n \neq 0)$ однозначно определяет свои коэффициенты α_i $(0 \le i \le n)$, когда поле $\mathbb{K}$ бесконечное.

Говорят, что аддитивная абелева группа G является *прямой суммой конечного семейства подгрупп* $G(i)$, и пишут $G = \sum G(i)$, если для каждого $\bar{x} \in G$ существует единственное семейство $x = (x(i)) \in \prod G(i)$ такое, что $\bar{x} = \sum x(i)$.

Прямые суммы групп и подгрупп связывает изоморфизм

$$\varphi \colon \prod G(i) \to G, \quad \varphi(x) = \bar{x} = \sum x(i) \quad (x = (x(i)) \in \prod G(i)).$$

Докажем это. По правилам сложения для групп $\prod G(i)$ и G получаются равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x(i) + y(i)) = \sum (x(i) + y(i)) \\ &= \sum x(i) + \sum y(i) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad (x, y \in \prod G(i)). \end{aligned}$$

Значит, φ — гомоморфизм $\prod G(i)$ на G. Так как равенство $\bar{0} = \sum x(i)$ верно для единственного семейства $x = 0$ со значениями $x(i) = 0$, то $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ и φ является изоморфизмом. Это оправдывает использование термина *прямая сумма* и обозначения $\sum G(i)$ для конечных семейств групп и подгрупп $G(i)$.

Если группа G является прямой суммой подгрупп A и B, то $B = A^{ac}$ называют (*алгебраическим*) *дополнением* A до G. Обозначим через $L(X)$ подгруппу группы G, порожденную множеством $X \subseteq G$.

Рассмотрим конечное семейство подгрупп $G(i)$ аддитивной абелевой группы G, объединение $\cup G(i)$ элементов которых порождает G: для каждого $\bar{x} \in G$ существует семейство $x = (x(i)) \in \prod G(i)$ такое, что $\bar{x} = \sum x(i)$. При этом не требуется, чтобы семейство $x = (x(i))$ было единственным.

Предложение. $G = \sum G(i) \Leftrightarrow G(i) \cap \sum\limits_{j \neq i} G(j) = \{0\}$.

$\square$ Если семейство состоит только из самой группы G, то предложение верно. Пусть оно верно для $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим семейство из $(n+1)$-й подгруппы $G(1), \ldots, G(n), G(n+1)$. Если $\bar{x} = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} x(i) + x(n+1) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} y(i) + y(n+1)$, то элемент $z = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} x(i) - \sum\limits_{1 \leq i \leq n} y(i) = x(n+1) - y(n+1)$ принадлежит пересечению $Z = \Big(\sum\limits_{1 \leq i \leq n} G(i)\Big) \cap G(n+1)$. Пусть $Z = \{0\}$. Тогда $x(n+1) = y(n+1)$, $\sum x(i) = \sum y(i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Представление $\bar{x} = \sum x(i)$ $(1 \leq i \leq n+1)$ единственно и $G = \sum G(i)$ $(1 \leq i \leq n+1)$. По принципу индукции отсюда следует, что утверждение *если* верно для любого конечного семейства подгрупп $G(i)$.

Утверждение *только если* сразу следует из единственности представления. Пусть $a \in G(j) \cap G(k)$ при $j \neq k$. Тогда $a = \sum x(i) = \sum y(i)$ при $x(j) = a$, $x(i) = 0$ $(i \neq j)$ и $y(k) = a$, $y(i) = 0$ $(i \neq k)$. Так как для прямой суммы $x(i) = y(i)$ при всех i, то $a = x(j) = y(j) = 0$. $\blacksquare$

Пример 3. Возьмем бесконечное поле $\mathbb{K}$ и группу $G = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ полиномов, порожденную степенями s^i $(0 \leq i \leq n)$. Каждая степень s^i порождает подгруппу $G(i) = \mathbb{K}s^i = \{\alpha s^i \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Так как $\mathbb{K}s^i \cap \sum \mathbb{K}s^j = \{0\}$ $(j < i)$ для каждого i, то группа $G = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ полиномов есть прямая сумма подгрупп $\mathbb{K}s^i$ $(0 \leq i \leq n)$ степеней. Группа $G = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ является подгруппой группы $G = \mathscr{M}(\mathbb{K})$.

16. Рассмотрим изоморфные множества X, Y, Z и выберем изоморфизмы $j\colon X \to Y$, $k\colon X \to Z$, $l = kj^{-1}\colon Y \to Z$. Обозначим $S = I(Y, Z)$ и $P = I(X, X)$ множества подстановок $s\colon Y \to Z$ и $p\colon X \to X$. Определим *обобщенную симметрическую группу* $(S, *)$, изоморфную *симметрической группе* $(P, \cdot)$ автоморфизмов множества X. Связь между рассматриваемыми отображениями поясняет диаграмма.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, "k"] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "k"] \\
Y \arrow[r, "l"'] & Z & Y \arrow[l, "s"] \arrow[r, "t"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Равенство $s = kpj^{-1}$ $(p \in P,\ s \in S)$ определяет изоморфизм $\varphi\colon P \to S$ множества P на множество S. Произведение $s * t$ подстановок $s = \varphi(p)$, $t = \varphi(q) \in S$ определим равенством $\varphi(p) * \varphi(q) = \varphi(pq)$. При таком определении φ становится изоморфизмом группы $(P, \cdot)$ на $(S, *)$.

Заметим, что для тождественной перестановки $e\colon X \to X$ и выбранной подстановки $l\colon Y \to Z$ верны равенства $\varphi(e) = kej^{-1} = kj^{-1} = l$. Подстановка l является единицей группы $(S, *)$. Обратным элементом для подстановки $s = \varphi(p)$ служит подстановка $s^{-1} = \varphi(p^{-1})$. (Ее нужно отличать от обратного отображения $s^{-1}\colon Z \to Y$.) Группа $(S, *)$ некоммутативна вместе с $(P, \cdot)$.

Подчеркнем, что в определении умножения $*$ существенную роль играет выбор изоморфизмов j и k. Но при любом их выборе получается группа, изоморфная группе перестановок $(P, \cdot)$.

17. Обозначим через $(S(n), \cdot)$ симметрическую группу для упорядоченного множества X из n элементов. По сказанному в п. 16 можно считать, что $X = \{1, \dots, n\}$. Группа $S(n)$ часто встречается и поэтому заслуживает подробного описания.

Прежде всего заметим, что $|S(n)| = n!$. Это следует из комбинаторного правила сложения.

Упражнение. Доказать равенство $|S(n)| = n!$.

Для каждой перестановки $p \in S(n)$ определим *знак*:

$$\operatorname{sgn} p = \prod \operatorname{sgn}(p(j) - p(i)) \quad (1 \le i < j \le n).$$

Если $\operatorname{sgn} p = 1$, то p называется *четной*, если $\operatorname{sgn} p = -1$ — *нечетной*.

Среди перестановок выделяются *транспозиции* t_{ij}, определяемые для каждых номеров $i \neq j$ равенствами $t_{ij}(i) = j, t_{ij}(j) = i$ и $t_{ij}(k) = k$ для всех $k \neq i$, $k \neq j$ $(1 \leq i, j, k \leq n)$. Ясно, что $t_{ij}^{-1} = t_{ij} = t_{ji}$. Пусть $p \in S(n)$. Для каждого номера положим $p^0(i) = i$, $p^j(i) = p(p^{j-1}(i))$. Обозначим $(i, p(i), \dots, p^{l-1}(i))$ и назовем *циклом* длины $l > 1$ с началом в i перестановку $i \to p(i) \to \dots \to p^{l-1}(i) \to i$, $p^j(i) \neq p^k(i)$ $(0 < j < k < l)$. В частности, $t_{ij} = (ij)$. Если $p(i) = i$, то номер i образует цикл (i) длины 1. Циклы с непересекающимися множествами номеров называются *независимыми.* Независимые циклы коммутируют.

Лемма. *Каждая перестановка разлагается в произведение независимых циклов.*

□ Применяя индукцию, убеждаемся в том, что для каждой перестановки $p \in S(n)$ верно равенство

$$p = (i(1)p(1) \dots p^{n(1)-1}(1)) \dots (i(m)p(m) \dots p^{n(m)-1}(m)),$$

где $i(1), \dots, i(m)$ — выбранные номера, $p^j(k) = p^j(i(k))$ $(1 \leq k \leq m)$. Выписанные циклы независимы и $n(1) + \dots + n(m) = n$. ■

Разложения перестановки на независимые циклы могут отличаться только порядком множителей. Поэтому с каждой перестановкой $p \in S(n)$ можно связать число $n - m$, где m — число циклов в разложении p. Число $n - m$ называется *декрементом* подстановки p.

Заметим, что $(ip(i) \dots p^{l-1}(i)) = (ip(i)) \dots (ip^{l-1}(i))$.

Упражнение. Дать подробные доказательства утверждений о независимых циклах.

Предложение. *Перестановка четная ессли она равна произведению четного числа транспозиций.*

□ Каждая транспозиция $t = (ij)$ нечетна: $\operatorname{sgn} t = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$. Поэтому $\operatorname{sgn}(tu) = -\operatorname{sgn} u$ для любой перестановки u, так как в произведении tu просто транспонируются другие номера. По лемме перестановка p равна произведению циклов. Следовательно, p равна произведению транспозиций, имеющих отрицательные знаки и меняющих знак остального произведения. Поэтому знак перестановки p равен произведению знаков составляющих p транспозиций. ■

Следствие. *Перестановка четная ессли она имеет четный декремент.*

□ Пусть перестановка p равна произведению m циклов длин $n(1), \ldots, n(m)$. Тогда, так как цикл длины l равен произведению $l-1$ транспозиций, перестановка p равна произведению $(n(1)-1)+\cdots+(n(m)-1)=n-m$ транспозиций. ■

Упражнение. Доказать, что каждая перестановка равна произведению транспозиций, переставляющих соседние номера.

Из доказанных предложений вытекает, что $\operatorname{sgn}(pq) = \operatorname{sgn} p \cdot \operatorname{sgn} q$ для любых перестановок p, q. Произведение четных перестановок есть четная перестановка. Поэтому четные перестановки составляют подгруппу симметрической группы $S(n)$. Эта подгруппа обозначается $A(n)$ и называется *знакопеременной группой* для упорядоченного множества X из n элементов. Так как четных перестановок X столько же, сколько и нечетных, то $|A(n)| = n!/2$.

Упражнение. Доказать это.

Замечание. Отображение $\operatorname{sgn}\colon S(n) \to \{+1,-1\}$ является гомоморфизмом группы $(S(n),\cdot)$ на мультипликативную группу $(\{+1,-1\},\cdot)$. Знакопеременная группа $A(n)$ является ядром этого гомоморфизма.

2.1.3. Кольца и поля

Эти алгебраические системы имеют две согласованные операции. Кольцо образуется из группы и полугруппы, а поле — из двух групп. Кольцам и полям посвящены главы 3 и 6 книги [17].

1. Сначала рассмотрим более общую алгебраическую систему с двумя операциями. Полугруппы (H,f) и (H,g) с одним и тем же множеством H и операциями, согласованными с помощью *правил дистрибутивности*

$$g(f(x,y),z) = f(g(x,z),g(y,z)), \quad g(x,f(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z)),$$

составляют *полукольцо* (H,f,g). В этом полукольце правила определяют только дистрибутивность g по f. Дистрибутивность f по g не требуется.

Полугруппа (H,f) предполагается *абелевой.* Если (H,g) тоже коммутативна, то и полукольцо (H,f,g) называется *коммутативным.*

Примеры. 1) Полугруппы $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$ составляют полукольцо $(\mathscr{P}, \cup, \cap)$, элементами которого являются части данного множества.

2) Полугруппы $(\mathbb{N}, +)$ и $(\mathbb{N}, \cdot)$ составляют полукольцо $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, элементами которого являются натуральные числа.

3) Группа $(\mathbb{Z}, +)$ и полугруппа $(\mathbb{Z}, \cdot)$ составляют полукольцо $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, элементами которого являются целые числа.

2. Полукольцо $(R, +, \cdot)$, составленное из *абелевой группы* $(R, +)$ и *полугруппы* $(R, \cdot)$, называется *кольцом*. В кольце умножение дистрибутивно по сложению:

$$(x + y)z = xz + yx, \quad x(y + z) = xy + xz.$$

Вместе со своей мультипликативной полугруппой $(R, \cdot)$ оно может быть *коммутативным* или *некоммутативным*.

Замечание. В определение полугруппы обычно включается ассоциативность операции. Соответственно в кольце обе операции предполагаются ассоциативными. Существует теория и *неассоциативных колец*, в которых умножение может не быть ассоциативным. Отказ от ассоциативности умножения существенно усложняет дело. Ее заменяют некоторыми более слабыми требованиями.

Вместе со своей аддитивной группой $(R, +)$ кольцо $(R, +, \cdot)$ имеет нуль 0. Вместе со своей мультипликативной полугруппой $(R, \cdot)$ кольцо $(R, +, \cdot)$ может иметь или не иметь единицу 1. Кольцо с единицей называется *унитарным*.

Примеры. 1) *Тривиальное кольцо* $(\{0\}, +, \cdot)$: $0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0$. Единственный элемент этого кольца является одновременно нулем и единицей: $0 = 1$.

2) *Бинарное кольцо* $(\mathbb{B}, +, \cdot)$, действия в котором определены таблицами примера в 2.1.1, 4.

3) Кольцо $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ целых чисел.

Каждая аддитивная абелева группа $(R, +)$ является аддитивной группой некоторого коммутативного кольца $(R, +, \cdot)$. Например, *нулевого кольца* с тождеством $xy = 0$ $(x, y \in R)$. Поэтому абелевы группы можно считать частным случаем коммутативных колец.

Все общие понятия и утверждения для групп и полугрупп при соответствующем согласовании переносятся на кольца. В частности, гомоморфизм $\varphi\colon R \to S$ кольца $(R, +, \cdot)$ в $(S, +, \cdot)$ есть гомоморфизм группы $(R, +)$ в $(S, +)$ и полугруппы $(R, \cdot)$ в $(S, \cdot)$. Он определяется равенствами

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (x, y \in R).$$

Композиции гомоморфизмов и изоморфизмов колец являются соответственно гомоморфизмами и изоморфизмами.

Говорят, что кольцо $(R,+,\cdot)$ является подкольцом $(S,+,\cdot)$, и пишут $(R,+,\cdot)\subseteq(S,+,\cdot)$, если группа $(R,+)$ является подгруппой группы $(S,+)$ и полугруппа $(R,\cdot)$ является подполугруппой группы $(S,\cdot)$. Таким образом, по определению,

$$(R,+,\cdot)\subseteq(S,+,\cdot)\Longleftrightarrow(R,+)\subseteq(S,+),\quad (R,\cdot)\subseteq(S,\cdot).$$

Пример. Кольцо $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ четных целых чисел является подкольцом кольца $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ всех целых чисел.

Замечание. Каждое кольцо $(R,+,\cdot)$ можно вложить в некоторое унитарное кольцо. Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}\times R,+,*)$ с операциями $(m,x)+(n,y)=(m+n,x+y)$, $(m,x)*(n,y)=(mn,my+nx+xy)$ $(m,n\in\mathbb{Z},\ x,y\in R)$ и его подкольцо $(\{0\}\times R,+,*)$. Легко проверить, что $\varphi\colon x\to(0,x)$ является изоморфизмом $(R,+,\cdot)$ и $(\{0\}\times R,+,*)$. В кольце $(\mathbb{Z}\times R,+,*)$ есть единица $(1,0)$. Если существует единица $e\in R$, то $(0,e)$ является единицей подкольца $(\{0\}\times R,+,*)$, но не является единицей кольца $(\mathbb{Z}\times R,+,*)$. Это надо учитывать при вложении.

3. Важным примером коммутативного кольца служит *булево кольцо множеств* $(\mathscr{P},+,\cdot)$. Оно тесно связано с описанной в 1.1.2, 10 булевой алгеброй множеств $(\mathscr{P},\cup,\cap,')$. Элементами этих систем являются части данного множества E. Сложение и умножение для кольца $(\mathscr{P},+,\cdot)$ определяются тождествами

$$X+Y=(X\cup Y)\cap(X\cap Y)',\quad XY=X\cap Y.$$

Упражнения. 1) Проверить ассоциативность сложения и правило дистрибутивности.

2) Доказать тождество $X+Y=(X\cap Y')\cup(Y\cap X')$.

3) Доказать тождества $X\cup Y=X+Y+XY$, $X'=E-X$.

Нулем кольца $(\mathscr{P},+,\cdot)$ служит пустое множество O, единицей — множество E. Противоположным (обратным по сложению) элементом для $X\in\mathscr{P}$ является сам этот элемент: $-X=X$. Это следует из тождеств $X+X=(X\cup X)\cap(X\cap X)'=X\cap X'=O$. Сложение для $(\mathscr{P},+,\cdot)$ совпадает с вычитанием: $X+Y=X-Y=Y-X=Y+X$. Поэтому сумму множеств часто называют их *симметрической разностью*. Заметим, что $X+Y=X\cup Y$, когда $X\cap Y=O$: сумма дизъюнктных множеств равна их объединению.

Каждый элемент $X \in \mathscr{P}$ является мультипликативным идемпотентом: $X^2 = X$. Естественный порядок для $\mathscr{P}$ совпадает с включением $\subseteq$: $X \subseteq Y \iff XY = X$. Наименьшим и наибольшим элементами $\mathscr{P}$ являются пустое множество O и множество E: $O = \min \mathscr{P}$, $E = \max \mathscr{P}$. Каждые два элемента $X, Y \in \mathscr{P}$ имеют верхнюю и нижнюю грани:

$$X \vee Y = \sup\{X, Y\} = X + Y + XY = X \cup Y,$$
$$X \wedge Y = \inf\{X, Y\} = XY = X \cap Y.$$

Упражнение. Доказать сформулированные в этом абзаце утверждения.

Рассмотрим класс $\mathscr{B} = \{0, E\}$. Он образует подкольцо $(\mathscr{B}, +, \cdot)$ кольца $(\mathscr{P}, +, \cdot)$, изоморфное бинарному кольцу $(\mathbb{B}, +, \cdot)$.

Другим важным примером служит кольцо функций.

Рассмотрим аддитивную абелеву группу $(\mathscr{F}, +)$ функций на множестве X, принимающих значение в кольце $(R, +, \cdot)$. По аналогии со сложением умножение функций определяется равенством

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X,\ f, g \in \mathscr{F}).$$

Это умножение ассоциативно и согласовано со сложением

$$\begin{aligned}((f+g)h)(x) &= (f(x) + g(x)) \cdot h(x) \\ &= f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x) = (fh)(x) + (fh)(x),\end{aligned}$$

$$(f(g+h))(x) = (fg)(x) + (fh)(x) \quad (x \in X,\ f, g, h \in \mathscr{F}).$$

Группа $(\mathscr{F}, +)$ с умножением для $\mathscr{F}$ составляет *кольцо функций* $(\mathscr{F}, +, \cdot)$.

Замечание. Композиция функций тоже часто называется произведением. Здесь при $X \neq R$ композиция функций может быть вообще не определена. А при $X = R$ не будет согласованности композиции со сложением: $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$ в общем случае.

Если кольцо R унитарно, то среди функций множества $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, R)$ выделяются индикаторы f с образами $f(X) \subseteq \{0, 1\} \subseteq R$. Множество $I = I(X)$ таких индикаторов изоморфно множеству $\mathscr{P}(X)$ частей X. Но эти индикаторы не образуют подкольцо кольца $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ в общем случае.

Пусть $0 < 1$ и *булева сумма* $f \oplus g$ индикаторов $f, g \in I$ определяется равенством

$$(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} - f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X).$$

Тогда $(I, \oplus, \cdot)$ есть булево кольцо, изоморфное $(\mathscr{P}(X), +, \cdot)$.

Упражнение. Доказать это.

4. Подкольцо $(N, +, \cdot)$ кольца $(R, +, \cdot)$ называется его *идеалом*, если полугруппа $(N, \cdot)$ является идеалом полугруппы $(R, \cdot)$: $xy, yx \in N$ $(x \in N,\ y \in R)$. Как и для полугрупп, среди идеалов колец выделяются собственные и максимальные. Определяются также *правые* и *левые* идеалы кольца.

Пример. Подкольцо $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ четных целых чисел является максимальным идеалом кольца $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ всех целых чисел. В самом деле, $(2m)n = 2(mn) \in 2\mathbb{Z}$ $(2m \in 2\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z})$ и $2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. Значит, $2\mathbb{Z}$ — собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$. Его максимальность доказывается следующим образом. Среди элементов каждого идеала кольца $\mathbb{Z}$, который строго содержит $2\mathbb{Z}$, есть хотя бы одно нечетное число $2m + 1$. Поэтому такому идеалу принадлежит $1 = (2m + 1) - 2m$. И, следовательно, все целые числа. Такой идеал — несобственный.

Каждое множество $A \subseteq R$ *порождает* некоторый идеал $(J(A), +, \cdot)$ в кольце $(R, +, \cdot)$. По определению, он равен пересечению всех идеалов кольца $(R, +, \cdot)$, содержащих A.

Упражнение. Доказать, что пересечение любого семейства идеалов кольца есть идеал.

Идеал $J(a)$, порожденный одним элементом $a \in R$, называется *главным*. В коммутативном кольце $(R, +, \cdot)$ главный идеал $(J(a), +, \cdot)$ образуется из элементов $y = xa + na$ $(x \in R,\ n \in \mathbb{Z})$. Если в кольце есть единица, то $y = xa$ $(x \in R)$.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Пример. $2\mathbb{Z} = J(2)$.

5. Рассмотрим кольцо $(R, +, \cdot)$, его идеал $(N, +, \cdot)$. Так как по определению кольца группа $(R, +)$ абелева, то $(N, +)$ является ее нормальным делителем и определена фактор-группа $(\bar{R}, +) = (R/N, +)$, элементами которой служат фактор-множества $\bar{x} = x + N$ $(x \in R)$.

В 2.1.2, 7 было показано, что $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ $(a, b \in R)$. Определим для $\bar{R}$ умножение равенством $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$. Такое определение корректно, так как это произведение не зависит от выбора элементов a и b рассматриваемых фактор-множеств. В самом деле, пусть $x \sim a$, $y \sim b$, т. е. $x = a + u$, $y = b + v$ для некоторых $u, v \in N$. Тогда

$$xy = (a + u)(b + v) = ab + ub + av + uv = ab + w$$

для $w = ub + av + uv \in N$, так как $(N, +, \cdot)$ — идеал в $(R, +, \cdot)$. Значит, $xy \sim ab$. Проверим правило дистрибутивности:

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \overline{(a + b)c} = \overline{ac + bc} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$$

и аналогично $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$ $(a, b, c \in R)$. Таким образом, $(\overline{R}, +, \cdot) = (R/N, +, \cdot)$ есть кольцо. Оно называется *фактор-кольцом* кольца $(R, +, \cdot)$ по идеалу $(N, +, \cdot)$. Если $(R, +, \cdot)$ коммутативно, то и $(R/N, +, \cdot)$ коммутативно.

Примеры. 1) Элементами фактор-кольца $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ являются множества $\bar{0} = 2\mathbb{Z}$ и $\bar{1} = 2\mathbb{Z} + 1$ четных и нечетных целых чисел. Фактор-кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ изоморфно бинарному кольцу $\mathbb{B}$.

2) Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $J(m) = \{ml \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Тогда элементами фактор-кольца $\mathbb{Z}/J(m)$ являются множества $\bar{k} = \{n = ml + k \mid l \in \mathbb{Z}\}$ $(k = 0, \ldots, m-1)$. Они называются *вычетами по модулю* m. В частности, $\bar{0}$ и $\bar{1}$ — вычеты по модулю 2.

3) Пусть $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ и $\mathscr{K} = \mathscr{K}(E)$ — класс всех конечных частей множества E. Он образует идеал в булевом кольце $(\mathscr{P}, +, \cdot)$. Класс множеств, являющихся элементами фактор-кольца $\mathscr{P}/\mathscr{K}$, составляется из частей X множества E, отличающихся друг от друга на произвольное конечное множество: $\bar{X} = X + \mathscr{K}$ $(X \in \mathscr{P})$. Если множество E конечно, то $\mathscr{P}(E) = \mathscr{K}(E)$, и фактор-кольцо $\mathscr{P}/\mathscr{K} = \mathscr{K}/\mathscr{K}$ тривиально.

6. Коммутативное унитарное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный по умножению, называется *полем*. Поле $(F, +, \cdot)$ составляется из двух абелевых групп: аддитивной $(F, +)$ и мультипликативной $(F \setminus \{0\}, \cdot)$. Операции в этих группах согласовываются правилом дистрибутивности. Добавляются равенства $0x = x0 = 0$ $(x \in F)$.

Замечание. В общей теории рассматриваются и некоммутативные поля. Они называются *телами*.

С элементами поля можно производить все естественные операции: складывать и вычитать, умножать и делить (не на нуль). В поле нет *делителей нуля* — ненулевых элементов, произведение которых равно нулю. Это обеспечивается существованием обратных для таких элементов: если $ab = 0$ и $a \neq 0$, то $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

Примерами полей служат некоторые фактор-кольца. Рассмотрим унитарное коммутативное кольцо R с собственным идеалом N.

Теорема. *Фактор-кольцо $\bar{R} = R/N$ является полем есcли идеал N максимальный.*

$\square$ Максимальность N означает, что для каждых $a \in R \setminus N$ и $b \in R$ существуют $x \in R$ и $y \in N$ такие, что $ax + y = b$, и поэтому $\bar{a}\bar{x} = \bar{b}$ для соответствующих $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x} \in \bar{R}$. Это эквивалентно утверждению, что при $\bar{a} \neq 0$ существует $\bar{x} = \bar{a}^{-1}$. $\blacksquare$

Пример. Фактор-кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ есть поле.

Упражнение. Доказать, что в примере 2 п. 5 фактор-кольцо $\mathbb{Z}/J(m) = \{\bar{0}, \ldots, \overline{m-1}\}$ является полем есcли натуральное число m простое.

7. Каждое ненулевое и не имеющее делителей нуля унитарное коммутативное кольцо R можно вложить в некоторое поле $Q = Q(R)$, определив для любых $a \in R$ и $b \in R$, $b \neq 0$ *дробь* a/b. Опишем это вложение подробно.

Так как в R нет делителей нуля, то для каждых $x, y \in R$ и $z \in R$, $z \neq 0$ из $xz = yz$ следует $(x-y)z = xz-yz = 0$ и $x-y = 0$, $x = y$.

Рассмотрим множество $P = R \times (R \setminus \{0\})$, составленное из пар (x, y) с первым элементом $x \in R$ и вторым элементом $y \in R \setminus \{0\}$ ($y \in R$, $y \neq 0$). Определим для P отношение эквивалентности: $(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow ay = bx$. Его рефлексивность и симметричность следуют из коммутативности умножения для R, а транзитивность вытекает из соотношений $(x, y) \sim (a, b)$, $(a, b) \sim (u, v) \Leftrightarrow ay = bx$, $av = bu \Rightarrow abyu = abxv \Rightarrow yu = xv \Leftrightarrow (x, y) \sim (u, v)$, $a, u, x \in R$ и $b, v, y \in R \setminus \{0\}$. (Если $a = 0$, то $ay = bx$, $av = bu \Rightarrow x = 0$, $u = 0 \Rightarrow yu = 0 = xv$.) Элементы $\overline{(a, b)}$ фактор-множества $Q = \bar{P} = P/\sim$ будем обозначать a/b и называть *дробями*. Равенство $a/b = x/y$ означает $ay = bx$. Сложение и умножение дробей определяются по известным правилам:

$$(a/b) + (x/y) = (ay + bx)/by, \quad (a/b)(x/y) = ax/by.$$

Теорема. $(Q, +, \cdot)$ *есть поле.*

$\square$ 1) $(Q, +)$ *есть абелева группа.* Ясно, что сложение дробей коммутативно. Легко убедиться в его ассоциативности. Нулем является дробь $0/1$. Противоположным элементом для a/b служит $(-a)/b$.

2) $(Q, \cdot)$ *есть абелева полугруппа с единицей.* Коммутативность и ассоциативность умножения дробей следуют из коммутативности и ассоциативности умножения в кольце R. Единицей служит дробь $1/1$.

3) $(Q, +, \cdot)$ *есть коммутативное унитарное кольцо.* Нужно только проверить правило дистрибутивности. Это легко сделать.

4) $(Q, +, \cdot)$ *есть поле.* Для каждой дроби $a/b \neq 0/1$ существует обратная дробь $(a/b)^{-1} = b/a$. В самом деле, $a/b \neq 0/1 \Leftrightarrow a \neq 0$ и $(a/b)(b/a) = ab/ab = 1/1$. ■

Упражнение. Провести доказательство подробно, не используя $1 \in R$.

Поле $Q = Q(R)$ называется *полем дробей*, порожденным кольцом R. Отображение $\varphi\colon R \to Q$, $\varphi\colon x \to x/1$ $(x \in R)$ является вложением кольца R в поле Q. В самом деле, φ взаимно однозначно: $x/1 = y/1 \Leftrightarrow x = y$. Оно сохраняет операции: $x/1+y/1 = (x+y)/1$, $(x/1)(y/1) = (xy)/1$. Кольцо R отождествляется со своим образом $\varphi(R) \subseteq Q$ и считается, что $R \subseteq Q$. Вместо $x/1$ пишут x.

8. Поле $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$ называется *полем рациональных чисел.* Считается, что $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ и $n/1 = n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Предложение. *Множество $\mathbb{Q}$ счетно.*

□ 1) Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно: отображение $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\alpha(2n) = n$, $\alpha(2n-1) = -n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ является изоморфизмом.

2) Множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ счетно вместе с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: отображение $\beta\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\beta(m,n) = (m+n)(m+n+1)/2 + n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ является изоморфизмом.

3) Так как $\mathbb{N}$ вкладывается в $\mathbb{Q}$, то $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Вместе с тем отображение $\gamma\colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, $\gamma(a,b) = a/b$ накрывает $\mathbb{Q}$ и поэтому $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| \geq |\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})| \geq |\mathbb{Q}|$. Следовательно, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. ■

Порядок для $\mathbb{Z}$ позволяет определить порядок для $\mathbb{Q}$: $a/b \leq x/y \Leftrightarrow ay \leq bx (a/b, x/y \in \mathbb{Q}, b > 0, y > 0)$. Он антисимметричен: $a/b \leq x/y$,$x/y \leq a/b \Leftrightarrow a/b = x/y$. И линеен: каждые два рациональных числа a/b и x/y сравнимы ($a/b \leq x/y$ или $x/y \leq a/b$). Порядок для $\mathbb{Q}$ согласован с операциями:

$$p < q \Leftrightarrow p + z < q + z\,(z \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow pz < qz \quad (z \in \mathbb{Q},\ z > 0).$$

Эта согласованность следует из согласованности с операциями порядка для $\mathbb{Z}$.

Лемма. *Каждое рациональное число меньше некоторого натурального.*

□ Пусть $q = a/b \in \mathbb{Q}$. Можно считать, что $b > 0$, так как $(-a)/(-b) = a/b$. Если $a \le 0$, то $q \le 1$. Пусть $a > 0$. Тогда $1 \le b \Rightarrow q \le a$. ■

Теорема Архимеда. *Для каждых рациональных чисел $p > 0$ и q существует натуральное число n такое, что $np \ge q$.*

□ По лемме существует натуральное число $n \ge r = q/p$. Это неравенство эквивалентно доказываемому. ■

Ясно, что в теореме неравенство $np \ge q$ можно заменить на строгое $np > q$.

Имея в виду согласованность порядка с операциями и теорему Архимеда, говорят, что $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \le)$ является *архимедовым полем.* Линейность порядка позволяет называть $(\mathbb{Q}, \le)$ *рациональной прямой.* В отличие от $(\mathbb{Z}, \le)$ прямая $(\mathbb{Q}, \le)$ не дискретна: между любыми двумя неравными рациональными числами есть другие. Это можно вывести из теоремы Архимеда, но проще заметить, что $p < r = (p+q)/2 < q$ для любых рациональных $p < q$.

9. Недостатком архимедова поля рациональных чисел является его *неполнота*: в нем существуют ограниченные множества, не имеющие граней.

Пример. Множество $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \le 2\}$ не имеет нижней и верхней граней в $\mathbb{Q}$.

Предположим, что существуют $q = a/b = \sup A \in \mathbb{Q}$. Тогда $q^2 = 2$. В самом деле, если $q^2 < 2$, то $(q + 1/n)^2 < 2$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$: по теореме Архимеда есть $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2q+1 < n(2-q^2)$, откуда $(q+1/n)^2 = q^2 + 2q/n + (1/n)^2 \le q^2 + 2q/n + 1/n = q^2 + (2q+1)/n < q^2 + 2 - q^2 = 2$. Таким образом, $q < q + 1/n \in A$. Это противоречит $q = \sup A$.

Но равенство $q^2 = 2$ для $q = a/b \in \mathbb{Q}$ невозможно. Докажем это. Так как $(-q)^2 = q^2$, то можно считать, что $a > 0$ и $b > 0$. Можно также предположить, что дробь a/b несократима. Равенство $q^2 = 2$ эквивалентно $a^2 = 2b^2$. Следовательно, $a = 2m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ (квадрат нечетного числа тоже нечетное число). Откуда $4m^2 = 2b^2$, $2m^2 = b^2$ и $b = 2n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $a/b = (2m)/(2n) = m/n$ в противоречии с предположением о несократимости. Следовательно, равенство $q^2 = 2$ невозможно и в $\mathbb{Q}$ нет числа $\sup A$.

По симметрии относительно нуля нижняя грань $\inf A$ должна равняться $-\sup A$ и поэтому в $\mathbb{Q}$ ее тоже нет.

10. Рассмотрим бесконечное поле $(F, +, \cdot)$ и семейство элементов $a_i \in F$ $(0 \le i \le n)$. Функция $p\colon F \to F$ со значениями

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (x \in F)$$

называется *полиномиальной функцией* или, коротко, *полиномом*. Если $a_n \neq 0$, то n называется степенью полинома p. Долгое время основной задачей алгебры считалась задача: *решить уравнение* $p(x) = 0$.

Легко решить уравнение первой степени: $a_0 + a_1 x = 0$ $(a_1 \neq 0)$. Его корректная разрешимость обеспечивается существованием в поле противоположных и обратных элементов. Единственным решением этого уравнения является элемент $x = -a_1^{-1}a_0$. В самом деле, $a_0 + a_1(-a_1^{-1}a_0) = a_0 - a_0 = 0$. Решение существует. Оно единственно: $a_0 + a_1 x = 0 \Rightarrow a_1 x = -a_0 \Rightarrow x = -a_1^{-1}a_0$.

Но уже среди уравнений второй степени есть неразрешимые в некоторых полях. Примерами служат уравнения $-2 + x^2 = 0$ и $1 + x^2 = 0$ в поле $\mathbb{Q}$. Неразрешимость первого была доказана в п. 9, а неразрешимость второго следует из *правила знаков*: благодаря согласованности порядка с операциями, если $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$ и $x > 0$, $y > 0$ или $x < 0$, $y < 0$, то $xy > 0$. Следовательно, $x^2 > 0$ при $x \neq 0$.

Замечание. Всюду дальше, как правило, рассматриваются ненулевые группы, кольца и поля. Это не оговаривается особо.

2.1.4. Решетки

Упорядоченные множества с бинарными гранями естественно связываются с алгебраическими системами. Общей теории таких множеств посвящена книга Г. Биркгофа [8].

1. *Верхняя полурешетка* $(L, \vee, \leq)$ составляется из *абелевой полугруппы идемпотентов* $(L, \vee)$ и упорядоченного множества $(L, \leq)$, согласованных условием $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$. *Нижняя полурешетка* $(L, \wedge, \leq)$ составляется из абелевой полугруппы $(L, \wedge)$ и упорядоченного множества $(L, \leq)$, согласованных условием $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Из определений следует, что $x \vee y = \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Это объясняет названия полурешеток. Докажем равенство $x \vee y = \sup\{x, y\}$ для верхней полурешетки $(L, \vee, \leq)$: $x \leq (x \vee y)$, так как $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, и если $x \leq z$, $y \leq z$, то $(x \vee y) \leq z$, так как $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$. Аналогично доказывается, что $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ для нижней полурешетки $(L, \wedge, \leq)$.

Вместо $(L, \vee, \leq)$ и $(L, \wedge, \leq)$ будем часто писать $(L, \vee)$ и $(L, \wedge)$ или просто L.

Примеры. 1) $(\mathscr{P}, \cup)$ и $(\mathscr{P}, \cap)$. 2) $(\mathbb{Z}, \max)$, $(\mathbb{Z}, \min)$. 3) $(\mathbb{Q}, \max)$, $(\mathbb{Q}, \min)$. 4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sup)$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \inf)$. 5) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \sup)$, $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \inf)$.

В двух последних примерах порядок поэлементный: $(x, y) \leq (a, b) \Leftrightarrow x \leq a$, $y \leq b$.

Упражнение. Пусть для множества H элементов мультипликативной абелевой полугруппы $(H, \cdot)$ определены: отношение порядка $a \leq b \Leftrightarrow ax = b$ разрешимо (a делит b) и операция $a \vee b = ab$. Доказать, что они согласованы и $(H, \vee, \leq)$ есть верхняя полурешетка.

2. *Решетка* $(L, \vee, \wedge)$ составляется из верхней и нижней полурешеток $(L, \vee)$ и $(L, \wedge)$, согласованных условием *поглощения*:

$$x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x.$$

Эти равенства являются ослабленным вариантом правил дистрибутивности.

Примеры. 1) $(\mathscr{P}, \cup, \cap)$. 2) $(\mathbb{Z}, \max, \min)$. 3) $(\mathbb{Q}, \max, \min)$. 4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sup, \inf)$. 5) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \sup, \inf)$.

Решетка называется (*относительно*) *полной*, если в ней для каждой (*ограниченной*) части существуют нижняя и верхняя грани.

Примеры. 1) $(\mathscr{P}, \cup, \cap)$ полная. 2) $(\mathbb{Z}, \max, \min)$ относительно полная. 3) $(\mathbb{Q}, \max, \min)$ не полная: множество $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ не имеет в $\mathbb{Q}$ граней (2.1.3, 9).

Если нужно явно указать порядок для решетки, то его вставляют в обозначение и вместо $(L, \vee, \wedge)$ пишут $(L, \vee, \wedge, \leq)$. Если явно указывать операции и порядок не нужно, то пишут просто L.

3. Назовем *орторешеткой* $(L, \vee, \wedge, \setminus)$ решетку $(L, \vee, \wedge)$ с наименьшим элементом $0 = \min L$ и третьей операцией $\setminus$, согласованной с $\vee$ и $\wedge$ условиями

$$\begin{aligned} &y \setminus x = y \setminus (x \wedge y), \quad (y \setminus x) \vee (x \wedge y) = y, \\ &(y \setminus x) \wedge (x \wedge y) = 0, \quad y \setminus (y \setminus x) = x \wedge y. \end{aligned}$$

Операция $\setminus$ называется *разностью* или *относительным дополнением*.

Пример. $(\mathscr{P}, \cup, \cap, \setminus)$.

Упражнение. Проверить для этой орторешетки условия согласованности.

Название $(L, \vee, \wedge, \setminus)$ связано с определением отношения $\perp$ ортогональности для множества L: $x \perp y \Leftrightarrow (x \vee y) \setminus y = x$. Симметричность $\perp$ следует из равенств $(y \vee x) \setminus x = (x \vee y) \setminus ((x \vee y) \setminus y) = (x \vee y) \wedge y = y$. Заметим, что $y \setminus x \perp x \wedge y$. Это следует из равенств $((y \setminus x) \vee (x \wedge y)) \setminus (x \wedge y) = y \setminus (x \wedge y) = y \setminus x$.

Пример. Для решетки $(\mathscr{P}, \cup, \cap, \setminus)$ ортогональность означает дизъюнктность: $X \perp Y \Longleftrightarrow X \cap Y = O$.

Если в орторешетке $(L, \vee, \wedge, \setminus)$ кроме $0 = \min L$ есть и $1 = \max L$, то для каждого $x \in L$ можно определить *дополнение* $x' = 1 \setminus x$. Верны равенства:

$$x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1, \quad (x')' = x.$$

Среди таких орторешеток выделяются *ортомодулярные* решетки, в которых разность связана с дополнением тождеством

$$y \setminus x = y \wedge (x \wedge y)'.$$

Упражнение. Доказать для элементов ортомодулярной решетки следующие соотношения: $y \setminus 0 = y$ $0 \setminus x = 0$, $y \setminus y = 0$, $x \perp y \Rightarrow x \wedge y = 0$, $x \perp y \Longleftrightarrow x \leq y'$.

4. Решетка $(L, \vee, \wedge)$ называется *дистрибутивной*, если операции $\vee$ и $\wedge$ дистрибутивны друг по другу:

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

Упражнение. Доказать, что эти тождества эквивалентны.

Примеры. 1) Решетка $(\mathscr{P}, \cup, \cap)$ дистрибутивна. 2) Решетка $(\mathscr{L}(G), \vee, \wedge)$ подгрупп группы G недистрибутивна. По определению, $F \vee H = G(F \cup H)$ — подгруппа, порожденная в G множеством $F \cup H$ и $F \wedge H = F \cap H$ $(F, Y \in \mathscr{L}(G))$. 3) Решетка $(I(R), \vee, \wedge)$ идеалов кольца R недистрибутивна. По определению, $A \vee B = I(A \cup B)$ и $A \wedge B = A \cap B$ $(A, B \in I(R))$.

Упражнение. Проверить недистрибутивность решеток $\mathscr{L}(G)$ и $I(R)$.

5. Дистрибутивная орторешетка называется *булевой*. Среди булевых решеток выделяются решетки с наибольшим элементом. Их называют *булевыми алгебрами*.

Пример. Решетка $(\mathscr{P}, \cup, \cap, \setminus)$ является булевой алгеброй.

По аналогии с булевым кольцом множеств $(\mathscr{P}, +, \cdot)$, описанным в 2.1.3, 3, для булевой решетки $(B, \vee, \wedge, \setminus)$ тождествами

$$x + y = (x \vee y) \setminus (x \wedge y), \quad xy = x \wedge y$$

определяются сложение и умножение. Вместе с B они составляют коммутативное кольцо $(B, +, \cdot)$ мультипликативных идемпотентов: $x^2 = x \wedge x = x$ $(x \in B)$. Такие кольца называются *булевыми алгебрами.*

Это оправдывается тем, что каждое булево кольцо $(B, +, \cdot)$ с помощью тождеств

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge y = xy, \quad y \setminus x = y + xy$$

определяет булеву решетку $(B, \vee, \wedge, \setminus)$. При этом $0 = \min B$ и $1 = \max B$, если в кольце $(B, +, \cdot)$ есть единица. Кроме того, $x + y = (x \vee y) \setminus (x \wedge y)$.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Для булевых алгебр верны *правила двойственности*

$$(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'.$$

Они эквивалентны тождествам $1 + (x + y + xy) = (1 + x)(1 + y)$ и $1 + xy = (1 + x) + (1 + y) + (1 + x)(1 + y)$.

Пример. Рассмотрим класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(E)$ всех конечных частей множества E. Он образует булевы решетку $(\mathscr{K}, \cup, \cap)$ и кольцо $(\mathscr{K}, +, \cdot)$. Они являются булевыми алгебрами ессли множество E конечно.

В булевом кольце противоположным (обратным по сложению) элементом для x является сам этот элемент: $-x = x$. Действительно, $x + x = (x + x)(x + x) = x + x + x + x$ и, следовательно, $x + x = 0$. Сложение в булевом кольце совпадает с вычитанием: $x + y = x - y = y - x = y + x$. Поэтому сумму элементов булева кольца часто называют их *симметрической разностью.*

Замечание. Коммутативность булева кольца есть следствие идемпотентности его элементов: $x + y = (x + y)(x + y) = x + xy + yx + y \Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow xy = -yx = yx$. Поэтому булево кольцо можно определить как кольцо мультипликативных идемпотентов, не требуя заранее его коммутативности.

Так как $xy = -xy$, то $x \vee y = x + y - xy = x \star y$ есть *звездное произведение* элементов булева кольца [17, § 97]. Его можно определить еще равенством $(1 - x)(1 - y) = 1 - (x \vee y)$.

6. Рассмотрим булевы решетки $(A, \vee, \wedge, \setminus)$, $(B, \vee, \wedge, \setminus)$ и определяемые ими булевы кольца $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$. Гомоморфизм

$\varphi\colon A \to B$ кольца $(A, +, \cdot)$ в кольцо $(B, +, \cdot)$ является гомоморфизмом решетки $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ в решетку $(B, \vee, \wedge, \setminus)$. Это следует из тождеств

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x + y + xy) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(xy) = \varphi(x) \vee \varphi(y),$$
$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$
$$\varphi(y \setminus x) = \varphi(y + xy) = \varphi(y) + \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y) \setminus \varphi(x).$$

Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ является монотонным отображением решетки A в решетку B:

$$x \leq y \Rightarrow xy = x \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Пример. Рассмотрим класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ всех частей множества E и множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, \mathbb{B})$ всех отображений E в $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. По правилам действий для булевой алгебры $(\mathbb{B}, +, \cdot)$ определим сложение и умножение для $\mathscr{F}$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (x \in E).$$

Множество $\mathscr{F}$ с этими операциями составляет булеву алгебру $(\mathscr{F}, +, \cdot)$. Нулем и единицей для нее служат тождественные нуль и единица.

Отображение $\varphi\colon \mathscr{P} \to \mathscr{F}$ ставит в соответствие каждому множеству $A \in \mathscr{P}$ функцию $\varphi_A \in \mathscr{F}$ со значениями $\varphi_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $\varphi_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Такое отображение φ есть изоморфизм булевой алгебры $(\mathscr{P}, +, \cdot)$ на булеву алгебру $(\mathscr{F}, +, \cdot)$.

Упражнение. Доказать сформулированные в примере утверждения.

7. Соответствия между множествами A и B были определены как части декартова произведения $A \times B$. Они составляют булеву алгебру $\mathscr{P}(A \times B)$. Порядок по включению для соответствий определяет их сужения и продолжения. Различные специальные соответствия тоже образуют решетки, но не обязательно булевы. Особенно часто встречаются решетки, составленные из эквивалентностей. Это связано с тем, что эквивалентности равносильны разбиениям.

Рассмотрим класс $\mathscr{S} = \mathscr{S}(E) \subseteq \mathscr{P}(E \times E)$ всех эквивалентностей для E. Пусть $R, S \in \mathscr{S}$. Тогда $R \wedge S = R \cap S$. Если R и S определяют разбиения E на множества R_i и S_j, то $R \cap S$ определяет разбиение E на множества $R_i \cap S_j$. А $R \vee S$ есть эквивалентность, порожденная в $E \times E$ объединением $R \cup S$.

Наименьшей эквивалентностью является *равенство* $\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$, а наибольшей — *тривиальная эквивалентность* $E \times E$.

Класс $\mathscr{S}$ и операции $\vee, \wedge$ составляют решетку $(\mathscr{S}, \vee, \wedge)$. Она не является булевой.

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

Замечание. Решетка $(\mathscr{S}(E), \vee, \wedge)$ не является подрешеткой $\mathscr{P}(E \times E), \cup, \cap)$: $\vee \neq \cup$, хотя $\wedge = \cap$.

2.1.5. Числа

Среди полей вещественного и комплексного типов выделяются поля вещественных и комплексных чисел. Они описаны в главе 11 книги [17].

1. *Полем вещественных чисел* называется всякое относительно полное архимедово поле. Все такие поля порядково и алгебраически изоморфны и поэтому отождествляются. Для них принято общее обозначение $\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел отождествляется с изоморфным ему подполем $\mathbb{R}$, порожденным целыми кратными единицы, и считается частью поля вещественных чисел: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Существует много конкретных представлений поля $\mathbb{R}$. Наиболее удобной для математического анализа является канторовская модель, основанная на понятии сходимости. Рассмотрим кольцо $\mathscr{R} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ последовательностей рациональных чисел. *Абсолютная величина* $|x|$ числа $x \in \mathbb{Q}$ определяется равенствами $|x| = x$ $(x \geq 0)$ и $|x| = -x$ $(x < 0)$. Назовем последовательность $f \in \mathscr{R}$ *сходящейся* (*в себе*), если для каждого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n(\varepsilon)$ такой, что $|f(p) - f(n)| \leq \varepsilon$ $(p, n \geq n(\varepsilon))$. Сходящиеся последовательности образуют подкольцо $\mathscr{K}$ кольца $\mathscr{R}$. Назовем последовательность $\alpha \in \mathscr{R}$ *бесконечно малой*, если для каждого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n(\varepsilon)$ такой, что $|\alpha(n)| \leq \varepsilon$ $(n \geq n(\varepsilon))$. Бесконечно малые последовательности образуют максимальный идеал $\mathscr{V}$ в кольце $\mathscr{K}$ сходящихся последовательностей. Его максимальность следует из того факта, что для каждой $f \in \mathscr{K} \setminus \mathscr{V}$ существует $g \in \mathscr{K}$ такая, что $fg = (1) + \alpha$ для *тождественной единицы* $(1) \in \mathscr{K}$ и бесконечно малой $\alpha \in \mathscr{V}$. Поэтому добавление f к $\mathscr{V}$ влечет $(1) \in \mathscr{I}$ и равенство $\mathscr{I} = \mathscr{K}$ для идеала $\mathscr{I}$, порожденного множеством $\{f\} \cup \mathscr{V}$. По теореме 2.1.3, 6 фактор-кольцо $\mathbb{R} = \mathscr{K}/\mathscr{V}$ является полем. Вещественными числами в этой модели являются множества $\bar{f} = f + \mathscr{V}$ *эквивалентных* (отличающихся на бесконечно малую) сходящихся последовательностей рациональных чисел. Рациональное число $q \in \mathbb{Q}$

отождествляется с вещественным числом $\bar{q} = (q) + \mathscr{V}$, где (q) — постоянная последовательность со значением q.

Порядок для $\mathbb{Q}$ позволяет определить порядок для $\mathbb{R}$. Пусть $\bar{f} = f + \mathscr{V}$, $\bar{g} = g + \mathscr{V} \in \mathbb{R}$. Тогда $\bar{g} > \bar{f}$ означает, что $g(n) - f(n) > \varepsilon$ $(n \geq n(\varepsilon))$ для некоторых рационального $\varepsilon > 0$ и номера $n(\varepsilon)$. Это определение корректно: оно не зависит от выбора представляющих последовательностей $f, g \in \mathscr{K}$. Установленный для $\mathbb{R}$ порядок согласован с операциями. Поле $\mathbb{R}$ с таким порядком является относительно полным архимедовым полем.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Вещественные числа позволяют решить уравнение $x^m = b$ при любых $m \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

Пример. Пусть $b > 0$, $b \in \mathbb{Q}$. Решение $x = b^{1/m} > 0$ уравнения $x^m = b$ определяется тогда рекуррентной последовательностью

$$f(n+1) = f(n) + (b - f^m(n))/mf^{m-1}(n) \quad (n \geq 0)$$

рациональных чисел с произвольным начальным членом $x(0) = a \in \mathbb{Q}$. Используя биноминальную формулу Ньютона, можно доказать, что

$$|f(p) - f(n)| \leq \varepsilon\, (p, n \geq m^2 b^{m-1}|a^m - b|\varepsilon^{-1} + 1)$$

для каждого рационального $\varepsilon > 0$. Последовательность $f(n)$ сходится. Кроме того, $f(n+1) \leq f(n)$ и $0 \leq f^m(n) - b \leq (1 - 1/m)^n |a^m - b|$ $(n \geq 1)$. Значит, $x = b^{1/m} = f + \mathscr{V}$. Правило, определяющее последовательность f, называется *алгоритмом Ньютона.* Этот алгоритм удобно применять для вычисления конкретных корней (например, $\sqrt{2}$). Он пригоден и для вещественных чисел $b > 0$.

2. *Поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$ получается из поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ присоединением мнимой единицы i, являющейся решением уравнения $x^2 = -1$. Комплексные числа можно отождествить с точками вещественной плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. При этом $\mathbb{R} \times \{0\}$ отождествляется с вещественной прямой $\mathbb{R}$ и считается, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. *Мнимая единица* i отождествляется с точкой $(0, 1)$, а $\{0\} \times \mathbb{R}$ называется *мнимой прямой* и обозначается $\mathbb{R}i$. Отождествление $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ приводит к равенству $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ и удобной записи комплексных чисел: $c = (a, b) = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Числа $bi = (0, b)$ называются *мнимыми.*

Сумма комплексных чисел $c = a + bi$, $z = x + yi$ равна $c + z = (a + x) + (b + y)i$. Произведение определяется правилом дистрибутивности и равенством $i^2 = -1$:

$$cz = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

Равенство $i^2 = -1$ показывает, что для поля комплексных чисел не выполняется правило знаков и поэтому нет согласованного с операциями линейного порядка.

Абсолютной величиной комплексного числа $z = x + yi$ называется положительное число $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Верны соотношения

$$|z| > 0 \ (z \neq 0) \text{ и } |0| = 0, \quad |c + z| \leq |c| + |z|, \quad |cz| = |c||z|.$$

Среднее соотношение называется *неравенством треугольника.* Из него следует, что

$$||c| - |z|| \leq |c - z|.$$

Комплексное число $z^* = x - yi$ называется *сопряженным* для $z = x + yi$. Верны равенства

$$(c + z)^* = c^* + z^*, \quad (cz)^* = z^* c^*, \quad c^* c = |c|^2, \quad c^{**} = c.$$

Сопряжение имеет ясный геометрический смысл: оно осуществляет *зеркальное отражение* плоскости относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$, оставляя точки $\mathbb{R}$ неподвижными. Равенство $c^* = c$ означает, что c есть вещественное число.

В связи с отождествлением комплексного числа z с точкой плоскости (x, y) равенство $z = x + iy$ называют *декартовым разложением* числа z. Соответственно $\operatorname{re} z = x$ и $\operatorname{im} z = y$ называют его *вещественной и мнимой частями.* Кроме декартова для $z \neq 0$ используется *полярное разложение* $z = |z|w$, где $w = u + iv = z/|z|$ характеризуется равенством $|w| = 1$. Такое разложение единственное. В самом деле, пусть $z = rc$, где $r > 0$ и $|c| = 1$ для $c = a + bi$. Тогда $|z|u = ra$, $|z|v = rb$ и $|z| = r|c| = r$, откуда $u = a, v = b$. Декартово и полярное разложения комплексного числа имеют ясный геометрический смысл: первое описывает разложение вектора z по координатным осям, а второе — длину вектора z и угол, который он образует с горизонтальной осью.

Замечание. Рассмотрим комплексные числа $c_0, c_1, \ldots, c_m$ $(m \geq 1)$ и определяемый ими полином $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ со значениями $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m$ $(z \in \mathbb{C})$. Будем предполагать, что $c_m \neq 0$. Основная теорема алгебры комплексных чисел утверждает, что алгебраическое уравнение $p(z) = 0$ имеет решение

$z = z_0 \in \mathbb{C}$. В частности, уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет решение $z = i$.

3. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел служит примером архимедова поля, не являющегося относительно полным. С ним связано поле $\mathbb{G} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ *гауссовых чисел*, полученных из Q присоединением мнимой единицы i. По определению, $\mathbb{G}$ есть векторная алгебра со скалярным полем $\mathbb{Q}$, базой $\{1, i\}$ и таблицей умножения $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot i = i = i \cdot 1$, $i \cdot i = -1$. Так как таблица умножения симметрична и в ней есть единица 1, то $(\mathbb{G}, +, \cdot)$ является унитарным коммутативным кольцом. Это кольцо является полем: если $a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbb{Q})$, то $a^2 + b^2 \neq 0$ и $(a+bi)^{-1} = (a^2+b^2)^{-1}a - (a^2+b^2)^{-1}bi$. Из определений следует,что $1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$.

Поля $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{G}$ имеют нулевую характеристику: $n \cdot 1 \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Примером поля с ненулевой характеристикой служит поле $\mathbb{Z}/I(5) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ вычетов по модулю 5. Для этих вычетов верны равенства $5 \cdot \bar{1} = \bar{0}$ и $\bar{1}^2 + \bar{2}^2 = \bar{0}$.

Операторные уравнения для функций со значениями в $\mathbb{Q}$, $\mathbb{G}$ и различных конечных полях используются при решении некоторых теоретических и прикладных задач.

4. В нестандартном анализе применяются другие вещественные числа. Этот анализ строится как логическая модель. Но об используемых там числах определенное представление можно получить, оставаясь в стандартных алгебраических рамках.

Множество $\mathscr{N} = \mathscr{F}_0(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ финитных последовательностей образует идеал в кольце $\mathscr{R} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$. Он не максимальный, так как содержится, например, в идеале $\mathscr{M} = \{h \in \mathscr{R} \mid h(2n) = 0$ $(n \geq n(0))\}$ последовательностей с финитной четной частью. Поэтому фактор-кольцо $\bar{\mathbb{Q}} = \mathscr{R}/\mathscr{N}$ не является полем. Его элементами служат множества $\bar{f} = f + \mathscr{N}$ последовательностей, отличающихся от f только на конечном числе номеров: $g \in f + \mathscr{N}$ означает, что $g(n) - f(n) = 0$ $(n \geq n(0))$. Назовем элементы $\bar{\mathbb{Q}}$ *обобщенными рациональными числами.* Отождествляя $q \in \mathscr{R}$ с $\bar{q} = (q) + \mathscr{N} \in \bar{\mathbb{Q}}$, можно считать, что $\mathscr{R} \subset \bar{\mathbb{Q}}$.

Среди обобщенных рациональных чисел есть делители нуля. Пусть, например, $a(2n) = 0$, $a(2n-1) = 1$ и $b(2n) = 1$, $b(2n-1) = 0$ $(n \geq 1)$. Тогда $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ и $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$. Для существования обратного числа $\bar{g} = 1/\bar{f}$ необходимо и достаточно, чтобы составляющие число $\bar{f}$ последовательности f не имели нулевых подпоследовательностей: $f(n) \neq 0$ $(n \geq n(0))$. В частности, не существует чисел $1/\bar{a}$ и $1/\bar{b}$.

Используя порядок для $\mathbb{Q}$, можно определить порядок для $\bar{\mathbb{Q}}$: $\bar{g} \leq \bar{f}$ означает, что $f(n) \leq g(n)$ $(n \geq n(0))$. Этот порядок не линейный: $\bar{a}$ и $\bar{b}$ могут быть не сравнимы. Кроме того, $\bar{a} > 0$ и $\bar{b} > 0$, но $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$: порядок не согласован с умножением.

Заметим, что $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{V}$: каждая финитная последовательность бесконечно мала. Из второй теоремы об изоморфизме (2.1.2, 11) следует, что $\mathbb{R} = \mathscr{K}/\mathscr{V} = \bar{\mathscr{K}}/\bar{\mathscr{V}}$ для $\bar{\mathscr{K}} = \mathscr{K}/\mathscr{N}$, $\bar{\mathscr{V}} = \mathscr{V}/\mathscr{N}$. Стандартные вещественные числа можно отождествлять с множествами $\bar{f} + \bar{\mathscr{V}}$, где $\bar{f} = f + \mathscr{N}$ $(f \in \mathscr{K})$ и $\bar{\mathscr{V}} = \{\alpha + \mathscr{N} \mid \alpha \in \mathscr{V}\}$. Назовем элементы $\bar{f} \in \bar{\mathscr{K}}$ *обобщенными вещественными числами*, а элементы $\bar{\alpha} \in \bar{\mathscr{V}}$ — *бесконечно малыми числами.* При отождествлении $\mathbb{R}$ с $\bar{\mathscr{K}}/\bar{\mathscr{V}}$ каждое вещественное число представляется множеством обобщенных. Они позволяют более детально различать сходящиеся последовательности рациональных чисел.

В соответствии с представляющими их последовательностями обобщенные рациональные числа делятся на ограниченные и неограниченные. Ограниченность $\bar{f} = f + \mathscr{N} \in \bar{\mathbb{Q}}$ означает, что $|f(n)| \leq r$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Все обобщенные вещественные числа ограничены. Среди них выделяются рациональные и бесконечно малые. Среди неограниченных чисел выделяются бесконечно большие, обратные бесконечно малым. Бесконечно малые числа меньше любого рационального, а бесконечно большие — больше.

Замечание. Рассмотрим произвольный максимальный идеал $\mathscr{M}$, содержащий $\mathscr{N}$, и поле $\bar{\bar{\mathbb{Q}}} = \mathscr{R}/\mathscr{M} \simeq \bar{\mathbb{Q}}/\bar{\mathbb{M}}$ для $\bar{\mathbb{Q}} = \mathscr{R}/\mathscr{N}$, $\bar{\mathbb{M}} = \mathscr{M}/\mathscr{N}$. Если считать аксиомой гипотезу континуума, то можно доказать, что все такие поля $\bar{\bar{\mathbb{Q}}}$ изоморфны. Недостатком такой модели является неопределенность множества $\mathscr{M}$ бесконечно малых чисел. Например, из максимальности идеала $\mathscr{M}$ следует, что ровно одно из чисел $\bar{\bar{a}} = a + \mathscr{M}$ и $\bar{\bar{b}} = b + \mathscr{M}$ с рассматривавшимися a и b бесконечно мало, но нужно уточнять, какое.

Аналогичную конструкцию нестандартных вещественных чисел можно построить, заменив поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел полем $\mathbb{R}$ стандартных вещественных чисел и кольцо $\mathbb{Q}$ — кольцом $\mathbb{R}$.

5. В неархимедовом анализе вместо вещественных рассматриваются p-адические числа, получающиеся пополнением поля $\mathbb{Q}$ при замене абсолютной величины p-адической нормой (p — простое натуральное число). Такое пополнение описано в гл. 18 книги [17].

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $x = m/n \in \mathbb{Q}$ и $m = p^a u$, $n = p^b v$, где $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}$ не делятся на p и $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда $x = p^{a-b} \cdot u/v$, где $a-b = c \in \mathbb{Z}$. Числа $a = \operatorname{ord} m$, $b = \operatorname{ord} n$, $c = \operatorname{ord} x$ называются *порядками* a, b, x. Когда нужно явно отметить p, то говорят *p-порядок* и пишут ord_p. Удобно считать, что $\operatorname{ord} 0 = \infty$. Как нетрудно проверить, $\operatorname{ord}(lm) = \operatorname{ord} l + \operatorname{ord} m$ и поэтому $\operatorname{ord}(lm) - \operatorname{ord}(ln) = \operatorname{ord} m - \operatorname{ord} n$ для любых $l, m, n \in \mathbb{Z}$. Порядок дроби определен корректно: он не зависит от ее представления.

Определим *p-норму* числа $x \in \mathbb{Q}$ равенством

$$|x|_p = p^{-\operatorname{ord} x}.$$

Для всех $x, y \in \mathbb{Q}$ верны соотношения

$$|x|_p > 0 \ (x \neq 0) \text{ и } |0|_p = 0, \quad |x+y|_p \leq |x|_p \vee |y|_p, \quad |xy|_p = |x|_p |y|_p.$$

Среднее соотношение называется *неравенством равнобедренного треугольника.* Из него следует, что

$$|x - y|_p = |y|_p \quad (|x|_p < |y|_p).$$

Нормы, для которых верно неравенство равнобедренного треугольника, называются *неархимедовыми*, а остальные — архимедовыми.

Упражнение. Доказать, что $|x|_p \leq 1$ $(x \in \mathbb{Z})$.

По аналогии с $\mathscr{K}$ и $\mathscr{V}$ при замене абсолютной величины на p-норму определяется кольцо $\mathscr{K}_p$ *p-сходящихся* последовательностей и его максимальный идеал $\mathscr{V}_p$ *бесконечно p-малых* последовательностей рациональных чисел. Поле $\mathbb{Q}_p = \mathscr{K}_p/\mathscr{V}_p$ называется *полем p-адических чисел.* Этими числами являются множества $f + \mathscr{V}_p$ *p-эквивалентных* (отличающихся на бесконечно p-малую) p-сходящихся последовательностей рациональных чисел.

Подчеркнем, что p-сходимость имеет совсем другой характер, чем обычная. Она отражает делимость на число p.

Примеры. 1) Пусть $f(n) = p^n$. Тогда $\operatorname{ord} f(n) = n$, $|f(n)|_p = p^{-n} \to 0$. В частности, $2^n \to 0$ при $p = 2$.

2) Пусть $g(n) = p^{-n}$. Тогда $\operatorname{ord} g(n) = -n$, $|g(n)|_p = p^n \to \infty$. В частности, $2^{-n} \to \infty$ при $p = 2$.

Замечание. Нестандартный и неархимедов анализы не будут использоваться в книге. Нестандартные вещественные и

p-адические числа описаны здесь только для того, чтобы показать неединственность стандартной модели. По нестандартному и неархимедову анализу имеется обширная литература [140, 142].

6. В главе 2 книги [63] вводится коммутативное упорядоченное кольцо $(A, \oplus, \odot, \leq)$ с нейтральными элементам и $\bar{0}$ и $\bar{1}$: $x \odot \bar{0} = \bar{0}$, $x \odot \bar{1} = x$, $x \oplus \bar{0} = x$ $(x \in A)$. Согласованность порядка с операциями выражается соотношениями для сравнимых элементов $x \odot x \geq \bar{0}$, $x \oplus z \leq y \oplus z$ $(x \leq y)$, $x \odot z \leq y \odot z$ $(x \leq y, z \geq \bar{0})$.

В качестве примеров рассматриваются полукольца, элементами которых являются числа из расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$, и алгебраические операции смешиваются с порядковыми. Порядок всюду индуцируется из $[-\infty, \infty]$.

Пример 1. $A = [-\infty, \infty]$, $\oplus = \vee$, $\odot = +$, $\bar{0} = -\infty$, $\bar{1} = 0$.

Пример 2. $A =]-\infty, \infty]$, $\oplus = \wedge$, $\odot = +$, $\bar{0} = \infty$, $\bar{1} = 0$.

Пример 3. $A = [0, \infty]$, $\oplus = \vee$, $\odot = \wedge$, $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = \infty$.

Пример 4. $A = [0, \infty]$, $\oplus = \wedge$, $\odot = \vee$, $\bar{0} = \infty$, $\bar{1} = 0$.

Пример 5. $A = [0, \infty[$, $\oplus = \vee$, $\odot = \cdot$, $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = 1$.

Упражнение. Проверить дистрибутивность и согласованность операций с порядком в этих примерах.

Заметим, что в примерах 1–5 все элементы идемпотентны по сложению, а в примерах 3, 4 — и по умножению.

2.2. Линейная алгебра

Основными объектами линейной алгебры служат векторные пространства и векторные алгебры. Изучаются их гомоморфизмы. Векторным пространствам и алгебрам посвящены главы 12 и 13 книги [17]. Различные приложения линейной алгебры в математике и физике описаны в [50]. В ней много интересных задач. Связь линейной алгебры с геометрией детально показана в томе II книги [73].

2.2.1. Векторные пространства

Так называются аддитивные абелевы группы с мультипликативными операторами из поля.

1. Рассмотрим множество $\mathbb{K}$, абелеву группу (E, g) и *внешнее умножение* $\cdot\colon \mathbb{K} \times E \to E$, согласованные *правилом дистрибутивности*

$$\alpha g(x, y) = g(\alpha x, \alpha y) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E).$$

Они составляют *группу с левыми операторами* $(\mathbb{K}, E) = (\mathbb{K}, E, g, \cdot)$. *Операторами* называются элементы множества $\mathbb{K}$. Элементы группы (E, g) называются *векторами.* Аналогично определяется *группа с правыми операторами* $(E, \mathbb{K}, g, \cdot)$, внешним умножением $\cdot\colon E \times \mathbb{K} \to E$ и правилом

$$g(x, y)\alpha = g(x\alpha, y\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E).$$

Правила дистрибутивности в левой аддитивной и левой мультипликативной записях имеют вид

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E).$$

В дальнейшем будем, как правило, использовать левую аддитивную запись и левые операторы называть просто *операторами.*

Заметим, что $\alpha 0 = 0$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ 0 \in E.)$ В самом деле, $\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0$. Поэтому $\alpha(-x) = -\alpha(x)$: $\alpha(x) + \alpha(-x) = \alpha(x - x) = \alpha 0 = 0$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E)$.

Пример. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, аддитивная абелева группа $(E, +)$ и внешнее умножение $nx = x + \dots + x$ (n раз), $(-n)x = -nx (n \in \mathbb{N})$, $0x = 0$ $(x \in E)$ составляют группу с операторами $(\mathbb{Z}, E)$. Так как внешнее умножение для $(\mathbb{Z}, E)$ определяется сложением для E, то группу E можно отождествить с $(\mathbb{Z}, E)$. Каждую группу можно считать *группой с целочисленными операторами.*

В мультипликативной записи вместо nx используется $x^n = x \cdots x$ (n раз), $x^{-n} = (x^n)^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $x^0 = 1$ $(x \in E)$. Целые кратные nx и степени x^n рассматривались в 2.1.2,3.

Общие определения и предложения для групп переносятся на группы с операторами. Подгруппа $(\mathbb{K}, A)$ группы $(\mathbb{K}, E)$ составляется из множества $\mathbb{K}$ и подгруппы A группы E, *инвариантной* по внешнему умножению: $\mathbb{K}A \subseteq A$. Фактор-группа $(\mathbb{K}, E/N)$ составляется из множества $\mathbb{K}$ и фактор-группы E/N по инвариантной подгруппе N группы E. Нормальность N позволяет производить факторизацию, а инвариантность делает $(\mathbb{K}, N)$ и $(\mathbb{K}, E/N)$ группами с операторами.

При $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ для каждой нормальной группы N верно равенство $\mathbb{Z}N = N$ и фактор-группа $(\mathbb{Z}, E/N)$ отождествляется с E/N.

2. Рассмотрим мультипликативную группу $(\mathbb{K}, \cdot)$, аддитивную группу $(E, +)$ и внешнее умножение $\mathbb{K} \times E \to E$, которое тоже будем обозначать $\cdot$. Они составляют *группу с мультипликативными операторами* $(\mathbb{K}, E) = (\mathbb{K}, E, +, \cdot)$, если для внешнего умножения, кроме правил дистрибутивности, выполняется еще *правило ассоциативности*:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x \in E).$$

Мультипликативные операторы коротко называют *мультипликаторами.*

Пример. Мультипликативная полугруппа $(\mathbb{Z}, \cdot)$ целых чисел, аддитивная группа $(E, +)$ и внешнее умножение $(n, x) \to nx$ $(n \in \mathbb{Z},\ x \in N)$ составляют группу с мультипликаторами $(\mathbb{Z}, E) = (\mathbb{Z}, E, +, \cdot)$.

3. Рассмотрим кольцо $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, аддитивную *абелеву* группу $(E, +)$ и внешнее умножение $\cdot\colon\ \mathbb{K} \times E \to E$. Они составляют *левый* $\mathbb{K}$-*модуль* $(\mathbb{K}, E) = (\mathbb{K}, E, +, +, \cdot, \cdot)$, если для внешнего умножения, кроме правил ассоциативности и дистрибутивности по сложению для E, выполняется еще *правило дистрибутивности по сложению для* $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x \in E).$$

Если кольцо $\mathbb{K}$ унитарно и внешнее умножение *сохраняет нейтральность единицы*

$$1x = x \quad (1 \in \mathbb{K},\ x \in E),$$

то $\mathbb{K}$-модуль $(\mathbb{K}, E)$ называется *унитарным.* Левый $\mathbb{K}$-модуль будем называть $\mathbb{K}$-*модулем* или просто *модулем,* если ясно, какое кольцо $\mathbb{K}$ имеется в виду. Аналогично определяется правый $\mathbb{K}$-модуль $(E, \mathbb{K}) = (E, \mathbb{K}, +, +, \cdot, \cdot)$. В нем используются правые операторы.

Пример. Кольцо $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ целых чисел, аддитивная абелева группа $(E, +)$ и внешнее умножение $(n, x) \to nx$ составляют модуль $(\mathbb{Z}, E)$. Из определения целых кратных следует, что $(m + n)x = mx + nx$ $(m, n \in \mathbb{Z},\ x \in E)$. Модуль $(\mathbb{Z}, E)$ унитарный. Таким образом, каждую аддитивную абелеву группу можно считать $\mathbb{Z}$-модулем.

Подмодуль $(\mathbb{K}, N)$ модуля $(\mathbb{K}, E)$ составляется из кольца $\mathbb{K}$ и инвариантной подгруппы N группы E: $\alpha N \subseteq N$ $(\alpha \in \mathbb{K})$.

Фактор-модуль $(\mathbb{K}, E/N)$ модуля $(\mathbb{K}, E)$ по подмодулю $(\mathbb{K}, N)$ составляется из кольца $\mathbb{K}$ и фактор-группы E/N. Внешнее умножение определяется по формуле $\alpha(x+N) = \alpha x+N$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x \in E)$.

Упражнение. Проверить согласованность такого внешнего умножения с остальными операциями.

Замечание. Используя вложение произвольного кольца в унитарное, можно каждый модуль вложить в некоторый унитарный. Это позволяет, как правило, рассматривать только унитарные модули.

Упражнение. Описать вложение модуля в унитарный подробно.

4. Если кольцо операторов $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ является *полем*, то унитарный модуль $(\mathbb{K}, E)$ называется *векторным пространством*. Элементы поля $\mathbb{K}$ называют *скалярными операторами* или *скалярами*.

В векторном пространстве *нет делителей нуля*: если $\alpha\beta = 0$ или $\alpha x = 0$, где α, β — скаляры, а x — вектор, то соответственно $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ и $\alpha = 0$ или $x = 0$. В самом деле, $\alpha\beta = 0,\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \beta = \alpha^{-1}0 = 0$ и $\alpha \neq 0,\ \alpha x = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\alpha)x = 1x = x = 0$. В модуле делители нуля могут быть.

Пример. В модуле $(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ — кольцо вычетов (2.1.3, 5), есть делители нуля: $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$.

Замечание. В общей теории векторными пространствами называются и модули с операторами из некоммутативного поля. В некоторых задачах приходится рассматривать неассоциативные кольца операторов и частично отказываться от дистрибутивности. Действия с векторами тогда значительно сложнее.

Спецификой действий выделяются также векторные пространства с конечными скалярными полями (в частности, с булевым полем $\mathbb{B} = \{0, 1\}$). В дальнейшем, как правило, рассматриваются бесконечные скалярные поля. Некоторые предложения верны только для них.

Пример 1. Пусть $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ — поле, X — множество и $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ — множество функций на X со значениями в $\mathbb{K}$ (*скалярных функций на* X). Сложение и умножение для $\mathbb{K}$ определяют сложение и умножение для $\mathscr{F}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (f, g \in \mathscr{F},\ x \in X).$$

Верны утверждения. 1) $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ — коммутативное унитарное кольцо. 2) $(\mathbb{K}, \mathscr{F}) = (\mathbb{K}, \mathscr{F}, +, +, \cdot, \cdot)$ — векторное пространство. 3) Отображение

$\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathscr{F}$, $\varphi(\alpha) = \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}(x) = \alpha$ $(x \in X)$ есть вложение поля $\mathbb{K}$ в кольцо $\mathscr{F}$. 4) Постоянная $\bar{0}$ является нулем кольца $\mathscr{F}$. 5) Постоянная $\bar{1}$ является единицей кольца $\mathscr{F}$. 6) Если $|X| > 1$, то в кольце $\mathscr{F}$ есть делители нуля.

Упражнение. Проверить утверждения 1–6.

Пример 2. Пусть $(\mathbb{K}, E)$ — векторное пространство, X — множество и $\mathscr{G} = \mathscr{F}(X, E)$ — множество функций на X со значениями в E (*векторных функций на* X). Сложение и внешнее умножение для E определяют сложение и умножение для $\mathscr{G}$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad (f \in \mathscr{F},\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Поле $\mathbb{K}$ и множество $\mathscr{G}$ векторных функций с этими операциями составляют векторное пространство $(\mathbb{K}, \mathscr{G}) = (\mathbb{K}, \mathscr{G}, +, +, \cdot, \cdot)$.

Упражнение. Проверить это утверждение.

5. Геометрия векторного пространства тесно связана с фундаментальным понятием линейной независимости векторов.

Рассмотрим векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$. Назовем семейство скаляров α_i $(i \in I)$ *финитным*, если $\alpha_i = 0$ для всех $i \in I \setminus K$, где K — некоторая конечная часть множества индексов I. В частности, возможно $K = O$ и $\alpha_i = 0$ для всех $i \in I$. Такое семейство называется *нулевым*. Если $\alpha_i \neq 0$ для некоторых индексов $i \in I$, то семейство α_i называется *ненулевым*. Для каждых финитного семейства скаляров α_i и семейства векторов x_i определена *линейная комбинация* $\sum \alpha_i x_i$, равная сумме конечного множества ненулевых векторов $\alpha_i x_i$. Скаляры α_i называются *коэффициентами* линейной комбинации $\sum \alpha_i x_i$. Линейная комбинация с нулевым и ненулевым семейством коэффициентов называется соответственно *нулевой* и *ненулевой*.

Если вектор x равен некоторой линейной комбинации векторов x_i $(i \in I)$, то говорят, что x *линейно выражается* через x_i. В частности, вектор $x = 0$ линейно выражается через любые векторы x_i. Говорят, что семейство векторов x_i *линейно свободно*, если каждая их ненулевая линейная комбинация не равна нулю. Векторы линейно свободного семейства называются *линейно независимыми*. Ясно, что среди линейно независимых векторов не может быть равных. Поэтому вместо линейно свободных *семейств* можно рассматривать линейно свободные *множества* векторов.

Примеры. Пустое множество векторов и ненулевое элементарное множество векторов (состоящее из единственного вектора $x \neq 0$) линейно свободны. Всякое множество векторов, среди которых есть вектор $x = 0$, линейно несвободно.

В дальнейшем будем часто вместо *линейно свободное* и *линейно независимые* писать просто *свободное* и *независимые*. А вместо *векторное пространство* писать *пространство*.

Лемма. *Векторы семейства* (x_i) $(i \in I,\ |I| > 1)$ *линейно независимы ессли ни один из них не выражается линейно через остальные.*

$\square$ Это следует из эквивалентности равенств $\sum \alpha_i x_i = 0$ и $x_{i(0)} = -\sum \alpha_{i(0)}^{-1} \alpha_i x_i$ $(i \neq i(0)$ при $\alpha_{i(0)} \neq 0$ для некоторого индекса $i(0))$. $\blacksquare$

Замечание. Для модулей аналогичное утверждение не верно: из $\sum \alpha_i x_i = 0$ может не следовать $x_{i(0)} = -\sum \alpha_{i(0)}^{-1} \alpha_i x_i$ $(i \neq i(0))$, если среди ненулевых коэффициентов нет обратимых.

Пример. В модуле $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ верно равенство $(-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$, но ни один из векторов 2 и 3 не выражается линейно через другой.

6. Максимальные свободные семейства векторов (не содержащиеся ни в каких других свободных семействах) называются *базами* рассматриваемого векторного пространства. Составляющие базу векторы называются *базовыми*.

Рассмотрим векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$ и семейство (e_i) векторов $e_i \in E$ $(i \in I)$.

Лемма. *Пусть векторы e_i независимы. Семейство (e_i) является базой $(\mathbb{K}, E)$ ессли каждый вектор $x \in E$ равен некоторой линейной комбинации векторов e_i.*

$\square$ 1) Пусть (e_i) — база. Тогда $x, (e_i)$ линейно зависимы и по лемме п. 5 $\alpha(x)x + \sum \alpha_i e_i = 0$ для некоторого ненулевого финитного семейства скаляров $\alpha(x)$, α_i. Равенство $\alpha(x) = 0$ невозможно из-за независимости векторов e_i. Следовательно, $x = \sum \alpha_i(x) e_i$ при $\alpha_i(x) = -\alpha^{-1}(x)\alpha_i$.

2) Если каждый вектор $x \in E$ линейно зависит от векторов (e_i) и семейство векторов (e_i) свободно, то оно максимально и по определению является базой. $\blacksquare$

Теорема. *Пусть (e_i) — база. Тогда для каждого вектора $x \in E$ существует единственное финитное семейство скаляров $\alpha_i(x)$ такое, что $x = \sum \alpha_i(x) e_i$.*

$\square$ По лемме такое семейство $(\alpha_i(x))$ существует. Рассмотрим произвольное семейство скаляров β_i, для которых $x = \sum \beta_i e_i$. Из равенства $\sum \alpha_i(x) e_i = \sum \beta_i e_i$ следует, что $\sum(\alpha_i(x) - \beta_i) e_i$

$= 0$. Откуда по лемме п. 5 $\alpha_i(x) - \beta_i = 0$ и $\alpha_i(x) = \beta_i$ для всех индексов i. Семейство $(\alpha_i(x))$ единственное. ■

Скаляр $\alpha_i(x)$ называется i-й *координатой* вектора x в базе (e_i). В частности, $\alpha_i(0) = 0$ для всех индексов i и $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — *символ Кронекера*, $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Замечание. Определение максимального свободного семейства векторов сохраняет смысл и для модулей. Но аналогичная теорема для модулей не верна. При определении базы для модуля представимость каждого вектора некоторой линейной комбинацией базовых векторов нужно требовать дополнительно.

Подпространство $(\mathbb{K}, N)$ векторного пространства $(\mathbb{K}, E)$ составляется из поля $\mathbb{K}$ и инвариантной по внешнему умножению подгруппы $(N, +)$ группы $(E, +)$, т. е. $(\mathbb{K}, N)$ есть подгруппа группы с операторами $(\mathbb{K}, E)$. Так как по определению векторного пространства группа E абелева, то каждая ее подгруппа N нормальна. Поэтому определено фактор-пространство $(\mathbb{K}, E/N)$ пространства $(\mathbb{K}, E)$ по подпространству $(\mathbb{K}, N)$. Векторами пространства $\bar{E} = E/N$ являются фактор-множества $\bar{x} = x + N$ $(x \in E)$.

Пример. Рассмотрим составленное из финитных скалярных функций на X подпространство $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(X, \mathbb{K})$ пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ всех скалярных функций на множестве X. Обозначим $\operatorname{Supp} f$ конечное множество, на котором функция $f \in \mathscr{F}_0$ имеет ненулевые значения: $f(x) \neq 0$ $(x \in \operatorname{Supp} f)$, $f(x) = 0$ $(x \notin \operatorname{Supp} f)$. Множество $S(f) = \operatorname{Supp} f$ называется *носителем* функции f. Вместо *финитная* функция говорят также функция с *конечным носителем*.

Будем употреблять обозначения $Y^X = \mathscr{F}(X, Y)$ для множества всех функций $f\colon X \to Y$ и $Y_0^X = \mathscr{F}_0(X, Y)$ для множества финитных функций $f_0\colon X \to Y$ при любых множестве X и аддитивной абелевой группе Y.

Каждому $i \in X$ соответствует скалярная финитная функция $\chi_i \in \mathscr{F}$, являющаяся *индикатором* i: $\chi_i(x) = 1$ $(x = i)$, $\chi_i(x) = 0$ $(x \neq i)$. Каждая скалярная финитная функция f линейно выражается через индикаторы: $f = \sum f(i)\chi_i$ $(i \in X)$. Сумма справа конечна вместе с носителем функции f: если $i \notin S(f)$, то $f(i) = 0$. Из определения индикаторов χ_i следует, что

$$\sum f(i)\chi_i(x) = f(x)\chi_x(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

Индикаторы χ_i линейно независимы: равенство $\sum \alpha_i \chi_i = 0$ для некоторого финитного семейства скаляров α_i означает, что

$\alpha_i = 0$ для каждого $i \in X$. По лемме семейство (χ_i) есть база векторного пространства $(\mathbb{K}, \mathscr{F}_0)$. Если множество X бесконечно, то и эта база бесконечна.

7. Докажем, что в каждом векторном пространстве E существуют базы и все они имеют одну и ту же мощность.

Множество $L(C) = \operatorname{Lin} C$ всех линейных комбинаций векторов множества $C \subseteq E$ называется *линейной оболочкой* C в E. Если B — база, то $L(B) = E$. Ясно, что $L(E) = E$.

Упражнение. Доказать, что линейная оболочка $\operatorname{Lin} C$ множества $C \subseteq E$ равна пересечению всех содержащих C подпространств векторного пространства E.

Если $L(C) = E$, то говорят, что множество C *порождает* пространство E или является *системой образующих* для E.

Рассмотрим свободное множество $A \subseteq E$ и порождающее пространство E множество $C \supseteq A$. (В частности, можно взять $C = E$.)

Лемма. *Существует база B пространства E такая, что $A \subseteq B \subseteq C$.*

□ Рассмотрим класс $\mathscr{A}$ всех свободных множеств $X \subseteq E$, удовлетворяющих условию $A \subseteq X \subseteq C$. Если C свободно, то $B = C$, и лемма верна. Будем предполагать, что C несвободно.

Упорядочим класс $\mathscr{A}$ по включению. Пусть $\mathscr{L}$ — линия в $\mathscr{A}$. Тогда объединение $L = \cup\mathscr{L}$ всех свободных множеств $X \in \mathscr{L}$ свободно, принадлежит классу $\mathscr{A}$ и мажорирует $\mathscr{L}$. По теореме Цорна в классе $\mathscr{A}$ есть максимальное множество B. Оно и является нужной базой: $A \subseteq B \subseteq C$, B свободно и $L(B) = E$. В самом деле, если $L(B) \neq E = L(C)$, то существует $c \in C \setminus L(B)$ (из $C \subseteq L(B)$ следует $E = L(C) = L(B)$). Значит, $X = B \cup \{c\} \in \mathscr{A}$, что противоречит максимальности B в $\mathscr{A}$. ■

Теорема. *В каждом векторном пространстве есть база. Все базы пространства имеют одну и ту же мощность.*

□ При $A = O$ и $C = E$ из леммы следует, что в пространстве E существует база B.

1) Пусть в пространстве E есть конечная база A и $|A| = m$. Возьмем произвольную базу $B \subseteq E$. Если $m < |B|$, то существует вложение $\varphi\colon A \to B$ с образом $\varphi(A) \neq B$. Так как $\varphi(A) \subset B$ и B свободно, то и $\varphi(A)$ свободно.

Перенумеруем векторы A, B так, чтобы $\varphi(a_i) = b_i$ $(1 \le i \le m)$. Равенства

$$\overline{\varphi}(x) = \sum \xi_i \varphi(a_i) = \sum \xi_i b_i \quad (x = \sum \xi_i a_i)$$

определяют продолжение $\overline{\varphi}\colon E \to E$ с образом $\overline{\varphi}(E) = L(\varphi(A))$ для вложения $\varphi\colon A \to B$.

Докажем, что $\overline{\varphi}(E) = E$. Для этого нужно решить уравнение $\overline{\varphi}(x) = y$ для каждого $y = \sum \eta_j a_j$ $(1 \le j \le m)$. Пусть $b_i = \varphi(a_i) = \sum \alpha_{ij} a_j$. Тогда $\overline{\varphi}(x) = \sum\limits_i \xi_i \sum\limits_j \alpha_{ij} a_j = \sum\limits_j \Big(\sum\limits_i \xi_i \alpha_{ij}\Big) a_j$ и уравнение $\overline{\varphi}(x) = y$ эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_i \xi_i \alpha_{ij} = \eta_j \quad (1 \le i,\ j \le m).$$

Так как A — база, то эта система корректна и ее единственное решение $\xi = (\xi_j)$ находится методом последовательного исключения неизвестных [17, § 22].

Таким образом, $L(\varphi(A)) = \overline{\varphi}(E) = E$ и $\varphi(A)$ является базой E. Это противоречит $\varphi(A) \subset B$. Следовательно, предположение $m < |B|$ приводит к противоречию. Точно так же приводит к противоречию неравенство $m > |B|$. Значит, $m = |B|$.

2) Пусть в пространстве E нет конечных баз. Возьмем произвольные базы A и B в E. Для каждого $a \in A$ определено конечное множество $B(a) \subseteq B$ векторов базы B, через которые a линейно выражается. Рассмотрим объединение $B(A)$ всех таких множеств $B(a)$. Так как A бесконечно, а $B(a)$ конечны, то $|A| = |B(A)|$. Но $B(A) \subseteq B$, и поэтому $|B(A)| \le |B|$. Следовательно, $|A| \le |B|$. По симметрии и $|B| \le |A|$. Значит, $|A| = |B|$. ■

Доказанная теорема позволяет определить *размерность* пространства как мощность (кардинальное число) его произвольной базы. Размерность пространства E обозначается $\dim E$. Она может быть конечной ($\dim E < \infty$) и бесконечной ($\dim E = \infty$). Соответственно E называют *конечномерным* и *бесконечномерным*. Если $\dim E = n \in \mathbb{P} = \{0\} \cup \mathbb{N}$, то пространство E называется *n-мерным*. Среди бесконечномерных выделяют *счетномерные* пространства. Правила действий с кардинальными числами подробно описаны в [11, гл. 3].

Упражнение. Доказать, что $|\mathscr{K}(I)| = |I|$ для бесконечного I и класса $\mathscr{K}(I)$ его конечных частей.

Пример. Рассмотрим бесконечное поле $\mathbb{K}$ и подпространство полиномов $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathbb{K})$ пространства функций $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{K})$. Векторами $\mathscr{M}$ являются функции $p\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ со значениями $p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \dots + \alpha_n\xi^n$ $(\xi \in \mathbb{K})$, определяемые семействами коэффициентов $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(0 \le i \le n;\ n = 0, 1, 2, \dots)$. Последовательность степеней $s^n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, имеющих значения $s^n(\xi) = \xi^n$ $(\xi \in \mathbb{K})$, является базой для пространства $\mathscr{M}$. Линейная независимость степеней s^n следует из теоремы о числе корней полинома [17, § 28], а каждый полином является линейной комбинацией степеней.

Полиномы образуют линейную оболочку множества $\mathscr{S}$ степеней в пространстве $\mathscr{F}$: $\mathscr{M} = \operatorname{Lin}\mathscr{S} \subseteq \mathscr{F}$. При каждом $n \in \mathbb{P} = \{0\} \cup \mathbb{N}$ степени s^i $(0 \le i \le n)$ порождают $(n+1)$-мерное подпространство $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ пространства $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathbb{K})$. В частности, при $n = 0$ подпространство $\mathscr{M}_0 = \mathbb{K}s^0$ изоморфно полю $\mathbb{K}$.

8. Отметим два следствия теоремы о размерности.

Следствие 1. *Если X, Y — подпространства пространства F и $X \subseteq Y$, то $\dim X \le \dim Y$.*

□ Пусть $E = Y$ и A — база подпространства X. По лемме существует база B подпространства Y, содержащая A. Так как $A \subseteq B$, то $\dim X = |A| \le |B| = \dim Y$. ■

Примеры. 1) $\dim \mathscr{F}_0(U, \mathbb{K}) \le \dim \mathscr{F}(U, \mathbb{K})$. 2) $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n + 1 \le \infty = \dim \mathscr{M}(\mathbb{K})$ $(n \in \mathbb{N})$.

Рассмотрим свободное множество A и систему образующих C в пространстве E.

Следствие 2. *Существует не пересекающееся с A множество $D \subseteq C$, дополняющее A до базы $B = A \cup D$ пространства E.*

Это утверждение эквивалентно лемме п. 7. Его часто называют *теоремой о замене*, так как оно позволяет частично или полностью заменять векторы базы другими.

Пример. Рассмотрим множество I, поле $\mathbb{K}$, пространства $\mathbb{K}^I$ и $\mathbb{K}^I_0$. База $B^* = \{\chi_i \mid i \in I\}$ пространства $\mathbb{K}^I_0$ вместе с ним содержится в $\mathbb{K}^I$. По следствию 2 существует не пересекающееся с B^* свободное множество $D^* \subseteq \mathbb{K}^I$, дополняющее B^* до базы $G^* = B^* \cup D^*$ пространства $\mathbb{K}^I$. База G^* называется *базой Хамеля.* В общем случае о ней известно только, что она существует (даже при $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $I = \mathbb{N}$).

Упражнение. Доказать, что $\left|\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_0\right| = |\mathbb{K}|$, если $\mathbb{K}$ бесконечно [11, гл. 3, § 6, п. 4].

9. Кольца $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ и $E = (E, +, \cdot)$ составляют *левую* $\mathbb{K}$-*алгебру* $(\mathbb{K}, E) = (\mathbb{K}, E, +, +, \cdot, \cdot, \cdot)$, если кольцо $\mathbb{K}$ и группа

$(E, +)$ составляют левый $\mathbb{K}$-модуль, а векторное умножение согласовано с остальными *условиями ассоциативности*:

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E).$$

Как правило, требуется еще, чтобы $(\alpha x)y = x(\alpha y)$, т. е. чтобы в алгебре $(\mathbb{K}, E)$ выполнялись тождества

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in E).$$

Всюду, где нет специальных оговорок, такая *билинейность* умножения будет предполагаться.

Аналогично определяется *правая* $\mathbb{K}$-*алгебра* $(E, \mathbb{K}) = (E, \mathbb{K}, +, +, \cdot, \cdot, \cdot)$. Рассматриваемые алгебры получаются из модулей добавлением векторного умножения. Все общие определения и предложения для модулей переносятся на алгебры. Если векторное кольцо E коммутативно, то алгебра $(\mathbb{K}, E)$ называется *коммутативной*. Если скалярное кольцо $\mathbb{K}$ является полем, то алгебра $(\mathbb{K}, E)$ называется *векторной*. Как правило, предполагается, что $1 \in \mathbb{K}$ и $1 \cdot x = x$ $(x \in E)$.

Подалгебра $(\mathbb{K}, \mathrm{A})$ алгебры $(\mathbb{K}, E)$ составляется из кольца $\mathbb{K}$ и подкольца A кольца E, *инвариантного* по внешнему умножению: $\mathbb{K}\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}$. *Фактор-алгебра* $(\mathbb{K}, E/N)$ составляется из кольца $\mathbb{K}$ и фактор-кольца E/N по инвариантному идеалу N кольца E.

При $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ для каждого идеала N верно равенство $\mathbb{Z}N = N$ и фактор-алгебра отождествляется с фактор-кольцом.

Замечание. Введя нулевое умножение $xy = 0$ $(x, y \in E)$ для абелевой группы $(E, +)$, можно превратить ее в нулевое кольцо $(E, +, \cdot)$. Таким образом, можно модуль $(\mathbb{K}, E)$ считать алгеброй и общие предположения, верные для всех алгебр, применять и к модулям. Точно так же векторное пространство можно отождествить с нулевой векторной алгеброй.

Пример 1. Каждое кольцо $\mathbb{K}$ определяет алгебру $(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, в которой векторное умножение совпадает со скалярным. Кольцо $\mathbb{K}$ отождествляется с алгеброй $(\mathbb{K}, \mathbb{K})$. Если кольцо $\mathbb{K}$ некоммутативно, то тождество $(\alpha x)y = x(\alpha y)$ не выполняется.

Пример 2. Поле $\mathbb{K}$ и кольцо $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ составляют векторную алгебру $(\mathbb{K}, \mathscr{F})$.

Пример 3. Поле $\mathbb{K}$ и кольцо $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(X, \mathbb{K})$ финитных скалярных функций составляют векторную алгебру $(\mathbb{K}, \mathscr{F}_0)$. Она является подалгеброй алгебры $(\mathbb{K}, \mathscr{F})$.

Пример 4. Рассмотрим поле $\mathbb{K}$, множество $A \subseteq X$ и кольцо $A\mathscr{F} = A\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ скалярных функций на X с носителями в A. Векторная алгебра $(\mathbb{K}, A\mathscr{F})$ является подалгеброй алгебры $(\mathbb{K}, \mathscr{F})$.

Пример 5. Поле $\mathbb{K}$ и кольцо $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathbb{K})$ полиномов составляют векторную алгебру $(\mathbb{K}, \mathscr{M})$. Произведение pq полиномов $p = \sum \alpha_i s^i$, $q = \sum \beta_j s^j$ определяется равенствами $pq = \sum \gamma_k s^k$, $\gamma_k = \sum\limits_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$. Такое произведение часто называют *сверткой*. Векторное пространство полиномов является подпространством векторного пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{K})$ скалярных функций. Но алгебра полиномов не является подалгеброй алгебры $\mathscr{F}$: у них разные умножения.

10. Базами векторной алгебры $(\mathbb{K}, E)$ служат базы определяющего ее векторного пространства. Умножение векторов можно определять с помощью базовых таблиц умножения.

Выберем в алгебре $(\mathbb{K}, E)$ базу $B = \{e_i \mid i \in I\}$. Рассмотрим произвольные векторы $x = \sum \alpha_i e_i$ и $y = \sum \beta_j e_j$ $(i, j \in I)$. Их произведение

$$xy = \left(\sum \alpha_i e_i\right)\left(\sum \beta_j e_j\right) = \sum_{ij} (\alpha_i \beta_j)(e_i e_j)$$

линейно выражается через произведения $e_i e_j$ базовых векторов. Семейство $\{e_i e_j \mid i, j \in I\}$ и составляет *таблицу умножения* алгебры $(\mathbb{K}, E)$ с базой B. Ясно, что коммутативные алгебры имеют *симметричные* таблицы умножения: $e_i e_j = e_j e_i$.

Примеры. 1) Таблица умножения для алгебры $\mathscr{F}_0$ финитных функций с базой из индикаторов e_i имеет диагональный вид: $e_i e_i = e_i$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$.

2) Таблица умножения для алгебры полиномов $\mathscr{M}$ с базой из степеней s^n имеет вид: $s^m s^n = s^{m+n}$ $(m, n \in \mathbb{P} = \{0\} \cup \mathbb{N})$.

Обе эти таблицы симметричны.

11. Множество $[a, b] = \{x = (1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\}$ называется *отрезком, соединяющим точки* a, b вещественного или комплексного пространства E. Множество в E, которое вместе с каждыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок, называется *выпуклым.*

Пример. Пустое множество O и множество E всех точек пространства выпуклы.

Предложение. *Выпуклыми множествами в* $\mathbb{R}$ *являются интервалы и только они.*

☐ 1) Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ выпукло и $a = \inf A$, $b = \sup A \in \bar{\mathbb{R}}$. Пустое множество $A = O$ и каждое элементарное множество $A = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$ являются интервалами. Предположим, что $a < b$. В этом случае для каждого $x \in]a, b[$ существуют $u, v \in A$ такие, что $a \le u \le x \le v \le b$. Так как A выпукло, то $[u, v] \subseteq A$ и, следовательно, $x \in A$. Значит, $]a, b[\subseteq A$ и A есть интервал с началом a и концом b.

2) Пусть A — интервал в $\mathbb{R}$ с началом a и концом b ($a, b \in \bar{\mathbb{R}}$). Пустое множество $A = O$ и каждое элементарное множество $A = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$ выпуклы. Предположим, что $a < b$. В этом случае вследствие транзитивности порядка из неравенств $a \le u \le v \le b$ вытекает включение $[u, v] \subseteq A$. Множество A выпукло. ■

Примеры. 1) Шары $B(c, r) = \{z : |z - c| < r\}$, $\bar{B}(c, r) = \{z : |z - c| \le r\}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ выпуклы. 2) Прямоугольники в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ выпуклы. 3) Окружности $S(c, r) = \{z : |z - c| = r\}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ не выпуклы.

Лемма. *Пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло.*

☐ Пусть множества $A_i \subseteq E$ выпуклы и $A = \cap A_i$. Тогда для каждых $a, b \in A$ из $[a, b] \subseteq A_i$ при каждом i следует $[a, b] \subseteq A$. ■

Упражнение. Привести примеры выпуклых множеств, объединение которых не выпукло.

Пересечение $\operatorname{Con} X$ всех выпуклых множеств в E, содержащих множество $X \subseteq E$, называется *выпуклой оболочкой* X. Из леммы вытекает

Следствие. *Множество выпукло ессли оно совпадает со своей выпуклой оболочкой.*

Пример. Выпуклой оболочкой множества $X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \subseteq \mathbb{C}$ является квадрат с вершинами из этого множества: $\operatorname{Con} X = [0,1] \times [0,1]$.

12. Объединение $L(a, b) = \cup[a(i), b(i)]$ отрезков $[a(i), b(i)] \subseteq E$ ($1 \le i \le n$) таких, что $a(1) = a$, $b(i) = a(i+1)$ ($1 \le i < n$), $b(n) = b$, называется *ломаной, соединяющей точки* a, b в пространстве E. Множество в E, которое вместе с каждыми своими двумя точками содержит некоторую соединяющую их ломаную, называется *линейно связным.*

Пример. Каждое выпуклое множество линейно связно.

Лемма. *Объединение семейства линейно связных множеств, имеющих непустое пересечение, линейно связно.*

□ Пусть множества $C_i \subseteq E$ линейно связны, $C = \cup C_i$ и $D = \cap C_i \neq 0$ $(i \in I)$. Возьмем произвольные точки $a, b \in C$, $c \in D$ и индексы $i(a), i(b) \in I$, при которых $a \in C_{i(a)}$, $b \in C_{i(b)}$. Так как $c \in C_{i(a)}$ и $c \in C_{i(b)}$, то существуют содержащиеся соответственно в $C_{i(a)}$ и $C_{i(b)}$ ломаные, соединяющие точки a, c и c, b. Следовательно, существует содержащаяся в $C_{i(a)} \cup C_{i(b)}$ ломаная $L(a, b)$, соединяющая точки a, b. ■

Пример. Объединение семейства ломаных, соединяющих точку $a \in E$ с каждой точкой множества $B \subseteq E$, линейно связно.

Упражнение. Привести примеры линейно связных множеств, пересечение которых нелинейно связно.

Пусть $A \subseteq E$ и $x \in A$. Множество $A(x)$ всех точек $y \in A$, которые соединяются с точкой x содержащимися в множестве A ломаными, называется *линейно связной компонентой точки x в множестве A*. Множества $A(x)$ называются *линейно связными компонентами множества A*. Из леммы следует, что они линейно связны.

Предложение. *Линейно связные компоненты множества составляют его разбиение.*

□ Каждая точка $x \in A$ принадлежит своей линейно связной компоненте $A(x)$ в A. Если $A(x)$, $A(y)$ для x, y из A пересекаются, то $A(x) = A(y)$. В самом деле, если $c \in A(x) \cap A(y)$, то объединение ломаных в A, соединяющих x, c и c, y, соединяет точки x, y. Поэтому $y \in A(x)$, $x \in A(y)$ и, следовательно, $A(y) \subseteq A(x)$, $A(x) \subseteq A(y)$. Значит, различные линейно связные компоненты множества A попарно не пересекаются и в объединении дают A. ■

Пример. Линейно связными компонентами множества $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ являются отрезки $[0, 1], [2, 3]$.

2.2.2. Линейные операторы

Так называются аддитивные однородные отображения модулей и векторных пространств. Линейные операторы играют важную роль в математике. Как правило, рассматриваются унитарные модули.

1. Рассмотрим кольцо $\mathbb{L}$ и его подкольцо $\mathbb{K}$, модули $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$, гомоморфизм $T\colon (E, +) \to (F, +)$. По определению,

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad (x, y \in E).$$

Будем называть такие гомоморфизмы *аддитивными отображениями.* Согласованность с внешним умножением отображения $T\colon E \to F$ выражается равенством $T(\alpha x) = \alpha \cdot Tx$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x \in E)$. Такие отображения называются *однородными.* Благодаря предположению $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ произведение $\alpha \cdot Tx$ определено. Аддитивные и однородные отображения называются *линейными отображениями* или *линейными операторами.* Если $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, то линейность оператора эквивалентна его аддитивности для унитарных модулей.

Линейность оператора $T\colon E \to F$ можно выразить равенством

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Tx + \beta \cdot Ty \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K};\ x, y \in E).$$

Линейный оператор T переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов. Отсюда и его название.

Из определений следует, что $T0 = 0$: нуль модуля E переводится в нуль модуля F.

Множество всех линейных операторов $T\colon E \to F$ обозначается $\mathscr{L} = \mathscr{L}(E, F)$. Если нужно явно указать скалярное кольцо $\mathbb{K}$ модуля $(\mathbb{K}, E)$, то говорят о $\mathbb{K}$-*линейности.* Если используются только скаляры из $\mathbb{K}$, то кольцо скаляров $\mathbb{L}$ модуля $(\mathbb{L}, F)$, содержащее $\mathbb{K}$, можно заменить на $\mathbb{K}$ и рассматривать модуль $(\mathbb{K}, F)$ вместо $(\mathbb{L}, F)$.

Расширим понятие подмодуля. Будем называть модуль $(\mathbb{K}, E)$ подмодулем модуля $(\mathbb{L}, F)$, если $\mathbb{K}$ и E являются подкольцом и подгруппой $\mathbb{L}$ и F соответственно, а внешнее умножение для $(\mathbb{L}, F)$ продолжает внешнее умножение для $(\mathbb{K}, E)$. Вместо *подмодуль* $(\mathbb{K}, E)$, будем говорить также $\mathbb{K}$-*подмодуль* E. Подчеркнем, что $\mathbb{K}$-подмодуль может не быть $\mathbb{L}$-модулем при $\mathbb{K} \neq \mathbb{L}$. Будем использовать запись $(\mathbb{K}, E) \subseteq (\mathbb{L}, F)$.

Пусть $\mathbb{K} = E = \mathbb{Z}$ и $\mathbb{L} = F = \mathbb{Q}$. Тогда $(\mathbb{K}, E) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \subseteq (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = (\mathbb{L}, F)$.

Аналогично расширяется понятие подалгебры и определяется $\mathbb{K}$-*подалгебра* $\mathbb{L}$-*алгебры.* При нулевом векторном умножение они отождествляются с $\mathbb{K}$-подмодулями $\mathbb{L}$-модуля.

Пример 1. Пусть $(\mathbb{K}, E)$ — подмодуль модуля $(\mathbb{L}, F)$: $(\mathbb{K}, E) \subseteq (\mathbb{L}, F)$. Каждый скаляр $\gamma \in \mathbb{L}$ определяет линейный оператор $T\colon E \to F$ равенством $Tx = \gamma x$ $(x \in E)$. Этот оператор называется *гомотетией* с коэффициентом γ.

Если $\mathbb{K} = E$, $\mathbb{L} = F$ и кольцо $\mathbb{K}$ унитарно, то $Tx = T(1x) = T(1)x$ $(x \in \mathbb{K})$ и $\gamma = T(1)$.

Пример 2. Пусть $(\mathbb{K}, E)$ — подалгебра алгебры $(\mathbb{L}, F)$: $(\mathbb{K}, E) \subseteq (\mathbb{L}, F)$. Каждый скаляр $c \in \mathbb{L}$ определяет оператор $T\colon E \to F$ равенством $Tx = cx$ $(x \in E)$. Оператор T называется *мультипликатором* с коэффициентом c. Если $c = 0$, то $Tx = 0$ $(x \in E)$. Если кольцо E унитарно и $c = 1$, то T — *тождественное вложение*: $Tx = x$ $(x \in E)$.

Пример 3. Пусть $E = \mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, $a \in X$ и $\mathbb{K} = \mathbb{L} = F$. Равенство $\delta_a f = f(a)$ $(f \in \mathscr{F})$ определяет функционал $\delta_a\colon \mathscr{F} \to \mathbb{K}$. Этот функционал линеен:

$$\delta_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \delta_a f + \delta_a g,$$
$$\delta_a(\alpha f) = (\alpha f)(a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot \delta_a f \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ f, g \in \mathscr{F}).$$

Функционал δ_a называется *дельта-функцией* в точке a. Дельта-функции называются также *точечными функционалами.* Они играют существенную роль в анализе.

Замечание. Каждый гомоморфизм $T\colon E \to F$ алгебры $(\mathbb{K}, E)$ в алгебру $(\mathbb{L}, F)$ является линейным оператором. Обратное не верно: линейность не предполагает мультипликативность оператора и тождество $T(xy) = Tx \cdot Ty$ может не быть верным. В частности, в примере 1 линейный оператор является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда его коэффициент γ является идемпотентом. В примере 2 к идемпотентности коэффициента c нужно добавить его перестановочность с каждым вектором $x \in E$.

2. Важными характеристиками линейного оператора $T \in \mathscr{L}(E, F)$, отображающего $\mathbb{K}$-модуль E в $\mathbb{L}$-модуль F, служит его *образ* $R(T) = \operatorname{Ran} T = T(E) \subseteq F$ и *ядро* $K(T) = \operatorname{Ker} T = T^{-1}(0) \subseteq E$. (Эти характеристики важны для всякого гомоморфизма группы.)

Лемма. *Образ $T(E)$ является $\mathbb{K}$-модулем.*

$\square$ Пусть $x, y \in T(E)$. Тогда $x = Tu$, $y = Tv$ для некоторых $u, v \in E$. Следовательно, $\alpha x + \beta y = \alpha \cdot Tu + \beta \cdot Tv = T(\alpha u + \beta v) \in T(E)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $\blacksquare$

Предложение. *Линейный оператор взаимно однозначен, если и только если он имеет нулевое ядро.*

$\square$ По определению, линейный оператор является гомоморфизмом абелевых групп. Сформулированное утверждение следует из леммы в п. 2.1.2, 5. $\blacksquare$

Пример 1. Пусть $\mathbb{K}$ — поле и $(\mathbb{K}, E)$ — векторное пространство. Для гомотетии $T\colon E \to F$ с коэффициентом γ равенство $K(T) = \{0\}$ эквивалентно $\gamma \neq 0$.

Следствие. *Пусть* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *и* $K(T)=\{0\}$. *Тогда* $T^{-1} \in \mathscr{L}(R(T),E)$.

$\square$ По предположению, обратное соответствие $T^{-1}\colon R(T) \to E$ однозначно. Покажем, что оно линейно. Возьмем произвольную линейную комбинацию $z = \alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in R(T)$). По лемме $z \in R(T)$. Пусть $u = T^{-1}x$, $v = T^{-1}y$ и $w = T^{-1}z$. Тогда вследствие взаимной однозначности и линейности T имеем $T^{-1}(\alpha x + \beta y) = T^{-1}z = w \Rightarrow \alpha x + \beta y = z = Tw \Rightarrow T(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot Tu + \beta \cdot Tv = \alpha x + \beta y = Tw \Rightarrow \alpha \cdot T^{-1}x + \beta \cdot T^{-1}y = \alpha u + \beta v = w$. Следовательно, $T^{-1}(\alpha x + \beta y) = w = \alpha \cdot T^{-1}x + \beta \cdot T^{-1}y$. $\blacksquare$

Пример 2. Обратным оператором для гомотетии с обратимым коэффициентом γ является гомотетия с коэффициентом γ^{-1}.

Пример 3. Рассмотрим подпространство N векторного пространства E и естественный гомоморфизм $\overline{\varphi}\colon E \to \overline{E}$ группы $(E,+)$ на фактор-группу $\overline{E} = E/N$. Гомоморфизм $\overline{\varphi}$ является линейным оператором: $\overline{\varphi}(x+y) = \overline{\varphi}(x) + \overline{\varphi}(y)$ $(x, y \in E)$ и $\overline{\varphi}(\alpha x) = \alpha(x+N) = \alpha\overline{\varphi}(x)$ ($\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$).

3. Пусть $(\mathbb{K},E) \subseteq (\mathbb{L},F) \subseteq (\mathbb{M},G)$ — модули, $S\colon E \to F$ и $T\colon F \to G$ — линейные операторы. Композиция $TS\colon E \to G$ называется *произведением* линейных операторов S, T.

Предложение. *Произведение* TS *линейных операторов* S, T *является линейным оператором.*

$\square$ Так как S и T являются гомоморфизмами аддитивных групп, то их произведение TS аддитивно. Его однородность следует из однородности S и T: $TS(\alpha x) = T(S(\alpha x)) = T(\alpha \cdot Sx) = \alpha \cdot TSx$ ($\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$). $\blacksquare$

Следствие. *Произведение линейных изоморфизмов есть линейный изоморфизм.*

Кроме того, верна

Лемма. *Сумма* $R+S$ *линейных операторов* $R\colon E \to F$ *и* $S\colon E \to F$ *есть линейный оператор.*

$\square$ В самом деле, $(R+S)(\alpha x+\beta y) = R(\alpha x+\beta y)+S(\alpha x+\beta y) = \alpha \cdot Rx + \beta \cdot Ry + \alpha \cdot Sx + \beta \cdot Sy = \alpha(Rx+Ry) + \beta(Rx+Ry) = \alpha \cdot (R+S)x + \beta \cdot (R+S)y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; $x, y \in E$). $\blacksquare$

Рассмотрим пространство $(\mathbb{K},E)$ и множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(E)$ его линейных преобразований. Они составляют подпространство векторного пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E)$ всех преобразований пространства $(\mathbb{K},E)$. Умножение для линейных операторов согласовано с другими операциями:

$$(R+S)T = RT + ST, \quad R(S+T) = RS + RT,$$
$$\alpha(ST) = (\alpha S)T = S(\alpha T) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ R, S, T \in \mathscr{F}).$$

Первое из этих равенств верно для произведения (композиции) любых преобразований $R, S, T \in \mathscr{F}$. При проверке остальных используется линейность:

$$R(S+T)x = R(Sx + Tx) = RSx + RTx,$$
$$((\alpha S)T)x = (\alpha S)(Tx) = S(\alpha Tx) = (S(\alpha T))x$$

при всех $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

Упражнение. Привести примеры функций $f, g, h \in \mathscr{F}$, для которых $f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$ и $(\alpha f) \circ g \neq f \circ (\alpha g)$.

Таким образом, множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(E)$ линейных операторов для пространства $(\mathbb{K}, E)$ с указанными операциями составляет алгебру. Нулем алгебры является *нулевой оператор* O: $Ox = 0$ $(x \in E)$. Единицей алгебры $\mathscr{L}$ является *тождественный оператор* I: $Ix = x$ $(x \in E)$. Выделяются *скалярные операторы* αI, которые часто отождествляют со скалярами $\alpha \in \mathbb{K}$ и обозначают также α.

Так как операторы из $\mathscr{L}$ определены на всем пространстве E, то обратимыми операторами являются только изоморфизмы: если T — линейный изоморфизм E на E, то и T^{-1} — линейный изоморфизм E на E и $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Алгебра $\mathscr{L}$ *некоммутативна*: в общем случае $ST \neq TS$.

Пример. Пусть $E = \mathbb{K}$. Возьмем $f, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0,\ b \neq 1)$ и рассмотрим операторы S и T аддитивного и мультипликативного сдвигов: $Sx = a + x$, $Tx = bx$ $(x \in \mathbb{K})$. Для этих операторов $STx = S(bx) = a + bx \neq ba + bx = T(a+x) = TSx$ $(x \in \mathbb{K})$.

Заметим, что скалярный оператор αI коммутирует с любым оператором $S \in \mathscr{L}$:

$$(\alpha I)Sx = \alpha \cdot Sx = S(\alpha x) = S(\alpha Ix) \quad (x \in E),$$
$$\alpha I \cdot S = S \cdot \alpha I \quad (\alpha S = S\alpha).$$

4. Для векторных пространств размерность $r(T)$ образа $R(T)$ линейного оператора называется его *рангом*: $r(T) = \dim R(T)$.

Размерность $d(T)$ ядра $K(T)$ линейного оператора называется его *дефектом*: $d(T) = \dim K(T)$. Эти размерности могут быть конечными или бесконечными.

В пространстве $\mathscr{L}(E, F)$ линейных операторов $T\colon E \to F$ выделяется подпространство $\mathscr{K}(E, F)$ операторов *конечного ранга*: $T \in \mathscr{K}(E, F) \Leftrightarrow r(T) < \infty$. Если $\dim F < \infty$, то $\mathscr{K}(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$. В алгебре $\mathscr{L} = \mathscr{L}(E)$ линейных операторов $T\colon E \to F$ выделяется подалгебра $\mathscr{K} = \mathscr{K}(E)$ операторов конечного ранга. Пусть $S, T \in \mathscr{K}(E)$. Тогда $(S + T)(E) \subseteq \mathscr{L}(S(E) \cup T(E))$ и поэтому $r(S + T) = \dim(S + T)(E) \leq \dim \mathscr{L}(S(E) \cup T(E)) \leq \dim S(E) + \dim T(E) = r(S) + r(T) < \infty$. Кроме того, $r(ST) \leq r(S) < \infty$ и $r(\alpha S) \leq r(S)$ $(\alpha \in \mathbb{K})$. Неравенства для размерностей вытекают из следствия 1 в п. 2.2.1, 8.

Пример. Пусть $E = \mathbb{K}^\infty = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ — пространство последовательностей элементов поля $\mathbb{K}$. Обозначим $\mathscr{K}(n, E)$ множество всех операторов $T \in \mathscr{L}(E)$ с образами в $\mathbb{K}^n \times \{0\}^\infty$ (множестве последовательностей $(x_i) \in \mathbb{K}^\infty$ таких, что $x_i = 0$ при $i > n$). Ясно, что $\cup \mathscr{K}(n, E) \subseteq \mathscr{K}(E)$.

В частности, среди операторов в $\mathscr{K}(E)$ будут *проекторы* P_n, определяемые равенствами $P_n(x_i) = (\delta_{ni} x_i)$, $\delta_{nn} = 1$ и $\delta_{ni} = 0$ при $i \neq n$. Эти проекторы являются *идемпотентами* и *попарно ортогональны*: $P_n^2 = P_n$ и $P_m P_n = P_n P_m = 0$ при $m \neq n$. В самом деле, $P_n(P_n(x_i)) = P_n(\delta_{ni} x_i) = (\delta_{ni}^2 x_i) = (\delta_{ni} x_i) = P_n(x_i)$ и $P_m(P_n(x_i)) = P_m(\delta_{ni} x_i) = (\delta_{mi}\delta_{ni} x_i) = (0) = O(x_i) = P_n(P_m(x_i))$ $((x_i) \in \mathbb{K}^\infty)$.

Ясно, что для каждой финитной последовательности $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^\infty$ линейная комбинация $T = \sum \alpha_n P_n$ имеет конечный ранг.

Вопрос. Есть ли в $\mathscr{L}(\mathbb{K}^\infty)$ другие операторы конечного ранга?

5. Докажем еще несколько утверждений, связанных с размерностями.

Рассмотрим пространство $(\mathbb{K}, E)$ с базой $B = \{e_i \mid i \in I\}$ и пространство $\left(\mathbb{K}, \mathbb{K}_0^I\right)$ финитных функций на I.

Лемма. $E \simeq \mathbb{K}_0^I$.

$\square$ Множество $\{\chi_i \mid i \in I\}$ индикаторов на I составляет базу $\mathbb{K}_0^I$. Отображение $\varphi\colon E \to \mathbb{K}_0^I$, определяемое равенством

$$\varphi(x) = \sum \alpha_i \chi_i \quad \left(x = \sum \alpha_i e_i,\ (\alpha_i) \in \mathbb{K}_0^I\right),$$

является линейным изоморфизмом. В самом деле, $\varphi(x + y) = \varphi\left(\sum(\alpha_i + \beta_i)e_i\right) = \sum(\alpha_i + \beta_i)\chi_i = \sum \alpha_i \chi_i + \sum \beta_i \chi_i = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\alpha x) = \varphi\left(\sum(\alpha\alpha_i)e_i\right) = \sum(\alpha\alpha_i)\chi_i = \alpha \sum \alpha_i \chi_i = \alpha\varphi(x)$ для всех $\alpha \in \mathbb{K}$ и $x = \sum \alpha_i e_i, y = \sum \beta_i e_i \in E$. А ядро $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, так как вследствие линейной независимости индикаторов χ_i из $\varphi(x) = \sum \alpha_i \chi_i = 0$ вытекает, что $\alpha_i = 0$ и $x = \sum \alpha_i e_i = 0$. Кроме того, каждый вектор $f = \sum \alpha_i \chi_i \in \mathbb{K}_0^I$ является образом вектора $x = \sum \alpha_i e_i$. ■

Таким образом, вместо векторного пространства $(\mathbb{K}, E)$ с базой $B = \{e_i \mid i \in I\}$ можно рассматривать его *координатное пространство* $\left(\mathbb{K}, \mathbb{K}_0^I\right)$ с базой $\{\chi_i \mid i \in I\}$. По определению, $\dim E = |I|$. Если конкретный вид множества индексов не важен, то вместо $\mathbb{K}^I$ пишут $\mathbb{K}^{|I|}$ или $\mathbb{K}^{\dim E}$. В частности, если $\dim E = n \in \mathbb{N}$, то $E \simeq \mathbb{K}^n$ $(I = \{1, \ldots, n\})$.

Рассмотрим пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{K}, F)$.

Предложение. $E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$.

□ Пусть $\varphi \colon E \to F$ — линейный изоморфизм и $A = \{a_i \mid i \in I\}$ — база пространства E. Тогда ее образ $\varphi(A) = B = \{b_i \mid i \in I\}$ есть база пространства F. В самом деле, B свободно: $0 = \sum \alpha_i b_i = \sum \alpha_i \varphi(a_i) = \varphi\left(\sum \alpha_i a_i\right) \Rightarrow \sum \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ для каждого финитного семейства $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Множество B порождает F:

$$y \in F \Rightarrow y = \varphi\left(\sum \alpha_i a_i\right) = \sum \alpha_i (b_i) = \sum \alpha_i b_i$$

для некоторого финитного семейства $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Следовательно, $\dim E = |A| = |B| = \dim F$.

Обратно, пусть $\dim E = \dim F$. Возьмем базы A и B пространств E и F. Так как $|A| = \dim E = \dim F = |B|$, то $\mathbb{K}_0^A \simeq \mathbb{K}_0^B$ и по лемме $E \simeq \mathbb{K}_0^A \simeq \mathbb{K}_0^B \simeq F$. ■

Пусть $(\mathbb{K}, E)$, $(\mathbb{K}, G)$ — линейные пространства, $T \in \mathscr{L}(E, G)$.

Следствие. *Если $T \colon E \to G$ — линейное вложение, то $\dim T(E) = \dim E$.*

□ В п. 2 доказано, что $F = T(E)$ является подпространством пространства G. Если T — линейный изоморфизм E на F, то равенство $\dim E = \dim F$ следует из доказанного предложения. ■

Замечание. Если $T \colon E \to G$ — произвольный линейный оператор, то $\dim T(E) \leq \dim E$. В самом деле, пусть A — база пространства E и $B = T(A)$ — ее образ в G. Ясно, что $T(E) = \mathscr{L}(B)$, и поэтому $\dim T(E) \leq |B| \leq |A| = \dim E$. При произвольном линейном отображении независимые векторы могут отображаться в зависимые: $\sum \beta_i T e_i = 0$ возможно при некоторых

$\beta_i \neq 0$, даже если $\sum \alpha_i e_i = 0$ только при всех $\alpha_i = 0$ (например, если $Te_i = 0$ при некоторых i). Но зависимые векторы не могут отобразиться в независимые: $\sum \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \sum \beta_i Te_i = 0$.

6. Рассмотрим пространство E и его подпространства X, Y. В соответствии с определениями для аддитивных абелевых групп Y называется (*линейным*) *дополнением* X, если E является их прямой суммой: $E = X + Y$ и $X \cap Y = \{0\}$.

Пример. Подпространство $Y = L\{s^i \mid i > n\}$ является дополнением подпространства $X = L\{s^i \mid i \leq n\}$ в пространстве $E = \mathscr{M}(\mathbb{K})$ полиномов.

Замечание. В пространстве E может быть много подпространств Y, имеющих нулевое пересечение с данным пространством X и в сумме с ним дающих все пространство: $X \cap Y = \{0\}$, $X + Y = E$. Если выбрать в Y базу B, то можно говорить о *дополнении по базе* B и писать $Y = X^c = X^c(B)$.

Пример. Пусть $E = \mathbb{K}^3$, $X = \mathbb{K}^2 \times \{0\}$, $b = (0,0,1)$ и $c = (1,1,1)$. Тогда $Y = \mathbb{K}b$ и $Z = \mathbb{K}c$ являются дополнениями X по базам $B = \{b\}$ и $C = \{c\}$.

Лемма. $E = X + Y$, $X \cap Y = \{0\} \Rightarrow \dim E = \dim X + \dim Y$.

$\square$ Пусть $A = (a_i)$ и $B = (b_j)$ — базы X и Y. Тогда $A \cup B = C = (c_k)$ — база E. В самом деле, C свободно: $0 = \sum \gamma_k c_k = \sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j b_j \Rightarrow \sum \alpha_i a_i = -\sum \beta_j b_j \in X \cap Y \Rightarrow \sum \alpha_i a_i = \sum \beta_j b_j = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\beta_j = 0 \Rightarrow \gamma_k = 0$ для любого финитного семейства $\gamma_k = (\alpha_i, \beta_j)$. Кроме того, C порождает E: $z \in E \Rightarrow z = x + y \Rightarrow z = \sum \gamma_k c_k = \sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j b_j$ для некоторых $x = \sum \alpha_i a_i$, $y = \sum \beta_j b_j$.

Так как $X \cap Y = \{0\}$ и $0 \notin A \cap B$, то $A \cap B = O$. Следовательно, $\dim E = |C| = |A| + |B| = \dim X + \dim Y$ [53, гл. V, § 4]. $\blacksquare$

Пример. Если $\dim X < \infty$ и $\dim Y = \infty$, то $\dim E = \dim Y$ (п. 1.3.3, 5). В частности, $\dim \mathscr{M}(\mathbb{K}) = \dim L\{s^i \mid i \geq 0\} = \dim L\{s^i \mid i > n\}$ при любом $n \geq 0$. А $\dim L\{s^i \mid 1 \leq i \leq m+n\} = m+n = \dim L\{s^i \mid 1 \leq i \leq m\} + \dim L\{s^i \mid m+1 \leq i \leq m+n\}$.

7. Рассмотрим: пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{K}, F)$, оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$, его образ $R(T) = T(E)$ и ядро $K(T) = T^{-1}\{0\}$, ранг $r(T) = \dim R(T)$ и дефект $d(T) = \dim K(T)$. Верна

Теорема. $\dim E = r(T) + d(T)$.

$\square$ Пространство E есть прямая сумма подпространства $X = K(T)$ и его дополнения $Y = X^c$ по выбранной базе. Поэтому $\dim E = \dim X + \dim Y$, где $\dim X = d(T)$. Докажем, что $\dim Y = r(T)$.

Пусть $A = (a_i)$ и $B = (b_j)$ — базы X и Y, а $C = A \cup B = (c_k)$ — составленная из них база E. Образ $T(B)$ базы B является базой для $R(T) = T(E)$. В самом деле, $T(B)$ свободно: $0 = \sum \beta_j T b_j = T\left(\sum \beta_j b_j\right) \Rightarrow \sum \beta_j b_j \in X \cap Y = \{0\} \Rightarrow \sum \beta_j b_j = 0 \Rightarrow \beta_j = 0$. Кроме того, $T(B)$ порождает $R(T)$: $y \in R(T) \Rightarrow y = Tx = T\left(\sum \gamma_k c_k\right) = T\left(\sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j b_j\right) = 0 + \sum \beta_j T b_j$. Значит, $\dim R(T) = |T(B)| = |B| = \dim Y$. ■

Следствие. *Если* $\dim E < \infty$*, то оператор* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *взаимно однозначен тогда и только тогда, когда* $\dim E = r(T)$.

□ По предложению п. 2 взаимная однозначность T эквивалентна равенству нуль его дефекта. А по теореме равенство $d(T) = 0$ эквивалентно $\dim E = r(T)$ при $\dim E < \infty$. ■

В частности, если $\dim E < \infty$, то $T\colon E \to F$ является изоморфизмом ессли $\dim E = r(T) = \dim F$.

Замечание. Если $\dim E > \dim F$, то оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ не может быть взаимно однозначным. В этом случае образ $T(A)$ базы A пространства E не может быть свободным множеством: тогда было бы $\dim E = |A| = |T(A)| \leq \dim F$.

Для баз действует *принцип Дирихле* [53, гл. III, § 4]: отображение на множество строго меньшей мощности не взаимно однозначно. (Комбинаторная формулировка: если $m > n$, то m предметов нельзя разместить по одному в n ячейках.)

8. Возьмем еще фактор-пространство $\bar{E} = E/K(T)$.

Предложение. $r(T) = \dim E/K(T)$.

□ При доказательстве теоремы о гомоморфизмах групп в 2.1.2, 9 было показано, что композиция $\bar{\psi} = \bar{\varphi} T^{-1}\colon R(T) \to \bar{E}$ обратного соответствия $T^{-1}\colon R(T) \to E$ с естественным гомоморфизмом $\bar{\varphi}\colon E \to \bar{E}$ есть изоморфизм группы $(R(T), +)$ на $(\bar{E}, +)$. Отображение $\bar{\psi}$ линейно вместе с $\bar{\varphi}$. Действительно, пусть $a \in E$, $b = Ta$ и $\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(b)$, $\bar{\varphi}(v) = \bar{\varphi}(\alpha b)$ для каждых $u \in T^{-1}(b)$, $v \in T^{-1}(\alpha b)$ и, следовательно, $\bar{\psi}(\alpha b) = \bar{\varphi}(T^{-1}(\alpha b)) = \bar{\varphi}(\alpha b) = \alpha \cdot \bar{\varphi}(b) = \alpha \cdot \bar{\varphi}(T^{-1}(b)) = \alpha \cdot \bar{\psi}(b)$. Таким образом, $R(T) \simeq E/K(T)$ и, значит, $\dim R(T) = \dim E/K(T)$. ■

Пусть X — подпространство пространства E, X^c — дополнение X по какой-нибудь базе. Тогда $X = K(T)$ и $X^c = R(T)$ для оператора $T \in \mathscr{L}(E, E)$, определяемого равенством $T(x + y) = y$ $(x \in X,\, y \in X^c)$. Из доказанного предложения вытекает

Следствие 1. $X^c \simeq E/X$.

Из предложения и теоремы п. 7 вытекает

Следствие 2. $\dim E = \dim E/X + \dim X$.

Это равенство верно и для ядра $X = K(T)$ каждого оператора $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Подчеркивая изоморфизм $E/K(T) \simeq R(T)$, фактор-пространство $CR(T) = E/K(T)$ называют *кообразом.* По доказанному размерность кообраза $CR(T)$ равна размерности образа $R(T)$, т. е. рангу $r(T)$ оператора T. Размерность E/X называют *коразмерностью* X и обозначают $\operatorname{codim} X$. По следствию 1

$$\operatorname{codim} X = \dim E/X = \dim X^c.$$

Вместе с равенством

$$\dim E = \dim E/K(T) + \dim K(T)$$

естественно рассматривать *двойственное* равенство

$$\dim F = \dim F/R(T) + \dim R(T).$$

Фактор-пространство $CK(T) = F/R(T)$ называется *коядром*, а его размерность $c(T) = \dim F/R(T)$ — *кодефектом* оператора T.

Ранг $r(T)$, дефект $d(T)$ и кодефект $c(T)$ оператора T могут быть конечными или бесконечными.

Лемма. *Линейный оператор накрывающий ессли он имеет нулевое коядро.*

□ Пусть $T \in \mathscr{L}(E, F)$ и $CK(T) = F/R(T) = \{0\}$. Тогда $R(T) = F$. Обратно, если T накрывающий, то $CK(T) = F/F = \{0\}$. ■

Таким образом, равенство $c(T) = 0$ характеризует накрытие точно так же, как $d(T) = 0$ характеризует взаимную однозначность оператора T.

Пример. Пусть $E = F = \mathbb{K}_0^\infty$ $(= \mathbb{K}_0^{\mathbb{N}})$ и $e_n = (\delta_{nj})$ $(j = 1, \dots)$ — стандартные базовые последовательности: $x = (\alpha_n) \in \mathbb{K}_0^\infty \Leftrightarrow x = \sum \alpha_n e_n$.

Рассмотрим операторы $S, T, U, V \in \mathscr{L}(E)$, определенные равенствами

$$S(e_n) = e_n,\ Te_n = e_{2n},\ Ue_{2n-1} = Ue_{2n} = e_n,\ Ve_{2n-1} = Ve_{2n} = e_{2n}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Все эти операторы имеют бесконечный ранг: $r(S) = r(T) = r(U) = r(V) = \infty$. Тождественный оператор $S = I$ накрывающий и взаимно однозначный. Для него $R(I) = F$, $c(I) = 0$ и $d(I) = 0$. Оператор T не накрывающий и взаимно однозначный. Для него $R(T) = L\{e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $CK(T) = L\{e_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $c(T) = \infty$ и $d(T) = 0$. Оператор U накрывающий и не взаимно однозначный. Для него $R(U) = F$, $K(U) = \{x = (\alpha_n) \mid \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$, $c(U) = 0$ и $d(U) = \infty$. Оператор V не накрывающий и не взаимно однозначный. Для него $R(V) = R(T)$, $CK(V) = CR(T)$, $K(V) = K(U)$, $c(V) = \infty$ и $d(V) = \infty$.

9. Рассмотрим пространства E, F и оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$. Он может быть накрывающим или ненакрывающим, взаимно однозначным или не взаимно однозначным. Из предложения п. 2 и леммы п. 7 следует

Теорема. *Верны следующие утверждения.*

(1) *Оператор T накрывающий и взаимно однозначный $\Longleftrightarrow c(T) = 0$ и $d(T) = 0$.*
(2) *Оператор T накрывающий и не взаимно однозначный $\Longleftrightarrow c(T) = 0$ и $d(T) \neq 0$.*
(3) *Оператор T ненакрывающий и взаимно однозначный $\Longleftrightarrow c(T) \neq 0$ и $d(T) = 0$.*
(4) *Оператор T ненакрывающий и не взаимно однозначный $\Longleftrightarrow c(T) \neq 0$ и $d(T) \neq 0$.*

В теореме перечислены все логические возможности. Для линейного уравнения $Tx = y$ они формулируются так:

(1) *Для каждого $y \in F$ существует единственное решение $x \in E$.*
(2) *Для каждого $y \in F$ существует не единственное решение $x \in E$.*
(3) *Для некоторых (не всех) $y \in F$ существует единственное решение $x \in E$, а для остальных $y \in F$ решений $x \in E$ не существует.*
(4) *Для некоторых (не всех) $y \in F$ существует не единственное решение $x \in E$, а для остальных $y \in F$ решений $x \in E$ не существует.*

В случае (1) говорят, что уравнение $Tx = y$ *корректно* или *корректно разрешимо.* Во всех остальных случаях его называют *некорректным.*

Замечание. Для нелинейного оператора $T \in \mathscr{F}(E, F)$ в случаях (2)–(4) нужно было бы различать возможности некоторым существующим решениям нелинейного уравнения $Tx = y$ быть единственными, а некоторым — не единственными. Для линейных уравнений $Tx = y$ это невозможно. При $y = 0$ такое уравнение называется *однородным*, а при $y \neq 0$ *неоднородным.* Прообраз

$T^{-1}(y)$ называется *общим решением*, а каждый $x(y) \in T^{-1}(y)$ — *частным решением.* Общим решением однородного уравнения $Tx = 0$ является ядро $K(T) = T^{-1}(0)$ оператора T. Всегда существующим частным решением однородного уравнения является *нулевое решение* $x(0) = 0$. Взаимоотношения между этими решениями описывает

Предложение. *Общее решение линейного уравнения $Tx = y$ равно сумме любого частного решения $x(y)$ и общего решения $K(T)$ однородного уравнения $Tx = 0$: $T^{-1}(y) = x(y) + K(T)$.*

□ В самом деле, если $Tx(y) = y$ и $z \in K(T)$, то $T(x(y) + z) = Tx(y) + Tz = y + 0 = y$. Значит, $x(y) + K(T) \subseteq T^{-1}(y)$. Обратно, для каждого $x \in T^{-1}(y)$ из равенств $Tx = y$ и $Tx(y) = y$ вытекает, что $T(x - x(y)) = Tx - Tx(y) = y - y = 0$. Следовательно, $x - x(y) = z \in K(T)$ и $x = x(y) + z \in x(y) + K(T)$. Значит, $T^{-1}(y) \subseteq x(y) + K(T)$. ■

Замечание. Каждые вектор a и подпространство N пространства E образуют *линейное многообразие* $M = a + N$ в E. Размерность N считается и *размерностью* M. Общее решение $T^{-1}(y) = x(y) + K(T)$ разрешимого линейного уравнения $Tx = y$ является линейным многообразием. Все эти многообразия имеют одну и ту же размерность $d(T) = \dim K(T)$.

10. Линейный оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$, для которого $c(T) < \infty$ и $d(T) < \infty$, называется *фредгольмовым.* Разность $i(T) = c(T) - d(T)$ называется *индексом* фредгольмова оператора T. Равенство $i(T) = 0$ означает $c(T) = d(T)$.

Примеры. 1) Если $\dim E < \infty$ и $\dim F < \infty$, то все операторы $T \in \mathscr{L}(E, F)$ фредгольмовы.

2) Пусть $E = F$ и M — подпространство с размерностью $\dim M = m < \infty$. Рассмотрим тождественный оператор I и оператор $S \in \mathscr{L}(E)$ такой, что $R(S) \subseteq M$ и $K(S) \supseteq E - M$ ($Sx = 0$ при $x \notin M$). Оператор $T = I - S$ фредгольмов. В самом деле, $0 = Tx = x - Sx \Rightarrow x = Sx \in R(S)$ и поэтому $K(T) \subseteq R(S) \subseteq M$, $d(T) \leq m < \infty$. Если $y \notin M$, то $Ty = y - Sy = y - 0 = y$ и $y \in R(T)$. Следовательно, дополнение $E - R(T) \subseteq M$ и $c(T) = \dim E/R(T) = \dim(E - R(T)) \leq m < \infty$. Дополнения $E - X$ берутся по выбранной базе.

Вопрос. Есть ли в $\mathscr{L}(E)$ другие фредгольмовы операторы?

Рассмотрим пространства E, F с размерностями $\dim E < \infty$ и $\dim F < \infty$ и оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Так как E и F конечномерны, то оператор T фредгольмов. Для конечномерного случая верна

Лемма. $i(T) = \dim F - \dim E$.

$\square$ Это сразу следует из равенств $\dim E = r(T) + d(T)$ и $\dim F = r(T) + c(T)$. $\blacksquare$

Следствие. $c(T) = d(T) \Leftrightarrow \dim F = \dim E$.

Рассмотрим произвольные пространства E, F и оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Он может либо быть, либо не быть изоморфизмом. В теореме п. 9 вторая возможность описывается случаями (2)–(4). Для фредгольмова оператора T с индексом $i(T) = 0$ возможен только случай (4). Это выражает

Альтернатива Фредгольма. *Фредгольмов оператор с нулевым индексом либо является изоморфизмом, либо ненакрывающий и не взаимно однозначный.*

$\square$ Если $i(T) = 0$, то $c(T) = d(T) = a$. При $a = 0$ оператор T является изоморфизмом пространства E на пространство F. При $a \neq 0$ оператор T не накрывающий и не взаимно однозначный. $\blacksquare$

Предложение. *Если* $\dim E = \dim F < \infty$, *то каждый* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *либо является изоморфизмом, либо не накрывает* F *и не взаимно однозначен.*

$\square$ По доказанному из условия следует, что оператор T — фредгольмов и $i(T) = 0$. $\blacksquare$

Пример. Возьмем пространства $E = F = \mathbb{K}_0^\infty$, стандартную базу $\{e_i \mid i \geq 1\}$, натуральное число m, подпространство $M = L\{e_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ и семейство (α_{ij}) $(1 \leq i, j \leq m)$ элементов поля $\mathbb{K}$. Определим оператор $S \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_0^\infty)$ равенствами $Se_i = \sum\limits_{1 \leq j \leq m} \alpha_{ij} e_j$ $(1 \leq i \leq m)$, $Se_i = 0$ $(i > m)$.

Так как $R(S) \subseteq M$ и $K(S) \supseteq E - M$, то оператор $T = I - S$ фредгольмов. Он либо изоморфизм (если $\det(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) \neq 0$), либо ненакрывающий и не взаимно однозначный (если $\det(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) = 0$). В частности, если $\alpha_{ii} = \alpha$ и $\alpha_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то $K(T) = M$ и $R(T) = M^c$ (дополнение M по стандартной базе) при $\alpha = 1$ и $K(T) = \{0\}$, $R(T) = E$ при $\alpha \neq 1$.

Упражнение. Вычислить индекс оператора T в примере.

Линейное уравнение $Tx = y$ с фредгольмовым оператором T называется *фредгольмовым.* Альтернатива для таких уравнений формулируется следующим образом: *если оператор T имеет нулевой индекс, то либо уравнение $Tx = y$ корректно, либо оно разрешимо не для всех y и уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевые решения.*

Замечание. Таким образом, при нулевом индексе *единственность* решения однородного фредгольмова уравнения *обеспечивает существование* решения для любой правой части (тоже единственного).

2.2.3. Линейные функционалы

Линейными функционалами называются линейные операторы со скалярными значениями. Они играют роль координат для векторного пространства.

1. Пространство $(\mathbb{K}, E^*)$, векторами которого служат линейные функционалы $f\colon E \to \mathbb{K}$, называется (*алгебраическим*) *сопряженным* для $(\mathbb{K}, E)$: $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Докажем несколько утверждений для сопряженных пространств. Для любых пространств $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{K}, F)$ верна

Лемма 1. $E \simeq F \Rightarrow E^* \simeq F^*$.

$\square$ Пусть $T\colon E \to F$ — линейный изоморфизм. Рассмотрим отображение $T^*\colon E^* \to F^*$, определяемое равенством $T^*g = gT$ $(g \in F^*)$, которое эквивалентно $(T^*g)x = g(Tx)$ $(x \in E)$.

Отображение T^* линейно: $T^*(g + h) = (g + h)T = gT + hT = T^*g + T^*h$, $T^*(\alpha g) = (\alpha g)T = \alpha(T^*g)$ $(\alpha \in \mathbb{K};\ g, h \in F^*)$. Оно взаимно однозначно: $T^*g = 0 \Leftrightarrow gT = 0 \Leftrightarrow g(Tx) = 0$ $(x \in E) \Leftrightarrow g(y) = 0$ $(y \in F)$, так как $T(E) = F$. Кроме того, T^* накрывает E^*: для каждого $f \in E^*$ верны равенства $T^*(fT^{-1}) = (fT^{-1})T = f(T^{-1}T) = f$. $\blacksquare$

Для пространства $\mathbb{K}_0^I$ финитных семейств элементов $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$ верна

Лемма 2. $\left(\mathbb{K}_0^I\right)^* \simeq \mathbb{K}^I$.

$\square$ Каждое семейство $a = (\alpha_i) \in \mathbb{K}^I$ определяет функционал $f_a \in \left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$ со значениями $f_a(x) = \sum \alpha_i \xi_i$, $x = \sum \xi_i e_i$ $((\xi_i) \in \mathbb{K}_0^I)$: так как семейство $x = (\xi_i)$ финитно, то множество ненулевых слагаемых $\alpha_i \xi_i$ конечно. Функционал $f_a \in \left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$:

$$\begin{aligned} f_a(\alpha x + \beta y) &= \sum \alpha_i(\alpha \xi_i + \beta \eta_i) = \alpha \sum \alpha_i \xi_i + \beta \sum \alpha_i \eta_i \\ &= \alpha f_a(x) + \beta f_a(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K};\ x = (\xi_i),\ y = (\eta_i) \in \mathbb{K}_0^I). \end{aligned}$$

Отображение $S\colon \mathbb{K}^I \to \left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$, $Sa = f_a$ $(a = (\alpha_i) \in \mathbb{K}^I)$ линейно:

$$S(\alpha a + \beta b)x = \sum (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i)\xi_i = (\alpha Sa + \beta Sb)x$$
$$(\alpha, \beta \in \mathbb{K};\quad a = (\xi_i),\quad b = (\eta_i) \in \mathbb{K}^I,\quad x = (\xi_i) \in \mathbb{K}_0^I).$$

Отображение S имеет нулевое ядро: $Sa = 0 \Leftrightarrow \sum \alpha_i\xi_i = 0$ $(x = (\xi_i) \in \mathbb{K}_0^I) \Leftrightarrow \alpha_j = \sum \alpha_i\delta_{ij}$ ($j \in I$; суммирование по повторяющемуся индексу i). Отображение S взаимно однозначно. Отображение S накрывает $\left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$. В самом деле, каждый функционал $f \in \left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$ определяется своими значениями $\alpha_i = f(e_i)$ для базовых семейств $e_i = (\delta_{ij})$:

$$f(x) = \sum \alpha_i\xi_i \quad (x = (\xi_i) = \sum \alpha_i e_i \in \mathbb{K}_0^I).$$

Значит, $f = Sa$ для $a = (\alpha_i) \in \mathbb{K}^I$. Таким образом, S является изоморфизмом $\mathbb{K}^I$ на $\left(\mathbb{K}_0^I\right)^*$. ■

Следствие. *Если* $\dim E < \infty$, *то* $E^* \simeq E$.

□ Пусть $\dim E = m < \infty$. Так как $\mathbb{K}_0^m = \mathbb{K}^m$, то $E \simeq \mathbb{K}^m$ (п. 2.2.2, 5). По леммам 1 и 2 отсюда следует, что $E^* \simeq (\mathbb{K}^m)^* \simeq \left(\mathbb{K}_0^m\right)^* \simeq E$. ■

Предложение 2. $\dim E \le \dim E^*$.

□ Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ — база пространства E и $e_i^* \in E^*$ определяется равенством $e_i^*(x) = \xi_i$ $(x = \sum \xi_i e_i \in E)$. Семейство $\left\{e_i^* \mid i \in I\right\}$ линейно свободно. По лемме 2.2.1, 7 существует база B^* пространства E^*, содержащая это семейство. Следовательно, $\dim E = |I| \le |B^*| = \dim E^*$. ■

Пример. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $I = \mathbb{N}$. Тогда $\left|\mathbb{K}_0^I\right| = \left|\mathbb{Q}_0^{\mathbb{N}}\right| = \sum |\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| \cdot |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ и множество финитных рациональных последовательностей счетно. А по теореме Кантора $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{K}^I|$ и множество всех рациональных последовательностей несчетно. Изоморфизм невозможен даже между множествами $\mathbb{Q}_0^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, а не только между пространствами.

Упражнение. Доказать, что $\dim E^* = |\mathbb{K}^{\dim E}|$ и, следовательно, $\dim E < \dim E^*$ при $\dim E = \infty$.

Замечание. Правила действий с *кардинальными числами* [53, гл. V, § 8, теорема 7] и теорема Кантора приводят к соотношениям, верным для каждых бесконечных поля $\mathbb{K}$ и множества I:

$$\left|\mathbb{K}_0^I\right| = \sum |\mathbb{K}^K| = |\mathbb{K}| \cdot |I| \quad (K \in \mathscr{K}(I)), \quad |I| < |\mathbb{K}^I|.$$

Здесь $\mathscr{K}(I)$ обозначает класс всех конечных частей множества I. Используется равенство $|\mathbb{K}^K| = |\mathbb{K}|$ для $|\mathbb{K}| = \infty$ [11, гл. III, § 6, теорема 2 и следствие 1).

Замечание. Множество точек E пространства $(\mathbb{K}, E)$ с помощью отображения $a \to \chi_a$ $(\chi_a(a) = 1,\ \chi_a(x) = 0$ при $x \neq a$, $a \in X,\ x \in X)$ вкладывается в векторное пространство $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ скалярных функций на E. Образ E содержится в подпространстве $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(E, \mathbb{K})$ финитных функций, которое отделяет точки E. Можно рассматривать сопряженные пространства $\mathscr{F}_0^*$ и $\mathscr{F}^*$. Подчеркнем, что индикаторы χ_a не являются линейными функционалами на E $(\chi_a \notin \mathscr{L}(E, \mathbb{K}))$.

2. Сопряжение пространств можно продолжить и рассмотреть для E *второе сопряженное* пространство $E^{**} = (E^*)^*$, сопряженное к первому.

Среди функционалов $x^{**} \in E^{**}$ выделяются функционалы δ_x, определяемые для $x \in E$ равенством $\delta_x(x^*) = x^*(x)$ $(x^* \in E^*)$. Рассмотрим отображение $\delta\colon E \to E^{**}$, при котором каждой точке $x \in E$ соответствует функционал $\delta_x \in E^{**}$. Оно называется *естественным вложением E в E^{**}*. Отображение δ линейно и взаимно однозначно. Образ $\delta(E)$ является подпространством пространства E^{**}. Этот образ часто отождествляют с E и считают, что $E \subseteq E^{**}$.

Верны неравенства $\dim E \leq \dim E^* \leq \dim E^{**}$. Если $\dim E < \infty$, то $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$ и $E \simeq E^* \simeq E^{**}$.

Функционалы из ненулевого E^* *отделяют точки* пространства E: если $a, b \in E$ и $a \neq b$, то $x^*a \neq x^*b$ для некоторого $x^* \in E^*$ (для которого $x^*(a - b) \neq 0$). Это позволяет использовать значения функционалов E^* в качестве *координат* точек E: каждой точке a соответствует семейство (линейных) координат $x^*(a) \in \mathbb{K}$ $(x^* \in E^*)$. При этом благодаря свойству функционалов отделять точки, различным точкам $a \neq b$ соответствуют различные семейства координат $E^*a \neq E^*b$.

Замечание. Так как среди функционалов $x^* \in E^*$ есть линейно зависимые, то семейство E^*a линейных координат можно было бы заменить меньшим семейством B^*a базовых координат для любой базы B^* пространства E^*. Но в общем случае при $\dim E = \infty$ известно только, что такие базы существуют. А при $m = \dim E < \infty$ так и поступают: как правило используют базовые координаты e_i^* $(1 \le i \le m)$.

Каждое отделяющее точки пространства E подпространство $E' \subseteq E^*$ назовем *системой координат* для E. Благодаря линейности функционалов $x' \in E'$ подпространство E' является системой координат для E ессли для каждого $z \in E$, $z \ne 0$ существует $x' \in E'$ такой, что $x'(z) \ne 0$ (x' отделяет точку z от точки 0).

Пусть $E' \subseteq E^*$ — система координат для E. Рассмотрим некоторую систему координат $E'' \subseteq (E')^*$ для E'. В частности, можно взять $E'' = \delta(E)$: если $z \ne 0$, то $\delta_a(z) = z'(a) \ne 0$ для некоторой точки $a \in E$. Отождествление E с $\delta(E)$ позволяет в этом случае считать E системой координат для E' и говорить о рефлексивности: повторный переход к координатам возвращает к исходной точке. Условимся пространство E с системой координат E' для E и системой координат $E'' = \delta(E)$ для E' называть *рефлексивным* и обозначать (E, E') или тоже E, добавляя скалярное поле $\mathbb{K}$, если нужно.

Пример. Если $\dim E < \infty$, то $E \simeq E^*$ и $E' = E^*$, $E'' = E^{**}$ определяют рефлексивное пространство.

Замечание. Каждый функционал $x'' \in \mathscr{L}(E', \mathbb{K})$ можно продолжить до функционала $x^{**} \in \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K})$ с помощью равенств $x^{**}(x' + z^*) = x''(x')$ для $x' \in E'$ и $z^* \in Z^*$, где $Z^* = (E')^c$ — дополнение E' до E^* по выбранной базе.

3. Рассмотрим пространства $(\mathbb{K}, E)$, $(\mathbb{K}, F)$ и линейный оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$. При переходе от точек к их координатам этим пространствам и оператору соответствуют сопряженные пространства $(\mathbb{K}, E^*)$, $(\mathbb{K}, F^*)$ и оператор $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$, который координаты точки $Tx = y \in F$ переводит в координаты точки $x \in E$. Определим соответствие $T^*\colon F^* \to E^*$ равенством $T^*y^* = y^*T$ $(y^* \in F^*)$. Заметим, что $y^*T = x^* \in E^*$.

Лемма. $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$.

$\square$ Соответствие T^* однозначно: $T^*y_1^* \ni x_1^* \ne x_2^* \in T^*y_2^* \Rightarrow y_1^*(Ta) = x_1^*a \ne x_2^*a = y_2^*(Ta)$ для некоторого $a \in E \Rightarrow y_1^* \ne y_2^*$. Отображение T^* линейно: $T^*\big(\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*\big) = \big(\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*\big)T = \alpha_1\big(y_1^*T\big) + \alpha_2\big(y_2^*T\big) = \alpha_1 \cdot T^*y_1^* + \alpha_2 \cdot T^*y_2^*$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K};\ y_1^*, y_2^* \in F^*)$. $\blacksquare$

Линейный оператор T^* называется *сопряженным* для T. Равенства $x^*a = (T^*y^*)a = y^*(Ta) = y^*b$ показывают, что оператор T^* переводит координату y^*b образа $Ta = b \in F$ точки $a \in E$ в координату x^*a этой точки. Если $R(T^*) \neq E^*$, то при этом получаются не все координаты точки a.

Примеры. 1) O^* — нулевой оператор: $O^*y^* = y^*O = o^*$ $(y^* \in F^*)$.

2) Пусть $E = F$ и $T = I$. Тогда I^* — тождественный оператор: $I^*y^* = y^*I = y^*$ $(y^* \in F^*)$.

Рассмотрим пространства $(\mathbb{K}, E)$, $(\mathbb{K}, F)$, $(\mathbb{K}, G)$, операторы $T, U \in \mathscr{L}(E, F)$ и $V \in \mathscr{L}(F, G)$, скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Теорема. $(\alpha T + \beta U)^* = \alpha T^* + \beta U^*$, $(VU)^* = U^*V^*$.

$\square$ Действительно, $(\alpha T + \beta U)^*y^* = y^*(\alpha T + \beta U) = \alpha(y^*T) + \beta(y^*U) = \alpha \cdot T^*y^* + \beta \cdot U^*y^*$ $(y^* \in F^*)$ и $(VU)^*z^* = z^*(VU) = (z^*V)U = (V^*z^*)U = U^*(V^*z^*) = (U^*V^*)z^*$ $(z^* \in G^*)$. $\blacksquare$

Следствие. *Если T — изоморфизм E на F, то T^* — изоморфизм F^* на E^* и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

$\square$ Применяя теорему к $F = R(T)$, $G = E$ и $U = T$, $V = T^{-1}$, получаем $T^*(T^{-1})^* = I^*\colon E^* \to E^*$. Точно так же, применяя теорему к пространствам $F, E = R(T^{-1})$, $G = F$ и операторам $V = T^{-1}\colon F \to E$ и $U = T = V^{-1}\colon E \to F$, получаем $(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I^*\colon F^* \to F^*$. $\blacksquare$

Замечание. Если $F \neq R(T)$, то $T^{-1}\colon R(T) \to E$ при взаимной однозначности $T\colon E \to F$ и $T^*\colon F^* \to E^*$, $(T^{-1})^*\colon E^* \to R(T)^*$, а соответствие $(T^*)^{-1}\colon R(T^*) \to F^*$ определено на подпространстве $R(T^*)$ пространства E^*. Для того чтобы сравнивать оператор $(T^{-1})^*$ с соответствием $(T^*)^{-1}$, нужно рассматривать сужение $(T^{-1})^*$ на $R(T^*)$ и вложить $R(T^*)$ в F^*, продолжая функционалы на $R(T)$ до функционалов на F.

Сопряжение операторов можно продолжать и рассматривать второй сопряженный оператор $T^{**} = (T^*)^* \in \mathscr{L}(E^{**}, F^{**})$. При естественном вложении пространств E, F в E^{**}, F^{**} и отождествлении $x = x^{**}$, $y = y^{**}$ сужение оператора T^{**} можно отождествить с T:

$$Tx = y \Rightarrow x^* = T^*y^* \Rightarrow T^{**}x^{**} = y^{**}.$$

Если $\dim E = \dim F < \infty$, то при таком отождествлении $T^{**} = T$.

4. Выберем в пространстве $(\mathbb{K}, E)$, $(\mathbb{K}, F)$ базы $A = \{a_i \mid i \in I\}$, $B = \{b_j \mid j \in J\}$. Рассмотрим произвольные векторы $x = \sum \xi_i a_i \in E$, $y = \sum \eta_j b_j \in F$ и оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Благодаря линейности T равенство $Tx = y$ эквивалентно равенствам

$$Tx = \sum \xi_i T a_i = \sum_j \left(\sum_i \xi_i \alpha_{ij} \right) b_j,$$
$$T a_i = \sum_j \alpha_{ij} b_j, \quad \eta_j = \sum_i \xi_i \alpha_{ij}.$$

Семейство $M = (\alpha_{ij})$ называется *матрицей* оператора T в базах A, B. По определению, $M \colon I \times J \to \mathbb{K}$. Элементы матрицы M будем также обозначать $\alpha(i, j)$. Частные отображения $\alpha(i, \cdot) \colon J \to \mathbb{K}$ и $\alpha(\cdot, j) \colon I \to \mathbb{K}$ называются соответственно *i-й строкой* и *j-м столбцом* матрицы M. Это связано с традиционной записью матрицы в виде таблицы. Как семейства координат образов $T a_i$ базовых векторов a_i строки $\alpha(i, \cdot)$ являются финитными семействами. Семейство координат (ξ_i) вектора x также финитно. Поэтому во всех выписываемых суммах множества ненулевых слагаемых конечны.

Условимся финитные семейства координат

$$\xi = \{\xi(1, i) = \xi_i \mid i \in I\}, \quad \eta = \{\eta(1, j) = \eta_j \mid j \in J\}$$

называть *координатными строками.* По определению, $\xi \in \mathbb{K}_0^I$, $\eta \in \mathbb{K}_0^J$ и $\alpha(i, \cdot) \in \mathbb{K}_0^I$, $\alpha(\cdot, j) \in \mathbb{K}^I$ (столбцы матрицы M могут не быть финитными).

Действия с операторами определяют действия с матрицами. Сложение и умножение на скаляр производится поэлементно:

$$\alpha(\alpha_{ij}) + \beta(\beta_{ij}) = (\alpha \alpha_{ij} + \beta \beta_{ij})$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $M = (\alpha_{ij})$, $N = (\beta_{ij})$. Умножение строки на матрицу производится по правилу *строка на столбец*:

$$\eta = \xi M \Longleftrightarrow \eta_j = \xi \cdot \alpha(\cdot, j) \Leftrightarrow \eta_j = \sum_i \xi_i \alpha_{ij}.$$

Это же правило применяется при умножении матрицы на матрицу. Рассмотрим множества I, J, K и матрицы $M = (\alpha_{ij})$, $N = (\beta_{jk})$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. *Произведением матриц* M, N с финитными строками называется матрица $MN = (\gamma_{ik})$ с элементами

$$\gamma(i,k) = \alpha(i,\cdot)\cdot\beta(\cdot,k) \Leftrightarrow \gamma_{ik} = \sum_j \alpha_{ij}\beta_{jk}.$$

Финитность $\alpha(i,\cdot)$ обеспечивает суммирование, а финитность $\beta(j,\cdot)$ — финитность строк $\gamma(i,\cdot)$. Заметим, что $\gamma(i,\cdot) = \alpha(i,\cdot)\cdot N$, $\gamma(\cdot,k) = M\cdot\beta(\cdot,k)$.

Когда нужно явно отметить множества индексов или их мощности, матрицу $M\colon I\times J \to \mathbb{K}$ называют $I\times J$- или $|I|\times|J|$-*матрицей*. Иногда рассматривают матрицы с нескалярными элементами. Часто эти элементы сами являются матрицами.

5. Рассмотрим пример с числами Гаусса. Пусть $I = J = \{1,2\}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Рассмотрим множество $\mathscr{M}(2,2)$ всех 2×2-матриц, элементами которых являются рациональные числа. Выделим матрицы

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим множество $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ их линейных комбинаций

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{Q}).$$

Будем отождествлять скалярную матрицу $\alpha\mathbf{1}$ с ее коэффициентом α и обозначать тоже α. Тогда $\mathbf{c} = \alpha + \beta\mathbf{i}$. Матрица $\mathbf{i}$ называется *мнимой единицей*.

Применяя правила действий с матрицами, легко проверить, что $(\mathbb{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ является полем:

$$\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = (\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)\mathbf{i},$$
$$\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathbf{i},$$
$$\mathbf{c}^{-1} = (\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha - \beta\mathbf{i}) \quad (\mathbf{c}\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\neq 0)$$

и выполняются законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Поле $\mathbb{Q}$ вкладывается в $\mathbb{C}$ $(\mathbb{Q})$ с помощью отображения $\alpha\to\alpha\mathbf{1}$ $(\alpha\in\mathbb{Q})$. Отождествляя $\mathbb{Q}$ с $\mathbb{Q}\mathbf{1}$, можно сказать, что $\mathbb{C}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\mathbf{i}$. Числа $\mathbb{Q}\mathbf{i}$ называются *мнимыми*.

Каждая 2×2-матрица с элементами из $\mathbb{Q}$ описывает линейное преобразование плоскости $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Векторы $e_1=(1,0)$ и $e_2=(0,1)$ составляют ее базу. Можно рассматривать матрицы линейных преобразований в этой базе. Скалярные матрицы $\alpha\mathbf{1}$ описывают гомотетии плоскости $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Матрица $\mathbf{i}$ описывает поворот плоскости $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, при котором $e_1\to e_2$ и $e_2\to -e_1$:

$$e_1\mathbf{i}=(1,0)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(0,1)=e_2,$$
$$e_2\mathbf{i}=(0,1)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=(-1,0)=-e_1$$

(*поворот на прямой угол против часовой стрелки*). Числа Гаусса описывают преобразования плоскости $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, являющиеся линейными комбинациями тождественного преобразования с таким поворотом. Заметим, что

$$\mathbf{i}^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-\mathbf{1}.$$

Мнимая единица $\mathbf{i}$ является решением уравнения $\mathbf{i}^2+1=0$.

Поле $\mathbb{K}$, в котором $\sum\alpha_i^2=0$ эквивалентно $\alpha_i=0$ для каждого непустого конечного семейства элементов α_i, называется *полем вещественного типа*. Эквивалентное условие: $\sum\beta_i^2\neq -1$ для любого конечного семейства $\beta_i\in\mathbb{K}$. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является полем вещественного типа. Это следует из упорядоченности поля $\mathbb{Q}$ и согласованности порядка с операциями: если в конечном семействе рациональных чисел α_i есть число $\alpha_{i(0)}=\alpha\neq 0$, то $\sum\alpha_i^2\geq\alpha^2>0$.

Поле $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ не вещественного типа. Для каждого поля $\mathbb{K}$ вещественного типа можно по аналогии с $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ определить поле $\mathbb{C}(\mathbb{K})$, образованное 2×2-матрицами с элементами из $\mathbb{K}$. Оно тоже не будет полем вещественного типа и в нем уравнение $x^2+1=0$ тоже будет иметь решение. Вещественный тип поля $\mathbb{K}$ нужен для определения обратных элементов в $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ с использованием $(\alpha^2+\beta^2)^{-1}$ для $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Поле $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ можно назвать полем *комплексного типа*.

6. Рассмотрим пространства $(\mathbb{K},E)$, $(\mathbb{K},F)$, $(\mathbb{K},G)$, пространства операторов $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(F,G)$ и пространства имеющих финитные строки матриц $\mathscr{M}(I,J)$, $\mathscr{M}(J,K)$ для множеств индексов

I, J, K баз $A = \{a_i \mid i \in I\}$, $B = \{b_j \mid j \in J\}$, $C = \{c_k \mid k \in K\}$ пространств E, F, G.

Пусть операторам $T, U \in \mathscr{L}(E, F)$ и $V \in \mathscr{L}(F, G)$ при выбранных базах соответствуют матрицы $\operatorname{mat} T = M = (\alpha_{ij})$, $\operatorname{mat} U = N = (\beta_{ij})$, $\operatorname{mat} V = P = (\gamma_{jk})$. Для операторов и для матриц в п. 4 были определены сложение, умножение на скаляр и умножение (при подходящих строках и столбцах).

Лемма. *Соответствие* $\mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{M}(I, J)$ *является сохраняющим операции изоморфизмом векторных пространств.*

□ Рассмотрим равенства $Ta_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} b_j$, $Ua_i = \sum\limits_j \beta_{ij} b_j$, $Vb_j = \sum\limits_k \gamma_{jk}$ и $Tx = \sum\limits_j \Big(\sum\limits_i \xi_i \alpha_{ij}\Big) b_j$, $Ux = \sum\limits_j \Big(\sum\limits_i \xi_i \beta_{ij}\Big) b_j$, $Vy = \sum\limits_k \Big(\sum\limits_j \eta_j \gamma_{jk}\Big) c_k$ для $x = \sum \xi_i a_i$, $y = \sum \eta_j b_j$. Первые три равенства по операторам T, U, V определяют их матрицы M, N, P. Существование элементов α_{ij}, β_{ij}, γ_{jk} обеспечивается базами A, B, C. При этом разным операторам соответствуют разные матрицы: если $T \neq U$, то $Ta_{i(0)} \neq Ua_{i(0)}$ для некоторого индекса $i(0) \in I$ и, следовательно, $\alpha_{i(0)j(0)} \neq \beta_{i(0)j(0)}$ для некоторого индекса $j(0) \in J$, а значит, $M \neq N$.

Равенства для Tx и Ux по матрицам определяют операторы $T, U \in \mathscr{L}(E, F)$. Таким образом, mat взаимно однозначно отображает $\mathscr{L}(E, F)$ на $\mathscr{M}(I, J)$. Равенства

$$\operatorname{mat}(\alpha T + \beta U) = \alpha \cdot \operatorname{mat} T + \beta \cdot \operatorname{mat} U,$$
$$\operatorname{mat}(VU) = (\operatorname{mat} U)(\operatorname{mat} V)$$

следуют из определения действий с операциями и матрицами. ■

Замечание. При переходе от композиции операторов к произведению их матриц порядок множителей меняется. Это соответствует равенствам $(VU)x = V(Ux) = (xN)P = x(NP)$ $(x \in E)$.

Пусть $E = F = G$, $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(F, G) = \mathscr{L}$, $A = B = C$, $I = J = K$ и $\mathscr{M}(I, J) = \mathscr{M}(J, K) = \mathscr{M}$. Тогда из леммы вытекает

Следствие. *Соответствие* $\operatorname{mat} \colon \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ *является антисимметричным изоморфизмом алгебры операторов* $\mathscr{L}$ *на алгебру матриц* $\mathscr{M}$.

Антисимметричность изоморфизма означает перестановку множителей в произведении. Антисимметричные изоморфизмы называют *антиизоморфизмами.* При равных множествах индексов матрицы называются *квадратными.*

7. Для сопряженного пространства E^* удобно обобщить понятие базы.

Выберем базу $A = \{e_i \mid i \in I\}$ в пространстве $(\mathbb{K}, E)$. Каждый базовый вектор e_i определяет функционал $e_i^* \in E^*$, $e_i^*(x) = \xi_i$ $(x = \sum \xi_i e_i \in E)$. Сопряженное пространство E^* изоморфно пространству $\mathbb{K}^I$ семейств $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$. Каждое такое семейство определяет обобщенную линейную комбинацию $f = \sum \alpha_i e_i^*$ функционалов e_i^*:

$$fx = \sum \alpha_i \bigl(e_i^* x\bigr) = \sum \alpha_i \xi_i \quad (x = \sum \xi_i e_i).$$

Так как семейство координат ξ_i вектора x финитно, то множество ненулевых слагаемых в этих суммах конечно, хотя семейство коэффициентов α_i может и не быть финитным.

Функционалы e_i^* составляют *обобщенную базу* $A^* = \bigl\{e_i^* \mid i \in I\bigr\}$ пространства E^* и называются *базовыми.* Говорят, что обобщенная база A^* *сопряжена* с A. Если $\dim E < \infty$, то A^* является обычной базой пространства E^*. Назовем мощность $\dim^* E^* = |A^*| = \dim E$ *обобщенной размерностью* сопряженного пространства E^*. Если $\dim E < \infty$, то $\dim^* E^* = \dim E^*$. Если $\dim E = \infty$, то $\dim^* E^* < \dim E^*$. Из-за несчетной размерности с обычной базой пространства E^* трудно иметь дело. При счетной базе пространства E также лучше использовать счетную обобщенную базу сопряженного пространства E^*.

Так как $E^* = \mathscr{L}(E, F)$ при $F = \mathbb{K}$ и $\dim F = 1$, то матрицей функционала $f = \sum \alpha_i e_i^*$ в базах $A = \{e_i \mid i \in I\}$ и $B = \{1\}$ является $|I| \times 1$-матрица (столбец) $\operatorname{mat} f = f^t$ с элементами $\alpha(i, 1) = \alpha_i$ $(i \in I)$. Благодаря изоморфизму $E^* \simeq \mathbb{K}^I$ функционал $f = \sum \alpha_i e_i^*$ можно отождествить с его координатной строкой ($1 \times |I|$-матрицей) $\operatorname{mat} f = \{\alpha(i, 1) = \alpha_i \mid i \in I\}$. Столбец f^t получается *транспонированием* t этой строки. Точно так же вектор $x = \sum \xi_i e_i$ можно отождествить с его координатной строкой $\operatorname{mat} x = \{\xi(i, 1) = \xi_i \mid i \in I\}$. Скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ отождествляется с 1×1-матрицей (α): $\operatorname{mat} \alpha = \alpha$.

При этих соглашениях для каждых $f \in E^*$ и $x \in E$ верны равенства

$$fx = \operatorname{mat}(fx) = \operatorname{mat} x \cdot \operatorname{mat} f = \xi f^t.$$

А для оператора $T \in \mathscr{L}(E, F)$, его матрицы M в базах $A \subseteq E$ и $B \subseteq F$, векторов $x \in E$ и $Tx = y \in F$, их координатных семейств $\xi = (\xi_i)$ и $\eta = (\eta_j)$ в базах A и B верны равенства

$$\eta = \operatorname{mat}(Tx) = \operatorname{mat} x \cdot \operatorname{mat} T = \xi M.$$

Добавляя оператор $V \in \mathscr{L}(F, G)$, его матрицу P в базах B и C, вектор $Vy = z \in G$, его координатную строку $\operatorname{mat} z = \zeta$ в базе C, получим равенства $\zeta = \operatorname{mat}((VT)x) = \operatorname{mat} x \cdot \operatorname{mat} T \cdot \operatorname{mat} V = \xi(MP)$.

Замечание. Матрицы M, P имеют финитные строки и произвольные столбцы. Финитность строк обеспечивает возможность умножать матрицы по правилу *строка на столбец*. Если определить подходящим образом суммы $\sum \gamma_j \delta_j$ для некоторых не обязательно финитных семейств, то можно определить произведение $MN = (\gamma_{ik})$ с элементами $\gamma_{ik} = \sum \alpha_{ij}\beta_{jk}$ для матриц $M = (\alpha_{ij})$, $N = (\beta_{jk})$ более общего вида. Это бывает нужно при обобщениях понятия базы векторного пространства и соответствующих матричных представлениях операторов. Но в этом пункте рассматриваются только матрицы, все строки которых или все столбцы финитны.

8. Рассмотрим: оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$, его матрицу $M = (\alpha_{ij})$ в базах $A = (a_i) \subseteq E$ и $B = (b_j) \subseteq F$, сопряженный оператор $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$, его матрицу $M^* = (\alpha_{ji})$ в сопряженных базах $B^* = (b_j^*)$ и $A^* = (a_i^*)$, транспонированную матрицу $M^t = (\alpha_{ji}^t)$ с элементами $\alpha_{ji}^t = \alpha_{ij}$. Строки матрицы M служат столбцами M^t, а столбцы M — строками M^t: $\alpha^t(\cdot, i) = \alpha(i, \cdot)$, $\alpha^t(j, \cdot) = \alpha(\cdot, j)$.

Предложение. $M^* = M^t$.

□ По определению, $T^*y^* = y^*T$ $(y^* \in F^*)$. Следовательно, $\alpha_{ji}^* = \sum\limits_k \alpha_{jk}^*(a_k^* a_i) = \Big(\sum\limits_k \alpha_{jk}^* a_k^*\Big) a_i = (Tb_j^*)a_i = (b_j^*T)a_i = b_j^*(Ta_i) = b_j^*\Big(\sum\limits_l \alpha_{il} b_l\Big) = \sum\limits_l \alpha_{il} b_j^* b_l = \alpha_{ij} = \alpha_{ji}^t$. ■

Для координатных строк η^*, ξ^* функционалов $y^* \in F^*$, $T^*y^* = x^* \in E^*$ верно равенство $\xi^* = \eta^* M^*$. По доказанному, оно эквивалентно $\xi^* = \eta^* M^t$.

Замечание. Так как строки M финитны, то столбцы M^t финитны и произведение $\eta^* M^* = \eta^* M^t$ определено для произвольных семейств $\eta^* \in \mathbb{K}^J$. А так как строки M^t, являясь столбцами M, могут не быть финитными, то и семейства $\xi^* = \eta^* M^* = \eta^* M^t \in \mathbb{K}^I$ могут не быть финитными.

Матричную запись можно использовать и для баз A, B, B^*, A^*, считая их столбцами с элементами $a(i,1) = a_i$, $b(j,1) = b_j$, $b^*(j,1) = b_j^*$, $a^*(i,1) = a_i^*$. Применяя правило умножения *строка на столбец*, можно векторы $x = \sum \xi_i a_i \in E$, $y = \sum \eta_j b_j \in F$ и функционалы $y^* = \sum \eta_j^* b_j^* \in F^*$, $x^* = \sum \xi_i^* a_i^* \in E^*$ выразить через их координатные строки $\xi = (\xi(i,1) = \xi_i)$, $\eta = (\eta(j,1) = \eta_j)$ и $\eta^* = \big(\eta^*(j,1) = \eta_j^*\big)$, $\xi^* = \big(\xi^*(i,1) = \xi_i^*\big)$ в матричной форме: $x = \xi A$, $y = \eta B$ и $y^* = \eta^* B^*$, $x^* = \xi^* A^*$. В этой форме просто записать и образы баз (для правой записи операторов $xT = y$, $y^* T^* = x^*$): $AT = MB$, $B^* T^* = M^* B^*$. При транспонировании и левой записи оператора $Tx = y$ получается равенство $TA^t = B^t M^t$.

Упражнение. Проверить равенства $M^* = T^* B^* A^t = B^* T A^t = B^* B^t M^t = M^t$.

9. Равенство $\xi M = \eta$ позволяет отождествить матрицу $M \in \mathscr{M}(I,J)$ с оператором $M \in \mathscr{L}\big(\mathbb{K}_0^I, \mathbb{K}_0^J\big)$. Будем использовать левую запись операторов. Рассмотрим изоморфизмы $K \in \mathscr{L}\big(E, \mathbb{K}_0^I\big)$ и $L \in \mathscr{L}\big(F, \mathbb{K}_0^J\big)$, определяемые равенствами $Kx = \xi$ и $Ly = \eta$. Связь между операторами K, L, M, T поясняет диаграмма.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "K"'] & F \arrow[d, "L"] \\ \mathbb{K}_0^I \arrow[r, "M"'] & \mathbb{K}_0^J \end{tikzcd}$$

Из определений следуют равенства $T = L^{-1} M K$, $M = L T K^{-1}$. При транспонировании и правой записи получаются равенства $M^t \xi^t = \eta^t$ и $T = K M^t L^{-1}$, $M^t = K^{-1} T \mathrm{L}$.

Упражнение. Проверить равенства для T, M и T, M^t.

Равенства $\eta^* M^* = \xi^*$ позволяют отождествить матрицу $M^* \in \mathscr{M}(J,I)$ с оператором $M^* \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^J, \mathbb{K}^I)$. По-прежнему будем использовать левую запись операторов. Рассмотрим изоморфизмы $L^* \in \mathscr{L}(F^*, \mathbb{K}^J)$ и $K^* \in \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K}^I)$, определяемые равенствами $L^* y^* = \eta^*$ и $K^* x^* = \xi^*$. Связь между операторами M^*, L^*, K^*, T^* поясняет диаграмма.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_0^I & \mathbb{K}_0^J \arrow[l, "M^*"'] \\ E^* \arrow[u, "K^*"] & F^* \arrow[l, "T^*"] \arrow[u, "L^*"'] \end{tikzcd}$$

Из определений следуют равенства $T^* = (K^*)^{-1} M^* L^*$, $M^* = K^* T^* (L^*)^{-1}$. Так как $M^* = M^t$, то в этих равенствах можно заменить M^* на M^t.

Упражнение. Используя тождественное вложение $\varphi\colon \mathbb{K}_0^I \to \mathbb{K}^I$ и $\psi\colon \mathbb{K}_0^J \to \mathbb{K}^J$, вывести равенства для T и M из равенств для T^* и M^*.

Замечание. Использование различных способов записи действий с операторами и матрицами иногда приводит к путанице. Но каждый из них имеет свои преимущества.

2.2.4. Скалярные произведения

Скалярное произведение определяет геометрию векторного пространства.

1. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, X)$, $(\mathbb{K}, Y)$, $(\mathbb{K}, Z)$, отображение $p\colon X \times Y \to Z$ и частные отображения $p(\cdot, b)\colon X \to Z$, $p(a, \cdot)\colon Y \to Z$ $(a \in X,\ b \in Y)$. Если отображения $p(\cdot, b)$, $p(a, \cdot)$ линейны, то отображение $p = p(\cdot, \cdot)$ называется *билинейным.* Будем называть билинейные функции *произведениями* и записывать их значения мультипликативно: $p(x, y) = xy \in Z$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Вместо xy иногда пишут yx. Обозначим $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ множество билинейных отображений $p\colon X \times Y \to Z$. Оно является частью множества $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X \times Y, Z)$ всех отображений $f\colon X \times Y \to Z$.

Лемма. $(\mathbb{K}, \mathscr{B})$ *является подпространством векторного пространства* $(\mathbb{K}, \mathscr{F})$.

$\square$ Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $p, q \in \mathscr{B}$. Тогда $(\alpha p + \beta q)(\cdot, b) = \alpha p(\cdot, b) + \beta q(\cdot, b) \in \mathscr{L}(X, Z)$ и $(\alpha p + \beta q)(a, \cdot) = \alpha p(a, \cdot) + \beta q \quad (a, \cdot) \in \mathscr{L}(Y, Z)$ $(a \in X,\ b \in Y)$. Значит, $\alpha p + \beta q \in \mathscr{B}$. $\blacksquare$

Если $Z = \mathbb{K}$, то произведения $p\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ из $\mathscr{B}(X \times Y, \mathbb{K})$ называются *скалярными.* Произведение $p\colon X \times X \to Z$, для которого $p(x, y) = p(y, x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, называется *симметричным.* Если $p(x, x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то произведение $p\colon X \times X \to Z$ называется *невырожденным.* В мультипликативной форме определяющие соотношения имеют вид: $xy = yx$, $x^2 = xx \neq 0$.

Примеры. 1) $X = Y = Z = \mathbb{K}$ и $p(\xi, \eta) = \xi\eta$ — произведение скаляров. 2) $X = Y = Z = E$ — векторная алгебра и $p(x, y) = xy$ — произведение векторов. 3) $X = E$, $Y = E^*$, $Z = \mathbb{K}$ и $p(x, f) = f(x) = xf$ — значение линейного функционала $f \in E^*$ в точке $x \in E$. 4) $X = E$, $Y = \mathscr{L}(E, F)$, $Z = F$ и $p(x, T) = Tx = xT$ — значение линейного оператора $T \in \mathscr{L}(E, F)$ в точке $x \in E$. 5) $X = \mathscr{L}(E, F)$, $Y = \mathscr{L}(F, G)$, $Z = \mathscr{L}(E, G)$ и $p(T, U) = UT$ — композиция операторов $(UTx = U(Tx) \in G,\ x \in E)$.

Вместе с пространством $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ билинейных отображений $p\colon X \times Y \to Z$ рассмотрим пространство $\mathscr{L} = \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y, Z))$ линейных операторов $T\colon X \to \mathscr{L}(Y, Z)$. Рассмотрим еще отображение $\varphi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{B}$, определяемое равенством $\varphi(T)(x, y) = (Tx)y$ $(x \in E,\ Tx \in \mathscr{L}(Y, Z),\ y \in Y,\ (Tx)y \in Z)$.

Предложение. *Отображение φ является изоморфизмом $(\mathbb{K}, \mathscr{L})$ на $(\mathbb{K}, \mathscr{B})$.*

$\square$ 1) Пусть $p \in \mathscr{B}$. Положим $Tx = p(x, \cdot) \in \mathscr{L}(Y, Z)$. Так как $p(\cdot, y) \in \mathscr{L}(X, Z)$, то $T \in \mathscr{L}$. Кроме того, $(Tx)y = p(x, y)$. Значит, $\varphi(T) = p$ и φ отображает $\mathscr{L}$ на $\mathscr{B}$.

Если $S, T \in \mathscr{L}$ и $S \neq T$, то $Sa \neq Ta$ при некотором $a \in X$. Следовательно, $(Sa)b \neq (Ta)b$ при некотором $b \in Y$, $\varphi(S) \neq \varphi(T)$ и φ взаимно однозначно.

2) Для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $S, T \in \mathscr{L}$ верны равенства

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha S + \beta T)(x, y) &= ((\alpha S + \beta T)x)y \\ &= \alpha(Sx)y + \beta(Tx)y = \alpha\varphi(S)(x, y) + \beta\varphi(T)(x, y).\end{aligned}$$

Значит, $\varphi(\alpha S + \beta T) = \alpha\varphi(S) + \beta\varphi(T)$ и отображение φ линейно. $\blacksquare$

Замечание. Изоморфизм $\mathscr{L} \simeq \mathscr{B}$ позволяет заменять повторные линейные отображения $T \in \mathscr{L}$ билинейными отображениями $p \in \mathscr{B}$. Это часто бывает удобно.

2. Рассмотрим пространства $(\mathbb{K}, E)$, $(\mathbb{K}, E^*)$ и скалярное произведение $p(x, x^*) = x^*(x) = xx^*$ $(x \in E,\ x^* \in E^*)$. Если $xx^* = 0$, то будем говорить, что функционал x^* *ортогонален* вектору x, и писать $x \perp x^*$. Ортогональность множества $X^* \subseteq E^*$ множеству $X \subseteq E$ означает, что $x \perp x^*$ для каждых $x^* \in X^*$, $x \in X$. В этом случае пишут $X \perp X^*$. Если $X = \{x\}$ или $X^* = \{x^*\}$, то пишут $x \perp X^*$ или $X \perp x^*$.

Пример. Выберем базу $A = (a_i) \subseteq E$ и возьмем сопряженную ей базу $A^* = (a_i^*) \subseteq E^*$ $(i \in I)$. По определению, $a_i a_k^* = \delta_{ik}$ и, значит, $a_i \perp a_k^*$ при $i \neq k$ $(i, j \in I)$.

Рассмотрим пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{K}, F)$, произвольные базы $A = (a_i)$ и $B = (b_j)$ для E и F, векторы $x = \sum \xi_i a_i \in E$ и $y = \sum \eta_j b_j \in F$ $(i \in I,\ j \in J)$. Равенство $p(x, y) = \sum\limits_{ij} \xi_i \gamma_{ij} \eta_j$ определяет скалярное произведение $p \in \mathscr{B}(E \times F, \mathbb{K})$ с матрицей $C = (\gamma_{ij})$ в базах $A = (a_i)$ и $B = (b_j)$. Элементы матрицы C равны скалярным произведениям базовых векторов: $\gamma_{ij} = a_i b_j$

$(i \in I,\ j \in J)$. Она определяет таблицу умножения для скалярного произведения p. В частности, если $E = F$, $A = B$ и $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, то $xy = \xi\eta^t = \sum \xi_i\eta_i$. Обычно требуется, чтобы матрица C обладала определенными свойствами. Если $E = F$, то скалярное произведение называется *внутренним.*

При $E = F$ база $A = (a_i)$, для которой $a_i a_j = \delta_{ij}$, называется *ортонормальной.*

Вопрос. Во всяком ли векторном пространстве со скалярным произведением существует ортонормальная база?

3. Рассмотрим рефлексивное пространство (E, E'). Для каждых множеств $X \subseteq E$, $X' \subseteq E'$ определены *ортогональные дополнения*

$$X^{\perp} = \{x' \mid xx' = 0\ (x \in X)\} \subseteq E',$$
$$X'^{\perp} = \{x \mid x'x = 0\ (x' \in X')\} \subseteq E.$$

Во втором равенстве используются отождествления $x'' = \delta_x = x$ и $E'' = \delta(E) = E$. Рассмотрим еще рефлексивное пространство (F, F') с теми же скалярами и отождествлением $y'' = y$, $F'' = F$. Возьмем оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ такой, что $y'T = x' \in E'$ для каждого $y' \in F'$. Определим оператор $T' \in \mathscr{L}(F', E')$ равенством $T'y' = y'T$ $(y' \in F')$. Назовем его *сопряженным* для T (как и T^*, сужением которого на F' является T').

Упражнение. Проверить линейность оператора T'.

Заметим, что $x''T' = y'' \in F''$ для каждого $x'' \in E''$. Это позволяет определить оператор $T'' = (T')' \in \mathscr{L}(E'', F'')$ равенством $T''x'' = x''T'$ $(x'' \in E'')$. Он называется *вторым сопряженным* для T (как и T^{**}). Отождествления E'' с E и F'' с F позволяют считать $T'' = T$ и писать $Tx = xT'$ вместо $T''x'' = x''T'$.

Рассмотрим образ $R(T) \subseteq F$, его ортогональное дополнение $R(T)^{\perp} \subseteq F'$ и ядро $K(T') \subseteq F'$.

Лемма. *$R(T)^{\perp} = K(T')$, $R(T')^{\perp} = K(T)$.*

$\square$ Из определений следует, что $y' \in R(T)^{\perp} \Leftrightarrow yy' = 0$ $(y \in R(T)) \Leftrightarrow x(y'T') = x(Ty') = (xT)y' = 0$ $(x \in E) \Leftrightarrow T'(y') = 0 \Leftrightarrow y' \in K(T')$.

Так как $T'' = T$, то второе равенство следует из первого. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать равенство $R(T')^{\perp} = K(T)$ непосредственно, не используя $R(T)^{\perp} = K(T')$.

4. Для того чтобы пояснить алгебраическую сторону дела, включим в определение *фредгольмова оператора* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ кроме неравенств $c(T) < \infty$ и $d(T) < \infty$ еще равенства

$$\dim F/R(T) = \dim R(T)^{\perp}, \quad \dim E'/R(T') = \dim R(T')^{\perp}.$$

Упражнение. Найти условия, при которых $F/N \simeq N^{\perp}$ для подпространства N пространства F.

Замечание. Если $\dim E < \infty$ и $\dim F < \infty$, то каждый оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ фредгольмов при $E' = E^*$ и $F' = F^*$. Существуют еще важные классы пространств и операторов, для которых верны равенства, включенные в определение.

Рассмотрим $c(T) = \dim F/R(T)$, $d(T) = \dim K(T)$, $c(T') = \dim E'/R(T')$, $d(T') = \dim K(T')$.

Предложение. *Для фредгольмова оператора T верны равенства $c(T') = d(T)$ и $d(T') = c(T)$.*

$\square$ Они сразу следуют из равенств леммы п. 3 и включенных в определение фредгольмова оператора. $\blacksquare$

Следствие. *Если оператор T фредгольмов, то сопряженный оператор T' тоже фредгольмов и $i(T') = -i(T)$.*

В частности, $i(T') = 0 \Leftrightarrow i(T) = 0$.

5. Операторы $T \in \mathscr{L}(E, F)$ и $T' \in \mathscr{L}(F', E')$ определяют уравнения

$$Tx = y, \tag{1}$$

$$Tx = 0, \tag{2}$$

$$T'y' = x', \tag{3}$$

$$T'y' = 0' \tag{4}$$

($x \in E$; $y, 0 \in F$; $y' \in F'$; $x', 0' \in E'$). Корректность уравнений (1) и (3) означает существование и единственность решения при каждой правой части. Уравнения (2) и (4) корректны, если они имеют только нулевые решения (корректность сводится к единственности решения). Связь между этими уравнениями для фредгольмовых операторов T и T' описывают три классические теоремы Фредгольма.

Теорема 1 (о корректности). *Пусть фредгольмов оператор T имеет индекс $i(T) = 0$. Тогда либо все уравнения* (1)–(4) *корректны, либо ни одно из них не корректно.*

□ Если $i(T) = 0$, то $i(T') = 0$ и $c(T) = d(T)$, $d(T') = c(T')$. Из этих равенств и равенств предложения п. 4 следует, что $c(T') = d(T) = d(T') = c(T) = a$. Если $a = 0$, то все уравнения (1)–(4) корректны (2.2.3, 10). Если $a \neq 0$, то ни одно из них не корректно. ■

Пусть еще $R(T) = R(T)^{\perp\perp}$. Тогда из леммы п. 3 следует

Теорема 2 (о существовании решений). *Уравнение* (1) *имеет решения ессли его правая часть ортогональна каждому решению уравнения* (4).

□ Утверждение теоремы эквивалентно равенству $R(T) = K(T')^{\perp}$. Оно следует из $R(T) = R(T)^{\perp\perp}$ и $R(T)^{\perp} = K(T')$. ■

Упражнение. Проверить необходимость условия $R(T) = R(T)^{\perp\perp}$.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для двойственных уравнений (3) и (2).

Теорема 3 (о числе решений). *Пусть фредгольмов оператор T имеет индекс $i(T) = 0$. Тогда уравнения* (2) *и* (4) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

□ Сформулированное утверждение эквивалентно соотношению $d(T) = d(T') < \infty$. Равенство размерностей $d(T)$ и $d(T')$ при $i(T) = 0$ было выведено при доказательстве теоремы 1, а их конечность следует из фредгольмовости операторов T и T'. ■

Замечание. Если $\dim E = \dim F < \infty$, то $E \simeq E' \simeq F' \simeq F$ при естественных вложениях и $E' = E^*$, $F' = F^*$. В этом случае каждый оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ вместе со своим сопряженным оператором $T' \in \mathscr{L}(F', E')$ фредгольмовы и $i(T) = i(T') = \dim F - \dim E = 0$. Для них верны все три теоремы Фредгольма.

6. Рассмотрим рефлексивное пространство (E, E'). Для каждого подпространства $M \subseteq E$ можно определить *замыкание* $\bar{M} = M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp} \subseteq E$. Если $M = \bar{M}$, то подпространство M называется *замкнутым*.

Примеры. 1) Пусть $M = \{0\}$. Тогда $M^{\perp} = E'$, $\bar{M} = (E')^{\perp} = \{0\} = M$, так как $x'x = xx' = 0$ $(x' \in E') \Leftrightarrow x = 0$ вследствие отделимости точек $x \in E$ (если $x \neq 0$, то $x'_0(x) \neq 0$ для некоторого $x'_0 \in E'$). Нулевое подпространство $M = \{0\}$ рефлексивного пространства E замкнуто.

2) Пусть $M = E$. Тогда $M^{\perp} = \{0'\}$ и $\bar{M}^{\perp} = \{0'\}^{\perp} = E = M$, так как $0'x = x0' = 0$ $(x \in E)$. Все рефлексивное пространство $M = E$ замкнуто.

Упражнение. Проверить замкнутость подпространств конечномерного пространства.

7. Рассмотрим рефлексивное пространство (E, E') и подпространства $M, X \subseteq E$. Из определений следует, что $M \subseteq \bar{M}$: $x \in M \Rightarrow xx' = x'x = 0$ $(x' \in M^{\perp}) \Rightarrow x \in M^{\perp\perp} = \bar{M}$. А так как $X \subseteq M \Rightarrow X^{\perp} \supseteq M^{\perp} \Rightarrow X^{\perp\perp} \subseteq M^{\perp\perp}$, то $X \subseteq M \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{M}$. Кроме того, $\bar{M}^{\perp} = M^{\perp}$. В самом деле, $M \subseteq \bar{M} \Rightarrow \bar{M}^{\perp} \subseteq M^{\perp}$. Вместе с тем, $M^{\perp} \subseteq (M^{\perp})^{\perp\perp} = (M^{\perp\perp})^{\perp} = \bar{M}^{\perp}$.

Упражнения. 1) Доказать, что пересечение $M = \cap M_i$ семейства замкнутых подпространств $M_i \subseteq E$ замкнуто. 2) Доказать, что замыкание $\bar{M}$ равно пересечению всех замкнутых подпространств E, содержащих подпространство M. 3) Доказать равенство $\bar{\bar{M}}me = \bar{M}$.

Заметим еще, что $M = \bar{M}$ ессли $M = X'^{\perp}$ для некоторого $X' \subseteq E'$. В самом деле, если $M = \bar{M} = M^{\perp\perp}$, то $X' = M^{\perp}$. Обратно, если $M = X'^{\perp}$, то $\bar{M} = M^{\perp\perp} = X'^{\perp\perp\perp} = X'^{\perp} = M$.

Лемма. $(X + M)^{\perp} = X^{\perp} \cap M^{\perp}$.

□ Пусть $x' \in X^{\perp} \cap M^{\perp}$. Тогда $xx' = 0$ $(x \in X)$, $yx' = 0$ $(y \in M)$ и, следовательно, $(x + y)x' = xx' + yx' = 0$ $(x + y \in X + M)$, $x' \in (X + M)^{\perp}$, $X^{\perp} \cap M^{\perp} \subseteq (X + M)^{\perp}$. Обратно, пусть $x' \in (X + M)^{\perp}$. Так как $X \subseteq X + M$ и $M \subseteq X + Y$, то $x' \in X^{\perp}$, $x' \in M^{\perp}$, $x' \in X^{\perp} \cap M^{\perp}$, $(X + M)^{\perp} \subseteq X^{\perp} \cap M^{\perp}$. ■

8. Предположим, что подпространство M конечномерно, возьмем его базу $A = (a_i)$ и ее дополнение $B = (b_j)$ до базы пространства $(\mathbb{K}, E)$. Семейство $A^* \cup B^* = \left(a_i^*, b_j^*\right)$ является обобщенной базой сопряженного пространства E^*.

Лемма. *Если* $\dim M < \infty$, *то* $\operatorname{codim} M^{\perp} = \dim M$.

□ Доказательство сводится к решению системы линейных уравнений. Так как $a_i b_j^* = 0$ для всех i, j, то $M^{\perp} = \{x' \in E' \mid a_i x' = 0 \ (a_i \in A)\}$ $(x' \perp M \Leftrightarrow x' \perp A)$. Рассмотрим оператор $T \in \mathscr{L}(E', \mathbb{K}^A)$, $Tx' = Ax' = (a_i x')$. По предложению п. 2.2.2, 8 из равенства $M^{\perp} = K(T)$, линейной независимости векторов a_i и отделимости (E, E') следует, что $R(T) = \mathbb{K}^A$ и $\operatorname{codim} M^{\perp} = \operatorname{codim} K(T) = \dim R(T) = |A| = \dim M$. ■

Замечание. Равенство $\dim R(T) = |A|$ при переходе к матрицам означает, что число линейно независимых строк матрицы равно числу линейно независимых столбцов.

Упражнение. Доказать равенство $R(T) = \mathbb{K}^A$ подробно.

Предложение. $M=\bar{M}$, $\operatorname{codim} M<\infty \Rightarrow \operatorname{codim} M=\dim M^{\perp}$.

$\square$ В п. 2.2.2, 8 было доказано, что $\dim M + \operatorname{codim} M = \dim E$ и $M + X = E$, $M \cap X = \{0\}$ для некоторого подпространства X, изоморфного E/M. По условию $\dim X = \operatorname{codim} M < \infty$. Из леммы п. 7 следует, что $X^{\perp} \cap M^{\perp} = (X + M)^{\perp} = E^{\perp} = \{0'\}$. Поэтому сужение $\varphi\colon M^{\perp} \to E'/X^{\perp}$ взаимно однозначно: $\varphi(x') = x' + X^{\perp} = y' + X^{\perp} = \varphi(y') \Rightarrow x' - y' \in X^{\perp} \cap M^{\perp} = \{0'\} \Rightarrow x' = y'$ $(x', y' \in M^{\perp})$. Значит, $M^{\perp} \simeq \varphi(M^{\perp})$ и $\dim M^{\perp} = \dim \varphi(M^{\perp}) \leq \operatorname{codim} X^{\perp}$. Так как $\dim X < \infty$, то по лемме $\operatorname{codim} X^{\perp} = \dim X$. Следовательно, $\dim M^{\perp} < \infty$ и $\operatorname{codim}(M^{\perp})^{\perp} = \dim M^{\perp}$. По предположению $M = \bar{M} = (M^{\perp})^{\perp}$, откуда $\operatorname{codim} M = \dim M^{\perp}$. $\blacksquare$

9. Рассмотрим рефлексивные пространства (E, E') и (F, F'). Среди операторов $T \in \mathscr{L}(E, F)$ выделяются *имеющие замкнутые образы* $R(T)$. Точно так же выделяются операторы $T' \in \mathscr{L}(F', E')$ с замкнутыми образами $R(T')$.

Пример. Если $\dim E < \infty$ и $\dim F < \infty$, то все операторы $T \in \mathscr{L}(E, F)$ и $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ имеют замкнутые образы $R(T)$ и $R(T^*)$.

Замечание. Из доказанных в п. 3 равенств $K(T) = R(T')^{\perp}$ и $K(T') = R(T)^{\perp}$ следует, что при данных определениях ядра $K(T)$ и $K(T')$ операторов T и T' замкнуты.

Предложение. *Если операторы T и T' имеют замкнутые образы $R(T)$, $R(T')$ с конечными коразмерностями $c(T) = \operatorname{codim} R(T)$, $c(T') = \operatorname{codim} R(T')$, то операторы T, T' фредгольмовы.*

$\square$ Если $R(T) = \overline{R(T)}$ и $\operatorname{codim} R(T) < \infty$, то $\dim R(T)^{\perp} = \operatorname{codim} R(T) < \infty$ по доказанному в п. 8. Точно так же $\dim R(T')^{\perp} = \operatorname{codim} R(T') < \infty$. Из этих соотношений и доказанных в п. 3 равенств $K(T) = R(T')^{\perp}$ и $K(T') = R(T)^{\perp}$ следует, что $d(T) = \dim K(T) < \infty$, $d(T') = \dim K(T') < \infty$. Значит, операторы T, T' фредгольмовы. $\blacksquare$

Замечание. Операторы с замкнутыми образами составляют важный класс линейных операторов. Кроме данного, используются и другие определения замкнутости [100, § 21]. Рассматривают также операторы $T \in \mathscr{L}(E, F)$, имеющие замкнутый в пространстве $E \times F$ график $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in E\}$.

Упражнение. Найти условия фредгольмовости для оператора с замкнутым графиком.

10. Рассмотрим рефлексивное пространство (E, E'), в котором E отождествлено с некоторым изоморфным подпространством сопряженного пространства E'. Оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$, равный при таком отождествлении сужению на E сопряженного с T оператора T', называется *симметрическим*: $T \subseteq T'$. Если $T = T'$, то оператор T называется *самосопряженным*.

Выберем подходящие сопряженные базы для E, F, E', F' и обозначим M, M' матрицы операторов T, T' в них. В п. 2.2.3, 8 было доказано, что $M' = M^t$. Симметричность оператора T эквивалентна симметричности его матрицы $M = M^t$. Из предложения п. 9 вытекает

Следствие. *Самосопряженный оператор, имеющий замкнутый образ с конечной коразмерностью, фредгольмов.*

Упражнение. Проверить это утверждение для симметрического оператора.

2.2.5. Нормированные пространства

Так называются векторные пространства с нормой. Норма служит для измерения длин векторов.

1. Рассмотрим *упорядоченное поле* $\mathbb{M}$. В нем выделяется множество $\mathbb{P}$ *строго положительных* элементов $p > 0$. Верны правила: (1) *трихотомии* (для каждого элемента $a \in \mathbb{M}$ верно либо $a > 0$, либо $a = 0$, либо $-a > 0$) и (2) *знаков* (если $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$ и $ab > 0$). Элементы $-a < 0$, противоположные строго положительным $a > 0$, называются *строго отрицательными* и составляют множество $-\mathbb{P}$. Добавление *строго* часто опускают и говорят просто о положительных и отрицательных элементах, неявно исключая нуль. Благодаря согласованности порядка с операциями $-\mathbb{P} < \{0\} < \mathbb{P}$ и $\mathbb{M}$ является порядковой суммой этих множеств: $\mathbb{M} = (-\mathbb{P}) \cup \{0\} \cup \mathbb{P}$.

Абсолютная величина $|a|$ элемента $a \in \mathbb{M}$ определяется равенствами $|a| = a$ $(a \geq 0)$ и $|a| = -a$ $(a < 0)$. Кроме положительности она обладает свойством невырожденности, полуаддитивности и мультипликативности:

$$|a| > 0 \ (a \geq 0), \quad |a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a||b|$$

для всех $a, b \in \mathbb{M}$. Кроме того, $a^2 = (-a)^2 = |a|^2 \geq 0$ и $\sum a_i^2 \geq 0$ для любого конечного семейства элементов $a_i \in \mathbb{M}$. В частности, $1 = 1^2 > 0$ и $n \cdot 1 > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, упорядоченное поле $\mathbb{M}$ имеет нулевую характеристику.

Примерами упорядоченных полей служат $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

2. Рассмотрим поле $\mathbb{K}$ и упорядоченное поле $\mathbb{M}$. Предположим, что существует *положительная невырожденная полуаддитивная и мультипликативная* функция $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{M}$. Это значит, что $|\alpha| \in \mathbb{M}$, $|0| = 0$ и

$$|\alpha| > 0\ (\alpha \neq 0), \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Такая функция называется *нормой* или *абсолютной величиной* для $\mathbb{K}$. Ее задание превращает $\mathbb{K}$ в *нормированное поле*. Поле $\mathbb{M}$ называется *нормирующим*.

Из свойств абсолютной величины следует, что

$$|1| = 1, \quad |-\alpha| = |\alpha| \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|.$$

В последнем неравенстве $||\alpha| - |\beta||$ обозначает абсолютную величину элемента $|\alpha| - |\beta| \in \mathbb{M}$.

Примеры. 1) $\mathbb{K} = \mathbb{M}$. 2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{M} = \mathbb{R}$. 3) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{M} = \mathbb{R}$.

Пример с полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел $(2.1.5, 2)$ показывает, что нормировать можно и неупорядоченные поля. А пример с p-нормой для поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел $(2.1.5, 4)$ показывает, что эти нормы для одного и того же поля могут иметь существенно разные свойства. Абсолютное значение для $\mathbb{Q}$ является архимедовой нормой, а p-норма неархимедова: для нее верно неравенство *равнобедренного* треугольника.

Замечание. В теории операторов в качестве нормированного скалярного поля обычно выбирается поле вещественных или комплексных чисел, а в качестве нормирующего — поле вещественных чисел. Поэтому всюду дальше для простоты предполагается, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\mathbb{M} = \mathbb{R}$. Норма считается архимедовой. Исключения ясны из текста или оговариваются. Главное достоинство вещественного нормирования заключается в полноте и архимедовости поля $\mathbb{R}$. Полнота обеспечивает существование нижней и верхней граней множеств вещественных чисел, ограниченных соответственно снизу и сверху.

3. Рассмотрим векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$ с нормированным скалярным полем $\mathbb{K}$. *Полуаддитивную* и *абсолютно однородную* функцию $\|\ \|\colon E \to \mathbb{R}$ назовем *нормой* для E:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad (x, y \in E,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Из этих соотношений следует, что $\|x\| \geq 0$ и $\|0\| = 0$ (один нуль — векторный, а другой — скалярный):

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0, \quad 0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

Векторное пространство с нормой составляют *нормированное пространство.* Назовем норму *невырожденной* и будем говорить, что она *отделяет точки* пространства, если $\|x\| > 0$ $(x \neq 0)$. Нормированное пространство с невырожденной нормой условимся называть *отделимым.*

Функция $\rho\colon E \times E \to \mathbb{R}$ со значениями $\rho(x,y) = \|x - y\|$ называется *метрикой* нормированного пространства E, а число $\rho(x,y)$ — *расстоянием* между точками $x, y \in E$. В частности, $\rho(0,x) = \|x\|$ — расстояние от точки 0 до точки x.

Замечание. Обычно невырожденность нормы и отделимость нормированного пространства включаются в определение. Вырожденные нормы называют *полунормами,* а пространства с ними — *полунормированными.* Всюду далее, как правило, будут рассматриваться невырожденные нормы и отделимые нормированные пространства. Исключения будут ясны из текста или будут оговариваются.

Если не требовать невырожденности нормы, то всякое векторное пространство E можно нормировать с помощью нулевой нормы: $\|x\| = 0$ $(x \in E)$. Так что формально каждое векторное пространство можно считать нормированным.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(X, \mathbb{K})$ финитных скалярных (вещественных или комплексных) функций на множестве X. Пусть $A \subseteq X$. Тогда равенство

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in A\} \quad (f \in \mathscr{F}_0)$$

определяет норму для $\mathscr{F}_0$. Если $A = X$, то она невырожденная, а если $A \neq X$, то вырожденная.

Пример 2. Рассмотрим произведение $E = \prod E_i$ конечного семейства векторных пространств E_i с нормами $\|\;\|_i$. Равенства

$$\|x\| = \vee \|x_i\|_i, \quad \|x\|_1 = \sum \|x_i\|_i, \quad \|x_i\|_2 = \Big(\sum \|x_i\|_i^2\Big)^{1/2}$$

$(x = (x_i),\ x_i \in E_i)$ определяют нормы для E. Если $\|\;\|_i$ невырожденные, то и $\|\;\|$, $\|\;\|_1$, $\|\;\|_2$ невырожденные.

Пример 3. Рассмотрим фактор-пространство $\bar{E} = E/N$ векторного пространства E по подпространству N. Пусть для E определена норма $\| \, \|_0$ и φ — естественное отображение E на $\bar{E}$. Тогда равенство

$$\|\bar{x}\| = \inf\{\|x\|_0 : \varphi(x) = \bar{x}\} \quad (x \in E)$$

определяет норму для $\bar{E}$. Она измеряет расстояния от точки 0 до линейных многообразий $x + N$ в нормированном пространстве E.

Упражнения. 1) Доказать, что нормы в примерах 1–3 действительно являются нормами. 2) Проверить, норма ли $\|x\|_{1/2} = \left(\sum \|x_i\|_i^{1/2}\right)^2$.

4. Рассмотрим вещественное или комплексное нормированное пространство E и сопряженное с ним пространство E^*. Линейный функционал $x' \colon E \to \mathbb{K}$ называется *ограниченным*, если $|x'(x)| \leq \gamma\|x\|$ $(x \in E)$ для некоторого $\gamma \geq 0$. Ограниченные функционалы образуют подпространство E' пространства E^*:

$$\left|\left(\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2'\right)(x)\right| \leq (|\alpha_1|\gamma_1 + |\alpha_2|\gamma_2)\|x\|$$

при $\left|x_1'(x)\right| \leq \gamma_1\|x\|$, $\left|x_2'(x)\right| \leq \gamma_2\|x\|$.

Подчеркнем, что ограниченность линейного функционала не означает ограниченность его образа в $\mathbb{K}$: так как $x'(\alpha x_0) = \alpha x'(x_0)$, то $x'(E) = \mathbb{K}$ при $x'(x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in E$. Ограниченным является множество отношений $x'(x)/\|x\|$ $(\|x\| \neq 0)$. Равенство

$$\|x'\| = \sup\{|x'(x)|/\|x\| : \|x\| \neq 0\}$$

определяет норму ограниченного линейного функционала x' и превращает E' в нормированное пространство. Из определения следует, что

$$\|x'(x)\| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \quad (x \in E).$$

Упражнение. Проверить это утверждение.

Будем называть пространства E^* и E' *алгебраическим* и *геометрическим сопряженными* для нормированного пространства E.

Пример. Если $\dim E < \infty$, то $E' = E^*$. Каждый линейный функционал на конечномерном нормированном пространстве ограничен. В частности, если $E = \mathbb{K}$ и $\dim E = 1$, то $E' \simeq \mathbb{K}$, $x'(x) = \alpha x$ $(x \in \mathbb{K})$ и $\|x'\| = |\alpha| = |x'(1)|$, где α — коэффициент функционала x'. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ он измеряет абсолютную величину угла наклона прямой x' к нулевой прямой $0'$.

В связи с определением геометрического сопряженного пространства E' возникают два естественных вопроса: *Существуют ли ненулевые ограниченные линейные функционалы? Отделяют ли они точки пространства E?* Положительные ответы на эти вопросы позволяет дать теорема Хана — Банаха.

5. Теорема Хана — Банаха утверждает, что каждый ограниченный линейный функционал на подпространстве нормированного пространства можно продолжить на все пространство, сохранив норму функционала.

Рассмотрим сначала простой частный случай, когда нормированное пространство Y вещественное, а подпространство $X \subseteq Y$ есть *гиперплоскость*: $Y = X + \mathbb{R}b = \{y = x + tb \mid x \in X,\ t \in \mathbb{R}\}$ для некоторого $b \in Y \setminus X$. Заметим, что так как $0 \in X$, то $b \neq 0$.

Лемма. *Пусть $x'\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченный линейный функционал на гиперплоскости X вещественного нормированного пространства Y. Тогда существует продолжающий x' ограниченный линейный функционал $y'\colon Y \to \mathbb{R}$, норма которого равна норме x'.*

$\square$ Легко описать линейные функционалы $y^* \in Y^*$, продолжающие $x' \in X'$. Каждый такой функционал имеет значения

$$y^*(x + tb) = y^*(x) + ty^*(b) = x'(x) + t\beta \quad (x \in X,\ t \in \mathbb{R})$$

и определяется вещественным числом $y^*(b) = \beta$. Однозначность y^* следует из эквивалентности равенств $x + tb = y + ub$, $(t - u)b = y - x$, $(t - u)b = 0 = y - x$, $t = u$ для $x, y \in X$ и $t, u \in \mathbb{R}$ при $b \notin X$, $X \cap \{\mathbb{R}b\} = \{0\}$. Линейность y^* следует из линейности x':

$$\begin{aligned} y^*((x+tb)+(y+ub)) &= y^*((x+y)+(t+u)b) = x'(x+y)+(t+u)\beta \\ &= x'(x) + x'(y) + t\beta + u\beta = y^*(x + tb) + y^*(y + ub), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y^*(\alpha(x + tb)) = y^*(\alpha x + \alpha tb) \\ &\qquad = x'(\alpha x) + \alpha t\beta = \alpha x'(x) + \alpha t\beta = \alpha y^*(x + tb) \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Нужно выбрать вещественное число β так, чтобы линейный функционал y^* был ограничен и имел норму $\|y^*\| = \|x'\|$. Для этого необходимо, чтобы $|y^*(y)| \leq \|x'\|\|y\|$ $(y \in Y)$. Заметим, что это неравенство эквивалентно $y^*(y) \leq \|x'\|\|y\|$ $(y \in Y)$. В самом деле, отсюда и из $-y^*(y) = y^*(-y) \le \|x'\|\|-y\| = \|x'\|\|y\|$ $(y \in Y)$ следует $|y^*(y)| \le \|x'\|\|y\|$ $(y \in Y)$. Значит, нужно выбрать число $\beta \in \mathbb{R}$ так, чтобы было верно неравенство

$$x'(x) + t\beta \le \|x'\|\|x + tb\| \quad (x \in X,\ t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

При $t = 0$ неравенство (1) превращается в $x'(x) \le \|x'\|\|x\|$ $(x \in X)$. Это неравенство следует из определения нормы ограниченного линейного функционала x'.

При $t > 0$ неравенство (1) эквивалентно $\beta \le \|x'\|\|t^{-1}x + b\| - x'(t^{-1}x)$, а при $t < 0$ — неравенству $\beta \ge -\|x'\|\|t^{-1}x+b\|-x'(t^{-1}x)$, так как при $t < 0$ и $-t > 0$ верны равенства

$$t^{-1}\|x + tb\| = -\|(-t^{-1})(x + tb)\| = -\|(t^{-1}(x + tb)\| = -\|t^{-1}x + b\|.$$

Возьмем произвольные векторы $u, v \in X$. Заметим, что можно считать $u = t^{-1}x$ при $t < 0$ и $x = tu \in X$, а $v = t^{-1}x$ при $t > 0$ и $x = tv \in X$. Поэтому полученные для числа β неравенства эквивалентны:

$$-\|x'\|\|u + b\| - x'(u) \le \beta \le \|x'\|\|v + b\| - x'(v) \quad (u, v \in X). \tag{2}$$

Неравенства (2) эквивалентны неравенству (1).

Число $\beta \in \mathbb{R}$, для которого верны неравенства (2), существует тогда и только тогда, когда

$$-\|x'\|\|u + b\| - x'(u) \le \|x'\|\|v + b\| - x'(v) \quad (u, v \in X). \tag{3}$$

Неравенство (3) следует из соотношений: $x'(v)-x'(u) = x'(v-u) \le \|x'\| \cdot \|v-u\| = \|x'\| \cdot \|(v+b) - (u+b)\| \le \|x'\| \cdot \|v+b\| + \|x'\| \cdot \|u+b\|$. Рассмотрим непустые множества $A = \{-\|x'\|\|u + b\| - x'(u) \mid u \in X\} \subseteq \mathbb{R}$, $C = \{\|x'\|\|v + b\| - x'(v) \mid v \in X\} \subseteq \mathbb{R}$. Так как верно неравенство (3), то множество A ограничено сверху любым числом из C (например, $\|x'\|\|b\|$), а множество C ограничено снизу любым числом из A (например, $-\|x'\|\|b\|$). Благодаря полноте множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел существуют $\alpha = \sup A$ и $\gamma = \inf C$. Из неравенства (3) следует, что $\alpha \le \gamma$. Следовательно, неравенства (2) эквивалентны $\alpha \le \beta \le \gamma$. Значит, неравенство (1) верно для каждого числа β, для которого верны эти неравенства. В частности, (1) верно при $\beta = \alpha$ и при $\beta = \gamma$.

Возьмем число $\beta \in [\alpha, \gamma]$ и определяемый им линейный функционал y^* со значениями $y^*(x+tb) = x'(x)+t\beta$ $(t \in \mathbb{R})$. Из неравенства (1) следует, что y^* ограничен и $\|y^*\| \le \|x'\|$. Так как y^* продолжает x', то верно и обратное неравенство $\|y^*\| \ge \|x'\|$. В самом деле, $\|y^*\| = \sup\{|y^*(y)|/\|y\| \mid y \in Y,\ y \ne 0\} \ge \sup\{|y^*(x)|/\|x\| \mid x \in X,\ x \ne 0\} = \sup\{|x'(x)/\|x\| \mid x \in X\} = \|x'\|$. Значит, $\|y^*\| = \|x'\|$ и $y' = y^*$ есть нужный функционал. ■

6. Рассмотрим теперь более общий случай, когда нормированное пространство Y вещественное или комплексное, а X — его произвольное подпространство X.

Теорема Хана — Банаха. *Пусть $x'\colon X \to \mathbb{K}$ — ограниченный линейный функционал на подпространстве X нормированного пространства Y со скалярным полем $\mathbb{K}$. Тогда существует продолжающий x' ограниченный линейный функционал $y'\colon Y \to \mathbb{K}$, норма которого равна норме x'.*

□ 1) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогда теорему Хана — Банаха легко вывести из доказанной леммы с помощью теоремы Цорна.

Возьмем множество $\mathscr{M}$ всех ограниченных линейных функционалов $z'\colon Z \to \mathbb{R}$ на подпространствах $Z \subseteq Y$, продолжающих $x'\colon X \to \mathbb{R}$ и имеющих норму $\|z'\| = \|x'\|$. Упорядочим множество $\mathscr{M}$ по включению: $z'_2 \supseteq z'_1$ означает, что $z'_2 \in \mathscr{M}$ продолжает $z'_1 \in \mathscr{M}$. Упорядоченное множество $(\mathscr{M}, \supseteq)$ индуктивно: для каждой линии $\mathscr{L} \in \mathscr{M}$ существует мажоранта $l' = \cup\mathscr{L} \in \mathscr{M}$.

Соответствие l' однозначно. В самом деле, пусть $z \in L = \mathrm{Dom}(l') = \cup\,\mathrm{Dom}(z')$ $(z' \in \mathscr{L})$. Тогда $z \in Z_1 = \mathrm{Dom}(z'_1)$ для некоторого $z'_1 \in \mathscr{L}$ и $l'(z) = z'_1(z)$. Если $z \in Z_2 = \mathrm{Dom}(z'_2)$ для $z'_2 \in \mathscr{L}$, то $l'(z) = z'_2(z)$. Так как $\mathscr{L}$ — линия, то $z'_2 \supseteq z'_1$ или $z'_1 \supseteq z'_2$. В любом случае $z'_1(z) = z'_2(z)$ при $z \in Z_1 \cap Z_2$.

Область определения L функционала l' есть подпространство пространства Y. В самом деле, пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $z_1, z_2 \in L$. Тогда $z_i \in Z_i = \mathrm{Dom}\left(z'_i\right)$ для некоторых $z'_i \in \mathscr{L}$ $(i = 1, 2)$. Так как $z'_1 \supseteq z'_2$ или $z'_2 \supseteq z'_1$, то $Z_1 \cup Z_2 = Z_1 \subseteq L$ или $Z_1 \cup Z_2 = Z_2 \subseteq L$ и в любом случае $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in L$. Кроме того, $l'(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = z'_i(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 z'_i(z_1) + \alpha_2 z'_i(z_2) = \alpha_1 l'(z_1) + \alpha_2 l'(z_2)$, где i есть номер продолжающего функционала: $i = 1$ при $z'_1 \supseteq z'_2$ и $i = 2$ при $z'_2 \supseteq z'_1$. Значит, функционал $l'\colon L \to \mathbb{R}$ линеен.

Линейный функционал $l'\colon L \to \mathbb{R}$ продолжает $x'\colon X \to \mathbb{R}$, ограничен, и норма $\|l'\| = \|x'\|$. В самом деле, $l'(x) = z'(x) = x'(x)$ $(x \in X,\ z' \in \mathscr{L})$. Пусть $z \in L$. Тогда $z \in Z = \mathrm{Dom}(z')$ для некоторого $z' \in \mathscr{L}$ и $|l'(z)| = |z'(z)| \le \|x'\|\|z\|$. Следовательно, l' ограничен и $\|l'\| \leq \|x'\|$. А так как l' продолжает x', то $\|l'\| \geq \|x'\|$. (Это было показано при доказательстве леммы.) Значит, $\|l'\| = \|x'\|$ и $l' \in \mathscr{M}$. Ясно, что l' есть мажоранта для $\mathscr{L}$: из определения l' следует, что l' продолжает каждый функционал $z' \in \mathscr{L}$. Индуктивность упорядоченного множества $(\mathscr{M}, \supseteq)$ доказана.

По теореме Цорна существует максимальный элемент $m'\colon M \to \mathbb{R}$ в $(\mathscr{M}, \supseteq)$. Он и осуществляет нужное продолжение. Действительно, так как $m' \in \mathscr{M}$, то m' есть продолжающий x' ограниченный линейный функционал на подпространстве $M \subseteq Y$, имеющий норму $\|m'\| = \|x'\|$. Нужно только показать, что $M = Y$. Это следует из доказанной в п. 5 леммы. В самом деле, пусть $M \neq Y$ и $b \in Y \setminus M$. Тогда по лемме существует продолжающий $m'\colon M \to \mathbb{R}$ ограниченный линейный функционал $n'\colon N \to \mathbb{R}$ на подпространстве $N = M + \mathbb{R}b \subseteq Y$, имеющий норму $\|n'\| = \|m'\|$. Так как $m' \supseteq x'$ и $\|m'\| = \|x'\|$, то $n' \supseteq x'$ и $\|n'\| = \|x'\|$. Значит, $n' \in \mathscr{M}$ и $n' \supset m'$. Это противоречит максимальности m'. Следовательно, $M \neq Y$ невозможно и $M = Y$.

Таким образом, существует продолжающий $x'\colon X \to \mathbb{R}$ ограниченный линейный функционал $y' = m'\colon Y \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y'\| = \|x'\|$. Для вещественного случая теорема доказана.

2) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Каждый комплексный ограниченный линейный функционал $x'\colon X \to \mathbb{C}$ на подпространстве $X \subseteq Y$ определяет вещественный линейный функционал $a'\colon X \to \mathbb{R}$ со значениями $a'(x) = \mathrm{re}(x'(x))$ $(x \in X)$ и нормой $\|a'\| \leq \|x'\|$. В самом деле, линейность a' следует из линейности x' и вещественной части $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, а неравенство $\|a'\| \leq \|x'\|$ следует из неравенства $|\mathrm{re}(x'(x))| \leq |x'(x)|$ $(x \in X)$.

По доказанному для вещественного случая существует вещественный ограниченный линейный функционал $b'\colon Y \to \mathbb{R}$ на вещественном пространстве Y, продолжающий a' и имеющий норму $\|b'\| = \|a'\| \leq \|x'\|$. Рассмотрим функционал $y'\colon Y \to \mathbb{C}$ со значениями $y'(y) = b'(y) - ib'(iy)$ $(y \in Y)$. Это комплексный линейный функционал на комплексном подпространстве Y. В самом деле,

$$\begin{aligned} y'(y+z) &= b'(y+z) - ib'(iy+iz) = b'(y) + b'(z) - i(b'(iy) + b'(iz)) \\ &= (b'(y) - ib'(iy)) + (b'(z) - ib'(iz)) = y'(y) + y'(z), \end{aligned}$$

$$y'(\alpha y) = b'(\alpha y) - ib'(i(\alpha y)) = \alpha b'(y) - i(\alpha b'(iy)) = \alpha y'(y),$$

$$\begin{aligned} y'(iy) &= b'(iy) - ib'(i(iy)) \\ &= b'(iy) - ib'(-y) = b'(iy) + ib'(y) = iy'(y) \end{aligned}$$

для каждых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y, z \in Y$. Откуда $y'((\alpha+\beta i)y) = y'(\alpha y+\beta iy) = \alpha y'(y) + \beta iy'(y) = (\alpha + \beta i)y'(y)$ для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $y \in Y$. Так как b' продолжает $a' = \mathrm{re}(x')$, то y' продолжает x': $y'(x) = b'(x) - ib'(ix) = a'(x) - ia'(ix) = \mathrm{re}(x'(x)) - i\,\mathrm{re}(x'(ix)) = \mathrm{re}(x'(x)) - i\,\mathrm{re}(ix'(x)) = \mathrm{re}(x'(x)) - i(-\mathrm{im}\,x'(x))) = \mathrm{re}(x'(x)) + (\mathrm{im}\,x'(x)))i = x'(x)$ для каждого $x \in X$.

Покажем, что $|y'(y)| \le \|x'\|\|y\|$. Предположим противное: $|y'(y_0)| > \|x'\|\|y_0\|$ при некотором $y_0 \in Y$. Так как комплексное число $c = y'(y_0) \ne 0$, то для него существует единственное полярное разложение $c = \rho u$, где $\rho = |c| > 0$ и $u = \sigma + \tau i$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$, $|u| = \sigma^2 + \tau^2 = 1$. Пусть $z_0 = u^{-1}y_0$. Тогда $\|y_0\| = \|uz_0\| = |u|\|z_0\| = \|z_0\|$ и $b'(z_0) = \mathrm{re}(y'(z_0)) = \mathrm{re}(y'(u^{-1}y_0)) = \mathrm{re}(u^{-1}y'(y_0)) = \mathrm{re}(u^{-1}c) = \rho = |y'(y_0)| > \|x'\|\|y_0\| = \|x'\|\|z_0\|$. Это противоречит неравенству $\|b'\| \le \|x'\|$. Значит, $|y'(y)| \le \|x'\|\|y\|$ для каждого $y \in Y$. Следовательно, линейный функционал y' ограничен и $\|y'\| \le \|x'\|$. Так как y' продолжает x', то $\|y'\| \ge \|x'\|$ и $\|y'\| = \|x'\|$.

Таким образом, существует продолжающий $x'\colon X \to \mathbb{C}$ ограниченный линейный функционал $y'\colon Y \to \mathbb{C}$ с нормой $\|y'\| = \|x'\|$. Для комплексного случая $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ теорема тоже доказана. ■

7. Из теоремы Хана — Банаха вытекает много следствий. В частности, она позволяет ответить на сформулированные в п. 4 вопросы. В этом пункте будем явно предполагать рассматриваемое нормированное пространство Y отделимым.

Предложение. *Пусть $a \in Y$, $a \ne 0$. Тогда существует $y' \in Y'$ такой, что $\|y'\| = 1$ и $y'(a) = \|a\|$.*

□ Возьмем функционал $x'\colon X \to \mathbb{K}$ на подпространстве $X = \mathbb{K}a \subseteq Y$, имеющий значения $x'(ta) = t\|a\|$ $(t \in \mathbb{K})$. Из определения следуют линейность, ограниченность x' и неравенство $\|x'\| \le 1$. Так как $x'(\|a\|^{-1}a) = \|a\|^{-1}\|a\| = 1$, то $\|x'\| = 1$. По теореме Хана — Банаха существует $y' \in Y'$, продолжающий x' и имеющий ту же норму. Значит, $y'(a) = x'(a) = \|a\|$ и $\|y'\| = \|x'\| = 1$. ■

Пример. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ — горизонтальная плоскость в пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a = (\alpha, 0, 0)$ и $\alpha > 0$. Тогда $X = X_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ — первая горизонтальная ось, график x' — биссектриса угла между X и вертикальной осью $X_3 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, а график y' — проходящая через эту биссектрису и вторую горизонтальную ось $X_2 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ плоскость.

Этот пример поясняет и саму теорему Хана — Банаха. Отметим три следствия доказанного предложения.

Следствие 1. *На ненулевом нормированном пространстве существуют ненулевые ограниченные линейные функционалы.*

$\square$ Рассмотрим нормированное пространство $Y \neq \{0\}$. Пусть $a \in Y$, $a \neq 0$. По доказанному предложению существует $y' \in Y'$ такой, что $y'(a) = \|a\| \neq 0$. $\blacksquare$

Следствие 2. *Ограниченные линейные функционалы на нормированном пространстве отделяют его точки.*

$\square$ Пусть Y — нормированное пространство и $a, b \in Y$, $a \neq b$, $a - b = c \neq 0$. По доказанному предложению существует $z' \in Y'$ такой, что $z'(c) = \|c\| \neq 0$. Значит, $z'(a) - z'(b) = z'(c) = \|c\| \neq 0$ и $z'(a) \neq z'(b)$. $\blacksquare$

Таким образом, геометрическое сопряженное пространство Y' является системой координат для вещественного или комплексного отделимого нормированного пространства Y.

Следствие 3. *Для каждого подпространства Z пространства Y и точки $b \notin Z$ существует ограниченный линейный функционал y' на Y такой, что $y'(z) = 0$ при всех $z \in Z$ и $y'(b) = 1$.*

$\square$ Рассмотрим подпространство X пространства Y, составленное из векторов $x = z + tb$, где $z \in Z$ и t — произвольное число. Равенство $x'(z + tb) = t$ определяет ограниченный линейный функционал x' на X. Ясно, что $x'(z) = 0$ при всех $z \in Z$ и $x'(b) = 1$. Из теоремы Хана — Банаха следует, что существует ограниченный линейный функционал y' на Y, продолжающий x' и обладающий нужными свойствами. $\blacksquare$

Все эти утверждения имеют простой геометрический смысл.

8. Множество $N = \{z \in E \mid \|z\| = 0\}$ является подпространством нормированного пространства $(\mathbb{K}, E)$:

$$\|\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2\| \leq |\alpha_1|\|z_1\| + |\alpha_2|\|z_2\| = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K};\ z_1, z_2 \in E).$$

Рассмотрим фактор-пространство $\bar{E} = E/N$. Равенство

$$\|\bar{x}\| = \|x\| \quad (\bar{x} = x + N,\ x \in E)$$

определяет норму для $\bar{E}$. Это определение корректно:

$$\|x\| \leq \|(x + z) - z\| \leq \|x + z\| + \|z\| = \|x + z\| \leq \|x\| + \|z\| = \|x\|,$$

и поэтому $\|x+z\| = \|x\|$ для любого $z \in N$. Данное определение эквивалентно определению в примере 3 п. 3.

Таким образом, факторизация позволяет превратить неотделимое нормированное пространство в отделимое. Поэтому в теории обычно рассматривают только отделимые нормированные пространства. В приложениях же переход к более сложным векторам не всегда удобен.

Если $x - y = z \in N$, то векторы x и y будем называть *эквивалентными* и писать $x \approx y$. По определению, такая близость означает, что $\|x - y\| = 0$. В частности, $z \approx 0$ означает, что $z \in N$. Предложение п. 7 и следствия 1, 2 можно применять к отделимому фактор-пространству $\bar{E}$ и его сопряженному $\bar{E}'$. Результаты потом можно использовать и для неотделимого пространства E, заменив равенство векторов их эквивалентностью. Но при этом нужна осторожность.

2.2.6. Евклидовы пространства

Так называются векторные пространства со специальным скалярным произведением. Оно определяет норму и позволяет измерять линейные и угловые характеристики векторов.

1. Рассмотрим векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$ с нормированным скалярным полем $\mathbb{K}$. Будем предполагать, что для $\mathbb{K}$ определено сопряжение $*\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, которое является *инволютивным изоморфизмом*:

$$\alpha^{**} = \alpha, \quad (\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \quad (\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*, \quad |\alpha^*| = |\alpha|$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$. Элементы $\alpha \in \mathbb{K}$, для которых $\alpha^* = \alpha$, называются *самосопряженными.* В частности, $0^* = 0$, $1^* = 1$.

Примеры. 1) Тождественное отображение $\alpha^* = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ является сопряжением для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 2) Равенство $\gamma^* = \alpha - \beta i$ $(\gamma = \alpha + \beta i \in \mathbb{C})$ определяет сопряжение для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Самосопряженные элементы составляют $\mathbb{R}$.

Назовем функцию $p\colon E \times E \to \mathbb{K}$ *эрмитовой формой*, если она линейна по второй переменной и коммутирует при сопряжении. Будем записывать значения p в мультипликативной форме: $p(x, y) = xy$ $(x, y \in E)$. Верны равенства

$$x(\beta y) = \beta(xy), \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (xy)^* = yx,$$
$$(\alpha x)y = \alpha^*(xy), \quad (x+y)z = xz + yz \quad (x, y, z \in E;\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}).$$

Упражнение. Доказать эти равенства.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $(xy)^* = yx$ означает, что эрмитова форма p симметрична: $xy = yx$ $(x, y \in E)$.

Каждая эрмитова форма $p\colon E \times E \to \mathbb{K}$ определяет квадратичную форму $q\colon E \to \mathbb{K}$ со значениями $q(x) = p(x,x) = xx = x^2$ $(x \in E)$. Заметим, что $q(x) = xx = (xx)^* = q(x)^*$ $(x \in E)$. Значения квадратичной формы q являются самосопряженными элементами поля $\mathbb{K}$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $q(x) \in \mathbb{R}$: значения q вещественные.

2. Будем рассматривать вещественное или комплексное векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Назовем (*евклидовым*) *скалярным произведением* для E эрмитову форму $p\colon E \times E \to \mathbb{K}$, определяющую положительную квадратичную форму $q\colon E \to \mathbb{K}$ ($q(x) = x^2 \geq 0$ для всех $x \in E$). Квадратичная форма q и определяющее ее скалярное произведение p называются *невырожденным*, если $q(x) = x^2 > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in E$. В этом случае $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Векторное пространство с евклидовым скалярным произведением называется *евклидовым*. Обычно предполагается, что скалярное произведение невырождено. Равенство $\|x\| = (xx)^{1/2}$ $(x \in E)$ определяет норму для евклидова пространства E. Она называется *евклидовой нормой*.

Обратную связь между скалярным произведением и евклидовой нормой частично описывает

Неравенство Коши. $|xy| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $(x, y \in E)$.

□ Заметим, что

$$0 \leq (\lambda x + y)(\lambda x + y) = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + \lambda^*(xy) + \lambda(xy)^*$$

$(x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{K})$. Пусть $\|x\| \neq 0$. Тогда при $\lambda = -xy/\|x\|^2$ получаем $0 \leq \|y\|^2 - |xy|^2/\|x\|^2$, что эквивалентно доказываемому неравенству. По симметрии оно верно и при $\|y\| \neq 0$.

Пусть $\|x\| = \|y\| = 0$. Тогда при $\lambda = -xy$ получаем $0 \leq -2|xy|^2$, откуда $|xy| = 0 = \|x\|\|y\|$. ■

Следствие. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in E)$.

□ В самом деле,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + xy + yx \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|xy| \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

что эквивалентно доказываемому неравенству. ■

Таким образом, функция $\| \|\colon E \to \mathbb{K}$ со значениями $\|x\| = (xx)^{1/2}$ $(x \in E)$ полуаддитивна. Ее абсолютная однородность вытекает из равенств $\|\alpha x\|^2 = \alpha x \cdot \alpha x = \alpha^* \alpha \cdot xx = |\alpha|^2 \|x\|^2$ $(x \in E, \alpha \in \mathbb{K})$. Функция $\| \|$ действительно является нормой для евклидова пространства E, и данное ей авансом название оправдано.

Евклидова норма отделяет точки пространства *ессли* определяющее ее скалярное произведение невырожденное.

3. Геометрия евклидова пространства определяется свойствами скалярного произведения. Всюду дальше в этом пункте x, y, z обозначают произвольные векторы евклидова пространства E.

Тождество треугольника:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (xy + yx).$$

Тождество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Поляризационное тождество:

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(xy + yx).$$

Тождество треугольника следует из равенства $\|x + y\|^2 = (x + y)(x + y)$. Тождество параллелограмма получается сложением тождеств треугольника для x, y и x, $-y$, а поляризационное тождество — вычитанием. Все эти тождества имеют ясный геометрический смысл и связывают длины сторон, диагоналей и проекций в параллелограмме.

В вещественном случае $xy + yx = 2xy$ и поляризационное тождество превращается в

$$xy = 4^{-1}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

В комплексном случае $xy + yx = 2\operatorname{re}(xy)$, $\operatorname{im}(xy) = -\operatorname{re}(x \cdot iy)$ и поэтому

$$xy = 4^{-1}[(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)].$$

Если $xy = 0$, то векторы x, y называют *ортогональными* и пишут $x \perp y$. Так как $yx = (xy)^*$, то $xy = 0$ влечет $yx = 0$ и отношение ортогональности симметрично: $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$. Нулевой вектор ортогонален всем векторам пространства. В отделимом пространстве он единственный обладает этим свойством. Из неравенства треугольника следует

Теорема Пифагора. *Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

В вещественном случае из неравенства треугольника следует и обратное утверждение: если $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $x \perp y$.

Вопрос. Верно ли это утверждение в комплексном случае?

Упражнения. 1) Проверить это утверждение в комплексном случае. 2) Доказать эквивалентные *тождество тетраэдра* и *тождество Апполлония*:

$$\|(z-x)+(z-y)\|^2 + \|(z-x)-(z-y)\|^2 = 2(\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2),$$
$$2^{-1}\|x-y\|^2 + 2\|z - 2^{-1}(x+y)\|^2 = \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2.$$

4. Тождество параллелограмма выделяет евклидовы пространства среди нормированных.

Предложение. *Определяющее норму скалярное произведение существует ессли для нормы верно тождество параллелограмма.*

□ Рассмотрим нормированное пространство $(\mathbb{K}, E)$ с нормой $\| \,\|$.

1) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и

$$p(x,y) = xy = 4^{-1}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (x, y \in E).$$

Докажем, что это равенство определяет нужное скалярное произведение $p\colon E \times E \to \mathbb{R}$. Неравенство $xx \geq 0$ и равенства $xy = yx$, $\|x\| = (xx)^{1/2}$ $(x, y \in E)$ следуют из определения. Нужно проверить линейность частной функции $p(x,\cdot)\colon E \to \mathbb{R}$. Ее аддитивность следует из равенства

$$\|a+b+c\|^2 + \|a+b-c\|^2 = 2(\|a+b\|^2 + \|c\|^2) \quad (a, b, c \in E).$$

Применим его к $a = x$, $b = y$, $c = z$ и $a = x$, $b = -z$, $c = y$ и вычтем из первого полученного тождества второе. В результате имеем

$$\|x+y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 = 2(\|x+y\|^2 - \|x-z\|^2 + \|z\|^2 - \|y\|^2),$$
$$\|x+z+y\|^2 - \|x-z-y\|^2 = 2(\|x+z\|^2 - \|x-y\|^2 + \|y\|^2 - \|z\|^2),$$
$$\|x+z+y\|^2 - \|x-y-z\|^2$$
$$= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2$$

и $x(y+z)=xy+xz$.

Однородность $p(x,\cdot)$ проверяется сначала для рациональных чисел. Равенства $x(0y)=0(xy)$ и $x(1y)=1(xy)$ следуют из определения. Используя аддитивность $p(x,\cdot)$, по индукции получаем $x(ny)=n(xy)$ $(n\in\mathbb{N})$. Из определения следует, что $x(-y)=-(xy)$, поэтому $x(my)=m(xy)$ $(m\in\mathbb{Z})$. Откуда $x\cdot(m/n)y=m(x\cdot(1/n)y)=(m/n)(x\cdot n(1/n)y)=(m/n)(xy)$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$, т. е. $x\cdot qy=q\cdot xy$ $(q\in\mathbb{Q})$.

Возьмем произвольное $\alpha\in\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{R}$ есть полное архимедово поле, то для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует $q=q(k)\in\mathbb{Q}$ такое, что $|\alpha-q|\leq 1/k$. Следовательно,

$$x\cdot\alpha y = x\cdot qy+x\cdot(\alpha-q)y = q\cdot xy+x\cdot(\alpha-q)y = \alpha\cdot xy+\Delta(x,y),$$
$$\Delta(x,y)=x\cdot(\alpha-q)y-(\alpha-q)\cdot xy.$$

Используя определение xy и свойства $\|\ \|$, получаем: $|(\alpha-q)\cdot xy|=4^{-1}|\alpha-q|\cdot|\|x+y\|^2-\|x-y\|^2|=4^{-1}|\alpha-q|\cdot|\|x+y\|+\|x-y\||\cdot|\|x+y\|-\|x-y\||\leq 4^{-1}|\alpha-q|\cdot 2(\|x\|+\|y\|)\cdot\|(x+y)-(x-y)\|\leq(1/k)(\|x\|+\|y\|)\|y\|=\gamma/k$, $|x\cdot(\alpha-q)y|=4^{-1}|\|x+(\alpha-q)y\|^2-\|x-(\alpha-q)y\|^2|\leq(\|x\|+|\alpha-q|\|y\|)\cdot|\alpha-q|\|y\|\leq\gamma/k$, $|\Delta(x,y)|\leq 2\gamma/k$ при $\gamma=(\|x\|+\|y\|)\|y\|$ и любом $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, $\Delta(x,y)=0$ и $x\cdot\alpha y=\alpha\cdot xy$.

2) Пусть теперь $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ и $x\times y=xy-i(x\cdot iy)$ $(x,y\in E)$, где xy и $x\cdot iy$ определяются по-прежнему равенством

$$ab=4^{-1}(\|a+b\|^2-\|a-b\|^2)\quad(a,b\in E)$$

при $a=x$, $b=y$ и $a=x$, $b=iy$. В этом случае $x\times x=\|x\|^2-4i(\|x+ix\|^2-\|x-ix\|^2)=\|x\|^2-4^{-1}i(|1+i|^2-|1-i|^2)\|x\|^2=\|x\|^2$, так как $|1+i|^2=2=|1-i|^2$. Значит, $x\times x\geq 0$ и $\|x\|=(x\times x)^{1/2}$ $(x\in E)$. Из доказанных в п. 1 равенств следует, что

$$\begin{aligned}x\times(y+z)&=x(y+z)-i(x\cdot i(y+z))\\&=xy+xz-i(x\cdot iy)-i(x\cdot iz)=x\times y+x\times z,\\x\times(iy)&=x\cdot iy-i(x\cdot i^2y)\\&=x\cdot iy+i\cdot xy=i(xy-i(x\cdot iy))=i(x\times y)\end{aligned}$$

$(x,y,z\in E)$. По доказанному для вещественного случая отсюда следует, что $x\times(\beta iy)=\beta(x\times(iy))$. Вместе с $x\times(\alpha y)=\alpha(x\times y)$

благодаря аддитивности это дает $x\times(\gamma y) = \gamma(x\times y)$ для $\gamma = \alpha+\beta i$. Частная функция $y \to x \times y$ линейна.

Заметим, что $iy \cdot x = 4^{-1}(\|iy + x\|^2 - \|iy - x\|^2) = 4^{-1}(\|iy - i^2x\|^2 - \|iy+i^2x\|^2) = 4^{-1}(\|y-ix\|^2 - \|iy+ix\|^2) = -(y\cdot ix)$. Поэтому

$$(x \times y)^* = (xy)^* - i^*(x \cdot iy)^* = yx + i(iy \cdot x) = yx - i(y \cdot ix) = y \times x.$$

И $(x, y) \to x \times y$ есть нужное скалярное произведение. ■

Замечание. Разные обозначения для скалярного произведения в вещественном и комплексном случаях нужны были только для доказательства. Всюду дальше, как правило, будет использоваться общее обозначение xy. Или, реже, $\langle x, y\rangle$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

5. Рассмотрим евклидово пространство $(\mathbb{K}, E)$. Семейство векторов $x(j) \in E$ называется *ортогональным*, если $x(j) \perp x(k)$ для каждых индексов $j \neq k$. В частности, каждое семейство с пустым или элементарным множеством индексов ортогонально, так как в этих множествах нет различных индексов. Ортогональное семейство $(x(j))$ называется *ортонормированным*, если $\|x(j)\| = 1$ для каждого индекса j.

Предложение. *В отделимом евклидовом пространстве каждое ортогональное семейство ненулевых векторов линейно свободно.*

□ Пусть семейство $x(j) \in E$ ортогонально и $\sum \alpha(j)x(j) = 0$ для некоторого финитного семейства $\alpha(j) \in \mathbb{K}$. Тогда $\alpha(k)\cdot x(k) = \sum \alpha(j)x(j) \cdot x(k) = 0 \cdot x(k) = 0$ для каждого индекса k. Если $x(k) \neq 0$ и скалярное произведение невырожденное, то $x(k)x(k) \neq 0$ и $\alpha(k) = 0$. ■

Обратное утверждение не верно.

Пример 1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $cz = \alpha\xi + \beta\eta$ для $c = (\alpha, \beta)$, $z = (\xi, \eta) \in E$. Тогда векторы $c = (0, 1)$ и $z = (1, 1)$ линейно независимы, но не ортогональны.

В пространстве с произвольным скалярным произведением существуют ортогональные линейно зависимые векторы.

Пример 2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ и $(a, b) \cdot (x, y) = ax + by$ для $(a, b), (x, y) \in E$. Тогда векторы $(1, i)$, $(2, 2i)$ ортогональны и линейно зависимы: $(1, i) \cdot (2, 2i) = 2 + 2i^2 = 2 - 2 = 0$ и $2(1, i) - (2, 2i) = 0$. Неевклидовость и вырожденность рассматриваемого скалярного произведения следуют из равенств $(i, 0) \cdot (i, 0) = i^2 + 0 = -1$, $(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$.

6. Рассмотрим вещественное или комплексное векторное пространство $(\mathbb{K}, E)$ и семейство $B = \{e_j \mid j \in J\}$, являющееся его базой. Определим скалярное произведение для E равенством

$$xy = \sum \xi_j^* \eta_j \quad (x = \sum \xi_j e_j,\, y = \sum \eta_j e_j \in E).$$

Семейства координат ξ_j, η_j финитны и число ненулевых слагаемых в суммах конечно. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $\xi_j^* = \xi_j$ и $\xi_j^* \eta_j = \xi_j \eta_j$. Будем коротко называть B *ортобазой*, а базовые векторы e_j — *ортами*.

Корректность данного определения следует из равенств $x(y+z) = \sum \xi_j^*(\eta_j + \zeta_j) = \sum \xi_j^* \eta_j + \sum \xi_j^* \zeta_j = xy + xz$, $x(\beta y) = \sum \xi_j^*(\beta \eta_j) = \beta \sum \xi_j^* \eta_j = \beta \cdot xy$, $xx = \sum \xi_j^* \xi_j = \sum |\xi_j|^2 > 0$, $yx = \sum \eta_j^* \xi_j = \sum \big(\eta_j \xi_j^*\big)^* = \big(\sum \xi_j^* \eta_j\big)^* = (xy)^*$ $(x = \sum \xi_j e_j$, $y = \sum \eta_j e_j$, $z = \sum \zeta_j e_j \in E$, $\beta \in \mathbb{K})$. Норма для E определяется равенством

$$\|x\| = (xx)^{1/2} = \Big(\sum |\xi_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $|\xi_j|^2 = \xi_j^2$. Из определения следует обобщающее теорему Пифагора

Равенство Парсеваля. $\|x\|^2 = \sum |\xi_j|^2$.

Подчеркнем, что $e_i e_j = \delta_{ij}$. Координаты $\xi_j = e_j x$ вектора $x = \sum \xi_j e_j$ по ортонормированной базе (e_j) называют *коэффициентами Фурье* по этой базе. Рассмотрим множество индексов $K \subseteq J$ и линейный оператор $P_K \colon E \to E$ такой, что $P_K e_k = e_k$ $(k \in K)$ и $P_K e_j = 0$ $(j \notin K)$. По определению,

$$P_K x = \sum_{k \in K} \xi_k e_k \quad (x = \sum \xi_j e_j).$$

Оператор P_K проектирует пространство E на подпространство $E_K = \{x = \sum \xi_j e_j \mid \xi_j = 0\ (j \notin K)\}$, так как $P_K^2 = P_K$ и $P_K x = x$ $(x \in E_K)$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|P_K x\|^2 = \sum_{k \in K} |\xi_k|^2 \quad (x = \sum \xi_j e_j \in E).$$

При этих обозначениях верно

Равенство Фурье. $\|x\|^2 = \|P_K x\|^2 + \|x - P_K x\|^2$.

□ Пусть $y = P_K x$, $z = x - P_K x$. Тогда $x = y + z$ и $y \perp z$: $yz = \left(\sum\limits_{k\in K} \xi_k e_k\right)\left(\sum\limits_{j\notin K} \xi_j e_j\right) = \sum\limits_{k\in K, j\notin K} \xi_k^* \xi_j e_k e_j = 0$. Доказываемое равенство следует из теоремы Пифагора. ■

Из равенства Фурье следует

Неравенство Бесселя. $\|P_K x\|^2 \le \|x\|^2$.

Замечание. Пусть $J = K \cup L$, $L = J \setminus K$. Определим кроме оператора P_K еще линейный оператор $P_L\colon E \to E$, проектирующий E на подпространство $E_L = \{x = \sum \xi_j e_j \mid \xi_j = 0\,(j \notin L)\}$, дополняющее E_K до E по базе B. Обозначим $I\colon E \to E$ тождественное преобразование E, а $O\colon E \to E$ — постоянную со значением 0. Из определений следует, что

$$I = P_K + P_L, \quad P_K P_L = O.$$

Равенство Фурье эквивалентно равенству

$$\|x\|^2 = \|P_K x\|^2 + \|P_L x\|^2 \quad (x \in E,\ K \subseteq J,\ L = J \setminus K).$$

Отметим еще, что $I = P_J$ и $O = P_O$ (при пустом множестве индексов осуществляется проектирование на нулевое подпространство). Рассматриваемые проекторы называются *ортогональными.* Простота действий с ними обеспечивает их широкое применение.

7. Опишем ортогональное проектирование подробнее. Рассмотрим вещественное или комплексное евклидово пространство E и его подпространство A. Обозначим через

$$\rho(z, A) = \inf\{\|z - x\| \mid x \in A\}$$

расстояние от точки $z \in E$ до подпространства A. Точку $a = a(z) \in A$, для которой $\|z - a\| = \rho(z, A)$, назовем *ближайшей* к z точкой A. Если такая точка $a(z)$ есть для каждой $z \in E$, то подпространство A будем называть *замкнутым* в E.

Точка $p = p(z) \in A$ такая, что $z - p \perp x - p$ для каждой $x \in A$, называется *ортогональной проекцией* или, коротко, *ортопроекцией* z на A. Если $z \in A$, то $a(z) = p(z) = z$. В неотделимом пространстве могут быть и другие ближайшие точки и ортопроекции.

Лемма. 1) *Каждая ближайшая к z точка $a \in A$ является ортопроекцией z на A.*

2) *Каждая ортопроекция $p \in A$ точки z является ближайшей к z точкой A.*

$\square$ 1) Пусть $\|z-a\| = \alpha = \rho(z, A)$. Рассмотрим произвольную точку $x \in A$ и произвольную точку $y = a + \lambda(x-a)$ проходящей через a и x прямой ($\lambda \in \mathbb{R}$). Так как A — подпространство, то $y \in A$. Поэтому

$$\alpha^2 \leq \|z-y\|^2 = \|z-a\|^2 + \lambda^2\|x-a\|^2 - 2\lambda \cdot \mathrm{re}(z-a)(x-a).$$

Используя равенство для α и полагая сначала $\lambda > 0$, а потом $\lambda < 0$, получаем отсюда неравенства

$$\pm\,\mathrm{re}(z-a)(x-a) \leq 2^{-1}(\pm\lambda)\|x-a\|^2, \ |\,\mathrm{re}(z-a)(x-a)| \leq 2^{-1}|\lambda|\|x-a\|^2$$

при любом $\lambda \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{re}(z-a)(x-a) = 0$. Если пространство E вещественное, то $(z-a)(x-a) = re(z-a)(x-a)$, $z-a \perp x-a$ и $a = p(z)$. Если пространство E комплексное, то при $y = a + \lambda i(x-a)$ точно так же получается еще равенство $\mathrm{im}(z-a)(x-a) = -\,\mathrm{re}(z-a)\cdot i(x-a) = 0$. Откуда $(z-a)(x-a) = 0$, $z-a \perp x-a$ и $a = p(z)$. Точка a является ортопроекцией z на A.

2) Пусть $p = p(z)$ — ортопроекция z на A. Применяя теорему Пифагора, убеждаемся в том, что

$$\|z-x\|^2 = \|(z-p)-(x-p)\|^2 = \|z-p\|^2 + \|x-p\|^2 \geq \|z-p\|^2$$

при любом $x \in A$. Значит, $p = a(z)$. Точка p является ближайшей к z точкой A. $\blacksquare$

Обозначим через $A(z)$ и $P(z)$ множество всех ближайших к z точек A и множество всех ортопроекций z на A.

Предложение. 1) *Пусть $a \in A(z)$. Тогда $b \in A(z)$ для $b \in A$ ессли $\|a-b\| = 0$.*

2) *Пусть $p \in P(z)$. Тогда $q \in P(z)$ для $q \in A$ ессли $\|p-q\| = 0$.*

$\square$ 1) Если $a \in A(z)$ и $b \in A$, $\|a-b\| = 0$, то

$$\|z-a\| \leq \|z-b\| \leq \|z-a\| + \|a-b\| = \|z-a\|, \quad \|z-a\| = \|z-b\|.$$

А если $b, a \in A(z)$, то, так как $2^{-1}(a+b) \in A$, из тождества параллелограмма следует, что $\|a-b\|^2 = 2[\|z-a\|^2+\|z-b\|^2]-\|(z-a)+(z-b)\|^2 \leq 4\alpha^2-4\|z-2^{-1}(a+b)\|^2 \leq 0$ при $\alpha = \|z-a\| = \|z-b\|$.

2) По лемме второе утверждение следует из первого. ■

Если $\|u-v\| = 0$, то будем называть точки $u, v \in E$ *эквивалентными* и писать $u \approx v$. Доказанное предложение означает, что ближайшие точки и ортопроекции *определены с точностью до эквивалентности.* Если евклидово пространство E отделимо, то ближайшая к z точка $a(z) \in A$ и ортопроекция $p(z) \in A$ точки z на A совпадают и единственные.

Доказанная лемма имеет простой геометрический смысл: она утверждает, что перпендикуляр является наклонной наименьшей длины.

Упражнение. Проверить необходимость условий $b \in A$ и $q \in A$ в доказанном предложении.

8. Рассмотрим замкнутое пространство X евклидова пространства E: $a(z) \in X$ $(z \in E)$. Обозначим через $X^{\perp}$ *ортогональное дополнение* или, коротко, *ортодополнение* для X, составленное из всех векторов $y \in E$, ортогональных каждому вектору $x \in X$.

Теорема об ортопроекции. 1) *Каждый вектор $z \in E$ равен сумме $x+y$ ортопроекции $x = p(z)$ вектора z на данное замкнутое подпространство X и ортопроекции $y = q(z)$ вектора z на ортодополнение $Y = X^{\perp}$.*

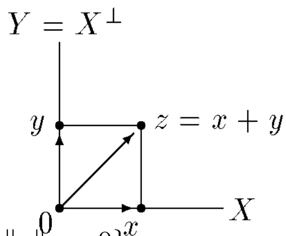
2) *Разложение $z = x+y$ единственное с точностью до эквивалентности.*

□ 1) Так как X замкнуто, то ортопроекция $x = p(z)$, являющаяся по лемме п. 7 ближайшей к z точкой X, существует. Пусть $y = z-x$. Тогда для каждой $u \in X$ верны равенства $uy = u(z-x) = ((u+x)-x)(z-x) = (u+x)(z-x)+(0-x)(z-x) = 0+0 = 0$. Значит, $y \in Y = X^{\perp}$.

Докажем, что y есть ортопроекция z на Y. Возьмем $v \in Y$. По определению, $uv = 0$ для каждой $u \in X$. В частности, $xv = 0$ и $xy = 0$. Следовательно, $(z-y)(v-y) = x(v-y) = xv-xy = 0-0 = 0$. Значит, $y = q(z)$ есть ортопроекция z на Y.

2) Пусть $z = x_1+y_1 = x_2+y_2$ $(x_1, x_2 \in X;\ y_1, y_2 \in Y)$. Тогда $u = x_1-x_2 = y_1-y_2 \in X \cap Y$, $\|u\|^2 = (x_1-x_2)(y_1-y_2) = 0$ и $\|u\| = \|x_1-x_2\| = \|y_1-y_2\| = 0$. Значит, $x_1 \approx x_2$ и $y_1 \approx y_2$. ■

Равенство $z = x + y$ называется *ортогональным разложением* z по подпространствам X и $Y = X^{\perp}$. Если пространство E отделимое, то такое разложение единственное. На ортогональном разложении векторов основан декартов метод координат. Связь поясняет хрестоматийный рисунок.



Замечание. Множество $N = \{z \in E \mid \|z\| = 0\}$ является подпространством евклидова пространства E. Из неравенства Коши $|vz| \leq \|v\| \cdot \|z\|$ следует, что каждый вектор $z \in N$ ортогонален каждому вектору $v \in E$. В частности, $z \perp z$. Рассмотрим фактор-пространство $\bar{E} = E/N$. Равенство $\bar{u}\bar{v} = uv$ ($\bar{u} = u + N$, $\bar{v} = v + N$) определяет скалярное произведение для $\bar{E}$. Это определение корректно: $(u + w)(v + z) = uv + wv + uz + wz = uv$ $(w, z \in N)$.

Таким образом, факторизация позволяет превратить неотделимое евклидово пространство в отделимое. Поэтому в теории обычно рассматриваются только отделимые евклидовы пространства. В приложениях же переход к более сложным векторам не всегда удобен.

2.3. Полилинейная алгебра

Полилинейными называются векторные функции нескольких векторных переменных, линейные по каждой из них. Этим функциям посвящены часть 4 книги [50] и глава 3 книги [12]. Большое внимание полилинейной алгебре уделено в томе II книги [73].

2.3.1. Тензорные произведения

Элементами тензорного произведения векторных пространств служат некоторые фактор-множества полилинейных функций.

1. Рассмотрим конечное семейство векторных пространств $(\mathbb{K}, E_i)$, их произведение $(\mathbb{K}, E)$ $(E = \prod E_i)$ и векторное пространство $(\mathbb{K}, F)$. Элементами пространства E являются семейства $x = (x_i)$ векторов $x_i \in E_i$. Будем называть эти семейства *мультивекторами.* Предполагается, что множество индексов I линейно упорядочено. Обычно $I = \{1, \dots, n\}$.

Для каждой функции $f\colon E \to F$, точки $a \in E$ и индекса i определена *частная функция* $f_{ai}\colon E_i \to F$, $f_{ai}(x_i) = f(a - a_i^0 + x_i^0)$ $(x_i \in E_i)$. Здесь x_i^0 обозначает семейство $z = (z_j) \in E$ такое, что $z_i = x_i$ и $z_j = 0$ при $j \neq i$. Функция f называется *полилинейной*, если каждая ее частная функция f_{ai} линейна. Вместо *полилинейная функция* говорят также *полилинейное отображение*.

Пример. Важным примером полилинейных функций служат билинейные функции, описанные в 2.2.4, 1. Свойства полилинейных функций можно выводить по индукции из свойств билинейных.

Обозначим $\mathscr{M} = \mathscr{M}\mathscr{L}(E, F)$ множество всех полилинейных отображений $f\colon E \to F$. Вместе с обычными сложением и умножением на скаляр множество $\mathscr{M}$ образует векторное пространство.

2. Определим тензорное произведение векторных пространств. В 2.2.1, 6, 2.2.1, 9 и 2.2.2, 1 была описана алгебра $\mathscr{F}_0(X, \mathbb{K})$ финитных скалярных функций на множестве X. При $X = E$ алгебра $\Phi(E) = \Phi(E) = \mathscr{F}_0(E, \mathbb{K})$ имеет базу из дельта-функций δ_x $(x \in E)$. Будем отождествлять δ_x с мультивектором x и вместо $\varphi = \sum \alpha_x \delta_x$ писать $\varphi = \sum \alpha(x)x$ для $\varphi \in \Phi(E)$ и финитного семейства $\alpha_x = \alpha(x) \in \mathbb{K}$ $(x \in E)$.

Выделим в векторном пространстве Φ подпространство N, порожденное множеством специальных линейных комбинаций дельта-функций двух видов:

$$\begin{aligned} b &= \bigl(a - a_i^0 + x_i^0 + y_i^0\bigr) - \bigl(a - a_i^0 + x_i^0\bigr) - \bigl(a - a_i^0 + y_i^0\bigr),\\ c &= \bigl(a - a_i^0 + \alpha x_i^0\bigr) - \alpha\bigl(a - a_i^0 + x_i^0\bigr) \quad (a, x, y \in E;\ \alpha \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Заметим, что $f(b) = f(c) = 0$ для каждой $f \in \mathscr{M}$.

Фактор-пространство $\bar{E} = \Phi(E)/N$ называется *тензорным произведением* пространств E_i и обозначается $\otimes E_i$. Его элементы $\bar{\varphi} = \varphi + N$ $(\varphi \in \Phi(E))$ называются *тензорами*. Среди них выделяются тензоры $\bar{x} = \otimes x_i = x + N$ $(x = (x_i) \in E)$, которые называются *разложимыми*. Они составляют систему образующих тензорного произведения $\bar{E} = \otimes E_i$, но не являются его базой из-за линейной зависимости: $\bar{\varphi} = \sum \alpha(x)\bar{x}$ для некоторого финитного семейства $\alpha(x) \in \mathbb{K}$ $(x \in E)$, но *не единственного*.

Упражнение. Привести примеры линейно зависимых разложимых тензоров.

Если $E_i = X$ и $I = \{1, \ldots, n\}$, то $\prod E_i = X^n$ и $\otimes E_i = X^{\otimes n}$.

3. Установим связь между обычным $E = \prod E_i$ и тензорным $\bar{E} = \otimes E_i$ произведениями векторных пространств E_i. Определим функцию $u\colon E \to \bar{E}$ равенством $u(x) = \bar{x}$ ($x = (x_i) \in E$, $\bar{x} = \otimes x_i \in \bar{E}$). Функция u полилинейна. В самом деле, используя определение факторизующего подпространства N, легко убедиться в том, что для каждой частной функции u_{ai} верны равенства $u_{ai}(\alpha x_i + \beta y_i) = u(a - a^0 + (\alpha x_i + \beta y_i)^0) = (a - a^0 + (\alpha x_i + \beta y_i)^0) + N = \big(a - a^0 + \alpha x_i^0\big) + \big(a - a^0 + \beta y_i^0\big) + N = \alpha\big(a - a^0 + x_i^0\big) + \beta\big(a - a^0 + y_i^0\big) + N = \alpha u_{ai}(x_i) + \beta u_{ai}(y_i)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; $a \in E$; $x_i, y_i \in E_i$). Назовем $u \in \mathscr{ML}(E, \bar{E})$ *естественным отображением* $E = \prod E_i$ в $\bar{E} = \otimes E_i$.

Упражнения. 1). Доказать, что $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \simeq (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3) \simeq E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$. Сформулировать и доказать аналогичное правило ассоциативности для $\otimes E_i$.

2) Для каждой перестановки $\sigma\colon I \to I$ упорядоченного множества I индексов i определено линейное отображение $l_\sigma\colon \bar{E} \to \bar{E}_\sigma$, $l_\sigma(\bar{x}) = \bar{x}_\sigma$ ($\bar{x} = \otimes x_i \in \bar{E} = \otimes E_i$, $\bar{x}_\sigma = \otimes x_{\sigma(i)} \in \bar{E}_\sigma = \otimes E_{\sigma(i)}$) и отображение $f_\sigma\colon E \to \bar{E}_\sigma$, $f_\sigma(x) = \otimes x_{\sigma(i)}$ ($x = (x_i) \in E = \prod E_i$). Доказать, что f_σ полилинейно, $f_\sigma = l_\sigma u$, l_σ — изоморфизм и $l_{\sigma\tau} = l_\sigma \circ l_\tau$ для каждых перестановок σ, τ множества I.

3) Каждому разложимому тензору $\overline{x^*} = \otimes x_i^* \in \otimes(E_i^*)$ соответствует полилинейная функция $x^* \in \mathscr{ML}\big(\prod E_i, \mathbb{K}\big)$ со значениями $x^*(x) = \prod x_i^*(x_i)$ ($x = (x_i) \in \prod E_i$). Ей соответствует линейный функционал $l^* = l^*(x^*) \in (\otimes(E_i^*))^*$. Доказать, что композиция $\overline{x^*} \to l^*$ этих соответствий определяет изоморфизм $\otimes(E_i^*) \simeq (\otimes(E_i^*))^*$.

4. Рассмотрим: произвольную полилинейную функцию $f\colon E \to F$; линейную функцию $m\colon \Phi \to F$, определяемую значениями $m(x) = f(x)$ на дельта-функциях $x = \delta_x$; естественное отображение $k\colon \Phi \to \bar{E}$ пространства Φ на фактор-пространство $\bar{E} = \Phi/N$ и естественное отображение $u\colon E \to \bar{E}$ произведения $E = \prod E_i$ в произведение $\bar{E} = \otimes E_i$. Связь между этими отображениями поясняет диаграмма.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \\
\bar{E} \arrow[ur, "l"] & \Phi \arrow[l, "k"] \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Лемма. *Существует единственная линейная функция* l: $\bar{E} \to F$ *такая, что* $f = lu$.

□ Заметим, что $f = mk^{-1}u$, где $k^{-1}\colon \bar{E} \to \Phi$ — обратное к k соответствие. Так как $f(b) = f(c) = 0$ для всех функций b и c, порождающих N, то $\operatorname{Ker} k = N \subseteq \operatorname{Ker} m$, и из предложения в 2.1.2,11, примененного к $G = \Phi$, $F = \bar{E}$, $H = f(E)$ и

$\beta = k$, $\gamma = m$ с проверкой линейности, вытекает существование линейной функции $l\colon \bar{E} \to F$ такой, что $m = lk$. Следовательно, $f = lkk^{-1}u = lu$. Нужная линейная функция существует.

Докажем, что она единственная. Пусть $f = l_1u = l_2u$ для $l_1, l_2 \in \mathscr{L}(\bar{E}, F)$. Тогда $f(x) = l_1(u(x)) = l_2(u(x)) = l_1(\bar{x}) = l_2(\bar{x})$ и $l_1 = l_2$. ■

Обозначим через $l(f)$ определяемую леммой линейную функцию и назовем ее *линейным представлением* полилинейной функции f: по определению, $f = l(f)u$. Рассмотрим отображение L: $\mathscr{ML}(E,F) \to \mathscr{L}(\bar{E}, F)$ такое, что $L(f) = l(f)$ $(f \in \mathscr{ML}(E,F))$.

Теорема. *Отображение L является линейным изоморфизмом.*

□ Отображение L *линейное*: $L(\alpha f + \beta g)\bar{x} = l(\alpha f + \beta g)\bar{x} = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha l(f)\bar{x} + \beta l(g)\bar{x} = (\alpha Lf + \beta Lg)\bar{x}$ $(\bar{x} \in \bar{E})$ и, значит, $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K};\ f, g \in \mathscr{ML}(E,F))$.

Отображение L *накрывающее*: если $l \in \mathscr{L}(\bar{E}, F)$, то композиция $f = lu \in \mathscr{ML}(E,F)$ и $l = l(f) = Lf$ по лемме.

Отображение L *взаимно однозначное*: если $f = l(f)u \neq 0$, то $l(f) \neq 0$ и $\operatorname{Ker} L = \{0\}$. ■

Изоморфизм L позволяет отождествлять пространство $\mathscr{ML}(E,F)$ с пространством $\mathscr{L}(\bar{E}, F)$ и полилинейную функцию $f \in \mathscr{ML}(E,F)$ отождествлять с линейной функцией $l(f) \in \mathscr{L}(\bar{E}, F)$.

Упражнение. Доказать по индукции, что $\mathscr{ML}(E,F) \simeq \mathscr{L}(\bar{E}, F)$, используя доказанное в 2.2.4, 1 предложение об изоморфизме $\mathscr{ML}(X \times Y, Z) \simeq \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y, Z))$.

5. Если среди составляющих произведение $E = \prod E_i$ пространств E_i есть нулевое, то и пространство $\mathscr{ML}(E,F)$ нулевое: единственной полилинейной функцией является тождественный нуль. В самом деле, пусть $E_i = \{0\}$ для некоторого индекса i. Тогда $x_i = 0 = 0 \cdot 0$ для скалярного и векторных нулей. Поэтому $f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$ для каждых $f \in \mathscr{ML}(E,F)$ и $x \in E$. Это соответствует привычному свойству произведений: если хотя бы один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю.

Упражнение. Проверить обратное утверждение: если $\mathscr{ML}(E,F) = \{0\}$, то $E_i = \{0\}$ хотя бы для одного из пространств E_i, составляющих произведение $E = \prod E_i$.

Точно так же $\bar{E} = \otimes E_i = \{\bar{0}\}$, если $E_i = \{0\}$ хотя бы для одного индекса i.

Выберем в каждом пространстве E_i базу $A_i = (a^i_j)$ и обозначим через ξ^j_i координаты вектора $x_i \in E_i$ в ней: $x_i = \sum\limits_j \xi^j_i a^i_j$. Введем *мультииндексы* $\mu = (\mu(i))$, составленные из индексов $\mu(i)$ векторов a^i_j базы A_i. Определим *мультистепень* ξ^μ и *базовый мультивектор* a_μ равенствами

$$\xi^\mu = \prod \xi_i^{\mu(i)} \in \mathbb{K}, \quad a_\mu = \left(a^i_{\mu(i)}\right) \in E.$$

Для каждой полилинейной функции $f \in \mathscr{ML}(E, F)$ верно равенство
$$f(x) = \sum \xi^\mu f(a_\mu) \quad (x = (x_i),\ x_i = \Pi_j \xi^j_i a^i_j).$$

Значения функции f являются линейными комбинациями ее значений на базовых мультивекторах. Мультистепени ξ^μ, служащие коэффициентами этих комбинаций, могут быть любыми элементами скалярного поля $\mathbb{K}$.

Разложимые тензоры $\bar{a}_\mu = \otimes a^i_{\mu(i)}$, являющиеся естественными образами базовых мультивекторов a_μ, составляют базу тензорного произведения $\bar{E} = \otimes E_i$: они линейно независимы и порождают $\bar{E}$. Поэтому

$$\dim(\otimes E_i) = \prod (\dim E_i).$$

Упражнение. Проверить линейную независимость базовых тензоров $\bar{a}_\mu$.

Пусть $E_i = \mathbb{K}$ $(1 \le i \le n)$. Тогда $\dim E_i = 1$ и $\dim(\mathbb{K}^{\otimes n}) = 1^n = 1 = \dim \mathbb{K}$. Следовательно, $\mathbb{K}^{\otimes n} \simeq \mathbb{K}$.

6. Рассмотрим два примера тензорных произведений.

Пример 1. Пусть $E_i = \mathbb{K}_0^{S_i}$ — пространства финитных скалярных функций на множествах S_i. Тогда $\bar{E} = \otimes \mathbb{K}_0^{S_i} \simeq \mathbb{K}_0^{\Pi S_i} = \mathbb{K}_0^S$, где $S = \prod S_i$. При соответствующем отождествлении верны равенства

$$\bar{x}(s) = \otimes \left(\sum x_i(s_i) s_i\right) = \prod x_i(s_i) \quad (s = (s_i) \in S,\ x = (x_i) \in E).$$

Пример 2. Пусть (E_i), (F_i) — два конечных семейства векторных пространств с одними и теми же скалярным полем и множеством индексов. Рассмотрим произведение $E = \prod E_i$, тензорные произведения $\bar{E} = \otimes E_i$ и $\bar{F} = \otimes F_i$, семейство операторов $T_i \in \mathscr{L}(E_i, F_i)$. Равенство $T\bar{x} = \otimes(T_i x_i)$ $(\bar{x} = \otimes x_i \in \bar{E})$ определяет линейный оператор $T = \otimes T_i \in \mathscr{L}(\bar{E}, \bar{F})$, который называется *тензорным произведением линейных операторов* T_i.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "V"] \arrow[d, "u"'] & \bar{F} \\ \bar{E} \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Существование оператора $T = \otimes T_i$ следует из полилинейности естественного отображения $u\colon E \to \bar{E}$ и отображения $V\colon E \to \bar{F}$, $Vx = \otimes(T_i x_i)$ $(x = (x_i) \in E)$. Определяющее $T = \otimes T_i$ равенство можно записать так же $(\otimes T)(\otimes x_i) = \otimes(T_i x_i)$.

Упражнения. 1) Проверить существование оператора $T = \otimes T_i$. 2) Проверить правила действий с тензорными произведениями операторов: $T\otimes 0 = 0\otimes T = 0$, $I\otimes I = I$, $(S+T)\otimes U = S\otimes U + T\otimes U$, $S\otimes(T+U) = S\otimes T + S\otimes U$, $(\alpha S)\otimes(\beta T) = \alpha\beta(S\otimes T)$, $(S\otimes T)^{-1} = S^{-1}\otimes T^{-1}$, $(ST)\otimes(UV) = (S\otimes U)(T\otimes V)$.

7. Для каждых целых $p, q \geq 0$ и векторного пространства $(\mathbb{K}, X)$ естественно определить тензорное произведение $\mathscr{T}_p^q(X) = (X^*)^{\otimes p} \otimes X^{\otimes q}$. Его элементы называются *тензорами типа* (p, q) *на* X или, коротко, *pq-тензорами.* Число $p+q$ называется *рангом* таких тензоров.

Примеры. 1) $\mathscr{T}_0^0(X) = \mathbb{K}$: скаляры являются тензорами нулевого ранга.

2) $\mathscr{T}_0^1(X) = X$: векторы являются 01-тензорами.

3) $\mathscr{T}_1^0(X) = X^*$: линейные функционалы являются 10-тензорами.

4) $\mathscr{T}_1^1(X) = X^* \otimes X \simeq \mathscr{L}(X, X)$: линейные операторы отождествляются с 11-тензорами [50, часть 4, § 1, п. 5].

5) $\mathscr{T}_2^0(X) = X^* \otimes X^* \simeq (X \otimes X)^* \simeq \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$: билинейные формы отождествляются с 20-тензорами.

Можно отождествить pq-тензоры на X со скалярными полилинейными функциями (*формами*) на $X^p \times (X^*)^q$. А полилинейные функции, как и прежде, отождествить с их линейными представлениями.

Упражнение. Провести эти отождествления подробно.

Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{T}(X) = \sum \mathscr{T}_p^q(X)$ векторных пространств $\mathscr{T}_p^q(X)$ $(p, q \geq 1)$. Равенство

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) \quad (x \in X^p,\ y \in (X^*)^q)$$

определяет тензорное произведение $f \otimes g \in \mathscr{T}_{p+r}^{q+s}(X)$ функций $f \in \mathscr{T}_p^q(X)$, $g \in \mathscr{T}_r^s(X)$. Оно билинейно, ассоциативно, но не коммутативно.

2.3.2. Внешние произведения

Это произведение определяется с помощью тензорного произведения для антисимметричных полилинейных функций.

1. Рассмотрим множество $\mathscr{M} = \mathscr{ML}(E, F)$ полилинейных отображений $f\colon E \to F$ произведения $E = X^q$ семейства векторных пространств $E_i = X$ $(i \in I = \{1, \ldots, q\})$ в векторное пространство F с тем же скалярным полем $\mathbb{K}$. По определению, $\mathscr{ML}(X^0, F) = F$. Будем предполагать, что поле $\mathbb{K}$ имеет нулевую характеристику: $p \cdot 1 = 0$ только при $p = 0$. В этом случае $q! \neq 0$ для всех $q = q \cdot 1$ $(1 \in \mathbb{K})$.

Каждый мультивектор $x = (x(i))$, $x\colon I \to E$, и перестановка $\sigma\colon I \to I$ компонуются в мультивектор $x\sigma = x(\sigma(i))$. Поэтому для σ, x и $f\colon E \to F$ определена композиция $fx\sigma\colon I \to E$, а вместе с нею функция $\sigma f\colon E \to F$ со значениями $\sigma f(x) = f(x\sigma)$ $(x \in E)$. Если f полилинейна, то и σf полилинейна. Полилинейное отображение f называется *симметричным*, если $\sigma f = f$ при любой перестановке σ. И *антисимметричным* — если $\sigma f = \operatorname{sgn}\sigma \cdot f$. Симметричные и антисимметричные отображения составляют подпространства $\mathscr{S} = \mathscr{S}(E, F)$ и $\mathscr{A} = \mathscr{A}(E, F)$ пространства $\mathscr{ML}(E, F)$.

Так как каждая перестановка равна произведению транспозиций, то антисимметричность f эквивалентна равенству $\tau f = -f$ для каждой транспозиции $\tau \in P(I)$. (Можно ограничиться только транспозициями соседних номеров.) Если скалярное поле имеет нулевую характеристику, то $2f(x) \neq 0$ при $f(x) \neq 0$ и антисимметричность f означает, что $f(x) = 0$ при $x_i = x_j$ для каких-нибудь $i \neq j$. (Можно ограничиться случаем $j = i + 1$.)

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения подробно.

2. С каждым полилинейным отображением $f \in \mathscr{M} = \mathscr{ML}(X^q, \mathbb{K})$ можно связать симметричное отображение

$$Sf = (1/q!) \cdot \sum \sigma f \in \mathscr{S} \quad (\sigma \in P(I),\ I = \{1, \ldots, q\}).$$

Оператор $S\colon \mathscr{M} \to \mathscr{S}$ называется *симметризацией*. Он является проектором и отображает $\mathscr{M}$ на все $\mathscr{S}$:

$$S^2 f = S(Sf) = Sf\ (f \in \mathscr{M}) \quad \text{и} \quad Sf = f\ (f \in \mathscr{S}).$$

Оператор S применим, в частности, к естественному отображению $u\colon E \to \bar{E}$ декартовой степени $E = X^q$ в тензорную $\bar{E} = X^{\otimes q}$:

$$Su(x) = (1/q!) \cdot \sum \overline{x\sigma} \quad (x = (x(i)),\ \overline{x\sigma} = \otimes x(\sigma(i))).$$

Как в 2.3.1,7, отождествим $\mathscr{ML}(X^q, \mathbb{K})$ с $\mathscr{T}_0^q(X)$ и будем считать полилинейные формы $0q$-тензорами. Вместо $\mathscr{T}_0^q(X)$ условимся писать $\mathscr{T}^q(X)$ и обозначим $\mathscr{S}^q(X)$ подпространство $\mathscr{T}^q(X)$, составленное из симметричных тензоров.

Упражнение. Доказать, что $\dim \mathscr{S}^q(X) = \binom{n+q-1}{q}$ при $\dim X = n$.

Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{S}(X) = \sum \mathscr{S}^q(X)$ векторных пространств $\mathscr{S}^q(X)$ $(q \geq 1)$. Равенство

$$fg = S(f \otimes g) \in \mathscr{S}^{q+r}(X) \quad (f \in \mathscr{S}^q(X),\ g \in \mathscr{S}^r(X))$$

определяет умножение для $\mathscr{S}(X)$. Назовем его *симметризованным.* Оно коммутативно и ассоциативно.

Упражнение. Доказать это.

Прямая сумма $\mathscr{S}(X) = \sum \mathscr{S}^q(X)$ с симметризованным умножением называется *симметрической алгеброй пространства* X.

3. С каждым полилинейным отображением $f \in \mathscr{M} = \mathscr{ML}(X^{*p}, F)$ можно связать антисимметричное отображение

$$Af = (1/p!) \cdot \sum \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma f \quad (\sigma \in P(I),\ I = \{1, \dots, p\}).$$

Оператор $A\colon \mathscr{M} \to \mathscr{A}$ называется *антисимметризацией* или *альтернированием.* Он является проектором и отображает $\mathscr{M}$ на все $\mathscr{A}$:

$$A^2 f = A(Af) = Af \ (f \in \mathscr{M}) \quad \text{и} \quad Af = f \ (f \in \mathscr{A}).$$

Упражнение. Проверить это.

Как в 2.3.1,7, производится отождествление $\mathscr{ML}(X^{*p}, \mathbb{K})$ с $\mathscr{T}_p(X) = \mathscr{T}_p^0(X)$ и рассматривается подпространство $\mathscr{A}_p(X)$ пространства $\mathscr{T}_p(X)$, составленное из антисимметричных тензоров.

Упражнение. Доказать, что $\dim \mathscr{A}_p(X) = \binom{n}{p}$ при $\dim X = n$.

Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{A}(X) = \sum \mathscr{A}_p(X)$ векторных пространств $\mathscr{A}_p(X)$ $(p \geq 1)$. Равенство

$$f \wedge g = A(f \otimes g) \in \mathscr{A}_{p+r}(X) \quad (f \in \mathscr{A}_p(X),\ g \in \mathscr{A}_r(X))$$

определяет умножение для $\mathscr{A}(X)$. Назовем его *внешним.* Оно ассоциативно и *антикоммутативно*:

$$g \wedge f = (-1)^{pr} f \wedge g \quad (f \in \mathscr{A}_p(X),\ g \in \mathscr{A}_r(X)).$$

Упражнение. Доказать это равенство.

Прямая сумма $\mathscr{A}(X) = \sum \mathscr{A}_p(X)$ $(p \geq 1)$ с внешним умножением называется *внешней* или *грассмановой алгеброй* пространства X.

4. Если $p = 1$, то $A_1(X) \simeq X^*$. Рассмотрим конечные семейства $x^* = \left(x_i^*\right)$ $(x_i^* \in X^*)$ и $x = (x_i)$ $(x_i \in X)$ с индексами $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Из определений следует, что

$$\wedge x^*(x) = A(\otimes x^*)(x) = (1/n!) \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \left(\prod_i x_i^*(x_{\sigma(i)}) \right)$$

$(\sigma \in P(I), i \in I)$. Скаляры $\alpha_{ij} = x_i^*(x_j)$ составляют $n \times n$-матрицу $(1 \leq i, j \leq n)$. Число

$$\det M = (n!) \wedge x^*(x)$$

называется *определителем* матрицы M. Оно равно сумме произведений ее элементов, взятых по одному из каждых строки и столбца со знаком образованной их номерами перестановки.

Упражнение. Доказать, что $x_i^* \in X^*$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\wedge x^* \neq 0$ для $x^* = (x_i^*)$ $(1 \leq i \leq n)$.

5. Пусть $\dim E = n < \infty$, (e_i) — база E, $\left(e_i^*\right)$ — сопряженная база E^* $(i \in I = \{1, \ldots, n\})$, F — векторное пространство, $\mathbb{K}$ — общее скалярное поле. Заметим, что $E \simeq \mathbb{K}^n$. Обозначим $\mu = \mu(k)$ $(1 \leq k \leq p \leq n)$ произвольную строго возрастающую перестановку выбранных p номеров множества I.

Рассмотрим подпространство $\mathscr{A}_p(E,F)$ пространства $\mathscr{ML}(E^p,F)$, составленное из антисимметричных полилинейных функций. Для каждой антисимметричной полилинейной функции $f \in \mathscr{A}_p(E,F)$ существует единственное семейство векторов $c_\mu(f) \in F$ такое, что

$$f = \sum c_\mu(f) \wedge e^*_\mu \quad (\wedge e^*_\mu = \bigwedge_i e^*_{\mu(i)}).$$

Это представление получается из общего равенства в 2.3.1, 5 с помощью равенства $f(x\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot f(x)$ $(x = (x_i))$, эквивалентного $c_\sigma = \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_\mu$, для каждой перестановки σ выбранных номеров и группировкой слагаемых с одним и тем же множеством переставляемых номеров.

Упражнение. Провести подробно соответствующие выкладки.

Если $p = n$, то в представляющей f сумме одно слагаемое $c(f) \wedge e^*_i$ с коэффициентом $c(f) \in F$. При $F = \mathbb{K}$ и $p \le n$ внешние произведения $\wedge e^*_i$ составляют базу пространства $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$.

Упражнение. Доказать это утверждение.

3. АНАЛИЗ

В этой главе описываются три основные понятия математического анализа: предел, дифференциал и интеграл. Используются лекции Л. Я. Савельева [80] и книга Дж. Келли [39].

3.1. Предел

Понятие предела формализует идею приближения функций постоянными. Изложение общей теории пределов есть в книгах [13] и [39].

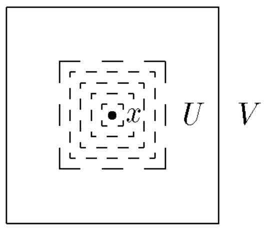
3.1.1. Топологические пространства

Топологические пространства служат областями изменения функций, для которых определяются пределы. В теории этих пространств принят удобный и наглядный геометрический язык. Топология дает формальное описание окрестностей элементов множества.

1. Рассмотрим множество E. *Топологией* для E называется каждый класс $\mathscr{U}$ множеств $U \subseteq E$, обладающий двумя свойствами: (1) Пересечение *каждого конечного* семейства множеств класса $\mathscr{U}$ принадлежит $\mathscr{U}$. (2) Объединение *каждого* семейства множеств класса $\mathscr{U}$ принадлежит $\mathscr{U}$.

Объединение пустого семейства частей E равно пустому множеству O, а пересечение равно E. Поэтому O и E принадлежат любой топологии $\mathscr{U}$ для E. Если $\mathscr{T}, \mathscr{U}$ — топологии для E и $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{U}$, то говорят, что $\mathscr{T}$ *слабее* $\mathscr{U}$.

Примеры. 1) *Слабейшая* топология $\mathscr{A} = \{O, E\}$. Она содержится в любой топологии $\mathscr{U}$ для E. 2) *Сильнейшая* топология $\mathscr{D} = \mathscr{P}(E)$. Она содержит любую топологию $\mathscr{U}$ для E.



Множество E и топология $\mathscr{U}$ для него образуют *топологическое пространство* $(E, \mathscr{U})$, которое коротко обозначается E. Элементы множества E называются *точками* этого топологического пространства. Множества, принадлежащие топологии, называются *открытыми*. Каждое множество $V \subseteq E$, содержащее некоторое открытое множество $U \in \mathscr{U}$, которому принадлежит точка $x \in E$, называется *окрестностью* точки x в топологическом пространстве $(E, \mathscr{U})$. Класс всех окрестностей точки x будем обозначать $\mathscr{V}(x)$. Окрестности описывают близость точек пространства к данной точке. Из определений следует, что открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

Примеры. 1) При слабейшей топологии $\mathscr{A} = \{O, E\}$ все точки E имеют единственную окрестность — множество E: $\mathscr{V}(x) = \{E\}$ $(x \in E)$. 2) При сильнейшей топологии $\mathscr{D} = \mathscr{P}(E)$ окрестностью точки $x \in E$ является любое множество $X \subseteq E$, которому принадлежит точка x: $\mathscr{V}(x) = \{X \subseteq E \mid x \in X\}$. В частности, элементарное множество $V = \{x\}$ есть окрестность точки x. Поэтому сильнейшую топологию называют еще *дискретной*. Пространство с ней называют *дискретным*.

Упражнение. Доказать, что пересечение каждого конечного семейства окрестностей точки является ее окрестностью.

Топологическое пространство и его топология называются *отделимыми* (или *хаусдорфовыми*), если у каждых двух различных точек пространства есть непересекающиеся окрестности.

Примеры. 1) Каждое дискретное пространство отделимо. 2) Для двоеточия $E = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ существует четыре топологии: $\mathscr{A} = \{O, E\}$, $\mathscr{B} = \{O, \{b\}, E\}$, $\mathscr{C} = \{O, \{a\}, E\}$, $\mathscr{D} = \{O, \{a\}, \{b\}, E\}$. Из них хаусдорфова только $\mathscr{D}$. Пространство $(E, \mathscr{A})$ называется *слипшимся*, пространства $(E, \mathscr{B})$ и $(E, \mathscr{C})$ — *связными*, а пространство $(E, \mathscr{D})$ — *дискретным* двоеточием.

Множества, являющиеся дополнениями к открытым, называются *замкнутыми*. Если каждая окрестность произвольной точки пространства содержит некоторую ее замкнутую окрестность, то пространство называется *регулярным*. Часто в определение регулярности включают еще и отделимость.

Примеры. 1) В каждом топологическом пространстве $(E, \mathscr{U})$ пустое множество O и множество E открыты и замкнуты. 2) Дискретное пространство регулярно. В нем каждое множество открыто и замкнуто.

Пусть $A \subseteq B \subseteq E$. Если каждой окрестности всякой точки $x \in B$ принадлежит некоторая точка $a \in A$, то говорят, что множество A *плотно в* B. При $B = E$ говорят еще, что A *всюду плотно.* Топологическое пространство, в котором есть счетное всюду плотное множество, называется *сепарабельным.* Такое пространство можно считать *приближенно счетным* (с точностью до любого выбранного семейства окрестностей).

Класс $\mathscr{B}(x) \subseteq \mathscr{V}(x)$ такой, что для всякой окрестности $V \in \mathscr{V}(x)$ существует *базовая окрестность* $B \in \mathscr{B}(x)$, содержащаяся в V, называется *локальной базой* для точки $x \in E$. Пространство, в котором для каждой точки есть счетная локальная база, называется *пространством со счетными локальными базами.*

Каждый класс $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ такой, что любое множество $U \in \mathscr{U}$ является объединением некоторого семейства множеств $B \in \mathscr{B}$, называется *базой топологии* $\mathscr{U}$. Выделяются пространства, топологии которых имеют счетные базы. Такие пространства называются *пространствами со счетными базами.* Ясно, что они являются пространствами со счетными локальными базами.

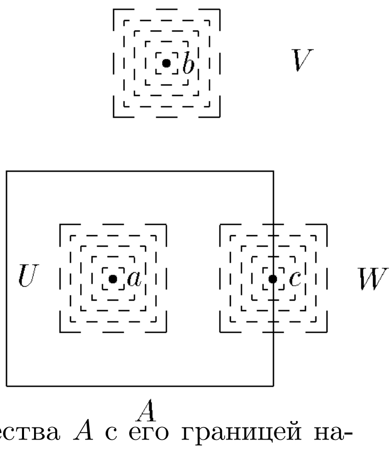
Пример. В дискретном пространстве $(E, \mathscr{D})$ класс $\mathscr{B}(x)$, состоящий из единственного точечного множества $\{x\}$, есть база класса $\mathscr{V}(x)$. Если множество E счетно, то пространство $(E, \mathscr{D})$ имеет счетную базу.

Множество $A \subseteq E$ с *индуцированной* топологией $A \cap \mathscr{U} = \{A \cap U \mid U \in \mathscr{U}\}$ образует *подпространство* топологического пространства $(E, \mathscr{U}\})$. Если $A \in \mathscr{U}$, то $A \cap \mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}$ и $(A, A \cap \mathscr{U}) \subseteq (E, \mathscr{U})$. Пересечение $A \cap U$ называют *следом* U на A.

2. Каждое множество $A \subseteq E$ порождает естественное разбиение точек пространства E на три типа: *внутренние*, *внешние* и *граничные* для A. Достаточно определить внутренние точки: внешние и граничные определяются через них. Точка $a \in A$ называется *внутренней* для множества A, если существует окрестность U точки a, содержащаяся в A. Точка $b \notin A$ называется *внешней* для A, если она является внутренней для дополнения $B = E \setminus A$.

Точка $c \in E$ называется *граничной* для A, если она не является ни внутренней, ни внешней для A. Для внешней точки b существует окрестность V, не пересекающаяся с A. Каждая окрестность W граничной точки c пересекается как с множеством A, так и с его дополнением.

Будем называть множества всех внутренних, внешних, граничных точек для A соответственно *внутренностью, внешностью, границей* множества A и обозначать $I(A) = \operatorname{Int} A$, $E(A) = \operatorname{Ext} A$, $F(A) = \operatorname{Fr} A$. Эти множества попарно не пересекаются и в объединении дают всё пространство: $I(A) + E(A) + F(A) = E$. Из определений следует, что множества $I(A)$ и $E(A)$ открыты, а граница $F(A)$ замкнута. В открытых множествах нет граничных точек.



Объединение $\bar{A} = A \cup F(A)$ множества A с его границей называется *замыканием* A. Из определений следует, что множество A замкнуто есcли оно совпадает со своим замыканием. Как и прежде, знак $+$ употребляется вместо $\cup$ для непересекающихся множеств.

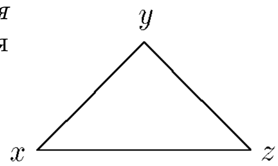
Упражнение. Доказать, что $\bar{A}$ равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих A.

Точки замыкания $\bar{A}$ называются *точками прикосновения* для множества A: по определению это внутренние и граничные точки для A. Точка $x \in E$ является точкой прикосновения для множества A есcли каждая окрестность точки x пересекается с A.

3. Среди топологических пространств выделяются метрические, в которых близость точек можно измерять вещественными числами.

Положительная симметричная и равная нулю на диагонали функция $\rho\colon E \times E \to \mathbb{R}$, для которой верно *неравенство треугольника*

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad (x,y,z \in E),$$



называется *метрикой* для множества E. Число $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между точками x, y. Множество E и функция ρ составляют *метрическое пространство* (E,ρ). Множества

$$B(c,r) = \{x \mid \rho(x,c) < r\}, \quad \bar{B}(c,r) = \{x \mid \rho(x,c) \le r\}$$

называются *открытым* и *замкнутым шарами* с центром c и радиусом $r \geq 0$. При $r = 0$ шар $B(c, r) = O$ пустой, а замкнутый шар $\overline{B}(c, r)$ состоит из точек, расстояние от которых до центра c равно нулю. Шары с нулевым радиусом называются *вырожденными*. Они могут состоять и из одной точки.

Топология метрического пространства порождается шарами: она состоит из множеств, в которых каждая точка содержится вместе с некоторым открытым шаром, центром которого она является. По определению, множество $U \subseteq E$ *метрически открыто*, если для каждой точки $u \in U$ существует число $r = r(u) > 0$ такое, что $B(u, r(u)) \subseteq U$. Метрически открытые множества составляют *метрическую топологию* для E: их конечные пересечения и любые объединения метрически открыты. Каждый открытый шар является открытым множеством в этой топологии, а замкнутый — замкнутым.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Метрика $\rho\colon E \times E \to \mathbb{R}$ называется *невырожденной*, если $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ $(x, y \in E)$. Порождаемая ею метрическая топология хаусдорфова: каждые две различные точки x, y пространства E отделяются открытыми шарами $B(x, r)$, $B(y, r)$ с радиусом $r = \rho(x, y)/2$ и замкнутыми $\overline{B}(x, s)$, $\overline{B}(y, s)$ с радиусом $s = \rho(x, y)/3$. Обычно невырожденность включается в определение метрики. Всюду дальше, как правило, будут рассматриваться невырожденные метрики и это не всегда будет оговариваться. Невырожденная метрика определяет регулярное топологическое пространство.

Упражнение. Доказать, что равенство $\rho(x, y) = 0$ определяет эквивалентность для множества E точек метрического пространства (E, ρ). А факторизация E по этому отношению приводит к невырожденной метрике $\bar{\rho}$ для фактор-класса $\bar{E}$, определяемой равенством $\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(x, y)$ ($\bar{x}$, $\bar{y}$ — фактор-множества эквивалентных x, y точек E).

4. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *Дискретная* метрика $\rho\colon E \times E \to \mathbb{R}$ со значениями $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ $(x, y \in E)$ определяет дискретную топологию для E.

Пример 2. Метрическая топология для нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$ определяется расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in E)$. Невырожденная норма определяет невырожденное расстояние. Верны равенства $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$, $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y)$ для каждых скаляра α и векторов x, y, z. Если расстояние ρ для векторного пространства E обладает этими свойствами, то равенство $\|x\| = \rho(x, 0)$ $(x \in E)$ определяет норму для E.

Пример 3. Пусть E — векторное пространство и семейство норм $(\|\cdot\|_i)$ для E — *мультинорма.* Они составляют *мультинормированное пространство* $(E, (\|\,\|_i)$.

Обозначим $B_i(c, r) = \{x : \|x - c\|_i < r\}$ метрически открытый шар в E с центром c и радиусом $r > 0$ при норме $\|\cdot\|_i$. Будем предполагать, что для каждых индексов i, j существует индекс k такой, что $\|x\|_i \vee \|x\|_j \le \|x\|_k$ $(x \in E)$. Определим топологию для E по аналогии с топологией для метрического пространства: множество $U \subseteq E$ открыто, если для каждой точки $u \in U$ существуют индекс $i = i(u)$ и число $r_i = r_i(u) > 0$ такие, что $B_i(u, r_i) \subseteq U$. Как и в метрическом пространстве, открытое множество содержит каждую свою точку вместе с некоторым невырожденным шаром. Но теперь у разных точек эти шары могут определяться разными нормами. В этой топологии для каждой точки существует локальная база, состоящая из выпуклых множеств (шаров), и поэтому топология называется *локально выпуклой.* Векторное пространство с локально выпуклой топологией называется *локально выпуклым.*

Заметим, что разные мультинормы могут определять одну и ту же топологию. Связь между локально выпуклыми и мультинормированными пространствами описана в [14, гл. 2, § 5] и [42, гл. 3, § 2].

Упражнения. 1) Доказать, что при данном определении пересечение конечного семейства открытых множеств открыто. 2) Доказать, что для отделимости локально выпуклого пространства необходимо и достаточно, чтобы для каждой ненулевой точки среди определяющих топологию норм имелась бы не равная в этой точке нулю.

Пример 4. Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ вещественных функций на множестве X. Для каждого конечного $K \subseteq X$ определим норму $\|\,\|_K$ равенством $\|f\|_K = \max\{|f(x)| : x \in K\}$. Ясно, что $\|f\|_K \vee \|f\|_L \le \|f\|_M$ при $K \cup L = M$ для каждой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$. Шар с центром f и радиусом $r \ge 0$ определяется равенством $B_K(f, r) = \{g : |f(x) - g(x)| < r,\, x \in K\}$. Он состоит из всех функций $g\colon X \to \mathbb{R}$, значения которых близки к значениям f в точках из K, а в остальных — произвольны. Если множество X несчетно, то определяемая семейством норм $\|\,\|_K$ локально выпуклая топология *неметризуема*: она не может быть определена с помощью какой-нибудь одной метрики.

Упражнение. Доказать это утверждение.

Пример 5. Рассмотрим векторное пространство E, его алгебраическое сопряженное E^* и множество $S^* \subseteq E^*$, служащее системой координат для E: если $x \ne 0$, $x \in E$, то $s^*(x) \ne 0$ для некоторого функционала $s^* \in S^*$. Каждое конечное множество $K^* \subseteq S^*$ определяет норму $\|\,\|_{K^*}$ для E, имеющую значения $\|x\|_{K^*} = \max\{|s^*(x)| : s^* \in K^*\}$ $(x \in E)$. Ясно, что $\|x\|_{K^*} \vee \|x\|_{L^*} \le \|x\|_{M^*}$ при $K^* \cup L^* = M^*$ для каждой точки x. Шар с центром x и радиусом $r > 0$ определяется равенством $B_{K^*}(x, r) = \{y : |s^*(x) - s^*(y)| < r,\, s^* \in K^*\}$. Он состоит из всех точек $y \in E$, выбранные координаты $s^*(y)$ которых близки $s^*(x)$. Получающаяся топология для векторного пространства E называется *слабой топологией*, определяемой системой координат S^*, или S^**-топологией.*

Если пространство E нормировано, то в качестве системы координат, определяющей слабую топологию, можно взять его геометрическое сопряженное E', состоящее из ограниченных линейных функционалов на E. Тогда $|x'(x)-x'(y)| = |x'(x-y)| \leq \|x'\|\|x-y\| \leq \gamma\|x-y\|$ для $\gamma = \max\{\|x'\| : x' \in K'\}$ при каждом конечном $K' \subseteq E'$: если точки близки по норме, то близки их соответствующие координаты. Обратное не всегда верно. В этом смысле координатная близость слабее близости по норме. Топологию для E, определяемую нормой, по контрасту часто называют *сильной*.

Упражнение. Доказать, что для конечномерного нормированного пространства E сильная и слабая E'-топология совпадают.

Слабые топологии для алгебраического сопряженного E^* и его подпространств называют $*$-*слабыми*. Среди них выделяется E^{**}-*топология* и E-*топология*, определяемая вторым сопряженным E^{**} и его отождествленным с E подпространством. Для геометрического сопряженного E', кроме сильной, выделяются E'^*-*топология*, E''-*топология* и E-*топология*.

Упражнения. 1) Определить E-*топологию* для $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ по аналогии с топологией для $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$, описанной в примере 4. 2) Доказать, что E-*топология* для E^* слабее E^{**}-*топологии*. А E-*топология* для E' — слабее E''-*топологии*, которая, в свою очередь, слабее E'^*-*топологии*.

5. По аналогии с мультинормированными пространствами определим мультиметрические. Пусть E — множество и (ρ_i) — *мультиметрика* — семейство метрик для E. Они составляют мультиметрическое пространство $(E, (\rho_i))$. Каждое мультинормированное пространство является мультиметрическим.

Обозначим $B_i(c, r) = \{x : \rho_i(x, c) < r\}$ метрически открытый шар в E с центром c и радиусом $r > 0$ при метрике ρ_i. Будем предполагать, что для каждых индексов i, j существует индекс k такой, что $\rho_i(x, y) \vee \rho_j(x, y) \leq \rho_k(x, y)$ $(x, y \in E)$. Определим топологию для E по аналогии с топологией метрического пространства: множество $U \subseteq E$ открыто, если для каждой точки $u \in U$ существуют индекс $i = i(u)$ и число $r_i = r_i(u) > 0$ такие, что $B_i(u, r) \subseteq U$. Такая топология называется *равномерной*.

Упражнения. 1) Доказать, что при данном определении пересечение конечного семейства открытых множеств открыто. 2) Доказать, что для отделимости мультиметрического пространства необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары различных точек среди определяющих топологию метрик имелась бы отделяющая эти точки.

Можно ввести и бесконечные расстояния. Рассмотрим аддитивную полугруппу $[0, \infty] = [0, \infty[\cup \{\infty\}$, полученную добавлением к упорядоченной аддитивной полугруппе $[0, \infty[$ *конечных* положительных вещественных чисел *бесконечного числа* ∞ и доопределения сложения равенствами $x + \infty = \infty + x = \infty$ для всех $x \in [0, \infty]$. Соответственно порядок доопределяется неравенством

$x \le \infty$ ($x \in [0,\infty]$). Назовем *обобщенной метрикой* для множества E *симметричную* и *равную нулю на диагонали* функцию $\Delta\colon E \times E \to [0,\infty]$, для которой верно *неравенство треугольника.* Ясно, что

$$\Delta(x,x) = 0, \quad \Delta(x,y) = \Delta(y,x), \quad \Delta(x,z) \le \Delta(x,y) + \Delta(y,z)$$

для всех $x, y, z \in E$. Конечное или бесконечное число $\Delta(x,y)$ называется *обобщенным расстоянием* между точками x, y. В *обобщенном метрическом пространстве* (E,Δ) есть открытые и замкнутые шары с бесконечным радиусом.

Так же, как семейство метрик ρ_i, семейство обобщенных метрик Δ_i для E определяет *обобщенное мультиметрическое* пространство $(E,(\Delta_i))$.

Замечание. Равенства $\rho_i = \Delta_i/(1+\Delta_i)$ или $\rho_i = \inf(1,\Delta_i)$ позволяют заменять обобщенные мультиметрики обычными [13, гл. 9, § 1].

Пример 1. Рассмотрим множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ вещественных функций на множестве X. Положим $\Delta(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}$ ($f,g \in \mathscr{F}$). Функция $\Delta\colon \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to [0,\infty]$ симметрична и $\Delta(f,f) = 0$ ($f \in \mathscr{F}$). Для нее верно неравенство треугольника: $|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| \ge |f(x)-h(x)|$ влечет $\Delta(f,g) + \Delta(g,h) \ge |f(x)-h(x)|$ ($f,g,h \in \mathscr{F}$, $x \in X$). Откуда $\Delta(f,g) + \Delta(g,h) \ge \Delta(f,h)$. Значит, $(\mathscr{F},\Delta)$ — (обобщенное) метрическое пространство.

Пример 2. Рассмотрим множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X,E)$ векторных функций, отображающих множество X в мультинормированное пространство $(E,(\|\,\|_i))$. Положим

$$\Delta_i(f,g) = \sup\{\|f(x)-g(x)\|_i : x \in E\} \quad (f,g \in \mathscr{F}).$$

Функции $\Delta_i\colon \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to [0,\infty]$ являются (обобщенными) метриками для $\mathscr{F}$ и составляют с $\mathscr{F}$ (обобщенное) мультиметрическое пространство $(\mathscr{F},(\Delta_i))$.

Замечание. Равномерную топологию для E, определяемую некоторой мультиметрикой, можно определить с помощью *равномерной структуры* — специального класса частей декартова произведения $E \times E$ [13, гл. 2]. Связь между равномерными структурами и топологиями подробно описана в [80, Введение]. А определение равномерных структур мультиметриками — в [13, гл. 9, § 1].

Множество с равномерной структурой называется *равномерным пространством.* Условимся использовать этот термин также для мультиметрических пространств и пространств с равномерной топологией.

В общей теории рассматриваются еще *пространства близости* [125, 8.4]. Близость для E определяется как специальное отношение между частями множества E. Она порождает некоторую топологию для E.

6. Непустой класс $\mathscr{B}$ непустых частей множества E, пересечение каждого конечного семейства которых содержит некоторое множество из $\mathscr{B}$, будем называть *сильно центрированным.* Класс множеств в E, которому вместе с каждым множеством принадлежат и все содержащие это множество части E, назовем *наследственным.* Наследственный сильно центрированный класс $\mathscr{F}$ множеств в E называется *фильтром* для E. Из определений следует, что пересечение каждого конечного семейства множеств фильтра $\mathscr{F}$ непусто и принадлежит $\mathscr{F}$. Множество E принадлежит каждому фильтру $\mathscr{F}$ в E. Каждый сильно центрированный класс $\mathscr{B}$ множеств в E *порождает* фильтр $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ для E, составленный из всех частей E, содержащих какие-либо множества из $\mathscr{B}$. Класс $\mathscr{B}$ называют *базой фильтра* $\mathscr{F}(\mathscr{B})$.

Примеры. 1) Класс $\mathscr{V}(x)$ всех окрестностей точки x в топологическом пространстве E есть фильтр для E. Класс $\mathscr{U}(x)$ открытых окрестностей точки x является базой фильтра $\mathscr{V}(x)$. 2) Класс $\mathscr{F}(x)$ всех частей множества E, которым принадлежит элемент x, есть фильтр для E. Класс, составленный из единственного множества $\{x\}$, является базой фильтра $\mathscr{F}(x)$. 3) Пусть $(E, (\Delta_i))$ — мультиметрическое пространство. Для каждых индекса i и числа $r > 0$ рассмотрим (i, r)-*окружение* диагонали

$$W(i, r) = \{(x, y) \mid \Delta_i(x, y) < r\} \subseteq E \times E.$$

По определению мультиметрического пространства для каждых индексов i, j существует индекс k такой, что $\Delta_i(x, y) \vee \Delta_j(x, y) \leq \Delta_k(x, y)$ $(x, y \in E)$. Следовательно, класс множеств $W(i, r)$ сильно центрирован и порождает *фильтр окружений* диагонали $\mathscr{W}$ для $E \times E$. Множество $X \subseteq E$, для которого $X \times X \subseteq W \in \mathscr{W}$, называется W-*малым.* Фильтр $\mathscr{W}$ является *равномерной структурой* для E.

Заметим, что $B_i(x, r) = \{y \mid \Delta_i(x, y) < r\} = \{y \mid (x, y) \in W(i, r)\}$. Поэтому каждая окрестность $V \in \mathscr{V}(x)$ точки $x \in E$ при равномерной топологии для E определяется некоторым окружением $W \in \mathscr{W}$: $V = \{y \mid (x, y) \in W\}$.

Упражнения. 1) Доказать, что образ $f(\mathscr{A}) = \{f(A) \mid A \in \mathscr{A}\}$ сильно центрированного класса $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$ при $f\colon E \to F$ есть сильно центрированный класс частей множества F. 2) Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(E)$ и $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{A \times B \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\} \subseteq \mathscr{P}(E \times F)$. Доказать, что если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ сильно центрированы, то и $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ сильно центрирован.

Множество $\mathbb{F} = \mathbb{F}(E)$ всех фильтров для E упорядочено по включению.

Лемма. *Множество $\mathbb{F}$ линейно мажорировано.*

$\square$ Каждая непустая линия $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}$ мажорируется своим объединением $\mathscr{U} = \cup\mathbb{L}$, составленным из множеств, принадлежащих какому-нибудь фильтру $\mathscr{L} \in \mathbb{L}$. Ясно, что $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{U}$ ($\mathscr{L} \in \mathbb{L}$). Вместе с тем $\mathscr{U} \in \mathbb{F}$. Действительно, класс $\mathscr{U}$ не пуст и ему не принадлежит пустое множество O, так как классы $\mathscr{L}$ не пусты и $O \notin \mathscr{L}$. Пусть $X, Y \in \mathscr{U}$. Тогда $X \in \mathscr{L}$, $Y \in \mathscr{M}$ для некоторых $\mathscr{L}, \mathscr{M} \in \mathbb{L}$. А так как $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{M}$ или $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{L}$, то $X, Y \in \mathscr{L}$ или $X, Y \in \mathscr{M}$ и, следовательно, $X \cap Y \in \mathscr{L}$ или $X \cap Y \in \mathscr{M}$. В любом случае $X \cap Y \in \mathscr{U}$. Точно так же если $X \in \mathscr{U}$ и $X \subseteq Y$, то $X \in \mathscr{L}$ и $Y \in \mathscr{L}$ для некоторого $\mathscr{L} \in \mathbb{L}$. Значит, $\mathscr{U}$ есть фильтр для E. $\blacksquare$

Фильтры для E, являющиеся максимальными элементами упорядоченного множества $\mathbb{F}(E)$, называются *максимальными фильтрами* или *ультрафильтрами.* По определению, максимальный фильтр для E не содержится ни в каком другом фильтре для E.

Пример. Фильтр $\mathscr{F}(x)$ в примере 2 является максимальным.

Из доказанной леммы и теоремы Цорна следует

Предложение. *Каждый фильтр для множества E содержится в некотором максимальном фильтре для E.*

Пример. Фильтр $\mathscr{V}(x)$ окрестностей точки x в топологическом пространстве E содержится в фильтре $\mathscr{F}(x)$, порожденным $\{x\}$.

Назовем фильтр $\mathscr{F}$ для множества E *простым,* если для каждых $X \subseteq E$, $Y \subseteq E$ из $X \cup Y \in \mathscr{F}$ следует $X \in \mathscr{F}$ или $Y \in \mathscr{F}$. Это свойство аналогично свойству простых чисел: если произведение mn натуральных чисел m, n делится на простое число p, то m или n делится на p.

Теорема. *Максимальными являются простые фильтры и только они.*

$\square$ 1) Пусть фильтр $\mathscr{F}$ для E простой, фильтр $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{F}$ и $Y \in \mathscr{G}$. Так как $Y \cup Y^c = E \in \mathscr{F}$, то $Y \in \mathscr{F}$ или $Y^c \in \mathscr{F}$. А так как $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, то $Y^c \notin \mathscr{G}$ влечет $Y^c \notin \mathscr{F}$. Значит, $Y \in \mathscr{F}$ и $\mathscr{F} = \mathscr{G}$. Фильтр $\mathscr{F}$ максимальный.

2) Пусть фильтр $\mathscr{F}$ для E максимальный, $X \subseteq E$, $Y \subseteq E$ и $X \cup Y \in \mathscr{F}$. Предположим, что $X \notin \mathscr{F}$ и $Y \notin \mathscr{F}$. Рассмотрим класс $\mathscr{G}$ всех $Z \subseteq E$ таких, что $X \cup Z \in \mathscr{F}$. Класс $\mathscr{G}$ непуст, так как $Y \in \mathscr{G}$. Ему не принадлежит пустое множество $Z = O$, так

как $X \notin \mathscr{F}$. Если $A \in \mathscr{G}$, $B \in \mathscr{G}$, то $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B) \in \mathscr{F}$ и, значит $A \cap B \in \mathscr{G}$. Наконец, если $A \in \mathscr{G}$, $A \subseteq B \subseteq E$, то из $X \cup A \in \mathscr{F}$ и $X \cup A \subseteq X \cup B$ следует $X \cup B \in \mathscr{F}$ и $B \in \mathscr{G}$. Значит, $\mathscr{G}$ есть фильтр для E. Вместе с тем, если $Z \in \mathscr{F}$, то $X \cup Z \in \mathscr{F}$ и $Z \in \mathscr{G}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. Но $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$, так как $Y \notin \mathscr{F}$ и $Y \in \mathscr{G}$. Это противоречит максимальности $\mathscr{F}$. Значит, $X \in \mathscr{F}$ или $Y \in \mathscr{F}$ и фильтр $\mathscr{F}$ простой. ■

Примеры. 1) Фильтр $\mathscr{F}(a)$, порожденный $\{a\} \subseteq E$, простой: если $a \in X \cup Y$, то $a \in X$ или $a \in Y$ для любых $X \subseteq E$, $Y \subseteq E$. 2) Фильтр $\mathscr{F}(a,b)$ для E, порожденный $\{a,b\} \subseteq E$ $(a \neq b)$, не простой: если $A = \{a\}$ и $B = A^c = E \setminus A$, то $A \cup B = E \in \mathscr{F}(\mathrm{a,b})$, но $A \notin \mathscr{F}(a,b)$ и $B \notin \mathscr{F}(a,b)$. Следовательно, фильтр $\mathscr{F}(a,b)$ и не максимальный.

7. Множество C в топологическом пространстве $(E, \mathscr{U})$ называется *компактным*, если каждое покрытие C открытыми множествами $U(i) \in \mathscr{U}$ $(i \in I)$ содержит некоторое конечное покрытие $U(k)$ $(k \in K(0) \in \mathscr{K}(I))$. Ясно, что каждое конечное множество в E компактно. Можно считать компактные множества *приближенно конечными* (с точностью до любого выбранного семейства окрестностей). Вместо *компактное множество* говорят коротко *компакт*. Если множество $C = E$ компактно, то пространство $(E, \mathscr{U})$ называется *компактным пространством* или просто *компактом*.

Часто удобна негативная формулировка: множество C *некомпактно*, если существует покрытие C открытыми множествами $U(i)$ $(i \in I(0))$, не содержащее конечных покрытий $U(k)$ $(k \in K \in \mathscr{K}(I(0)))$.

Множество, замыкание которого компактно, называется *относительно компактным*.

Примеры. 1) Отрезок $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ компактен в метрической топологии для $\mathbb{R}$. Интервалы $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ относительно компактны. Неограниченные множества в $\mathbb{R}$ не являются относительно компактными. 2) Прямоугольник $[a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ компактен в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Прямоугольники, стороны которых являются ограниченными интервалами, относительно компактны. Неограниченные множества в $\mathbb{R}^2$ не являются относительно компактными. 3) Замкнутый шар и ограничивающая его сфера компактны в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Предложение 1. *Замкнутая часть компакта есть компакт.*

□ Пусть $C \subseteq E$ — компакт, $F \subseteq C$ — замкнутое множество, семейство открытых множеств $V(i)$ покрывает F и $U = F^c$. Тогда семейство открытых множеств $U(i) = V(i) \cup U$ покрывает C: $\cup U(i) = \cup V(i) \cup U = F \cup F^c = E \supseteq C$. Так как C компактно, то $\cup U(k) \supseteq C$ для некоторого конечного множества индексов k. Следовательно, $\cup V(k) \supseteq F$: если $\cup V(k) = V \subset F$, то множество $F \setminus V \subseteq C$ (а вместе с ним и C) не покрывается множествами $U(k) = V(k) \cup F^c$. Значит, F компактно. ■

Предложение 2. *В отделимом пространстве каждый компакт замкнут.*

□ Пусть пространство E отделимое и $C \subseteq E$ — компакт. Предположим, что $C \neq \bar{C}$, и возьмем $y \in \bar{C} \setminus C$. Так как E отделимое, то для каждой точки $x \in C$ существуют открытые непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $V(x, y)$ точек x и y. Ясно, что $U(x)$ покрывает C. Поэтому $U = \cup U(k) \supseteq C$ для некоторого конечного множества точек $k \in C$. Множество $V(y) = \cap V(k, y)$ является открытой окрестностью точки y, не пересекается с U и тем более с C. Следовательно, $y \in \operatorname{Ext} C$ в противоречии с $y \in \bar{C}$. Значит, $C = \bar{C}$. ■

Следствие. *В отделимом пространстве компактность и замкнутость частей компакта эквивалентны.*

8. Семейство множеств $A(i) \subseteq E$ $(i \in I)$ называется *центрированным*, если пересечение $A(K) = \cap A(k)$ каждого конечного семейства $A(k)$ $(k \in K \in \mathscr{K}(I))$ не пусто. Часто удобна негативная формулировка: семейство множеств $A(i) \subseteq E$ $(i \in I)$ *не центрировано*, если пересечение $A(K_0) = \cap A(k)$ некоторого конечного семейства $A(k)$ $(k \in K_0 \in \mathscr{K}(I))$ пусто.

Обозначим через $\mathscr{A}$ класс всех различных множеств семейства $(A(i))$ (образ этого семейства). Класс $\mathscr{A}$ отождествляется с семейством своих множеств, служащих и собственными индексами. Ясно, что центрированность семейства $(A(i))$ равносильна центрированности $\mathscr{A}$. Порядок по включению для классов определяет поэтому порядок для центрированных семейств. Рассмотрим упорядоченное по такому включению множество $C(\mathscr{A})$ всех содержащих $\mathscr{A}$ центрированных семейств $\mathscr{B}$ множеств в E. Каждая линия $L(\mathscr{A}) \subseteq C(\mathscr{A})$ имеет мажоранту $\mathscr{B} = \cup L(\mathscr{A}) \subseteq C(\mathscr{A})$: благодаря линейной упорядоченности $L(\mathscr{A})$ каждое конечное семейство множеств $B(k) \in \mathscr{B}$ содержится в некотором семействе $\mathscr{L} \in L(\mathscr{A})$ и поэтому имеет непустое пересечение. По теореме Цорна в $C(\mathscr{A})$ есть максимальное центрированное семейство $\mathscr{M} \supseteq \mathscr{A}$.

Упражнение. Проверить, не является ли $\mathscr{M}$ ультрафильтром.

Пример. Пусть $a \in E$ и $\mathscr{A} = \{a\}$. Тогда семейство $\mathscr{M}(a)$, составленное из всех частей E, которым принадлежит точка a, является максимальным центрированным семейством, содержащим $\mathscr{A}$.

Пусть центрированное семейство $\mathscr{M} \supseteq \mathrm{C}(\mathscr{A})$ максимально и $X \subseteq E$.

Лемма. 1) *Если* $X = \cap M(k)$ $(k \in K_0)$ *для некоторого* $K_0 \in \mathscr{K}(I)$, *то* $X \in \mathscr{M}$.

2) *Если* $X \cap M(i) \neq O$ *для всех* $i \in I$, *то* $X \in \mathscr{M}$.

3) *Если* $X \supseteq M(i_0)$ *для некоторого* $i_0 \in I$, *то* $X \in \mathscr{M}$.

□ Если $X = \cap M(k) \notin \mathscr{M}$, то $\{\mathscr{M}, X\} \in C(\mathscr{A})$ и $\{\mathscr{M}, X\} \supset \mathscr{M}$ в противоречии с максимальностью $\mathscr{M}$.

Если $X \cap M(i) \neq O$ $(i \in I)$, то по доказанному $X \cap M(K) \neq O$ для $M(K) = \cap M(k)$ $(k \in K \in \mathscr{K}(I))$. Значит, $\{\mathscr{M}, X\} \in \mathrm{C}(\mathscr{A})$ и $X \in \mathscr{M}$.

Если $X \supseteq M(i_0)$, то $X \cap M(i) \supseteq M(i_0) \cap M(i) \neq O$ $(i \in I)$ и по доказанному $X \in \mathscr{M}$. ■

Часто бывает удобен следующий критерий компактности пространства.

Предложение. *Пространство* E *компактно ессли каждое центрированное семейство замкнутых множеств* $F(i) \subseteq E$ *имеет непустое пересечение.*

□ Пусть E компактно и $(F(i))$ — семейство замкнутых множеств в E. Если $\cap F(i) = O$, то $\cup U(i) = E$ для семейства открытых множеств $U(i) = F^c(i)$. Так как E компактно, то $\cup U(k) = E$ и $\cap F(k) = O$ для некоторого конечного множества индексов k. Семейство $(F(i))$ не центрировано.

Пусть теперь пространство E удовлетворяет сформулированному условию и $(U(i))$ — семейство открытых множеств в E. Если $\cup U(i) = E$, то $\cap F(i) = O$ для семейства замкнутых множеств $F(i) = U(i)^c$. По условию $\cap F(k) = O$ и, значит, $\cup U(k) = E$ для некоторого конечного множества индексов k. Пространство E компактно. ■

Следствие 1. *Пространство* E *компактно ессли для каждого центрированного семейства множеств* $A(i) \subseteq E$ *семейство замыканий* $\bar{A}(i)$ *имеет непустое пересечение.*

□ Пусть E компактно и $(A(i))$ — центрированное семейство множеств в E. Тогда семейство $(\bar{A}(i))$ тоже центрировано и по доказанному имеет непустое пересечение. Обратно: при $A(i) = \bar{A}(i)$ сформулированное условие обеспечивает компактность E. ■

Следствие 2. *Замкнутое множество $C \subseteq E$ компактно если каждое центрированное семейство замкнутых множеств $B(i) \subseteq C$ имеет непустое пересечение.*

□ Так как C замкнуто, то класс множеств в C, замкнутых при топологии $\mathscr{U} \cap C = \{U \cap C \mid U \in \mathscr{U}\}$ для C, совпадает с классом множеств в C, замкнутых при топологии $\mathscr{U}$ для E. Сформулированное утверждение следует поэтому из доказанного предложения, примененного к пространству $(C, \mathscr{U} \cap C)$. ■

Упражнение. Доказать, что замкнутое множество $C \subseteq E$ компактно ессли пространство $(C, \mathscr{U} \cap C)$ компактно.

9. Рассмотрим декартово произведение $E = \prod E_i$ семейства множеств E_i с топологиями $\mathscr{U}_i$ $(i \in I)$. Будем называть *открытыми прямоугольниками* или *прямоугольниками с открытыми сторонами* произведения $U(K) = \prod U_i$, в которых $U_i \in \mathscr{U}_i$ для всех $i \in I$ и $U_i = E_i$ при $i \notin K$, $K \in \mathscr{K}(I)$. Заметим, что $U(K) \cap U(L) = U(K \cup L)$ для каждых $K, L \in \mathscr{K}(I)$. Поэтому открытые прямоугольники образуют базу некоторой топологии $\mathscr{U}$ для E. Эта топология называется *тихоновской*, а пространство $(E, \mathscr{U})$ называется *тихоновским произведением* топологических пространств $(E_i, \mathscr{U}_i)$.

Примеры. 1) Базу тихоновской топологии для $\mathbb{R}^m$ составляют m-мерные прямоугольники с открытыми в $\mathbb{R}$ сторонами. Так как каждое открытое множество в $\mathbb{R}$ равно объединению ограниченных открытых интервалов, то можно составить базу и из обычных m-мерных открытых прямоугольников. Тихоновская топология для $\mathbb{R}^m$ совпадает с евклидовой.

2) Базу тихоновской топологии для пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$ вещественных функций на множестве X составляют множества $U(K) = \{f \mid f(x) \in U(x),\, x \in K\}$. Здесь $K \subseteq X$ конечно, $U(x) \subseteq \mathbb{R}$ открыто и значения $f(x)$ функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ произвольны при $x \notin K$. Тихоновская топология для $\mathscr{F} = \mathbb{R}^X$ совпадает со слабой топологией, определяемой функционалами δ_x.

3) Базу *обобщенного канторова дисконтинуума* $\mathbb{B}^{\mathbb{R}}$ с дискретным двоеточием $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ составляют множества $U(K, L) = \{f \mid f(x) = 1\ (x \in K),\, f(x) = 0\ (x \in L)\}$. Здесь K, L конечны и значения $f(x)$ функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ произвольны при $x \notin K \cup L$.

Упражнение. Доказать, что произведение семейства отделимых пространств есть отделимое пространство.

Теорема Тихонова. *Произведение $(E, \mathscr{U})$ любого семейст-*

ва компактных пространств $(E_i, \mathscr{U}_i)$ *компактно.*

□ Пусть $\mathscr{A}$ — центрированное семейство множеств в E. Возьмем содержащее $\mathscr{A}$ максимальное центрированное семейство $\mathscr{M}$ множеств в E и семейство $\bar{\mathscr{M}}$ замыканий этих множеств. Так как $\mathscr{M} \supseteq \mathscr{A}$, то $\bar{\mathscr{M}} \supseteq \bar{\mathscr{A}}$ и $\cap\bar{\mathscr{M}} \subseteq \cap\bar{\mathscr{A}}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\cap\bar{\mathscr{M}} \neq O$.

Обозначим $p_i\colon E \to E_i$ проектор E на E_i: $p_i(x) = x_i \in E_i$ для $x = (x_i) \in E$. Кроме того, пусть $M_i = p_i(M) \subseteq E_i$ — проекция множества $M \in \mathscr{M}$ на E_i и $M(i) = p_i^{-1}(M_i) \subseteq E$ — прямоугольник со стороной M_i и сторонами E_j при всех остальных индексах $j \neq i$. Так как семейство $\mathscr{M}$ центрировано, то для каждого индекса i семейство $\mathscr{M}_i$ проекций $M_i \subseteq E_i$ множеств $M \in \mathscr{M}$ тоже центрировано. А так как E_i компактно, то семейство $\bar{\mathscr{M}}_i$ замыканий $\bar{M}_i \subseteq E_i$ имеет непустое пересечение. Для каждого i возьмем x_i из этого пересечения. Докажем, что $x = (x_i) \in \bar{\mathscr{M}}$. Пусть V — произвольная окрестность точки x. По определению тихоновской топологии существует открытый прямоугольник $U = U(K) \subseteq V$, которому принадлежит точка x. Так как $x_i \in \bar{M}_i$, то $U(i) \cap M_i \neq O$ для каждого $M \in \mathscr{M}$. Следовательно, $U(i) \cap M \neq O$ для $U(i) = p_i^{-1}(U_i)$ и каждого $M \in \mathscr{M}$. В самом деле, если $u_i = m_i \in U_i \cap M_i$, то $u = (u_j) \in U(i)$ при любых $u_j \in E_j$ для всех индексов $j \neq i$ и, в частности, при $u_j = m_j$, когда $m = (m_j) \in M$. Тогда $u = m \in U(i) \cap M$. По лемме п. 8 отсюда вытекает, что $U(i) \in \mathscr{M}$ и $U = U(K) = \cap U(k) \in \mathscr{M}$ $(k \in K)$ для каждого конечного множества индексов K. Следовательно, благодаря центрированности $\mathscr{M}$, $U \cap M \neq O$ и тем более $V \cap M \neq O$ для всех $M \in \mathscr{M}$. Значит, $x \in \bar{M}$ при любом $M \in \mathscr{M}$ и $\cap\mathscr{M} \neq O$. ■

Пример. *Тихоновский кирпич* $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, [0,1]) = [0,1]^{\mathbb{R}}$, точками которого являются функции $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, компактен при индуцированной из $\mathbb{R}$ топологии для отрезка $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

10. Из теоремы Тихонова следует классическая теорема Лебега, описывающая компактные множества в $\mathbb{R}^m$.

Лемма. *Каждый отрезок* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *компактен.*

□ Рассмотрим семейство открытых множеств $U(i) \subseteq \mathbb{R}$, покрывающее $[a,b]$, и множество X концов x отрезков $[a,x]$ $(a \leq x \leq b)$, которые покрываются множествами $U(k)$ для конечного числа индексов k. Так как $a \in U(i(a))$ при некотором индексе $i(a)$, то $a \in X$ и $X \neq O$. А так как $x \leq b$ по определению, то X ограничено сверху. Следовательно, существуют $c = \sup X$ и $c \in U(i(c))$ при некотором индексе $i(c)$. Если $c < b$, то найдется $u \in U(i(c)) \cap]c, b]$. Ясно, что $u \in X$. Так как $c < u$, то это невозможно. Значит, $c = b$ и $[a, b]$ покрывается конечным семейством $U(k)$. $\blacksquare$

Базу евклидовой топологии для $\mathbb{R}^m$ составляют открытые шары, а базу тихоновской топологии — открытые прямоугольники. Так как каждый шар содержит некоторый прямоугольник, которому принадлежит центр этого шара, и наоборот, то евклидова и тихоновская топология для $\mathbb{R}^m$ равны. Класс замкнутых множеств при них один и тот же.

Прямоугольники в $\mathbb{R}^m$ с равными длинами сторон (*кубы*) являются шарами при норме $\|x\|_{\max} = \max |x_i|$ $(x = (x_i)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m)$. Эта норма *эквивалентна* евклидовой $\|x\|_2 = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$: $\|x\|_{\max} \le \|x\|_2 \le m^{1/2}\|x\|_{\max}$. Нормы $\| \, \|_{\max}$ и $\| \, \|_2$ определяют один и тот же класс ограниченных множеств.

Теорема Лебега. *Компактными в $\mathbb{R}^m$ являются ограниченные замкнутые множества и только они.*

$\square$ 1) Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^m$ — компакт. Так как пространство $\mathbb{R}^m$ отделимое, то по предложению 2 п. 7 множество C замкнуто. Рассмотрим покрытие C шарами радиуса 1 и выберем из них конечное семейство, покрывающее C. Ясно, что выбранные шары содержатся в одном шаре достаточно большого радиуса. Значит, C ограничено.

2) Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ограничено и замкнуто. Тогда X является замкнутой частью некоторого прямоугольника, равного произведению отрезков. По доказанной лемме и теореме Тихонова этот прямоугольник компактен. А по предложению 1 п. 7 отсюда следует компактность множества X. $\blacksquare$

Следствие. *Относительно компактными множествами в $\mathbb{R}^m$ являются ограниченные множества и только они.*

Это следствие эквивалентно теореме Лебега. В произвольном метрическом пространстве могут существовать ограниченные, но не относительно компактные множества.

Пример. Дискретное пространство $(\mathbb{N}, d)$ с метрикой $d(n, n) = 0$ и $d(m, n) = 1$ при $m \ne n$ представляет собой шар радиуса 1 с произвольным центром. Множество $\mathbb{N}$ ограничено и замкнуто, но не компактно: компактами в дискретном пространстве являются конечные множества и только они. Любое бесконечное множество $X \subseteq \mathbb{N}$ тоже ограничено и замкнуто, но не компактно.

11. Рассмотрим топологическое пространство $(E, \mathscr{U})$, множество $C \subseteq E$, открытые множества $U \in \mathscr{U}$, $V \in \mathscr{U}$ и их следы $A = UC$, $B = VC$ на C. Будем говорить, что U и V *разбивают* C, если $A \neq O$, $B \neq O$, $A + B = C$, $AB = O$. Множество, которое не разбивается никакими открытыми множествами, называется *топологически связным* или, коротко, просто *связным.* Если множество $C = E$ связно, то $(E, \mathscr{U})$ называется *связным пространством.* Если пространство E связно, то открыто-замкнутыми в нем являются только множества O и E.

Примеры. 1) Пустое множество связно. 2) Связными множествами в $(\mathbb{R}, |\,|)$ являются интервалы и только они. 3) Шары в $(\mathbb{R}, \|\,\|)$ при $\|\,\| = \|\,\|_1$, $\|\,\|_2$, $\|\,\|_{\max}$ связны.

Упражнения. Доказать следующие утверждения. 1) Множество связно ессли оно не разбивается никакими замкнутыми множествами. 2) Множество $C \subseteq E$ связно ессли $UVC \neq O$ для каждых открытых $U \subseteq E$, $V \subseteq E$, пересекающихся с C и составляющих его покрытие. 3) Если $C \subseteq E$ связно и содержится в объединении *непересекающихся* открытых $U \subseteq E$, $V \subseteq E$, то $C \subseteq U$ или $C \subseteq V$.

Предложение. *Объединение семейства связных множеств, имеющих непустое пересечение, связно.*

□ Пусть множества $C_i \subseteq E$ связны, $C = \cup C_i$ и $D = \cap C_i \neq O$ $(i \in I)$. Предположим, что некоторые $U \subseteq E$, $V \subseteq E$ разбивают C. Возьмем $a \in D$. Так как $UC + VC = C$, то $UD + VD = D$ и $a \in UD$ или $a \in VD$. Пусть $a \in UD$ и, значит, $a \in UC_i$ для каждого $i \in I$. По условию $VC_{i(0)} \neq O$ и, значит, $C_{i(0)} \neq O$ для некоторого $i(0) \in I$. Следовательно, U и V разбивают $C_{i(0)}$, что противоречит его связности. Значит, U и V не могут разбивать C. ■

Упражнение. Привести примеры семейств связных множеств с несвязными пересечениями.

Будем говорить, что связное множество *соединяет* свои точки.

Критерий связности. *Множество связно ессли каждые две его точки соединяются некоторой его связной частью.*

□ Если множество связно, то оно соединяет каждые две свои точки.

Пусть множество $X \subseteq E$ несвязно и открытые множества $U \subseteq E$, $V \subseteq E$ разбивают его. Возьмем точки $a \in UX$, $b \in VX$ и произвольное множество $Y \subseteq X$, которому они принадлежат.

Ясно, что $a \in UXY = UY$, $b \in VXY = VY$. А так как $UX + VX = X$ и $(UX)(VX) = O$, то $UY + VY = Y$ и $(UY)(VY) = O$. Множества U и V разбивают Y и оно не может быть связным. ■

Упражнение. Доказать, что произведение связных пространств связно.

Лемма. *Если C связно и $x \in \bar{C}$, то $C(x) = C \cup \{x\}$ связно.*

□ Пусть открытые U и V разбивают $C(x)$ и $x \in V$. Так как $x \in \bar{C}$, то $VC \neq O$. А так как $x \notin UC(x)$, то $UC(x) = UC \cup U\{x\} = UC$ и $UC \neq O$. Вместе с тем из $C \subseteq C(x)U \cup V$ и $UVC(x) = O$ следует $C \subseteq U \cup V$ и $UVC = O$. Это противоречит связности C. ■

Следствие. *Если C связно и $C \subseteq X \subseteq \bar{C}$, то X связно.*

□ Если $C = O$, то $\bar{C} = X = C = O$ и X связно. Пусть $C \neq O$ и $x, y \in X$. Тогда по лемме $C(x)$ и $C(y)$ связны. Так как $C \subseteq C(x) \cap C(y)$, то по предложению $C(x, y) = C(x) \cup C(y)$ связно. По критерию X связно. ■

Замечание. По предложению связность $X \neq O$ следует также из связности $C(x)$ и соотношений $O \neq C \subseteq \cap C(x)$, $X = \cup C(x)$ $(x \in X)$.

12. Объединение всех связных множеств в топологическом пространстве $(E, \mathscr{U})$, которым принадлежит точка $x \in E$, называется *связной компонентой точки* x.

Предложение 1. *Связная компонента точки является связным замкнутым множеством.*

□ Точка x принадлежит каждому множеству, составляющему ее связную компоненту, и эта компонента равна объединению семейства связных множеств, имеющих непустое пересечение. По предложению п. 11 она связна. По следствию леммы п. 11 замыкание $\bar{C}$ связной компоненты C точки x тоже связно. Так как $x \in C \subseteq \bar{C}$, то $\bar{C} \subseteq C$. Значит, $\bar{C} = C$. ■

Примеры. 1) Связное пространство является связной компонентой каждой своей точки. 2) В дискретном пространстве связная компонента точки состоит из самой этой точки. 3) В метрическом пространстве (A, Δ) с множеством точек $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ и метрикой $\Delta(x, y) = |x - y|$ связными компонентами точек $x \in [0, 1]$ и $y \in [2, 3]$ являются эти отрезки.

Пусть $A \subseteq E$. Связная компонента точки $x \in A$ в подпространстве $(A, A \cap \mathscr{U})$ равна объединению всех связных множеств в A, которым принадлежит точка x. Связная компонента $A(x)$

точки x в подпространстве A может отличаться от следа $AE(x)$ на A связной компоненты $E(x)$ точки x в пространстве E.

Пример. Связная компонента точки $x = 0$ в метрическом пространстве $E = \mathbb{R}$ равна $\mathbb{R}$, а в его подпространстве $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ она равна $[0, 1]$, тогда как $A\mathbb{R} = A$.

Связные компоненты точек $x \in A$ в подпространстве $(A, A \cap \mathscr{U})$ коротко называются *связными компонентами множества* A.

Предложение 2. *Связные компоненты множества составляют его разбиение.*

$\square$ Каждая точка $x \in A$ принадлежит своей связной компоненте $C(x)$ в A. Если связные компоненты $C(x)$, $C(y)$ в A точек $x, y \in A$ пересекаются, то они равны. В самом деле, если $x \in C(x) \cap C(y)$, то $C = C(x) \cup C(y)$ связно в A по предложению п. 11. Так как $x \in C$ и $y \in C$, то $C \subseteq C(x)$ и $C \subseteq C(y)$, откуда $C(x) = C = C(y)$. Значит, различные связные компоненты множества A попарно не пересекаются и в объединении дают A. $\blacksquare$

Пример. Связными компонентами множества $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ в $\mathbb{R}$ являются отрезки $[0, 1]$ и $[2, 3]$.

13. Для мультинормированного пространства $(E, (\| \|_i))$ была определена связность двух видов — линейная и топологическая.

Лемма. *Каждая ломаная в мультинормированном пространстве топологически связна.*

$\square$ Рассмотрим ломаную $L(a, b) = \cup[a(i), b(i)]$ $(1 \leq i \leq n)$, соединяющую точки $a, b \in E$. Если отрезки $[a(i), b(i)]$ топологически связны, то из равенств $b(i) = a(i{+}1)$ по предложению п. 11 следует топологическая связность объединений $[a(i), b(i)] \cup [a(i{+}1), b(i{+}1)]$ и по индукции — топологическая связность всей ломаной $L(a, b)$.

Докажем топологическую связность произвольного отрезка $[a, b] = \{x = (1{-}t)a{+}tb \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq E$. Предположим противное и возьмем открытые множества $U, V \subseteq E$, разбивающие $[a, b]$.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon t \to (1{-}t)a{+}tb$ $(0 \leq t \leq 1)$, число $s = \sup\{t : \varphi[0, 1] \subseteq U\} \in [0, 1]$ и точку $x = \varphi(s) \in [a, b]$. Предположим, что $x \in U$. Так как U открыто, то тогда $B(x, r) \subseteq U$ при некоторых норме и радиусе $r > 0$. Следовательно, $y = \varphi(t) \in U$ при всех $t \in [s - \delta, s + \delta]$ для некоторого $\delta > 0$. Это противоречит определению s. Предположение $x \in V$ тоже приводит к противоречию с определением s. В любом случае предположение о несвязности отрезка $[a, b]$ приводит к противоречию. ■

Следствие. *Каждое линейно связное множество топологически связно.*

□ Любые две точки линейно связного множества соединяются некоторой содержащейся в нем ломаной. По лемме она топологически связна. По критерию п. 11 отсюда следует топологическая связность всего множества. ■

Предложение. *Открытое множество в мультинормированном пространстве топологически связно ессли оно линейно связно.*

□ Утверждение *если* вытекает из следствия леммы. Докажем *только если.* Рассмотрим открытое топологически связное множество $C \subseteq E$. Предположим, что C не линейно связно и возьмем точки $a, b \in C$, не соединяемые никакой ломаной, содержащейся в C. Пусть A — линейно связная компонента точки a и $B = C \setminus A$ — ее дополнение в C. Так как $a \in A$ и $b \in B$, то $A \neq O$ и $B \neq O$. Кроме того, $A \cup B = C$ и $AB = O$. Вместе с тем множества A и B открыты. Действительно, пусть $x \in A$. Тогда $B(x, r) \subseteq C$ при некоторых норме и радиусе $r > 0$, так как множество C открыто. А так как a, x соединяются некоторой ломаной в C, то и любая точка шара $B(x, r)$ соединяется через x с точкой a некоторой ломаной в C. Значит, $B(x, r) \subseteq A$ и множество A открыто. Аналогично, если $x \in B$, то $B(x, r) \subseteq B$, так как из $y \in AB(x, r)$ следует $x \in A$. Открытые множества A и B разбивают C, что противоречит его топологической связности. ■

Примеры. 1) Открытое кольцо $C = \{(x, y) : 0 < \alpha < x^2 + y^2 < \beta\}$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ линейно и топологически связно. 2) Окружность $S(0, r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ в $\mathbb{R}^2$ топологически связна, но линейно несвязна.

14. Топологическое пространство, в котором каждая точка обладает некоторой компактной окрестностью, называется *локально компактным.* Каждое компактное пространство локально компактно. Класс локально компактных пространств существенно шире класса компактных.

Пример. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ локально компактно, но не компактно.

Обычно рассматриваются отделимые компактные и локально компактные пространства.

Лемма. *Отделимое компактное пространство регулярно.*

□ Пусть $(E, \mathscr{U})$ — отделимое компактное пространство. В отделимом пространстве пересечение всех замкнутых окрестностей точки $x \in E$ равно $\{x\}$, так как каждая точка $y \in E$, $y \neq x$, принадлежит внешности некоторой открытой окрестности U точки x и, значит, внешности замкнутой окрестности $\bar{U}$ точки x. Предположим, что пространство $(E, \mathscr{U})$ не регулярно и существуют точка $a \in E$ и ее окрестность $A \in \mathscr{U}$ такие, что $A^c\bar{U} \neq O$ для каждой окрестности $U \in \mathscr{U}$ точки a. Так как пересечение каждого конечного семейства замкнутых окрестностей точки a есть замкнутая окрестность точки a, то семейство множеств $A^c\bar{U}$ центрировано. А так как множество A открыто, то эти множества замкнуты. Вместе с тем их пересечение пусто, потому что пересечение всех $\bar{U}$ равно $a \in A$. Это противоречит компактности E. ■

Предложение. *Отделимое локально компактное пространство регулярно.*

□ Рассмотрим отделимое локально компактное пространство $(E, \mathscr{U})$, произвольную точку $x \in E$ и ее компактную окрестность $C \subseteq E$, существование которой предполагается. Пространство $(C, C\mathscr{U})$ компактно и по лемме регулярно. Так как $(E, \mathscr{U})$ отделимо, то $C = \bar{C}$ и множества, замкнутые в $(C, C\mathscr{U})$, замкнуты и в $(E, \mathscr{U})$. Поэтому из регулярности $(C, C\mathscr{U})$ следует регулярность $(E, \mathscr{U})$. ■

Следствие. *В отделимом локально компактном пространстве фильтр окрестностей каждой точки имеет базу из компактных окрестностей этой точки.*

□ Так как пересечение $C\bar{U}$ каждой замкнутой окрестности $\bar{U}$ точки x с ее компактной окрестностью C компактно, а замкнутые окрестности по доказанному предложению составляют базу фильтра окрестностей точки x, то и компактные окрестности образуют его базу. ■

Замечание. Для каждого отделимого локально компактного пространства существуют мультиметрики, порождающие его топологию [13, гл. II, § 4, следствие 2 теоремы 1].

3.1.2. Направленные множества

Направленные множества служат областями задания функций, для которых определяется предел. Направление описывается специальным порядком.

1. *Направлением* для множества X называется порядок для X, обладающий свойством: *для каждых $x, y \in X$ существует следующий за ними $z \in X$.* Порядок, обладающий этим свойством, называется также *решетчатым* или *фильтрующимся.* Вместо *направление* часто говорят *сеть.* Все эти термины дают наглядное представление о свойствах направления.

Множество X и направление $\succeq$ для него образуют *направленное множество* $(X, \succeq)$. Вместо $(X, \succeq)$ часто пишут X. Направленное множество, в котором есть последний элемент, и направление для него называются *вырожденными.*

2. Рассмотрим примеры направленных множеств.

Пример 1. $(\mathbb{N}, \geq)$ — множество натуральных чисел с естественным порядком. Направление $\geq$ для $\mathbb{N}$ обозначается $n \to \infty$. Добавив к натуральным числам ∞, можно получить вырожденное направленное множество $(\bar{\mathbb{N}}, \geq)$, где $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\infty > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. $(\mathbb{R}, \geq)$ — множество вещественных чисел с естественным порядком. Направление $\geq$ для $\mathbb{R}$ обозначается $x \to \infty$, а противоположное направление $\leq$ для $\mathbb{R}$ обозначается $x \to -\infty$. Для расширенной прямой $\bar{\mathbb{R}}$ эти направления вырожденные: $-\infty < x < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а $\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Пример 3. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $y \succeq x$ означает $|y - a| \leq |x - a|$: *следующей* является точка, которая *ближе* к данной точке a. Это направление для $\mathbb{R}$ обозначается $x \to a$. Чтобы сделать его невырожденным, точку a исключают. В этом случае пишут $x \to a$, $x \neq a$. Часто $x \neq a$ явно не выписывается, а только подразумевается.

Пример 4. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \bar{A}$. Как в примере 3, отношение $y \succeq x$ означает $|y - a| \leq |x - a|$, но определяется только для точек $x, y \in A$. Такое направление обозначается $x \to a$, $x \in A$, и описывается словами: *x стремится к точке a по множеству A.* Его можно рассматривать как направление для $\mathbb{R}$ и как направление для A. Если $a \notin A$, то направление $x \to a$, $x \in A$, невырожденное.

При $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ направление $x \to a$, $x \in A$, превращается в $x \to a$, $x \neq a$. При $A =]-\infty, a[$ и $A =]a, +\infty[$ получаются соответственно направления $x \to a-$ и $x \to a+$ или $x \uparrow a$ и $x \downarrow a$. Эти направления описываются словами: *x стремится к точке a слева* и *x стремится к точке a справа.*

Пример 5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$ и $y \succeq x$ означает $d(y, a) \leq d(x, a)$: *следующей* является точка, которая *ближе* к данной точке a. Это направление для X обозначается $x \to a$, $x \in A$, и описывается словами: *x стремится к точке a по множеству A*. Если $a \notin A$, то направление $x \to a$, $x \in A$, невырожденное. Для нормированного пространства $(X, \|\,\|)$ близость к точке a измеряется с помощью выбранной нормы: $y \succeq x$ означает $\|y - a\| \leq \|x - a\|$.

Пример 6. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$. Тогда $y \succeq x$ означает $|y - a| \leq |x - a|$. Геометрически бóльшая близость к a означает попадание в круг с центром в точке a, имеющий меньший радиус. Выбор различных множеств $A \subseteq \mathbb{C}$ позволяет получать различные направления $x \to a$, $x \in A$, в частности, по нужному лучу или сектору с вершиной в точке a. Можно выбрать и более сложные направления (например, по данной кривой).

Пример 7. Каждый линейный порядок является направлением.

Пример 8. Рассмотрим множество X и класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(X)$ всех конечных частей X. Порядок по включению $\supseteq$ является направлением для $\mathscr{K}$: за каждыми множествами $K, L \in \mathscr{K}$ следует их объединение $K \cup L = M \in \mathscr{K}$. Будем обозначать это направление $K \to X$. Если множество X конечно, то это направление вырожденное.

Пример 9. Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$, конечное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ и составляющее интервал дизъюнктивное семейство $\mathscr{A}$ интервалов $A(x) = [a(x), b(x)[$ таких, что $x \in A(x)$ при каждом $x \in X$. Назовем $\mathscr{X} = (X, \mathscr{A})$ ***римановой парой*** для $\mathbb{R}$. Направление $X \to \mathbb{R}$ для класса $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathbb{R})$ определяет направление для множества $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathbb{R})$ римановых пар: $\mathscr{Y} \succeq \mathscr{X}$ означает, что $Y \supseteq X$ для пары $\mathscr{Y} = (Y, \mathscr{B})$. Семейства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ интервалов при этом не учитываются. За каждыми парами $\mathscr{X} = (X, \mathscr{A})$, $\mathscr{Y} = (Y, \mathscr{B})$ следует пара $\mathscr{Z} = (X \cup Y, \mathrm{C})$ с любым допустимым семейством интервалов. Будем такое направление для $\mathscr{R}$ также обозначать $X \to \mathbb{R}$.

Пример 10. Точно так же определяется множество $\mathscr{R}^m = \mathscr{R}(\mathbb{R}^m)$ римановых пар для пространства $\mathbb{R}^m$ и направление $X \to \mathbb{R}^m$ для $\mathbb{R}^m$. В этом случае вместо обычных рассматриваются m-мерные интервалы $[a, b[= [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_m, b_m[\subseteq \mathbb{R}^m$.

3. Декартово произведение $(X_1 \times X_2, \succeq)$ направленных множеств $(X_1, \succeq)$, $(X_2, \succeq)$ с координатным порядком является направленным множеством. Решетчатость порядка для $X_1 \times X_2$ легко проверить: за каждыми парами (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ следует пара элементов $(z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$, составленная из элементов $z_1 \in X_1$ и $z_2 \in X_2$, следующими за $x_1, y_1 \in X_1$ и $x_2, y_2 \in X_2$.

Точно так же определяется декартово произведение произвольного семейства направленных множеств $(X_i, \succeq)$: за каждыми семействами $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ следует семейство $z = (z_i)$, составленное из элементов $z_i \in X_i$, следующими за $x_i, y_i \in X_i$.

Примеры. 1) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \geq) = (\mathbb{N}, \geq) \times (\mathbb{N}, \geq)$ с направлением $(m, n) \to (\infty, \infty)$ или $m \to \infty$, $n \to \infty$. 2) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \geq) = (\mathbb{R}, \geq) \times (\mathbb{R}, \geq)$, $(\mathbb{R}, \geq) \times (\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq) \times (\mathbb{R}, \geq)$, $(\mathbb{R}, \leq) \times (\mathbb{R}, \leq)$ с направлениями соответственно $(x, y) \to (+\infty, +\infty)$, $(+\infty, -\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, -\infty)$.

4. Рассмотрим направленное множество $(X, \succeq)$ и множество F. Функция $f\colon X \to F$ на направленном множестве $(X, \succeq)$ коротко называется *направленностью в* F. При $(X, \succeq) = (\mathbb{N}, \geq)$ направленность является последовательностью. Направленности называют также *обобщенными последовательностями*.

Рассмотрим направленные множества $(T, \succeq)$, $(X, \succeq)$ и отображение $r\colon T \to X$. Будем говорить, что r *согласовано с направлениями* для T и X, если для каждого $x \in X$ существует $t(x) \in T$ такой, что $r(t) \succeq x$ для всех $t \succeq t(x)$.

Примеры. 1) $(T, \succeq) = (2\mathbb{N}, \geq)$, $(X, \succeq) = (\mathbb{N}, \geq)$ и $r(2n) = 2n$.

2) $(T, \succeq) = (]0, 1[, \leq)$, $(X, \succeq) = (]1, \infty[, \geq)$ и $r(t) = 1/t$.

Композиция $g = f \circ r\colon T \to F$ направленности $f\colon X \to F$ и согласованным с направлениями для T и X отображением $r\colon T \to X$ называется *поднаправленностью* f, порождаемой r. Можно сказать, что поднаправленности получаются из данной направленности с помощью согласованных с направлениями замен переменной.

Примеры. 1) Пусть $(T, \succeq) = (2\mathbb{N}, \geq)$, $(X, \succeq) = (\mathbb{N}, \geq)$ и $r(2n) = 2n$, $F = \mathbb{R}$ и $f(n) = 1/n$. Тогда $g(2n) = f(r(2n)) = 1/2n$. Если $r(2n) = n$, то $g(2n) = 1/n$. Если $T = \mathbb{N}$ и $r(n) = 2n$, то $g(n) = 1/2n$.

2) Пусть $(T, \succeq) = (X, \succeq) = (\mathbb{N}, \geq)$, $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *строго возрастает* и $f\colon X \to F$. Тогда $g = f \circ r\colon \mathbb{N} \to F$ называется *подпоследовательностью* f. В первом примере подпоследовательность получается при $r(n) = 2n$.

3) Будем говорить, что множество $T \subseteq X$ *содержит произвольно далекие элементы*, если тождественное вложение $r\colon T \to X$ согласуется с направлением для X: для каждого $x \in X$ существует $t(x) \in T$, следующий за x (по транзитивности из $t \succeq t(x)$ и $t(x) \succeq x$ вытекает, что $t \succeq x$).

Всякое сужение направленности $f\colon X \to F$ на множество $T \subset X$ с произвольно далекими элементами является поднаправленностью f. Если $X = \mathbb{N}$, то такие сужения часто тоже называют подпоследовательностями. В первом примере такая подпоследовательность получается при $T = 2\mathbb{N}$ и $r(2n) = 2n$.

4) Пусть $(T, \succeq) = (]0, 1[, \leq)$, $(X, \succeq) = (]1, \infty[, \geq)$ и $r(t) = 1/t$, $F = \mathbb{R}$ и $f(x) = x^2$. Тогда $g = f \circ r\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$, $g(t) = 1/t^2$ $(0 < t < 1)$. Здесь область определения поднаправленности g не пересекается с областью определения направленности f.

5) $(T, \succeq) = (\mathbb{R}, \geq)$, $(X, \succeq) = (]-1, 1[, \geq)$, $r(t) = t/(1 + |t|)$, $F = \mathbb{R}$ и $f(x) = x^2$. Тогда $g = f \circ r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^2/(1 + |t|)^2$ $(-\infty < t < \infty)$. Здесь область определения поднаправленности g существенно шире области определения направленности f.

5. Примеры показывают, что понятие поднаправленности чрезвычайно общее. Поэтому целесообразно выделять специальные классы поднаправленностей. Назовем *подпоследовательностью* направленности $f\colon X \to F$ каждую ее поднаправленность

$g = f \circ r \colon T \to F$, определенную на множестве $T = \mathbb{N}$ натуральных чисел с обычным порядком $\geq$. Не у всех направленностей существуют подпоследовательности. Направленности, у которых есть подпоследовательности, а также множества, на которых такие направленности определены, и направления для них будем называть *секвенцируемыми*. Секвенцируемость направленного множества $(X, \succeq)$ означает, что при некотором отображении $r \colon \mathbb{N} \to X$ для каждого элемента $x \in X$ существует номер $n(x) \in \mathbb{N}$ такой, что $r(n) \succeq x$ для всех $n \geq n(x)$. То есть X должно содержать счетное множество D с произвольно далекими элементами. Секвенцируемость является аналогом архимедовости.

Примеры. 1) Каждая последовательность является секвенцируемой направленностью. 2) Направленные множества в примерах 2–6 п. 2 секвенцируемы. 3) Линейно упорядоченное множество $(\mathbb{R}, \geq)$ секвенцируемо благодаря теореме Архимеда, которая эквивалентна утверждению, что для каждого вещественного числа существует натуральное, которое больше него. 4) В примерах 9 и 10 п. 2 для римановых пар направление $X \to \mathbb{R}$ не секвенцируемо.

Упражнение. Доказать несеквенцируемость направления по включению для римановых пар.

6. Назовем множество $S(a) = [a, \to [\, = \{x \mid x \succeq a\} \subseteq X$ *сечением направленного множества* $(X, \succeq)$, определяемым элементом $a \in X$, или, коротко, *a-сечением множества* X. (Предполагается, что множество X не пустое.) Если X линейно упорядочено, то это интервал с началом a. Класс $\{S(a) \mid a \in X\}$ сечений направленного множества X сильно центрирован. В самом деле, так как $X \neq O$, то этот класс не пуст и не содержит пустого множества. А так как для каждых a, b из X существует следующий за ними элемент c, то $S(c) \subseteq S(a) \cap S(b)$. Порождаемый классом сечений фильтр $\mathscr{S} = \mathscr{S}(X)$ для X называется *фильтром сечений направленного множества* X. По определению, каждое множество $S \in \mathscr{S}$ содержит некоторое сечение $S(a) \subseteq X$.

Пример. Класс $\{[n, \to [\, : n \in \mathbb{N}\}$ порождает *фильтр Фреше* для $\mathbb{N}$. Его составляют части $\mathbb{N}$, имеющие конечные дополнения в $\mathbb{N}$.

Назовем множество $fS(a) = f[a, \to[\, = \{f(x) \mid x \succeq a\} \subseteq F$ *сечением направленности* $f \colon X \to F$, определяемым элементом $a \in X$, или, коротко, *a-сечением направленности* f. Класс $\{fS(a) \mid a \in X\}$ сечений направленностей f сильно центрирован вместе с $\{S(a) \mid a \in X\}$. Порождаемый классом $\{fS(a) \mid a \in X\}$ фильтр $f\mathscr{S} = f\mathscr{S}(X)$ для F называется *фильтром сечений направленности* f.

Пусть $g = f \circ r\colon T \to F$ — поднаправленность, определенная на множестве $(T, \succeq)$ с помощью согласованной с направлениями замены $r\colon T \to X$.

Лемма 1. *Фильтр сечений направленности содержится в фильтре сечений каждой ее поднаправленности.*

$\square$ Из определений вытекает, что для каждого $a \in X$ существует $t(a) \in T$ такой, что $rS(t(a)) \subseteq fS(a)$. Значит, $gS(t(a)) \subseteq fS(a)$ и $fS(a) \in gS(T)$. Так как класс $\{fS(a) \mid a \in X\}$ порождает фильтр $f\mathscr{S}(X)$, то отсюда следует, что $f\mathscr{S}(X) \subseteq g\mathscr{S}(T)$. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать, что фильтр сечений секвенцируемой направленности имеет счетную базу.

Назовем направленность $f\colon X \to F$ *элементарной*, если ее фильтр сечений $f\mathscr{S}(X)$ простой. Это значит, что для каждого конечного покрытия $(Y(k))$ образа fX элементарной направленности $f\colon X \to F$ существуют индекс $k(0)$ и элемент $x(0) \in X$, при которых $fS(x(0)) \subseteq Y(k(0))$. В частности, для каждого $Y \subseteq F$ существует $x(0) \in X$, при котором $fS(x(0)) \subseteq Y$ либо $fS(x(0)) \subseteq Y^c = F \setminus Y$.

Пример. Каждая постоянная направленность элементарная.

По теореме 3.1.1,6 простота фильтра эквивалентна его максимальности. Следовательно, если направленность f элементарная, то по доказанной лемме фильтр сечений каждой ее поднаправленности g равен $f\mathscr{S}(X)$ и тоже простой. Значит, поднаправленности элементарной направленности также элементарны.

Упражнение. Вывести это непосредственно из определений.

Лемма 2. *Каждый фильтр, которому принадлежат все сечения направленности, является фильтром сечений некоторой ее поднаправленности.*

$\square$ Рассмотрим фильтр $\mathscr{G}$ для F, которому принадлежат все сечения $fS(a)$ направленности $f\colon X \to F$, и множество $T = \{(x, Y) \mid Y \in \mathscr{G},\ f(x) \in Y\} \subseteq X \times \mathscr{G}$. Порядок $(x, Y) \succeq (u, Z) \Leftrightarrow x \succeq u,\ Y \subseteq Z$ определяет направление для T. В самом деле, пусть $t(a) = (a, U)$, $t(b) = (b, V) \in T$ и $x \in X$ следует за a и b. По условию $W = fS(x) \cap U \cap V \in \mathscr{G}$. Возьмем $c \in X$, $c \succeq x$, для которого $f(c) \in W$ и, значит, $t(c) = (c, W) \in T$. Так как $c \succeq x \succeq a$, $c \succeq x \succeq b$ и $W \subseteq U$, $W \subseteq V$, то $t(c) \succeq t(a)$ и $t(c) \succeq t(b)$.

Отображение $r\colon T \to X$, проектирующее пару $t = (x, Y) \in T$ на элемент $r(t) = x \in X$, согласовано с направлениями для T и X.

Действительно, для каждого элемента $u \in X$ существует пара $t(u) = (u, S(u)) \in T$ такая, что $r(t) = x \succeq u$ для всех $t = (x, Y) \in T$, $t \succeq t(u)$: по определению направления T из $(x, Y) \succeq (u, S(u))$ следует $x \succeq u$. Значит, $g = f \circ r \colon T \to F$ есть поднаправленность f.

Рассмотрим произвольные $a \in X$ и $Y \in \mathscr{G}$. По условию $Z = fS(a) \cap Y \in \mathscr{G}$. Возьмем $u \in X$, $u \succeq a$, для которого $f(u) \in Z$ и $t(u) = (u, Z) \in T$. Из определений следует, что $g(t) = f(r(t)) = f(x) \in Y$ для каждого $t = (x, W) \in T$, $t \succeq t(u)$, так как $x \succeq u \succeq a$ и $f(x) \in W \subseteq Z \subseteq Y$. Значит, $gS(t(u)) \subseteq Y$ и $\mathscr{G}$ является фильтром сечений направленности g. ■

Из леммы 2 следует

Предложение. *Для каждой направленности существует элементарная поднаправленность.*

□ Фильтр сечений каждой поднаправленности f содержится в некотором максимальном фильтре $\mathscr{G}$. Фильтр $\mathscr{G}$ простой и является фильтром сечений поднаправленности g направленности f. По определению, g есть элементарная направленность. ■

Пример. Для последовательности $f(n) = (-1)^n$ существуют элементарные подпоследовательности $g(n) = 1$, $h(n) = -1$ $(n \in \mathbb{N})$.

7. Сильная центрируемость класса $\mathscr{B}$ частей множества E эквивалентна заданию направления $\subseteq$ в $\mathscr{B}$: для каждых $X, Y \in \mathscr{B}$ существует $Z \in \mathscr{B}$ такой, что $Z \subseteq X$, $Z \subseteq Y$. Каждая выбирающая функция $\xi \colon \mathscr{B} \to E$ со значениями $\xi(X) \in X$ определяет направление $\succeq (\xi)$ для $\xi(\mathscr{B}) \subseteq E$: отношение $x \succeq (\xi) y$ для $x = \xi(X)$, $y = \xi(Y)$ равносильно $X \subseteq Y$. Назовем семейство $(\succeq (\xi))$ *мультинаправлением*, порожденным классом $\mathscr{B}$, или, коротко, *направлением* $\mathscr{B}$ для E. Пару $(E, \mathscr{B})$ будем называть *направленным множеством*, как и $(E, \succeq)$.

Пример 1. Класс $\mathscr{B} = \{S(x) \mid x \in E\}$ сечений направленного множества $(E, \succeq)$ порождает мультинаправление для E. Исходное направление $\succeq$ определяется выбирающей функцией со значениями $\xi(S(x)) = x$. Направленные множества $(E, \succeq)$ и $(E, \mathscr{B})$ в этом случае отождествляются.

Пример 2. Рассмотрим топологическое пространство $(E, \mathscr{U})$ и множество $A \subseteq E$. Если $A \cap U \neq O$ для каждой окрестности U точки a, то класс $A \cap \mathscr{U}(a) = \{A \cap U \mid U \in \mathscr{U}(a)\}$ сильно центрирован и порождает направление $x \to a$, $x \in A$, для E. В частности, при $A = E \setminus \{a\}$ получается направление $x \to a$, $x \neq a$. Эти мультинаправления часто встречаются.

3.1.3. Сходимость

Сходимость для направленностей определяется по аналогии со стандартным определением сходимости для последовательностей.

1. Рассмотрим направленное множество $(X, \succeq)$, топологическое пространство $(F, \mathscr{V})$, функцию $f\colon X \to F$ и точку $c \in F$. Говорят, что f *сходится к c* по $\succeq$, и пишут $f \to c$, если для каждой окрестности $V \in \mathscr{V}(c)$ существует элемент $x(V) \in X$ такой, что $f(x) \in V$ для всех $x \succeq x(V)$. Описательно сходимость функции f к точке c по данному направлению означает, что значения $f(x)$ для всех достаточно *продвинутых значений* аргумента x произвольно близки c. Ясно, что *продвинутость* зависит от выбора направления. В соответствии с интуицией будем для некоторых направлений продвинутые значения называть *далекими* или, наоборот, *близкими*.

Вместо $f \to c$ пишут также $f(x) \to c$. При более подробной записи указывают направление: например, $f(n) \to c$ $(n \to \infty)$ или $f(x) \to c$ $(x \to a)$. Точку c, к которой сходится по данному направлению функция f, называют ее *пределом* по этому направлению и пишут $\lim f = c$ или $\lim f(x) = c$. При более подробной записи указывают направление: например, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = c$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Иногда вместо стрелки $\to$ удобно использовать приближенное равенство $\approx$ и писать, например, $f(n) \approx c$ $(n \approx \infty)$ или $f(x) \approx c$ $(x \approx a)$. При теоретических рассуждениях удобны сокращенные обозначения, а при вычислениях — подробные.

Если направление $x \to a$ является вырожденным, то $f(x) \to f(a)$ для всякой $f\colon X \to F$. Поэтому обычно точка a исключается и рассматривается направление $x \to a$, $x \neq a$.

Все функции $f\colon X \to F$ делятся по данному направлению на *сходящиеся* к некоторой точке и *расходящиеся* (не сходящиеся по данному направлению ни к одной точке в F).

Если пространство F *отделимое*, то каждая данная направленность $f\colon X \to F$ не может сходиться к различным точкам в F.

Упражнение. Доказать это утверждение, сформулировать и проверить обратное.

Пример 1. Направленность $f\colon X \to F$ в мультиметрическом пространстве $(F, (\Delta_i))$ сходится к точке $c \in F$ ессли $\Delta_i(f, c) \to 0$ для каждого индекса i. Сходимость по мультиметрике означает сходимость по каждой ее метрике. В частности, сходимость по мультинорме означает сходимость по каждой составляющей ее норме.

Пример 2. Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, E)$ функций $f\colon X \to E$, отображающих множество X в отделимое мультинормированное пространство $(\mathbb{K}, E)$, и класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(X)$ конечных частей X с направлением $\supseteq$. Каждая $f \in \mathscr{F}$ определяет *направленность* $S(f)\colon \mathscr{K} \to E$ *конечных сумм* $S(f, K) = \sum\limits_{x \in K} f(x)$. Ее предел $\sum\limits_{x\in X} f(x) = \lim\limits_{K \to X} \sum\limits_{x \in K} f(x)$ называется *суммой* (*семейства*) f. Когда множество X известно, эту сумму обозначают $\sum f$. Семейства f, для которых сумма $\sum f$ существует, называются *суммируемыми.* Они образуют подпространство $\mathscr{S} = \mathscr{S}(X, E)$ пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, E)$. Легко проверить, что оператор $\sum\colon f \to \sum f$ $(f \in \mathscr{S})$ линеен. Он является композицией операторов $S\colon f \to S(f)$ и $\lim : S(f) \to \sum f$.

Упражнение. Доказать линейность операторов S, $\lim$, $\sum$.

Замечание. Если множество X конечно, то данное определение суммы совпадает с обычным вследствие вырожденности направления $K \to X$.

Пример 3. Рассмотрим отделимое мультинормированное пространство $(\mathbb{K}, E)$, а также векторную функцию $f\colon \mathbb{R}^m \to E$ и скалярную функцию $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}$. Для каждой римановой пары $\mathscr{X} = (X, \mathscr{A}) \in \mathbb{R}^m$ определены скаляры $\Delta g(x) = g(b(x)) - g(a(x))$ и вектор

$$S(f, g, X) = \sum f(x) \cdot \Delta\, g(x) \quad (x \in X).$$

Назовем направленность $S(f, g)\colon X \to S(f, g, X)$ *интегральной суммой* для f, g, а предел

$$\int f\, dg = \lim S(f, g, X) \quad (X \to \mathbb{R}^m)$$

— *интегралом* f по g.

Функцию f, для которой такой предел существует, будем называть *интегрируемой* по g. Множество $\mathscr{I}(g)$ таких функций образует подпространство векторного пространства $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}^m, E)$. Легко проверить, что оператор $\int\colon \mathscr{I}(g) \to E$ линеен: $\int \in \mathscr{L}(\mathscr{I}(g), E)$. Он является композицией операторов $S\colon f \to S(f, g)$ и $\lim\colon S(f, g) \to \int f\, dg$.

Упражнение. Доказать линейность операторов S, $\lim$ и $\int$.

Замечание. Можно точно так же определить интеграл скалярной функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}$ по векторной $g\colon \mathbb{R}^m \to E$. И векторной функции $f\colon \mathbb{R}^m \to F$ по векторной $g\colon \mathbb{R}^m \to G$, если определено произведение $F \times G \to H$ для векторных пространств F, G и отделимого мультинормированного пространства H с общим скалярным полем $\mathbb{K}$. В любом случае интегральными будут суммы взвешенных с помощью g значений f, а интегралом — предел интегральных сумм при неограниченном увеличении числа слагаемых. В [149, гл. 5, п. 3] доказывается интегрируемость по Риману непрерывного отображения отрезка вещественной прямой в банахово пространство.

Содержательные теории получаются при различных сужениях классов рассматриваемых функций. Элементы теории интегралов Римана —Стилтьеса для случая $m = 1$ изложены в [116, гл. 3, § 1]. Обобщенному интегралу Римана посвящена книга [139]. Там рассматриваются и интегралы стилтьесовского типа.

2. Рассмотрим описанное в 3.1.2, 7 направленное множество $(E, \mathscr{B})$, топологическое пространство $(F, \mathscr{V})$, функцию $f\colon E \to F$ и точку $c \in F$. Функцию f будем называть *направленностью в* F. Говорят, что f *сходится к* c и пишут $f \to c$ (по $\mathscr{B}$), если для каждой $V \in \mathscr{V}$ существует $B \in \mathscr{B}$ такое, что $f(B) \subseteq V$. На такую сходимость переносятся термины и обозначения п. 1. Вырожденность направления $x \to a$ в этом случае означает, что $\{a\} \in \mathscr{B}$.

Семейство выбирающих функций $\xi\colon \mathscr{B} \to E$ со значениями $\xi(X) \in X$ $(X \in \mathscr{B})$ и функция $f\colon E \to F$ порождают семейство направленностей $f \circ \xi\colon \mathscr{B} \to F$. Если $f \to c$, то $f \circ \xi \to c$ для каждой ξ, причем равномерно: для каждой $V \in \mathscr{V}(c)$ существует $B \in \mathscr{B}$ такое, что $f(\xi(X)) \in V$ для всех $X \subseteq B$ из $\mathscr{B}$ и всех ξ. Так как для каждого $x \in B$ найдется ξ со значениями $\xi(B) = x$, то условие $f(\xi(B)) \in V$ при всех ξ равносильно $f(B) \subseteq V$. Поэтому описанная равномерная сходимость $f \circ \xi \to c$ эквивалентна $f \to c$ по $\mathscr{B}$.

Пример 1. Если $\mathscr{B} = \{S(x) \mid x \in E\}$ — класс сечений направленного множества $(E, \succeq)$, то сходимости по $\mathscr{B}$ и по $\succeq$ эквивалентны.

Пример 2. Рассмотрим топологические пространства $(E, \mathscr{U})$ и $(F, \mathscr{V})$, точки $a \in E$ и $c \in F$, множество $A \subseteq E$, пересекающееся с каждой окрестностью точки a, и отображение $f\colon E \to F$. Сходимость $f \to c$ $(x \to a,\ x \in A)$ означает, что для каждой $V \in \mathscr{V}(c)$ существует $U \in \mathscr{U}(a)$, при которой $f(A \cap U) \subseteq V$.

Упражнение. Доказать, что $f \to c(\mathscr{B})$ ессли порожденный классом $f(\mathscr{B}) = \{f(X) \mid X \in \mathscr{B}\}$ фильтр содержит фильтр окрестностей точки c.

Замечание. С топологическим пространством $(F, \mathscr{V})$ можно связать топологическое пространство $(\widehat{F}, \widehat{\mathscr{V}})$, где $\widehat{F} = \mathscr{P}(F)$ и топология $\widehat{\mathscr{V}}$ имеет базу из классов $\widehat{V} = \mathscr{P}(V)$ $(V \in \mathscr{V})$. (Так как $\mathscr{P}(U) \cap \mathscr{P}(V) = \mathscr{P}(U \cap V)$ и $U \cap V \in \mathscr{V}$ при $U, V \in \mathscr{V}$ и $F \in \mathscr{V}$, то $\{\widehat{V} \mid V \in \mathscr{V}\}$ является базой топологии для $\widehat{F}$; см. [39, гл. 1, п. 11].) Функция $f\colon E \to F$ на направленном множестве $(E, \mathscr{B})$ порождает функцию $\hat{f}\colon \widehat{E} \to \widehat{F}$ со значениями $\hat{f}(X) = f(X)$ $(X \subseteq E)$, определенную на $\widehat{E} = \mathscr{P}(E)$. Ее сужение $\hat{f}\colon \mathscr{B} \to \widehat{F}$ определено на направленном множестве $(\mathscr{B}, \subseteq)$. Сходимость $\hat{f} \to \{c\}$ $(c \in F)$ по определению означает, что для каждой $\widehat{V} \in \widehat{\mathscr{V}}(\{c\})$ существует $B \in \mathscr{B}$, при котором $\hat{f}(X) \in \widehat{V}$ $(x \subseteq B,\ X \in \mathscr{B})$. То есть для каждой открытой $V \in \mathscr{V}(c)$ существует $B \in \mathscr{B}$, при котором $f(B) \subseteq V$. Поэтому $\hat{f} \to \{c\}$ эквивалентно $f \to c$. Сходимость по направлению $\mathscr{B}$ для f сводится к сходимости по направлению $\subseteq$ для $\hat{f}$.

Сходимость по базе фильтра (мультинаправлению) самая общая, но сравнительно сложно определяется. Сходимость по направлению определяется просто, но не охватывает все важные случаи. Чтобы охватить их, приходится рассматривать равномерную сходимость или переходить к образам базовых множеств. Это позволяет свести сходимость по базе фильтра к сходимости по направлению. Обратный переход сразу получается с помощью фильтра сечений.

3. Если направленность $f\colon X \to F$ сходится к точке $c \in F$, то каждая ее поднаправленность $g = f \circ r\colon T \to F$ тоже сходится к c. Поэтому если направленность f в отделимом пространстве F имеет две поднаправленности $g = f \circ r$ и $h = f \circ s$, сходящиеся к разным точкам, то f не сходится ни к какой точке (расходится).

Пример. Пусть в примере 2 п. 2 $\mathbb{R}^m = \mathbb{K} = E = \mathbb{R}$, $f = \operatorname{ind}\mathbb{Q}$ и $g(x) = 0$ $(x < 0)$, $= x$ $(0 \le x \le 1)$, $= 1$ $(x > 1)$. Тогда $S(f, g, U, \eta) = 0$, если все $\eta_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, и $S(f, g, T, \xi) = 1$, если все $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Следовательно, f не интегрируема по g.

Критерий Гейне. *Секвенцируемая направленность в отделимом пространстве сходится ессли каждая ее подпоследовательность сходится.*

□ Необходимость сформулированного условия следует из определений. Докажем его достаточность.

Пусть $(F, \mathscr{V})$ — отделимое пространство и $f\colon X \to F$ — секвенцируемая направленность. Заметим, что если все подпоследовательности $f \circ r\colon \mathbb{N} \to F$ сходятся, то они сходятся к одной и той же точке в F. В самом деле, если $f \circ r \to a$, $f \circ s \to b$ и $a \ne b$, то подпоследовательность $f \circ t$ со значениями $f(t(2m-1)) = f(r(m))$ и $f(t(2m)) = f(s(m))$ расходится. Рассмотрим общий предел $c \in F$ всех подпоследовательностей f и докажем, что $f \to c$.

Предположим противное: $f \nrightarrow c$. Тогда существует окрестность $V \in \mathscr{V}(c)$ точки c такая, что для каждого $x \in X$ есть

$y(x) \succeq x$, для которого $f(y(x)) \notin V$. Используя секвенцируемость направления $\succeq$ для X, возьмем последовательность с произвольно далекими элементами $x(n) \in X$. Положим $r(n) = y(x(n))$ $(n \in \mathbb{N})$. Из определений следует, что $f \circ r \colon \mathbb{N} \to F$ есть подпоследовательность f. Вместе с тем $f(r(n)) = f(y(x(n))) \notin V$ $(n \in \mathbb{N})$, и поэтому $f \circ r \nrightarrow c$, что противоречит предположению. ■

Пределы поднаправленностей называются *частичными пределами* или *предельными точками* направленности. Множество всех предельных точек называется *предельным множеством.* Если направленность в отделимом пространстве сходится, то ее предельное множество состоит из одной точки — предела этой направленности.

Упражнение. Доказать, что элементарная направленность, имеющая предельную точку, сходится к этой точке.

Пределы подпоследовательностей называются *секвенциальными частичными пределами* или *секвенциальными предельными точками* направленности. Множество всех секвенциальных предельных точек называется *секвенциальным предельным множеством.*

Упражнение. Привести примеры секвенцируемых направленностей, у которых секвенциальное предельное множество не равно предельному.

Рассмотрим предельное множество $\operatorname{Lim} f$ направленности $f \colon X \to F$ и пересечение $\cap\overline{fS(x)}$ замыканий его сечений $fS(x) = \{f(y) \mid y \succeq x\}$.

Лемма. $\operatorname{Lim} f = \cap\overline{fS(x)}$.

□ Пусть $c \in \cap\overline{fS(x)}$. Тогда $U \cap fS(x) \neq O$ для каждых $U \in \mathscr{V}(c)$, $x \in X$, и поэтому существует элемент $r(U, x) \succeq x$ такой, что $f(r(U,x)) \in V$ при $U \subseteq V \in \mathscr{V}(c)$, $x \in X$. Значит, $f \circ r \to c$.

Пусть $c \notin \cap\overline{fS(x)}$. Тогда $U_0 \cap fS(x_0) = O$ для некоторых $U_0 \in \mathscr{V}(c)$, $x_0 \in X$ и f не может иметь сходящуюся к c поднаправленность. ■

4. Среди равномерных пространств выделяются полные, в которых сходимость направленностей характеризуется критерием Коши.

Рассмотрим направленное множество $(X, \succeq)$, произведение $(X, \succeq) \times (X, \succeq) = (X \times X, \succeq)$ с координатным порядком и мультиметрическое пространство $(F, (\Delta_i))$. Каждая направленность $f\colon X \to F$ определяет семейство вещественных *двойных направленностей* $\Delta_i f\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\Delta_i f(x,y) = \Delta_i(f(x), f(y))$ $(x, y \in X)$. Будем говорить, что направленность f *сходится в себе*, и писать $f \to$, если $\Delta_i f \to 0$ для каждого индекса i.

Лемма. *Каждая сходящаяся к некоторой точке направленность сходится в себе.*

□ Это следует из неравенств

$$0 \le \Delta_i(f(x), f(y)) \le \Delta_i(f(x), c) + \Delta_i(c, f(y)) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

верных для каждых $\varepsilon > 0$, индекса i и элементов $x, y \succeq x(\varepsilon)$ при некотором $x(\varepsilon) \in X$. ■

Обратное не всегда верно.

Пример. Пусть $(X, \succeq) = (]0,1[, \ge)$, $F = X =]0,1[$ с обычной метрикой и $f(x) = x$ $(0 < x < 1)$. Тогда $\Delta(f(x), f(y)) = |x - y| \to 0$ при $x \to 1$, $y \to 1$ и $f \not\to c$ для любой точки $c \in F$.

Упражнения. 1) Доказать, что для сходящейся в себе направленности в отделимом равномерном пространстве существование единственной предельной точки является достаточным условием для сходимости к этой точке. 2) Доказать, что направленность в равномерном пространстве сходится в себе тогда и только тогда, когда квадрат ее фильтра сечений содержит фильтры окружений диагонали: $f \to \Leftrightarrow f\mathscr{S} \times f\mathscr{S} \supseteq \mathscr{W}$. Это значит, что фильтру сечений $f\mathscr{S}$ направленности f *принадлежат произвольно малые* множества: для каждого окружения $W \in \mathscr{W}$ существует сечение $S \in \mathscr{S}$ такое, что $fS \times fS \subseteq W$.

Равномерное пространство, в котором каждая сходящаяся в себе направленность сходится к некоторой точке, называется *полным.* Равномерное пространство, в котором каждая сходящаяся в себе последовательность сходится к некоторой точке, называется *секвенциально полным.*

Упражнения. 1) Доказать, что секвенциально полное метрическое пространство полно. 2) Привести пример неполного секвенциально полного равномерного пространства. 3) Доказать полноту конечномерного комплексного нормированного пространства.

Установить существование предела направленности в полном пространстве часто помогает

Критерий Коши. *Направленность в полном метрическом пространстве сходится к некоторой точке ессли эта направленность сходится в себе.*

□ Необходимость сформулированного условия следует из леммы, а достаточность — из определения полного пространства. ■

Пример 1. Семейство векторов $f(x) \in E$ $(x \in X)$ в полном мультиметрическом пространстве $(E, \| \|_i)$ суммируемо если для каждых числа $\varepsilon > 0$ и индекса i существует конечное множество $K = K(\varepsilon, i) \subseteq X$ такое, что $\Big\| \sum\limits_{x \in M} f(x) \Big\|_i \leq \varepsilon$ для всех конечных множеств $M \subseteq X$, не пересекающихся с K.

Пример 2. В примере 3 п. 1 функция $f\colon \mathbb{R}^m \to E$ со значениями в полном мультиметрическом пространстве $(\mathbb{K}, E, \| \|_i)$ интегрируема по функции $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}$ ессли для каждых числа $\varepsilon > 0$ и индекса i существует риманова пара $(X_0, \mathscr{A}_0)$ такая, что $\|S(f, g, X) - S(f, g, X_0)\|_i \leq \varepsilon$ для всех пар $(X, \mathscr{A}) \succeq (X_0, \mathscr{A}_0)$.

Упражнения. 1) Вывести сформулированный критерий суммируемости из критерия Коши. 2) Преобразовать неравенство для интегральных сумм в сформулированном критерии интегрируемости так, чтобы слева была сумма произведений норм разностей значений векторной функции f и абсолютных значений разностей скалярной функции g.

Замечание. Каждое равномерное пространство можно пополнить сходящимися в себе направленностями [13, гл. II, § 3, теорема 3]. В частности, можно таким образом пополнять нормированные поля, мультинормированные пространства и многие другие алгебраические системы, сохраняя операции [17, гл. 18 и 20].

5. Рассмотрим метрическое пространство $E \neq O$ с метрикой d. Будем называть последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_n = \bar{B}(c_n, r_n) = \{x \mid d(x, c_n) \leq r_n\} \subseteq E$ *стягивающейся*, если шары вложены друг в друга и их радиусы стремятся к нулю: $\bar{B}_{n+1} \subseteq \bar{B}_n$, $r_n \to 0$. (Например, при $c_n = c \in E$, $r_n = 1/n$ получается стягивающаяся последовательность концентрических шаров с центрами в точке c.) Условимся говорить, что последовательность шаров *стягивается к точке* $c \in E$, если $c \in \cap \bar{B}_n$.

Лемма. *В полном метрическом пространстве каждая стягивающаяся последовательность замкнутых шаров стягивается к некоторой точке.*

□ Когда последовательность шаров $\bar{B}_n = \bar{B}(c_n, r_n)$ стягивается, последовательность их центров c_n сходится в себе: $d(c_{n+m}, c_n) \leq 2r_n$ при любых m, n. Если пространство E полное, то последовательность c_n сходится к некоторой точке $c \in E$. А так как $c_{n+m} \in \bar{B}_n$ при любых m, n и шар $\bar{B}_n$ замкнут, то $c \in \bar{B}_n$ при любом n. ■

Замечание. Существование общей точки у каждой стягивающейся последовательности замкнутых шаров служит критерием полноты метрического пространства [73, 4.3.8].

Упражнение. Доказать, что в неполном метрическом пространстве существует стягивающаяся последовательность замкнутых шаров, которая не стягивается к какой-либо точке.

Из леммы о стягивающихся шарах выводится важная

Теорема Бэра. *В полном метрическом пространстве объединение каждой последовательности замкнутых множеств без внутренних точек тоже не имеет внутренних точек.*

□ Рассмотрим последовательность замкнутых множеств $F_n \subseteq E$, не имеющих внутренних точек, и объединение $F = \cup F_n$. Предположим, что теорема не верна и существует замкнутый шар $\bar{B} = \bar{B}(c, r) \subseteq F$ $(c \in E,\ r > 0)$. Заметим, что пересечения $E_n = \bar{B} \cap F_n$ замкнуты, вместе с F_n не имеют внутренних точек и $\bar{B} = \cup E_n$. Замкнутый шар $\bar{B}$ с метрикой d образует полное метрическое пространство. Поэтому достаточно доказать теорему для случая $E = F$. Это технически проще. Будем теперь считать, что $E = \cup F_n$.

Определим стягивающуюся последовательность замкнутых шаров в E, которая приведет к противоречию с доказанной леммой. Пусть $U_n = F'_n = E \setminus F_n$. Так как $E = \cup F_n$, то $\cap U_n = O$. По условию F_n замкнуто и не имеет внутренних точек, а E их имеет. Поэтому $F_n \neq E$ и U_n является открытым непустым множеством при каждом n. Все его точки внутренние. Значит, есть замкнутый шар $\bar{B}_1 = \bar{B}(c_1 r_1) \subseteq U_1$ $(c_1 \in E,\ 0 < r_1 < 1)$. Возьмем $n \geq 1$ и предположим, что уже выбран замкнутый шар $\bar{B}_n = \bar{B}(c_n, r_n) \subseteq U_n$ с центром $c_n \in E$ и радиусом $0 < r_n < n^{-1}$. Так как F_{n+1} не имеет внутренних точек, то открытый шар $B_n = B_n(c_n, r_n)$ не может содержаться целиком в множестве F_{n+1} и, значит, пересекается с его дополнением U_{n+1}. Пересечение $B_n \cap U_{n+1}$ открыто вместе с B_n, U_{n+1} и все его точки внутренние. Значит, есть замкнутый шар $\bar{B}_{n+1} = \bar{B}(c_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B_n \cap U_{n+1}$ с центром $c_{n+1} \in E$ и радиусом $0 < r_{n+1} < (n+1)^{-1}$. Заметим, что $\bar{B}_{n+1} \subseteq B_n \subseteq \bar{B}_n$ и $\bar{B}_{n+1} \subseteq U_{n+1}$. По принципу индукции из сказанного следует, что существует стягивающаяся последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_{n+1} \subseteq U_n$. По лемме $\cap \bar{B}_n \neq O$. Так как $\cap \bar{B}_n \subseteq \cap U_n$, то это противоречит $\cap U_n = O$. ■

Эквивалентная формулировка теоремы Бэра: *если в полном метрическом пространстве объединение последовательно-*

сти замкнутых множеств имеет внутреннюю точку, то хотя бы одно из этих множеств имеет внутреннюю точку.

Приложениям теоремы Бэра посвящена глава 2 в [33].

Упражнение. Привести пример неполного пространства в $\mathbb{R}^2$, для которого верна теорема Бэра [73, 4.3.C].

6. Рассмотрим направленные множества $(X, \succeq)$, $(Y, \succeq)$, их произведение $(X \times Y, \succeq)$ и отделимое регулярное топологическое пространство $(F, \mathscr{V})$. Каждая *двойная направленность* $h\colon X \times Y \to F$ определяет *простые направленности* $h(x, \cdot)\colon Y \to F$ и $h(\cdot, y)\colon X \to F$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Будем называть предел $c \in F$ направленности h *двойным пределом* и писать $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = c$. Пределы $\lim\limits_{y} h(x, y) = f(x)$ и $\lim\limits_{x} h(x, y) = g(y)$ направленностей $h(x, \cdot)$ и $h(\cdot, y)$ назовем *простыми*, а пределы $\lim\limits_{x} \lim\limits_{y} h(x, y) = \lim\limits_{x} f(x) = a$ и $\lim\limits_{y} \lim\limits_{x} h(x, y) = \lim\limits_{y} g(y) = b$ — *повторными*.

Теорема. *Пусть существует двойной предел* $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = c$.

(1) *Если для каждого x есть простой предел $\lim\limits_{y} h(x, y) = f(x)$, то существует предел $\lim\limits_{x} \lim\limits_{y} h(x, y) = \lim\limits_{x} f(x) = a$ и $a = c$.*

(2) *Если для каждого y есть простой предел $\lim\limits_{x} h(x, y) = g(y)$, то существует предел $\lim\limits_{y} \lim\limits_{x} h(x, y) = \lim\limits_{y} g(y) = b$ и $b = c$.*

□ Докажем (1). Предположим, что оно не верно: $h \to c$, $h(x, \cdot) \to f(x)$ $(x \in X)$ и $f \nrightarrow c$. Тогда вследствие регулярности пространства F существует замкнутая окрестность $\bar{V}$ точки c такая, что для каждого x значение $f(r(x)) \notin \bar{V}$ при некотором $r(x) \succeq x$. Вместе с тем существуют $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$ такие, что $h(x, y) \in \bar{V}$ для всех $x \succeq \bar{x}$, $y \succeq \bar{y}$. В частности, $h(r(\bar{x}), y) \in \bar{V}$ при $y \succeq \bar{y}$. Дополнение $U = F \setminus \bar{V}$ является открытой окрестностью точки $f(r(\bar{x}))$. Так как $h(r(\bar{x}), y) \notin U$ для всех $y \succeq \bar{y}$, то $h(r(\bar{x}), y) \nrightarrow f(r(\bar{x}))$, что противоречит условию. Утверждение (2) следует из (1) по симметрии. ■

Из доказанной теоремы вытекает достаточное условие равенства повторных пределов.

Следствие. *Пусть существует двойной предел и все простые пределы. Тогда оба повторных предела существуют и равны двойному.*

Упражнение. Привести пример, показывающий, что существование двойного предела не является необходимым условием существования равных повторных пределов.

7. Заменим топологическое пространство $(F, \mathscr{V})$ равномерным пространством $(F, (\Delta_i))$. Будем называть сходимость $h(x, \cdot) \to f(x)$ *равномерной по* x, если для каждых числа $\varepsilon > 0$ и индекса i существует элемент $y_i(\varepsilon) \in Y$ такой, что $\Delta_i(h(x, y), f(x)) \le \varepsilon$ при всех $y \succeq y_i(\varepsilon)$ *и всех* $x \in X$. Точно так же сходимость $h(\cdot, y) \to g(y)$ *равномерна по* y, если для каждых $\varepsilon > 0$ и i существует $x_i(\varepsilon) \in X$ такой, что $\Delta_i(h(x, y), g(y)) \le \varepsilon$ при всех $x \succeq x_i(\varepsilon)$ *и всех* $y \in Y$.

Упражнение. Привести примеры равномерной и неравномерной сходимости.

Теорема. (1) *Если сходимость* $h(x, y) \to f(x)$ *по* y *равномерна по* x *и есть повторный предел* $\lim\limits_x \lim\limits_y h(x, y) = \lim\limits_x f(x) = a$, *то существует двойной предел* $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = c$ *и* $c = a$.

(2) *Если сходимость* $h(x, y) \to g(y)$ *по* x *равномерна по* y *и есть повторный предел* $\lim\limits_y \lim\limits_x h(x, y) = \lim\limits_y g(y) = b$, *то существует двойной предел* $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = c$ *и* $c = b$.

□ Докажем утверждение (1). Возьмем $\varepsilon > 0$, i и $y_i(\varepsilon) \in Y$ такой, что $\Delta_i(h(x, y), f(x)) \le \varepsilon/2$ при всех $y \succeq y_i(\varepsilon)$ и $x \in X$. Благодаря равномерной сходимости $h(x, y) \to f(x)$ такой элемент $y_i(\varepsilon)$ существует. А так как $f(x) \to a$, то имеется $x_i(\varepsilon) \in X$, при котором $\Delta_i(f(x), a) \le \varepsilon/2$ для всех $x \succeq x_i(\varepsilon)$. Следовательно, $\Delta_i(h(x, y), a) \le \varepsilon$ для всех $x \succeq x_i(\varepsilon)$, $y \succeq y_i(\varepsilon)$. Значит, $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = a$. Утверждение (2) следует из (1) по симметрии. ■

Следствие. *Если существуют все простые пределы, сходимость по одной из переменных равномерна по другой и есть соответствующий повторный предел, то существуют двойной предел, другой повторный предел и эти три предела равны.*

□ Пусть все простые пределы $f(x)$ и $g(y)$ существуют, сходимость $h(x, \cdot) \to f(x)$ по y равномерна по x и есть повторный предел $\lim\limits_x f(x) = a$. Тогда по доказанной теореме $\lim\limits_{x,y} h(x, y) = c = a$. А так как существуют простые пределы $g(y)$, то по теореме п. 6 отсюда следует, что $\lim\limits_y g(y) = b = c$. ■

Связь между простыми, повторными и двойными пределами поясняет диаграмма. Эту связь выражают также равенства

$$\lim_x \lim_y h(x,y) = \lim_y \lim_x h(x,y) = \lim_{x,y} h(x,y),$$

которые верны при сформулированных условиях.

$$\begin{tikzcd}
& h(x,y) \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "x"] \arrow[dd, "x"', "y"] & \\
f(x) \arrow[dr, "x"'] & & g(y) \arrow[dl, "y"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Упражнение. Проверить необходимость условия о равномерной сходимости для существования двойного предела.

8. Замкнутость и компактность множеств в пространстве $(E, \mathscr{U})$ тесно связаны со сходимостью направленностей в них.

Теорема Биркгофа. *Множество $F \subseteq E$ замкнуто ессли пределы каждой сходящейся направленности в F принадлежат F.*

$\square$ Пусть $F \subseteq E$ замкнуто, $x(i) \in F$ и $x(i) \to x \in E$. Предположим, что $x \in U = F^c$. Так как F замкнуто, то U открыто и $x(i) \to x$ влечет $x(i(0)) \in U$ при некотором индексе $i(0)$, что противоречит условию $x(i) \in F$ для всех i. Значит, $x \in F$. Условие теоремы выполнено.

Пусть $F \subseteq E$ не замкнуто и $x \in \bar{F} \setminus F$. Класс $\mathscr{V}(x)$ окрестностей точки x направлен по включению $\subseteq$: следующей является *меньшая* окрестность. Так как $x \in \bar{F}$, то для каждой $V \in \mathscr{V}(x)$ существует $x(V) \in F \cap V$. Ясно, что $x(V) \to x \notin F$. Условие теоремы не выполнено. $\blacksquare$

Замечание. В неотделимом пространстве часть пределов сходящейся направленности может принадлежать данному множеству, а часть — нет. Замкнутому множеству принадлежат все пределы сходящихся направленностей его точек.

Рассмотрим множество C в топологическом пространстве E. Будем говорить, что направленность точек множества C *частично сходится в C*, если некоторая ее поднаправленность сходится к какой-нибудь точке из C (то есть если эта направленность имеет предельную точку в C).

Теорема Вейерштрасса. *Множество $C \subseteq E$ компактно ессли каждая направленность точек из C частично сходится в C.*

$\square$ 1) Пусть множество $C \subseteq E$ компактно. Рассмотрим направленность $f\colon X \to C$ и семейство ее сечений $fS(x) = \{f(y) \mid y \succeq x\}$. По лемме п. 3 предельное множество $\operatorname{Lim} f = \cap \overline{fS(x)}$. Так как семейство сечений центрировано и множество C компактно, то $\cap \overline{fS(x)} \neq O$.

2) Пусть множество $C \subseteq E$ удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим семейство открытых множеств $U(i) \subseteq E$ $(i \in I)$, покрывающих C. Предположим, что $C \nsubseteq U(K) = \cup U(k)$ $(k \in K)$ для каждого конечного $K \subseteq I$. Тогда существует семейство точек $x(K) \in C \setminus U(K)$ $(K \in \mathscr{K})$. Класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(I)$ всех конечных частей множества I направлен по включению и точки $x(K)$ служат значениями направленности $x\colon \mathscr{K} \to C$. По условию для нее существует поднаправленность $x \circ r\colon T \to C$, сходящаяся к некоторой точке $a \in C$. Так как $U(i)$ покрывают C, то $a \in U(i(a))$ для некоторого $i(a) \in I$ и поэтому $x(K) \in U(i(a))$ при $K = r(t)$ для всех $t \in T$, следующих за некоторым $t(a) \in T$. Пусть $K(a) = r(t(a)) \cup \{i(a)\}$. Так как $r\colon T \to \mathscr{K}$ согласовано с направлениями для T и $\mathscr{K}$, то существует элемент $t(0) \in T$ такой, что $K = r(t) \supseteq K(a)$ при каждом $t \in T$, следующем за $t(0)$. Среди этих элементов можно выбрать следующий и за $t(a)$. Если $t \succeq t(0)$ и $t \succeq t(a)$, то $x(K) \in U(i(a))$ и $x(K) \notin U(K)$ при $K = r(t)$. Но из $i(a) \in K(a) \subseteq K$ и $U(K) = \cup U(k)$ $(k \in K)$ следует, что $x(K) \notin U(i(a))$. Это противоречие показывает, что $C \subseteq U(K)$ при некотором конечном $K \subseteq I$. Множество C компактно. $\blacksquare$

Замечание. При $C = E$ теорема Вейерштрасса утверждает, что компактность пространства E эквивалентна частичной сходимости каждой направленности в E.

Упражнение. Доказать, что множество $C \subseteq E$ компактно ессли каждая простая направленность точек множества C сходится в C.

Следствие. *Если множество $B \subseteq E$ относительно компактно, то каждая направленность точек из B частично сходится в E.*

$\square$ Каждая направленность $(x(i))$ в B является направленностью и в $\bar{B}$. Если $\bar{B}$ компактно, то по теореме Вейерштрасса $(x(i))$ частично сходится в $\bar{B}$. $\blacksquare$

Замечание. Для произвольного топологического пространства E обратное утверждение не верно [13, гл. 1, § 9, упр. 23].

Контрпример (предложен П. Е. Алаевым). Пусть $E = \mathbb{N}$ и топология $\mathscr{U}$ для E определяется базой $\mathscr{B} = \{1\} \cup \{\{1, n\} \mid n \geq 2\}$.

Множество $B = \{1\}$ имеет некомпактное замыкание $\bar{B} = E$, хотя все направленности в B сходятся к единице.

Упражнение. Проверить обратное утверждение для регулярного пространства E.

9. Рассмотрим равномерное пространство $(E, (\Delta_i))$ с метриками Δ_i $(i \in I)$ и множество $X \subseteq E$. Семейство шаров $B_i(k, \varepsilon) = \{x \mid \Delta_i(k, x) < \varepsilon\}$ $(k \in K \subseteq E)$, покрывающее X, будем называть (i, ε)-*сетью* для X. Если при любых $i \in I$ и $\varepsilon > 0$ существует конечная (i, ε)-сеть для X, то множество X называется *предкомпактным* или *вполне ограниченным.* Будем говорить, что направленность *частично сходится в себе*, если некоторая ее поднаправленность сходится в себе.

Теорема. *Множество $X \subseteq E$ предкомпактно ессли каждая направленность точек множества X частично сходится в себе.*

□ 1) Пусть X предкомпактно и $(x(t))$ — направленность в X. По предложению из 3.1.2, 6 для нее существует простая поднаправленность $(y(u))$ точек $y(u) = x(r(u)) \in X$. Так как множество X предкомпактно, то для каждых $i \in I$ и $\varepsilon > 0$ существует конечное семейство шаров $B_i(k, \varepsilon)$, покрывающее X. А так как направленность $(y(u))$ простая, то по сказанному в 3.1.2, 6 существуют шар $B_i(k(0), \varepsilon)$ и индекс $u(0)$ такие, что $\{y(u) \mid u \succeq u(0)\} \subseteq B_i(k(0), \varepsilon)$. Значит, $(y(u))$ сходится в себе. Условие теоремы выполнено.

2) Пусть X не предкомпактно и для $i = i(0) \in I$, $\varepsilon = \varepsilon(0) > 0$ не существует конечной (i, ε)-сети: любое конечное семейство шаров $B_i(k, \varepsilon)$ не покрывает множество X. Возьмем $x(1) \in X$. По принципу индукции существует последовательность точек $x(n) \in X$ такая, что $x(n) \notin B(n) = \bigcup\limits_{m<n} B_i(x(m), \varepsilon)$. Так как $\Delta_i(x(n), x(p)) \geq \varepsilon$ при $n \neq p$, то $x(n)$ не может сходиться в себе даже частично. Условия теоремы не выполнены. ■

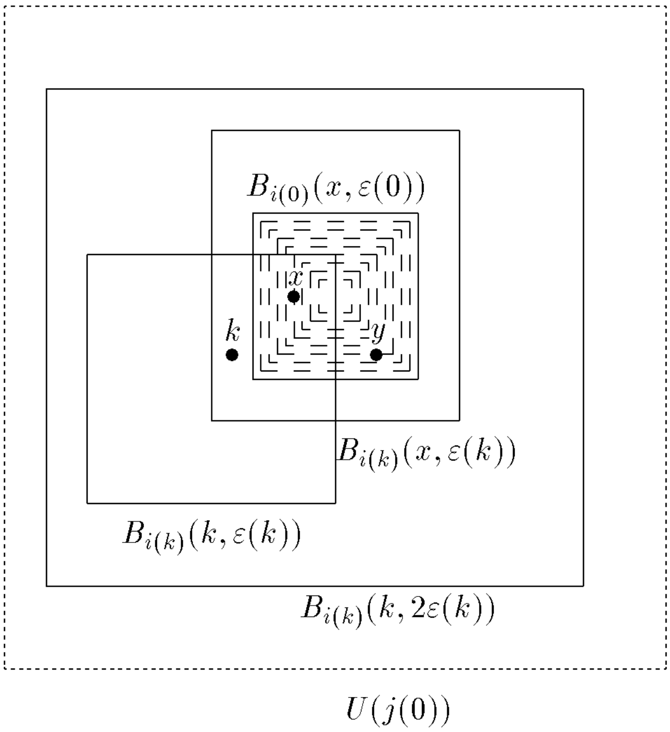
Следствие. *В полном отделимом пространстве компактность множества эквивалентна его предкомпактности и замкнутости.*

□ Рассмотрим множество X в полном отделимом пространстве E. Если X компактно, то оно замкнуто (3.1.1, 7). По теореме Вейерштрасса каждая направленность точек из X имеет предельную точку и поэтому частично сходится в себе. По доказанной теореме X предкомпактно. Предположим теперь, что X предкомпактно и замкнуто. Так как пространство E полное, то из частичной сходимости в себе направленностей точек из X следует их частичная сходимость к некоторым точкам E. По теореме Биркгофа эти точки принадлежат X. По теореме Вейерштрасса отсюда следует компактность X. ■

Упражнение. 1) Доказать, что в полном метрическом пространстве относительная компактность множества эквивалентна его предкомпактности. 2) Проверить аналогичное утверждение для мультиметрического пространства, учитывая его регулярность.

В равномерном пространстве $(E, (\Delta_i))$ каждому открытому покрытию $\mathscr{C} = (U(j))$ компактного множества $C \subseteq E$ можно приписать некоторую метрическую характеристику ($i \in I$, $j \in J$).

Лемма. *Существуют индекс* $i(0) \in I$ *и число* $\varepsilon(0) > 0$ *такие, что для каждой точки* $x \in C$ *шар* $B_{i(0)}(x, \varepsilon(0))$ *содержится в некотором множестве* $U(j(x))$.



$\square$ Для каждой точки $x \in C$ возьмем $j(x) \in J$, $i(x) \in I$ и $\varepsilon(x) > 0$ такие, что $B_{i(x)}(x, 2\varepsilon(x)) \subseteq U(j(x))$. Шары $B_{i(x)}(x, \varepsilon(x))$ открыты и покрывают C. Множество C компактно, поэтому существует конечное $K \subseteq C$ такое, что шары $B_{i(k)}(k, \varepsilon(k))$ $(k \in K)$ покрывают C. Пусть $\Delta_{i(0)}(x, y) \geq \max \Delta_{i(k)}(x, y)$ и $\varepsilon(0) = \min \varepsilon(k)$ $(k \in K)$, $x \in B_{i(k)}(k, \varepsilon(k))$ и $y \in B_{i(k)}(k, \varepsilon(k))$.

Из определений вытекает, что $B_{i(0)}(x, \varepsilon(0)) \subseteq B_{i(k)}(x, \varepsilon(0)) \subseteq B_{i(k)}(k, \varepsilon(k))$. Так как $\Delta_{i(k)}(k, y) \leq \Delta_{i(k)}(k, x) + \Delta_{i(k)}(x, y)$, то $B_{i(k)}(x, \varepsilon(k)) \subseteq B_{i(k)}(k, 2\varepsilon(k))$. Следовательно, для каждой точки $x \in C$ существуют точка $k = k(x) \in K$ и индекс $j(x)$ такие, что $B_{i(0)}(x, \varepsilon(0)) \subseteq B_{i(k)}(k, 2\varepsilon(k)) \subseteq U(j(x))$. $\blacksquare$

Рассмотрим метрическое пространство (E, Δ). В этом случае по лемме для открытого покрытия $\mathscr{C} = (U(j))$ компакта $C \subseteq E$ существует число $\varepsilon(0) > 0$ такое, что при $x \in C$ шар $B(x, \varepsilon(0))$ покрывается одним множеством $U(j(x))$. Верхняя грань $\lambda = \lambda(\mathscr{C})$ таких чисел $\varepsilon(0)$ называется *лебеговым числом* покрытия $\mathscr{C}$. Это число может быть бесконечным.

10. Рассмотрим топологические пространства $(E, \mathscr{U})$, $(F, \mathscr{V})$, функцию $f \colon E \to F$, точку $a \in E$ и направление $x \to a$, $x \neq a$, для E. Если $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = f(a)$, то говорят, что функция f *непрерывна в точке* a. Это значит, что для каждой окрестности $V \in \mathscr{V}$ точки $f(a)$ существует окрестность $U \in \mathscr{U}$ точки $a \in E$ такая, что $f(U) \subseteq V$: точки x, U-близкие a, имеют образы $f(x)$, V-близкие $f(a)$. Функция $f \colon E \to F$, непрерывная в каждой точке a множества $A \subseteq E$, называется *непрерывной на множестве* A. Функция, непрерывная на всем пространстве, называется просто *непрерывной*. Непрерывность сужений означает их непрерывность на соответствующих подпространствах.

Примеры. 1) Постоянные функции непрерывны при любых топологиях. 2) Если пространство $(E, \mathscr{U})$ дискретно ($\mathscr{U} = \mathscr{P}(E)$) или пространство $(F, \mathscr{V})$ слипшееся ($\mathscr{V} = \{O, F\}$), то все функции $f \colon E \to F$ непрерывны. 3) Если пространство $(F, \mathscr{V})$ дискретно, то функция $f \colon E \to F$ непрерывна в точке $a \in E$ ессли f постоянна на некоторой окрестности $U \subseteq E$ точки a. Непрерывность f в каждой точке $a \in E$ означает, что f *локально постоянна.*

Упражнение. Доказать, что в определении непрерывности можно произвольные окрестности заменить открытыми.

Предложение. *Функция* $f\colon E \to F$ *непрерывна ессли прообраз* $X = f^{-1}(Y)$ *каждого открытого множества* Y *в* F *есть открытое множество в* E.

$\square$ Пусть f непрерывна, $Y \subseteq F$ открыто, $x \in X = f^{-1}(Y)$ и $y = f(x)$. Тогда $V = Y$ есть окрестность y и существует окрестность $U \subseteq E$ точки x такая, что $f(U) \subseteq Y$ и $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(Y) = X$. Значит, X открыто. Пусть условие предложения выполнено, $x \in E$ и $y = f(x) \in F$. Тогда $X = f^{-1}(Y)$ есть открытая окрестность точки x при каждой открытой окрестности Y точки y и $f(X) \subseteq Y$. Каждая окрестность V точки y содержит некоторую ее открытую окрестность Y и поэтому $f(X) \subseteq Y \subseteq V$. Значит, f непрерывна. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать, что предложение останется верным, если открытые множества заменить замкнутыми.

Замечание. Образ открытого множества при непрерывном отображении может не быть открытым. Пусть, например, $E = F = \mathbb{R}$ и $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Тогда $f(]-1, 1[) = [0, 1[$.

Часто бывает полезна следующая

Теорема. *Композиция непрерывных функций непрерывна.*

$\square$ Рассмотрим кроме топологических пространств $(E, \mathscr{U})$, $(F, \mathscr{V})$ и функции $f\colon E \to F$ еще топологическое пространство $(G, \mathscr{W})$, функцию $g\colon F \to G$ и композицию $h = g \circ f\colon E \to G$. Пусть f, g непрерывны и прообразы $f^{-1}(V)$, $g^{-1}(W)$ открытых множеств $V \subseteq F$, $W \subseteq G$ открыты. Тогда прообраз $h^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ каждого открытого множества $W \subseteq G$ открыт и функция h непрерывна. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать, что непрерывность функции $f\colon E \to F$ эквивалентна каждому из следующих свойств: (1) $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ $(X \subseteq E)$, (2) $\overline{f^{-1}(Y)} \subseteq f^{-1}(\bar{Y})$ $(Y \subseteq F)$.

11. При непрерывных отображениях сохраняется компактность множеств.

Теорема Вейерштрасса. *При непрерывном отображении образ компактного множества компактен.*

$\square$ Пусть $f\colon E \to F$ непрерывна, $X \subseteq E$ компактно и $f(X) = Y \subseteq F$. Рассмотрим направленность точек $y(i) \in Y$ и некоторую направленность $x(i) \in X$, $f(x(i)) = y(i)$. Так как X компактно, то существует поднаправленность $x(r(i))$ направленности $x(i)$, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$. А так как f непрерывна, то $y(r(i)) = f(x(r(i))) \to f(x) = y \in Y$. Значит, Y компактно. ■

Теорема Вейерштрасса о компактности часто применяется.

Следствие. *Произведение* $(E, \mathscr{U}) = \prod(E_i, \mathscr{U}_i)$ *компактно ессли каждое пространство* $(E_i, \mathscr{U}_i)$ *компактно.*

□ Утверждение *если* следует из теоремы Тихонова. Докажем утверждение *только если*. Из определений следует, что проектор $p_i \colon E \to E_i$, отображающий точку $x = (x_i) \in E$ в точку $p_i(x) = x_i \in E_i$, непрерывен. Если E компактно, то по теореме Вейерштрасса и $E_i = p_i(E)$ компактно. ■

Рассмотрим топологические пространства $(E, \mathscr{U})$ и $(F, \mathscr{V})$, множества $X \subseteq E$ и $Y \subseteq F$, взаимно однозначное накрывающее отображение $f \colon X \to Y$ и обратное отображение $g = f^{-1} \colon Y \to X$. Ясно, что отображение g тоже взаимно однозначное и накрывающее. Если f и $g = f^{-1}$ непрерывны, то они называются *гомеоморфизмами* X на Y и Y на X, а множества X и Y называются *гомеоморфными.* Так же называют и подпространства X, Y.

Теорема о гомеоморфизме. *Взаимно однозначное непрерывное отображение компакта в отделимое пространство является гомеоморфизмом.*

□ Используем введенные обозначения и предположим, что X компактно, а f непрерывна. Тогда по теореме Вейерштрасса $Y = f(X)$ — компакт. Если $g = f^{-1}$ имеет разрыв в точке $b \in Y$, то существует направленность точек $y(i) \in Y$ такая, что $y(i) \to b$, но $x(i) = g(y(i)) \nrightarrow g(b) = a$. Так как $x(i) \nrightarrow a$, то $x(r(i)) \notin U(a)$ для некоторых поднаправленности $(x(r(i)))$ и открытой окрестности $U(a)$ точки a. Замкнутая часть $C = X \setminus U(a)$ компакта X компактна. Поэтому существует поднаправленность $(x(sr(i)))$ направленности точек $(x(r(i))) \in C$, сходящаяся к некоторой точке $c \in C$. Так как f непрерывна, то $y(sr(i))) = f(x(sr(i))) \to f(c)$. Так как $y(i) \to b$, то $y(sr(i))) \to b = f(a)$. А так как пространство F отделимое, то $f(a) = f(c)$, хотя $a \neq c$. Это противоречит взаимной однозначности f. Значит, $g = f^{-1}$ непрерывна. ■

Упражнение. Проверить, можно ли в теореме о гомоморфизмах отказаться от условия отделимости?

Замечание. М. А. Лаврентьев доказал важную теорему о продолжении гомеоморфизмов с произвольных множеств в полных метрических пространствах на множества специального типа [125, 4.3.21].

12. При непрерывных отображениях сохраняется связность множеств.

Теорема Больцано. *При непрерывном отображении образ связного множества связен.*

□ Пусть $f\colon E \to F$ непрерывна, $X \subseteq E$ связно и $f(X) = Y \subseteq F$. Предположим, что Y несвязно и открытые множества $V, W \subseteq F$ разбивают Y. Так как f непрерывна, то прообразы $T = f^{-1}(V)$, $U = f^{-1}(W) \subseteq E$ открыты. А так как $YV \neq O$, $YW \neq O$ и $Y \subseteq V \cup W$, $YVW = 0$, то $XT \neq O$, $XU \neq O$ и $X \subseteq T \cup U$, $XTU = O$. В самом деле, если $y \in YV$, то $y = f(x) \in V$ для некоторого $x \in X$, а $f(x) \in V$ означает $x \in T = f^{-1}(V)$. Следовательно, $x \in XT$ и $XT \neq O$. Точно так же $XU \neq O$. Кроме того, $X \subseteq f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W) = T \cup U$ и $XTU \subseteq f^{-1}(Y)f^{-1}(V)f^{-1}(W) = f^{-1}(YVW) = f^{-1}(O) = O$. Значит, открытые множества T, U разбивают множество X. Это противоречит его связности. ■

Из этих общих теорем следуют классические теоремы для вещественных функций вещественной переменной.

Упражнения. Доказать для непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующие утверждения. 1) Образ $Y = f(X)$ каждого интервала $X \subseteq \mathbb{R}$ есть интервал в $\mathbb{R}$, и поэтому функция f принимает все промежуточные значения. 2) Образ $Y = f([a, b])$ каждого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ есть отрезок в $\mathbb{R}$, и поэтому функция f принимает наименьшее и наибольшее значения на $[a, b]$.

13. Отображение $f\colon E \to F$ мультиметрического пространства $(E, (\rho_i))$ в мультиметрическое пространство $(F, (\Delta_j))$ называется *равномерно непрерывным*, если для каждого индекса j и числа $\varepsilon > 0$ существуют индекс i и число $\delta > 0$ такие, что $\Delta_j(f(x), f(y)) < \varepsilon$ при всех $x, y \in E$, для которых $\rho_i(x, y) < \delta$. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — фильтры окружений диагонали для E и F (3.1.1, 6). Из определений вытекает, что сформулированное условие эквивалентно условию: для каждого $W \in \mathscr{W}$ существует $V \in \mathscr{V}$ такое, что $(f(x), f(y)) \in W$ при всех $x, y \in E$, для которых $x, y \in V$.

Предложение. *Равномерно непрерывное отображение непрерывно при равномерных топологиях.*

□ Это следует из определений: при $y = a \in E$ неравенства $\Delta_j(f(x), f(y)) < \varepsilon$ и $\rho_i(x, a) < \delta$ означают, что $f(x) \in B_j(f(a), \varepsilon)$ и $x \in B_i(a, \delta)$. ■

Простая непрерывность $f\colon E \to F$ означает, что для каждых точки $a \in E$, индекса j и числа $\varepsilon > 0$ существуют индекс $i(a)$ и число $\delta(a) > 0$ такие, что $\Delta_j(f(x), f(a)) < \varepsilon$ при всех $x \in E$, для которых $\rho_{i(a)}(x, a) < \delta(a)$. Если f равномерно непрерывно, то существуют общие для всех точек $a \in E$ индекс $i = i(a)$ и число $\delta = \delta(a) > 0$, обеспечивающие неравенство $\Delta_j(f(x), f(a)) < \varepsilon$ при $\rho_i(x, a) < \delta$.

Пример. Функция $f(x) = 1/x$ равномерно непрерывна на $[1, \infty[$ и неравномерно непрерывна на $]0, \infty[$.

Для отображений компактов простая непрерывность эквивалентна равномерной.

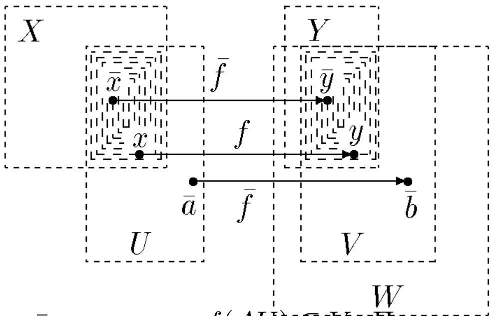
Теорема. *Непрерывное отображение компактного мультиметрического пространства в мультиметрическое равномерно непрерывно.*

$\square$ Если $f\colon E \to F$ непрерывно, то для каждых точки $a \in E$, индекса j и числа $\varepsilon > 0$ существуют индекс $i(a)$ и число $\delta(a) > 0$ такие, что $\Delta_j(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ при $\rho_{i(a)}(x, a) < \delta(a)$. Если E компактно, то по лемме п. 8 существуют индекс i и число $\delta > 0$ такие, что для каждой точки $x \in E$ шар $B_i(x, \delta)$ содержится в некотором шаре $B_{i(a)}(x, \delta(a))$. Пусть $\Delta_i(x, y) < \delta$. Тогда $y \in B_i(x, \delta(a)) \subseteq B_{i(a)}(x, \delta(a))$ и $\Delta_{i(a)}(x, a) < \delta(a)$, $\Delta_{i(a)}(y, a) < \delta(a)$. Поэтому $\Delta_j(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$, $\Delta_j(f(y), f(a)) < \varepsilon/2$ и $\Delta_j(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Значит, f равномерно непрерывна. $\blacksquare$

Замечание. Топология каждого компактного пространства определяется некоторой мультиметрикой [13, гл. II, § 4, теорема 1]. Поэтому можно говорить о равномерно непрерывном отображении компактного пространства в мультиметрическое.

14. Рассмотрим топологические пространства $(E, \mathscr{U})$ и $(F, \mathscr{V})$, множество $A \subseteq E$ и его замыкание $\bar{A}$, функцию $f\colon A \to F$. Предположим, что $(F, \mathscr{V})$ отделимое и регулярное, а для функции f и каждой точки $\bar{a} \in \bar{A}$ существует предел $\bar{f}(\bar{a}) = \lim f(x)$ $(x \to \bar{a},\ x \in A)$. Обозначим через $\bar{f}$ функцию на $\bar{A}$ со значениями $\bar{f}(\bar{a}) \in F$ $(\bar{a} \in \bar{A})$. Отделимость F обеспечивает ее однозначность.

Теорема. *Единственной непрерывной функцией на $\bar{A}$ со значениями в F, продолжающей f, является $\bar{f}$.*



$\square$ Если $\bar a = a \in A$, то $\bar f(a) = f(a)$. Функция $\bar f$ продолжает f. Докажем, что $\bar f$ непрерывна. Из предположения о регулярности F и из существования предела $\bar b = \bar f(\bar a)$ следует, что для каждой окрестности $W \subseteq F$ точки $\bar b$ существуют замкнутая окрестность $V \subseteq W$ точки $\bar b$ и открытая окрестность $U \subseteq E$ точки $\bar a$ такие, что $f(AU) \subseteq V$. Пусть $\bar x \in \bar A U$. Так как $\bar y = \bar f(\bar x) = \lim f(x)$ $(x \to \bar x,\ x \in A)$, то для каждой окрестности $Y \subseteq F$ точки $\bar y$ существует окрестность $X \subseteq E$ точки $\bar x$ такая, что $f(AX) \subseteq Y$. А так как $\bar x \in \bar A$, $\bar x \in U$ и U открыто, то UX является окрестностью точки $\bar x$ и пересечение $AUX \neq O$. Следовательно, пересечение $VY \supseteq f(AU)f(AX) \supseteq f(AUX)$ не пусто ($f(x) \in f(AU) \subseteq V$ и $f(x) \in f(AX) \subseteq Y$ при $x \in AUX$). Поэтому $\bar y = \bar f(\bar x) \in \bar V = V \subseteq W$ и $\bar f(\bar A U) \subseteq W$. Значит, функция $\bar f$ непрерывна.

Докажем единственность $\bar f$. Пусть $\bar g\colon \bar A \to F$ непрерывна и $\bar g(x) = f(x)$ $(x \in A)$. Тогда $\bar g(\bar a) = \lim f(x) = \bar f(\bar a)$ при $x \to \bar a$, $x \in A$ для каждой точки $\bar a \in \bar A$ и $\bar g = \bar f$. $\blacksquare$

Замечание. Функция f непрерывна вместе с продолжающей ее функцией $\bar f$. Равенства $\bar f(a) = \lim f(x) = f(a)$ $(x \to a,\ x \in A)$ для $a \in A$ следуют из определений.

Так как отделимое локально компактное пространство регулярно (предложение 3.1.1, 14), то теорема о непрерывном продолжении верна для отделимого локально компактного пространства $(F, \mathscr{V})$.

Назовем функцию $\bar f\colon \bar A \to F$ со значениями $\bar f(\bar a) = \lim f(x)$ $(x \to \bar a,\ x \in A)$ для $\bar a \in \bar A$ *непрерывным продолжением на* $\bar A$ *функции* $f\colon A \to F$.

Пример. Пусть $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f(x) = x \sin(1/x)$ $(x \in A)$. Тогда $\bar f(0) = 0$. Если же $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \in A)$, то при любом значении $\bar f(0) \in \mathbb{R}$ продолжение $\bar f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет разрывно.

15. Рассмотрим мультиметрические пространства $(E, (\rho_i))$, $(F, (\Delta_j))$, множество $A \subseteq E$ и его замыкание $\bar A$, равномерно непрерывную функцию $f\colon A \to F$. Предположим, что $(F, (\Delta_j))$ отделимое и полное.

Теорема. *Непрерывное продолжение $\bar{f}$ равномерно непрерывной функции f существует и равномерно непрерывно.*

$\square$ Из определений следует, что каждое мультинормированное пространство регулярно. Равномерная непрерывность функции f и полнота пространства $(F, (\Delta_j))$ обеспечивают существование предела $\bar{f}(\bar{a}) = \lim f(x)$ $(x \to \bar{a},\ x \in A)$. Значит, по теореме п. 14 существует непрерывное продолжение $\bar{f}\colon \bar{A} \to F$ функции $f\colon A \to F$. Так как f равномерно непрерывна и $\bar{f}$ непрерывна в точках $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A}$, то для каждых индекса j и числа $\varepsilon > 0$ существуют индексы $i(1)$, $i(2)$, $i(3)$ и числа $\delta(1), \delta(2), \delta(3) > 0$ такие, что $\Delta_j(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$, $\Delta_j(f(x), \bar{f}(\bar{x})) < \varepsilon/3$, $\Delta_j(f(y), \bar{f}(\bar{y})) < \varepsilon/3$ при $\rho_{i(1)}(x, y) < \delta(1)$, $\rho_{i(2)}(x, \bar{x}) < \delta(2)$ $\rho_{i(3)}(y, \bar{y}) < \delta(3)$ соответственно. По определению мультиметрики существуют индекс i и число δ, позволяющее заменить последние неравенства на $\rho_i(x, y) < 3\delta$, $\rho_i(x, \bar{x}) < 3\delta$, $\rho_i(y, \bar{y}) < 3\delta$. Пусть $\rho_i(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$. Так как $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A}$, то существуют $x, y \in A$, для которых $\rho_i(x, y) < \delta$, $\rho_i(y, \bar{y}) < \delta$ и поэтому $\rho_i(x, y) < 3\delta$. Следовательно, $\Delta_j(\bar{f}(\bar{x}), \bar{f}(\bar{y})) < \Delta_j(f(x), \bar{f}(\bar{x})) + \Delta_j(f(x), f(y)) + \Delta_j(f(y), \bar{f}(\bar{y})) < \varepsilon$. Значит, функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна. $\blacksquare$

Пример. Пусть $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{R}$ и $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$ $(x, y \in \mathbb{Q})$. Тогда $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}$, $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$ $(\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R})$.

Упражнение. Пусть $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F = \bar{\mathbb{R}}$ и $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Доказать, что не существует непрерывных продолжений $\bar{f}\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$, $\bar{g}\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ для $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Замечание. Так как отделимое компактное пространство мультиметризуемое и полное [13, гл. II, § 4, теорема 1], то теорема о равномерно непрерывном продолжении верна для отделимого компактного пространства $(F, \mathscr{V})$ при определяемой топологией $\mathscr{V}$ мультиметрике (Δ_j). Нужно учесть, что в [13] основным понятием в теории пределов является фильтр, а не направленность. В данном параграфе — наоборот. Связь описана в 3.1.3, 2.

3.2. Дифференциал

Понятие дифференциала формализует идею линейного приближения. Теория дифференцирования в нормированных пространствах подробно описана в [36] и [54]. Дифференцирование на многообразиях описано во второй части книги [36]. Дифференцирование тензоров описывается в главе 4 книги [30]. Общей теории дифференцирования в векторных пространствах со сходимостью посвящена книга [107].

Наиболее разработана теория дифференцирования в банаховых пространствах. Она имеет обширные приложения. Параграф посвящен в основном этой теории и содержит материал лекций Л. Я. Савельева [80, часть 4; 81].

3.2.1. Определение дифференциала

Дифференциал определяется как главная линейная часть приращения функции.

1. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ с вещественными скалярными или комплексными полями $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$. Будем предполагать, что $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Это значит, что $\mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{C}$, или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{L} = \mathbb{C}$. Случай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ исключается. Включение $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ используется во всем п. 3.2.

Пусть $U \subseteq E$, $u \in U$, $V = U - u = \{v = t - u \mid t \in U\}$. Тогда для каждой функции $f \colon U \to F$ определена функция $\Delta f u \colon V \to F$ со значениями

$$\Delta f u(v) = f(u + v) - f(u) \quad (v \in V).$$

Так как $u \in U$, то $0 = u - u \in V$. Функция $\Delta f u$ называется *приращением функции f в точке u*. С приращением $\Delta f u$ связаны операторы

$$\Delta_u \colon \mathscr{F}(U, F) \to \mathscr{F}(V, F), \quad \Delta f \colon U \to \mathscr{F}(V, F),$$

определяемые равенствами $\Delta_u(f) = \Delta f u$, $\Delta f(u) = \Delta f u$. Оператор Δ_u линейный:

$$\Delta_u(af + bg) = a \cdot \Delta_u(f) + b \cdot \Delta_u(g) \quad (a, b \in \mathbb{K},\ f, g \in \mathscr{F}(U, F)).$$

Оператор Δf, как правило, нелинейный.

Пример. Пусть $U = E = F = \mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{C}$ и $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{C})$. Тогда $V = \mathbb{C}$ и $\Delta f u(v) = (u+v)^2 - u^2 = 2uv + v^2$ $(u, v \in \mathbb{C})$.

Упражнение. Проверить линейность оператора $\Delta\colon \mathscr{F}(U,F) \to \mathscr{F}(U,\mathscr{F}(V,F)$, определяемого равенством $\Delta(f) = \Delta f$ $(f \in \mathscr{F}(U,F))$.

2. Предположим, что пространства E, F нормированы и рассмотрим еще одно нормированное пространство $(\mathbb{M}, G)$ с вещественным или комплексным скалярным полем $\mathbb{M} \supseteq \mathbb{L}$. Нормы $\|\,\|_E$, $\|\,\|_F$, $\|\,\|_G$ условимся для простоты обозначать одинаково $\|\,\|$. Будем говорить, что $h\colon V \to F$ *мала сравнительно с* $g\colon V \to G$ в окрестности точки 0, и писать $h = o(g)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|h(v)\| \le \varepsilon \|g(v)\| \quad (\|v\| \le \delta,\ v \in V).$$

Будем говорить, что h *ограничена сравнительно с* g в окрестности точки 0, и писать $h = O(g)$, если существуют $\alpha > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\|h(v)\| \le \alpha \|g(v)\| \quad (\|v\| \le \delta,\ v \in V).$$

Ясно, что $h = O(g)$, если $h = o(g)$.

Примеры. 1) Пусть g постоянная: $g(v) = c \in G$ $(v \in V)$. Тогда $h = o(c)$ означает, что $h(v) \to 0$ $(v \to 0)$. Вместо $h = o(c)$ обычно пишут $o(1)$. А $h = O(c) = O(1)$ означает ограниченность функции h в окрестности точки 0.

2) Пусть $E = G$ и $g(v) = v$ $(v \in V)$. Тогда $h = o(v)$ означает, что $h(0) = 0$ и $\|v\|^{-1} h(v) \to 0$ $(v \to 0,\ v \ne 0)$. Если $h = O(v)$, то $h = o(1)$.

3) Пусть $E = F = G = V = \mathbb{C}$ и (s^n) — последовательность степенных функций: $s^n(v) = v^n$ $(v \in \mathbb{C})$. Тогда $s^1 = o(1)$, $s^2 = o(v)$ и $s^{n+1} = o(s^n)$.

3. Рассмотрим векторные пространства $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{L}(E,G)$, векторную алгебру $\mathscr{L}(E,E)$ линейных операторов, описанную в 2.2.2. Линейный оператор $A \in \mathscr{L}(E,F)$ называется *ограниченным*, если $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$ $(x \in E)$ для некоторого $\alpha \ge 0$.

Ограниченные линейные операторы образуют подпространства $\mathscr{B}(E,F)$, $\mathscr{B}(F,G)$, $\mathscr{B}(E,G)$ соответствующих пространств и подалгебру $\mathscr{B}(E,E)$ алгебры $\mathscr{L}(E,E)$. Это следует из неравенств

$$\|Ax + Bx\| \le (\alpha + \beta)\|x\|, \quad \|\gamma A x\| \le |\gamma| \alpha \|x\|,$$

верных при $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$, $\|Bx\| \le \beta\|x\|$ для $A, B \in \mathscr{L}(E,F)$ и $x \in E$. Кроме того, при $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$, $\|By\| \le \beta\|y\|$ для $A \in \mathscr{B}(E,F)$, $B \in \mathscr{B}(F,G)$ и $x \in E$ верны неравенства $\|BAx\| \le$

$\beta\|Ax\| \le \beta\alpha\|x\|$. В частности, они верны при $E = F = G$. Равенство
$$\|A\| = \sup\{\|x\|^{-1}\|Ax\| : x \in E,\, \|x\| \ne 0\}$$
определяет *норму* оператора $A \in \mathscr{B}(E,F)$. Так как $\|x\|^{-1}\|Ax\| \le \alpha$, то $\|A\| < \infty$. А так как $\|x\|^{-1}\|Ax\| \le \|A\|$, то
$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\| \quad (x \in E).$$
Применяя это неравенство последовательно к операторам $A \in \mathscr{B}(E,F)$, $B \in \mathscr{B}(F,G)$, получаем
$$\|BA\| \le \|B\|\|A\|.$$
В частности, возможно строгое неравенство. Этим норма оператора отличается от абсолютной величины числа.

Упражнение. Доказать, что $\|A\| = \sup\{\|Au\| : u \in E,\, \|u\| \le 1\} = \inf\{\alpha \ge 0 : \|Ax\| \le \alpha\|x\|\,(x \in E)\}$.

4. Рассмотрим произведение $E = \prod E_j$ нормированных пространств E_j $(1 \le j \le n)$, проектор $p_j \colon E \to E_j$ $(p_j(x) = x_j \in E_j$ для $x = (x_l) \in E)$ и вложение $r_j \colon E_j \to E$ с образами $r_j(x_j) = x_j^0 \in E$ $(x_j^0 = (z_l)$, $z_j = x_j$ и $z_l = 0$ при $l \ne j)$. Оператор r_j является изоморфизмом E_j на $E_j^0 = r_j(E_j) \subseteq E$. Ясно, что операторы p_j, r_j, r_jp_j линейны, а отображение $r_jp_j \colon E_j \to E_j$ тождественное.

Предложение. *Линейные операторы p_j, r_j, r_jp_j ограничены и имеют норму* 1.

□ Из определений следует, что $\|p_j(x)\| = \|x_j\| \le \|x\| = \max\|x_l\|$, $\|r_j(x_j)\| = \|x_j\|$ для всех $x = (x_l) \in E$ и $x_j \in E_j$. Поэтому $\|p_j\| \le 1$ и $\|r_j\| = 1$. А так как $\big\|p_j\big(x_j^0\big)\big\| = \big\|x_j^0\big\|$, то $\|p_j\| \ge 1$. Следовательно, композиция r_jp_j тоже ограничена и $\|r_jp_j\| \le 1$. Обратное неравенство $\|r_jp_j\| \ge 1$ вытекает из равенства $r_jp_j\big(x_j^0\big) = x_j^0$. ■

Проектор p_j выделяет j-ю компоненту $x_j \in E_j$ вектора $x = (x_l) \in E$, а вложение отождествляет ее с вектором $x_j^0 \in E_j^0 \subseteq E$. Композиция r_jp_j проектирует пространство E на его подпространство E_j^0: $(r_jp_j)(r_jp_j) = r_j(p_jr_j)p_j = r_jp_j$.

5. Полные отделимые нормированные пространства называются *банаховыми.*

Предложение. *Если F банахово, то и $\mathscr{B} = \mathscr{B}(E, F)$ банахово.*

$\square$ Пусть $T \in \mathscr{B}$ и $\|T\| = 0$. Тогда $\|Tx\| = 0$ и $Tx = 0$ $(x \in E)$, $T = 0$ при отделимом F. Значит, $\mathscr{B}$ отделимое.

Рассмотрим сходящуюся в себе последовательность операторов $T_n \in \mathscr{B}$. Так как $\|T_p x - T_n x\| = \|(T_p - T_n)x\| \le \|T_p - T_n\| \cdot \|x\|$, то последовательность точек $T_n x \in F$ сходится в себе при каждом $x \in E$. Если F полное, то $T_n x$ сходится к некоторой точке $y = \lim T_n x \in F$. Поэтому, если F еще и отделимо, определено отображение $T\colon E \to F$ с образами $Tx = \lim T_n x$ $(x \in E)$. Из линейности операторов T_n и предела $\lim$ следует линейность T.

Докажем, что $T \in \mathscr{B}$ и $T_n \to T$. Пусть $\|T_p - T_n\| \le \varepsilon$ $(p, n \ge n(\varepsilon))$. Тогда $\|T_p x - T_n x\| \le \varepsilon \|x\|$, $\|Tx - T_n x\| \le \varepsilon \|x\|$ $(n \ge n(\varepsilon))$, $\|Tx\| \le \|T_{n(1)} x\| + \|x\| \le (\|T_{n(1)}\| + 1)\|x\|$ $(x \in E)$. Значит, $T \in \mathscr{B}$. Кроме того, из неравенства $\|Tx - T_n x\| \le \varepsilon \|x\|$ $(n \ge n(\varepsilon),\ x \in E)$ следует $\|T - T_n\| \le \varepsilon$ $(n \ge n(\varepsilon))$. Значит, $T_n \to T$ и нормированное пространство $\mathscr{B}$ секвенциально полное. По критерию сходимости Гейне отсюда следует его полнота. $\blacksquare$

Упражнение. Провести доказательство для направленностей операторов.

Замечание. Если $E = F$, то при добавлении композиции операторов в качестве умножения $\mathscr{B}$ становится *нормированной алгеброй.* Если пространство E банахово, то $\mathscr{B}$ является *банаховой алгеброй.* Если $E \ne F$, то пространство $\mathscr{B}$ банахово при банаховом F и любом нормированном E. Всюду дальше, как правило, рассматриваются отделимые пространства.

6. Ограниченность линейного оператора эквивалентна его непрерывности.

Лемма. *Если оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ непрерывен в точке $0 \in E$, то T равномерно непрерывен.*

$\square$ Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\|Tz\| \le \varepsilon$ при $\|z\| \le \delta$. Тогда $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \le \varepsilon$ $(\|x - y\| \le \delta)$. $\blacksquare$

Предложение. *В $\mathscr{L}(E, F)$ ограниченными являются непрерывные операторы и только они.*

$\square$ Пусть оператор $T \in \mathscr{L}(E, F)$ непрерывен. Докажем, что $T \in \mathscr{B}(E, F)$. Если $\|Tz\| \le 1$ $(\|z\| \le \delta,\ z \in E)$ и $x \in E$, $\|x\| \ne 0$, то при $z = \delta \|x\|^{-1} x$ верны соотношения $\delta \|x\|^{-1} \|Tx\| = \|Tz\| \le 1$, $\|Tx\| \le \delta^{-1} \|x\|$. Значит, оператор T ограничен. Непрерывность в точке 0 оператора $T \in \mathscr{B}(E, F)$ вытекает из неравенства $\|Tx\| \leq \alpha\|x\|$ $(x \in E)$. По лемме из непрерывности в точке 0 следует непрерывность T. ■

Замечание. Благодаря линейности равномерная непрерывность оператора $T \in \mathscr{L}(E, F)$ эквивалентна его непрерывности в любой выбранной точке $a \in E$.

7. Рассмотрим открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$ и функцию $f\colon U \to F$. Пространства E и F будем предполагать отделимыми. Заметим, что множество $V = U - u \subseteq E$ открыто вместе с U. Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* u, если существуют ограниченный линейный оператор $dfu\colon E \to F$ и функция $rfu\colon V \to F$, которая мала сравнительно с тождественной функцией $\mathrm{id}\colon V \to E$ и для которой верно равенство

$$\Delta fu(v) = dfu(v) + rfu(v) \quad (v \in V).$$

Оператор $dfu \in \mathscr{B}(E, F)$ называется в этом случае *дифференциалом функции* f *в точке* u, а функция rfu — *остатком* дифференцирования. Сравнительная малость остатка означает, что

$$rfu(0) = 0, \quad \|v\|^{-1}\|rfu(v)\| \to 0 \quad (v \to 0,\ v \neq 0).$$

Фраза *дифференциал* dfu *существует* означает дифференцируемость функции f в точке u.

Теорема. *Если дифференциал* dfu *существует, то он единственный.*

□ Пусть $T \in \mathscr{B}(E, F)$ и $\Delta fu(v) = dfu(v) + rfu(v) = T(v) + o(v)$ $(v \in V)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|(T - dfu)(v)\| = \|T(v) - dfu(v)\| \leq \|rfu(v)\| + \|o(v)\| \leq 2\varepsilon \cdot \|v\|$$

$(\|v\| < \delta)$. Следовательно, $\|T - dfu\| \leq 2\varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$. Значит, $\|T - dfu\| = 0$ и $T = dfu$. ■

Замечание. Остаток $rfu = \Delta fu - dfu$ тоже определен однозначно. Но он играет второстепенную роль и его обычно только оценивают.

Предложение. *Если функция* f *дифференцируема в точке* u, *то* f *непрерывна в точке* u.

□ Так как $f(u+v) = f(u) + dfu(v) + rfu(v)$ $(v \in V)$ и $dfu(v) \to 0$, $rfu(v) \to 0$ при $v \to 0$, $v \neq 0$, то $f(u+v) \to f(u)$ при $v \to 0$, $v \neq 0$. ■

Примеры. 1) Пусть $U = E = F = \mathbb{C}$, $u = 1$ и $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{C})$. Тогда $V = U - 1 = \mathbb{C}$, $\Delta fu(v) = (1+v)^2 - 1 = 2v - v^2$, $dfu(v) = 2v$, $rfu(v) = v^2$ $(v \in \mathbb{C})$.

2) Если $f \in \mathscr{B}(E, F)$, то $dfu = f$ $(u \in U)$.

Если функция $f\colon U \to F$ дифференцируема в каждой точке $u \in A \subseteq U$, то говорят, что f *дифференцируема на* A. Если $A = U$, то f называют *дифференцируемой*.

8. Рассмотрим: произведения $E = \prod E_j$, $F = \prod F_i$ нормированных пространств E_j, F_i $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$; прямоугольник $U = \Pi U_j \subseteq E$ с открытыми сторонами $U_j \subseteq E$; точку $u = (u_j) \in U$; множество $V = U - u$ и множества $V_j = U_j - u_j$; проекторы $p_j\colon E \to E_j$, $q_i\colon F \to F_i$ и вложения $r_j\colon E_j \to E$, $s_i\colon F_i \to F_i$; сдвиг $Tu\colon E \to E$ с образами $Tu(v) = u + v$ $(v \in E)$; отображение $f\colon U \to F$. Будем называть композиции

$$f_{ij}u = q_i \cdot f \cdot Tu \cdot r_j\colon V_j \to F_i$$

частными функциями для f в точке u. По определению,

$$f_{ij}u(v_j) = q_i\bigl(f\bigl(u + v_j^0\bigr)\bigr) \quad (v_j \in V_j).$$

Композиции

$$f_{ij}^0 u = s_i \cdot f_{ij}u \cdot p_j = s_i q_i \cdot f \cdot Tu \cdot r_j p_j\colon V \to F$$

тоже будем называть частными функциями для f в точке u. По определению,

$$f_{ij}^0 u(v) = f_i^0(u + v_j^0) \quad (v \in V).$$

Так как отображения $p_j r_j$, $q_i s_i$ тождественные, то

$$f_{ij}u = q_i \cdot f_{ij}^0 u \cdot r_j.$$

Для приращений частных функций верны равенства

$$\Delta f_{ij}u = q_i \cdot \Delta f_{ij}^0 u \cdot r_j = q_i \cdot \Delta fu \cdot r_j\colon V_j \to F_i,$$
$$\Delta f_{ij}^0 u = s_i \cdot \Delta f_{ij}u \cdot p_j = s_i q_i \cdot \Delta fu \cdot r_j p_j\colon V \to F.$$

Так как при определении частных функций $f_{ij}u$, $f^0_{ij}u$ был использован сдвиг Tu, то с приращением и дифференциалом функции f в точке u связаны приращения и дифференциалы функций $f_{ij}u$, $f^0_{ij}u$ в точках $0_j \in V_j$, $0 \in V$. Чтобы избежать громоздких выражений, будем по аналогии с приращениями $\Delta f_{ij}u$, $\Delta f^0_{ij}u$ обозначать соответствующие дифференциалы $df_{ij}u$, $df^0_{ij}u$. Кроме того, положим

$$\Delta_{ij}fu = \Delta f^0_{ij}u, \quad d_{ij}fu = df^0_{ij}u.$$

Таким образом, по определению,

$$\Delta f_{ij}u = df_{ij}u + rf_{ij}u, \quad \Delta_{ij}fu = d_{ij}fu + r_{ij}fu,$$

где $df_{ij}u \in \mathscr{B}(E_j, F_i)$, $d_{ij}fu \in \mathscr{B}(E, F)$ и $rf_{ij}u = o(v_j)$, $r_{ij}fu = o(v)$. Будем называть $\Delta_{ij}fu$ и $d_{ij}fu$ *частными приращениями* и *частными дифференциалами* функции f в точке u. Эти термины используются также для $\Delta f_{ij}u$ и $df_{ij}u$.

9. Рассмотрим открытое множество $U \subseteq E = \mathbb{K}$, точку $u \in U$, множество $V = U - u$, нормированное пространство $(F, \| \|)$. Каждая линейная функция $l\colon \mathbb{K} \to F$ определяется своим коэффициентом $l(1)$: $l(t) = l(1) \cdot t$ $(t \in \mathbb{K})$. Линейная функция l ограничена на единичном шаре числом $\|l(1)\|$ и поэтому непрерывна. Возьмем дифференцируемую в точке u функцию $f\colon U \to F$. Коэффициент $f'(u) = dfu(1)$ дифференциала dfu называется *производной* функции f в точке u. Дифференциал и производная функции f связаны равенством

$$dfu(v) = f'(u) \cdot v \quad (v \in \mathbb{K}).$$

Предложение. *Если функция f дифференцируема в точке u, то*

$$f'(u) = \lim(v^{-1}\Delta fu(v)) \quad (v \to 0,\ v \neq 0,\ v \in V).$$

□ Так как функция f дифференцируема в точке u, то

$$v^{-1}\Delta fu(v) = v^{-1}dfu(v) + v^{-1}rfu(v) = f'(u) + v^{-1}rfu(v)$$

$(v \to 0$, $v \neq 0$, $v \in V)$. Вследствие сравнительной малости остатка rfu отсюда вытекает нужное равенство. ■

Следствие. *Функция $f\colon U \to F$ дифференцируема в точке u ессли существует предел отношения $|v^{-1}\Delta fu(v)|$ $(v \to 0,\ v \neq 0,\ v \in V)$.*

$\square$ Утверждение *только если* следует из доказанного предложения. Утверждение *если* доказывается следующим образом. Пусть $\lim(v^{-1}\Delta fu(v)) = c$ $(v \to 0,\ v \neq 0,\ v \in V)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|v^{-1}\Delta fu(v) - c\| \leq \varepsilon$ $(0 < |v| \leq \delta,\ v \in V)$, $\|\Delta fu(v) - cv\| \leq v\varepsilon$ $(|v| \leq \delta,\ v \in V)$. Следовательно, функция $rfu\colon V \to F$ со значениями $rfu(v) = \Delta fu(v) - cv$ $(v \in V)$ сравнительно мала и функция f дифференцируема в точке u. $\blacksquare$

Пример. Возьмем банахово пространство с множеством точек $F = \mathbb{K}^m$, евклидовой нормой $\|\,\|$ и стандартной базой. Функция $f\colon U \to F$ определяет координатные функции $f_i\colon U \to F$: $f(t) = (f_i(t))$ $(i \in [1,m],\ t \in U)$. Легко убедиться в том, что $f'(t) = (f_i'(t))$ $(i \in [1,m],\ u \in U)$. В частности, если $U = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, то $f'(u) = (-\sin u, \cos u)^t$, $f_1'(u) = -\sin u$, $f_2'(u) = \cos u$ для $f(u) = (\cos u, \sin u)^t$ и

$$df(u) = f'(u) \cdot v = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix} \cdot v \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Замечание. Для обозначения производных используются многие символы. В частности, вместо $f'(u)$ пишут dfu или Dfu. Такая операторная запись удобна во всех отношениях.

10. Пусть $E_j = \mathbb{K}$, $F_i = \mathbb{L}$ и $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{L}^m$. Тогда $f_{ij}u\colon V_j \to \mathbb{L}$ $(V_j \subseteq \mathbb{K})$: частные функции являются скалярными функциями скалярной переменной. Если существуют частные дифференциалы $df_{ij}u$, то существуют *частные производные* $f_{ij}'(u)$ и

$$df_{ij}u = f_{ij}'u \cdot v_j \quad (v_j \in V_j).$$

Частный дифференциал df_{ij} со значениями $df_{ij}u$ определяет производную f_{ij}' со значениями $f_{ij}'(u)$. Непрерывность df_{ij} эквивалентна непрерывности f_{ij}'. В самом деле,

$$|(df_{ij}(u+z) - df_{ij}u)v_j| \cdot |v_j|^{-1} = \left|f_{ij}'(u+z) - f_{ij}'(u)\right| \quad (v_j \neq 0)$$

и поэтому

$$\|df_{ij}(u+z) - df_{ij}u\| = \left|f_{ij}'(u+z) - f_{ij}'(u)\right| \quad (u, u+z \in U).$$

Рассмотрим матрицы $f'(u) = \big(f'_{ij}(u)\big)$ и $f' = \big(f'_{ij}\big)$, составленные из чисел $f_{ij}(u) \in \mathbb{L}$ и функций $f'_{ij}\colon U \to \mathbb{L}$. Скалярная матрица $f'(u)$ является значением матричной функции f'. Для векторов $dfu(v) = (q_i \cdot dfu(v)) \in \mathbb{L}^m$, $v = (v_j) \in \mathbb{K}^n$ и $m \times n$-матрицы $f'(u) = \big(f'_{ij}(u)\big)$ верно равенство

$$dfu(v) = f'(u) \cdot v,$$

аналогичное равенству для скалярных функций. Будем называть матричную функцию f' *производной* функции f. Матрицу $f'(u)$ называют *матрицей Якоби.* Если f дифференцируема в точке u, то матрица $f'(u)$ существует. Непрерывность производной f' означает непрерывность всех частных производных f'_{ij}.

Пример. Пусть $E = U = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ и $f(x)=(x_1 \sin x_2, x_2 cos x_1, x_1 x_2)^t$. Тогда

$$f'(u) = \begin{pmatrix} \sin u_2 & u_1 \cos u_2 \\ -u_2 \sin u_1 & \cos u_1 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \quad (x = (x_1, x_2),\ u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2).$$

3.2.2. Правила дифференцирования

Удачное применение некоторых простых правил дифференцирования позволяет находить дифференциалы многих функций.

1. Рассмотрим нормированные пространства $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|)$ со скалярными полями $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$); открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$ и множество $V = U - u$; функции $f\colon U \to F$ и $g\colon U \to F$, дифференцируемые в точке u; числа $a, b, c \in \mathbb{L}$.

Предложение. $d(f + g)u = dfu + dgu$, $d(cf)u = c \cdot dfu$.

$\square$ 1) Имеем: $\Delta(f{+}g)u(v) = \Delta fu(v){+}\Delta gu(v) = (dfu{+}dgu)(v){+}(rfu{+}rgu)(v)$ $(v \in V)$. Функция $dfu + dgu$ непрерывна и линейна, а $rfu + rgu$ сравнительно мала. Поэтому функция $f + g$ дифференцируема в точке u и верно первое из доказываемых равенств.

2) Имеем: $\Delta(cf)u(v) = c\Delta fu(v) = (c \cdot dfu)(v) + (c \cdot rfu)(v)$. Функция $c \cdot dfu$ непрерывна и линейна, а $c \cdot rfu$ сравнительно мала. Поэтому функция cf дифференцируема в точке u и верно второе из доказываемых равенств. $\blacksquare$

Из этого предложения вытекает правило дифференцирования линейной комбинации.

Следствие. $d(af + bg)u = f \cdot dfu + b \cdot dgu$.

2. Рассмотрим нормированные пространства E, F, G, H с одинаково обозначенными нормами $\| \; \|$; открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$ и множество $V = U - u$; функции $f\colon U \to F$ и $g\colon U \to F$, дифференцируемые в точке u.

Рассмотрим также нормированное пространство $F \times G$ с нормой

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad (x \in F,\ y \in G).$$

Непрерывные билинейные функции условимся называть *произведениями.* Выберем произведение $(x, y) \to xy$ на $F \times G$ со значениями в H. Вместе с функциями f, g оно определяет функцию $fg\colon U \to H$ со значениями $(fg)(t) = f(t)g(t)$ $(t \in U)$. Она называется *произведением функций* f, g. Легко доказать, что произведение fg дифференцируемо в точке u и его дифференциал $d(fg)u$ получается поочередным дифференцированием множителей. При доказательстве будет использован следующий критерий непрерывности для билинейных отображений.

Лемма. *Билинейная функция непрерывна ессли она ограничена на единичном шаре.*

□ Рассмотрим билинейную функцию $(x, y) \to xy$.

1) Если эта функция непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|pq\| \leq \varepsilon$ $(\|(p, q)\| \leq \delta,\ p \in F,\ q \in G)$. Пусть $\|(x, y)\| \leq 1$, $x \in F$, $y \in G$. Тогда $\|(p, q)\| = \|\delta(x, y)\| \leq \delta$ при $(p, q) = \delta(x, y)$, $(x, y) = \delta^{-1}(p, q) = (\delta^{-1}p, \delta^{-1}q)$ и $\|xy\| = \|\delta^{-1}p \cdot \delta^{-1}q\| = \delta^{-2}\|pq\| \leq \delta^{-2}\varepsilon = r$. Значит, функция $(x, y) \to xy$ ограничена на единичном шаре $\bar{B}(0, 1) \subseteq F \times G$.

2) Если рассматриваемая функция ограничена на единичном шаре, то $\|xy\| \leq c$ $(\|(x, y)\| \leq 1,\ x \in F,\ y \in G)$ для некоторого конечного $c > 0$. Пусть $\delta > 0$, $a, p \in F$, $b, q \in G$, $\|(p, q)\| \leq \delta$. Тогда $\|(x, y)\| = \|\delta^{-1}(p, q)\| \leq 1$ при $(x, y) = \delta^{-1}(p, q)$, $(p, q) = \delta(x, y) = (\delta x, \delta y)$ и $\|aq\| = \|a\|\|a\|^{-1}\|a \cdot \delta y\| = (\|a\|\delta)\|\|a\|^{-1}a \cdot y\| \leq \|a\|\delta c$, $\|pb\| = \|\delta x \cdot \|b\|\|b\|^{-1}b\| = (\delta\|b\|)\|x \cdot \|b\|^{-1}b\| \leq \delta\|b\|c$, $\|pq\| = \|\delta x \cdot \delta y\| = \delta^2\|xy\| \leq \delta^2 c$. Поэтому $\|(a + p)(b + q) - ab\| \leq \|aq\| + \|pb\| + \|pq\| \leq (\|a\| + \|b\| + \delta)c\delta$ и, следовательно, функция $(x, y) \to xy$ непрерывна. ■

Предложение. $d(fg)u(v) = dfu(v) \cdot g(u) + f(u) \cdot dgu(v)$.

□ Имеем: $\Delta(fg)u(v) = f(u + v)g(u + v) - f(u)g(u) = (f(u) + dfu(v) + rfu(v))(g(u) + dgu(v) + rgu(v)) - f(u)g(u) = l(v) + r(v)$ $(v \in$

V), $l(v) = dfu(v) \cdot g(u) + f(u) \cdot dgu(v)$ ($v \in E$), $r(v) = f(u) \cdot rgu(v) + dfu(v) \cdot (dgu(v) + rgu(v)) + rfu(v) \cdot (g(u) + dgu(v) + rgu(v))$ ($v \in V$). Функция $l = dfu \cdot g(u) + f(u) \cdot dgu$ со значениями $l(v)$ непрерывна и линейна. Функция $r(v)$ сравнительно мала. Действительно, используя лемму, определение сравнительной малости и неравенство для нормы непрерывной линейной функции, находим, что для каждого $\varepsilon \in]0, 1[$ существуют $\delta \in]0, 1[$ и $c > 0$ такие, что $\|f(u) \cdot rgu(v)\| \leq c\|f(u)\| \cdot \|rgu(v)\| \leq c\|f(u)\| \cdot \varepsilon\|v\| \|dfu(v) \cdot (dgu(v) + rgu(v))\| \leq c\|dfu(v)\| \|dgu(v) + rgu(v)\| \leq c\|dfu\| \|v\| (\|dgu\| \|v\| + \varepsilon\|v\|) \leq c\|dfu\| (\|dgu\| + \varepsilon) \|v\|^2$, $\|rfu(v) \cdot (g(u) + dgu(v) + rgu(v))\| \leq c\|rfu(v)\| \; \|g(u) + dgu(v) + rgu(v)\| \leq c(\|g(u)\| + \|dgu\| \|v\| + \varepsilon\|v\|) \cdot \varepsilon\|v\| \|r(v)\| \leq c(\|f(u)\| + \|g(u)\| + (\|dfu\| + 1)(\|dgu\| + 1)) \cdot \varepsilon\|v\|$ ($\|v\| \leq \delta$, $v \in V$). Следовательно, функция fg дифференцируема в точке u и верно доказываемое равенство. ■

3. Рассмотрим нормированные пространства E, F, G с одинаково обозначенными нормами $\| \; \|$; открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$ и множество $V = U - u$; открытое множество $Y \subseteq F$, точку $y \in Y$ и множество $Z = Y - y$; функции $f \colon U \to F$ и $g \colon Y \to G$, дифференцируемые в точках u и y. Пусть $f(U) \subseteq Y$ и $f(u) = y$. Тогда сложная функция $g \circ f \colon U \to G$, составленная из f и g, дифференцируема в точке u и ее дифференциал $d(g \circ f)u$ составляется из дифференциалов dfu и dgy.

Теорема. $d(g \circ f)u = dgy \circ dfu$.

□ Имеем: $\Delta(g \circ f)u(v) = \Delta gy(\Delta fu(v)) = dgy(\Delta fu(v)) + rgy(\Delta fu(v)) = dgy(dfu(v) + rfu(v)) + rgy(\Delta fu(v)) = dgy(dfu(v)) + dgy(rfu(v)) + rgy(\Delta fu(v)) = l(v) + r(v)$ ($v \in V$), $l(v) = dgy(dfu(v))$ ($v \in E$), $r(v) = dgy(rfu(v)) + rgy(\Delta fu(v))$ ($v \in V$). Функция $l = dgy \circ dfu$ со значениями $l(v)$ непрерывна и линейна. Функция r сравнительно мала. Действительно, используя определение сравнительной малости и неравенство для нормы непрерывной линейной функции находим, что для каждого $\varepsilon \in]0, 1[$ существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\|dgy(rfu(v))\| \leq \|dgy\| \|rfu(v)\| \leq \|dgy\| \cdot \varepsilon\|v\|,$$

$$\|\Delta fu(v)\| \leq \|dfu(v)\| + \|rfu(v)\| \\ \leq \|dfu\| \|v\| + \varepsilon\|v\| \leq (\|dfu\| + 1)\|v\|$$

($\|v\| \leq \alpha$, $v \in V$). В то же время существует $\beta > 0$, при котором $\|rgy(z)\| \leq \varepsilon\|z\|$ ($\|z\| \leq \beta$, $z \in Z$). Поэтому $\|rgy(\Delta fu(v))\| \leq$

$\varepsilon\|\Delta fu(v)\| \le \varepsilon(\|dfu\|+1)\|v\|$, $\|r(v)\| \le (\|dfu\|+\|dgy\|+1)\varepsilon\|v\|$, $\|v\| \le \delta = \min\{\alpha, (1+|dfu\|)^{-1}\beta\}$, $v \in V$. Следовательно, функция $g \circ f$ дифференцируема в точке u и верно доказываемое равенство. ■

Рассмотрим стандартные евклидовы пространства $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $G = \mathbb{R}^l$. В этом случае дифференциалы dfu, dgy, $d(g\circ f)u$ определяются своими матрицами $f'(u)$, $g'(y)$, $(g \circ f)'(u)$ в стандартных базах. Эти матрицы называются производными. Для них верны равенства

$$dfu(v) = f'(u)\cdot v, \quad dgy(z) = g'(y)\cdot z,$$
$$d(g\circ f)u(v) = (g\circ f)'(u)\cdot v \quad (v \in E,\ z \in F).$$

Так как матрица сложного линейного отображения равна произведению составляющих его линейных отображений, то из доказанной теоремы вытекает

Следствие. $(g\circ f)'(u) = g'(f(u))\cdot f'(u)$.

4. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$, $U = E$, $Y = F$; $t = (t_1, t_2)$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$; $f(t) = (t_1\cdot \sin t_2, t_2\cdot \cos t_1, t_1 t_2)$, $g(x) = (x_1x_2x_3, x_3^2)$, $h(t) = (g\circ f)(t) = (t_1^2t_2^2\cos t_1\cdot \sin t_2, t_1^2t_2^2)$,

$$f'(u) = \begin{pmatrix} \sin u_2 & u_1\cdot\cos u_2 \\ -u_2\cdot\sin u_1 & \cos u_1 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}, \quad g'(y) = \begin{pmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{pmatrix},$$

$$h'(u) = (g\circ f)'(u) = g'(f(u))\cdot f'(u) =$$
$$\begin{pmatrix} u_1u_2^2\cdot\cos u_1 & u_1^2u_2\cdot\sin u_2 & u_1u_2\cdot\cos u_1\cdot\sin u_2 \\ 0 & 0 & 2u_1u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin u_2 & u_1\cdot\cos u_2 \\ -u_2\cdot\sin u_1 & \cos u_1 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}$, $U =]-2^{-1}, 2^{-1}[$, $Y = B(0,1)$; $t, u \in U$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in Y$; $f(t) = (t, (2^{-1} - t^2)^{1/2})$, $g(x) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2})$, $(g\circ f)(t) = 2^{-1/2}$;

$$f'(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -u(2^{-1}-u^2)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad g'(y) = -(1-y_1^2-y_2^2)^{-1/2}(y_1, y_2),$$

$$(g\circ f)'(u) = g'(f(u))\cdot f'(u)$$
$$= -2^{-1}(u, (2^{-1}-u^2)^{1/2})\begin{pmatrix} 1 \\ -u(2^{-1}-u^2)^{-1/2} \end{pmatrix} = -2^{-1}(u-u) = 0.$$

Пример 3. $E = F = G = \mathbb{R}^2$, $U = E$, $Y = F$; $t = (t_1, t_2)$, $u = (u_1, u_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$; $f(t) = (t_1 \cdot \cos t_2, t_1 \cdot \sin t_2)$, $g(x) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 - x_2)$, $(g \circ f)(t) = (t_1^2, t_1 \cdot (\cos t_2 - \sin t_2))$,

$$f'(u) = \begin{pmatrix} \cos u_2 & -u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_2 & u_1 \cdot \cos u_2 \end{pmatrix}, \quad g'(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(u) &= g'(f(u)) \cdot f'(u) \\ &= \begin{pmatrix} 2u_1 \cos u_2 & 2u_1 \cdot \sin u_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u_2 & -u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_2 & u_1 \cdot \cos u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 \\ \cos u_2 - \sin u_2 & -u_1(\cdot \sin u_2 + \cos u_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.2.3. Теорема Лагранжа

Эту теорему можно считать основной теоремой дифференциального исчисления. Она устанавливает связь между дифференциалом и изменением функции.

1. Рассмотрим открытый интервал $U \subseteq \mathbb{R}$, нормированное пространство $(F, \| \ \|)$, дифференцируемые функции $h\colon U \to F$ и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$.

Теорема Лагранжа. *Если* $\|h'(u)\| < \varphi'(u)$ $(u \in U)$, *то*

$$\|h(t) - h(u)\| < \varphi(t) - \varphi(u) \quad (t > u;\ t, u \in U).$$

□ Предположим, что теорема не верна и, значит, существуют точки $t_0 > u_0$ интервала U, для которых $\|h(t_0) - h(u_0)\| \geq \varphi(t_0) - \varphi(u_0)$. Возьмем натуральное число n. Пусть

$$\|h(t_n) - h(u_n)\| \geq \varphi(t_n) - \varphi(u_n) \tag{1}$$

для точек $t_n > u_n$ интервала U. Тогда для $c_n = 2^{-1}(u_n + t_n)$ верно хотя бы одно из неравенств

$$\|h(t_n) - h(c_n)\| \geq \varphi(t_n) - \varphi(c_n), \quad \|h(c_n) - h(u_n)\| \geq \varphi(c_n) - \varphi(u_n).$$

Если верно первое, то возьмем $u_{n+1} = c_n$, $t_{n+1} = t_n$. Если первое неравенство не верно, то возьмем $u_{n+1} = u_n$, $t_{n+1} = c_n$. В любом случае $\|h(t_{n+1}) - h(u_{n+1})\| \geq \varphi(t_{n+1}) - \varphi(u_{n+1})$. По принципу индукции из сказанного следует, что существует стягивающаяся последовательность отрезков $[u_n, t_n]$ $(t_n - u_n \to 0)$, для концов которых верно неравенство (1). Эта последовательность стягивается к некоторой точке $c \in U$: $t_n \downarrow c \uparrow u_n$, $\cap[u_n, t_n] = \{c\}$. Докажем, что существует сходящаяся к c последовательность точек $s_n \in U$, для которых

$$\|(s_n - c)^{-1}(h(s_n) - h(c))\| \geq (s_n - c)^{-1}(\varphi(s_n) - \varphi(c)). \qquad (2)$$

Из неравенства (1) и непрерывности функций h, φ следует, что для каждого n верно хотя бы одно из неравенств

$$\|h(t_n) - h(c)\| \geq \varphi(t_n) - \varphi(c), \quad \|h(c) - h(u_n)\| \geq \varphi(c) - \varphi(u_n). \quad (3)$$

При этом существует три возможности: $u_n < c < t_n$, $u_n = c < t_n$, $u_n < c = t_n$. Если верны $u_n < c < t_n$ и первое из неравенств (3), то возьмем $s_n = t_n$. Если верно $u_n < c < t_n$ и не верно первое из неравенств (3), то возьмем $s_n = u_n$. Если $u_n = c < t_n$, то неравенство (1) влечет первое из неравенств (3) и берется $s_n = t_n$. Наконец, если $u_n < c = t_n$, то верно второе из неравенств (3) и можно взять $s_n = u_n$. Во всех случаях верно неравенство (2). Так как $u_n \to c$ и $t_n \to c$, то $s_n \to c$. Из неравенств (2) следует, что $\|h'(c)\| \geq \varphi'(u)$. Это противоречит условию теоремы. ■

Замечание. Аналогичная теорема для произвольного открытого множества $U \in \mathbb{R}$ не верна.

Упражнение. Привести контрпримеры.

2. Рассмотрим несколько следствий теоремы Лагранжа. Сохраним обозначения п. 1, где U — *открытый интервал* в $\mathbb{R}$.

Следствие 1. *Если* $\|h'(u)\| \leq \varphi'(u)$ $(u \in U)$, *то*

$$\|h(t) - h(u)\| \leq \varphi(t) - \varphi(u) \quad (t \geq u;\ t, u \in U).$$

□ Если $u = t$, то доказываемое неравенство эквивалентно равенству $0 = 0$. Для каждого номера $n > 0$ возьмем функцию $\varphi_n \colon U \to \mathbb{R}$ со значениями $\varphi_n(t) = \varphi(t) + n^{-1}t$ $(t \in U)$. Эта функция дифференцируема и $\varphi_n'(u) = \varphi'(u) + n^{-1} > \varphi'(u) \geq \|h'(u)\|$ $(u \in U)$. По теореме Лагранжа отсюда вытекает, что

$$\|h(t) - h(u)\| < \varphi_n(t) - \varphi_n(u) = \varphi(t) - \varphi(u) + n^{-1}(t - u) \quad (t > u).$$

Следовательно, доказываемое неравенство верно. ■

Рассмотрим число $c \geq 0$.

Следствие 2. *Если* $\|h'(u)\| \le c$ $(u \in U)$, *то*

$$\|h(t) - h(u)\| \le c(t-u) \quad (t \ge u;\ t, u \in U).$$

$\square$ Возьмем функцию $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ со значениями $\varphi(t) = ct$ $(t \in U)$. Она дифференцируема и $\varphi'(u) = c$ $(u \in U)$. Доказываемое неравенство вытекает из следствия 1. $\blacksquare$

3. Рассмотрим: нормированные пространства $(F, \|\ \|)$, $(G, \|\ \|)$, открытое множество $Y \subseteq F$, функцию $g\colon Y \to G$, точки $a, b \in F$ $(a \ne b)$, число $c \ge 0$, $[a,b] = \{x = a+t(b-a) : t \in [0,1]\} \subseteq Y$, $]a,b[\ = \{x = a + t(b-a) : t \in\ ]0,1[\} \subseteq [a,b]$. Предположим, что функция g непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала $]a,b[$.

Следствие 3. $\|dgy\| \le c$ $(y \in]a,b[) \Rightarrow \|g(b) - g(a)\| \le c|b-a|$.

$\square$ Рассмотрим функцию $f\colon]0,1[\ \to F$ со значениями $f(t) = a+t(b-a)$ $(t \in\ ]0,1[)$ и функцию $h = g \circ f$. Функция f дифференцируема и $f'(u) = b-a$ $(u \in\ ]0,1[)$. Следовательно, функция h дифференцируема и $dhu(v) = dgy(dfu(v)) = dgy((b-a)v) = dgy(b-a) \cdot v$, $h'(u) = dgy(b-a)$, $\|h'(u)\| \le \|dgy\|\|b-a\| \le c\|b-a\|$ $(u \in\ ]0,1[$, $v \in \mathbb{R}$, $y = f(u))$. Откуда $\|h(x) - h(y)\| \le c\|b-a\|$ при $x = f(t)$, $y = f(u)$ для каждых $t > u$ из интервала $]0,1[$. Так как $f(t) \to b$ $((t \to 1)$, $f(u) \to a$ $(u \to 0)$ и функция g непрерывна в точках a, b, то $h(x) = g(f(t)) \to g(b)$ $(t \to 1)$, $h(y) = g(f(t)) \to g(a)$ $(t \to 0)$ и из полученного неравенства следует доказываемое. $\blacksquare$

Для каждого $y \in\ ]a,b[$ выберем число $c(y) \ge 0$. По-прежнему будем предполагать, что функция g непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $]a,b[$.

Следствие 4. *Если* $\|dg(x) - dg(y)\| \le c(y)$ $(x \in\ ]a,b[)$, *то*

$$\|g(b) - g(a) - dgy(b-a)\| \le c(y)\|b-a\|.$$

$\square$ Рассмотрим функцию $h\colon Y \to G$ со значениями $h(x) = g(x) - dgy(x)$ $(x \in Y)$. Эта функция непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на $]a,b[$ вместе с функциями g, dgy и $dhx = dgx - dgy$ $(x \in\ ]a,b[)$. По условию $\|dhx\| = \|dgx - dgy\| \le c(y)$ $(x \in\ ]a,b[)$. Так как $h(b) - h(a) = (g(b) - dgy(b)) - (g(a) - dgy(a)) = g(b) - g(a) - (dgy(b) - dgy(a)) = g(b) - g(a) - dgy(b-a)$, то доказываемое неравенство вытекает из следствия 3. $\blacksquare$

Замечание. Следствие 4 дает оценку для смешанного остатка $\Delta ga(b-a) - dgy(b-a)$ $(y \neq a)$.

4. Предположим дополнительно, что открытое множество $Y \subseteq F$ выпуклое, а функция $g\colon Y \to G$ дифференцируема. Из следствия 3 непосредственно вытекает $(x, y \in Y)$

Следствие 5. $\|dgy\| \leq c$ $(y \in Y) \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|$.

Замечание. В этом случае говорят, что функция g удовлетворяет *условию Липшица с коэффициентом* c. Следствие 5 утверждает, что если функция на открытом выпуклом множестве имеет ограниченный дифференциал, то она удовлетворяет условию Липшица.

Пусть теперь открытое множество Y связно, а рассматриваемая функция $g\colon Y \to G$ по-прежнему дифференцируема.

Следствие 6. *Функция g равна постоянной ессли $dgy = 0$ в каждой точке $y \in Y$.*

$\square$ 1) Если $g(y) = q \in G$ $(y \in Y)$, то $\Delta gy(z) = g(y+z) - g(y) = q - q = 0$ $(z \in Y - y)$, функция $g\colon Y \to G$ дифференцируема и $dgy = 0$ $(y \in Y)$.

2) Для каждой точки $x \in Y$ возьмем шар $B(x,r) \subseteq Y$. По следствию 5 из $dgy = 0$ $(y \in Y)$ вытекает, что $g(x) = g(y)$ при $y \in B(x,r)$. Функция g на каждом шаре в Y равна некоторой постоянной (локально постоянна). Вследствие связности множества Y отсюда вытекает, что g равна некоторой постоянной на всем Y. Действительно, возьмем $a \in Y$, $p = g(a) \in G$, $A = g^{-1}(p)$, $B = Y - A$. Множество A открыто: если $x \in A$, то $g(y) = g(x) = p$, $y \in A$ при $y \in B(x,r)$ и $B(x,r) \subseteq A$. Так как функция g непрерывна и множество $F \setminus \{p\}$ открыто, то множество $B = g^{-1}(F \setminus \{p\})$ открыто. Открытые множества A, B не пересекаются и в сумме равны Y. Так как множество Y связно, то хотя бы одно из них должно быть пустым. Множеству A принадлежит точка a и оно не пусто. Следовательно, $B = O$, $A = Y$, $g(x) = g(a)$ $(x \in Y)$. $\blacksquare$

Замечание. Если $Y = U \subseteq \mathbb{R}$ — интервал, то в этом случае следствие 6 сразу вытекает из следствия 2 при $c = 0$.

5. Рассмотрим нормированные пространства E и F, открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$ и отображение $f\colon U \to F$.

Предположим, что для каждого $v \in E$ существует предел

$$d_w fu(v) = \lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{f(u+tv)-f(u)}{t} \quad (t \in \mathbb{R},\ u+tv \in U).$$

Если $d_w fu\colon E \to F$ со значениями $d_w fu(v)$ есть ограниченный линейный оператор, то $d_w fu$ называется *слабым дифференциалом* или *дифференциалом Гато* функции f в точке u. Для контраста обычный дифференциал dfu называют *сильным дифференциалом* (или *дифференциалом Фреше*).

Ясно, что сильная дифференцируемость влечет слабую и равенство $dfu = d_w fu(v)$. Обратное не верно даже в случае конечномерного пространства E.

Контрпример [45, гл. 10, § 1]. Пусть $U = E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 (x_1^4 + x_2^2)^{-1}$ $((x_1,x_2) \neq (0,0))$, $f(0,0) = 0$. Тогда $d_w fu(v) = 0$ при $u = (0,0)$, а dfu не существует.

Для слабых дифференциалов не верно правило дифференцирования сложных функций.

Упражнение. Привести контрпримеры.

Предположим дополнительно, что пространства $(E, \|\ \|)$ и $(F, \|\ \|)$ банаховы, а функция f слабо дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b] \subseteq U$. Из теоремы Лагранжа и Хана — Банаха следует [45, гл. 10, § 1], что

$$\|f(b)-f(a)-d_w fa\cdot v\| \le \sup_{0\le\theta\le 1} \|d_w f(a+\theta(b-a))-d_w fa\|\cdot\|b-a\|. \quad (1)$$

Достаточное условие сильной дифференцируемости формулирует

Теорема. *Если $d_w f$ определен на некоторой окрестности точки u и непрерывен в точке u, то df существует и $dfu = d_w fu$.*

□ По условию для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|d_w f(u+v) - d_w fu\| \le \varepsilon \quad (\|v\| \le \delta). \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует

$$\|f(u+v) - f(u) - d_w fu\cdot v\| \le \varepsilon\|v\| \quad (\|v\| \le \delta). \quad (3)$$

Неравенство (3) эквивалентно утверждению теоремы. ■

Пример. Рассмотрим пространство $E = H$, $U = E$, $F = \mathbb{R}$ и функционал $f\colon \mathbb{R} \to$, $f(x) = \|x\|^2$ $(x \in H)$. Тогда $dfu\cdot v = d_w fu\cdot v = 2u\cdot v$ $(u, v \in H.)$

Упражнение. Исследовать дифференцируемость $g(x) = \|x\|$ $(x \in H)$.

3.2.4. Почленное дифференцирование

Рассмотрим: нормированные пространства $(F, \| \|)$, $(G, \| \|)$, открытое множество $Y \subseteq F$, некоторую точку $a \in Y$ и последовательность дифференцируемых функций $g_n \colon Y \to G$. Будем предполагать, что пространство G банахово, а множество Y связно.

1. Когда для каждой $y \in Y$ существует окрестность $B(y, r) \subseteq Y$, на которой последовательность функций $f_n \colon Y \to G$ сходится к функции $f \colon Y \to G$ равномерно, условимся говорить, что последовательность f_n сходится к f *локально равномерно.* Скажем, что последовательность дифференцируемых функций $g_n \colon Y \to G$ *почленно дифференцируема*, если последовательность функций $g_n \colon Y \to G$ сходится к некоторой функции $g \colon Y \to G$ локально равномерно и последовательность дифференциалов $dg_n \colon Y \to \mathscr{L}(E, F)$ сходится к дифференциалу $dg \colon Y \to \mathscr{L}(E, F)$ локально равномерно.

Предположим, что открытое множество $Y = B$ выпукло. Докажем лемму о равномерной сходимости.

Лемма. *Если последовательность дифференциалов dg_n сходится равномерно, а последовательность точек $g_n(a)$ сходится, то последовательность функций g_n почленно дифференцируема и на каждой ограниченной части множества B сходится равномерно.*

$\square$ По условию для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер l такой, что $\|g_n(a) - g_m(a)\| \le \varepsilon$, $\|d(g_n - g_m)y\| = \|dg_n y - dg_m y\| \le \varepsilon$ $(y \in B)$ при $n, m \ge l$. Вследствие выпуклости B отсюда вытекает, что $\|(g_n - g_m)(x) - (g_n - g_m)(a)\| \le \varepsilon\|x - a\|$ $(x \in B)$, $\|g_n(x) - g_m(x)\| \le \|g_n(a) - g_m(a)\| + \varepsilon\|x - a\| \le (1 + r)\varepsilon$ $(\|x - a\| \le r,$ $x \in B)$ для каждых $r > 0$ и $n, m \ge l$. Так как пространство G полное, то последнее неравенство влечет равномерную на каждой ограниченной части множества B сходимость последовательности функций g_n к некоторой функции $g \colon B \to G$. Она дифференцируема и ее дифференциал dgy равен пределу последовательности дифференциалов dg_n в каждой точке $y \in B$. Докажем это. Пусть $y \in B$ и $hy = \lim dg_n y \in \mathscr{L}(E, F)$. Тогда

$$\|g(x) - g(y) - hy(x - y)\| \le \|(g(x) - g(y)) - (g_n(x) - g_n(y))\|$$
$$+ \|g_n(x) - g_n(y) - dg_n(x - y)\| + \|dg_n(x - y) - hy(x - y)\| \quad (x \in B).$$

Было доказано, что последовательности функций g_n сходится в каждой точке множества B. Поэтому полученное для разности значений функции $g_n - g_m$ в точках x, a неравенство верно при замене точки a на точку y. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что $\|dg_m y(x-y) - hy(x-y)\| = \|(dg_m y - hy)(x-y)\| \le \|dg_m y - hy\|\,\|x-y\| \le \varepsilon\|x-y\|$, $\|(g_n(x) - g_n(y)) - (g_m(x) - g_m(y))\| = \|(g_n - g_m)(x) - (g_n - g_m)(y)\| \le \varepsilon\|x-y\|$ при $n \ge m$ и $x \in B$. Следовательно, $\|(g(x) - g(y)) - (g_m(x) - g_m(y))\| \le \varepsilon\|x-y\|$ $(x \in B)$. В то же время существует число $\delta > 0$ такое, что $\|g_m(x) - g_m(y) - dg_m y(x-y)\| = \|rg_m y(x-y)\| \le \varepsilon\|x-y\|$ $(\|x-y\| \le \delta,\ x \in B)$. Значит, функция g дифференцируема в точке y и $dgy = hy$. ■

2. Пусть теперь открытое множество Y связно.

Теорема. *Если последовательность dg_n сходится локально равномерно, а последовательность $g_n(a)$ сходится, то последовательность g_n почленно дифференцируема.*

□ По условию для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность $B(y,r) \subseteq Y$ $(r \in\,]0,\infty[)$, на которой последовательность дифференциалов dg_n сходится равномерно. Если последовательность точек $g_n(y)$ сходится, то по лемме п. 1 сходится последовательность точек $g_n(x)$ при каждом $x \in B(y,r)$. Значит, множество A всех точек $y \in Y$, при которых последовательность точек $g_n(y)$ сходится, открыто. Множество $B = Y \setminus A$ тоже открыто. Действительно, возьмем точку $y \in B$ и ее окрестность $B(y,r) \subseteq Y$ $(r \in]0,\infty[)$, на которой последовательность дифференциалов dg_n сходится равномерно. Если последовательность точек $g_n(x)$ сходится для некоторой точки $x \in B(y,r)$, то по лемме п. 1 сходится последовательность точек $g_n(y)$ и $y \in A$, что невозможно. Значит, $B(y,r) \subseteq B$. По условию $a \in A$ и $A \ne O$. Вследствие связности Y отсюда следует, что $B = O$ и $A = Y$. Таким образом, существует функция $g\colon Y \to G$ со значениями $g(x) = \lim g_n(x)$ $(x \in Y)$.

Возьмем точку $y \in Y$ и ее окрестность $B(y,r) \subseteq Y$, на которой последовательность дифференциалов dg_n сходится равномерно. По лемме отсюда следует, что функция g дифференцируема в каждой точке $x \in B(y,r)$, последовательность функций g_n сходится к g равномерно на $B(y,r)$ и последовательность дифференциалов dg_n сходится к дифференциалу g равномерно на $B(y,r)$. ■

3. Пусть $F = \mathbb{R}$. Тогда для каждой дифференцируемой функции $g_n\colon Y \to G$ определена производная $g_n'\colon Y \to G$.

Лемма. *Последовательность* $g_n\colon Y \to G$ *почленно дифференцируема ессли она сходится к некоторой дифференцируемой* $g\colon Y \to G$ *локально равномерно и последовательность* $g'_n\colon Y \to G$ *сходится к* $g'\colon Y \to G$ *локально равномерно.*

$\square$ Это следует из равенств $\|g'(y) - g'(y)\| = \|dgy(1) - dg_n y(1)\| = \|d(g - g_n)y(1)\| = \|d(g - g_n)y\| = \|dgy - dg_n y\|$, верных для каждых $n \in \mathbb{N}$, $y \in Y$, и определений. $\blacksquare$

Открытыми связными множествами в $\mathbb{R}$ являются открытые интервалы и только они. Каждый интервал выпуклый. Пусть $Y = B \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал. Из леммы и теоремы о почленном дифференцировании вытекают

Следствие 1. *Если последовательность производных* g'_n *сходится равномерно, а последовательность точек* $g_n(a)$ *сходится, то последовательность функций* g_n *почленно дифференцируема и на каждой ограниченной части множества* B *сходится равномерно.*

Следствие 2. *Если последовательность производных* g'_n *сходится локально равномерно, а последовательность точек* $g_n(a)$ *сходится, то последовательность функций* g_n *почленно дифференцируема.*

Замечание. Из утверждений о почленном дифференцировании последовательностей получаются аналогичные утверждения о почленном дифференцировании сумм.

Упражнение. Сформулировать и доказать эти утверждения.

3.2.5. Полные дифференциалы

Продолжим исследование связей между полными и частными дифференциалами, начатое в 3.2.1, 8.

1. Если дифференциалы $df_{ij}u$, $d_{ij}fu$, dfu существуют в каждой точке $u \in U$, то определены $df_{ij}\colon U \to \mathscr{B}(E_j, F_i)$, $d_{ij}f\colon U \to \mathscr{B}(E, F)$, $df\colon U \to \mathscr{B}(E, F)$, отображающие точку u в линейные операторы $df_{ij}u$, $d_{ij}fu$, dfu. Отображения df_{ij}, $d_{ij}f$, df называются *частными* и *полными дифференциалами* функции f. Если полный дифференциал df существует и непрерывен, то говорят, что функция f *непрерывно дифференцируема.* Непрерывно дифференцируемые функции часто называют *гладкими.*

Замечание. Непрерывная дифференцируемость частных функций не эквивалентна непрерывности частных дифференциалов.

Контрпример. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ со значениями $f(x) = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)$ $(x = (x_1, x_2) \neq (0,0))$, $f(0,0) = 0$. Ее частные функции $f_1u(v_1) = (u_1 + v_1)u_2((u_1 + v_1)^2 + u_2^2)$, $f_2 = u_1(u_2 + v_2)(u_1^2 + (u_2 + v_2)^2)$ в точке $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$ и их производные

$$f_1'u(0) = -u_2(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 + u_2^2)^{-2}, \quad f_2'u(0) = -u_1(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 + u_2^2)^{-2}.$$

Пусть $\delta > 0$ и $u_1 = \delta$, $u_2 = 2\delta$. Тогда частные производные f по первой и второй переменной $f_1'u(0) = (6,5^{-2}\delta^{-1}, 0)$, $f_2'u(0) = (0, 6,5^{-2}\delta^{-1})$. Следовательно, при $v_j = \delta$ $(j = 1,2)$, $\|df_{1j}u(v)\| = 6,5^{-2}\|\delta^{-1}v_j\|$, $\|df_{1j}u\| \geq 6,5^{-2}$ для $\|u\| = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\} = 2\delta$. Значит, частные дифференциалы df_j имеют разрыв в точке $u = (0,0)$. А частные функции $f_ju\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в этой точке равны нулю и поэтому непрерывно дифференцируемы.

2. Дифференциалы ограниченных линейных операторов p_j, q_i, r_j, s_i равны этим операторам. Дифференцируя связывающие функции $f_{ij}u$, f_{ij}^0u и f композиции, получаем аналогичные равенства для их дифференциалов: $df_{ij}u = d(q_i \cdot f \cdot Tu \cdot r_j)0_j = q_i \cdot d(f \cdot Tu \cdot r_j)0_j = q_i \cdot dfu \cdot r_j$, $d_{ij}fu = df_{ij}^0u = s_iq_i \cdot dfu \cdot r_jp_j$, $df_{ij}u = q_i \cdot d_{ij}fu \cdot r_j$, $d_{ij}fu = s_i \cdot df_{ij}u \cdot p_j$. В этих равенствах предполагается, что дифференциалы в правых частях существуют. По правилу дифференцирования сложных функций это обеспечивает существование дифференциалов в левых частях и сами равенства.

Предложение. *Если полный дифференциал dfu существует, то существуют все частные дифференциалы $df_{ij}u$, $d_{ij}fu$ и верно равенство $dfu = \sum d_{ij}fu$.*

□ Существование частных дифференциалов следует из теоремы о дифференцировании сложных функций. Нужное равенство следует из равенств $\sum s_iq_i = id_F$, $\sum r_jp_j = id_E$, $d_{ij}fu = s_iq_i \cdot dfu \cdot r_jp_j$ и линейности рассматриваемых операторов: $dfu = id_F \cdot dfu \cdot id_E = \sum s_iq_i \cdot dfu \cdot \sum r_jp_j = \sum\limits_{ij}(s_iq_i \cdot dfu \cdot r_jp_j) = \sum\limits_{ij} d_{ij}fu$. ■

Замечание. Частные дифференциалы могут существовать и тогда, когда функция не дифференцируема. Это показывает контрпример п. 1. Там функция f разрывна и поэтому не дифференцируема в точке u: если $x_1 = x_2 \neq 0$, то $f(x_1, x_2) = 2^{-1} \not\to 0 = f(0,0)$ при $x_1 = x_2 \to 0$. А оба частных дифференциала существуют.

3. Если функция двух переменных непрерывно дифференцируема по одной из них и дифференцируема по другой, то она дифференцируема. Точнее это выражает теорема о существовании полного дифференциала. Для большей ясности рассмотрим случай $m = 1$, $n = 2$ и прямоугольную область определения. Упростим обозначения.

Положим $E = E_1 \times E_2$, $F = F_1$, $f_1 = f(\cdot, u_2)$, $f_2 = f(u_1, \cdot)$, $d_j fu = df_j u \cdot p_j$, $d_j f\colon u \to d_j fu$ $(u = (u_1, u_2),\ j = 1, 2)$. Остальные обозначения п. 3.2.1, 8 сохраняются: $U = U_1 \times U_2 \subseteq E$, $f\colon U \to F$.

Теорема. *Если частный дифференциал $d_1 f$ существует на открытом множестве U и непрерывен в точке $u \in U$, а частный дифференциал $d_2 f$ существует в точке u, то полный дифференциал df существует в точке u.*

□ Идея доказательства теоремы проста. Если dfa существует, то $d_1 fu$, $d_2 fu$ существуют и $dfu = df_1 u + df_2 u$. Поэтому для доказательства существования dfu достаточно показать, что функция $r\colon V \to F$ $(v \in V = U - u)$ со значениями

$$r(v) = \Delta fu(v) - (d_1 fu + d_2 fu)(v) \quad (v \in V)$$

сравнительно мала. Доказательство разбито на пункты.

(1) Представление остатка. Имеем $r(v) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) - f(u_1, u_2) - d_1 fu(v) - d_2 fu(v) = h_1(v) + h_2(v)$, $h_1(v) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) - f(u_1, u_2 + v_2) - d_1 fu(v)$, $h_2(v) = f(u_1, u_2 + v_2) - f(u_1, u_2) - d_2 fu(v)$ $(v = (v_1, v_2) \in V)$.

(2) Оценка чистого остатка h_2. Так как $d_2 fu$ существует, то $df_2 u_2$ существует и для каждого $\varepsilon > 0$ при некотором $\delta > 0$ верны соотношения

$$\|h_2(v)\| = \|\Delta fu_2(v_2) - df_2 u_2(v_2)\| = \|rf_2 u_2(v_2)\| \leq \varepsilon \|v_2\| \leq \varepsilon \|v\|$$

для $\|v\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\} \leq \delta$, $v \in V$ и h_2 сравнительно мал.

(3) Оценка смешанного остатка h_1. Значение $h_1(v)$ не равно значению $rf_1 u_1(v_1)$, потому что приращение выражается через частную функцию $f_2(\cdot, u_2 + v_2)$ для $t_2 = u_2 + v_2$: $f(u_1 + v_1, t_2) - f(u_1, t_2) = \Delta f_2(\cdot, t_2) u_1(v_1)$, а дифференциал — через дифференциал частной функции $f(\cdot, u_2)$ для u_2: $d_1 fu(v) = df(\cdot, u_2) u_1(v_1)$. Поэтому h_1 нельзя оценить так же просто, как h_2. Приходится использовать непрерывность дифференциала $d_1 f$ в точке u и теорему Лагранжа.

(1.3) Определение вспомогательной функции g_1. Пусть $t_2 \in U_2$, $t = (t_1, t_2) \in U$, $v = (v_1, v_2) = (t_1 - u_1, t_2 - u_2) = t - u \in V$. Рассмотрим функцию $g_1 \colon U_1 \to F$ со значениями $g_1(t_1) = h_1(t - u) = h_1(v)$ $(t_1 \in U_1)$. Заметим, что

$$g_1(u_1) = h_1(0, v_2) = f(u_1, t_2) - f(u_1, t_2) - df(\cdot, u_2)u_1(0) = 0.$$

Поэтому $g_1(t_1) - g_1(u_1) = h_1(v)$ и оценка остатка h_1 сводится к оценке приращения функции g_1.

(2.3) Проверка условий для применения теоремы Лагранжа. По предположению множество U_1 открыто. Значит, существует $\rho_1 > 0$ такое, что $B(u_1, \rho_1) \subseteq U_1$. Следовательно, $[u_1, t_1] = \{u_1 + \xi(t_1 - u_1) \colon \xi \in [0, 1]\} \subseteq B(u_1, \rho_1) \subseteq U_1$. Функция g_1 равна разности функций $\Delta_1 \colon U_1 \to F$, $\varphi_1 \colon U_1 \to F$ со значениями

$$\Delta_1(t_1) = f(t_1, t_2) - f(u_1, t_2),\ \varphi_1(t_1) = df(\cdot, u_2)u_1(t_1 - u_1)\ (t_1 \in U_1).$$

По условию теоремы функция $f(\cdot, t_2)$ дифференцируема в каждой точке $t_1 \in U_1$. Следовательно, функция Δ_1 дифференцируема и $d\Delta_1 t_1 = df(\cdot, t_2)t_1$ $(t_1 \in U_1)$. Функция $\varphi_1(t_1) = df(\cdot, u_2)u_1 \circ \tau_1$ составлена из непрерывной линейной функции $df(\cdot, u_2)u_1 \colon E_1 \to F$ и дифференцируемой функции $\tau_1 \colon U_1 \to V_1$ $(V_1 = U_1 - u_1)$ со значениями $\tau(t_1) = t_1 - u_1$ $(t_1 \in U_1)$. Дифференциал $d\tau_1 t_1$ равен тождественному отображению множества E_1. Из теоремы о дифференцировании сложной функции вытекает, что φ_1 дифференцируема и $d\varphi_1 t_1 = df(\cdot, u_2)u_1$ $(t_1 \in U_1)$. Следовательно, функция $g_1 = \Delta_1 - \varphi_1$ дифференцируема и $dg_1 t_1 = df(\cdot, t_2)t_1 - df(\cdot, u_2)u_1$ $(t_1 \in U_1)$. Выражая дифференциалы частных функций через частные дифференциалы с помощью вложения $r_1 \colon E_1 \to E$, имеющего значения $r_1(v_1) = (v_1, 0)$ $(v_1 \in E_1)$, получаем $dg_1 t_1 = d_1 ft \circ r_1 - d_1 fu \circ r_1 = (d_1 ft - d_1 fu) \circ r_1$ $(t_1 \in U_1)$.

По условию теоремы частный дифференциал $d_1 f$ непрерывен в точке u: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что $\|d_1 ft - d_1 fu\| \le \varepsilon$ $(\|t - u\| \le \gamma,\ t \in U)$. Следовательно, $\|dg_1 t_1(v_1)\| = \|(d_1 ft - d_1 fu)(v_1, 0)\| \le \|dg_1 t - d_1 fu\| \|(v_1, 0)\| \le \varepsilon \|v_1\|$ $(v_1 \in V_1)$, $\|dg_1 t_1(v_1)\| \le \varepsilon$ $(\|t_1 - u_1\| \le \gamma,\ t_1 \in U_1)$. Таким образом, функция $g = g_1$ удовлетворяет условиям следствия 3 теоремы Лагранжа при $c = \varepsilon$, $a = u_1$, $b = t_1$ $(t_1 \in B(u_1, \delta),\ \delta = \min\{\gamma, \rho_1\})$.

(3.3) Применение теоремы Лагранжа. Из сказанного в (1.3) и (2.3), доказательства и следствия 3 теоремы Лагранжа вытекает: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|h_1(v)\| = \|g_1(t_1) - g_1(u_1)\| \le \varepsilon \|t_1 - u_1\| \le \varepsilon \|v\| \quad (\|v\| \le \delta,\ v \in V).$$

Значит, функция h_1 сравнительно мала.

(4) Сравнительная малость остатка r. Так как остатки h_1 и h_2 сравнительно малы, то и остаток $r = h_1 + h_2$ сравнительно мал. ■

4. Вернемся к общему случаю m, n. Он выводится из рассмотренного частного $m = 1$, $n = 2$ по индукции.

Теорема. *Полный дифференциал df существует и непрерывен ессли существуют и непрерывны все частные дифференциалы df_{ij}.*

□ 1) Если df_{ij} существуют и непрерывны, то существуют и непрерывны дифференциалы $df_{ij} = df^0_{ij}$. А вместе с ними дифференциалы df_i и $d_i f = df^0_i$ проекций $f_i = q_i \cdot f\colon U \to F_i$ и их вложений $f^0_i = s_i \cdot f_i = s_i q_i \cdot f\colon U \to F$. Существование дифференциалов df_i, $d_i f$ следует из теоремы п. 3 и принципа индукции. Их непрерывность вытекает из равенств $df_i = \sum\limits_j df_{ij}$, $d_i f = \sum\limits_j d_{ij} f$. Существование и непрерывность дифференциала df следует из равенства $df = \sum d_i f$.

2) Если дифференциал df существует и непрерывен, то существуют и непрерывны все частные дифференциалы df_{ij} и верны равенства $df_{ij} = q_i \cdot dfu \cdot r_j$. Непрерывность df_{ij} следует из соотношений $\|(df_{ij}(u+z) - df_{ij}u)(v_j)\| = \big\|q_i(df(u+z) - dfu)\big(v^0_j\big)\big\| \le \big\|(df(u+z) - dfu)\big(v^0_j\big)\big\| \le \|df_{ij}(u+z) - dfu\|\big\|v^0_j\big\| \le \|df(u+z) - dfu\|\|v\|$, $\|df_{ij}(u+z) - df_{ij}u\| \le \|df(u+z) - dfu\|$ для всех $u, z, u + z \in U$ и $v \in V$. ■

Замечание. Существование и непрерывность всех частных дифференциалов обеспечивает не просто дифференцируемость функции, а ее непрерывную дифференцируемость (гладкость).

Для $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{F}^n$ из сказанного в 3.2.1,10 и доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Функция f непрерывно дифференцируема ессли все ее частные производные существуют и непрерывны.*

Упражнение. Доказать это утверждение подробно.

5. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Полярные координаты. Возьмем $Y = \,]0, \infty[\, \times \,]0, \pi/2[$, $X = \,]0, \infty[\, \times \,]0, \infty[$ и определим функции $g\colon Y \to \mathbb{R}^2$, $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ равенствами

$x = g(y)$, $y = f(x)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot \cos y_2 \\ y_1 \cdot \sin y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \arctan\left(x_1^{-1} x_2\right) \end{pmatrix}.$$

Функции g и f выражают декартовы координаты через полярные и полярные координаты через декартовы. Эти функции обратны друг другу. Применяя подходящие правила дифференцирования, получаем

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{pmatrix}, \; f'(x) = \begin{pmatrix} x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} & x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1} & x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Как и функции g, f, производные g', f' в соответствующих точках обратны друг другу: $g'(y) \cdot f'(x) = I$.

Пример 2. Сферические координаты. Возьмем $X =]0, \infty[^3$, $Y =]0, \infty[\times]0, \pi/2[\times]0, \pi/2[$ и определим функции $g\colon Y \to \mathbb{R}^3$, $f\colon X \to \mathbb{R}^3$ равенствами $x = g(y)$, $y = f(x)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot \cos y_2 \cdot \sin y_3 \\ y_1 \cdot \sin y_2 \cdot \sin y_3 \\ y_1 \cdot \cos y_3 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \\ \arctan(x_1^{-1} x_2) \\ \arccos(x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}) \end{pmatrix}.$$

Функции g и f выражают декартовы координаты через сферические и сферические координаты через декартовы. Эти функции обратны друг другу. Применяя подходящие правила дифференцирования, получаем

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \cos y_2 \cdot \sin y_3 & -y_1 \sin y_2 \cdot \sin y_3 & i_1 \cos y_2 \cdot \cos y_3 \\ siny_2 \cdot \sin y_3 & y_1 \cos y_2 \cdot \sin y_3 & y_1 \sin y_2 \cdot \cos y_3 \\ \cos y_3 & 0 & -y_1 \cdot \sin y_3 \end{pmatrix},$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_1 r^{-1} & x_2 r^{-1} & x_3 r^{-1} \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1} & x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1} & 0 \\ x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} r^{-2} & x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} r^{-2} & -(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} r^{-2} \end{pmatrix},$$

$r = \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Как и функции g, f, производные g', f' в соответствующих точках обратны друг другу: $g'(y) \cdot f'(x) = I$.

Пример 3. Дивергенция. Возьмем дифференцируемую функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и ее производную $f'(x) = (f'_{ij}(x))$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. След

$$\operatorname{tr} f'(x) = f'_{11}(x) + \cdots + f'_{nn}(x)$$

матрицы $A = f'(x)$ называется *дивергенцией* функции f в точке x и обозначается $\operatorname{div} f(x)$. Докажем, что

$$\operatorname{div}(L^{-1} f L)(t) = \operatorname{div} f(x) \quad (x = L(t))$$

для каждого обратимого линейного оператора $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Нужное равенство эквивалентно равенству $\operatorname{tr}(L^{-1}fL) = \operatorname{tr} f'(x)$. Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, используя линейность и ограниченность L, получаем

$$B = (L^{-1}fL)'(t) = (L^{-1})'(f(L(t))) \cdot f'(L(t)) \cdot L'(t) = C^{-1}AC.$$

Здесь $A = f'(x)$ и C — матрица оператора L в стандартных базах.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и I — единичная $n \times n$-матрица. Тогда

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(\lambda I - A)C) = \det(\lambda I - A),$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \lambda^n - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A \\ &= \prod(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n,\end{aligned}$$

$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Следовательно, $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$.

Таким образом, дивергенция не изменяется при обратимых линейных преобразованиях.

Пример 4. Определители. Возьмем открытое множество $X \subseteq \mathbb{R}$, семейство дифференцируемых функций $y_{ij}\colon X \to \mathbb{R}$ $(1 \le i,\ j \le n)$ и функцию $h\colon X \to \mathbb{R}$ со значениями $h(x) = \det(y_{ij}(x))$ $(x \in X)$. Найдем производную функции h. Перенумеруем пары ij в лексикографическом порядке: $m(11) = 1, m(12) = 2, \dots, m(1n) = n$, $m(21) = n{+}1, m(22) = n{+}2, \dots, m(2n) = n{+}n \dots m(nn) = n \times n$. Равенства $y_{m(ij)} = y_{ij}$ определяют линейное преобразование $L\colon M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ пространства вещественных $n \times n$-матриц $\bar y = (y_{ij})$ в пространство вещественных $(n \times n) \times 1$-матриц $y = L\bar y = (y_1, \dots, y_{n\times n})^t$ (столбцов). Возьмем $n \times n$-матрицу $\bar y(x) = (y_{ij}(x))$. Положим

$$f(x) = L\bar y(x) = (y_1, \dots, y_{n\times n})^t.$$

Это равенство определяет функцию $f\colon X \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Вместе с функциями y_{ij} она дифференцируема и $f'(x) = (y_1', \dots, y_{n\times n}')^t$ $(x \in X)$. Равенство

$$g(y) = \det(L^{-1}y) \quad (y \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

определяет функцию $g\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Пусть $z_{ij}(\bar y)$ — алгебраическое дополнение элемента y_{ij} матрицы $\bar y = L^{-1}Y$. Тогда $g(y) = \sum\limits_{1\le p\le n} z_{pq}y_{pq}$ $(1 \le q \le n)$. Поэтому $g'_{m(ij)}(y) = z_{ij}(\bar y)$. Частные производные $g_1', \dots, g_{n\times n}'$ непрерывны. Значит, функция g непрерывно дифференцируема и $g'(y) = (g_1'(y), \dots, g_{n\times n}'(y))$. Следовательно, сложная функция $h = g \circ f$ дифференцируема и

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \sum_i \Bigl(\sum_j z_{ij}(f(x))y_{ij}'(x)\Bigr).$$

Замечание. В этом равенстве внутренняя сумма равна определителю, получающемуся из $h(x)$ заменой j-го столбца $(y_{1j}(x), \dots, y_{nj}(x))^t$ на столбец $(y_{1j}'(x), \dots, y_{nj}'(x))^t$. Таким образом, $h'(x)$ равна сумме n определителей, которые получаются из $h(x)$ поочередным дифференцированием столбцов.

Пример 5. Условия Коши —Римана. Каждое комплексное число отождествляется с парой вещественных чисел: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Поле комплексных чисел есть векторное пространство размерности 1 при комплексных скалярах. Стандартную базу комплексного пространства $\mathbb{C}$ образует пара $e_1 = (1,0)^t$. Стандартную базу вещественного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют пары $e_1 = (1,0)^t$, $e_2 = (0,1)^t$. Равенства

$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y) \quad (a, b \in \mathbb{C};\ x, y \in \mathbb{C}), \tag{1}$$

$$M(\alpha x+\beta y) = \alpha M(x) + \beta M(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^2) \tag{2}$$

определяют линейные преобразования $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ соответственно. Эти равенства эквивалентны матричным равенствам

$$L(v) = \begin{pmatrix} L_1(e_1) & -L_2(e_1) \\ L_2(e_1) & L_1(e_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad M(v) = \begin{pmatrix} M_1(e_1) & M_1(e_2) \\ M_2(e_1) & M_2(e_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

($v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$). В самом деле, из равенства (1) вытекает равенство $L(v) = v \cdot L(e_1)$ ($v \in \mathbb{C}$) и обратно: $L(ax+by) = (ax+by) \cdot L(e_1) = ax \cdot L(e_1) + by \cdot L(e_1) = aL(x) + bL(y)$. Вместе с тем, $L(v) = L_1(v)e_1 + L_2(v)e_2$, $vL(e_1) = (v_1e_1 + v_2e_2)(L_1(e_1)e_1 + L_2(e_1)e_2) = (v_1L_1(e_1) - v_2L_2(e_1))e_1 + (v_1L_2(e_1) + v_2L_1(e_1))e_2$ при $e_2^2 = -e_1$ и

$$L_1(v) = v_1L_1(e_1) - v_2L_2(e_1), \quad L_2(v) = v_1L_2(e_1) + v_2L_1(e_1).$$

Значит, равенства (1) и (2) эквивалентны указанным матричным равенствам. Матрица $M = (\mu_{ij})$ с вещественными элементами $\mu_{ij} = M_i(e_j)$ может быть произвольной. А матрица $L = (\lambda_{ij})$ имеет специальный вид: $\lambda_{11} = \lambda_{22}$, $\lambda_{12} = -\lambda_{21}$.

Замечание. Каждое линейное преобразование $\mathbb{C}$ эквивалентно некоторым гомотетии и повороту $\mathbb{R}^2$. Все другие преобразования $\mathbb{R}^2$ не являются линейными преобразованиями $\mathbb{C}$.

Выберем для $\mathbb{R}^2$ евклидову норму $\| \|_2$, соответствующую абсолютной величине для $\mathbb{C}$. Возьмем функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ее можно считать отображением $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и рассматривать координатные функции $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Докажем, что f дифференцируема ессли f_1, f_2 дифференцируемы и

$$f'_{11} = f'_{22}, \quad f'_{12} = -f'_{21}.$$

Дифференцируемость $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в точке $u \in \mathbb{C}$ означает, что

$$\Delta fu(v) = dfu(v) + rfu(v) \quad (v \in \mathbb{C})$$

для линейной $dfu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и сравнительно малой $rfu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. А дифференцируемость f_1, f_2 в точке $u \in \mathbb{R}^2$ эквивалентна равенству

$$\Delta fu(v) = \begin{pmatrix} f'_{11}(u) & f'_{12}(u) \\ f'_{21}(u) & f'_{22}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + rfu(v) \quad \left(v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

для матрицы $f'(u) = \left(f'_{ij}(u)\right)$ и сравнительно малой $rfu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Дифференцируемость $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равносильна дифференцируемости $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ при любой из норм $\| \|_1$, $\| \|_2$. Это следует из их эквивалентности: $\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{2}\,\|x\|_1$ ($x \in \mathbb{R}^2$). Дифференцируемость $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ равносильна дифференцируемости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и условию, что dfu является линейным преобразованием $\mathbb{C}$. Как было показано, равенство $dfu(v) = f'(u) \cdot v$ определяет линейное преобразованием $\mathbb{C}$ ессли $f'_{11} = f'_{22}$, $f'_{12} = -f'_{21}$. Эти равенства называются *условиями Коши — Римана.*

В частности, пусть $x = (x_1, x_2)^t$ и $f(x) = e^{x_1} \cdot e^{ix_2}$. Тогда по формуле Эйлера $f_1(x) = e^{x_1} \cdot \cos x_2$, $f_2(x) = e^{x_1} \cdot \sin x_2$ и

$$\begin{pmatrix} f'_{11}(u) & f'_{12}(u) \\ f'_{21}(u) & f'_{22}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{u_1} \cdot \cos u_2 & -e^{u_1} \cdot \sin u_2 \\ e^{u_1} \cdot \sin u_2 & e^{u_1} \cdot \cos u_2 \end{pmatrix}$$

для каждого $u = (u_1, u_2)^t$. Условия Коши — Римана выполнены. Функция f дифференцируема и

$$dfu(v) = e^u \cdot v = e_1^u \cdot \begin{pmatrix} \cos u_2 & -\sin u_2 \\ \sin u_2 & \cos u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e_1^u \cdot \begin{pmatrix} \cos u_2 \cdot v_1 - \sin u_2 \cdot v_2 \\ \sin u_2 \cdot v_1 + \cos u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x = x_1 + x_2 i$ и $\bar{f}(x) = \bar{x} = x_1 - x_2 i$. Тогда $\bar{f}_1(x) = x_1$, $\bar{f}_2(x) = -x_2$ и $\bar{f}'_{11}(x) = 1$, $\bar{f}'_{22}(x) = -1$, $\bar{f}'_{12}(x) = 0$, $\bar{f}'_{21}(x) = 0$. Условия Коши — Римана не выполнены. Функция $\bar{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ не дифференцируема ни в одной точке $u \in \mathbb{C}$.

3.2.6. Решение функциональных уравнений

Уравнение $g(x, y) = 0$ для гладкой функции g при определенных условиях можно свести к линейному уравнению $P(x, y) \cdot u + Q(x, y) \cdot v = 0$ для частных дифференциалов $P(x, y) = dg(\cdot, y)x$ и $Q(x, y) = dg(x, \cdot)y$ функции g. Это позволяет устанавливать существование и единственность локальных решений $y = f(x)$ уравнения $g(x, y) = 0$, вычислять их производные.

Будем отождествлять функции с их графиками и писать $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$, когда такой геометрический язык удобен.

1. Рассмотрим нормированные пространства E, F, G с одинаково обозначенными нормами $\| \|$; открытые множества $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$, функцию $g\colon X \times Y \to G$ и точку $(a, b) \in X \times Y$. Введем термины и обозначения, с помощью которых формулируется теорема о неявной функции. Возьмем открытые окрестности $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ точек a, b. Они образуют открытую прямоугольную окрестность $A \times B$ точки (a, b). Каждая функция $f\colon A \to F$,

$f(A) \subseteq B$, для которой $g(x, f(x)) = 0$ $(x \in A)$, называется *решением* уравнения
$$g(x, y) = 0, \tag{1}$$

определенным на A *и содержащемся в* $A \times B$. Такое решение является частью пересечения множества $g^{-1}(0)$ с прямоугольником $A \times B$: $f \subseteq g^{-1}(0) \cap A \times B$. Среди этих решений выделяются удовлетворяющие условию $f(a) = b$. Говорят, что они *проходят через точку* (a, b). Для существования такого решения необходимо, чтобы уравнение (1) было *верным в точке* (a, b): $g(a, b) = 0$. Это решение единственное, если и только если множество $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$ является графиком функции на A. В таком случае равенства $f(a) = b$ и $g(a, b) = 0$ эквивалентны.

Уравнение (1) с гладкой функцией g называется *невырожденным (по y) в точке* (a, b), если $Q(a, b) = dg(a, \cdot)b$ есть гомеоморфизм F на G. Если $F = G = \mathbb{R}^m$, то это эквивалентно условию $\det Q(a, b) \neq 0$.

Условимся говорить, что уравнение $g(x, y) = 0$ *имеет в окрестности точки* (a, b) *единственное решение* f, если и только если существует открытая прямоугольная окрестность $A \times B$ точки (a, b) такая, что множество $g^{-1}(0) \cap A \times B$ является графиком функции f на A.

Замечание. Если решение h с графиком $g^{-1}(0) \cap C \times D$ определено на множестве $C \supseteq A$ и принимает значения в $D \supseteq B$, то оно продолжает решение f. Это f является единственной функцией на A такой, что $f(A) \subseteq B$ и $g(x, f(x)) = 0$ для каждого $x \in A$. Можно сказать, что рассматриваемое *локальное решение* f уравнения $g(x, y) = 0$ единственное с точностью до выбора окрестности $A \times B$ точки (a, b). Решение f называют также *неявной функцией.*

Предположим, что функция g непрерывно дифференцируема на множестве $X \times Y$. Для каждой точки $(x, y) \in X \times Y$ возьмем частные функции $g(\cdot, y)\colon X \to G$, $g(x, \cdot)\colon Y \to G$, дифференциалы

$$P(x, y) = dg(\cdot, y)x \in \mathscr{B}(E, G), \quad Q(x, y) = dg(x, \cdot)y \in \mathscr{B}(F, G)$$

этих функций в точках x, y и отображения $P\colon X \times Y \to \mathscr{B}(E, G)$, $Q\colon X \times Y \to \mathscr{B}(F, G)$ со значениями $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Лемма. *P и Q непрерывны.*

$\square$ Для каждых точек $(x,y) \in X \times Y$, $(\Delta x, \Delta y) \in (X - x) \times (Y - y)$, $(u,v) \in E \times F$ верны соотношения $\|(P(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x,y))(u)\| = \|(dg(\cdot, y + \Delta y)(x + \Delta x) - dg(\cdot, y)x)(u)\| = \|(dg(x + \Delta x, y + \Delta y) - dg(x,y))(u,0)\| \le \|dg(x + \Delta x, y + \Delta y) - dg(x,y)]\|\|(u,v)\|$. Поэтому $\|P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x,y)\| \le \|dg(x+\Delta x, y+\Delta y) - dg(x,y)\|$ и из непрерывности dg вытекает непрерывность P. Точно так же доказывается непрерывность Q. $\blacksquare$

Дифференциал $dg(x,y)$ и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ связывает равенство

$$dg(x,y)(u,v) = P(x,y)u + Q(x,y)v \quad (u \in E,\ v \in F).$$

Поэтому с уравнением $g(x,y) = 0$ естественно связать линейное уравнение

$$P(x,y) \cdot u + Q(x,y) \cdot v = 0. \tag{2}$$

Будем говорить, что уравнения (1) и (2) *невырождены в точке* (a,b), если дифференциал $Q(a,b)$ является гомеоморфизмом F *на* G.

Замечание. Если $F = G = \mathbb{R}^m$, то гомеоморфность $Q(a,b)$ означает невырожденность его матрицы и отличие от нуля ее определителя $\det Q(a,b)$. Если $F = \mathbb{R}^m$, $G = \mathbb{R}^l$ и $m \ne l$, то линейных гомеоморфизмов F на G не существует.

Теоремы о неявных функциях будут доказаны позже.

2. Рассмотрим метрическое пространство (M,ρ), множество $C \subseteq M$, преобразование $h\colon C \to C$ и число $\alpha > 0$. Преобразование h называется *липшицевым с коэффициентом* α, если

$$\rho(h(x), h(y)) \le \alpha\rho(x,y) \quad (x, y \in C).$$

При $\alpha < 1$ преобразование h называется *сжимающим* или *сжатием*, при $\alpha = 1$ — *нерастягивающим.* Если

$$\rho(h(x), h(y)) \ge \alpha\rho(x,y) \quad (x, y \in C),$$

то h называется *растягивающим.* Изометрия является одновременно нерастягивающим и растягивающим отображением.

Точка $c \in C$, для которой $h(c) = c$, называется *неподвижной.* Неподвижные точки — решения уравнения $h(x) = x$ $(x \in C)$. Ясно, что сжатие равномерно непрерывно.

Теорема. *Для каждого сжатия замкнутого множества полного отделимого метрического пространства существует единственная неподвижная точка.*

☐ Возьмем $x_0 \in C$ и рассмотрим последовательность точек $x_n \in C$, определяемую равенством $x_{n+1} = h(x_n)$ $(n \geq 0)$. Так как h — сжатие, эта последовательность сходится. Действительно, $\rho(x_2, x_1) = \rho(h(x_1), h(x_0)) \leq \alpha\rho(x_1, x_0)$, $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(h(x_n), h(x_{n-1})) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1})$, $(n \geq 1)$. Следовательно, $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0)$, $\rho(x_{n+m}, x_n) \leq \sum\limits_{0\leq k<m} \rho(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \sum\limits_{0\leq k<m} \alpha^{n+k}\rho(x_1, x_0) \leq \alpha^n(1-\alpha)^{-1}\rho(x_1, x_0)$ $(n \geq 0)$ для каждого номера m. Если $\alpha \in]0, 1[$, то $\alpha^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Последовательность (x_n) сходится в себе. Так как пространство M полное, то (x_n) сходится к некоторой точке $c \in M$. А так как $x_n \in C$ и множество C замкнуто, то $c \in C$. Из равенства $x_{n+1} = h(x_n)$ и непрерывности функции h следует, что $c = h(c)$.

Предположим, что существует еще одна неподвижная точка $b \in C$, $b \neq c$ для h. Так как h — сжатие, то $\rho(c, b) = \rho(h(c), h(b)) \leq \alpha\rho(c, b)$. Так как $\alpha < 1$, то $\rho(c, b) = 0$. А так как ρ отделяет точки пространства M, то при $b \neq c$ это невозможно. ■

Замечание. Для нерастягивающих преобразований в общем случае теорема не верна: при тождественном отображении $h(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ каждая точка неподвижна, а при переносе $h(x) = x+1$ нет неподвижных точек. Теорема не верна также для незамкнутых множеств: при $h(x) = 2^{-1}x$ в множестве $C = \{x : x \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}$ нет неподвижных точек.

Но каждое нерастягивающее преобразование ограниченного замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве имеет непустое замкнутое выпуклое множество неподвижных точек [69, п. 5.1.1; 67, гл. 5, п. 2]. В [69, гл. 5, § 1] теорема о неподвижных точках доказывается для многозначных сжатий.

3. Рассмотрим банахово пространство $(F, \|\,\|)$ и пространство $(\mathscr{B}, \|\,\|)$ всех непрерывных линейных преобразований множества F. Пространство $(\mathscr{B}, \|\,\|)$ тоже банахово. Рассмотрим линейный оператор $T \in \mathscr{B}$, тождественный оператор $I \in \mathscr{B}$, разность $I - T \in \mathscr{B}$ и последовательность степеней $T^n \in \mathscr{B}$. По определению, $T^0 = I$.

Теорема. *Если $\|T\| < 1$, то $I - T$ является линейным го-*

меоморфизмом F на F и $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{n\geq 0} T^n$.

□ Для каждого $n \geq 0$ верно неравенство $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Поэтому если $\|T\| < 1$, то ряд из степеней $T^n \in \mathscr{B}$ имеет сумму $S = \sum\limits_{n\geq 0} T^n \in \mathscr{B}$. Это вытекает из критерия Коши и неравенств $\Big\| \sum\limits_{0\leq k<m} T^{n+k} \Big\| \leq \sum\limits_{0\leq k<m} \|T^{n+k}\| \leq \sum\limits_{0\leq k<m} \|T\|^{n+k}$ $(m > 0)$. Так как $(I-T)\cdot \sum\limits_{k<n} T^k = \sum\limits_{k<n} T^k \cdot (I-T) = 1 - T^n$ $(n > 0)$ и последовательность операторов T^n сходится к нулевому оператору $O \in \mathscr{B}$, то $(I-T)S = S(I-T) = I$. Значит, $(I-T)$ и S являются обратными друг другу взаимно однозначными отображениями F на F. Они линейны и непрерывны. ■

Из теоремы вытекает вспомогательное предложение, которое понадобится в следующем пункте.

Лемма. $\|(I-T)^{-1} - I - T\| \leq \|T\|^2(1-\|T\|)^{-1}$ $(\|T\| < 1)$.

□ Из теоремы следует, что $\|(I-T)^{-1} - I - T\| = \Big\| \sum\limits_{n\geq 2} T^n \Big\| \leq \sum\limits_{n\geq 2} \|T\|^n = \|T\|^2(1-\|T\|)^{-1}$ при $T \in \mathscr{B}$, $\|T\| < 1$. ■

Операторную прогрессию (T^n) называют *рядом Неймана.*

4. Рассмотрим банаховы пространства F, G, $\mathscr{B} = (\mathscr{B}(F,G)$ и множество $\mathscr{H}(F,G) \subseteq \mathscr{B}(F,G)$ всех линейных гомеоморфизмов F на G. Будем предполагать, что множество $\mathscr{H}(F,G)$ не пусто. Рассмотрим еще банахово пространство $\mathscr{B}(G,F)$ всех непрерывных линейных отображений G в F и множество $\mathscr{H}^{-1} = \mathscr{H}(G,F) \subseteq \mathscr{B}(G,F)$ всех линейных гомеоморфизмов G на F. Если $\mathscr{H}$ не пусто, то и $\mathscr{H}^{-1}$ не пусто.

Возьмем отображение $\varphi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}^{-1}$, при котором образом каждого гомеоморфизма $H \in \mathscr{H}$ является обратный ему гомеоморфизм: $\varphi(H) = H^{-1}$ $(H \in \mathscr{H})$. Назовем φ *естественным отображением* $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^{-1}$. Это отображение встретится при доказательстве теоремы о неявной функции. Его описывает вытекающее из теоремы п. 3

Следствие. *Множество $\mathscr{H}$ открыто, отображение φ дифференцируемо и* $d\varphi H(T) = -H^{-1}TH^{-1}$ $(H \in \mathscr{H}, T \in \mathscr{B})$.

□ Возьмем $H \in \mathscr{H}$ и докажем, что существует $r > 0$ такое, что $H + T \in \mathscr{H}$ для каждого $T \in \mathscr{B}$, для которого $\|T\| < r$.

Это будет означать, что $B(H,r) \subseteq \mathscr{H}$ и множество $\mathscr{H}$ открыто. Из теоремы п. 2 вытекает, что $H+T = H(I+H^{-1}T) \in \mathscr{H}$ при $\|H^{-1}T\| \leq \|H^{-1}\|\|T\| < 1$, $\|T\| < r = \|H^{-1}\|^{-1}$. Заметим, что $(H+T)^{-1} = (I+H^{-1}T)^{-1}H^{-1}$. Рассмотрим приращение функции φ в точке $H \in \mathscr{H}$ для $T \in \mathscr{B}$, $\|T\| < \|H^{-1}\|^{-1}$: $\Delta\varphi H(T) = \varphi(H+T) - \varphi(H) = (H+T)^{-1} - H^{-1} = ((I+H^{-1}T)^{-1} - I)H^{-1} = ((1+H^{-1}T)^{-1} - I + H^{-1}T - H^{-1}T)H^{-1} = ((I+H^{-1}T)^{-1} - I + H^{-1}T)\cdot H^{-1} - H^{-1}TH^{-1}$. Используя лемму п. 3, получаем отсюда, что $\|\Delta\varphi H(T) + H^{-1}TH^{-1}\| \leq \|(I+H^{-1}T)^{-1} - I + H^{-1}T\| \cdot \|H^{-1}\| \leq \|H^{-1}T\|^2(I - \|H^{-1}T\|)^{-1} \cdot \|H^{-1}\| \leq c\|T\|^2$ при $c = 2\|H^{-1}\|^3$ и $\|T\| \leq 2^{-1}\|H^{-1}\|$. Поэтому функция φ дифференцируема и ее дифференциал $d\varphi H(T)$ равен $-H^{-1}TH^{-1}$. ■

Замечание. Из дифференцируемости естественного отображения φ следует его непрерывность.

Пример. Если $F = G = \mathbb{R}$, то отображение $T \to T(1)$ ($T \in \mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) множества $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$ является изоморфизмом. Множеству $\mathscr{H} = \mathscr{B} \setminus \{O\}$ при этом отображении соответствует множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, а отображению φ — функция $f\colon x \to x^{-1}$. Она дифференцируема и $f'(x) = -x^{-2}$.

5. Сформулируем основную в этом параграфе теорему о гладкой (непрерывно дифференцируемой) неявной функции как теорему о решении функционального уравнения.

Рассмотрим: нормированные пространства E, F, G с одинаково обозначенными нормами $\| \,\|$, открытые множества $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$, функцию $g\colon X \times Y \to G$ и точку $(a,b) \in X \times Y$. Будем предполагать, что пространства F и G банаховы, а функция g гладкая. Для каждой точки $(x,y) \in X \times Y$ возьмем частные функции $g(\cdot,y)$, $g(x,\cdot)$ и их дифференциалы $P(x,y) = dg(\cdot,y)x$, $Q(x,y) = dg(x,\cdot)y$.

Теорема. *Уравнение $g(x,y) = 0$ с гладкой функцией g, верное в точке (a,b) и невырожденное в ней, имеет в окрестности точки (a,b) единственное решение f. Это решение проходит через (a,b), гладкое и $dfx = -Q^{-1}(x,f(x)) \cdot P(x,f(x))$ ($x \in \mathrm{Dom}\, f$).*

6. Доказательство теоремы длинное и проводится в несколько этапов. Последовательно доказываются: 1) существование, 2) непрерывность, 3) дифференцируемость, 4) непрерывная дифференцируемость неявной функции.

1) **Существование.** Уравнение

$$g(x,y) = 0 \tag{1}$$

эквивалентно

$$h(x, y) = y \tag{2}$$

для h со значениями $h(x, y) = y - Q^{-1}(a, b) \cdot g(x, y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$. При каждом $x \in X$ решение $y = f(x)$ уравнения (2) является неподвижной точкой для частной функции $h(x, \cdot)\colon Y \to F$, т. е.

$$h(x, \cdot)(y) = h(x, y) = y \quad (y \in Y).$$

Таким образом, для доказательства существования в окрестности точки (a, b) решения f уравнения (1) достаточно показать, что при каждом x из некоторой окрестности точки a функция $h(x, \cdot)$ является сжатием и удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. Прежде чем сделать это, докажем важное вспомогательное предложение.

Лемма. *Для точки (a, b) существует открытая прямоугольная окрестность $A_0 \times B_0 \subseteq X \times Y$, в каждой точке (x, y) которой дифференциал $Q(x, y)$ является гомеоморфизмом F на G.*

$\square$ По следствию из теоремы о ряде Неймана множество $\mathscr{H}$ всех линейных гомеоморфизмов F на G открыто. Значит, из условия $Q(a, b) \in \mathscr{H}$ вытекает существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что каждое линейной преобразование $T \in \mathscr{B}$, для которого $\|T - Q(a, b)\| < \varepsilon$, принадлежит $\mathscr{H}$. А по лемме п. 1 отображение $Q : X \times Y \to \mathscr{B}$ со значениями $Q(x, y)$ непрерывно. Значит, существует число $\delta > 0$ такое, что $\|Q(x, y) - Q(a, b)\| < \varepsilon$ $(\|(x, y) - (a, b)\| < \delta)$. Поэтому $Q(x, y) \in \mathscr{H}$ при $x \in A_0 = B(a, \delta) \subseteq F$, $y \in B_0 = B(b, \delta) \subseteq G$. $\blacksquare$

Предложение. *Уравнение $g(x, y) = 0$ имеет в окрестности точки (a, b) единственное решение f.*

$\square$ Нужно доказать существование открытой прямоугольной окрестности $A \times B \subseteq A_0 \times B_0$ такой, что $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$ является графиком функции на A.

Докажем, что существуют открытая окрестность $A \subseteq A_0$ точки a и шар $B = B(b, r) \subseteq B_0$ такие, что при каждом $x \in A$ сужение функции $h(x, \cdot)$ является сжатием $\bar{B}$ и $h(x, \cdot)(\bar{B}) \subseteq B$. Для этого: оценим дифференциал $dh(x, \cdot)y$, применим теорему Лагранжа, уточним область изменения сужений $h(x, \cdot)$, применим теорему о неподвижной точке.

Оценка дифференциала $dh(x,\cdot)y$. Верны равенства

$$h(x,\cdot)(y) = h(x,y) = y - Q^{-1}(a,b)\cdot g(x,y)$$
$$= y - Q^{-1}(a,b)\cdot g(x,\cdot)(y) \quad (x \in A_0,\ y \in B_0). \quad (3)$$

Из дифференцируемости функции g следует дифференцируемость при каждом $x \in A_0$ частной функции $g(x,\cdot)$ и, значит, функции $h(x,\cdot)$. Применяя теорему о дифференцировании сложной функции и учитывая непрерывность линейного отображения $Q^{-1}(a,b)$, получаем

$$dh(x,\cdot)y = I - Q^{-1}(a,b)\cdot Q(x,y) \quad (x \in A_0,\ y \in B_0). \quad (4)$$

В частности,

$$dh(a,\cdot)b = I - Q^{-1}(a,b)\cdot Q(a,b) = I - I = O. \quad (5)$$

(Символ I обозначает здесь тождественное преобразование F.)

По лемме п. 1 отображение Q непрерывно. Поэтому из равенств (4) и (5) следует, что существует окрестность $A_1 \times B_1 \subseteq A_0 \times B_0$ точки (a,b), для которой

$$\|dh(x,\cdot)y\| \leq 2^{-1} \quad (x \in A_1,\ y \in B_1). \quad (6)$$

Применение теоремы Лагранжа. Окрестность B_1 точки b содержит некоторый замкнутый шар с центром b и радиусом $r > 0$:

$$\bar{B} = \bar{B}(b,r) = \{y \in F : \|y - b\| \leq r\} \subseteq B_1.$$

По следствию 3 теоремы Лагранжа из неравенства (6) вытекает, что

$$\|h(x,\cdot)(y) - h(x,\cdot)(y_0)\| \leq 2^{-1}\|y - y_0\| \quad (x \in A_1;\ y, y_0 \in \bar{B}). \quad (7)$$

Значит, при каждом $x \in A_1$ сужение функции $h(x,\cdot)$ на замкнутый шар $\bar{B}$ является сжатием этого шара, если $h(x,\cdot)(\bar{B}) \subseteq \bar{B}$.

Уточнение области изменения сужений $h(x,\cdot)$. Рассмотрим открытый шар $B = B(b,r) = \{y \in F : \|y-b\| < r\} \subset \bar{B}$ и докажем, что существует открытая окрестность $A \subseteq A_1$ точки a, для которой

$$h(x,\cdot)(\bar{B}) \subseteq B \quad (x \in A). \quad (8)$$

Так как $h(a,\cdot)(b) = h(a,b) = b - Q^{-1}(a,b)\cdot g(a,b) = b - Q^{-1}(a,b)\cdot 0 = b - 0 = b$, то для всех $x \in A_0$, $y \in B_0$ верно

$$\begin{aligned}\|h(x,\cdot)(y) - b\| &\le \|h(x,\cdot)(y) - h(x,\cdot)(b)\| + \|h(x,\cdot)(b) - b\| \\ &= \|h(x,\cdot)(y) - h(x,\cdot)(b)\| + \|h(x,\cdot)(b) - h(a,\cdot)(b)\|. \quad (9)\end{aligned}$$

Непрерывность g влечет непрерывность h в (a,b) и существование открытой окрестности $A \subseteq A_1$ такой, что

$$\|h(x,\cdot)(b) - h(a,\cdot)(b)\| = \|h(x,b) - h(a,b)\| < 2^{-1}r \quad (x \in A). \quad (10)$$

Из неравенств (7), (9), (10) вытекает, что

$$\|h(x,\cdot)(y) - b\| < 2^{-1}\|y - b\| + 2^{-1}r \le r \quad (x \in A,\ y \in \bar{B}). \quad (11)$$

Следовательно, включение (8) верно.

Применение теоремы о неподвижной точке. Из сказанного следует, что при каждом $x \in A$ сужение функции $h(x,\cdot)$ на замкнутый шар $\bar{B}$ является его сжатием. По теореме о неподвижной точке для каждого $x \in A$ существует единственная точка $y = f(x) \in \bar{B}$ такая, что $h(x,\cdot)(f(x)) = f(x)$ и, значит,

$$\begin{aligned}&g(x,f(x)) = Q(a,b)(f(x) - h(x,f(x))) \\ &= Q(a,b)(f(x) - h(x,\cdot)(f(x))) = Q(a,b)(f(x) - f(x)) = 0 \ \ (x \in A).\end{aligned}$$

Включение (8) показывает, что $f(x) \in B$.

Таким образом, $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$ является графиком единственного определенного на A решения f уравнения $g(x,y) = 0$ в открытой прямоугольной окрестности $A \times B$ точки (a,b). Предложение доказано. ■

2) **Непрерывность.** Рассмотрим $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$.

Предложение. *Функция f непрерывна.*

□ Пусть $x \in A$, $\Delta x \in A - x$. Тогда $\|f(x+\Delta x) - f(x)\| = \|h(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - h(x, f(x))\| \le \|h(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - h(x+\Delta x, f(x))\| + \|h(x+\Delta x, f(x)) - h(x, f(x))\|$. Из неравенства (7) вытекает, что $\|h(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - h(x+\Delta x, f(x))\| \le 2^{-1}\|f(x+\Delta x) - f(x))\|$. Отсюда и из неравенства (11) получаем $\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \le 2\|h(x+\Delta x, f(x)) - h(x, f(x))\|$. Следовательно, непрерывность функции h в точке $(x, f(x))$ влечет непрерывность функции f в точке x: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|h(x+\Delta x, f(x)) - h(x, f(x))\| \le 2^{-1}\varepsilon$, $\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \le \varepsilon$ при $\|(x+\Delta x, f(x)) - (x, f(x))\| = \|(\Delta x, 0)\| = \|\Delta x\| \le \delta$. ■

3) **Дифференцируемость.** При доказательстве дифференцируемости функции f используется ее непрерывность.

Предложение. *Функция f дифференцируема и*

$$dfx = -Q^{-1}(x, f(x)) \cdot P(x, f(x)) \quad (x \in A).$$

□ Доказательство проводится таким образом: приращение функции представляется в виде суммы линейной части и остатка, дается предварительная оценка остатка, дается оценка самого приращения, доказывается сравнительная малость остатка.

Представление приращения. Пусть $x \in A$ и $\Delta x \in A - x$. Так как g дифференцируема и $g(x+\Delta x, f(x+\Delta x))=g(x, f(x))=0$, то

$$\begin{aligned} 0 = q(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - q(x, f(x)) \\ = dq(x, f(x))(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x)) \\ + rg(x, f(x))(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x)) \\ = P(x, f(x)) \cdot \Delta x + Q(x, f(x)) \cdot (f(x+\Delta x) - f(x)) \\ + rg(x, f(x))(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x)). \quad (12) \end{aligned}$$

А так как $(x, f(x)) \in A \times B \subseteq A_0 \times B_0$, то по доказанной раньше лемме дифференциал $Q(x, f(x))$ является гомеоморфизмом F на G. Из равенств (12) вытекает, что

$$f(x+\Delta x)) - f(x)) \\ = -Q^{-1}(x, f(x)) \cdot P(x, f(x)) \cdot \Delta x + r(x, \Delta x), \quad (13)$$

$$r(x, \Delta x) \\ = -Q^{-1}(x, f(x)) \cdot rg(x, f(x))(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x)). \quad (14)$$

Предварительная оценка остатка. Пусть $x \in A$, $\Delta x \in A - x$, $\varepsilon_1 > 0$. Так как g дифференцируема, при некотором $\delta_0 > 0$ верно

$$\|rg(x, f(x))(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x))\| \\ \leq \varepsilon_1 \|(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x))\|, \quad (15)$$

если

$$\|(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x))\| \leq \delta_0. \quad (16)$$

Так как f непрерывна, то при некотором $\delta_1 \in]0, \delta_0[$ верно

$$\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \leq \delta_0 \quad (\|\Delta x\| \leq \delta_1). \quad (17)$$

А так как $\|(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x))\| = \max\{\|\Delta x\|, \|f(x+\Delta x) - f(x)\|\} \le \max\{\delta_0\,, \delta_1\} = \delta_0$, то из (17) вытекает (16). Значит, (15) верно при $\|\Delta x\| \le \delta_1$. Используя неравенство

$$\|(\Delta x, f(x+\Delta x) - f(x)\| \le \|\Delta x\| + \|f(x+\Delta x) - f(x)\|,$$

определение (14), свойства нормы линейных операторов и неравенство (15), получаем

$$\begin{gathered}\|r(x,\Delta x)\| \le \varepsilon_1 \|Q^{-1}(x, f(x))\|(\|\Delta x\| + \|f(x+\Delta x) - f(x)\|) \\ (\|\Delta x\| \le \Delta_1).\end{gathered} \tag{18}$$

Оценка приращения. Пусть $x \in A$, $\Delta \in A - x$, $\varepsilon_1 \in]0, \|Q^{-1}(x, f(x))\|^{-1}[$. Из (13), (18) и неравенства для нормы произведения линейных операторов следует, что

$$\begin{gathered}\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \le \|Q^{-1}(x, f(x))\|\|P(x, f(x))\|\|\Delta x\| \\ +\varepsilon_1 \|Q^{-1}(x, f(x))\|(\|\Delta x\| + \|f(x+\Delta x) - f(x)\|), \\ \|f(x+\Delta x) - f(x)\| \le \gamma(x)\|\Delta x\| \quad (\|\Delta x\| \le \delta_1), \\ \gamma(x) = \|Q^{-1}(x, f(x))\|(\|P(x, f(x))\| + \varepsilon_1)(1 - \|Q^{-1}(x, f(x))\| \cdot \varepsilon_1)^{-1}\end{gathered} \tag{19}$$

при некотором $\delta_1 > 0$.

Сравнительная малость остатка. Пусть $x \in A$, $\Delta x \in A - x$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, Q^{-1}(x, f(x))\|^{-1}[$ такие, что $\varepsilon_1 \cdot \|Q^{-1}(x, f(x))\| \cdot (1 + \gamma(x) \le \varepsilon$. Возьмем $\delta = \delta_1 > 0$, при котором верно (19). Используя (18) и (19), получаем

$$\|r(x,\Delta x)\| \varepsilon_1 \|Q^{-1}(x, f(x))\|(1 + \gamma(x))\|\Delta x\| \le \varepsilon \|\Delta x\| \quad (\|\Delta x\| \le \delta).$$

Значит, остаток $r(x,\cdot)$ со значениями $r(x,\Delta x)$, определяемыми равенством (14), сравнительно мал. Вследствие равенства (13) отсюда вытекает, что функция f дифференцируема и для ее дифференциала верно указанное в предложении равенство. ■

4) **Непрерывная дифференцируемость.** Рассмотрим дифференциал $df\colon A \to \mathscr{B}(E, F)$ функции f. Его значениями являются дифференциалы $dfx = -Q^{-1}(x, f(x)) \cdot P(x, f(x))$ $(x \in A)$.

Предложение. *Функция f непрерывно дифференцируема.*

□ Дифференциал df равен композиции отображений, описываемой диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow[df]{\hspace{2em}} & -Q^{-1}(x,f(x))\cdot P(x,f(x)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \varphi_5} \\
(x,f(x)) & & Q^{-1}(x,f(x))\cdot P(x,f(x)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \varphi_4} \\
(P(x,f(x)),Q(x,f(x))) & \xrightarrow[\varphi_3]{\hspace{2em}} & (P(x,f(x)),Q^{-1}(x,f(x)))
\end{array}$$

Она означает, что $df = \varphi_5\circ\varphi_4\circ\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$, где φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 имеют значения $\varphi_1(x) = (x,f(x))$, $\varphi_2(x,y) = (P(x,y),Q(x,y))$, $\varphi_3(T,H) = (T,H^{-1})$, $\varphi_4(T,S) = S\cdot T$, $\varphi_5(T) = -T$. Для доказательства непрерывности дифференциала df достаточно показать, что каждое из отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 непрерывно.

Непрерывность φ_1 следует из непрерывности f:

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_1(x+\Delta x)-\varphi_1(x)\| = \|(\Delta x, f(x+\Delta x)-f(x))\| \\
&\qquad\qquad \le \|\Delta x\| + \|f(x+\Delta x)-f(x)\| \quad (x\in A,\ \Delta x\in A-x).
\end{aligned}$$

Непрерывность φ_2 следует из непрерывности P, Q:

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_2(x+\Delta x,y+\Delta y)-\varphi_2(x,y)\| \\
&= \|(P(x+\Delta x,y+\Delta y)-P(x,y), Q(x+\Delta x,y+\Delta y)-Q(x,y))\| \\
&\le \|(P(x+\Delta x,y+\Delta y)-P(x,y)\| + \|Q(x+\Delta x,y+\Delta y)-Q(x,y))\|
\end{aligned}$$

$$(x\in A,\quad \Delta x\in A-x,\quad y\in B,\quad \Delta y\in B-y).$$

Непрерывность φ_3 следует из непрерывности естественного отображения $H\to H^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_3(T+\Delta T,h+\Delta h)-\varphi_3(T,h)\| \\
&= \|(\Delta T,(H+\Delta H)^{-1}-H^{-1})\| \le \|\Delta T\| + \|(H+\Delta H)^{-1}-H^{-1}\|
\end{aligned}$$

$$(T, \Delta T \in \mathscr{B}(E, G), \quad H, \Delta H, H + \Delta H \in \mathscr{H}(F, G)).$$

Непрерывность φ_4 следует из свойств нормы произведения линейных операторов:

$$\|\varphi_4(T + \Delta T, S + \Delta S) - \varphi_4(T, S)\|$$
$$= \|(S+\Delta S)(T+\Delta T) - ST\| \leq \|\Delta S\|\|T\| + \|S\|\|\Delta T\| + \|\Delta S\|\|\Delta T\|$$
$$(T, \Delta T \in \mathscr{B}(E, G), \quad S, \Delta S \in \mathscr{B}(G, F)).$$

Непрерывность φ_5 очевидна:

$$\|\varphi_5(T + \Delta T) - \varphi_5(T)\| = \|\Delta T\| \quad (T, \Delta T \in \mathscr{B}(E, F)).$$

Предложение доказано. ■

Из доказанных предложений следует сформулированная в п. 5 теорема о гладкой неявной функции.

7. Из доказанной теоремы следует теорема о гладкой обратной функции, которая утверждает, что непрерывно дифференцируемая функция обратима в окрестности каждой точки, в которой обратим ее дифференциал. Причем обратная функция тоже непрерывно дифференцируема и ее дифференциал в соответствующих точках равен обратному дифференциалу прямой функции.

Рассмотрим: банаховы пространства E, F; открытые множества $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$; точки $a \in X$, $b \in Y$ и открытые множества $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$; функцию $h\colon X \to F$, $h(X) \subseteq Y$, и функцию $f\colon A \to F$, $f(A) = B$. Если f взаимно однозначна, то определена обратная функция $f^{-1}\colon B \to E$, $f^{-1}(B) = A$. Функция f называется *диффеоморфизмом* A на B, если: 1) f взаимно однозначно отображает A на B; 2) f и обратная функция f^{-1} непрерывно дифференцируемы.

Теорема. *Если функция h непрерывно дифференцируема и дифференциал dha является гомеоморфизмом E на F, то существуют открытая окрестность A точки a и открытая окрестность B точки $b = h(a)$ такие, что сужение f функции h на множество A является диффеоморфизмом A на B и*

$$df^{-1}(f(x)) = (dfx)^{-1} \quad (x \in A).$$

□ Пусть $g\colon Y \times X \to F$, $g(y,x) = y - h(x)$ $(y \in Y,$ $x \in X)$. Тогда $y = h(x)$ эквивалентно $g(y,x) = 0$: $h^{-1} = \{(y,x)\colon$ $y = h(x)\} = \{(y,x) : g(y,x) = 0\} = g^{-1}(0)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что:

(1) функция g удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, и, следовательно, существует открытая прямоугольная окрестность $B \times A_0 \subseteq Y \times X$ точки (b,a) такая, что $\varphi = g^{-1}(0) \cap B \times A_0$ является функцией на B;

(2) $A = \varphi(B)$ открыто и $f = \varphi^{-1}$ есть сужение h на A;

(3) функции f, $\varphi = f^{-1}$ гладкие и $d\varphi y = (dfx)^{-1}$ $(x \in A,$ $y = f(x))$.

Докажем эти утверждения.

(1) Функция g. Нужно доказать, что функция g непрерывно дифференцируема, $g(b,a) = 0$ и дифференциал $Q(b,a) = dg(b,\cdot)a$ является гомеоморфизмом E на F. Используем теорему о непрерывности полного дифференциала. Рассмотрим частные функции

$$g(\cdot,x)(u) = u - h(x), \quad g(y,\cdot)(t) = y - h(t) \quad (u,y \in Y;\ t,x \in X).$$

Ясно, что $g(\cdot,x)$ дифференцируема. Дифференцируемость $g(y,\cdot)$ вытекает из предполагаемой дифференцируемости функции h. Пусть I обозначает тождественное преобразование множества F, а q, p — проекции $F \times E$ на F, E. Имеем

$$P(y,x) = dg(\cdot,x)y = I, \quad Q(y,x) = dg(y,\cdot)x = -dhx;$$
$$d_1g(y,x) = P(y,x)\cdot q = I\cdot q = q,\ d_2g(y,x) = Q(y,x)\cdot p = -dhx\cdot p.$$

Первый частный дифференциал d_1g функции g является постоянным отображением и поэтому непрерывен. Второй частный дифференциал d_2g функции g равен композиции отображений $\psi_1(y,x) = (p, dhx)$, $\psi_2(T,S) = S\cdot T$, $\psi_3(T) = -T$. По условию дифференциал dh непрерывен. Так как

$$\|\psi_1(y+\Delta y, x+\Delta x) - \psi_1(y,x)\| = \|(0, dh(x+\Delta x) - dhx)\|$$
$$= \|dh(x+\Delta x) - dhx\| \quad (y \in Y,\ \Delta y \in Y - y,\ x \in X,\ \Delta x \in X - x),$$

то из непрерывности dh следует непрерывность ψ_1.

Непрерывность ψ_2 вытекает из неравенств для нормы произведения линейных отображений. Непрерывность ψ_3 очевидна.

Следовательно, второй частный дифференциал $d_2 g = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1$ функции g непрерывен. По теореме о полных дифференциалах из непрерывности частных дифференциалов $d_1 g$, $d_2 g$ вытекает непрерывность дифференциала dg функции g.

Так как $b = h(a)$, то $g(b, a) = b - h(a) = 0$ $(b = h(a))$. По условию дифференциал dha является гомеоморфизмом E на F. Следовательно, дифференциал $Q(b, a) = -dha$ есть гомеоморфизм E на F.

(2) Функция φ. Таким образом, функция g удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции и, значит, существует открытая прямоугольная окрестность $B \times A_0 \subseteq Y \times X$ точки (b, a) такая, что $\varphi = g^{-1}(0) \cap B \times A_0$ является гладкой функцией на B и

$$d\varphi y = -Q^{-1}(y, x) \cdot P(y, x) = -(-dhx)^{-1} \cdot I = (dhx)^{-1}$$

$(y \in B,\ x = \varphi(y))$. Из определения функции φ следует, что

$$\begin{aligned} A = \varphi(B) &= \{x = \varphi(y) :\ y \in B\} \\ &= \{x \in A_0 :\ (y, x) \in B \times A_0,\ q(y, x) = y - h(x) = 0\} \\ &= \{x \in A_0 : y = h(x) \in B\} = A_0 \cap h^{-1}(B). \end{aligned}$$

Так как B открыто и h непрерывна, то $h^{-1}(B)$ открыто. Поэтому $A = A_0 \cap h^{-1}(B)$ открыто вместе с A_0, $h^{-1}(B)$.

(3) Функция f. Таким образом, φ отображает открытое B на открытое A. Рассмотрим сужение f функции h на множество A.

Пусть $y \in B$ и $x = \varphi(y)$. Тогда из определения φ следует, что $y - f(x) = g(y, x) = g(y, \varphi(y)) = 0$. Значит, $y = f(x)$. Обратно, пусть $x \in A$ и $y = f(x)$. Тогда из определения f следует, что $0 = y - f(x) = g(y, x)$. Так как в прямоугольнике $B \times A$ существует единственное решение φ уравнения $g(y, x) = 0$, то из полученного равенства следует, что $x = \varphi(y)$. Значит, f является взаимно однозначным отображением A на B.

Функция f гладкая, так как является сужением гладкой h. Гладкость функции $f^{-1} = \varphi$ следует из теоремы о неявной функции. Таким образом, f является диффеоморфизмом A на B и дифференциал обратной функции $f^{-1} = \varphi$ выражается указанным в формулировке теоремы равенством. ■

8. Анализируя доказательства теорем о гладких неявной и обратной функциях, можно прийти к аналогичным теоремам о непрерывных неявной и обратной функциях. Используем обозначения п. 5. Пусть для каждого $x \in X$ частная функция $g(x, \cdot)\colon Y \to G$ дифференцируема в каждой точке $y \in Y$ и отображение $Q\colon X \times Y \to \mathscr{B}(F, G)$, $Q(x, y) = dg(x, \cdot)y$, непрерывно. В этом случае условимся говорить, что функция g *непрерывно дифференцируема по второй переменной.*

Теорема. *Уравнение $g(x, y) = 0$ с непрерывной и непрерывно дифференцируемой по второй переменной функцией g, верное в точке (a, b) и невырожденное в ней, имеет в окрестности (a, b) единственное решение. Это решение проходит через (a, b) и непрерывно.*

□ При доказательстве существования и единственности решения f для гладкой функции g использовались только невырожденность рассматриваемого уравнения, непрерывность и непрерывная дифференцируемость функции g по второй переменной. Эти же свойства функции g были достаточны для доказательства непрерывности f. Поэтому верна и сформулированная теорема. ■

Замечание. Теорема о непрерывной неявной функции не является обобщением теоремы о неявной функции. Она меньше требует, но и меньше утверждает.

В [67, гл. 6] рассматриваются теоремы о решениях вырожденных уравнений. Доказывается, в частности, теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера. В приложении доказывается теорема о неявных функциях, связанная с абстрактной формой нелинейной теоремы Коши — Ковалевской.

9. Рассмотрим: банаховы пространства $(E, \| \|)$, $(F, \| \|)$; точки $a \in E$, $b \in F$ и их окрестности A, B; изоморфизм f множества A на множество B и обратный изоморфизм $\varphi = f^{-1}$.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке a, дифференциал dfa является гомеоморфизмом E на F и обратная функция $\varphi = f^{-1}$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то функция $\varphi = f^{-1}$ дифференцируема в точке $b = f(a)$ и $d\varphi b = (dfa)^{-1}$.*

□ Доказательство этой теоремы повторяет для специальной функции g доказательство дифференцируемости неявной функции и сводится к оценке соответствующего остатка. Разница лишь в обозначениях и сделанных предположениях.

Так как f — изоморфизм A на B, то приращение Δfa является изоморфизмом $A - a$ на $B - b$. Вместе с тем,

$$\Delta\varphi b(v) = \varphi(b+v) - \varphi(b) = \varphi(f(a) + f(a+u) - f(a)) - \varphi(f(a))$$
$$= \varphi((f(a+u)) - \varphi(f(a)) = (a+u) - a = u$$

при $u \in A - a$, $v = \Delta fa(u) = f(a+u) - f(a) \in B - b$. Поэтому

$$\Delta\varphi b(v) = (\Delta fa(u))^{-1}. \tag{1}$$

Пусть $x \in A$, $y = f(x)$, $u = x - a$, $v = y - b$. Тогда из дифференцируемости функции f в точке a и равенства (1) вытекает, что

$$0 = (y - b) - (f(a+u) - f(a))$$
$$= v - dfa(u) - rfa(u) = v - dfa(\Delta\varphi b(v)) - rfa(\Delta\varphi. \tag{2}$$

По условию существует $L = (dfa)^{-1}$. Из равенств (2) следует, что

$$\Delta\varphi b(v) = L(v) + \rho(v), \tag{3}$$
$$\rho(v) = -L(rfa(\Delta\varphi b(v))). \tag{4}$$

Сделаем предварительную оценку остатка ρ. Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Так как функция rfa сравнительно мала, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\|rfa(\Delta\varphi b(v))\| \le \varepsilon_1 \|\Delta\varphi b(v)\| \tag{5}$$

при

$$\|\Delta\varphi b(v)\| \le \delta_0. \tag{6}$$

По условию функция φ непрерывна. Следовательно, существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\|\Delta\varphi b(v)\| \le \delta_0 \quad (\|v\| \le \delta_1). \tag{7}$$

Так как $L = (dfa)^{-1}$ — непрерывное линейное отображение, то из равенства (4) и неравенств (5)–(7) вытекает, что

$$\|\rho(v)\| = \|L(rfa(\Delta\varphi b(v)))\|$$
$$\le \|L\| \cdot \|rfa(\Delta\varphi b(v))\| \le\le \varepsilon_1 \|L\| \cdot \|\Delta\varphi b(v)\| \quad (\|v\| \le \delta_1). \tag{8}$$

Используя это неравенство, оценим приращение $\Delta\varphi b(v)$. Пусть $\varepsilon_1 \in]0, \|L\|^{-1}[$. Из равенства (3) и неравенства (8) следует, что

$$\begin{gathered}\|\Delta\varphi b(v)\| \leq \|L(v)\| + \|\rho(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\| + \varepsilon_1\|L\| \cdot \|\Delta\varphi b(v)\|,\\ \|\Delta\varphi b(v)\| \leq \gamma \cdot \|v\| \quad (\|v\| \leq \delta_1,\ \gamma = \|L\|(1-\varepsilon_1\|L\|)^{-1}).\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь легко доказать сравнительную малость остатка ρ. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, \|L\|^{-1}[$ такие, что $\varepsilon_1\|L\|\gamma \leq \varepsilon$. Возьмем $\delta = \delta_1 > 0$, при котором верно неравенство (9). Используя неравенства (8) и (9), получаем

$$\|\rho(v)\| \leq \varepsilon_1\|L\| \cdot \|\Delta\varphi b(v)\| \leq \varepsilon_1\|L\|\gamma \cdot \|v\| \leq \varepsilon\|v\| \quad (\|v\| \leq \delta).$$

Значит, остаток ρ сравнительно мал. Вследствие равенства (3) отсюда вытекает, что функция φ дифференцируема в точке b и для ее дифференциала верно указанное в теореме равенство. ■

Замечание. Теорема о непрерывной обратной функции не является обобщением теоремы о непрерывно дифференцируемой обратной функции. Она предполагает существование непрерывной в рассматриваемой точке обратной функции.

Упражнение. Сформулировать и вывести из доказанных для дифференциалов теорем о неявных и обратных функциях следствия для матричных производных.

3.2.7. Формула Тейлора

Формула Тейлора выражает в общем виде идею локального приближения гладких функций полиномами.

1. Рассмотрим нормированные пространства $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|)$, открытое множество $U \subseteq E$ и функцию $f\colon U \to F$. Если f непрерывна, то говорят, что f *дифференцируема* 0 *раз.* Положим $\mathscr{B}^{(0)} = F$. Нулевым дифференциалом $d^{(0)}f\colon U \to \mathscr{B}^{(0)}$ непрерывной функции f считается сама f.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и определен n-й дифференциал $d^{(n)}f\colon U \to \mathscr{B}^{(n)}$ функции f. Если он дифференцируем, то говорят, что f дифференцируема $n+1$ раз. Ее $n+1$-м дифференциалом $d^{(n+1)}f\colon U \to \mathscr{B}^{(n+1)}$ называется *дифференциал* $d(d^{(n)}f)$ функции $d^{(n)}f$. По определению, $\mathscr{B}^{(n+1)} = \mathscr{B}(E, \mathscr{B}^{(n)})$. Понятие *дифференцируемой*

n раз функции $f\colon U \to F$ и *n-го дифференциала* $d^{(n)}f\colon U \to \mathscr{B}^{(n)}$ определено по принципу индукции для каждого натурального n:

$$d^{(0)}f = f, \quad d^{(n+1)}f = d(d^{(n)}f).$$

Функции, которые n раз дифференцируемы при каждом натуральном n, называются *бесконечно дифференцируемыми.* Значение $d^{(n)}fu$ дифференциала $d^{(n)}$ функции f в точке $u \in U$ для разных номеров n являются точками разных пространств $\mathscr{B}^{(n)}$: $d^{(n)}fu \in \mathscr{B}(E, \mathscr{B}^{(n-1)})$ $(n \geq 1)$. Поэтому $d^{(n)}fu \cdot v_1 \in \mathscr{B}^{(n-1)}$, $d^{(n)}fu \cdot v_1 \cdot v_2 \in \mathscr{B}^{(n-2)}, \ldots, d^{(n)}fu \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_n \in \mathscr{B}^{(0)}$ $(v_1, \ldots, v_n \in E)$. Эти последовательно определяемые значения дифференциала $d^{(n)}fu$ являются точками одного и того же пространства F. При $v_1 = \cdots = v_n = v$ условимся вместо $v \cdots v$ писать также v^n:

$$d^{(n)}fu \cdot v^n = d^{(n)}fu \cdot v \cdots v \in F \quad (v \in E).$$

В частности, $d^{(0)}fu \cdot v^0 = f(u)$, $d^{(1)}fu \cdot v^1 = dfu \cdot v$.

Замечание. Как правило, рассматриваются банаховы пространства F. В этом случае и все пространства $\mathscr{B}^{(n)}$ тоже банаховы. Это следует из предложения п. 3.2.1, 5.

2. Пусть $u \in U$, $B(u,\delta) \subseteq U$, $u + v \in B(u,\delta)$. Выберем открытый интервал $X \in \mathbb{R}$ так, чтобы $[0,1] \subseteq X$, $u + xv \in B(u,\delta)$ $(x \in X)$. Рассмотрим функцию $\varphi\colon X \to U$ со значениями $\varphi(x) = u+xv$, дифференцируемую $n+1$ раз функцию $f\colon U \to F$ и сложную функцию $g = f \circ \varphi\colon X \to F$ со значениями $g(x) = f(u + xv)$.

Лемма. *Функция g дифференцируема $n + 1$ раз и*

$$g^{(k)}(x) = d^{(k)}f(u + xv) \cdot v^k$$

$(0 \leq r \leq n + 1)$.

□ Из дифференцируемости функции f вытекает ее непрерывность. Функция φ тоже непрерывна. Следовательно, сложная функция $g = f \circ \varphi$ непрерывна. Значит, она дифференцируема 0 раз и $g^{(0)}(x) = d^{(0)}f(u + xv) \cdot v^0$. Возьмем натуральное число $k \leq n$. Если функция g дифференцируема k раз и $g^{(k)}(x) = d^{(k)}f(u + xv) \cdot v^k$, то функция g дифференцируема

$k+1$ раз и $g^{(k+1)}(x) = d^{(k+1)}f(u+xv)\cdot v^{k+1}$. Действительно, пусть $x \in X$, $z \in X - x$. Тогда

$$\begin{aligned} g^{(k)}(z+x) - g^{(k)}(x) &= d^{(k)}f(u+xv+zv)\cdot v^k - d^{(k)}f(u+xv)\cdot v^k \\ &= (d^{(k)}f(u+xv+zv) - d^{(k)}f(u+xv))\cdot v^k \\ &= (d(d^{(k)}f)(u+xv)\cdot(zv) + r(d^{(k)}f)(u+xv)(zv))\cdot v^k \\ &= d^{(k+1)}f(u+xv)\cdot v^{k+1}\cdot z + r(d^{(k)}f)(u+xv)(zv)\cdot v^k. \end{aligned}$$

Первое из этих равенств вытекает из предполагаемого равенства для $g^{(k)}(x)$, второе доказывается по индукции, третье следует из дифференцируемости $d^{(k)}f$, в четвертом используется равенство $d^{(k+1)}f = d(d^{(k)}f)$ и линейность $d(d^{(k)}f)(u+xv)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$, при котором $\|r(d^{(k)}f)(u+xv)(zv)\cdot v^k\| \le \|r(d^{(k)}f)(u+xv)(zv)\|\cdot\|v^k\| \le \varepsilon\|v^k\|\cdot|z|$ ($|z| \le \gamma$). Первое из этих неравенств доказывается по индукции, а второе вытекает из дифференцируемости $d^{(k)}f$. Поэтому из полученных соотношений следует дифференцируемость функции $g^{(k)}(x)$ и доказываемое равенство для $g^{(k+1)}(x)$. По принципу индукции из сказанного вытекает, что лемма верна. ■

3. Возьмем нормированное пространство $(F, \|\;\|)$, открытый интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ и функцию $f\colon I \to F$. По аналогии с определением п. 1 непрерывная функция f называется *дифференцируемой* 0 *раз*. Ее 0-й производной $f^{(0)}$ называется сама функция f. Дифференцируемость n раз и n-я производная определяются по индукции: $f^{(0)} = f$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. Функции, дифференцируемые n раз при каждом натуральном n, называются *бесконечно дифференцируемыми.*

Докажем две леммы. Пусть $u \in I$, $u+v \in I$. Выберем открытый интервал $X \subseteq \mathbb{R}$ так, чтобы $[0,1] \subseteq X$ и $u+xv \in I$ при каждом $x \in X$. Рассмотрим функцию $\varphi\colon X \to I$ со значениями $\varphi(x) = u+xv$, дифференцируемую $n+1$ раз функцию $f\colon I \to F$ и сложную функцию $g = f\circ\varphi\colon X \to F$ со значениями $g(x) = f(u+xv)$.

Лемма 1. *Функция g дифференцируема $n+1$ раз и*

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(u+xv)\cdot v^k$$

$(0 \le k \le n+1)$.

$\square$ Из дифференцируемости функции f вытекает ее непрерывность. Функция φ тоже непрерывна. Значит, она дифференцируема 0 раз и $g^{(0)}(x) = f^{(0)}(u+xv)\cdot v^0$. Возьмем натуральное $k \le n$. Если функция g дифференцируема k раз и $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(u+xv)\cdot v^k$, то функция g дифференцируема $k+1$ раз и $g^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(u+xv)\cdot v^{k+1}$. Действительно, из дифференцируемости φ и $f^{(k)}$ по теореме о дифференцируемости сложной функции вытекает дифференцируемость $f^{(k)}\circ\varphi$ и равенство

$$(f^{(k)}\circ\varphi)'(x) = f^{(k+1)}(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f^{(k+1)}(u+xv)\cdot v.$$

Из него и предполагаемого равенства для $g^{(k)}(x)$ вытекает доказываемое равенство $g^{(k+1)}(x) = (g^{(k)}(x))'$. По принципу индукции из сказанного следует, что лемма верна. $\blacksquare$

Рассмотрим $\psi\colon X\to\mathbb{R}$, $\psi(x) = (n!)^{-1}(1-x)^n$.

Лемма 2. *Функция ψ бесконечно дифференцируема и $\psi^{(l)} = (-1)^l((n-l)!)^{-1}(1-x)^{n-l}$ $(0\le l\le n)$, $\psi^{(m)} = 0$ $(m>n)$.*

$\square$ Из определения функции ψ вытекают ее непрерывность и равенство $\psi^{(0)} = (-1)^0((n-0)!)^{-1}(1-x)^{n-0}$. Возьмем $n\in\mathbb{N}$. Если функция ψ дифференцируема l раз и $\psi^{(l)} = (-1)^l((n-l)!)^{-1}(1-x)^{n-l}$, то она дифференцируема $l+1$ раз и $\psi^{(l+1)} = (-1)^{l+1}((n-l-1)!)^{-1}(1-x)^{n-l-1}$. По принципу индукции из сказанного следует, что функция ψ дифференцируема n раз и при $0\le l\le n$ для l-й производной верно указанное в утверждении леммы равенство. В частности, $\psi^{(n)} = (-1)^n$. Отсюда вытекает, что функция ψ бесконечно дифференцируема и ее m-я производная для каждого номера $m>n$ тождественно равна нулю. $\blacksquare$

4. Возьмем открытый интервал $X\subseteq\mathbb{R}$, содержащий отрезок $[0,1]$, функцию $g\colon X\to F$, число $n\in\mathbb{N}$ и число $c>0$. Предположим, что функция g дифференцируема $n+1$ раз и $\|g^{(n+1)}(x)\|\le c$ $(x\in X)$.

Лемма. $g(1) = \sum\limits_{0\le k\le n}(1/k!)g^{(k)}(0) + r_n$ $(\|r_n\|\le c/(n+1)!)$.

$\square$ Рассмотрим $h\colon X\to F$, $h(x) = \sum\limits_{0\le k\le n}(1/k!)g^{(k)}(x)(1-x)^k$ $(x\in X)$. Вычислим производную $h'(x)$ и применим теорему Лагранжа.

Так как функция h равна сумме произведений дифференцируемых функций $g^{(k)}$ и $(-1)^{n-k}\psi^{(n-k)}$ $(0 \le k \le n)$, то она дифференцируема и

$$h'(x) = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k}(g^{(k)}\psi^{(n-k)})'(x)$$
$$= g^{(n+1)}(x)\cdot\psi(x) + (-1)^n g(x)\cdot\psi^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x)\cdot\psi(x).$$

Рассмотрим $q\colon X \to \mathbb{R}$, $q(x) = -(c/(n+1)!)(1-x)^{n+1}$. Функция q дифференцируема и $q'(x) = (c/n!)(1-x)^n$. Следовательно, $\|h'(x)\| \le q'(x)$ $(x \in X)$. По теореме Лагранжа отсюда вытекает, что $\|h(1) - h(0)\| \le q(1) - q(0) = c/(n+1)!$. Так как $h(1) - h(0) = g(1) - \sum\limits_{0\le k\le n} (1/k!)g^{(k)}(0) = r_n$, то из этих соотношений следует утверждение леммы. ■

Равенство в лемме называется *формулой Маклорена.*

Возьмем нормированное пространство $(F, \|\,\|)$, открытый интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, функцию $f\colon I \to F$, точки $u \in I$ и $v \in I - u$, числа $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$. Предположим, что функция f дифференцируема $n+1$ раз и $\|f^{(n+1)}(t)\| \le c$ $(t \in I)$.

Теорема. $f(u+v) = \sum\limits_{0\le k\le n} (1/k!)f^{(k)}(u)v^k + rfu(v)$, *где* $\|rfu(v)\| \le (c/(n+1)!)\|v^{n+1}\|$.

□ Рассмотрим открытый интервал $X \subseteq \mathbb{R}$ такой, что $[0,1] \subseteq X$, $u+xv \in I$ $(x \in X)$. Функция $g\colon X \to F$, $g(x) = f(u+xv)$ удовлетворяет условиям леммы 1 п. 3. Поэтому g дифференцируема $n+1$ раз и $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(u+xv)\cdot v^k$ $(0 \le k \le n+1)$. Откуда по условию $\|g^{(n+1)}(x)\| \le c\|v^k\|$. Значит, для функции g верна доказанная лемма. Так как $g(1) = f(u+v)$ и $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(u)\cdot v^k$, то из нее следует утверждение теоремы. ■

Равенство теоремы называется *формулой Тейлора* для производных.

5. Рассмотрим нормированные пространства $(E, \|\,\|)$, $(F, \|\,\|)$, открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$, шар $B(u,\delta) \subseteq U$, числа $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, функцию $f\colon U \to F$. Предположим, что f дифференцируема $n+1$ раз и $\|d^{(n+1)}ft\| \le c \quad (t \in B(u,\delta))$: значения $n+1$-го дифференциала $d^{(n+1)}f\colon U \to \mathscr{B}^{(n+1)}$ в некоторой окрестности точки u ограничены по операторной норме числом c.

Теорема. *$f(u+v) = \sum\limits_{0\le k\le n}(1/k!)d^{(k)}fu\cdot v^k + r_nfu(v)$, где $\|r_nfu(v)\| \le (c/(n+1)!)\cdot\|v\|^{n+1}$, ($\|v\|\le\delta$).*

□ Пусть интервал $X\subseteq\mathbb{R}$, $[0,1]\subseteq X$, $u+xv\in B(u,\delta)$ $(x\in X)$. По лемме п. 2 функция g на X, $g(x)=f(u+xv)$, дифференцируема $n+1$ раз и $g^{(k+1)}(x) = d^{(k+1)}f(u+xv)\cdot v^{k+1}$ $(0\le k\le n)$. Отсюда, используя индукцию, получаем

$$\|g^{(n+1)}(x)\| = \|d^{(n+1)}f(u+xv)\cdot v^{n+1}\| \le c\cdot\|v\|^{n+1}.$$

Значит, для функции g верна лемма п. 4. Так как $g(1) = f(u+v)$ и $g^{(k)}(0) = d^{(k)}f(u)\cdot v^k$, то из леммы следует утверждение теоремы. ■

Равенство теоремы называется *формулой Тейлора* для дифференциалов.

6. Предположим, что функция f дифференцируема два раза. Дифференциал $d^{(2)}fu\colon E\to\mathscr{B}(E,F)$ определяет непрерывное билинейное отображение $d^2fu\colon E\times E\to F$, $d^2fu(x,y) = d^{(2)}fuxy$ $(x,y\in E)$.

Теорема. *Билинейное отображение d^2fu симметрично.*

□ Нужно доказать, что

$$d(df)uxy = d(df)uyx \quad (x,y\in E). \tag{1}$$

Это равенство для повторных дифференциалов следует из равенства

$$\Delta(\Delta f)uvw = \Delta(\Delta f)uwv \quad (u+v, u+w, u+v+w\in U) \tag{2}$$

для повторных приращений, которое легко проверяется:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta f)uvw &= (\Delta f(u+v) - \Delta fu)w = \Delta f(u+v)w - \Delta fuw \\ &= f(u+v+w) - f(u+v) - f(u+w) + f(u) = \Delta(\Delta f)uwv.\end{aligned}$$

Докажем сначала, что разность t между повторным приращением и повторным дифференциалом, имеющая значения

$$t(u,w) = \Delta(\Delta f)uvw - d(df)uvw, \tag{3}$$

сравнительно мала. Заметим, что

$$\begin{gathered} t(v,w) = s(u,w) + r(df)uvw, \\ s(v,w) = \Delta(\Delta f)uvw - \Delta(df)uvw, \\ r(df)uvw = \Delta(df)uvw - d(df)uvw. \end{gathered} \tag{4}$$

Так как функция df дифференцируема, то остаток $r(df)u$ сравнительно мал и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|r(df)uv\| \le \varepsilon\|v\|$ $(\|v\| \le \delta)$, $r(df)uv \in \mathscr{B}(E,F)$. Поэтому

$$\|r(df)uvw\| \le \|r(df)uv\| \cdot \|w\| \le \varepsilon\|v\| \cdot \|w\| \quad (\|v\| \le \delta). \tag{5}$$

Для оценки функции s рассмотрим при каждом v функцию $h(w) = f(u+v+w) - f(u+w) - df(u+v)w + dfuw$. Функция s равна приращению $\Delta h0$ функции h: $s(v,w) = f(u+v+w) - f(u+w) - f(u+v) + f(u) - df(u+v)w + dfuw = h(w) - h(0)$. Поэтому для оценки функции s можно оценить дифференциал функции h и использовать теорему Лагранжа. Применяя теорему о дифференцировании сложной функции к $f(u+v+\cdot)$ и $f(u+\cdot)$, учитывая непрерывность и линейность $df(u+v)$, dfu, получаем

$$dhw = df(u+v+w) - df(u+w) - df(u+v) + dfu.$$

Так как функция df дифференцируема, то

$$\begin{gathered} df(u+v+w) = dfu + d(df)u(v+w) + r(df)u(v+w), \\ df(u+w) = dfu + d(df)uw + r(df)uw, \\ df(u+v) = dfu + d(df)uv + r(df)uv. \end{gathered}$$

Поэтому вследствие линейности $d(df)u$

$$dhw = r(df)u(v+w) - r(df)uw - r(df)uv.$$

Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma \in \,]0,\delta[$ такое, что $\|dhw\| \le 3\varepsilon(\|v\| + \|w\|)$ $(\|v\| + \|w\| \le \gamma)$. По следствию 5 теоремы Лагранжа отсюда вытекает, что

$$\|s(v,w)\| = \|h(w) - h(0)\| \le 3\varepsilon(\|v\| + \|w\|)\|w\|. \tag{6}$$

Из равенства (4) и неравенств (5), (6) следует неравенство

$$\|t(v,w)\| \le 4\varepsilon(\|v\| + \|w\|)^2. \tag{7}$$

Равенства (2), (3) и неравенство (7) показывают, что

$$\begin{aligned}\|d(df)uwv - d(df)uvw\| &= \|t(v,w) - t(w,v)\| \\ &\le \|t(v,w)\| + \|t(w,v)\| \le 8\varepsilon(\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Возьмем произвольные точки $x, y \in E$ и число $\alpha > 0$, при котором $\|\alpha x\| + \|\alpha y\| \le \gamma$. Из соотношений (8) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\alpha^2 \cdot \|d(df)uyx - d(df)uxy\| \\ &\quad = \|d(df)u(\alpha y)(\alpha x) - d(df)u(\alpha x)(\alpha y)\| \le \alpha^2 \cdot 8\varepsilon(\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

$$\|d(df)uyx - d(df)uxy\| \le 8\varepsilon(\|x\| + \|y\|)^2$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\|d(df)uyx - d(df)uxy\| = 0$ при $x, y \in E$ и равенство (1) верно. ■

7. Пусть $E = E_1 \times E_2$ — произведение нормированных пространств, $U = U_1 \times U_2$ — прямоугольник с открытыми сторонами $U_1 \subseteq E_1$, $U_2 \subseteq E_2$, $u = (u_1, u_2) \in U$, $f\colon U \to F$ — дифференцируемая три раза функция со значениями в нормированном пространстве F.

Возьмем частные дифференциалы $d_j f$ функции f, имеющие значения $d_j f u = dfu \cdot r_j p_j$ $(j = 1, 2)$ в точке u. Из дифференцируемости отображения df и постоянных отображений $u \to r_j p_j$ по правилу дифференцирования произведения следует, что отображения $d_j f$ дифференцируемы и $d(d_j)fu = d(df)u \cdot r_j p_j$.

Лемма. $d(df) = d_1(d_1 f) + d_2(d_1 f) + d_1(d_2 f) + d_2(d_2 f)$.

□ Используя соотношения между полными и частными дифференциалами и линейность, получаем $d(df) = d(d_1 f + d_2 f) = d(d_1 f) + d(d_2 f) = d_1(d_1 f) + d_2(d_1 f) + d_1(d_2 f) + d_2(d_2 f)$. ■

Пусть теперь $U_1 = E_1 = U_2 = E_2 = \mathbb{R}$. Возьмем частные функции f_j для f, их производные f'_j, частные функции f'_{ij} для f'_j, их производные f''_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$. Заметим, что

$$d_i(d_j f)uyx = f''_{ij}(u)x_i y_j, \quad d_1(d_2 f)uyx = d(df)u(0, y_2)(x_1, 0),$$
$$d_2(d_1 f)uyx = d(df)(x_1, 0)u(0, y_2)$$

$(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$. Из теоремы п. 6 и леммы вытекает

Следствие. $f''_{12} = f''_{21}$.

$\square$ Действительно, $f''_{12}(u)x_1y_2 = d_1(d_2f)uyx = d(df)u(0, y_2)(x_1, 0) = d(df)(x_1, 0)u(0, y_2) = d_2(d_1f)uyx = f''_{21}(u)y_2x_1$. При $x_1{=}y_2{=}1$ отсюда следует доказываемое равенство. $\blacksquare$

Замечание. Равенство $f''_{12}(u) = f''_{21}(u)$ для производных эквивалентно равенству $d_1(d_2f)u = d_2(d_1f)u$ для дифференциалов. Если эти равенства не верны, то функция f не является дважды дифференцируемой.

Упражнение. Доказать по индукции теорему о симметричности производной для функций нескольких переменных.

8. Рассмотрим: нормированные пространства E, F, открытое множество $U \subseteq E$, функцию $f\colon U \to F$, точку $u \in U$ и множество $V = U - u$, шар $B(u, \delta) \subseteq E$ $(\delta > 0)$. Предположим, что функция f дважды дифференцируема.

Предложение. *При некотором* $\gamma \in \,]0, \delta[$ *верно равенство*

$$f(u + v) = f(u) + dfu(v) + 2^{-1}d^2fu(v, v) + r_2fu(v),$$

где $\|v\|^{-2} \cdot r_2fu(v) \to 0$ $(v \to 0,\ 0 < \|v\| < \gamma)$.

$\square$ Рассмотрим функцию $\bar{g}$ со значениями

$$\bar{g}(x, y) = f(u + x) - f(u) - dfu(x) - 2^{-1}d^2fu(x, y) \quad (x, y \in B(0, \delta)).$$

Дифференцируемость функции f влечет дифференцируемость сложной функции h_1 со значениями $h_1(x) = f(u + x)$ $(x \in B(0, \delta))$ и равенство $dh_1s = df(u + s)$ $(s \in B(0, \delta))$. Непрерывная линейная функция $h_2 = dfu$ дифференцируема и $dh_2s = dfu$ $(s \in B(0, \delta))$. Возьмем функцию h со значениями $h(x, y) = h_1(x) - f(u) - h_2(x)$ $(x, y \in B(0, \delta))$. Ее частные дифференциалы d_1h, d_2h имеют значения

$$d_1h(s, t) = (df(u + s) - dfu) \cdot p_1, \quad d_2h(s, t) = 0$$
$$(p_1(x, y) = x, \quad x, y \in E, \quad s, t \in B(0, \delta)).$$

Из дифференцируемости отображения df следует его непрерывность, которая влечет непрерывность d_1h. Существование и непрерывность частных дифференциалов d_1h, d_2h обеспечивает существование полного дифференциала dh и равенство

$$dh(s, t)(x, y) = (df(u + s) - dfu)(x) \quad (s, t \in B(0, \delta);\ x, y \in E).$$

Отображение $b = d^2fu$ дифференцируемо и

$$db(s,t)(x,y) = d^2fu(x,t) + d^2fu(s,y) \quad (s,t \in B(0,\delta);\ x,y \in E).$$

Следовательно, функция $\bar{g} = h - 2^{-1}b$ дифференцируема и

$$d\bar{g}(s,t)(x,y) = (df(u+s) - dfu)(x) - 2^{-1}(d^2fu(x,t) + d^2fu(s,y)).$$

Рассмотрим функцию g со значениями $g(v) = \bar{g}(v,v){=}r_2fu(v)$ $(v \in B(0,\delta))$. Она равна композиции функции $\bar{g}$ с функцией φ, имеющей значения $\varphi(v) = (v,v)$ $(v \in B(0,\delta))$. Используя теорему о дифференцировании сложной функции, равенство для $d\bar{g}(s,t)(x,y)$ и теорему о симметричности, получаем $dgs(x) = d\bar{g}(s,s)(x,x) = (df(u+s) - dfu)(x) - 2^{-1}(d^2fu(x,s) + d^2fu(s,x)) = (df(u+s) - dfu)(x) - d(df)usx = (df(u+s) - dfu - d(df)us)x$, $dgs = r(df)us$ $(s \in B(0,\delta),\ x \in E)$.

Так как отображение df дифференцируемо, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma \in\,]0,\delta[$ такое, что $\|dgv\| = \|r(df)uv\| \le \varepsilon\|v\|$ $(\|v\| \le \gamma)$. По следствию 5 теоремы Лагранжа отсюда вытекает, что $\|r_2fu(v)\| = \|g(v)\| = \|g(v) - g(0)\| \le \varepsilon\|v\|^2$ $(\|v\| \le \gamma)$. ■

Замечание. Доказанное равенство не следует из теоремы п. 5, так как функция f предполагается дифференцируемой два раза, а не три.

Упражнение. Доказать по индукции аналогичное равенство для n раз дифференцируемой функции.

3.2.8. Локальные минимумы

Параболическое приближение, даваемое формулой Тейлора при $n = 2$, позволяет сформулировать общие условия для локальных минимумов и максимумов вещественных функций.

1. Рассмотрим нормированное пространство $(E, \|\,\|)$, открытое множество $U \subseteq E$, точку $u \in U$, функцию $f : U \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f имеет в точке u *локальный минимум*, если существует окрестность $V \subseteq U - u$ точки 0 такая, что $\Delta fu(v) \ge 0$ $(v \in V)$. И говорят, что функция f имеет в точке u *строгий локальный минимум*, если существует окрестность $V \subseteq U - u$ точки 0 такая, что $\Delta fu(v) > 0$ $(v \in V,\ v \ne 0)$. Аналогичные определения можно сформулировать для локального максимума и строгого локального максимума, заменив знаки неравенств на противоположные. Но проще заметить, что функция f имеет в точке u (строгий) локальный максимум ессли функция $-f$ имеет в точке u (строгий) локальный минимум. Поэтому в теории можно рассматривать только локальные минимумы.

Пример. Пусть $E = U = \mathbb{R}$, $u = 0$, $f(t) = t^2$ $(t \in \mathbb{R})$. Парабола f имеет в точке 0 строгий локальный минимум.

Этот пример типичен. Он объясняет все дальнейшее.

Возьмем $\delta > 0$, при котором $B(u, \delta) \subseteq U$. Предположим, что функция f дифференцируема два раза. Тогда по предложению п. 3.2.7, 8 при некотором $\gamma \in \,]0, \delta[$ верно равенство

$$f(u + v) = f(u) + dfu(v) + 2^{-1}d^2fu(v, v) + r_2fu(v),$$

где $\|v\|^{-2}|r_2fu(v)| \to 0$ $(v \to 0,\ 0 < \|v\| < \gamma)$.

Условимся говорить, что форма d^2fu *положительна*, и писать $d^2fu \geq 0$, если $d^2fu(v, v) \geq 0$ $(v \in E)$. Будем говорить, что форма d^2fu *строго положительна*, и писать $d^2fu > 0$, если $d^2fu(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ $(v \in E)$ при некотором $\alpha > 0$. В этом случае d^2fu положительно определена и невырождена.

Замечание. Если $E = \mathbb{R}^k$, то строгая положительность формы d^2fu эквивалентна ее положительной определенности и невырожденности. Действительно, единичная сфера $S = \{t : \|t\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$ компактна. Из непрерывности d^2fu следует непрерывность функции $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ со значениями $\varphi(v) = d^2fu(v, v)$ $(v \in E)$. Если форма d^2fu положительно определена и невырождена, то $\varphi(v) > 0$ $(v \in S)$. Так как S компактна, а функция φ непрерывна, существует точка $a \in S$, для которой $\alpha = \varphi(a) = \min \varphi(S)$. Следовательно, $d^2fu(v, v) = \|v\|^2 d^2fu(v\|v\|^{-1}, v\|v\|^{-1}) = \|v\|^2\varphi(v\|v\|^{-1}) \geq \alpha\|v\|^2$ $(v \in E,\ v \neq 0)$. При $v = 0$ нужное неравенство тоже верно.

2. Необходимые условия локального минимума выражает

Предложение. *Если функция f имеет в точке u локальный минимум, то $dfu = 0$, $d^2fu \geq 0$.*

□ 1) Если функция f имеет в точке u локальный минимум, то при некотором $\gamma \in \,]0, \delta[$ и условии $\|v\| \leq \gamma$ верно равенство

$$\Delta fu(v) + 2^{-1}d^2fu(v, v) + r_2fu(v) \geq 0.$$

Используя линейность dfu и билинейность d^2fu, получаем отсюда

$$\xi(dfu(v) + 2^{-1}\xi d^2fu(v,v) + \xi^{-1}r_2fu(\xi v)) \geq 0 \tag{1}$$

для точки $v \neq 0$, $v \in E$, и числа $\xi \neq 0$, $|\xi| \leq \|v\|^{-1}\gamma$. Предположим, что $dfu \neq 0$, и возьмем точку $a \neq 0$ такую, что $dfu(a) \neq 0$. Так как $|\xi|^{-2}|r_2fu(\xi a)| \to 0$ $(\xi \to 0,\ 0 < |\xi| < \|a\|^{-1}\gamma)$, то существует $\alpha \in\ ]0, \|a\|^{-1}\gamma[$ такое, что при $0 < |\xi| < \alpha$ знак числа в круглой скобке левой части (1) равен знаку числа $dfu(a)$. Тогда при некоторых ξ эта левая часть строго отрицательна и неравенство (1) не верно. Предположение $dfu \neq 0$ приводит к противоречию.

2) Таким образом, $dfu = 0$, $2^{-1}\xi^2 d^2fu(v,v) + r_2fu(\xi v) \geq 0$, $d^2fu(v,v) + 2\xi^{-2}r_2fu(\xi v) \geq 0$ для каждых точки $v \neq 0$, $v \in E$, и числа $\xi \neq 0$, $|\xi| \leq \|v\|^{-1}\gamma$. Так как $|\xi|^{-2}|r_2fu(\xi v)| \to 0$ $(\xi \to 0)$, $v \neq 0$ и $d^2fu \geq 0$, то $d^2fu(v,v) \geq 0$. ■

Замечание. Пусть $E = U = \mathbb{R}$, $u = 0$, $f(t) = t^3$ $(t \in \mathbb{R})$. Функция f не имеет в точке u локальный минимум, хотя $dfu = 0$, $d^2fu \geq 0$. Следовательно, эти условия необходимы, но не достаточны.

3. Достаточные условия строгого локального минимума выражает

Предложение. *Если $dfu = 0$, $d^2fu > 0$, то функция f имеет в точке u строгий локальный минимум.*

□ Используя формулу Тейлора из предложения п. 3.2.7, 8 и условие $dfu = 0$, получаем при некотором $\gamma \in\ ]0, \delta[$ равенство

$$\Delta fu(v) = 2^{-1}d^2fu(v,v) + r_2fu(v) \quad (\|v\| < \gamma).$$

Так как $d^2fu(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$ $(v \in E)$ при некотором $\alpha > 0$ и $\|v\|^{-2}|r_2fu(v)| \to 0$ $(v \to 0)$, то существует $\beta \in\ ]0, \gamma[$ такое, что

$$\Delta fu(v) \geq (\alpha - 2^{-1}\alpha)\|v\|^2 = 2^{-1}\alpha\|v\|^2 \quad (\|v\| < \beta).$$

Следовательно, $\Delta fu(v) > 0$ при $0 < \|v\| < \beta$. ■

Замечание. Пусть $E = U = \mathbb{R}$, $u = 0$, $f(t) = t^4$ $(t \in \mathbb{R})$. Функция f имеет в точке $u = 0$ строгий локальный минимум, хотя $dfu = 0$, $d^2fu = 0$. Следовательно, условия предложения достаточны, но не необходимы.

4. Рассмотрим: нормированные пространства E, F, G с одинаково обозначенными нормами $\| \, \|$, открытые множества $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$, точки $a \in X$, $b \in Y$, функцию $g\colon X \times Y \to G$. Будем предполагать, что пространства F, G банаховы, функция g непрерывно дифференцируема, а уравнение $g(x,y) = 0$ верно и невырождено в точке (a,b). Функция g удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Ее частные дифференциалы обозначаются:

$$P(x,y) = dg(\cdot, y)x, \quad Q(x,y) = dg(x, \cdot)y.$$

Возьмем еще функцию $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ и рассмотрим ее сужение на множество $g^{-1}(0) = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$. Локальные минимумы этого сужения называются условными локальными минимумами функции φ на множестве $g^{-1}(0)$. Это значит, что функция φ имеет в точке (a,b) *условный локальный минимум* на множестве $g^{-1}(0)$, если и только если существует открытая окрестность $A \times B$ точки (a,b) такая, что $\varphi(x,y) \geq \varphi(a,b)$ $((x,y) \in g^{-1}(0) \cap A \times B)$. И что функция φ имеет в точке (a,b) *условный строгий локальный минимум* на множестве $g^{-1}(0)$, если и только если существует открытая окрестность $A \times B$ точки (a,b) такая, что $\varphi(x,y) > \varphi(a,b)$ $((x,y) \neq (a,b), (x,y) \in g^{-1}(0) \cap A \times B)$. Вместо *на множестве* $g^{-1}(0)$ часто говорят *при условии* $g(x,y) = 0$.

По теореме о неявных функциях существует открытая окрестность $A \times B$ точки (a,b) такая, что $f = g^{-1}(0) \cap A \times B$ является функцией на A. Рассмотрим функцию ψ на A со значениями

$$\psi(x) = \varphi(x, f(x)) \quad (x \in A).$$

Из определений вытекает, что функция φ имеет в точке (a,b) условный (строгий) локальный минимум на множестве $g^{-1}(0)$, если и только если функция ψ имеет в точке a (строгий) локальный минимум. Поэтому вместо условных локальных минимумов функции φ можно рассматривать локальные минимумы функции ψ и использовать предложения пп. 2 и 3.

Замечание. Такой способ приводит обычно к громоздким выкладкам, связанным с дифференцированием сложных и неявных функций. Особенно громоздко повторное дифференцирование. На практике чаще всего ограничиваются проверкой необходимых условий и применяют специальные приемы или компьютерные программы.

Исследование условных локальных максимумов функции φ сводится к исследованию условных локальных минимумов функции $-\varphi$.

5. Предположим, что функция φ дифференцируема. Рассмотрим тождественное отображение e множества E и функцию (e, f) на A, $(e, f)(x) = (x, f(x))$ $(x \in A)$. Функция ψ равна композиции $\psi = \varphi \circ (e, f)$. Тождественная функция e дифференцируема. Неявная функция f тоже. Поэтому дифференцируемы функция (e, f) и сложная функция ψ. Простые условия, необходимые для того, чтобы дифференцируемая функция имела в данной точке открытого множества локальный минимум, формулирует

Лемма. *Если функция $h\colon A \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in A$ и имеет в ней локальный минимум, то $dha = 0$.*

$\square$ Рассмотрим число $\delta > 0$ такое, что $B(a, \delta) \subseteq A$. Если функция h удовлетворяет условию леммы, то $dha(v) + rha(v) \geq 0$ $(\|v\| < \delta)$. Поэтому

$$t(dha(v) + t^{-1}rha(tv)) \geq 0 \tag{2}$$

для каждых точки $v \neq 0$, $v \in E$, и числа $t \neq 0$, $|t| < \|v\|^{-1}\delta$.

Предположим, что $dha \neq 0$, и возьмем точку $v \neq 0$ из E такую, что $dha(v) \neq 0$. Из сравнительной малости остатка $rha(v)$ вытекает, что существует число $\gamma \in\ ]0, \|v\|^{-1}\delta[$, при котором $|t^{-1}rha(tv)| \leq 2^{-1}\|dha\| \cdot \|v\|$ $(0 < |t| < \gamma)$, и поэтому $\operatorname{sgn}(dha(v) + t^{-1}rha(tv)) = \operatorname{sgn} dha(v)$ $(0 < |t| < \gamma)$. При некоторых t левая часть неравенства (2) строго отрицательна и оно не верно. $\blacksquare$

Замечание. Эту лемму называют *теоремой Ферма.*

6. Возьмем частные функции $\varphi(\cdot, y)$, $\varphi(x, \cdot)$ и их дифференциалы

$$p(x, y) = d\varphi(\cdot, y)x, \quad q(x, y) = d\varphi(x, \cdot) \quad (x \in A,\ y \in B).$$

Используя правила дифференцирования и равенство $dex = e$ $(x \in A)$, получаем

$$\begin{aligned} d\psi x(\Delta x) &= d\varphi(x, f(x))(\Delta x, dfx(\Delta x)) \\ &= p(x, f(x)) \cdot \Delta x + q(x, f(x)) \cdot dfx(\Delta x) \quad (x \in A,\ \Delta x \in E), \end{aligned}$$

$$d\psi x = p(x, f(x)) + q(x, f(x)) \cdot dfx, \quad (x \in A).$$

По теореме о неявной функции отсюда следует, что

$$d\psi x = p(x, f(x)) - q(x, f(x)) \cdot Q^{-1}(x, f(x)) \cdot P(x, f(x)) \\ = p(x, f(x)) + l(x, f(x)) \cdot P(x, f(x)), \quad (3)$$

где $l(x, f(x)) = -q(x, f(x)) \cdot Q^{-1}(x, f(x))$. А это равенство эквивалентно

$$q(x, f(x)) + l(x, f(x)) \cdot Q(x, f(x)) = 0.$$

Предложение. *Если функция φ имеет в точке (a, b) условный локальный минимум на множестве $g^{-1}(0)$, то*

$$p(a, b) - q(a, b) \cdot Q^{-1}(a, b) \cdot P(a, b) = 0.$$

□ Если функция φ имеет в точке (a, b) условный локальный минимум на множестве $g^{-1}(0)$, то функция ψ имеет в точке (a, b) локальный минимум. Из сделанных относительно функций φ и g предположений следует, что ψ дифференцируема и для ее дифференциала верно равенство (3). Так как функция ψ имеет в точке a локальный минимум, то по лемме $d\psi a = 0$. Это равенство и равенство (3) при $x = a$ приводят к доказываемому. ■

7. Рассмотрим еще ограниченный линейный функционал $l \in \mathscr{B}(G, \mathbb{R})$. Назовем *функцией Лагранжа* для l, φ, g функцию

$$\lambda = \varphi + l \circ g, \quad \lambda(x, y) = \varphi(x, y) + l(g(x, y))$$

$(x \in A,\ y \in B)$. Функция λ дифференцируема вместе с функциями φ, g и для дифференциалов ее частных функций $\lambda(\cdot, y)$, $\lambda(x, \cdot)$ $(x \in A,\ y \in B)$ верны равенства

$$d\lambda(\cdot, y)x = p(x, y) + l \cdot P(x, y), \quad d\lambda(x, \cdot)y = q(x, y) + l \cdot Q(x, y).$$

При $x = a$, $y = b$, $l = -q(a, b) \cdot Q^{-1}(a, b)$ первый из этих дифференциалов равен $d\psi a$, а второй — нулю. В этом случае для полного дифференциала функции λ в точке (a, b) верно равенство

$$d\lambda(a, b)(\Delta x, \Delta y) = d\psi a(\Delta x) \quad (\Delta x \in E,\ \Delta y \in F)$$

и равенства $d\lambda(a, b) = 0$, $d\psi a = 0$ эквивалентны $(\psi = \varphi \circ (e, f))$.

Из предложения п. 6 вытекает

Следствие. *Если функция φ имеет в точке (a,b) условный локальный минимум на множестве $g^{-1}(0)$, то существует ограниченный линейный функционал l, для которого верно равенство $d\varphi(a,b)+l\cdot dg(a,b)=0$.*

Замечание. Сужения на множество $g^{-1}(0)$ функции φ и функции $\lambda=\varphi+l\circ g$ при каждом $l\in\mathscr{B}(G,\mathbb{R})$ равны. Поэтому φ и λ имеют условные локальные минимумы в одних и тех же точках. Уравнения

$$g(x,y)=0,\quad d\lambda(x,y)=0$$

иногда позволяют сравнительно легко найти одновременно эти точки (a,b) и соответствующий функционал l.

Пример. Пусть $X=E=\mathbb{R}^2$, $Y=F=G=\mathbb{R}$, $g(x,y)=x_1^2+x_2^2+y^2-1$, $\varphi(x,y)=x_1+x_2+y$ $(x_1,x_2,y\in\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольное число c и функцию $\lambda=\varphi+cg$ со значениями

$$\lambda(x,y)=x_1+x_2+y+c(x_1^2+x_2^2+y^2-1)\quad(x_1,x_2,y\in\mathbb{R}).$$

Так как $\lambda'(x,y)=(1+2cx_1,1+2cx_2,1+2cy)$, то $\lambda'(x,y)=(0,0,0)$, $g(x,y){=}0$ ессли $c=-\sqrt{3}/2$, $x_1=x_2=y=1/\sqrt{3}$ или $c=\sqrt{3}/2$, $x_1=x_2=y=-1/\sqrt{3}$. Легко проверить, что функция φ имеет в точке $(a,b)=-(1/3,1/3,1/3)$ условный локальный минимум при $g=0$, равный -1. А в точке (1/3,1/3,1/3) — максимум, равный 1.

8. Вернемся к обозначениям и предположениям п. 4. Функция g, невырожденная в каждой точке (a,b) множества $L\subseteq X\times Y$, называется невырожденной на множестве L. Если $g(a,b)=0$, то по теореме о неявной функции существует окрестность $A\times B\subseteq X\times Y$ точки (a,b) такая, что $f=g^{-1}(0)\cap A\times B$ является непрерывно дифференцируемой функцией на A. Часть L множества $X\times Y$ называется *гладким куском поверхности* в $X\times Y$, если существует невырожденная на L гладкая функция $g\colon X\times Y\to G$, для которой $L=g^{-1}(0)$.

Замкнутая в $X\times Y$ часть S множества $X\times Y$ называется *гладкой поверхностью* в $X\times Y$, если для каждой точки $(a,b)\in S$ существует окрестность $A\times B\subseteq X\times Y$, для которой $L=S\cap(A\times B)$ есть гладкий кусок поверхности в $X\times Y$. Это определение описывает наиболее простые гладкие поверхности.

Говорят, что гладкий кусок $L=g^{-1}(0)$ поверхности *определяется уравнением* $g(x,y)=0$. Гладкие поверхности в $E\times F$, определяемые линейными уравнениями, называются *плоскостями.*

Пример 1. Пусть $X = E = \mathbb{R}$, $Y = F = G = \mathbb{R}$. Уравнение $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ определяет окружность S^1 в $\mathbb{R}^2$.

Пример 2. Пусть $X = E = \mathbb{R}^2$, $Y = F = G = \mathbb{R}$. Уравнение $g(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1 = 0$ $(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R})$ определяет сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$.

Всякую гладкую поверхность S в окрестности каждой ее точки (a, b) можно приблизить некоторой плоскостью $TS(a, b)$. Рассмотрим окрестность $A \times B \subseteq X \times Y$ точки (a, b) гладкой поверхности S в $X \times Y$, кусок $L = S \cap (A \times B)$ которой задается уравнением $g(x, y) = 0$. *Касательной* к поверхности S в точке (a, b) называется плоскость $TS(a, b)$, определяемая уравнением

$$g(a, b)(x - a, y - b) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) эквивалентно

$$P(a, b) \cdot (x - a) + Q(a, b)(y - b) = 0. \tag{2}$$

Так как $Q(a, b)$ — гомеоморфизм, то (2) эквивалентно уравнению

$$y = b + Q^{-1}(a, b) \cdot P(a, b) \cdot (x - a). \tag{3}$$

По теореме о неявной функции (3) эквивалентно уравнению

$$y = f(a) + dfa(x - a). \tag{4}$$

Все эти уравнения называются *уравнениями для касательной* к поверхности S в точке (a, b).

Пример 1. Уравнения (2)–(4) для касательной к окружности S^1 в точке $(a, b) \in S^1$ имеют вид $2a \cdot (x - a) + 2b \cdot (y - b) = 0$, $y = b - b^{-1}a \cdot (x - a)$.

Пример 2. Уравнения (2)–(4) для касательной к сфере S^2 в точке $(a, b) \in S^2$ имеют вид $2a_1(x_1 - a_1) + 2a_2(x_2 - a_2) + 2b(y - b) = 0$ и $y = b - b^{-1} \cdot (a_1(x_1 - a_1) + a_2(x_2 - a_2))$. (Предполагается, что $b \neq 0$.)

Пользуясь геометрическим языком, можно сформулировать еще одно следствие предложения п. 6 для условного локального минимума дифференцируемой функции $\varphi \colon X \times Y \to \mathbb{R}$.

Следствие. *Если функция φ имеет в точке (a, b) условный локальный минимум на гладкой поверхности S, то*

$$d\varphi(a, b)(x - a, y - b) = 0 \quad ((x, y) \in TS(a, b)).$$

$\square$ Возьмем кусок $L = g^{-1}(0)$ поверхности S, которому принадлежит точка (a, b). Для каждой точки (x, y) касательной $TS(a, b)$ к поверхности S в точке (a, b) верно равенство $y - b = dfa(x - a)$. Используя выражение для дифференциала неявной функции и равенство предложения п. 6, получаем равенства $d\varphi(a, b)(x - a, y - b) = p(a, b)(x - a) + q(a, b)(y - b) = p(a, b)(x - a) + q(a, b)dfa(x - a) = p(a, b)(x - a) + q(a, b)Q^{-1}(a, b)P(a, b)(x - a) = 0$ при $(x, y) \in TS(a, b)$. $\blacksquare$

В частности, если функция φ имеет в точке $(0, 0)$ условный локальный минимум на гладкой поверхности S, то ее дифференциал $d\varphi(0, 0)$ равен нулю на касательной $TS(0, 0)$. В общем случае следствие утверждает, что $d\varphi(a, b)$ равен нулю на плоскости $TS(a, b) - (a, b) = \{(x - a, y - b) : (x, y) \in TS(a, b)\}$, проходящей через точку $(0, 0)$ и параллельной касательной $TS(a, b)$ (получающейся из $Ts(a, b)$ при параллельном переносе $(x, y) \to (x, y) - (a, b)$).

9. Рассмотрим: нормированные пространства $(G, \|\ \|)$ и $(H, \|\ \|)$, открытое множество $Z \subseteq G$, точку $c \in Z$, дифференцируемую функцию $h\colon Z \to H$. Возьмем точку $u \in G$ и открытый интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ такой, что $0 \in I$ и $\gamma(\xi) = c + \xi u \in Z$ $(\xi \in I)$. Функция $\gamma\colon I \to G$ со значениями $\gamma(\xi)$ дифференцируема и $\gamma(0) = c$, $\gamma'(0) = u$. Сложная функция $h \circ \gamma\colon I \to H$ тоже дифференцируема и

$$(h \circ \gamma)(0) = h(c), \quad (h \circ \gamma)'(0) = dhc(u).$$

Производная $(h \circ \gamma)'(0)$ функции $h \circ \gamma$ называется *производной $h'_u(c)$ функции h в точке c по направлению u*:

$$h'_u(c) = (h \circ \gamma)'(0) = dhc(u).$$

Пусть $B = \{u : \|u\| = 1\} \subseteq G$. Если $H = \mathbb{R}$, то среди чисел $h'_u(c)$ при $u \in B$ может быть наибольшее. Его называют *градиентом* функции h в точке c и обозначают символом ∇hc:

$$\nabla hc = \max\left\{h'_u(c) : u \in B\right\}.$$

В частности, если $G = \mathbb{R}^n$ и h непрерывно дифференцируема, то вследствие компактности сферы $B \subseteq \mathbb{R}^n$, непрерывности дифференциала dhc и равенства $h'_u(c) = (h \circ \gamma)'(0) = dhc(u)$ градиент ∇hc функции h в точке c существует. Каждый вектор $u \in B$, для которого $h'_u(c) = \nabla hc > 0$, указывает направление наибольшего роста функции h в точке c.

10. Вернемся к схеме п. 8 и рассмотрим окрестность $A \times B \subseteq X \times Y$ точки (a,b) гладкой поверхности S в $X \times Y$, кусок $L = S \cap A \times B$ которой определяется уравнением $g(x,y) = 0$. Используя понятие производной по направлению, можно иначе сформулировать следствие из п. 8. Возьмем дифференцируемую функцию $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$.

Следствие. *Если φ имеет в (a,b) условный локальный минимум на гладкой S, то*

$$\varphi'_{(x-a)(y-b)}(a,b) = 0 \quad ((x,y) \in TS(a,b)).$$

$\square$ Это предложение эквивалентно следствию п. 8, так как $\varphi'_{(x-a)(y-b)}(a,b) = d\varphi(a,b)(x-a)(y-b)$ для $(x,y) \in X \times Y$. $\blacksquare$

В частности, это следствие утверждает, что если функция φ имеет в точке $(0,0)$ условный локальный минимум на гладкой поверхности S, то ее производная $\varphi'_{(x,y)}(0,0)$ равна нулю по каждому направлению (x,y) в касательной плоскости $TS(0,0)$.

В общем случае следствие утверждает, что производная $\varphi'_{(x-a)(y-b)}(a,b)$ равна нулю по каждому направлению $(x-a, y-b)$ в плоскости $C = TS(a,b) - (a,b)$. Если существует градиент функции φ в точке (a,b) на плоскости C, то следствие утверждает, что он равен нулю: $\nabla\varphi(a,b) = 0$.

Замечание. Вместо ∇hc часто пишут $\operatorname{grad} h(c)$. Пусть $S = \{u : \|u\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $h'(c) = \big(h'_1(c), \ldots, h'_n(c)\big)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)^t$: $\operatorname{grad} h(c) = \nabla hc = \big(h'(c)\big)^t$. Так как $h'(c) \cdot u = \sum h'_j(c) u_j$, то, когда $h'(c) \neq 0$ и $\|u\| = 1$, наибольшее значение получается при

$$u_j = \|h'(c)\|^{-1} h'_j(c) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Сравнение определений градиента и касательной плоскости показывает, что градиент $\nabla g(a,b)$ ортогонален касательной $TS(a,b)$ к задаваемой уравнением $g(x,y) = 0$ поверхности S. Он определяет *нормаль к S в точке* (a,b). Из определений следует, что

$$h'_u(c) = (h \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} [h(c + tu) - h(c)].$$

Частные производные $h'_j(c)$ получаются при $u = e_j$ для стандартной базы пространства $\mathbb{R}^n$. Использование координатных функций и координатных направлений позволяет вычислять частные производные для функций с областями в $\mathbb{R}^n$ и рангами в $\mathbb{R}^m$ как пределы.

Существование градиента ∇hx для каждых точки x и дифференцируемой функции h в случае $G = \mathbb{R}^n$ позволяют рассматривать оператор $\nabla\colon (h, x) \to \nabla hx$. Он называется *оператором Гамильтона* и часто записывается равенством $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$.

3.2.9. Гладкие кривые

Гладкой кривой здесь называется каждая гладкая векторная функция вещественной переменной.

1. Рассмотрим банахово пространство $(E, \|\ \|)$, открытый интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, содержащий отрезок $\bar{X} = [\bar{a}, \bar{b}]$, и отрезок $[a, b]$, содержащийся в открытом интервале $X =]\bar{a}, \bar{b}[$ ($[a, b] \subset X \subset \bar{X} \subset I$). Сужение $y\colon \bar{X} \to E$ на отрезок $\bar{X}$ непрерывно дифференцируемой функции $y\colon I \to E$ называется *гладкой кривой* в E, определенной на отрезке $\bar{X}$. Включения $[a, b] \subset [\bar{a}, \bar{b}] \subset I$ позволяют рассматривать производные функции y в крайних точках a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Гладкие кривые в E, определенные на $\bar{X}$, образуют векторное пространство H. Равенство

$$\|y\| = \sup \|y(x)\| + \sup \|y'(x)\| \quad (x \in \bar{X})$$

определяет норму $\|\ \|$ для H. Существование граней обеспечивается компактностью $\bar{X}$ и непрерывностью y, y'. Сходимость $y \to c$ в H при такой норме эквивалентна равномерной сходимости $y(x) \to c(x)$ и $y'(x) \to c'(x)$ в E $(x \in \bar{X})$. Поэтому пространство $(H, \|\ \|)$ банахово.

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

2. Рассмотрим открытые множества $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ и множество

$$Y = \{y \mid y(x) \in A,\ y'(x) \in B\,(x \in \bar{X})\} \subseteq H.$$

Лемма. *Множество Y открыто.*

$\square$ Пусть $c \in Y$, $U = c(\bar{X}) \subseteq A$, $V = c'(\bar{X}) \subseteq B$. Так как отрезок $\bar{X}$ компактен, а функции c и c' непрерывны, то множества U и V компактны. Поэтому существует число $\delta > 0$ такое, что при каждом $x \in \bar{X}$ замкнутые шары $\bar{B}(c(x), \delta)$ и $\bar{B}(c'(x), \delta)$ содержатся соответственно в A и B. Возьмем замкнутый шар $\bar{B}(c, \delta) \subseteq H$ и точку $y \in \bar{B}(c, \delta)$. Так как

$$\|y(x) - c(x)\| \leq \|y - c\| \leq \delta, \quad \|y'(x) - c'(x)\| \leq \|y' - c'\| \leq \delta \ (x \in \bar{X}),$$

то $y(x) \in A$, $y'(x) \in B$ $(x \in \bar{X})$. Значит, $y \in Y$ и $\bar{B}(c, \delta) \subseteq Y$. $\blacksquare$

Рассмотрим гладкую функцию $f\colon X \times A \times B \to \mathbb{R}$, функцию $g\colon X \times Y \to \mathbb{R} \times E \times E$ со значениями $g(x, y) = (x, y(x), y'(x))$ и их композицию $f \circ g = h\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ со значениями

$$h(x, y) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in X, \ y \in Y).$$

Так как f и g непрерывны, то композиция $f \circ g = h$ непрерывна. Вместе с h непрерывна каждая частная функция $h(\cdot, y)\colon X \to \mathbb{R}$ $(y \in Y)$. Поэтому для $h(\cdot, y)$ определен интеграл Римана на $[a, b]$.

Упражнение. Доказать непрерывность g и интегрируемость $h(\cdot, y)$ на $[a, b]$.

Гладкие функция f и кривая y определяют вещественное число

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx. \tag{1}$$

Функционал $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ с такими значениями определен на открытом множестве банахова пространства H и поэтому к φ применимо сказанное в п. 3.2.8 о поиске локальных минимумов и максимумов.

3. Для формулировки необходимых условий существования минимума или максимума функционала φ на данной кривой $y \in Y$ нужен его дифференциал $d\varphi y = \varphi'(y) \in \mathscr{B}(Y, \mathbb{R})$. (Для упрощения записей будем дифференциалы отождествлять с производными.)

Векторное пространство $C = C[a, b]$ сужений на $[a, b]$ непрерывных функций $u\colon X \to \mathbb{R}$ с нормой $\|u\| = \sup |u(x)|$ $(x \in [a, b])$ есть банахово пространство. Функционал $\psi\colon C \to \mathbb{R}$ со значениями

$$\psi(u) = \int_a^b u(x)\, dx \quad (u \in C)$$

линеен и $|\psi(u)| \le (b-a)\|u\|$. Значит, ψ гладкий.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Заметим, что $g(x,y) = (x, \delta_x(y), d_x(y))$, где $\delta_x, d_x \colon Y \to E$ — непрерывные линейные отображения со значениями $\delta_x(y) = y(x)$, $d_x(y) = y'(x) \in E$ при каждом $x \in X$. Поэтому $g_2'(x,y) = (0, \delta_x, d_x)$ в каждой точке $y \in Y$:

$$g_2'(x,y) \cdot z = (0, \delta_x, d_x) \cdot z = (0, z(x), z'(x)) \quad (z \in Y).$$

Как всякая постоянная, дифференциал $g_2'(x,\cdot)$ непрерывен. Теперь легко вычислить дифференциал функционала φ.

Предложение. *Функционал φ непрерывно дифференцируем и для каждых $y \in Y$, $z \in Y$ верно равенство*

$$\varphi'(y)z = \int\limits_a^b \big[f_2'(x, y(x), y'(x)) \cdot z(x) + f_3'(x, y(x), y'(x)) \cdot z'(x)\big]\, dx. \quad (2)$$

□ Из определений следует, что $\varphi(y) = \psi(f(g(\cdot,y)))$ $(y \in Y)$. Применяя правило дифференцирования сложной функции и используя равенства для дифференциалов $\psi'(u)$, $g_2'(x,y)$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(y)z &= \psi\big(f'(g(\cdot,y)g_2'(\cdot,y)z\big) \\ &= \psi\big(f_1'(g(\cdot,y)) \cdot 0 + f_2'(g(\cdot,y)) \cdot z + f_3'(g(\cdot,y)) \cdot z'\big). \quad (3) \end{aligned}$$

Непрерывность φ' следует из непрерывности функции g, дифференциалов функции f и функционала ψ. ■

3.2.10. Простейшая вариационная задача

Формулируются необходимые условия для локального минимума специального функционала φ из 3.2.9.

1. Используем определения и обозначения 3.2.9. Рассмотрим подпространство $H_0 = \{y \in H : y(a) = y(b) = 0\}$ пространства H гладких кривых и множество $Y_0 = Y \cap H_0$. Ясно, что H_0 замкнуто в H. Поэтому $(H_0, \|\,\|)$ является банаховым пространством. Множество Y_0 открыто в нем, а сужение $\varphi_0 \colon Y_0 \to \mathbb{R}$ функционала $\varphi \colon Y \to \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемый функционал. Его значения определены равенством (1), а значения его дифференциала — равенствами (2) и (3) в 3.2.9.

Для каждой кривой $y \in Y_0$ рассмотрим функции p, q со значениями

$$p(x) = f_2'(x, y(x), y'(x)), \quad q(x) = f_3'(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in X).$$

Назовем кривую $y \in Y_0$ *экстремалью*, если для всех $z \in Y_0$

$$\int_a^b [p(x) \cdot z(x) + q(x) \cdot z'(x)]\, dx = 0. \tag{1}$$

2. Возьмем непрерывную функцию $r\colon X \to \mathscr{B}(E, \mathbb{R})$ и гладкую кривую $z \in Y_0$. Функция $s = r \cdot z\colon X \to \mathbb{R}$ со значениями $s(x) = r(x) \cdot z(x)$ $(x \in X)$ непрерывна и поэтому интегрируема на отрезке $[a, b] \subset X$.

Лемма. *Если* $\int_a^b r(x) \cdot z(x)\, dx = 0$ *для каждой кривой* $z \in Y_0$, *то* $r(x) = 0$ $(x \in [a, b])$.

□ Пусть $r(u) \neq 0$ для некоторого $u \in]a, b[$. Тогда $r(u) \cdot v > 0$ для некоторого $v \in E$. Так как функция r непрерывна, то $r(u) \cdot v > 0$ при $x \in [u-\delta, u+\delta] \subset]a, b[$ для некоторого $\delta > 0$. Возьмем гладкую $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ со значениями $\gamma(x) > 0$ $(x \in [u - \delta, u + \delta])$, $\gamma(x) = 0$ $(x \notin [u - \delta, u + \delta])$ и определяемую ею гладкую кривую $c \in Y_0$ со значениями $c(x) = \gamma(x)v$ $(x \in X)$. Заметим, что $r(x) \cdot c(x) = r(x) \cdot \gamma(x)v = r(x)\gamma(x) \cdot v = 0$ $(x \in X)$ и $r(x) \cdot c(x) > 0$ $(x \in [u - \delta, u + \delta])$. Следовательно, $\int_a^b r(x) \cdot c(x)\, dx \geq \int_{u-\delta}^{u+\delta} r(x) \cdot c(x)\, dx \geq \alpha\delta > 0$, где $\alpha = \min\{r(x) \cdot c(x) : x \in [u - \delta/2, u + \delta/2]\} > 0$. Полученные для интегралов неравенства противоречат условию леммы. ■

3. Предположим дополнительно, что функция q гладкая.

Лемма. *Кривая* $y \in Y_0$ *является экстремалью ессли для нее верно уравнение Эйлера*

$$q'(x) = p(x) \quad (x \in [a, b]). \tag{2}$$

☐ 1) Если для кривой $y \in Y_0$ верно уравнение (2), то по правилу дифференцирования произведения получаем при $z \in Y_0$, $x \in X$

$$(qz)'(x) = q'(x) \cdot z(x) + q(x) \cdot z'(x) = p(x) \cdot z(x) + q(x) \cdot z'(x).$$

Так как $z(a) = z(b) = 0$, то $\int\limits_a^b (qz)'(x)\,dx = q(b) \cdot z(b) - q(a) \cdot z(a) = 0$. Следовательно, верно (1) и кривая y является экстремалью.

2) Если кривая $y \in Y_0$ является экстремалью, то для каждой $z \in Y_0$ верны равенства

$$\int\limits_a^b (p(x) - q'(x))z(x)\,dx + q(b)z(b) - q(a)z(a)$$
$$= \int\limits_a^b [p(x)z(x) - q'(x)z(x) + q'(x)z(x) + q(x)z'(x)]\,dx,$$
$$\int\limits_a^b (p(x) - q'(x))z(x)\,dx = \int\limits_a^b [p(x)z(x) + q(x)z'(x)]\,dx = 0.$$

По лемме п. 2 отсюда следует, что $p(x) - q'(x) = 0$ $(x \in [a, b])$. Значит, для кривой y верно уравнение Эйлера (2). ■

Предложение. *Если функционал φ_0 имеет на кривой $y \in Y_0$ локальный минимум или максимум, то для y верно уравнение Эйлера.*

☐ Если φ_0 имеет на $y \in Y_0$ локальный минимум или максимум, то $\varphi_0'(y) \cdot z = 0$ $(z \in Y_0)$ и по предложению п. 3.2.9,3 кривая y является экстремалью. Остается применить доказанную лемму. ■

4. Рассмотрим простой пример уравнения Эйлера.

Пусть $E = \mathbb{R}$, $[a, b]=[0, 1]$, $f(x, u, v)=v^2-\pi^2 u^2$ $(x, u, v \in \mathbb{R})$. Тогда $\varphi(y) = \int\limits_0^1 [(y'(x))^2 - \pi^2(y(x))^2]\,dx$ для каждой гладкой функции $y\colon X \to \mathbb{R}$ на открытом интервале $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \supset [0, 1]$ и удовлетворяющей условию $y(0) = y(1) = 0$.

В этом случае $p(x) = -2\pi^2 y(x)$, $q(x) = 2y'(x)$ и уравнение Эйлера эквивалентно $y''(x) + \pi^2 y(x) = 0$. Решениями являются функции $y(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x)$.

Так как $y(0) = 0$, то $a = 0$ и экстремалями служат кривые $y(x) = b\sin(\pi x)$. Функционал φ на этих кривых равен нулю.

Упражнение. Исследовать локальные минимумы и максимумы функционала φ.

5. В п. 3 предположение о дифференцируемости q сделано для упрощения рассуждений. Лемму об экстремалях можно доказать, не предполагая заранее дифференцируемость q. Доказательство есть в § 1.4 книги [1]. В главе 2 там излагаются элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Применению общей теории к простейшей вариационной задаче посвящен заключительный § 4.4 книги [1]. Там доказываются различные достаточные условия экстремума функционала φ.

3.3. Интеграл

Абстрактный интеграл обобщает понятия площади, объема, центра масс, среднего значения. Он определяется как некоторый функционал или оператор на пространстве интегрируемых функций. Варианты общей теории интеграла описаны в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [45], П. Халмоша [108], Н. Бурбаки [15], Г. Федерера [105], М. Лоэва [58], И. Е. Сигала и Р. А. Кюнце [146]. Излагаемая здесь модель подробно описана в выпусках лекций Л. Я. Савельева [82]. Основные определения введены в заметках [86, 92] и статье [87].

3.3.1. Меры

Мерами называются аддитивные функции. Они составляют фундамент, на котором строится понятие интеграла.

1. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ с ассоциативными, коммутативными, имеющими общую единицу 1 скалярными кольцами. Предполагается, что $\mathbb{K}$ есть подкольцо кольца $\mathbb{L}$.

Выберем непустой наследственный класс $\mathscr{B}$ линейно свободных множеств $B \subseteq E$. Наследственность $\mathscr{B}$ означает, что вместе с множеством B класс $\mathscr{B}$ содержит все его части: $B \in \mathscr{B} \Rightarrow$

$\mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{B}$. Назовем $\mathscr{B}$ *базовым классом* или *мультибазой*, а множества $B \in \mathscr{B}$ — *базовыми множествами* или просто *базами.*

Выберем также множество $C \subseteq E$ такое, что для каждого конечного $X \subseteq C$ существует база $B \subseteq C$, аддитивная оболочка $A(B)$ которой содержит X. Это значит, что каждый вектор из X равен сумме некоторых векторов из B: по определению $A(B)$ состоит из всех конечных сумм элементов B. Назовем множество C *спектральным* по $\mathscr{B}$.

Возьмем отображение $m\colon C \to F$, аддитивное на каждой конечной базе $B \subseteq C$, сумма векторов которой принадлежит C. Назовем m *мерой.* Тройку $(C, \mathscr{B}, m)$ будем называть *пространством с мерой.*

Пусть $(\mathbb{K}, E) = \sum(\mathbb{K}, E_i)$ — прямая сумма векторных пространств $(\mathbb{K}, E_i) \subseteq (\mathbb{K}, E)$, $(C_i, \mathscr{B}_i, m_i)$ — семейство пространств с мерами, $C = \cup C_i$, $\mathscr{B}$ — класс всех объединений $B = \cup B_i$ множеств $B_i \in \mathscr{B}_i$, $p_i\colon E \to E_i$ — прямой проектор E на E_i, $m = \sum m_i p_i \colon C \to F$.

Лемма. *Класс $\mathscr{B}$ — базовый, множество C — спектральное, отображение m — мера.*

□ 1) Пусть $B \in \mathscr{B}$, $B = \cup B_i$, $B_i \in \mathscr{B}_i$, $X \subseteq B$. Тогда $X_i = XB_i \in \mathscr{B}_i$ и $X = \cup X_i \in \mathscr{B}$. Класс $\mathscr{B}$ не пуст вместе с $\mathscr{B}_i$.

2) Пусть $X \in \mathscr{K}(C)$, $X = \cup X_i$, $X_i \in \mathscr{K}(C_i)$. Тогда $X_i \subseteq A(B_i)$ для некоторого $B_i \in \mathscr{B}_i$ и $X \subseteq A(B)$, $B = \cup B_i \in \mathscr{B}$.

3) Пусть $B \in \mathscr{B}$, $B \in \mathscr{K}(C)$, $\sum b \in C$ $(b \in B)$. Тогда $m\left(\sum b\right) = \sum\limits_i m_i p_i \left(\sum b\right) = \sum\limits_i m_i \left(\sum p_i b\right) = \sum\limits_i \sum m_i(p_i b) = \sum \sum\limits_i m_i p_i(b) = \sum m(b)$. ■

Пространство $(C, \mathscr{B}, m) = \sum(C_i, \mathscr{B}_i, m_i)$ называется *прямой суммой пространств* $(C_i, \mathscr{B}_i, m_i)$, а мера m — *прямой суммой мер* m_i.

2. Рассмотрим: поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ всех последовательностей элементов $\mathbb{P}$, его подкольцо $\mathscr{A}$, идеал $\mathscr{I}$ в $\mathscr{A}$, фактор-кольцо $\mathbb{K} = \mathscr{A}/\mathscr{I}$, множество U, кольцо $E = \mathscr{F}(U, \mathbb{K})$ всех функций $x\colon U \to \mathbb{K}$, алгебру $(\mathbb{K}, E)$. Векторами алгебры $(\mathbb{K}, E)$ являются скалярные функции x, а скалярами — фактор-множества последовательностей элементов поля $\mathbb{P}$.

Обозначим через P множество всех индикаторов, определенных на U. Будем отождествлять множества в U с их индикаторами: $\mathscr{P}(U) = P \subseteq E$. Ортогональность индикаторов означает дизъюнктность соответствующих множеств.

Семейства попарно ортогональных векторов будем называть *ортосемействами*. Порядок для множеств определяет порядок для индикаторов. Говорят, что множество Q индикаторов образует *полукольцо*, если:

$$(1)\ 0 \in Q, \qquad (2)\ xy \in Q\ (x, y \in Q), \qquad (3)\ y - x = \sum z_k$$

для некоторого конечного ортосемейства векторов $z_k \in Q$ $(x, y \in Q,\ x \le y)$. Термин принят в теории множеств. Так как $x \le y \Leftrightarrow xy = x$ и $z_j z_k = 0$ $(j \ne k)$, то $0 = x - x = x(y - x) = \sum x z_k$, $x z_j = 0$ и поэтому условие (3) эквивалентно равенству $y = x + \sum z_k$, $x z_j = z_j z_k = 0$ $(j \ne k)$. Оно означает, что каждый индикатор $y \in Q$, больший индикатора $x \in Q$, равен сумме некоторых попарно ортогональных индикаторов из Q, одним из которых является x. При этом возможно, что $y - x \notin Q$.

Возьмем: класс $\mathscr{B} = \mathscr{R}$ всех линейно свободных ортомножеств в E, полукольцо $C = Q$ индикаторов множеств в U, векторное пространство $(\mathbb{K}, F)$ и ортоаддитивную функцию $m\colon Q \to F$. *Ортоаддитивность* m означает, что $m\left(\sum b\right) = \sum m(b)$ $(b \in B)$ для каждой базы $B \subseteq Q$ такой, что $\sum b \in Q$. Если поле $\mathbb{P}$ бесконечно, то для конечного семейства индикаторов $x_i \in P$ верно $\sum x_i \in P$ ессли $x_i \perp x_j$ $(i \ne j)$. В этом случае ортоаддитивность функции m эквивалентна обычной аддитивности. В дальнейшем, как правило, рассматриваются бесконечные поля. Если в смешанном произведении вектора на скаляр нет делителей нуля, то ортомножество линейно свободно ессли ему не принадлежит нулевой вектор:

$$\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i x_i^2 = \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in P),$$

если $x_i x_j = 0$ при $i \ne j$ и $x_i \ne 0$.

Часто бывает полезен алгоритм ортогонализации последовательности индикаторов. Рассмотрим последовательность индикаторов $x_i \in Q$ и определяемую ею последовательность индикаторов $y_j = x_j - (V_{i<j} x_i) x_j \in P$.

Лемма. *Для всех номеров j, k, n верны соотношения*

$$y_j \le x_j, \quad y_j \perp y_k\ (j \ne k), \quad \sum_{j \le n} y_j = V_{j \le n} x_j.$$

□ Неравенство $y_j \le x_j$ следует из определений.

По определению, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1x_2$ и $y_1y_2 = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$. Пусть $y_j \perp y_k$ $(j, k < n,\ j \ne k)$, $\sum\limits_{i<n} y_i = V_{i<n} x_i$. Тогда $y_jy_n = y_j\Big(x_n - \Big(\sum\limits_{i<n} y_i\Big)x_n\Big) = y_jx_n - y_jx_n = 0$ $(j < n)$. Откуда благодаря предположению $y_j \perp y_k$ $(j, k \le n,\ j \ne k)$. Поэтому $\sum\limits_{j\le n} y_j = \sum\limits_{j<n} y_j + y_n = \Big(\bigvee\limits_{i<n} x_i\Big) + x_n - \Big(\bigvee\limits_{i<n} x_i\Big)x_n = \Big(\bigvee\limits_{i<n} x_i\Big) \vee x_n = \bigvee\limits_{j\le n} x_j$. По принципу индукции отсюда следуют доказываемые соотношения. ■

Замечание. Лемму об ортогонализации можно применять и к конечным последовательностям $x_i \in Q$ $(1 \le i \le n)$, полагая $x_j = 0$ $(j > n)$.

Следующее предложение обобщает условие (3) определения полукольца.

Предложение. *Для каждых индикатора $y \in Q$ и ортосемейства индикаторов $u_i \in Q$, $u_i \le y$ $(1 \le i \le m)$, существует ортосемейство индикаторов $v_j \in Q$ $(1 \le j \le n)$ такое, что $u_i \perp v_j$ и $y = \sum u_i + \sum v_j$.*

□ Если $m = 1$, то доказываемое утверждение эквивалентно условию (3) определения полукольца.

Предположим, что предложение верно для $m = l$, и докажем, что тогда оно верно для $m = l + 1$. Это следует из $y - \sum\limits_{i\le l+1} u_i = \Big(y - \sum\limits_{i\le l} u_i\Big) - u_{l+1} = \sum\limits_{j\le n} (v_j - v_ju_{l+1}) = \sum\limits_{j\le n}\sum\limits_{k} v_{jk}$, $(v_j - v_ju_{l+1}) = \sum\limits_{k} v_{jk}$, где $u_i \perp v_{jk}$, $v_{jk} \perp v_{pq}$ $(j \ne p$ или $k \ne q)$. В этих равенствах, кроме определения полукольца и предположения, использованы соотношения $yu_{l+1} = u_{l+1}$, $u_iu_{l+1} = 0$ $(i \le l)$, $u_{l+1} = \Big(y - \sum\limits_{i\le l} u_i\Big)u_{l+1} = \sum\limits_{j\le n} v_ju_{l+1}$. Ортогональность $u_i \perp v_{jk}$ следует из $u_i \perp v_j$ и $v_{jk} \le v_j$: $u_iv_{jk} = u_i(v_jv_{jk}) = (u_iv_j)v_{jk} = 0$. Точно так же $v_{jk} \perp v_{pq}$ следует из $v_j \perp v_p$ при $j \ne p$ и $v_{jk} \le v_j$, $v_{pq} \le v_p$. Предложение верно для любого $m \ge 1$. ■

Основной результат п. 2 формулирует

Теорема. *Полукольцо индикаторов Q является спектральным множеством по ортогональной мультибазе $\mathscr{R}$.*

□ Рассмотрим множество индикаторов $x_i \in Q$ $(1 \le i \le m)$. Если $m = 1$, то теорема верна: множество $X = \{x_1\}$ само является нужной базой.

Предположим, что теорема верна для $m = l$, и докажем, что тогда она верна для $m = l + 1$. Пусть $x_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} b_j$ $(1 \le i \le l)$ при некоторых коэффициентах $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$ для индикаторов $b_j \in Q$ из ортомножества B: $X = \{x_1, \dots, x_l\} \subseteq A(B)$. Положим $c_j = b_j x_{l+1}$. Из определения полукольца следует, что $c_j \in Q$ и $b_j = c_j + \sum\limits_s z_{js}$ для индикаторов $z_{js} \in Q$ из ортомножеств B_j. Так как $b_j \perp b_k$ и $c_j \le b_j$, $c_k \le b_k$, то $c_j \perp c_k$ $(j \ne k)$. По той же причине $c_j \perp z_{kt}$, $z_{js} \perp z_{kt}$ $(j \ne k)$. Кроме того, $c_j \perp z_{js}$. Таким образом, индикаторы c_j, z_{js} попарно ортогональны и $x_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} c_j + \sum\limits_{js} \alpha_{ij} z_{js}$ $(1 \le i \le l)$. Вместе с тем по доказанному предложению $x_{l+1} = \sum\limits_j c_j + \sum\limits_p z_p$ для некоторых $z_p \in Q$ таких, что $c_j \perp z_p$ и $z_p \perp z_q$ $(p \ne q)$. Так как $z_p \le x_{l+1}$ и $z_{js} \le b_j - c_j = b_j(1 - x_{l+1}) \le 1 - x_{l+1}$, то $z_p \perp z_{js}$. Значит, множество $\bar{B} = \{c_j, z_{js}, z_p\}$ принадлежит ортогональной мультибазе $\mathscr{R}$ и множество $\bar{X} = \{x_1, \dots, x_l, x_{l+1}\}$ содержится в аддитивной оболочке $A(\bar{B})$ множества $\bar{B}$.

По принципу индукции из сказанного следует, что теорема верна для любого $m \ge 1$. ■

Следствие. *Ортогональная мультибаза $\mathscr{R}$, полукольцо индикаторов Q и ортоаддитивная функция $m\colon Q \to F$ составляют пространство с мерой $(Q, \mathscr{R}, m)$.*

Замечание. Формальные сложности, связанные с аддитивностью меры, объясняются тем, что суммы элементов полукольца индикаторов могут ему не принадлежать.

Пример. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$; $\mathscr{A} = \mathbb{R}$ — поле постоянных вещественных последовательностей, отождествленных со своими значениями; $\mathscr{I} = \{0\}$, $\mathbb{K} = \mathscr{A}/\mathscr{I} = \mathbb{R}$; $U = \mathbb{R}$, $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — алгебра вещественных функций вещественной переменной; $\mathscr{P}(\mathbb{R}) = P$ — класс всех частей вещественной прямой, отождествленных со своими индикаторами; $F = \mathbb{R}$.

Легко убедиться в том, что множество S индикаторов ограниченных интервалов в $\mathbb{R}$ образует полукольцо. По определению, число $l(x) = \beta - \alpha$ является длиной интервала x с началом α и концом β. Как нетрудно проверить, $l\colon S \to \mathbb{R}$ есть мера. Пространство $(S, \mathbb{R}, l)$ является прототипом общего пространства с мерой.

Выбирая подходящим образом поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathscr{A}$, идеал $\mathscr{I}$ и группу F, можно получить меры с вещественными, нестандартными, p-адическими, векторными и операторными значениями, определенные на классах множеств.

3. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$, описанные в п. 1, и некоторое множество S линейно независимых векторов из E. Класс $\mathscr{B} = \mathscr{K}(S)$ всех конечных частей множества S является мультибазой в E.

Пример. Можно взять в качестве множества S базу Хамеля для E.

Объединение $A = A(S) = \cup A(B)$ $(B \in \mathscr{K}(S))$ назовем *аддитивной оболочкой* множества S. Она содержится в линейной оболочке $L = L(S) = \cup L(B)$ $(B \in \mathscr{K}(S))$ множества S.

Лемма. *Аддитивная оболочка $A = A(S)$ есть спектральное множество по $\mathscr{K}(S)$.*

$\square$ Пусть $X = \{x_i : 1 \leq i \leq m\} \subseteq A$. Тогда $x_i \in A(B_i)$ для некоторого $B_i \in \mathscr{B}$ и поэтому $X \subseteq A(B)$ для $B = \cup B_i \in \mathscr{K}(S)$. $\blacksquare$

Сужение $m = T|A$ на A линейного оператора $T\colon L \to F$ является мерой: аддитивность m на $B \in \mathscr{K}(S)$ следует из линейности T. Класс $\mathscr{B} = \mathscr{K}(S)$, множество $A = A(S)$ и сужение $m = T|A$ составляют пространство с мерой $(A(S), \mathscr{K}(S), T|A)$.

Замечание. Если $T \in \mathscr{L}(E, F)$, то сужение $m = T|A$ является мерой на $A = A(S)$ для любого линейно свободного множества $S \subseteq E$. Каждый линейный оператор порождает некоторое семейство мер. Интегрирование связано с обратным процессом: порождением семейством мер некоторого линейного оператора.

Рассмотрим поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, комплексное гильбертово пространство H и алгебру $E = \mathscr{L}(H)$ ограниченных линейных операторов $x\colon H \to H$. Отождествление каждого подпространства $X \subseteq H$ с эрмитовым проектором $p\colon H \to X$ позволяет отождествить класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(H)$ подпространств пространства H с множеством $P = P(H) \subseteq E$ эрмитовых проекторов на эти подпространства. Для эрмитовых проекторов определено отношение ортогональности: $p \perp q \Leftrightarrow pq = qp = 0$. Ортогональность ненулевых проекторов влечет их линейную независимость: $\sum \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \alpha_j p_j = \left(\sum \alpha_i p_i\right) p_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$. Поэтому класс $\mathscr{R}$ всех ортомножеств $B \subseteq P$ из ненулевых проекторов — базовый. Назовем $\mathscr{R}$ *ортогональной проекторной мультибазой.*

Возьмем некоторое ортомножество $R \in \mathscr{R}$, составленное из проекторов конечного ранга, и его аддитивную оболочку $A =$

$A(R) = \cup A(B)$ $(B \in \mathscr{K}(R))$. Она является спектральным множеством по $\mathscr{B} = \mathscr{K}(R)$ и тем более по $\mathscr{R}$. Размерность $d(p) = \dim p(H)$ образа $p(H)$ проектора $p \in R$ определяет меру $d\colon A \to \mathbb{R}$. Класс $\mathscr{K}(R)$, множество $A(R)$ и мера d составляют пространство с мерой $(A(R), \mathscr{K}(R), d)$.

Замечание. Индикаторы и проекторы объединяет их идемпотентность. Можно рассматривать общую модель с алгеброй E и множеством P ее идемпотентов. Если для E определена инволюция, то можно взять эрмитовы идемпотенты. В этой книге такая общая модель рассматриваться не будет. Все сказанное в п. 3 только поясняет данное общее определение пространства с мерой. Теория будет излагаться главным образом для числовых мер на классах множеств.

4. При данных в п. 1 определениях спектральная аддитивность меры $m\colon C \to F$ эквивалентна ее линейности. Обычно линейные операторы определяются на подпространствах рассматриваемого пространства. Спектральное множество C, на котором определена мера m, может не быть подпространством пространства E.

Лемма. *Мера является линейным отображением.*

□ Линейность меры $m\colon C \to F$ означает, что

$$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K};\ x, y, \alpha x + \beta y = z \in C).$$

Так как $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, то $\alpha m(x)$, $\beta m(y) \in F$. Пусть

$$x = \sum \xi(e)e, \quad y = \sum \eta(e)e, \quad z = \sum \xi(e)e \quad (e \in B)$$

для некоторых базы $B \subseteq C$ и финитных индикаторов $\xi, \eta, \zeta\colon B \to \mathbb{K}$. Тогда $\alpha\xi(e) + \beta\eta(e) = \zeta(e)$, и так как $\zeta(e) \in \{0, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ и m аддитивна на B, то

$$\begin{aligned} m(z) = \sum \zeta(e)m(e) &= \sum (\alpha\xi(e) + \beta\eta(e))m(e) \\ &= \alpha \sum \xi(e)m(e) + \beta \sum \eta(e)m(e) = \alpha m(x) + \beta m(y). \end{aligned}$$

Значит, мера m линейна в своей области C. ■

Линейность меры позволяет продолжить ее на линейную оболочку $S = L(C)$. Эта оболочка состоит из линейных комбинаций

$u = \sum \alpha(x)x$ $(x \in C)$ с финитными $\alpha\colon C \to \mathbb{K}$. Назовем векторы $u \in S$ *простыми.* Равенство

$$l(u) = \Big\{\sum \alpha(x)m(x) : u = \sum \alpha(x)x\Big\}$$

определяет соответствие $l\colon S \to F$. Назовем l *простым интегралом* или *интегральной суммой*, или *простым средним* по мере m.

Теорема. *Простой интеграл l является единственным линейным отображением S в F, продолжающим меру m.*

□ 1) Соответствие l однозначно. В самом деле, равенство $\sum \alpha(x)x = \sum \beta(x)x$ $(x \in C)$ для финитных $\alpha, \beta\colon C \to \mathbb{K}$ эквивалентно равенству $\sum \gamma(x)x = 0$ для $\alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x)$ $(x \in C)$. А равенство $\sum \alpha(x)m(x) = \sum \beta(x)m(x)$ — равенству $\sum \gamma(x)m(x) = 0$. Поэтому соответствие l однозначно, если из $\sum \gamma(x)x = 0$ следует $\sum \gamma(x)m(x) = 0$. Рассмотрим конечное множество $X = \{x : \gamma(x) \neq 0\} \subseteq C$ и базу $B \subseteq C$, аддитивная оболочка которой содержит X. Пусть $x = \sum \xi(x,e)e$ $(e \in B)$ для каждого $x \in X$ и некоторого финитного индикатора $\xi(x,\cdot)\colon B \to \mathbb{K}$. Тогда благодаря линейной независимости базовых векторов $e \in B$ из равенств

$$0 = \sum_x \gamma(x)x = \sum_x \gamma(x)\bigg(\sum_e \xi(x,e)e\bigg) = \sum_e \bigg(\sum_x \gamma(x)\xi(x,e)\bigg)e$$

следуют равенства $\sigma(e) = \sum\limits_x \gamma(x)\xi(x,e) = 0$ $(e \in B)$. Откуда, так как мера m линейна на C,

$$\sum_x \gamma(x)m(x) = \sum_x \gamma(x)\sum_e \xi(x,e)m(e) = \sum_e \sigma(e)m(e) = 0.$$

2) Отображение l линейно. В самом деле, пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $u = \sum \alpha(x)x$, $v = \sum \beta(x)x \in S$ для финитных семейств скаляров $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{K}$ $(x \in C)$. Тогда $\alpha u + \beta v = \sum(\alpha\alpha(x) + \beta\beta(x))x$ и, вследствие однозначности l, $l(\alpha u + \beta v) = \sum(\alpha\alpha(x) + \beta\beta(x))m(x) = \alpha\sum \alpha(x)m(x) + \beta\sum \beta(x)m(x) = \alpha l(u) + \beta l(v)$.

3) Отображение l продолжает меру m. Это сразу следует из определений и однозначности l: так как $u = 1 \cdot u$ $(u \in S)$ и по условию скалярные кольца $\mathbb{K}$,-L имеют общую единицу 1, то $l(u) = 1 \cdot m(u) = m(u)$.

4) Если линейный оператор $n\colon S \to F$ продолжает меру m, то $n = l$. В самом деле, $n(u) = \sum \alpha(x)n(x) = \sum \alpha(x)m(x) = l(u)$ для каждого $u = \sum \alpha(x)x \in S$ $(x \in C)$. ■

Замечание. Теорема о простом интеграле является модификацией общего принципа линейного продолжения [12, гл. II, § 2.1].

Рассмотрим прямую сумму $(C, \mathscr{B}, m)$ пространств с мерой $(C_i, \mathscr{B}_i, m_i)$, описанную в п. 1. Пусть $S_i = L(C_i)$, $l_i \colon S_i \to F$ — простой интеграл по мере m_i, $S = \sum S_i$ — прямая сумма пространств S_i. Отображение $l = \sum l_i p_i \colon S \to F$ называется *прямой суммой* линейных операторов l_i. Из доказанной теоремы и общих правил действий с линейными операторами [12, гл. II, § 2.4] вытекает

Следствие. *Простой интеграл по прямой сумме мер равен прямой сумме простых интегралов по ним.*

Упражнение. Дать подробное доказательство.

5. Непрерывное продолжение интегральной суммы до интеграла — самый трудный шаг при его определении. Трудность заключается в выборе подходящих условий для меры, обеспечивающих такое продолжение. Здесь этот шаг будет описан только схематически.

Предположим, что скалярные кольца $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ являются полями и для $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$, E, F определены топологии, при которых операции со скалярами и векторами непрерывны. В топологических векторных пространствах $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ замыкание подпространств вследствие непрерывности переносов являются подпространствами. Непрерывность линейного оператора эквивалентна его непрерывности в точке нуль. Это позволяет сформулировать следующий общий критерий непрерывности интегральной суммы.

Лемма. *Интегральная сумма l непрерывна ессли для каждой окрестности V точки $0 \in F$ существует окрестность U точки $0 \in E$ такая, что $\sum \alpha(e)m(e) \in V$ при $\sum \alpha(e)e \in U$ ($e \in B$, $B \in \mathscr{B}$, $B \subseteq C$).*

Этот критерий дает возможность в некоторых случаях выделять меры, простые интегралы по которым непрерывны. Вместо топологий для пространств E и F можно рассматривать топологии для некоторых их подпространств, содержащих соответственно S и $l(S)$.

Непрерывность линейных операторов в топологических векторных пространствах равномерна. При некоторых предположениях равномерно непрерывное отображение можно продолжать на замыкание области определения. Предположим дополнительно, что пространство F отделимое и полное. Это влечет его регулярность и обеспечивает существование и единственность непрерывного продолжения $\bar{l}\colon \bar{S} \to F$ непрерывной интегральной суммы $l\colon S \to F$ на замыкание $\bar{S}$ ее области определения S. Значения $\bar{l}$ определяются равенством $\bar{l}(\bar{u}) = \lim l(u)$ $(u \to \bar{u},\ u \in S)$. Оператор $\bar{l}$ линеен вместе с l.

Теорема. *Если выполнены условия леммы, то при сделанных дополнительных предположениях существует единственное непрерывное отображение $\bar{l}\colon \bar{S} \to F$, продолжающее интегральную сумму $l\colon S \to F$.*

Назовем векторы из $\bar{S}$ *регулярно интегрируемыми*, а оператор $\bar{l}$ — *регулярным интегралом* по мере m. Это название позволяет отличать $\bar{l}$ от других продолжений интегральной суммы l.

Замечание. В [83–92] описаны некоторые конкретизации схемы непрерывного продолжения меры до интеграла. В [146] рассматривается интеграл, определяемый как след линейного оператора в гильбертовом пространстве. Для непрерывного продолжения используется специальная норма.

В статье [87] определяются неаддитивные внешние меры, у которых суммы в определенном смысле достаточно малых элементов имеют произвольно малые значения. Внешние меры определяются на булевых алгебрах и принимают значения в равномерных пространствах. Выделяются жордановы и лебеговы внешние меры, непрерывные при соответствующих топологиях. Выводятся следствия для мер с абстрактными значениями. Логично было бы исследовать непрерывные продолжения внешних мер на подходящие пространства функций в качестве нелинейных интегралов (таких, как верхний и нижний интегралы в числовом случае; см. [105, гл. 2]).

3.3.2. Классическое определение интеграла

Здесь интегрируются числовые функции по числовым мерам. Интегралом называется предел интегральных сумм. Это соответствует классическому определению.

1. Рассмотрим пространство с мерой $(Q, \mathscr{B}, \mu)$ — частный случай пространства $(Q, \mathscr{B}, m)$, описанного в 3.3.1, 2. Здесь $\mathscr{B}$ — ортогональная мультибаза, Q — полукольцо частей множества U, отождествленное с полукольцом Q их индикаторов, а мера $\mu\colon Q \to \mathbb{K}$ — числовая (вещественная или комплексная), удовлетворяющая некоторым условиям непрерывности ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Алгебра $\mathscr{F} = \mathscr{F}(U, \mathbb{L})$ состоит из числовых функций на U ($\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Будем предполагать, что $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Возможное различие полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$ создает некоторые неудобства, но при $\mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{C}$ во многих рассуждениях приходится выделять $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, а при $\mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{R}$ — переносить результаты на комплексный случай.

Будем называть множества из Q и их индикаторы из Q *основными*, а функции из линейной оболочки $\mathscr{S} = L(Q)$ множества Q в алгебре $\mathscr{F}$ — *простыми*. Множества, имеющие простые индикаторы, тоже будем называть *простыми*. Таким образом, простыми множествами являются суммы дизъюнктных основных множеств, а простыми функциями — линейные комбинации простых индикаторов. Отождествление множеств с их индикаторами позволяет сказать, что простые функции являются линейными комбинациями простых множеств: $Q \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{S} = L(Q)$.

Пример. Если Q — полукольцо интервалов в $\mathbb{R}$, то простыми множествами являются объединения конечных семейств дизъюнктных интервалов, а простыми функциями — ступенчатые функции.

Равенства $f = \sum a_j X_j = \sum b_k Y_k$ для простой функции $f \in \mathscr{S}$

возможны при различных семействах чисел $a_j, b_k \in \mathbb{L}$ и основных множеств $X_j, Y_k \in Q$. Среди представлений f выделяют *дизъюнктивные*, в которых множества X_j дизъюнктны. Дизъюнктивное представление можно получить из любого с помощью процесса ортогонализации.

Лемма. *Простые функции образуют подалгебру алгебры* $\mathscr{F}$.

□ Пусть $f = \sum a_j X_j$, $g = \sum b_k Y_k$ $(a_j, b_k \in \mathbb{L},\ X_j, Y_k \in Q)$.

Тогда $f + g$, $fg = \sum a_j b_k X_j Y_k \in \mathscr{S}$, так как $X_j Y_k \in Q$. ■

Обозначим $\mathscr{R}$ класс всех простых множеств в U. При отождествлении множеств с их индикаторами верны включения $Q \subseteq \mathscr{R} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{F}$. Простые множества образуют подкольцо булева кольца $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$, порожденное полукольцом Q. По определению, $\mathscr{R} = \mathscr{P} \cap \mathscr{S}$. Для меры $\mu\colon Q \to \mathbb{K}$ определена интегральная сумма $S(\cdot, \mu)\colon \mathscr{S} \to \mathbb{K}$ (3.3.1, 4).

Теорема. *Существует единственная мера $\nu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{K}$, продолжающая меру $\mu\colon Q \to \mathbb{K}$, и верно равенство $S(\cdot, \nu) = S(\cdot, \mu)$.*

□ Мера $\nu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ равна сужению интегральной суммы $S(\cdot, \mu)$ на кольцо $\mathscr{R}$. Она продолжает меру μ, так как $\nu(X) = S(X, \mu) = \mu(X)$ $(X \in Q)$. А так как $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S}$, то $L(\mathscr{R}) = \mathscr{S}$ и $S(\cdot, \nu) = S(\cdot, \mu)$ вследствие единственности линейного отображения $S\colon \mathscr{S} \to \mathbb{L}$, продолжающего меру μ. ■

Теорема позволяет рассматривать меры на кольцах множеств вместо мер на полукольцах. Это удобнее, так как для колец определены все стандартные операции с множествами.

2. Рассмотрим интегральную сумму $S\colon \mathscr{S} \to \mathbb{L}$, продолжающую меру $\mu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{K}$. По определению,

$$S(f) = \sum a_j \mu(X_j) \quad (f = \sum a_j X_j \in \mathscr{S}).$$

Будем писать $S(\cdot, \mu)$ и $S(f, \mu)$, когда нужно явно указать меру μ.

Всюду дальше, как правило, рассматриваемые меры будут предполагаться определенными на кольцах множеств и положительными. Термин *мера* будет означать *положительная мера на кольце множеств*. Исключения будут оговариваться или будут ясны по содержанию.

Замечание. Положительные меры выделяются потому, что интегрирование по произвольной числовой мере сводится к интегрированию по положительным мерам. Положительные меры обладают важными специальными свойствами.

Во всех утверждениях этого пункта мера $\mu \geq 0$.

Лемма. *Если $f \geq 0$, то $S(f, \mu) \geq 0$.*

□ Возьмем дизъюнктивное представление $f = \sum a_j X_j$ простой функции f. Неравенства $f \geq 0$, $\mu \geq 0$ означают, что $a_j \geq 0$, $\mu(X_j) \geq 0$ для всех индексов j. Поэтому $S(f) = S(f, \mu) \geq 0$. ■

Следствие 1. *Пусть $f, g \in \mathscr{S}$ вещественные и $g \geq f$. Тогда $S(g) \geq S(f)$.*

□ Так как S — линейный функционал, то из леммы вытекает, что $S(g) - S(f) = S(g - f) \geq 0$ при $g \geq f$. ■

Следствие 2. *Если простая функция f и числа a, b вещественные, множество $X \in \mathscr{R}$, $a \leq f(x) \leq b$ $(x \in X)$ и $f(x) = 0$ $(x \notin X)$, то $a\mu(X) \leq S(f, \mu) \leq b\mu(X)$.*

$\square$ По условию $aX \le f \le bX$ и, следовательно,

$$a\mu(X) = S(aX,\mu) \le S(f,\mu) \le S(bX,\mu) = b\mu(X). \quad \blacksquare$$

Для интегральных сумм верно неравенство треугольника.

Предложение. $|S(f)| \le S(|f|)$.

$\square$ Возьмем дизъюнктивное представление $f = \sum a_j X_j$. Функция $|f|$ со значениями $|f(x)|$ тоже простая и имеет дизъюнктивное представление $|f| = \sum |a_j| X_j$, так как $f(x) = a_j$ при $x \in X_j$. Поэтому $|S(f)| = |\sum a_j \mu(X_j)| \le \sum |a_j|\mu(X_j) = S(|f|)$. $\blacksquare$

Следствие 3. *Если $f \in \mathscr{S}$, $c \ge 0$, $X \in \mathscr{R}$ и $|f(x)| \le c$ $(x \in X)$, $f(x) = 0$ $(x \notin X)$, то $|S(f,\mu)| \le c\mu(X)$.*

$\square$ По неравенству треугольника для S и следствию 2 имеем $|S(f,\mu)| \le S(|f|,\mu) \le c\mu(X)$. $\blacksquare$

Интегральные суммы, продолжающие положительные меры, обладают хорошими порядковыми свойствами.

Пример. Пусть $\mathscr{R} = \mathscr{P}(U)$, $a \in U$ и $\mu(X) = \delta_a(X) = 1$ $(a \in X)$, $\mu(X) = \delta_a(X) = 0$ $(a \notin X)$ для каждого $X \subseteq U$. Тогда $S(f) = f(a) = \delta_a(f)$ для каждой числовой функции f на U, множество значений которой конечно. Мера δ_a называется *точечной* или *мерой Дирака.*

3. Для мер вместо топологической непрерывности вводится секвенциальная с помощью монотонных последовательностей. Все рассматриваемые множества являются частями данного множества U.

Отождествление множеств с их индикаторами дает возможность определить сходимость для последовательности множеств X_n через сходимость двоичных последовательностей $X_n(u)$ $(u \in U)$. Будем говорить, что последовательность X_n *сходится* к множеству X, и писать $X_n \to X$, если $X_n(u) \to X(u)$ $(u \in U)$. Говорят также, что множество X является *пределом* последовательности X_n, и пишут $\lim X_n = X$.

Лемма. 1) *Убывающая последовательность множеств сходится к своему пересечению.* 2) *Возрастающая последовательность множеств сходится к своему объединению.* 3) *Дизъюнктивная последовательность множеств сходится к пустому множеству.*

$\square$ 1) Пусть $X_{n+1} \subseteq X_n$ и $X = \cap X_n$. Тогда $X(u) = \inf\limits_n X_n(u) = \lim\limits_n X_n(u)$ $(u \in U)$. 2) Если $X_{n+1} \supseteq X_n$ и $X = \cup X_n$, то $X(u) = \sup\limits_n X_n(u) = \lim\limits_n X_n(u)$ $(u \in U)$. 3) Пусть $X_m X_n = O$ $(m \neq n)$. Тогда для каждого $u \in U$ либо $X_n(u) = 0$ для всех номеров n, либо $X_{n(u)}(u) = 1$ для некоторого номера $n(u)$ и, следовательно, $X_n(u) = 0$ для всех номеров $n \geq n(u)$. В любом случае $\lim\limits_n X_n(u) = O$. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать, что $X_n \to X$ эквивалентно $X = \bigcup\limits_m \bigcap\limits_{n \geq m} X_n = \bigcap\limits_m \bigcup\limits_{n \geq m} X_n$.

Назовем меру $\mu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ (*секвенциально монотонно*) *непрерывной*, если $\mu(X_n) \to \mu(X)$ для каждой монотонной $X_n \to X$ $(X_n, X \in \mathscr{R})$. Назовем меру $\mu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ *секвенциально непрерывной сверху в нуле*, если $\mu(X_n) \to 0$ при $X_n \downarrow O$ $(X_n \in \mathscr{R})$. Будем говорить, что мера μ *счетно аддитивна*, если $\mu(X) = \sum \mu(X_n)$ для каждой дизъюнктивной последовательности множеств $X_n \in \mathscr{R}$ с объединением $X \in \mathscr{R}$. Скажем, что мера μ *счетно полуаддитивна*, если $\mu(X) \leq \sum \mu(X_n)$ для каждой последовательности множеств $X_n \in \mathscr{R}$, покрывающей множество $X \in \mathscr{R}$. (Когда $\sum \mu(X_n) = \infty$, это неравенство верно для любого множества $X \in \mathscr{R}$.) Обозначим свойство монотонной непрерывности меры μ буквой M, а остальные указанные свойства — соответственно буквами N, A, D.

Предложение. $M \Leftrightarrow N \Leftrightarrow A \Leftrightarrow D$.

$\square$ Рассмотрим множества $X_n, X \in \mathscr{R}$.

1) $M \Leftrightarrow N$. Ясно, что $M \Rightarrow N$. Докажем, что $N \Rightarrow M$. Пусть $X_n \downarrow X$. Тогда $Y_n = X_n - X \in \mathscr{R}$, $X_n = X + Y_n$, $Y_n \downarrow O$ и $\mu(X_n) = S(X_n) = S(X) + S(Y_n) = \mu(X) + \mu(Y_n) \to \mu(X)$ при $\mu(Y_n) \to 0$. Если $X_n \uparrow X$, то $Z_n = X - X_n \in \mathscr{R}$, $X_n = X - Z_n$, $Z_n \downarrow O$ и $\mu(X_n) = \mu(X) - \mu(Z_n) \to \mu(X)$ при $\mu(Z_n) \to 0$.

2) $M \Leftrightarrow A$. Пусть $X_m X_n = O$ $(m \neq n)$ и $X = \sum X_n$. Тогда $Y_p = \sum\limits_{n \leq p} X_n \in \mathscr{R}$, $Y_p \uparrow X$ и $\sum\limits_{n \leq p} \mu(X_n) = \mu(Y_p) \to \mu(X)$, если μ непрерывна. Значит, $\mu(X) = \sum \mu(X_n)$ и $M \Rightarrow A$.

Пусть теперь $X_n \downarrow O$. Тогда $Y_m Y_n = O$ для $Y_n = X_n - X_{n+1} \in \mathscr{R}$ и $X_1 = X_{n+1} + Z_n = \sum Y_n$, $X_{n+1} = X_1 - Z_n$ для $Z_n = \sum\limits_{m \le n} Y_m \in \mathscr{R}$, $\mu(Z_n) = \sum\limits_{m \le n} \mu(Y_m)$. Если $\mu(X_1) = \sum \mu(Y_m) = \lim \mu(Z_n)$, то $\lim \mu(X_{n+1}) = \mu(X_1) - \lim \mu(Z_n) = 0$. Следовательно, $A \Rightarrow N \Rightarrow M$. Так как $M \Leftrightarrow N$ и $M \Leftrightarrow A$, то $N \Leftrightarrow A$.

3) $A \Leftrightarrow D$. Пусть $X \subseteq \cup X_n$. Тогда $X = \cup X_n X$ и ортогонализация $(X_n X)$ дает дизъюнктивную последовательность множеств $Y_n \in \mathscr{R}$ такую, что $Y_n \subseteq X_n X$ и $\sum Y_n = X$. Если мера μ счетно аддитивна, то $\mu(X) = \sum \mu(Y_n) \le \sum \mu(X_n X) \le \sum \mu(X_n)$. Значит, $A \Rightarrow D$.

Пусть теперь $X_m X_n = O$ $(m \ne n)$ и $X = \sum X_n$. Тогда $Y_n = \sum\limits_{m \le n} X_n \in \mathscr{R}$ и $\sum\limits_{m \le n} \mu(X_m) = \mu(Y_n) \le \mu(X)$ вследствие монотонности μ. Поэтому $\sum \mu(X_n) \le \mu(X)$. Если мера μ счетно полуаддитивна, то верно и обратное неравенство. Значит, $\mu(X) = \sum \mu(X_n)$ и $D \Rightarrow A$. ■

Пример 1. Мера Лебега dx на кольце множеств в $\mathbb{R}$, порожденном полукольцом интервалов $[a, b[$ $(-\infty < a \le b < \infty)$, определяется равенством $dx(A) = \sum(b_j - a_j)$ $(A = \sum [a_j, b_j[)$. Мера dx непрерывна. Если последовательность простых множеств A_n сходится к O не монотонно, то возможно $dx(A_n) \not\to 0$. Пусть, например, $A_n = [n, n+1[$. Тогда $A_n \to O$, но $dx(A_n) = 1 \not\to 0$.

Пример 2. Мера Стилтьеса dg на том же кольце множеств для возрастающей функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется равенством $dg(A) = \sum(g(b_j) - g(a_j))$ $(A = \sum [a_j, b_j[)$. Мера dg непрерывна ессли функция g непрерывна слева.

Упражнение. Доказать непрерывность меры Лебега и критерий непрерывности для мер Стилтьеса.

Замечание. Сходимость монотонных последовательностей определяет топологию для алгебры функций $\mathscr{F}$, являющуюся наибольшей из топологий для $\mathscr{F}$, сохраняющих сходимость монотонных последовательностей. Эта топология индуцирует топологию на булевой алгебре множеств $\mathscr{P}$. Из топологической непрерывности меры следует ее секвенциальная непрерывность. Обратное не верно: топологически непрерывных мер меньше, чем секвенциально непрерывных.

Различные виды секвенциальной сходимости, порожденные этими сходимостями топологии, и соответствующие классы непрерывных мер описаны в заметке [84] и книге [80, приложение к части 4]. Там доказаны теоремы о продолжении мер по непрерывности.

4. Пусть $Z \subseteq U$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрывающая Z последовательность множеств $X_n \in \mathscr{R}$ такая, что $\sum \mu(X_n) \leq \varepsilon$, то Z называется *μ-нулевым* множеством. В частности, если $Z \in \mathscr{R}$ и $\mu(Z) = 0$, то множество является μ-нулевым. Обозначим $\mathscr{N} = \mathscr{N}(\mu)$ класс всех μ-нулевых множеств. Легко убедиться в том, что:

(1) *Каждая часть μ-нулевого множества есть μ-нулевое множество.*

(2) *Объединение счетного семейства μ-нулевых множеств есть μ-нулевое множество.*

Упражнение. Доказать эти утверждения.

Если $\mathscr{N}(\mu) \subseteq \mathscr{R}$, то мера μ называется *полной.*

Часто требуется, чтобы существовала возрастающая последовательность множеств $U_n \in \mathscr{R}$ с объединением $\cup U_n = U$. В этом случае $\mu(X) \leq \mu(U_n)$ для каждого $X \in \mathscr{R}$, $X \subseteq U_n$. Такие кольца $\mathscr{R}$ и меры μ на них назовем *локально ограниченными.*

Введение μ-нулевых множеств позволяет расширить класс сходящихся последовательностей функций. Будем говорить, что последовательность функций $f_n \in \mathscr{F}$ *μ-сходится* к функции $f \in \mathscr{F}$, и писать $f_n \to f(\mu)$, если множество $Z = \{x : f_n(x) \to f(x)\}$ μ-нулевое. Скажем, что функции $f, g \in \mathscr{F}$ *μ-равны*, и напишем $f = g(\mu)$, если множество $Z = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ μ-нулевое. Вместо *μ-равны* часто говорят также *μ-эквивалентны.* Аналогичный смысл имеют термины *μ-меньше*, *μ-больше* и записи $f \leq g(\mu)$, $f \geq g(\mu)$. С помощью μ-нулевых множеств расширяются классы ограниченных и непрерывных функций: *μ-ограниченность* f означает, что $|f| \leq c(\mu)$ для некоторой постоянной $c \geq 0$, а *μ-непрерывность* — что множество точек разрыва функции f μ-нулевое. Если класс μ-нулевых множеств широк, то эти обобщения существенны. Все μ-свойства обозначают термином *почти всюду*, когда мера μ дана.

Предложение. 1) *Если* $f_n \to f(\mu)$ *и* $f_n \to g(\mu)$, *то* $f = g(\mu)$.

2) *Если* $f_n \to f(\mu)$ *и* $f = g(\mu)$, *то* $f_n \to g(\mu)$.

□ Эти утверждения следуют из соотношений

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} \subseteq \{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cup \{x : f_n \nrightarrow g(\mu)\},$$
$$\{x : f_n(x) \nrightarrow g(x)\} \subseteq \{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cup \{x : f(x) \neq g(x)\},$$

так как объединение двух μ-нулевых множеств и часть μ-нулевого множества являются μ-нулевыми множествами. ■

Примеры. 1) Функция Дирихле эквивалентна постоянной 0 по лебеговой мере. 2) Последовательность функций $f_n(u) = u^n$ $(0 \leq u \leq 1)$ dx-сходится к постоянной 0. 3) Если мера μ на $\mathscr{P}$ тождественно равна 0, то все функции из $\mathscr{F}$ μ-равны и μ-ограничены, а любые их последовательности μ-сходятся к любым функциям из $\mathscr{F}$.

Замечание. Пусть $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ и $X \in \mathscr{P}$. Равенство

$$\mu^*(X) = \inf\left\{\sum \mu(X_n) : X \subseteq \cup X_n,\, X_n \in \mathscr{R}\right\}$$

определяет *внешнюю меру* $\mu^* \colon \mathscr{P} \to [0, \infty]$ для каждой локально ограниченной меры $\mu \colon \mathscr{P} \to [0, \infty[$. Внешняя мера μ^* счетно полуаддитивна и продолжает меру μ [45, § V.3]. Из определений следует, что μ-нулевыми являются множества, для которых внешняя мера равна нулю:

$$\mathscr{N}(\mu) = \{Z \in \mathscr{P} \mid \mu^*(Z) = 0\}.$$

Упражнения. 1) Доказать, что в определении внешней меры μ^* покрывающие множества X_n можно взять из полукольца $\mathscr{Q}$, порождающего кольцо $\mathscr{R}$.

2) Доказать счетную полуаддитивность внешней меры μ^*.

5. В этом пункте доказывается лемма, являющаяся ключевой для предлагаемого определения интеграла. Будем называть последовательность простых функций $f_n \in \mathscr{S}$ *интегрально ограниченной*, если последовательность интегральных сумм $S(f_n) \in \mathbb{L}$ ограничена: $|S(f_n)| \leq c$ для всех номеров n и некоторого числа $c > 0$. Мера μ на кольце $\mathscr{R}$ простых множеств предполагается положительной и непрерывной (счетно аддитивной).

Лемма Леви. 1) *Каждая интегрально ограниченная монотонная последовательность простых функций f_n почти всюду сходится к некоторой функции f.*

2) *Если предельная функция f простая, то $S(f) = \lim S(f_n)$.*

□ 1) Первое утверждение леммы достаточно доказать для возрастающих последовательностей функций $f_n \geq 0$. В самом деле, если $g_n \downarrow$, то $f_n = -g_n \uparrow$. При этом $S(f_n) = -S(g_n)$ и $f_n \to f(\mu)$ эквивалентно $g_n \to g = -f(\mu)$. Если $h_n \uparrow$, то $f_n = h_n - h_1 \geq 0$, при этом $S(f_n) = S(h_n) - S(h_1)$ и $f_n \to f(\mu)$ эквивалентно $h_n \to f + h_1(\mu)$.

Пусть $f_n \geq 0$, $f_n \uparrow$ и $|S(f_n)| \leq c$. Так как $\mu \geq 0$, то $S(f_n) \geq 0$, $S(f_n) \uparrow$ и $S(f_n) \leq c$. А так как $f_n \uparrow$, то $f_n(x) \to f(x)$ для некоторого $f(x)$ эквивалентно $f_n(x) \leq c(x)$ для некоторого $c(x) \geq 0$. Значит, для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что последовательность (f_n) μ-ограничена.

Рассмотрим множество Z всех точек $x \in U$, в которых (f_n) не ограничена, и множества

$$Z_n(m) = \{x : f_n(x) \geq m\}, \quad Z(m) = \bigcup_n Z_n(m) \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Ясно, что $Z \subseteq Z(m)$ для каждого m. Так как функции f_n простые, то и множества $Z_n(m)$ простые. А так как $f_n \leq f_{n+1}$, то $Z_n(m) \subseteq Z_{n+1}(m)$. Пусть

$$Y_n(m) = Z_{n+1}(m) - Z_n(m), \quad Y_0(m) = Z_1(m).$$

Множества $Y_n(m)$ простые, $Y_k(m) \cdot Y_n(m) = O$ $(k \neq n)$ и

$$Z_n(m) = \sum_{0 \leq k < n} Y_k(m), \quad Z(m) = \sum_{n \geq 0} Y_n(m).$$

Из определений следует, что

$$c \geq S(f_n) \geq S(f_n Z_n(m)) \geq S(m Z_n(m)) \geq m \cdot \mu(Z_n(m)).$$

Откуда

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \mu(Y_k(m)) = \mu(Z_n(m)) \leq c \cdot m^{-1}$$

и, значит,

$$\sum_{n\geq 0}\mu(Y_n(m))\leq c\cdot m^{-1}.$$

Так как $Z\subseteq Z(m)\subseteq\sum_{n\geq 0}Y_n(m)$, то множество Z μ-нулевое.

2) Второе утверждение леммы достаточно доказать для убывающих последовательностей простых функций $f_n\downarrow 0(\mu)$. В самом деле, если $g_n\uparrow g(\mu)$, то $f_n=g-g_n\downarrow 0(\mu)$, а если $g_n\downarrow g(\mu)$, то $f_n=g_n-g\downarrow 0(\mu)$. В обоих случаях $S(f_n)=|S(g)-S(g_n)|\to 0$ эквивалентно $S(g_n)\to S(g)$.

Пусть $f_n\downarrow 0(\mu)$ и $c\geq f_1\geq f_n$ (каждая простая функция ограничена). Рассмотрим $\varepsilon>0$ и множества

$$X_n(\varepsilon)=\{x:f_n(x)\geq\varepsilon\},\quad A_n=\{x:f_n(x)>0\}=\{x:f_n(x)\neq 0\},$$
$$B_n(\varepsilon)=A_n-X_n(\varepsilon)=\{x:0<f(x)<\varepsilon\},$$
$$Y_n(\varepsilon)=X_n(\varepsilon)-X_{n+1}(\varepsilon),$$
$$X(\varepsilon)=\cap X_n(\varepsilon)=\{x:f_n(x)\geq\varepsilon\,(n\in\mathbb{N})\},\quad Z=\{x:f_n(x)\nrightarrow 0\}.$$

Множества $X(\varepsilon)$ и Z могут не быть простыми. Заметим, что

$$f_n=A_nf_n=X_n(\varepsilon)f_n+B_n(\varepsilon)f_n,$$

и поэтому, так как $B_n(\varepsilon)\subseteq A_n\subseteq A_1$,

$$\begin{aligned}S(f_n)&=S(X_n(\varepsilon)f_n)+S(B_n(\varepsilon)f_n)\\&\leq c\cdot\mu(X_n(\varepsilon))+\varepsilon\mu(B_n(\varepsilon))\leq c\cdot\mu(X_n(\varepsilon))+\varepsilon\mu(A_1).\end{aligned}$$

Остается доказать, что $\mu(X_n(\varepsilon))\to 0$ при $n\to\infty$.

Из определений следует, что $X(\varepsilon)\subseteq Z$. По предположению множество Z μ-нулевое. Пусть $Z\subseteq\cup Z_q$, $Z_q\in\mathscr{R}$ и $\sum\mu(Z_q)\leq\varepsilon$. Заметим, что

$$X_n(\varepsilon)=\sum_{p\geq n}Y_p(\varepsilon)+X(\varepsilon),\quad \sum_{p<n}\mu(Y_p(\varepsilon))=\mu\biggl(\sum_{p<n}Y_p(\varepsilon)\biggr)\leq\mu(A_1).$$

Поэтому $\sum\limits_{p\geq n}\mu(Y_p(\varepsilon))\to 0$ $(n\to\infty)$ и найдется номер $n(0)$ такой, что $\sum\limits_{p\geq n}\mu(Y_p(\varepsilon))\leq\varepsilon$ для всех номеров $n\geq n(0)$.

Таким образом, $X_n(\varepsilon)\subseteq\sum\limits_{p\geq n}Y_p(\varepsilon)+\cup Z_q$. Мера μ непрерывна и, значит, счетно полуаддитивна. Поэтому $\mu(X_n(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$ и $S(f)\leq(2c+\mu(A_1))\varepsilon$ при $n\geq n(0)$. ■

Замечание. Если предположить еще, что мера μ полная, то доказательство леммы существенно упростится.

Лемма Леви утверждает, что каждая интегрально ограниченная монотонная последовательность простых функций почти всюду сходится и ее можно интегрировать почленно, если предельная функция тоже простая.

Рассмотрим две интегрально ограниченные возрастающие последовательности простых функций f_n, g_n и последовательности их интегральных сумм $S(f_n)$, $S(g_n)$. По лемме Леви равенства $f(x) = \lim f_n(x)$, $g(x) = \lim g_n(x)$ $(x \in U \setminus Z)$ и $f(x){=}g(x){=}0$ $(x \in Z)$ определяют некоторые функции $f\colon U \to \mathbb{R}$, $g\colon U \to \mathbb{R}$. Здесь Z обозначает некоторое μ-нулевое множество. (Функциям f, g вместо нулевых можно приписать любые другие значения $f(x)$, $g(x)$ для $x \in Z$. Используемая μ-сходимость последовательностей (f_n), (g_n) обеспечивает только *μ-определенность* предельных функций f, g.)

Предложение. $\lim f_n \leq \lim g_n \Rightarrow \lim S(f_n) \leq \lim S(g_n)$.

$\square$ Возьмем номер m и рассмотрим последовательность простых функций $h_n = f_m - g_n$. Так как $g_n \uparrow g(\mu)$, то

$$h_n \downarrow h = f_m - g \leq f - g \leq 0(\mu).$$

Следовательно, $0 \vee h_n = h_n^+ \downarrow 0(\mu)$. Функции h_n^+ простые вместе с h_n. Заметим, что

$$S(f_m) - S(g_n) = S(f_m - g_n) = S(h_n) \leq S\bigl(h_n^+\bigr).$$

По лемме Леви $S\bigl(h_n^+\bigr) \to 0$. Последовательности $S(f_m)$, $S(g_n)$ возрастают вместе с (f_m), (g_n) и ограничены, что обеспечивает существование пределов $a = \lim S(f_m)$, $b = \lim S(g_n)$. Из полученных соотношений следует, что $S(f_m) - b \leq 0$, $a - b \leq 0$, $a \leq b$. $\blacksquare$

Следствие. *Если* $\lim f_n = \lim g_n$, *то* $\lim S(f_n) = \lim S(g_n)$.

Упражнение. Доказать, что $0 \vee h_n = h_n^+ \downarrow 0(\mu)$, если $h_n \downarrow h$, $h \leq 0(\mu)$ для последовательности простых функций h_n.

6. Каждое комплексное число a равно линейной комбинации положительных чисел:

$$a = b^+ - b^- + ic^+ - ic^-, \quad b = \operatorname{re} a, \quad c = \operatorname{im} a,$$

где

$$y^+ = 0 \vee y = 2^{-1}(|y| + y), \quad y^- = 0 \vee (-y) = 2^{-1}(|y| - y)$$

для любого вещественного числа y. Ясно, что $y^+, y^- \geq 0$ и $y = y^+ - y^-$, $|y| = y^+ + y^-$. Поэтому каждая числовая функция f на множестве U равна линейной комбинации положительных функций:

$$f = g^+ - g^- + ih^+ - ih^-, \quad g = \operatorname{re} f, \quad h = \operatorname{im} f.$$

По определению, $\varphi^+(x) = (\varphi(x))^+$, $\varphi^-(x) = (\varphi(x))^-$ для каждой вещественной функции φ на множестве U. Как и прежде, $|f|$ обозначает функцию со значениями $|f|(x) = |f(x)|$ $(x \in U)$. Ясно, что функции g^+, g^-, h^+, h^-, g, h, $|f|$ простые, если f простая.

Лемма. *Если последовательность простых функций f_n возрастает и интегрально ограничена, то последовательности $\left(f_n^+\right)$, $\left(f_n^-\right)$, $(|f_n|)$ интегрально ограничены.*

$\square$ Если $f_n \uparrow$, то $f_n^+ \uparrow$ и $f_n^- \downarrow$. Поэтому $S\left(f_n^-\right) \leq S\left(f_1^-\right)$ и

$$f_n^+ = f_n + f_n^- \leq f_n + f_1^- \Rightarrow S\left(f_n^+\right) \leq S(f_n) + S\left(f_1^-\right),$$

$|f_n| = f_n + f_n^- \Rightarrow S(|f_n|) \leq \left(S(f_n) + S\left(f_1^-\right)\right) + S\left(f_1^-\right)$. $\blacksquare$

Упражнение. Привести примеры интегрально ограниченных последовательностей простых функций f_n с интегрально неограниченными $(|f_n|)$.

7. Рассмотрим множество $\mathscr{A}$ всех возрастающих интегрально ограниченных последовательностей простых функций и алгебру $\mathscr{C}$ всех сходящихся почти всюду последовательностей простых функций на данном множестве U. По лемме Леви $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$. Возьмем линейную оболочку $\mathscr{B} = \operatorname{Lin} \mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$. Условимся последовательности из $\mathscr{B}$ называть *приближающими.* По определению, это линейные комбинации возрастающих интегрально ограниченных последовательностей простых функций: $(f_n) \in \mathscr{B}$ означает, что $f_n = \sum a_j f_{jn}$ для некоторых конечных семейств чисел a_j и последовательностей $(f_{jn})_n \in \mathscr{A}$. Обозначим $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ множества предельных функций для последовательностей из $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{K} = \operatorname{Lim} \mathscr{A}, \quad \mathscr{L} = \operatorname{Lim} \mathscr{B}, \quad \mathscr{M} = \operatorname{Lim} \mathscr{C}.$$

Назовем функции из $\mathscr{K}$ *монотонно интегрируемыми*, функции из $\mathscr{L}$ — *интегрируемыми*, функции из $\mathscr{M}$ — *измеримыми*.

Таким образом, интегрируемой по определению является функция, к которой почти всюду сходится последовательность, равная некоторой линейной комбинации возрастающих интегрально ограниченных последовательностей простых функций (приближающая последовательность). А измеримая функция есть предел почти всюду сходящейся последовательности простых функций. Каждая интегрируемая функция измерима.

Предложение. *Измеримые функции образуют алгебру. Интегрируемые функции образуют линейную оболочку множества монотонно интегрируемых:* $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{L} = \operatorname{Lin} \mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}$.

$\square$ Все эти утверждения следуют из определений и свойства предела сохранять операции. В частности, $\mathscr{L} = \operatorname{Lim}(\operatorname{Lin} \mathscr{A}) = \operatorname{Lin}(\operatorname{Lim} \mathscr{A}) = \operatorname{Lin} \mathscr{K}$. $\blacksquare$

Упражнение. Привести примеры интегрируемых функций, произведение которых не интегрируемо.

Собирая соответствующие коэффициенты, можно каждую интегрируемую функцию и каждую приближающую последовательность привести к стандартному виду, представив их линейными комбинациями с коэффициентами 1, -1, i, $-i$:

$$f = g^+ - g^- + ih^+ - ih^- \quad (g^+, g^-, h^+, h^- \in \mathscr{K}),$$
$$(f_n) = \big(g_n^+\big) - \big(g_n^-\big) + i\big(h_n^+\big) - i\big(h_n^-\big) \ \big(\big(g_n^+\big), \big(g_n^-\big), \big(h_n^+\big), \big(h_n^-\big) \in \mathscr{A}\big).$$

Такие стандартные представления не единственные: функции g^+, g^-, h^+, h^- и последовательности $\big(g_n^+\big)$, $\big(g_n^-\big)$, $\big(h_n^+\big)$, $\big(h_n^-\big)$ могут выбираться разными способами. В частности, можно получать из одних представлений другие, прибавляя к каждой компоненте произвольную функцию $v \in \mathscr{K}$ или последовательность $(v_n) \in \mathscr{A}$.

8. Опишем элементарные свойства интегрируемых числовых функций на абстрактном множестве.

Лемма 1. *Функция* $f = g + ih$ *интегрируема если интегрируемы ее вещественная часть* $g = \operatorname{re} f$ *и мнимая часть* $h = \operatorname{im} f$.

$\square$ Так как $\mathscr{L}$ является векторным пространством, то из $g, h \in \mathscr{L}$ следует $f \in \mathscr{L}$. (В вещественном случае $h = 0$.) Обратно, если $f \in \mathscr{L}$, то $f = (g^+ - g^-) + i(h^+ - h^-)$ для некоторых $g^+, g^-, h^+, h^- \in \mathscr{K}$ и, следовательно, $g = g^+ - g^- \in \mathscr{L}$ и $h = h^+ - h^- \in \mathscr{L}$. $\blacksquare$

Лемма 2. *Если функции p, q монотонно интегрируемы, то и их максимум $p \vee q$ монотонно интегрируем.*

$\Box$ Пусть $p_n \uparrow p$, $q_n \uparrow q$ $(p_n, q_n \in \mathscr{S})$. Тогда $p_n \leq p_{n+1} \leq p_{n+1} \vee q_{n+1}$, $q_n \leq q_{n+1} \leq p_{n+1} \vee q_{n+1}$, $p_n \vee q_n \leq p_{n+1} \vee q_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ясно, что $p_n \vee q_n \in \mathscr{S}$. Если возрастающие последовательности (p_n), (q_n) интегрально ограничены, то $(|p_n|)$, $(|q_n|)$ интегрально ограничены. А так как $|p_n \vee q_n| \leq |p_n| + |q_n|$, то

$$|S(p_n \vee q_n)| \leq S(|p_n \vee q_n|) \leq S(|p_n| + |q_n|) \leq S(|p_n|) + S(|q_n|).$$

Значит, $(p_n \vee q_n) \in \mathscr{A}$ и $p \vee q \in \mathscr{K}$. $\blacksquare$

Предложение. *Функция $f = g + ih$ интегрируема ессли функции $g^+ = \mathrm{re}^+ f$, $g^- = \mathrm{re}^- f$, $h^+ = \mathrm{im}^+ f$, $h^- = \mathrm{im}^- f$ интегрируемы.*

$\Box$ Если функции g^+, g^-, h^+, h^- интегрируемы, то и их линейная комбинация f интегрируема. Обратно, если f интегрируема, то $g = g^+ - g^- = \mathrm{re}\, f$, $h = h^+ - h^- = \mathrm{im}\, f$ интегрируемы (лемма 1). Значит, $g = p - q$ и $h = r - s$ для некоторых $p, q, r, s \in \mathscr{K}$. Кроме того, $p \vee q \in \mathscr{K}$ и $r \vee s \in \mathscr{K}$ по лемме 2. А так как $g^+ = (p \vee q) - q$, $g^- = (p \vee q) - p$, $h^+ = (r \vee s) - s$, $h^- = (r \vee s) - r$ и $p, q, r, s, p \vee q, r \vee s \in \mathscr{K}$, то $g^+, g^-, h^+, h^- \in \mathscr{L}$. $\blacksquare$

Следствие. *Максимум и минимум конечного семейства интегрируемых вещественных функций интегрируемы.*

$\Box$ Для двух функций f, g это утверждение вытекает из равенств: $f \vee g = f + (g - f)^+$, $f \wedge g = f - (g - f)^-$. Общий случай выводится отсюда по индукции. $\blacksquare$

Замечание. Из доказанного предложения следует также, что для вещественной интегрируемой функции $f = f^+ - f^-$ интегрируема функция $|f| = f^+ + f^-$.

9. При определении интеграла будут использованы еще две леммы о сходимости последовательностей интегральных сумм.

Лемма 1. *Если последовательность (f_n) приближающая, то последовательность интегральных сумм $S(f_n)$ сходится.*

$\Box$ Пусть $f_n = g_n^+ - g_n^- + i\big(h_n^+ - h_n^-\big)$ для некоторых возрастающих интегрально ограниченных последовательностей $\big(g_n^+\big)$, $\big(g_n^-\big)$, $\big(h_n^+\big)$, $\big(h_n^-\big)$. Тогда возрастающие ограниченные последовательности интегральных сумм $S\big(g_n^+\big)$, $S\big(g_n^-\big)$, $S\big(h_n^+\big)$, $S\big(h_n^-\big)$ сходятся. А вместе с ними сходится последовательность $S(f_n) = S\big(g_n^+\big) - S\big(g_n^-\big) + i\big(S\big(h_n^+\big) - S\big(h_n^-\big)\big)$. $\blacksquare$

Лемма 2. *Если пределы приближающих последовательностей (f_n), (p_n) эквивалентны, то* $\lim S(f_n) = \lim S(p_n)$.

$\square$ Пусть $f_n = g_n^+ - g_n^- + i\big(h_n^+ - h_n^-\big)$, $p_n = q_n^+ - q_n^- + i\big(r_n^+ - r_n^-\big)$ для некоторых $\big(g_n^+\big), \big(g_n^-\big), \big(h_n^+\big), \big(h_n^-\big), \big(q_n^+\big), \big(q_n^-\big), \big(r_n^+\big), \big(r_n^-\big) \in \mathscr{A}$. По лемме Леви эти последовательности сходятся почти всюду к некоторым функциям g^+, g^-, h^+, h^-, q^+, q^-, r^+, r^-. А последовательности (f_n), (p_n) сходятся почти всюду к функциям $f = g^+ - g^- + ih^+ - ih^-$, $p = q^+ - q^- + ir^+ - ir^-$. Вместе с тем возрастающие ограниченные последовательности интегральных сумм $S(f_n)$, $S\big(g_n^+\big)$, $S\big(g_n^-\big)$, $S\big(h_n^+\big)$, $S\big(h_n^-\big)$, $S(p_n)$, $S\big(q_n^+\big)$, $S\big(q_n^-\big)$, $S\big(r_n^+\big)$, $S\big(r_n^-\big)$ сходятся к некоторым числам a, b^+, b^-, c^+, c^-, α, β^+, β^-, γ^+, γ^-. Если почти всюду $f = p$, то почти всюду верны равенства $g^+ - g^- = \operatorname{re} f = \operatorname{re} p = q^+ - q^-$, $h^+ - h^- = \operatorname{im} f = \operatorname{im} p = r^+ - r^-$, $g^+ + q^- = q^+ + g^-$, $h^+ + r^- = r^+ + h^-$, $\lim\big(g_n^+ + q_n^-\big) = \lim\big(q_n^+ + g_n^-\big)$, $\lim\big(h_n^+ + r_n^-\big) = \lim\big(r_n^+ + h_n^-\big)$. Снова применяя лемму Леви и используя линейность интегральной суммы S, получаем равенства $b^+ + \beta^- = \beta^+ + b^-$, $c^+\gamma^- = \gamma^+ c^-$, $b = b^+ - b^- = \beta^+ - \beta^- = \beta$, $c = c^+ - c^- = \gamma^+ - \gamma^- = \gamma$. Значит, $\lim S(f_n) = a = b + ic = \beta + i\gamma = \alpha = \lim S(p_n)$. $\blacksquare$

Если приближающая последовательность простых функций f_n сходится почти всюду к функции f, то будем говорить, что последовательность (f_n) *приближает* функцию f. Назовем *интегралом* функции $f \in \mathscr{L}$ предел

$$\int f = \lim S(f_n)$$

последовательности интегральных сумм $S(f_n)$ для какой-нибудь приближающей последовательности простых функций f_n. Корректность этого определения обеспечивает теорема о существовании и единственности интеграла.

Теорема. *Для каждой интегрируемой функции существует единственный интеграл.*

$\square$ 1) Пусть функция f интегрируема. Тогда существует последовательность простых функций f_n, приближающая f, и по лемме 1 интеграл $\int f = \lim S(f_n)$ существует.

2) Пусть последовательности (f_n), (p_n) приближают функцию f. Тогда по лемме 2 верно равенство $\lim S(f_n) = \lim S(p_n)$. Интеграл $\int f$ единственный. $\blacksquare$

Функционал $\int\colon \mathscr{L} \to \mathbb{L}$ на векторном пространстве $\mathscr{L}$ интегрируемых функций, ставящий в соответствие функции $f \in \mathscr{L}$ число $\int f$, назовем *интегралом.* Если нужно явно указать меру μ, то будем говорить об *интеграле по мере* μ и вместо $\int f$ писать $\int f\,d\mu$ или $\int f(x)\,d\mu(x)$. А если надо еще указать множество U, на котором определены рассматриваемые функции, то будем подписывать его под знаком интеграла.

Предложение. *Интеграл $\int$ является линейным функционалом на $\mathscr{L}$, продолжающим интегральную сумму S.*

$\square$ Каждая простая функция $f \in \mathscr{S}$ приближается постоянной последовательностью $f_n = f$. Поэтому $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}$ и $\int f = S(f)$. Линейность интеграла следует из линейности предела $\lim$ и суммы S:

$$\begin{aligned} \int (af + dg) &= \lim S(af_n + bg_n) \\ &= a \lim S(f_n) + b \lim S(g_n) = a \int f + b \int g \end{aligned}$$

для каждых чисел a, b, интегрируемых функций f, g и приближающих их последовательностей (f_n), (g_n). $\blacksquare$

Замечание. При отождествлении множеств с индикаторами мера μ становится функционалом на булевом кольце $\mathscr{R}$ простых множеств. Она однозначно продолжается до интегральной суммы S на алгебре $\mathscr{S}$ простых функций. А интегральная сумма однозначно продолжается до интеграла $\int$ на пространстве $\mathscr{L}$ интегрируемых функций:

$$\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}, \quad \mu \subseteq S \subseteq \int .$$

10. Кроме линейности интегралы обладают еще некоторыми важными порядковыми свойствами, вытекающими из порядковых свойств интегральных сумм.

Предложение 1. *Интеграл является положительным линейным функционалом.*

$\square$ Пусть $f \in \mathscr{L}$ и $f \geq 0$. Тогда $f = g^+ - g^-$, $g^+ \geq g^-$ для некоторых $g^+, g^- \in \mathscr{K}$, к которым почти всюду сходятся интегрально ограниченные возрастающие последовательности простых функций g_n^+, g_n^-. По предложению п. 3.3.2,5 из неравенства

$\lim g_n^- = g^- \le g^+ = \lim g_n^+$, почти всюду верного, следует неравенство

$$\int g^- = \lim S\bigl(g_n^-\bigr) \le \lim S\bigl(g_n^+\bigr) = \int g^+.$$

Отсюда $\int f = \int (g^+ - g^-) = \int g^+ - \int g^- \ge 0$. Положительность интеграла доказана. ■

Из положительности интеграла вытекает его монотонность (как для всякого линейного функционала).

Предложение 2. *Интеграл возрастает: если $f, g \in \mathscr{L}$ и $f \le g$, то $\int f \le \int g$.*

Из монотонности интеграла вытекает полезное неравенство для интеграла $\int f\,d\mu$ вещественной интегрируемой функции f, вещественных чисел a и b, интегрируемого множества A. Условимся интеграл $\int A$ называть мерой множества A и обозначать $\mu(A)$. Таким образом, по определению, $\mu(A) = \int A$ $(A \in \mathscr{L})$. В частности, для простых множеств $A \in \mathscr{R}$ получается прежнее значение для $\mu(A)$.

Предложение 3. *Если $a \le f(x) \le b$ при $x \in A$ и $f(x) = 0$ при $x \notin A$, то $a\mu(A) \le \int f\,d\mu \le b\mu(A)$.*

□ По условию $aA \le f \le bA$, откуда $\int aA \le \int f \le \int bA$. Кроме того, $\int aA = a\int A = a\mu(A)$, $\int bA = b\int A = b\mu(A)$. ■

Следующее часто используемое неравенство называется *неравенством треугольника для интегралов*. Оно верно для каждой интегрируемой функции f.

Предложение 4. $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

□ Докажем это неравенство для вещественного случая. Возьмем вещественную интегрируемую функцию $f = g^+ - g^-$ с положительными компонентами g^+, g^-. По предложению п. 8 функции g^+, g^- и вместе с ними $|f| = g^+ + g^-$ интегрируемы. Используя линейность и положительность интеграла, получаем

$$\left|\int f\right| = \left|\int g^+ - \int g^-\right| \le \int g^+ + \int g^- = \int |f|. \quad ■$$

Пусть f — интегрируемая функция, c — положительное число и A — интегрируемое множество. Из предложений 3 и 4 следует

Предложение 5. *Если* $|f(x)| \le c$ *при* $x \in A$ *и* $f(x) = 0$ *при* $x \notin A$, *то* $\left|\int f\,d\mu\right| \le c\mu(A)$.

□ Докажем это неравенство для вещественного случая. Из условия и предложений 3 и 4 вытекает, что $\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\mu \le c\mu(A)$. ■

Упражнение. Доказать предложения 4 и 5 для комплексной f.

3.3.3. Предельные теоремы

1. Теорема Леви. Рассмотрим последовательность интегрируемых функций f_n. Если последовательность интегралов $\int f_n$ ограничена, то будем говорить, что последовательность функций f_n *интегрально ограничена*: $\left|\int f_n\right| \le c$ для всех номеров n и некоторого числа $c > 0$. А когда (f_n) сходится почти всюду к некоторой интегрируемой f и $\int f_n \to \int f$, скажем, что последовательность f_n можно *интегрировать почленно*. Почленная интегрируемость (f_n) эквивалентна равенству $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Теорема Леви. *Если монотонная последовательность функций* f_n *интегрально ограничена, то она сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции* f *и почленно интегрируема.*

□ Теорему достаточно доказать для случая интегрально ограниченной возрастающей последовательности монотонно интегрируемых функций f_n. Каждая такая последовательность почти всюду сходится к некоторой интегрируемой функции f. В самом деле, по определению, каждая f_n приближается некоторой возрастающей последовательностью простых функций f_{mn} $(m = 1, 2, \dots)$ и $\int f_n = \lim\limits_{m\to\infty} S(f_{mn})$. Заметим, что $f_{mn} \le f_n \le f_p$ при любом m, когда $n \le p$. Рассмотрим последовательность простых функций $g_p = \max\{f_{pn} : n \le p\} \le f_p$. Эта последовательность возрастает вместе с последовательностями $f_{m1}, \dots, f_{mp}$ $(m = 1, 2, \dots)$ и интегрально ограничена вместе с последовательностью f_p $(p = 1, 2, \dots)$.

Из леммы Леви и определений следует, что последовательность (g_p) почти всюду сходится к некоторой интегрируемой функции f. Так как $f_{pn} \le g_p$ и $f_{pn} \to f_n$, $g_p \to f$ при $p \to \infty$, то $f_n \le f$. А так как $g_n \le f_n$, то $g_n \le f_n \le f$. Сходимость $g_n \to f$ и это неравенство обеспечивают нужную сходимость $f_n \to f$.

Почленную интегрируемость последовательности f_n доказать легко. Последовательность g_n приближает f и, значит, $\int f = \lim S(g_n)$. Из неравенств $g_n \le f_n \le f$ и равенства $\int g_n = S(g_n)$ вытекает, что $\int g_n \le \int f_n \le \int f$, $S(g_n) \le \int f_n \le \int f$. Из этих неравенств и равенства $\int f = \lim S(g_n)$ следует нужное равенство $\lim \int f_n = \int f$. ■

Следствие. *Если монотонная последовательность функций f_n интегрально ограничена и почти всюду сходится к функции g, то эта функция интегрируема и $\int g = \lim \int f_n$.*

□ По теореме Леви существует интегрируемая функция f такая, что к ней почти всюду сходится последовательность функций f_n и $\int f = \lim \int f_n$. Если последовательность f_n также почти всюду сходится к функции g, то g эквивалентна f, вместе с нею интегрируема и имеет тот же интеграл. ■

2. Теорема Фату. Рассмотрим ограниченную снизу последовательность вещественных чисел b_n. Ограниченность снизу позволяет определить для нее *нижнюю последовательность* $a_n = \inf\limits_{p \ge n} b_p$. Эта последовательность возрастает. Если она ограничена сверху, то для нее существует предел $a = \lim a_n$. Он называется *нижним пределом* последовательности b_n и обозначается $\liminf b_n$. Точно так же для ограниченной сверху последовательности вещественных чисел b_n определяется *верхняя последовательность* $c_n = \sup\limits_{p \ge n} b_p$. Эта последовательность убывает. Если она ограничена снизу, то для нее существует предел $c = \lim c_n$. Он называется *верхним пределом* последовательности b_n и обозначается $\limsup b_n$.

Для ограниченной последовательности чисел $b_n \in \mathbb{R}$ и числа $b \in \mathbb{R}$ верна [80, часть 1, п. 4.4.5]

Теорема. $\lim b_n = b \Longleftrightarrow \liminf b_n = \limsup b_n = b$.

Нижняя и верхняя последовательности $f_n = \inf\limits_{p \ge n} g_p$ и $h_n = \sup\limits_{p \ge n} g_p$, верхний и нижний пределы $f = \lim f_n$ и $h = \lim h_n$ для последовательности вещественных функций g_n определяются через последовательность значений $g_n(x)$. Если $f_n = \inf\limits_{p \le n} g_p$, $h_n = \sup\limits_{p \le n} g_p$, $f(x) = \lim f_n(x)$, $h(x) = \lim h_n(x)$ определены не для всех, а только для почти всех x, то в качестве f_n, h_n, f, h можно брать любые функции с указанными значениями. В этом случае говорят, что нижний и верхний пределы *определены с точностью до эквивалентности.*

Из теоремы о верхнем и нижнем пределах для последовательностей чисел вытекает аналогичная теорема для последовательностей функций:

$$\lim g_n = g \Longleftrightarrow \liminf g_n = \limsup g_n = g.$$

(Здесь равенства верны почти всюду. А последовательность вещественных функций g_n ограничена снизу и сверху некоторыми вещественными функциями.)

Лемма Фату. *Для каждой интегрально ограниченной последовательности положительных функций g_n нижний предел $f = \liminf g_n$ есть интегрируемая функция и*

$$\int \liminf g_n \leq \liminf \int g_n.$$

$\square$ Для каждых номеров n и $q \geq n$ рассмотрим $f_{qn} = \min\limits_{q \geq p \geq n} g_p$. Ясно, что последовательность f_{qn} $(q = n, n+1, \dots)$ убывает. Так как по условию $g_p \geq 0$, то и $f_{qn} \geq 0$. Следовательно, существует $f_n = \lim\limits_{q \to \infty} f_{qn} = \inf\limits_{p \geq n} g_p$. Функции $f_{qn} = \min\limits_{p \geq q \geq n} g_p$ интегрируемы вместе с g_p. Так как $0 \leq f_{qn} \leq f_{nn}$ и $0 \leq \int f_{qn} \leq \int f_{nn}$, то последовательность f_{qn} $(q = n, n+1, \dots)$ интегрально ограничена. Из теоремы Леви следует, что предельная функция f_n интегрируема и $\int f_n = \lim\limits_{q \to \infty} \int f_{qn}$.

Заметим, что $0 \leq f_n \leq f_{qn} \leq g_n$ $(q \geq n)$. По условию последовательность функций g_n интегрально ограничена. Следовательно, $0 \leq \int f_n \leq \int f_{qn} \leq \int g_n \leq c$ $(q \geq n)$ для некоторого $c > 0$. Вместе с тем последовательность $f_n = \inf\limits_{p \geq n} g_p$ $(n = 1, 2, \dots)$ возрастает. По теореме Леви она почти всюду сходится к некоторой интегрируемой функции f и $\int f = \lim \int f_n$. По теореме о нижнем и верхнем пределах $f = \liminf g_n$. С другой стороны, так как $f_n = \inf\limits_{p \geq n} g_p \leq g_p$ для каждого $p \geq n$, то

$$\int f_n \leq \int g_p = b_p \ (p \geq n), \quad \int f_n \leq \inf_{p \geq n} b_n = a_n.$$

Следовательно,

$$\int \liminf g_n = \int f \le \lim a_n = \liminf b_n = \liminf \int g_n. \blacksquare$$

Теорема Фату получается из леммы Фату добавлением двойственного утверждения для верхних пределов и заменой интегральной ограниченности последовательности g_n ее абсолютной ограниченностью функцией $\bar{g} \ge 0$.

Теорема Фату. *Для каждой последовательности интегрируемых вещественных функций g_n, абсолютные значения которых ограничены некоторой интегрируемой функцией $\bar{g} \ge 0$, нижний предел $f = \liminf g_n$ и верхний предел $g = \limsup g_n$ являются интегрируемыми функциями. Кроме того,*

$$\int \liminf g_n \le \liminf \int g_n \le \limsup \int g_n \le \int \limsup g_n.$$

$\square$ Для того чтобы доказать эту теорему, достаточно применить лемму Фату к последовательностям функций

$$u_n = \bar{g} + g_n, \quad v_n = \bar{g} - g_n.$$

Функции u_n, v_n вещественны и интегрируемы вместе с g_n, $\bar{g}$. Из условия $|g_n| \le \bar{g}$ вытекает, что

$$0 \le u_n \le 2\bar{g},\ 0 \le v_n \le 2\bar{g},\ 0 \le \int u_n \le 2\int \bar{g},\ 0 \le \int v_n \le 2\int \bar{g}.$$

Таким образом, последовательности u_n, v_n удовлетворяют условиям леммы Фату. Поэтому

$$\liminf u_n = \bar{g} + \liminf g_n, \quad \liminf v_n = \bar{g} - \limsup g_n$$

являются интегрируемыми функциями и

$$\int \liminf u_n \le \liminf \int u_n, \quad \int \liminf v_n \le \liminf \int v_n.$$

Следовательно, функции

$$\liminf u_n = \bar{g} + \liminf g_n, \quad \liminf v_n = \bar{g} - \limsup g_n$$

тоже интегрируемы и

$$\int \liminf g_n = \int \liminf u_n - \int \bar{g} \le \liminf \int u_n - \int \bar{g}$$
$$= \liminf(\int \bar{g} + \int g_n) - \int \bar{g} = \liminf \int g_n,$$

$$\int \limsup g_n = \int \bar{g} - \int \liminf v_n \ge \int \bar{g} - \liminf \int v_n$$
$$= \int \bar{g} - \liminf(\int \bar{g} + \int g_n) = \limsup \int g_n.$$

Неравенство $\liminf \int g_n \le \limsup \int g_n$ вытекает из определений нижнего и верхнего пределов интегрируемых числовых последовательностей. ■

3. Критерий интегрируемости. Вещественная функция $f = g^+ - g^-$ интегрируема ессли ее положительные компоненты g^+, g^- интегрируемы. Из интегрируемости f вытекает интегрируемость $|f| = g^+ + g^-$.

Лемма. *Пусть абсолютные значения $|f_n|$ интегрируемых числовых функций f_n ограничены сверху интегрируемой функцией $\bar{f} \ge 0$ и последовательность (f_n) почти всюду сходится к функции f. Тогда f интегрируема и $\int f = \lim \int f_n$.*

□ Достаточно доказать лемму для вещественных функций.

Пусть функции $f_n = g_n$, $f = g$ вещественные. Тогда условие $\lim f_n = f$ эквивалентно равенствам $\liminf g_n = \limsup g_n = g$. Последовательность g_n удовлетворяет условиям теоремы Фату при $\bar{g} = \bar{f}$. Из нее следует, что функция g интегрируема и

$$\int g \le \liminf \int g_n \le \limsup \int g_n \le \int g.$$

Отсюда $\int f = \int g = \lim \int g_n = \int \lim f_n$. ■

Докажем теперь удобный и часто используемый

Критерий интегрируемости. *Числовая функция f интегрируема ессли f измерима и существует интегрируемая функция $\bar{f} \geq 0$ такая, что $|f| \leq \bar{f}$.*

□ 1. Докажем сначала достаточность сформулированных условий.

Интегрируемость $f = g + ih$ равносильна интегрируемости ее вещественной и мнимой частей g и h. Измеримость f равносильна измеримости g, h. Неравенство $|f| \leq \bar{f}$ влечет $|g| \leq \bar{f}$, $|h| \leq \bar{f}$. Значит, если сформулированные условия выполняются для f, то они выполняются для g и h. А если g и h интегрируемы, то интегрируема f. Поэтому при доказательстве достаточности условий критерия можно ограничиться случаем вещественной f. Тогда измеримость функции f означает, что к ней почти всюду сходится некоторая последовательность вещественных простых функций $\bar{f}_n$. Из условия $|f| \leq \bar{f}$ не вытекает $|\bar{f}_n| \leq \bar{f}$ для всех n, и сразу использовать лемму нельзя. Но последовательность $\bar{f}_n$ можно заменить последовательностью функций $f_n = \bar{f} \wedge [\bar{f}_n \vee (-\bar{f})]$, удовлетворяющей условиям леммы.

Функции f_n интегрируемы вместе с $\bar{f}$, $\bar{f}_n$. Так как $\bar{f}_n \to f$, $\bar{f} \geq 0$ и $-\bar{f} \leq \bar{f}_n \leq \bar{f}$, то $f_n = \bar{f} \wedge [\bar{f}_n \vee (-\bar{f})] \to \bar{f} \wedge [f \vee (-\bar{f})] = f$. Из определений вытекает, что $-\bar{f} \leq f_n \leq \bar{f}$, т. е. $|f_n| \leq \bar{f}$. Условия леммы выполнены. Из нее следует, что функция f интегрируема.

2. Докажем теперь необходимость сформулированных условий.

Измеримость интегрируемой функции сразу следует из определений. Функция $f = (g^+ - g^-) + i(h^+ - h^-)$ интегрируема если ее положительные компоненты g^+, g^-, h^+, h^- интегрируемы. Вместе с ними интегрируема функция $\bar{f} = g^+ + g^- + h^+ + h^-$. Из неравенства треугольника следует, что $|f| \leq \bar{f}$. Таким образом, интегрируемая функция $\bar{f}$ удовлетворяет сформулированным условиям. ■

Следствие. *Измеримая f интегрируема ессли $|f|$ интегрируема.*

□ Если f измерима, то и $|f|$ измерима. По критерию интегрируемость f влечет существование интегрируемой функции $\bar{f}$ такой, что $|f| \leq \bar{f}$. Следовательно, тоже по критерию, $|f|$ интегрируема. Если же f измерима, а $|f|$ интегрируема, то интегрируемость f сразу вытекает из критерия при $\bar{f} = |f|$. ■

4. Теорема Лебега. Эта теорема дополняет теоремы Леви и Фату. Она формулируется для любых числовых функций, не обязательно вещественных. И очень часто используется.

Теорема Лебега. *Пусть абсолютные значения* $|f_n|$ *измеримых числовых функций* f_n *почти всюду ограничены интегрируемой функцией* $\bar{f} \geq 0$ *и последовательность* (f_n) *почти всюду сходится к функции* f. *Тогда* f_n, f *интегрируемы и* $\lim \int f_n = \int f$.

□ Теорема Лебега отличается от леммы п. 3 только предположением об измеримости функций f_n и ограниченности $|f_n|$ почти всюду. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из ее условий вытекает интегрируемость функций f_n и что лемма остается верной и при ограниченности $|f_n|$ почти всюду.

Заменим функции f_n и $\bar{f}$ эквивалентными функциями g_n и $\bar{g}$, которые равны нулю на множестве меры нуль, где $|f_n|$ не ограничены. Ясно, что $|g_n| \leq \bar{g}$ всюду. Измеримость f_n влечет измеримость g_n, а интегрируемость $\bar{f}$ — интегрируемость $\bar{g}$. Кроме того, так как $f_n \to f$, то и $g_n \to f$ почти всюду. По критерию измеримость g_n и неравенство $|g_n| \leq \bar{g}$ обеспечивают интегрируемость g_n. А из леммы п. 3 вытекает, что предельная функция f интегрируема и $\lim \int g_n = \int f$. Так как f_n и g_n эквивалентны, то f_n интегрируемы вместе с g_n и $\lim \int f_n = \lim \int g_n$. Следовательно, $\lim \int f_n = \int f$. ■

Следствие. *Если функции* f_n *интегрируемы и сумма* $\sum \int |f_n| < \infty$, *то существует интегрируемая функция* f *такая, что* $\sum f_n = f$ *почти всюду и* $\int f = \sum \int f_n$.

□ Последовательность функций $g_n = \sum\limits_{m \leq n} |f_m|$ удовлетворяет условиям теоремы Леви. Поэтому существует интегрируемая функция g, для которой $g = \sum |f_n|$ почти всюду. Так как $\Big| \sum\limits_{m \leq n \leq p} f_n \Big| \leq \sum\limits_{m \leq n \leq p} |f_n|$, то отсюда по критерию Коши вытекает, что существует функция f, для которой $f = \sum f_n$ почти всюду. Последовательность $h_n = \sum\limits_{m \leq n} f_m$ удовлетворяет условиям теоремы Лебега: h_n интегрируемы, $h_n \to f$ почти всюду, $|h_n| \leq g$, g интегрируема. Следовательно, f интегрируема и $\int f = \lim \int h_n = \sum \int f_n$. ■

5. Преобразование Фурье. Опишем еще одно применение критерия интегрируемости.

Рассмотрим алгебру $\mathscr{R}$ простых множеств, составленных из ограниченных интервалов вещественной прямой $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, и лебегову меру dx на $\mathscr{R}$, равную сумме длин попарно непересекающихся интервалов, составляющих простое множество:

$$dx\left(\sum A_j\right) = \sum dx(A_j), \quad dx(|a,b|) = b - a.$$

(Здесь $|a,b|$ обозначает произвольный интервал с началом a и концом b, т. е. $|a,b| =]a,b[,]a,b], [a,b[, [a,b]$, $-\infty < a \le b < \infty$.)

Для каждого вещественного числа u функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями $g(x) = e^{iux}$ $(-\infty < x < \infty)$ непрерывна и поэтому измерима по мере dx. Произведение $h = g \cdot f$ измеримых функций g и f — тоже измеримая функция. Кроме того, $|h| = |g| \cdot |f| = 1 \cdot |f| = |f|$ и $|f|$ интегрируема вместе с f. Следовательно, по критерию и функция h интегрируема.

Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями

$$\varphi(u) = \int e^{iux} f(x)\, dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции f.

Рассмотрим теперь стилтьесову меру dF на $\mathscr{R}$, задаваемую функцией распределения $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (возрастающей, непрерывной слева и имеющей пределы $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$). Постоянная 1 интегрируема по такой мере dF: $\int 1 \cdot dF = 1$. Так как $|g(x)| \le 1$, то по критерию функция g интегрируема по мере dF.

Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями

$$\varphi(u) = \int e^{iux}\, dF$$

называется *преобразованием Фурье* меры dF.

3.3.4. Измеримые функции

Как правило, в математическом анализе приходится иметь дело с измеримыми по данной мере функциями.

1. Измеримость и интегрируемость. По определению, измеримая функция есть предел почти всюду сходящейся последовательности простых функций. Разные алгебры простых множеств и разные меры могут определять разные классы измеримых функций. Как было показано, измеримые функции образуют алгебру: сумма, произведение и произведение на число измеримых функций являются также измеримыми функциями по данной мере. По определению, интегрируемая функция есть предел специальной последовательности простых функций. Следовательно, каждая интегрируемая функция измерима. Но не наоборот: существуют неинтегрируемые измеримые функции.

Обратную связь между измеримостью и интегрируемостью выражает

Предложение. *Каждая измеримая функция равна пределу некоторой почти всюду сходящейся последовательности интегрируемых функций.*

☐ В самом деле, каждая измеримая функция равна пределу некоторой почти всюду сходящейся последовательности простых функций, а каждая простая функция интегрируема. ■

2. Последовательности измеримых функций. Всюду дальше будем предполагать, что существует возрастающая последовательность простых множеств U_n, объединение которых равно U. В связи с этим рассматриваемые меры будем называть *локально ограниченными.* Сделанное предположение эквивалентно предположению, что существует последовательность попарно непересекающихся простых множеств E_n, сумма которых равна U. Поэтому рассматриваемые меры называют еще *сигма-конечными*: $\mu(A) = \Sigma\mu(AE_n)$, $\mu(AE_n) < \infty$.

Сделанное предположение обеспечивает существование строго положительной интегрируемой функции.

Упражнение. Доказать это [82, гл. 6, п. 6.2].

Лемма. *Если последовательность измеримых функций f_n почти всюду сходится к функции f, то f измерима.*

☐ Рассмотрим интегрируемую функцию $h > 0$ и последовательность функций $g_n = hf_n(h + |f_n|)^{-1}$. Вместе с h и f_n функции g_n измеримы. Кроме того, $|g_n| \leq h$. Наконец, $g_n \to g = hf(h + |f|)^{-1}$. Из теоремы Лебега вытекает, что функция g интегрируема и тем более измерима. Следовательно, функция $f = hg(h - |g|)^{-1}$ измерима. ■

Условимся называть множество функций *замкнутым*, если ему вместе с каждой почти всюду сходящейся последовательностью функций принадлежат и все ее предельные функции.

Теорема. *Измеримые функции образуют замкнутую алгебру.*

Обозначим эту алгебру $\mathscr{M}$. Локальная ограниченность меры обеспечивает существование у этой алгебры единицы: $1 = \lim U_n \in \mathscr{M}$. Поэтому каждая постоянная является измеримой функцией.

Предложение. *Измеримая функция f почти всюду равна нулю ессли f интегрируема и $\int |f| = 0$.*

$\square$ Если $f = 0$ почти всюду, то f интегрируема и $\int |f| = 0$. Обратно, если f интегрируема и $\int |f| = 0$, то последовательность $g_n = n|f|$ удовлетворяет условиям теоремы Леви: она возрастает, состоит из интегрируемых функций и интегрально ограничена (нулем). Следовательно, g_n почти всюду сходится к некоторой интегрируемой функции g, т. е. $n|f(x)| \to g(x)$ для почти всех x. Значит, $f(x) = 0$ для почти всех x. $\blacksquare$

В частности, если интеграл положительной интегрируемой функции равен нулю, то она почти всюду равна нулю.

3. Измеримые и интегрируемые множества. Отождествление множеств с их индикаторами автоматически приводит к определению *измеримых* и *интегрируемых множеств* как множеств, имеющих соответственно измеримые и интегрируемые индикаторы.

Из теоремы об алгебре измеримых функций вытекают следствия для множеств.

Следствие 1. *Измеримые множества образуют замкнутую алгебру множеств.*

Условимся называть класс интегрируемых множеств *ограниченно замкнутым,* если ему вместе с каждой почти всюду сходящейся и почти всюду ограниченной некоторым интегрируемым множеством последовательностью принадлежат и все ее предельные множества.

Следствие 2. *Интегрируемые множества образуют ограниченно замкнутую алгебру множеств.*

Обозначим эту алгебру $\bar{\mathscr{R}}$ и сформулируем важное

Определение. *Число* $\bar{\mu}(A) = \int A\mu$ *называется мерой интегрируемого множества* $A \in \bar{\mathscr{R}}$.

Верна следующая

Теорема. $\bar{\mu}\colon \bar{\mathscr{R}} \to \mathbb{R}$ *является полной счетно аддитивной мерой, продолжающей меру* $\mu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{R}$.

$\square$ В самом деле, из определений вытекает, что $\bar{\mu}(A) = \int A\mu = \mu(A)$ для каждого простого множества A. Значит, $\bar{\mu}$ продолжает μ.

Аддитивность $\bar{\mu}$ следует из линейности интеграла. Положительность вытекает из положительности интеграла. Значит, $\bar{\mu}$ является мерой. Полнота и счетная аддитивность меры $\bar{\mu}$ вытекают из следствия теоремы Лебега. $\blacksquare$

Условимся называть $\bar{\mu}$ *интегральным продолжением* меры μ. Там, где это не приведет к путанице, вместо $\bar{\mu}$ будем писать μ.

Вещественные измеримые функции описывает

Критерий измеримости. *Вещественная функция* f *измерима ессли прообраз* $f^{-1}[a, \infty[$ *каждого интервала* $[a, \infty[$ $(-\infty < a < \infty)$ *является измеримым множеством.*

Замечание. В критерии интервал $[a, \infty[$ можно заменить любым из интервалов $]a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$ $(-\infty < a < \infty)$.

Следствие. *Непрерывная вещественная функция измерима по мере Лебега.*

Структуру измеримых по лебеговой мере λ вещественных функций на отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ описывает [96, гл. 3].

Теорема Лузина. *Если функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *измерима по лебеговой мере* λ, *то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная функция* $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\lambda(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

3.3.5. Теоремы Фубини и Тонелли

Эти теоремы устанавливают связь между двойными и повторными интегралами.

1. Рассмотрим множества X, Y, алгебры их простых частей $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, меры λ, μ на $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. В декартовом произведении $X \times Y = Z$ множеств X и Y выделим класс простых прямоугольников $A \times B = C$ со сторонами $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$. Назовем простыми множествами в $X \times Y$ объединения конечных семейств простых прямоугольников. Множества в $X \times Y$ будем называть *плоскими.*

Легко доказать следующие утверждения [28, гл. 7].

Лемма 1. *Каждое простое плоское множество равно сумме некоторого конечного семейства попарно непересекающихся простых прямоугольников.*

Предложение 1. *Класс всех простых множеств с обычными операциями образует алгебру.*

Алгебра простых множеств в $X \times Y$ называется *произведением алгебр* $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Она обозначается $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$.

Мера $\lambda \times \mu = \nu$ на алгебре $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \mathscr{C}$ простых множеств в $X \times Y = Z$ определяется очень естественно, но ее определение связано с довольно длинными рассуждениями.

Определение 1. *Пусть* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ *и* $A \times B = C$. *Тогда* $\nu(C) = (\lambda \times \mu)(A \times B) = \lambda(A) \cdot \mu(B)$.

Лемма 2. *Функция* ν *на простых прямоугольниках аддитивна.*

Лемма 3. $\sum \nu(C_i) = \sum \nu(Z_i)$ $(\sum C_i = \sum Z_i)$.

Определение 2. *Мера* $\nu(C)$ *простого множества* $C = \sum C_i$ *равна сумме мер составляющих его простых прямоугольников* C_i:

$$\nu(C) = \sum \nu(C_i).$$

По лемме 3 это определение задает однозначную функцию ν на алгебре $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \mathscr{C}$ простых множеств.

Предложение 2. *Функция* ν *на алгебре* $\mathscr{C}$ *простых множеств, задаваемая определениями* 1 *и* 2, *является мерой.*

Определения и леммы задают меру $\lambda \times \mu \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}$. Она называется *произведением мер* $\lambda \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ и $\mu \colon \mathscr{B} \to \mathbb{R}$. Мера $\lambda \times \mu$ однозначно определяется своими значениями на прямоугольниках.

Предложение 3. *Произведение* $\lambda \times \mu = \nu$ *счетно аддитивных мер* λ *и* μ *есть счетно аддитивная мера.*

Легко проверить, что произведение локально ограниченных мер есть локально ограниченная мера. Таким образом, произведение мер обладает всеми нужными свойствами. Его можно пополнить.

Замечание. Произведение полных мер может не быть полной мерой [108, § 35, упр. 2].

2. Двойные и повторные интегралы. Как и в п. 1, рассмотрим множество X, алгебру его простых частей $\mathscr{A}$, меру $\lambda = dx$ на ней и множество Y, алгебру его простых частей $\mathscr{B}$, меру $\mu = dy$ на ней. Меры $\lambda = dx$ и $\mu = dy$ предполагаются *счетно аддитивными, полными и локально ограниченными.* Обозначения dx и dy выбраны для большей выразительности записей с интегралами. Вместе с мерами $\lambda = dx$ и $\mu = dy$ рассмотрим их *пополненное* произведение $\lambda \times \mu = dxdy$. Это произведение является мерой на алгебре $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ простых множеств в $X \times Y$, пополненной когда нужно.

Возьмем функцию $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, принимающую комплексные значения $h(x, y) \in \mathbb{C}$. Будем функцию h иногда обозначать еще $h(\cdot, \cdot)$. Для каждых $a \in X$ и $b \in Y$ по функции h определяются *частные функции* одной переменной $h(a, \cdot)\colon Y \to \mathbb{C}$ и $h(\cdot, b)\colon X \to \mathbb{C}$ со значениями $h(a, y)$ и $h(x, b)$ для $y \in Y$ и $x \in X$. Функции $h(a, y)$ и $h(x, b)$ называются еще *сечениями* функции h в точках $a \in X$ и $b \in Y$.

Чтобы сформулировать теоремы Фубини и Тонелли, определим двойной и повторные интегралы, введем подходящие обозначения.

1. Если функция $h(\cdot, \cdot)$ интегрируема по мере $dxdy$, то будем говорить,me что *существует двойной интеграл*

$$c = \int\int h(x, y)\, dxdy.$$

2. Предположим, что для каждого $x \in X$, не принадлежащего некоторому множеству $A \subseteq X$ меры $dx(A) = 0$, функция $h(x, \cdot)$ интегрируема по мере dy. Рассмотрим функцию f на X, которая имеет значения $f(x) = \int h(x, y)\, dy$ для $x \notin A$ и произвольные числовые значения $f(x)$ для $x \in A$. Если функция f интегрируема по мере dx, то скажем, что *существует повторный интеграл*

$$a = \int f(x)\, dx = \int \left(\int h(x, y)\, dy \right) dx.$$

Существование и величина этого интеграла не зависят от выбора множества A меры $dx(A) = 0$ и значений $f(x)$ для $x \in A$.

3. Предположим, что для каждого $y \in Y$, не принадлежащего некоторому множеству $B \subseteq Y$ меры $dy(B) = 0$, функция $h(\cdot, y)$

интегрируема по мере dx. Рассмотрим функцию g на Y, которая имеет значения $g(y) = \int h(x,y)\,dx$ для $y \notin B$ и произвольные числовые значения $g(y)$ для $y \in B$. Если функция g интегрируема по мере dy, то скажем, что *существует повторный интеграл*

$$b = \int g(y)\,dy = \int \biggl(\int h(x,y)\,dx \biggr) dy.$$

Существование и величина этого интеграла не зависят от выбора множества B меры $dy(B) = 0$ и значений $g(x)$ для $y \in B$.

Функции f и g иногда называют *простыми интегралами.* Они определены с точностью до эквивалентности по мерам dx и dy соответственно.

Так как интегрируемость числовой функции равносильна интегрируемости ее положительных компонент, а интеграл линеен, то достаточно исследовать связь между двойными и повторными интегралами для положительных функций.

Лемма. *Почти все сечения плоского множества меры нуль тоже имеют меру нуль.*

Упражнение. Доказать это [82, гл. 7, п. 7.2].

Из этой леммы вытекает много полезных следствий. Докажем одно из них, используя введенные обозначения.

Следствие. *Если $h_n(\cdot,\cdot) \to h(\cdot,\cdot)$ почти всюду по $dxdy$, то $h_n(a,\cdot) \to h(a,\cdot)$ почти всюду по dy и $h_n(\cdot,b) \to h(\cdot,b)$ почти всюду по dx для почти каждых $a \in X$ и $b \in Y$.*

$\square$ Пусть $h_n(x,y) \to h(x,y)$ при $(x,y) \notin C$, $dxdy(C) = 0$. Тогда $h_n(a,y) \to h(a,y)$ при $x \notin C(a,\cdot)$, $h_n(x,b) \to h(x,b)$ при $x \notin C(\cdot,b)$ и $dy(C(a,\cdot)) = 0$, $dx(C(\cdot,b)) = 0$ для почти каждых $a \in X$, $b \in Y$. $\blacksquare$

Из этого следствия вытекает

Предложение. *Почти все сечения измеримой функции измеримы.*

$\square$ Пусть $h(\cdot,\cdot)$ измерима. Тогда по определению к ней почти всюду сходится по $dxdy$ последовательность простых функций $h_n(\cdot,\cdot)$. Ясно, что сечения $h_n(a,\cdot)$ и $h_n(\cdot,b)$ являются тоже простыми функциями. По доказанному $h_n(a,\cdot) \to h(a,\cdot)$ почти всюду по dy для почти каждого $a \in X$ и $h_n(\cdot,b) \to h(\cdot,b)$ почти всюду по dx для почти каждого $b \in Y$. Следовательно, для таких a и b функция $h(a,\cdot)$ измерима по dy и функция $h(\cdot,b)$ измерима по dx. $\blacksquare$

3. Используем введенные в п. 2 обозначения и данные там определения двойных и повторных интегралов.

Теорема Фубини. *Если для числовой функции h двух переменных существует двойной интеграл c, то для нее существуют оба повторных интеграла a, b и все три интеграла равны $a = b = c$.*

Коротко теорема Фубини выражается равенствами

$$\int\int h(x,y)\,dxdy = \int\left(\int h(x,y)dx\right)dy = \int\left(\int h(x,y)dy\right)dx.$$

При доказательстве теоремы Фубини будут использованы два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Теорема Фубини верна для простых функций.*

□ Пусть $h = \sum\limits_i c_i C_i = \sum\limits_i \sum\limits_j c_{ij}(A_{ij} \times B_{ij})$, где $c_i = c_{ij}$ — числа, $C_i = \sum\limits_j c_{ij}(A_{ij} \times B_{ij})$ — суммы простых прямоугольников. Тогда

$$c = \int\int h(x,y)\,dxdy = \sum_i \sum_j c_{ij}\,dx(A_{ij})\,dy(B_{ij}),$$

$$h(x,\cdot) = \sum_i \sum_j c_{ij} A_{ij}(x) B_{ij},$$

$$f(x) = \int h(x,y)\,dxdy = \sum_i \sum_j c_{ij} A_{ij}(x)\,dy(B_{ij}),$$

$$\begin{aligned} a = \int f(x)\,dx = \int\left(\int h(x,y)\,dy\right)dx \\ = \sum_i \sum_j c_{ij}\,dx(A_{ij})\,dy(B_{ij}) = c, \end{aligned}$$

$$h(\cdot,y) = \sum_i \sum_j c_{ij} A_{ij} B_{ij}(y),$$

$$g(y) = \int h(x,y)\,dx = \sum_i \sum_j c_{ij}\,dx(A_{ij}) B_{ij}(y),$$

$$\begin{aligned} b = \int g(y)\,dy = \int\left(\int h(x,y)\,dx\right)dy \\ = \sum_i \sum_j c_{ij}\,dx(A_{ij})\,dy(B_{ij}) = c. \end{aligned}$$

Таким образом, $a = b = c$. ■

Лемма 2. *Теорема Фубини верна для монотонно интегрируемых функций.*

□ Пусть $h \in \mathscr{K}$. Тогда существует приближающая h возрастающая последовательность простых функций h_n и

$$c = \int\int h(x,y)\,dxdy = \lim \int\int h_n(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Здесь $h_n(z) \uparrow h(z)$ $(z = (x,y) \notin C)$, где C — некоторое множество в $Z = X \times Y$, имеющее меру $dxdy(C) = 0$.

Рассмотрим последовательность простых функций f_n со значениями $f_n(x) = \int h_n(x,y)\,dy$. Эта последовательность возрастает и интегрально ограничена вместе с (h_n):

$$\int f_n(x)\,dx = \int \left(\int h_n(x,y)\,dy\right) dx = \int\int h_n(x,y)\,dxdy \le c. \tag{2}$$

Значит, (f_n) приближает некоторую интегрируемую функцию f и $\lim \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$. Выделим множество $A = \{x : dy(C(x,\cdot)) \ne 0\} \cup \{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$. Так как $dxdy(C) = 0$, то $dy(C(x,\cdot)) = 0$ для почти всех x. Вместе с тем $f_n(x) \to f(x)$ тоже для почти всех x. Значит, $dx(A) = 0$.

Если $x \notin A$, то $dy(C(x,\cdot)) = 0$. При $y \notin C(x,\cdot)$ пара $(x,y) \notin C$ и последовательность $h_n(x,y) \uparrow h(x,y)$ по определению множества C. Таким образом, возрастающая последовательность простых функций $h_n(x,\cdot)$ почти всюду сходится по мере dy к функции $h(x,\cdot)$. Вместе с тем $f_n(x) \uparrow f(x)$ при $x \notin A$ и поэтому последовательность $h_n(x,\cdot)$ интегрально ограничена:

$$\int h_n(x,y)\,dy = f_n(x) \le f(x) < \infty.$$

Значит, при $x \notin A$ функция $h(x,\cdot)$ интегрируема по мере dy и

$$f(x) = \lim f_n(x) = \lim \int h_n(x,y)\,dy = \int h(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Функция f интегрируема по мере dx. Следовательно, повторный интеграл

$$a = \int f(x)\,dx = \int \left(\int h(x,y)\,dy\right) dx$$

существует. Он равен двойному: из (1)–(3) вытекает, что

$$a = \int f(x)\,dx = \int \left(\int h(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij}\,dx(A_{ij})\,dy(B_{ij}) = c.$$

Точно так же можно доказать, что повторный интеграл b существует и $b = c$. Но благодаря симметрии это сразу следует из уже доказанного при замене $x \leftrightarrow y$. ■

Доказательство теоремы Фубини. Пусть h — интегрируемая по мере $dxdy$ числовая функция на $X \times Y$, имеющая монотонно интегрируемые компоненты h_1, h_2, h_3, h_4: $h = h_1 - h_2 + ih_3 - ih_4$. Компоненты h_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ интегрируемы мере $dxdy$. По лемме 2 для них верна теорема Фубини: из существования двойных интегралов

$$c_j = \int\int h_j(x,y)\,dxdy$$

вытекает существование повторных интегралов

$$a_j = \int \left(\int h_j(x,y)\,dy \right) dx, \quad b_j = \int \left(\int h_j(x,y)\,dx \right) dy$$

и равенства $a_j = b_j = c_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Заметим, что для каждых $x \in X$ и $y \in Y$ функции $h_j(x,\cdot)$ и $h_j(\cdot,y)$ являются монотонно интегрируемыми компонентами функций $h(x,\cdot)$ и $h(\cdot,y)$:

$$h(x,\cdot) = h_1(x,\cdot) - h_2(x,\cdot) + ih_3(x,\cdot) - ih_4(x,\cdot),$$
$$h(\cdot,y) = h_1(\cdot,y) - h_2(\cdot,y) + ih_3(\cdot,y) - ih_4(\cdot,y).$$

Интегрируемость $h_j(x,\cdot)$ по мере dy и интегрируемость $h_j(\cdot,y)$ по мере dx влекут интегрируемость $h(x,\cdot)$ и $h(\cdot,y)$ по мерам dy и dx. Значит, существуют простые интегралы f_j и g_j со значениями

$$f_j(x) = \int h_j(x,y)\,dy, \quad g_j(y) = \int h_j(x,y)\,dx$$

для почти всех $x \in X$ и для почти всех $y \in Y$. Существование повторных интегралов a_j и b_j, по определению, означает интегрируемость функций f_j и g_j по мерам dy и dx. Она влечет интегрируемость функций f и g по мерам dy и dx. Следовательно, повторные интегралы a, b существуют и

$$a = a_1 - a_2 + ia_3 - ia_4, \quad b = b_1 - b_2 + ib_3 - ib_4.$$

Из этих равенств, равенства $c = c_1 - c_2 + ic_3 - ic_4$ и равенств $a_j = b_j = c_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ вытекают равенства $a = b = c$. Теорема Фубини доказана в общем случае.

4. Теорема Тонелли. В теореме Фубини из существования двойного интеграла выводится существование повторных интегралов. В теореме Тонелли, наоборот, из существования повторных интегралов выводится существование двойного, но только для положительных измеримых функций.

Теорема Тонелли. *Если для положительной измеримой функции h двух переменных существует один из повторных интегралов a или b, то для нее существует второй повторный интеграл, двойной интеграл c и все три интеграла равны: $a = b = c$.*

$\square$ Пусть у положительной измеримой функции h существует повторный интеграл

$$a = \int f(x)\,dx = \int \left(\int h(x,y)\,dy \right) dx.$$

Существует возрастающая последовательность положительных интегрируемых функций h_n, почти всюду по мере $dxdy$ сходящаяся к h:

$$0 \le h_n(z) \uparrow h(z) \quad (z = (x,y) \notin C),$$

где $dxdy(C) = 0$. Нужно еще доказать, что последовательность функций h_n интегрально ограничена. (В теореме Фубини это сразу следовало из интегрируемости функции h. Здесь же предполагается только измеримость h.)

Заметим, что последовательность интегрируемых функций f_n ьу со значениями

$$f_n(x) = \int h_n(x,y)\,dy$$

возрастает вместе с последовательностью функций h_n и ограничена интегрируемой функцией f со значениями $f(x) = \int h(x,y)\,dy$ для почти всех $x \in X$ по мере dx. Используя теорему Фубини для функций h_n, существование повторного интеграла a и интегрируя верные почти всюду по мере dx неравенства $f_n \le f$, получаем

$$\int\int h_n(x,y)\,dxdy = \int\left(\int h_n(x,y)\,dy\right)dy$$
$$= \int f_n(x)\,dx \le \int f(x)dx = \int\left(\int h(x,y)\,dy\right)dx = a.$$

Значит, последовательность функций h_n интегрально ограничена. Из теоремы Леви следует, что функция h интегрируема по мере $dxdy$. Двойной интеграл

$$c = \int\int h(x,y)\,dxdy = \lim\int\int h_n(x,y)\,dxdy$$

существует. По теореме Фубини отсюда следует, что второй повторный интеграл

$$b = \int g(y)\,dy = \int\left(\int h(x,y)\,dx\right)dy$$

тоже существует и верны равенства $a = b = c$.

Точно так же можно было доказать, что если у положительной измеримой функции h существует повторный интеграл b, то у нее существует двойной интеграл c, повторный интеграл a и верно равенство $a = b = c$. Но благодаря симметрии это сразу следует из уже доказанного при замене $x \leftrightarrow y$. ■

Из теорем Фубини и Тонелли можно вывести обобщающее их предложение для измеримых функций h с числовыми значениями.

Как обычно, обозначим $|h|$ функцию со значениями $|h(x,y)|$. Измеримость h влечет измеримость $|h|$, а интегрируемость h равносильна интегрируемости $|h|$. Обозначим через α, β и γ повторные и двойной интегралы для функции $|h|$:

$$\alpha = \int\left(\int |h(x,y)|\,dy\right)dx, \quad \beta = \int\left(\int |h(x,y)|\,dx\right)dy,$$
$$\gamma = \int\int |h(x,y)|\,dxdy.$$

Существование (конечного) γ равносильно существованию двойного интеграла $c = \int\int h(x,y)\,dxdy$. Но (конечные) α, β могут и не существовать тогда, когда a, b существуют (и даже равны).

Упражнение. Привести контрпример [82, гл. 7, п. 74].

Теоремы Фубини и Тонелли объединяет общая

Теорема Фубини — Тонелли. *Пусть h — измеримая числовая функция двух переменных. Тогда если существует один из повторных интегралов α, β или двойной интеграл γ функции $|h|$, то существуют повторные и двойной интегралы a, b и c функции h, причем $a = b = c$.*

$\square$ Измеримость h влечет измеримость $|h|$. По теореме Тонелли измеримость $|h|$ и существование одного из повторных интегралов α или β для $|h|$ обеспечивает существование двойного интеграла для $|h|$. И, следовательно, существование двойного интеграла c для h. Тем более двойной интеграл c измеримой функции h существует, если предполагается, что двойной интеграл γ функции $|h|$ существует. По теореме Фубини из существования двойного интеграла c для h вытекает существование обоих повторных интегралов a, b для h и равенство $a = b = c$. $\blacksquare$

5. Теоремы Фубини и Тонелли формулируют условия, при которых можно переставлять интегралы. Здесь приводятся условия, при которых можно переставлять интеграл с пределом, производной и несобственным интегралом.

Будем считать, что $X \subseteq \mathbb{R}$, и называть переменную $x \in X$ *параметром.* Если при каждом значении параметра x функция $h(x,\cdot)\colon Y \to \mathbb{C}$ интегрируема по мере dy, то условимся функцию $f\colon X \to \mathbb{C}$ со значениями $f(x) = \int h(x,y)\,dy$ называть *интегралом, зависящим от параметра.* Все остальные обозначения и термины сохраняют прежний смысл.

Рассмотрим произвольную точку a замыкания $\bar{X}$ в $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$ множества X. (В частности, возможно $a = -\infty$ и $a = \infty$.) Сформулируем подробно условия, при которых интеграл по dx можно переставлять с пределом при $x \to a$:

(1.1) $h(x,\cdot)$ *измерима по dy для каждого $x \in X$;*

(2.1) $h(\cdot,y)$ *сходится при $x \to a$ к значению $g(y)$ некоторой $g\colon Y \to \mathbb{C}$ для почти каждого $y \in Y$;*

(3.1) $|h(\cdot,y)|$ *ограничена значением $\bar{g}(y)$ некоторой интегрируемой $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$ для почти каждого $y \in Y$.*

Утверждение «$\lim\limits_{x\to a}\int h(x,y)\,dy$ *имеет смысл*» означает, что функции $h(x,\cdot)$ интегрируемы по dy и функция f со значениями $f(x) = \int h(x,y)\,dy$ имеет предел при $x \to a$. Утверждение «$\int \lim\limits_{x\to a} h(x,y)\,dy$ *имеет смысл*» означает, что существует предельная функция $g\colon Y \to \mathbb{C}$ со значениями $g(y) = \lim\limits_{x\to a} h(x,y)$ для почти всех $y \in Y$ и она интегрируема по dy.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1.1)–(3.1)*, то обе части равенства*

$$\lim_{x\to a}\int h(x,y)\,dy = \int \lim_{x\to a} h(x,y)\,dy$$

имеют смысл и оно верно.

□ Нужно свести дело к последовательностям и применить теорему Лебега. Рассмотрим произвольную последовательность $x(n) \in X$, сходящуюся к $a \in \bar{X}$. Если $h(x,y) \to g(y)$ при $x \to a$, то $h(x(n),y) \to g(y)$. Условия (1.1)–(3.1) обеспечивают выполнение условий теоремы Лебега для функций $g_n = h(x(n),\cdot)$, g и $\bar{g}$: функции g_n измеримы, их абсолютные значения $|g_n| = |h(x(n),\cdot)|$ почти всюду ограничены интегрируемой функцией $\bar{g}$ и последовательность почти всюду сходится к функции g. По теореме Лебега функции g_n, g интегрируемы и $\lim \int g_n = \int g$. То есть

$$\lim f(x(n)) = \lim \int h(x(n),y)\,dy = \int g(y)\,dy$$

для каждой последовательности $x(n) \to a$. Значит, функция f имеет предел при $x \to a$ и

$$\lim_{x\to a}\int h(x,y)\,dy = \lim_{x\to a} f(x) = \int g(y)\,dy = \lim_{x\to a}\int h(x,y)\,dy.$$

Теорема доказана. ■

Перейдем теперь к производным. Рассмотрим произвольную точку a интервала X в $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$. (Точка a не обязательно внутренняя, а интервал X не обязательно открытый.)

Обозначим $\mathscr{D}_a h(\cdot,y)$ производную функции $h(\cdot,y)$ в точке a, $\Delta_a h(\cdot,y)$ — относительное приращение функции $h(\cdot,y)$ в точке a:

$$\Delta_a h(x,y) = \frac{h(x,y) - h(a,y)}{x-a}$$

при $x \neq a$. Если $h(\cdot, y)$ дифференцируема в точке a, то значение $\Delta_a h(\cdot, y)$ при $x = a$ выбирается равным $\mathscr{D}_a h(\cdot, y)$. По определению,

$$\mathscr{D}_a h(\cdot, y) = \lim_{x \to a} \Delta_a h(x, y).$$

Сформулируем подробно условия, при которых интеграл по dy можно переставлять с производной в точке a:

(1.2) $h(x, \cdot)$ *измерима по* dy *для каждого* $x \in X$, *а* $h(a, \cdot)$ *интегрируема по* dy;

(2.2) $h(\cdot, y)$ *дифференцируема в точке* a *для почти каждого* $y \in Y$;

(3.2) $|\Delta_a h(\cdot, y)|$ *ограничена значением* $\bar{g}(y)$ *некоторой интегрируемой* $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$ *для почти каждого* $y \in Y$.

Утверждение «$\mathscr{D}_a \int h(x, y)\, dy$ *имеет смысл*» означает, что функции $h(x, \cdot)$ интегрируемы по dy и функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ со значениями $f(x) = \int h(x, y)\, dy$ имеет производную в точке a. Утверждение «$\int \mathscr{D}_a h(x, y)\, dy$ *имеет смысл*» означает, что $h(\cdot, y)$ дифференцируема в точке a для почти каждого $y \in Y$ и функция со значениями $\mathscr{D}_a h(\cdot, y)$ для таких $y \in Y$ интегрируема по dy.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1.2)–(3.2), *то обе части равенства*

$$\mathscr{D}_a \int h(x, y)\, dy = \int \mathscr{D}_a h(x, y)\, dy$$

имеют смысл и оно верно.

□ Нужно применить теорему 1 к функции $\Delta_a h(\cdot, \cdot)$.

Условия (1.2)–(3.2) обеспечивают выполнение условий (1.1)–(1.3) для функции $\bar{h} = \Delta_a h(\cdot, \cdot)$ со значениями

$$\bar{h}(x, y) = \frac{h(x, y) - h(a, y)}{x - a} \quad (x \neq a), \quad \bar{h}(a, y) = \Delta_a h(\cdot, y).$$

В самом деле, $\bar{h}(x, \cdot)$ измерима вместе с $h(x, \cdot)$ при всех $x \in X$ по dy, $\bar{h}(\cdot, y)$ сходится при $x \to a$ к $\mathscr{D}_a h(\cdot, y)$ для почти каждого $y \in Y$ и $|\bar{h}(x, y)|$ ограничена значением $\bar{g}(y)$ для почти всех $y \in Y$.

Из теоремы 1 следует, что функции $\bar{h}(x, \cdot)$ интегрируемы. А функции $h(a, \cdot)$ интегрируема по условию. Так как

$$h(x, \cdot) = h(a, \cdot) + (x - a)\bar{h}(x, \cdot),$$

то из интегрируемости $h(a,\cdot)$ и $\bar{h}(x,\cdot)$ вытекает интегрируемость $h(x,\cdot)$ по мере dy при каждом $x \in X$. По теореме 1 обе части

$$\lim_{x\to a}\int \frac{h(x,y)-h(a,y)}{x-a}\,dy = \int \lim_{x\to a}\frac{h(x,y)-h(a,y)}{x-a}\,dy$$

имеют смысл и это равенство верно. А так как $h(x,\cdot)$ интегрируема при каждом $x \in X$, то

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}&\int \frac{h(x,y)-h(a,y)}{x-a}\,dy\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left[\int h(x,y)\,dy - \int h(a,y)\,dy\right] = \mathscr{D}_a \int h(x,y)\,dy,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x,y)-h(a,y)}{x-a} = \mathscr{D}_a h(\cdot,y).$$

Обе части равенства теоремы имеют смысл и оно верно. ■

Равенство теоремы 2 называют *правилом Лейбница* дифференцирования интеграла, зависящего от параметра.

Для дифференцируемых функций на отрезке условия, при которых интеграл переставляется с производной, формулируются аналогично условиям теоремы 2. Рассмотрим отрезок X вещественной прямой.

Обозначим $\mathscr{D}h(\cdot,y)$ производную функции $h(\cdot,y)$. Сформулируем подробно условия, при которых интеграл по dy можно переставлять с производной по x:

(1.2′) $h(x,\cdot)$ *интегрируема по dy для каждого $x \in X$*;

(2.2′) $h(\cdot,y)$ *дифференцируема для почти каждого $y \in Y$*;

(3.2′) $|\mathscr{D}h(\cdot,y)|$ *ограничена значением $\bar{g}(y)$ некоторой интегрируемой $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$ для почти каждого $y \in Y$.*

Следующая теорема аналогична теореме 2.

Теорема 2′. *Если выполнены условия* (1.2′)–(3.2′), *то обе части равенства*

$$\mathscr{D}\int h(x,y)\,dy = \int \mathscr{D}h(x,y)\,dy$$

имеют смысл и оно верно.

□ Нужно показать, что из условий (1.2′)–(3.2′) следуют условия (1.2)–(3.2) для любой точки $a \in X$. Условия (1.2) и (2.2) получаются из (1.2′) и (2.2′) автоматически. Условие (3.2) следует из (3.2′) и формулы Лагранжа [121, гл. 3, § 2]

$$\left|\frac{h(x,y)-h(a,y)}{x-a}\right| = |\mathscr{D}_c h(\cdot,y)| \le \bar{g}(y),$$

где $c = c(a,x)$ — некоторая точка отрезка X. ■

Для несобственных интегралов возьмем $X = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[$. Определим лебеговы несобственные интегралы по аналогии с римановыми.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, интегрируемую по лебеговой мере dx на каждом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Лебеговым *несобственным интегралом* функции f назовем двойной предел

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция f интегрируема по лебеговой мере dx на всей вещественной прямой $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$, то несобственный интеграл для f равен обычному. Это следует из теоремы 1. В самом деле,

$$\int f - \int\limits_a^b f = \int f - \int [a,b] f = \int (1-[a,b]) f \to 0$$

при $a \to -\infty$, $b \to \infty$, так как $1 - [a,b](x) \to 0$ для каждого $x \in X$, функция $|f|$ интегрируема по dx вместе с f и $|(1-[a,b])\cdot f| \le |f|$.

Замечание. Лебеговы несобственные интегралы существуют и у некоторых не интегрируемых по лебеговой мере функций f. (В частности, при $f(x) = x^{-1}\sin x$ для $x \ne 0$.)

Сформулируем подробно условия, при которых интеграл по dy можно переставлять с несобственным интегралом по dx:

(1.3) $h(\cdot,\cdot)$ *измерима по* $dxdy$;

(2.3) $h(\cdot,y)$ *имеет лебегов несобственный интеграл для почти каждого* $y \in Y$;

(3.3) *интегралы* $\int\limits_a^b |h(x,y)|\,dx$ *для всех* $a \le b$ *из* $\mathbb{R}$ *ограничены значением* $\bar{g}(y)$ *некоторой интегрируемой* $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$ *для почти каждого* $y \in Y$.

Утверждение «$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int h(x,y)\,dy\right) dx$ *имеет смысл*» означает, что $h(\cdot,\cdot)$ интегрируема по dy и функция f со значениями $f(x) = \int h(x,y)dy$ имеет несобственный интеграл по dx. Утверждение «$\int \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\right) dy$ *имеет смысл*» означает, что $h(\cdot,y)$ имеет несобственный интеграл по dx для почти каждого $y \in Y$, а $g\colon Y \to \mathrm{C}$ со значениями $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx$ для таких $y \in Y$ интегрируема по dy.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (1.3)–(3.3)*, то обе части равенства*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int h(x,y)\,dy\right) dx = \int \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\right) dy$$

имеют смысл и оно верно.

□ Теорема 3 вытекает из теоремы Фубини — Тонелли и теоремы Леви. Из условия (3.3) следует, что $|h(\cdot,y)|$ имеет несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(x,y)|\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int\limits_a^b |h(x,y)|\,dx \le \bar{g}(y)$$

для почти каждого $y \in Y$. Значит, при таких $y \in Y$ функция $|h(\cdot,y)|$ интегрируема по мере dx на $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$. В самом деле, из условий (1.3)–(3.3) следует, что последовательность функций $\varphi_n = [-n,n] \cdot |h(\cdot,y)|$ со значениями

$$\varphi_n(x) = |h(x,y)|\ (x \in [-n,n]), \quad \varphi_n(x) = 0\ (x \notin [-n,n])$$

является возрастающей последовательностью интегрируемых (по лебеговой мере dx для $\mathbb{R}$) функций, интегрально ограниченной и сходящейся всюду к функции $\varphi = |h(\cdot, y)|$. Поэтому (следствие теоремы Леви) функция $|h(\cdot, y)|$ интегрируема по dx, а вместе с нею и $h(\cdot, y)$ (следствие критерия интегрируемости; измеримость $h(\cdot, \cdot)$ по $dxdy$ влечет измеримость $h(\cdot, y)$ по dx, как было показано в п. 2). Кроме того, как было показано, интеграл по мере dx равен несобственному:

$$\int h(x, y)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx.$$

Из интегрируемости функций $|h(\cdot, y)|$ по лебеговой мере dx для $\mathbb{R}$ и условия (3.3) вытекает существование повторного интеграла

$$\beta = \int \left(\int |h(x, y)|\, dx \right) dy \leq \int \bar{g}(y)\, dy < \infty.$$

По теореме Фубини — Тонелли измеримость функции $h(\cdot, y)$ (условие (1.3)) и существование повторного интеграла β для функции $|h(\cdot, y)|$ обеспечивает существование и равенство повторных интегралов для $h(\cdot, \cdot)$. Так как интегралы по мере dx равны соответствующим несобственным, то это значит, что обе части равенства имеют смысл и оно верно. ■

Докажем еще одну теорему о перестановке интегралов. Сформулируем подробно ее условия:

(1.3′) $h(x, \cdot)$ *интегрируема по* dy *для каждого* $x \in X$;

(2.3′) $h(\cdot, y)$ *имеет лебегов несобственный интеграл для почти каждого* $y \in Y$;

(3.3′) $|\Delta_u h(\cdot, y)|$ *и* $\int\limits_u^v |h(x, y)|\, dx$ *для всех* $u \leq v$ *из* $\mathbb{R}$ *ограничены значением* $\bar{g}(y)$ *некоторой интегрируемой* $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$ *для почти каждого* $y \in Y$.

Утверждения теоремы 3′ те же, что и теоремы 3.

Теорема 3′. *Если выполнены условия* (1.3′)–(3.3′), *то обе части равенства*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int h(x, y)\, dy \right) dx = \int \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx \right) dy$$

имеют смысл и оно верно.

□ Убедимся, что обе части этого равенства имеют смысл. Начнем с правой. По условию (2.3′) функция $h(\cdot, y)$ интегрируема по dx на каждом $[u, v] \subset \mathbb{R}$ $(-\infty < u \leq v < \infty)$ для почти каждого $y \in Y$. Рассмотрим функцию g со значениями $g(u, v, y) = \int\limits_u^v h(x, y)\, dx$ для таких $y \in Y$ и произвольными для остальных. Докажем, что $g(u, v, \cdot)$ интегрируема по dy. Заметим, что из условия (3.3′) вытекает непрерывность $h(\cdot, y)$ для почти всех $y \in Y$. В самом деле, если

$$\left| \frac{h(x, y) - h(u, y)}{x - u} \right| \leq \bar{g}(y)$$

при $x \neq u$, то $|h(x, y) - h(u, y)| \leq \bar{g}(u) \cdot |x - u|$. На отрезке $[u, v]$ непрерывная $h(\cdot, y)$ приближается ступенчатыми функциями:

$$h_n(\cdot, y) = \sum_k h(x_{kn}, y) A_{kn},$$
$$A_{kn} = [u + (k-1)(v-u)/n, u + k(v-u)/n],$$
$$x_{kn} = u + k(v-u)/n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда $g(u, v, \cdot) = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\sum\limits_k h(x_{kn}, \cdot) \cdot (v-u)/n \right]$. По условию (1.3′) функции $h(x_{kn}, \cdot)$ интегрируемы по dy и тем более измеримы. Вместе с ними измеримы суммы в квадратных скобках и их предел. В тоже время из условия (3.3′) вытекает, что

$$|g(u, v, y)| \leq \int_u^v |h(x, y)|\, dx \leq \bar{g}(y)$$

для почти всех значений интегрируемой $\bar{g}\colon Y \to \mathbb{R}$. Отсюда следует, что функция $g(u, v, \cdot)$ интегрируема по dy.

Рассмотрим функцию ψ со значениями

$$\psi(u, x) = \int g(u, x, y)\, dy \quad (x \in [u, v]).$$

Докажем, что $\psi(u,\cdot)$ дифференцируема и вычислим ее производную. Убедимся в том, что для функции $g(u,x,\cdot)$ выполнены условия теоремы $2'$. В самом деле, $g(u,x,\cdot)$ интегрируема по dy для каждого $x\in[u,v]$, $g(u,\cdot,y)$ дифференцируема для каждого $y\in Y$, для которого $h(\cdot,y)$ непрерывна:

$$\mathscr{D}g(u,\cdot,y)=h(\cdot,y),\quad |\mathscr{D}g(u,\cdot,y)|=|h(\cdot,y)|\le \bar h(y)$$

для почти всех значений интегрируемой $\bar h=|h(\cdot,y)|+g\cdot(v-u)$. Это следует из условий $(1.3')$ и $(3.3')$ благодаря неравенствам

$$\begin{aligned}|h(x,y)|-|h(u,y)|\le |h(x,y)-h(u,y)|&\\ \le \bar g(y)\cdot|x-u|\le \bar g(y)\cdot(v-u),&\end{aligned}$$

$$|h(x,y)|\le |h(u,y)|+\bar g(y)\cdot(v-u).$$

По теореме $2'$ функция $\psi(u,\cdot)$ дифференцируема и ее производная в точке $x\in[u,v]$ выражается равенствами

$$\mathscr{D}\psi(u,x)=\mathscr{D}\int g(u,x,y)\,dy=\int \mathscr{D}g(u,x,y)\,dy=\int h(x,y)\,dy.$$

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{u\to-\infty,\\ v\to\infty}}\psi(u,v)=\int\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\,dx\right)dy.$ Для функции g выполнены условия теоремы 1. В самом деле,

$g(u,v,\cdot)$ измерима по dy для каждых $u\le v$;

$g(u,v,y)$ сходится при $u\to-\infty$, $v\to\infty$ к несобственному интегралу функции $h(\cdot,y)$для почти каждого $y\in Y$ по условию $(2.3')$;

$|g(\cdot,\cdot,y)|\le \bar g(y)$ для почти всех значений интегрируемой $\bar g\colon Y\to\mathbb{R}$.

По теореме 1

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u\to-\infty,\\ v\to\infty}}\psi(u,v)&=\lim_{\substack{u\to-\infty,\\ v\to\infty}}\int\left(\int\limits_u^v h(x,y)\,dx\right)dy\\ &=\int\left(\lim_{\substack{u\to-\infty,\\ v\to\infty}}\int\limits_u^v h(x,y)\,dx\right)dy=\int\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\,dx\right)dy.\end{aligned}$$

Таким образом, правая часть равенства теоремы $3'$ имеет смысл.

Перейдем к левой. По условию $(1.3')$ определена функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями $f(x) = \int h(x,y)\,dy$. Из условия $(3.3')$ вытекает, что функция f непрерывна:

$$|f(x) - f(u)| \leq \int |h(x,y) - h(u,y)|\,dy \leq |x-u| \int \bar{g}(y)\,dy \leq c|x-u|$$

$(c = \int \bar{g}(y)\,dy < \infty)$. Рассмотрим функцию φ со значениями

$$\varphi(u,v) = \int\limits_u^v f(x)\,dx \quad (u \leq v).$$

Так как f непрерывна, то $\varphi(u,\cdot)$ дифференцируема и ее производная в точке $x \in [u,v]$ выражается равенствами

$$\mathscr{D}\varphi(u,x) = f(x) = \int h(x,y)\,dy.$$

Заметим, что $\mathscr{D}\varphi(u,x) = \mathscr{D}\psi(u,x)$ $(x \in [u,v])$ и, следовательно, $\varphi(u,x) - \psi(u,x) = c$ $(x \in [u,v])$. Так как $\varphi(u,u) = \psi(u,u) = 0$, то $c = 0$. Значит, $\varphi(u,x) = \psi(u,x)$ $(u \leq v)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int h(x,y)\,dy\right) dx &= \lim_{\substack{u \to -\infty,\\ v \to \infty}} \varphi(u,v) \\ &= \lim_{\substack{u \to -\infty,\\ v \to \infty}} \psi(u,v) = \int \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\right) dy.\end{aligned}$$

Таким образом, левая часть равенства теоремы $3'$ тоже имеет смысл и совпадает с правой. Теорема $3'$ доказана. ■

Теоремы 1–3 и $2'$, $3'$ выражают правила действий под знаком интеграла. Они часто и эффективно применяются.

3.3.6. Неопределенные интегралы

Так называются меры, значения которых равны интегралам.

1. Теорема Радона — Никодима. Рассмотрим множество U, алгебру $\mathscr{A}$ частей U и меру μ на $\mathscr{A}$, алгебру $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}$ частей U и меру ν на $\mathscr{B}$. Как обычно, будем считать, что рассматриваемые меры положительны, счетно аддитивны и локально ограничены, а иногда и полные.

Условимся говорить, что *мера ν непрерывна по мере μ*, и писать $\nu \ll \mu$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\nu(A) \le \varepsilon$ при каждом $A \in \mathscr{A}$, для которого $\mu(A) \le \delta$.

Обозначим $\bar{\mathscr{A}}$ и $\bar{\mathscr{B}}$ алгебры множеств, интегрируемых по мерам μ и ν, а $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ — интегральные продолжения этих мер. Предположим, что $\bar{\mathscr{B}} \supseteq \bar{\mathscr{A}}$. Можно доказать [82, гл. 8, п. 8.2], что непрерывность ν по μ эквивалентна непрерывности $\bar{\nu}$ по $\bar{\mu}$. А непрерывность $\bar{\nu}$ по $\bar{\mu}$ равносильна условию, что $\bar{\nu}(A) = 0$ при каждом $A \in \bar{\mathscr{A}}$, для которого $\bar{\mu}(A) = 0$. Условимся дальше рассматривать интегральные продолжения, но не писать черточки в обозначениях алгебр и мер.

Рассмотрим измеримую по мере μ функцию f. Если для каждого множества $A \in \mathscr{A}$ функция Af интегрируема по мере μ и

$$\nu(A) = \int Af\, d\mu = \int_A f\, d\mu,$$

то мера ν называется *неопределенным интегралом* функции f по мере μ, а функция f называется *производной меры ν по мере μ* и обозначается $d\nu/d\mu$. Пишут еще $d\nu = f d\mu$.

Производные меры ν по мере μ составляют класс эквивалентных по μ функций. Так как меры μ и ν положительны, то $d\nu/d\mu = f \ge 0$ почти всюду по мере μ. Рассматривая линейные комбинации мер и линейные комбинации их производных, можно обобщить сказанное на числовые функции множеств [108, § 30].

Функцию f, для которой Af интегрируема по μ при каждом $A \in \mathscr{A}$, условимся называть *локально интегрируемой* по μ. Благодаря предполагаемой локальной ограниченности меры μ из локальной интегрируемости функции f следует ее измеримость по μ.

Используя локальную интегрируемость производной и теорему Лебега, легко убедиться в том, что неопределенные интегралы по мере μ непрерывны по ней [82, гл. 8, п.8.2.2]. Верно и более глубокое обратное утверждение: если мера ν непрерывна по мере μ, то ν является неопределенным интегралом по μ.

Теорема Радона — Никодима. *Мера ν является неопределенным интегралом некоторой локально интегрируемой по мере μ функции ессли ν непрерывна по μ.*

Теорему Радона — Никодима можно вывести из теоремы Рисса о представлении линейных функционалов на гильбертовом пространстве [82, гл. 8, п. 8.4]. Из теоремы Радона — Никодима вытекает много полезных следствий [82, гл. 8, п. 8.5].

2. Теорема о замене. Замена переменных в интегралах — один из самых эффективных приемов их вычисления.

Теорема. *Пусть f измерима по μ и интегрируема по ν, а ν непрерывна по μ. Тогда произведение $f(d\nu/d\mu)$ интегрируемо по μ и*

$$\int f(d\nu/d\mu)\, d\mu = \int f\, d\nu. \tag{1}$$

□ По условию интеграл справа существует, а существование интеграла слева нужно доказать. Существование производной $d\nu/d\mu$ следует из теоремы Радона — Никодима.

Среди эквивалентных по μ производных ν по μ выберем производную $d\nu/d\mu = g$, все значения которой положительны. Интегрируемость произведения fg и равенство для интегралов докажем сначала для множеств, потом для простых функций, затем для положительных интегрируемых и, наконец, для вещественных интегрируемых, для числовых интегрируемых.

1. Пусть $f = X \in \mathscr{A}$. Тогда из теоремы Радона — Никодима следуют интегрируемость $fg = Xg$ и равенства

$$\int f\, d\nu = \int X\, d\nu = \nu(X) = \int Xg\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

2. Пусть $f = \sum c_i X_i$ ($c_i \in \mathbb{R}$, $X_i \in \mathscr{A}$). Тогда из доказанного в 1 следует, что fg интегрируема и

$$\int f\, d\nu = \sum c_i \int X_i\, d\nu = \sum c_i \int X_i g\, d\nu = \int fg\, d\mu.$$

3. Пусть $f \geq 0$ измерима по μ и интегрируема по ν. Тогда вследствие измеримости по μ и положительности f существует возрастающая последовательность простых функций

$$f_n = \sum c_{in} X_{in} \quad (c_{in} \in \mathbb{R},\ X_{in} \in \mathscr{A}),$$

сходящаяся к f почти всюду по μ. Так как $g \geq 0$, то $f_n \uparrow f$ влечет $f_n g \uparrow fg(\mu)$. Из доказанного в 2 и предполагаемой интегрируемости f по ν следует, что $f_n g$ интегрируемы по μ и

$$\int f_n g\, d\mu = \int f_n\, d\nu \leq \int f\, d\nu < \infty.$$

(А так как по условию $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, то f_n интегрируемы по ν.)

Применяя теорему Леви к последовательностям f_n и $f_n g$, выводим из сказанного, что функция fg интегрируема по μ и

$$\int f\, d\nu = \lim \int f_n\, d\nu = \lim \int f_n g\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

4. Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ измерима по μ и интегрируема по ν. Тогда ее положительные компоненты f^+, f^- тоже измеримы по μ и интегрируемы по ν. По доказанному в 3 для них теорема верна. Следовательно, f^+g, f^-g, $fg = (f^+ - f^-)g = f^+g - f^-g$ интегрируемы по μ и $\int f\, d\nu = \int f^+\, d\nu - \int f^-\, d\nu = \int f^+g\, d\mu - \int f^-g\, d\mu = \int (f^+ - f^-)\, d\nu = \int fg\, d\mu$.

5. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ измерима по μ и интегрируема по ν. Тогда ее вещественная и мнимая части тоже измеримы по μ и интегрируемы по ν. По доказанному в 4 для них теорема верна. Значит, она верна для f. Теорема доказана. ■

Замечание. В этом разделе существенно используется сделанное в самом начале предположение об интегральной продолжаемости рассматриваемых мер. Без этого предположения неверно, в частности, утверждение о существовании возрастающей последовательности простых функций в 3 доказательства теоремы о замене.

3. Рассмотрим открытые множества X и Y в $\mathbb{R}^m$, алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, порожденные ограниченными открытыми множествами в X и Y, лебеговы меры $\lambda = dx$ и $\mu = dy$ на $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, гладкий гомеоморфизм T множества X на множество Y, производную T' и абсолютную величину $|\det T'|$ ее определителя, интегрируемую по dy числовую функцию g на Y и композицию $f = gT$ на X.

Так как T — гомеоморфизм X на Y, то он вместе с мерой μ на $\mathscr{B}$ определяет меру $\nu = \mu T$ на $\mathscr{A}$ со значениями $\nu(A) = \mu(T(A))$ $(A \in \mathscr{A})$. Мера $\nu = \mu T$ непрерывна по мере μ и [82, гл. 9, п. 9.3]

$$d\mu T/d\lambda = |\det T'|. \tag{2}$$

Кроме того, композиция $f = gT$ интегрируема по мере $\nu = \mu T$ и

$$\int_Y g\,d\nu = \int_X gT\,d\mu T. \tag{3}$$

Это равенство эквивалентно $\nu(B) = \mu(B)$ при $g = B \in \mathscr{B}$. А для функций оно доказывается последовательно, как равенство (1) теоремы о замене в п. 2. Из равенств (1)–(3) следует, что

$$\int_Y g\,d\nu = \int_X gT\,d\mu T = \int_X gT(d\mu T/d\lambda)\,d\lambda = \int_X gT|\det T'|\,d\lambda.$$

Переписывая равенство для первого и последнего интегралов в классических обозначениях, получаем формулу замены переменных в кратных интегралах [82, гл. 9, п. 9.3.4]

$$\int_Y g(y)\,dy = \int_X gT(x)\cdot|\det T'(x)|\cdot dx. \tag{4}$$

Здесь производная $T'(x)$ отображения T в точке $x \in X$ выражается матрицей размера $m \times m$, составленной из частных производных. В равенстве (4) не требуется, чтобы $\det T'(x) \neq 0$.

Равенство (3) является частным случаем общей формулы измеримой замены переменных в интеграле. Рассмотрим: абстрактные множества X и Y, алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ множеств в X и множеств в Y, меру λ на $\mathscr{A}$, отображение $T\colon X \to Y$, для которого $T^{-1}(B) = A \in \mathscr{A}$ при каждом $B \in \mathscr{B}$, меру $\mu = \lambda T^{-1}$ на $\mathscr{B}$ со значениями

$$\mu(B) = \lambda(T^{-1}(B)) \quad (B \in \mathscr{B}),$$

интегрируемую по μ числовую функцию g на Y и композицию $f = gT$ на X.

Рассуждая, как при доказательстве теоремы п. 2 и объяснении равенства (3), легко проверить, что

$$\int_B g\,d\mu = \int_A f\,d\lambda \quad (f = gT,\ A = T^{-1}(B),\ \mu = \lambda T^{-1}) \tag{5}$$

для каждого $B \in \mathscr{B}$. Равенство (3) получается из равенства (5) при $\lambda = \mu T$ с использованием локальной ограниченности мер λ и μ.

Равенство (5) позволяет сводить вычисление интегралов по кривым и поверхностям к вычислению интегралов по областям в конечномерных пространствах, когда T описывает параметризацию кривой или поверхности.

Замечание. Как правило, рассматривались счетно аддитивные, локально ограниченные и полные меры. Но часть сказанного верна и в более общих случаях.

В [63] по аналогии с классической описывается теория интеграла для мер со значениями в упорядоченных метрических полукольцах идемпотентов. Доказываются теоремы о продолжении меры. Определяются простые функции и интегральные суммы, измеримые функции и их интегралы. Как и в классическом случае, интеграл измеримой функции равен пределу последовательности интегральных сумм для приближающих простых функций. Но соответствующие определения и рассуждения сложнее. Доказываются аналоги некоторых предельных теорем, теорема об интегральном представлении функционалов и с ее помощью определяется аналог преобразования Фурье. Интегрируются функции со значениями в рассматриваемом полукольце.

В связи с задачами анализа образов и интегральной геометрией в главе 9 книги [64] описывается теория интегрирования по мерам, значениями которых служат выпуклые компакты в $\mathbb{R}^m$.

Глава 10 книги [82] посвящена приложениям интегрального исчисления в теории вероятностей. Там подробно описываются свойства условных средних, определяемых с помощью теоремы Радона — Никодима как проекторы специального вида.

Меры на специальных алгебрах множеств в топологических векторных пространствах и интегралы по таким мерам подробно описываются в [27]. Отдельные главы книги посвящены эволюционным уравнениям, континуальным и стохастическим интегралам. Формулируются условия корректности решения задачи Коши (гл. 5, § 1).

В [62] главы 6–9 посвящены континуальным интегральным уравнениям, комплексным марковским цепям и комплексным мерам в интеграле Феймана. В главе 7 описывается вероятностная модель приближения ломаными траекторий интеграла Феймана.

В [98] подробно излагается теория континуальных интегралов по скалярным мерам на специальных алгебрах множеств в векторных пространствах. Главное внимание уделяется интегралам Феймана и решениям уравнения Шрёдингера.

3.4. Анализ на многообразиях

Понятие многообразия обобщает понятия кривой и поверхности. Оно является основным понятием анализа. Многообразиям посвящена обширная литература. Геометрия поверхностей и многообразий подробно описывается в книге [29]. Здесь дается краткий обзор определений и теорем, связанных с дифференциальным и интегральным исчислениями для многообразий.

3.4.1. Многообразия

В этом пункте описываются топологические и гладкие многообразия.

1. Рассмотрим топологические пространства M и N, точки $p \in M$ и $q \in N$, их (открытые связные) окрестности $U \subseteq M$ и $V \subseteq N$. Если для каждой точки $p \in M$ существует окрестность $U \subseteq M$, гомеоморфная некоторой окрестности $V \subseteq N$ некоторой точки $q \in N$, скажем, что пространство M *локально гомеоморфно* пространству N.

Примеры. 1) Окружность $C(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ локально гомеоморфна отрезку $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$. 2) Открытый круг $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ локально гомеоморфен плоскости $\mathbb{R}^2$. 3) Замкнутый круг $\bar{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ локально гомеоморфен нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Упражнение. Проверить гомеоморфность этих локально гомеоморфных пространств с индуцированными стандартными топологиями.

Локальные гомеоморфизмы окрестностей точек $p \in M$ называются *локальными картами* M или, коротко, просто *картами* в N. Семейства карт, области определения которых покрывают M, называются *атласами* M в N. Области определения карт называются *координатными окрестностями.* Обратные карты называются *параметризациями.*

Топологическое пространство M, локально гомеоморфное стандартному пространству $N = \mathbb{R}^n$, называется *n-мерным топологическим многообразием.* Часто дополнительно предполагается отделимость и существование счетной базы для M.

Примеры. 1) Окружность $C(0,1)$ есть 1-мерное топологическое многообразие. 2) Открытый круг $B(0,1)$ есть 2-мерное топологическое многообразие.

Топологическое пространство M, локально гомеоморфное подпространству $N = \overline{\mathbb{R}}^n_- = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_n \leq 0\}$ стандартного пространства $\mathbb{R}^n$, называется *n-мерным многообразием с краем.* Топологические многообразия с краем или без края (с пустым краем) называются *многообразиями.* По тексту обычно ясно, что имеется в виду. Точки, образы локальных карт которых содержатся в $\partial\overline{\mathbb{R}}^n_- = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_n = 0\}$, составляют *край многообразия.* А точки, образы локальных карт которых содержатся в $\mathbb{R}^n_- = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_n < 0\}$, составляют *внутренность многообразия.* Край является $(n-1)$-мерным многообразием, а внутренность — n-мерным.

Замечание. Определение размерности основывается на следующих фактах [73, лекция 8]. (1) Если $m \neq n$, то открытое множество $U \neq O$ в $\mathbb{R}^m_-$ не гомеоморфно никакому открытому множеству $V \neq O$ в $\mathbb{R}^n_-$. (2) Если U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n_-$ и $h\colon U \to V$ — накрывающий гомеоморфизм, то $h(U \cap \mathbb{R}^{n-1}) = V \cap \mathbb{R}^{n-1}$. (3) Гомеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

Пример. Замкнутый круг $\bar{B}(0,1)$ есть 2-мерное многообразие с краем $C(0,1)$ и внутренностью $B(0,1)$.

Упражнение. Доказать, что внутренность и край многообразия не пересекаются.

Замечание. Взяв вместо $\overline{\mathbb{R}}^n$ подпространства $\{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_{n-m+1} \leq 0, \ldots, x_n \leq 0\}$ $(1 \leq m \leq n)$, можно определить многообразия с угловыми точками различных типов [120]. При $m = 1$ получаются многообразия с краем.

2. Рассмотрим n-мерное многообразие X с атласом $\mathscr{A}$ и произвольные карты $\alpha\colon U \to E$, $\beta\colon V \to F$ из $\mathscr{A}$ ($U, V \subseteq X$; $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$; $\alpha(U) = E$, $\beta(V) = F$). Композиция $\beta\alpha^{-1}\colon E \to F$, действующая из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, называется *переходом* от α к β. Если функция $\beta\alpha^{-1}$ гладкая (k раз непрерывно дифференцируема), то говорят, что карты α и β *гладко согласованы.* Функция $\beta\alpha^{-1}$ может быть также бесконечно дифференцируемой или аналитической. Если области определения карт α и β не пересекаются ($U \cap V = O$), то эти карты тоже считаются гладко согласованными (пустое отображение считается гладким). Атлас, каждые две карты которого гладко согласованы, называется *гладким атласом.* А n-мерное многообразие с гладким атласом называется *гладким n-мерным многообразием.* Выделяются *бесконечно гладкие* и *аналитические* атласы и многообразия.

Примеры. Все многообразия в примерах п. 1 гладкие.

Упражнение. Доказать это.

Гладкий атлас можно *пополнить,* добавив все карты, гладко согласованные с каждой картой рассматриваемого атласа. (По транзитивности добавленные карты будут согласованы друг с другом.) Полученный таким образом атлас называется *полным.* Если каждые две карты из данных атласов гладко согласованы, то эти атласы называются *эквивалентными.* Каждый атлас эквивалентен содержащему его полному атласу.

3. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие X с атласом $\mathscr{A}$, p-мерное гладкое многообразие Y с атласом $\mathscr{B}$ и непрерывное отображение $f\colon X \to Y$. Композиция $f_{\alpha\beta} = \beta f \alpha^{-1}$, действующая из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, называется *изображением* f на $\alpha \in \mathscr{A}$, $\beta \in \mathscr{B}$. Отображение f называется *гладким,* если все его изображения $f_{\alpha\beta}$ гладкие. Взаимно однозначное и взаимно гладкое отображение X на Y называется *изоморфизмом многообразий* X, Y. Гладкие многообразия, для которых такой изоморфизм существует, называются *изоморфными.*

Упражнение. Доказать, что изоморфные гладкие многообразия имеют равные размерности.

Многообразие $(X, \mathscr{A})$ называется *подмногообразием* многообразия $(Y, \mathscr{B})$, если $X \subseteq Y$ и каждая карта $\alpha \in \mathscr{A}$ является сужением некоторой карты $\beta \in \mathscr{B}$.

Пример. Край и внутренность n-мерного многообразия являются его подмногообразиями с размерностями $n - 1$ и n.

Изоморфные образы подмногообразий иногда отождествляются с ними, вкладываясь в соответствующие многообразия.

Замечание. Данные общие определения помогают лучше понять суть дела. В анализе, как правило, рассматриваются многообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$. Теорема Уитни о вложении [73, лекция 14] позволяет каждое отделимое гладкое многообразие со счетной базой отождествить с некоторым таким многообразием.

4. Рассмотрим гладкое многообразие X с атласом $\mathscr{A}$. Назовем *положительно согласованными* карты $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$, для которых

$$\det(D(\beta\alpha^{-1})u) > 0 \quad (u \in \mathrm{Dom}(\beta\alpha^{-1})).$$

В частности, α и β положительно согласованы, если $\mathrm{Dom}(\beta\alpha^{-1}) = O$. Атлас, каждые две карты которого положительно согласованы, называется *ориентируемым.* Многообразие, для которого существует ориентируемый атлас, тоже называется *ориентируемым.* Ориентация гладкого многообразия X с атласом $\mathscr{A}$ определяется функцией $s\colon \mathscr{A} \to \{-1, 1\}$ такой, что $s(\alpha) \cdot s(\beta) = 1$ при $\mathrm{Dom}(\beta\alpha^{-1}) \neq O$. Каждой карте $\alpha \in \mathscr{A}$ приписывается знак $s(\alpha) \in \{-1, 1\}$ так, что карты с пересекающимися областями определения имеют одинаковые знаки. При определении ориентации удобно рассматривать карты, определенные на открытых связных множествах.

Упражнение. Доказать, что для гладкого связного ориентируемого многообразия существует ровно две ориентации [30, гл. 1, § 4].

Ясно, что ориентации для различных связных компонент ориентируемого многообразия можно выбирать независимо.

Говорят, что *ориентируемые* атласы $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ для гладкого многообразия X *ориентируемы одинаково,* если их объединение $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ является ориентируемым атласом для X. В этом случае ориентации $s_1\colon \mathscr{A}_1 \to \{-1, 1\}$, $s_2\colon \mathscr{A}_2 \to \{-1, 1\}$ можно определить как сужение ориентации $s\colon \mathscr{A} \to \{-1, 1\}$.

Пример 1. Рассмотрим окружность $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Она покрывается дугами A_-, A_+, B_-, B_+, определяемыми соответственно условиями $x < 0$, $x > 0$, $y < 0$, $y > 0$. Ее атлас $\mathscr{A}$ составляют определенные на этих дугах карты α_-, α_+, β_-, β_+ со значениями $\alpha_-(x, y) = -y$, $\alpha_+(x, y) = y$, $\beta_-(x, y) = -x$, $\beta_+(x, y) = x$ в $]-1, 1[$. Атлас $\mathscr{A}$ ориентируем. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить положительность производных композиций $\beta_-\alpha_-^{-1}$, $\beta_-\alpha_+^{-1}$, $\beta_+\alpha_-^{-1}$, $\beta_+\alpha_+^{-1}$ в их областях определения $]0, 1[$, $]-1, 0[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$. Имеем $\beta_-\alpha_-^{-1}(u) = \beta_+\alpha_-^{-1}(u) =$

$-\sqrt{1-u^2}$ $(0 < u < 1)$, $\beta_-\alpha_+^{-1}(u) = \beta_+\alpha_-^{-1}(u) = \sqrt{1-u^2}$ $(-1 < u < 0)$. Соответствующие производные $2|u|(1-u^2)^{-1/2} > 0$. Для окружности S существуют две ориентации: одна из них определяется равенствами $s(\alpha) = +1$ $(\alpha \in \mathscr{A})$, другая — равенствами $s(\alpha) = -1$ $(\alpha \in \mathscr{A})$.

Упражнение. Определить ориентации сферы $S^n = \{x : \|x\|^2 = 1\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. [73, лекция 6; 36, гл. 3, п. 4.12; 29, часть 2, § 2]).

Пример 2. Классическим примером неориентируемого многообразия служит *лист Мёбиуса,* определяемый как фактор-пространство, получаемое из полосы $\mathbb{R} \times [0,1]$ в $\mathbb{R}^2$ отождествлением точек (x, y) и $(x+1, 1-y)$. Он подробно описан в [24, гл. 2, п. 1.6; гл. 3, пп. 1.5 и 1.9], в [29, часть 2, § 16] и в [121, гл. 6, § 5].

Замечание. В [30, гл. 1, § 4] описана связь ориентаций многообразия с графами, вершины которых соответствуют картам, а ребра — пересечениям их областей. Ребрам приписываются значения -1 или $+1$. Определяются пути, циклы и их значения. Ориентируемость многообразия эквивалентна отсутствию циклов со значением -1. Граф для сферы S^n имеет особенно простой вид.

3.4.2. Теорема о ранге

Эта теорема обобщает теорему о приведении матрицы линейного отображения к стандартному диагональному виду.

1. Рассмотрим: гладкие n-мерное многообразие X с атласом $\mathscr{A}$ и p-мерное многообразие Y с атласом $\mathscr{B}$, гладкое отображение $f\colon X \to Y$, точку $x \in X$, ее образ $y = f(x) \in Y$, карты $\alpha \in \mathscr{A}$ и $\beta \in \mathscr{B}$ окрестностей x и y, изображение $f_{\alpha\beta} = \beta f \alpha^{-1}$ отображения f на этих картах и его дифференциал $df_{\alpha\beta}(\alpha(x))$ в точке $\alpha(x) \in \mathbb{R}^n$. Из определений и правила дифференцирования сложных функций следует, что ранг линейного отображения $df_{\alpha\beta}(\alpha(x))$ не зависит от выбора карт α, β. Он называется *рангом отображения* f в точке x. Это определение хорошо согласуется с представлением о гладком отображении как *приближенно локально линейном.* Если отображение f имеет во всех точках x один и тот же ранг, то он называется *рангом отображения* f.

Пример. $X = B(0,1) \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \{\mathrm{id} : X \to \mathbb{R}^2\}$, $\mathscr{B} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $f(x) = (1 - \|x\|^2)^{1/2}$, $f'(x) = x/f(x)$ $(x = (x_1, x_2) \in X)$. Ранг f равен 1. Функция f во всех точках имеет максимальный ранг.

2. Обозначим через P_q проектор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ со значениями

$$P_q(x) = (x_1, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p \quad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n),$$

предполагая, что $1 \le q \le n \wedge p$. Добавим нулевой проектор P_0 со значениями $P_0(x) = 0 \in \mathbb{R}^p$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ и положим $P = P_q$.

Пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$ можно рассматривать как гладкие многообразия с атласами $\mathscr{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$, $\mathscr{B} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p\}$. Открытые множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ с индуцированными топологиями и атласами являются подмногообразиями многообразий X, Y. Гладкими являются непрерывно дифференцируемые отображения $f\colon U \to V$. Ранг f в точке u равен рангу линейного отображения $dfu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ или рангу его матрицы $f'(u)$ в стандартных базах. Будем говорить, что отображение $f\colon U \to V$ *локально эквивалентно* проектору P, если для каждой точки $u \in U$ существуют ее открытая окрестность $A \subseteq U$, окрестность $B \subseteq V$ множества $f(A)$, диффеоморфизмы $\alpha\colon A \to X$ и $\beta\colon B \to Y$ такие, что $\beta f \alpha^{-1}(x) = P(x)$ для всех $x \in \alpha(A)$. Условия $A \subseteq U$ и $f(A) \subseteq B$ определяют композицию $\beta f \alpha^{-1}$ на всем множестве $\alpha(A) \subseteq X$.

Данное определение эквивалентности позволяет сформулировать теорему о ранге для гладких отображений так же, как и для линейных.

Теорема. *Гладкое отображение f ранга q локально эквивалентно проектору P_q.*

Доказательство есть в [36, часть 2, гл. 3, § 4].

Упражнение. Вычислить ранг гладкого отображения f, локально эквивалентного проектору P_q, используя правила дифференцирования.

Такая же теорема верна для гладких отображений $g\colon X \to Y$ гладкого n-мерного многообразия X в гладкое p-мерное многообразия Y. В этом случае при определении локальной эквивалентности g и P нужно вместо диффеоморфизмов использовать гомеоморфизмы. Общий случай сводится к рассматривавшемуся частному случаю $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$ с помощью изображения g на картах $k\colon X \to U$, $l\colon Y \to V$ для открытых $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^p$. По сформулированной теореме f локально эквивалентно P_q, если ранг f равен q: $f \sim P_q$, если $\operatorname{rank} f = q$. А ранг g по определению равен рангу f. Корректность такого определения следует из его независимости от выбора карт k, l.

Упражнение. Проверить эту независимость, используя правило дифференцирования сложных функций.

Локальная эквивалентность отображений $g \sim P_q$ означает, что $(\beta l)g(\alpha k)^{-1}(x) = P_q(x)$ для соответствующих гомеоморфизмов k, l и диффеоморфизмов α, β.

Замечание. Сохраняющие ранг замены переменных позволяют упрощать системы уравнений, описывающие подмногообразия гладкого многообразия [24, гл. 3, § 5] и [73, лекция 13].

3.4.3. Теорема Сарда

Эта теорема имеет самые неожиданные применения.

1. Рассмотрим гладкие n-мерное многообразие X, p-мерное многообразие Y и отображение $g\colon X \to Y$. Точки $x \in X$, в которых g имеет максимальный ранг $n \wedge p$, называются *регулярными*, а остальные — *сингулярными* для g. Соответственно называются значения g в этих точках. Пусть S — множество всех сингулярных точек для g и $T = g(S)$. Будем говорить, что множество $T \subseteq Y$ *имеет меру нуль,* если T покрывается областями определения счетного семейства карт $l\colon V \to \mathbb{R}^p$ с образами $l(T \cap V)$, имеющими лебегову меру нуль в $\mathbb{R}^p$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ и $g(x) = x_1^2 + x_2^2$ $(x = (x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2)$. Тогда $S = \{(0,0)\}$ и $T = \{0\}$ имеет меру нуль.

Теорема Сарда. *Множество сингулярных значений гладкого отображения имеет меру нуль.*

Подробное доказательство есть в [102, гл. 2, § 3]. Выделяется сравнительно простой случай $n = p$.

2. Теорема Сарда верна, в частности, для гладких отображений $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ открытых множеств $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Множество лебеговой меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^p$ не имеет непустых открытых частей и его дополнение всюду плотно в $\mathbb{R}^p$. Использование карт позволяет перенести это утверждение на многообразия.

Из теоремы Сарда вытекает

Следствие. *Множество регулярных значений гладкого отображения всюду плотно.*

В [120, гл. 1] из теоремы Сарда выводится теорема Брауэра о неподвижной точке. В [73, лекция 15] доказательство теоремы Сарда связывается с доказательством теоремы Уитни о вложении гладкого n-мерного многообразия в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.

3. Рассмотрим открытое множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$, гладкое взаимно однозначное отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ и интегрируемую по

Риману функцию $f\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ [100, гл. 3]. В классической формулировке теоремы о замене переменной в интеграле для выполнения равенства

$$\int\limits_{\varphi(U)} f = \int\limits_{U} (f \circ \varphi) |\det \varphi'|$$

требуется, чтобы $\det \varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in U$. Теорема Сарда позволяет не требовать этого. В самом деле, равенство $\det \varphi'(x)=0$ означает, что точка x является сингулярной для отображения φ. Пусть $U = R \cup S$, где R и S обозначают множества регулярных и сингулярных точек φ. Тогда $\varphi(U) = \varphi(R) \cup \varphi(S)$ и по теореме Сарда $\varphi(S)$ имеет меру нуль. Следовательно, интеграл функции f на множестве $\varphi(U)$ равен интегралу f на $\varphi(R)$, а по определению, $\det \varphi'(x) \neq 0$ при $x \in R$. Ясно, что интеграл на U в правой части формулы замены переменной равен интегралу по R. Значит, если эта формула верна для $U = R$ с требованием $\det \varphi'(x) \neq 0$, то она верна и без него.

3.4.4. Дифференциальные формы

Эти формы образуют внешнюю алгебру и подробно описаны во второй части книги [36, часть 2] и в [121, гл. 6].

1. Будем использовать определения и обозначения п. 2.3.2 и [36]. Рассмотрим открытое множество U в банаховом пространстве E и банахово пространство F. (Пространства предполагаются вещественными, хотя многое из сказанного верно и для комплексных.) Для них определено банахово пространство $\mathscr{A}_p = \mathscr{A}_p(E, F)$ антисимметричных непрерывных полилинейных отображений $E^p \to F$, которое является замкнутым подпространством банахова пространства всех непрерывных полилинейных отображений $E^p \to F$. Норма такого отображения f определяется равенством

$$\|f\| = \sup\{\|f(x_1, \dots, x_p)\| : \|x_1\| \le 1, \dots, \|x_p\| \le 1\}$$

[36, гл. 1, § 1]. Отображение $\omega\colon U \to \mathscr{A}_p$ называется *дифференциальной формой степени* p или, коротко, *p-формой.* В частности, 0-формами являются функции $U \to F$, а 1-формами — отображения $U \to \mathscr{L}(E, F)$: по определению, $\mathscr{A}_0 = F$ и $\mathscr{A}_1 = \mathscr{L}(E, F)$. Если $p > 0$, то p-форма называется *невырожденной.*

Обозначим $\Omega_p^n = \Omega_p^n(U, F)$ множество всех n раз непрерывно дифференцируемых p-форм. Будем называть их *n-гладкими* или, коротко, *гладкими.* Нулевая гладкость означает непрерывность. Ясно, что n-гладкие p-формы образуют векторное пространство.

Пример. Пусть $f : U \to F$ есть n-гладкая 0-форма. Тогда ее дифференциал $df : U \to \mathscr{L}(E, F)$ является $(n-1)$-гладкой 1-формой.

2. Так как значениями дифференциальных форм служат антисимметричные полилинейные формы, то действия с этими формами переносятся на дифференциальные. В частности, определяется внешнее произведение дифференциальных форм.

Рассмотрим банаховы пространства E, F, G, H, произведение (непрерывное билинейное отображение) $F \times G \to H$ и дифференциальные формы $\xi \in \Omega_p^n(U, F)$, $\eta \in \Omega_q^n(U, G)$ на открытом множестве $U \subseteq E$. Внешним произведением форм ξ, η называется форма $\xi \wedge \eta \in \Omega_{p+q}^n(U, H)$ со значениями

$$(\xi \wedge \eta)(u) = \xi(u) \wedge \eta(u) \in \mathscr{A}_{p+q}(U, H).$$

Здесь $u \in U$, $\xi(u) \in F$, $\eta(u) \in G$, $\xi(u) \wedge \eta(u) \in A_{pq}(\xi(u) \cdot \eta(u))$ для $\xi(u) \cdot \eta(u) \in H$. *Альтернирование* произведения $f \cdot g$ отображений $f \in \mathscr{A}_p(E, F)$, $g \in \mathscr{A}_p(E, G)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} A_{pq}(f \cdot g)&(x_1, \ldots, x_{p+q}) \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma \cdot f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)} \cdot g(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}), \end{aligned}$$

где сумма берется по всем перестановкам σ номеров $1, \ldots, p+q$ таким, что $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$. Можно доказать [36, гл. 3, § 1], что *внешнее произведение*

$$f \wedge g = A_{pq}(f \cdot g) \in \mathscr{A}_{p+q}(E, H).$$

Примеры. 1) Пусть $p = q = 1$. Тогда $(f \wedge g)(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_2) \cdot g(x_1)$.

2) Пусть $p = 0$, $\xi = f$ и $\eta = \omega$. Тогда $\xi \wedge \eta = f \wedge \omega = f \cdot \omega$: внешнее умножение на 0-форму совпадает с обычным.

Внешнее умножение ассоциативно и антикоммутативно [36, гл. 3, § 1]:

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g.$$

При $f = \xi(u)$, $g = \eta(u)$ получаются соответствующие равенства для дифференциальных форм ξ, η.

3. Для гладких форм определяется операция внешнего дифференцирования. Рассмотрим n-гладкую p-форму $\omega \in \Omega_p^n(U,F)$ $(n \geq 1,\ p \geq 0)$. Ее обычный дифференциал в точке u есть линейное отображение $D\omega u \in \mathscr{L}(E, \mathscr{A}_p(E,F))$. А *внешний дифференциал* $d\omega \in \Omega_{p+1}^{n-1}(U,F)$ определяется равенством

$$d\omega u(x_0, x_1, \ldots, x_p) = \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i D\omega u(x_i)(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

и является $(n-1)$-гладкой $(p+1)$-формой [36, гл. 3, § 2]. Здесь $x_i \in E$ и $d\omega u \in \mathscr{A}_{p+1}(E,F)$. При соответствующем мультипликативном представлении внешний дифференциал получается альтернированием обычного: $d\omega u = A_{1p}(D\omega u)$.

Примеры. Если $p = 0$ и $\omega \colon U \to F$, то $d\omega = D\omega$. Если $p = 1$ и $\omega\colon U \to F$, то $d\omega u(x_0, x_1) = D\omega u(x_0) \cdot x_1 - D\omega u(x_1) \cdot x_0$ при мультипликативной записи.

Замечание. Пусть $\omega \in \Omega_1^n(U,F)$, $n \geq 1$. Второй пример показывает, что $d\omega = 0$ ессли билинейное отображение $b(x,y) = D\omega u(x) \cdot y$ симметрично при любом $u \in U$.

Правила внешнего дифференцирования произведений выражаются равенствами [36, гл. 3, § 2]:

$$d(f \cdot \omega) = (df) \wedge \omega + f \cdot d\omega, \quad d(\xi \wedge \eta) = (d\xi) \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge d\eta.$$

Здесь $f \in \Omega_0^1(U,\mathbb{R})$, $\omega \in \Omega_p^1(U,F)$ или $f \in \Omega_0^1(U,F)$, $\omega \in \Omega_p^1(U,\mathbb{R})$ в первом равенстве и $\xi \in \Omega_p^n(U,\mathbb{R})$, $\eta \in \Omega_q^n(U,F)$ — во втором $(n \geq 1)$.

3.4.5. Теорема Пуанкаре

Эта теорема позволяет описать решения уравнения $d\xi = \omega$ для гладких форм.

1. Второй дифференциал линейной функции равен нулю. Точно так же, благодаря полилинейности, второй внешний дифференциал гладкой формы равен нулю: $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ для

$\omega \in \Omega_p^n(U,F)$, $n \geq 0$. Это следует из симметричности второго дифференциала $d^2\omega$ и равенства $d^2\omega u(v_1,v_2)(x_1,\ldots,x_p) = D^2\omega u(v_1,v_2)(x_1,\ldots,x_p) - D^2\omega u(v_2,v_1)(x_1,\ldots,x_p)$ для всех $u \in U$ и $v_1, v_2, x_i \in E$.

Упражнение. Доказать это равенство [36, гл. 3, § 2].

Гладкая форма, внешний дифференциал которой равен нулю, называется *замкнутой.* Равенство $d(d\omega) = 0$ означает, что $d\omega$ есть замкнутая форма. Внешние дифференциалы называются *точными* формами. По сказанному, каждая точная форма замкнута. Без дополнительных предположений об области определения рассматриваемых форм обратное утверждение не верно. Классическим контрпримером служит форма $\omega = -x_2\big(x_1^2 + x_2^2\big)^{-2}dx_1 + x_1\big(x_1^2+x_2^2\big)^{-2}dx_2$ на области $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Упражнение. Доказать, что эта форма замкнута, но не точна. Выделить точные сужения [100, 4.10].

2. Открытое множество $U \subseteq E$ называется *звездной областью,* если существует точка $a \in U$, соединяющаяся с каждой точкой $u \in U$ отрезком $[a,u] = \{x = (1-t)a + tu : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq E$. Ясно, что каждая звездная область связна, а каждое открытое выпуклое множество есть звездная область. Говорят также, что область U *стягивается в точку* a или *гомотопна* a. Примером служит пятиконечная звезда без границы в плоскости $\mathbb{R}^2$.

Теорема Пуанкаре. *Каждая невырожденная замкнутая форма на звездной области точна.*

Доказательство сводится к решению уравнения $d\xi = \eta$ с замкнутой правой частью $\eta \in \Omega_p^n(U,F)$. Решение $\xi \in \Omega_{p-1}^{n+1}(U,F)$ для звездной $U \subseteq E$, стягивающейся в точку $a = 0$, выписывается в виде

$$\eta(u)(x_1,\ldots,x_{p-1}) = \int\limits_0^1 t^{p-1}\eta(tu)(x_1,\ldots,x_p)\,dt,$$

$u \in U$, $x_i \in E$, $1 \leq i \leq p$ [36, гл. 3, § 2].

Рассмотрим звездную область $U \in \mathbb{R}^m$ и гладкие формы $\omega \in \Omega_p^n(U,F)$, $\xi \in \Omega_{p-1}^{n+1}(U,F)$, $\eta \in \Omega_{p-1}^{n+1}(U,F)$, $\zeta \in \Omega_{p-2}^{n+2}(U,F)$ $(p \geq 2)$.

Следствие 1. *Если $d\xi = \omega$ и $d\eta = \omega$, то разность $\xi - \omega$ есть точная форма.*

$\square$ Так как $d(\xi - \omega) = d\xi - d\eta = 0$, то форма $\xi - \omega$ замкнута, а по теореме Пуанкаре она точна. $\blacksquare$

Следствие 2. *Пусть $d\xi = \omega$. Тогда $d\eta = \omega$ ессли $\eta = \xi + d\zeta$ для некоторой ζ.*

$\square$ Если $\eta = \xi + d\zeta$, то $d\eta = d\xi + d(d\zeta) = d\xi$. Обратно, если $d\xi = d\eta$, то $\eta = \xi + (\eta - \xi)$ и $d\zeta = \eta - \xi$ для некоторой ζ (следствие 1). $\blacksquare$

Замечание. Таким образом, решения уравнения $d\xi = \omega$ отличаются друг от друга на точные формы. Общее решение равно любому частному плюс произвольная точная форма.

В [121, гл. 6, § 8] выводится интегральное условие разрешимости $d\xi = \omega$ для непрерывных 1-форм ω и описывается связь теоремы Пуанкаре с теоремой де Рама об интегралах формы по гладким циклам.

3. Рассмотрим конечномерное пространство $E = \mathbb{R}^m$, сопряженное ему пространство E^* линейных функционалов и стандартные базы (e_i), $\left(e_i^*\right)$ для этих пространств. Внешние произведения $\wedge e_\mu^* = \wedge_i e_{\mu(i)}^*$ для $\mu = (\mu(i))$, $1 \leq i \leq p \leq m$, $1 \leq \mu(1) < \cdots < \mu(p) \leq m$, составляют базу $\mathscr{A}_p(E, F)$, поэтому каждая $f \in \mathscr{A}_p(E, F)$ имеет вид $f = \sum c_\mu(f) \wedge e_\mu^*$, где $c_\mu(f) \in F$ (п. 2.3.2). Отождествим координату e_i^* с переменной x_i. Вследствие непрерывности и линейности функции $x_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ она равна своему дифференциалу $dx_i u$ в любой точке $u \in U$. Поэтому $(\wedge dx_\mu)u = (\wedge_i dx_{\mu(i)})u = \wedge_i x_{\mu(i)}^* = \wedge_i x_\mu^*$, формы $\wedge dx_\mu = \wedge_i dx_{\mu(i)}$ базовые и каждая форма $\omega \in \Omega_p^n(U, F)$ имеет вид

$$\omega = \sum f_\mu \wedge dx_\mu,$$

где коэффициентами являются n-гладкие функции $f_\mu = f_{\mu(1)\ldots\mu(p)} \colon U \to F$. В частности, если $p = 1$ и $\omega = df$ для гладкой $f \colon U \to F$ на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^m$, то

$$df = \sum f_i' \cdot dx_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^3$ и $F = \mathbb{R}$. Рассмотрим гладкие функции $a, b, c \colon U \to \mathbb{R}$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^3$, базовые формы dx, dy, dz и форму $\xi = adx + bdy + cdz$. Ее внешний дифференциал

$$d\xi = (b_x' - a_y')dx \wedge dy + (c_y' - b_z')dy \wedge dz + (a_z' - c_x')dz \wedge dx.$$

Рассмотрим еще гладкие функции $f, g, h\colon U \to \mathbb{R}$ и дифференциальную форму $\eta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$. Ее внешний дифференциал

$$d\eta = (f'_x + g'_y + h'_z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Равенство $d\eta = 0$ эквивалентно $f'_x + g'_y + h'_z = 0$. Если U есть звездная область, то по теореме Пуанкаре равенство

$$\operatorname{div}(f, g, h) = f'_x + g'_y + h'_z = 0$$

влечет векторное равенство

$$\operatorname{rot}(a, b, c) = (c'_y - b'_z, a'_z - c'_x, b'_x - a'_y) = (f, g, h)$$

для некоторых a, b, c. Условие $d\eta = 0$ обеспечивает существование решения ξ уравнения $d\xi = \eta$.

Замечание. В рассматриваемом конечномерном случае внешний дифференциал d является единственным аддитивным отображением внешней алгебры n-гладких форм в алгебру $(n-1)$-гладких форм, для которого верны правила дифференцирования произведения и повторного дифференцирования, совпадающие на 0-формах с обычным дифференцированием D [102, гл. 3, § 1].

3.4.6. Замена переменных

Вследствие своей локальной приближенной линейности гладкая замена переменных описывает переход к новой системе локальных координат.

1. Рассмотрим банаховы пространства $X = E$ и F, Y, открытые множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ и гладкое отображение $\varphi\colon V \to U$, описывающее замену переменной $v \in V$ на $\varphi(v) = u \in U$. По определению, $D\varphi v(y) \in \mathscr{L}(Y, X)$, $D\varphi v \in X$ для каждых $v \in V$, $y \in Y$. Определим *сопряженное отображение* $\varphi^*\colon \Omega_p^n(U, F) \to \Omega_p^n(V, F)$ для φ равенством

$$\varphi^* \omega(v) \cdot (y_1, \dots, y_p) = \omega(\varphi(v)) \cdot (D\varphi v(y_1), \dots, D\varphi v(y_p)).$$

Здесь $v \in V$, $y_i \in Y$ $(1 \le i \le p)$, $\omega \in \Omega_p^n(U, F)$, $\varphi(v) = u \in U$, $\omega(u) \in \mathscr{A}_p(E, F)$, $D\varphi v(y_i) = x_i \in X$, $\varphi^*\omega(v) \in \mathscr{A}_p(Y, F)$, $\varphi^*\omega \in \Omega_p^n(V, F)$. Если $p = 0$, то, по определению, $\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi$ для гладких функций $\omega\colon U \to F$. Корректность данного определения и линейность отображения φ^* доказаны в [36, гл. 3, § 2].

2. Сопряженнее отображение φ^* обладает кроме линейности еще несколькими важными свойствами: оно мультипликативно, перестановочно с внешним дифференциалом и транзитивно. Эти свойства выражаются соответственно равенствами

$$\varphi^*(\xi \wedge \eta) = \varphi^*\xi \wedge \varphi^*\eta, \quad \varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega), \quad (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*.$$

Здесь формы ξ, η, $\xi \wedge \eta$, ω определены, как в 3.4.4. А $\psi\colon W \to V$ — гладкое отображение открытого множества W в банаховом пространстве Z. При $\omega = f\colon U \to F$ равенство для дифференциалов сразу следует из правила дифференцирования сложной функции. В общем случае предполагается, что отображение φ непрерывно дифференцируемо два раза.

Упражнение. 1) Доказать сформулированные свойства сопряженного отображения. 2) Проверить равенство для дифференциалов при непрерывно дифференцируемом отображении φ.

3. Пусть $E = \mathbb{R}^k$. Тогда каждая форма $\omega \in \Omega_p^n(U, F)$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^k$ определяется n-гладкими коэффициентами $f_\mu\colon U \to F$ при базовых формах $\wedge dx_\mu$ с возрастающими мультииндексами $\mu = \mu(1)\dots\mu(p)$ из номеров $1, \dots, k$ и имеет вид $\omega = \sum f_\mu \wedge dx_\mu$. В этом случае для сопряженного отображения φ^* и $\wedge d\varphi_\mu = \wedge_i d\varphi_{\mu(i)}$, $\varphi_{\mu(i)} = x_{\mu(i)} \circ \varphi$ верны равенства

$$\varphi^*\omega = \sum (f_\mu \circ \omega) \wedge d\varphi_\mu.$$

Если замена $\varphi\colon V \to U$ определена на открытом множестве V в пространстве $Y = \mathbb{R}^l$, то $d\varphi_{\mu(i)} = \sum (\varphi_{\mu(i)})'_j dy_j$, где y_j — базовые координаты для $\mathbb{R}^l$ $(1 \le j \le l)$. Подставив суммы для $d\varphi_{\mu(i)}$ в произведения $\wedge d\varphi_\mu$ и собрав коэффициенты, получим для него линейную комбинацию форм вида $\wedge d\varphi_\nu = \wedge_i d\varphi_{\nu(i)}$ с возрастающими мультииндексами $\nu = \nu(1)\dots\nu(p)$ из номеров $1, \dots, l$. Умножая ее члены на $f_\mu \circ \varphi$ и складывая по μ, найдем общее выражение для $\varphi^*\omega$.

Пример. Пусть $k = l = p$. Тогда гладкая p-форма на области $U \subseteq \mathbb{R}^p$ имеет вид $\omega = f dx$, где $f\colon U \to F$ — гладкая функция, а $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ — базовая форма. Гладкая замена $\varphi\colon V \to U$ со значениями $x = \varphi(y) \in U$ для $y \in V$ описывает переход от новых координат $y = (y_1, \dots, y_p)$ к старым $x = (x_1, \dots, x_p)$ в $X = Y = \mathbb{R}^p$. Ее дифференциал $D\varphi\colon V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ отождествляется с $p \times p$-матрицей $\varphi' = (\varphi'_{ij})$, составленной из производных

i-й координатной функции по j-й переменной. Определитель $J(\varphi) = \det \varphi'$ называется *якобианом.* Для сопряженной функции φ^* верно равенство

$$\varphi^*(f dx) = (f \circ \varphi) \cdot \det \varphi' \cdot dy,$$

где $dy = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_p$ — новая базовая форма.

Упражнение. Доказать равенство для φ^*.

3.4.7. Интеграл по многообразию

Общее определение интеграла по мере позволяет рассматривать интегралы на многообразиях по специальным мерам.

1. Возьмем сначала простой частный случай: интегрирование дифференциальной формы по заданной на отрезке гладкой кривой. Рассмотрим банаховы пространства E и F, открытое множество $U \subseteq E$, гладкое отображение $\gamma\colon T \to U$ непустого открытого интервала $T \supseteq [0,1]$ в $\mathbb{R}$, форму $\omega \in \Omega_1^0(U,F)$, полученную заменой переменных форму $\gamma^*\omega \in \Omega_1^0(T,F)$ со значениями $h(t) = \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \in F$ для $t \in T$. Функция $h\colon T \to F$ непрерывна и для нее определен интеграл по $[0,1]$ (ср. [149, гл. 5, п. 3]). Его в соответствии с правилом замены переменной в интеграле естественно считать интегралом формы $\omega\colon U \to \mathscr{L}(E,F)$ по кривой $\gamma\colon [0,1] \to U$. По определению,

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{[0,1]} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt. \tag{1}$$

Если продолжить функцию h на $\mathbb{R}$, положив $h(t) = 0$ при $t \notin T$, то вместо (1) можно написать

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int \gamma^*\omega.$$

Здесь справа интеграл по мере Лебега для $\mathbb{R}$. Роль ориентированного многообразия играет отображение γ. Оно определяет положительную ориентацию для образа $\gamma[0,1] \subseteq F$ и графика $G(\gamma) = \{(t,\gamma(t)) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R} \times F$. Замена $\varphi(s) = 1 - s$

$(0 \le s \le 1)$, преобразующая γ в $\gamma \circ \varphi$, меняет ее на отрицательную. Соответственно изменяется знак у интеграла:

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int\limits_{[0,1]} \omega((\gamma\circ\varphi)(s)) \cdot (\gamma\circ\varphi)'(s)\, ds = -\int\limits_{\gamma} \omega.$$

Пусть $f\colon U \to F$ — гладкая функция и $\omega = df$ — ее дифференциал. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)). \tag{2}$$

Упражнение. Доказать равенства для интегралов по кривым γ, $\gamma \circ \varphi$ и для интеграла формы df (см. [36, гл. 3, пп. 3.3, 3.4]).

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ и функции $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имеют значения $\gamma(y) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)$, $f(u,v) = uv$ $(t,u,v \in \mathbb{R},\ r > 0)$. Обозначим x, y, dx, dy стандартные координатные функции и соответствующие базовые формы для $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим формы $df = ydx + xdy$, $\omega = (1/2)(-ydx + xdu)$. Сужение γ на отрезок $[0,1]$ можно отождествить с ориентированной окружностью $S(0,r)$ в $\mathbb{R}^2$. График функции γ есть винтовая линия на горизонтальном цилиндре в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, проекцией которого на вертикальную плоскость является окружность $S(0,r)$. Используя правила замены переменных, находим $\gamma^* df = \gamma^*(ydx) + \gamma^*(xdy) = (y\circ\gamma)\cdot\gamma^* dx + (x\circ\gamma)\cdot\gamma^* dy = (y\circ\gamma)d(x\circ\gamma) + (x\circ\gamma)d(y\circ\gamma) = hdt$ для $h(t) = 2\pi r^2(\cos^2\pi t - \sin^2\pi t)$ $(0 \le t \le 1)$. Аналогично, $\gamma^*\omega = \pi r^2 dt$. Следовательно, $\int\limits_{\gamma} df = 0$, $\int\limits_{\gamma} \omega = \pi r^2$.

Гладкая кривая $\gamma\colon [0,1] \to U$, у которой $\gamma(0) = \gamma(1)$, называется *гладким циклом* в U. Следующая теорема формулирует интегральный критерий точности формы.

Теорема. *Форма $\omega \in \Omega_1^0(U,F)$ точна ессли ее интеграл по любому гладкому циклу γ в U равен нулю.*

Эта теорема и важные следствия из нее доказаны в [36, гл. 3, § 3]. Там же подробно описаны интегралы по кусочно-гладким кривым.

Замечание. Интеграл по кривой можно считать интегралом Стилтьеса функции $\omega\circ\gamma\colon [0,1] \to \mathscr{L}(E,F)$ по функции $\gamma\colon [0,1] \to U$. Равенство (1) тогда записывается в форме

$$\int \omega(\gamma)\, d\gamma = \int \omega(\gamma)(d\gamma/dt)\, dt. \tag{3}$$

Производную $d\gamma/dt = \gamma'$ можно считать плотностью меры $d\gamma$ по лебеговой мере dt. Равенство (3) выражает правило замены переменных.

2. Определение интеграла по многообразию связано с некоторыми техническими трудностями. Но по существу дело сводится к подходящей замене переменной и интегрированию по мере Лебега в пространстве соответствующей размерности. Здесь рассматриваются поверхности в стандартных пространствах [36, п. 4.7].

Пусть $X = \mathbb{R}^k$, $X^\perp = \mathbb{R}^l$, $Y = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^m$ — стандартные евклидовы пространства ($k + l = m$). Рассмотрим ориентированное гладкое k-мерное многообразие S, вложенное в Y, и семейство Φ локальных параметризаций $\varphi\colon U \to V$, отображающих открытые множества $U \subseteq X$ на открытые множества $V \subseteq S$ (следы на S открытых множеств в Y). Параметризации φ являются гомеоморфизмами и их образы покрывают S. Пара (S, Φ) называется *параметризованной поверхностью*. Переход от карт к параметризациям связан с удобным заданием поверхностей уравнениями. Для простоты (S, Φ) обозначают S и называют *поверхностью*. Если $k = m$ и $l = 0$, то S называют *телом*. При определении интеграла относительно S делаются различные предположения. Множество S считается борелевским (в частности, компактным или равным объединению последовательности компактных множеств). Гладкую поверхность $S \subseteq \mathbb{R}^m$ задают с помощью уравнения $g(z) = 0$ для гладкой функции $g\colon A \to \mathbb{R}^m$ на открытом множестве $A \subseteq \mathbb{R}^m$, производная которой $g'(z)$ имеет ранг l в каждой точке $z \in S = g^{-1}(0)$. Такую возможность обеспечивает теорема о неявных функциях. Для $S = g^{-1}(0)$ существуют гладкие локальные параметризации [100, п. 5.2].

3. Опишем индуктивный процесс определения меры на классе $\mathscr{B}(S)$ борелевских множеств $B \subseteq S$ для параметризованной поверхности (S, Φ). Для каждой параметризации $\varphi \in \Phi$ обозначим $\mathscr{BC}(\varphi)$ алгебру всех $B \in \mathscr{B}(S)$, содержащихся в некотором компакте $C \subseteq \operatorname{Ran}\varphi$. Пусть $\mathscr{BC}(S) = \cup\mathscr{BC}(\varphi)$ $(\varphi \in \Phi)$. Каждое $B \in \mathscr{B}(S)$ равно объединению некоторой дизъюнктивной последовательности множеств $B_n \in \mathscr{BC}(S)$.

Упражнение. Доказать это.

Рассмотрим семейство *согласованных* положительных мер $\mu_\varphi\colon \mathscr{BC}(\varphi) \to \mathbb{R}$ $(\varphi \in \Phi)$: если $B \in \mathscr{BC}(\varphi) \cap \mathscr{BC}(\psi)$ для некоторых параметризаций φ и ψ, то $\mu_\varphi(B) = \mu_\psi(B)$. Равенство

$$\mu(B) = \mu_\varphi(B) \quad (B \in \mathscr{BC}(\varphi))$$

определяет меру $\mu\colon \mathscr{BC}(S) \to \mathbb{R}$. А равенство

$$\bar{\mu}(B) = \sum \mu(B_n) \quad (B = \sum B_n,\ B_n \in \mathscr{BC}(\varphi))$$

определяет меру $\bar{\mu}\colon \mathscr{B}(S) \to \overline{\mathbb{R}}$, продолжающую μ.

Упражнение. Доказать это, проверив корректность данных определений μ и $\bar{\mu}$.

Сужение меры $\bar{\mu}$ на алгебру $\mathscr{R} = \mathscr{BL}(S, \bar{\mu}) = \{B \in \mathscr{B}(S) \mid \bar{\mu}(B) < \infty\}$ будем тоже обозначать μ. Множества из $\mathscr{R}$ называются *μ-интегрируемыми*. Как правило, предполагается, что меры μ_φ *регулярны*: для каждого $B \in \mathscr{BC}(\varphi)$ значение $\mu_\varphi(B)$ равно верхней грани значений $\mu_\varphi(A)$ для всех компактов $A \subseteq B$. (Регулярность меры Лебега подробно доказана в [82, гл. 9, п. 9.2.2].) Считается, что $S \in \mathscr{BC}(S)$: это обеспечивает σ-конечность меры $\bar{\mu}$ и позволяет сводить дело к случаю конечной меры $\bar{\mu} = \mu$ на $\mathscr{R} = \mathscr{BL}(S, \mu)$.

В соответствии с общей теорией определяются алгебры $\mathscr{L}(S, \mu)$ вещественных или векторных функций на S, интегрируемых по мере μ, и интегралы для них. Среди интегрируемых вещественных функций выделяются борелевские с носителями конечной меры. В частности, непрерывные функции с компактными носителями. Более широкие классы интегрируемых функций получаются для мер с компактными носителями.

Упражнение. Доказать, что вещественная борелевская функция $f\colon S \to \mathbb{R}$, для которой $\mu(\operatorname{Supp} f) < \infty$, интегрируема по мере μ на $\mathbb{R}$.

По описанной схеме можно определить естественную меру ds для поверхности S и интеграл по ней. Такие интегралы в классических случаях выражают длины, площади и объемы.

4. Будем предполагать, что S гладко параметризована: все локальные параметризации $\varphi \in \Phi$ поверхности S гладкие. Этому условию удовлетворяют поверхности, задаваемые гладкими уравнениями. Отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \in \mathbb{R}^k$ описывается семейством своих координат $\varphi_1\colon U \to \mathbb{R}, \ldots, \varphi_m\colon U \to \mathbb{R}$. Рассмотрим строку $\partial_i^* \varphi$ и столбец $\partial_j \varphi$, составленные из частных производных $\partial_i \varphi_1, \ldots, \partial_i \varphi_m$ и $\partial_j \varphi_1, \ldots, \partial_j \varphi_m$

$(1 \le i, j \le k)$. Произведения $g_{ij}(\varphi) = \partial_i^* \varphi \partial_j \varphi$ являются непрерывными вещественными функциями на U. Матрица $G(\varphi) = (g_{ij}(\varphi))$ называется *матрицей Грама* параметризации φ. Определитель $g(\varphi) = \det G(\varphi)$ называется *ее грамианом.* Он тоже является вещественной функцией на U. Пусть $\partial\varphi = (\partial_j \varphi)$ — $m \times k$-матрица со столбцами $\partial_j \varphi$ и $\partial^* \varphi = \left(\partial_i^* \varphi\right)$ — $k \times m$-матрица со строками $\partial_i^* \varphi$, получающаяся транспонированием $\partial\varphi$. Тогда

$$G(\varphi) = \partial^* \varphi \cdot \partial\varphi, \quad g(\varphi) = \det(\partial^* \varphi \cdot \partial\varphi).$$

Матрица $G(\varphi)$ есть $k \times k$-матрица. Ее размер не зависит от разности $l = m - k$. Из определений следует, что $g(\varphi) \ge 0$, и поэтому определена вещественная функция $\sqrt{g(\varphi)}$ на U. В каждой точке $x \in U$ число $\sqrt{g(\varphi)}(x)$ выражает объем k-мерного параллелепипеда с ребрами $\partial_1 \varphi(x), \ldots, \partial_k \varphi(x) \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим параметризации φ, ψ с пересекающимися образами и композицию $y = \varphi^{-1}\psi$. Правила дифференцирования обеспечивают равенства

$$G(\psi) = \partial^* h \cdot G(\varphi) \circ h \cdot \partial h, \quad \sqrt{g(\psi)} = \sqrt{g(\varphi)} \circ h \cdot \det(\partial h).$$

Здесь ∂h обозначает $k \times k$-матрицу $(\partial_j h_i)$ из частных производных координатных функций h_i для h. Благодаря согласованности параметризаций $\det(\partial h) > 0$.

Упражнение. Доказать выписанные для G и $\sqrt{g}$ правила перехода от φ к ψ.

Функция $\sqrt{g(\varphi)} \colon U \to \mathbb{R}$ непрерывна и поэтому локально интегрируема по мере Лебега dx для $\mathbb{R}^k$. Равенство

$$\mu_\varphi(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{g(\varphi)}\, dx \quad (B \in \mathscr{B}(C),\ C \subseteq \operatorname{Ran} \varphi)$$

определяет семейство регулярных согласованных мер. Счетная аддитивность и регулярность следует из предельной теоремы Лебега, а согласованность — из правила перехода для $\sqrt{g}$ и правила замены переменной в интеграле.

Упражнение. Доказать это.

Меру, определяемую на алгебре $\mathscr{B}(S)$ борелевских множеств в S указанным семейством мер μ_φ, будем называть *естественной* для параметризованной поверхности (S, Φ) и обозначать ds. Ограниченная борелевская функция $f\colon S \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере ds на каждом множестве B конечной меры. Из определений следует, что

$$\int\limits_B f \cdot ds = \sum_n \int\limits_{\varphi_n^{-1}(B_n)} f \circ \varphi_n \cdot \sqrt{g(\varphi_n)} \cdot dx$$

для $B_n \in \mathscr{BC}(S)$, $\varphi_n \in \Phi$ таких, что $\bar{B}_n \subseteq \operatorname{Ran} \varphi_n$, $B = \sum B_n$.

Пример. Рассмотрим окружность $S{=}S(0,1)$ в $\mathbb{R}^2$ и $\alpha(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $\beta(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$, $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$, $\delta(t) = (-\sqrt{1-t^2}, t)$ $(-1 < t < 1)$. Локальные параметризации α, β, γ, δ обратны картам β_+, β_-, α_+, α_- ориентированного атласа (пример 1 в 3.4.1, 2). Переходы определяются равенствами $g(t) = \gamma^{-1}(\alpha(t)) = \gamma^{-1}(\beta(t)) = t$ $(0 < t < 1)$ и $h(t) = \delta^{-1}(\alpha(t)) = \delta^{-1}(\beta(t)) = t$ $(-1 < t < 0)$. Грамианы легко вычисляются:

$$g(\alpha) = (1, -t/\sqrt{1-t^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} = 1/(1-t^2),$$

$g(\alpha) = g(\beta) = g(\gamma) = g(\delta)$. Окружность S компактно параметризуема: она покрывается образами при α, β, γ, δ отрезка $\bar{T} = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ и равна сумме дуг $A = \alpha(T)$, $B = \beta(T)$, $C = \gamma(T)$, $D = \delta(T)$, где $T =]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$. Поэтому

$$\int\limits_S 1 \cdot ds = 4 \int\limits_T (1/\sqrt{1-t^2})\, dt = 4 \cdot \pi/2 = 2\pi.$$

Замечание. В [121, гл. 6, § 6] описываются меры Радона, определяемые дифференциальными формами на ориентированных многообразиях.

5. Рассмотрим ориентированную компактно параметризованную гладкую k-мерную поверхность (S, Φ) в пространстве $\mathbb{R}^m$. (Гладкость параметризаций $\varphi \in \Phi$ не предполагается.) Каждая параметризация $\varphi \in \Phi$ определяет меру $dx\varphi^{-1}$ со значениями $dx\varphi^{-1}(B) = dx(\varphi^{-1}(B))$ $(B \in \mathscr{B}(S))$. Такие меры подробно описаны в [82, гл. 10, п. 10.3.1]. Локальные меры μ_φ можно задавать с помощью согласованного семейства *локальных плотностей* $\rho(\varphi)\colon \operatorname{Ran}\varphi \to \mathbb{R}$ с локально интегрируемыми по мере Лебега dx композициями $\rho(\varphi) \circ \varphi$. Согласованность этих плотностей выражается равенством $\rho(\psi) = \rho(\varphi) \cdot \det h' \circ \psi^{-1}$ для параметризаций φ, ψ с пересекающимися образами и композиции $h = \varphi^{-1}\psi$. Мера μ_φ определяется равенствами

$$\mu_\varphi(B) = \int\limits_B \rho(\varphi) \cdot dx\varphi^{-1} = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \rho(\varphi) \circ \varphi \cdot dx$$

для $B \in \mathscr{B}\mathscr{C}(S)$, $B \subseteq C \subseteq \operatorname{Ran}\varphi$. По теореме о замене переменных в интеграле из согласованности плотностей ρ_φ, ρ_ψ следует согласованность мер μ_φ, μ_ψ. Гладкость и ориентированность S обеспечивают существование h' и неравенство $\det h' \geq 0$. А теорема Сарда — пренебрежимость множества сингулярных значений с $\det h' = 0$.

Замечание. Подробные доказательства теорем о замене переменных в интегралах в нужных формулировках есть в [82, гл. 9]. Там же описываются свойства плотностей.

Пример. Если параметризации $\varphi \in \Phi$ гладкие, то в качестве плотностей можно взять композиции $\rho(\varphi) = \sqrt{g(\varphi)} \circ \varphi^{-1}$. Для них $\rho(\varphi) \circ \varphi = \sqrt{g(\varphi)}$ и меры μ_φ те же, что и раньше.

Рассмотрим согласованное семейство локальных мер μ_φ. Пусть для каждой параметризации φ мера μ_φ непрерывна по мере $dx\varphi^{-1}$. Тогда производные Радона — Никодима $\rho(\varphi) = d\mu_\varphi / dx\varphi^{-1}$ [82, гл. 8] составляют согласованное семейство локальных плотностей.

Упражнение. Доказать это, проверив равенство $dx\varphi^{-1}/dx\psi^{-1} = \det h' \circ \psi^{-1}$ для $h = \varphi^{-1}\psi$ и используя правила действий с производными меры по мере.

Определение меры μ_φ можно записать в дифференциальной форме:

$$d\mu_\varphi = \rho(\varphi) \cdot dx\varphi^{-1}.$$

Она эквивалентна интегральной.

3.4.8. Формула Стокса

Эта формула связывает интеграл дифференциальной формы по многообразию с ее интегралом по его краю. Она обобщает формулу Ньютона — Лейбница и является одной из основных формул интегрального исчисления.

1. Вместо абстрактного многообразия снова рассмотрим ориентированную k-мерную гладко параметризованную поверхность (S, Φ) в $\mathbb{R}^m$, описанную в 3.4.7, 4. Будем предполагать, что S *регулярна*: в каждой точке $s = \varphi(u) \in S$ производная $\varphi'(u) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ имеет ранг k ($u \in \operatorname{Dom}\varphi \subseteq \mathbb{R}^k$). Теорема Сарда позволяет общий случай свести к регулярному. Рассмотрим линейное многообразие

$$T_s(\varphi) = \varphi(u) + \varphi'(u)\mathbb{R}^k = \{\varphi(u) + \varphi'(u)v \mid v \in \mathbb{R}^k\}.$$

Пусть $\varphi, \psi \in \Phi$, $\varphi(a) = \psi(b) = s$, $h = \varphi^{-1}\psi$. Так как $\det h' > 0$ и $\psi'(b) = (\varphi h)'(b) = \varphi'(h(b))h'(b) = \varphi'(a)h'(b)$, то $T_s(\varphi) = T_s(\psi)$. Линейное многообразие $T_s = T_s(\varphi)$ называется *касательным многообразием,* а параллельное ему линейное пространство $\varphi'(u)\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$ — *касательным пространством* к поверхности S в точке s. Подчеркнем, что $s = \varphi(u) + \varphi'(u) \cdot 0 \in T_s$, но не обязательно $s \in \varphi'(u)\mathbb{R}^k$.

Пример. Возьмем окружность $S = S(0, 1)$ и ее локальную параметризацию $\varphi = \alpha$ из примера в 3.4.7, 4. Пусть $u = -1/\sqrt{2}$ и $s = \varphi(u) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Тогда $\varphi'(u) = (1, 1)$ и прямая $T_s = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) + (1, 1)\mathbb{R}$ — касательная к S в точке s, а $(1, 1)\mathbb{R}$ — параллельная ей биссектриса.

Замечание. Несвязное объединение $T = \cup T_s$ ($s \in S$) называется *касательным расслоением над* S. Каждое T_s в нем открыто и замкнуто. Параметризации для S порождают параметризации для T, превращая T в $2k$-мерное многообразие. Гладкость T на единицу меньше гладкости S, которая предполагается ненулевой. Сопряженное к T_s пространство T_s^* называется *кокасательным пространством* к S в данной точке s, а несвязное объединение $T^* = \cup T_s^*$ ($s \in S$) называется *кокасательным расслоением над* S. Эти расслоения подробно описаны в [30, гл. 1, § 3]. Они используются для определения дифференциальных форм на многообразиях. Общая теория гладких расслоений (косых произведений) излагается в [29, часть 2, гл. 6].

2. Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f \colon E \to F$, $M = f^{-1}(0)$ и $u \in M$. Будем предполагать, что f непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки u и производная $f'(u)$ отображает E на все F. Линейное многообразие $T_u = u + \operatorname{Ker} f'(u)$ называют *касательным многообразием* к M в точке точке u. Теорема Люстерника [45, 10.2.3] утверждает, что

$$T_u = \{u + v \mid \operatorname{dist}(u + tv, M) = o(t)\}.$$

Она позволяет обобщить классический метод Лагранжа решения экстремальных задач на случай банаховых пространств (ср. 3.2.8–3.2.10; см. [1]).

Пример. Пусть $E = H$ — вещественное гильбертово пространство, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$, $M = f^{-1}(0) = S(0,1)$ и $u \in M$. Тогда $f'(u) \cdot v = 2u \cdot v$, $\operatorname{Ker} f'(u) = \{v : u \cdot v = 0\} = u^\perp$ и $T_u = u + u^\perp$. Вместе с тем $\operatorname{dist}(u + tv, M) = \min\{\|u + tv - x\| : \|x\|^2 = 1\} = \|(u + tv) - (u + tv)/\|u + tv\|\| = \|u + tv\| - 1 = \sqrt{1 + 2(u \cdot v)t + \|v\|^2 t^2} - 1 = 2(u \cdot v)t + o(t)$ и $\operatorname{dist}(u + tv, M) = o(t)$ эквивалентно $u \cdot v = 0$, $tv \in \operatorname{Ker} f'(u) = u^\perp$, $u + tv \in T_u$. В частности, если $H = \mathbb{R}^2$ и $u = (-1/2, 1/2)$, то $v = (1,1)$, как в примере п. 1.

3. Интеграл формы по куску поверхности S, задаваемому параметризацией φ, можно определить аналогично интегралу по кривой γ, описанному в п. 1. Для объединения интегралов по кускам в интеграл по всей поверхности используется теорема о разбиении единицы.

Рассмотрим: множество $M \subseteq \mathbb{R}^m$, его открытую окрестность V и покрывающее M семейство открытых множеств V_i в $\mathbb{R}^m$, семейство бесконечно гладких функций $f_i \colon V \to \mathbb{R}$ с носителем $\operatorname{Supp} f_i \subseteq V_i$ и образом $f_i(M) \subseteq [0,1]$. Назовем семейство (f_i) *локально финитным на* M, если для каждого $x \in M$ существует окрестность W, на которой только конечное число функций f_i не равны тождественно нулю. Семейство (f_i) называется *вписанным в* (V_i) *разбиением единицы для* M, если оно локально финитно и $\sum f_i = 1$ $(x \in M)$. В [100, п. 3.11] доказана

Теорема. *Для каждых множества $M \subseteq \mathbb{R}^m$ и его открытого покрытия (V_i) существует вписанное в (V_i) разбиение единицы.*

Среди покрытий (V_i) выделяются *локально конечные*, у которых при каждом компакте $C \subseteq \mathbb{R}^m$ пересечения $C \cap V_i \neq O$ только для конечного числа множеств V_i. Для построения разбиения единицы (f_i) можно использовать *ε-шапочки* $h \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ со значениями $h(x) = c(\varepsilon) \cdot \exp\{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - \|x\|^2)\}$ при $\|x\| < \varepsilon$ и $h(x) = 0$ при $\|x\| \geq \varepsilon$. Коэффициенты $c(\varepsilon)$ подбираются с учетом нормировки $\sum f_i = 1$ $(x \in M)$ (см. [36, гл. 3, § 4; 20, гл. 1, § 1]).

Возьмем гладко параметризованную k-мерную поверхность (S, Φ) в $\mathbb{R}^m$, форму $\omega \in \Omega_k^0(A, F)$ на открытой окрестности $A \subseteq \mathbb{R}^m$ множества S и множество $B \in \mathscr{BC}(\varphi)$ для параметризации $\varphi \in \Phi$ (3.4.7, 2). Чтобы не использовать теорию интеграла для векторных функций, вместо банахова пространства F можно рассматривать вещественную прямую $\mathbb{R}$. По определению,

$$\int\limits_{\varphi} B\omega = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \varphi^*\omega\, dx.$$

Как всегда $B\omega(x) = \operatorname{ind} B(x) \cdot \omega(x) = 0$ при $x \notin B$. Функция $\varphi^*\omega$ непрерывна на компакте $\varphi^{-1}(\bar{B})$ и поэтому интегрируема на множестве $\varphi^{-1}(B)$ по мере Лебега dx для $\mathbb{R}^k$. Запишем форму ω в стандартном виде (3.4.5,3): $\omega = \sum a_K \wedge dy_K$, где $a_K \colon A \to F$ — непрерывные функции, а $\wedge dy_K = dy_{m(1)} \wedge \cdots \wedge dy_{m(k)}$ — базовые формы с мультииндексами $K = m(1)\ldots m(k)$ $(1 \le m(1) < \cdots < m(k) \le m)$. Замена φ преобразует ω в

$$\varphi^*\omega = \sum (a_K \circ \varphi) \cdot \det \varphi'_K \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_K,$$

где $\varphi_K = (\varphi_{m(j)})_{1 \le j \le k}$, $\varphi'_K = (\partial_i \varphi_{m(j)})$ и суммирование проводится по всем рассматриваемым мультииндексам K. Поэтому

$$\int\limits_{\varphi} B\omega = \sum_K \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} a_K(\varphi(x)) \cdot \det \varphi'_K(x)\, dx.$$

Из согласованности параметризаций φ, $\psi \in \Phi$ и правила замены переменной в интеграле Лебега следует, что

$$\int\limits_{\varphi} B\omega = \int\limits_{\psi} B\omega \quad (B \in \mathscr{BC}(\varphi) \cap \mathscr{BC}(\psi)).$$

Упражнение. Доказать это равенство [100, п. 5.4].

Это позволяет определить интеграл формы ω по множеству B равенством

$$\int\limits_{B} \omega = \int\limits_{\varphi} B\omega \quad (B \in \mathscr{BC}(\varphi)).$$

Пусть S *компактно параметризована*: существует покрывающее S семейство открытых множеств $B(\nu) \subseteq A$ и семейство параметризаций $\varphi_\nu \in \Phi$ таких, что $B(\nu) \in \mathscr{BC}(\varphi_\nu)$. Возьмем вписанное в $(B(\nu))$ разбиение единицы (f_ν) для S. Предположим, что семейство интегралов форм $f_\nu \cdot \omega$ по множествам $B(\nu)$ суммируемо. Интеграл формы ω по многообразию S определяется равенством

$$\int\limits_S \omega = \sum_\nu \int\limits_{B(\nu)} f_\nu \cdot \omega.$$

Сумма справа не зависит от выбора покрытия $(B(\nu))$ и разбиения единицы (f_ν).

Упражнение. Доказать это [100, 3.12].

Замечание. Если поверхность S или носитель формы ω компактны, то число слагаемых в определяющей интеграл ω по S сумме можно сделать конечным.

4. Вместо формы на открытой окрестности A многообразия S в $\mathbb{R}^m$ можно рассматривать форму ω на S, определяя ее как семейство форм $\omega(s)$ на касательных пространствах T_s к S в точках $s \in S$ [100, гл. 5]. Иначе формы на многообразиях определяются как сечения соответствующих расслоений [24, гл. 3, п. 7; 30, гл. 2, § 4]. Действия с формами ω поточечно порождаются действиями с формами $\omega(s)$. Привлечение таких громоздких конструкций связано с тем, что, как правило, S не является векторным подпространством пространства $\mathbb{R}^m$ и нельзя непосредственно использовать стандартное определение формы на открытом множестве банахова пространства.

Рассмотрим регулярное гладко параметризованное ориентированное k-мерное многообразие (S, Φ) в $\mathbb{R}^m$. По определению, n-гладкая k-форма ω на S есть отображение S в объединение $\cup\Omega_k^n(T_s, F)$ такое, что $\omega(s) \in \Omega_k^n(T_s, F)$ $(s \in S)$. При определенных условиях форма $\omega(s)$ порождает некоторую меру на борелевской алгебре $\mathscr{B}(S)$. По этой мере можно интегрировать скалярные или векторные функции f на S. Если $F \neq \mathbb{R}$ и f векторная, то должно быть определено произведение значений f на векторы из F. Проще всего считать $F = \mathbb{R}$ и рассматривать $f\colon S \to \mathbb{R}$. Замены переменных, определяемые параметризациями, позволяют свести дело к интегрированию по мере Лебега. При реализации этого процесса приходится делать различные дополнительные предположения. Используется схема определения интеграла, описанная в 3.4.7, 4.

Пусть S компактно параметризовано и $S = \sum B_n$, $B_n \in \mathscr{BC}(\varphi_n)$ для некоторой последовательности $\varphi_n \in \Phi$, а форма ω представима в стандартном виде и $\omega = \sum a_K \wedge dy_K$ с базовыми формами $\wedge dy_K = dy_{m(1)} \cdots \wedge dy_{m(k)}$ для мультииндексов $K = m(1) \ldots m(k)$ $(1 \le m(1) < \cdots < m(k) \le m)$. Тогда интеграл функции f на S по форме ω определяется равенством

$$\int\limits_S f\omega = \sum_{n,K} \int\limits_{\varphi_n^{-1}(B_n)} f(\varphi_n(x)) \cdot a_K(\varphi_n(x)) \cdot \det \varphi'_{nK}(x)\, dx.$$

Здесь $\varphi'_{nK} = (\partial_i \varphi_{n,m(j)})$ и dx — мера Лебега для $\mathbb{R}^k$. Ориентация и регулярность S позволяет считать $\det \varphi'_{nK}(x) > 0$. Функция f интегрируема на S по форме ω, если интегралы справа и их сумма существуют. Доказывается независимость правой части от выбора множеств B_n и параметризаций φ_n. При интегрируемой $f = 1$ получается интеграл ω по S.

Замечание. Теория интегрирования на многообразиях подробно излагается в [30, гл. 3]. Там кроме обычных вводятся абсолютные формы. В [102, гл. 3] для определения интеграла используются плотности.

5. Рассмотрим 2-гладкое ориентированное многообразие M, его край ∂M с индуцированной ориентацией и 1-гладкую $(k-1)$-форму ω на M. Пусть M или $\operatorname{Supp} \omega$ компактны. Тогда верна

Формула Стокса. $\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$

Допускается $\partial M = 0$. Часто в правой части вместо ω пишут $i^*\omega$, обозначая $i \colon \partial M \to M$ тождественное вложение. Формула Стокса подробно обсуждается в [29, 4.1, § 26 и 4.2, § 8]. В [30, гл. 3, § 3] несколько вариантов формулы Стокса выводятся из теоремы Фубини для многообразий (гл. 3, § 2). Там же со ссылкой на Г. Вейля приведен интересный прием вычисления некоторого интеграла по сфере и объема шара в $\mathbb{R}^m$.

Следствие. *Если* $\partial M = O$, *то* $\int\limits_M d\omega = 0$.

Пример 1. Возьмем 2-мерное многообразие $\bar{M} = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$ с краем $\partial \bar{M} = S(0,1) \cup S(0,\sqrt{2})$ в $\mathbb{R}^2$ и форму $\omega = (x^2+y^2)^{-1}(xdy - ydx)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Нетрудно проверить, что $d\omega = 0$, а интегралы 1-формы ω

по окружностям $S(0,1)$ и $S(0,\sqrt{2})$ равны 2π. Поэтому при положительной ориентации верны равенства

$$\int\limits_{\bar{M}} d\omega = 0 = \int\limits_{S(0,\sqrt{2})} \omega - \int\limits_{S(0,1)} \omega.$$

Если же вместо $\bar{M}$ взять некомпактное многообразие $M = \bar{M} \setminus S(0,1)$ с краем $\partial M = S(0,\sqrt{2})$, то для него теорема Стокса не будет верна:

$$\int\limits_{M} d\omega = 0 \neq 2\pi = \int\limits_{S(0,\sqrt{2})} \omega.$$

Пример 2. Возьмем формы $\xi = adx + bdy + cdz$ и $\eta = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$, описанные в примере из 3.4.5, 3 вместе с их внешними дифференциалами $d\xi$ и $d\eta$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ компактные гладкие тело V с поверхностью S и 2-мерную поверхность D с контуром C. (В частности, V может быть замкнутым шаром, S — сферой, D — диском, C — окружностью.) Из общей формулы Стокса следуют классические формулы Стокса и Гаусса — Остроградского:

$$\iint\limits_{D} (b'_x - a'_y)\, dxdy + (c'_y - b'_z)\, dydz + (a'_z - c'_x)\, dzdx = \int\limits_{C} a\,dx + b\,dy + c\,dz,$$

$$\iiint\limits_{V} (f'_x + g'_y + h'_z)\, dxdydz = \iint\limits_{S} f\,dydz + g\,dzdx + h\,dxdy.$$

При $dz = 0$ первая из формул превращается в классическую формулу Грина.

Пример 3. В 5.1.1, 2 при доказательстве теоремы Брауэра о неподвижной точке формула Стокса используется для вычисления интегралов по n-мерному шару.

6. В [100, гл. 5] отдельный параграф посвящен выводу из общей формулы Стокса классических формул Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса. Там же описываются их применения в теории поля. Подробное изложение этих применений есть в [73, лекции 27 и 28]. В [100, гл. 4] кратко описываются вывод с помощью теоремы Стокса интегральных теоремы и формулы Коши для аналитических функций.

В [121, гл. 6, § 7] формула Стокса доказывается для многообразий с 1-гладким псевдокраем и подробно рассматриваются различные частные случаи. Отмечается, что интегрирование векторных форм (даже со значениями в бесконечномерном пространстве) можно при соответствующих предположениях свести к скалярному случаю. Там же (гл. 6, § 8) описывается применение теории дифференциальных форм к алгебраической топологии.

Формулы Стокса для негладких многообразий описываются в [136]. Гомологической теории интегрирования посвящена глава 4 книги [105]. Рассматриваются вещественные и целочисленные гомологии с общими цепями. Дифференциальные формы связываются с распределениями. Вводится понятие *потока* и определяются операции с потоками. Описывается связь спрямляемых потоков с ориентируемыми многообразиями. Доказываются теоремы о деформации, замкнутости, компактности и аппроксимации. Вводится понятие *внешней нормали* и доказывается естественная общая формула Гаусса — Грина — Остроградского.

3.4.9. Степень отображения

Даются дифференциальное и интегральное определения степени отображения для многообразий. Кратко описываются ее основные свойства.

1. Рассмотрим ориентированные n-мерные многообразия X, Y и гладкое отображение $f\colon X \to Y$. Будем предполагать, что прообраз $f^{-1}(y)$ для каждого регулярного значения $y \in Y$ отображения f конечен. Благодаря ориентированности знак

$$s(f,x) = \operatorname{sgn}\det f'_{\alpha\beta}(\alpha(x))$$

при $x \in f^{-1}(y)$ не зависит от выбора локальных карт α, β для изображения $f_{\alpha\beta} = \beta f \alpha^{-1}$. Когда $s(f,x) > 0$, говорят, что f *сохраняет ориентацию в точке* y. Когда $s(f,x) < 0$ — что *изменяет*. Число

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} s(f,x)$$

называется *степенью отображения* f *в точке* y.

Пример. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$ со стандартной ориентацией, $f(x) = x$ и $g(x) = -x$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Тогда $\deg(f,y) = 1$ и $\deg(g,y) = (-1)^n$ ($y \in \mathbb{R}^n$).

Степень $\deg(f,y)$ называют *алгебраическим числом прообразов* точки y при отображении f.

Замечание. Можно определить производную $f'(x)$ как линейное отображение касательных пространств T_x, T_y для многообразий X, Y в точках x, y. Тогда $s(f,x) = \operatorname{sgn}\det f'(x)$.

2. Условие конечности прообразов $f^{-1}(y) \subseteq X$ регулярных значений $y \in Y$ выполнено, если многообразие X компактно или если отображение f *собственное* ($f^{-1}(C) \subseteq X$ компактно для каждого компакта $C \subseteq Y$). Тогда [73, III.13] прообраз $f^{-1}(y)$ регулярного значения y состоит из изолированных точек и поэтому из компактности прообраза $f^{-1}(y)$ следует его конечность.

Из теоремы Сарда следует, что степень $\deg f$ определена на всюду плотном множестве $R(f) \subseteq Y$. Если многообразие Y связно, то функция $\deg f\colon R(f) \to \mathbb{Z}$ постоянна. Ее значение называется *степенью отображения* f и тоже обозначается $\deg f$. Рассмотрим связное многообразие Y, собственное отображение $f\colon X \to Y$ и финитную n-форму ω на Y с интегралом, не равным нулю. Тогда

$$\deg f = \int f^*\omega \Big/ \int \omega.$$

Подробное доказательство можно найти в [73, III.26]; см. также [29, часть 3, § 14] и [30, гл. 3, § 6].

3. Важным свойством степени отображения deg является ее инвариантность относительно непрерывных преобразований отображения. Эта инвариантность позволяет при вычислении степени заменять данное отображение более простыми.

Непрерывное отображение $h\colon [0,1] \times X \to Y$ с сечением $h(0,\cdot) = f$ называется *гомотопией* отображения f. Сечения $f_t = h(t,\cdot)$ составляют класс отображений, *гомотопных* f. Будем записывать гомотопность отображений знаком эквивалентности $\sim$. Для функций вещественной переменной график h есть непрерывная поверхность, соединяющую кривую $f = f_0$ с $g = f_1$. Гомотопию h называют также *непрерывной деформацией* отображения f. Говорят, что h *связывает* f с g или *деформирует* f в g.

Пример. При $X = \mathbb{R}$ гомотопия $h(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ связывает прямую $f(x) = x$ с параболой $g(x) = x^2$ (изгибает прямую f).

Гомотопию $h\colon [0,1] \times X \to Y$ называют *гладкой*, если она является сужением на $[0,1] \times X$ гладкого отображения $T \times X \to Y$ для некоторого интервала T в $\mathbb{R}$, содержащего отрезок $[0,1]$. Отображения $f = f_0$ и $g = f_1$ называются тогда *гладко гомотопными.*

Среди гладких гомотопий h выделяются *собственные*. Если многообразие X компактно, то все гладкие гомотопии являются собственными.

Главным результатом является теорема о гомотопической инвариантности степени.

Теорема. *Если многообразие Y связно и гладкие отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то* $\deg f = \deg g$.

В [30, гл. 3, § 6] эта теорема доказывается с использованием свойств групп когомологий. В [73, семестр III, лекция 26] она доказывается для отображений, связанных собственной гомотопией. Используется непрерывность отображения $t \to \int f_t^* \omega$ для финитной формы ω. Там же с помощью гладких приближений определяется степень непрерывного отображения компактных многообразий и теорема о равенстве степеней формулируется для непрерывных отображений.

В [29, часть 2, § 13] степень определяется для гладких отображений связных ориентированных компактных многообразий без края (*открытых*) и теорема о гомотопической инвариантности доказывается для них. Для компактных многообразий с краем и сохраняющих край отображений степень определяется как степень сужения на край. Выделяются отображения в n-мерную сферу.

4. Для примера вычислим степень $\deg g$ комплексного полинома $g(z) = a_n z^n$ $(n > 0,\ a_n \neq 0)$. Будем отождествлять комплексное число $z = x + iy$ с точкой $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ и считать известным, что при $c \neq 0$ уравнение $z^n = c$ имеет ровно n решений $z = c^{1/n}$. (Подробное элементарное доказательство теоремы о комплексных корнях есть в [80, часть 2.1, § 6].) Докажем, что $\deg g = n$.

По биномиальной формуле $g(z) = a_n(x + iy)^n = g_1(x, y) + i g_2(x, y)$, где $g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — некоторые полиномы двух вещественных переменных. Для их частных производных верны равенства $g'_{11} = g'_{22}$, $g'_{21} = -g'_{12}$, которые легко проверяются. Поэтому

$$g' = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ -g'_{12} & g'_{11} \end{pmatrix}, \quad \det g' = \bigl(g'_{11}\bigr)^2 + \bigl(g'_{12}\bigr)^2.$$

Так как полином $g - c$ при $c \neq 0$ не имеет кратных корней, то $g'(z) \neq 0$ [17, § 28] и $\det g'(z) > 0$ для каждого $z = c^{1/n} \in g^{-1}(c)$. Поэтому $s(g, z) = 1$ и $\deg g = \deg(g, c) = n$.

Замечание. В [121, гл. 6, § 8] топологическая степень непрерывного отображения определяется с помощью *индекса цикла* относительно точки. Доказывается теорема Руше об инвариантности топологической степени отображения при допустимых аддитивных деформациях. Из нее выводится теорема о корнях комплексного полинома и теорема Брауэра о неподвижной точке.

3.4.10. Приложения

В заключение отметим некоторые приложения анализа на многообразиях.

1. Векторные поля и формы на многообразиях используются для описания динамических систем. Они подробно рассматриваются в [29, часть 2, гл. 7] и [24, гл. 11]. Выделяются гамильтоновы и лагранжевы системы, доказывается классическая теорема Лиувилля. Приводятся примеры.

Комплексные многообразия рассматриваются в [29, часть 2, § 4]. Там указана и дополнительная литература.

В [67] подробно описываются специальные алгебраические, геометрические и аналитические конструкции, связанные с многообразиями. Эти конструкции используются для разработки асимптотических методов решения дифференциальных и операторных уравнений.

При исследовании динамических систем кроме обычных широко применяются *производные Ли* и *группы Ли* [102, гл. 5]. Им посвящена обширная литература [73, V]. Приложения к теории дифференциальных уравнений подробно описаны в [70].

В связи с общей теорией относительности исследуются многообразия, описывающие глобальную структуру решений многомерных вариационных задач [29, часть 2, гл. 8]. Вариационное исчисление на многообразиях подробно излагается в [102, гл. 4].

2. Гладкие семейства вероятностных распределений можно рассматривать как гладкие поверхности в некоторых многообразиях, которые могут быть и бесконечномерными. Такая геометрическая модель описана в [118, 126]. Она применяется к общей проблеме статистических решений и некоторым важным частным случаям. В [118, гл. 3] рассматриваемые статистические многообразия приближаются конечномерными. Это компенсирует отсутствие хорошо разработанной общей теории бесконечномерных многообразий.

Книга Н. Н. Ченцова [118] занимает особое место в литературе по теории вероятностей и математической статистике благодаря широкому применению алгебраических и геометрических конструкций. Уже при формулировке проблемы статистического решения используются категория решающих правил, марковские морфизмы и гладкие бесконечномерные многообразия вероятностных мер. Для этих многообразий описываются векторные поля и касательные пространства, метрики и связанные с ними понятия. Отдельная глава посвящена теории экспонентных семейств вероятностных мер, отождествляемых с геодезическими семействами (поверхностями) в бесконечномерном многообразии, снабженном естественной линейной связностью.

ОПЕРАТОРЫ

Во второй части книги излагаются элементы теории операторов. Сначала описываются линейные операторы, потом — нелинейные. Рассматриваются операторы в нормированных пространствах, описываются некоторые специальные пространства и классы операторов. Большое внимание уделено распределениям, их преобразованиям и спектрам операторов. Для нелинейных операторов доказывается несколько теорем о неподвижных точках и теорема о седловой точке.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Введением в теорию линейных операторов может служить глава 4 книги А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [45]. Фундаментальным руководством — книга Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [28]. Операторы в гильбертовых пространствах подробно описаны в учебнике В. А. Садовничего [96].

4.1. Гильбертовы пространства

Так называются полные евклидовы пространства. Параграф дополняет сказанное об евклидовых пространствах раньше.

4.1.1. Ортогональное проектирование

Ортогональное проектирование — одна из основных операций в гильбертовых пространствах.

1. Рассмотрим вещественное или комплексное пространство $(\mathbb{F}, E)$, для которого определено эрмитово скалярное произведение $p\colon E \times E \to \mathbb{F}$ со значениями

$$p(x, y) = x \cdot y = \langle x, y \rangle \in \mathbb{F} \quad (x, y \in E).$$

Предполагается, что $yx = (xy)^* = \overline{xy}$, где звездочка и черта обозначают сопряжение в числовом поле $\mathbb{F}$. Билинейная форма p определяет квадратичную форму $q\colon E \to \mathbb{R}$ со значениями $q(x) = p(x, x) \in \mathbb{R}$. Выделяются положительные невырожденные скалярные произведения p, для которых $q(x) \geq 0$ $(x \in E)$ и $q(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Такое скалярное произведение определяет евклидову норму со значениями $\|x\| = (xx)^{1/2}$ $(x \in E)$. Для нее верно неравенство Коши:

$$|xy| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in E).$$

Число $\varphi(x, y) = \arccos(xy(\|x\| \cdot \|y\|)^{-1})$ определяет в вещественном случае *величину угла* между векторами x, y с ненулевыми нормами.

Для евклидовой нормы и скалярного произведения верны тождества треугольника, параллелограмма и поляризационное. Ортогональность векторов означает равенство нулю их скалярного произведения. Для ортогональных векторов верна теорема Пифагора. Как правило, рассматриваются невырожденные скалярные произведения и отделимые пространства. Исключения оговариваются или ясны из содержания.

2. Подпространствами гильбертова пространства H будем называть только *замкнутые* векторные подпространства. Они тоже являются гильбертовыми пространствами. Для замкнутых подпространств верна теорема об ортогональной проекции. Сформулируем ее немного иначе, чем в 2.2.6, чтобы добавить важный пункт о существовании.

Теорема. *Пусть z — точка и A — подпространство гильбертова пространства H. Тогда*:

1. *Существует ближайшая к z точка $a \in A$.*

2. *Каждая точка $a \in A$, ближайшая к z, является ортогональной проекцией z на A.*

3. *Каждая ортогональная проекция p точки z на A является ближайшей к z точкой A.*

□ Так как $\|z - x\| \geq 0$ для каждых $z \in H$ и $x \in A$, то существует $\alpha = \inf\{\|z - x\| : x \in A\} \geq 0$. По определению нижней грани для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x(n) \in A$ такая, что $\|z - x(n)\| \leq \alpha + 1/n$.

Докажем, что последовательность точек $x(n)$ сходится. Рассмотрим $z - x(m)$, $z - x(n)$ для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$ и заметим, что

$$(z - x(n)) - (z - x(m)) = x(m) - x(n),$$
$$(z - x(n)) + (z - x(m)) = 2[z - 2^{-1}(x(m) + x(n))],$$
$$x = 2^{-1}(x(m) + x(n)) \in A, \quad \|z - x\| \geq \alpha.$$

Применяя к $z - x(m)$, $z - x(n)$ тождество параллелограмма, получаем

$$\|x(m) - x(n)\|^2 + 4\alpha^2 \leq \|x(m) - x(n)\|^2 + \|2(z - x)\|^2$$
$$\leq 2[\|z - x(n)\|^2 + L\|z - x(m)\|^2] \leq 2[(\alpha + 1/n)^2 + (\alpha + 1/m)^2],$$

$$\|x(m) - x(n)\|^2 \leq 4\alpha(1/m + 1/n) + 2(1/m^2 + 1/n^2).$$

Значит, последовательность $x(n)$ сходится.

Так как пространство H полное, то существует точка $a \in H$, к которой сходится последовательность $x(n) \in A$. А так как подпространство A замкнутое, то $a \in A$. Докажем, что a — ближайшая к z точка A. Так как $\alpha \leq \|z - x(n)\| \leq \alpha + 1/n$, то $\|z - a\| = \lim \|z - x(n)\| = \alpha$. Значит, $\|z - a\| = \min\{\|z - x\| : x \in A\}$. Утверждение 1 теоремы доказано. Утверждения 2 и 3 следуют из леммы в п. 2.2.6, 7. ■

Для гильбертовых пространств верны предложение об ортопроекциях в п. 2.2.6, 7 и теорема об ортогональном разложении в п. 2.2.6, 8.

4.1.2. Непрерывные линейные функционалы

Непрерывный линейный функционал на гильбертовом пространстве определяется скалярным произведением и коэффициентом.

1. Геометрическую характеристику непрерывности линейных функционалов на нормированном пространстве E дает

Предложение. *Линейный функционал непрерывен ессли его ядро замкнуто.*

□ 1) Пусть $\varphi \in E'$, $z_n \in \operatorname{Ker}\varphi$, $z \in E$ и $z_n \to z$. Тогда $\varphi(z) = \lim \varphi(z_n) = 0$ и $z \in \operatorname{Ker}\varphi$. Значит, $\operatorname{Ker}\varphi$ замкнуто.

2) Пусть $\varphi \in E^*$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ замкнуто. Для доказательства $\varphi \in E'$ достаточно показать, что функционал φ непрерывен в точке 0. Предположим противное: $\varphi(z_n) \nrightarrow 0$ для некоторой $z_n \to 0$, $z_n \in E$. В этом случае $|\varphi(z_{n(k)})| \geq \alpha$ для некоторых $\alpha > 0$ и $n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < \ldots$ и, следовательно,

$$\|y_k/\varphi(y_k)\| = \|y_k\|/|\varphi(y_k)| \leq \|y_k\|/\alpha \to 0$$

для $y_k = z_{n(k)}$. Вместе с тем $\varphi(y_k/\varphi(y_k)) = \varphi(y_k)/\varphi(y_k) = 1$. Поэтому $\varphi(x_k) = \varphi(y_1/\varphi(y_1) - y_k/\varphi(y_k)) = 1 - 1 = 0$ и $x_k = y_1/\varphi(y_1) - y_k/\varphi(y_k) \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Следовательно, так как $\|y_k/\varphi(y_k)\| \to 0$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ замкнуто,

$$\begin{aligned} y_1/\varphi(y_1) &= \lim[x_k + y_k/\varphi(y_k)] \\ &= \lim x_k + \lim(y_k/\varphi(y_k)) = \lim x_k + 0 = \lim x_k \in \operatorname{Ker}\varphi, \end{aligned}$$

т. е. $\varphi(y_1/\varphi(y_1)) = 0$. Это противоречит $\varphi(y_1/\varphi(y_1)) = 1$. ■

Ядра линейных функционалов называются еще *гиперплоскостями.* По доказанному, ядро каждого непрерывного линейного функционала есть замкнутая гиперплоскость. Вследствие линейности функционалов их ядра являются подпространствами векторного пространства, на котором определены функционалы.

Упражнение. Доказать, что гиперплоскость в нормированном пространстве либо замкнута, либо всюду плотна.

2. Опишем непрерывные линейные функционалы на гильбертовом пространстве. Рассмотрим гильбертово пространство H, вектор $c \in H$, сопряженное с H пространство H' непрерывных линейных функционалов на H.

Лемма 1. *Равенство $\varphi(z) = cz$ $(z \in H)$ определяет непрерывный линейный функционал φ на H.*

□ В самом деле, это равенство каждому вектору $z \in H$ ставит в соответствие число $cz \in \mathbb{F}$ и поэтому определяет функционал φ на H, имеющий значение $\varphi(z) = cz$ для вектора z. Так как скалярное произведение линейно по второй переменной, то φ — линейный функционал:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) &= c(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\\ &= \alpha_1 c(z_1) + \alpha_2 c(z_2) = \alpha_1 \varphi(z_1) + \alpha_2 \varphi(z_2)\end{aligned}$$

для каждых $z_1, z_2 \in H$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.

Из неравенства Коши вытекает, что $|\varphi(z)| = |cz| \leq \|c\| \cdot \|z\|$, $z \in H$. Значит, линейный функционал φ непрерывен в точке 0 и, следовательно, непрерывен. ■

Рассмотрим $b, c \in H$.

Лемма 2. $bz = cz (z \in H) \Longleftrightarrow \|b - c\| = 0$.

□ Если $bz = cz$ $(z \in H)$, то $(b - c)z = 0$ $(z \in H)$. В частности, $\|b - c\|^2 = (b - c)(b - c) = 0$ при $z = b - c$ и, следовательно, $\|b - c\| = 0$.

Если $\|b - c\| = 0$, то из неравенства Коши вытекает, что $0 \leq |bz - cz| = |(b - c)z| \leq \|b - c\| \cdot \|z\| = 0$ и, следовательно, $bz = cz$. ■

Следствие. $bz = cz\, (z \in H) \Leftrightarrow b = c$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in H'$ имеет значения $\varphi(z) = cz$ $(z \in H)$ при некотором $c \in H$. Тогда $\|\varphi\| = \|c\|$.*

□ По определению, $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(u)| : u \in H,\ \|u\| \leq 1\}$. Используя неравенство Коши, получаем $|\varphi(u)| = |cu| \leq \|c\| \cdot \|u\| \leq \|c\|$ $(u \in H,\ \|u\| \leq 1)$. Следовательно, $\|\varphi\| \leq \|c\|$.

Докажем обратное неравенство. Заметим, что $\varphi(c) = cc = \|c\|^2$. Если $\|c\| = 0$, то $\|\varphi\| = \|c\| = 0$. Если $\|c\| \neq 0$, то $\varphi(u) = \varphi(\gamma c) = \gamma\varphi(c) = \gamma \cdot \|c\|^2 = \|c\|$ при $u = \gamma c$, $\gamma = \|c\|^{-1}$. Так как $\|u\| = \gamma \cdot \|c\| = 1$, то $|\varphi(u)| \leq \|\varphi\|$. Следовательно, $\|c\| \leq \|\varphi\|$. ■

Вектор $c \in H$, определяющий непрерывный линейный функционал $\varphi \in H'$ со значениями $\varphi(z) = cz$ $(z \in H)$ называется *коэффициентом* φ.

3. Леммы 1–3 описывают некоторый класс непрерывных линейных функционалов на невырожденном гильбертовом пространстве H. Возникает естественный вопрос: исчерпывает ли этот класс все непрерывные линейные функционалы на H? Ответ дает

Теорема Рисса. *Для каждого* $\varphi \in H'$ *существует* $c \in H$ *такой, что* $\varphi(z) = cz$ $(z \in H)$.

$\square$ Если $\varphi = 0$, то $c = 0$.

Пусть $\varphi \neq 0$. Тогда $A = \operatorname{Ker}\varphi$ есть замкнутая гиперплоскость в H. По теореме об ортогональной проекции для каждого $z \in H$ существуют $x \in A$ и $y \in B = A^{\perp}$ такие, что $x + y = z$. Причем есть $b \in B$, $b \notin A$. (Иначе $B \subseteq A$, $x + y \in A$ для каждых $x \in A$, $y \in A$ и $A = H$. Это противоречит тому, что $\varphi \neq 0$.) Отсюда следует, что $H = A + \mathbb{F}b$.

Таким образом, для каждого $z \in H$ существуют $x \in A$, $t \in \mathbb{F}$ такие, что $z = x + tb$, где b — выбранный вектор из $B = A^{\perp}$, не принадлежащий A. Заметим, что $\|b\| \neq 0$. (Иначе $b = \lim a_n$ при $a_n = 0 \in A$, и так как A замкнуто, то $b \in A$.)

Подберем теперь коэффициент c для φ. Так как $H = A + \mathbb{F}b$, то для каждых $c, z \in H$ существуют $a, x \in A$ и $\gamma, t \in \mathbb{F}$ такие, что $c = a + \gamma b$, $z = x + tb$. Поэтому

$$\varphi(z) = \varphi(x + tb) = \varphi(x) + t\varphi(b) = t\varphi(b),$$
$$cz = (a + \gamma b)(x + tb) = ax + \bar{\gamma}t \cdot \|b\|^2.$$

(Скалярные произведения $bx = ab = 0$ для $a, x \in A$ и $b \in A^{\perp}$. А $bb = \|b\|^2$.) Если $a = 0$ и $\bar{\gamma} = \|b\|^{-2} \cdot \varphi(b)$, то

$$\varphi(z) = t\varphi(b) = t\varphi(b)\|b\|^{-2}\|b\|^2 = \bar{\gamma}t \cdot \|b\|^2 = cz.$$

Таким образом, $c = 0 + \overline{\varphi(b)} \cdot \|b\|^{-2} \cdot b = \varphi(b) \cdot \|b\|^{-2} \cdot b$. Теорема Рисса доказана. $\blacksquare$

Коротко теорему Рисса о представлении можно сформулировать так: *каждый непрерывный линейный функционал на гильбертовом пространстве имеет коэффициент.*

Теорема Рисса позволяет вместо непрерывных линейных функционалов на гильбертовом пространстве рассматривать его точки. Это часто бывает удобно.

4.1.3. Пространства $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, \mu)$

Эти пространства — одни из самых важных гильбертовых пространств.

1. Обозначим $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, \mu)$ множество измеримых по мере μ функций $f\colon U \to \mathbb{F}$ с интегрируемыми по мере μ квадратами

$f^2 \colon U \to \mathbb{F}$. Таким образом, по определению, для измеримой по μ функции f верно $f \in \mathscr{L}^2 \Leftrightarrow f^2 \in \mathscr{L}$, где $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, \mu)$ — множество всех числовых функций на U, интегрируемых по мере μ.

Так как $|fg| \le 2^{-1}(|f|^2 + |g|^2)$, то произведение $fg \in \mathscr{L}$ для каждых $f, g \in \mathscr{L}^2$. (Не утверждается, что $fg \in \mathscr{L}^2$. Кроме того, составляющее интегрируемое произведение fg функции f, g могут не быть интегрируемыми.)

Упражнение. Привести контрпримеры.

Легко проверить, что $\mathscr{L}^2$ с обычными операциями образует векторное пространство:

$$(\alpha f + \beta g)^2 = \alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta fg + \beta^2 g^2 \in \mathscr{L},$$

если $f^2, g^2 \in \mathscr{L}$, и, следовательно, $fg \in \mathscr{L}$.

Равенство $\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g$ $(f, g \in \mathscr{L}^2)$ определяет скалярное произведение для $\mathscr{L}^2$. В самом деле,

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g = \overline{\int \bar{g} f} = \overline{\langle g, f\rangle},$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle &= \int (\bar{\alpha}_1 \bar{f}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{f}_2) g \\ &= \bar{\alpha}_1 \int \bar{f}_1 g + \bar{\alpha}_2 \int \bar{f}_2 g = \bar{\alpha}_2 \langle f_2, g\rangle,\end{aligned}$$

$$\langle f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2\rangle = \beta_1 \langle f, g_1\rangle + \beta_2 \langle f, g_2\rangle,$$
$$\langle f, f\rangle = \int \bar{f} f = \int |f|^2 \ge 0.$$

По общему для евклидовых пространств правилу равенство

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \quad (f \in \mathscr{L}^2)$$

определяет норму $\|\cdot\|$ для $\mathscr{L}^2$. Она может не отделять точки.

Примеры. 1) $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, dx)$. 2) $\mathscr{L}^2([0,1], dx)$. 3) $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{N}, dn) = l^2$.

В примерах 1, 2 пространство $\mathscr{L}^2$ неотделимо, а в примере 3 со считающей мерой оно отделимо.

2. Докажем лемму, описывающую связь между сходимостью в $\mathscr{L}^2$ и сходимостью почти всюду. Сходимость в $\mathscr{L}^2$ называется *сходимостью в среднем* (*квадратичном*).

По определению, последовательность $f_n \in \mathscr{L}^2$ сходится к $f \in \mathscr{L}^2$ в среднем, если

$$\|f_n - f\| = \left(\int |f_n - f|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Из сходимости в среднем не следует сходимость почти всюду. А из сходимости почти всюду не вытекает сходимость в среднем.

Упражнение. Привести контрпримеры.

Лемма Рисса. *Если последовательность функций из $\mathscr{L}^2$ сходится в среднем, то некоторая ее подпоследовательность почти всюду сходится.*

$\square$ (1) Пусть последовательность $f_n \in \mathscr{L}^2$ сходится в среднем: $\|f_q - f_p\| \to 0$ $(q, p \to \infty)$. Нужно доказать, что существует подпоследовательность $g_n = f_{r(n)}$, почти всюду сходящаяся: $|g_q(x) - g_p(x)| \to 0$ $(q, p \to \infty)$ для почти всех $x \in U$ по мере μ.

Заметим, что для каждого номера n существует номер $r(n)$, при котором $\|g_{n+1} - g_n\| \le 2^{-n}$ для $g_n = f_{r(n)}$. И номера $r(n)$ можно выбрать строго возрастающими. В самом деле, так как f_n сходится в среднем, то существует номер $r(1)$, при котором $\|f_q - f_p\| \le 2^{-1}$ $(p, q \ge r(1))$. Возьмем произвольный номер n и предположим, что для номеров $m \le n$ выбраны строго возрастающие номера $r(m)$, при которых $\|f_q - f_p\| \le 2^{-m}$ $(p, q \ge r(m))$. Так как f_n сходится в среднем, то существует номер $r(n+1) > r(n)$, при котором $\|f_q - f_p\| \le 2^{-(n+1)}$ $(p, q \ge r(n+1))$. По принципу индукции отсюда следует, что существует строго возрастающая последовательность номеров $r(n)$, при которых $\|f_q - f_p\| \le 2^{-n}$ $(p, q \ge r(n))$. В частности, это неравенство верно для $p = r(n)$, $q = r(n+1)$, что и утверждалось.

(2) Для каждого номера n рассмотрим функцию

$$s_n = |g_1| + \sum_{1 \le m < n} |g_{m+1} - g_m|$$

(в частности, $s_1 = |g_1|$). Так как $g_1, g_{m+1} - g_m \in \mathscr{L}^2$, то $|g_1|$, $|g_{m+1} - g_m| \in \mathscr{L}^2$ и, следовательно, $s_n \in \mathscr{L}^2$. Ясно, что последовательность s_n возрастает.

(3) Последовательность функций $h_n = s_n^2$ удовлетворяет условиям теоремы Леви. В самом деле, так как $s_n \in \mathscr{L}^2$, то $h_n \in \mathscr{L}$. Последовательность h_n возрастает вместе с последовательностью s_n. При этом (h_n) интегрально ограничена:

$$\int h_n = \int s_n^2 = \|s_n\|^2 = \||g_1| + \sum_{1 \le m < n} |g_{m+1} - g_m|\|^2$$
$$\le \left(\|g_1\| + \sum_{1 \le m < n} \|g_{m+1} - g_m\|\right)^2 \le \left(\|g_1\| + \sum_{1 \le m < n} 2^{-m}\right)^2$$
$$\le (\|g_1\| + 1)^2$$

для каждого номера n. По теореме Леви (h_n) почти всюду сходится к некоторой $h \in \mathscr{L}$. Так как $h_n = s_n^2 \ge 0$, то $h_n \to h$ влечет $s_n \to s = h^{1/2}$.

(4) Значит, ряд функций $|g_1|, |g_{m+1} - g_m|$ $(m \ge 1)$ почти всюду имеет сумму s. Следовательно, ряд $g_1, g_{m+1} - g_m$ $(m \ge 1)$ тоже почти всюду имеет сумму: последовательность

$$g_n = g_1 + \sum_{1 \le m < n} (g_{m+1} - g_m)$$

частичных сумм этого ряда почти всюду сходится. Значит, подпоследовательность $(f_{r(n)})$ последовательности (f_n) почти всюду сходится. ■

3. Докажем теперь главный результат.

Теорема. *$\mathscr{L}^2$ является гильбертовым пространством.*

□ Нужно доказать, что в среднем каждая сходящаяся в себе последовательность функций $f_n \in \mathscr{L}^2$ сходится к некоторой функции $f \in \mathscr{L}^2$ $(\|f_n - f\| \to 0)$.

Возьмем сходящуюся в себе последовательность $f_n \in \mathscr{L}^2$. По лемме Рисса существует сходящаяся почти всюду подпоследовательность $g_n = f_{r(n)}$. Рассмотрим функцию $f\colon U \to \mathbb{F}$ со значениями $f(x) = \lim g_n(x)$, когда $g_n(x)$ сходится, и $f(x) = 0$, когда $g_n(x)$ расходится.

Докажем, что: (1) $f \in \mathscr{L}^2$, (2) $\|f_n - f\text{a}\| \to 0$.

(1) Последовательность функций $g_n = f_{r(n)}$ сходится в себе вместе с последовательностью (f_n): для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(0)$ такой, что $\|g_q - g_p\| \le \varepsilon$ $(q, p \ge n(0))$.

Возьмем $p \geq n(0)$ и рассмотрим последовательность функций $h_n = |g_{p+n} - g_p|^2$ $(n \geq 1)$. Заметим, что (h_n) удовлетворяет условиям леммы Фату. В самом деле, $h_n \geq 0$, и так как $g_{p+n} - g_p \in \mathscr{L}^2$, то $h_n \in \mathscr{L}$. Последовательность (h_n) интегрально ограничена:

$$\int h_n = \int |g_{p+n} - g_p|^2 = \|g_q - g_p\|^2 \leq \varepsilon^2$$

для каждого номера n. Наконец, так как $g_{p+n} \to f$ $(n \to \infty)$ почти всюду, то $h_n \to h = |f - g_p|^2$ почти всюду. По лемме Фату $h \in \mathscr{L}$ и

$$\int h = \int |f - g_p|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (p \geq n(0)). \tag{$*$}$$

Следовательно, $f - g_p \in \mathscr{L}^2$. Так как $g_p \in \mathscr{L}^2$, то и

$$f = (f - g_p) + g_p \in \mathscr{L}^2.$$

(2) Неравенство $(*)$ означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(0)$, при котором $\|f - g_p\| \leq \varepsilon$ $(p \geq n(0))$. Вместе с тем, так как $r(p) \geq p$ и последовательность f_n сходится в среднем, то $\|g_p - f_n\| = \|f_{r(p)} - f_n\| \leq \varepsilon$ $(p, n \geq n(1))$ при некотором $n(1) \geq n(0)$. Следовательно,

$$\|f - f_n\| \leq \|f - g_p\| + \|g_p - f_n\| \leq 2\varepsilon \quad (p, n \geq n(1)).$$

Значит, последовательность (f_n) сходится к f в среднем. ■

Следствие. *Каждый непрерывный линейный функционал* φ *на* $\mathscr{L}^2$ *определяется некоторой функцией* f *из* $\mathscr{L}^2$ *и имеет значения* $\varphi(g) = \int \bar{f} g$ $(g \in \mathscr{L}^2)$.

□ Так как пространство $H = \mathscr{L}^2$ гильбертово, то для него верна теорема Рисса о представлении непрерывных линейных функционалов. Поэтому каждый $\varphi \in H'$ имеет коэффициент $c = f \in H$ и $\varphi(g) = \int \bar{f} g$ $(g \in H)$, что и требовалось доказать. ■

Пространства $\mathscr{L}^2$ широко используются в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Замечание. В книге [109] элементы теории гильбертовых пространств излагаются в форме задач с указаниями и решениями. Подробно описываются различные виды операторов: операторы умножения и сдвига, компактные, субнормальные, теплицевы и представляемые бесконечными матрицами.

Том 2 книги [66] посвящен циклу классических работ по теории слабо замкнутых алгебр операторов в гильбертовых пространствах. В комментариях кратко описывается современное состояние теории. Выделяются вопросы, связанные с общей теорией меры и эргодической теорией.

4.2. Ряды Фурье

Современная теория рядов Фурье изложена в книге [123].

Здесь описываются ортогональные ряды в сепарабельном гильбертовом пространстве. Как правило, предполагается, что скалярное произведение невырожденное и норма отделяет точки. К этому случаю можно перейти с помощью факторизации по подпространству векторов нулевой нормы. Эквивалентности тогда превращаются в равенства.

4.2.1. Коэффициенты Фурье

Так называются скалярные произведения данного вектора на векторы из выбранной ортонормальной базы.

1. Рассмотрим гильбертово пространство H, в котором есть счетное всюду плотное множество Q: для каждого $z \in H$ существует последовательность $x_n \in Q$, сходящаяся к z. Такие пространства называются *сепарабельными.* В них существуют ортонормальные базовые последовательности.

Возьмем конечное или бесконечное число $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Выберем максимальное семейство линейно независимых векторов $x_n \in Q$ $(1 \le n < m)$. Его линейная оболочка содержит Q и поэтому вместе с Q плотна в H. Равенства

$$y_n = x_n - \sum_{1 \le k < n} (x_n e_k) e_k, \quad e_n = \|y_n\|^{-1} \cdot y_n,$$

как легко проверить, определяют ортонормированное семейство векторов e_n $(1 \le n < m)$: $e_k e_n = 0$ $(k \ne n)$, $\|e_n\| = 1$. Здесь произведения векторов скалярные, а равенства в неотделимом случае означают эквивалентности. Линейная независимость тоже определяется с точностью до эквивалентности. Это обеспечивает

$\|y_n\| \neq 0$ (так как равенство $\|y_n\| = 0$ влечет линейную зависимость $x_1, \ldots, x_n$).

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

Индуктивный способ получения ортонормального семейства векторов e_n из векторов x_n с помощью указанных равенств называется *алгоритмом Шмидта.* Векторы e_n являются линейными комбинациями векторов x_n и наоборот. Следовательно, линейная оболочка ортонормированного семейства векторов e_n совпадает с линейной оболочкой семейства векторов x_n и плотна в H. То есть векторы e_n образуют *ортонормальную базу* гильбертова пространства H: для каждого $z \in H$ существует последовательность линейных комбинаций e_n, сходящаяся к z. Больше того, как будет показано, каждый вектор z равен сумме ряда из векторов e_n с некоторыми числовыми коэффициентами c_n: $z = \sum c_n e_n$ $(1 \leq n < m)$.

Примеры. Возьмем интервал $U = |a, b|$ вещественной прямой $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, алгебру $\mathscr{R}$, порожденную ограниченными интервалами в U, меру μ на $\mathscr{R}$, пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, \mu)$ измеримых по μ числовых функций на U, квадраты которых интегрируемы по μ, последовательность степенных функций x^n со значениями $x^n(t) = t^n$ $(t \in U)$.

Легко убедиться в том, что функции x^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ линейно независимы. (Если полином тождественно равен нулю на невырожденном интервале, то его коэффициенты равны нулю.) Ортонормируя последовательность x^n алгоритмом Шмидта, получаем некоторую ортонормальную последовательность полиномов p_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\int p_j(t) \cdot p_k(t)\, d\mu(t) = 0 \quad (j \neq k), \qquad \int p_n^2(t)\, d\mu(t) = 2.$$

1) Пусть $a = -1$, $b = 1$ и $d\mu(t) = dt$ — лебегова мера. Тогда p_n — полином Лежандра.

2) Пусть $a = -1$, $b = 1$ и $d\mu(t) = (1 - t^2)^{-1/2} dt$ — мера с производной $f(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ $(-1 < t < 1)$ по лебеговой мере dt. Тогда p_n — полином Чебышева.

3) Пусть $a = -\infty$, $b = \infty$ и $d\mu(t) = \exp(-t^2)dt$. Тогда p_n — полином Эрмита.

4) Пусть $a = 0$, $b = \infty$ и $d\mu(t) = \exp(-t)dt$. Тогда p_n — полином Лагерра.

5) Пусть $U = [-\pi, \pi]$ и $d\mu(t) = dt$ — лебегова мера. Семейство функций e_k на $[-\pi, \pi]$ со значениями $e_k(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-ikt}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ образует ортонормальную базу пространства $\mathscr{L}^2$. Эта база называется *тригонометрической*, так как по формуле Эйлера

$$e^{-ikt} = \cos(kt) - i \sin(kt).$$

Если $U = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, то ортонормальную базу образуют функции e_k на $[a, b]$ со значениями

$$e_k(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-i \cdot 2\pi(b-a)^{-1} k (t - 2^{-1}(a+b))\}.$$

Замечание. Строго говоря, векторы e_k в тригонометрической базе нужно было бы перенумеровать, чтобы получился ряд. Но все сказанное верно для любых ортонормальных семейств, и нумерацию поэтому можно не вводить. При переходе к косинусам и синусам она получается естественно.

2. Если гильбертово пространство H с ортонормальной базой из векторов e_n $(1 \le n < m)$ конечномерно $(m < \infty)$, то

$$x = \sum_{1 \le n < m} \xi_n e_n, \quad \xi_n = e_n x \quad (x \in H).$$

Оказывается, это верно и при $m = \infty$. Имеем:

$$x = \lim s_n, \quad s_n = \sum_{1 \le k \le n} \xi_k e_k, \quad \|x - s_n\| \to 0.$$

Скалярные произведения $\xi_n = e_n x$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x в базе из векторов e_n или его *координатами* в этой базе. А ряд чисел $\xi_n e_n$ $(\xi_n = e_n x)$ называется *рядом Фурье* для x в базе (e_n).

Докажем, что ряд Фурье имеет нужную сумму. Рассмотрим натуральное число $n < m$ и подпространство A пространства H, порожденное первыми n базовыми векторами $e_1, \ldots, e_n$. Вычислим расстояние от точки $x \in H$ с координатами $\xi_k = e_k x$ до точки $a = \sum \alpha_k e_k \in A$ $(\alpha_k \in \mathbb{F},\ 1 \le k \le n)$.

Лемма. $\|x - a\|^2 = \|x\|^2 - \sum |\xi_k|^2 + \sum |\xi_k - \alpha_k|^2$.

□ Используя ортонормальность векторов e_k, получаем $\|x - a\|^2 = (x-a)(x-a) = xx - xa - ax + aa = \|x\|^2 - \sum \alpha_k \bar{\xi}_k - \sum \bar{\alpha}_k \xi_k + \sum |\alpha_k|^2 = \|x\|^2 - \sum |\xi_k|^2 + \sum |\xi_k - \alpha_k|^2$, так как $|\xi_k - \alpha_k|^2 = (\xi_k - \alpha_k)(\bar{\xi}_k - \bar{\alpha}_k) = |\xi_k|^2 - \alpha_k \bar{\xi}_k - \bar{\alpha}_k \xi_k + |\alpha_k|^2$ для любых чисел ξ_k, α_k. ■

Обозначим $B = A^\perp$ ортогональное дополнение A в H. Рассмотрим ортогональные проекторы $P\colon H \to A$ и $Q\colon H \to B$. Из доказанной леммы вытекает

Следствие. $Px = \sum \xi_k e_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

$\square$ По лемме при $\alpha_k = \xi_k$ и $a = \sum \alpha_k e_k \in A$ расстояние от x до a наименьшее. Значит, a есть ближайшая к x точка A. По теореме об ортогональной проекции отсюда следует, что $Px = a$ (Px эквивалентно a в неотделимом случае). $\blacksquare$

По определению ортогональной проекции при любых числах α_k верно равенство $(x - \sum \xi_k e_k)(\sum \alpha_k e_k) = 0$. Из леммы сразу следует, что (при $\alpha_k = \xi_k$)

$$\|x\|^2 = \sum |\xi_k|^2 + \left\|x - \sum \xi_k e_k\right\|^2 .$$

(Это равенство следует и из теоремы Пифагора.) Отсюда получаем $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|^2 \leq \|x\|^2$ для каждого номера $n < m$.

Неравенство Бесселя. $\sum\limits_{1 \leq n < m} |\xi_n|^2 \leq \|x\|^2$.

Это неравенство позволяет решить задачу о сумме ряда Фурье.

3. Для ортогональных рядов $\alpha_n e_n$ $(\alpha_n \in \mathbb{F})$ в гильбертовом пространстве H с ортонормальной базой из векторов e_n $(1 \leq n < m \leq \infty)$ существует удобный

Критерий суммируемости. *Ряд* $(\alpha_n e_n)$ *имеет сумму в* H *еcсли* $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

$\square$ Пусть $p > n$ и $s_n = \sum\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k e_k$, $s_p = \sum\limits_{1 \leq k \leq p} \alpha_k e_k$. Тогда верны равенства $\|s_p - s_n\|^2 = \left\| \sum\limits_{n < k \leq p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum\limits_{n < k \leq p} |\alpha_k|^2$ вследствие ортонормальности векторов e_k. По критерию Коши отсюда следует сформулированное утверждение. $\blacksquare$

С помощью критерия суммируемости и неравенства Бесселя легко доказывается теорема существования и единственности разложения в ряд Фурье.

Теорема. (1) *Ряд Фурье* $(\xi_n e_n)$, $\xi_n = e_n x$, *для вектора* $x \in H$ *имеет сумму, равную* x.

(2) *Если для чисел* η_n *ряд* $(\eta_n e_n)$ *имеет сумму, равную* x, *то* $\eta_n = \xi_n$.

$\square$ (1) Из неравенства Бесселя следует, что $\sum |\xi_n|^2 < \infty$. По критерию отсюда вытекает, что ряд $\xi_n e_n$ имеет некоторую сумму s. Остается показать, что $s = x$, т. е. что $\|s - x\| = 0$

(s эквивалентно x). Так как e_n образует ортонормальную базу пространства H, то для доказательства равенства $\|s - x\| = 0$ достаточно показать, что $e_j(s - x) = 0$ $(1 \le j < m)$. Рассмотрим частичную сумму $s_n = \sum\limits_{1 \le k \le n} \xi_k e_k$. Заметим, что $e_j(x - s_n) = \xi_j - \sum\limits_k \xi_k e_j e_k = e_j - e_j = 0$ при $1 \le j \le n$. Отсюда вследствие непрерывности скалярного произведения

$$e_j(s - x) = e_j(x - \lim_n s_n) = \lim_n e_j(x - s_n) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \le j < m.$$

(2) Пусть $\sum \eta_n e_n = x = \sum \xi_n e_n$. Тогда $\sum (\eta_n - \xi_n) e_n = 0$. Отсюда $\eta_j - \xi_j = e_j(\eta_j - \xi_j) e_j = e_j \sum (\eta_n - \xi_n) e_n = 0$ при $1 \le j < m$. ■

Пример. Пусть $H = \mathscr{L}^2([-\pi, \pi], dt)$ и (e_k) — тригонометрическая база. Тогда коэффициенты Фурье функции $x \in H$ выражаются равенствами

$$\xi_k = e_k x = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} x(t)\, dt.$$

Ряд Фурье $(\xi_k e_k)$ суммируется в среднем:

$$\left\| x - \sum_{|k| \le n} \xi_k e_k \right\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| x(t) - \sum_{|k| \le n} \xi_k e_k \right|^2 dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание. Сходимость последовательности частичных сумм $s_n = \sum\limits_{|k| \le n} \xi_k e_k$ к функции x в каждой точке и тем более равномерная сходимость $s_n \to x$ требуют дополнительных условий. Основываясь на лемме Рисса, можно только утверждать, что существует подпоследовательность последовательности s_n, сходящаяся к x почти в каждой точке. Л. Карлесон доказал, что и вся последовательность s_n сходится почти в каждой точке [132; 123, п. 10.4.5].

4. Для каждого вектора $x \in H$ и его коэффициентов Фурье $\xi_n = e_n x$ верно равенство Парсеваля, которое уточняет неравенство Бесселя.

Равенство Парсеваля. $\|x\|^2 = \sum |\xi_n|^2$.

□ Рассмотрим частичные суммы $s_n = \sum\limits_{1\le k\le n} \xi_k e_k$, $\sigma_n^2 = \sum\limits_{1\le k\le n} |\xi_k|^2$. Как было показано, $\|x\|^2 = \sigma_n^2 + \|x - s_n\|^2$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2 = \sum |\xi_k|^2$, $\|x - s_n\| \to 0$. Следовательно, $\|x\|^2 = \sigma^2$. ■

Равенство Парсеваля обобщает теорему Пифагора на ортонормальные семейства векторов и позволяет выразить длину вектора x через коэффициенты Фурье $\xi_n = e_n x$:

$$\|x\| = \left(\sum |\xi_n|^2\right)^{1/2}.$$

Как и теорема Пифагора, это равенство часто применяется.

4.2.2. Изоморфизм гильбертовых пространств

Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны друг другу.

1. Рассмотрим пространство l^2 последовательностей чисел ξ_n $(1 \le n < m)$ и сепарабельное гильбертово пространство H. По доказанному каждому вектору $x \in H$ соответствует в l^2 последовательность коэффициентов Фурье $\xi_n = e_n x$. Равенство Парсеваля показывает, что такое соответствие сохраняет длины векторов. Ясно, что оно линейно, т. е. является линейной изометрией H в l^2. Если доказать, что каждая последовательность из l^2 составлена из коэффициентов Фурье некоторого вектора из H, то будет доказано, что гильбертовы пространства H и l^2 изоморфны с точностью до эквивалентности векторов.

2. Как и раньше, предполагается, что H имеет ортонормальную базу из векторов e_n $(1 \le n < m \le \infty)$. То есть H является сепарабельным гильбертовым пространством конечной или бесконечной размерности. Соответственно и l^2 состоит из конечных или бесконечных последовательностей ξ_n $(1 \le n < m \le \infty)$ таких, что $\sum |\xi_n|^2 < \infty$.

Теорема Рисса — Фишера. *Пусть $(\xi_n) \in l^2$. Тогда существует $x \in H$ такой, что $\xi_n = e_n x$.*

□ По критерию суммируемости рядов $\xi_n e_n$ в H из условия теоремы следует, что существует вектор $x = \sum \xi_n e_n \in H$. Вследствие единственности разложения в ряд Фурье $\xi_n = e_n x$. ■

Следствие. *Все сепарабельные гильбертовые пространства данной размерности изоморфны друг другу* (*с точностью до эквивалентности*).

Пример. Пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2([a,b],dt)$ функций на отрезке $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ изоморфно с точностью до эквивалентности пространству $l^2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{N}, dn)$ последовательностей чисел.

Этот изоморфизм широко используется в теории и приложениях.

4.3. Пространства функций

В этом разделе описываются некоторые часто встречающиеся пространства функций (см. [28, гл. 4]).

4.3.1. Метрические пространства

1. Пополнение метрического пространства. Рассмотрим метрические пространства (E_1, d_1), (E_2, d_2) и отображение $\varphi\colon E_1 \to E_2$. Если

$$d_1(x_1, y_1) = d_2(\varphi(x_1), \varphi(y_1)) \quad (x_1, y_1 \in E_1),$$

то будем говорить, что φ *сохраняет расстояние* или что φ является *изометрией*. Когда (E_1, d_1) отделимое, изометрия φ взаимно однозначна. Накрывающие изометрии называются *изоморфизмами метрических пространств* (с точностью до эквивалентности).

Назовем метрическое пространство $(\bar{E}, \bar{d})$ *пополнением* метрического пространства (E, d), если: 1) пространство $(\bar{E}, \bar{d})$ полное; 2) пространство (E, d) изоморфно некоторому всюду плотному подпространству пространства $(\bar{E}, \bar{d})$. Такой изоморфизм позволяет отождествлять множество E с его образом в $\bar{E}$ и считать E частью $\bar{E}$. Это упрощает язык.

Теорема о пополнении. *Для каждого метрического пространства существует пополнение. Все пополнения данного метрического пространства изоморфны друг другу.*

Эта теорема позволяет вместо произвольных метрических пространств рассматривать полные и использовать все преимущества полноты.

Примеры. 1) Если $E = \mathbb{Q}$ — пространство рациональных чисел, то его пополнение $\bar{E} = \mathbb{R}$ — пространство вещественных чисел (метрики обычные).

2) Если $E = \mathscr{P}[a, b]$ — пространство полиномов на отрезке $[a, b]$, то его пополнение $\bar{E} = C[a, b]$ — пространство непрерывных функций на $[a, b]$ (метрики равномерные). Это следует из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

3) Если $E = \mathscr{S}[a, b]$ — пространство ступенчатых функций на отрезке $[a, b]$, то его пополнение $\bar{E} = \mathscr{D}[a, b]$ — пространство функций без сложных разрывов на $[a, b]$ (т. е. имеющих в каждой точке пределы слева и справа; метрики равномерные).

В общем случае элементами пополнения $\bar{E}$ являются сходящиеся последовательности точек пространства E. Если последовательность сходится к какой-нибудь точке E, то она отождествляется с этой точкой. А если последовательность сходится к себе, но не сходится ни к какой точке E, то она служит новым элементом, которым пополняется E. Метрика $\bar{d}$ для пополнения $\bar{E}$ определяется по метрике d для E с помощью перехода к пределу [45, гл. II, § 3]:

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim d(x_n, y_n) \quad (\bar{x} = \lim x_n,\ \bar{y} = \lim y_n \in \bar{E}).$$

При пополнении сохраняются инвариантность и абсолютная однородность метрики. Поэтому нормированные пространства пополняются до банаховых.

2. Непрерывное продолжение. При пополнении метрических и нормированных пространств часто бывает нужно продолжать функции по непрерывности. Рассмотрим: метрические пространства E и F, множество $A \subseteq E$ и его замыкание $\bar{A}$, функцию $f\colon A \to F$. Из общих теорем о непрерывных продолжениях, доказанных в пп. 3.1.3, 3.1.13, 3.1.14, следуют такие же теоремы для метрических пространств.

Теорема о продолжении. *Пусть метрическое пространство F отделимо и функция $f\colon A \to F$ имеет предел в каждой точке $\bar{x} \in \bar{A}$. Тогда равенство*

$$\bar{f}(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$$

определяет единственную непрерывную функцию $\bar{f}\colon \bar{A} \to F$, продолжающую f.

В общем случае в теореме для определения непрерывного продолжения $\bar{f}$ функции f нужно вместо равенства писать

$$\bar{f}(\bar{x}) \in \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$$

и не утверждать, что непрерывное продолжение единственное. Или нужно отождествлять точки, расстояния между которыми равно нулю, т. е. заменять рассматриваемое пространство отделимым, которое им порождается при таком отождествлении точек. Можно рассматривать эквивалентности вместо равенств.

Из теоремы о продолжении вытекает следствие для равномерно непрерывных функций.

Следствие. *Пусть метрическое пространство F отделимо, полно и функция $f\colon A \to F$ равномерно непрерывна. Тогда существует единственная равномерно непрерывная функция $\bar{f}\colon \bar{A} \to F$, продолжающая f.*

Теорему о равномерно непрерывном продолжении можно сформулировать и так: если F отделимо, полно и функция f равномерно непрерывна, то ее непрерывное продолжение $\bar{f}$ существует и равномерно непрерывно. Эта теорема позволяет продолжать, в частности, ограниченные линейные операторы в банаховых пространствах с векторных подпространств на их замыкания. Так получают, например, обобщенные решения некоторых дифференциальных уравнений.

4.3.2. Гладкие функции

Сначала рассмотрим самый широкий класс — непрерывные функции, а потом некоторые другие.

1. Пространство непрерывных функций. Рассмотрим: метрическое пространство (E, d) и банахово пространство F, компактное множество $A \subseteq E$ и векторное пространство $\mathscr{C} = \mathscr{C}(A, F)$ непрерывных отображений A в F. Как обычно, будем считать пространство F отделимым.

Для каждого $f \in \mathscr{C}$ множество $f(A) \subseteq F$ компактно и, следовательно, ограничено. Поэтому можно определить норму для $\mathscr{C}$ с помощью равенства $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}$. Векторное пространство $\mathscr{C}$ с такой нормой образует банахово пространство.

Из определений следует, что сходимость последовательности функций $f_n \in \mathscr{C}$ в этом пространстве эквивалентна равномерной сходимости.

Если в пространстве F есть счетное всюду плотное множество точек, то такое множество есть и в $\mathscr{C}$. То есть $\mathscr{C}$ сепарабельно вместе с F. В частности, пространство числовых непрерывных функций сепарабельно так же, как и пространство векторных конечномерных функций. Это нетрудно проверить, используя равномерную сходимость и компактность области определения функции из $\mathscr{C}$ (см. [45, гл. 2, § 1 и 2]).

Компактные множества в пространстве $\mathscr{C}$ описываются с помощью понятия равностепенной непрерывности.

Множество $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|f(x) - f(y)\| \le \varepsilon \quad (d(x, y) \le \delta;\ x, y \in A)$$

для всех $f \in \mathscr{A}$. Можно сказать, что достаточная близость значений аргумента обеспечивает нужную близость соответствующих значений функций для всех функций равностепенно непрерывного множества.

Обозначим $\mathscr{A}(x)$ множество значений в точке $x \in A$ функций f из $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$:

$$\mathscr{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}.$$

Как всякое множество в F, множество $\mathscr{A}(x)$ может быть относительно компактным.

Теорема Асколи. *Замкнутое множество $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ компактно ессли $\mathscr{A}$ относительно компактно в каждой точке и равностепенно непрерывно.*

Необходимость условий теоремы проверяется просто. Для доказательства достаточности нужно показать, что эти условия обеспечивают существование ε-сети для $\mathscr{A}$ при каждом $\varepsilon > 0$. Она позволяет разбить произведение $A \times F$ на конечное множество прямоугольников с длинами сторон ε и δ. Из этих прямоугольников составляются ступенчатые полоски над A, покрывающие $\mathscr{A}$. Выбрав в каждой такой полоске по функции, получаем ε-сеть для $\mathscr{A}$ (см. [42, гл. 3, § 3] и [124, п. 0.4]).

Если $F = \mathbb{R}^m$, то относительная компактность множества $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ в каждой точке равносильна равномерной ограниченности функций из $\mathscr{A}$: при некотором $\alpha > 0$

$$\|f(x)\| \le \alpha \quad (x \in A;\ f \in \mathscr{A}).$$

Поэтому из теоремы Асколи вытекает [33, гл. 1, § 5]

Теорема Арцела. *Если $F = \mathbb{R}^m$, то замкнутое множество $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ компактно ессли $\mathscr{A}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Равномерная ограниченность множества $\mathscr{A}$ означает его ограниченность в нормированном пространстве $\mathscr{C}$: $\|f\| \leq \alpha$ для всех $f \in \mathscr{A}$ при некотором $\alpha > 0$ (ср. [28, гл. 4, п. 6]).

Примеры. Пусть $E = F = \mathbb{R}$ и $A = [0,1]$. Тогда множество $\mathscr{A}$ линейных функций на $[0,1]$ с коэффициентами из $[-1,1]$ замкнуто, равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и поэтому компактно. А множество $\mathscr{B}$ всех линейных функций на $[0,1]$ не компактно.

Замечание. Различные варианты теоремы Асколи для множеств отображений топологического пространства в равномерное доказываются в [39, гл. 7] и [124, п. 0.4] (см. еще [42, задача 337]).

Сопряженным к пространству $\mathscr{C}$ является пространство $\mathscr{V}$ числовых мер на алгебре, порожденной замкнутыми частями A. Нормой меры служит ее вариация, равная сумме положительных компонент. Каждая числовая мера равна линейной комбинации некоторых положительных мер. Соответствие между линейными функционалами $\varphi \in \mathscr{C}'$ на $\mathscr{C}$ и числовыми мерами $\mu \in \mathscr{V}$ устанавливается с помощью интегрирования [28, гл. 4, п. 6].

Теорема Рисса. *Равенство*

$$\varphi(f) = \int f\,d\mu \quad (f \in \mathscr{C})$$

определяет изометрическое соответствие между пространствами $\mathscr{C}'$ и $\mathscr{V}$.

Пример. Пусть $\mu = \mu_a$ — мера, описывающая распределение единицы массы в точке $a \in A$:

$$\mu_a(X) = 1 \ (a \in X), \quad \mu_a(X) = 0 \ (a \notin X)$$

для каждого $X \subseteq A$. Тогда соответствующий функционал $\varphi = \delta_a$ имеет значения

$$\delta_a(f) = \int f\,d\mu_a = f(a) \quad (f \in \mathscr{C}).$$

Такие функционалы называются дельта-функциями.

2. Пространства гладких функций. Рассмотрим открытое множество U в пространстве $E = \mathbb{R}^q\,(q \geq 1)$ и векторное пространство $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(U)$ p раз непрерывно дифференцируемых числовых функций на U $(0 \le p \le \infty)$. По определению, нуль раз непрерывно дифференцируемыми считаются непрерывные функции. Точками пространства $\mathscr{C}^\infty$ являются функции, дифференцируемые любое число раз. Функции из $\mathscr{C}^p$ будем называть *p-гладкими* или, коротко, *гладкими*.

Для записи производных удобно использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(q))$. Целые положительные числа $\alpha(1), \dots,$ $\alpha(q)$ описывают число раз, которое функция дифференцируется по 1-, ... , q-й переменным. Соответствующая производная обозначается $\partial^\alpha = \partial^{\alpha(1)} \dots \partial^{\alpha(q)}$.

Число $|\alpha| = \alpha(1) + \dots + \alpha(q)$ выражает порядок производной ∂^α. Предполагается, что $|\alpha| \le p$, когда дифференцируемая функция $f \in \mathscr{C}^p$. Производные $\partial^\alpha f$ являются непрерывными числовыми функциями на U. Их значения в точке $u \in U$ обозначаются $\partial^\alpha f(u)$ или $\partial^\alpha fu$. В частности, $\partial^0 f = f$ и $\partial^0 f(u) = f(u)$.

Вместо $\partial_1, \dots, \partial_q$ часто пишут $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_q$. Используются и другие обозначения.

Введем еще *мультифакториал* и *мультистепень*: $\alpha! = \alpha(1)! \dots \alpha(q)!$ и $v^\alpha = v_1^{\alpha(1)} \dots v_q^{\alpha(q)}$ для $v = (v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^q$. Тогда при $p < \infty$ формула Тейлора для $u \in U$, $v \in U - u$ и $f \in \mathscr{C}^p$ запишется следующим образом:

$$f(u+v) = \sum_{|\alpha|<p} (\alpha!)^{-1} \cdot \partial^\alpha fu \cdot v^\alpha + r_p fu(v),$$

$$r_p fu(v) = p \sum_{|\alpha|=p} (\alpha!)^{-1} \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} \partial^\alpha f(u+tv)\, dt \cdot v^\alpha.$$

Рассмотрим семейство гладких числовых функций c_α на U и полином $P(u, \cdot)$ степени m со значениями

$$P(u, \xi) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(u) \cdot \xi^\alpha$$

для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q)$. С помощью формальной замены ξ на ∂ определяется *линейный дифференциальный оператор*

$$P(u, \partial) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(u) \cdot \partial^\alpha$$

на пространстве $\mathscr{C}^p$.

Пример. Если $m = 2$, $c_{jj} = 1$ и $c_{jk} = 0$ при $j \neq k$ $(1 \leq j,\ k \leq q)$, то $P(u, \partial) = \partial_1^2 + \cdots + \partial_q^2 = \Delta$ — оператор Лапласа.

Определим метрику для $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(U)$ в три приема. Сначала для каждых $f \in \mathscr{C}^p$, целого положительного числа $m \leq p$ и компакта $\mathbb{K} \subseteq U$ рассмотрим норму

$$\|f\|_{mK} = \sup\{|\partial^\alpha f(u)| : |\alpha| \leq m,\ u \in K\}.$$

Возьмем возрастающую последовательность компактов $K(n) \subseteq U$, покрывающую U. Для каждого номера n и функций $f, g \in \mathscr{C}^p$ рассмотрим число

$$\rho_n(f, g) = \sum_{0 \leq m \leq p} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\|f - g\|_{mK(n)}}{1 + \|f - g\|_{mK(n)}}.$$

Наконец, определим расстояние между $f, g \in \mathscr{C}^p$:

$$\rho(f, g) = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}.$$

Неравенство треугольника для этого расстояния сравнительно легко проверяется. Если $p = \infty$, то равенство $m = p$ в неравенстве $m \leq p$ исключается. Расстояние не зависит от выбора последовательности $K(n)$ (см. [32, гл. 1. п. 1]).

Заметим, что введенное для $\mathscr{C}^p$ расстояние инвариантно при переносах, но не является абсолютно однородным. Поэтому равенство $\|f\| = \rho(f, 0)$ не определяет норму для $\mathscr{C}^p$. (Хотя иногда рассматривают нормы, не обладающие свойством абсолютной однородности; см., например, [28, том 1, гл. 2, § 1].)

Рассмотрим, в частности, пространство $\mathscr{C}^\infty$. Из определения метрики для $\mathscr{C}^\infty$ видно, что сходимость $f_n \to f$ в этом пространстве означает равномерную сходимость $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ на компактах для производных всех порядков. Отсюда следует, что метрическое пространство $\mathscr{C}^\infty$ полное (см. [42, гл. 3, § 4]).

Полные метрические векторные пространства называются *пространствами Фреше.* Банаховы пространства являются частным случаем пространств Фреше. Пространства $\mathscr{C}^p$ служат примером мультинормированных (локально выпуклых) метризуемых пространств.

Среди функций пространства $\mathscr{C}^p$ выделяются функции с компактными носителями (равные нулю вне некоторого компактного множества). Эти функции часто называют *финитными.* Они составляют подпространство $\mathscr{C}_0^p$ пространства $\mathscr{C}^p$.

Пример. Функция f на $\mathbb{R}^m$ со значениями

$$f(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 - \|x\|^2)^{-1}\} & (\|x\| < 1), \\ 0 & (\|x\| \geq 1) \end{cases}$$

принадлежит $\mathscr{C}_0^\infty = \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

3. Скалярное произведение. Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{H}^p = \mathscr{H}^p(U)$ функций $f \in \mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(U)$ таких, что

$$\sum_{|\alpha| \leq p} \left(\int_U |\partial^\alpha f(x)|\, dx \right) < \infty.$$

Равенство

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} \left(\int_U \partial^\alpha \bar{f}(x) \cdot \partial^\alpha g(x) \cdot dx \right)$$

определяет скалярное произведение для $\mathscr{H}^p$.

Точно так же определяется векторное пространство $\mathscr{H}_0^p$ функций из $\mathscr{C}_0^p$ и скалярное произведение для него.

4. Ограниченные функции. Кроме пространства $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(U)$ $(0 \leq p < \infty)$ гладких функций на открытой части U пространства $\mathbb{R}^m$ рассматривают пространства $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(\bar{U})$ гладких на U и продолжающихся со всеми производными на замыкание $\bar{U}$ множества U до ограниченных непрерывных числовых функций. В частности, сужений на $\bar{U}$ гладких функций, определенных на некоторой открытой окрестности компакта $\bar{U}$.

Норма пространства $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(\bar{U})$ определяется равенством

$$\|f\|_p = \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq p,\, x \in \bar{U})\}.$$

Ограниченность на $\bar{U}$ продолженных функций $\partial^\alpha f$ обеспечивает конечность нормы. Пространство $\mathscr{C}^p(\bar{U})$ полное.

4.3.3. Пространства Лебега

Точками этих пространств являются измеримые функции с интегрируемыми по лебеговой мере степенями или множества таких функций, получаемые факторизацией (когда требуется отделимость (см. [124, п. 4.11.10]). Для простоты такие множества тоже называются функциями.

Рассмотрим абстрактное множество X, некоторую алгебру $\mathscr{A}$ его частей и меру μ на $\mathscr{A}$. Как обычно, будем предполагать, что мера μ положительна, счетно аддитивна, полна и локально ограничена (сигма-конечна). Возьмем число $p \in [1, \infty[$. Обозначим $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \mu)$ векторное пространство измеримых по мере μ числовых функций f на X, у которых p-я степень интегрируема:

$$f \in \mathscr{L}^p \Leftrightarrow \int |f|^p < \infty.$$

1. Равенство

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

определяет норму $\| \cdot \|_p$ для $\mathscr{L}^p$. Неравенство треугольника

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathscr{L}^p)$$

называется *неравенством Минковского.* Оно выводится из неравенства Гёльдера [28, гл. 3, п. 4; 124, п. 4.11.2–6]

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (f \in \mathscr{L}^p, \; g \in \mathscr{L}^q),$$

верного при $p > 1$, $q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. При $p = 1$ неравенство Минковского получается интегрированием неравенства треугольника для абсолютных величин.

Нормированное пространство $\mathscr{L}^p$ полное [28, гл. 3, п. 6].

Рассматривают еще пространство $\mathscr{L}^\infty$, составленное из почти всюду ограниченных измеримых по мере μ числовых функций на X. Норма для $\mathscr{L}^\infty$ определяется равенством

$$\|f\|_\infty = \inf\{\sup_{u \in Z} |f(u)| : Z \subseteq u, \, \mu(Z) = 0\}.$$

Это пространство тоже полное [42, гл. 3, § 4].

Заметим, что пространства $\mathscr{L}^p$ могут быть неотделимыми: из равенства нулю интеграла не следует равенство нулю функции. Поэтому пространство $\mathscr{L}^p$ часто факторизуют и в качестве точек рассматривают классы эквивалентных по данной мере функций. Тогда пространство становится отделимым, но зато усложняются действия с его элементами. Естественно считать точками $\mathscr{L}^p$ функции и учитывать их неотделимость, когда это нужно. Факторизованные по отношению эквивалентности пространства $\mathscr{L}^p$ обозначают L^p или L_p.

2. Назовем *сопряженными* числа p и q такие, что

$$1 \le p < \infty, \quad 1 \le q \le \infty, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

В частности, сопряжены $p = 1$ и $q = \infty$, $p = 2$ и $q = 2$. Можно доказать, что пространства $\mathscr{L}^p$ и $\mathscr{L}^q$ с сопряженными показателями p и q тоже сопряжены. То есть что пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{L}^p$ изоморфно пространству $\mathscr{L}^q$ при $q = p(p-1)^{-1}$ [28, гл. 4, п. 8; 42, гл. 3, § 4].

Среди пространств $\mathscr{L}^p$ $(1 \le p < \infty)$ выделяется пространство $\mathscr{L}^2$, которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g \, d\mu \quad (f, g \in \mathscr{L}^p).$$

При всех других значениях p, как нетрудно проверить, норма $\|\cdot\|_p$ не удовлетворяет тождеству параллелограмма и поэтому при $p \ne 2$ пространства $\mathscr{L}^p$ не являются гильбертовыми.

Упражнение. Доказать это.

Если X — компактное метрическое пространство, то пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \mu)$ сепарабельно: в нем есть счетное всюду плотное множество функций (в частности, простых и непрерывных; ср. [45, гл. 7, § 1]).

Сходимость в пространстве $\mathscr{L}^p$ при $1 \le p < \infty$ называется *сходимостью в среднем* (*порядка* p). По определению, $f_n \to f$ для $f_n, f \in \mathscr{L}^p$ означает, что

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \to 0.$$

Ясно, что корень p-й степени можно не извлекать и писать

$$\|f_n - f\|_p^p = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right) \to 0.$$

3. Рассмотрим несколько примеров пространств Лебега.

Пример 1. Пусть $X = \{1, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{N}$ и $\mu = dn$ — считающая мера для X. Функциями на $X = \{1, \ldots, m\}$ являются точки $f = (f(1), \ldots, f(m)$ пространства $\mathbb{R}^m$. Поэтому $\mathscr{L}^p = \mathbb{R}^m$ при любом $p \in [1, \infty]$. Норма задается равенством $\|f\|_p = \Big(\sum\limits_{1 \le k \le m} |f(k)|^p\Big)^{1/p}$. В частности, при $p = 1, 2, \infty$

$$\|f\|_1 = \sum |f(k)|, \quad \|f\|_2 = \left(\sum |f(k)|^2\right)^{1/2}, \ \|f\|_\infty = \sup |f(k)| \ (1 \le k \le m).$$

Пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, dn)$ отделимо.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{N}$ и $\mu = dn$ — считающая мера для $\mathbb{N}$. Тогда функциями на $X = \mathbb{N}$ являются числовые последовательности $f = (f(1), \ldots, f(n), \ldots)$. Поэтому точками $l^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, dn)$ при $1 \le p < \infty$ являются числовые последовательности $f = (f(n))$, для которых $\|f\|_p = \left(\sum |f(n)|^p\right)^{1/p} < \infty$. Точками пространства $l^\infty = \mathscr{L}^\infty(\mathbb{N}, dn)$ являются ограниченные числовые последовательности. Норма $\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : 1, 2, \ldots\}$. Пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, dn)$ отделимо.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^m$ и $\mu = dx$ — лебегова мера для $\mathbb{R}^m$. Точками пространства $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, dx)$ при $1 \le p < \infty$ являются измеримые по лебеговой мере числовые функции f на $\mathbb{R}^m$, для которых $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$. Пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, dx)$ неотделимо.

Для компактных множеств в пространстве $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, dx)$ при $1 < p < \infty$ можно сформулировать теорему, которая выводится с помощью усреднения из теоремы Арцела и похожа на нее. Условимся говорить, что множество $A \subseteq \mathscr{L}^p$ *равномерно ограничено в среднем*, если

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \alpha \quad (f \in A)$$

при некотором $\alpha > 0$. Заметим, что это означает ограниченность множества A в нормированном пространстве $\mathscr{L}^p$.

Рассмотрим точку $z \in \mathbb{R}^m$, функцию $f \in \mathscr{L}^p$ и функцию $\Delta_z f \in \mathscr{L}^p$ со значениями

$$\Delta_z f(x) = f(x + z) - f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Скажем, что множество $A \subseteq \mathscr{L}^p$ *равностепенно непрерывно в среднем*, если

$$\|\Delta_z\|_p = \left(\int |f(x+z) - f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \to 0$$

при $z \to 0$ равномерно на A.

Пусть $B^c(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq n\}$ — дополнение шара $B(0,n) \subseteq \mathbb{R}^m$ и $h_n = B^c(0,n) \cdot f$ — произведение индикатора множества $B^c(0,n)$ на функцию $f \in \mathscr{L}^p$. Ясно, что $h_n \in \mathscr{L}^p$ вместе с f. Она равна единице вне шара $B(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < n\}$. Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathscr{L}^p$ *равностепенно мало на бесконечности в среднем*, если

$$\|B^c(0,n) \cdot f\| = \left(\int\limits_{B^c(0,n)} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно на A.

Критерий Рисса. *Замкнутое множество $A \subseteq \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, dx)$ компактно еcсли A равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и равностепенно мало на бесконечности в среднем.*

К условиям теоремы Арцела добавляется требование равностепенной малости в среднем. Если рассматривать $\mathscr{L}^p(U, dx)$ для ограниченного открытого $U \subseteq \mathbb{R}^m$, то это требование не нужно. Доказательство критерия Рисса есть в [33, гл. 9, § 1]. Там же доказан критерий компактности, предложенный Колмогоровым.

4.3.4. Распределения

Так называются непрерывные линейные функционалы на некоторых функциональных пространствах. Эти функционалы называют еще *обобщенными функциями*. Названия связаны с тем, что некоторые из таких функционалов естественно отождествляются с мерами и локально интегрируемыми функциями. Обобщенные производные ввел С. Л. Соболев [99]. Развитую теорию распределений построил Л. Шварц [145]. Простой секвенциальный подход к ней предложили П. Антосик, Я. Микусинский и Р. Сикорский [3].

Распределения можно дифференцировать сколько угодно раз. Для них определено преобразование Фурье. Это делает распределения удобным инструментом анализа. Особенно широко они используются в теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим три наиболее часто встречающиеся функциональные пространства, на которых задаются распределения. Такие пространства называют *основными* пространствами, а функции из них — *основными* или *пробными* функциями.

Как и раньше, в этом пункте рассматриваются числовые функции на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

1. Пространство $\mathscr{E}$. Самым широким из функциональных пространств, на которых обычно задаются распределения, является пространство $\mathscr{E}(U) = \mathscr{C}^\infty(U)$ всех гладких на U функций, которое было описано в п. 4.3.2 (см. также [42, гл. 3, § 4, п. 3]).

Выделяется пространство $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbb{R}^m) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ гладких функций, определенных на всем пространстве $\mathbb{R}^m$.

2. Пространство $\mathscr{S}$. Часто выбирается пространство $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ гладких функций на $\mathbb{R}^m$, быстро убывающих на бесконечности со всеми своими производными. Точками $\mathscr{S}$ являются функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, для которых

$$\|\varphi\|_{\alpha\beta} = \sup\{|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^m\} < \infty$$

при любых мультииндексах $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(m))$ и $\beta = (\beta(1), \ldots, \beta(m))$. Здесь, как и раньше, $x^\alpha = x_1^{\alpha(1)} \ldots x_m^{\alpha(m)}$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta(1)} \ldots \partial_m^{\beta(m)}$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$. Коротко функции из $\mathscr{C}$ называются *быстро убывающими.* Они вместе со всеми своими производными убывают на бесконечности быстрее, чем любая рациональная функция.

Метрику для $\mathscr{S}$ можно ввести с помощью любого семейства чисел $c(\alpha, \beta) > 0$, сумма которого $\sum c(\alpha, \beta) = 1$. Расстояние между функциями $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ определяется равенством

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum c(\alpha, \beta) \cdot \frac{\|\varphi - \psi\|_{\alpha\beta}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{\alpha\beta}},$$

где сумма вычисляется по всем мультииндексам α, β. Обычно дело сводят к рядам и расстояние определяют так. Для каждого целого числа $q \geq 0$ рассматривается число

$$\|\varphi\|_q = \sup_{|\beta| \leq q} \big(\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \{(1 + \|x\|^2)^{q/2} |\partial^\beta \varphi(x)|\}\big)$$

и расстояние между функциями $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ определяется равенством

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{2^q} \cdot \frac{\|\varphi - \psi\|_q}{1 + \|\varphi - \psi\|_q}.$$

Так как при некоторых $c(\alpha, \beta) > 0$

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq (1 + \|x\|^2)^{|\alpha|/2} |\partial^\beta \varphi(x)| \leq c(\alpha, \beta) \cdot |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|,$$

то рассматриваемые метрики эквивалентны (ср. [42, гл. 3, § 4, п. 3]). И функции $\varphi \in \mathscr{S}$ можно определить как функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, для которых $\|\varphi\|_q < \infty$ при всех целых $q \geq 0$.

Множество $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций с обычными операциями образует алгебру: линейные комбинации и произведения быстро убывающих функций тоже быстро убывают. Из определений следует, что последовательность функций $\varphi_n \in \mathscr{S}$ сходится к функции $\varphi \in \mathscr{S}$ в пространстве $\mathscr{S}$ еcсли $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, т. е. когда $\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha\beta} \to 0$ при любых мультииндексах α, β. Или, что то же самое, еcсли $x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)(x) \to 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^m$ при любых α, β. Условие $\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha\beta} \to 0$ для каждых мультииндексов α, β можно заменить условием $\|\varphi_n - \varphi\|_q \to 0$ при любом целом $q \geq 0$.

Метрическое пространство $\mathscr{S}$ полное, т. е. является пространством Фреше [20, § 5]. Метрика для $\mathscr{S}$ не удовлетворяет условию абсолютной однородности. Пространство $\mathscr{S}$ удобно считать мультинормированным пространством с указанными счетными семействами норм, определяющими сходимость в $\mathscr{S}$.

3. Пространство $\mathscr{D}$. Точками пространства $\mathscr{D} = \mathscr{D}(U)$ служат функции из $\mathscr{C}_0^\infty(U)$, т. е. гладкие финитные функции на U. Семейство норм, описывающих сходимость в $\mathscr{D}(U)$, можно определить так.

Рассмотрим последовательность компактов

$$K(n) = \{x \in U : d(x, \bar{U} \setminus U) \geq 1/n, \, \|x\| \leq n\},$$

покрывающих U. Заметим, что последовательность попарно непересекающихся множеств $A(n) = K(n) \setminus K(n-1)$ $(K(0) = O)$ тоже покрывает U, причем каждая точка $x \in U$ принадлежит ровно одному из множеств $A(n)$. Компактный носитель $\operatorname{Supp} \varphi$ финитной функции $\varphi \in \mathscr{D}$ удален от границы $\partial U = \bar{U} \setminus U$ множества U на строго положительное расстояние, если она не пустая

($U \neq O$ и $U \neq \mathbb{R}^m$). Поэтому $\partial^\beta \varphi(x) = 0$ при $x \in A(n)$ для всех номеров n, бо́льших некоторого номера $n(\varphi)$, и всех мультииндексов $\beta = (\beta(1), \dots, \beta(m))$.

Для каждой последовательности $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots)$ целых чисел $\alpha(n) \geq 0$ и функции $\varphi \in \mathscr{D}$ определим норму

$$\|\varphi\|_\alpha = \sum_{n \geq 1} \alpha(n) \cdot \sup\{|\partial^\beta \varphi(x)| : x \in A(n),\, |\beta| \leq \alpha(n)\}.$$

(Для каждой $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ в сумме справа число не равных нулю слагаемых конечно.) Рассматриваемое семейство норм несчетно. Из определений следует, что последовательность $\varphi_n \in \mathscr{D}(U)$ сходится к $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ в пространстве $\mathscr{D}(U)$, если $\|\varphi_n - \varphi\|_\alpha \to 0$ при каждом индексе α. Можно показать [42, гл. 3, § 4, п. 3]), что такая сходимость имеет место ессли: 1) *носители функций* φ_n *и* φ *содержатся в некотором компакте* $K \subseteq U$; 2) *последовательность функций* $\partial^\beta \varphi_n$ *сходится к функции* $\partial^\beta \varphi$ *равномерно на* K *при любом мультииндексе* β. Такая сходимость не может быть определена какой-либо метрикой, т. е. мультинормированное пространство $\mathscr{D}(U)$ неметризуемо.

Сравним пространства $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Из определений видно, что для множеств точек этих пространств верны включения $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$. Примеры показывают, что $\mathscr{D} \neq \mathscr{S}$ и $\mathscr{S} \neq \mathscr{E}$. В частности, функция φ на $\mathbb{R}^m$ со значениями $\varphi(x) = \exp(-\|x\|^2)$ принадлежит $\mathscr{S}$, но не принадлежит $\mathscr{D}$. Любая постоянная принадлежит $\mathscr{E}$, но не принадлежит $\mathscr{S}$. Тождественные вложения $\mathscr{D}$ в $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}$ в $\mathscr{E}$ непрерывны при определенных для этих пространств сходимостях: если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{D}$, то $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{S}$, и если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{S}$, то $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{E}$.

Упражнение. Убедиться в этом.

Можно доказать, что множество $\mathscr{D}$ плотно в пространстве $\mathscr{S}$ [32, гл. 4, п. 1], а множество $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{E}$ [42, гл. 3, § 4]. Множества $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ плотны в пространствах $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, dx)$ при $1 < p \leq \infty$. (Интегрируемость степени φ^p функции $\varphi \in \mathscr{S}$ по лебеговой мере dx следует из верных для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и некоторого $c > 0$ неравенств

$$(1 + \|x\|^2)^{1/2} |\partial^0 \varphi(x)| \leq c, \quad |\varphi^p(x)| \leq c^p (1 + \|x\|^2)^{-2p};$$

см. [42, гл. 3, § 4 и 9, п. 3.10].)

4. Пространство $\mathscr{D}'$. Основное пространство $\mathscr{D}$ было самым узким из рассматриваемых. Поэтому сопряженное с ним пространство $\mathscr{D}'$ будет самым широким. Элементами $\mathscr{D}'(U)$ являются непрерывные линейные функционалы на $\mathscr{D}(U)$. Они называются *распределениями* или *обобщенными функциями*. В частности, $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ при $U = \mathbb{R}^m$.

Из определений следует, что линейный функционал F на $\mathscr{C}_0^\infty(U)$ является распределением на $\mathscr{D}(U)$ ессли для каждого компакта $K \subseteq U$ существует число $c > 0$ и целое число $q \geq 0$ такие, что

$$|F(\varphi)| \leq c \cdot \sup\{|\partial^\beta \varphi(x)| : |\beta| \leq q,\ x \in K\}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$ с носителями в K. Этот критерий удобен для приложений.

5. Рассмотрим несколько примеров. В них всюду U обозначает открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Пример 1. Будем говорить, что измеримая по лебеговой мере dx функция f на U *локально интегрируема*, если сужение f на каждый компакт $K \subseteq U$ интегрируемо по dx. Множество всех локально интегрируемых числовых функций на U обозначим $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Пусть $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$. Тогда равенство

$$F_f(\varphi) = \int\limits_U \varphi(x) f(x)\, dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U))$$

определяет функционал $F_f \in \mathscr{D}'(U)$. В самом деле, линейность F_f следует из линейности интеграла. Непрерывность F_f вытекает из неравенства $|F_f(\varphi)| \leq c(K,f) \cdot \sup\{|\varphi(x)| : x \in K\}$, вследствие локальной интегрируемости f верного при $c(K,f) = \int\limits_K |f(x)|\, dx$ для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$ с носителями в компакте $K \subseteq U$.

Можно доказать [32, гл. 1, § 8], что равенство $F_f = F_g$ для $f, g \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$ верно ессли $f = g$ почти всюду по мере dx. Это позволяет отождествить функционал F_f с функцией f и писать f вместо F_f там, где такое отождествление не приводит к путанице. (Точнее, F_f отождествляется с классом функций, эквивалентных f по лебеговой мере dx.) Возможность отождествлять некоторые функционалы из $\mathscr{D}'(U)$ с функциями объясняет название *обобщенная функция*. Эти функционалы составляют класс более широкий, чем локально интегрируемые функции: $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U) \subseteq \mathscr{D}'(U)$. Тогда $\mathscr{D}(U) \subseteq \mathscr{D}'(U)$, так как $\mathscr{D}(U) \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$. Обобщенные функции F_f, определяемые локально интегрируемыми функциями f, называются *регулярными*.

Пример 2. Назовем числовыми мерами линейные комбинации локально ограниченных счетно аддитивных положительных полных мер на алгебре

$\mathscr{B}(U)$ частей U, порожденной классом компактов в U. Условимся называть множества из $\mathscr{B}(U)$ и числовые меры на $\mathscr{B}(U)$ *бэровскими*, так же как множества из замыкания $\bar{\mathscr{B}}(U)$ алгебры $\mathscr{B}(U)$ при простой сходимости и числовые меры на $\bar{\mathscr{B}}(U)$.

Интегралы по числовым мерам определяются как линейные комбинации интегралов по положительным компонентам этих мер.

Пусть μ — бэровская мера на $\mathscr{B}(U)$. Тогда равенство

$$F_\mu(\varphi) = \int \varphi\, d\mu \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U))$$

определяет функционал $F_\mu \in \mathscr{D}'(U)$. В самом деле, линейность F_μ следует из линейности интеграла. Непрерывность вытекает из неравенства $|F_\mu(\varphi)| \leq c(K,\mu)\cdot \sup\{|\varphi(x)| : x \in K\}$, где $c(K,\mu)$ есть сумма значений на K положительных компонент меры μ. Это неравенство верно для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$ с носителями в компакте $K \subseteq U$.

Так как бэровские меры определяются своими значениями на компактах, а индикаторы компактов приближаются гладкими функциями, то равенство $F_\mu = F_\nu$ для бэровских мер на $\mathscr{B}(U)$ верно ессли $\mu = \nu$. Это позволяет отождествлять функционал F_μ с мерой μ, где такое отождествление не приводит к путанице. При этом функционал F_μ, как и бэровская мера μ, называется *распределением.* Заодно и все другие функционалы из $\mathscr{D}'(U)$ тоже называются распределениями.

Пример 3. Среди распределений выделяются сосредоточенные в отдельных точках. Они называются *дельта-функциями.* Такие функционалы уже рассматривались в п. 4.3.2.

Пусть $\mu = \delta_a$ — мера, описывающая распределение единицы массы в точке $a \in U$:

$$\delta_a(B) = 1\ (a \in B), \quad \delta_a(B) = 0\ (a \notin B)$$

для каждого $B \in \mathscr{B}(U)$. Тогда

$$F_\mu(\varphi) = \int\limits_U \varphi\, d\mu = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U)).$$

Функционал F_μ называется *дельта-функцией* (*δ-функцией*), *сосредоточенной в точке* a, и обозначается δ_a, как и определяющая его мера. Если $a = 0$, то вместо δ_0 пишут δ.

По аналогии с регулярным случаем значения любых обобщенных функций записываются часто в форме интегралов, хотя написанные интегралы могут не иметь никакого другого смысла. В частности, пишут

$$F_\delta(\varphi) = \int \varphi(x)\delta(x)\, dx = \varphi(0).$$

Здесь интеграл выражает значение обобщенной функции F_δ для $\varphi \in \mathscr{D}(U)$. Произведение $\varphi \cdot \delta$ не является интегрируемой по лебеговой мере dx функцией. В такой интегральной записи можно считать δ обобщенной производной точечной меры $\mu = d^0x$ по мере dx и писать $d^0x = \delta dx$, не давая понятию обобщенной производной формального определения. Равенство $\int \varphi(x)\delta(x)\,dx = \int \varphi(x)\,d^0x$ служит тогда формулой замены переменных в интеграле.

Таким образом, функционалы из $\mathscr{D}'(U)$ описывают, в частности, локально интегрируемые по лебеговой мере числовые функции на U и бэровские меры на $\mathscr{B}(U)$. Объединение мер и функций в одной модели часто бывает удобно.

6. Пространство $\mathscr{S}'$. Элементами пространства $\mathscr{S}'$, сопряженного с пространством $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^m$, по определению являются непрерывные линейные функционалы на $\mathscr{S}$. Они называются *медленно растущими распределениями* и подробно описаны в [20, § 5].

Так как $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S}$ и тождественное вложение пространства $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ в $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно, то сужение на $\mathscr{D}$ медленно растущих распределений принадлежит $\mathscr{D}'$. То есть сужения на $\mathscr{D}$ медленно растущих распределений являются распределениями. А так как $\mathscr{D}$ плотно в пространстве $\mathscr{S}$, то разные функционалы из $\mathscr{S}'$ имеют разные сужения на $\mathscr{D}$. Значит, $\mathscr{S}'$ вкладывается в $\mathscr{D}'$ и можно считать, что $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{D}'$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Будем говорить, что измеримая по лебеговой мере dx числовая функция f на $\mathbb{R}^m$ *медленно растет*, если для некоторого $q \geq 0$ функция g_q на $\mathbb{R}^m$ со значениями $g_q = (1 + \|x\|^2)^{-q} f(x)$ интегрируема по dx. Множество всех медленно растущих функций на $\mathbb{R}^m$ обозначим $\mathscr{M}$. Все полиномы на $\mathbb{R}^m$ принадлежат $\mathscr{M}$. Функция h на $\mathbb{R}^m$ со значениями $h(x) = \exp(\|x\|)$ не принадлежит $\mathscr{M}$.

Пусть $f \in \mathscr{M}$. Тогда равенство

$$F_f(\varphi) = \int \varphi(x) f(x)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{S})$$

определяет функционал $F_f \in \mathscr{S}'$ — медленно растущую обобщенную функцию. Функционал F_f отождествляется с функцией f.

Используя неравенство Гёльдера, легко проверить (*упражнение*), что $\mathscr{L}^P \subseteq \mathscr{M}$ при $1 \leq p \leq \infty$ (см. [79, п. 7.12]). Таким образом, $\mathscr{L}^P \subseteq \mathscr{M} \subseteq \mathscr{S}'$.

Пример 5. Положительная бэровская мера μ на алгебре $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, порожденной компактами в $\mathbb{R}^m$, называется *медленно растущей*, если для некоторого $q \geq 0$ функция h_q на $\mathbb{R}^m$ со значениями $h_q(x) = (1 + \|x\|^2)^{-q}$ интегрируема по μ.

Пусть μ — медленно растущая бэровская числовая мера на $\mathscr{B}$. Тогда равенство

$$F_\mu(\varphi) = \int \varphi\, d\mu \quad (\varphi \in \mathscr{S})$$

задает функционал $F_\mu \in \mathscr{S}'$. Это следует из определений. Он отождествляется с мерой μ, которую тоже называют медленно растущим распределением.

Ясно, что точечные меры $\mu = \delta_a$ медленно растущие.

Пример 6. Пусть $f \in \mathscr{L}^p$ $(1 \le p < \infty)$. Тогда существует бэровская мера $d\nu = |f|dx$, для которой функция $|f|$ является производной по лебеговой мере dx. Это следует из теоремы Радона — Никодима. Из неравенства Гёльдера следует (*упражнение*), что мера $d\nu$ медленно растет.

Рассмотрим числовую бэровскую меру $d\mu = f dx$, для которой функция f является производной по лебеговой мере dx. Каждая функция $\varphi \in \mathscr{S}$ интегрируема по мере $d\mu$. Делая замену переменных, получаем равенства

$$F_f(\varphi) = \int \varphi f\, dx = \int \varphi\, d\mu \quad (\varphi \in \mathscr{S}).$$

Связь медленно растущих функций и мер описана в [20, § 1].

7. Пространство $\mathscr{E}'$. Элементами пространства $\mathscr{E}'(U)$, сопряженного с пространством $\mathscr{E}(U)$ гладких функций на U, по определению, являются непрерывные линейные функционалы на $\mathscr{E}(U)$.

Так как $\mathscr{D}(U) \subseteq \mathscr{E}(U)$ и тождественное вложение пространства $\mathscr{D}(U)$ в пространстве $\mathscr{E}(U)$ непрерывно, то сужение на $\mathscr{D}(U)$ каждого функционала $F \in \mathscr{E}'(U)$ принадлежат $\mathscr{D}'(U)$. А так как $\mathscr{D}(U)$ плотно в пространстве $\mathscr{E}(U)$, то разные функционалы из $\mathscr{E}'(U)$ имеют разные сужения на $\mathscr{D}(U)$. Значит, $\mathscr{E}'(U)$ вкладывается в $\mathscr{D}'(U)$ и можно считать, что $\mathscr{E}'(U) \subseteq \mathscr{D}'(U)$.

Точно так же при $U = \mathbb{R}^m$ пространство $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ вкладывается в $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ и можно считать, что $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{D}'$.

Пусть f — локально интегрируемая по лебеговой мере dx числовая функция на U, имеющая компактный носитель. Тогда равенства

$$F_f(\varphi) = \int \varphi(x) f(x)\, dx = \int \varphi\, d\mu \quad (\varphi \in \mathscr{C}(U))$$

определяют функционал $F \in \mathscr{C}'(U)$.

Пространству $\mathscr{E}'(U)$ принадлежат те и только те функционалы из $\mathscr{D}'(U)$, которые имеют компактные носители [9, 3.9–3.12; 42, гл. 3, § 4]. Носитель распределения $F \in \mathscr{D}'(U)$ определяется так. Точка $x \in U$ не принадлежит носителю $\operatorname{Supp} F$, если существует открытая окрестность V точки x такая, что $F(\varphi) = 0$ для каждой $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ с носителем $\operatorname{Supp} \varphi \subseteq V$. Точки, не обладающие этим свойством, составляют носитель $\operatorname{Supp} F$ распределения F. Распределения из $\mathscr{E}'(U)$ естественно назвать *финитными* (по аналогии с финитными функциями).

Например, δ-функции финитны: они имеют точечные носители. Если распределение имеет точечный носитель $\{0\}$, то оно равно линейной комбинации производных дельта-функции.

Упражнение. Доказать это.

Замечание. При $U = \mathbb{R}^m$ финитные распределения составляют самый узкий класс $\mathscr{E}'$, медленно растущие распределения образуют более широкий класс $\mathscr{S}'$, а произвольные распределения входят в самый широкий из рассматриваемых классов $\mathscr{D}'$.

Меры и распределения подробно описываются в [99, гл. 4, 5]. Много внимания уделяется их использованию в теории дифференциальных уравнений.

4.3.5. Пространства Соболева

Прежде чем описать эти пространства, определим действия с распределениями.

1. Действия с распределениями. Как и для всяких линейных функционалов, для распределений определены линейные комбинации. Равенство

$$fF(\varphi) = F(f\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U))$$

задает произведение $fF \in \mathscr{D}'(U)$ распределения $F \in \mathscr{D}'(U)$ на функцию $f \in \mathscr{E}(U)$. Заметим, что $f\varphi \in \mathscr{D}(U)$. Произведение записывается fF, чтобы это распределение не смешивалось с числом $Ff = F(f)$ при $f \in \mathscr{D}(U)$.

Пример. Так как $f\delta(\varphi) = \delta(f\varphi) = f(0) \cdot \varphi(0)$, то $f\delta = f(0) \cdot \delta$.

Равенство

$$\partial^\alpha F(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U))$$

определяет для распределения $F \in \mathscr{D}'(U)$ производную $\partial^\alpha F \in \mathscr{D}'(U)$ с мультииндексом α.

Примеры. 1) Пусть $F = F_h$ — распределение, отождествленное с функцией $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющей значения $h(x) = 0$ $(x < 0)$ и $h(x) = 1$ $(x \geq 0)$. Тогда $\partial F_h = \delta$. В самом деле,

$$-F_h(\varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)h(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) - 0 = \delta\varphi$$

для каждой $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

2) Пусть $F = F_f$ — распределение, отождествленное с гладкой функцией $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда $\partial F_f = F_{\partial f}$. В самом деле, интегрируя по частям и используя компактность носителя $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, получаем

$$-F_f(\varphi') = -\int \varphi'(x)f(x)\,dx = \int \varphi(x)f'(x)\,dx = F_{f'}(\varphi).$$

Этот пример показывает, что дифференцирование распределений согласовано с дифференцированием гладких функций.

3) $\partial^\alpha \delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))$.

Заметим, что производные медленно растущих распределений сами являются медленно растущими распределениями: если $F \in \mathscr{S}'$, то $\partial^\alpha F \in \mathscr{S}'$ для любого мультииндекса α. Пространство $\mathscr{S}'$ замкнуто относительно операции дифференцирования.

2. Умножение на функцию и дифференцирование распределений связывает

Формула Лейбница. $\partial_j(fF) = \partial_j f \cdot F + f \cdot \partial_j F$.

Она следует из определений и правила дифференцирования произведений гладких функций (*упражнение*, [20, § 2]). В [32, гл. 1, п. 8] доказывается общая *формула Хёрмандера*.

Можно доказать (см. [79, гл. 6]), что каждое распределение $F \in \mathscr{D}'(U)$ равно производной $\partial^\alpha f$ некоторой локально интегрируемой по dx функции f на U. А каждое распределение $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ равно производной $\partial^\alpha f$ некоторой медленно растущей функции f на $\mathbb{R}^m$ [20, § 2 и 5; 42, гл. 3, § 4].

3. Обобщенные производные. С помощью неравенства Гёльдера легко проверить (*упражнение*), что $\mathscr{L}^p \subseteq \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$ при $1 \leq p < \infty$. Поэтому функции $g \in \mathscr{L}^p$ можно отождествлять с распределениями $F_g \in \mathscr{D}'(U)$. Возьмем функцию $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$, отождествленное с ней распределение $F_f \in \mathscr{D}(U)$ и его производную $\partial^\alpha F_f \in \mathscr{D}'(U)$ с мультииндексом α. Будем вместо F_f писать f, а вместо $\partial^\alpha F_f$ писать $\partial^\alpha f$ (хотя функция f может не быть дифференцируемой). Если $\partial^\alpha f = F_g \in \mathscr{D}'(U)$ для некоторой $g \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$, то условимся называть функцию g *обобщенной производной* функции f и писать $\partial^\alpha f = g$. Заметим, что любая функция $h \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$, эквивалентная g по лебеговой мере, тоже является обобщенной производной функции f.

Когда функция f гладкая, ее обычная производная является и обобщенной. Но существуют дифференцируемые почти всюду локально интегрируемые по лебеговой мере функции, обычные производные которых не являются обобщенными. (Например, непрерывные слева, но не абсолютно непрерывные возрастающие функции на интервале.)

4. Пространства $\mathscr{W}_q^p(U)$. Рассмотрим целые числа $p \geq 1$, $q \geq 0$. Точками *соболевского пространства* $\mathscr{W}_q^p(U)$ являются локально интегрируемые функции $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(U)$, у которых обобщенные производные $\partial^\alpha f \in \mathscr{L}^p$ при $|\alpha| \leq q$. Норма для $\mathscr{W}_q^p(U)$ определяется равенством

$$\|f\|_{p,q} = \Bigg(\sum_{|\alpha| \leq q} \int\limits_U |\partial^\alpha f|^p \, dx \Bigg)^{1/p}.$$

Если $p = 2$, то эта норма получается из скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq q} \Bigg(\int\limits_U \overline{\partial^\alpha f(x)} \cdot \partial^\alpha g(x) \, dx \Bigg).$$

Нормированное пространство $\mathscr{W}_q^p(U)$ банахово. А нормированное пространство $\mathscr{W}_q^2(U)$ гильбертово [32, гл. 1, п. 9].

Гильбертово пространство $\mathscr{W}_q^2(U)$ связано с евклидовым пространством $\mathscr{H}_0^q(U)$ гладких функций, описанных в п. 4.3.2. Можно доказать [32, гл. 1, п. 10], что пополнение $\mathscr{H}_0^q(U)$ является подпространством соболевского пространства $\mathscr{W}_q^2(U)$. А при $U = \mathbb{R}^m$ пополнение $\mathscr{H}_0^q = \mathscr{H}_0^q(\mathbb{R}^m)$ совпадает с $\mathscr{W}_q^2 = \mathscr{W}_q^2(\mathbb{R}^m)$. Поэтому часто вместо $\mathscr{W}_q^2$ пишут $\mathscr{H}_0^q$. Функции из $\mathscr{H}_0^q$ приближаются последовательностями q-гладких функций по соответствующей норме. Лемма Соболева устанавливает связь между пространствами $\mathscr{W}_q^2(U)$ и $\mathscr{C}^p(U)$ для $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ($q \geq 0$, $h \geq 1$, $m \geq 1$).

Лемма Соболева. *Если $q > p + m/2$, то для каждой $f \in \mathscr{W}_q^2(U)$ существует $g \in \mathscr{C}^p(U)$, равная f почти всюду.*

Подчеркнем, что порядок гладкости p функции g, эквивалентной f по лебеговой мере, строго меньше порядка q производных f, имеющих интегрируемые квадраты. В этом смысле замена функций из соболевских пространств гладкими функциями производится с некоторой потерей порядка гладкости.

Подробные доказательства леммы Соболева есть в [79, гл. 7] и [32, гл. 6].

Замечание. Многие подробности, связанные с пространствами основных и обобщенных функций, можно найти также в [74, том 1, гл. 5]. Там описаны и некоторые важные приложения. В конце главы сформулированы более 60 задач.

В [99, гл. 1, п. 8, 11] доказаны теоремы о вложениях пространств $\mathscr{W}_q^p(U)$ в пространства непрерывных функций. Выписан явный вид оператора, осуществляющего эти вложения. Кроме непрерывности оператора вложения доказана его компактность (свойство переводить ограниченные множества в относительно компактные). Подробные доказательства теорем вложения есть в [33, гл. 11, § 4].

Подробности, связанные с пространствами основных и обобщенных функций, можно найти также в [79, гл. 6; 124, гл. 5]. Там описаны и некоторые важные приложения. В конце глав сформулированы упражнения. В [9, гл. 5 и 7] большое внимание уделяется представлению распределений с помощью аналитических функций и приложениям. В [115, п. 6.3] рассматриваются распределения на многообразиях.

4.4. Преобразования Фурье

Теория преобразований Фурье для распределений обобщает классический гармонический анализ. Преобразования Фурье эффективно применяются при решении дифференциальных уравнений.

4.4.1. Преобразование быстро убывающих функций

Преобразования Фурье удобно определить сначала для быстро убывающих функций, а потом для медленно растущих распределений.

Преобразование Фурье $g = \Phi(f)$ для функции $f \in \mathscr{S} = \mathscr{S}\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$g(y) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-iyx} f(x)\, dx.$$

Здесь $yx = y_1x_1 + \ldots + y_mx_m$ — скалярное произведение векторов $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и $x = (x_1, \ldots, x_m)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, а dx — лебегова мера для $\mathbb{R}^m$. Так как функции из $\mathscr{S}$ интегрируемы по dx и $|e^{-iyx} f(x)| \leq |f(x)|$, то интеграл справа существует.

Пример. Пусть $f(x) = \exp(-\|x\|^2/2)$. Тогда $\Phi(f) = f$.

Преобразование Фурье является линейным, непрерывным и взаимно однозначным преобразованием пространства $\mathscr{S}$. Обратное преобразование $g = \Phi^{-1}(f)$ для функции $g \in \mathscr{S}$ определяется равенством

$$f(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ixy} g(y)\, dy.$$

Это равенство называется *формулой обращения.* Здесь $xy = yx$ и dy — лебегова мера для $\mathbb{R}^m$. Преобразование Φ^{-1} называется *обратным преобразованием Фурье.* Оно тоже является линейным, непрерывным и взаимно однозначным преобразованием пространства $\mathscr{S}$. Другими словами, Φ и Φ^{-1} являются линейными гомеоморфизмами $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$. Это доказывается с помощью правил интегрирования и дифференцирования под знаком интеграла.

Упражнение. Дать подробные доказательства, используя эти правила (см. [32, 6.1; 79, 7.4 и 7.7]).

Часто преобразованием Фурье называется Φ^{-1}, обратное Φ. И одному из них приписывается множитель 1, а другому $(2\pi)^{-m}$. Заметим, что при данных определениях

$$\Phi(\bar{f}) = \overline{\Phi^{-1}(f)} \quad (f \in \mathscr{S}).$$

Определим *оператор симметрии* S на $\mathscr{S}$ равенством

$$S\varphi(x) = \varphi(-x) \quad (\varphi \in \mathscr{S},\ x \in \mathbb{R}^m).$$

Из определения следует равенство $S^2 = I$, где I обозначает тождественное преобразование $\mathscr{S}$. Легко проверить, используя формулу обращения, что $\Phi = \Phi^{-1}S$, $\Phi^2 = S$, $\Phi^4 = I$.

Упражнение. Проверить эти равенства.

2. Кроме обычного для функций из $\mathscr{S}$ определено еще одно произведение, которое называется *сверткой* и обозначается $*$. Сверткой $h = g * f$ функций $g, f \in \mathscr{S}$ называется функция h на $\mathbb{R}^m$ со значениями

$$h(z) = \int g(z-x)f(x)dx \quad (z \in \mathbb{R}^m).$$

Нетрудно убедиться в том, что $h \in \mathscr{S}$. Свертка коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по сумме. Свертка аналогична правилу вычисления коэффициентов произведения полиномов.

Упражнение. Доказать коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность свертки [42, гл. 4, § 1].

Преобразование Фурье связывает свертку с обычным произведением. Используя определения и правила интегрирования, получаем равенства

$$(2\pi)^{-m/2}\Phi(g * f) = \Phi(g) \cdot \Phi(f), \quad (2\pi)^{-m/2}\Phi(g) * \Phi(f) = \Phi(g \cdot f).$$

Упражнение. Доказать эти равенства.

Замечание. Свойства свертки подробно описаны в гл. 6 книги [32]. Там же описано операторное исчисление Микусинского, основанное на операции свертки, и его применение к решению дифференциальных уравнений. В [42, гл. 4, § 1] рассматриваются свертки на коммутативной группе.

4.4.2. Преобразование медленно растущих распределений

Преобразование Фурье ΦF распределения $F \in \mathscr{S}'$ определяется как композиция $F \circ \Phi$ преобразования Фурье $\Phi\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ с распределением $F\colon \mathscr{S} \to \mathbb{C}$. По определению,

$$\Phi F(\varphi) = F(\Phi(\varphi)) \quad (\varphi \in \mathscr{S}).$$

Так как F и Φ линейны и непрерывны, то $\Phi F = F \circ \Phi \in \mathscr{S}'$.

1. Преобразование Фурье для распределений обладает теми же свойствами, что и преобразование Фурье для функций. Сходимость для пространства $\mathscr{S}'$ выбирается слабая: по определению,

$F_n \to F$ для $F_n, F \in \mathscr{S}'$ означает, что $F_n(\varphi) \to F(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S})$. Эта сходимость позволяет говорить о непрерывности преобразования Фурье $\Phi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$. При вложении $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}'$ оно продолжает $\Phi\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ и обозначается так же. Преобразование Фурье для $\mathscr{S}'$ является линейным, непрерывным и взаимно однозначным отображением $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$. Обратное преобразование Фурье Φ^{-1} для $\mathscr{S}'$ определяется равенством

$$\Phi^{-1}F(\varphi) = F(\Phi^{-1}(\varphi)) \quad (\varphi \in \mathscr{S}).$$

Равенство

$$SF(\varphi) = F(S\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{S},\ F \in \mathscr{S}')$$

продолжает оператор симметрии S на $\mathscr{S}'$. Для него остаются верными равенства $S^2 = I$ и $\Phi = \Phi^{-1}S$, $\Phi^2 = S$, где I обозначает тождественное преобразование $\mathscr{S}'$.

Упражнение. Доказать эти равенства.

2. Преобразование Фурье устанавливает связь между операциями дифференцирования и умножения на функцию. Вместе с оператором дифференцирования ∂^α рассмотрим оператор $D^\alpha = i^{-|\alpha|}\partial^\alpha$ и обозначим M^α оператор умножения на функцию f со значениями $f(x) = x^\alpha$. Операторы D^α, M^α и преобразование Фурье Φ связаны равенствами

$$D^\alpha\Phi = \Phi M^\alpha, \quad \Phi D^\alpha = (-1)^{|\alpha|}M^\alpha\Phi.$$

Эти равенства легко проверяются для функций из $\mathscr{S}$. Так как $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}'$, то они продолжаются по непрерывности на распределения из $\mathscr{S}'$.

Упражнение. Дать подробные доказательства.

Пример. Преобразование Фурье для δ равно $\Phi(\delta) = (2\pi)^{-m/2} \cdot 1$, где 1 обозначает распределение, представляемое тождественной единицей. В самом деле,

$$\Phi\delta(\varphi) = \delta(\Phi(\varphi)) = \psi(0) = (2\pi)^{-m/2} \cdot 1(\varphi),$$

где функция $\psi = \Phi(\varphi)$ и распределение 1 имеют значения

$$\psi(y) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-iyx}\varphi(x)\,dx, \quad 1(\varphi) = \int \varphi(x)\,dx.$$

Из найденного равенства для $\Phi(\delta)$ выводится равенство $\Phi(1) = (2\pi)^{m/2}\delta$ для распределения Фурье тождественной единицы:

$$\delta = S\delta = \Phi^2(\delta) = \Phi(\Phi(\delta)) = \Phi((2\pi)^{-m/2} \cdot 1) = (2\pi)^{-m/2} \cdot \Phi(1).$$

Используются $S\delta(\varphi) = \delta(S\varphi) = S\varphi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S})$.

Переход к преобразованиям Фурье часто существенно упрощает решение дифференциальных уравнений. Эффективно применяются регуляризирующие множители, в частности экспоненциальные. Преобразование Фурье специального произведения медленно растущего распределения на быстро убывающую экспоненциальную функцию называется *преобразованием Лапласа* и широко применяется [45, гл. 8, § 6; 20, § 9; 115, 7.3–4].

4.4.3. Преобразование Фурье — Планшереля

Множество $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, dx)$ вкладывается в множество $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, если отождествить функции из $\mathscr{L}^2$ с порождаемыми ими распределениями из $\mathscr{S}'$. При преобразовании Фурье функции из $\mathscr{L}^2$ переходят в функции из $\mathscr{L}^2$. Поэтому сужение преобразования Фурье для $\mathscr{S}'$ на множество $\mathscr{L}^2$ является преобразованием $\mathscr{L}^2$ этого множества. Оно называется *преобразованием Фурье — Планшереля.* Подробности для $m = 1$ см. в [45, гл. 8, § 5].

1. Для функций $f, g \in \mathscr{L}^2$ определены скалярное произведение и норма

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g \, dx, \quad \|f\|^2 = \langle f, f\rangle.$$

Нетрудно проверить, что

$$\langle \Phi(f), g\rangle = \langle f, \Phi^{-1}(g)\rangle, \quad \langle \Phi(f), \Phi(g)\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Это значит, что преобразование Фурье — Планшереля *унитарно.*

Упражнение. Проверить указанные равенства.

Теорема Планшереля. *Преобразование Фурье отображает $\mathscr{L}^2$ на все $\mathscr{L}^2$, сохраняя скалярное произведение и норму.*

См. [32, гл. 8, п. 2; 79, п. 7.9].

2. Пусть $f \in \mathscr{L}^2$ и $f_n = B_n \cdot f$ — произведение функции f на индикатор B_n шара $\bar{B}(0, n) \subseteq \mathbb{R}^m$. Так как $B_n \in \mathscr{L}^2$, то

$f_n = B_n \cdot f$ интегрируемы по лебеговой мере dx и для их преобразования Фурье $g_n = \Phi(f_n)$ верны равенства

$$g_n(y) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{\bar{B}(0,n)} e^{-iyx} f(x)\, dx.$$

Из теоремы Планшереля следует, что $g_n \to g = \Phi(f)$ в пространстве $\mathscr{L}^2$ (т. е. в среднем квадратичном).

4.4.4. Преобразование Фурье — Стилтьеса

Так называется *сужение преобразования Фурье на множество медленно растущих мер* μ на алгебре $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, порожденной компактами в $\mathbb{R}^m$. В частности, медленно растущими мерами являются вероятностные распределения, лебегова мера и считающая мера. С преобразованиями считающей и лебеговой мер связаны ряды и интегралы Фурье. Для вероятностных распределений вводятся *характеристические функции.*

Характеристическая функция $\hat{\mu}$ вероятностного распределения μ определяется равенством

$$\hat{\mu}(y) = \int e^{iyx}\, d\mu(x).$$

Характеристические функции описывает

Теорема Бохнера. *Характеристическими являются нормированные непрерывные положительно определенные функции на* $\mathbb{R}^m$ *и только они.*

Нормированность означает равенство $\hat{\mu}(0) = 1$. А *положительная определенность* — неравенство

$$\sum \hat{\mu}(y_j - y_k) \cdot \bar{z}_j z_k \geq 0 \quad (1 \leq, j,\ k \leq n)$$

для всех конечных семейств векторов $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^m$ и комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$. Доказательство теоремы Бохнера есть в [58, гл. 4, § 14]. Вывод теоремы Бохнера из более общей теоремы о положительных функционалах на банаховых алгебрах описан в [79, гл. 11].

4.4.5. Преобразование Радона

Радон доказал, что гладкая функция на $\mathbb{R}^3$ определяется значениями ее интегралов по плоскостям в $\mathbb{R}^3$. Его именем называются преобразования, связывающие функции с их интегралами по множествам данного класса. Преобразования Радона играют большую роль в интегральной геометрии.

Рассмотрим: точку $a \neq 0$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, число c, гиперплоскость $H{=}\{x : ax = c\}$ в $\mathbb{R}^m$, $(m-1)$-мерную лебегову меру $d_H x$ для H. Равенство

$$R_{a,c}(f) = \|a\|^{-1} \int f(x)\, d_H x$$

определяет *преобразование Радона* $R(f)$ интегрируемой по каждой гиперплоскости функции f на $\mathbb{R}^m$. Интеграл справа часто записывают с дельта-функцией δ_H, считая ее *обобщенной производной* лебеговой меры $d_H x$ для гиперплоскости H по лебеговой мере dx для $\mathbb{R}^m$, не давая понятию обобщенной производной меры по мере формального определения. Равенство

$$\int f(x)\delta_H\, dx = \int f(x)\, d_H x$$

служит тогда формулой замены переменных $d_H x = \delta_H \cdot dx$ в интеграле. Если $H = \mathbb{R}^{m-1}$, $d_H x = d^{m-1}x$, $\delta_H = \delta^{m-1}$, то $d^{m-1}x = \delta^{m-1}(x) \cdot d^m x$. В частности, можно рассматривать быстро убывающие функции f из $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Преобразование Радона R линейно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathscr{S}$ на некоторое векторное пространство $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathbb{R}^m)$, определяемое парами a, c точек $\mathbb{R}^m$ и чисел (см. [112, гл. 1, § 2]). Обратное преобразование Радона R^{-1} позволяет найти функцию f по ее интегралам на гиперплоскостях.

Существует связь между преобразованиями Радона и Фурье. Как нетрудно проверить,

$$R_{a,c}(f) = (2\pi)^{m/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \Phi^{-1} f(ta) e^{-itc}\, dt.$$

Это равенство можно использовать для определения преобразования Радона.

Упражнение. Проверить указанное равенство.

Замечание. В [42, гл. 4] преобразования Фурье связываются с характерами коммутативных групп. Формулируются более 100 задач, относящихся к сверткам, характерам и преобразованиям Фурье.

4.5. Ограниченные линейные операторы

Здесь описываются основные принципы линейного анализа. Они выражаются теоремами о продолжении, ограниченности и обращении. Эти теоремы формулируются здесь только для нормированных пространств, хотя существуют более общие формулировки [28, часть 1, гл. 2; 14].

4.5.1. Продолжение функционалов

Теорема Хана —Банаха, доказанная в п. 2.2.5, 6, формулирует принцип глобального продолжения ограниченного линейного функционала с подпространства на все пространство с сохранением нормы. Этот принцип применяется очень часто. Он может быть сформулирован и в геометрической форме.

1. Ядро каждого ненулевого линейного функционала на векторном пространстве имеет коразмерность 1. А каждое подпространство коразмерности 1 является ядром некоторого линейного функционала [45, гл. 3, § 1]. *Топологическим векторным пространством* называется векторное пространство с топологией, при которой операции непрерывны [14, гл. 1; 45, гл. 3; 96, гл. 2]. Линейный функционал на таком пространстве ограничен ессли его ядро замкнуто [14, том 2, гл. 2, § 2]. Линейное многообразие $H = a+Z$, составленное из сумм $h = a+z$ вектора a с векторами z из имеющего коразмерность 1 подпространства Z рассматриваемого пространства Y называется *гиперплоскостью, параллельной* Z.

Соответствие между линейными функционалами и гиперплоскостями приводит к геометрической форме теоремы Хана — Банаха [14, гл. 2, § 3]. Пусть: Y — вещественное топологическое векторное пространство; $B \subseteq Y$ — непустое выпуклое открытое множество; $A \subseteq Y$ — линейное многообразие, не пересекающееся с B. Верна [14, гл. 2, § 3, п. 1]

Теорема. *Существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая A и не пересекающаяся с B.*

Из этой теоремы выводятся часто применяющиеся теоремы об отделимости.

2. Рассмотрим непустые множества A, B и гиперплоскость H в вещественном топологическом векторном пространстве Y. Будем говорить, что H (*строго*) *отделяет* A от B, если A содержится в одном из (открытых) замкнутых полупространств, определяемых H, а B — в другом. Гиперплоскость S в пространстве Y называется *опорной* для A, если A пересекается с S и содержится в одном из полупространств, определяемых S (находится *по одну сторону от* S).

Заметим, что гиперплоскость H определяется уравнением $\varphi(y) = \alpha$ с некоторыми $\varphi \in Y'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. А полупространства — неравенствами $\varphi(y) > \alpha$, $\varphi(y) \geq \alpha$ или $\varphi(y) < \alpha$, $\varphi(y) \leq \alpha$.

Сформулируем несколько утверждений об отделимости.

Предложение 1. *Каждое непустое открытое выпуклое множество A отделяется от каждого не пересекающегося с A непустого выпуклого множества B некоторой замкнутой гиперплоскостью H.*

Из предложения 1 вытекает

Следствие. *Если пространство Y локально выпукло, то в нем каждое непустое замкнутое выпуклое множество A строго отделяется от каждого не пересекающегося с A непустого выпуклого множества B некоторой замкнутой гиперплоскостью H.*

Для топологического векторного пространства Y верно еще

Предложение 2. *Для каждых непустого компактного множества A и замкнутой гиперплоскости H существует опорная гиперплоскость S для A, параллельная H.*

Замкнутое выпуклое множество $A \subseteq Y$ с непустой внутренностью называется *выпуклым телом.* Для выпуклых тел верно

Предложение 3. *Каждая опорная гиперплоскость S для выпуклого тела A замкнута и каждая граничная точка A принадлежит некоторой опорной гиперплоскости S для A.*

Из предложения 3 вытекает

Следствие. *Выпуклое тело A равно пересечению семейства всех содержащих A замкнутых полупространств, определяемых опорными гиперплоскостями S для A.*

Сформулированные утверждения доказаны в [14, гл. 2, § 3, пп. 2, 3].

Упражнение. Вывести все утверждения п. 4.5.1 из теоремы Хана — Банаха.

4.5.2. Равномерная ограниченность операторов

1. Рассмотрим банахово пространство E, нормированное пространство F и семейство непрерывных линейных операторов $T_i\colon E \to F$ с произвольным множеством индексов. Будем говорить, что семейство T_i *ограничено в точке* $x \in E$, если множество значений $T_i(x) \in F$ ограничено в F. Скажем, что семейство T_i равномерно ограничено, если объединение множеств значений $T_i(x) \in F$ при $\|x\| \le 1$ ограничено в F (т. е. если множество чисел $\|T_i\|$ ограничено). Можно говорить о *равномерной ограниченности* семейства T_i на единичном шаре. Как обычно, рассматриваются ненулевые пространства.

Теорема Банаха — Штейнгауза. *Если семейство непрерывных линейных операторов на банаховом пространстве ограничено в каждой точке, то оно равномерно ограничено.*

□ Теорема Банаха — Штейнгауза выводится из теоремы Бэра (3.1.3, 5).

Рассмотрим последовательность множеств $E(n) = \{x : \|T_i(x)\| \le n\ \forall i\}$. Нетрудно проверить, что эти множества замкнуты и в объединении дают все E. Так как в E есть внутренние точки, то по теореме Бэра и в некотором $A = E(n(0))$ есть внутренняя точка a. Следовательно, в A содержится замкнутый шар $B(a, r)$ с центром a и радиусом $r > 0$. Поэтому $\|T_i x\| = \|T_i a + T_i z\| \le n(0)$, $\|T_i x\| \le \|T_i a\| + \|T_i x\| \le c(a) + n(0)$ при $x = a + z$, $\|z\| \le r$, $\|T_i(a)\| \le c(a)$, откуда $r\|x\|^{-1} \cdot \|T_i x\| = \|T_i(r \cdot \|x\|^{-1} \cdot x)\| \le c(a) + n(0)$ при $\|x\| \ne 0$ и $\|T_i x\| \le c \cdot \|x\|$, где $c = r^{-1}(c(a) + n(0))$. Значит, $\|T_i x\| \le c$ при $\|x\| \le 1$ для всех i. ■

2. Принцип равномерной ограниченности, сформулированный в теореме Банаха — Штейнгауза, эффективно применяется. Приведем простой пример.

Следствие. *Предел T сходящейся в каждой точке $x \in E$ последовательности непрерывных линейных операторов T_n на банаховом пространстве E есть непрерывный линейный оператор на E.*

□ Линейность T вытекает из линейности T_n и предела. Непрерывность T, эквивалентная его ограниченности на единичном шаре, выводится из теоремы Банаха — Штейнгауза. В самом деле, так как $T_n x \to Tx$ для каждой точки $x \in E$, то

$$\|T_n x\| \leq \|Tx\| + \|T_n x - Tx\| \leq c(x)$$

при некотором $c(x) > 0$. По теореме Банаха — Штейнгауза отсюда следует, что $\|T_n x\| \leq c$ для всех номеров n и точек $x \in B(0,1) \subseteq E$ при некотором $c > 0$. Поэтому для предельной функции T верно неравенство $\|Tx\| \leq c$ при $\|x\| \leq 1$. Значит, оператор T ограничен. ■

Подчеркнем, что для последовательностей нелинейных непрерывных операторов сходимость в каждой точке не обеспечивает непрерывность предельного оператора.

Упражнение. Привести контрпример.

4.5.3. Обращение операторов

1. Оператор, обратный к взаимно однозначному линейному оператору, тоже взаимно однозначный и линейный. Но обратный оператор может быть разрывным, когда прямой оператор непрерывен.

Пример. Рассмотрим банахово пространство $E = \mathscr{C}[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \sup |f(x)| : x \in [0,1]$.

Неопределенный интеграл $A = \mathscr{I}$, задаваемый равенствами

$$Af = g, \quad g(y) = \int\limits_0^y f(x)\,dx \quad (y \in [0,1]),$$

есть непрерывный взаимно однозначный линейный оператор, отображающий E в E. Обратным к A является оператор дифференцирования $A^{-1} = \mathscr{D}$, определенный на подпространстве F, составленном из гладких функций, равных нулю в точке 0.

Оператор $\mathscr{D}$ разрывен. В самом деле, пусть $g_n(y) = n^{-1}y^n$ $(0 \leq y \leq 1)$. Тогда $\|g_n\| = n^{-1}$ и $g_n \to 0$. В то же время для $f_n = \mathscr{D}g_n$ верны равенства $f_n(x) = x^{n-1}$ $(0 \leq x \leq 1)$, $\|f_n\| = 1$. Поэтому $\mathscr{D}g_n = f_n \nrightarrow 0 = \mathscr{D}0$.

Таким образом, прямой оператор $\mathscr{I}\colon E \to F$ непрерывен, а обратный оператор $\mathscr{D}\colon F \to E$ разрывен.

Заметим, что если рассматривать $A = \mathscr{I}$ как отображение E в E, то A будет ненакрывающим: $A(E) = F \neq E$. А если рассматривать A как отображение E на F, то пространство F будет неполным.

2. Для полных пространств верна

Теорема Банаха. *Пусть T — непрерывный линейный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство E на банахово пространство F. Тогда обратный оператор T^{-1} — непрерывный линейный оператор, взаимно однозначно отображающий F на E.*

□ Взаимная однозначность обратного оператора T^{-1} следует из его определения. Линейность легко проверяется. Нужно доказать, что T^{-1} непрерывен. Для этого вследствие линейности оператора T^{-1} достаточно показать, что он непрерывен в точке 0. То есть что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором $T^{-1}B(0,\delta) \subseteq B(0,\varepsilon)$. Так как T^{-1} взаимно однозначен, то это включение равносильно включению $B(0,\delta) \subseteq TB(0,\varepsilon)$.

Рассмотрим последовательность замкнутых множеств $F_n = \overline{TB(0, n\varepsilon/8)}$ — замыканий образов шаров с центром 0 и радиусом $n\varepsilon/8$. Ясно, что $E = \cup B(0, n\varepsilon/8)$. Так как по условию оператор T отображает E на все F, то отсюда следует, что $F = \cup F_n$. А так как F банахово, то по теореме Бэра при некотором $n = n(0)$ множество $F_n = F_{n(0)}$ имеет внутреннюю точку: $B(c,r) \subseteq F_{n(0)} = \overline{TB(0, n(0)\varepsilon/8)}$ при некоторых $c \in F$ и $r > 0$. Легко проверить равенства $\overline{TB(0, n(0)\varepsilon/8)} = n(0)\cdot\overline{TB(0,\varepsilon/8)} = \{z = n(0)\cdot y : y \in \overline{TB(0,\varepsilon/8)}\}$.

Так как $V = (c + V) - c$, то $B(0,r) \subseteq B(c,r) - B(c,r) = \{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in B(c,r)\}$. А так как $|x_1 - x_2| \le |x_1| + |x_2|$, то $B(0,\varepsilon/8) - B(0,\varepsilon/8) \subseteq B(0,\varepsilon/4) \subseteq B(0,\varepsilon/2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} B(0, r/n(0)) = (1/n(0))\cdot B(0,r) &\subseteq \overline{TB(0,\varepsilon/8)} - \overline{TB(0,\varepsilon/8)} \\ &\subseteq \overline{TB(0,\varepsilon/8) - TB(0,\varepsilon/8)} = \overline{T(B(0,\varepsilon/8) - B(0,\varepsilon/8))} \\ &\subseteq \overline{TB(0,\varepsilon/2)}, \end{aligned}$$

т. е. $B(0,\delta) \subseteq \overline{TB(0,\varepsilon/2)}$ при $\delta = r/n(0)$.

Рассматривая последовательность шаров $B_n = B(0, \varepsilon/2^n)$, их образов TB_n и используя свойства оператора T, можно доказать, что $\overline{TB(0,\varepsilon/2)} \subseteq TB(0,\varepsilon)$. Следовательно, $B(0,\delta) \subseteq TB(0,\varepsilon)$ и теорема доказана (ср. [45, гл. 4, § 5]). ■

Упражнение. Доказать включение $\overline{TB(0,\varepsilon/2)} \subseteq TB(0,\varepsilon)$.

3. Отметим два следствия из теоремы Банаха. Рассмотрим нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ для векторного пространства E, с которыми оно образует банаховы пространства $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$, $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$. Будем говорить, что $\|\cdot\|_1$ *подчинена* $\|\cdot\|_2$, если $\|x\|_1 \le c_2 \cdot \|x\|_2$ $(x \in E)$ при некотором $c_2 > 0$. Скажем, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если они подчинены друг другу.

Следствие 1. *Если одна из норм подчинена другой, то они эквивалентны.*

□ В самом деле, если $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, то тождественный оператор $T\colon E_2 \to E_1$ непрерывен. По теореме Банаха обратный оператор $T^{-1}\colon E_1 \to E_2$ тоже непрерывен. Значит, $\|x\|_2 \le c_1 \cdot \|x\|_1$ $(x \in E)$ при $c_1 = \|T^{-1}\|$. ■

Рассмотрим линейное уравнение $Tx = y$, где $x \in E$, $y \in F$ и T — непрерывное линейное отображение банахова пространства E в банахово пространство F.

Следствие 2. *Если для каждого $y \in F$ существует единственное решение $x = x(y)$ уравнения $Tx = y$, то решение x уравнения непрерывно зависит от правой части y.*

□ Условие следствия 2 означает, что оператор T взаимно однозначно отображает E на все F. А утверждение следствия 2 означает, что обратный оператор T^{-1} непрерывен. Это вытекает из теоремы Банаха. ■

Следствие 2 формулирует условие для решения уравнения $Tx = y$, обеспечивающее его корректность.

4.5.4. Замкнутость графика оператора

Теорема о замкнутом графике эквивалентна теореме Банаха об обратном операторе.

1. Рассмотрим: банаховы пространства E и F, их произведение $E \times F$; векторное подпространство A пространства E, плотное в нем $(\bar{A} = E)$; линейный оператор $T\colon A \to F$. Множество

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in A\} \subseteq E \times F$$

называется *графиком* оператора T. Формально оператор отождествляется со своим графиком.

Произведение $E \times F$ с нормой $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ есть банахово пространство, а график $G = G(T)$ — его векторное подпространство. Если оно замкнуто, то является тоже банаховым пространством. Оператор T с замкнутым графиком G называется *замкнутым оператором.*

Пример. Пусть $E = F = \mathscr{C}[0,1]$, $A \subseteq E$ — подпространство, образованное гладкими функциями, $T = D$ — оператор дифференцирования. Из теоремы о почленном дифференцировании последовательности следует, что оператор D замкнут. Как было показано, он неограничен. Подчеркнем, что D не всюду определен. Оказывается, всюду определенный замкнутый оператор T ограничен.

Теорема. *Замкнутый оператор $T\colon E \to F$, определенный на всем банаховом пространстве E и отображающий его в банахово пространство F, ограничен.*

□ Рассмотрим проекторы $P\colon G \to E$, $Q\colon G \to F$, определяемые равенствами $P(x, Tx) = x$, $Q(x, Tx) = Tx$ $(x \in E)$. Это непрерывные линейные операторы. Причем P взаимно однозначно отображает банахово пространство G на все E. По теореме об обратном операторе P^{-1} непрерывен. Следовательно, оператор T, равный композиции QP^{-1}, тоже непрерывен и, значит, ограничен. ■

2. Равенство

$$\|x\|_G = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad (x \in A)$$

определяет еще одну норму для A. Ее называют *нормой графика.* Если оператор T замкнут, то A с этой нормой образуют банахово пространство. Оператор T ограничен на этом пространстве.

Рассмотрим банаховы пространства E, F и подпространства $A \subseteq B$ пространства E. Пусть оператор $T\colon A \to F$ замкнут, а оператор $S\colon B \to F$ имеет замкнутое продолжение. Тогда существует $c > 0$ такое, что

$$\|Tx\| \le c(\|x\|^2 + \|Sx\|^2)^{1/2} \quad (x \in A).$$

Вывод этого утверждения из теоремы о замкнутом графике есть в [32, гл. 2, п. 6]. Там же (гл. 2, п. 7) из теоремы о замкнутом графике выводится теорема Хёрмандера для гипоэллиптических операторов.

Замечание. Равенство

$$\|x\|_A = \left(\|x\|_E^2 + \|Sx\|^2\right)^{1/2} \quad (x \in A)$$

определяет норму для A. Ее тоже называют *нормой графика.*

3. Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства $(X, \mathscr{U})$ в топологическое пространство $(Y, \mathscr{V})$ называется *открытым*, если f отображает каждое открытое множество $U \in \mathscr{U}$ на некоторое открытое множество $f(U) = V \in \mathscr{V}$.

Верна [45, гл. 4, § 5]

Лемма. *Естественное отображение банахова пространства X на фактор-пространство $Y = X \setminus Z$ по замкнутому подпространству Z открыто.*

Из теоремы о замкнутом графике и этой леммы следует

Теорема. *Замкнутый оператор $T\colon E \to F$, отображающий банахово пространство E на банахово пространство F, является открытым отображением.*

Вместо замкнутости можно сразу требовать ограниченность оператора T. С такой формулировкой теорема доказана в [45, гл. 4, § 5]. Она обобщает теорему об обратном операторе.

Упражнение. Вывести теорему об обратном операторе из теоремы об открытом отображении.

Замечание. Более общие теоремы о замкнутом графике и открытом отображении доказаны в [124, гл. 6]. Там рассматриваются метризуемые топологические векторные и локально выпуклые пространства. Приводится много примеров и ссылок на литературу.

4.5.5. Слабая компактность

Непрерывные линейные функционалы на нормированном и локально выпуклом пространствах играют роль координат.

1. Рассмотрим нормированное пространство E, сопряженное с ним пространство E' непрерывных линейных функционалов на E и сопряженное с E' пространство E'' непрерывных линейных функционалов на E'. Среди элементов E'' выделяются определяющиеся точками $x \in E$ функционалы δ_x со значениями

$$\delta_x(x') = x'(x) \quad (x' \in E').$$

Принадлежность $\delta_x \in E''$ легко проверяется. Соответствие $x \to \delta_x$ является линейным вложением E в E'', сохраняющим норму. Поэтому функционалы δ_x часто отождествляются с точками x.

Функционалы δ_x $(x \in E)$ составляют удобную систему координат для E'. Определяемую этой системой топологию для E' называют *E-топологией*. Ее нужно отличать от E''-топологии, определяемой E''. Если $E'' = \{\delta_x : x \in E\}$, то пространство E называют *рефлексивным*. Оно тогда обязательно банахово.

Упражнение. Доказать это.

В качестве системы координат для исходного пространства выбирается сопряженное с ним пространство E', составленное из всех непрерывных линейных функционалов x' на E. Из теоремы Хана — Банаха следует, что эти координаты отделяют точки E: если $x'(x) = 0$ для всех $x' \in E'$, то $x = 0$.

Различные свойства множеств и последовательностей в E, связанные с координатами, называют *слабыми* или *координатными*: слабая ограниченность, слабая сходимость, слабая компактность. А свойства, связанные с нормами — *сильными* или *метрическими*.

2. Используя вложение во второе сопряженное и принцип равномерной ограниченности, легко убедиться в том, что верна

Теорема Макки. *Множество в нормированном пространстве сильно ограничено ессли оно слабо ограничено.*

В [14, гл. 4, п. 4] эта теорема доказана для отделимых локально выпуклых пространств. Из теоремы Макки с помощью несложных рассуждений легко вывести

Критерий слабой сходимости. *Последовательность точек $x(n) \in E$ слабо сходится к точке $a \in E$ ессли последовательность $x(n)$ ограничена и $z'(x_n) \to z'(a)$ для каждого z' из некоторого множества $Z' \subseteq E'$ с плотной в E' линейной оболочкой.*

Это утверждение доказано в [32, гл. 5, п. 1, теорема 3].

Часто бывает еще полезной

Теорема Мазура. *Если последовательность точек $x(n)$ нормированного пространства сходится к точке a слабо, то некоторая последовательность выпуклых комбинаций точек $x(n)$ сходится к точке a сильно.*

Эта теорема доказывается с помощью теорем об отделимости, вытекающих из теоремы Хана — Банаха. Доказательство упрощается (*упражнение*), если вместо выпуклых комбинаций рассматривать любые линейные. Доказательство теоремы Мазура есть в [32, гл. 5, п. 1, теорема 2].

Свойство слабой компактности для сопряженного пространства выражает теорема, аналогичная классической теореме Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности.

Теорема. *Если последовательность непрерывных линейных функционалов на сепарабельном нормированном пространстве ограничена, то она имеет подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке.*

Эта теорема доказана в [45, гл. 4, § 3, теорема 3].

Замечание. Теоремы о сходимости применяются при решении линейных операторных уравнений. Переход к координатам позволяет сначала из ограниченной последовательности приближенных решений выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому обобщенному решению. Существование сильно сходящейся к нему последовательности линейных комбинаций приближенных решений дает возможность получить решение, удовлетворяющее нужным условиям.

3. Для произвольного банахова пространства E верны следующие утверждения о компактности, сепарабельности и рефлексивности. Они поясняют роль сепарабельных и рефлексивных пространств.

Теорема Алаоглу. *Шар* $B' = \{x' : \|x'\| \le 1\} \subseteq E'$ *компактен в* E*-топологии.*

См. [28, гл. 5, п. 4, теорема 2; 116, теорема 2.10.2].

Предложение 1. *Если пространство* E *сепарабельно, то шар* $B' = \{x' : \|x'\| \le 1\} \subseteq E'$ *секвенциально компактен в* E*-топологии.*

См. [116, теорема 2.10.1]. Из теоремы Алаоглу следует теорема о сходящейся подпоследовательности из п. 2.

Упражнение. Дать подробный вывод.

Предложение 2. *Шар* $B' = \{x' : \|x'\| \le 1\}$ *метризуем при индуцированной* E*-топологии ессли* E *сепарабельно.*

Теорема. *Шар* $B' = \{x' : \|x'\| \leq 1\} \subseteq E'$ *слабо компактен ессли* E *рефлексивно.*

Следствие. *Пространство* E *рефлексивно ессли сопряженное пространство* E' *рефлексивно.*

Теорема Эберлейна — Шмульяна. *Пространство* E *рефлексивно ессли каждая ограниченная последовательность точек в нем имеет слабо сходящуюся подпоследовательность.*

См. соответственно [28, гл. 5, п. 5, теорема 1; 28, гл. 5, п. 4, теорема 1; 116, теорема 2.10.3; 32, гл. 5, п. 4].

Замечание. Часть утверждений переносится на локально выпуклые пространства (см. [14, гл. 4]).

4.6. Компактные линейные операторы

Ограниченные линейные операторы переводят ограниченные множества в ограниченные. Среди ограниченных операторов выделяются *компактные*, которые переводят ограниченные множества в части компактов. Эти операторы называют еще *вполне непрерывными*. В сепарабельном гильбертовом пространстве компактные операторы приближаются *вырожденными* (имеющими конечномерные образы). Этим объясняются многие хорошие свойства компактных линейных операторов.

Систематическое изложение теории компактных операторов есть в [124, гл. 9]. Там рассматриваются компактные операторы и в локально выпуклых пространствах.

4.6.1. Примеры компактных операторов

Рассмотрим нормированные пространства E, F. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называется *компактным*, если образ $T(B)$ каждого ограниченного множества $B \subseteq E$ содержится в некотором компакте $C \subseteq F$.

1. Заметим, что условие $T(B) \subseteq C$ равносильно компактности замыкания $\overline{T(B)}$ образа $T(B)$ ограниченного множества B. Вследствие линейности оператора T вместо произвольного ограниченного множества B достаточно взять единичный шар $B(0,1)$

$\subseteq E$ и его образ $T(B(0,1)) \subseteq F$: компактность T означает компактность $\overline{TB(0,1)} \subseteq E$.

Линейный оператор $T\colon E \to F$ компактен ессли для каждой ограниченной последовательности $x_n \in E$ последовательность $Tx_n = y_n \in F$ имеет сходящуюся подпоследовательность.

Упражнение. Доказать это утверждение.

Условимся линейный оператор $T\colon E \to F$, образ $T(E)$ которого имеет конечную размерность, называть *вырожденным.* Таким образом, по определению, вырожденные операторы отображают E на конечномерные подпространства банахова пространства F. Эти подпространства тоже называются *вырожденными.* Так как в конечномерном пространстве замыкание каждого ограниченного множества компактно, то вырожденные операторы компактны.

Как нетрудно проверить, нормированное пространство конечномерно ессли замкнутый единичный шар в нем компактен, т. е. когда тождественный оператор на этом пространстве компактен.

Упражнение. Доказать это [42, гл. 3, § 3; 45, гл. 4, § 6].

2. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$. Тогда каждый линейный оператор $T\colon E \to F$ вырожденный и поэтому компактный. Линейные отображения конечномерных пространств называются *матричными операторами.*

Пример 2. Пусть $E = F = l^2$ — банаховы пространства квадратично суммируемых последовательностей чисел. Каждая ограниченная последовательность чисел α_n определяет линейный оператор $T\colon E \to F$, преобразующий последовательность $x = (\xi_n)$ в последовательность $Tx = y = (\eta_n)$ чисел $\eta_n = \alpha_n \xi_n$. По аналогии с матрицами такие операторы называют *диагональными.* Оператор T компактен ессли $\alpha_n \to 0$ [109, гл. 6 и задача 132].

Пример 3. Пусть $E = F = \mathscr{C}[a,b]$ и оператор $T\colon E \to F$ определяется равенствами

$$Tf = g, \quad g(y) = \int\limits_a^b k(y,x) f(x)\, dx \quad (y \in [a,b])$$

для $f \in \mathbb{C}[a,b]$, $k(y,x) \in \mathbb{C}([a,b] \times [a,b])$. Ясно, что оператор T линейный. Он называется *интегральным оператором с непрерывным ядром.* Так как

$$|g(y)| \le (b-a)\|k\| \cdot \|f\|,$$
$$|g(y) - g(z)| \le \varepsilon(b-a)\|f\| \quad (|y-z| \le \delta)$$

для каждого $\varepsilon > 0$ и некоторого $\delta > 0$, то $g \in \mathscr{C}[a,b]$ и замыкание множества $T(B(0,1)) = \{Tf = g : \|f\| < 1\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела оно компактно и, значит, оператор T компактен.

Пример 4. Пусть $E = F = \mathscr{C}[a,b]$ и оператор $T\colon E \to F$ определяется равенствами

$$Tf = g, \quad g(y) = \int\limits_a^y k(y,x)f(x)\,dx \quad (y \in [a,b])$$

для $f \in \mathscr{C}[a,b]$, $k(y,x) \in \mathscr{C}([a,b]\times[a,b])$. Как и в примере 2, легко убедиться в том, что T — компактный линейный оператор. Он называется *интегральным оператором Вольтерра.*

Пример 5. Пусть $E = F = \mathscr{L}^2([a,b],dx)$ и оператор определяется теми же равенствами, что и в примере 3, но для $f \in \mathscr{L}^2([a,b],dx)$, $k \in \mathscr{L}^2([a,b]\times[a,b],dxdy)$. Из теоремы Фубини следует, что $k(y,\cdot) \in \mathscr{L}^2([a,b],dx)$, $k(y,\cdot)f \in \mathscr{L}([a,b],dx)$ для почти всех $y \in [a,b]$. Можно считать, что в остальных точках отрезка $[a,b]$ функция g равна нулю. Используя неравенство Коши, легко убедиться в том, что $g \in \mathscr{L}^2([a,b],dy)$. Ясно, что оператор T линейный. Применяя критерий Рисса компактности для пространства интегрируемых функций, нетрудно доказать, что оператор T компактен. Он называется *интегральным оператором с ядром Гильберта — Шмидта.*

Пример 6. Оператор вложения Соболева компактен (см. по этому поводу [99, гл. 1, п. 11] и [33, гл. 11, п. 4.4]).

Упражнение. Доказать компактность интегральных операторов в примерах 4 и 5 (см. [45, гл. 4, § 6] и [109, гл. 15]).

4.6.2. Свойства компактных операторов

1. Будем рассматривать компактные операторы, преобразующие нормированное пространство в себя. Они образуют *замкнутый двусторонний идеал* в нормированном кольце ограниченных операторов. Это выражает

Теорема 1. (1) *Линейная комбинация компактных операторов есть компактный оператор.*

(2) *Произведение компактного оператора на ограниченный есть компактный оператор.*

(3) *Предел сходящейся последовательности компактных операторов есть компактный оператор.*

$\square$ Докажем, например, утверждение (2). Пусть T — компактный, L — ограниченный линейный операторы и B — ограниченное множество в нормированном пространстве E. Тогда $L(B)$

ограничено и $TL(B)$ содержится в некотором компакте $C \subseteq E$. Точно так же $T(B)$ содержится в некотором компакте и $LT(B)$ тоже. Таким образом, произведения TL и LT являются компактными операторами. ■

Упражнение. Доказать теорему 1 полностью [45, гл. 4, § 6].

Из утверждения (2) этой теоремы вытекает важное

Следствие. *В бесконечномерном нормированном пространстве оператор, обратный к взаимно однозначному компактному оператору, неограничен.*

□ В самом деле, иначе тождественный оператор для бесконечномерного банахова пространства был бы компактен. ■

2. Рассмотрим бесконечномерное нормированное пространство E, линейный компактный оператор $T\colon E \to E$ и уравнение $Tx = y$. Это уравнение не может быть корректным: по только что доказанному единственность решения исключает его непрерывную зависимость от правой части.

Компактные операторы преобразуют слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. В рефлексивном банаховом пространстве каждый ограниченный линейный оператор, обладающий таким свойством, компактен [42, гл. 3, § 3].

Упражнение. Доказать эти утверждения [74, VI.5].

Используя свойство компактных операторов превращать слабую сходимость в сильную, можно доказать, что в сепарабельном гильбертовом пространстве каждый компактный оператор есть предел последовательности вырожденных операторов. Вместе с утверждением (3) теоремы это характеризует компактные операторы в таких пространствах.

Предложение. *Линейный оператор T в сепарабельном гильбертовом пространстве H компактен ессли существует последовательность вырожденных операторов S_n в H таких, что $\|T - S_n\| \to 0$.*

Доказательство есть в [74, VI.5]. Это предложение позволяет проверить условие компактности диагонального оператора в примере 2. Аппроксимируемость вырожденными операторами характеризует компактные операторы и в произвольном гильбертовом пространстве [42, гл. 3, § 5, теорема 43].

4.6.3. Сопряженные операторы

1. Рассмотрим банаховы пространства E, F, ограниченный оператор $T\colon E \to F$ и сопряженные пространства E', F'. Оператор T переводит точку $x \in E$ в новую точку $Tx = y \in F$. Равенства

$$x' = T'y' = y'T, \quad y'T(x) = y'(Tx)$$

определяют ограниченный линейный оператор $T'\colon F' \to E'$, переводящий координату $y' \in F'$ новой точки $Tx = y$ в координату $x' = T'y'$ точки x. Линейность и ограниченность оператора T' легко проверяются. Он называется (*банаховым*) *сопряженным* для оператора T (см. примеры в [33, гл. 9, § 3]).

Упражнение. Доказать линейность и ограниченность T'.

Пример. Пусть $E = F = l^1$ и $T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Тогда $E' = F' = l^\infty$ и $T'(\eta_1, \eta_2, \dots) = (\eta_2, \eta_3, \dots)$. Заметим, что $\|T\| = \|T'\| = 1$.

Пусть $E = F$ и S, $T \in \mathscr{B}(E, E)$. Тогда [32, гл. 7, п. 1]

$$(ST)' = T'S'.$$

Упражнение. Доказать это равенство.

Нетрудно доказать [45, гл. 4, § 5; 74, VI.2], что всегда $\|T\| = \|T'\|$. Отображение $T \to T'$ является линейной изометрией $\mathscr{B}(E, F)$ в $\mathscr{B}(F', E')$. Если T обратим, то и T' обратим, причем $(T^{-1})' = (T')^{-1}$ [28, гл. 6, п. 2].

Упражнение. Доказать равенства $\|T\| = \|T'\|$ и $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

Верны также [45, гл. 4, § 6; 32, гл. 10, п. 4; 79, п. 4.19]

Предложение. *Если оператор T компактен, то и сопряженный с ним оператор T' компактен.*

Следствие. *Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ компактен ессли сопряженный с ним оператор T' компактен.*

2. Пусть $E = F = H$ — гильбертово пространство и $E' = F' = H^*$ — сопряженное с ним. Тогда по теореме Рисса о представлении линейных функционалов существует сопряженно линейная изометрия C пространства H на H^*, при которой $c \in H$ отображается в линейный функционал $x \to c \cdot x$ $(x \in H)$. Оператор

$$T^* = C^{-1}T'C\colon H \to H$$

называется (*эрмитовым, гильбертовым*) *сопряженным* для $T\colon H \to H$. Он ограничен и линеен вместе с T [32, гл. 7, § 2].

Сопряженный оператор $T^*\colon H \to H$ определяется равенством $Tx \cdot y = x \cdot T^*y$ $(x, y \in H)$. В самом деле,

$$y \cdot Tx = Cy(Tx) = T'Cy(x) = C^{-1}T'Cy \cdot x = T^*y \cdot x.$$

Примеры. 1) Пусть $H = \mathbb{C}^n$ и линейный оператор T имеет матрицу $A = (a_{ij})$ в стандартной базе. Тогда сопряженный оператор T^* имеет матрицу $A^* = (\bar{a}_{ji})$, транспонированную и комплексно сопряженную с A.

2) Пусть $H = \mathscr{L}^2([a,b], dx)$ и T — интегральный оператор с ядром Гильберта — Шмидта $k(x, y)$. Тогда сопряженный оператор T^* — интегральный оператор с ядром Гильберта — Шмидта $k^*(y, x) = \overline{k(x, y)}$, транспонированным и комплексно сопряженным с $k(x, y)$.

3. Нетрудно проверить, что для каждых ограниченных линейных операторов S, T в H верны равенства

$$(ST)^* = T^* \cdot S^*, \quad (T^*)^* = T, \quad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Кроме того, если T обратим, то и T^* обратим, причем $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ [28, гл. 6, п. 2].

Упражнение. Доказать эти равенства [74, VI.3].

Используя свойства компактных операторов, критерий компактности для пространств непрерывных отображений и вложение во второе сопряженное, можно доказать [32, гл. 10, § 4], что верна

Теорема. *Оператор $T \in \mathscr{B}(H, H)$ компактен есcли сопряженный с ним оператор T^* компактен.*

Таким образом, можно переходить от данных операторов к сопряженным с ними, не теряя компактности.

Замечание. Более общие определения для линейных операторов на плотных множествах в локально выпуклых пространствах даны в [32, гл. 7].

4.6.4. Фредгольмовы операторы

Здесь дается аналитическое определение таких операторов, не использующее алгебраическое определение, данное в п. 2.2.

Связь между этими определениями устанавливает теорема Никольского [42, гл. 3, § 3]. Иногда в определение фредгольмова оператора включают замкнутость его образа [35, гл. 4, § 5], как это делалось в п. 2.2.4, 9.

1. Рассмотрим нормированные пространства E, F и ограниченный линейный оператор $A\colon E \to F$. Уравнение

$$Ax = y \quad (x \in E,\ y \in F)$$

является естественным обобщением системы линейных алгебраических уравнений. Для некоторых классов операторов теория линейных операторных уравнений хорошо разработана (в частности, для компактных и тесно связанных с ними фредгольмовых операторов).

Всюду дальше в этом разделе рассматривается одно нормированное пространство E и линейные операторы $A\colon E \to E$ в нем. Тождественный оператор для E обозначается I.

Оператор, равный разности тождественного и компактного операторов, называется *фредгольмовым*: оператор $A = I - T$ фредгольмов, если линейный оператор T компактен. Так как оператор $-T$ компактен вместе с T, то можно вместо разности говорить о сумме: $A = I + (-T)$.

Пример 1. Матричные операторы в $E = \mathbb{R}^m$ фредгольмовы. Они подробно описаны в главе 1 книги [35].

Пример 2. Пусть T — интегральный линейный оператор, описанный в примерах 3–5 п. 4.6.1. Тогда оператор $A = I - T$ фредгольмов. Уравнение $Af = h$ для этого оператора есть *интегральное уравнение Фредгольма*

$$f(y) + \int\limits_a^b k(y,x) f(x) dx = h(y).$$

В примере 4 ядро k заменяется другим, обладающим свойством $k(y,x) = 0$ при $y < x$. Это позволяет интегрировать по всему отрезку $[a,b]$, а не только по $[a,y]$.

Докажем важную теорему Рисса о взаимно однозначном фредгольмовом операторе. Прежде чем доказать ее, сформулируем некоторые вспомогательные предложения о свойствах фредгольмовых операторов.

2. Пусть T — компактный и $A = I - T$ — фредгольмов операторы в нормированном пространстве E, а L, M — замкнутые подпространства E такие, что $L \subseteq M$, $L \neq M$ и $AM \subseteq L$.

Лемма 1. $\|Tb - Tx\| \geq 1/2$ *для всех* $x \in L$ *и некоторого* $b \in M$ *с нормой* $\|b\| = 1$.

□ Так как $L \subseteq M$, $L \neq M$ и L замкнуто, то существует $a \in M$, для которой $d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \alpha > 0$, и, следовательно, существует $u \in L$, для которой $\alpha \leq \|a-u\| \leq 2\alpha$. Возьмем $b = \|a - u\|^{-1}(a - u)$, $\|b\| = 1$. Заметим, что

$$\|b-x\| = \|a-u\|^{-1} \cdot \|a-(u+\|a-u\|\cdot x)\| \geq \alpha(2\alpha)^{-1} = 2^{-1} \quad (x \in L),$$

так как $u + \|a - u\| \cdot x \in L$ при $x \in L$. Поэтому

$$\|Tb - Tx\| = \|(I - A)b - Tx\| = \|b - (Ab + Tx)\| \geq 1/2 \quad (x \in L),$$

так как $Ab \in L$, $Ax \in L$ по условию и, следовательно, $Tx = x - Ax \in L$, $Ab + Tx \in L$ при $x \in L$. ■

Замечание. Используя доказанную лемму, можно в замкнутом единичном шаре бесконечномерного нормированного пространства индуктивно определить последовательность точек b_n таких, что $\|b_m - b_n\| \geq 1/2$ при $m \neq n$. Отсюда следует некомпактность этого шара.

Пусть T — компактный и $A = I - T$ — взаимно однозначный фредгольмов операторы в нормированном пространстве E.

Лемма 2. *Оператор* A *преобразует каждое замкнутое множество* $X \subseteq E$ *в замкнутое множество* $AX = Y \subseteq E$.

□ Возьмем последовательность $y_n \in Y$, сходящуюся к $\bar{y} \in E$, и докажем, что $\bar{y} \in Y$. Для этого рассмотрим последовательность $x_n = A^{-1}y_n \in X$ и докажем, что она ограничена. Предположим, что это не так и существует подпоследовательность $x_{r(n)}$, для которой $\|x_{r(n)}\| \geq n$. Заметим, что $Au_n = \|x_{r(n)}\|^{-1} \cdot y_{r(n)} \to 0 \cdot \bar{y} = 0$ для $u_n = \|x_{r(n)}\|^{-1} \cdot x_{r(n)}$. Рассмотрим $v_n = Tu_n$. Так как оператор T компактен и $\|u_n\| = 1$, то существует подпоследовательность $v_{s(n)}$, сходящаяся к некоторой $v \in E$. Поэтому $u_{s(n)} = I \cdot u_{s(n)} = (A + T)u_{s(n)} = Au_{s(n)} + v_{s(n)} \to 0 + v = v$. Так как T непрерывен, $v_{s(n)} = Tu_{s(n)}$ и $v_{s(n)} \to v$, $u_{s(n)} \to v$, то $v = Tv$ и $Av = v - Tv = 0$. Следовательно, $v = A^{-1}0 = 0$. Вместе с тем, $\|v\| = \|\lim u_{s(n)}\| = \lim \|u_{s(n)}\| = 1$. Предположение о неограниченности (x_n) приводит к противоречию.

Из ограниченности последовательности x_n и компактности оператора T вытекает, что существует подпоследовательность

$z_{p(n)} = Tx_{p(n)}$, сходящаяся к некоторой $\bar{z} \in E$. Поэтому $x_{p(n)} = I \cdot x_{p(n)} = (A+T)x_{p(n)} = y_{p(n)} + z_{p(n)} \to \bar{y} + \bar{z}$. Так как по условию множество X замкнуто и $x_{p(n)} \in X$, то $x = \bar{y} + \bar{z} \in X$. Следовательно, $\bar{y} = \lim y_{p(n)} = \lim Ax_{p(n)} = A(\lim x_{p(n)}) = Ax \in Y$. Значит, множество Y замкнуто. ■

Из доказанной леммы вытекает важное

Следствие. *Оператор, обратный к взаимно однозначному фредгольмову оператору, непрерывен.*

□ По доказанному для такого оператора A^{-1} прообраз $(A^{-1})^{-1}X = AX = Y$ каждого замкнутого множества X замкнут. Значит, A^{-1} непрерывен. ■

3. Сформулируем и докажем основную теорему этого раздела.

Теорема Рисса. *Если фредгольмов оператор A в нормированном пространстве E взаимно однозначен, то A отображает E на себя и обратный к A оператор A^{-1} непрерывен.*

□ (1) Докажем, что $AE = E$. Рассмотрим последовательность операторов

$$A^n = (I-T)^n = I - (\alpha_1 T^1 + \dots + \alpha_n T^n) = I - T_n.$$

Здесь $T_n = \alpha_1 T^1 + \dots + \alpha_n T^n$ компактны вместе с $T = I - A$ и поэтому A^n фредгольмовы. Пусть еще $A^0 = I$.

Операторы A^n определяют множества $Y_n = A^n E$. По лемме 2 это замкнутые подпространства E. Кроме того, $Y_{n+1} = A^n(AE) \subseteq A^n E = Y_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Существует номер $n(0)$ такой, что $Y_n = Y_{n(0)}$ для всех номеров $n \geq n(0)$. В самом деле, иначе существовала бы строго убывающая подпоследовательность подпространств $Z_n = Y_{r(n)}$ и по лемме 1 можно было бы выбрать последовательность точек $z_n \in Z_n$ таких, что $\|z_n\| = 1$ и $\|Tz_n - Tz_p\| \geq 1/2$ при $p > n$. Это противоречит компактности оператора T. (Условие леммы 1 для подпространств $L = Z_{n+1} = Y_{r(n+1)}$, $M = Z_n = Y_{r(n)}$ и оператора $A^{r(n+1)-r(n)}$ выполнены.)

Среди номеров $n(0)$ таких, что $Y_n = Y_{n(0)}$ для всех $n \geq n(0)$, существует наименьший номер $m \geq 0$. Покажем, что $m = 0$. Действительно, если $m > 0$, то $Y_{m-1} \neq Y_m$. Вместе с тем, $Y_{m-1} = A^{-1}Y_m = A^{-1}Y_{m+1} = Y_m$. Следовательно, $m = 0$ и $E = Y_0 = Y_1 = \dots$. Поэтому $AE = AY_0 = Y_1 = E$. Оператор A отображает E на себя.

(2) По следствию леммы 2 обратный к A оператор A^{-1} непрерывен. ■

Подчеркнем, что теорема Рисса о взаимно однозначном фредгольмовом операторе доказана для любых нормированных пространств, не обязательно банаховых.

4.6.5. Теоремы Фредгольма

Эти теоремы описывают условия корректности, существования и единственности решения линейного операторного уравнения Фредгольма. Здесь излагается аналитическая теория Фредгольма, не использующая алгебраическую, изложенную в п. 2.2. Связь между этими теориями подробно описана в [42, гл. 3, § 3]. Теоремы Фредгольма для гильбертовых пространств подробно доказаны в [96, гл. 3, § 3]. Там для фредгольмова оператора определяется индекс и доказывается замкнутость образа. Она обеспечивает равенство образа своему двойному ортодополнению. (Это условие использовалось в п. 2.2.4,5 при доказательстве второй теоремы Фредгольма; см. также [111, п. 7.3].)

1. Рассмотрим фредгольмов оператор $A = I - T$ в банаховом пространстве E и сопряженный с A оператор $A' = I' - T'$ в банаховом пространстве E'. Так как T' компактен вместе с T, то A' фредгольмов вместе с A. Эти операторы определяют уравнения

$$\begin{aligned} &Ax = y \quad (1), && A'x' = y' \quad (1'), \\ &Az = 0 \quad (2), && A'z' = 0 \quad (2'), \end{aligned}$$

где $x, y, z \in E$ и $z', y', z' \in E'$. Уравнение (1) *корректно разрешимо,* если для него при каждом $y \in E$ существует единственное решение $x = A^{-1}y \in E$ и оператор A^{-1} непрерывен.

Из теоремы Рисса сразу следует

Теорема 1. *Либо уравнение* (1) *корректно разрешимо, либо уравнение* (2) *имеет ненулевое решение.*

□ В самом деле, по теореме Рисса корректная разрешимость уравнения (1) эквивалентна взаимной однозначности оператора A. Существование же ненулевого решения уравнения (2) эквивалентно отсутствию взаимной однозначности оператора A. Таким образом, теорема 1 эквивалентна тривиальному утверждению, что оператор A либо взаимно однозначен, либо нет. ■

Теорему 1 называют *альтернативой Фредгольма.* Она эквивалентна теореме Рисса.

2. Вторая теорема формулирует условие существования решения.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *имеет решение при данном* $y \in E$ *есcли* $z'(y) = 0$ *для каждого решения* z' *уравнения* $(2')$.

□ В самом деле, если $Ax = y$ и $A'z' = 0$, то

$$z'(y) = z'(x) - z'(Tx) = z'(x) - T'z'(x) = A'z'(x) = 0.$$

Обратно, если $z'(y) = 0$ при $A'z' = 0$, то вследствие замкнутости $AE = Y$ из $y \notin Y$ вытекает по теореме Хана — Банаха существование непрерывного линейного функционала φ на E такого, что $\varphi(y) = 1$ и $\varphi(z) = 0$ для каждого $z \in Y$. Поэтому

$$0 = \varphi(x - Tx) = \varphi(x) - \varphi(Tx) = \varphi(x) - T'\varphi(x) = A'\varphi(x)$$

для всех $x \in E$, $A'\varphi = 0$, и по условию $\varphi(y) = 0$. Это противоречит равенству $\varphi(y) = 1$. Значит, $y \in Y = AE$ и уравнение (1) имеет решение. ■

3. Третья теорема описывает размерности пространств решений рассматриваемых уравнений.

Теорема 3. *Уравнения* (2) *и* $(2')$ *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

Рассмотрим ядра $\operatorname{Ker} A=\{z : Az = 0\}$, $\operatorname{Ker} A'=\{z' : A'z'=0\}$ операторов A, A'. Теорема 3 утверждает, что $\dim(\operatorname{Ker} A) = \dim(\operatorname{Ker} A') < \infty$. При ее доказательстве используются свойства спектра компактного оператора. Решение единственное есcли ядра операторов нулевые. В [42, гл. 3, § 3, п. 3] все три теоремы объединены.

4. Если пространство $E = H$ гильбертово, то вместо уравнений $(1')$, $(2')$ нужно взять $(x^*, y^*, z^* \in H)$

$$A^*x^* = y^*, \tag{1*}$$

$$A^*z^* = 0. \tag{2*}$$

При такой замене все три теоремы Фредгольма останутся верными [96, гл. 4, § 2]. Условие теоремы 2 о существовании решения в этом случае означает, что правая часть уравнения (1) ортогональна каждому решению уравнения (2^*).

Упражнение. Вывести из альтернативы Фредгольма, что каждое комплексное число $\mu \neq 0$ либо является собственным числом для данного компактного оператора T, либо принадлежит его резольвентному множеству.

Замечание. Альтернатива Фредгольма верна не для всех ограниченных линейных операторов. В частности, интегральный оператор Вольтерра с ядром $k = 1$ взаимно однозначно отображает банахово пространство $E = \mathscr{C}[a, b]$ на его собственную часть и имеет разрывный обратный оператор.

В [74] доказана альтернатива Фредгольма для операторных аналитических функций. Из нее выводятся теоремы Рисса — Шаудера и Гильберта — Шмидта для компактных операторов. Операторные аналитические функции подробно описываются в [96, гл. 4, § 3]. В [63, гл. 2, § 9] доказывается альтернатива Фредгольма для идемпотентных интегральных операторов, введенных там.

4.7. Самосопряженные операторы

Среди операторов в гильбертовом пространстве выделяются эрмитовы и нормальные. Они определяются с помощью сопряженных операторов. По некоторым своим свойствам эрмитовы операторы похожи на вещественные числа, а нормальные — на комплексные. В этом разделе, как правило, рассматриваются комплексные отделимые пространства и обобщаются определения, данные в п. 4.6.3.

Систематическое изложение теории двойственности для локально выпуклых пространств есть в [124, гл. 8]. Там в качестве примеров сопряженных операторов рассматриваются векторные меры и интегралы векторных функций.

4.7.1. Банаховы сопряженные операторы

Рассмотрим: нормированные пространства E и F, плотное в E подпространство A, линейный оператор $T\colon A \to F$, алгебраические сопряженные пространства A^*, E^*, F^*, топологические сопряженные пространства A', E', F'. Так как $\bar{A} = E$, то каждый функционал $a' \in A'$ продолжается по непрерывности до функционала $x' \in E'$ и такое продолжение единственное.

1. Равенство

$$S^*y^* = y^*T \quad (y^* \in F^*)$$

определяет линейный оператор $S^*\colon A^* \to F^*$. Он алгебраически сопряжен с оператором T. Рассмотрим еще подпространство $B' = F' \cap (S^*)^{-1}A'$, составленное из всех $y' \in F'$, для которых $S^*y' = a' \in A'$. Если $y' \in B'$, то, заменяя $a' \in A'$ его непрерывным продолжением $x' \in E'$, получаем в результате линейный оператор $T'\colon B' \to E'$. Он называется *банаховым сопряженным* для оператора T и определяется равенствами

$$x' = T'y' \ (y' \in B'), \quad x'(x) = y'(Tx) \ (x \in A).$$

Если $A = E$ и оператор T ограничен, то $B' = F'$ и сопряженный оператор T' тоже ограничен [116, п. 2.11]. Такие операторы рассматривались в п. 4.6.3.

2. Сопряженный оператор T' для любого плотно определенного оператора T всегда замкнут [116, п. 2.11]. Но его область определения B' может быть тривиальной — состоять только из нулевого функционала на F. Свойства сопряженных операторов подробно описаны в [32, гл. 7; 35, гл. 3; 116, п. 2.11]. В [35] есть много примеров.

4.7.2. Гильбертовы сопряженные операторы

Определим гильбертовы сопряженные операторы независимо от банаховых.

1. Рассмотрим: гильбертовы пространства E и F, их векторные подпространства A и B, линейные операторы $T\colon A \to F$ и $S\colon B \to E$. Если

$$Tx \cdot y = x \cdot Sy \quad (x \in A,\, y \in B),$$

то будем говорить, что операторы T и S *сопряжены* друг с другом. Например, нулевой оператор $T = 0$ на нулевом подпространстве $A = \{0\}$ сопряжен с каждым линейным оператором $S\colon B \to E$. Если A плотно в E, то функционал $a' \in A'$ со значениями $a'(x) = x \cdot Sy$ $(x \in A)$ продолжается по непрерывности до функционала $x' \in E'$ со значениями $x'(x) = x \cdot Sy$ $(x \in E)$. Это позволяет среди всех сопряженных с T операторов S выбрать максимальный. Возьмем множество A^* всех $y^* \in F$, для которых

$$Tx \cdot y^* = x \cdot x^* \quad (x \in A)$$

при некотором $x^* \in E$. Это векторное подпространство гильбертова пространства F. Так как $\bar{A} = E$, то нужный элемент единственный: из $x \cdot x_1^* = x \cdot x_2^*$ $(x \in A)$ следует $x \cdot x_1^* = x \cdot x_2^*$ $(x \in E)$ и $x_1^* = x_2^*$. Значит, выписанное равенство определяет оператор $T^*\colon A^* \to E$, который отображает $y^* \in A^*$ в $x^* = Ty^* \in E$. Легко проверить, что оператор T^* линеен:

$$\begin{aligned} Tx \cdot \big(\beta_1 y_1^* + \beta_2 y_2^*\big) &= \beta_1\big(Tx \cdot y_1^*\big) + \beta_2\big(Tx \cdot y_2^*\big) \\ &= \beta_1\big(x \cdot x_1^*\big) + \beta_2\big(x \cdot x_2^*\big) = x \cdot \big(\beta_1 x_1^* + \beta_2 x_2^*\big) \end{aligned}$$

при $y_j^* \in A^*$, $x_j^* = Ty_j^*$ и произвольных числах β_j $(j = 1, 2)$. Из определений следует, что T^* сопряжен с T и что всякий оператор $S\colon B \to E$, сопряженный с T, является сужением оператора T.

Таким образом, гильбертов сопряженный к плотно определенному $T\colon A \to F$ оператор $T^*\colon A^* \to E$ действует на те и только те $y^* \in F$, для которых существует $x^* \in E$ такой, что $Tx \cdot y^* = x \cdot x^*$ при всех $x \in A$, и тогда $T^* y^* = x^*$. Заметим, что ядро T^* равно ортогональному дополнению образа T:

$$\operatorname{Ker}(T^*) = (\operatorname{Ran} T)^\perp.$$

Если оператор T^* тоже плотно определен ($\overline{A^*} = F$), то и для него можно определить сопряженный оператор $T^{**}\colon A^{**} \to F$ $(A^{**} \subseteq E)$. Из определений следует, что T^{**} является продолжением T и $A \subseteq A^{**}$. При этом $A^{**} = E$, когда T ограничен.

Упражнение. Проверить сформулированные утверждения.

2. Свойства операторов T и T^* тесно связаны со свойствами их графиков [32, гл. 7, п. 2; 74, VIII.1]. Нетрудно проверить, что

$$G(T^*) = W(T)^\perp, \quad W(T) = \{(-Tx, x) : x \in A\}.$$

В самом деле,

$$W(T)^\perp = \{(y, y^*) : (y, y^*) \cdot (-Tx, x) = -y \cdot Tx + y^* \cdot x = 0 \quad (x \in A)\}.$$

График $G(T^*)$, как всякое ортогональное дополнение, замкнут. Если T взаимно однозначен и имеет плотный образ ($\overline{\operatorname{Ran} T} = F$), то T^* тоже взаимно однозначен и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Упражнение. Доказать это.

Свойства гильбертовых сопряженных операторов подробно описаны в [74, VIII.1; 148, 4.4]. Там есть доказательства всех указанных свойств и примеры. Условимся дальше гильбертовы сопряженные операторы называть коротко *сопряженными.*

Пример 1 (оператор умножения). Пусть $E = F = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ и $Tf = g$, $g(x) = x \cdot f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Оператор T называется *оператором умножения на независимую переменную.* Его область определения A задается условием $g \in \mathscr{L}^2$. Нетрудно проверить, что $\bar{A} = \mathscr{L}^2$, оператор T неограничен и $T^* = T$.

Пример 2 (оператор дифференцирования). Пусть $E = F = \mathscr{L}^2([0,1], dx)$ и $Tf = g$, $g(x) = i^{-1} \cdot f'(x)$ $(x \in [0,1])$. Производные вычисляются почти всюду и областью определения A оператора T считается множество всех абсолютно непрерывных функций f с производными $f' \in \mathscr{L}^2$, удовлетворяющих условиям $f(0) = f(1) = 0$. Можно доказать, что T плотно определен и неограничен, а оператор T^* является его продолжением на множество A^* всех абсолютно непрерывных функций f с производными $f' \in \mathscr{L}^2$ (без граничных условий): $T^* \supseteq T$, $T^* \neq T$.

Если вместо $\mathscr{L}^2([0,1], dx)$ взять $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ и не фиксировать значений f, то будет верно равенство $T^* = T$.

Упражнение. Доказать сформулированные в примерах утверждения (см. [32, гл. 7]).

Подчеркнем, что так как теория описана для отделимых пространств, то в примерах точками считаются классы эквивалентных по лебеговой мере функций. Можно было бы в теории рассматривать и неотделимые пространства, делая нужные оговорки и заменяя равенства эквивалентностями.

4.7.3. Эрмитовы и нормальные операторы

В этом пункте и пп. 4.7.4, 4.7.5 рассматриваются линейные операторы $T\colon A \to H$, определенные на плотном векторном подпространстве A гильбертова пространства H, и сопряженные с ним операторы $T^*\colon A^* \to H$, определенные на подпространстве A^* пространства H.

1. Если оператор T^* является продолжением T, то оператор T называется *симметричным.* Для него верно равенство

$$Tx \cdot y = x \cdot Ty \quad (x, y \in A),$$

но возможно $A^* \neq A$, как и в примере 2 п. 4.7.2. Если $T^* = T$, то оператор T называется *самосопряженным.* Для него верно то же самое равенство и, кроме того, $A^* = A$. Самосопряженный оператор T замкнут вместе с T^*. В частности, операторы умножения и дифференцирования в примерах 1 и 2 п. 4.7.2 замкнутые. Если взаимно однозначный оператор T самосопряжен, то обратный оператор T^{-1} тоже самосопряжен. Это следует из свойств связанных с ними графиков. Если T замкнут, то операторы TT^* и T^*T самосопряженные (см. [32, гл. 7, п. 3]).

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

Если $A = H$, то самосопряженный оператор $T\colon A \to H$ называется *эрмитовым.* Например, матричный диагональный оператор с вещественными собственными числами эрмитов. Для эрмитова оператора $T\colon H \to H$ равенство $Tx \cdot y = x \cdot Ty$ верно при всех $x, y \in H$. По теореме о замкнутом графике каждый эрмитов оператор ограничен.

2. Оператор T называется *нормальным*, если он замкнут и верно равенство $TT^* = T^*T$. Из определений следует, что

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x \in \operatorname{Dom}(T^*T) = \operatorname{Dom}(TT^*)).$$

Можно доказать, что

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Dom}(T^*T) = \operatorname{Dom}(TT^*),$$

откуда

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*).$$

Упражнение. Доказать эти равенства (см. [35, гл. 5, § 3].

Рассмотрим эрмитовы операторы $R\colon H \to H$, $S\colon H \to H$, оператор $R + iS = T$ и сопряженный с ним оператор $R - iS = T^*$. Легко проверить, что $TT^* = T^*T$ тогда и только тогда, когда $RS = SR$. Аналогия между нормальными операторами и комплексными числами достаточно глубока [148, п. 5.6].

4.7.4. Унитарные операторы

1. Ограниченный линейный оператор $T\colon H \to H$ называется *изометрическим,* если он сохраняет скалярное произведение:

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y \quad (x, y \in H).$$

Вместо сохранения скалярного произведения можно требовать сохранения нормы:

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (x \in H).$$

В самом деле, это равенство следует из предыдущего при $x = y$. Их эквивалентность вытекает из поляризационного тождества (п. 2.2.6, 3).

2. Изометрический оператор $T\colon H \to H$ называется *унитарным,* если он отображает комплексное гильбертово пространство H на себя: $T(H) = H$. Благодаря отделимости рассматриваемого гильбертова пространства изометричность оператора T влечет его взаимную однозначность: из $Tx_1 = Tx_2$ следует

$$\|x_1 - x_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|Tx_1 - Tx_2\| = 0.$$

Ограниченный линейный оператор $T\colon H \to H$ унитарен тогда и только тогда, когда сопряженный с ним оператор равен обратному: $T^* = T^{-1}$. В самом деле, если T унитарный, то T^{-1} определен на H, а из условия для скалярного произведения следует, что $TT^* = T^*T = I$. Значит, $T^* = T^{-1}$. Обратно, если $T^* = T^{-1}$, то $T^*T = I$ и верно равенство для скалярного произведения. Кроме того, в этом случае $H = \mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Dom}(T^{-1}) = \mathrm{Dom}(T^*)$ и, следовательно, оператор T унитарный.

Из равенств $TT^* = T^*T = I$ следует, что унитарный оператор нормальный.

4.7.5. Положительные операторы

1. Каждый оператор $T\colon H \to H$ определяет функционал со значениями

$$\varphi(x) = Tx \cdot x \quad (x \in H).$$

Оператор T называется *положительным,* если функционал φ положителен: $\varphi(x) \geq 0$ $(x \in H)$. Положительный ограниченный линейный оператор $T\colon H \to H$ эрмитов. В самом деле, если $x \cdot Tx = \overline{Tx \cdot x} = Tx \cdot x$ $(x \in H)$, то вследствие поляризационного тождества в рассматриваемом комплексном случае $Tx \cdot y = x \cdot Ty$ $(x, y \in H)$.

Пример. Пусть $H = \mathbb{R}^3$ и оператор T в стандартной базе представляется матрицей $A = (a_{ij})$ с элементами $a_{ij} = 1$ $(i \leq j)$, $a_{ij} = 0$ $(i > j)$. Оператор T положительный, но не эрмитов.

Так как

$$T^*Tx \cdot x = Tx \cdot Tx = \|Tx\|^2 \quad (x \in H),$$

то оператор T^*T положителен при любом ограниченном линейном T.

Будем положительность эрмитова оператора T записывать $T \geq O$. Положительность позволяет определить порядок для эрмитовых операторов $S\colon H \to H$, $R\colon H \to H$. Как и для вещественных чисел, $S \geq R$ означает, что $T = S - R \geq O$, т. е.

$$(S - R)x \cdot x \geq 0 \quad (x \in H).$$

Порядок для эрмитовых операторов обладает многими привычными свойствами, которые легко проверяются.

2. Используя операторный алгоритм Ньютона, аналогичный обычному алгоритму Ньютона для извлечения квадратного корня, можно доказать, что для каждого эрмитова оператора $T \geq O$ существует единственный эрмитов $S \geq O$ такой, что $T = S^2$. При этом S перестановочен с каждым ограниченным R, с которым перестановочен T. Оператор S называется *квадратным корнем* оператора T и обозначается $T^{1/2}$. Доказательство есть в [96, гл. 4, § 2] и [103, п. 26.2].

Упражнение. Дать подробные доказательства.

Существование квадратного корня позволяет определить *абсолютную величину*

$$|T| = (T^*T)^{1/2}$$

ограниченного оператора T. Назовем ограниченный линейный оператор $U\colon H \to H$ *частично изометрическим,* если

$$\|Ux\| = \|x\| \quad (x \in (\operatorname{Ker} U)^\perp).$$

Для каждого ограниченного линейного оператора $T\colon H \to H$ существует единственный частично изометрический оператор $U\colon H \to H$ такой, что

$$T = U \cdot |T|, \quad \operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} T.$$

Выписанное равенство называется *полярным разложением* оператора T. Доказательство есть в [74, гл. 6, п. 4]. Для нормальности T необходимо и достаточно, чтобы операторы $|T|$ и U были перестановочны: $|T| \cdot U = U \cdot |T|$.

3. Рассмотрим ограниченный линейный оператор $T\colon H \to H$ и эрмитовы операторы

$$A = 2^{-1}(T + T^*), \quad B = (2i)^{-1}(T - T^*).$$

Ясно, что $T = A + iB$. Операторы A и B называются *вещественной* и *мнимой частями* частями оператора T, а равенство $T = A + iB$ — его *декартовым разложением.*

Если оператор T нормальный, то

$$AB = (4i)^{-1}(T^2 - T^{*2}) = BA.$$

Обратно, если $AB = BA$, то

$$TT^* = (A + iB)(A - iB) = (A - iB)(A + iB) = T^*T$$

и оператор T нормальный. Таким образом, нормальность ограниченного оператора означает перестановочность его вещественной и мнимой частей.

Таким образом, с помощью эрмитовых операторов получены декартово и полярное разложения ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве. Нормальные операторы выделяются перестановочностью членов разложения. В [74, гл. 8, п. 9] теорема о полярном разложении обобщается на замкнутые операторы. В [79, п. 12.35] теорема о перестановочности доказывается с помощью функционального исчисления для операторов.

4.8. Спектры операторов

Спектр матричного оператора состоит из собственных чисел. С помощью спектра удобно описывать многие свойства операторов. В общем случае определение и исследование спектра оператора сложнее, чем в матричном. Но для некоторых классов операторов спектральная теория тоже достаточно эффективна.

Главная задача спектральной теории операторов — решить уравнение $\lambda x - Tx = y$, где λ — число, x и y — векторы, а T — линейный оператор. Спектральная теория исследует условия существования и единственности решения x этого уравнения и непрерывной зависимости решения x от правой части y.

Спектральная теория операторов подробно излагается в фундаментальном труде [28]. Ей целиком посвящены два тома. Краткое описание спектральной теории для банаховых алгебр есть в дополнении к [45]. Спектральная теория для мультинормированных алгебр изложена в [113, гл. 2]. Здесь будут рассматриваться только спектры линейных операторов.

4.8.1. Классификация спектров

Рассмотрим: комплексное банахово пространство E, плотное в нем векторное подпространство X, линейный оператор $T{:}X{\to}E$, линейный оператор $I\colon E \to E$ и число $\lambda \in \mathbb{C}$. Сужение тождественного оператора I на подпространство X будем тоже обозначать I. Как всегда, предположим, что пространство E ненулевое и норма отделяет точки. Уравнение

$$\lambda x - Tx = y \quad (x \in X,\ y \in E) \tag{1}$$

естественно приводит к оператору

$$S(\lambda, T) = \lambda I - T\colon X \to E$$

и обратному соответствию

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}\colon Y \to E,$$

где

$$Y = \operatorname{Ran} S(\lambda, T) = S(\lambda, T)X.$$

По определению, образ

$$R(\lambda, T)y = \{x : \lambda x - Tx = y\}$$

состоит из решений x уравнения $\lambda x - Tx = y$. Поэтому соответствие $R(\lambda, T)$ называется *резольвентным.*

1. Характер разрешимости уравнения (1) приводит к естественному разбиению комплексных чисел λ на классы. Сначала на два основные. Если уравнение (1) *корректно разрешимо* (т. е. оператор $S(\lambda, T)$ взаимно однозначно отображает X на плотное в E подпространство Y и обратный оператор $R(\lambda, T)$ непрерывен), то число λ принадлежит *резольвентному множеству* $P(T)$

оператора T. В противном случае λ принадлежит *спектру* $\Sigma(T)$ оператора T. Таким образом, по определению,

$$\Sigma(T) = \mathbb{C} \setminus P(T).$$

Подчеркнем, что непрерывность оператора T (и, следовательно, оператора $S(\lambda, T)$) не предполагается. Может случиться, что оператор $R(\lambda, T)$ непрерывен, а оператор $S(\lambda, T)$ — нет.

Корректная разрешимость уравнения (1) здесь понимается в *обобщенном смысле*: решение может существовать не для всякой правой части y, а только для принадлежащей некоторому *плотному подпространству*. Такое обобщение оправдывается тем, что во многих важных случаях это подпространство совпадает со всем пространством.

Заметим, что при $\lambda \neq 0$ уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x - \lambda^{-1}Tx = \lambda^{-1}y \quad (x, y \in E). \tag{2}$$

Если оператор T компактный, то это — уравнение Фредгольма. В связи с этим уравнение (1) с компактным оператором T тоже называется *уравнением Фредгольма*, а оператор $S(\lambda, T) = \lambda I - T$ *фредгольмовым*.

Спектр $\Sigma(T)$ оператора T делится на несколько частей. Прежде всего выделяется *точечный спектр* $\Sigma_p(T)$, составленный из собственных чисел λ оператора T, для которых уравнение (1) при $y = 0$ имеет решение $x \neq 0$ (т. е. для таких $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $Tx = \lambda x$ при некотором $x \neq 0$). Определение собственных чисел в общем случае такое же, как для матричных операторов. Из определений и свойств матричных операторов следует, что у матричного оператора T спектр точечный: $\Sigma(T) = \Sigma_p(T)$.

2. Подпространство

$$H(\lambda, T) = \{x : Tx = \lambda x\}$$

пространства E называется *собственным подпространством* оператора T, определяемым собственным числом $\lambda \in \Sigma_p(T)$. Иногда удобно рассматривать $H(\lambda, T) = \{0\}$ при $\lambda \notin \Sigma_p(T)$. Размерность $\dim H(\lambda, T)$ называется *кратностью* собственного числа λ оператора T. Эта кратность может быть бесконечной.

Так как уравнение (1) линейное, то $\lambda \notin \Sigma_p(T)$ означает, что при каждом $y \in Y = \operatorname{Ran} S(\lambda, T)$ уравнение (1) имеет ровно одно решение. Если $\bar{Y} = E$ и $\lambda \notin \Sigma_p(T)$, $\lambda \notin P(T)$, то говорят, что число λ принадлежит *непрерывному спектру* оператора T и пишут $\lambda \in \Sigma_c(T)$. А если $\bar{Y} \neq E$, то число $\lambda \notin \Sigma_p(T)$ относят к *остаточному спектру* $\Sigma_r(T)$ оператора T.

Таким образом, рассматриваются разбиения

$$P(T) + \Sigma(T) = \mathbb{C}, \quad \Sigma(T) = \Sigma_p(T) + \Sigma_c(T) + \Sigma_r(T).$$

Классификацию спектров наглядно поясняет таблица, в которой записаны виды спектров и определяющие их свойства резольвентного соответствия:

<table>
<tr><td rowspan="2">$R(\lambda, T)$</td><td colspan="2">Однозначно</td><td rowspan="2">Неоднозначно</td></tr>
<tr><td>Непрерывно</td><td>Разрывно</td></tr>
<tr><td>Плотно определено</td><td>$P(T)$</td><td>$\Sigma_c(T)$</td><td rowspan="2">$\Sigma_p(T)$</td></tr>
<tr><td>Неплотно определено</td><td colspan="2">$\Sigma_r(T)$</td></tr>
</table>

Например, если $R(\lambda, T)$ плотно определено, однозначно и непрерывно, то $\lambda \in P(T)$. Заметим, что в литературе можно встретить и другие классификации (см., например, [74, 148]).

3. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $T = O$. Тогда $S(\lambda, T) = \lambda \cdot I$ и $\Sigma(T) = \Sigma_p(T) = \{0\}$. Пусть $T = I$. Тогда $S(\lambda, T) = (\lambda - 1)I$ и $\Sigma(T) = \Sigma_p(T) = \{1\}$.

Пример 2. Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Тогда операторы $T, S(\lambda, T)$ матричные и $\Sigma(T) = \Sigma_p(T) = \{\lambda : \det S(\lambda, T) = 0\}$, так как все матричные операторы непрерывны, а взаимно однозначные матричные операторы, характеризующиеся не равным нулю определителем, взаимно накрывающие.

Пример 3. Пусть $X = E = \mathscr{C}[0, 1]$ и $Tf = g$, $g(u) = u \cdot f(u)$ $(u \in [0, 1])$. Ясно, что оператор T ограничен. Нетрудно убедиться в том, что при $\lambda \notin [0, 1]$ оператор $S(\lambda, T)$ является гомеоморфизмом E на E. А при $\lambda \in [0, 1]$ он взаимно однозначен, имеет неплотный образ и разрывный обратный. То есть при $\lambda \in [0, 1]$ резольвентное соответствие $R(\lambda, T)$ неплотно определено, однозначно и разрывно. Значит, $\Sigma(T) = \Sigma_r(T) = [0, 1]$.

Пусть теперь $X = E = \mathscr{L}^2([0, 1], du)$ и T — по-прежнему оператор умножения на независимую переменную. Он снова ограничен и имеет тот же спектр $\Sigma(T) = [0, 1]$. Но в новом пространстве резольвентный оператор $R(\lambda, T)$ плотно определен и спектр оператора T становится непрерывным: $\Sigma(T) = \Sigma_c(T)$.

Пусть $E = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, du)$ и рассматриваемый оператор T умножения на независимую переменную определен на плотном в E подпространстве

$$X = \left\{ f : \int |u \cdot f(u)|^2 \, du < \infty \right\},$$

как и в примере 1 из п. 4.7.2. Оператор T неограничен. Нетрудно убедиться в том, что при $\lambda \notin \mathbb{R}$ оператор $S(\lambda, T)$ является гомеоморфизмом X на E. Можно показать, что при $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $S(\lambda, T)$ взаимно однозначен, имеет плотный образ и разрывный обратный. То есть при $\lambda \in \mathbb{R}$ резольвентное соответствие $R(\lambda, T)$ плотно определено, однозначно и разрывно. Значит, $\Sigma(T) = \Sigma_c(T) = \mathbb{R}$.

Упражнение. Дать подробные доказательства сформулированных в примере 3 утверждений.

Пример 4. Пусть $E = C[0, 1]$, $X = C^1[0, 1]$ и T — оператор дифференцирования: $Tf = g$, $g(u) = f'(u)$ $(u \in [0, 1])$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Каждому $h \in E$ при $R(\lambda, T)$ соответствуют решения $f \in X$ уравнения $\lambda f - f' = h$, которые имеют значения

$$f(u) = ce^{\lambda u} - \int\limits_0^u e^{\lambda(u-t)} h(t)\, dt.$$

Здесь $c = f(0)$ — произвольное комплексное число. Следовательно, резольвентное соответствие $R(\lambda, T)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ определено на всем E и неоднозначно. Значит, $\Sigma(T) = \Sigma_p(T) = \mathbb{C}$, $P(T) = O$. В рассматриваемом случае оператор T имеет чисто точечный спектр и пустое резольвентное множество.

Пусть, по-прежнему, $E = \mathscr{C}[0, 1]$, но оператор дифференцирования T определен на меньшем подпространстве X, составленном из функций $f \in \mathscr{C}^1[0, 1]$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$. Резольвентное соответствие $R(\lambda, T)$ теперь определено на всем E и однозначно. Ограниченность экспоненты под интегралом для значений решения f на отрезке $[0, 1]$ влечет непрерывность оператора $R(\lambda, T)$. Значит, теперь $P(T) = \mathbb{C}$, $\Sigma(T) = 0$. Спектр оператора T пустой.

Если взять $E = \mathscr{L}^2([0, 1], du)$ и оператор дифференцирования T определить на подпространстве X абсолютно непрерывных функций, то все будет так же: без условия $f(0) = 0$ будет пустым резольвентное множество $P(T)$, а при условии $f(0) = 0$ будет пустым спектр $\Sigma(T)$. Это соответствует существу дела: без дополнительных условий решение рассматриваемого дифференциального уравнения не единственно, а с дополнительным условием оно корректно разрешимо. Подчеркнем, что благодаря непрерывности функций $f \in X$ условие $f(0) = 0$ имеет смысл и в пространстве $E = \mathscr{L}^2([0, 1], du)$, так как эквивалентные по лебеговой мере непрерывные функции равны и поэтому в каждом классе эквивалентных функций не больше одной непрерывной (см. [74, VIII.2]).

Пусть $E = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, du)$ и оператор дифференцирования T с множителем i^{-1}, как в примере 2 из п. 4.7.2, определен на подпространстве X всех абсолютно непрерывных на каждом отрезке функций. В этом случае спектр T

такой же, как и у оператора умножения на независимую переменную: $\Sigma(T) = \Sigma_c(T) = \mathbb{R}$. Это объясняется тем, что рассматриваемые операторы дифференцирования и умножения унитарно эквивалентны: они получаются друг из друга с помощью унитарного преобразования Фурье — Планшереля.

Упражнение. Доказать это [32, гл. 9, п. 6; 148, п. 10.1].

Пример 5. Пусть $X = E = \mathscr{L}^2([0,1], du)$ и $Tf = g$, где $g(v) = \int\limits_0^v f(u)\,du$ $(v \in [0,1])$. Оператор T взаимно однозначен, компактен, и при $\lambda \neq 0$ оператор $S(\lambda, T) = \lambda I - T$ взаимно однозначен. По теореме Рисса о взаимно однозначных фредгольмовых операторах обратный оператор $R(\lambda, T)$ определен на всем E и непрерывен. Вместе с тем обратный к компактному $-T = S(0,T)$ оператор $R(0,T)$ разрывен. Это оператор дифференцирования и он определен на плотном в E подпространстве абсолютно непрерывных функций, равных нулю в точке 0. Значит, $\Sigma(T) = \Sigma_c(T) = \{0\}$.

Если взять $E = \mathscr{C}[0,1]$, то образ $S(0,T)$ не будет плотным и непрерывный спектр превратится в остаточный: $\Sigma(T) = \Sigma_r(T) = \{0\}$.

Примеры показывают, что спектр существенно зависит от выбора пространства, в котором действует оператор.

4.8.2. Спектр замкнутого оператора

1. Если оператор T замкнут, то для каждого числа $\lambda \in P(T)$ резольвентное соответствие $R(\lambda, T)$ является определенным на всем E ограниченным оператором. Это позволяет определить на резольвентном множестве $P = P(T)$ операторную функцию $R = R(\cdot, T)$ со значениями в банаховой алгебре $\mathscr{B} = \mathscr{B}(E, E)$ ограниченных линейных операторов, действующих в E.

Лемма. *Если T замкнут и $\lambda \in P$, то* $\operatorname{Ran} S(\lambda, T) = E$.

□ По определению резольвентного множества P при $\lambda \in P$ образ $S(\lambda, T) = \lambda I - T$ плотен в E и для доказательства утверждения достаточно проверить замкнутость $\operatorname{Ran} S(\lambda, T)$. Она следует из замкнутости оператора T. ■

Из леммы и определения резольвентного соответствия следует, что $R(\lambda) = R(\lambda, T) \in \mathscr{B}$ при $\lambda \in P$. Значит, резольвента R действительно отображает P в $\mathscr{B}$.

2. Функция R называется *аналитической,* если ее композиция $x'R\colon P \to \mathbb{C}$ с каждым функционалом $x' \in E'$ является аналитической функцией. Это равносильно тому, что множество $P \subseteq \mathbb{C}$ открыто и функция R разлагается в степенной ряд с коэффициентами из $\mathscr{B}$ в некоторой окрестности каждой точки $\lambda \in P$

(см. [74, теорема VI.4]). Операторные аналитические функции обладают многими свойствами числовых [32, гл. 8, п. 2].

Теорема. *Резольвентное множество $P = P(T)$ замкнутого оператора T открыто и его резольвента $R = R(\cdot, T)$ является аналитической функцией.*

$\square$ Возьмем $\lambda \in P$ и выберем $\mu \in \mathbb{C}$ так, чтобы норма оператора $U = (\lambda - \mu) \cdot R(\lambda)$ была строго меньше единицы: $\|U\| < 1$. Для этого достаточно, чтобы $|\lambda - \mu| \|R(\lambda)\| < 1$. Тогда, благодаря формуле для суммы операторной прогрессии, оператор $I - U$ будет обратим: $(I - U)^{-1} \in \mathscr{B}$. И, следовательно,

$$R(\mu) = (\mu I - T)^{-1} = (\mu I - \lambda I + \lambda I - T)^{-1}$$
$$= (\lambda I - T)^{-1}[I - (\lambda - \mu)(\lambda I - T)^{-1}]^{-1} = R(\lambda)(I - U)^{-1} \in \mathscr{B},$$

т. е. $\mu \in P$. Значит, круг $B(\lambda, r)$ с центром λ и радиусом $r \in]0, \|R(\lambda)\|^{-1}[$ содержится в P. Множество P открыто.

По формуле для суммы операторной прогрессии при $|\mu - \lambda| < r$ верны равенства

$$R(\mu) = R(\lambda + (\mu - \lambda)) = \sum (-1)^n R^{n+1}(\lambda)(\mu - \lambda)^n.$$

Значит, функция R аналитическая. $\blacksquare$

Так как дополнение к открытому множеству в комплексной плоскости замкнуто, то из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Спектр замкнутого оператора является замкнутым множеством.*

В частности, конечное множество, составляющее спектр матричного оператора, замкнуто.

3. Возьмем числа λ, μ и замкнутые операторы T, U, определенные на одном и том же плотном в E подпространстве A. Обозначим через I_A, I_E тождественные преобразования A, E. Верны равенства

$$R(\lambda, T) - R(\mu, U) = R(\lambda, T) \cdot I_E - I_A \cdot R(\mu, U)$$
$$= R(\lambda, T) \cdot [S(\mu, U) \cdot R(\mu, T)] - [R(\lambda, T) \cdot S(\lambda, T)] \cdot R(\mu, T)$$
$$= R(\lambda, T) \cdot [S(\mu, U) - S(\lambda, T)] \cdot R(\mu, U).$$

Из этих равенств при $U = T$ и при $\mu = \lambda$ вытекают *резольвентные уравнения*

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = -(\lambda - \mu) \cdot R(\lambda, T) \cdot R(\mu, T),$$
$$R(\lambda, T) - R(\lambda, U) = R(\lambda, T) \cdot (T - U) \cdot R(\lambda, U).$$

Первое из этих уравнений называется *тождеством Гильберта.* Из него следует, что

$$R(\lambda) \cdot R(\mu) = R(\mu) \cdot R(\lambda)$$

и

$$R'(\lambda) = \lim_{\mu \to \lambda} (\mu - \lambda)^{-1} [R(\mu) - R(\lambda)] = -R^2(\lambda).$$

4. Существует простая связь между замкнутым оператором T и его банаховым сопряженным T':

$$\Sigma(T') = \Sigma(T), \quad R(\lambda, T') = R(\lambda, T)'$$

для каждого числа λ из общего для операторов T и T' резольвентного множества. Если пространство E гильбертово и T^* — гильбертов сопряженный для T, то

$$\Sigma(T^*) = \Sigma(T)^*, \quad R(\lambda, T^*) = R(\lambda^*, T)^*$$

для каждого $\lambda^* \in P(T)$. Здесь $\Sigma(T)^* = \{\lambda^* : \lambda \in \Sigma(T)\}$ — зеркальное отражение в вещественной оси множества $\Sigma(T)$.

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения (см. [32, гл. 8, п. 6]).

В [35, гл. 3, § 6] есть подробно разобранные примеры резольвент дифференциальных операторов.

4.8.3. Спектр ограниченного оператора

1. Ограниченный оператор замкнут. Поэтому все сказанное о спектре замкнутого оператора верно и для спектра ограниченного оператора. Но у ограниченного оператора спектр еще непуст и ограничен.

Пусть $T \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(E, E)$ — ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве $E \neq \{0\}$. По формуле для суммы операторной прогрессии при $|\lambda| > \|T\|$ верны равенства

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum \lambda^{-n} T^n \quad (n \geq 0).$$

Следовательно, $\lambda \in P(T)$ при $|\lambda| > \|T\|$ и спектр $\Sigma(T)$ содержится в замкнутом круге с центром 0 и радиусом $\|T\|$. Вне этого круга резольвента разлагается в выписанный лорановский ряд.

Применяя инверсию $z = \lambda^{-1}$ и формулу для радиуса степенного ряда, нетрудно убедиться в том, что резольвентный ряд с членами $\lambda^{-n}T^n = T^n z^n$ имеет сумму при $|\lambda| > \rho(T)$ и не имеет ее при $|\lambda| < \rho(T)$ для числа $\rho(T) = \overline{\lim}(\|T^n\|^{1/n})$. Это число называется *спектральным радиусом* оператора T. Возможно, что $\rho(T) = 0$, как для интегрального оператора Вольтерра. Можно доказать [96, гл. 4, § 3], что последовательность чисел $\|T^n\|^{1/n}$ сходится и поэтому

$$\rho(T) = \lim(\|T^n\|^{1/n}).$$

Упражнение. Доказать равенства для $\rho(T)$.

2. Спектр ограниченного оператора описывает

Теорема. *Спектр $\Sigma(T)$ ограниченного оператора T есть непустое ограниченное замкнутое множество, содержащееся в круге $\bar{B}(0, \rho(T))$.*

□ Ограниченность $\Sigma(T)$ была доказана: $\Sigma(T) \subseteq \bar{B}(0, \|T\|)$. Включение $\Sigma(T) \subseteq \bar{B}(0, \rho(T))$ следует из определения спектрального радиуса $\rho(T)$. Замкнутость $\Sigma(T)$ вытекает из замкнутости оператора T. Остается доказать непустоту $\Sigma(T)$.

Заметим, что $\|R(\lambda, T)\| \leq (|\lambda| - \|T\|)^{-1}$ при $|\lambda| > \|T\|$, и поэтому $\|R(\lambda, T)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если $\Sigma(T) = O$, то $P(T) = \mathbb{C}$ и резольвента является целой аналитической функцией. По теореме Лиувилля, верной и для операторных функций комплексной переменной, тогда резольвента $R(\cdot, T)$ равна некоторой постоянной $C \in \mathscr{B}$. Так как $\|R(\lambda, T)\| \to 0$ при $|\lambda| \infty$, то C — нулевой оператор на E. По предположению $E \neq \{0\}$ и нулевой оператор на E не взаимно однозначен. Поэтому он не может быть значением резольвенты оператора T. Следовательно, спектр $\Sigma(T)$ не может быть пустым. ■

3. Нетрудно убедиться в том, что для спектрального радиуса верны равенства

$$\rho(T) = \inf\{\|T^n\|^{1/n} : n \geq 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \Sigma(T)\}.$$

Они помогают его вычислять.

Упражнение. Доказать эти равенства.

Возьмем числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ и рассмотрим операторный полином

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \dots + a_n T^n.$$

Нетрудно проверить, что

$$\Sigma(p(T)) = p(\Sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \Sigma(T)\},$$

где

$$p(\lambda) = a_0 1 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n.$$

Этот результат — частный случай общей теоремы об отображении спектров [74, VII.1].

4.8.4. Спектр компактного оператора

Компактные операторы во многих отношениях ведут себя почти так же, как матричные. Спектры компактных операторов описывает

Теорема Рисса — Шаудера. *Пусть T — компактный оператор в банаховом пространстве E. Тогда*:

(1) *Каждое число $\lambda \neq 0$ из спектра $\Sigma(T)$ является собственным числом для T.*

(2) *Вне каждого круга с центром 0 и радиусом $r > 0$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ содержится только некоторое конечное множество точек спектра $\Sigma(T)$.*

(3) *Каждое собственное число $\lambda \neq 0$ оператора T имеет конечную кратность.*

Конечное множество точек спектра вне некоторого круга в $\mathbb{C}$ может быть, в частности, пустым (например, для матричных операторов). Спектр $\Sigma(T)$ является счетным множеством.

Особая роль точки 0 хорошо видна у бесконечных диагональных операторов в пространстве $E = l^2$ последовательностей. Такие операторы компактны тогда и только тогда, когда диагональные элементы стремятся к нулю. Поэтому среди них не может быть бесконечно повторяющегося числа, не равного нулю. А нуль может повторяться бесконечно много раз.

Из теоремы Рисса — Шаудера следует, что единственной неизолированной точкой спектра $\Sigma(T)$ компактного оператора T может быть только точка 0. Каждая точка $\lambda \neq 0$ спектра $\Sigma(T)$ имеет окрестность, в которой нет других точек $\Sigma(T)$.

Теорема Рисса — Шаудера тесно связана с теоремами Фредгольма. Конечномерность собственных подпространств $H(\lambda, T)$ позволяет сводить фредгольмовы уравнения к матричным при $\lambda \neq 0$.

Доказательства теоремы Рисса —- Шаудера есть в [32, гл. 10, п. 5; 74, гл. 6, п. 5; 35, гл. 3, п. 7].

4.8.5. Спектр самосопряженного оператора

Рассмотрим ненулевое комплексное гильбертово пространство H, плотное в нем векторное подпространство A, линейный оператор $T\colon A \to H$, тождественный оператор $I\colon H \to H$, число $\lambda \in \mathbb{C}$, оператор $S(\lambda, T) = \lambda I - T\colon A \to H$. А вместе с ними гильбертовы сопряженные $T^*\colon A^* \to H$ и $S^*(\lambda, T) = S(\lambda^*, T^*) = \lambda^* I - T^*\colon A^* \to H$. Если оператор T взаимно однозначен и имеет плотный образ $\operatorname{Ran} T = T(A)$, то оператор T^* тоже взаимно однозначен и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

1. Спектр самосопряженного оператора описывает

Теорема. *Пусть $T = T^*$. Тогда*

$$\Sigma(T) = \{\lambda : \operatorname{Ran} S(\lambda, T) \neq H\} \subseteq \mathbb{R}.$$

При этом

$$\Sigma_p(T) = \{\lambda : \operatorname{Ran} S(\lambda, T) \neq H, \overline{\operatorname{Ran}\ S(\lambda, T)} \neq H\}, \qquad (1)$$

$$\Sigma_c(T) = \{\lambda : \operatorname{Ran} S(\lambda, T) \neq H, \overline{\operatorname{Ran}\ S(\lambda, T)} = H\}, \qquad (2)$$

$$\Sigma_r(T) = O. \qquad (3)$$

□ Заметим, что при $T = T^*$, $Tu = \lambda u$, $\|u\| = 1$ верны равенства

$$\lambda = u \cdot \lambda u = u \cdot Tu = Tu \cdot u = (\lambda u) \cdot u = \lambda^*$$

и поэтому $\Sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda : \overline{\operatorname{Ran} S(\lambda, T)} \neq H\}$. Докажем, что $\Sigma_p(T) = \Lambda$. В самом деле, из теоремы об ортогональной проекции следует, что $\lambda \in \Lambda$ равносильно соотношению $B = \overline{\operatorname{Ran} S(\lambda, T)}^{\perp} \neq \{0\}$. Поэтому $S(\lambda, T)x \cdot b = 0$ $(x \in A)$ при некотором $b \neq 0$, $b \in B$. Значит, $x \cdot S^*(\lambda, T)b = 0$ $(x \in A)$, $S(\lambda^*, T)b = 0$, $\lambda^* \in \Sigma_p(T)$ и $\lambda = \lambda^* \in \Sigma_p(T)$, так как $\Sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$. Равенство (1) теоремы доказано.

По определению, $\Sigma_r(T) \subseteq \Lambda$ и $\Sigma_r(T) \cap \Sigma_p(T) = O$. При $\Sigma_p(T) = \Lambda$ это возможно в том и только том случае, когда $\Sigma_r(T) = 0$. Равенство (3) теоремы доказано.

Докажем, что $\Sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, т. е. что $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq P(T)$. Пусть $\lambda = \mu + i\nu$, где $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Заметим, что при $z = (\mu I - T)x$ и $T = T^*$ верны равенства

$$z \cdot x = (\mu I - T)x \cdot x = x \cdot (\mu I - T)x = x \cdot z,$$

$$\begin{aligned} &\|(\lambda I - T)x\|^2 = \|z + i\nu x\|^2 \\ &= \|z\|^2 + i\nu(z \cdot x) - i\nu(x \cdot z) + \nu^2 \cdot \|x\|^2 = \|z\|^2 + \nu^2 \cdot \|x\|^2 \quad (x \in A). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|S(\lambda, T)x\| \geq |\nu| \cdot \|x\|$ $(x \in A)$. Если $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$, то отсюда вытекает взаимная однозначность оператора $S(\lambda, T)$. Так как по доказанному $\Lambda = \Sigma_p(T)$, то $\lambda \in \Lambda$ и $\overline{\operatorname{Ran} S(\lambda, T)} = H$. Значит, при $\lambda \notin \mathbb{R}$ резольвентное соответствие плотно определено и однозначно. А так как

$$\|R(\lambda, T)y\| \leq |\nu|^{-1} \cdot \|y\| \quad (y \in S(\lambda, T)x, x \in A),$$

то оператор $R(\lambda, T)$ непрерывен. Поэтому $\lambda \in P(T)$.

Докажем теперь равенство (2) теоремы. Обозначим его правую часть буквой M. Покажем, что $\Sigma_c(T) \subseteq M$. Пусть $\lambda \in \Sigma_c(T)$. Тогда по определению непрерывного спектра $\overline{\operatorname{Ran} S(\lambda, T)} = H$ и оператор $R(\lambda, T)$ разрывен. А так как по доказанному $\Sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, то $\lambda = \lambda^*$ и $R(\lambda, T)^* = R(\lambda, T)$ при $T = T^*$. Следовательно, оператор $R(\lambda, T)$ замкнут. По теореме о замкнутом графике из неограниченности $R(\lambda, T)$ вытекает, что $\operatorname{Ran} S(\lambda, T) \neq H$. Значит, $\lambda \in M$ и $\Sigma_c(T) \subseteq M$.

Докажем обратное включение. Пусть $\lambda \in M$. Тогда по доказанному $\lambda \notin \Sigma_p(T)$ и $R(\lambda, T)$ есть плотно определенный оператор. Остается показать, что $R(\lambda, T)$ неограничен. Самосопряженный оператор $T = T^*$ замкнут. Если $R(\lambda, T)$ ограничен, то $\lambda \in P(T)$ и по теореме о резольвенте замкнутого оператора $\operatorname{Ran} S(\lambda, T) = H$. Это противоречит предположению $\lambda \in M$. Значит, $R(\lambda, T)$ — плотно определенный разрывный оператор, $\lambda \in \Sigma_c(T)$ и $M \subseteq \Sigma_c(T)$. Равенство (2) теоремы доказано. ■

2. Другую характеристику спектра самосопряженного оператора можно дать, определив предельный спектр.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого существуют векторы $u_n \in A$, $\|u_n\| = 1$ такие, что $\lambda u_n - Tu_n \to 0$, называется *предельным собственным числом* линейного оператора $T\colon A \to H$. Обозначим $\Sigma_l(T)$ множество всех предельных собственных чисел оператора T и назовем $\Sigma_l(T)$ *предельным спектром* T. Из определений следует, что $\Sigma_p(T) \subseteq \Sigma_l(T)$: каждое собственное число является вместе с тем и предельным собственным числом.

Используя полученные при доказательстве теоремы о спектре самосопряженного оператора оценки для норм операторов $R(\lambda, T)$ и $S(\lambda, T)$, нетрудно доказать

Критерий Вейля. *Пусть* $T = T^*$. *Тогда* $\Sigma(T) = \Sigma_l(T)$.

То есть число принадлежит спектру самосопряженного оператора ессли оно является его предельным собственным числом.

Упражнение. Доказать критерий Вейля [74, VII.3].

3. Самосопряженные операторы, определенные на всем гильбертовом пространстве H, мы условились называть *эрмитовыми*. По теореме о замкнутом графике из замкнутости оператора $T = T^*\colon H \to H$ следует его ограниченность. Она влечет ограниченность спектра $\Sigma(T)$ эрмитова оператора T.

Используя теорему Рисса о представлении линейных функционалов, легко убедиться в том, что равенство $B(z, x) = Tx \cdot z$ $(x, z \in H)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми операторами на H и эрмитовыми формами на $H \times H$. Поляризационное тождество

$$\begin{aligned} B(z, x) = 4^{-1}[&B(z + x, z + x) \\ &- B(z - x, z - x) - iB(z + ix, z + ix) + iB(z - ix, z - ix)] \end{aligned}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми формами и квадратичными формами

$$Q(x) = B(x, x) = Tx \cdot x \quad (x \in H)$$

на рассматриваемом комплексном гильбертовом пространстве H. Это позволяет отождествлять эрмитовы операторы с определяемыми ими квадратичными формами и описывать с помощью квадратичных форм свойства эрмитовых операторов и их спектры.

Так как $T = T^*$, то

$$Q(x) = Tx \cdot x = x \cdot Tx = \overline{Tx \cdot x} \quad (x \in H),$$

и все значения квадратичной формы Q вещественные: $Q(x) \in \mathbb{R}$. Заметим, что квадратичная форма Q определяется своими значениями на единичной сфере:

$$Q(x) = B(x,x) = \|x\|^2 B(u,u) = \|x\|^2 \cdot Q(u)$$

для $u = \|x\|^{-1} \cdot x$, $x \neq 0$. Кроме того, $Q(0) = B(0,0) = 0$. Ограниченность T влечет ограниченность Q на сфере S:

$$|Q(u)| = |Tu \cdot u| \leq \|Tu\| \leq \|T\|$$

при $\|u\| = 1$. Поэтому можно рассматривать грани

$$a = \inf\{Tu \cdot u : \|u\| = 1\}, \quad b = \sup\{Tu \cdot u : \|u\| = 1\},$$
$$c = \sup\{|Tu \cdot u| : \|u\| = 1\}$$

множеств значений $Q(u)$ и $|Q(u)|$ на сфере S. Заметим, что

$$|Q(x)| \leq c \cdot \|x\|^2 \quad (x \in H).$$

4. **Лемма.** $\|T\| = \max\{|a|, |b|\} = c$.

$\square$ Было показано, что $|Q(x)| \leq \|T\|$ при $\|u\| = 1$ и, следовательно, $c \leq \|T\|$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\|u\| = 1$, $Tu \neq 0$ и $z = \|Tu\|^{-1} \cdot Tu$. Тогда

$$B(z,u) = Tu \cdot z = \|Tu\|^{-1}\|Tu\|^2 = \|Tu\|.$$

Используя поляризационное тождество, вещественность $Q(x) = B(x,x)$, неравенство $|Q(x)| \leq c \cdot \|x\|^2$ и тождество параллелограмма, получаем

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= B(z,u) = 4^{-1}|Q(z+u) - Q(z-u)| \\ &\leq 4^{-1}(|Q(z+u)| + |Q(z-u)|) \leq 4^{-1}c(\|z+u\|^2 + \|z-u\|^2) \\ &\leq 2^{-1}c(\|z\|^2 + \|u\|^2) = 2^{-1}c \cdot 2 = c.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T\| = \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} \leq c$ и $\|T\| = c$.

Равенство $\max\{|a|, |b|\} = c$ вытекает из определения чисел a, b, c. В этом легко убедиться, рассмотрев три возможности: $0 < a \leq b$, $a \leq b < 0$, $a \leq 0 \leq b$. В первой из них $c = b$, во второй $c = -a$ и в третьей $c = \max\{-|a|, |b|\}$. ■

5. Спектр эрмитова оператора описывает

Теорема. $\{a, b\} \subseteq \Sigma(T) \subseteq [a, b]$.

□ Рассмотрим сначала положительный эрмитов оператор A и докажем, что $\|A\| \in \Sigma(A)$. Так как спектр самосопряженного оператора совпадает с его предельным спектром, то достаточно показать, что $\mu = \|A\|$ является предельным собственным числом оператора A.

Так как $A \geq O$, то $|Au \cdot u| = Au \cdot u \geq 0$, и по лемме

$$\mu = \sup\{|Au \cdot u| : \|u\| = 1\} = \sup\{Au \cdot u : \|u\| = 1\}.$$

Поэтому существуют $u_n \in H$, $\|u_n\| = 1$, такие, что $Au_n \cdot u_n > \mu - 1/n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(\mu I - A)u_n\|^2 &= \mu^2 - 2\mu \cdot Au_n \cdot u_n + \|Au_n\|^2 \\ &\leq \mu^2 - 2\mu(\mu - 1/n) + \mu^2 = 2\mu/n \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

$$\|S(\mu, A) \cdot u_n\| \leq (2\mu/n)^{1/2} \to 0 \quad n \to \infty.$$

Значит, $\mu \in \Sigma_l(A)$.

Рассмотрим операторы $A = T - aI$, $B = bI - T$. Так как $a \leq Tu \cdot u \leq b$ ($\|u\| = 1$), то $A \geq O$, $B \geq O$. Легко проверить, что $\|A\| = \|B\| = b - a$. По доказанному $b - a \in \Sigma(A)$, $b - a \in \Sigma(B)$. Из определений следует, что $\mu \in \Sigma(A)$ равносильно $\lambda = \mu + a \in \Sigma(T)$ и $\nu \in \Sigma(B)$ равносильно $\lambda = b - \nu \in \Sigma(T)$. Поэтому $a = b - (b - a) \in \Sigma(T)$, $b = (b - a) + a \in \Sigma(T)$. Значит, $\{a, b\} \subseteq \Sigma(T)$.

Из самосопряженности и ограниченности операторов A и B вытекает, что их спектры вещественные и ограничены числами $-(b - a), b - a$. Так как $\Sigma(T) = \Sigma(A) + a = b - \Sigma(B)$, то спектр оператора T ограничен числами $a = b - (b - a)$ и $b = (b - a) + a$. В самом деле, если $\lambda = \mu + a = b - \nu$, $\mu \in \Sigma(A)$, $\nu \in \Sigma(B)$, то $\lambda \leq (b - a) + a$, $\mu \leq b - a$, $-(b - a) \leq \nu$ и $\lambda = \mu + a \leq (b - a) + a = b$, $\lambda = b - \nu \geq b - (b - a) = a$. Значит, $\Sigma(T) \subseteq [a, b]$. ■

6. Из теоремы о спектре эрмитова оператора вытекает много полезных следствий.

Следствие 1. *Эрмитов оператор положителен есcли его спектр состоит только из положительных чисел.*

☐ Пусть T эрмитов, $T \geq O$. Тогда, по определению, $Tu \cdot u \geq 0$ ($\|u\| = 1$) и, значит, $a = \inf\{Tu \cdot u : \|u\| = 1\} \geq 0$. Следовательно, по доказанной теореме $\Sigma(T) \subseteq [a, \infty[\subseteq [0, \infty[$. Обратно, если $a \geq 0$, то $Tx \cdot x = \|x\|^2(Tu \cdot u) \geq a \cdot \|x\|^2 \geq 0$ при $u = \|x\|^{-1} \cdot x$, $x \neq 0$, $x \in H$. Значит, $T \geq O$. ■

Следствие 2. *Спектральный радиус $\rho(T)$ эрмитова оператора T равен его норме $\|T\|$.*

☐ В самом деле, так как $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, то $\rho(T) = \overline{\lim}(\|T^n\|^{1/n}) \leq \|T\|$. А так как по лемме и теореме $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$ и $a \in \Sigma(T)$, $b \in \Sigma(T)$, то $\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \Sigma(T)\} \geq \|T\|$. ■

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $H = \mathbb{C}^n$, матричный оператор T, сопряженный с ним оператор T^* и их произведение $S = T^*T$. Заметим, что S — положительный эрмитов оператор:

$$S^* = (T^*T)^* = T^* \cdot T^{**} = T^*T = S,$$
$$Sx \cdot x = T^*Tx \cdot x = Tx \cdot Tx = \|Tx\|^2 \geq 0 \quad (x \in H).$$

Собственные числа оператора S называются *сингулярными числами* оператора T. Обозначим их σ_k ($1 \leq k \leq n$). По следствию 1 из $S \geq 0$ вытекает $\sigma_k \geq 0$. Выделим наибольшее число $\sigma = \max\{\sigma_k : 1 \leq k \leq n\}$.

Следствие 3. *Евклидова норма матричного оператора равна квадратному корню из его наибольшего сингулярного числа.*

☐ В самом деле, $\Sigma(S) = \{\sigma_k : 1 \leq k \leq n\}$ и $\sigma_k \geq 0$. По следствию 2 отсюда вытекает, что $\|S\| = \rho(S) = \max\{\sigma_k : 1 \leq k \leq n\} = \sigma$. Вместе с тем по лемме $\|S\| = \sup\{|Su \cdot u| : \|u\|{=}1\} = \sup\{Su \cdot u : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\|^2 : \|u\| = 1\} = \|T\|^2$. Следовательно, $\|T\|^2 = \sigma$ и $\|T\| = \sigma^{1/2}$. ■

В частности, если матричный оператор T эрмитов, то $T^* = T$, $S = T^2$, $\sigma_k = \lambda_k^2$, где λ_k — собственные числа оператора T. И поэтому $\|T\| = \max\{|\lambda_k| : 1 \leq k \leq n\}$. Норма матричного эрмитова оператора равна наибольшей из абсолютных величин его собственных чисел.

Следствие 4. *Векторы, принадлежащие различным собственным подпространствам эрмитова оператора, ортогональны.*

$\square$ Пусть оператор T эрмитов, $x \in H(\lambda, T)$, $y \in H(\mu, T)$ и $\lambda \neq \mu$. Если $H(\lambda, T) = \{0\}$ или $H(\mu, T) = \{0\}$, то $x = 0$ или $y = 0$ и $x \cdot y = 0$. Предположим, что $\lambda \in \Sigma_p(T)$ и $\mu \in \Sigma_p(T)$. Тогда так как $\Sigma_p(T) \in \mathbb{R}$, то

$$\lambda(x \cdot y) = Tx \cdot y = x \cdot Ty = \mu(x \cdot y),$$

и поэтому $x \cdot y = 0$. $\blacksquare$

Таким образом, $H(\lambda, T) \perp H(\mu, T)$ при $\lambda \neq \mu$ для эрмитова оператора T.

7. Среди собственных векторов матричного эрмитова оператора, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, можно выбрать векторы, составляющие ортонормальную базу этого пространства. То же самое верно и для компактного эрмитова оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Предположим дополнительно, что рассматриваемое гильбертово пространство H сепарабельно и, значит, в нем существует счетная ортонормальная база (h_k), составленная из попарно ортогональных нормированных векторов $h_j \perp h_k$ $(j \neq k)$, $\|h_k\| = 1$. А для каждого $x \in H$ существует единственное семейство координат $\xi_k \in \mathbb{C}$, при которых верно равенство $x = \Sigma \xi_k h_k$ (имеется в виду сходимость конечных сумм в пространстве H по норме).

Спектр компактного эрмитова оператора описывает

Теорема Гильберта — Шмидта. *Для каждого компактного эрмитова оператора T в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H существует счетная ортонормальная база (h_k), составленная из собственных векторов h_k оператора T.*

$\square$ Пусть $A = \overline{\cup H(\lambda, T)}$ $(\lambda \in \Sigma(T))$ и $B = A^{\perp}$. (Здесь $H(\lambda, T)$ $= \{0\}$ при $\lambda \notin \Sigma(T)$.) Так как оператор T непрерывен, то

$$T(A) \subseteq \overline{\cup TH(\lambda, T)} \subseteq \overline{\cup H(\lambda, T)} = A.$$

Так как $T^* = T$ и $z \cdot y = 0$ $(z \in A,\ y \in B)$ влечет $x \cdot Ty = Tx \cdot y = 0$ $(x \in A,\ y \in B)$ при $TA \subseteq A$, то $Ty \in B$ при $y \in B$: из $TA \subseteq A$ следует $TB \subseteq B$.

Так как оператор T компактен, то по теореме Рисса — Шаудера при $\lambda \neq 0$ размерность собственного подпространства $H(\lambda, T)$ конечна. А размерность $H(0, T)$ счетна вследствие предполагаемой сепарабельности H (в частности, она может быть тоже конечна). Так как оператор T эрмитов, то подпространства $H(\lambda, T)$ попарно ортогональны. Поэтому, выбрав в каждом $H(\lambda, T) \neq \{0\}$ ортонормальную базу, получим ортонормальную базу для A. Остается показать, что $B = \{0\}$ и, значит, $A = H$.

Рассмотрим сужение $U = T_B$ оператора T на подпространство B. Так как $TB \subseteq B$, то $U\colon B \to B$ и вместе с $T\colon H \to H$ является компактным эрмитовым оператором. Докажем, что $U = O$. Это следует из того, что U не имеет собственных чисел: если $\lambda \in \Sigma_p(U)$, то $Ty = Uy = \lambda y$ для некоторого $y \neq 0$, $y \in B$, и поэтому $\lambda \in \Sigma_p(T)$. Значит, $y \in H(\lambda, T) \subseteq A$. Следовательно, $y \in AB = \{0\}$ и $y = 0$. Но, по определению, $y \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $\Sigma_p(U) = \{0\}$. Так как U компактен, то по теоремам о спектре ограниченного оператора и Рисса — Шаудера отсюда вытекает, что $\Sigma(U) = \{0\}$. Отсюда $\|U\| = |0| = 0$ вследствие эрмитовости U и $U = \{O\}$.

Поэтому $Uy = Oy = 0 = 0 \cdot y$ для каждого $y \in B$. Если $y \neq 0$, то $0 \in \Sigma_p(U)$, что невозможно, так как по доказанному оператор U не имеет собственных чисел. Значит, $B = \{0\}$. ■

Теорема Гильберта — Шмидта часто и эффективно применяется.

8. Выделим среди базовых векторов h_k векторы g_j, составляющие базу подпространства $H(0, T) = \operatorname{Ker} T$. Остальные обозначим f_i. Семейство (f_i) собственных векторов оператора T назовем *фундаментальным.* Векторы f_i определяются равенствами $Tf_i = \lambda_i f_i$ для собственных чисел $\lambda_i \neq 0$ оператора T. Теорема Гильберта — Шмидта позволяет значения комплексного эрмитова оператора T представить в виде линейной комбинации векторов f_i фундаментального семейства оператора T. Таким образом, из теоремы Гильберта — Шмидта следует обобщение утверждения о том, что матричный оператор диагонализируем.

Следствие 1. $Tx = \sum \alpha_i f_i$ $(\alpha_i = f_i \cdot Tx,\ x \in H)$.

□ Так как векторы f_i, g_j составляют базу H, то $x = \sum \xi_i f_i + \sum \eta_j g_j$ для некоторых чисел ξ_i, η_j. Отсюда $Tx = \sum \xi_i T f_i + \sum \eta_j T g_j$ вследствие линейности и непрерывности T. Но $Tf_i = \lambda_i f_i$, $Tg_j = 0 \cdot g_j = 0$ и $\xi_i \lambda_i = (f_i \cdot x)\lambda_i = (\lambda_i f_i) \cdot x = Tf_i \cdot x =$

$f_i \cdot Tx = \alpha_i$, так как T эрмитов и $\lambda_i = \bar{\lambda}_i \in \mathbb{R}$. Значит, $\xi_i \cdot Tf_i = \xi_i\lambda_i \cdot f_i = \alpha_i f_i$. ■

Произведение $S = T^*T$ всякого компактного оператора T на сопряженный с ним T^* есть положительный компактный эрмитов оператор. Собственные числа σ_k оператора S называются сингулярными числами оператора T. По теореме Гильберта — Шмидта существует ортонормальная база пространства H, составленная из собственных векторов b_k оператора S. Пусть $\sigma_i > 0$, $\mu_i = \sigma_i^{1/2}$, $e_i = \mu_i^{-1} \cdot Tb_i$. Тогда, как легко проверить, $\sigma_i = \|Tb_i\|^2$, $\mu_i = \|Tb_i\|$, семейство (e_i) ортонормально и

$$Tx = \sum \mu_i(b_i x)e_i \quad \left(x = \sum (b_k x)b_k \in H\right)$$

— *каноническая форма* записи значений компактного оператора.

Упражнение. Доказать равенства для σ_i, μ_i и Tx (см. [74, VI.5]).

Использование собственной базы (h_k) компактного эрмитова оператора T позволяет легко решить уравнение $\lambda x - Tx = y$.

Следствие 2. *Пусть $\lambda \notin \Sigma_p(T)$ и $x = \sum \xi_k h_k$, $y = \sum \eta_k h_k$. Тогда уравнение $\lambda x - Tx = y$ имеет единственное решение. Этим решением является вектор x с координатами $\xi_k = (\lambda - \lambda_k)^{-1}\eta_k$, $\lambda_k \in \Sigma_p(T)$.*

□ Умножая скалярно на h_k обе части равенства $\lambda x - Tx = y$ и используя равенства $Tx = \sum \xi_k \cdot Th_k = \sum \xi_k \cdot \lambda_k h_k$, получаем

$$\lambda\xi_k - \xi_k\lambda_k = h_k \cdot \lambda x - h_k \cdot Tx = h_k \cdot y = \eta_k.$$

При $\lambda \neq \lambda_k$ отсюда следует, что $\xi_k = (\lambda - \lambda_k)^{-1}\eta_k$. Значит, решение x единственное.

Вектор x с такими координатами действительно является решением. В самом деле, если $\xi_k = (\lambda - \lambda_k)^{-1}\eta_k$, то $\lambda\xi_k - \xi_k\lambda_k = \eta_k$ и

$$\lambda\xi_k h_k - T(\xi_k h_k) = \lambda\xi_k \cdot h_k - \xi_k\lambda_k \cdot h_k = \eta_k h_k,$$

$$\lambda x - Tx = \lambda \sum \xi_k h_k - T\left(\sum \xi_k h_k\right)$$
$$= \sum (\lambda\xi_k h_k - T(\xi_k h_k)) = \sum \eta_k h_k = y.$$

Значит, вектор $x = \sum \xi_k h_k$ есть нужное решение. ■

Следствие 3. *Пусть* $\lambda \in \Sigma_p(T)$ *и* $x = \sum \xi_k h_k$, $y = \sum \eta_k h_k$. *Тогда уравнение* $\lambda x - Tx = y$ *имеет решение, только если* $\eta_k = 0$ *при* $\lambda_k = \lambda$. *В этом случае решением является каждый вектор* x *с координатами* $\xi_k = (\lambda - \lambda_k)^{-1}\eta_k$ *при* $\lambda_k \neq \lambda$, $\lambda_k \in \Sigma_p(T)$.

□ Рассуждая, как при доказательстве следствия 2, получаем для решения x равенство $\lambda\xi_k - \xi_k\lambda_k = \eta_k$. Если $\lambda_k = \lambda$, то $\eta_k = 0$.

Проверка того, что при этом условии вектор x с указанными координатами является решением, тоже производится, как при доказательстве следствия 2. Если $\lambda_k = \lambda$, то координата ξ_k может быть произвольной. ■

Следствия 2 и 3 уточняют соответствующие теоремы Фредгольма для рассматриваемого частного случая. Отметим, что условие $\eta_k = 0$ при $\lambda_k = \lambda$ равносильно условию $y \perp H(\lambda, T)$. Так как $\lambda = \lambda^*$, $T = T^*$, то это условие означает, что y ортогонален каждому решению z^* уравнения $\lambda z^* - Tz^* = 0$.

Замечание. В [96, гл. 5] подробно описываются свойства сингулярных чисел для компактных операторов в гильбертовых пространствах и связь этих чисел со следами операторов. Выделяются ядерные операторы, имеющие суммируемые семейства собственных и сингулярных чисел. Даются оценки для этих чисел. Доказываются теоремы о совпадении матричного и спектрального следов ядерного оператора. Описываются регуляризованные следы некоторых неограниченных операторов.

В [72] описываются ядерные операторы в нормированных пространствах и абсолютно суммирующие операторы в локально выпуклых пространствах, составляющие существенно более общий класс. С помощью этих операторов определяются ядерные локально выпуклые пространства, примерами которых служат пространства бесконечно дифференцируемых, гармонических и аналитических функций.

В [124, гл. 9] описываются спектры компактных операторов в локально выпуклых пространствах и формулируется альтернатива Фредгольма для них. Указаны применения к решению дифференциальных и интегральных уравнений. Доказана одна общая эргодическая теорема.

4.9. Спектральная теорема

Из теоремы Гильберта — Шмидта следует, что значения компактного эрмитова оператора представляются в виде сумм векторов фундаментального семейства, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами. Спектральная теорема обобщает этот результат на самосопряженные операторы: их значения выражаются в виде интегралов некоторых числовых функций по проекторным мерам.

4.9.1. Проекторные меры

Сначала описываются проекторы, потом проекторные меры, затем интегральные суммы и интегралы по этим мерам.

1. Будем рассматривать только ортогональные проекторы (эрмитовы идемпотенты) в комплексном гильбертовом пространстве H. По определению, линейный оператор $P\colon H \to H$ такой, что $P^2 = P$ и $P^* = P$, называется *эрмитовым проектором* (на подпространство PH). Обозначим $\mathscr{P} = \mathscr{P}(H)$ множество всех проекторов $P\colon H \to H$. Пусть $P, Q \in \mathscr{P}$. Легко проверить, что PQ, $P{+}Q$, $P{-}Q$ являются проекторами ессли соответственно $PQ = QP$, $PQ = O$, $PQ = QP = O$. Если $PQ = O$, то говорят, что P и Q *ортогональны*, и пишут $P \perp Q$. (В этом случае $QP = O$ тоже.)

Упражнения. 1) Проверить условия для действий с проекторами (см. [148, 4.6] и [103, 18.6, 18.7; 96, гл. 4, § 2]). 2) Проверить утверждения $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $(PQ)^2 = PQ \Rightarrow (QP)^2 = QP$ и $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $(PQ)^2 = O \Rightarrow (QP)^2 = O$ для линейных операторов в H [149, гл. 7, п. 7].

Так как $Pf \cdot f = P^2 f \cdot f = P^* P f \cdot f = Pf \cdot Pf = \|Pf\|^2 \geq 0$ $(f \in H)$, то проектор P является положительным оператором: $P \geq O$. Это позволяет определить частичный порядок для проекторов: $P \geq Q$ равносильно $P - Q \geq O$ или $PQ = QP = Q$.

Для последовательности проекторов P_n слабая сходимость $P_n f \cdot g \to Pf \cdot g$ $(f, g \in H)$ эквивалентна сильной $P_n f \to Pf$ $(f \in H)$.

Упражнение. Доказать эту эквивалентность.

Верна [148, теорема 4.32]

Теорема. *Возрастающая последовательность проекторов сильно сходится к своей верхней грани, а убывающая — к нижней.*

Заметим, что O, I — проекторы, причем $O = \min \mathscr{P}$, $I = \max \mathscr{P}$. Они ограничивают снизу и сверху любую последовательность проекторов: $O \leq P_n \leq I$.

Следствие. *Ряд из попарно ортогональных проекторов имеет сильную сумму, равную верхней грани.*

2. Рассмотрим: множество X, алгебру $\mathscr{R}$ некоторых частей X, гильбертово пространство H над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, алгебру $\mathscr{P}$ проекторов $H \to H$. Множества из $\mathscr{R}$ условимся называть *простыми*. Будем предполагать, что существуют $B_n \in \mathscr{R}$, образующие последовательность $B_n \uparrow X$.

Пример. Можно взять $X = \mathbb{R}$ и алгебру $\mathscr{R}$ простых множеств $A = \sum [a_i, b_i[$, составленных из конечного числа попарно непересекающихся интервалов $[a_i, b_i[$ $(-\infty < a_i \leq b_i < \infty)$.

Проекторной мерой называется сильно непрерывное сверху в нуле и снизу в единице аддитивное отображение $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$. Таким образом, проекторная мера определяется свойствами

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (A, B, A + B \in \mathscr{R}),$$
$$P(A_n) \to O \quad (A_n \downarrow 0, A_n \in \mathscr{R}), \quad P(X_n) \to I \quad (X_n \uparrow X, X_n \in \mathscr{R}).$$

Когда $X = \mathbb{R}$, проекторные меры удобно задавать с помощью проекторных функций распределения. *Проекторной функцией распределения* называется нормированная возрастающая сильно непрерывная слева функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathscr{R}$. Таким образом, функция распределения определяется свойствами

$$F(s) \leq F(t) \quad (s \leq t), \quad F(t) \to F(u) \quad (t \uparrow u);$$
$$F(s) \to O \quad (s \downarrow -\infty), \quad F(t) \to I \quad (t \uparrow \infty).$$

Подчеркнем, что сходимость всюду сильная (в каждой точке).

Вместо непрерывности слева можно требовать непрерывность справа. Это часто делается.

Равенства

$$P([s, t[) = F(t) - F(s), \quad F(t) = \lim_{s \downarrow -\infty} P([s, t[)$$

$(-\infty < s \le t < \infty)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между проекторными функциями распределения и мерами. Это соответствие позволяет, когда $X = \mathbb{R}$, вместо проекторных мер рассматривать соответствующие функции распределения.

Упражнение. Доказать, что указанные равенства устанавливают соответствие между проекторными мерами и функциями распределения (ср. [58, 4.4]).

Легко проверить, что проекторная мера не только аддитивна, но и мультипликативна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (A, B \in \mathscr{R}).$$

Из непрерывности сверху в нуле следует непрерывность и счетная аддитивность проекторной меры.

Упражнение. Доказать эти утверждения.

3. Существует глубокая аналогия между проекторными и вероятностными мерами.

С проекторной мерой $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ естественно связываются семейства числовых и векторных мер, определяемых равенствами

$$\mu_f(A) = P(A)f \cdot f = m_f(A) \cdot f, \quad m_f(A) = P(A)f \quad (A \in \mathscr{R})$$

для каждого $f \in H$. Известны необходимые и достаточные условия того, чтобы такое семейство положительных числовых мер $\mu_f\colon \mathscr{R} \to \mathbb{R}$, $f \in H$, порождалось некоторой проекторной мерой $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$. Это позволяет выводить свойства проекторных мер из известных свойств числовых мер.

Замечание. Связь между операторными и числовыми мерами подробно описана в разделе 3 книги [128]. Эта связь потом используется, в частности, для доказательства важной теоремы о продолжении операторных мер (там же, раздел 4, теорема 7).

Меру μ_f можно нормировать и рассматривать $\rho_f = \|f\|^{-2}\mu_f$ при $f \neq 0$. Если $X \in \mathbb{R}$, то $\rho_f(X) = 1$ и мера ρ_f вероятностная.

Кроме положительных мер μ_f с проекторной мерой P связывается семейство числовых мер μ_{fg} $(f, g \in H)$, определяемых с помощью поляризационного тождества:

$$\mu_{fg} = 4^{-1}(\mu_{f+g} - \mu_{f-g} - i\mu_{f+ig} + i\mu_{f-ig}).$$

Это равенство эквивалентно равенству

$$\mu_{fg}(A) = P(A)f \cdot g \quad (A \in \mathscr{R}).$$

Упражнение. Доказать эту эквивалентность.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$, $H = l^2$, $P_n f = \xi_n e_n$ для $f = (\xi_m) \in H$ и $e_n = (\delta_{mn})$, $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$. Оператор P_n проектирует пространство $H = l^2$ на координатную n-ю ось ($n = 1, 2, \dots$). Равенство

$$P(A) = \sum_{n \in A} P_n \quad (A \in \mathscr{R})$$

определяет *дискретную проекторную меру.*

Пример 2. $X = \mathbb{R}$, $H = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, dx)$. Для каждой функции $f \in H$ и числа $t \in \mathbb{R}$ определим функцию $g =]-\infty, t[\cdot f$ со значениями $g(x) = f(x)$ при $x < t$ и $g(x) = 0$ при $t \geq x$. Заметим, что $g \in H$. Равенство $F(t)f = g$ определяет проекторную функцию распределения $F\colon \mathbb{R} \to \mathscr{P}$ со значениями $F(t) \in \mathscr{P}$ ($t \in \mathbb{R}$). Это проверяется с использованием теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Легко убедиться в том, что $F(t)f \to 0$ ($t \downarrow -\infty$), $F(t)f \to f$ ($t \uparrow \infty$).

Функция F порождает проекторную меру P со значениями

$$P(A)f = A \cdot f \quad (A \in \mathscr{R}, f \in H).$$

Проектор $P(A)$ осуществляет умножение функции f на множество A (на его индикатор).

Упражнение. Доказать утверждения о функции F.

4. Будем, как и раньше, для упрощения записей отождествлять множества с их индикаторами и обозначать одинаково.

Пусть

$$u = \sum a_i X_i \quad (a_i \in \mathbb{C}, X_i \in \mathscr{R})$$

— простая числовая функция на X, а $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ — проекторная мера. Оператор

$$S(u, P) = \sum a_i P(X_i)$$

называется *интегральной суммой функции u по мере P.* Легко проверить, что значение интегральной суммы не зависит от способа представления простой функции в виде линейной комбинации простых множеств:

$$\sum a_i P(X_i) = \sum b_j P(Y_j) \quad \left(\sum a_i X_i = \sum b_j Y_j\right),$$

где $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и $X_i, Y_j \in \mathscr{R}$.

Упражнение. Проверить это.

Обозначим через $\mathscr{S}$ алгебру простых функций. Когда ясно, какая мера P имеется в виду, вместо $S(u, P)$ будем писать $S(u)$.

Алгебру всех линейных операторов $T\colon H \to H$ обозначим $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$, а ограниченных $\mathscr{B} = \mathscr{B}(H)$.

Из определений следует, что интегральная сумма S со значениями $S(u)$ есть ограниченный линейных оператор:

$$S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C};\ u, v \in \mathscr{S}).$$

Таким образом, $S\colon \mathscr{S} \to \mathscr{B}$. Из мультипликативности меры P следует мультипликативность интегральной суммы S:

$$S(u \cdot v) = S(u) \cdot S(v) \quad (u, v \in \mathscr{S}).$$

Оператор $S(u)$ нормальный:

$$S^*(u) \cdot S(u) = S(u) \cdot S^*(u) \quad (u \in \mathscr{S}).$$

В самом деле, из эрмитовости значений меры P следует, что

$$S(u^*) = S^*(u) \quad (u \in \mathscr{S}).$$

Вместе с мультипликативностью суммы S это дает

$$\begin{aligned} S^*(u) \cdot S(u) &= S(u^*) \cdot S(u) \\ &= S(u^* u) = S(|u|^2) = S(u u^*) = S(u) \cdot S(u^*). \end{aligned}$$

5. Легко проверить правило для скалярного произведения значений S:

$$S(v)g \cdot S(u)f = \int v^* u \cdot d\mu_{gf} \quad (f, g \in H;\ u, v \in \mathscr{S}).$$

Здесь числовая мера μ_{gf} имеет значения

$$\mu_{gf}(A) = P(A)g \cdot P(A)f = P(A)g \cdot f = g \cdot P(A)f \quad (A \in \mathscr{R}).$$

Она равна линейной комбинации положительных числовых мер и интеграл по ней равен соответствующей линейной комбинации интегралов по этим мерам:

$$\int w \cdot d\mu_{gf} =$$

$$4^{-1} \left(\int w \cdot d\mu_{g+f} - \int w \cdot d\mu_{g-f} - i \int w \cdot d\mu_{g+if} + i \int w \cdot d\mu_{g-if} \right)$$

для каждой интегрируемой по мерам μ_{g+f}, μ_{g-f}, μ_{g+if}, μ_{g-if} функции w.

Упражнение. Доказать это правило для скалярного произведения.

По аналогии с положительными числовыми мерами интеграл произведения v^*u функций v, u можно считать их скалярным произведением и обозначать $\langle v,u\rangle_{gf}$. Тогда правило для скалярного произведения запишется в виде

$$\langle S(v)g, S(u)f\rangle = \langle v,u\rangle_{gf} \quad (f,g\in H;\ u,v\in\mathscr{S}).$$

При $g=f$ и $v=u$ правило для скалярного произведения дает

$$\|S(u)f\|^2 = \|u\|_f^2 = \int |u|^2 d\mu_f \quad (u\in\mathscr{S},\ f\in H).$$

Здесь положительная числовая мера μ_f имеет значения

$$\mu_f(A) = P(A)f\cdot P(A)f = \|P(A)f\|^2 \quad (A\in\mathscr{R};\ f\in H).$$

Равенство

$$\|S(u)f\| = \|u\|_f$$

позволяет легко доказать важную лемму, на которой основывается определение интеграла по проекторной мере. Обозначим $\mathscr{L}_f^2 = \mathscr{L}_f^2(\mathbb{R},\mu_f)$ гильбертово пространство измеримых по мере μ_f числовых функций на $\mathbb{R}$, квадраты которых интегрируемы по мере μ_f при данном $f\in H$. Норму в $\mathscr{L}_f^2$ будем обозначать $\|\cdot\|_f$. Ясно, что $\mathscr{S}\subset\mathscr{L}_f^2$ при каждом $f\in H$, и поэтому можно рассматривать норму $\|u\|_f$ функции $u\in\mathscr{S}$ в каждом пространстве $\mathscr{L}_f^2$.

Лемма. *Если последовательность функций $u_n\in\mathscr{S}$ сходится в $\mathscr{L}_f^2$, то последовательность векторов $g_n = S(u_n)f$ сходится в H.*

□ В самом деле, вследствие линейности интегральной суммы и равенства для норм

$$\|g_m - g_n\| = \|S(u_m-u_n)f\| = \|u_m-u_n\|_f \to 0$$

при $m,n\to\infty$. ■

Заметим, что множество $\mathscr{S}$ простых функций плотно в пространстве $\mathscr{L}_f^2$ при каждом $f\in H$.

Значения $S(u)$ суммы S для вещественных простых функций являются эрмитовыми операторами. Если $u\geq 0$, то $S(u)\geq 0$. Это следует из эрмитовости и положительности значений проекторной меры.

Упражнение. Дать подробные доказательства.

4.9.2. Интегралы ограниченных функций

Рассмотрим алгебру $\mathscr{M}$ функций $u\colon X \to \mathbb{C}$, измеримых по каждой мере μ_f $(f \in H)$. Условимся говорить, что эти функции *измеримы по мере* P или, коротко, *измеримы.* Алгебра $\mathscr{M}$ борелевская, т. е. замкнута при поточечной сходимости последовательностей функций. И, следовательно, вместе с алгеброй $\mathscr{S}$ простых функций $\mathscr{M}$ содержит ее борелевское замыкание $\overline{\mathscr{S}}$. А вместе с ним $\mathscr{M}$ содержит и борелевское замыкание $\overline{\mathscr{R}}$ простых множеств.

Пример. Когда $X = \mathbb{R}$ и алгебра $\mathscr{R}$ порождена интервалами, то $\mathscr{M}$ содержит все борелевские и, в частности, все непрерывные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Обозначим $\mathscr{M}_0$ алгебру, составленную из ограниченных измеримых по мере P функций $u\colon X \to \mathbb{C}$. Заметим, что $S \subseteq \mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{M}$. Определим интеграл по проекторной мере для ограниченных измеримых функций и исследуем его свойства. Он является непрерывным продолжением интегральной суммы S с алгебры $\mathscr{S}$ на алгебру $\mathscr{M}_0$.

1. Предварительно рассмотрим положительную ограниченную числовую меру $\mu\colon \mathscr{R} \to \mathbb{R}$, гильбертово пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(X, \mu)$ и его часть $\mathscr{L}^2_0 = \mathscr{L}^2_0(X, \mu)$, составленную из ограниченных функций $u \in \mathscr{L}^2$.

С каждой функцией $u\colon X \to \mathbb{C}$, измеримой по мере μ, можно связать последовательность функций $\varphi_n\colon X \to \mathbb{R}$ со значениями

$$\varphi_n(x) = 1 \quad (x : |u(x)| \le n), \quad \varphi_n(x) = 0 \quad (x : |u(x)| > n)$$

и последовательность функций $\bar{u}_n = \varphi_n u$ со значениями

$$\bar{u}_n(x) = u(x) \quad (x : |u(x)| \le n) \quad \bar{u}_n(x) = 0 \quad (x : |u(x)| > n).$$

Ясно, что

$$|\bar{u}_n(x)| \le |u(x)|, \quad |\bar{u}_n(x)| \le n \quad (x \in X).$$

Функции φ_n, $\bar{u}_n$ измеримы по мере μ вместе с функцией u.

Как правило, в дальнейшем предполагается, что рассматриваемые числовые меры полные и локально ограниченные (п. 3.3.2, 4). Эти свойства не всегда оговариваются.

С помощью более или менее стандартных рассуждений можно доказать следующие утверждения, которые используются при определении интеграла по проекторной мере и исследовании его свойств.

Лемма 1. *Каждая постоянная* $c\colon X \to \mathbb{C}$ *локально интегрируема по локально ограниченной мере* μ.

Лемма 2. *Функции* $\bar{u}_n \in \mathscr{L}^2$ *и* $\bar{u}_n \to u$ *в каждой точке.*

Лемма 3. *Пусть* $u, v, u_n \in \mathscr{L}^2$ *и* $|u_n| \le |v|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Тогда* $u_n \to u(\mu)$ *влечет* $u_n \to u(\mathscr{L}^2)$.

Здесь $u_n \to u(\mu)$ означает сходимость почти всюду по мере μ, а $u_n \to u(\mathscr{L}^2)$ означает $\|u_n - u\| \to 0$. Из лемм 1 и 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть* $u, u_n \in \mathscr{L}^2$ *и* $|u_n| \le c$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *при некотором* $c > 0$. *Тогда* $u_n \to u(\mu)$ *влечет* $u_n \to u(\mathscr{L}^2)$.

Из лемм 2 и 3 легко выводится

Предложение 1. *Множество* $\mathscr{L}_0^2$ *плотно в пространстве* $\mathscr{L}^2$.

С помощью этого предложения и леммы 4 доказывается, что $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{L}_0^2$. Отсюда

Предложение 2. *Множество* $\mathscr{S}$ *плотно в пространстве* $\mathscr{L}^2$.

Из доказанных утверждений нетрудно вывести несколько нужных следствий.

Следствие 1. *Множество* $\mathscr{M}_0$ *содержится в* $\mathscr{L}_f^2$ *при каждом* $f \in H$.

Следствие 2. *Для каждых* $u \in \mathscr{M}_0$ *и* $f \in H$ *существует последовательность* $u_n^f \in \mathscr{S}$, *сходящаяся к* u *в* $\mathscr{L}_f^2$.

Следствие 3. *Пусть* $f \in H$, $u \in \mathscr{L}_f^2$, $u_n^f \in \mathscr{S}$ *и* $u_n^f \to u$ *в* $\mathscr{L}_f^2$. *Тогда существует* $g \in H$ *такой, что* $S\bigl(u_n^f\bigr)f \to g$ *в* H.

Следствие 4. *Пусть* $f \in H$, $u \in \mathscr{L}_f^2$, $u_n^f \in \mathscr{S}$, $v_n^f \in \mathscr{S}$ *и* $Su_n^f \to u$, $Sv_n^f \to u$ *в* $\mathscr{L}_f^2$. *Тогда* $\lim S\bigl(u_n^f\bigr)f = \lim S\bigl(v_n^f\bigr)f$ *в пространстве* H.

Упражнение. Дать подробные доказательства сформулированных утверждений.

Таким образом, для каждой функции $u \in \mathscr{M}_0$ и каждого вектора $f \in H$ существует последовательность простых функций u_n^f, приближающая u в пространстве $\mathscr{L}_f^2$. Последовательность векторов $S\bigl(u_n^f\bigr)$ при этом имеет предел $g \in H$, один и тот же для всех приближающих последовательностей простых функций. Естественно с помощью этого предела определить интеграл функции u по рассматриваемой проекторной мере P.

2. Обозначим $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(H)$ алгебру всех преобразований (линейных и нелинейных) пространства H. Будем называть эти преобразования операторами, действующими в H. ***Интегралом функции*** $u \in \mathscr{M}_0$ по мере P называется оператор $E_0(u) \in \mathscr{F}_0(H)$, определяемый равенством

$$E_0(u)f = \lim S\bigl(u_n^f\bigr)f$$

для каждого $f \in H$ и какой-нибудь последовательности простых функций u_n^f, сходящейся к u в $\mathscr{L}_f^2$. ***Интегралом*** для ограниченных измеримых функций по рассматриваемой проекторной мере называется отображение $E_0 \colon \mathscr{M}_0 \to \mathscr{F}_0$, переводящее функцию $u \in \mathscr{M}_0$ в оператор $E_0(u) \in \mathscr{F}_0$. Ясно, что интеграл E_0 продолжает интегральную сумму S:

$$E_0(u) = S(u) \quad (u \in \mathscr{S}).$$

Если $u \in \mathscr{S}$, то в качестве приближающей при каждом $f \in H$ можно выбрать постоянную последовательность $u_n^f = u$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Пример 1. Рассмотрим множество $X = \mathbb{N}$, алгебру $\mathscr{R}$ всех его конечных частей, гильбертово пространство $H = l^2$, его стандартную базу $e_n = (\delta_{nm})$. Обозначим через P_n проектор на координатную ось $\mathbb{C}e_n$:

$$P_n f = f(n) \cdot e_n \quad (f = (f(m) \in H).$$

Определим проекторную меру равенством

$$P(A) = \sum_{n \in A} P_n \quad (A \in \mathscr{R}).$$

Каждая ограниченная последовательность $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ измерима по мере P. При каждом $f \in H$ она приближается в $\mathscr{L}_f^2$ последовательностью простых функций u_n, имеющих значения $u_n(m) = u(m)$ при $m \le n$ и $u_n(m) = 0$ при $m > n$. В самом деле,

$$\|u - u_n\|_f^2 = \sum_{m>n} |u(m)|^2 \le c^2 \sum_{m>n} |f(m)|^2 \to 0.$$

Так как

$$S(u_n) = \sum_{m \le n} |u(m)|^2 P_m, \quad S(u_n)f = \sum_{m \le n} |u(m)|^2 f(m) \cdot e_m,$$

то

$$E_0(u)f = \lim S(u_n)f = \sum u(m)f(m)e_m$$

или

$$E_0(u)f = uf = (u(m) \cdot f(m))_m.$$

Пример 2. Рассмотрим множество X, алгебру $\mathscr{R}$ некоторых его частей, положительную числовую меру μ на $\mathscr{R}$ (необязательно ограниченную), гильбертово пространство $H = \mathscr{L}_f^2 = \mathscr{L}_f^2(X, \mu)$ и проекторную меру P на $\mathscr{R}$, определяемую равенством

$$P(A)f = Af \quad (A \in \mathscr{R},\ f \in H).$$

Здесь, как обычно, $Af(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $Af(x) = 0$ при $x \notin A$. Заметим, что

$$S(u)f = \sum a_i P(X_i)f = \sum a_i X_i f = uf \quad (u = \sum a_i X_i \in \mathscr{S},\ f \in H).$$

Так как

$$\mu_f(A) = \|P(A)f\|^2 = \|Af\|^2 = \int A|f|^2 d\mu,$$

то $d\mu_f/d\mu = |f|^2$, $d\mu_f = |f|^2 d\mu$. Используя это и делая замену переменных, получаем

$$\begin{aligned}\|uf - u_n^f f\|^2 &= \int |uf - u_n^f f|^2 d\mu \\ &= \int |uf - u_n^f|^2 |f|^2 d\mu = \int |uf - u_n^f|^2 d\mu_f = |u - u_n^f|_f^2.\end{aligned}$$

Значит, $u_n^f \to u$ в H при $u_n^f \to u$ в $\mathscr{L}_f^2$. Поэтому

$$E_0(u)f = \lim S(u_n^f)f = \lim(u_n^f f) = uf.$$

В обоих примерах интегрирование по проекторной мере сводится к умножению. Первый пример является частным случаем второго, когда $X = \mathbb{N}$ и мера μ считающая.

3. Значение $E_0(u)$ интеграла E_0 для каждой ограниченной измеримой функции $u \in \mathscr{M}_0$ есть всюду определенный ограниченный нормальный оператор в H. При доказательстве этого и других утверждений о свойствах интегралов существенную роль играет

Лемма. *Для каждых $f, g \in H$ существует $h \in H$ такой, что $\mu_f, \mu_g \ll \mu_h$.*

Здесь, как и раньше, $\mu \ll \nu$ обозначает непрерывность меры μ по мере ν. Доказывается лемма с помощью довольно длинных элементарных рассуждений (ср. доказательство теоремы 7.13 в [148]). Из леммы нетрудно вывести

Следствие. *Пусть $u \in \mathscr{M}_0$, $|u| < c$ и $f_i \in H$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда существуют $u_n \in \mathscr{S}$ такие, что $u_n \to u$ почти всюду по мерам μ_{f_i}, $u_n \to u$ в $\mathscr{L}^2_{f_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $|u_n| < c$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Упражнение. Доказать сформулированное утверждение.

Применяя это следствие и используя соответствующие свойства интегральной суммы S, легко доказать сформулированное в начале пункта утверждение, описывающее значения интеграла E_0 и их класс.

Теорема 1. *Значение $E_0(u)$ интеграла E_0 для функции $u \in \mathscr{M}_0$ есть всюду определенный нормальный линейный оператор в H.*

□ Линейность $E_0(u)$ вытекает из равенств

$$\begin{aligned} E_0(u)(af + bg) &= \lim S(u_n)(af + bg) \\ &= \lim(aS(u_n)f + bS(u_n)g) = a \lim S(u_n)f + b \lim S(u_n)g \\ &= aE_0(u)f + bE_0(u)g \quad (a, b, \in \mathbb{C};\ f, g \in H), \end{aligned}$$

верных при $u \in \mathscr{S}$, $u_n \to u$ в $\mathscr{L}^2_f$, $\mathscr{L}^2_g$, $\mathscr{L}^2_{af+bg}$.

Ограниченность линейного оператора $E_0(u)$ следует из соотношений

$$\|E_0(u)\| = \|\lim S(u_n)f\| = \lim \|S(u_n)f\| = \lim \|u_n\|_f \leq c\|f\|,$$

верных при $f \in H$, $u_n \in \mathscr{S}$, $u_n \to u$, в $\mathscr{L}^2_f$, $|u_n| < c$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Нормальность $E_0(u)$ вытекает из равенств

$$E_0(u^*) = E_0^*(u), \quad E_0(uv) = E_0(u) \cdot E_0(v) \quad (u, v \in \mathscr{M}_0).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} E_0(u) \cdot E_0^*(u) &= E_0(u) \cdot E_0(u^*) \\ &= E_0(uu^*) = E_0(|u|^2) = E_0(u^*u) = E_0^*(u) \cdot E_0(u) \end{aligned}$$

для каждой $u \in \mathscr{M}_0$. ■

Пусть $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_0(H)$ вместо $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_0(H)$ обозначает алгебру ограниченных линейных операторов в H. Интеграл $E_0 \colon \mathscr{M}_0 \to \mathscr{L}_0$ является гомоморфизмом алгебры $\mathscr{M}_0$ в алгебру $\mathscr{L}_0$. Он сохраняет все операции: сложение, умножение, умножение на число и сопряжение.

Теорема 2. *Для каждых $a, b, \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathscr{M}_0$ верны равенства*

$$E_0(au + bv) = aE_0(u) + bE_0(v), \tag{1}$$

$$E_0(uv) = E_0(u) \cdot E_0(v), \tag{2}$$

$$E_0^*(u) = E_0(u^*). \tag{3}$$

Все эти равенства выводятся с помощью предельных переходов из аналогичных равенств для интегральных сумм.

Следствие. *Для каждой вещественной функции $u \in \mathscr{M}_0$ значение $E_0(u)$ интеграла E_0 есть эрмитов оператор.*

□ В самом деле, благодаря равенству (3), если $u^* = u$, то

$$E_0^*(u) = E_0(u^*) = E_0(u),$$

и $E_0(u)$ эрмитов. ■

Упражнение. Доказать теорему 2.

4. Из правила скалярного произведения для интегральных сумм с помощью предельных переходов выводится аналогичное правило для интегралов.

Теорема 3. *Для каждых $u, v \in \mathscr{M}_0$ и $f, g \in H$ верно равенство*

$$\langle E_0(v), E_0(u) \rangle = \langle u, v \rangle_{fg}, \tag{4}$$

где $\langle u, v \rangle_{fg} = \int v^* u \, d\mu_{fg}$, $\mu_{fg} = \langle P(A)g, P(A)f \rangle$ $(A \in \mathscr{R})$.

Упражнение. Доказать теорему 3.

При $f = g$ и $u = v$ из равенства (4) вытекает

Следствие. *Для каждых $u \in \mathscr{M}_0$ и $f \in H$ верно равенство*

$$\|E_0(u)f\| = \|u\|_f. \tag{5}$$

По предположению о локальной ограниченности проекторной меры P существует последовательность простых множеств $X_n \in \mathscr{R}$ такая, что $X_n \uparrow X$ и $P(X_n) \to I$, где I — тождественное преобразование пространства H.

Теорема 4. *Интеграл E_0 нормирован: $E_0(1) = I$.*

☐ Ясно, что постоянная $1 \in \mathscr{M}_0$ и последовательность индикаторов множеств $X_n \uparrow X$ приближает ее в $\mathscr{L}_f^2$ при каждом $f \in H$. Поэтому

$$E_0(1)f = \lim S(X_n)f = \lim P(X_n)f = f.$$

Значит, $E_0(1) = I$. ■

Так как интеграл E_0 линеен, то из доказанного предложения непосредственно вытекает

Следствие. *Для каждой постоянной c верно равенство $E_0(c) = c \cdot I$.*

Порядковые свойства интегральной суммы S так же, как ее алгебраические свойства, тоже переносятся на интеграл E_0.

Теорема 5. *Интеграл E_0 положителен и монотонен:*

$$E_0(u) \geq O \ (u \geq 0), \quad E_0(u) \leq E_0(v) \ (u \leq v)$$

для вещественных функций $u, v \in \mathscr{M}_0$.

☐ По следствию теоремы 2 при $u \geq 0$ оператор $E_0(u)$ эрмитов. Используя равенство (4) при $v = 1$, $g = f$ и равенство $E_0(1) = I$, получаем

$$f \cdot E_0(u)f = E_0(1)f \cdot E_0(u)f = \int u \, d\mu_f \geq 0 \quad (u \geq 0).$$

Значит, $E_0(u) \geq O$ при $u \geq 0$. Интеграл E_0 положителен.

Монотонность E_0 следует из его положительности и линейности:

$$E_0(v) - E_0(u) = E_0(v - u) \geq 0, \quad E_0(u) \leq E_0(v)$$

при $u \leq v$ и $u, v \in \mathscr{M}_0$. ■

5. Изометричность и линейность интеграла E_0 позволяют легко доказать для него предельную теорему, описывающую сходимость последовательностей его значений. Так как последовательность функций $u_n \in \mathscr{M}_0$ может сходиться в пространстве $\mathscr{L}_f^2$ при некотором f к функции $u \notin \mathscr{M}_0$, то предельная теорема состоит из двух утверждений: для случая $u \in \mathscr{M}_0$ и для случая $u \notin \mathscr{M}_0$. Заодно доказывается независимость интеграла от выбора приближающей последовательности.

Теорема 6. *Пусть* $u_n, v_n \in \mathscr{M}_0$, $u \in \mathscr{L}_f^2$ *и* $f \in H$, $u_n, v_n \to u$ *в* $\mathscr{L}_f^2$. *Тогда существует* $g \in H$ *такой, что*

$$\lim E_0(u_n) = \lim E_0(v_n) = g.$$

При этом $g = E_0(u)f$, *если* $u \in \mathscr{M}_0$.

□ В самом деле, благодаря равенству (5)

$$\|E_0(v_p)f - E_0(u_n)f\| = \|E_0(v_p - u_n)f\| = \|v_p - u_n\|_f.$$

При $(v_p) = (u_n)$ отсюда вытекает сходимость последовательности $g_n = E_0(u_n)f$ к некоторому $g \in H$, а последовательности $h_p = E_0(v)f$ к некоторому $h \in H$. Кроме того, $\|h - g\| = \|u - u\|_f = 0$ и $h = g$. Если $u \in \mathscr{M}_0$, то $E_0(v_p)f \to E_0(u)$ и

$$\|E_0(u)f - E_0(u_n)f\| = \|u - u_n\|_f$$

и, значит,

$$g = \lim E_0(u_n)f = E_0(u)f$$

при $u \in \mathscr{M}_0$. ■

Теоремы 1–6 показывают, что интегралы ограниченных измеримых функций по проекторным мерам обладают многими хорошими свойствами.

4.9.3. Интегралы неограниченных функций

Значения интегралов неограниченных функций являются неограниченными плотно определенными линейными операторами. Поэтому определение и исследование свойств таких интегралов сложнее, чем интегралов ограниченных функций.

1. Возьмем измеримую функцию $u \in \mathscr{M}$ и рассмотрим множество $D(u) = \{f \mid u \in \mathscr{L}_f^2\} \subseteq H$. Таким образом, $f \in D(u) \Leftrightarrow u \in \mathscr{L}_f^2$. Это обеспечивает существование последовательности ограниченных измеримых функций $u_n^f \in \mathscr{M}_0$, сходящихся к функции $u \in \mathscr{M}$ в пространстве $\mathscr{L}_f^2$ при $f \in D(u)$. В качестве таких приближающих ограниченных функций можно выбрать простые функции $u_n^f \in \mathscr{S}$. По теореме 6 (п. 4.9.2, 5) о сходимости последовательность векторов $g_n = E_0(u_n)f$ имеет предел $g \in H$, один и тот же для всех приближающих функцию $u \in \mathscr{M}$ последовательностей функций из $\mathscr{M}_0$. Естественно с помощью этого предела определить интеграл функции $u \in \mathscr{M}$ по рассматриваемой проекторной мере P.

Обозначим $\mathscr{F} = \mathscr{F}(H)$ множество всех частичных преобразований пространства H (отображений частей H в H). Будем называть эти преобразования *частичными операторами*, действующими в H, или, коротко, *операторами*, как обычные преобразования, определенные на всем H.

Интегралом функции $u \in \mathscr{M}$ по мере P называется частичный оператор $E(u) \in \mathscr{F}$, определяемый равенством

$$E(u)f = \lim E_0\big(u_n^f\big)f$$

для каждого $f \in D(u)$ и какой-нибудь последовательности ограниченных функций $u_n^f \in \mathscr{M}_0$, сходящейся к u в $\mathscr{L}_f^2$.

Интегралом для измеримых функций по проекторной мере называется отображение $E\colon \mathscr{M} \to \mathscr{F}$, переводящее функцию $u \in \mathscr{M}$ в частичный оператор $E(u) \in \mathscr{F}$.

Ясно, что интеграл E продолжает интеграл E_0 и интегральную сумму S, т. е.

$$E(u) = S(u) \quad (u \in \mathscr{S}), \quad E(u) = E_0(u) \quad (u \in \mathscr{M}_0).$$

В каждом из этих случаев в качестве приближающей можно взять соответствующую постоянную последовательность.

Пример 1. В примере 1 из п. 4.9.2, 2 вместо ограниченной возьмем произвольную последовательность $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Как нетрудно проверить,

$$D(u) = \left\{f : \sum |u(n) \cdot f(n)|^2 < \infty\right\}, \quad E(u)f = uf \quad (f \in D(u)).$$

Пример 2. В примере 2 из п. 4.9.2, 2 вместо ограниченной возьмем любую измеримую функцию $u \in \mathscr{M}$. Как нетрудно проверить,

$$D(u) = \left\{ f : \int |uf|^2 < \infty \right\}, \quad E(u)f = uf \quad (f \in D(u)).$$

В обоих примерах интегрирование функции по проекторной мере снова сводится к умножению.

Упражнение. Доказать равенства примеров 1 и 2.

2. Значение $E(u)$ интеграла E для каждой измеримой функции $u \in \mathscr{M}$ есть плотно определенный нормальный линейный оператор в H. Из-за частичной определенности рассматриваемых операторов доказательства большинства утверждений о свойствах интеграла E сложные. Поэтому они будут только сформулированы как обобщения теорем 1–6 о свойствах интеграла E_0. Доказательства есть в п 7.2 книги [148].

Лемма. *Область определения $D(u)$ значения $E(u)$ интеграла E для функции $u \in \mathscr{M}$ есть плотное векторное подпространство в H.*

Теорема 1. *Значение $E(u)$ интеграла E для функции $u \in \mathscr{M}$ есть плотно определенный нормальный линейный оператор в H.*

Теорема 2. *Для каждых $a, b \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathscr{M}$ верны включения*

$$E(au + bv) \supseteq aE(u) + bE(v), \tag{1'}$$

$$E(uv) \supseteq E(u) \cdot E(v) \tag{2'}$$

и равенство

$$E^*(u) = E(u^*). \tag{3'}$$

Здесь включения означают, что левые части являются продолжением правых. Подчеркнем, что по правилам действий с частичными операторами области определения результатов равны пересечению областей рассматриваемых операторов (например, $D(uv) = D(u) \cap D(v)$).

Следствие. *Для каждой вещественной функции $u \in \mathscr{M}$ значение $E(u)$ интеграла E есть самосопряженный оператор.*

Теорема 3. *Для каждых* $u, v \in \mathscr{M}$ *и* $f \in D(u)$, $g \in D(v)$ *верно равенство*

$$\langle E(v)g, E(u)f\rangle = \langle v, u\rangle_{gf}, \tag{4'}$$

где $\langle v, u\rangle_{f,g} = \lim \int \bar{v}_n^* \bar{u}_n d\mu_{gf}$.

(Приближающие v, u ограниченные функции $\bar{v}_n$, $\bar{u}_n$ были определены в п. 4.9.2, 1.)

Следствие. *Для каждых* $u \in \mathscr{M}$ *и* $f \in D(u)$ *верно равенство*

$$\|E(u)f\| = \|u\|_f. \tag{5'}$$

Теорема 4. *Интеграл* E *нормирован и для каждой постоянной* c *верно равенство* $E(c) = c \cdot I$.

Теорема 5. *Интеграл* E *положителен и монотонен:*

$$E(u) \geq O \ (u \geq 0), \quad E(u) \leq E(v) \ (u \leq v)$$

для вещественных функций $u, v \in \mathscr{M}$.

Теорема 6. *Пусть* $u, u_n \in \mathscr{M}$ *и* $f \in D(u) \cap D(u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $u_n \to u$ *в* $\mathscr{L}_f^2$. *Тогда*

$$\lim E(u_n) = E(u)f.$$

Теоремы 4 и 5 такие же, как и для интеграла E_0. Они приведены для того, чтобы сохранить нумерацию.

Интеграл $E(u)$ функции $u \in \mathscr{M}$ по проекторной мере часто обозначается так же, как интеграл по числовой мере:

$$E(u) = \int u \, dP.$$

Если мера P порождена функцией распределения F, то пишут также

$$E(u) = \int u \, dF.$$

Когда это нужно, указываются переменная x и область X определения функции u.

Замечание. Интегрирование по положительной операторной мере и его связь с интегрированием по числовым мерам подробно описаны в [128]. Там используется тот факт, что операторная мера определяется семейством числовых, как и проекторная.

4.9.4. Спектральная теорема

Интеграл вещественной измеримой функции по проекторной мере есть самосопряженный оператор. Возникает естественный вопрос: является ли каждый самосопряженный оператор интегралом некоторой функции по некоторой мере? Спектральная теорема утверждает, что является. Эта теорема подробно доказана в [148, п. 7.3]; см. также [74, VII, VIII.3; 111, гл. 9].

1. При доказательстве спектральной теоремы используется формула обращения Стилтьеса, которую нетрудно проверить.

Пусть $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная слева функция с ограниченными вариациями (разность двух возрастающих) и $\rho(-\infty) = 0$. Для каждого $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ рассмотрим функцию $r(z, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями

$$r(z, x) = (z - x)^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Функция $r(z, \cdot)$ интегрируема по числовой мере, определяемой функцией ρ. Если $\rho = \sigma - \tau$, где σ и τ — возрастающие положительные функции распределения, то

$$\int r(z, \cdot)\, d\rho = \int r(z, \cdot) d\sigma - \int r(z, \cdot)\, d\tau.$$

Рассмотрим еще функцию φ со значениями

$$\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (z - x)^{-1}\, d\rho(x) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Верна *формула обращения Стилтьеса*

$$\rho(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi i)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x+\delta} [\varphi(s - i\varepsilon) - \varphi(s + i\varepsilon)]\, ds.$$

Доказательство этой формулы есть в [148, приложение B].

Как было показано, резольвента

$$R(z, T) = (zI - T)^{-1} \quad (z \in P(T))$$

замкнутого оператора T есть ограниченный всюду определенный оператор и функция $R(\cdot, T)$ аналитическая на резольвентном множестве $P(T)$. Кроме того (4.7.1), самосопряженный оператор замкнут, а его спектр содержится в $\mathbb{R}$.

2. Рассмотрим: комплексное гильбертово пространство H, плотное в H векторное подпространство A, алгебру $\mathscr{P}$ проекторов в H, вещественную прямую $\mathbb{R}$, алгебру $\mathscr{R}$ простых множеств в $\mathbb{R}$, порожденную интервалами $[a, b[$ $(-\infty < a \leq b < \infty)$, проекторную меру $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$. Чтобы не усложнять запись, будем обозначать буквой x произвольную точку $\mathbb{R}$ и тождественную функцию на $\mathbb{R}$.

Теорема. *Для каждого самосопряженного оператора $T\colon A \to H$ существует единственная проекторная мера $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ такая, что*

$$T = \int x\, dP.$$

Мера P определяется равенством (для всех $f \in H$ и $a \leq b$ из $\mathbb{R}$)

$$\|P([a, b[)f\|^2 = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi i)^{-1} \int\limits_{a+\delta}^{b+\delta} \langle f, [R(x - i\varepsilon, T) - R(x + i\varepsilon, T)]f\rangle\, dx.$$

Здесь под знаком интеграла записано скалярное произведение вектора f на вектор $g = [R(x - i\varepsilon, T) - R(x + i\varepsilon, T)]f$. Так как $\varepsilon > 0$, то $x - i\varepsilon, x + i\varepsilon \in \mathbb{R}$. Следовательно, $x - i\varepsilon, x + i\varepsilon \notin P(T)$ и подынтегральная функция определена для каждого $f \in H$. Мера P, определяемая в теореме, называется *спектральной мерой* оператора T.

Существование спектральной меры P самосопряженного оператора T доказывается сложно [148, п. 7.3], а единственность — просто. Докажем ее. Это поможет лучше понять теорему.

$\square$ Пусть $T = E(x), D(x) = A$. Тогда $E(z - x) = zI - T\colon A \to H$. Это следует из линейности и нормированности интеграла E. Возьмем функции $u = z - x$, $v = r(z, x) = (z - x)^{-1}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$. Заметим, что функция v ограничена и $uv = vu = 1$. Вследствие мультипликативности интеграла E отсюда вытекают равенства

$$E(u) \cdot E(v) = I, \quad E(v) \cdot E(u) = I_A,$$

где I и I_A — тождественные преобразования H и A. Так как $E(u) = zI - T$, отсюда следует, что

$$E(v) = E^{-1}(u) = R(z, T)\colon H \to H.$$

По правилу для скалярного произведения

$$\varphi(z) = f \cdot E(v)f = \int v\, d\mu_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (z-x)^{-1}\, d\mu_f.$$

Применяя формулу обращения, получаем

$$\mu_f([a,b[) = \lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2\pi i)^{-1}\int\limits_{a+\delta}^{b+\delta}[\varphi(x-i\varepsilon) - \varphi(x+i\varepsilon)]\, dx$$

для $-\infty < a \leq b < \infty$. Остается заметить, что

$$\mu_f([a,b[) = \|P([a,b[)f\|^2,$$
$$[\varphi(x-i\varepsilon) - \varphi(x+i\varepsilon)] = \langle f, [R(x-i\varepsilon, T) - R(x+i\varepsilon, T)]f\rangle$$

для каждого $f \in H$ и что семейство положительных числовых мер μ_f $(f \in H)$ с помощью выписанного равенства однозначно определяет проекторную меру P.

Пусть $Q\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ — проекторная мера, для которой

$$f \cdot Q([a,b[)f = \|Q([a,b[)f\|^2 = \|P([a,b[)f\|^2 = f \cdot P([a,b[)f$$

при $f \in H$ и $-\infty < a \leq b < \infty$. Тогда в силу поляризационного тождества

$$g \cdot Q([a,b[)f = g \cdot P([a,b[)f \quad (g \in H)$$

и, следовательно,

$$Q([a,b[)f = P([a,b[)f \quad (f \in H),$$
$$Q([a,b[) = P([a,b[) \quad (-\infty < a \leq b < \infty).$$

Значит, $Q = P$. Единственность спектральной меры доказана. ■

Пример 1. Рассмотрим: компактный эрмитов оператор $T\colon H \to H$, последовательности его собственных чисел $\lambda_n \neq 0$ и проекторов P_n на соответствующие собственные подпространства $H_n = \operatorname{Ker}(\lambda_n I - T)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, проектор P_0 на ядро $\operatorname{Ker} T$ оператора T. Положим $\lambda_0 = 0$.

Возьмем проекторную меру $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ со значениями

$$P([a,b[) = \sum_{a \le \lambda_n \le b} P_n \quad (-\infty < a \le b < \infty).$$

Здесь $n = 1, 2, \ldots$ и сумма сильная. Применяя теорему Гильберта — Шмидта, получаем

$$E(x)f = \sum \lambda_n P_n f = Tf \quad (f \in H),$$

т. е.

$$T = \sum \lambda_n P_n = \int x\, dP$$

и P — спектральная мера оператора T.

Заметим, что $\lambda_n \to 0$ при $\dim H = \infty$. Это следует из теоремы Рисса — Шаудера. (Иначе последовательность собственных чисел $\lambda_n \neq 0$ имела бы предельную точку $\lambda \neq 0$ или какое-нибудь из соответствующих им собственных подпространств было бесконечномерным.)

Пример 2. Пусть $H = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, dx)$, $A = \left\{ f \in H : \int |xf|^2\, dx < \infty \right\}$ и T — оператор умножения на независимую переменную x (тождественную функцию на $\mathbb{R}$):

$$Tf = x \cdot f \quad (f \in A).$$

Возьмем проекторную меру $P\colon \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ со значениями

$$P(X)f = X \cdot f \quad (X \in \mathscr{R},\ f \in A).$$

Как нетрудно проверить (повторяя рассуждения примера 2 из п. 4.9.2, 2),

$$E(x)f = x \cdot f \quad (f \in A).$$

Значит,

$$T = \int x\, dP$$

и P — спектральная мера оператора T.

Из спектральной теоремы следует, что каждый самосопряженный оператор T унитарно эквивалентен оператору M умножения:

$$T = U^{-1} M U,$$

где U — некоторый унитарный оператор. Этот оператор связывает и спектральные меры T и M (см. теорему 7.18 в книге [148]).

Замечание. Возьмем: комплексную плоскость $\mathbb{C}$, алгебру $\mathscr{R}$ простых множеств в $\mathbb{C}$, порожденную прямоугольниками $[a,b[\times[c,d[$ $(-\infty<a\le b,\ c\le d<\infty)$, алгебру $\mathscr{B}$ ограниченных линейных операторов в H, проекторную меру $P\colon\mathscr{R}\to\mathscr{B}$. По аналогии с интегралом по проекторной мере можно определить интеграл по операторной мере для функций комплексной переменной и доказать спектральную теорему для нормальных операторов [148, теорема 7.32].

4.9.5. Функции операторов

Спектральная теорема и интегрирование измеримых функций по проекторным мерам позволяют определить функции самосопряженных операторов.

1. Пусть $T\colon H\to H$ — самосопряженный оператор, функция $P\colon\mathscr{R}\to\mathscr{P}$ — его спектральная мера и $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — измеримая по мере P функция. Тогда, по определению,

$$u(T)=\int u\,dP.$$

В частности, это равенство верно для любой борелевской функции u.

Пример 1. Пусть

$$u(x)=\sum_{0\le m\le n}a_mx^m\quad(a_m\in\mathbb{C}).$$

Тогда, как нетрудно проверить (используя мультипликативность интеграла по проекторной мере),

$$u(T)=\sum_{0\le m\le n}a_mT^m\quad(T^0=1).$$

Пример 2. Для каждого натурального числа $n\ge 1$ и положительного самосопряженного оператора T существует единственный положительный самосопряженный оператор $T^{1/n}$ такой, что $(T^{1/n})^n=T$. Оператор $T^{1/n}$ определяется равенством

$$T^{1/n}=\int x^{1/n}\,dP,$$

где P — спектральная мера оператора T. Если T компактный, то $T^{1/n}$ тоже компактный.

Заметим, что так как оператор T положителен и самосопряжен, то его спектр $\Sigma(T)$ находится в положительной полуоси $\mathbb{R}$. Поэтому на множествах из отрицательной полуоси спектральная мера P оператора T равна нулю и значения интегрируемой функции $x^{1/n}$ на отрицательной полуоси несущественны, их можно выбрать как угодно.

2. Используя спектральную теорему для нормальных операторов, можно доказать, что для любого натурального числа $n \geq 1$ и нормального оператора T существует нормальный оператор $T^{1/n}$ такой, что $(T^{1/n})^n = T$.

Спектральную меру оператора T обозначают иногда буквой E (как интеграл по ней) и пишут

$$T = \int \lambda \, dE(\lambda), \quad u(T) = \int u(\lambda) \, dE(\lambda).$$

В частности, дробная степень положительного самосопряженного оператора определяется равенством

$$T^{m/n} = \int \lambda^{m/n} \, dE(\lambda).$$

С помощью интегрального представления определяются дробные степени T^α $(0 < \alpha < 1)$ и для операторов более широкого класса (см. [35, гл. 5, § 3]).

3. В [28, гл. 7, § 3] подробно описывается связь операторных функций со спектральной теорией и аналитические операторные функции.

Рассмотрим: комплексное банахово пространство E $(\neq \{0\}$, как обычно), ограниченный линейный оператор $T\colon E \to E$, открытое множество $U \supseteq \Sigma(T)$ с положительно ориентированной кусочно-спрямляемой границей $\Gamma = \partial U$, аналитическую в окрестности V замыкания $\bar{U}$ комплексную функцию f. Операторная функция f определяется равенством

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda.$$

Так как резольвента $R(\cdot, T)$ является аналитической функцией, то из интегральной формулы Коши следует, что это значение $f(T)$ не зависит от выбора множества U.

Пусть a, b — комплексные числа и f, g — операторные функции, определяемые данным равенством. Тогда так же определяются операторные функции $af + bg$, fg со значениями

$$(af + bg)(T) = af(T) + bg(T), \quad (fg)(T) = f(T)g(T).$$

Равенство

$$(g \circ f)(T) = g(f(T))$$

определяет композицию функций f, g.

Используя функциональное исчисление для операторных функций, легко доказать теорему об отображении спектров

$$f(\Sigma(T)) = \Sigma(f(T)).$$

Упражнение. Доказать эту теорему [28, гл. 7, § 3, п. 11].

Замечание. Функциональное исчисление для аналитических функций подробно описывается также в [43, гл. 5]. Выделяется экспонента, для которой даются некоторые оценки. Есть примеры и упражнения. В [74, VII.1] описывается функциональное исчисление для непрерывных функций и эрмитовых операторов. Вместо интегрального представления используется теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами.

4.10. Операторная экспонента

Среди операторных функций выделяются экспоненциальные. Спектральная теорема позволяет определить их как интегралы обычных экспоненциальных функций. Операторные экспоненты эффективно используются при решении дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. Ответы на основные вопросы, связанные с операторной экспонентой, можно найти в [116].

4.10.1. Постановка задачи

1. Рассмотрим комплексную экспоненту $f\colon [0, \infty[\, \to \mathbb{C}$ с показательным коэффициентом $a \in \mathbb{C}$:

$$f(t) = e^{at} \quad (t \geq 0).$$

Она является непрерывным гомоморфизмом аддитивной полугруппы положительных чисел на мультипликативную полугруппу некоторых комплексных чисел:

$$f(s+t) = e^{a(s+t)} = e^{as}e^{at} = f(s) \cdot f(t)$$

для любых $s, t \geq 0$. В частности, при $a = 2\pi i$ экспонента отображает $[0, \infty[$ на единичную окружность плоскости $\mathbb{C}$.

Каждое значение $f(t)$ экспоненты f определяет линейное преобразование $U(t)$ плоскости $\mathbb{C}$, переводящее точку $z \in \mathbb{C}$ в точку

$$U(t)z = e^{at}z.$$

Так же, как значения $f(t)$, преобразования $U(t)$ составляют мультипликативную полугруппу:

$$U(s+t) = U(s) \cdot U(t)$$

для любых $s, t \geq 0$. Поэтому экспоненту можно связывать с полугруппой линейных преобразований.

Если $a = i\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, то

$$U(0) = I, \quad U^*(t) = U(-t) = U^{-1}(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

преобразования $U(t)$ унитарные и составляют группу.

2. Заметим еще, что

$$e^{-at} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{t}{n}a\right)^{-n}\right].$$

Коэффициент a экспоненты f равен ее производной $f'(0)$ в точке 0:

$$a = \lim_{t\downarrow 0}[t^{-1}(e^{at} - 1)].$$

А экспонента f является единственным решением дифференциального уравнения

$$\dot{f} = a \cdot f,$$

удовлетворяющим условию $f(0) = 1$.

Экспонента является аналитической функцией:

$$e^{at} = \sum (n!)^{-1}(at)^n \quad (n \ge 0).$$

Суммируемость ряда абсолютная:

$$\sum (n!)^{-1}|at|^n < \infty.$$

3. Задача. *Определить экспоненту с операторным коэффициентом, обладающую свойствами, аналогичными основным свойствам числовой экспоненты.*

Для ограниченного оператора T в банаховом пространстве X это сделать легко, используя операторные аналитические функции:

$$e^{tT} = \sum (n!)^{-1}(tT)^n \quad (n \ge 0).$$

Так как $\sum (n!)^{-1}\|tT\|^n < \infty$, то ряд справа определяет ограниченный линейный оператор в X. Если оператор T неограничен, то такое определение не годится и для определения операторной экспоненты нужно использовать другие ее свойства.

4.10.2. Полугруппы операторов

1. Самым естественным представляется по аналогии с равенством п. 4.10.1, 2 определить операторную экспоненту как предел специальной последовательности операторов. Нужно только доказать его существование для операторов из достаточно широкого класса. Заметим, что отрицательные степени в выбранной последовательности позволяют использовать ограниченность значения резольвенты для замкнутых операторов. Можно доказать (см. [35, гл. 9, § 1]), что если T — плотно определенный замкнутый оператор в банаховом пространстве X, отрицательная полуось содержится в резольвентном множестве $P(-T)$ оператора $-T$ и $\|(\lambda I + T)^{-1}\| \le \lambda^{-1}$ при $\lambda > 0$, то существует предел

$$U(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n} T \right)^{-n} \right]$$

в сильном смысле для каждого $t \ge 0$. Определенные этим равенством операторы $U(t)$ образуют полугруппу: $U(s+t) = U(s)\cdot U(t)$ для каждых $s, t \ge 0$.

Эта полугруппа сжимающая, т. е. $\|U(t)\| \le 1$. Функция U со значениями $U(t)$ сильно непрерывна. Она называется *экспонентой с коэффициентом* $-T$. Ее значения записываются в привычном виде:

$$U(t) = e^{-tT} \quad (t \ge 0).$$

Заметим, что $U(0) = I$.

Для каждого $x \in \operatorname{Dom} T$ верно равенство

$$-Tx = \lim_{t \downarrow 0} [t^{-1}(e^{-tT} - I)x].$$

В связи с этим равенством оператор T называют *производящим оператором* для полугруппы $(U(t))$. Разные производящие операторы порождают разные полугруппы. Доказательства перечисленных свойств операторных экспонент есть в [35, гл. 9, § 1]. Список других показательных формул есть в [116, п. 11.8].

2. Полугруппам операторов посвящена обширная литература [28, гл. 8; 35, гл. 9; 116, гл. 10–16; 74, X.8, 9; 5, гл. 4; 43]. Главное внимание уделяется теоремам об условиях, при которых данный оператор порождает полугруппу нужного класса, и решению *абстрактной задачи Коши*: найти для данного замкнутого оператора T векторную функцию u на $[0, \infty[$ со значениями $u(t) \in \operatorname{Dom} T$ $(t \in [0, \infty[)$, которая является решением уравнения $\dot{u} = Tu$ и имеет данное значение $u(0)$.

Пусть X — банахово пространство. Семейство U ограниченных линейных операторов $U(t)\colon X \to X$ $(t \in [0, \infty[)$ составляет *сильно непрерывную полугруппу,* если:

(1) $U(0) = I$,

(2) $U(s + t) = U(s) \cdot U(t)$ для всех $s, t \in [0, \infty[$,

(3) $U(t)x \to U(s)x$ при $t \to s$ для всех $x \in X$.

Если, кроме того, $\|U(t)\| \le \gamma$ $(t \ge 0)$ для некоторого $\gamma > 0$, то полугруппа U называется *равномерно ограниченной.* При $\gamma < 1$ она называется *сильно сжимающей.* Теоремы для сильно непрерывных полугрупп часто являются простыми обобщениями аналогичных теорем для сжимающих.

Упражнение. Доказать, что условие (3) в определении можно ослабить и заменить на

(3′) $U(t)x \to x$ при $t \downarrow 0$ для всех $x \in X$, т. е. $(1), (2), (3') \Rightarrow (1), (2), (3)$ [5, п. 4.1].

Пример. Пусть $X = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, причем $f(1) = 0$ для $x \in X$. Определим U равенствами $U(t)x = y$, где $y(s) = x(s+t)$ при $s + t \in [0,1]$ и $y(s) = 0$ при $s + t \notin [0,1]$. Полугруппа U сильно непрерывна.

Упражнение. Найти порождающий оператор T полугруппы U в примере и спектр оператора T.

Можно доказать [32, гл. 9, п. 1], что для составляющих сильно непрерывную полугруппу U операторов $U(t)$ при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ верно неравенство

$$\|U(t)\| \le \gamma e^{\alpha t}.$$

Поэтому, компенсируя экспоненциальный рост, U можно превратить в сжимающую полугруппу V операторов $V(t) = \gamma^{-1} e^{-\alpha t}$. Резольвентное множество порождающего оператора полугруппы содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ [5, п. 4.2].

Замечание. Особенности сильно непрерывных полугрупп операторов в вещественном и комплексном банаховых пространствах подробно описаны в [43, п. 3.7].

3. Если сильно непрерывная полугруппа U непрерывна в топологии, порожденной операторной нормой, то говорят, что U *непрерывна в равномерной топологии.*

Полугруппа U со значениями $U(t) = e^{-tT}$ $(t \ge 0)$, порожденная ограниченным оператором $T\colon X \to X$, непрерывна в равномерной топологии.

Упражнение. Доказать это.

Верно и обратное утверждение: если U непрерывна в равномерной топологии, то она порождается ограниченным оператором $T = \lim\limits_{t \downarrow 0} t^{-1}(U(t) - I)$. Таким образом, непрерывными в равномерной топологии являются порождаемые ограниченными операторами полугруппы и только они [28, гл. 8, п. 1].

4. Рассмотрим плотное в банаховом пространстве X подпространство A и замкнутый линейный оператор $T\colon A \to X$ с резольвентным множеством $P(T)$ и резольвентой $R(\cdot, T)$. Можно доказать [5, п. 4.1], что $P(T)$ содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \alpha = \inf\{t^{-1}\log\|U(t)\| : t > 0\}$, когда T порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $U(t)$. Если она равномерно ограничена, то $\alpha = 0$ [5, п. 4.2].

Порождающие плотно определенные замкнутые операторы T характеризует

Теорема Хилле — Иосиды. *Оператор T порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $U(t) = e^{-tT}$ ессли верно включение $]\alpha, \infty[\subseteq P(T)$ и*

$$\|R(\lambda, T)^n\| \leq \gamma(\lambda - \alpha)^{-n} \quad (\lambda > \alpha,\ n \in \mathbb{N})$$

для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Доказательство есть в [28, VIII.1]. Там же выводится

Следствие. *Оператор T порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $U(t)$ с нормами $\|U(t)\| \leq e^{\alpha t}$ $(t \geq 0)$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ ессли верно включение $]\alpha, \infty[\subseteq P(T)$ и*

$$\|R(\lambda, T)\| \leq (\lambda - \alpha)^{-1} \quad (\lambda > \alpha).$$

При $\alpha = 0$ получается критерий для операторов, порождающих сжимающие полугруппы:

$$]a, \infty[\subseteq P(T), \quad \|R(\lambda, T)\| \leq \lambda^{-1} \quad (\lambda > 0).$$

Замечание. Доказательство теоремы Хилле — Иосиды есть также в [116, п. 12.3]. Там доказываются некоторые уточнения и аналоги для полугрупп других классов. В [32, IX.7] описываются обобщения на локально выпуклые пространства. В [5, п. 4.4] рассматривается специальный случай полугрупп компактных операторов и операторов Гильберта — Шмидта. Там же (п. 4.6) подробно описываются элементарные примеры полугрупп операторов, связанных с математической физикой.

Из определений следует, что порождаемая оператором T сильно непрерывная полугруппа U определяет корректное решение задачи Коши для уравнения $\dot{u} = Tu$. Поэтому доказательство корректной разрешимости этой задачи сводится к проверке условий теоремы Хилле — Иосиды. Интересный пример проверки корректной разрешимости системы уравнений Максвелла для вакуума есть в [75, гл. 16].

5. Из теоремы Хана — Банаха следует, что для каждого вектора $x \in X$ существует линейный функционал $\varphi \in X'$ такой, что $\|\varphi\| = \|x\|$ и $\varphi(x) = \|x\|^2$. Каждый такой функционал называется *нормированным касательным функционалом* для x.

Плотно определенный оператор $T\colon A \to X$ называется *аккретивным,* если $\operatorname{Re}\varphi(Tx) \geq 0$ при каждом $x \in A$ и некотором нормированном касательном функционале φ для x. Если, кроме того, T не имеет собственных аккретивных продолжений, то он называется *максимальным аккретивным* (или *m-аккретивным*). В [35, гл. 5, п. 11] доказывается, что для аккретивного оператора существует m-аккретивный квадратный корень.

Оператор $-T$, противоположный аккретивному, называется *диссипативным.* Диссипативные операторы подробно описываются в [43, п. 3.3]. Там же понятие диссипативности обобщается на операторы в мультинормированных пространствах.

Упражнение. Доказать, что каждый аккретивный оператор продолжается до некоторого замкнутого аккретивного оператора [74, гл. 10, задача 52] и [43, п. 3.3].

Предложение. *Замкнутый оператор $T\colon A \to X$ порождает сжимающую полугруппу есcли он аккретивен и* $\operatorname{Ran}(\alpha I + T) = X$ *при некотором $\alpha > 0$.*

Доказательство есть в [74, X.8]. Там же из этого предложения выводится

Следствие. *Если замкнутый оператор T и сопряженный с ним оператор T' аккретивны, то T порождает сжимающую полугруппу.*

В [74, X.8] даны примеры использования аккретивных операторов и сжимающих полугрупп при решении уравнения теплопроводности.

6. Важными специальными свойствами обладают полугруппы операторов в *упорядоченных банаховых пространствах.* Эти пространства подробно описаны в [33, гл. 10] и [43, дополнение 2]. Порядок для них согласован с операциями и с нормой (*множество всех положительных элементов замкнуто*).

Пусть E — упорядоченное банахово пространство с конусом положительных векторов $P = \{x \in E : x \geq 0\}$. Благодаря согласованности $P + P \subseteq P$ и $\lambda P \subseteq P$ при $\lambda \geq 0$. Кроме того, $\bar{P} = P$. Назовем *положительной* сильно непрерывную полугруппу U положительных операторов $U(t)$ таких, что $U(t)P \subseteq P$ $(t \geq 0)$. Сильно непрерывная полугруппа U, порождаемая оператором T, положительна есcли резольвента $R(\lambda, T)$ является положительным оператором для всех $\lambda > \beta \geq \alpha$ при некотором β и $\alpha = \inf\{t^{-1} \log \|U(t)\| : t > 0\}$ [43, п. 7.1].

Число $s(T) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \Sigma(T)\}$ называется *спектральной гранью* полугруппы U (если $\Sigma(T) = 0$, то $s(T) = -\infty$). При некоторых дополнительных предположениях о множестве P для положительной полугруппы U, порождаемой T, верны равенства $s(T) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \Sigma(T)\}$ и

$$R(\mu, T)x = \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} U(t)x\,dt \quad (\operatorname{Re}\mu > s(T),\ x \in E).$$

Откуда следует, что $s(T) \in \Sigma(T)\}$, когда $\Sigma(T) \neq O$ [43, п. 7.1].

Каждый полуаддитивный положительный однородный функционал $p\colon E \to \mathbb{R}$ такой, что $\|x\|_p = p(x) \vee p(-x)$ $(x \in E)$, определяет норму $\|\,\|_p$ для E. Неравенство $|p(x)| \leq c\|x\|_p$ для некоторого $c > 0$ и всех $x \in E$ обеспечивает непрерывность p. Оператор $T\colon A \to E$ на подпространстве A вещественного банахова пространства E такой, что $p(x) \leq p(x - \lambda TX)$ $(\lambda \geq 0,\ x \in A)$, называется *$p$-диссипативным.* Оператор $S\colon E \to E$ такой, что $p(Sx) \leq p(x)$ $(x \in E)$, называется *p-сжатием.* Сильно непрерывная полугруппа U, составленная из p-сжимающих операторов $U(t)$, называется *p-сжимающей.* Верно

Предложение. *Сильно непрерывная полугруппа p-сжимающая ессли порождающий ее оператор p-диссипативен.*

При некоторых дополнительных предположениях о конусе P упорядоченного банахова пространства E и функционале p каждое p-сжатие является положительным оператором, а порождающий p-сжимающую полугруппу оператор T плотно определен, p-диссипативен и $\operatorname{Ran}(\alpha I - T) = E$ при некотором $\alpha > 0$. Верен также аналог теоремы Хилле — Иосиды. Точные формулировки и доказательства есть в [43, п. 7.2].

Можно доказать, что порождающий оператор положительной полугруппы операторов в σ-полной банаховой решетке удовлетворяет абстрактному неравенству Като [43, п. 7.4].

4.10.3. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа экспоненты с показательным коэффициентом $-T$ дает резольвенту этого оператора.

Рассмотрим борелевскую функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такую, что

$$|f(t)| \leq ce^{\alpha t}\ (t \geq 0), \quad f(t) = 0\ (t < 0)$$

при некоторых $c > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Заметим, что при каждом $z \in \mathbb{C}$ с $x = \operatorname{Re} z > \alpha$ функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями

$$g(t) = e^{-tx} f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

интегрируема по лебеговой мере dt, так как $x - \alpha > 0$ и

$$|g(t)| \le c e^{-t(x-\alpha)} \ (t \ge 0), \quad g(t) = 0 \ (t < 0).$$

Преобразованием Лапласа функции f называется функция h со значениями

$$h(z) = \int\limits_0^\infty e^{-tz} f(t) dt \quad (\operatorname{Re} z > \alpha).$$

Преобразование Лапласа функции f связано с преобразованием Фурье функций со значениями $\exp(ty) \cdot f(t)$, $y = \operatorname{Im} z < -\alpha$. В этом можно убедиться, применяя формулу обращения (см. [45, гл. VIII, § 6]).

Для непрерывных операторных функций стандартным способом определяются собственный и несобственный римановы интегралы. Это позволяет определить преобразование Лапласа для операторной экспоненты U по аналогии с числовой функцией f.

При сформулированных в п. 4.10.2 условиях верно равенство

$$(zI + T)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-tz} U(t)\, dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

В самом деле, дифференцирование векторных функций F, G со значениями

$$F(t) = U(t)v, \quad G(t) = e^{-tz} U(t) \quad (t \ge 0,\ v \in X)$$

дает

$$\dot F(t) = -U(t) \cdot Tv, \quad \dot G(t) = -e^{-tz} U(t)v \cdot (zI + T)v.$$

Интегрируя, получаем

$$(zI + T)^{-1} w = \int\limits_0^\infty e^{-tz} U(t) w\, dt, \quad w = (zI + T)v.$$

Отсюда следует нужное равенство для $R(z, -T)$. Подробное доказательство этого равенства есть в [28, VIII.1; 149, XIII].

4.10.4. Теорема Стоуна

Если вместо банахова пространства X взять комплексное гильбертово пространство H, то для определения операторной экспоненты можно использовать интегралы по проекторным мерам.

1. Пусть A — плотное в H векторное подпространство, $T\colon A \to H$ — самосопряженный оператор и P — его спектральная мера. Тогда равенства

$$U(t) = e^{itT} = E(e^{itx}) = \int e^{itx}\,dP \quad (t \in \mathbb{R})$$

определяют экспоненту с коэффициентом iT. Операторы $U(t)$ образуют группу:

$$U(0) = I, \quad U(s+t) = U(s)\cdot U(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Функция U со значениями $U(t)$ сильно непрерывна. Наконец, $U(t)f \in A$ для всех $f \in A$ и $t \in \mathbb{R}$. Все эти свойства выводятся из свойств интегралов.

Упражнение. Проверить указанные свойства экспоненты.

Так как мнимая экспонента ограничена, то операторы $U(t)$ ограничены и определены на всем H. Кроме того,

$$U^*(t) = E^*(e^{itx}) = E(e^{-itx}) = U(-t) = U^{-1}(t).$$

Оператор $U(t)$ унитарный.

Нетрудно доказать, что

$$iTf = \lim_{t\to 0}[t^{-1}(e^{itT} - 1)f] \quad (f \in A).$$

В связи с этим iT называют *производящим оператором* группы $(U(t))$.

Упражнение. Доказать равенство для iTf.

2. Рассмотрим еще алгебру $\mathscr{B} = \mathscr{B}(H)$ ограниченных линейных операторов на H. Верна

Теорема Стоуна. *Пусть функция* $U\colon \mathbb{R} \to \mathscr{B}$ *сильно непрерывна, ее значения* $U(t)$ *унитарны и*

$$U(0) = I, \quad U(s+t) = U(s)\cdot U(t) \quad (s,t \in \mathbb{R}).$$

Тогда существует единственный плотно определенный самосопряженный оператор T *в* H *такой, что*

$$U(t) = e^{itT} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Доказательство теоремы Стоуна есть в [32, гл. 9, п. 13] и [148, п. 7.6].

Всё сказанное о рассматриваемом случае гильбертова пространства коротко выражают предложением: *унитарные операторы образуют однопараматрическую группу ессли они являются значениями некоторой мнимой операторной экспоненты.*

4.10.5. Эволюционные уравнения

Теорема Стоуна позволяет легко найти решение операторного дифференциального уравнения

$$\dot{U} = iT \cdot U \tag{1}$$

с производящим оператором iT, удовлетворяющее условию $U(0) = I$. Единственным таким решением является экспонента со значениями

$$U(t) = e^{itT} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1. В самом деле, используя определения и правила интегрирования по проекторной мере, получаем

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) = \lim_{\Delta\to 0}(\Delta^{-1}[U(t+\Delta) - U(t)]) &= \lim_{\Delta\to 0} E(\Delta^{-1}[e^{i(t+\Delta)x} - e^{itx}]) \\ = E(ixe^{itx}) = E(ix)\cdot E(e^{itx}) &= iT\cdot U(t) \quad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Кроме того, $U(0) = I$.

Пусть V — произвольное решение уравнения (1) и $V(0) = I$. Тогда $W = U - V$ — тоже решение и $W(0) = O$. Рассмотрим $f \in H$ и функцию $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со значениями

$$\varphi(t) = \|W(t)f\|^2 = W(t)f \cdot W(t)f \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\Delta^{-1}[\varphi(t+\Delta)-\varphi(t)]\\&=W(t+\Delta)f\cdot\Delta^{-1}[W(t+\Delta)-W(t)]f+\Delta^{-1}[W(t+\Delta)-W(t)]f\cdot W(t)f\end{aligned}$$

при $\Delta \neq 0$. Поэтому

$$\dot\varphi = 2\,\mathrm{Re}[i(g\cdot Tg)], \quad g = W(t)f \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Так как оператор T самосопряженный, то произведение $g\cdot Tg$ вещественное и $\dot\varphi = 0$ тождественно. Значит, φ постоянная. По условию $\varphi(0)=0$. Следовательно, $\varphi(t)=0$ и $U(t)-V(t)=W(t)=O$ для каждого $t\in\mathbb{R}$. Нужное решение единственное.

Заметим, что так как $U(A)\subseteq A$, то правая часть уравнения (1) определена на $A=\mathrm{Dom}\,T$. Пусть $f\in A$ и $u(t)=U(t)f$. Тогда операторное уравнение (1) эквивалентно векторному уравнению

$$\dot u(t) = iT\cdot u(t), \tag{2}$$

а условие $U(0)=I$ — условию $u(0)=f$.

Пример 1. Пусть $H=\mathscr{L}^2(\mathbb{R},dx)$ и T — оператор умножения на независимую переменную x:

$$Tf = x\cdot f \quad (f, xf\in H).$$

Тогда, как легко проверить,

$$e^{itT}f = e^{itx}f \quad (t\in\mathbb{R},\ f\in H).$$

Экспонента e^{itT} является оператором умножения.

Пример 2. Пусть $H=\mathscr{L}^2(\mathbb{R},dx)$ и T — дифференциальный оператор:

$$Tf = i^{-1}f' \quad (f, f'\in H).$$

Тогда, как легко проверить,

$$e^{itT}f(x) = f(x+t) \quad (t, x\in\mathbb{R},\ f\in H).$$

Экспонента e^{itT} является оператором сдвига.

Упражнение. Проверить равенства в примерах 1 и 2.

2. Используя операторные экспоненты, можно решить задачу Коши для широкого класса эволюционных уравнений

$$\dot U(t) = T(t)\cdot U(t) \tag{3}$$

с переменными операторными коэффициентами $T(t)$ (см. [32, гл. 14] и [5, п. 4.12]).

Рассмотрим банахово пространство Y, отрезок $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, плотное в Y векторное подпространство A и семейство замкнутых линейных операторов $T(t)\colon A \to Y$ $(t \in [0,1])$. Перепишем уравнение (3) в векторной форме

$$\dot{u}(t) = T(t) \cdot u(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{4}$$

Здесь $u(t) = U(t) \cdot f$ для вектора f из общей области определения операторов правой части уравнения (3). Иногда ищется решение уравнения (4) только для $t \neq 0$. Это позволяет находить решения, удовлетворяющие условию $u(0) = f$ при любом $f \in Y$, не обязательно из области определения рассматриваемых операторов.

Сформулируем теорему о решении задачи Коши для уравнения (4).

Пусть $f \in Y$, $T(0) = T$ и $\mathscr{R}(t) = \mathscr{R}(T(t))$, $R(\lambda, t) = R(\lambda, T(t))$ $(\lambda \in \mathscr{R}(T(t))$. Определим сумму F *итерированных ядер* K_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$K_1(t,r) = [T(t) - T(r)]e^{(t-r)T(r)} \ (r \leq t), \quad K_1(t,r) = 0 \ (t < r);$$

$$K_n(t,r) = \int\limits_0^1 K_1(t,s) \cdot K_{n-1}(s,r)\, ds \quad (n \geq 2);$$

$$F(t,s) = \sum K_n(t,s) \quad (n \geq 1).$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения.

1) $Z = \{0\} \cup \{z : |\arg z| < \theta\} \subseteq \mathscr{R}(t)$ при каждом $t \in [0,1]$ и некотором $\theta > 2^{-1}\pi$.

2) $R(z, \cdot)$ сильно непрерывна равномерно по z на каждом компакте в секторе Z и существуют $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\|R(z,t)\| \leq \alpha(|z| - \beta)^{-1} \quad (z \in Z,\ |z| > \beta,\ t \in [0,1]).$$

3) При некотором $\gamma > 0$ и всех $r, s, t \in [0,1]$ верно неравенство

$$\|T(t) \cdot T^{-1}(r) - T(s) \cdot T^{-1}(r)\| \leq \gamma |t - s|.$$

Заметим, что условие $0 \in \mathscr{R}(t)$ обеспечивает существование обратного оператора $T^{-1}(r) = R(0,r)\colon Y \to A$. Ограниченность оператора $S(t,r) = T(t) \cdot T^{-1}(r)\colon Y \to Y$ следует из теоремы о замкнутом графике. Условие 3 означает, что функция $S(t, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица равномерно по r на $[0,1]$.

Теорема. *При сделанных предположениях равенство*

$$u(t) = e^{tT} f + \int\limits_0^t e^{(t-s)T(s)} F(s,0) f\, ds \tag{5}$$

определяет единственное решение уравнения (4) *при* $0 < t \leq 1$, *удовлетворяющее условию* $u(0) = f$.

Подробное доказательство этой теоремы есть в [32, гл. 14, п. 5]. Оно основано на методе Фредгольма и состоит в обосновании перехода от дифференциального уравнения

$$\dot{u}(t) = T(t) \cdot u(t) = T \cdot u(t) + (T(t) - T) \cdot u(t)$$

к интегральному уравнению

$$u(t) = e^{tT} f + \int\limits_0^t e^{(t-s)T} (T(s) - T) u(s\,) ds.$$

Это уравнение решают методом последовательных приближений и получают равенство (5).

3. Различные постановки и способы решения абстрактной задачи Коши описаны в [116, гл. 23, § 3] и в [149].

В [43, гл. 10] подробно разбираются стохастические эволюционные дифференциальные и интегральные уравнения. Решаются, в частности (п. 4.3), прямая и обратная задачи Коши для параболических уравнений Ито в пространствах Соболева.

Вопросы корректности задачи Коши и других краевых задач для операторных уравнений подробно рассматриваются в [31]. Там описываются также различные методы регуляризации и исследуется слабая корректность.

В [5, п. 4.8] кроме однородного рассматривается неоднородное уравнение $\dot{u} = Tu + v$. Задача Коши решается и для случая, когда начальное условие $u(0) \notin \operatorname{Dom} T$ (теорема 4.8.3 и ее следствие). Там же (п. 4.9) формулируется критерий управляемости системы, описываемой данным уравнением. И подробно (п. 4.12) рассматриваются эволюционные уравнения с переменным операторным коэффициентом в гильбертовых пространствах. Выделяются компактные полугруппы и полугруппы Гильберта — Шмидта, задающие такие коэффициенты.

В [149, гл. 4] рассматривается *равномерная корректность* абстрактной задачи Коши для *неявного* операторного уравнения $B\dot{u}(t) = Au(t)$ в банаховом пространстве. Там же (гл. 5) подробно доказывается теорема о решении задачи Коши для уравнения $\dot{u} = Tu + v$ и выводится интегральная формула. Доказывается (гл. 9) теорема о единственности слабых решений задачи Коши для уравнения $\ddot{u} = Tu$ с симметрическим плотно определенным оператором T в гильбертовом пространстве.

В [75, гл. 16] описываются корректные постановки задач Коши, связанные с физикой. С помощью теоремы Хилле — Иосиды доказывается, в частности, корректность операторной формы уравнений Максвелла для вакуума и уравнения переноса нейтронов в слое.

В [2] описываются нестандартные методы решения некоторых уравнений математической физики. В главе 1 подробно описывается пример с уравнением Ван-Дер-Поля (п. 1.5). Там показывается, что введение бесконечно малых чисел позволяет хорошо объяснить возможные формы предельного цикла. В главе 4 большое внимание уделяется стохастическим дифференциальным уравнениям. Рассматривается, в частности, стохастическая модификация уравнения Навье — Стокса (п. 4.7). В главе 6 обсуждаются вопросы теории дифференциальных операторов. Много внимания уделяется нестандартному подходу к уравнению Больцмана (п. 6.5). Среди прочих утверждений доказывается теорема существования в пространственно неоднородном случае. В главе 7 изучаются стохастическая эволюция некоторых дифференциальных систем на решетках и специальные полугруппы операторов. Заключительный п. 7.5 посвящен описанию связи квантовой теории поля со стохастическими моделями для полимеров. Вводится дискретный оператор Лапласа с неймановскими граничными условиями, определяющий некоторый марковский процесс.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе доказываются несколько теорем о неподвижных и седловых точках. Более общие формулировки и следствия этих теорем есть в книгах [16, 33, 36, 124]. Кроме того, рассматриваются нелинейные монотонные операторы. Они подробно описаны в [21]. Отдельный пункт посвящен теории степени отображения. Введение в нее есть в [111].

5.1. Неподвижные точки

Теоремы о неподвижных точках применяются при решении операторных уравнений.

5.1.1. Теорема Брауэра

Эта теорема служит основой многих теорем о неподвижных точках.

1. Рассмотрим преобразование $f\colon E \to E$ множества E. Каждый элемент $x \in E$, для которого $f(x) = x$, называется *неподвижной точкой* преобразования f. Таким образом, по определению, неподвижными точками являются решения уравнения $f(x) = x$. Теоремы о неподвижных точках можно формулировать как теоремы о существовании и единственности решений таких уравнений. Классическим примером служит теорема о сжатиях для метрических пространств. Условимся говорить, что множество A в топологическом пространстве U обладает *FP-свойством,* если для каждого непрерывного преобразования A существует неподвижная точка.

Пример (теорема Брауэра для отрезка). Рассмотрим непрерывное преобразование φ отрезка $E = [-1, 1]$ и предположим, что $\varphi(x) \neq x$ для всех $x \in E$. Определим функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(x) = (x - \varphi(x))/|x - \varphi(x)| \quad (x \in E).$$

Функция φ непрерывна вместе с f и отображает отрезок $E = [-1, 1]$ на его границу $\partial E = \{-1, 1\}$: если $\varphi(x) < x$, то $f(x) = -1$, а если $\varphi(x) > x$, то $f(x) = 1$. Это невозможно, так как образ связного множества при непрерывном отображении тоже должен быть связен. Следовательно, непрерывных преобразований φ отрезка $E = [-1, 1]$, не имеющих неподвижных точек, не существует.

2. Верна классическая

Теорема Брауэра. *Замкнутый единичный шар $B = \{x : \|x\| \le 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ обладает FP-свойством.*

Доказательство проводится в несколько этапов [28, гл. 5, п. 12].

Предварительный этап. Докажем лемму о равенстве нулю специального определителя. В дальнейшем $x_0 = t$, $x_1, \ldots, x_n$ обозначают вещественные переменные, а f_i, f_{ij} $(0 \le i, j \le n)$ — производные функции $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ по этим переменным (штрихи опущены).

Рассмотрим гладкую (имеющую непрерывные вторые производные) функцию $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ и определители

$$D_i = |f_0 \ldots \tilde{f}_i \ldots f_n|, \quad C_{ij} = |f_{ij} f_0 \ldots \tilde{f}_i \ldots \tilde{f}_j \ldots f_n|$$

$n \times n$-матриц, столбцами которых служат выписанные частные производные с указанными волной исключениями производных f_i и f_j. Заметим, что $C_{ij} = C_{ji}$.

Лемма. $\sum\limits_{1 \le i \le n} (-1)^i D_i' = 0$.

□ Дифференцируя D_i, получаем равенство $D_i' = \sum\limits_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum\limits_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij}$. Откуда $(-1)^i D_i' = \sum\limits_j (-1)^{i+j} \sigma_{ij} C_{ij}$, где $\sigma_{ij} = \operatorname{sign}(i - j)$ и $S = \sum\limits_i (-1)^i D_i' = \sum\limits_i \sum\limits_j (-1)^{i+j} \sigma_{ij} C_{ij}$. Так как $(-1)^{i+j} = (-1)^{j+i}$, $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$, то $S = -S$ и $S = 0$. ■

Этап I. Возьмем сначала гладкое преобразование $\varphi\colon B^n \to B^n$. Допустим, что $\varphi(x) \ne x$ для всех $x \in B^n$. Рассмотрим квадратное уравнение $\|x + z \cdot (x - \varphi(x))\|^2 = 1$ или эквивалентное

$$\|x\|^2 + 2z\langle x, x - \varphi(x)\rangle + z^2 \|x - \varphi(x))\|^2 = 1.$$

Пусть $z = z(x)$ — наибольший корень этого уравнения

$$z = \frac{\langle x, x - \varphi(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - \varphi(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - \varphi(x))\|^2}}{\|x - \varphi(x))\|^2}.$$

Так как по предположению $\varphi(x) \neq x$ для всех $x \in B^n$, то дискриминант $d = \sqrt{\langle x, \varphi(x) - x\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - \varphi(x))\|^2} > 0$. В самом деле, если $\|x\| \neq 1$, то это очевидно: если $\|x\| = 1$, то $\langle x, x - \varphi(x)\rangle \neq 0$, так как иначе $\varphi(x) = x$, что противоречит предположению. Действительно, пусть $\sum x_i^2(x_i - \varphi(x_i))^2 = 0$, $x_j \neq 0$, $x_k = 0$. Тогда $\varphi(x_j) = x_j$, $\sum \varphi^2(x_j) = \sum x_j^2 = 1$, $\sum \varphi^2(x_k) = 0$, так как $\sum \varphi^2(x_i) \leq 1$, $\varphi(x_k) = 0 = x_k$ и $\varphi(x) = x$. Таким образом, $d \neq 0$.

Заметим, что $z(x) > 0$ и функция z от x гладкая. Кроме того, $z(x) = 0$ при $\|x\| = 1$, иначе из уравнения для z следовало бы, что $0 < 2(1 - \langle x, \varphi(x)\rangle + z\|x - \varphi(x)\|^2 = 0$, так как $|\langle x, \varphi(x)\rangle| \leq \|x\| \cdot \|\varphi(x)\| \leq 1$.

Определим функцию $f\colon \mathbb{R} \times B^n \to \mathbb{R}^n$ равенством $f(t, x) = x + tz(x)(x - \varphi(x))$ ($t = x_0 \in \mathbb{R}$; $x \in B^n$). Функция f гладкая вместе с z и φ. Для каждого $t = x_0 \in \mathbb{R}$ верно равенство $f_0(t, x) = z(x)(x - \varphi(x)) = 0$ ($\|x\| = 1$), так как $z(x) = 0$ при $\|x\| = 1$. Кроме того, $f(0, x) = x$, $\|f(1, x)\| = 1$ ($x \in B^n$). Рассмотрим $D_0(t, x) = |f_1(t, x) \dots f_n(t, x)|$ и его интеграл $I(t) = \int\limits_{B^n} D_0(t, x)\, dx$. Заметим, что $D_0(t, x) \equiv 1$ и $I(0)$ равно объему шара B^n, поэтому $I(0) \neq 0$. А так как $\|f(1, x)\| \equiv 1$, то $D_0(1, x) \equiv 0$, и поэтому $I(1) = 0$. Покажем, что $I'(t) \equiv 0$, и поэтому функция $I(t)$ равна постоянной. Это будет противоречить $I(0) \neq I(1)$.

Возьмем производную $I'(t) = \int\limits_{B^n} D_0'(t, x)\, dx$. Из леммы следует, что

$$I'(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+1} F_i(t), \quad F_i(t) = \int\limits_{B^n} D_i'(t, x)\, dx.$$

Пусть: $s_i = (x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_n)$, $B_i^{n-1} = \{s_i : \|s_i\| \leq 1\}$, $a_i = (1 - \|s_i\|^2)^{1/2}$, $b_i = -a_i$. Заметим, что $\|(a_i, s_i)\| = \|(b_i, s_i)\| = (1 - \|s_i\|^2 + \|s_i\|^2)^{1/2}$ =1. Из общей формулы Стокса следует, что при соответствующем выборе ориентаций для B^n и B_i^{n-1} интегралы $F_i(t)$ можно заменить разностями $H_i(t) - G_i(t)$, где

$G_i(t) = \int\limits_{B_i^{n-1}} D_i(t, a_i, s_i)\, ds_i$, $H_i(t) = \int\limits_{B_i^{n-1}} D_i(t, b_i, s_i)\, ds_i$. А так как $\|(a_i, s_i)\| = \|(b_i, s_i)\| = 1$, то $f_0(t, a_i, s_i) = f_0(t, b_i, s_i) = 0$, и поэтому $D_i(t, a_i, s_i) = D_i(t, b_i, s_i) = 0$. Следовательно, $F_i(t) = H_i(t) - G_i(t) = H_i(t) = G_i(t) = 0$ $(1 \le i \le n,\ t \in \mathbb{R})$ и $I'(t) \equiv 0$.

Этап II. Пусть теперь $\varphi\colon B^n \to B^n$ — произвольное непрерывное отображение. По теореме об аппроксимации [63, гл. 1, § 1, предложение 8] следует, что существует равномерно сходящаяся к φ последовательность гладких функций $\varphi_n\colon B^n \to B^n$. По доказанному, существует последовательность точек $y_n \in B^n$ таких, что $\varphi_n(y_n) = y_n$. А так как B^n — компакт, то существует подпоследовательность $y_{n(k)} \to y \in B^n$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n(k)}(x) = \varphi(x)$ равномерно по B^n, то $\varphi(y) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n(k)}(y_{n(k)}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = y$ и $\varphi(y) = y$. Теорема Брауэра доказана.

Упражнение. Проверить равенства $F_i(t) = H_i(t) - G_i(t)$.

3. В [69, гл. 2, п. 2] теорема Брауэра выводится из теоремы о существовании нуля у непрерывного векторного поля на n-мерном шаре. Данное там доказательство этой теоремы тоже имеет аналитический характер. В [16, гл. 2, п. 2] дано геометрическое доказательство теоремы Брауэра.

В [68, гл. 8] доказывается эквивалентность теоремы Брауэра неравенству Фань Цзы. А в главе 9 теорема Брауэра выводится из леммы Кнастера — Куратовского — Мазуркевича.

В 5.5.1, 5 теорема Брауэра будет легко получена из леммы о степени отображения.

Доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций нескольких переменных полиномами Берштейна с оценкой погрешности есть в [92]. Теореме Стоуна и другим обобщениям классических теорем Вейерштрасса посвящена книга [46].

4. Из теоремы Брауэра вытекает много следствий. Отметим одно из них.

Следствие. *Топологическое пространство A, гомеоморфное шару B^n, обладает FP-свойством.*

□ Пусть $f\colon A \to A$ непрерывна. Докажем, что существует $x_0 \in A$ такая, что $f(x_0) = x_0$. Рассмотрим гомеоморфизм $h\colon B^n \to A$ и отображение $g = h^{-1} \circ f \circ h$. Отображение g непрерывно и $g\colon B^n \to B^n$. По теореме Брауэра существует $y_0 \in B^n$ такая, что $g(y_0) = y_0$. Так как $h \circ g = f \circ h$, то $h(g(y_0)) = f(h(y_0))$. Пусть $h(y_0) = x_0$. Тогда $f(x_0) = h(y_0) = x_0 \in A$ и x_0 — неподвижная точка для f. ■

5.1.2. Теоремы Тихонова и Шаудера

Эти теоремы обобщают теорему Брауэра. Множества, для которых доказывается существование неподвижной точки, предполагаются непустыми.

1. Существенным обобщением теоремы Брауэра является

Теорема Тихонова. *Выпуклое компактное множество в мультинормированном пространстве обладает FP-свойством.*

Эта теорема доказана в [28, гл. 5, п. 10]. Доказательство основывается на ряде предварительно установленных свойств выпуклых множеств и мультинорм.

Из теоремы Тихонова следует

Теорема Шаудера. *Непрерывно преобразование выпуклого замкнутого множества в банаховом пространстве, обладающее относительно компактным образом, имеет неподвижную точку.*

□ Пусть $f\colon A \to A$ — непрерывное преобразование выпуклого замкнутого множества A в банаховом пространстве E такое, что замыкание $B = \overline{f(A)}$ образа $f(A)$ компактно. Рассмотрим замкнутую выпуклую оболочку C множества B (пересечение всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих B). По теореме Мазура [28, гл. 5, п. 2] множество $C \subseteq A$ компактно. Сужение f на C удовлетворяет условиям теоремы Тихонова и поэтому имеет неподвижную точку. ■

Следствие. *Выпуклое компактное множество в банаховом пространстве обладает FP-свойством.*

□ Если вместо замкнутости предположить компактность рассматривающегося при доказательстве теоремы Шаудера множества A, то его образ $f(A) \subseteq A$ будет относительно компактным и для непрерывного преобразования $f\colon A \to A$ будут выполнены условия теоремы. ■

Подробные доказательства теорем Мазура, Тихонова и Шаудера есть в [16]. Там же описывается их применение к решению нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Рассматриваются интегралы функций на метрических компактах по мере, а также оптимизационные задачи, связанные с введением управления в уравнения.

Геометрическое доказательство теоремы Шаудера есть в [33, гл. 16]. Там тоже описываются ее применения к решению дифференциальных и интегральных уравнений.

2. Сформулируем две полезные теоремы о неподвижных точках для отображений $f\colon \bar{A} \to E$ замыкания $\bar{A}$ ограниченного выпуклого открытого непустого множества A в банаховом пространстве E.

Теорема 1. *Если f компактно и $f(\partial A) \subseteq A$, то f имеет неподвижную точку в A.*

$\square$ Благодаря гомеоморфности переносов E можно считать, что $0 \in A$. Пусть $p(x) = 1$ $(x \in \bar{A})$, $p(x) = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in A\}$ $(x \notin \bar{A})$ и $g(x) = p(x)x$ $(x \in E)$. Функция $g\colon E \to E$ непрерывна, $g(E) = \bar{A}$ и $g(x) = x$ $(x \in \bar{A})$. Возьмем шар $B = \bar{B}(0, r)$, содержащий $\bar{A} \vee f(\bar{A})$, и сужение h на него композиции $f \circ g\colon E \to E$. Это сужение является компактным преобразованием B и по теореме Шаудера имеет неподвижную точку $h(b) = b \in B$. Заметим, что если $x \notin A$, то $g(x) \in \partial A$, а по условию $h(x) = f(g(x)) \in A$ и $h(x) \neq x$, Следовательно, $b \in A$. $\blacksquare$

Предположим дополнительно, что $0 \in A$.

Теорема 2. *Если f непрерывно и $\|x - f(x)\|^2 \geq \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$ $(x \in \partial A)$, то f имеет неподвижную точку в A.*

Доказательство есть в [145].

3. Рассмотрим нормированное пространство E, множество $A \subseteq E$ и отображение $f\colon A \to E$. По аналогии с линейными операторами число λ и вектор $x \in A$, для которых верно равенство $f(x) = \lambda x$, называют *собственным числом* и *собственным вектором* оператора f. Собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = 1$, являются неподвижными точками оператора f. Непрерывный оператор, переводящий ограниченные множества в относительно компактные, называется *компактным.*

Пусть $B = \bar{B}(0, r)$ и $S = S(0, r)$ — замкнутый шар и сфера радиуса $r > 0$ в пространстве E.

Лемма. *Если у компактного оператора $g\colon B \to E$ нет собственных векторов $x \in S$, соответствующих собственным числам $\lambda > 1$, то g имеет неподвижную точку.*

□ Определим преобразование $h\colon B \to B$ равенствами

$$h(x) = g(x)\ (g(x) \in B), \quad h(x) = r \cdot g(x)/\|g(x)\|\ (g(x) \notin B).$$

Оператор h компактен вместе с g. Действительно, $h = p \circ g$, где отображение $p\colon E \to E$ определяется равенствами

$$p(y) = y\ (y \in B), \quad p(y) = r \cdot y/\|y\|\ (y \notin B).$$

Так как p непрерывно, а g компактно, то их композиция компактна: $X \subseteq B$ ограничено, $Y = g(X)$ относительно компактно, $\bar{Y}$ и $p(\bar{Y})$ компактны, $h(X) = p(Y) \subseteq p(\bar{Y})$ относительно компактно.

По теореме Шаудера h имеет неподвижную точку $x_0 \in B$. Докажем, что $g(x_0) \in B$ и, значит, $g(x_0) = h(x_0) = x_0$. Предположим, что $g(x_0) \notin B$ и $h(x_0) = (r/\|g(x_0)\|)g(x_0)$. Так как $g(x_0) \notin B$, то $\|g(x_0)\| > r$, $\lambda = \|g(x_0)\|/r > 1$ и $g(x_0) = \lambda h(x_0) = \lambda x_0$ при $\lambda > 1$. А так как $\|x_0\| = \|h(x_0)\| = r \cdot \|g(x_0)\|/\|g(x_0)\| = r$ и $x_0 \in S$, то это противоречит условию. ■

Рассмотрим компактный оператор $g\colon B \to E$. Из леммы вытекает

Следствие. *Если для каждого вектора $x \in S$ существует функционал $x^* \in E^*$ такой, что $x^*(x) > 0$ и $x^*(g(x)) \le x^*(x)$, то оператор g имеет неподвижную точку.*

□ Пусть $x \in S$ и $g(x) = \lambda x$. Тогда $\lambda x^*(x) = x^*(g(x)) \le x^*(x)$, и так как $x^*(x) > 0$, то $\lambda \le 1$. Значит, g имеет неподвижную точку. ■

4. Рассмотрим компактный оператор $f\colon E \to E$. Из доказанной леммы вытекает

Теорема Лере — Шаудера. *Если у компактного оператора f множество собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda > 1$, ограничено, то f имеет неподвижную точку.*

□ Предположим, что $\|x\| \le c$ для всех $x \in E$ таких, что $f(x) = \lambda x$ и $\lambda > 1$. Возьмем $r > c$ и рассмотрим сужение g преобразования f на шар $B = \bar{B}(0, r)$. По лемме g имеет неподвижную точку $x_0 \in B$. Следовательно, $f(x_0) = g(x_0) = x_0$. ■

Следствие. *Если множество решений семейства уравнений $\alpha f(x) = x$ $(0 < \alpha < 1)$ с компактным оператором f ограничено, то уравнение $f(x) = x$ имеет решение.*

□ Равенство $\alpha f(x) = x$ при $0 < \alpha < 1$ эквивалентно равенству $f(x) = \lambda x$ при $\lambda > 1$. Утверждение поэтому следует из теоремы. ■

Замечание. Ограниченность нужного множества решений рассматриваемого семейства уравнений часто удается проверить с помощью различных оценок. Такой метод доказательства существования решений нелинейных операторных уравнений эффективно используется.

В [68] для операторов в гильбертовых пространствах вводится *тангенциальное условие*, при котором доказывается ряд теорем о решениях включений и неподвижных точках. В частности, доказывается модификация теоремы Лере — Шаудера и отмечаются два ее следствия (гл. 9).

5. В теореме Тихонова используются выпуклые компактные множества. Важную характеристику этих множеств дает теорема Крейна — Мильмана.

Рассмотрим непустое выпуклое множество A в отделимом локально выпуклом пространстве E. Точка $c \in A$ называется *крайней точкой* A, если она не является внутренней ни для какого отрезка с концами в A.

Пример. В евклидовом пространстве $E = \mathbb{R}^3$ крайними точками куба $C \subseteq E$ являются его вершины. А крайними точками шара $B \subseteq E$ являются точки ограничивающей его сферы $S = \partial B$. Открытое множество $U \subseteq E$ не имеет крайних точек. Куб C и шар B равны замыканиям выпуклых оболочек своих крайних точек.

Теорема Крейна — Мильмана. *Каждый непустой выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве имеет крайние точки и равен замыканию их выпуклой оболочки.*

Доказательство есть в [32, гл. 12, п. 1] и в [124], где теореме Крейна — Мильмана и ее приложениям посвящена гл. 10. Там есть и частичное обращение теоремы: *если K — компакт, замыкание A выпуклой оболочки которого тоже компактно, то каждая крайняя точка A принадлежит K.* Отдельные параграфы посвящены связям теоремы Крейна — Мильмана с теоремами Бохнера и Планшереля о преобразованиях Фурье — Стилтьеса и Фурье — Планшереля.

5.2. Седловые точки

Теоремы о седловых точках выводятся из теорем о неподвижных точках для мультифункций. Свойства мультифункций, связанные с непрерывностью, подробно описаны в [69, гл. 3], а свойства, связанные с измеримостью — в [16, гл. 1].

5.2.1. Теорема Какутани

Эта теорема выводится из теоремы Шаудера и обобщает ее.

1. Рассмотрим банахово пространство E, выпуклый компакт $B \subseteq E$, класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(B)$ всех непустых выпуклых компактных частей B и отображение $F\colon B \to \mathscr{K}$. Будем называть F *мультипреобразованием* или *мультиоператором* на B: каждой точке $x \in B$ ставится в соответствие выпуклое компактное множество $Y = F(x) \subseteq B$. Множество $Y = F(x)$ назовем *мультиобразом точки* x, а объединение $F(A) = \cup F(x)$ $(x \in A)$ — *мультиобразом множества* $A \subseteq B$. Будем употреблять также термин *мультифункция.*

Пример. $E = \mathbb{R}^n$, $B = \bar{B}(0,1)$, $F(x) = \bar{B}(x/2, 1/2)$.

Множество V, содержащее некоторое открытое множество, которое содержит Y, называется окрестностью множества Y. Непрерывность мультифункций определяется по аналогии с непрерывностью функций. Говорят, что мультифункция F *непрерывна в точке* x, если для каждой окрестности V образа $y = F(x)$ существует окрестность U точки x такая, что $F(U) \subseteq V$. Непрерывность на множестве означает непрерывность в каждой его точке. По аналогии с замкнутостью линейных операторов определяется замкнутость мультиоператоров. Говорят, что мультиператор F *замкнут*, если из $x_n \to a$, $y_n \in F(x_n)$, $y_n \to b$ следует $b \in F(a)$ $(a, b, x_n, y_n \in B)$.

Замечание. В определениях не использовалась выпуклость или компактность. Эти определения обобщаются на более широкие классы множеств.

2. Следующая теорема является аналогом теоремы о замкнутом графике для линейных операторов.

Теорема. *Мультиоператор непрерывен ессли он замкнут.*

☐ 1) Докажем, что если мультиоператор F не замкнут, то он разрывен. Пусть существуют $a, d, x_n \in B$ и $y_n \in F(x_n)$ такие, что $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $b \notin F(a)$. Так как $F(a)$ компактно и $b \notin F(a)$, то существуют непересекающиеся окрестность V множества $F(a)$ и шар $B(b, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. А так как $y_n \to b$, то $y_n \in B(b, \varepsilon)$ для всех $n \geq n(1)$ при некотором $n(1)$ и, следовательно, $F(x_n) \nsubseteq V$ $(n \geq n(1))$. Вместе с тем, $x_n \to a$ и для каждой окрестности U точки a существует номер $n(2)$ такой, что $x_n \in U$ при всех $n \geq n(2)$. Поэтому $F(u) \nsubseteq V$ для $u = x_{n(0)} \in U$ при $n(0) = n(1) \vee n(2)$. Мультифункция F имеет разрыв в точке a.

2) Докажем теперь, что если F замкнут, то F непрерывен. Возьмем точку $a \in B$, открытую окрестность V мультиобраза $F(a)$ и рассмотрим множество $U = \{x : F(x) \subseteq V\}$. Так как $F(a) \subseteq V$, то $a \in U$. Убедимся в том, что множество U открыто. Рассмотрим дополнение $U^c = \{x : F(x) \nsubseteq V\}$. Заметим, что $F(x) \nsubseteq V$ равносильно $F(x) \cap V^c \neq O$. Пусть $x_n \in U^c$, $x_n \to x \in B$. Возьмем $y_n \in F(x_n) \cap V^c$. Так как V открыто, то V^c замкнуто и, как замкнутая часть компакта B, компактно. Следовательно, существует подпоследовательность $(y_{r(n)})$ последовательности (y_n), сходящаяся к некоторой точке $y \in V^c$. А так как $x_n \to x$, то $x_{r(n)} \to x$. Если мультиоператор F замкнут, то из $x_{r(n)} \to x$, $y_{r(n)} \in F(x_{r(n)})$ и $y_{r(n)} \to y$ следует, что $y \in F(x)$. Поэтому $y \in F(x) \cap V^c$, $F(x) \nsubseteq V$ и $x \in U^c$. Значит, U^c замкнуто, U открыто и является окрестностью точки a. Для каждой открытой окрестности V мультиобраза $F(a)$ (и, следовательно, для каждой его окрестности) существует окрестность U точки a такая, что $F(U) \subseteq V$. Мультиоператор F непрерывен. ■

3. Назовем x *неподвижной точкой* F, если $x \in F(x)$.

Теорема Какутани. *Непрерывное мультипреобразование выпуклого компакта в банаховом пространстве имеет неподвижную точку.*

☐ Естественно свести дело к теореме Шаудера, связав мультифункцию F с однозначными функциями. Доказательство проводится в три этапа.

1) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим конечное семейство шаров $B_{ni} = B(x_{ni}, 1/n)$, покрывающее B. Определим положительную непрерывную функцию $\varphi_{ni} \colon B \to [0, 1]$ равенством $\varphi_{ni}(x) = 0 \vee (1/n - \|x - x_{ni}\|)$ $(x \in B)$. Заметим, что $\varphi_{ni}(x) > 0$ при $x \in B_{ni}$

и $\varphi_{ni} = 0$ при $x \notin B_{ni}$. Так как $B \subseteq \cup_i B_{ni}$, то $\sum\limits_i \varphi_{ni}(x) > 0$ $(x \in B)$. Равенство $\alpha_{ni}(x) = \big(\sum\limits_j \varphi_{nj}(x)\big)^{-1}\varphi_{ni}(x)$ $(x \in B)$ определяет положительную непрерывную функцию $\alpha_{ni}\colon B \to [0,1]$. Ясно, что $\sum\limits_i \alpha_{ni}(x) = 1$ $(x \in B)$. Функции α_{ni} составляют непрерывное разбиение единицы, вписанное в покрытие (B_{ni}). Из определений следует равенство $\alpha_{ni}(x) = 0$ при $x \notin B_{ni}$.

2) Рассмотрим точку $y_{ni} \in F(x_{ni})$ и функцию $f_n\colon B \to E$ со значениями $f_n(x) = \sum\limits_i \alpha_{ni}(x) y_{ni}$. Так как $F(x_{ni}) \subseteq B$ и B выпукло, то $f_n(x) \in B$. А так как функции α_{ni} непрерывны, то f_n является непрерывным преобразованием B. Из теоремы Шаудера следует, что $f_n(x_n) = x_n$ для некоторой точки $x_n \in B$.

3) Так как B компактно, то существует подпоследовательность $(x_{r(n)})$ последовательности (x_n), сходящаяся к некоторой точке $a \in B$. Докажем, что $a \in F(a)$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и открытую окрестность $V(\varepsilon) = \{z \in B : d(z, F(a)) < \varepsilon\}$ образа $F(a)$. По определению, $d(z, F(a)) = \min \|z - y\|$ $(y \in F(a))$. Так как $F(a)$ компактно, то этот минимум достигается. Множество $V(\varepsilon)$ выпукло. В самом деле, если $z_i \in V(\varepsilon)$, то $\|z_i - y_i\| = d(z_i, F(a)) < \varepsilon$ для некоторой $y_i \in F(a)$ и

$$\Big\|\sum \lambda_i z_i - \sum \lambda_i y_i\Big\| \le \sum \lambda_i \|z_i - y_i\| < \sum \lambda_i \varepsilon = \varepsilon$$

при $\lambda_i \ge 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Так как $F(a)$ выпукло, то $\sum \lambda_i y_i \in F(a)$. Значит, $d\left(\sum \lambda_i z_i, F(a)\right) < \varepsilon$ и $\sum \lambda_i z_i \in V(\varepsilon)$. Заметим, что замыкание $\bar V(\varepsilon) = \{z \in B : d(z, F(a)) \le \varepsilon\}$ тоже выпукло.

По условию мультифункция F непрерывна и существует $\delta > 0$ такое, что $F(U) \subseteq V(\varepsilon)$ для $U = B(a, \delta)$. Так как $x_{r(n)} \to a$, то $x_{r(n)} \in B(a, \delta/2)$ для всех $n \ge n(1)$ при некотором $n(1)$. Вместе с тем, $x_n \in B(x_{ni}, 1/n)$ когда $\alpha_{ni}(x) > 0$. Следовательно,

$$\|x_{ni} - a\| \le \|x_{ni} - x_{r(n)}\| + \|x_{r(n)} - a\| \le 1/n + \delta/2 < \delta$$

при $n \ge n(0) \ge n(1) + 2/\delta$, и поэтому $x_{ni} \in U$, $y_{ni} \in F(x_{ni}) \subseteq V(\varepsilon) \subseteq \bar V(\varepsilon)$ при $n \ge n(0)$. Так как $\bar V(\varepsilon)$ выпукло и $\alpha_{ni}(x) \ge 0$, $\sum\limits_i \alpha_{ni}(x) = 1$, $y_{ni} \in \bar V(\varepsilon)$, то $x_n = f(x_n) = \sum\limits_i \alpha_{ni}(x_n) y_{ni} \in \bar V(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Значит, предельная точка a принадлежит каждому множеству $\bar V(\varepsilon)$ и, следовательно, $a \in F(a)$. ■

Упражнение. Доказать, что $F(a) = \cap \bar V(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Замечание. Множество, состоящее из одной единственной точки, выпукло и компактно. Поэтому обычные однозначные функции удовлетворяют данному определению мультифункций. Теорема Какутани обобщает следствие теоремы Шаудера в п. 5.1.2, 1.

В [66, гл. 9] для мультиоператоров в гильбертовых пространствах доказываются модификация теоремы Какутани и обобщение Фань Цзы. Они выводятся из основной теоремы о существовании решений для нелинейных включений.

5.2.2. Теорема Неймана

Эта теорема формулирует достаточные условия существования седловой точки для функций двух векторных переменных.

1. Рассмотрим вещественные банаховы пространства X и Y, выпуклые компактные множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, непрерывную функцию $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$. По теореме Тихонова произведение $A \times B$ компактно вместе с A, B. Оно также выпукло.

Лемма 1. *Декартово произведение выпуклых множеств выпукло.*

$\square$ Рассмотрим выпуклые множества A, B в векторных пространствах X, Y и точки $c = (a, b)$, $z = (x, y) \in A \times B$. По определению, $ta + (t-1)x \in A$, $tb + (t-1)y \in B$ $(0 \le t \le 1)$. Тогда $tc + (t-1)z = (ta + (t-1)x, tb + (t-1)y) \in A \times B$. $\blacksquare$

Так как $A \times B$ компактно, то непрерывность функции f равномерна. Возьмем частные функции $f(x, \cdot)\colon B \to \mathbb{R}$ и $f(\cdot, y)\colon A \to \mathbb{R}$ $(x \in A,\ y \in B)$. Они непрерывны вместе с f и определены на компактах. Поэтому для каждого $x \in A$ существует $y(x) \in B$ и для каждого $y \in B$ существует $x(y) \in A$ такие, что

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in B} f(x, y), \quad f(x(y), y) = \max_{x \in A} f(x, y).$$

Рассмотрим функции $g\colon A \to \mathbb{R}$, $h\colon B \to \mathbb{R}$ со значениями

$$g(x) = f(x, y(x)), \quad h(y) = f(x(y), y).$$

Ясно, что $g(x) \le f(x, y) \le h(y)$ $(x \in A,\ y \in B)$.

Лемма 2. *Функции g и h непрерывны.*

$\square$ Так как f равномерна непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|h(y) - h(b)| = f(x(y), y) - f(x(b), b) \leq f(x(y), y) - f(x(b), y) \leq \varepsilon,$$

или $|h(y)-h(b)|=f(x(b), b)-f(x(y), y) \leq f(x(b), b)-f(x(b), y)\leq\varepsilon$ при любых $y, b \in B$ таких, что $\|y-b\| \leq \delta$. Точно так же доказывается непрерывность функции g. $\blacksquare$

Так как функции g и h непрерывны и определены на компактах A, B, то существуют точки $a \in A$, $b \in B$ такие, что

$$\alpha = g(a) = \max_{x\in A} g(x) = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y),$$
$$\beta = h(b) = \min_{y\in B} h(y) = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y).$$

Числа α, β называются *максимином* и *минимаксом* функции f. Ясно, что $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta$, то точка (a, b) называется *седловой.*

Если частная функция $f(x, \cdot)$ выпукла (вниз), а частная функция $f(\cdot, y)$ вогнута (выпукла вверх), то функция f называется *выпукло-вогнутой.*

Пример. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^2$, $A = B = [-1, 1]$ и $f(x,y) = y^2 - x^2$ $(-1 \leq x, y \leq 1)$. Тогда $g(x) = f(x, 0) = -x^2$, $h(y) = f(0, y) = y^2$, $a = b = 0$ и $\alpha = \beta = 0$. Точка $(a, b) = (0, 0)$ седловая. Функция f выпукло-вогнутая. Ее график — гиперболический параболоид.

Лемма 3. *Равенства $\alpha = \beta = f(a, b)$ и $g(a) = h(b) = f(a, b)$ эквивалентны.*

$\square$ Заметим, что $\alpha = \beta \Leftrightarrow g(a) = h(b)$. А так как $g(x) \leq f(x, y) \leq h(y)$, то $g(a) = h(b) \Leftrightarrow g(a) = f(a, b) = h(b)$. Следовательно, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = f(a, b)$ для некоторой точки $(a, b) \in A \times B$. $\blacksquare$

Упражнение. Доказать, что точка (a, b) является седловой для функции f ессли $f(x, b) \leq f(x, y) \leq f(a, y)$ $(x \in A, y \in B)$.

2. Достаточные условия существования седловой точки формулирует

Теорема Неймана. *Непрерывная выпукло-вогнутая функция $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ на произведении выпуклых компактов A, B в банаховых пространствах X, Y имеет седловую точку.*

□ Доказательство основывается на теореме Какутани. Рассмотрим для каждых $x \in A$, $y \in B$ множества

$$B(x) = \{y \in B : f(x,y) = g(x)\}, \quad A(y) = \{x \in A : f(x,y) = h(y)\}.$$

Они — непустые выпуклые компакты. Непустота следует из определений. Эти множества компактны как замкнутые части компактов A, B: так как частные функции $f(x,\cdot)$ и $f(\cdot,y)$ непрерывны, то прообразы $f^{-1}(x,\cdot)(g(x)) = B(x)$, $f^{-1}(\cdot,y)(h(y)) = A(y)$ их значений замкнуты. Остается проверить выпуклость. Так как $f(x,\cdot)$ по условию выпукла, то

$$f(x, tb + (1-t)y) \le tf(x,b) + (1-t)f(x,y) \quad (0 \le t \le 1)$$

для любых $b, y \in B$. Если $b, y \in B(x)$, то $f(x,b) = f(x,y) = g(x)$, и поэтому $f(x, tb + (1-t)y) \le g(x)$. Но

$$g(x) = \min_{y \in B} f(x,y) \le f(x, tb + (1-t)y).$$

Следовательно, $f(x, tb + (1-t)y) = g(x)$ и $tb + (1-t)y \in B(x)$. Точно так же проверяется вогнутость множества $A(y)$.

Так как $A(y) \times B(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K} = \mathscr{K}(A \times B)$, то можно рассмотреть мультифункцию $F\colon A \times B \to \mathscr{K}$ со значениями $F(x,y) = A(y) \times B(x)$ $(x \in A,\ y \in B)$. Докажем, что F непрерывна. Для этого достаточно доказать замкнутость F: что из $(x_n, y_n) \to (x,y)$, $(u_n, v_n) \in F(x_n, y_n)$ и $(u_n, v_n) \to (u,v)$ следует $(u,v) \in F(x,y)$. Заметим, что $(u_n, v_n) \in F(x_n, y_n)$ означает $u_n \in A(y_n)$, $v_n \in B(x_n)$ и $f(u_n, y_n) = h(y_n)$, $f(x_n, v_n) = g(x_n)$. Так как функции f, g, h непрерывны, то при $x_n \to x$, $y_n \to y$, $u_n \to u$, $v_n \to v$ из последних равенств следует, что $f(u,y) = h(y)$, $f(x,v) = g(x)$ и $(u,v) \in A(y) \times B(x)$.

По теореме Какутани для непрерывной мультифункции F существует неподвижная точка: $F(a,b) = (a,b)$ для некоторой $(a,b) \in A \times B$. Из определений вытекает, что $a \in A(b)$, $b \in B(a)$ и, значит, $g(a) = f(a,b) = h(b)$. По лемме 3 отсюда следует, что $\alpha = \beta = f(a,b)$. Точка (a,b) седловая. ■

Замечание. Теоремы о седловых точках широко применяются в теории игр и математической экономике. Им посвящена обширная литература (см. [68]).

3. Рассмотрим: пространства $\mathscr{C} = \mathscr{C}(A \times B)$, $\mathscr{A} = \mathscr{C}(A)$, $\mathscr{B} = \mathscr{C}(B)$ непрерывных функций $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$, $h\colon B \to \mathbb{R}$ на компактах A, B, $A \times B$; операторы $S\colon \mathscr{C} \to \mathscr{A}$, $T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ и функционалы $U\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, $V\colon \mathscr{B} \to \mathbb{R}$, определяемые равенствами $Sf = g$, $Tf = h$, $Ug = \alpha$, $Vh = \beta$ в обозначениях п. 1. Определены композиции $US\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}$, $VT\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ и разность $US - VT\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}$. Так как в определении S, T используется максимум и минимум, а $U = \max$, $V = \min$, то эти операторы и функционалы нелинейны. Из определений следует, что функции f, имеющие седловые точки, являются решениями уравнения

$$(US - VT)f = 0.$$

Если A, B — выпуклые компакты в банаховых пространствах X, Y, то по теореме Неймана $US = VT$ и каждая функция $f \in \mathscr{C}$ является решением этого уравнения.

Замечание. Если вместо непрерывных рассматривать ограниченные функции, а вместо максимумов и минимумов рассматривать верхние и нижние грани, то можно обобщить понятие седловой точки и уравнение, обеспечивающее ее существование. В общем виде задачу можно сформулировать так.

Задача. *Найти условия, при которых для ограниченной функции $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ на декартовом произведении $A \times B$ множеств A, B верно равенство*

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} f(x,y) = \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y).$$

Вместо вещественных можно рассматривать функции со значениями в упорядоченных множествах.

5.3. Монотонные операторы

Среди нелинейных операторов выделяются монотонные операторы. Они подробно описаны в [21, гл. 3].

5.3.1. Определение и свойства

Всюду дальше E обозначает вещественное банахово пространство, E' — его нормированное сопряженное, $T\colon E \to E'$ —

произвольное отображение E в E'. Используется мультипликативная запись: $Tx \cdot y = (T(x))(y)$ для $x, y \in E$. В гильбертовом случае E' отождествляется с E и произведение становится скалярным. В некоторых предложениях предполагаются сепарабельность и рефлексивность пространства E.

1. Оператор T называется *монотонным,* если

$$(Tx - Ty)(x - y) \geq 0 \quad (x, y \in E).$$

Если при $x \neq y$ неравенство строгое, то T называется *строго монотонным.* Это согласуется с определением для случая $E = E' = \mathbb{R}$.

Оператор T называется *ограниченным,* если он каждое ограниченное множество $A \subseteq E$ отображает в некоторое ограниченное множество $TA = B' \subseteq E'$. Если же для каждой точки $a \in E$ существует окрестность $V \subseteq E$, которую T отображает в некоторое ограниченное множество $TU = V' \subseteq E'$, то оператор T называется *локально ограниченным.* (В качестве V можно взять открытый или замкнутый шар с центром в точке a и радиусом $r > 0$.)

Пусть $T_i \colon E \to E'$ — монотонные операторы, $a_i \in E$, $b_i' \in E'$ $(1 \leq i \leq n)$. Тогда равенство $Tx = \Sigma(T_i(a + x) + b_i')$ $(x \in E)$ определяет монотонный оператор T.

Упражнение. Доказать это.

2. Возьмем произвольные $x, v \in E$ и рассмотрим функцию $\varphi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ со значениями $\varphi(t) = T(x + tv) \cdot v$ $(0 \leq t \leq 1)$.

Предложение 1. *Оператор T монотонен ессли каждая функция φ возрастает.*

□ Пусть T монотонен и $0 \leq s < t \leq 1$. Тогда $\varphi(t) - \varphi(s) = T(x + tv) \cdot v - T(x + sv) \cdot v = (t - s)^{-1}(T(x + tv) - T(x + sv))(x + tv - x + sv) \geq 0$. Если каждая φ возрастает, то $(Ty - Tx)(y - x) = \varphi(1) - \varphi(0) \geq 0$ при $v = y - x$. ■

Предложение 2. *Слабо непрерывно дифференцируемый оператор T монотонен ессли $T'(x)v \cdot v \geq 0$ для любых $x, v \in E$.*

□ Пусть T монотонен и $0 \leq s < 1$. Тогда по теореме о среднем значении для интегралов имеем

$$0 \leq (T(x + sv) - Tx) \cdot sv = \int\limits_0^s T'(x_t v)v \cdot sv\, dt = s^2 T'(x + rv)v \cdot v$$

при некотором $r \in [0, s]$. Деля на s^2 и переходя к пределу при $s \to 0$, получаем $T'(x)v \cdot v \geq 0$. Обратно, при этом условии $(T(x+sv) - Tx) \cdot sv = \int\limits_0^s T'(x_t v)v \cdot sv\, dt \geq 0$ для любых $x, v \in E$. ■

Сформулированные функциональный и дифференциальный критерии монотонности оператора часто бывают удобны.

Упражнение. Доказать, что в случае гильбертова пространства $E = H$ оператор T монотонный ессли при каждом $\lambda > 0$ оператор $S(\lambda) = I + \lambda T$ растягивающий: $\|S(\lambda)x - S(\lambda)y\| \geq \|x - y\|$ $(x, y \in H)$.

3. **Теорема.** *Каждый монотонный оператор локально ограничен.*

Доказательство есть в [21, гл. 3, § 1]. Оно основывается на теореме Банаха — Штейнгауза.

Следствие. *Каждый линейный монотонный оператор ограничен.*

□ Пусть $T\colon E \to E'$ — линейный монотонный оператор, $x_n \to x$ в E, $v_n = \|x_n - x\|^{-1/2}(x_n - x)$ при $x_n \neq x$ и $v_n = 0$ при $x_n = x$. Так как $v_n \to 0$, то по теореме $\|Tv_n\| \leq c$ для некоторого $c > 0$. Откуда

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| = \|x_n - x\|^{1/2}\|Tv_n\| \leq c\|x_n - x\|^{1/2} \to 0.$$

Линейный монотонный оператор непрерывен и, значит, ограничен. ■

Таким образом, монотонность оператора в общем случае влечет локальную, а в линейном случае — глобальную ограниченность.

4. Пример [21, гл. 2, § 2 и гл. 3, § 1]. Рассмотрим: ограниченную область G с регулярной границей Γ в пространстве $E = \mathbb{R}^n$; семейство гладких функций a_{ij} $(1 \leq i,\, j \leq n)$; оператор $S = -\Sigma\partial_i(a_{ij}\partial_j)$, определенный для выбранного класса функций на $\bar{G}$; операторы $L\colon x \to \operatorname{grad} x$, $A\colon y \to (a_{ij})y^t$, $M\colon z \to \operatorname{div} z$ $(x \in X,\, y \in Y,\, z \in Z)$. Оператор $T = MAL$ называется *энергетическим продолжением* дифференциального оператора S (в физических приложениях он часто связан с энергией). Область G может быть выпуклой. Иногда требуется, чтобы $u = 0$ на Γ. Пусть

$$(Sy)(x) = (a_i(x, y(x)), \quad a_i(x, y) = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij} \in \mathscr{L}^\infty(G)).$$

Легко доказать, что оператор S монотонен, если для почти каждого $x \in G$ и каждого $v \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие $vB(x)v^* \geq c\|v\|^2$ при некотором

$c \geq 0$ и $B(x) = (b_{ij}(x))$. С монотонностью энергетического продолжения T дело обстоит сложнее. Она доказывается при различных дополнительных предположениях.

5.3.2. Уравнения с монотонными операторами

Формулируются некоторые предложения о решениях уравнения $Tx = f$ с монотонным оператором $T\colon E \to E'$.

1. Оператор T называется *радиально непрерывным,* если для него каждая функция $\varphi(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ со значениями $\varphi(t) = T(x + tv) \cdot v$ $(0 \leq t \leq 1)$ непрерывна.

Предложение. *Пусть монотонный оператор T радиально непрерывен и $(f - Tv)(x - v) \geq 0$ $(v \in E)$. Тогда $Tx = f$.*

□ Если $v = x - tu$ $(t > 0)$, то по условию $t(f - Tv)u = (f - Tv)(x - v) \geq 0$. Откуда $t(f - Tv)u \geq 0$ и $(f - Tv)u \geq 0$ при $t \to 0$ и произвольном $u \in E$. Следовательно, $Tx = f$. ■

Замечание. В [21, гл. 3, лемма 1.3] доказано более общее предложение, содержащее еще несколько условий разрешимости уравнения $Tx = f$.

2. Оператор T называется *коэрцитивным,* если $Tx \cdot x \geq \gamma(\|x\|)\|x\|$ $(x \in E)$ для некоторой функции $\gamma\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ такой, что $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема. *Пусть монотонный оператор T радиально непрерывен и коэрцитивен. Тогда при любом $f \in E'$ множество решений уравнения $Tx = f$ непусто, слабо замкнуто и выпукло.*

Доказательство есть в [21, гл. 3, теорема 2.1]. Там же доказана теорема, формулирующая условия корректной разрешимости уравнения $Tx = f$, и приведены несколько следствий.

3. Пусть $E = H$ — вещественное гильбертово пространство, $B = \bar{B}(0,1) \subseteq H$, $T\colon B \to H$ — монотонный оператор, непрерывный на конечномерных подпространствах, $S(\lambda) = I + \lambda T$.

Лемма. *Для некоторой точки a и всех точек x из B верно неравенство $Ta \cdot (x - a) \geq 0$.*

Доказательство есть в [67, п. 5.1.4].

Теорема. *Если $S(\lambda)u \neq 0$ для всех $\lambda \geq 0$ и $\|u\| = 1$, то уравнение $Tx = 0$ имеет решение в B.*

□ Если неравенство леммы верно для внутренней точки a шара B, то $Ta = 0$. Если же $\|u\| = 1$ и $Tu \neq 0$, то $S(\alpha)u = 0$ при некотором $\alpha \geq 0$. ■

Упражнение. Дать подробное доказательство.

Следствие. *Если $\|x\|^{-1}Tx \cdot x \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, то уравнение $Tx = y$ имеет решение при любом $y \in H$.*

Доказательство есть в [67, п. 5.1.4]. В [67, п. 5.2] доказана общая теорема о минимаксе, из которой выводится предложение, обобщающее лемму. Там же (п. 5.3) рассматриваются многозначные монотонные операторы.

Замечание. Монотонные мультиоператоры подробно описываются в [69, гл. 6]. Там они применяются для решения вариационных неравенств. Использование монотонных операторов и вариационных неравенств при решении некорректных задач описано в [4, гл. 3].

Положительным и монотонным операторам в частично упорядоченных банаховых пространствах посвящен п. 8.3 в [111]. Из теоремы Шаудера там выводится теорема о неподвижной точке для компактных операторов в пространствах с нормальным конусом (теорема 8.3.9). Теория применяется к решению интегральных уравнений Гаммерштейна и к решению некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений (8.3.20–24).

5.4. Нелинейные сжатия

По аналогии с полугруппами линейных операторов можно исследовать и некоторые полугруппы нелинейных операторов.

5.4.1. Сжимающие полугруппы операторов

Эти полугруппы подробно описаны в [43, гл. 2].

1. Рассмотрим непустое замкнутое множество F в банаховом пространстве E и семейство U операторов $U(t)\colon F \to F$ $(t \geq 0)$. Они составляют *сжимающую полугруппу,* если:

(1) $U(0) = I$, $U(s+t) = U(s)U(t)$ $(s, t \geq 0)$,
(2) $\|U(t)x - U(t)y\| \leq \|x - y\|$ $(t \geq 0;\ x, y \in F)$,
(3) $U(t)x \to U(s)x$ $(t \to s,\ x \in F)$.

Другими словами, *сжимающей* называется сильно непрерывная полугруппа нерастягивающих операторов или (*нелинейных*) *сжатий*.

Замечание. Как и в линейном случае, условие (3) сильной непрерывности U на $[0, \infty[$ можно заменить условием $(3')$ непрерывности в точке $s = 0$: $(1)(2)(3) \Rightarrow (1)(2)(3')$.

Равенство $Tx = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(U(t)x - x)$ определяет *порождающий оператор* T для U. Но в нелинейном случае возможно $A = \operatorname{Dom} T = O$. Пример приведен М. Крэндаллом и Т. Лиггеттом (ссылка в [43, п. 2.1]). Если $A \neq O$, то

$$\|x - y\| \leq \|(x - y) - \lambda(Tx - Ty)\| \quad (\lambda > 0,\ x, y \in F).$$

Упражнение. Доказать это неравенство [43, п. 2.1].

Поэтому при $A \neq O$ оператор $S = I - \lambda T$ взаимно однозначен для каждого $\lambda > 0$, а обратный оператор $R = S^{-1}$ является сжатием:

$$\|Ru - Rv\| \leq \|u - v\| \quad (u = Sx,\, v = Sy).$$

Условимся отождествлять соответствия с их графиками и порождаемыми мультифункциями. Это позволяет называть $R(\lambda, T) = (I - \lambda T)^{-1}$ оператором и тогда, когда это соответствие неоднозначно. Оператор T называется *диссипативным* (а $-T$ называется *аккретивным*), если $R(\lambda, T)$ является сжатием при каждом $\lambda > 0$. Диссипативный оператор T называется *m-диссипативным* (а $-T$ называется *m-аккретивным*), если $\operatorname{Dom} R(\lambda, T) = E$ при каждом $\lambda > 0$. Эти определения даны для произвольных (возможно, неоднозначных) операторов. По определению, оператор $R \subseteq E \times E$ является сжатием, если

$$\|x - y\| \leq \|u - v\| \quad (x \in Ru,\ y \in Rv,\ u \in \operatorname{Dom} R,\ v \in \operatorname{Dom} R).$$

2. Рассмотрим множество $\mathscr{U} = \mathscr{U}(F, E)$ всех сжимающих полугрупп U операторов $U(t)\colon F \to F$. Сходимость последовательности U_n к U в $\mathscr{U}$ определим равенством

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|U_n(s)x - U(s)x\| \to 0 \quad (t > 0,\ x \in F).$$

Обозначим $\mathscr{D} = \mathscr{D}(F, E)$ множество всех m-диссипативных плотно определенных в F операторов $T\colon A \to E$. Сходимость $T_n \to T$ в $\mathscr{D}$ определим с помощью $R(\lambda, T) = (I - \lambda T)^{-1}$ равенством

$$\|R(\lambda, T_n)y - R(\lambda, T)y\| \to 0 \quad (\lambda > 0,\ y \in E).$$

Пусть пространство $E = H$ гильбертово, а множество $F = B \subseteq H$ непустое замкнутое выпуклое. Этот случай подробно описан в [130]. Такие ограничения позволяют сформулировать для нелинейных операторов аналог теоремы Хилле — Иосиды. При сделанных предположениях для каждой сжимающей полугруппы $U \in \mathscr{U}$ существует единственный оператор $T \in \mathscr{D}$, к которому при $t \downarrow 0$ сходятся операторы $S(t) = t^{-1}(U(t) - I)$. Отображение $\mathscr{S}\colon U \to T$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{U}$ на $\mathscr{D}$, причем $U_n \to U$ в $\mathscr{U}$ эквивалентно $T_n = \mathscr{S}(U_n) \to \mathscr{S}(U) = T$ в $\mathscr{D}$. Возможность сформулировать такой аналог теоремы Хилле — Иосиды оправдывает использование многозначных операторов.

Замечание. В произвольном банаховом пространстве этого аналога нет: операторы $S(t)$ не обязательно сходятся к нужному оператору T и отображение $\mathscr{S}$ не определено. Кроме того, различные m-диссипативные операторы могут порождать одну и ту же полугруппу. Ссылки на литературу есть в [43, п. 2.1].

5.4.2. Аппроксимация

1. Рассмотрим m-диссипативный оператор $T\colon A \to E$, определенный на множестве A банахова пространства E. Положим

$$U_n(t) = R^n(n^{-1}t, T) = (I - n^{-1}tT)^{-n} \quad (t \geq 0).$$

Для каждого $x \in F = \bar{A}$ последовательность $U_n(t)x$ сходится к некоторому $U(t)x \in F$ и определяет сжимающую полугруппу операторов $U(t)\colon F \to F$. Кроме того, для каждого $x \in A$ верны соотношения

$$|Tx| = \sup_{\lambda > 0}(\lambda^{-1}\|R(\lambda, T)x - x\|) < \infty,$$
$$\|U(t)x - U(s)x\| \leq |Tx|\,|t - s| \quad (s, t \geq 0),$$
$$\|U(t) - U_n(t)\| \leq n^{-1/2}|Tx|t \quad (t \geq 0,\ n \geq 1).$$

Сформулированные утверждения составляют содержание теоремы, доказанной М. Крэндаллом и Т. Лиггеттом [43, п. 2.2].

2. Рассмотрим последовательность операторов $T_n\colon A_n \to E$ и оператор $T\colon A \to E$ $(A_n, A \subseteq E)$. Будем предполагать, что они m-диссипативны и порождают сжимающие полугруппы операторов U_n и U соответственно. Рассмотрим еще последовательность векторов $x_n \in F_n = \bar{A}_n$ и вектор $x \in F = \bar{A}$. Будем предполагать, что $x_n \to x$ в E.

Теорема. *Если* $\|R(\alpha, T_n)y - R(\alpha, T)y\| \to 0$ *при некотором* $\alpha > 0$ *и всех* $y \in E$, *то* $\sup\limits_{0 \le s \le t} \|U_n(s)x_n - U(s)x\| \to 0$ $(t > 0)$.

Доказательство есть в [43, п. 2.3]. Там же из теоремы выводится следующее предложение. Рассмотрим m-диссипативный оператор $T\colon E \to E$, удовлетворяющий условию Липшица, вектор $x \in E$ и функцию $u\colon [0, \infty[\to E$ со значениями $u(t) = U(t)x$.

Следствие. *Функция u непрерывно дифференцируема и верны равенства* $\dot{u}(t) = Tu(t)$ $(t \ge 0)$, $u(0) = x$.

Доказывается также нелинейный вариант оценки Чернова для решения задачи Коши.

5.5. Теория степени отображения

Эта теория эффективно применяется при исследовании нелинейных уравнений. Введению в теорию степени посвящена глава 13 книги [111].

5.5.1. Конечномерные пространства

Рассмотрим сначала случай конечномерных пространств и используем сказанное в п. 3.4.9.

1. Пусть U — непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $f\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение и $y \notin f(\partial U)$. Возьмем $r = (1/2)\operatorname{dist}\{y, f(\partial U)\}$. Образ $f(\partial U)$ компактен вместе с ∂U, и поэтому $r > 0$ при $y \notin f(\partial U)$. Будем говорить, что точка $z \in \mathbb{R}^m$ *близка* к точке y, и писать $z \approx y$, если $\|z - y\| < r$. Точно так же назовем отображение $g\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ *близким* к f и напишем $g \approx f$, если $\|g - f\|_{\sup} < r$.

Если отображение f гладкое, то его *степенью в точке y по множеству U* называется число

$$d(f, y, U) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sign} \det f'(x),$$

где z — какая-либо близкая к y точка, не являющаяся особым или граничным значением f. В частности, $d(f, y, U) = 0$ при $y \notin f(\bar{U})$.

В общем случае $d(f, y, U) = d(g, y, U)$, где g — какое-либо близкое к f гладкое отображение. Вместо $d(f, y, U)$ пишут также $\deg(f, y, U)$.

Примеры. 1). Пусть $e = \mathrm{id}\colon U \to \mathbb{R}^m$. Тогда $d(e, y, U) = 1$ $(y \in U)$, $d(e, y, U) = 0$ $(y \notin \bar{U})$. 2) Пусть $c\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ постоянная. Тогда $d(\mathrm{c}, y, U) = 0$ при $y \neq c$.

2. Корректность данного определения степени следует из плотности неособых значений в $f(U)$, плотности гладких функций в $\mathscr{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и равенств $d(f, z_1, U) = d(f, z_2, U)$, $d(g_1, y, U) = d(g_2, y, U)$ для близких неособых значений z_1, z_2 и для близких гладких отображений g_1, g_2. Общее значение степеней $d(g, z, U)$ для всех неособых $z \approx y$ и гладких $g \approx f$, по определению, есть $d(f, y, U)$.

Обозначим через $\mathscr{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ класс всех непрерывных отображений $\bar{U} \to \mathbb{R}^m$ и выделим из него класс $\mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ гладких (непрерывно дифференцируемых) на U. Пусть $f \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и $S = \{x \in U : \det f'(x) = 0\}$. Тогда по теореме Сарда мера Лебега образа $f(S)$ особых точек равна нулю, и поэтому вблизи каждого значения f есть неособые. Используя компактность $\bar{U}$, легко доказать, что множество $f^{-1}(y)$ конечно при $y \notin f(S \cup \partial U)$.

Для данного отображения f и точек z, y условимся писать $z \sim y$, если эти точки принадлежат одной и той же связной компоненте множества $\mathbb{R}^m \setminus f(\partial U)$. Нетрудно доказать, что $z \sim y$ при $\|z - y\| < 2r$ (и тем более при $z \approx y$).

Упражнение. Доказать сформулированные утверждения.

Пусть $f \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и $y \notin f(S \cup \partial U)$. Тогда $d(f, z, U) = d(f, y, U)$ при $z \sim y$.

Пусть $f, g \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и $y \notin f(\partial U)$. Тогда существуют $\delta > 0$, $y \notin g(\partial U)$ такие, что $d(f, y, U) = d(g, y, U)$ при всех $g \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$, для которых $\|g - f\|_{\sup} < \delta$.

Упражнение. Доказать, что $y \notin g(\partial U)$.

Гомотопию $h\colon [0,1]\times \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ отображения $f \in \mathscr{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ назовем *допустимой* для $y \notin f(\partial U)$, если $y \notin h([0,1]\times \partial U)$. Отображения $f = f_0 = h(0,\cdot)$ и $g = f_1 = h(1,\cdot)$ будем называть *допустимо гомотопными* и писать $f \sim g$ (для данного значения $y \notin f(\partial U)$). Теорема о гомотопической инвариантности утверждает, что $d(h_t, y, U)$ не зависит от t. В частности, $d(f,y,U) = d(g,y,U)$ для допустимо гомотопных f и g.

Для степени гладкого отображения верна *интегральная формула.* Пусть $f \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и $y \notin f(S \cup \partial U)$. Тогда

$$d(f,y,U) = \int\limits_U \varphi_\varepsilon(y - f(x)) \det f'(x)\, dx.$$

Здесь $\varphi_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ является *сглаживающим множителем* и имеет значения $\varphi_\varepsilon(x) = c(\varepsilon)\cdot \exp\{-1/(\varepsilon^2 - \|x\|^2)\}$ при $\|x\| \geq \varepsilon$. Нормирующий коэффициент подбирается из условия $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$ для интегральной нормы. Ясно, что $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \bar{B}(0,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Доказательства сформулированных утверждений о свойствах степени $d(f,y,U)$ можно найти в [111, 13.2].

3. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ограничено и открыто, отображение $f\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно, а точка $y \notin f(\partial U)$. Тогда верна описывающая свойства степени $d(f,y,U)$

Теорема. (1) *Если $d(f,y,U) \neq 0$, то $y \in f(U)$.*
(2) *Если $g \sim f$, то $d(f,y,U) = d(g,y,U)$.*
(3) *Если $z \sim y$, то $d(f,z,U) = d(f,y,U)$.*
(4) *Если $g_{\partial U} = f_{\partial U}$, то $d(f,y,U) = d(g,y,U)$.*
(5) *Если $y \in U$, то $d(e,y,U) = 1$.*

Здесь $g \in \mathscr{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$, $z \in \mathbb{R}^m \setminus f(\partial U)$, отображения $g_{\partial U}$ и $f_{\partial U}$ являются сужениями на ∂U отображений f и g, отображение $e = \mathrm{id}\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^m$.

☐ Приведем краткое доказательство. Утверждения (2) и (3) обобщают сформулированные в п. 2. Утверждение (5) следует из определений. Докажем только (1) и (4).

Докажем свойство (1). Пусть $f \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$ и $y \notin f(\partial U)$. Тогда $y \notin f(U)$ означает $y \notin f(\bar{U}) = \operatorname{Ran} f$ и $f^{-1}(y) = \text{O}$, поэтому $d(f,y,U) = 0$ при $y \notin f(U)$. Следовательно, $y \in f(U)$ при $d(f,y,U) \neq 0$. Если $f \in \mathscr{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$, то существует $g \in \mathscr{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^m)$, $g \approx f$. Образ $g(\partial U)$ содержится в r-окрестности образа $f(\partial U)$, и поэтому $y \notin g(\bar{U})$ при $y \notin f(\bar{U})$ и $r = (1/2)\operatorname{dist}\{y, f(\partial U)\}$. Следовательно, снова $d(f, y, U) = d(g, y, U) = 0$ при $y \notin f(U)$.

Докажем теперь (4). Если $f(x) = g(x)$ при $x \in \partial U$, то $h(t, x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ определяет допустимую гомотопию ($t \in [0,1]$, $x \in \bar{U}$). Вследствие гомотопической инвариантности степени $d(f, y, U) = d(g, y, U)$ при $y \notin f(\partial U) = g(\partial U)$. ■

Упражнение. Вывести (3) из (2).

Замечание. Условие $y \notin f(\partial U)$ позволяет применять утверждение (1) для доказательства существования решения $x \in U$ уравнения $f(x) = y$. Подчеркнем, что $d(f, y, U) \neq 0$ является только достаточным условием существования такого решения. Если $d(f, y, U) = 0$, то оно тоже может существовать.

4. Теорема о свойствах степени отображения позволяет легко доказать основную теорему алгебры комплексных чисел. Из сказанного в п. 3.4.9,4 следует, что $d(g, z, U) = n$ для полинома $g(z) = a_n z^n$ с коэффициентом $a_n \neq 0$, круга $U = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ достаточно большого радиуса $r > 0$ и точки $z \notin U$. Полином $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ связан с g допустимой гомотопией $h(t, x) = (1-t)g(z) + tf(z)$ ($t \in [0,1]$, $z \in \bar{U}$). Так как $|g(z)| \geq 2|f(z) - g(z)|$ при $|z| \geq r$ и достаточно большом $r > 0$, то $|h_t(z)| \geq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| > 0$ при $|z| = r$ и $0 \notin h_t(\partial U)$ при всех $t \in [0,1]$. Следовательно, $d(f, 0, U) = d(g, 0, U) = n \neq 0$ и $f \in f(U)$. Уравнение $f(z) = 0$ имеет решение $z \in U$.

5. Докажем теорему Брауэра для шара $\bar{U} = \bar{B}(0, r) \subseteq \mathbb{R}^m$. Неподвижные точки непрерывного преобразования $f\colon \bar{U} \to \bar{U}$ являются решениями уравнения $g(x) = 0$ для $g = f - e$, где $e = \mathrm{id}$. Если $0 \in g(\partial U)$, то $f(x) = x$ для некоторой $x \in \partial U$, и теорема Брауэра верна. Поэтому можно предположить, что $0 \notin g(\partial U)$ и $f(x) \neq x$ при всех $x \in S(0, r) \subseteq \mathbb{R}^m$. Отображения e и g связаны допустимой гомотопией $h(t, x) = (1-t)x + tf(z)$ ($t \in [0,1]$, $z \in \bar{U}$). В самом деле, из равенства $h_t(x) = 0$ следует $x = tf(x)$ и $r = t\|f(x)\|$ при $x \in \partial U$. Так как $0 \leq t \leq 1$ и $\|f(x)\| \leq r$, то из $r \leq tr$ следует $t = 1$. Тогда $x = f(x)$, что противоречит сделанному предположению $f(x) \neq x$. Следовательно, $d(g, 0, U) = d(e, 0, U) = 1 \neq 0$ и $0 \in g(U)$. Уравнение $g(x) = 0$ имеет решение $x \in U = B(0, r)$, если оно не имеет решений $x \in \partial U = S(0, r)$.

Замечание. Теорема Брауэра легко обобщается на непрерывные преобразования выпуклых компактов. Для этого используется доказанная в [144] и часто бывающая полезной

Теорема Дугунджи. *В банаховом пространстве X непрерывное отображение $f\colon A \to C$ замкнутого множества $A \subseteq X$ в выпуклое множество $C \subseteq X$ имеет непрерывное продолжение $\bar{f}\colon X \to C$.*

Рассмотрим непустой выпуклый компакт $C \subseteq \mathbb{R}^m$, содержащий шар $\bar{B} = \bar{B}(0, r) \subseteq \mathbb{R}^m$ и непрерывное преобразование $f\colon C \to C$. По теореме Дугунджи существует непрерывное отображение $\bar{f}\colon \bar{B} \to C$, продолжающее f. Так как $\bar{f}$ является непрерывным преобразованием шара $\bar{B}$, то по доказанному $\bar{f}(x) = x$ для некоторого $x \in \bar{B}$. А так как $\bar{f}(\bar{B}) \subseteq C$, то $x \in C$ и $f(x) = \bar{f}(x) = x$.

5.5.2. Степень Лере — Шаудера

Теория степени переносится с конечномерного случая на бесконечномерный только при определенных ограничениях.

1. Если бы теория степени полностью переносилась с конечномерных пространств на произвольные банаховы, то для банаховых пространств была бы верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Контрпример Какутани показывает, что это не так.

Рассмотрим гильбертово пространство $E = l^2$, шар $\bar{B} = \bar{B}(0, 1) \subseteq E$ и преобразование $T\colon \bar{B} \to \bar{B}$, переводящее $x = (x_i) \in E$ в $y = (y_i) \in E$ с координатами $y_1 = (1 - \|x\|^2)^{1/2}$, $y_{i+1} = x_i$ $(i \geq 1)$. Оператор T нелинейный, так как $T(0) \neq 0$. Он непрерывный:

$$\|T(x) - T(a)\|^2 = (1 - \|x\|^2)^{1/2} - (1 - \|a\|^2)^{1/2} + \|x - a\|^2,$$

следовательно, $T(x) \to T(a)$ при $x \to a \in E$. У преобразования T нет неподвижных точек. В самом деле, $\|T(x)\| = 1 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 1$, и поэтому при $\|x\| < 1$ равенство $T(x) = x$ невозможно. Если $\|x\| = 1$, то $Tx = x$ влечет $x = 0$ и тоже невозможно. Для эффективной теории нужно выбрать более узкий класс преобразований банаховых пространств, чем непрерывные.

2. Дадим нужные определения. Рассмотрим банахово пространство E, (непустое) ограниченное открытое множество $U \subseteq E$ и тождественное вложение $I\colon \bar{U} \to E$. Оператор $K\colon \bar{U} \to E$ называется *компактным,* если он непрерывный и отображает ограниченные множества на относительно компактные:

$\overline{K(B)} \subseteq E$ компактно для каждого ограниченного $B \subseteq \bar{U}$. Оператор $F = I - K$ называется *фредгольмовым,* если K компактен. Заметим, что $F(x) = 0$ эквивалентно $K(x) = x$. Исследование неподвижных точек компактных операторов сводится к исследованию фредгольмовых уравнений $F(x) = y$. В линейном случае они были подробно изучены.

Нетрудно доказать [111, 13.3.1], что $r = 2^{-1}\operatorname{dist}\{y, F(\partial U)\}>0$ при $y \notin F(\partial U)$. Это позволяет, используя *проекторы Шаудера* [111, 8.2.5], установить существование конечномерных приближений Q для фредгольмова оператора F. В [111, 13.3.2] доказана

Лемма. *Для каждого* $\varepsilon \in\ ]0, r[$ *существует непрерывный оператор* $Q\colon \bar{U} \to E$ *конечного ранга такой, что*

$$\|F(x) - Q(x)\| \le \varepsilon\ (x \in \bar{U}), \quad \|Q(x) - y\| \ge r\ (x \in \partial U).$$

Сужение Q на подпространство, порожденное точкой y и образом $Q(\bar{U})$, является непрерывным отображением конечномерных пространств и для него определена степень. Различные такие приближения оператора F имеют равные степени [111, 13.3.4]. Их общее значение $d(F, y, U)$ и называется *степенью Лере — Шаудера* отображения F в точке y по множеству U [111, 13.3.5].

Замечание. Используя теорему Дугунджи, можно сначала определить степень оператора на ∂U, а потом — его продолжения на $\bar{U}$ [111, задача 13.6].

Уточним понятие *допустимой гомотопии* $H\colon [0,1] \times \bar{U} \to E$, связывающей фредгольмовы операторы $F\colon \bar{U} \to E$ и $G\colon \bar{U} \to E$. К прежним требованиям непрерывности и условию $y \notin H([0,1] \times \partial U)$ добавляется требование фредгольмовости операторов H_t для всех $t \in [0,1]$. Будем записывать допустимую гомотопность $F = H_0$ и $G = H_1$ символом $G \sim F$. А принадлежность точек y и z одной и той же связной компоненте множества $E \setminus \overline{F(\partial U)}$ — символом $z \sim y$.

3. Теорему о свойствах степени для фредгольмовых операторов можно сформулировать по аналогии с конечномерным случаем. Ее доказательство проводится по стандартной схеме: используется соответствующее утверждение теоремы из 5.5.1, 3 и предельный переход с учетом компактности оператора K в равенстве $F = I - K$.

Из теоремы выводится следствие, особенно удобное для приложений. Там условие, обеспечивающее существование решения уравнения $F(x) = y$, формулируется непосредственно для F.

Пусть множество $U \subseteq E$ ограничено и открыто, отображение $F\colon \bar{U} \to E$ фредгольмово, а точка $y \notin F(\partial U)$. Тогда верна описывающая свойства степени $d(F, y, U)$

Теорема. (1) *Если* $d(F, y, U) \neq 0$, *то* $y \in F(U)$.
(2) *Если* $G \sim F$, *то* $d(G, y, U) = d(F, y, U)$.
(3) *Если* $z \sim y$, *то* $d(F, z, U) = d(F, y, U)$.
(4) *Если* $G_{\partial U} = F_{\partial U}$, *то* $d(G, y, U) = d(F, y, U)$.
(5) *Если* $y \in U$, *то* $d(I, y, U) = 1$.

Здесь $G\colon \bar{U} \to E$ — фредгольмов оператор, $z \in E \setminus \overline{F(\partial U)}$, отображения $F_{\partial U}$ и $G_{\partial U}$ — сужения на ∂U отображений F и G, $I\colon \bar{U} \to E$ — тождественное вложение. Краткое доказательство теоремы есть в [111, 13.3.6].

Упражнение. Вывести сформулированную теорему из теоремы в 5.5.1, 3.

Следствием является еще одна

Теорема Лере — Шаудера. *Пусть* $y \notin H_t(\partial U)$ *для* $H_t = (1-t)I + tF$ *при всех* $t \in [0, 1]$. *Тогда фредгольмово уравнение* $F(x) = y$ *имеет решение* $x \in U$.

$\square$ Из условия следует, что $I \sim F$. По утверждениям (2) и (5) теоремы о свойствах степени тогда $d(F, y, U) = d(I, y, U) = 1 \neq 0$ при $y \in U$. Откуда по утверждению (1) вытекает $y \in F(U)$. $\blacksquare$

Упражнение. Вывести из теоремы о степени отображения теорему Шаудера и теорему 2 из п. 5.1.2, 2.

Замечание. В [111, 13.4] подробно описывается применение теории степени к исследованию интегрального уравнения Чандрасекхара для радиационного переноса в звездных оболочках.

6. МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В теории некорректных задач широко используются конечные и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений можно рассматривать как частный случай линейных операторных уравнений. По сравнению с обычно рассматриваемыми классами операторных уравнений такие уравнения обладают рядом важных особенностей. В главе сначала подробно описываются общие свойства матричных операторов и представляющих их матриц. В качестве множества индексов выбирается произвольное счетное множество. Это связано со стохастическими приложениями, в которых трудно подобрать нумерацию, соответствующую содержанию задачи. Примерами приложений служат марковские матрицы и определяемые ими операторы. Уравнения с такими операторами возникают в некоторых стохастических задачах интегральной геометрии и томографии.

6.1. Определения

Матричные операторы являются регулярными интегральными операторами. Это позволяет сформулировать задачу в терминах общей теории линейных операторов и при решении использовать операторные методы.

6.1.1. Основные пространства

Рассмотрим следующие пространства:

$(C, d\nu)$ — пространство, составленное из счетного (конечного или бесконечного) множества C и σ-конечной считающей меры $d\nu$ на алгебре всех его частей

$$\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(C) = \mathscr{L}^p(C, d\nu) \quad (1 \le p \le \infty);$$

$\mathscr{V} = \mathscr{V}(C)$ — векторное пространство всех числовых (вещественных или комплексных) функций на C;

$\mathscr{M} = \mathscr{M}(C, C)$ — векторное пространство всех числовых $C \times C$-матриц (числовых функций на $C \times C$);

$\mathscr{B}^p = \mathscr{B}(\mathscr{L}^p)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов в $\mathscr{L}^p$;

$\mathscr{C}^p = \mathscr{C}(\mathscr{L}^p)$ — нормированное пространство компактных линейных операторов в $\mathscr{L}^p$.

(Здесь и всюду далее, когда не оговорено, $1 \leq p \leq \infty$.)

Каждое семейство $V = (v_\gamma)$ $(\gamma \in C)$ порождает *строку* $(v_{1\gamma}) \in M(\{1\}, C)$ и *столбец* $(v_{\gamma 1}) \in M(C, \{1\})$, отождествляемые с этим семейством. Различать их приходится только при действиях с матрицами. В тексте семейства (v_γ) отождествляются со строками и умножаются на матрицы по правилу *строка на столбец*. Для того чтобы $C \times C$-матрица $M = (a_{\gamma\delta})$ $(\gamma, \delta \in C)$ представляла линейный оператор в пространстве $\mathscr{V}$, нужно, чтобы при каждых $V \in \mathscr{V}$ и $\delta \in C$ семейство чисел $v_\gamma a_{\gamma\delta}$ $(\gamma \in C)$ было суммируемо. Тогда произведение $VM = W \in \mathscr{V}$, где $W = (w_\delta)$ $(\delta \in C)$ есть строка с элементами $w_\delta = \sum\limits_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta}$ $(\delta \in C)$. А для того чтобы матрица M представляла линейный оператор в $\mathscr{L}^p$, нужно еще, чтобы $W \in \mathscr{L}^p$ при $V \in \mathscr{L}^p$. Условимся такой оператор называть *матричным*, отождествлять с представляющей его матрицей и обозначать тоже M, а представляющую матрицу называть *операторной*.

Как правило, нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать одинаково $\| \ \|$, приписывая внизу индекс p, когда это нужно.

6.1.2. Нумерация

Общий случай бесконечного счетного множества C с помощью нумерации можно свести к частному случаю множества $C = \mathbb{N}$ натуральных чисел считающей меры $d\nu = dn$ на алгебре всех частей $\mathbb{N}$ числовых последовательностей $V = Y = (y_n)$. В этом случае $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, dn) = l^p$. Пусть еще $b^p = \mathscr{B}(l^p)$, $c^p = \mathscr{C}(l^p)$.

Введем в рассмотрение: нумерацию $s \colon \mathbb{N} \to C$, определяемую ею $C \times \mathscr{N}$-матрицу $S = (e_{\gamma m})$ с элементами $e_{\gamma m} = 1$ $(\gamma = s(m))$, $e_{\gamma m} = 0$ $(\gamma \neq s(m))$; обратную $\mathbb{N} \times C$-матрицу $S^{-1} = (e_{m\gamma})$; произвольную $C \times C$-матрицу $M = (a_{\gamma\delta})$; получающуюся из нее нумерацией s строк и столбцов $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-матрицу

$$F = S^{-1}MS = (a_{s(m)s(n)}).$$

(Здесь и всюду далее, когда не оговорено, $\gamma \in C$, $\delta \in C$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. А матрица $M = (a_{\gamma\delta})$ — произвольная $C \times C$-матрица.)

Предложение. 1) *Матрица S представляет изометрию $\mathscr{L}^p$ на l^p;*

2) $M \in \mathscr{B}^p$, $\|M\| = a \Leftrightarrow F \in b^p$; $\|F\| = a$;

3) $M \in \mathscr{C}^p \Leftrightarrow F \in c^p$.

$\square$ Пусть $X = (x_\gamma)$ и $Y = XS = (y_n)$, где $y_n = x_s(n)$.

1) При $1 \leq p < \infty$ суммируемость семейства $|x_\gamma|^p$ эквивалентна суммируемости ряда $|y_n|^p$, причем их суммы равны. Кроме того, верно равенство $\sup|x_\gamma| = \sup|y_n|$. Значит, $X \in \mathscr{L}^p \Leftrightarrow Y \in l^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Ясно, что $x \to Y$ есть отображение $\mathscr{L}^p$ на всё l^p и верно равенство $\|X\|_p = \|Y\|_p$.

2) Если $X \in \mathscr{L}^p$ и $XM \in \mathscr{L}^p$, то $Y = XS \in l^p$ и $YF = XS(S^{-1}MS) = (XM)S \in l^p$. Точно так же если $Y \in l^p$ и $YF \in l^p$, то $X = YS^{-1} \in \mathscr{L}^p$ и $XM = (YF)S^{-1} \in \mathscr{L}^p$. Значит, M представляет линейный оператор в $\mathscr{L}^p$ тогда и только тогда, когда F представляет линейный оператор в l^p.

Так как операторы S и S^{-1} являются ограниченными, то оператор M ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор F. А так как $\|S\| = \|S^{-1}\| = 1$, то $\|M\| \leq \|S\| \cdot \|F\| \cdot \|S^{-1}\| = \|F\|$ и $\|F\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|M\|$.

3) Произведение ограниченного оператора на компактный есть компактный оператор. Поэтому $M = SFS^{-1}$ компактен тогда и только тогда, когда компактен $F = S^{-1}MS$. $\blacksquare$

Замечание. Доказанное предложение позволяет переходить от $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(C, d\nu)$ к l^p, когда это удобно. Использование $\mathscr{L}^p$ в качестве основного пространства связано с приложениями к марковским последовательностям со счетным множеством значений, которое часто не имеет естественной нумерации.

6.1.3. Литературные ссылки

В главе рассматриваются $C \times C$-матрицы и числовые семейства, а в большинстве работ — $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-матрицы и числовые последовательности. Точные ссылки на такие работы часто связаны с оговорками и дополнительными рассуждениями. К тому же этих работ много, и они написаны в самых разных стилях. Поэтому вместо многих конкретных ссылок даются краткие аннотации работ, методы и результаты которых используются в тексте. Их описание позволяет также получить некоторое представление о теории матричных операторов и ее приложениях.

Все нужные определения и теоремы, связанные с суммированием числовых семейств, есть в книгах Н. Бурбаки [13] и Л. Я. Савельева [80]. Суммы являются интегралами по считающим мерам, и поэтому матричные операторы в $\mathscr{L}^p$ являются интегральными.

Интегральным операторам посвящена обширная литература, в частности книги П. Халмоша и В. Сандера [110], В. Б. Короткова [47–49]. Абстрактные интегральные операторы описываются в главе 6 книги Н. Данфорда и Дж. Шварца [28], в главе 11 книги Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [33], в главе 9 книги Р. Эдвардса [124]. В книгах [33] и [124] выделяются матричные операторы.

Бесконечные матрицы и системы линейных уравнений подробно описаны в книге Р. Кука [52]. Большая обзорная статья И. И. Волкова и П. Л. Ульянова, добавленная к книге, посвящена методам суммирования, определяемым бесконечными матрицами. Теория решения бесконечных систем линейных уравнений излагается в главе 1 книги Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [34]. В ней сказано также, где можно найти дополнительную литературу.

Обзоры известных условий, при которых матрицы представляют ограниченные операторы, есть в статьях [131] и [147]. В статье [147] и книге К. Зеллера, В. Бикмана [150] содержится обширная библиография.

6.1.4. Матричные операторы в $\mathscr{L}^p$

Матричные операторы в $\mathscr{L}^p$ ограничены. Этот результат очень важен. Докажем его в нужной форме (ср. [110, лемма 3.9, теорема 3.10]). Сначала докажем вспомогательное предложение. (Здесь и всюду далее, когда не оговорено, $U = (u_\gamma)$, $V = (v_\gamma)$, $W = (w_\gamma)$, $V^n = \left(v^n_\gamma\right)$, $W^n = \left(w^n_\gamma\right)$ обозначают векторы пространства $\mathscr{V}$; $\mathscr{K} = \mathscr{K}(C)$ обозначает класс конечных частей множества C.)

Лемма. *Для каждой сходящейся в $\mathscr{L}^p$ последовательности векторов $V^n \in \mathscr{L}^p$ существует подпоследовательность $V^{r(n)}$, которая покоординатно ограничена некоторым вектором $U \in \mathscr{L}^p$.*

□ Выберем строго возрастающую последовательность номеров $r(m)$, для которых $\|V^{r(m+1)} - V^{r(m)}\| \le 2^{-m}$. Рассмотрим $A = (a_\gamma)$ и $\Delta^m = \left(\left|\delta_\gamma^m\right|\right)$, где $a_\gamma = \left|v_\gamma^{r(1)}\right|$ и $\delta_\gamma^m = v_\gamma^{r(m+1)} - v_\gamma^{r(m)}$. Так как $V^{r(1)}, V^{r(m+1)} - V^{r(m)} \in \mathscr{L}^p$, то $A, \Delta^m \in \mathscr{L}^p$ [80, ч. 1, гл. 3, п. 2.2.3, теорема 3] и $\left|\delta_\gamma^m\right| \le \|\Delta^m\| \le 2^{-m}$.

Положим $B^n = \sum\limits_{m<n} \Delta^m = \left(b_\gamma^n\right)$, $b_\gamma^n = \sum\limits_{m<n} \left|\delta_\gamma^m\right|$. Последовательность b_γ^n возрастает и $b_\gamma^n \le 1$. поэтому существует $b_\gamma = \lim\limits_n b_\gamma^n \le 1$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда

$$\sum_\gamma \left|b_\gamma^n\right|^p = \|B^n\|^p \le \left(\sum_{m<n} \|\Delta^m\|\right)^p \le 1,$$

$$\sum_{\gamma\in K} |b_\gamma|^p = \lim_n \left(\sum_{\gamma\in K} \left|b_\gamma^n\right|^p\right) \le 1 \quad (K \in \mathscr{K}),$$

$$\sum_\gamma |b_\gamma|^p = \lim_K \left(\sum_{\gamma\in K} |b_\gamma|^p\right) \le 1.$$

Значит, $B = (b_\gamma) \in \mathscr{L}^p$ и $\|B\| \le 1$. Теперь пусть $p = \infty$. Так как $|b_\gamma| = b_\gamma \le 1$, то $B = (b_\gamma) \in \mathscr{L}^\infty$ и $\|B\| \le 1$. Таким образом, $B \in \mathscr{L}^p$ и $\|B\| \le 1$ при $1 \le p \le \infty$. Заметим еще, что $\left|\delta_\gamma^m\right| \le 2^{-m}$, $\sum\limits_m \left|\delta_\gamma^m\right| \le 1$ и поэтому

$$v(\gamma,\cdot) = \lim_n v_\gamma^{r(n)} = \lim_n \left(v_\gamma^{r(1)} + \sum_{m<n} \delta_\gamma^m\right) = v_\gamma^{r(1)} + \sum_m \delta_\gamma^m,$$

когда $V^n \to V$ в $\mathscr{L}^p$ и, следовательно, $v_\gamma^n \to v_\gamma$.

Из определений следует, что

$$\left|v_\gamma^{r(n)}\right| = \left|v_\gamma^{r(1)} + \sum_{m<n} \delta_\gamma^m\right| \le \left|v_\gamma^{r(1)}\right| + \sum_{m<n} \left|\delta_\gamma^m\right| = a_\gamma + b_\gamma^n \le a_\gamma + b_\gamma.$$

Таким образом, подпоследовательность $V^{r(n)}$ покоординатно ограничена вектором $U = A + B \in \mathscr{L}^p$. ■

Замечание. Пусть $V^n \to V$ в $\mathscr{L}^p$. Тогда $v^n_\gamma \to v_\gamma$, так как $\left|v^n_\gamma - v_\gamma\right| \le \|V^n - V\|$. Из сходимости по норме в $\mathscr{L}^p$ следует покоординатная сходимость.

Теорема. *Каждый матричный оператор M в пространстве $\mathscr{L}^p$ ограничен.*

□ По теореме о замкнутом графике (4.5.4) достаточно показать, что M замкнут. Пусть $V^n M = W^n$, $V^n \to V$ и $W^n \to W$ в $\mathscr{L}^p$. Из доказанной леммы следует, что существуют подпоследовательность $V^{r(n)}$ и строка $U \in \mathscr{L}^p$ такие, что $\left|v^{r(n)}_\gamma\right| \le u_\gamma$ ($n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in C$). Оператор M определен на всем пространстве $\mathscr{L}^p$ и поэтому $UM \in \mathscr{L}^p$. Следовательно, семейство $(u_\gamma a_{\gamma\delta})_\gamma$ и вместе с ним семейство $(|u_\gamma a_{\gamma\delta}|)_\gamma$ суммируемы для каждого $\delta \in C$.

Таким образом,

$$v^{r(n)}_\gamma a_{\gamma\delta} \to v_\gamma a_{\gamma\delta}, \quad \left|v^{r(n)}_\gamma a_{\gamma\delta}\right| = \left|v^{r(n)}_\gamma\right|\left|a_{\gamma\delta}\right| \le u_\gamma |a_{\gamma\delta}| = |u_\gamma a_{\gamma\delta}|,$$
$$\sum_\gamma |u_\gamma a_{\gamma\delta}| < \infty, \quad w^{r(n)}_\delta = \sum_\gamma v^{r(n)}_\gamma a_{\gamma\delta} \to w_\delta.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости отсюда вытекает, что

$$w_\delta = \lim_n w^{r(n)}_\delta = \lim_n \left(\sum_\gamma v^{r(n)}_\gamma a_{\gamma\delta} \right)$$
$$= \sum_\gamma \lim_n \left(v^{r(n)}_\gamma a_{\gamma\delta}\right) = \sum_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta}.$$

Значит, $VM = W$, оператор M замкнут и, следовательно, ограничен. ■

Замечание. При доказательстве теоремы существенно использовалась всюду определенность матричного оператора M. Если не требовать, чтобы оператор был определен на всем рассматриваемом пространстве, то можно с каждой матрицей связать линейный оператор, определенный на некотором подпространстве. Он может быть неограничен [110, § 3].

Отметим еще, что при $1 \le p < \infty$ все ограниченные линейные операторы в $\mathscr{L}^p$ матричные, так как при $1 \le p < \infty$ пространство $\mathscr{L}^p$ имеет аналитическую базу из векторов $E_\alpha = (e_{\alpha\beta})_\beta$, где $e_{\alpha\alpha} = 1$ и $e_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta \ne \alpha$ $(\alpha, \beta \in C)$. В самом деле, для каждых $V \in \mathscr{L}^p$ и $M \in \mathscr{B}^p$ имеем

$$M(V) = M\biggl(\sum_\gamma v_\gamma E_\gamma\biggr) = \sum_\gamma v_\gamma M(E_\gamma) = \sum_\gamma (v_\gamma (a_{\gamma\delta})_\delta) = \biggl(\sum_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta}\biggr)_\delta,$$

где $M(E_\gamma) = (a_{\gamma\delta})_\delta \in \mathscr{L}^p$. (Суммируемость рассматриваемых семейств и справедливость равенств следуют из непрерывности оператора M и базовости векторов E_α.) Значит, оператор M представляется $C \times C$-матрицей $(a_{\gamma\delta})$ (ср. [33, XI.2.1]).

6.1.5. Матричные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$V(I - T) = W, \qquad (*)$$

где V и W обозначают произвольные C-строки, I — единичную $C \times C$-матрицу и T — произвольную $C \times C$-матрицу. Задача заключается в том, чтобы при данных T и W решить уравнение $(*)$ относительно V, т. е. найти условия, при которых решения уравнения $(*)$ существуют, и описать эти решения.

Такая задача будет решена для специального класса матриц T, равных полиномам от стохастических матриц. Это связано с приложениями к теории серий в марковских последовательностях. Сначала исследуются условия, при которых матрицы представляют ограниченные и компактные операторы, потом для решения $(*)$ используются операторные методы.

Уравнение $(*)$ возникает, в частности, при исследовании совместного распределения некоторых характеристик серий в марковских случайных последовательностях. Рассматривается банахово пространство $\mathscr{L}^{\infty,1}$ со смешанной нормой [127], принадлежащая ему производящая функция f исследуемого распределения, ограниченный линейный оператор $K\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ и функция g. Функция $f = V$ является решением уравнения $(*)$ при $T = K$ и $W = g$ при данных K и g [91].

6.2. Ограниченные матричные операторы

Опишем условия, при которых матрица M представляет ограниченный линейный оператор в пространстве $\mathscr{L}^p$.

6.2.1. Вырожденные матрицы

Для каждого множества $X \subseteq C$ рассмотрим диагональную $C \times C$-матрицу $I(X)$, у которой элементы на пересечении строк и столбцов с индексами из X равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Диагональ матрицы $I(X)$ является индикатором множества X. Поэтому будем называть такие матрицы *индикаторными* и вместо $I(X)$ писать X. В частности, единичную $C \times C$-матрицу $I = I(C)$ будем обозначать также C.

Каждые конечные множества $L \subseteq C$, $N \subseteq C$ и $C \times C$-матрица M определяют $C \times C$-матрицу

$$M(L, N) = LMN.$$

У этой матрицы все строки с индексами $\gamma \notin L$ и столбцы с индексами $\delta \notin N$ нулевые. Будем называть матрицы $M(L, N)$ *вырожденными*.

Заметим, что матрицы L, N, $M(L, N)$ при $1 \le p \le \infty$ представляют операторы из $\mathscr{B}^p$ и $\|L\| \le 1$, $\|N\| \le 1$. Кроме того,

$$\|M(L_1, N_1)\| \le \|M(L_2, N_2)\| \quad (L_1 \subseteq L_2, N_1 \subseteq N_2).$$

Действительно, так как $L_1 = L_1 L_2$ и $N_1 = N_2 N_1$, то

$$\begin{aligned} \|M(L_1, N_1)\| &= \|L_1 M N_1\| = \|L_1 L_2 M N_2 N_1\| \\ &\le \|L_1\| \|L_2 M N_2\| \|N_1\| \le \|L_2 M N_2\| = \|M(L_2, N_2)\|. \end{aligned}$$

В частности,

$$\|M(L, N)\| \le \|M(L \cup N, L \cup N)\|.$$

Выделим матрицы

$$M(K) = M(K, K) = KMK,$$

получающиеся при $K = L = N$. Из определений следует, что $M(K) = (a_{\gamma\delta}(K))$, где $a_{\gamma\delta}(K) = a_{\gamma\delta}$ при $\gamma \in K$ и $\delta \in K$, $a_{\gamma\delta}(K) = 0$ при $\gamma \notin K$ или $\delta \notin K$.

Порядок $\supseteq$ является направлением в классе $\mathscr{K} = \mathscr{K}(C)$. Для каждых $\gamma \in C$, $\delta \in C$ элементы $a_{\gamma\delta}(K)$ матрицы $M(K)$ образуют числовую направленность, а операторы $M(K)$ — направленность в банаховом пространстве $\mathscr{B}^p$ при $1 \le p \le \infty$. Будем сходимость по направлению $\supseteq$ в классе $\mathscr{K}$ записывать $K \to C$. Из определений следует, что $a_{\gamma\delta}(K) \to a_{\gamma\delta}$ $(K \to C)$ для каждых γ, δ. Определяемая матрицей M направленность вырожденных операторов $M(K)$ может быть или не быть ограниченной в данном пространстве $\mathscr{B}^p$, сходиться или не сходиться в нем при $K \to C$.

6.2.2. Критерий ограниченности

Сформулируем общее условие, при котором матрица M представляет ограниченный оператор в $\mathscr{L}^p$ (ср. [33, XI.2.2]).

Теорема. *Матрица M представляет ограниченный оператор из пространства $\mathscr{B}^p$ тогда и только тогда, когда множество вырожденных операторов $M(K)$ ограничено в $\mathscr{B}^p$.*

☐ 1. Необходимость сформулированного условия следует из неравенств

$$\|M(K)\| = \|KMK\| \le \|K\|\|M\|\|K\| \le \|M\|,$$

верных для каждых $M \in \mathscr{B}^p$ и $K \in \mathscr{K}$.

2. Докажем достаточность условия теоремы. Пусть $\|M(K)\| \le c < \infty$ $(K \in \mathscr{K})$. Тогда

$$\|M(L, N)\| \le \|M(L \cup N, L \cup N)\| \le c, \quad \|V \cdot M(L, N)\| \le c\|V\|,$$

т. е.

$$\begin{gathered}\Bigg(\sum_{\delta \in N} \Bigg|\sum_{\gamma \in L} v_\gamma a_{\gamma\delta}\Bigg|^p\Bigg)^{1/p} \le c\|V\| \quad (1 \le p < \infty),\\ \sup_{\delta \in N} \Bigg|\sum_{\gamma \in L} v_\gamma a_{\gamma\delta}\Bigg| \le c\|V\| \quad (p = \infty).\end{gathered} \tag{$**$}$$

При $N = \{\delta\}$ из неравенств $(**)$ вытекает, что конечные суммы семейства $(v_\gamma a_{\gamma\delta})_\gamma$ ограничены числом $c\|V\|$. Следовательно, это семейство суммируемо. Пусть

$$\sum_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta} = w_\gamma, \quad VM = W = (w_\delta).$$

Тогда при $L \to C$ неравенства $(**)$ дают

$$\left(\sum_{\delta \in N} |w_\delta|^p\right)^{1/p} \leq c\|V\| \quad (1 \leq p < \infty),$$
$$\sup_{\delta \in N} |w_\delta| \leq c\|V\| \quad (p = \infty).$$

Отсюда вытекает, что при $1 \leq p < \infty$ конечные суммы семейства $(|w_\delta|^p)_\delta$ ограничены числом $(c\|V\|)^p$, а при $p = \infty$ семейство $(|w_\delta|)_\delta$ ограничено числом $c\|V\|$. Следовательно, $VM = W \in \mathscr{L}^p$, $M \in \mathscr{B}^p$ и $\|M\| \leq c$ при $1 \leq p \leq \infty$. ■

Пусть
$$s^p(M) = \sup \|M(K)\|_p.$$

Тогда теорема утверждает, что

$$M \in \mathscr{B}^p \Leftrightarrow s^p(M) < \infty.$$

А из полученных при ее доказательстве неравенств $\|M(K)\| \leq \|M\|$ и $\|M\| \leq c$ при $\|M(K)\| \leq c$ следует равенство

$$\|M\|_p = s^p(M).$$

(Если $M \notin \mathscr{B}^p$, то считается, что $\|M\|_p = \infty$.)

Замечание. Направленность норм $\|M(K)\|$ возрастающая: $\|M(K)\| \leq \|M(L)\|$ при $K \subseteq L$. Это легко проверить. Следовательно, $\lim \|M(K)\| = \sup \|M(K)\| \leq \infty$ и верно равенство

$$\|M\| = \lim \|M(K)\|.$$

Значит, матрица M представляет оператор из $\mathscr{B}^p$ тогда и только тогда, когда направленность норм $\|M(K)\|_p$ вырожденных матриц $M(K)$ сходится.

6.2.3. Частные случаи

Конкретизируем сформулированное общее условие операторности матрицы M для случаев $p = 1$ и $p = \infty$ (ср. [137, 138, 141]).

Рассмотрим обещанные нормы в пространствах $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^\infty$ для строк и столбцов матрицы M:

$$r(M) = \sup_\gamma \biggl(\sum_\delta |a_{\gamma\delta}| \biggr), \quad c(M) = \sup_\delta \biggl(\sum_\gamma |a_{\gamma\delta}| \biggr).$$

Естественно ожидать, что эти числа связаны с нормами представляемых матрицей M операторов в пространствах $\mathscr{B}^1$ и $\mathscr{B}^\infty$.

Лемма. $r(M) = s^1(M)$, $c(M) = s^\infty(M)$.

□ 1. Возьмем $\alpha \in C$ и строку I^α с индексом α единичной $C \times C$-матрицы I. Заметим, что $I^\alpha \in \mathscr{L}^1$, $\|I^\alpha\| = 1$ и

$$\sum_{\delta \in K} |a_{\alpha\delta}| = \|I^\alpha \cdot M(K)\| \le \|I^\alpha\| \|M(K)\| \le \|M(K)\| \le s^1(M),$$

когда $\alpha \in K$ и нормы вычисляются для $p = 1$. Следовательно, $r(M) \le s^1(M)$.

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} \|VM(K)\| &= \sum_{\delta \in K} \biggl| \sum_{\gamma \in K} v_\gamma a_{\gamma\delta} \biggr| \le \sum_{\delta \in K} \sum_{\gamma \in K} |v_\gamma a_{\gamma\delta}| \\ &= \sum_{\gamma \in K} |v_\gamma| \biggl(\sum_{\delta \in K} |a_{\gamma\delta}| \biggr) \le \biggl(\sum_{\gamma \in K} |v_\gamma| \biggr) r(M) \le \|V\| r(M) \end{aligned}$$

для каждых $K \in \mathscr{K}$ и $V = (v_\gamma) \in \mathscr{L}^1$. Значит, $\|M(K)\| \le r(M)$ и $s^1(M) \le r(M)$. Таким образом, $r(M) = s^1(M)$.

2. Возьмем $\beta \in C$ и строку $V^\beta = \bigl(v^\beta_\gamma\bigr)$ с элементами $v^\beta_\gamma = \exp(-i \arg a_{\gamma\delta})$. Ясно, что $V^\beta \in \mathscr{L}^\infty$ и $\|V^\beta\| = 1$. Для каждого $K \in \mathscr{K}$ рассмотрим $V^\beta \cdot M(K) = W^\beta(K) = \bigl(w^\beta_\delta(K)\bigr)_\delta$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in K} |a_{\gamma\beta}| &= \sum_{\gamma \in K} \exp(-i \arg a_{\gamma\beta}) \cdot a_{\gamma\beta} = \bigl| w^\beta_\beta(K) \bigr| \le \sup_\delta \bigl| w^\beta_\delta(K) \bigr| \\ &= \|W^\beta(K)\| \le \|V^\beta\| \|M(K)\| \le \|M(K)\| \le s^\infty(M), \end{aligned}$$

когда $\beta \in K$ и нормы вычисляются для $p = \infty$. Следовательно, $c(M) \le s^\infty(M)$.

Вместе с тем,

$$\|V \cdot M(K)\| = \sup_\delta \left| \sum_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta} \right| \le \sup_\delta \sum_\gamma |v_\gamma a_{\gamma\delta}| \\ \le \|V\| \cdot \sup_\delta \sum_\gamma |a_{\gamma\delta}| = \|V\| \cdot c(M)$$

для каждых $K \in \mathscr{K}$ и $V = v_\gamma \in \mathscr{L}^\infty$. Значит, $\|M(K)\| \le c(M)$ и $s^\infty(M) \le c(M)$.

Таким образом, $c(M) = s^\infty(M)$. ■

Замечание. Известно, что пространство $(l^1)^*$ изометрично пространству l^∞ [28, IV.8.5] и [33, VI.2]. Следовательно (предложение 1.2), $(\mathscr{L}^1)^*$ изометрично $\mathscr{L}^\infty$. Поэтому матрица M представляет ограниченный линейный оператор в $\mathscr{L}^1$ тогда и только тогда, когда эрмитово сопряженная с ней матрица M^* представляет ограниченный линейный оператор в $\mathscr{L}^\infty$ [28, VI.2.2] и [33, IX.3]. Кроме того, $r(M) = c(M^*)$, $\|M\|_1 = \|M^*\|_\infty$ и, значит, равенства леммы эквивалентны.

Из доказанных леммы и теоремы вытекает

Следствие. $M \in \mathscr{B}^1 \Leftrightarrow r(M) < \infty$, $M \in \mathscr{B}^\infty \Leftrightarrow c(M) < \infty$.

Если вместо $M \notin \mathscr{B}^p$ писать $\|M\|_p = \infty$, то утверждения следствия можно выразить равенствами

$$\|M\|_1 = r(M), \quad \|M\|_\infty = c(M).$$

6.2.4. Карлемановские матрицы

Сформулируем специальный критерий ограниченности для случая $p = 2$, когда пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^2$ гильбертово.

Карлемановской называется матрица $M = (a_{\gamma\delta})$, у которой $\sum\limits_\delta |a_{\gamma\delta}|^2 < \infty$ для каждого индекса γ (т. е. матрица, у которой все строки принадлежат $\mathscr{L}^2$).

Произведение MM^* матрицы M на эрмитово сопряженную с ней матрицу M^* может и не быть определено (например, при $C = \mathbb{N}$ и $a_{mn} = 1$, $n \le m$; $a_{mn} = 0$, $n > m$, для $m, n \in \mathbb{N}$).

Поэтому существование произведения MM^* нужно специально оговаривать, так же как и произведения $(MM^*)^n$ для $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что произведение $(MM^*)^n$ определено и положим

$$d(M) = \sup_n \sup_\gamma \left(\left|d^n_{\gamma\gamma}(M)\right|^{1/n}\right),$$

где $d^n_{\gamma\gamma}(M)$ обозначает диагональный элемент на пересечении строки и столбца с индексами γ матрицы $(MM^*)^n$.

Теорема. *Матрица M представляет ограниченный оператор из пространства $\mathscr{B}^2$ тогда и только тогда, когда: 1) матрица M карлемановская, 2) произведение $(MM^*)^n$ определено для каждого номера n и 3) число $d(M)$ конечно.*

□ В статье [134] эта теорема была доказана для случая $C = \mathbb{N}$. Общий случай легко сводится к нему с помощью нумерации.

Рассмотрим нумерацию $s\colon \mathbb{N} \to C$, определяемую ею $C \times \mathbb{N}$-матрицу S и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-матрицу $F = S^{-1}MS$, описанные в п. 6.1.2. Заметим, что условия 1)–3) теоремы для M эквивалентны таким же условиям для F, причем $d(M) = d(F)$. Вместе с тем, $M \in \mathscr{B}(\mathscr{L}^2) \Leftrightarrow F \in \mathscr{B}(l^2)$, а в [134] доказано, что $F \in \mathscr{B}(l^2)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1)–3) теоремы для F. Поэтому теорема верна и для M. ■

Замечание. Ограниченные операторы в $\mathscr{L}^2$, представляемые карлемановскими матрицами, называются *карлемановскими матричными операторами.* Из доказанной теоремы следует, что каждый матричный оператор в $\mathscr{L}^2$ карлемановский.

Обозначим $\sigma^2(M(K))$ наибольшее из сингулярных чисел вырожденной матрицы $M(K) = KMK$ (или отождествляемой с ней конечной $K \times K$-матрицы). Пусть

$$\sigma^2(M) = \sup \sigma^2(M(K)).$$

Сформулируем еще один критерий ограниченности.

Предложение. $M \in \mathscr{B}^2 \Leftrightarrow \sigma^2(M) < \infty$.

□ Известно [56, 6.3], что $\|M(K)\| = \sigma(M(K))$. Значит, $\sigma^2(M) < \infty$ эквивалентно $s^2(M) = \sup \|M(K)\| < \infty$. И сформулированное предложение следует из общего критерия ограниченности, доказанного в п. 6.2.2. ■

6.2.5. Положительные матрицы

Всюду в этом пункте будем предполагать, что $a_{\gamma\beta} \geq 0$ для всех индексов, и писать $M \geq 0$. Положим

$$b(M) = \min\{r(M), c(M)\}.$$

Сформулируем простое достаточное условие ограниченности представляемого положительной матрицей оператора.

Предложение. *Если* $M \geq 0$ *и* $b(M) < \infty$, *то* $M \in \mathscr{B}^2$ *и* $\|M\| \leq b(M)$.

□ Если $M \geq 0$, то норма $\|M(K)\|$ матрицы $M(K)$ в пространстве $\mathscr{B}^2$ равна ее спектральному радиусу $\rho(M(K))$, т. е. наибольшему по абсолютной величине собственному числу вырожденной матрицы $M(K) = KMK$ (или отождествляемой с ней конечной $K \times K$-матрицы; см. [56, теорема 9.3.1]). По теореме Фробениуса $\rho(M(K)) \leq b(M(K))$ [60, ч. 3, п. 1.6.2]. Ясно, что $r(M(K)) \leq r(M)$, $c(M(K)) \leq c(M)$ и поэтому $b(M(K)) \leq b(M)$. Следовательно,

$$\|M(K)\| = \rho(M(K)) \leq b(M(K)) \leq b(M).$$

Если $b(M) < \infty$, то по общему критерию ограниченности и сказанному в п. 6.2.2 отсюда вытекает, что $M \in \mathscr{B}^2$ и $\|M\| = \sup \|M(K)\| \leq b(M)$. ■

Условие $b(M) < \infty$ означает равномерную суммарную ограниченность элементов матрицы M по строкам и столбцам.

Замечание. Удобное достаточное условие (*критерий Шура*) того, чтобы положительная матрица представляла ограниченный оператор в l^2 и указания на его обобщения, есть в [109, пп. 37, 135].

6.3. Компактные матричные операторы

Опишем условия, при которых матрица M представляет компактный линейный оператор в пространстве $\mathscr{L}^p$.

6.3.1. Дополнительные матрицы

Для каждого конечного множества $K \subseteq C$ вместе с матрицей $M(K) = KMK$ рассмотрим матрицу

$$\Delta M(K) = M - M(K).$$

Условимся такие матрицы называть *дополнительными*.

Матрицы $M(K)$ и $\Delta M(K)$ составляют направленности в векторном пространстве M, определенные на классе $\mathscr{K}$ с направлением $\supseteq$. Пределы по такому направлению будем записывать $K \to C$. (Теория пределов для направленностей подробно излагается в [39].) Они сводятся к пределам $K(n) \to C$ по последовательностям множеств $K(n) \in \mathscr{K}$, обладающих свойством: для каждого $K \in \mathscr{K}$ существует номер $n(0)$ такой, что $K(n) \supseteq K$ для всех номеров $n \geq n(0)$.

Так как $M(K) \in \mathscr{B}^p$, то $\Delta M(K) \in \mathscr{B}^p$ при $M \in \mathscr{B}^p$ и $M(K) \to M$ $(K \to C)$ эквивалентно $\Delta M(K) \to 0$ $(K \to C)$ в пространстве $\mathscr{B}^p$.

6.3.2. Критерий компактности

Этот критерий похож на общий критерий ограниченности (п. 6.2.2). Но в критерии компактности вместо ограниченности направленности вырожденных матриц требуется ее сходимость (ср. [33, XI, 2.2]).

Лемма. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и $M \in \mathscr{C}^p$. Тогда $M \cdot (C - K) \to 0$ в $\mathscr{B}^p$ при $K \to C$.*

□ Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $M \in \mathscr{C}^p$, то образ $\{W = VM : \|V\| \leq 1\}$ единичного шара $\{V : \|V\| \leq 1\}$ в $\mathscr{L}^p$ относительно компактен и в нем есть ε-сеть $W_i = V_i M$, $\|V_i\| \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть $\|V\| \leq 1$, $W = VM$ и $\|W - W_{i(0)}\| \leq \varepsilon$ $(1 \leq i(0) \leq m)$. Тогда

$$\begin{aligned}\|VM \cdot (C-K)\| &= \|W \cdot (C-K)\| \\ &\leq \|(W - W_{i(0)}) \cdot (C-K)\| + \|W_{i(0)} \cdot (C-K)\| \\ &\leq \|W - W_{i(0)}\| + \|W_{i(0)} \cdot (C-K)\| \leq \varepsilon + \|W_{i(0)} \cdot (C-K)\|.\end{aligned}$$

А по критерию Коши суммируемости существует множество $K(0) \in \mathscr{K}$ такое, что

$$\|W_{i(0)} \cdot (C-K)\|^p = \sum_{\gamma \notin K} \left|w_\gamma^0\right|^p \leq \varepsilon^p$$

при $W_{i(0)} = w_\gamma^0$ и каждом $K \supseteq K(0)$. Следовательно,

$$\|VM \cdot (C - K)\| \le 2\varepsilon \quad (\|V\| \le 1,\ K \supseteq K(0)),$$
$$\|M \cdot (C - K)\| \le 2\varepsilon \quad (K \supseteq K(0)).$$

Значит, $M \cdot (C - K) \to 0$ при $K \to C$. ■

Теорема. *Матрица M представляет компактный оператор из пространства $\mathscr{B}^p$ тогда и только тогда, когда определяемая M направленность вырожденных операторов $M(K)$ сходится в $\mathscr{B}^p$.*

□ 1. Докажем необходимость. Рассмотрим сначала случай $1 \le p < \infty$. Пусть $M \in \mathscr{C}^p$, $K \in \mathscr{K}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} M = CMC = (K + (C - K))M(K + (C - K)) \\ = KMK + (C - K)MK + M(C - K), \end{aligned}$$

$$\Delta M(K) = M - KMK = (C - K)MK + M \cdot (C - K).$$

Введем $V \in \mathscr{L}^p$, $L \in \mathscr{K}$. Так как $L \cdot (C - K) = L - L = 0$ при $K \supseteq L$, то

$$\begin{aligned} VL \cdot \Delta M(K) = VL \cdot (C - K)MK + VL \cdot M \cdot (C - K) \\ = VL \cdot M \cdot (C - K) \quad (K \supseteq L), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} V \cdot \Delta M(K) = (V \cdot L + V \cdot (C - L)) \cdot \Delta M(K) \\ = V \cdot LM \cdot (C - K) + V \cdot (C - L) \cdot \Delta M(K) \quad (K \supseteq L). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|W \cdot \Delta M(K)\| \le \|WM\| + \|WKMK\| \\ \le \|W\|\|M\| + \|W\|\|K\|\|M\|\|K\| \le 2\|W\|\|M\| \end{aligned}$$

для каждого $W \in \mathscr{L}^p$, то $W \cdot \Delta M(K) \to 0$ при $W \to 0$ равномерно относительно $K \in \mathscr{K}$. Вместе с тем, $W(L) = V \cdot (C - L) \to 0$ при $L \to C$. Следовательно, для каждых $\varepsilon > 0$ и $V \in \mathscr{L}^p$ существует $L(V) \in \mathscr{K}$ такое, что

$$\|V \cdot (C - L) \cdot \Delta M(K)\| \le \varepsilon \quad (L \supseteq L(V))$$

для всех $K \in \mathscr{K}$. А по лемме существует $K(0) \in \mathscr{K}$ такое, что

$$\|M \cdot (C - K)\| \le \varepsilon \quad (K \supseteq K(0)).$$

Значит, при $\|V\| \le 1$ и $K \supseteq K(0)$ верны неравенства

$$\begin{aligned}\|V \cdot \Delta M(K)\| &\le \|V \cdot L(V) \cdot M \cdot (C - K)\| + \|V \cdot (C - L(V)) \cdot \delta M(K)\| \\ &\le \|M \cdot (C - K)\| + \|V \cdot (C - L(V)) \cdot \Delta M(K)\| \le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\Delta M(K)\| \le 2\varepsilon \quad (K \supseteq K(0)),$$

т. е. $\Delta M(K) \to 0$ и $M(K) \to M$ при $K \to C$. Таким образом, при $1 \le p < \infty$ условие теоремы необходимо.

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$. Пусть $M \in \mathscr{C}^\infty$ и M^* — эрмитово сопряженная с ней матрица. Как уже отмечалось (п. 2.3), $M^* \in \mathscr{B}^1$, когда $M \in \mathscr{B}^\infty$. По общей теореме о компактности сопряженного оператора [33, IX.3, теорема 3] из $M \in \mathscr{C}^\infty$ следует $M^* \in \mathscr{C}^1$. По только что доказанному для этого необходимо, чтобы $\|\Delta M^*(K)\| \to 0$ $(K \to C)$. Но $\Delta M^*(K) = M^* - KM^*K = (M - KMK)^* = \Delta M(K)^*$. Так как при сопряжении норма сохраняется [33, IX.3, теорема 1], то отсюда вытекает, что $\|\Delta M(K)\| = \|\Delta M(K)^*\| = \|\Delta M^*(K)\|$ и $\|\Delta M(K)\| \to 0$, $\Delta M(K) \to 0$, $M(K) \to M$ $(K \to C)$. Таким образом, условие теоремы необходимо при $p = \infty$.

2. Докажем его достаточность. Снова рассмотрим сначала случай $1 \le p < \infty$. Если направленность $M(K) = KMK$ сходится в себе, то вследствие полноты пространства $\mathscr{B}^p$ [33, V.3.1] она сходится к некоторому оператору $N \in \mathscr{B}^p$. Как было отмечено в п. 1.4, при $1 \le p < \infty$ этот оператор матричный. Пусть $N = (b_{\gamma\delta})$. Для каждых $\alpha, \beta \in C$ рассмотрим матрицу $E_{\alpha\beta} = \left(e^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\right)$ с элементами $e^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = 1$, $e^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = 0$ при $\gamma \ne \alpha$ или $\delta \ne \beta$. Из определений следует, что

$$\begin{aligned}b_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\alpha}NE_{\beta\beta} \\ &= E_{\alpha\alpha} \cdot \lim M(K) \cdot E_{\beta\beta} = \lim(E_{\alpha\alpha} \cdot M(K) \cdot E_{\beta\beta}) \\ &= \lim(a_{\alpha\beta}(K) \cdot E_{\alpha\beta}) = \lim a_{\alpha\beta}(K) \cdot E_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Значит, $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ и $N = M$.

Так как множества K конечные, то операторы $M(K) = KMK$ вырожденные и, следовательно, компактные. Если направленность $M(K)$ сходится в пространстве $\mathscr{B}^p$ к оператору M, то $M = \lim M(K(n))$ для любой базовой последовательности множеств $K(n)$. А так как операторы $M(K(n))$ компактны, то и M является компактным [33, IX.2]. Значит, при $1 \le p < \infty$ условие теоремы достаточно.

Снова рассмотрим случай $p = \infty$. Вместе с M возьмем эрмитово сопряженную с ней матрицу M^*. Так как $M^*(K) = KM^*K = (KMK)^* = M(K)^*$ и

$$\|M^*(K) - M^*(L)\|_1 = \|M(K) - M(L)\|_\infty,$$

то сходимость $M(K)$ в $\mathscr{B}^\infty$ влечет сходимость $M^*(K)$ в $\mathscr{B}^1$. По доказанному она обеспечивает компактность M^*. А так как $(\mathscr{L}^1)^* = \mathscr{L}^\infty$, то $M^* \in \mathscr{C}^1$ эквивалентно $M \in \mathscr{C}^\infty$ [33, IX.3.4]. Значит, условие теоремы достаточно и при $p = \infty$. ■

Замечание. Таким образом, ограниченность матричного оператора M означает сходимость направленности норм $\|M(K)\|$, а компактность M означает сходимость направленности матриц $M(K)$.

6.3.3. Частные случаи

Конкретизируем общее условие компактности для случаев $p = 1$ и $p = \infty$ (ср. [133, 143]). Как было показано в п. 6.2.3, $\|M\|_1 = r(M)$ и $\|M\|_\infty = c(M)$ для каждой $C \times C$-матрицы M. Равенства $r(M) = \infty$ и $c(M) = \infty$ означают, что $M \notin \mathscr{B}^1$ и $M \notin \mathscr{B}^\infty$.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. 1) $M \in \mathscr{C}^1 \Leftrightarrow r(M - KMK) \to 0 \Leftrightarrow r(M - MK) \to 0$;

2) $M \in \mathscr{C}^\infty \Leftrightarrow c(M - KMK) \to 0 \Leftrightarrow c(M - KM) \to 0$.

□ 1) Так как $r(M - KMK) = \|M - M(K)\|_1$, то первая эквивалентность сразу вытекает из общего критерия компактности. А так как $r(M - MK) = \|M \cdot (C - K)\|_1$, то по лемме п. 3.2 $M \in \mathscr{C}^1$ влечет $r(M - MK) \to 0$. Остается доказать обратное.

Условие $r(M - MK) \to 0$ неявно предполагает, что $M - MK \in \mathscr{B}^1$ и, следовательно, $M \in \mathscr{B}^1$. Так как оператор MK вырожденный, то $MK \in \mathscr{C}^1$ и, значит, $M = \lim MK \in \mathscr{C}^1$.

2) Второе доказываемое утверждение получается из первого с помощью перехода к сопряженным операторам: $M \in \mathscr{C}^\infty \Leftrightarrow M^* \in \mathscr{C}^1$, $c(M - KMK) = r(M^* - KM^*K)$, $c(M - KM) = r(M^* - M^*K)$. ■

Замечание. Условия следствия означают равномерную малость элементов в строках и столбцах матриц $M - KMK$, $M - MK$ и $M - KM$ при достаточно больших множествах K.

6.3.4. Матрицы Гильберта — Шмидта

Сформулируем специальные условия компактности для случая $p = 2$. Положим

$$g^2(M) = \sum_\delta \sum_\gamma |a_{\gamma\delta}|^2.$$

Если $g^2(M) < \infty$, то $M = (a_{\gamma\delta})$ называется матрицей Гильберта — Шмидта.

Теорема. *Матрица Гильберта — Шмидта M представляет компактный оператор из $\mathscr{B}^2$, причем $\|M\| \le g(M)$.*

□ Пусть $g^2(M) < \infty$. Используя неравенство Коши, получаем для $V = v_\gamma \in \mathscr{L}^2$, $\|V\| \le 1$:

$$\|VM\|^2 = \sum_\delta \left| \sum_\gamma v_\gamma a_{\gamma\delta} \right|^2 \le \sum_\delta \left(\left(\sum_\delta |v_\gamma|^2 \right) \left(\sum_\gamma |a_{\gamma\delta}|^2 \right) \right) \le g^2(M).$$

Следовательно, $M \in \mathscr{B}^2$ и $\|M\| \le g(M)$. Кроме того,

$$\|M - M(K)\|^2 \le g^2(M - M(K)) = \sum_{(\gamma,\delta)\notin K\times K} |a_{\gamma\delta}|^2.$$

Семейство $|a_{\gamma\delta}|^2$ $((\gamma,\delta) \in C\times C)$ суммируемо, и по критерию Коши $g^2(M - M(K)) \to 0$ при $K \to C$. Следовательно, $M(K) \to M$, и по общему критерию компактности (п. 6.3.2) $M \in \mathscr{C}^2$. ■

Замечание. Компактные операторы в $\mathscr{L}^2$, представляемые матрицами Гильберта — Шмидта, карлемановские.

Как уже отмечалось, $\|M(K)\| = \sigma(M(K))$, где $\sigma^2(M(K))$ есть наибольшее сингулярное число вырожденной матрицы $M(K)$. Это равенство позволяет сформулировать еще один критерий компактности.

Предложение. $M \in \mathscr{C}^2 \Leftrightarrow \sigma(M(K) - M(L)) \to 0$ $(K \to C$, $L \to C)$.

□ Так как $\sigma(M(K) - M(L)) = \|M(K) - M(L)\|$, то это предложение следует из общего критерия компактности (п. 3.2) и критерия Коши сходимости. ■

Замечание. В случае, когда C есть множество целых чисел ($C = \mathbb{Z}$) и считающая мера инвариантна относительно аддитивных переносов, для вывода условий компактности матричных операторов можно использовать критерий Вейля [124, 4.20].

6.3.5. Положительные матрицы

Если $M \geq 0$ и, следовательно, $M(K) \geq 0$ для каждого $K \in \mathscr{K}$, то $\|M(K)\|_2 = \rho(M(K))$, где $\rho(M(K))$ есть спектральный радиус вырожденной матрицы $M(K)$. При $K \supseteq L$ также выполняется равенство $\|M(K) - M(L)\|_2 = \rho(M(K) - M(L))$. Оно позволяет сформулировать критерий компактности для положительных матриц.

Предложение. *Если* $M \geq 0$, *то*

$$M \in \mathscr{C}^2 \Leftrightarrow \rho(M(K) - M(L)) \to 0 \quad (K \supseteq L,\ L \to C).$$

□ Так как $M(K) - M(L) \geq 0$ при $K \supseteq L$ и $\rho(M(K) - M(L)) = \|M(K) - M(L)\|$, то это предложение следует из общего критерия компактности (п. 3.2) и критерия Коши сходимости. ■

6.4. Марковские операторы

Будем называть *марковскими* операторы, которые представляются стохастическими матрицами.

6.4.1. Условия ограниченности

Рассмотрим стохастическую матрицу $Q = (a_{\gamma\delta})$:

$$a_{\gamma\delta} \geq 0 \quad (\gamma, \delta \in C), \quad \sum_{\delta} a_{\gamma\delta} = 1 \quad (\gamma \in C).$$

Сформулируем условия, при которых Q представляет ограниченный оператор в $\mathscr{L}^p$ при $p = 1, 2, \infty$. Они выводятся из условий, описанных в пп. 2.3–2.5.

Предложение. 1) $Q \in \mathscr{B}^1$, $\|Q\|_1 = 1$;
2) $Q \in \mathscr{B}^2$, $\|Q\|_2 \leq 1$;
3) $Q \in \mathscr{B}^\infty$, $\|Q\|_\infty = c(Q) \Leftrightarrow c(Q) < \infty$.

□ Так как $r(Q) = 1$ и $b(Q) = \min\{r(Q), c(Q)\} \leq 1$, то сформулированные утверждения вытекают из следствия 6.2.3, предложения 6.2.5 и соотношений для норм, указанных в пп. 6.2.3, 6.2.5. ■

Стохастическая матрица $Q = (a_{\gamma\delta})$, у которой

$$\sum_{\gamma} a_{\gamma\delta} = 1 \quad (\delta \in C),$$

называется *дважды стохастической*. Для нее $r(Q) = c(Q) = 1$. Из доказанного предложения вытекает

Следствие. *Если матрица Q является дважды стохастической, то $Q \in \mathscr{B}^p$ при $p = 1, 2, \infty$.*

Замечание. Пусть $|C| = \infty$. Тогда: банахово пространство $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(C)$ сепарабельно, но не рефлексивно; гильбертово пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(C)$ сепарабельно и рефлексивно; банахово пространство $\mathscr{L}^\infty = \mathscr{L}^\infty(C)$ не сепарабельно и не рефлексивно [33, IV.3, V.7]. Нерефлексивность $\mathscr{L}^1$ и несепарабельность $\mathscr{L}^\infty$ затрудняет использование этих пространств.

6.4.2. Условия компактности

Сформулируем условия, при которых стохастическая матрица Q представляет компактный оператор в $\mathscr{L}^p$ при $p = 1, 2, \infty$. Они выводятся из условий, описанных в пп. 6.3.3–6.3.5.

Предложение. 1) $Q \in \mathscr{C} \Leftrightarrow r(Q - QK) \to 0 \quad (K \to C)$;
2) $Q \in \mathscr{C}^2 \Leftrightarrow \rho(Q(L) - Q(K)) \to 0 \quad (L \supseteq K,\ K \to C)$;
3) $Q \in \mathscr{C}^\infty \Leftrightarrow c(Q - KQ) \to 0 \quad (K \to C)$.

□ Это предложение вытекает из следствия 6.3.3 и предложения 6.3.5. ■

Подчеркнем, что дважды стохастическая матрица может не представлять компактный оператор, если $|C| = \infty$. Например, единичная матрица $Q = I$ дважды стохастическая, но представляемый ею тождественный оператор некомпактный при $|C| = \infty$ [33, IX.2].

Замечание. Было бы интересно найти для $1 \le p \le \infty$ еще другие условия ограниченности и условия компактности, которые бы полностью использовали специфику стохастических матриц.

6.4.3. Марковские полиномы

Разобьем C на множества A и B. Для этих множеств и соответствующих индикаторных матриц (п. 6.2.1) верны равенства $A + B = I$, $AB = 0$. Вместе со стохастической матрицей Q индикаторные матрицы A и B образуют матрицы

$$Q_1 = AQB, \quad Q_2 = BQB, \quad Q_3 = AQA, \quad Q_4 = BQA.$$

Так как матрицы Q_i положительны, составленные из них произведения ассоциативны [41, 1.4].

Возьмем мультииндекс $\nu = (\nu(1), \nu(2), \nu(3), \nu(4))$ с целыми значениями $\nu(i) \ge 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, перестановку σ множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и составим произведение

$$Q_\sigma^\nu = Q_{\sigma(1)}^{\nu(1)} Q_{\sigma(2)}^{\nu(2)} Q_{\sigma(3)}^{\nu(3)} Q_{\sigma(4)}^{\nu(4)}.$$

Если перестановка $\sigma = \varepsilon$ тождественная, то вместо Q_ε^ν будем писать Q^ν:

$$Q^\nu = Q_1^{\nu(1)} Q_2^{\nu(2)} Q_3^{\nu(3)} Q_4^{\nu(4)}.$$

Как обычно, $|\nu| = \nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + \nu(4)$.

Матричный полином

$$T = T(Q) = \sum a(\nu, \sigma) Q_\sigma^\nu$$

с числовыми коэффициентами $a(\nu, \sigma)$ назовем *марковским.* Суммирование ведется по всем мультииндексам ν и перестановкам σ. Предполагается, что $a(0, \sigma) = 0$, $a(\nu, \sigma) = 0$ $(|\nu| > m)$ при любой перестановке σ и некотором целом числе $m \geq 0$. Подчеркнем, что предположение $a(0, \sigma) = 0$ о свободном члене существенно: без него некоторые утверждения о марковских полиномах будут неверны. Заметим, что

$$Q_1Q_1 = Q_1Q_3 = Q_2Q_1 = Q_2Q_3 \\ = Q_3Q_2 = Q_3Q_4 = Q_4Q_2 = Q_4Q_4 = 0.$$

Поэтому $Q_\sigma^\nu = 0$ для многих мультииндексов ν и перестановок σ.

6.4.4. Марковские операторы

Операторы в $\mathscr{L}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, представляемые матричными полиномами $T = T(Q)$, будем называть марковскими. Такие операторы рассматриваются в [90].

Предложение. 1) *Если $Q \in \mathscr{B}^p$, то $T(Q) \in \mathscr{B}^p$.*
2) *Если $Q \in \mathscr{C}^p$, то $T(Q) \in \mathscr{C}^p$.*

□ Ясно, что $A, B \in \mathscr{B}^p$. Поэтому $Q_i \in \mathscr{B}^p$ и $T(Q) \in \mathscr{B}^p$, если $Q \in \mathscr{B}^p$. Точно так же $Q_i \in \mathscr{C}^p$ и $T(Q) \in \mathscr{C}^p$, если $Q \in \mathscr{C}^p$. ■

Заметим, что при $|C| = \infty$ и $a(0, \sigma) \neq 0$ утверждение 2 было бы неверно [33, IX.1.3, теорема 3].

Из доказанного предложения и предложения 6.4.1 вытекает

Следствие. $T(Q) \in \mathscr{B}^1$, $T(Q) \in \mathscr{B}^2$.

6.4.5. Абсолютные значения

Пусть $Q \in \mathscr{B}^p$, $T = T(Q) \in \mathscr{B}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Тогда равенства

$$\begin{gathered} \left|Q_\sigma^\nu\right| = \left\|Q_{\sigma(1)}^{\nu(1)}\right\| \cdot \left\|Q_{\sigma(2)}^{\nu(2)}\right\| \cdot \left\|Q_{\sigma(3)}^{\nu(3)}\right\| \cdot \left\|Q_{\sigma(4)}^{\nu(4)}\right\|, \\ |T| = |T|(Q) = \sum |a(\nu, \sigma)| \left|Q_\sigma^\nu\right|, \\ \alpha(T) = \sum |a(\nu, \sigma)| \end{gathered}$$

определяют *абсолютные значения* операторов Q_σ^ν, T. Ясно, что

$$\left\|Q_\sigma^\nu\right\| \leq \left|Q_\sigma^\nu\right|, \quad \|T\| \leq |T|.$$

Замечание. Когда это нужно, в обозначения абсолютных значений оператора $T \in \mathscr{B}^p$ будем добавлять индекс p и писать $|T|_p$.

Пусть $x = r, c, b, \bar{\rho}$. Тогда равенство

$$x_\sigma^\nu = x_\sigma^\nu(Q) = x^{\nu(1)}(Q_{\sigma(1)}) \cdot x^{\nu(2)}(Q_{\sigma(2)}) \cdot x^{\nu(3)}(Q_{\sigma(3)}) \cdot x^{\nu(4)}(Q_{\sigma(4)})$$

определяет четыре произведения для каждых мультииндекса ν и перестановки σ. Если перестановка $\sigma = \varepsilon$ тождественная, то вместо $x_\varepsilon^\nu(Q)$ будем писать $x^\nu(Q)$:

$$x^\nu = x^\nu(Q) = x^{\nu(1)}(Q_1) \cdot x^{\nu(2)}(Q_2) \cdot x^{\nu(3)}(Q_3) \cdot x^{\nu(4)}(Q_4).$$

При таких обозначениях верно

Предложение. 1) $|T|_1 = \sum |a(\nu,\sigma)| r_\sigma^\nu \leqslant \alpha(T)$.
2) $|T|_2 = \sum |a(\nu,\sigma)| \bar{\rho}_\sigma^\nu \le \sum |a(\nu,\sigma)| b_\sigma^\nu \le \alpha(T)$.
3) $|T|_\infty = \sum |a(\nu,\sigma)| c_\sigma^\nu$.

□ Из сказанного в п. 6.2.3 вытекает, что

$$\|Q_i\|_1 = r(Q_i) \le r(Q) = 1, \quad \|Q_i\|_\infty = c(Q_i) \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Следовательно, утверждения 1 и 3 верны.

По предложению 6.2.5

$$\|Q_i\|_2 = \bar{\rho}(Q_i) \le b(Q_i) \le b(Q) \le 1 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Следовательно, утверждение 2 тоже верно. ■

6.5. Решение линейного уравнения

Применим полученные результаты к решению матричных уравнений, рассматривавшихся в [90]. Вместе со стохастической $C \times C$-матрицей Q и марковским полиномом $T = T(Q)$ рассмотрим произвольные векторы $V, W, Z \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(C)$ и функционалы $V^*, W^*, Z^* \in (\mathscr{L}^p)^*$ $(1 \le p \le \infty)$.

Составим уравнения

$$V(I - T) = W, \tag{1}$$

$$Z(I - T) = 0; \tag{2}$$

$$(I^* - T^*)V^* = W^*, \tag{1*}$$

$$(I^* - T^*)Z^* = 0^*. \tag{2*}$$

Заметим, что $(\mathscr{L}^p)^* = \mathscr{L}^q$ для $1/p + 1/q = 1$ при $1 < p < \infty$ и $(\mathscr{L}^1)^* = \mathscr{L}^\infty$. Но $(\mathscr{L}^\infty)^* \ne \mathscr{L}^1$ при $|C| = \infty$ [33, VI.2.2].

6.5.1. Ограниченные операторы

Если оператор Q ограничен и абсолютное значение $|T|$ марковского оператора T достаточно мало, то уравнение (1) корректно и его решение есть сумма операторного ряда.

Теорема. *Пусть $Q \in \mathscr{B}^p$, $|T| < 1$. Тогда уравнение (1) корректно и*

$$V = W(I - T)^{-1} = W \cdot \sum T^n \quad (n \geq 0). \tag{3}$$

□ Из условия теоремы и предложения 6.4.4 вытекает, что $T \in \mathscr{B}^p$ и $\|T\| < 1$. Следовательно, теорема верна [33, V.4.5]. ■

Замечание. Если $p = 1$ или $p = 2$, то в условии теоремы $|T| < 1$ можно заменить на $\alpha(T) < 1$. Если $p = 2$, Q есть матрица Гильберта — Шмидта и $g(Q) < 1$, то утверждение теоремы тоже верно. Это следует из теоремы 6.3.4.

6.5.2. Компактные операторы

Если оператор T компактен, то для уравнений (1), (2) и (1*), (2*) верны теоремы Фредгольма (см. п. 4.6.5, а также [33, XIII.1.4]). Сформулируем эти теоремы в нужном виде.

Утверждение 1. *Либо уравнение* (1) *корректно, либо уравнение* (2) *имеет ненулевое решение.*

Утверждение 2. *Уравнение* (2) *имеет решение при данном $W \in \mathscr{L}^p$ тогда и только тогда, когда $WZ^* = 0$ для каждого решения Z^* уравнения* (2*).

Утверждение 3. *Уравнения* (1) *и* (1*) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

Из предложений 6.4.2 и 6.4.4, которые при данных условиях для матрицы Q обеспечивают компактность оператора $T = T(Q)$, сразу следует

Теорема. *Пусть $p = 1, 2, \infty$ и для Q выполнено соответствующее условие предложения 4.2. Тогда верны утверждения 1–3.*

Эта теорема позволяет использовать теорию Фредгольма для решения уравнений, возникающих при исследовании серий в марковских последовательностях.

Замечание. Если $p = 2$ и Q есть матрица Гильберта — Шмидта, то утверждения 1–3 тоже верны. Это следует из теоремы 6.3.4.

6.5.3. Эрмитовы операторы

Рассмотрим эрмитову стохастическую матрицу Q. Заметим, что она является дважды стохастической. Найдем условия, при которых из $Q^* = Q$ следует $T^* = T$ для $T = T(Q)$.

Так как индикаторные матрицы эрмитовы, то для матриц Q_i, определенных в 4.3, при $Q^* = Q$ верны равенства

$$Q_1^* = Q_4, \quad Q_2^* = Q_2, \quad Q_3^* = Q_3, \quad Q_4^* = Q_1.$$

Рассмотрим перестановки $\tau = (14)$, $\kappa = (14)(23)$ и мультииндекс $\nu\kappa$ со значениями $\nu\kappa(i) = \nu(\kappa(i))$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Лемма. *Если $Q^* = Q$, то $\bigl(Q_\sigma^\nu\bigr)^* = Q_{\tau\sigma\kappa}^{\nu\kappa}$.*

□ В самом деле, используя равенства для матрицы Q_i, получаем

$$\begin{aligned}\bigl(Q_\sigma^\nu\bigr)^* &= \bigl(Q_{\sigma(4)}^*\bigr)^{\nu(4)} \cdot \bigl(Q_{\sigma(3)}^*\bigr)^{\nu(3)} \cdot \bigl(Q_{\sigma(2)}^*\bigr)^{\nu(2)} \cdot \bigl(Q_{\sigma(1)}^*\bigr)^{\nu(1)} \\ &= Q_{\tau\sigma(4)}^{\nu(4)} \cdot Q_{\tau\sigma(3)}^{\nu(3)} \cdot Q_{\tau\sigma(2)}^{\nu(2)} \cdot Q_{\tau\sigma(1)}^{\nu(1)} \\ &= Q_{\tau\sigma\kappa(1)}^{\nu\kappa(1)} \cdot Q_{\tau\sigma\kappa(2)}^{\nu\kappa(2)} \cdot Q_{\tau\sigma\kappa(3)}^{\nu\kappa(3)} \cdot Q_{\tau\sigma\kappa(4)}^{\nu\kappa(4)} = Q_{\tau\sigma\kappa}^{\nu\kappa}. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Предложение. *Если $a^*(\nu, \sigma) = a(\nu\kappa, \tau\sigma\kappa)$ для всех ν и σ, то из $Q^* = Q$ следует $T^* = T$.*

□ По лемме, если сформулированные условия выполнены, то

$$T^* = \sum a^*(\nu, \sigma)\bigl(Q_\sigma^\nu\bigr)^* = \sum a(\nu\kappa, \tau\sigma\kappa)Q_{\tau\sigma\kappa}^{\nu\kappa} = T. \ \blacksquare$$

6.5.4. Компактные эрмитовы операторы

Пусть Q есть стохастическая эрмитова матрица, удовлетворяющая условию предложения 6.3.5 или условию Гильберта — Шмидта $g^2(Q) < \infty$ и $a^*(\nu, \sigma) = a(\nu\kappa, \tau\sigma\kappa)$ для всех ν, σ. Тогда верно

Предложение. *В пространстве* $\mathscr{L}^2$ *существует счетная ортонормированная база* (H_k), *составленная из собственных векторов* H_k *оператора* $T = T(Q)$.

□ По предложениям 6.3.5, 6.5.3 и теореме 6.3.4 при сделанных предположениях T является компактным эрмитовым оператором в $\mathscr{L}^2$. Сформулированное утверждение следует из теоремы Гильберта — Шмидта п. 4.8.5. ■

Пусть λ_k обозначает собственное число оператора T, соответствующее базовому вектору H_k, $\Sigma(T)$ обозначает спектр оператора T и

$$V = \sum \xi_k H_k, \quad W = \sum \eta_k H_k \quad (\xi_k, \eta_k \in \mathbb{C}).$$

Тогда при сделанных в начале пункта предположениях верна

Теорема. 1) *Если* $1 \notin \Sigma(T)$, *то уравнение (1) имеет единственное решение. Этим решением является вектор*

$$V = \sum (1 - \lambda_k)^{-1} \eta_k H_k.$$

2) *Если* $1 \in \Sigma(T)$, *то уравнение (1) имеет решение, только если* $\eta_k = 0$ *при* $\lambda_k = 1$. *В этом случае решением (1) является всякий вектор* $V \in \mathscr{L}^2$ *с координатами*

$$\xi_k = (1 - \lambda_k)^{-1} \eta_k \quad (\lambda_k \neq 1).$$

□ Эта теорема вытекает из доказанного предложения и теоремы Гильберта — Шмидта (п. 4.8.5., следствия). ■

6.5.5. Вырожденные операторы

Если $|C| < \infty$, то пространство $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(C)$ конечномерно и для решения уравнения (1) можно применять алгебраические методы. Примеры, связанные с теорией серий, есть в [88]. В [33] описана редукция бесконечной системы линейных уравнений к последовательности конечных систем. Применение к регулярным системам подробно описано в [34].

В [90] находится производящая функция для распределения некоторых характеристик серий в марковской последовательности. Для этого решается линейное операторное уравнение в соответствующем пространстве функций. Коэффициенты $a(\nu, \sigma)$ рассматриваемых там операторов $T = T(Q)$ являются значениями полиномов нескольких числовых переменных, а сами эти операторы являются полиномами с матричными коэффициентами от данных переменных. Ограничения на значения переменных позволяют получить нужные неравенства для абсолютных значений и норм оператора T и использовать теоремы пп. 6.5.1–6.5.4. Из этих теорем выводятся теоремы пп. 4.1–4.3 в [90]. Операторы $T = T(Q)$ можно выражать матрицами с полиномиальными элементами.

6.6. Примеры

6.6.1. Специальная проблема моментов

Рассмотрим непрерывную функцию $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, число $\alpha \geq 0$ и точку $y \in [0,1]$. Абсолютный момент степени α относительно точки y выражается интегралом

$$g(y) = \int\limits_0^1 |y-x|^\alpha f(x)\,dx.$$

Возникает естественная задача: определить функцию f по ее моменту $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ данной степени α относительно произвольной точки $y \in [0,1]$.

Рассмотрим также функции

$$g_1(y) = \int\limits_0^y (y-x)^\alpha f(x)\,dx, \quad g_2(y) = \int\limits_y^1 (x-y)^\alpha f(x)\,dx$$

и операторы

$$Af = g, \quad A_1 f = g_1, \quad A_2 f = g_2, \quad A = A_1 + A_2, \quad g = g_1 + g_2.$$

Задача сводится к решению операторного уравнения

$$Af = g$$

или к решению системы операторных уравнений

$$A_1 f = g_1, \quad A_2 f = g_2.$$

Нетрудно описать класс функций g, для которых решение f является полиномом или целой аналитической функцией. Вычисление коэффициентов сводится к решению системы линейных уравнений, конечной или бесконечной. Далее выводятся формулы для полиномов. Используя равномерные приближения непрерывных функций полиномами с помощью полученных формул, можно получать приближенные решения для непрерывных функций.

Введем обозначения:

$$c_1(\alpha, m) = 1 \bigg/ \left(\frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m+1} (k+\alpha) \right),$$

$$c_2(\alpha, s, m) = \frac{m!}{(s-m)!} \left(\left(\prod_{k=1}^{s-m} (k+\alpha) \right) \bigg/ \left(\prod_{k=1}^{m+1} (k+\alpha) \right) \right),$$

$$c(\alpha, s, m) = \frac{c_2(\alpha, s, m)}{c_1(\alpha, m)} = \frac{1}{(s-m)!} \prod_{k=1}^{s-m} (k+\alpha).$$

Непосредственное интегрирование дает

$$A_1(x^n) = y^{1+\alpha} c_1(\alpha, n) y^n, \quad A_2(x^n) = (1-y)^{1+\alpha} \sum_{m=0}^{n} c_2(\alpha, n, m) y^m.$$

Отсюда следует, что полином

$$f_1(\alpha, x) = \sum_{m=0}^{n} a_1(\alpha, m) x^m$$

является решением уравнения

$$A_1 f_1 = g_1, \quad g_1(\alpha, y) = y^{1+\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_1(\alpha, m) y^m,$$

если
$$a_1(\alpha, m) = \frac{b_1(\alpha, m)}{c_1(\alpha, m)}.$$
А полином
$$f_2(\alpha, x) = \sum_{m=0}^{n} a_2(\alpha, m) x^m$$
является решением уравнения
$$A_2 f_2 = g_2, \quad g_2(\alpha, y) = (1-y)^{1+\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_2(\alpha, m) y^m,$$
если коэффициенты $a_2(\alpha, m)$ определяются треугольной системой уравнений
$$b_2(\alpha, m) = \sum_{s=m}^{n} a_2(\alpha, m) c_2(\alpha, s, m).$$
Отсюда при $f = f_1 = f_2$, $g = g_1 + g_2$ с помощью биномиальной формулы выводится

Теорема. *Полином*
$$f(\alpha, x, n) = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{b_1(\alpha, m)}{m!} \prod_{k=1}^{m+1} (k+\alpha) \right) x^m$$
является решением уравнения $Af = g$ *при*
$$g(\alpha, y) = y^{1+\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_1(\alpha, m) y^m + (1-y)^{1+\alpha} \sum_{m=0}^{n} b_2(\alpha, m) y^m,$$
$$b_2(\alpha, m) = \sum_{s=m}^{n} \left(\frac{b_1(\alpha, s)}{(s-m)!} \prod_{k=1}^{s-m} (k+\alpha) \right).$$

Этот результат можно записать в матричной форме. Пусть
A — строка $(a(\alpha, m))$, $0 \le m \le n$;
X — столбец (x^m), $0 \le m \le n$;
B — строка $(b_1(\alpha, m))$, $0 \le m \le n$;

Y — столбец (y^m), $0 \le m \le n$;

C — столбец $(c_1(\alpha, m))$, $0 \le m \le n$;

T — нижняя треугольная $n \times n$-матрица, m-я строка которой состоит из чисел $c(\alpha, s, m)$ $(m \le s \le n)$. Заметим,что диагональ матрицы T состоит из единиц.

Полином $f = AX$ является решением уравнения $Af = g$ с правой частью

$$g = y^{1+\alpha} BY + (1-y)^{1+\alpha} BTY,$$

если $B = AC$.

Замена переменной

$$y = 1/2 - z, 1 - y = 1/2 + z$$

позволяет представить функцию g в виде суммы ряда. Пусть

$$g(y) = p(y) y^{1+\alpha} + q(y)(1-y)^{1+\alpha},$$
$$p(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k, \quad q(y) = \sum_{k=0}^{n} c_k y^k.$$

Производя замену переменной и используя биномиальную формулу, после некоторых преобразований получаем при $|z| < 1/2$:

$$h(z) = g(1/2 - z)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=m}^{m+k} (-1)^{s-m} 2^{s-k} \binom{k}{s-m} \binom{\alpha+1}{m} ((-1)^m b_k + c_k) z^s.$$

Коэффициенты при z^s находятся из блочно-треугольной системы уравнений. Для каждого m составляется нижняя треугольная $(n+1) \times (n+1)$-матрица, относящаяся к переменным $\{z^m, z^{m+1}, \ldots, z^{m+n}\}$.

6.6.2. Совместные распределения

Приведем уравнения, определяющие совместные распределения числа x_n значений и числа y_n серий выбранных типов, максимума z_n длин этих серий в марковской последовательности $\xi(0), \ldots, \xi(n)$ с конечным множеством C значений, начальным распределением $\widetilde{P} = (p_\delta)$ и переходной матрицей $\widetilde{Q} = (q_{\gamma\delta})$ $(\gamma, \delta \in C)$ (подробнее об этом см. [94, 95]).

Разобьем множество C на части A_ν $(\nu \in \Gamma)$ и положим $B_\nu = C - A_\nu$. Рассмотрим семейства $x_n = (x_{n\nu})$, $y_n = (y_{n\nu})$, $z_n = (z_{n\nu})$ случайных переменных $x_{n\nu}, y_{n\nu}, z_{n\nu}$, равных соответственно числу ν-значений, ν-серий, максимуму длин ν-серий в марковской последовательности $\xi(0), \ldots, \xi(n)$ $(n \geq 0,\ \nu \in \Gamma)$. Индикаторы множеств $R, S, T \subset \Gamma$ определяют семейства $Rx_n = (R(\nu)x_{n\nu})$, $Sy_n = (S(\nu)y_{n\nu})$, $Tz_n = (T(\nu)z_{n\nu})$ с нулевыми значениями для $\nu \notin R$, $\nu \notin S$, $\nu \notin T$. Аналогично определяются семейства $Ri = (R(\nu)i_\nu)$, $Sj = (S(\nu)j_\nu)$, $Tk = (T(\nu)k_\nu)$ для семейств $i = (i_\nu)$, $j = (j_\nu)$, $k = (k_\nu)$ целых чисел $i_\nu, j_\nu, k_\nu \geq 0$. Для каждого $\delta \in C$ существует единственный индекс $\mu = \mu(\delta) \in \Gamma$ такой, что $\delta \in A_\mu$. Положим

$$e_\mu = (e_\mu(\nu)), \quad e = (e(\nu))$$
$$(e_\mu(\mu) = 1, \quad e_\mu(\nu) = 0 \quad (\nu \neq \mu), \quad e(\nu) = 1, \quad \nu \in \Gamma).$$

Множества $R, S, T \subset \Gamma$ определяют семейства Re_μ, Se_μ, Te_μ. Кроме множества $A \subset C$ и его индикатора будем той же буквой A обозначать еще диагональную $C \times C$-матрицу с элементами $A(\delta)$ на диагонали ($A(\delta) = 1$ при $\delta \in A$ и $A(\delta) = 0$ при $\delta \notin A$). В частности, I обозначает множество $I = C$, его тождественное преобразование и единичную $C \times C$-матрицу. Положим $A_{\mu\mu} = A_\mu Q A_\mu$, $B_{\mu\mu} = B_\mu Q A_\mu$.

Рассмотрим вероятности f_δ, составленные из них семейства F и векторную производящую функцию $\widehat{F}$:

$$f_\delta(i, j, k, n) = \Pr\{Rx_n = Ri,\ Sy_n = Sj,\ Tz_n \leq Tk,\ \xi_n = \delta\},$$
$$F(i, j, k, n) = (f_\delta(i, j, k, n)), \quad \delta \in C,$$
$$\widehat{F}(s, t, k, u) = \sum_{i,j,n} F(i, j, k, n) s^{Ri} t^{Sj} u^n,$$

где

$$s^{Ri} = \prod_{\rho \in R} s_\rho^{i(\rho)}, \quad t^{Sj} = \prod_{\sigma \in S} t_\sigma^{j(\sigma)},$$
$$s = (s_\nu), \quad t = (t_\nu), \quad \|s_\nu\| \leq 1, \quad \|t_\nu\| \leq 1, \quad \|u\| < 1.$$

Верна (см. [90])

Теорема. *Функция $\widehat{F}$ является решением уравнения $\widehat{F}(I - Ku) = L$, где*

$$K = \sum_{\mu} (A_{\mu\mu} + B_{\mu\mu}\Delta_\mu t^{Se_\mu}) s^{Re_\mu}, \quad L = \sum_{\mu} P(\Delta_\mu - B_\mu) t^{Se_\mu} s^{Re_\mu},$$
$$\Delta_\mu = I - T(\mu) A^m_{\mu\mu} s^{mRe_\mu} u^m.$$

Матрицы Q, $A_{\mu\mu}$, $B_{\mu\mu}$, Δ_μ, K представляют ограниченные линейные операторы в пространстве $L^1 = L^1(C)$ вещественных функций на конечном множестве C, причем для норм верны соотношения

$$\|Q\| = 1, \quad \|A_{\mu\mu}\| \le 1, \quad \|B_{\mu\mu}\| \le 1, \quad \Delta_\mu \le 1, \quad \|K\| \le 3.$$

Поэтому при $\|u\| < 1/3$ рассматриваемое уравнение корректно и

$$\widehat{F} = L(I - Ku)^{-1} = L \sum_{n=0}^{\infty} K^n u^n, \quad \|u\| < 1/3.$$

Замечание. Аналогичные операторные равенства верны и для бесконечного счетного множества C.

Рассмотрим теперь двоичную марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(k)$, $k \ge 0$, с множеством значений $C = \{1, 0\}$, начальным вектором P и переходной матрицей Q:

$$P = (a, 1-a), \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

где

$$a = \Pr\{\xi(0) = 1\}, \quad 1 - a = \Pr\{\xi(0) = 0\},$$
$$q_{\alpha\beta} = Pr\{\xi(k+1) = \beta \mid \xi(k) = \alpha\}, \quad k \ge 0.$$

Будем предполагать, что $0 < p$, $q < 1$.

Рассмотрим последовательность случайных векторов $(x(n), y(n), \xi(n))$. Эта последовательность марковская со счетным множеством значений $C = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \{0, 1\}$, начальным распределением $\widetilde{P} = (\tilde{p}_\sigma)$ и переходной матрицей $\widetilde{Q} = (\tilde{q}_{\gamma\delta})$ $(\gamma, \delta \in C)$. Из определений следует, что

$$\tilde{p}_{(0,0,0)} = 1 - a, \quad \tilde{p}_{(1,1,1)} = a,$$
$$\tilde{q}_{(i,j,0),(i,j,0)} = q, \quad \tilde{q}_{(i,j,0),(i+1,j+1,1)} = 1 - q,$$
$$\tilde{q}_{(i,j,1),(i+1,j,1)} = p, \quad \tilde{q}_{(i,j,1),(i,j,0)} = 1 - p;$$

все остальные начальные и переходные вероятности равны нулю.

Составим операторное уравнение для распределения

$$\tilde{p}(n) = (p(i, j, k, n)), \quad (i, j, k) \in C$$
$$(p(i, j, k, n) = \Pr\{x(n) = i,\ y(n) = j,\ \xi(n) = k\})$$

случайного вектора $(x(n), y(n), \xi(n))$. Из определений следует, что

$$p(0, 0, 0, 0) = 1 - a,\ p(1, 1, 1, 0) = a,\ \tilde{p}(n + 1) = \tilde{p}(n)\tilde{Q}\ (n \geq 0). \quad (4)$$

Рассмотрим банахово пространство $L^1 = L^1(C)$ суммируемых числовых функций на множестве C. Ясно, что $\tilde{p}(n) \in L^1$ и норма $\|\tilde{p}(n)\| = 1$. Матрица $\widetilde{Q}$ представляет ограниченный линейный оператор в $L^1(C)$ и имеет норму единица. Пусть

$$\bar{p}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) u^n, \quad |u| < 1.$$

Так как $\|\tilde{p}(n)\| = 1$, то векторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) u^n$ абсолютно суммируем при $|u| < 1$ и функция $\bar{p}$ определена внутри единичного круга.

Умножая равенство (4) на u^n и суммируя, получаем операторное уравнение для $\bar{p}$:

$$\bar{p}(u) - \tilde{p}(0) = \bar{p}(u)\widetilde{Q}u, \quad \bar{p}(u)(I - \widetilde{Q}u) = \tilde{p}(0). \quad (5)$$

Здесь $\hat{p}(u)$ обозначает единичную $C \times C$-матрицу, которая представляет тождественное преобразование множества C. Так как $\|\widetilde{Q}u\| = \|\widetilde{Q}\|\|u\| < 1$, то уравнение (5) корректно и его решение представляется рядом Неймана:

$$\bar{p}(u) = \tilde{p}(0)(I - \widetilde{Q}u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(0)\widetilde{Q}^n u^n.$$

Это соответствует равенству $\tilde{p}(n) = \tilde{p}(0)\widetilde{Q}^n$, вытекающему из марковского свойства (4).

Дело сводится к исследованию степеней блочно-треугольной матрицы $\widetilde{Q}$ или обратной матрицы $(I - \widetilde{Q}u)^{-1}$. Особенно простой вид эти матрицы имеют при $p = q$ (дважды стохастические матрицы) и при $p = q = 1/2$.

6.6.3. Концевые серии

Использование концевых серий позволяет составить сравнительно простые операторные уравнения для распределений максимумов длин серий в марковских последовательностях. Подробно данные характеристики описаны в [94].

Будем рассматривать двоичную марковскую последовательность с вектором P начальных и матрицей Q переходных вероятностей, определенных в п. 6.2. Обозначим через z_n максимум длин 1-серий и через $w_n = \alpha_1(n)$ длину концевой 1-серии на отрезке $[0, n]$. Заметим, что $w_n \in \{0, \ldots, n+1\}$, последовательность $\{w_n\}$ марковская и

$$\Pr\{w_{n+1} = 0 \mid w_n = 0\} = q, \quad \Pr\{w_{n+1} = 1 \mid w_n = 0\} = 1 - q,$$
$$\Pr\{w_{n+1} = 0 \mid w_n = 1\} = 1 - p, \quad \Pr\{w_{n+1} = l + 1 \mid w_n = l\} = p,$$
$$l > 0.$$

Из определений следует, что $\xi(n) \le w_n \le z_n$. Последовательность пар (z_n, w_n) марковская и описывает случайное блуждание по целочисленной решетке в бесконечном треугольнике $T = \{(k, l) : 0 \le l \le k\}$. Будем пару (k, l) обозначать также kl. Переходные вероятности для (z_n, w_n) определяются равенствами

$$\hat{q}(k0, k0) = \Pr\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = k0 \mid (z_n, w_n) = k0\} = q,$$
$$\hat{q}(k0, k1) = \Pr\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = k1 \mid (z_n, w_n) = k0\} = 1 - q,$$

$$\hat{q}(k0, kl) = \Pr\{(z_{n+1}, w_{n+1}) \\ = kl \mid (z_n, w_n) = k0\} = 1 - p, \quad 0 < l \le k,$$

$$\hat{q}(kl, (k, l+1)) = \Pr\{(z_{n+1}, w_{n+1}) \\ = (k, l+1) \mid (z_n, w_n) = kl\} = p, \quad 0 < l < k,$$

$$\hat{q}(kk, (k+1, k+1)) = \Pr\{(z_{n+1}, w_{n+1}) \\ = (k+1, k+1) \mid (z_n, w_n) = kk\} = p.$$

Находясь в момент n во внутренней точке треугольника T, частица в момент $n+1$ может с вероятностью p подняться на 1 вверх, а с вероятностью $1-p$ упасть на горизонтальную ось. С вероятностью q она может остаться на оси, а с вероятностью $1-q$ подняться на 1 вверх. Находясь в точке (k, k) на диагонали, частица может с вероятностью p передвинуться по ней в точку $(k+1, k+1)$, а с вероятностью $1-p$ упасть на горизонтальную ось. Таким образом, частица может двигаться скачками указанных размеров вверх, вниз, вправо-вверх и не может двигаться влево.

Запишем множество значений пары (z_n, w_n) в лексикографическом порядке:

$$C = \{00, 10, 11, 20, 21, 22, \dots, k0, k1, \dots, kk, \dots\}.$$

Случайные векторы (z_n, w_n) образуют марковскую последовательность с множеством значений C, начальными вероятностями

$$p(00) = \Pr\{(z_0, w_0) = 00\} = 1 - a, \quad p(11) = \Pr\{(z_0, w_0) = 11\} = a$$

и переходными вероятностями $\hat{q}(ij, kl)$. Составленная из них $C \times C$-матрица $\widehat{Q}$ является блочно-треугольной. Ее диагональ состоит из элемента $A(0) = q$ и матриц

$$A(k) = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots & p \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

размера $(k+1)\times(k+1)$, $k>0$. К матрице $A(k)$ справа примыкает матрица $B(k)$ размера $(k+1)\times(k+2)$ с единственным ненулевым элементом p в правом нижнем углу. Вместе с нулевыми матрицами перед $A(k)$ и после $B(k)$ они составляют бесконечную k-ю полосу матрицы $\widehat{Q}$.

В степенях $\widehat{Q}^n$ матрицы $\widehat{Q}$ диагональ состоит из матриц $A^n(k)$. Вслед за ними идут произведения различных матриц $A(l)$, $B(m)$ и их степеней. В частности, ненулевыми блоками в k-й полосе матрицы $\widehat{Q}^2$ являются $A^2(k)$, $A(k)B(k)+B(k)A(k+1)$, $B(k)B(k+1)$. Все эти матрицы имеют простой вид.

Составим операторное уравнение для распределения

$$\hat{p}(n)=(p(kl,n)),\quad kl\in C,\quad p(kl,n)=\Pr\{z_n=k,\, w_n=l\}$$

случайного вектора (z_n,w_n).

Из определений следует, что

$$\hat{p}(0)=(1-a,0,a,0,\dots),\quad \hat{p}(n+1)=\hat{p}(n)\hat{Q},\quad n\geq 0.$$

Далее, проводя те же рассуждения, что и в п. 6.2, получаем уравнение для $\bar{\bar{p}}(u)=\sum\hat{p}(n)u^n$.

Замечание. Подробное исследование этих, а также многих других функционалов на марковских последовательностях проведено в работах [90, 94, 95]. В двоичном случае выписаны распределения, первые моменты и асимптотические формулы для рассматриваемых характеристик.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В третьей части книги устанавливается связь теории операторов с теорией вероятностей. Кратко описываются основные вероятностные понятия, дискретные, непрерывные и общие вероятностные пространства. Отдельная глава посвящена элементам теории случайных процессов. Выделяются марковские процессы и мартингалы, тесно связанные с теорией операторов.

Теорию вероятностей можно описательно определить как математическую теорию случайных явлений. С влиянием случая приходится сталкиваться при описании самых разных явлений. Часто это влияние настолько существенно, что им нельзя пренебречь. Поэтому теория вероятностей применяется во всех развитых областях науки. Ей посвящена обширная литература. В главе дается представление об элементарной теории вероятностей и основных понятиях общей. Вначале рассматривается самая простая модель — дискретные вероятностные пространства. Затем описывается ее непрерывный аналог. В заключение кратко рассматриваются общие вероятностные пространства. Среди случайных процессов выделяются марковские. Элементарная теория вероятностей подробно излагается в [93, 83]. Основные понятия общей кратко описываются в [89]. Приложения дискретных вероятностных моделей описываются в [26, 76]. Прекрасным руководством по теории вероятностей и ее приложениям является книга [106]. С теорией случайных процессов можно познакомиться по книге [10]. Марковским последовательностям и их применениям посвящена книга [129]. Достаточно полное представление о литературе по теории вероятностей и ее приложениям дает библиография в указанных книгах.

7. ДИСКРЕТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Дискретным называется вероятностное пространство со счетным множеством исходов. Конечные множества включаются в класс счетных, и поэтому конечные вероятностные пространства являются дискретными. Дискретные пространства выделяются своей простотой и важностью для приложений. Многие задачи из самых разных областей с помощью группировки сводятся к дискретным.

7.1. Элементарная вероятность

Элементарная вероятность является основным понятием для дискретных пространств.

7.1.1. Определения

Пусть U — счетное множество и p — положительная нормированная функция на U:

$$p(u) \geq 0, \quad \sum p(u) = 1 \quad (u \in U).$$

Вместе они составляют *дискретное вероятностное пространство* (U, p). Если множество U бесконечно, то сумма $\sum p(u)$ имеет бесконечно много слагаемых и определяется как предел семейства конечных сумм.

Элементы $u \in U$ по-прежнему называются *исходами*, функция p — *элементарной вероятностью*, число $p(u)$ — *вероятностью исхода* u. Если $p(u) > 0$ для всех $u \in U$, то вероятность p и пространство (U, p) называют *невырожденными*.

Так как элементы каждого счетного множества можно снабдить номерами, то удобно в качестве множеств исходов выбирать конечные или бесконечные множества номеров. Особенно часто выбирают множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ или $\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

7.1.2. Примеры

Рассмотрим несколько примеров. Во всех примерах $p(u) > 0$ следует из определения и проверяется только $\sum p(u) = 1$.

Пример 1. Обозначим через n число элементов множества U и положим $p(u) = 1/n$ для каждого $u \in U$. Ясно, что функция p с такими значениями есть элементарная вероятность на U. Вероятностное пространство (U, p) будем называть *классическим* с n исходами и обозначать (L, n).

Пример 2. Обозначим $\mathbb{B}$ множество из элементов 0 и 1, а $\mathbb{B}^n$ — множество всех последовательностей из n элементов множества $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}, \quad \mathbb{B}^n = \{u = (u_i) : u_i \in \mathbb{B},\ i = 1, \dots, n\}.$$

Будем называть последовательности из $\mathbb{B}^n$ *двоичными последовательностями* длины n.

Пусть $U = \mathbb{B}^n$, $u = (u_i) \in U$, $s(u) = \sum u_i$, $a \in [0, 1]$ и

$$p(u) = a^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)}$$

($s(u)$ равно числу единиц, а $n - s(u)$ — числу нулей в последовательности u). По индукции легко доказать (упражнение), что функция p с такими значениями есть элементарная вероятность на $U = \mathbb{B}^n$. Вероятностное пространство $(\mathbb{B}^n, p)$ с такой элементарной вероятностью будем называть *пространством Бернулли* или *последовательностью Бернулли* длины n с параметром a и обозначать $B(n, a)$.

Заметим, что $B(n, 1/2) = L(2^n)$.

Пример 3. Пусть

$$U = \mathbb{B}^{1+n} = \{u = (u_i) : u_i \in \mathbb{B},\ i = 0, 1, \dots, n\}, \quad a \in [0, 1],$$

и $Q = (q(x, y))$ — *стохастическая* 2×2*-матрица*:

$$q(x, y) \geq 0, \quad q(x, 0) + q(x, 1) = 1 \quad (x, y \in \mathbb{B}).$$

По индукции легко доказать, что функция p со значениями

$$p(u) = a^{u_0}(1-a)^{1-u_0} q(u_0, u_1) \dots q(u_{n-1}, u_n)$$

является элементарной вероятностью на $U = \mathbb{B}^{1+n}$. Вероятностное пространство $(\mathbb{B}^{1+n}, p)$ с такой элементарной вероятностью будем называть *двоичным пространством Маркова* или *двоичной марковской последовательностью* длины n с параметром a и оператором Q. Условимся обозначать такое пространство $BM(n, a, Q)$. Марковские последовательности часто называют *марковскими цепями*.

Заметим, что $BM(n, a, Q) = B(n+1, a)$ при $q(1, 1) = a$, $q(0, 0) = 1 - a$.

Пример 4. *Геометрическое распределение* с параметром $a \in]0,1[$ описывается элементарной вероятностью p на множестве $\mathbb{P}$, имеющей значения

$$p(n) = a(1-a)^n.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\sum p(n) = a \sum (1-a)^n = a(1-(1-a))^{-1} = aa^{-1} = 1.$$

Пример 5. *Распределение Паскаля* с параметрами $a \in]0,1[$, $m \in \mathbb{N}$ описывается элементарной вероятностью p на множестве $\mathbb{P}$, имеющей значения

$$p(n) = \binom{n+m-1}{n} a^m (1-a)^n = p(n,m,a).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\binom{n+m-1}{n} &= \frac{(n+m-1)(n+m-2)\dots m}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m}{n}.\end{aligned}$$

По общей биномиальной формуле

$$\sum p(n) = a^m \sum_n \binom{-m}{n} (-(1-a))^n = a^m (1-(1-a))^{-m} = 1.$$

В связи с биномиальными коэффициентами для $-m$ распределение Паскаля называют также *отрицательным биномиальным распределением.* В отличие от обычного (*положительного*) биномиального распределения отрицательное определено на бесконечном множестве исходов.

Распределение Паскаля можно описывать с помощью биномиальных коэффициентов. Так как

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1},$$

то

$$p(n,m,a) = ab(n, n+m-1, 1-a) = ab(m-1, n+m-1, a).$$

Заметим еще, что $p(n,1,a) = a(1-a)^n$: при $m=1$ распределение Паскаля превращается в геометрическое.

Пример 6. *Логарифмическое распределение* с параметром $a \in]0,1[$ описывается элементарной вероятностью p на множестве $\mathbb{N}$, имеющей значения

$$p(n) = -(1-a)^n/(n \log a).$$

Используя разложение функции $\log(1+x)$ в степенной ряд, при $x = -(1-a)$ получаем

$$\sum p(n) = -\sum((1-a)^n/n)/\log a = \log a/\log a = 1.$$

Пример 7. *Распределение Пуассона* с параметром $a > 0$ описывается элементарной вероятностью p на множестве $\mathbb{P}$, имеющей значения

$$p(n) = (a^n/n!)e^{-a} = p(n, a).$$

Используя разложение функции e^x в степенной ряд, при $x = a$ получаем

$$\sum p(n) = e^{-a}\sum(a^n/n!) = e^{-a}e^a = 1.$$

Распределение Пуассона играет выдающуюся роль в теории вероятностей. Оно применяется при решении самых разных теоретических и прикладных задач.

Пример 8. *Распределение Гольдбаха* описывается элементарной вероятностью p на множестве натуральных чисел

$$M = \{m = l^k : l > 1,\, k > 1\},$$

имеющей значения

$$p(m) = 1/(m-1).$$

Можно доказать, что $\sum p(m) = 1$. Суммы по специальным множествам, подобные этой, рассматриваются в теории чисел.

7.2. Вероятность и среднее

Для дискретного вероятностного пространства вероятности и средние определяются так же, как для конечного. Существенная разница между конечными и бесконечными пространствами заключается в том, что на бесконечных пространствах не все случайные переменные имеют средние значения и дисперсии.

7.2.1. Определения

Пусть (U, p) — дискретное вероятностное пространство и $A \subseteq U$ — *событие*.

1. Так как p положительна и нормирована, то

$$0 \le P(A) = \sum_{u \in A} p(u) \le \sum_{u \in U} p(u) = 1.$$

Число $P(A)$ называется *вероятностью* события A. Вероятность P определена на классе $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех частей множества U.

Для любого множества индексов M независимость событий $A_j \subseteq U$, $j \in M$, означает, что

$$P(\cap A_j) = \prod P(A_j) \quad (j \in K)$$

для каждого конечного $K \subseteq M$.

2. Каждая (вещественная) функция на множестве U называется *случайной переменной* или, коротко, просто *переменной.*

Событие A часто отождествляется с переменной $\operatorname{ind} A$. Это отождествление позволяет использовать удобные записи для переменной f на U:

$$f = \sum f(u) \cdot u \quad (u \in U), \quad f = \sum x \cdot f^{-1}(x) \quad (x \in X = f(U)).$$

Рассмотрим семейство $f = (f_j)$ переменных f_j $(j \in M)$ на пространстве (U, p), их маргинальные распределения q_j на множествах $X_j = f_j(U)$ и совместные распределения q_K для $j \in K$ и каждого конечного $K \subseteq M$. Если равенство

$$q_K(x) = \prod q_j(x_j)$$

верно для всех $x = (x_j) \in X$ $(j \in K)$, то q_K называют *произведением* q_j и пишут $q_K = \prod q_j$. Если $q_K = \prod q_j$ $(j \in K)$ для всех конечных $K \subseteq M$, то говорят, что случайные переменные f_j (*стохастически*) *независимы,* а если $q_K \neq \prod q_j$ — что (*стохастически*) *зависимы.*

Независимость событий $A_j \subseteq U$ эквивалентна независимости их индикаторов $f_j = \operatorname{ind} A_j$ $(j \in M)$.

3. Для каждой переменной f на пространстве (U, p) и каждого конечного множества $K \subseteq U$ определена конечная сумма

$$E(f, K) = \sum_{u \in K} f(u) p(u).$$

Если семейство этих конечных сумм ограничено (и только в этом случае), существует сумма

$$E(f) = \sum f(u) p(u),$$

равная пределу $E(f,K)$ при $K \to U$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $K(\varepsilon) \subseteq U$ такое, что неравенство

$$|E(f,K) - E(f)| < \varepsilon$$

верно для всех конечных множеств $K \subseteq U$, содержащих $K(\varepsilon)$. В этом случае переменную f называют *суммируемой* по p.

Число $E(f)$ называется *средним значением* суммируемой по p переменной f на дискретном пространстве (U,p). Из определений следует, что

$$E(\operatorname{ind} A) = P(A)$$

для каждого $A \subseteq U$.

Каждая ограниченная переменная f суммируема по p: если $|f(u)| \leq c$ при всех $u \in U$, то

$$\left|\sum_{u\in K} f(u)p(u)\right| \leq \sum_{u\in K} |f(u)|p(u) \leq cP(K) \leq c$$

для каждого конечного множества $K \subseteq U$ и семейство $(f(u)p(u))$ суммируемо. В частности, каждая постоянная на U суммируема по p.

7.2.2. Примеры

Рассмотрим несколько примеров вычисления средних. Всюду будет рассматриваться *тождественная переменная* f со значениями $f(n) = n$ для $n \in U = \mathbb{P}$ или $n \in U = \mathbb{N}$. Среднее $E(f)$ тождественной переменной f является центром для распределения масс $p(n)$ в точках n вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Пример 1. Возьмем произвольную случайную переменную f на классическом пространстве с множеством U из n исходов. Среднее значение f равно среднему арифметическому:

$$Ef = \sum f(u)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum f(u).$$

Пусть X — событие, составленное из m исходов, и $f = \operatorname{ind} X$. Тогда

$$P(X) = E(\operatorname{ind} X) = m/n.$$

В классическом пространстве вероятность события равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех возможных исходов. Ее вычисление сводится к подсчету числа элементов в рассматриваемых множествах. Поэтому классическое пространство можно назвать *комбинаторным пространством*.

Пример 2. Случайная величина s_j со значениями

$$s_j(u) = u_j \quad (u = (u_i) \in \mathbb{B}^n)$$

описывает число единиц на j-м месте ($1 \leq j \leq n$) в последовательности Бернулли $B(n, a)$. По индукции легко проверить, что

$$\begin{aligned} P(s_j = 1) &= P\{u \in \mathbb{B}^n : u_j = 1\} \\ &= \sum_{u_i, i \neq j} (a^{u_1}(1-a)^{1-u_1} \dots a^{u_{j-1}}(1-a)^{1-u_{j-1}} \cdot a a^{u_{j+1}}(1-a)^{1-u_{j+1}} \\ &\qquad \dots a^{u_n}(1-a)^{1-u_n}) = a(a+1-a)^{n-1} = a. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(s_j = 0) = 1 - P(s_j = 1) = 1 - a.$$

Подчеркнем, что эти вероятности не зависят от номера места j в последовательности u.

Пусть $s = \sum s_j$. Тогда

$$P(s = m) = \binom{n}{m} a^m (1-a)^{n-m} = b(m, n, a)$$

для $m = 0, 1, \dots, n$. Сумма $s(u) = \sum s_j(u)$ равна числу единиц в двоичной строке $u = u_1 \dots u_n$. Говорят, что переменная s имеет *биномиальное распределение.*

Пример 3. Для двоичной марковской последовательности $BM(n, a, Q)$ аналогичные вероятности вычисляются сложнее. Они зависят от номера места k ($0 \leq k \leq n$).

Используя индукцию, нетрудно проверить, что в марковском случае

$$\begin{aligned} P(s_k = 1) &= P\{u \in \mathbb{B}^{n+1} : u_k = 1\} \\ &= \sum_{u_i, i \neq k} (a^{u_0}(1-a)^{1-u_0} q(u_0, u_1) \dots q(u_{k-1}, 1) q(1, u_{k+1}) \dots q(u_{n-1}, u_n)) \\ &\qquad = b + (a-b)d^k, \end{aligned}$$

где

$$d = q(1,1) + q(0,0) - 1, \quad b = (1 - q(0,0))/(1-d)$$

(предполагается, что $d \neq 1$). Следовательно,

$$P(s_k = 0) = 1 - b - (a-b)d^k.$$

В частности,

$$P(s_0 = 1) = a, \quad P(s_0 = 0) = 1 - a.$$

Если $q(1,1) = a$, $q(0,0) = 1 - a$, то $d = 0$ и $b = a$. Марковская последовательность превращается в бернуллевскую и

$$P(s_k = 1) = a, \quad P(s_k = 0) = 1 - a$$

для каждого $k = 0, 1, \dots, n$.

Пример 4. При геометрическом распределении с параметром a $(0 < a < 1)$

$$E(f) = \sum_{n \geq 1} na(1-a)^n = (1-a)/a.$$

В самом деле, как легко проверить по индукции, для конечных сумм $S(n) = S(K(n))$, $K(n) = \{m : 0 \leq m < n\}$ верны равенства

$$\begin{aligned} S(n) = \sum_{0 \leq m < n} & ma(1-a)^m \\ & = a(1-a)\left(\frac{1-(1-a)^n}{(1-(1-a))^2} - \frac{n(1-a)^{n-1}}{1-(1-a)}\right) \\ & \qquad = \frac{1-a}{a}(1-(1-a)^n - na(1-a)^{n-1}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$E(f) = \lim \to \infty S(n) = \frac{1-a}{a}.$$

Пример 5. При распределении Паскаля с параметрами m, a ($m \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$)

$$E(f) = \sum_{n \geq 1} np(n, m, a) = m(1-a)/a.$$

В самом деле, из определения $p(n, m, a)$ следует, что

$$np(n, m, a) = m((1-a)/a) \cdot p(n-1, m+1, a),$$
$$\sum_{n \geq 1} p(n-1, m+1, a) = 1.$$

Пример 6. При логарифмическом распределении с параметром a $(0 < a < 1)$

$$E(f) = -\sum_{n \geq 1} (1-a)^n / \log a = (1-a)/(a \log a).$$

Пример 7. При распределении Пуассона с параметром $a > 0$

$$E(f) = \sum_{n \geq 1} np(n, a) = a \sum_{n \geq 1} p(n-1, a) = a,$$

так как

$$np(n, a) = n\frac{a^n}{n!}e^{-a} = a\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a} = ap(n-1, a),$$
$$\sum_{n \geq 1} p(n-1, a) = \sum_{n \geq 0} p(n, a) = 1.$$

Пример 8. При распределении Гольдбаха тождественная переменная не имеет конечного среднего значения:

$$\sum_{m \in M} m/(m-1) = \infty,$$

так как $m/(m-1) \geq 1$. Другими словами, распределение Гольдбаха не имеет конечного центра.

7.2.3. Свойства среднего

Эти свойства определяются свойствами суммы семейства.

1. Рассмотрим множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(U)$ всех переменных на дискретном пространстве (U, p) и выделим множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ суммируемых по p. Сумма и произведение на число суммируемых переменных тоже суммируемы. Произведение суммируемых переменных может быть несуммируемо.

Среднее E является *функционалом* на $\mathscr{L}$: каждой суммируемой переменной ставится в соответствие число Ef. Про суммируемую переменную говорят также, что она *имеет среднее значение.*

В общем случае суммируемые переменные на (U, p) образуют векторное пространство, но не образуют алгебры.

Контрпример. Возьмем $s = 1 + \sigma$, $\sigma > 0$, и рассмотрим последовательность $(1/n^s)$, $n \geq 1$. Она суммируема. В самом деле,

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} \leq n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma},$$
$$\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^s} \leq n \cdot \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}},$$

откуда следует, что конечные суммы последовательности $(1/n^s)$ ограничены числом

$$c = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1/2^\sigma}{1 - 1/2^\sigma}.$$

Равенство

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$$

определяет знаменитую *ζ-функцию Римана*, которая играет важную роль в теории чисел. Известно, что $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Пусть $U = \mathbb{N}$, $p(n) = 6/(\pi n)^2$ и $f(n) = \sqrt{n}$. Тогда

$$E(f) = (6/\pi^2) \sum \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{6}{\pi^2}\, \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$E(f^2) = (6/\pi)^2 \sum \frac{1}{n} = \infty.$$

Неограниченность семейства конечных сумм гармонического ряда $(1/n)$ нетрудно проверить, разбивая их на двоичные отрезки и оценивая получаемые частичные суммы числом $1/2$ снизу каждую.

Рассмотрим еще переменную $g = f + c$, где c — постоянная. Произведение $fg = f^2 + cf$ несуммируемо вместе с f^2.

2. Основные свойства среднего E можно выразить фразой: E является *нормированным положительным линейным функционалом* на пространстве $\mathscr{L}$ суммируемых переменных. Это значит, что для каждых $f, g \in \mathscr{L}$ и $c \in \mathbb{R}$ верны равенства:

$$E(f+g) = E(f) + E(g), \quad E(cf) = cE(f),$$
$$E(f) \geq 0 \ (f \geq 0), \quad E(1) = 1.$$

Эти равенства легко проверяются. Из линейности и положительности среднего следует его монотонность:

$$E(f) \leq E(g) \quad (f \leq g).$$

Добавим еще одно важное свойство среднего E: его *счетную аддитивность*.

Рассмотрим последовательность суммируемых по p переменных f_n на пространстве (U, p). Предположим, что последовательность значений $f_n(u)$ для каждого $u \in U$ имеет сумму $f(u)$ и что последовательность средних значений $E(f_n)$ тоже имеет некоторую сумму. Счетная аддитивность среднего E означает, что переменная $f = \sum f_n$ суммируема по p и верно равенство

$$E(f) = \sum E(f_n).$$

Это равенство легко проверить, используя возможность изменять порядок суммирования для суммируемых семейств. Ограниченность семейства конечных сумм для $(E(f_n))$ влечет суммируемость семейств $(f_n(u)p(u))$, $(f(u)p(u))$ и обеспечивает равенства

$$Ef = \sum_u f(u)p(u) = \sum_u \sum_n f_n(u)p(u)$$
$$= \sum_n \sum_u f_n(u)p(u) = \sum_n E(f_n).$$

Из счетной аддитивности среднего E следует счетная аддитивность вероятности P. Рассмотрим последовательность попарно непересекающихся событий $A_n \subseteq U$ и их объединение A. Индикаторы $f_n = \operatorname{ind} A_n$ и $f = \operatorname{ind} A$ удовлетворяют условиям счетной аддитивности: $Ef_n = P(A_n)$, $\sum\limits_{n\in K} P(A_n) = P\Big(\bigcup\limits_{n\in K} A_n\Big) \leq 1$ для каждого конечного $K \subseteq \mathbb{N}$, $f(u) = \sum f_n(u) = 1$ при $u \in A$ и $f(u) = 0$ при $u \notin A$. Следовательно,

$$P(A) = E(\operatorname{ind} A) = \sum E(\operatorname{ind} A_n) = \sum P(A_n).$$

Счетная аддитивность среднего E и вероятности P для бесконечных пространств — свойство, существенно более сильное, чем конечная аддитивность. При использовании счетной аддитивности вероятности P надо помнить об условии $A_j A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$. В общем случае нужно переходить к среднему E.

3. Линейность среднего часто позволяет упростить его вычисление.

Рассмотрим множество $U = \mathbb{P}^m$ *мультиномеров* $u = (u_i)$, составленных из номеров $u_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Назовем число $|u| = u_1 + \cdots + u_m$ *нормой* мультиномера u. Обозначим U_n множество мультиномеров с нормой n. Множества U_n конечны, и поэтому их объединение $U = \cup U_n$ счетно. Ясно, что U_k, U_n при $k \neq n$ не имеют общих элементов. Пусть $0 < a < 1$. Равенство

$$p(u) = a^m (1-a)^{|u|}$$

определяет элементарную вероятность p на множестве U, причем $p(U_n) = b(n, m, a)$.

Каждая координата $f_i(u) = u_i$ мультиномера u имеет геометрическое распределение

$$\begin{aligned} q_i(n) &= P\{u : u_i = n\} \\ &= \sum_{u_j : j \neq i} a^{m-1} (1-a)^{\sum u_j} \cdot a(1-a)^n = a(1-a)^n. \end{aligned}$$

Элементарная вероятность p равна произведению q_i и является элементарным совместным распределением переменных f_i.

Сумма $|f| = \sum f_i$ имеет распределение Паскаля: так как множество $u_n = \{u : |u| = n\}$ состоит из $\binom{n+m-1}{m}$ элементов, то $P(|f| = n) = P(U_n) = b(n, m, a)$. Зная это, можно сразу выписать среднее значение:

$$E(|f|) = \sum_{1 \leq i \leq m} E(f_i) = m(1-a)/a.$$

Замечание. Распределение Паскаля применяют для описания числа нулей, появившихся до m-й по порядку единицы в бесконечной последовательности Бернулли: $b(n, m, a)$ есть вероятность того, что $s_{j(1)} = \cdots = s_{j(m)} = 1$ при некоторых номерах $j(1) < \cdots < j(m) = n + m$ и $s_j = 0$ при остальных $j < n + m$. Так как число n случайно и может принимать любые целые положительные значения, то нельзя для описания взять какое-нибудь пространство $B(l, a)$ заранее. А множество бесконечных двоичных последовательностей несчетно, и дискретная модель непосредственно не применима. Переход к распределениям позволяет обойти эту трудность.

7.3. Дисперсия

Дисперсия служит мерой отклонений значений случайной переменной от ее среднего значения.

7.3.1. Определения

Выделим в алгебре $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ суммируемых по p переменных на дискретном пространстве (U, p) подалгебру $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$ функций, квадратично суммируемых по p.

1. По определению переменная f на U *квадратично суммируема* по p, если переменная f^2 суммируема по p. Другими словами, $f \in \mathscr{L}^2$ означает, что f^2 имеет среднее значение. Так как $f^2 \geq 0$, то это записывают неравенством $E(f^2) < \infty$.

На бесконечных дискретных пространствах существуют переменные, которые суммируемы, но не квадратично суммируемы.

Если f^2 суммируема по p, то и f суммируема по p. В самом деле, $|f(u)p(u)| \leq p(u)$ при $f(u) \leq 1$ и $|f(u)p(u)| \leq f^2(u)p(u)$ при $f(u) > 1$. Следовательно,

$$|f(u)p(u)| \leq f^2(u)p(u) + p(u)$$

для каждого $u \in U$. Так как $\sum p(u) = 1$, то из ограниченности конечных сумм для f^2 следует их ограниченность для f.

2. Число
$$D(f) = E((f - Ef)^2)$$
называется *дисперсией* квадратично суммируемой по p переменной f на пространстве (U, p). Для проверки суммируемости выражения $(f - Ef)^2$ используются равенство
$$(f - Ef)^2 = f^2 - 2f \cdot Ef + (Ef)^2,$$
суммируемость по p постоянных и суммируемость f, обеспечиваемая предполагаемой суммируемостью f^2.

Свойства дисперсии D определяются свойствами среднего E:
$$\begin{gathered} D(f) \geq 0, \quad D(c) = 0; \\ D(f + c) = D(f), \quad D(cf) = c^2 D(f); \\ D(f + g) = D(f) + D(g) - 2C(f, g), \end{gathered}$$
где
$$C(f, g) = E((f - Ef)(g - Eg)) = E(fg) - Ef \cdot Eg.$$
Кроме того,
$$D(f) = E(f^2) - (Ef)^2.$$

Число $C(f, g)$ называется *ковариацией* переменных f, g.

Равенство
$$D(f + g) = D(f) + D(g)$$
эквивалентно $C(f, g) = 0$.

Число
$$S(f) = \sqrt{D(f)} \geq 0$$
называется *стандартным отклонением* переменной f или, коротко, ее *стандартом.* Его используют в качестве единицы масштаба для измерения отклонений значений переменной f от ее среднего значения $E(f)$.

7.3.2. Примеры

Рассмотрим несколько примеров вычисления дисперсий. Будем использовать тождественную переменную f и распределения p на $\mathbb{P}$ или $\mathbb{N}$, взятые из примеров в 7.2.2.

Пример 1. Случайные переменные s_j на пространстве Бернулли $B(n,a)$ являются событиями и $Es_j = a$ $(j = 1, \ldots, n)$. Поэтому $Ds_j = a(1-a)$.

Ковариации $C(s_j, s_k)$ при $j \neq k$ равны нулю:

$$\begin{aligned} E((s_j - a)(s_k - a)) &= E(s_j s_k - s_j a - a s_k + a^2) \\ &= E(s_j s_k) - aEs_j - aEs_k + a^2 = a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 0, \end{aligned}$$

так как $E(s_j s_k) = a^2$. Следовательно,

$$D(s_j + s_k) = Ds_j + Ds_k = 2a(1-a).$$

По индукции нетрудно обобщить эту формулу на n слагаемых $s_1, \ldots, s_n$. Дисперсия числа единиц в последовательности Бернулли длины n с параметром a выражается равенством

$$Ds = na(1-a).$$

Стандартное отклонение числа единиц от среднего значения na имеет порядок $\sqrt{n}$.

Пример 2. Во многих прикладных задачах используется элементарная вероятность p со значениями

$$p(k) = \binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k} \Big/ \binom{n}{m} = g(k,l,m,n)$$

на множестве $U = \{0, 1, \ldots, l\}$. Здесь l, m, n — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq l \leq n$, $1 \leq m \leq n$. Вероятность p называется *гипергеометрическим распределением* с параметрами l, m, n. Равенство $\sum p(k) = 1$ эквивалентно

$$\sum_k \binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k} = \binom{n}{m},$$

которое проверяется сравнением коэффициентов при x^m в равенстве

$$(1+x)^l (1+x)^{n-l} = (1+x)^n$$

после применения биномиальной формулы. Вычислим среднее значение тождественной переменной f на U. Как легко проверить (упражнение), выразив биномиальные коэффициенты через факториалы,

$$k \cdot g(k,l,m,n) = (lm/n) \cdot g(k-1, l-1, m-1, n-1).$$

Поэтому

$$E(f) = \sum_{k \geq 0} k \cdot g(k, l, m, n) = \frac{lm}{n} \sum_{k \geq 1} g(k-1, l-1, m-1, n-1) = \frac{lm}{n}.$$

Вычислим дисперсию f. Как легко проверить (упражнение),

$$k(k-1) \cdot g(k, l, m, n) = \frac{lm}{n} \frac{(l-1)(m-1)}{n-1} \cdot g(k-2, l-2, m-2, n-2).$$

Следовательно,

$$D(f) = \frac{lm}{n} \frac{(l-1)(m-1)}{n-1} + \frac{lm}{n} - \left(\frac{lm}{n}\right)^2 = \frac{n-m}{n-1} \frac{lm}{n} \left(1 - \frac{l}{n}\right).$$

Отметим связь гипергеометрического распределения с биномиальным, имеющим параметры m, l/n: переменные с этим распределением имеют одно и то же среднее значение, а их дисперсии отличаются коэффициентом $(n-m)/(n-1)$. Переменная f равна сумме $s_1 + \cdots + s_m$ двоичных переменных с одним и тем же распределением $P(s_i = 1) = l/n$, $P(s_i = 0) = 1 - l/n$. В биномиальном случае их естественно считать независимыми, а в гипергеометрическом — зависимыми.

Пример 3. Для двоичной марковской последовательности $BM(n, a, Q)$ выражение для дисперсии числа единиц $s = \sum s_j$ гораздо сложнее, так как $C(s_j, s_k) \neq 0$ при $j \neq k$ и $Ds \neq \sum Ds_j$ при $d \neq 0$. Чтобы упростить формулы, введем для двоичных марковских последовательностей специальные обозначения:

$$p = q(1,1), \quad q = q(0,0), \quad 1-p = q(1,0), \quad 1-q = q(0,1);$$
$$d = p + q - 1, \quad b = (1-q)/(1-d), \quad c = (a-b)/(1-d);$$
$$\alpha = (1-b)/(1-d), \quad \beta = b/(1-d), \quad \gamma = (1+d)/(1-d).$$

Были выписаны формулы для вероятностей и средних:

$$p_j = P(s_j = 1) = b + (a-b)d^j, \quad P(s_j = 0) = 1 - b - (a-b)d^j;$$
$$Es_j = b + (a-b)d^j, \quad Es = (n+1)b + c(1 - d^{n+1}).$$

Вычислим средние значения $E(s_j s_k) = P(s_j = s_k = 1)$. Рассматривая отдельно каждый из случаев $j \leq k$, $k = j$, $k \geq j$, легко доказать по индукции, что

$$E(s_j s_k) = p_j(b + (1-b)d^{k-j}).$$

Заметим, что

$$C(s_j, s_k) = p_j q_j d^{k-j}.$$

В самом деле,

$$C(s_j, s_k) = E(s_j s_k) - Es_j Es_k = p_j(b + (1-b)d^{k-j}) - p_j p_k$$
$$= p_j(1 - b - (a-b)d^j)d^{k-j} = p_j q_j d^{k-j}.$$

Если $d = 0$, то $C(s_j, s_k) = 0$.

Вычислим теперь среднее значение переменной s^2. Заметим, что так как $s_j^2 = s_j$, то

$$E(s^2) = E\left(\left(\sum_{j=0}^{n} s_j\right)^2\right) = E\left(\sum_{j=0}^{n} s_j^2\right)$$
$$+ 2E\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} s_j s_k\right) = E(s) + 2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} E(s_j s_k).$$

Подставляя значения $E(s)$ и $E(s_j s_k)$, используя формулы для сумм d^j и jd^j, после несложных преобразований получаем

$$E(s^2) = n^2b^2 + nb(1 + b + 2(c + \alpha d)) + (b + c + 2((\alpha - \beta)c - \alpha bd))$$
$$- (2(a-b)\alpha + (c + 2(c(\alpha - \beta) - \alpha\beta d))/n)nd^{n+1}.$$

Отметим промежуточные формулы:

$$\sum_{k=j+1}^{n} E(s_j s_k) = (n-j)b^2 + (a-b)b(n-j)d^j$$
$$+ \alpha bd - \alpha bd^{n-j+1} + \alpha(a-b)d^{j+1} - \alpha(a-b)d^{n+1},$$
$$\sum_{j=0}^{n-1}(a-b)b(n-j)d^j = bcn - \beta cd + \beta cd^{n+1}.$$

Как легко проверить,

$$(E(s))^2 = n^2b^2 + 2b(b+c)n + (b+c)^2 - (2b + (2(b+c) - cd^{n+1})/n)cnd^{n+1},$$

откуда получаем

$$V(s) = E(s^2) - (E(s))^2 = nb(1-b)\gamma + B + C(n)nd^{n+1},$$

где

$$B = (1 - b - c)(b + c) + 2((\alpha - \beta)c - \alpha\beta d)d,$$
$$C(n) = 2bc - 2(a-b)\alpha - (c + 2(((\alpha - \beta) - (b+c))c - \alpha\beta d) + c^2d^{n+1})/n.$$

В частности, если $a = p = 1 - q$ и марковская последовательность превращается в последовательность Бернулли, то $d = 0$, $b = p$, $c = 0$, $B = p(1-p)$, $d^{n+1} = 0$, $\gamma = 1$ и

$$V(s) = nb(1-b) + b(1-b) = (n+1)p(1-p).$$

В марковском случае главная часть формулы умножается на коэффициент $\gamma = (1+d)/(1-d)$, характеризующий зависимость между переменными s (с индексом j).

Если $|d| < 1$, то при $n \to \infty$

$$V(s) \sim nb(1-b)\gamma.$$

Но когда $|d|$ близко к единице, то $V(s)/(nb(1-b)\gamma) \to 1$ довольно медленно.

Пример 4. При геометрическом распределении с параметром a $(0 < a < 1)$

$$D(f) = (1-a)/a^2.$$

В самом деле, используя формулу суммирования по частям и равенство $E(f) = (1-a)/a$, получаем

$$\begin{aligned} E(f^2) &= \sum_{n\ge0} n^2 a(1-a)^n = a \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{0\le m<n} m^2(1-a)^m\right) \\ &= a \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2(1-a)^n}{a} + \sum_{0\le m<n}\frac{(1-a)^{m+1}}{a}(2m+1)\right) \\ &= 2(1-a)\sum_{m\ge0} m(1-a)^m + (1-a)\sum_{m\ge0}(1-a)^m \\ &= 2(1-a)^2/a^2 + (1-a)/a, \end{aligned}$$

$$(Ef)^2 = (1-a)^2/a^2, \quad D(f) = E(f^2) - (Ef)^2 = (1-a)/a^2.$$

Пример 5. Для распределения Паскаля с параметрами m, a ($m > 0$ целое, $0 < a < 1$) верны равенства

$$n(n-1)p(n,m,a) = (m+1)m\frac{(1-a)^2}{a^2}p(n-2,m+2,a),$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge0} n(n-1)p(n,m,a) &= (m+1)m\frac{(1-a)^2}{a^2}\sum_{n\ge2} p(n-2,m+2,a) \\ &= (m+1)m((1-a)^2/a^2), \end{aligned}$$

откуда

$$E(f^2) = (m+1)m((1-a)^2/a^2) + Ef.$$

А так как $Ef = m(1-a)/a$, то

$$D(f) = E(f^2) - (Ef)^2 = m(1-a)/a^2.$$

Пример 6. При логарифмическом распределении с параметром a $(0 < a < 1)$

$$D(f) = -\frac{1-a}{a^2 \log a}\left(1 + \frac{1-a}{\log a}\right).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} E(f^2) = -\sum_{n \geq 1} n^2 (1-a)^n / (n \log a) \\ = -\sum_{n \geq 1} n(1-a)^n / \log a = -(1-a)/(a^2 \log a), \end{aligned}$$

$$(Ef)^2 = (1-a)^2/(a \log a)^2,$$

и формула $D(f) = E(f^2) - (Ef)^2$ дает нужный результат.

Пример 7. При распределении Пуассона с параметром $a > 0$

$$D(f) = a.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} E(f^2) = \sum_{n \geq 1} n^2 \frac{a^n}{n!} e^{-a} = \sum_{n \geq 1} n(n-1) \frac{a^n}{n!} e^{-a} + \sum_{n \geq 1} n \frac{a^n}{n!} e^{-a} \\ = a^2 e^{-a} \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} + Ef = a^2 + a, \end{aligned}$$

$$D(f) = E(f^2) - (Ef)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$$

При распределении Пуассона дисперсия и среднее значение равны параметру a.

7.4. Распределения

Переход к распределению позволяет отвлечься от специфики рассматриваемой переменной и сосредоточиться на вероятностной стороне дела.

7.4.1. Определения и примеры

Переменная f на дискретном пространстве (U, p) определяет новое пространство (X, q) с множеством исходов $X = f(U)$ и элементарной вероятностью $q = Pf^{-1}$, имеющей значения

$$q(x) = P(f^{-1}(x)) = \sum_{u:f(u)=x} p(u).$$

1. Элементарная вероятность $q = Pf^{-1}$ называется *элементарным распределением* переменной f, а определяемая q вероятность $Q = Pf^{-1}$ — ее *распределением*:

$$Q(B) = P(A) = P(f^{-1}(B)) \quad (A = f^{-1}(B) \subseteq U, B \subseteq X).$$

Замена $u \in U$ на $x = f(u) \in X$ дает удобные формулы для среднего значения и дисперсии (когда они существуют):

$$E(f) = \sum xq(x), \quad D(f) = \sum (x - Ef)^2 q(x).$$

Они получаются группировкой исходов u, для которых $f(u) = x$.

Элементарная вероятность p является распределением для тождественной переменной f, в этом случае $U = X$, $u = f(u) = f(x) = x$, $q(x) = P(f^{-1}(x)) = P(\{x\}) = p(x)$. Если $U \subseteq [0, \infty)$ и $g = f^2$, то $X = \{x = u^2 : u \in U\}$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = p(\sqrt{x})$.

2. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть (U_1, p_1) — комбинаторное пространство с множеством исходов $u_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Положим также $f_1(2) = f_1(4) = f_1(6) = 1$, $f_1(1) = f_1(3) = f_1(5) = -1$. Тогда $X_1 = \{-1, 1\}$ и $q_1(-1) = q_1(1) = 1/2$.

Пусть теперь $U_2 = \{0, 1\}$, $p_2(0) = p_2(1) = 1/2$ и $f_2(0) = -1$, $f_2(1) = 1$. Тогда тоже $X_2 = \{-1, 1\}$ и $q_2(-1) = q_2(1) = 1/2$. Случайные переменные f_1 и f_2 имеют одинаковые распределения, хотя как функции различны и имеют разные области определения: $Pf_1^{-1} = Pf_2^{-1}$, но $f_1 \neq f_2$.

Пример 2. Рассмотрим пространство Бернулли $B(n, a)$ и случайную переменную $f = s$ (п. 7.3.2). Ее множеством значений будет $X = \{0, 1, \dots, n\}$. Она имеет *биномиальное распределение*

$$q(x) = \sum_{u:s(u)=x} a^x (1-a)^{n-x} = \binom{n}{x} a^x (1-a)^{n-x},$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (x = 0, 1, \dots, n).$$

Удобно считать, что этот биномиальный коэффициент равен нулю при $x < 0$ и $x > n$.

Биномиальное распределение играет большую роль в элементарной теории вероятностей. Оно используется при решении многих задач.

3. Вероятностное пространство (U, p) можно интерпретировать как механическую систему точек $u \in U$ с положительными массами $p(u)$, в сумме равными единице. Вероятность $P(A)$ события $A \subseteq U$ равна массе тела A. Случайная переменная $f\colon U \to X$ ставит в соответствие системе (U, p) новую систему (X, q) точек $x \in X = f(U) \subseteq \mathbb{R}$ с массами $q(x) = Pf^{-1}(x) = P\{u : f(u) = x\}$. Сумма этих масс тоже равна единице.

Переменная f переносит массу с абстрактного множества U на вещественную прямую $\mathbb{R}$. Среднее значение Ef переменной f служит *центром масс* системы $(X, q) = (f(U), Pf^{-1})$, а дисперсия — *моментом инерции* относительно этого центра.

Аналогия между вероятностным пространством и механической системой часто позволяет лучше понять основные определения. Представление о вероятности как о мере реализуемости события хорошо согласуется с интуитивным представлением о массе тела.

7.4.2. Совместное распределение

Не умаляя общности (элементы конечного множества всегда можно снабдить номерами), вместо произвольных индексов при обозначении семейства $f = (f_j)$ переменных на дискретном пространстве (U, p) будем рассматривать номера $j = 1, \dots, m$ и писать также $f = (f_1, \dots, f_m)$.

1. Значение $f(u) = (f_1(u), \dots, f_m(u))$ для каждого $u \in U$ есть вектор в m-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^m$. Семейство f определяет множество

$$X = f(U) = \{x = f(u) : u \in U\}$$

векторов $x = (x_j)$ с координатами $x_j = f_j(u)$. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^m$ счетно вместе с U.

Равенство

$$q(x) = P(f^{-1}(x)) = P\{u : f_j(u) = x_j,\, 1 \leq j \leq m\}$$

определяет элементарную вероятность $q = P^{-1}$ на множестве X, которая называется *элементарным совместным распределением* переменных f_j. Определяемая q вероятность $Q = Pf^{-1}$ для событий $B \subseteq X$ называется *совместным распределением* переменных f_j.

Элементарные распределения $q_j = Pf_j^{-1}$, а также распределения $Q_j = Pf_j^{-1}$ для переменных f_j называются *маргинальными*. Они определены для множеств исходов $X_j = f_j(U) \subseteq \mathbb{R}$.

2. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В 7.1.2 описана связь между распределениями геометрическим и Паскаля. Там $U = X = \mathbb{P}^m$, $p(u) = a^m(1-a)^{|u|}$ и $f_i(u) = u_i$ для $u = (u_1, \ldots, u_m)$, откуда следует, что $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_m(u)) = (u_1, \ldots, u_m) = u$ и f является тождественной переменной. Элементарная вероятность p является одновременно совместным распределением для f, т. е. $q = p$. Маргинальные распределения q_i геометрические и определены на $X_i = \mathbb{P}$:

$$q_i(n) = P(u : u_i = n) = a(1-a)^n$$

для каждого $n \in \mathbb{P}$.

Пример 2. Рассмотрим пространство Бернулли $B(2, a)$ и случайные переменные $f_1 = s_1$, $f_2 = s_2$ на нем. Из определений следует, что $U_1 = U_2 = \mathbb{B} = \{0, 1\}$, $U = \mathbb{B}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ и $X_1 = X_2 = \mathbb{B}$, $X = \mathbb{B}^2$. Маргинальные и совместные распределения для $f = (s_1, s_2)$ описываются таблицами:

x_1	0	1
q_1	$1-a$	a

x_2	0	1
q_2	$1-a$	a

x	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
q	$(1-a)^2$	$a(1-a)$	$a(1-a)$	a^2

Для всех $x = (x_1, x_2)$ верно равенство $q(x) = q_1(x_1)q_2(x_2)$. Имея его в виду, вероятность q называют *произведением* вероятностей q_1, q_2 и пишут $q = q_1 \times q_2$.

Если интерпретировать эту модель как описание подбрасывания два раза симметричной монеты, то числа s_1 и s_2 появления гербов при первом и втором подбрасывании естественно считать независимыми. Это подводит к мысли связать независимость случайных переменных с равенством их совместного распределения произведению маргинальных.

Пример 3. Рассмотрим пространство $B(2, 1/2)$ и случайные переменные $f_1 = s_1 + s_2$, $f_2 = s_1 - s_2$. Очевидно, что $X_1 = \{0, 1, 2\}$, $X_2 = \{-1, 0, 1\}$,

$X = \{(0,0),(1,-1),(1,1),(2,0)\}$. Маргинальное и совместное распределения для f_1, f_2 описываются таблицами:

x_1	0	1	2
q_1	1/4	1/2	1/4

x_2	-1	0	1
q_2	1/4	1/2	1/4

x	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(2,0)$
q	1/4	1/4	1/4	1/4

Теперь $q \neq q_1 \times q_2$ ($q(0,0) = 1/4 \neq (1/4)(1/2) = q_1(0)q_2(0)$). Переменные f_1 и f_2 зависимы. Пример подкрепляет связь между независимостью случайных переменных и равенством их совместного распределения произведению маргинальных.

7.4.3. Независимость

Рассмотрим векторную переменную $f = (f_1, \dots, f_n)$, координаты которой f_j ($j = 1, \dots, n$) являются числовыми переменными на пространстве (U, p), их маргинальные распределения q_j на множествах $X_j = f_j(U) \subseteq \mathbb{R}$ и совместное распределение q на множестве $X = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Если $q = q_1 \dots q_n$, то говорят, что переменные $f_1, \dots, f_n$ *(стохастически) независимы*, а если $q \neq q_1 \dots q_n$ — что *(стохастически) зависимы*.

1. Для независимых переменных $f_1, \dots, f_n$, имеющих средние и дисперсии, верны равенства

$$E(f_1 \dots f_n) = E(f_1) \dots E(f_1),$$
$$D(f_1 + \dots + f_n) = D(f_1) + \dots + D(f_n).$$

Эти равенства доказываются по индукции. Они верны и для попарно независимых переменных f_j ($j = 1, \dots, n$).

Пример. Рассмотрим пространство (U, p) с множеством исходов $U = \mathbb{P}^n$ и элементарной вероятностью $p(u) = a^m(1-a)^{|u|}$. Из определений следует, что переменные $f_i(u) = u_i$ независимы:

$$p(u) = a^m (1-a)^{\sum u_i} = \prod a(1-a)^{u_i} = \prod q_i.$$

Поэтому, зная среднее значение и дисперсию каждого слагаемого суммы $|f| = \sum f_i$ можно сразу выписать ее среднее и дисперсию:

$$E(|f|) = \sum_{1 \le i \le m} E(f_i) = m(1-a)/a,$$
$$D(|f|) = \sum_{1 \le i \le m} D(f_i) = m(1-a)/a^2.$$

2. События $A_j \subseteq U$ в пространстве (U, p) называются независимыми, если независимы их индикаторы $f_j = \operatorname{ind} A_j$. Проверять независимость событий удобнее, непосредственно используя их вероятности.

Рассмотрим события $A, B \subseteq U$ и их индикаторы $f = \operatorname{ind} A$, $g = \operatorname{ind} B$. Такие случайные переменные f, g независимы тогда и только тогда, когда для пересечения $AB = A \cap B$ верно равенство
$$P(AB) = P(A)P(B).$$
В самом деле, если f и g независимы, то
$$P(AB) = E(fg) = EfEg = P(A)P(B).$$
Легко проверить и обратное утверждение.

Независимость событий $A_j \subseteq U$ $(j \in M)$ в пространстве (U, p) выражается равенством
$$P\bigg(\bigcap_{j\in K} A_j\bigg) = \prod_{j\in K} P(A_j)$$
для каждого конечного $K \subseteq M$. Эти равенства обычно принимаются в качестве определения независимости событий A_j.

7.5. Корреляционная теория

Эта теория используется при описании зависимости случайных переменных. Для ее изложения удобен геометрический язык.

7.5.1. Коэффициент корреляции

Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$ квадратично суммируемых по p переменных на невырожденном дискретном пространстве (U, p). Каждая квадратично суммируемая переменная суммируема. Поэтому $\mathscr{L}^2$ является подпространством пространства $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ суммируемых переменных на (U, p).

1. Если переменные f, g на U квадратично суммируемы по p, то их произведение суммируемо по p. Это следует из неравенства

$$|fg| \leq (f^2 + g^2)/2,$$

которое обеспечивает ограниченность конечных сумм семейства $f(u)g(u)p(u)$ $(u \in U)$. Суммируемость произведенияя fg позволяет определить скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = E(fg)$$

для каждых квадратично суммируемых переменных f, g и сделать $\mathscr{L}^2$ евклидовым пространством. Скалярное произведение симметрично, линейно по каждой переменной, положительно на диагонали и невырождено при невырожденной элементарной вероятности p (не имеющей нулевых значений, что предполагается).

Если множество U конечно, то каждая функция на U квадратично суммируема по любой элементарной вероятности p на U и пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$ совпадает с пространством $\mathscr{F} = \mathscr{F}(U)$ всех функций на U.

Квадратично суммируемые переменные с нулевым средним значением образуют подпространство $\mathscr{L}_0^2 = \mathscr{L}_0^2(U, p)$ евклидова пространства $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$. Каждой переменной $f \in \mathscr{L}^2$ соответствует центрированная переменная $f_0 = f - Ef \in \mathscr{L}_0^2$. Из определений следует, что

$$D(f_0) = E\big(f_0^2\big) = \langle f_0, f_0\rangle = \|f_0\|^2,$$
$$S(f_0) = \sqrt{D(f_0)} = \sqrt{\langle f_0, f_0\rangle} = \|f_0\|$$

для каждой $f \in \mathscr{L}^2$. Дисперсия центрированной переменной равна квадрату ее евклидовой длины, а стандартное отклонение — ее длине в пространстве $\mathscr{L}_0^2$.

2. Скалярное произведение позволяет измерять зависимость между квадратично суммируемыми переменными как величину угла между векторами в евклидовом пространстве. Число

$$K(f, g) = \frac{C(f, g)}{S(f)S(g)} = \frac{E(fg) - E(f)E(g)}{\sqrt{D(f)}\sqrt{D(g)}}$$

называется *коэффициентом корреляции* между квадратично суммируемыми переменными $f \neq 0$, $g \neq 0$. (Так как по предположению элементарная вероятность p невырожденная, то $Df \neq 0$, $Dg \neq 0$.) Из определений следует, что

$$K(f,g) = \langle \overline{f_0}, \overline{g_0} \rangle,$$

где

$$\overline{f_0} = (f - Ef)/\|f - Ef\|, \quad \overline{g_0} = (g - Eg)/\|g - Eg\|.$$

Для каждых векторов f, g евклидова пространства $\mathscr{L}^2$ верно неравенство Коши

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

и, следовательно,

$$K(f,g) \leq \|\overline{f_0}\| \, \|\overline{g_0}\| = 1.$$

Коэффициент корреляции симметричен:

$$K(f,g) = K(g,f).$$

Если $K(f,g) = 0$, то переменные f, g называются *некоррелированными* или *ортогональными*. Равенство $K(f,g) = 1$ означает линейную зависимость между f и g.

3. О всяком свойстве случайной переменной условимся говорить, что оно верно *почти всюду*, если оно верно для всех исходов с ненулевыми вероятностями. В невырожденном пространстве, где исходов с нулевыми вероятностями нет, *почти всюду* означает *всюду*. Говорят, что переменные f, g почти всюду линейно зависимы, если существует число a и постоянная b такие, что $af - g = b$ почти всюду (т. е. $af(u) - g(u) = b$ при $p(u) > 0$).

Исследуя дискриминант квадратного уравнения

$$E\bigl(f_0^2\bigr)x^2 - 2E(f_0 g_0)x + E(g_0^2) = 0,$$

нетрудно доказать, что равенство

$$|K(f,g)| = 1$$

верно тогда и только тогда, когда переменные f, g почти всюду линейно зависимы.

Используя векторную интерпретацию, можно сказать, что равенства $K(f,g)=1$ и $K(f,g)=-1$ определяют соответственно *одинаковую* и *противоположную направленность* f и g.

4. Рассмотрим несколько примеров для конечных вероятностных пространств (U,p).

Пример 1. Были вычислены ковариации для переменных s_j и s_k, описывающих появление единицы на j-м и k-м местах в двоичной марковской последовательности:

$$C(s_j,s_k)=p_jq_jd^{k-j}=D(s_j)d^{k-j}.$$

Следовательно, при $j<k$ верно равенство

$$K(s_j,s_k)=\sqrt{D(s_j)/D(s_k)}\,d^{k-j}.$$

Для последовательности Бернулли $d=0$ и $K(s_j,s_k)=0$. Переменные s_j и s_k некоррелированы.

Пример 2. Из формулы квадратов для Df следует, что

$$K(f,f)=\frac{E(f^2)-(Ef)^2}{\sqrt{Df}\sqrt{Df}}=\frac{Df}{Df}=1,$$
$$K(f,-f)=\frac{-E(f^2)+(Ef)^2}{\sqrt{Df}\sqrt{Df}}=-\frac{Df}{Df}=-1.$$

Вообще, для каждых переменных f, g и чисел a, b, c, d верны равенства

$$\begin{aligned}C(af+b,cg+d)&=E((af+b)(cg+d))-E(af+b)E(cg+d)\\&=ac(E(fg)-EfEg),\end{aligned}$$

$$S(af+b)=|a|Sf,\quad S(cg+d)=|c|Sg,$$
$$K(af+b,cg+d)=\operatorname{sgn}(ac)\cdot K(f,g).$$

В частности,

$$K(-f,g)=K(f,-g)=-K(f,g),\quad K(-f,-g)=K(f,g).$$

Пример 3. На пространстве $B(n,a)$ рассмотрим случайные переменные s_j, $s=\sum s_j$, s/n $(1\le j\le n)$.

Верны равенства

$$K(s,s/n)=K(s,s)=1.$$

Они соответствуют линейной зависимости частоты появления единиц и их числа.

Так как

$$E(s_i s) = \sum_{j=1}^{n} E(s_i s_j) = a + (n-1)a^2,$$

$$Es_i = a, \quad Es = na, \quad Ds_j = a(1-a), \quad Ds = na(1-a),$$

то

$$K(s_i, s) = \frac{a + (n-1)a^2 - na^2}{\sqrt{n} \cdot a(1-a)} = 1/n$$

для каждого $i = 1, \ldots, n$. При сделанных предположениях с увеличением числа слагаемых сумма меньше зависит от каждого из них.

Пример 4. Рассмотрим кроме суммы $s = \sum s_j$ еще произведение $t = \prod s_j$ переменных s_j на пространстве $B(n, a)$. Из определений следует, что

$$Et = P(s_1 = \cdots = s_n = 1) = a^n.$$

Так как $t^2 = t$, то

$$Dt = E(t^2) - (Et)^2 = Et - (Et)^2 = a^n(1 - a^n).$$

А так как $st = nt$, то

$$E(st) = nEt = na^n.$$

Следовательно,

$$K(s,t) = \frac{na^n - na \cdot a^n}{\sqrt{na(1-a)a^n(1-a^n)}} = \sqrt{na^{n-1} \cdot \frac{1-a}{1-a^n}}.$$

Корреляция стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 5. Рассмотрим пространство $B(2, a)$ и случайные переменные $f = s_1 + s_2$, $g = s_1 - s_2$ на нем. Так как

$$Ef = 2a, \quad Eg = 0,$$

$$E(fg) = E\left(s_1^2 - s_2^2\right) = E(s_1 - s_2) = 0,$$

то

$$C(f,g) = E(fg) - EfEg = 0$$

и, следовательно, $K(f,g) = 0$. Вместе с тем переменные f и g явно зависимы: если $g \neq 0$, то $f = 1$. Коэффициент корреляции не отражает такую зависимость.

Пример 6. Рассмотрим комбинаторное пространство $(L, 4)$ с множеством исходов $U = \{1, 2, 3, 4\}$ и случайные переменные x, y со значениями $x(1) = -2$, $x(2) = -1$, $x(3) = 1$, $x(4) = 2$ и $y(u) = x^2(u)$. Непосредственные вычисления дают

$$Ex = 0, \quad Ey = 10/4, \quad E(xy) = 0.$$

Следовательно,

$$C(x, y) = E(xy) - ExEy = 0$$

и $K(x, y) = 0$. Вместе с тем между переменными x и y существует функциональная зависимость: $y = x^2$. Коэффициент корреляции не отражает такую нелинейную зависимость.

Замечание. Два последние примера показывают, что коэффициент корреляции может равняться нулю и тогда, когда случайные переменные явно зависимы. Поэтому нужны более адекватные меры зависимости между случайными переменными, описывающие не только линейную зависимость.

7.5.2. Коэффициенты регрессии

Реальная зависимость между случайными переменными f и g может быть несимметричной. Это отражают *коэффициенты регрессии* f *на* g и g на f:

$$R(f, g) = \frac{C(f, g)}{Dg} = \frac{E(fg) - EfEg}{Dg},$$
$$R(g, f) = \frac{C(f, g)}{Df} = \frac{E(fg) - EfEg}{Df}.$$

(Предполагаем, как обычно в корреляционной теории, что $Df > 0$ и $Dg > 0$.)

1. Геометрически $R(f, g)$ и $R(g, f)$ интерпретируются как нормированные величины проекций вектора f на направление вектора g и наоборот:

$$R(f, g) = R(f_0, g_0) = \frac{\langle f_0, \overline{g_0} \rangle}{\|g_0\|},$$
$$R(f, g) = R(g_0, f_0) = \frac{\langle g_0, \overline{f_0} \rangle}{\|f_0\|}.$$

Здесь $\overline{f_0} = f_0/\|f_0\|$, $\overline{g_0} = g_0/\|g_0\|$ при $\|f_0\| > 0$, $\|g_0\| > 0$.

Так как
$$R(f,g)\cdot R(g,f)=(K(f,g))^2,$$
то $R(f,g)$ и $R(g,f)$ имеют один и тот же знак, а коэффициент корреляции равен их среднему геометрическому с общим знаком:
$$K(f,g)=\pm\sqrt{R(f,g)R(g,f)}.$$

В примерах с последовательностями Бернулли
$$R(s_j,s)=1,\quad R(s,s_j)=1/n;$$
$$R(s,t)=a^{n-1},\quad R(t,s)=(1-a)/(1-a^n).$$
Если сумма $s=0$, то каждое слагаемое $s_j=0$ и произведение $t=0$. Но если $s_j=0$ для данного номера j или $t=0$, то s может иметь любое значение из $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

2. Если отождествить события A, B с их индикаторами $\operatorname{ind}A$, $\operatorname{ind}B$ и воспользоваться равенствами $P(A)=E(\operatorname{ind}A)$, $P(B)=E(\operatorname{ind}B)$, то можно определить коэффициент корреляции для событий равенством
$$K(A,B)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)(1-P(A))}\sqrt{P(B)(1-P(B))}}.$$

Вместо коэффициента корреляции для измерения зависимости между событиями можно использовать *коэффициент связи*
$$Q(A,B)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(AB)P(A'B')+P(AB')P(A'B)}.$$
(В равенствах для коэффициентов корреляции и связи предполагается, что знаменатели не равны нулю.)

Равенство $Q(A,B)=0$ эквивалентно $P(AB)=P(A)P(B)$ и означает независимость событий A, B.

Используя правила действий с вероятностями, легко проверить, что
$$|K(A,B)|\le|Q(A,B)|.$$
Равенство $Q(A,B)=1$ означает, что либо $P(A)=P(AB)$, либо $P(B)=P(AB)$. Если рассматриваемое пространство невырожденное, то последние равенства эквивалентны включениям $A\subseteq B$ или $B\subseteq A$: одно из этих событий влечет другое.

Пример. Рассмотрим последовательность Бернулли $B(n, a)$ и события $A = \{u = (u_i) : u_j = 1\} = \{s_j = 1\}$ — появление единицы на j-м месте, $B = \{u = (u_i) : \prod u_i = 1\} = \{t = 1\}$ — появление единиц на всех местах. Из определений следует, что

$$P(A) = a, \quad P(B) = a^n, \quad P(AB) = P(B) = a^n,$$
$$P(A'B') = 1 - a, \quad P(A'B) = 0, \quad P(AB') = a(1 - a^{n-1}).$$

Поэтому в соответствии с включением $B \subseteq A$

$$Q(A, B) = \frac{a^n - aa^n}{a^n(1 - a)} = 1.$$

7.6. Информация и энтропия

Чтобы избежать технических трудностей, будем рассматривать невырожденное конечное вероятностное пространство. Информация случайных переменных определяется как среднее значение некоторой специальной функции этих переменных. Она является удобной мерой зависимости между ними. Термин *информация* употребляется в теории вероятностей в специальном точно определенном смысле. Энтропия определяется через информацию. С общей теорией информации и энтропии можно познакомиться по книгам [119, 61, 7, 104]. В [7] описывается связь теории информации с эргодической теорией.

7.6.1. Определения

Рассмотрим невырожденное вероятностное пространство (U, p) и случайные переменные f, g на нем. Пусть $X = f(U)$, $Y = g(U)$ и

$$Z = \{(x, y) = (f(u), g(u)) : u \in U\}.$$

(Подчеркнем, что часто $X \times Y \neq Z$, так как пары $(x, y) = (f(u), g(v))$ для некоторых исходов $u \neq v$ могут не принадлежать Z.)

1. Обозначим q, r и s маргинальные и совместное распределения для f, g. По предположению p, а поэтому q, r и s строго положительны. Это позволяет определить случайную переменную $i(f,g)$, которая имеет значения

$$i(f,g,u) = \log \frac{s(f(u), g(u))}{q(f(u))r(g(u))} \quad (u \in U).$$

Условимся называть ее *элементарной информацией* f, g. Основание логарифма обычно выбирается равным 2. Из определений следует, что тождественное равенство $i(f,g) = 0$ эквивалентно независимости f, g.

Число

$$I(f,g) = E(i(f,g))$$

называется *информацией* f, g. Из определений следует, что

$$I(f,g) = \sum p(u) \log \frac{s(f(u), g(u))}{q(f(u))r(g(u))} \quad (u \in U),$$

$$I(f,g) = \sum s(x,y) \log \frac{s(x,y)}{q(x)r(y)} \quad ((x,y) \in Z).$$

Ясно, что если f, g независимы, то $I(f,g) = E(0) = 0$.

2. Часто информацию переменных f и g называют *взаимной.*

Пример. Пусть $f = s_1$, $g = s_2$ — числа единиц соответственно на первом и втором местах двоичной последовательности. Тогда имеем $X = Y = \{0,1\}$ и $Z = X \times Y$, $s(x,y) = q(x)r(y)$ и $I(f,g) = 0$ в соответствии со стохастической независимостью переменных s_1, s_2.

Если $f = s_1 + s_2$, $g = s_1 - s_2$, то $X = \{0,1,2\}$, $Y = \{-1,0,1\}$ и

$$Z = \{(0,0), (1,-1), (1,1), (2,0)\} \neq X \times Y.$$

При $a = 1/2$ распределения q, r и s имеют следующие значения: $q = \{1/4, 1/2, 1/4\}$, $r = \{1/4, 1/2, 1/4\}$ и $s(x,y) = 1/4$ для всех $(x,y) \in Z$. Следовательно,

$$I(f,g) = 4\left(\frac{1}{4} \log \frac{1/4}{(1/2)(1/4)}\right) = \log 2 > 0$$

в соответствии со стохастической зависимостью случайных переменных $s_1 + s_2$ и $s_1 - s_2$.

7.6.2. Информационный критерий зависимости

Совсем не очевидно, что равенство $I(f, g) = 0$ эквивалентно стохастической независимости переменных f, g. Этот факт можно вывести из классической теоремы о мультипликативно и аддитивно взвешенных средних (геометрического и арифметического).

1. Рассмотрим натуральное число $n > 0$, семейство чисел $x_j \geq 0$ и семейство чисел $q_j > 0$ с суммой $\sum q_j = 1$ $(j = 1, \dots, n)$. Известна классическая

Теорема о средних. $\prod x_j^{q_j} \geq \sum q_j x_j$, *причем равенство верно тогда и только тогда, когда* $x_1 = \dots = x_n$.

Нетрудно проверить два ее следствия.

Пусть $s = (s_j)$, $t = (t_j)$; $s_j > 0$, $t_j > 0$, $\sum s_j = \sum t_j = 1$; $a = (a_j)$, $a_j = 1/n$ $(j = 1, \dots, n)$;

$$\varphi(s, t) = \sum s_j \log t_j.$$

Следствие 1. $\varphi(s, t) < \varphi(t, t)$ *при* $s \neq t$.

Следствие 2. $\varphi(t, t) > \varphi(a, a)$ *при* $t \neq a$.

Таким образом, при каждом t функция $\varphi(\cdot, t)\colon s \to \varphi(s, t)$ имеет строгий максимум в точке $s = t$, а функция ψ со значениями

$$\psi(t) = -\varphi(t, t) = -\sum t_j \log t_j$$

имеет строгий максимум в точке $t = a$ (при $t_j = 1/n$ для $j = 1, \dots, n$). Формально это вытекает из выпуклости логарифмической функции.

2. Используя следствие 1, легко доказать следующую теорему об информации.

Теорема об информации. *Информация случайных переменных* f *и* g *положительна. Она равна нулю, если и только если* f *и* g *независимы.*

$\square$ Рассмотрим семейство s чисел $s(x, y)$ и семейство t чисел $t(x, y) = q(x)r(y)$, полученные произвольной нумерацией пар (x, y) значений $x = f(u)$, $y = g(u)$ случайных переменных f, g. Из определений вытекает, что

$$I(f, g) = \sum s(x, y) \log s(x, y) - \sum s(x, y) \log t(x, y).$$

По следствию 1 строгое неравенство $I(f,g) > 0$ верно при $s \neq t$ и $I(f,g) = 0$ при $s = t$. Это эквивалентно сформулированному утверждению. ■

Из теоремы об информации следует

Информационный критерий зависимости. *Случайные переменные f и g зависимы, если и только если их взаимная информация строго положительна.*

Равенство $I(f,g) = 0$ гарантирует стохастическую независимость переменных f, g, а равенство $K(f,g) = 0$ — только их независимость в среднем: $K(f,g) = 0$ эквивалентно равенству $E(f,g) = E(f)E(g)$.

Пример. В пространстве $B(2,1/2)$ для переменных $f = s_1 + s_2$, $g = s_1 - s_2$ верно равенство $K(f,g) = 0$, но $I(f,g) = \log 2 > 0$. Переменные f, g некоррелированы, но стохастически зависимы. Точно так же легко проверить, что для некоррелированных переменных x, y в 1.5.7 верно $I(f,g) = \log 2 > 0$, что доказывает их стохастическую зависимость.

7.6.3. Энтропия

Число

$$H(f) = I(f,f)$$

называется *энтропией* случайной переменной f на невырожденном вероятностном пространстве (U,p). Так как $s(x,x) = r(x) = q(x)$ для каждого $x = f(u)$, то

$$H(f) = \sum q(x) \log(1/q(x)) = -\sum q(x) \log q(x).$$

Эти равенства позволяют определить энтропию H независимо от информации J. Энтропия вместе с информацией положительна: $H(f) \geq 0$.

1. На пространстве (U,p) введем случайную переменную $h(f)$ со значениями

$$h(f) = i(f,f) = \log(1/q(f(u))) = -\log q(f(u)).$$

Из определений следует, что

$$H(f) = E(h(f)) = -\sum p(u) \log q(f(u)).$$

Пример. В пространстве Бернулли $B(2, a)$ энтропия переменной $f = s_1$ выражается равенством

$$H(s_1) = -(a \log a + (1-a) \log (1-a)).$$

Такая же энтропия и у s_2. Кроме того,

$$H(s_1 + s_2) = H(s_1 - s_2) = (3/2) \log 2.$$

Если $f = c$ постоянная, то $q(c) = 1$ и

$$H(c) = 0.$$

А если случайная переменная f имеет *равномерное распределение* ($q(x) = 1/n$ для всех n значений x), то

$$H(f) = -n(1/n) \log 1/n = \log n.$$

2. Информация $I(f, g)$ случайных переменных f, g меньше каждой из энтропий $H(f)$, $H(g)$.

Действительно, так как выполнено $q(x) = \sum\limits_y s(x, y) \geq s(x, y)$ и $r(y) = \sum\limits_x s(x, y) \geq s(x, y)$, то

$$\frac{s(x, y)}{q(x) r(y)} \leq \frac{1}{q(x)}$$

для каждых пар $(x, y) = (f(u), g(u))$ значений x, y переменных f, g. Поэтому

$$I(f, g) = \sum_{(x,y)} s(x, y) \log \frac{s(x, y)}{q(x) r(y)} \leq \sum q(x) \log (1/q(x)) = H(f).$$

Точно так же $I(f, g) \leq H(g)$.

Пусть n — число значений случайной переменной f. Тогда из следствия 2 теоремы о средних вытекает, что

$$H(f) \leq -n(1/n) \log (1/n) = \log n.$$

Таким образом,

$$0 \leq H(f) \leq \log n.$$

При этом $H(f)=0$ эквивалентно $f=\mathrm{const}$, а $H(f)=\log n$ тогда и только тогда, когда f имеет равномерное распределение.

Энтропия $H(f)$ служит средней *мерой неопределенности* случайной переменной f. Использование логарифмов позволяет произведения вероятностей превращать в суммы. Это упрощает выкладки.

3. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследуем с информационной точки зрения процедуру угадывания. Предположим, что с помощью случайного выбора определена одна из $m=32$ букв алфавита U, которую нужно угадать последовательным делением алфавита на непустые части. Будем считать, процедура описывается комбинаторным пространством.

Если разбить алфавит U на части A и B из k и $l=m-k$ букв, то информация о том, что выбранная буква $u\in A$, оценивается так. Рассмотрим какую-нибудь нумерацию f алфавита U и индикатор g множества A. Имеем

$$X=\{1,\dots,m\},\quad Y=\{0,1\},\quad Z=X\times Y;$$
$$q(x)=1/m,\quad r(1)=k/m,\quad r(0)=1-k/m;$$
$$s(x,1)=1/m\quad (x\in f(A)),\quad s(x,1)=0\quad (x\notin f(A)),$$
$$s(x,0)=0\quad (x\in f(A)),\quad s(x,0)=1/m\quad (x\notin f(A)).$$

Поэтому

$$I(f,g)=\frac{k}{m}\log\frac{1/m}{(1/m)(k/m)}+\frac{m-k}{m}\log\frac{1/m}{(1/m)(1-k/m)}$$
$$=-\left(\frac{k}{m}\log\frac{k}{m}+\left(1-\frac{k}{m}\right)\log\left(1-\frac{k}{m}\right)\right)=H(g).$$

Максимум информации достигается, когда g имеет равномерное распределение: $k/m=1/2$ и $k/m=m/2$. Оптимально делить алфавит на две равные части. Тогда в среднем можно угадывать выбранную букву за пять последовательных разбиений. Другие способы в среднем будут хуже, хотя случайно угадывание по одной букве может сразу привести к успеху. Но зато в противном случае неопределенность мало уменьшается.

Пример 2. Теория информации была разработана вначале для систем связи. Простейшую систему связи можно схематически описать с помощью следующей вероятностной модели.

Рассмотрим множество исходов $U=\{00,01,10,11\}$, где величина $u=xy$ описывает передачу сигнала x и прием сигнала y. Событие $A_x=\{x0,x1\}$ означает передачу x, а $B_y=\{0y,1y\}$ — прием y $(x,y\in\{0,1\})$. Пусть $a_x>0$, $a_0+a_1=1$ и $t_{xy}>0$, $t_{x0}+t_{x1}=1$. Элементарная вероятность p имеет значения $p(xy)=a_xt_{xy}$. В частности, $p(xx)=a_xt_{xx}$.

Далее, заметим, что $A_xB_y=A_x\cap B_y=\{xy\}$ и $P(A_x)=a_x$, $P(A_xB_y)=p(xy)=a_xt_{xy}$. *Условная вероятность* принять y, когда передан x, по определению равна отношению $P(A_xB_y)/P(A_x)$:

$$P(B_y/A_x)=a_xt_{xy}/a_x=t_{xy}.$$

Это поясняет вероятностный смысл чисел t_{xy}. Наконец,

$$P(B_y) = p(0y) + p(1y) = a_0 t_{0y} + a_1 t_{1y}.$$

Случайные переменные f, g со значениями $f(xy) = x$, $g(xy) = y$ описывают переданный и принятый сигналы. Если в канале связи имеются помехи, изменяющие сигнал, то возможно, что $x \neq y$. Информация $I(f, g)$ оценивает качество системы связи. Имеем

$$X = Y = \{0, 1\}, \quad Z = X \times Y,$$

$$q(x) = a_x, \quad r(y) = a_0 t_{0y} + a_1 t_{1y}, \quad s(x, y) = a_x t_{xy}.$$

Поэтому

$$I(f, g) = \sum_{x,y} a_x t_{xy} \log \frac{t_{xy}}{a_0 t_{0y} + a_1 t_{1y}}.$$

Если $t_{xy} = 1/2$ для всех x, y, то $I(f, g) = 0$: переданный и принятый сигналы независимы. Использовать такую систему связи нет смысла. Для любой системы рассматриваемого типа $I(f, g) \leq H(f) \leq \log 2$. Можно передать не больше одного *бита* информации за один раз.

7.6.4. Коэффициент информации

По аналогии с коэффициентом корреляции $K(f, g)$ введем *коэффициент информации*

$$IK(f, g) = \frac{I(f, g)}{\sqrt{I(f, f)}\sqrt{I(g, g)}} = \frac{I(f, g)}{\sqrt{H(f)}\sqrt{H(g)}}$$

случайных переменных f и g, предполагая $I(f, f) = H(f) > 0$, $I(g, g) = H(g) > 0$. Так как

$$0 \leq I(f, g) \leq I(f, f) \wedge I(g, g) = H(f) \wedge H(g),$$

то

$$0 \leq IK(f, g) \leq 1.$$

1. Из теоремы об информации следует, что $IK(f, g) = 0$, если и только если случайные переменные f и g независимы. А из соотношений между информацией и энтропиями — что $IK(f, g) = 1$ тогда и только тогда, когда $I(f, g) = H(f) = H(g)$:

$$IK(f, g) = 1 \to I(f, g) = I(f, f) = I(g, g) \to I(f, g) = H(f) = H(g).$$

В самом деле, если $I(f,g) < H(f)$ или $I(f,g) < H(g)$, то вследствие $I(f,g) \le H(f)$ и $I(f,g) \le H(g)$ верны неравенства

$$(I(f,g))^2 < H(f)H(g), \quad I(f,g) < \sqrt{H(f)}\sqrt{H(g)}, \quad IK(f,g) < 1.$$

Коэффициент информации служит удобной мерой стохастической зависимости случайных переменных, не связанных линейно.

Условимся продолжать формально совместную элементарную вероятность s с множества Z пар возможных значений переменных f, g на весь прямоугольник $X \times Y$, приписав нулевые вероятности невозможным парам (x,y):

$$s(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in X \times Y \setminus Z).$$

Кроме того, положим $0 \cdot \log 0 = 0$. Все это позволит в выкладках вместо суммирования по сложному множеству Z проводить суммирование по прямоугольнику $X \times Y$ и от двойных сумм переходить к простым суммам по множествам X и Y.

Удобно представлять маргинальные распределения q, r и совместное s для переменных f, g общей таблицей. В первом столбце записываются элементы множества X, а в первой строке — элементы множества Y. Во втором столбце помещаются вероятности $q(x)$, а во второй строке — вероятности $r(y)$. Остальную часть таблицы занимает s: в клетке (x,y) записывается вероятность $s(x,y)$. Если элементы каждого из множеств X и Y занумерованы, то таблицу можно упростить, не выписывая элементы.

2. Связь между взаимной однозначностью и максимальным значением коэффициента информации имеет общий характер. Рассмотрим вероятностное пространство (U,p) и случайные переменные f, g на нем с множествами значений X, Y, распределениями q, r и совместным распределением s. Как обычно, предполагается, что маргинальные распределения q, r невырожденные: $q(x) > 0$, $r(y) > 0$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Совместное распределение s может быть вырожденным: для некоторых пар значений (x,y) возможно равенство $s(x,y) = 0$.

Будем называть взаимно однозначное отображение $\chi\colon A \to B$ множества A на все множество B *подстановкой* A на B и обозначать композицию функций символом $\circ$. Условимся говорить, что переменная g *стохастически изоморфна* f, если существует подстановка $\varphi\colon X \to Y$ такая, что

$$g = \varphi \circ f, \quad r = q \circ \varphi^{-1},$$
$$s(x, y) = q(x) = r(y) \quad (y = \varphi(x),\ x \in X).$$

Если переменная g стохастически изоморфна f, то и f стохастически изоморфна g, так как тогда для обратной подстановки $\psi = \varphi^{-1}\colon Y \to X$ верны равенства

$$f = \psi \circ g, \quad q = r \circ \psi^{-1},$$
$$s(x, y) = r(y) = q(x) \quad (x = \psi(y),\ y \in Y).$$

Поэтому в любом из этих случаев можно называть случайные переменные f и g *стохастически изоморфными.* Стохастически изоморфные переменные имеют одинаковое число значений и вероятности этих значений получаются друг из друга перестановками. Совместные ненулевые вероятности пар значений равны соответствующим маргинальным вероятностям.

3. Верна

Теорема о коэффициенте информации. 1) *Коэффициент информации $IK(f, g)$ случайных переменных f и g равен нулю, если и только если f и g стохастически независимы.*

2) *Коэффициент информации $IK(f, g)$ случайных переменных f и g равен единице, если и только если f и g стохастически изоморфны.*

□ 1) Как уже отмечалось, утверждение о равенстве коэффициента информации нулю сразу следует из теоремы об информации.

2) Утверждение о равенстве коэффициента информации единице доказывается следующим образом. Как было показано,

$$IK(f, g) = 1 \to I(f, g) = H(f) = H(g).$$

Если переменные f, g стохастически изоморфны и связаны подстановками $\varphi\colon X \to Y$, $\psi = \varphi^{-1}\colon Y \to X$, то

$$s(\psi(y), y) = s(x, \varphi(x)) = q(\psi(y)) = r(y)$$
$$(y = \varphi(x) \in Y \to x = \psi(y) \in X).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
I(f,g) &= \sum_x s(x,\varphi(x))\log\left(\frac{s(x,\varphi(x))}{q(x)r(\varphi(x))}\right)\\
&= \sum_x q(x)\log\left(\frac{q(x)}{q(x)r(\varphi(x))}\right) = -\sum_x q(x)\log\left(r(\varphi(x))\right)\\
&= -\sum_x r(\varphi(x))\log\left(r(\varphi(x))\right) = H(g).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$I(f,g) = \sum_y s(\psi(y),y)\log\left(\frac{s(\psi(y),y)}{q(\psi(y),y)r(y)}\right) = H(f).$$

Следовательно, $I(f,g) = H(f) = H(g)$ и $IK(f,g) = 1$.

Предположим теперь, что эти равенства верны. Тогда, если $I(f,g) = H(f)$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)r(y)}\right) &= -\sum_x q(x)\log(q(x))\\
&= -\sum_{x,y} s(x,y)\log(q(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{r(y)}\right) &= \sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)r(y)}q(x)\right)\\
&= \sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)r(y)}\right) + \sum_{x,y} s(x,y)\log(q(x))\\
&= I(f,g) - H(f) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)}\right) &= \sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)r(y)}r(y)\right)\\
&= \sum_{x,y} s(x,y)\log\left(\frac{s(x,y)}{q(x)r(y)}\right) + \sum_{x,y} s(x,y)\log(r(y))\\
&= I(f,g) - H(g) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $x \in X$. Так как $s(x,y) \geq 0$, $\sum\limits_y s(x,y) = q(x)$, то выполнено $0 \leq s(x,y) \leq q(x)$, $s(x,y)\log(s(x,y)/q(x)) \leq 0$. Поэтому $\sum\limits_{x,y} s(x,y)\log(s(x,y)/q(x)) = 0 \to s(x,y)\log(s(x,y)/q(x)) = 0$ для всех пар (x,y). А из $\sum\limits_y s(x,y) = q(x) > 0$ следует, что существует $y = \varphi(x) \in Y$, для которого $s(x,\varphi(x)) > 0$, $\log(s(x,\varphi(x))/q(x)) = 0$ и $s(x,\varphi(x)) = q(x)$. Такое значение $y = \varphi(x)$ единственное: $s(x,y) = 0$ для всех $y \neq \varphi(x)$, в противном случае было бы $\sum\limits_y s(x,y) > q(x)$. Значит, $y_1 = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = y_2$ при $x_1 \neq x_2$ и в множестве Y элементов не меньше, чем в X. При этом $x = f(u)$, $g(u) = \varphi(f(u))$ для некоторого $u \in U$.

Пусть теперь $y \in Y$. Так как $s(x,y) \geq 0$ и $\sum\limits_x s(x,y) = r(y)$, то $0 \leq s(x,y) \leq r(y)$, $s(x,y)\log(s(x,y)/r(y)) \leq 0$. Поэтому $\sum\limits_{x,y} s(x,y)\log(s(x,y)/r(y)) = 0 \to s(x,y)\log(s(x,y)/r(y)) = 0$ для всех пар (x,y). Из $\sum\limits_x s(x,y) = r(y) > 0$ следует, что существует $x = \psi(y) \in X$, для которого $s(\psi(y),y) > 0$, $\log(s(\psi(y),y)/r(y)) = 0$ и $s(\psi(y),y) = r(y)$. Такое значение $x = \psi(y)$ единственное: $s(x,y) = 0$ для всех $x \neq \psi(y)$, в противном случае было бы $\sum\limits_x s(x,y) > r(y)$. Значит, $x_1 = \psi(y_1) \neq \psi(y_2) = x_2$ при $y_1 \neq y_2$ и в множестве X элементов не меньше, чем в Y. При этом $y = g(u)$, $f(u) = \psi(g(u))$ для некоторого $u \in U$.

Таким образом, если $IK(f,g) = 1$ или, что эквивалентно, $I(f,g) = H(f) = H(g)$, то для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y = \varphi(x) \in Y$, для которого $s(x,y) > 0$. При этом $s(x,\varphi(x)) = q(x)$. Точно так же для каждого $y \in Y$ существует единственный элемент $x = \psi(y) \in X$, для которого $s(x,y) > 0$. При этом $s(\psi(y),y) = r(y)$. Множества X и Y имеют одно и то же число элементов. Для всех $y \neq \varphi(x)$ и для всех $x \neq \psi(y)$ верно равенство $s(x,y) = 0$. Поэтому $(x,\varphi(x)) = (\psi(\varphi(x)),\varphi(x))$, $x = \psi(\varphi(x))$, $s(x,\varphi(x)) = q(x)$ для каждого $x \in X$ и $(\psi(y),y) = (\psi(y),\varphi(\psi(y)))$, $y = \varphi(\psi(y))$, $s(\psi(y),y) = r(y)$ для каждого $y \in Y$. Значит, $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ являются взаимно обратными подстановками. Кроме того,

$$g(u) = \varphi(f(u)), \quad f(u) = \psi(g(u)),$$
$$s(\psi(y),y) = s(x,\varphi(x)) = q(\psi(y)) = r(y) \quad (u \in U,\ x \in X,\ y \in Y).$$

Переменные f и g стохастически изоморфны. ■

Таким образом, равенство $IK(f,g) = 1$ означает крайнюю степень зависимости между переменными f и g: эти переменные стохастически изоморфны. Они имеют одинаковое число значений и их распределения получаются друг из друга перестановками.

4. Для бесконечного дискретного пространства (U,p) элементарную информацию $i(f,g)$ переменных f, g можно определить так же, как и для конечных пространств, равенством

$$i(f,g) = \log \frac{s(f(u),g(u))}{q(f(u))r(g(u))} \quad (u \in U).$$

Здесь q, r, s — маргинальные и совместное распределения переменных f, g. Но так как среднее значение

$$I(f,g) = E(i(f,g)),$$

выражающее взаимную информацию f и g, существует в бесконечных дискретных пространствах не всегда, то использовать в них информацию в качестве меры зависимости можно только с оговорками.

Кроме того, на бесконечном счетном множестве X не существует равномерного распределения, обеспечивающего максимальную энтропию, как в случае конечного X. Отметим, что вместо $I(f,g)$ можно рассматривать семейство информаций $I_K(f_K, g_K)$ для сужений f_K, g_K переменных f, g на конечные множества $K \subseteq U$ и различные характеристики этого семейства.

Упражнение. Уточнить и проверить информационный критерий независимости для дискретных пространств (1.7.3).

7.7. Условные средние и вероятности

В дискретных пространствах условия могут описываться конечными или бесконечными событиями и разбиениями. Для бесконечных разбиений нужно всюду проверять суммируемость рассматриваемых вероятностей.

7.7.1. Определения

Рассмотрим невырожденное дискретное пространство (U, p) и разбиение $\mathscr{B} = (B_j)$ множества U:

$$\sum B_j = U, \quad B_j \neq \varnothing, \quad B_j B_k = \varnothing \quad (j \neq k).$$

Разбиение $\mathscr{B}$ может быть конечным или бесконечным.

1. Пусть $\mathscr{G} = \mathscr{G}L(\mathscr{B})$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ суммируемых по p переменных на U, составленное из суммируемых по p переменных $g = \sum y_j B_j$.

Условным средним переменной f при условии $\mathscr{B}$ называется переменная

$$E(f \mid G) = \sum E(f \mid B_j) B_j.$$

Переменная $g = E(f \mid G)$ принадлежит $\mathscr{G}$ и имеет то же среднее значение, что и f. В самом деле, благодаря счетной аддитивности и линейности среднего E,

$$\begin{aligned} E(g) = \sum E(E(f \mid B_j)B_j) &= \sum E(f \mid B_j)E(B_j) \\ &= \sum (E(fB_j)/P(B_j))P(B_j) \\ &= \sum E(fB_j) = E(f \sum B_j) = E(f). \end{aligned}$$

Каждая ограниченная переменная f на U имеет условное среднее при любом $\mathscr{B}$.

Переменная

$$P(A \mid \mathscr{B}) = E(A \mid \mathscr{B})$$

называется *условной вероятностью* события $A \subseteq U$.

Если разбиение $\mathscr{B}$ составлено из прообразов $B_z = h^{-1}(z)$ значений z переменной h на U, то вместо $E(f \mid \mathscr{B})$ пишут также $E(f \mid h)$:

$$E(f \mid h) = \sum E(f \mid h = z) h^{-1}(z),$$
$$E(f \mid h = z) = E(f \cdot h^{-1}(z))/P(h^{-1}(z)).$$

Для события $f = A$ это равенство превращается в

$$P(f \mid h) = \sum P(A \mid h = z)(h^{-1}(z).$$

Из определений следует, что

$$E(f \mid h) = f$$

для независимых переменных f, h.

2. Условное среднее $E(\cdot \mid \mathscr{B})$ есть положительный линейный оператор, проектирующий $\mathscr{L}$ на $\mathscr{G}\mathscr{L}(\mathscr{B})$. Оно обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$E(f \mid \mathscr{B}) = f \quad (f \in \mathscr{G});$$
$$(E(f \mid \mathscr{B}) \mid \mathscr{B}) = E(f \mid \mathscr{B}); \quad E(E(f \mid \mathscr{C}) \mid \mathscr{B}) = E(f \mid \mathscr{B}),$$

если разбиение $\mathscr{C}$ мельче разбиения $\mathscr{B}$;

$$E(f_1 + f_2 \mid \mathscr{B}) = E(f_1 \mid \mathscr{B}) + E(f_2 \mid \mathscr{B}), \quad E(hf \mid \mathscr{B}) = hE(f \mid \mathscr{B})$$

при $f, f_1, f_2 \in \mathscr{L}$ и $h \in \mathscr{G}$;

$$E(f \mid \mathscr{B}) \geq 0 \quad (f \in \mathscr{L},\ f \geq 0).$$

3. Рассмотрим невырожденное евклидово пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$ квадратично суммируемых переменных на U и его подпространство $\mathscr{G}^2 = \mathscr{X}\mathscr{L}^2(\mathscr{B})$, составленное из квадратично суммируемых переменных $g = \sum y_j B_j$. Квадратичная суммируемость g означает, что

$$E(g^2) = E\left(\sum y_j^2 B_j\right) = \sum E(y_j^2 B_j) = \sum y_j^2 P(B_j) < \infty.$$

Переменные

$$b_j = B_j / \sqrt{P(B_j)}$$

образуют ортонормированную базу подпространства $\mathscr{G}^2$, которая конечна или бесконечна вместе с разбиением $\mathscr{B}$. Условное среднее $g = E(f \mid \mathscr{B})$ является ортогональной проекцией переменной $f \in \mathscr{L}^2$ на подпространство $\mathscr{G}^2$ и определяется равенством

$$g = \sum \langle f, b_j \rangle b_j,$$

которое эквивалентно

$$g = \sum y_j B_j, \quad y_j = \frac{E(fB_j)}{P(B_j)}.$$

7.7.2. Примеры

Пример 1. Рассмотрим вероятностное пространство (U,p) с множеством $U = \sum(\mathbb{B}^n \times \{n\})$, элементами которого являются пары (u,n), составленные из двоичных строк $u = u_1 \dots u_n \in \mathbb{B}^n$ и чисел $n \in \mathbb{P}$, а элементарная вероятность p имеет значения

$$p(u,n) = a^{|u|}(1-a)^{n-|u|}p(n,\lambda),$$

где

$$|u| = u_1 + \dots + u_n, \quad p(n,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!.$$

Пусть

$$f(u,n) = |u|, \quad h(u,n) = n.$$

Тогда

$$P(h = n) = p(n,\lambda), \quad P(f = m \mid h = n) = b(m,n,a).$$

Найдем распределение переменной f и ее среднее. Имеем

$$\begin{aligned} P(f = m) &= \sum_{n \ge 0} P(f = m \mid h = n)P(h = n) \\ &= \sum_{n \ge 0} b(m,n,a)p(n,\lambda) = \frac{(\lambda a)^m}{m!}e^{-\lambda}\sum_{n \ge m}\frac{(\lambda(1-a))^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \frac{(\lambda a)^m}{m!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-a)} = e^{-\lambda a}(\lambda a)^m/m! = p(m,\lambda a). \end{aligned}$$

Переменная f имеет распределение Пуассона с параметром λa.

Так как

$$E(f \cdot (h = n)) = \sum_m mb(m,n,a)p(n,\lambda) = na \cdot p(n,\lambda),$$

то

$$E(f \mid h = n) = E(f \cdot (h = n))/P(h = n) = na \cdot p(n,\lambda)/p(n,\lambda) = na,$$

$$E(f \mid h) = \sum E(f \mid h = n)(h = n) = \sum na \cdot (h = n),$$

$$E(f) = E(E(f \mid h)) = E\left(\sum na \cdot (h = n)\right)$$
$$= \sum na \cdot P(h = n) = a \sum np(n, \lambda) = \lambda a$$

в соответствии с пуассоновским распределением переменной f.

Переменная f равна сумме, составленной из случайного числа двоичных слагаемых, которое имеет пуассоновское распределение. Такие суммы встречаются в самых разных задачах.

Пример 2. Геометрическое распределение обладает важным свойством: у него нет *последействия*.

Пусть переменная f имеет геометрическое распределение с параметром a и m, n — целые положительные числа. Тогда

$$P(f \geq m + n \mid f \geq m) = P(f \geq n).$$

В самом деле, так как $f \geq m + n \to f \geq m$, то

$$P(f \geq m + n, f \geq m) = P(f \geq m + n)$$
$$= \sum_{l \leq m+n} a(1 - a)^l = (1 - a)^{m+n} = P(f \geq m) \cdot P(f \geq n).$$

Поэтому

$$P(f \geq m + n \mid f \geq m) = P(f \geq m + n)/P(f \geq m) = P(f \geq n).$$

7.8. Формулы полной вероятности и Байеса

Формула полной вероятности и следующая из нее формула Байеса очень содержательны и часто применяются.

7.8.1. Формула полной вероятности

Рассмотрим невырожденное дискретное пространство (U, p) и разбиение $\mathscr{B} = (B_j)$ множества U.

1. По определению условной вероятности для каждого события $A \subseteq U$ верно равенство

$$P(A \mid \mathscr{B}) = \sum P(A \mid B_j) B_j.$$

Так как

$$E(P(A \mid \mathscr{B})) = E(E(A \mid \mathscr{B})) = E(A) = P(A), \quad E(B_j) = P(B_j),$$

то, взяв средние значения в обеих частях определяющего $P(A \mid \mathscr{B})$ равенства, получаем

$$P(A) = \sum P(A \mid B_j)P(B_j).$$

Это и есть *формула полной вероятности.*

Задачи, решаемые с помощью этой формулы, схематически можно описать так.

Известны:

(1) *вероятности $P(B_j)$ нескольких исключающих друг друга условий B_j, одно из которых обязательно выполняется;*

(2) *условные вероятности $P(A \mid B_j)$ события A при условии B_j.*

Какова вероятность $P(A)$ события A?

2. По формуле полная вероятность $P(A)$ складывается из его частичных вероятностей $P(A \mid B_j)$ с весами $P(B_j)$.

Формула полной вероятности часто используется и в теоретических рассуждениях.

Пример. Возьмем множество $U = \{1, 2, \dots, 100\}$ и множество A простых чисел в U. Разобьем U на группы десятков B_1, B_2, B_3, B_4, в которых содержится соответственно 1, 2, 3, 4 простых числа. Группа B_1 состоит из одного десятка $\{91, 92, \dots, 100\}$, группа B_2 — из пяти десятков, B_3 — из двух, B_4 — из двух. При выборе наугад числа из десятка при условии, что в нем $j = 1, 2, 3, 4$ простых чисел, вероятность выбрать простое число будет соответственно $P(A \mid B_j) = 1/10, 2/10, 3/10, 4/10$.

Рассмотрим три различные способа выбора групп B_j: (1) группа выбирается наугад и $P(B_j) = 1/4$; (2) группа выбирается пропорционально количеству простых чисел в десятке и $P(B_j) = j/10$; (3) группа выбирается пропорционально числу десятков в ней и $P(B_j) = 1/10, 5/10, 2/10, 2/10$. Соответственно по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = (1/4)(0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4) = 1/4,$$

$$P(A) = 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 = 3/10,$$

$$P(A) = 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 = 1/4.$$

7.8.2. Формула Байеса

В связи с задачей о вычислении вероятности события по известным условным вероятностям и вероятностям условий возникает естественная обратная задача: вычислить вероятность выполнения условия при совершившемся событии.

1. Для решения такой задачи применяется *формула Байеса*:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum P(A \mid B_k)P(B_k)}.$$

Эта формула следует из равенств

$$P(AB_j) = P(A \mid B_j)P(B_j) = P(B_j \mid A)P(A)$$

и формулы полной вероятности. Простота вывода не умаляет важности этой формулы. Ее часто называют также *формулой вероятностей гипотез.*

Задачи, решаемые с помощью формулы Байеса, можно схематически описать так.

Известны:

(1) *вероятности* $P(B_j)$ *нескольких исключающих друг друга предположений* B_j*, одно из которых верно;*

(2) *условные вероятности* $P(A \mid B_j)$ *события* A *при условии* B_j.

Какова условная вероятность $P(B_j \mid A)$ *верности предположения* B_j*, если событие* A *произошло?*

2. Формула Байеса часто используется при решении статистических задач.

Пример. Возьмем те же U, A и B_j, что и в примере 7.8.1. Пусть наугад выбранное из U число оказалось простым. Какова вероятность того, что оно выбрано из десятка с j простыми числами? При выборе наугад вероятности групп B_j пропорциональны числам десятков в них: $P(B_j) = 1/10, 5/10, 2/10, 2/10$. Условные вероятности выбора простого числа равны $P(A \mid B_j) = 1/10, 2/10, 3/10, 4/10$. По формуле Байеса получаем

$$P(B_1 \mid A) = 0.1 \cdot 0.1/0.25 = 0.04, \quad P(B_2 \mid A) = 0.2 \cdot 0.5/0.25 = 0.40,$$

$$P(B_3 \mid A) = 0.3 \cdot 0.2/0.25 = 0.24, \quad P(B_4 \mid A) = 0.4 \cdot 0.2/0.25 = 0.32.$$

Наиболее вероятно, что в десятке, из которого выбрано простое число, их было два (а не четыре, как можно было ожидать). Это объясняется тем, что таких десятков больше, чем других. Более надежно предположить, что в десятке было четное число простых:

$$P(B_2 + B_4 \mid A) = P(B_2 \mid A) + P(B_4 \mid A) = 0.72.$$

7.9. Закон больших чисел

Он следует из классического неравенства Колмогорова.

7.9.1. Неравенства Колмогорова

Рассмотрим евклидово пространство $\mathscr{L}_0^2 = \mathscr{L}_0^2(U, p)$ квадратично суммируемых переменных с нулевыми средними. По определению

$$\langle f, g\rangle = E(fg), \quad \|f\|^2 = E(f^2) = D(f) \quad (f, g \in \mathscr{L}_0^2).$$

1. Пусть f_j $(1 \leq j \leq n)$ — попарно ортогональные (некоррелированные) переменные из $\mathscr{L}_0^2$ и

$$g_k = \sum_{1 \leq j \leq k} f_j, \quad h_k = \sum_{k < j \leq n} f_j \quad (h_n = 0),$$
$$g = \max_{1 \leq k \leq n} |g_k|, \quad \sigma^2 = D(g_n) = \sum_{1 \leq j \leq n} D(f_j).$$

Возьмем еще число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим событие

$$A = (g \geq \varepsilon) = \{u : g(u) \geq \varepsilon\}.$$

Докажем неравенство

$$P(A) \leq \sigma^0/\varepsilon^2.$$

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$A_k = \{u : |g_k(u)| \geq \varepsilon, \, |g_j(u)| < \varepsilon \, (1 \leq j < k)\}.$$

Ясно, что

$$A_k A_l = \varnothing \quad (k \neq l), \quad A = \sum A_k;$$
$$g_n = g_k + h_k, \quad A_k g_n = A_k g_k + A_k h_k.$$

Из попарной ортогональности f_j следует ортогональность $A_k g_k$, $A_k h_k$:

$$E(A_k g_k \cdot A_k h_k) = 0, \quad A_k g_k \perp A_k h_k.$$

Используя теорему Пифагора, линейность и монотонность среднего E, получаем

$$\begin{aligned} \|A_k g_n\|^2 = \|A_k g_k\|^2 + \|A_k h_k\|^2 \geq \|A_k g_k\|^2 \\ = E\bigl(A_k g_k^2\bigr) \geq E(\varepsilon^1 A_k) = \varepsilon^2 P(A_k). \end{aligned}$$

А так как f_j попарно ортогональны, то благодаря этому неравенству

$$\begin{aligned} \sum_j D(f_j) = \sum_j \|f_j\|^2 = \|g_n\|^2 = E\bigl(g_n^2\bigr) \geq E\bigl(A g_n^2\bigr) \\ = E\biggl(\sum_k A_k g_n^2\biggr) = \sum_k E\bigl(A_k g_n^2\bigr) \geq \varepsilon^2 \sum_k P(A_k) = \varepsilon^2 P(A). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует доказываемое неравенство.

Перепишем его в исходных обозначениях:

$$P\biggl(\max_{1\leq k\leq n}\biggl|\sum_{1\leq j\leq k} f_j\biggr| \geq \varepsilon\biggr) \leq \sigma^2/\varepsilon^2. \tag{K1}$$

Это и есть *неравенство Колмогорова*.

Можно рассматривать попарно некоррелированные переменные f_j^0 с произвольными средними значениями $E(f_j^0) = a_j$. Тогда неравенство Колмогорова нужно применять к центрированным переменным $f_j = f_j^0 - a_j$, имеющим те же дисперсии:

$$P\biggl(\max_{1\leq k\leq n}\biggl|\sum_{1\leq j\leq k} \bigl(f_j^0 - a_j\bigr)\biggr| \geq \varepsilon\biggr) \leq \sigma^2/\varepsilon^2.$$

2. Доказанное неравенство (K1) оценивает вероятность $P(A)$ сверху. Другое неравенство Колмогорова оценивает $P(A)$ снизу. Предположим дополнительно, что рассматриваемые переменные

f_j равномерно ограничены постоянной $c > 0$: $|f_j(u)| \le c$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $u \in U$. Тогда верно неравенство

$$P\biggl(\max_{1\le k\le n}\biggl|\sum_{1\le j\le k} f_j\biggr| \ge \varepsilon\biggr) \ge 1 - (c+\varepsilon)^2/\sigma^2. \tag{K2}$$

В самом деле, так как $A + A' = U$, $AA' = \varnothing$, то $Ag_n + A'g_n = g_n$ и $Ag_n \perp A'g_n$. Поэтому

$$\|g_n\|^2 = \|Ag_n + A'g_n\|^2 = \|Ag_n\|^2 + \|A'g_n\|^2,$$

$$\begin{aligned}\|Ag_n\|^2 = \|g_n\|^2 - \|A'g_n\|^2 \ge \|g_n\|^2 - \varepsilon^2 P(A') \\ = \|g_n\|^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A).\end{aligned}$$

Вместе с тем по определению множества A_k верно неравенство $|A_k g_{k-1}| < \varepsilon$ и поэтому

$$|A_k g_k| = |A_k(g_{k-1} + f_k)| \le |A_k g_{k-1}| + |A_k f_k| \le \varepsilon + c.$$

А так как A_k определяется переменными f_j с номерами $j \le k$, а h_k — переменными f_j с номерами $j > k$, то $A_k \perp h_k$ и

$$\|A_k h_k\|^2 = E\bigl(a_k h_k^2\bigr) = E(A_k)E\bigl(h_k^2\bigr) = P(A)\bigl\|h_k^2\bigr\|.$$

Кроме того, $A_k \perp A_l$ при $k \ne l$ и

$$A = \sum A_k, \quad \|h_k\|^2 = \|g_n\|^2 - \|g_k\|^2 \le \|g_n\|^2.$$

Используя все это, получаем

$$\begin{aligned}\|Ag_n\|^2 &= \biggl\|\sum_k A_k g_n\biggr\|^2 = \sum_k \|A_k g_n\|^2 = \sum_k \|A_k g_k + A_k h_k\|^2 \\ &= \sum_k \|A_k g_k\|^2 + \sum_k \|A_k h_k\|^2 = \sum_k E\bigl(A_k g_k^2\bigr) + \sum_k E\bigl(A_k h_k^2\bigr) \\ &\le (\varepsilon + c)^2 \sum_k P(A_k) + \|g_n\|^2 \sum_k P(A_k) = ((\varepsilon + c)^2 + \|g_n\|^2)P(A).\end{aligned}$$

Сравнивая полученные для $\|Ag_n\|^2$ неравенства, находим

$$\|g_n\|^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A) \leq ((\varepsilon + c)^2 + \|g_n\|^2)P(A),$$

откуда

$$P(A) \geq \frac{\|g_n\|^2 - \varepsilon^2}{\|g_n\|^2 - \varepsilon^2 + (\varepsilon + c)^2} = 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{\|g_n\|^2 - \varepsilon^2 + (\varepsilon + c)^2} \geq 1 - (\varepsilon + c)^2/\|g_n\|^2.$$

Неравенство (K2) доказано ($\|g_n\|^2 = \sigma^2$).

Это неравенство успешно применяется в теоретических рассуждениях.

3. По определению

$$\sigma = \sqrt{D(g_n)} = \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq n} D(f_j)}$$

есть стандарт для суммы $g_n = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} f_j$, измеряющий ее отклонение от среднего значения $E(g_n) = 0$. Его удобно использовать в качестве единицы масштаба для измерения этого отклонения.

Пусть $t > 0$ и $\varepsilon = t\sigma$. Тогда неравенство Колмогорова (K1) имеет вид

$$P\big(\max_{1 \leq k \leq n} |g_k| \geq t\sigma\big) \leq 1/t^2.$$

Его можно переписать в эквивалентной форме:

$$P\big(\max_{1 \leq k \leq n} |g_k| < t\sigma\big) \geq 1 - 1/t^2.$$

В частности,

$$P\big(\max_{1 \leq k \leq n} |g_k| < 3\sigma\big) \geq 0,88.$$

Отклонения, меньшие 3σ, можно считать удовлетворительными, а отклонения, большие 3σ, мало вероятными.

Подчеркнем, что неравенство $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |g_k| < \varepsilon$ означает выполнение всех неравенств $|g_1| < \varepsilon, \ldots, |g_k| < \varepsilon$. А неравенство $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |g_k| \geq \varepsilon$ — выполнение хотя бы одного из неравенств $|g_1| \geq \varepsilon, \ldots, |g_k| \geq \varepsilon$.

7.9.2. Неравенства Бернулли и Чебышева

Рассмотрим последовательность Бернулли с параметрами n, a. Пусть, как и прежде, переменная s_j описывает появление единицы на j-м месте: $s_j(u) = u_j$ для $u = u_1 \dots u_n$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда $E(s_j) = a$ и $D(s_j) = a(1-a)$. Введем кроме обычной частоты еще *взвешенные частоты* появления единиц:

$$\nu(k,n) = (kn^{-1})k^{-1} \sum_{1\le j\le k} s_j = n^{-1} \sum_{1\le j\le k} s_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

1. Из неравенства Колмогорова следует *усиленное неравенство Бернулли*

$$P\big(\max_{1\le k\le n} |\nu(k,n) - a| \ge \varepsilon\big) \le a(1-a)/(n\varepsilon^2).$$

Оно оценивает вероятность того, что хотя бы одно отклонение $|\nu(k,n) - a| \ge \varepsilon$ взвешенной частоты $\nu(k,n)$ от вероятности a больше ε.

Пусть $\alpha > 0$ и $n(\varepsilon) = [a(1-a)/(\alpha\varepsilon^2)]$ — целая часть числа $a(1-a)/(\alpha\varepsilon^2)$. Из усиленного неравенства Бернулли следует, что при всех $n > n(\varepsilon)$ вероятность отклонения $|\nu(k,n) - a| \ge \varepsilon$ для хотя бы одного k меньше α.

Из усиленного неравенства Бернулли следует, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$P\big(\max_{1\le k\le n} |\nu(k,n) - a| \ge \varepsilon\big) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Это — *усиленный закон больших чисел* в форме Бернулли. Он уточняет связь между частотой появления данного события в последовательности независимых испытаний, произведенных в одинаковых условиях, и вероятностью этого события. Вероятность события служит мерой его реализуемости.

2. При $n = 1$ и $f_1 = f - Ef$ из неравенства Колмогорова получается классическое

Неравенство Чебышева.

$$P(u : |f(u) - Ef| \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-2} Df.$$

Неравенство Чебышева позволяет оценить погрешность при замене стохастического среднего арифметическим с данной надежностью. Возьмем $\alpha \in]0, 1/2[$ и условимся считать каждое событие B с вероятностью $P(B) \leq \alpha$ *практически невозможным*, а каждое событие A с вероятностью $P(A) \geq 1 - \alpha$ — *практически достоверным*. Неравенство $b^2/(n\varepsilon^2) \leq \alpha$ эквивалентно неравенству $\varepsilon \geq b/\sqrt{n\alpha}$. Значит, отклонение среднего арифметического от среднего стохастического при сделанных предположениях больше, чем на $\varepsilon = b/\sqrt{n\alpha}$, практически невозможно. А для достижения данной точности ε с практической достоверностью (или *надежностью* $1 - \alpha$) достаточно взять $n \geq b^2/(\alpha\varepsilon^2)$.

Неравенство Чебышева выражает одну из форм *закона больших чисел*. В качестве верного значения измеряемой величины часто используется среднее арифметическое результатов большого числа независимых измерений, произведенных в одинаковых условиях. Это основано на законе больших чисел. Из-за случайных отклонений такая оценка бывает иногда довольно грубой и увеличение числа измерений не всегда учитывает ее точность.

Пример. Рассмотрим последовательность переменных $f_j = s_j$ ($j = 1, \dots, n$) в пространстве Бернулли $B(n, a)$. Их среднее арифметическое $f = n^{-1} \sum s_j$ описывает частоту появления единицы, а среднее стохастическое $Ef = a$ — вероятность появления единицы на каждом данном месте. Переменные s_j независимы и одинаково распределены, $Es_j = a$, $Ds_j = a(1-a) = b^2$.

Условимся считать практически невозможными события, вероятность которых меньше $\alpha = 0,001$. Из неравенства Чебышева следует, что практически невозможны отклонения $|m/n - a| \geq 0,103$.

8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В рассматриваемых пространствах множеством исходов служит множество $U = \mathbb{R}$ вещественных чисел, а роль элементарной вероятности играет положительная нормированная интегрируемая по Риману функция $p\colon U \to \mathbb{R}$, называемая плотностью. Интеграл Римана выбран из-за его простоты и широкой известности. Основная цель главы — показать аналогию между дискретным и непрерывным вероятностными пространствами. Благодаря использованию операторных обозначений основные формулы для дискретного и непрерывного вероятностных пространств идентичны.

8.1. Плотность

Плотность является аналогом элементарной вероятности.

8.1.1. Определения

Будем называть *плотностью* каждую положительную интегрируемую функцию $p\colon U \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\int p(u)\,du = 1 \quad (u \in U).$$

Множество $U = \mathbb{R}$ вещественных чисел и плотность $p\colon U \to \mathbb{R}$ составляют *непрерывное вероятностное пространство* (U, p). Если $p(u) > 0$ для всех $u \in U$, то плотность p и пространство (U, p) называют *невырожденными*.

Выделяются ступенчатые плотности, тесно связанные с элементарными вероятностями.

Рассмотрим последовательность чисел $a_n \in \mathbb{R}$ и последовательность попарно непересекающихся ограниченных интервалов $X_n \subseteq \mathbb{R}$. Они определяют на $\mathbb{R}$ *ступенчатую* функцию

$$f = \sum a_n X_n, \quad f(u) = a_n \ (u \in X_n), \quad f(u) = 0 \ (u \notin \sum X_n).$$

Ступенчатая функция не имеет сложных разрывов и может быть интегрируема.

Обозначим $\Delta(X_n)$ длину интервала X_n. Если ряд $(a_n \Delta(X_n))$ суммируем, то функция f интегрируема и

$$\int f = \sum a_n \Delta(X_n).$$

Если

$$a_n \geq 0, \quad \sum a_n \Delta(X_n) = 1,$$

то функция f является плотностью.

Выпуклую комбинацию $\alpha p + \beta q$ ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$) плотности p и плотности q условимся называть их *смесью*.

8.1.2. Примеры

Рассмотрим примеры. Для ступенчатых плотностей они являются модификациями примеров дискретных распределений. Равенство единице интегралов плотностей в каждом примере нетрудно проверить.

Пример 1. *Ступенчатое геометрическое распределение* с параметром $a \in]0,1[$ описывается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = a(1-a)^n \ (u \in [n, n+1[), \quad p(u) = 0 \ (u < 0).$$

Пример 2. *Ступенчатое распределение Паскаля* с параметрами $a \in]0,1[$, $m \in \mathbb{N}$ описывается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = \binom{n+m-1}{n} a^m (1-a)^n \ (u \in [n, n+1[), \quad p(u) = 0 \ (u < 0).$$

Пример 3. *Ступенчатое логарифмическое распределение* с параметром $a \in]0,1[$ описывается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = -(1-a)^n / (n \log a) \ (u \in [n, n+1[), \quad p(u) = 0 \ (u < 1).$$

Пример 4. *Ступенчатое распределение Пуассона* с параметром $a > 0$ описывается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = (a^n/n!)e^{-a} \ (u \in [n, n+1[), \quad p(u) = 0 \ (u < 0).$$

Пример 5. *Равномерное распределение* на отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ задается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = \frac{1}{(b-a)} \ (u \in [a, b]), \quad p(u) = 0 \ (u \notin [a, b]).$$

Данное распределение также ступенчатое. Описывается равномерное распределение единицы массы на отрезке $[a, b]$.

Пример 6. *Треугольное распределение* на отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ задается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = \frac{4}{(b-a)} \left(1 - \frac{1}{(b-a)} \left|\frac{a+b}{2} - u\right|\right) \quad (u \in [a, b]),$$
$$p(u) = 0 \quad (u \notin [a, b]).$$

Описывается симметричное относительно точки 0 распределение единицы массы на отрезке $[a, b]$, уплотняющееся к середине. Название объясняется видом графика плотности. Треугольное распределение называется также *распределением Симпсона.*

Пример 7. *Экспоненциальное (показательное) распределение* с параметром α задается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = \alpha e^{-\alpha u} \ (u \geq 0), \quad p(u) = 0 \ (u < 0).$$

Показательное распределение является непрерывным аналогом геометрического распределения.

Пример 8. *Нормальное распределение* с параметрами $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ задается плотностью $p = g$, имеющей значения

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-a)^2/(2\sigma^2)} \quad (-\infty < u < \infty).$$

Применяя известную формулу Пуассона для интеграла функции e^{-x^2}, легко доказать, что

$$g(u) > 0 \ (-\infty < u < \infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du = 1.$$

Свойства функции g хорошо исследованы.

Среди нормальных распределений выделяется *стандартное*, с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Его часто называют также *распределением Гаусса.*

Пример 9. Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ и $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Смесь экспоненциальных распределений с параметрами λ, μ задается плотностью p, имеющей значения

$$p(u) = \alpha\lambda e^{-\lambda u} + \beta\mu e^{-\mu u} \ (u \geq 0), \quad p(u) = 0 \ (u < 0).$$

Рассматриваются и смеси нескольких экспоненциальных распределений.

Пример 10. *Распределение Коши* с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\lambda > 0$ задается плотностью p со значениями

$$p(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (u-a)^2} \quad (-\infty < u < \infty).$$

Это распределение симметрично относительно точки a, и плотность p имеет в ней наибольшее значение $p(a) = 1/(\pi\lambda)$.

8.1.3. Функция распределения

Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со значениями

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(u)\, du \quad (x \in \mathbb{R})$$

называется *функцией распределения* для плотности p. С помощью функции распределения удобно вычислять вероятности интервалов:

$$P([a, b[) = \int\limits_{a}^{b} p(u)\, du = F(b) - F(a) \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty).$$

Функция распределения $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, в которой непрерывна плотность p. Для ступенчатых плотностей функции распределения кусочно линейны.

Пример. Для равномерного распределения функция F имеет значения

$$F(x) = 0,\ x < a; \quad F(x) = (x-a)/(b-a),\ a \leq x \leq b; \quad F(x) = 1,\ x > b,$$

откуда

$$P([u, v[) = (v-u)/(b-a) \quad (a \leq u < v \leq b).$$

8.2. Вероятность и среднее

Для непрерывного вероятностного пространства вероятности и средние определяются так же, как для дискретного. Нужно только заменить элементарную вероятность плотностью, а суммы — интегралами.

8.2.1. Определения и примеры

Рассмотрим непрерывное вероятностное пространство (U, p). Каждое множество $A \subseteq U$, для индикатора которого существует интеграл $\int Ap$, назовем *случайным событием* или просто *событием.* Пусть $A \subseteq U$ — событие. Так как p положительна и нормирована, то

$$0 \le P(A) = \int Ap \le \int p = 1.$$

Число $P(A)$ называется *вероятностью* события A.

1. Будем говорить, что функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ *не имеет сложных разрывов*, если она в каждой точке имеет пределы слева и справа. Такие функции подробно описаны в [83]. Каждую функцию $f\colon U \to \mathbb{R}$, не имеющую сложных разрывов, будем называть *случайной переменной* или просто *переменной.* В частности, события, по соглашению отождествляемые со своими индикаторами, являются случайными переменными.

2. Будем говорить, что переменная $f\colon U \to \mathbb{R}$ интегрируема по плотности $p\colon U \to \mathbb{R}$, если существует интеграл

$$E(f) = \int fp.$$

Каждая ограниченная переменная f интегрируема по p.

Число $E(f)$ называется *средним значением* интегрируемой переменной f на элементарном пространстве (U, p). Из определений следует, что

$$E(A) = E(\operatorname{ind} A) = P(A)$$

для каждого $A \subseteq U$, отождествленного с $\operatorname{ind} A$.

3. Рассмотрим несколько примеров вычисления средних. Всюду будет рассматриваться *тождественная переменная* f со значениями $f(u) = u$ для $u \in U = \mathbb{R}$. Среднее $E(f)$ тождественной переменной f является центром для распределения на прямой $\mathbb{R}$ единицы массы с плотностью p.

Примеры 1–4. Средние для ступенчатых геометрического распределения, распределения Паскаля, логарифмического распределения и распределения Пуассона вычисляются с помощью результатов для дискретных распределений. Нужно только добавлять 1/2, получающуюся за счет интегрирования по интервалам $[n, n+1[$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(u)\,du = \sum p(n) \int\limits_{n}^{n+1} u\,du = \sum p(n) \frac{(n+1)^2 - n^2}{2}$$
$$= \sum \left(np(n) + \frac{1}{2} p(n) \right) = \sum np(n) + 1/2.$$

Это — эффект равномерного распределения массы $p(n)$ в точке n по интервалу $[n, n+1[$.

Пример 5. Для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ получаем

$$E(f) = \left(\int\limits_{a}^{b} u\,du \right) / (b-a) = (a+b)/2.$$

Пример 6. Для треугольного распределения на отрезке $[a, b]$ имеем

$$E(f) = \frac{1}{3(b-a)^2} \left(a^3 + b^3 - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \right).$$

Пример 7. Для показательного распределения с параметром α интегрирование по частям дает

$$E(f) = 1/\alpha.$$

Пример 8. Для нормального распределения с параметрами α, σ среднее $E(f) = \alpha$.

Среднее для смеси равно смеси средних. А для распределения Коши среднего не существует.

8.2.2. Свойства среднего

Так как средние значения переменных определены интегралами, то их свойства определяются свойствами интегралов.

1. Рассмотрим множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(U)$ всех переменных на непрерывном пространстве (U, p) и выделим из них множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ интегрируемых по p. Сумма и произведение на число интегрируемых переменных тоже интегрируемы. Произведение интегрируемых переменных может быть неинтегрируемо.

Среднее E является *функционалом* на $\mathscr{L}$: каждой интегрируемой переменной ставится в соответствие число Ef. Про интегрируемые переменные говорят также, что они *имеют среднее значение.*

В общем случае интегрируемые переменные на (U, p) образуют векторное пространство, но не образуют алгебры.

Основные свойства среднего E можно выразить фразой: E является *нормированным положительным линейным функционалом* на пространстве $\mathscr{L}$ интегрируемых переменных. Это значит, что для каждых $f, g \in \mathscr{L}$ и $c \in \mathbb{R}$ верны равенства

$$\begin{gathered} E(f+g) = E(f) + E(g), \quad E(cf) = cE(f), \\ E(f) \geq 0 \ (f \geq 0), \quad E(1) = 1. \end{gathered}$$

Эти равенства проверяются так же, как в дискретном случае. Из линейности и положительности среднего следует его монотонность:

$$E(f) \leq E(g) \quad (f \leq g).$$

2. Добавим еще одно важное свойство среднего E: его *секвенциальную непрерывность* при равномерной сходимости. Из теорем о перестановке пределов следует, что для каждой последовательности интегрируемых переменных $f_n \in \mathscr{L}$, равномерно сходящейся к переменной $f \in \mathscr{L}$, верно равенство

$$E(f) = \lim_{n\to\infty} E(f_n).$$

Применение интеграла Лебега позволяет ослабить условия.

8.3. Дисперсия

Дисперсия служит мерой отклонений значений случайной переменной от ее среднего значения.

8.3.1. Определения и свойства

Выделим в алгебре $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U,p)$ интегрируемых по p переменных на непрерывном пространстве (U,p) подалгебру $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U,p)$ квадратично интегрируемых по p. По определению переменная f на U *квадратично интегрируема* по p, т. е. $f \in \mathscr{L}^2$, если $f \in \mathscr{L}$ и $f^2 \in \mathscr{L}$.

1. Число

$$D(f) = E((f - Ef)^2)$$

называется *дисперсией* квадратично интегрируемой по p переменной f на пространстве (U,p). Для проверки интегрируемости $(f - Ef)^2$ используются равенство

$$(f - Ef)^2 = f^2 - 2f \cdot Ef + (Ef)^2,$$

интегрируемость по p постоянных и интегрируемость f и f^2.

2. Свойства дисперсии D определяются свойствами среднего E:

$$\begin{gathered} D(f) \geqslant 0, \quad D(c) = 0; \\ D(f + c) = D(f), \quad D(cf) = c^2 D(f); \\ D(f + g) = D(f) + D(g) - 2C(f,g), \end{gathered}$$

где

$$C(f,g) = E((f - Ef)(g - Eg)) = E(fg) - Ef \cdot Eg.$$

Кроме того,

$$D(f) = E(f^2) - (Ef)^2.$$

Эти равенства проверяются так же, как в дискретном случае. Число $C(f,g)$ называется *ковариацией* переменных f, g. Интегрируемость произведения fg обеспечивается интегрируемостью f^2, g^2 и равенством $fg = (1/2)((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.

Равенство $D(f+g) = D(f) + D(g)$ эквивалентно $C(f,g) = 0$.

Число

$$S(f) = \sqrt{D(f)} \geq 0$$

называется *стандартным отклонением* переменной f или, коротко, ее *стандартом.* Его используют в качестве единицы масштаба для измерения отклонений значений переменной f от ее среднего значения $E(f)$.

3. Рассмотрим несколько примеров вычисления дисперсий. Будем использовать тождественную переменную f.

Примеры 1–4. Дисперсии для рассматривавшихся в 8.1.2 ступенчатых распределений вычисляются с помощью результатов для дискретных распределений. Нужно только сделать поправки, связанные с интегралами

$$\int_n^{n+1} (u - E(f))^2 p(u)\, du.$$

Пример 5. Для равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ имеем

$$D(f) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Пример 6. Для треугольного распределения на отрезке $[a,b]$ имеем

$$D(f) = \frac{1}{24}(b-a)^2.$$

Пример 7. Для показательного распределения с параметром α имеем

$$D(f) = 1/\alpha^2.$$

Пример 8. Для нормального распределения с параметрами α, σ, как показано в приложении,

$$D(f) = \sigma^2.$$

8.3.2. Неравенство Чебышева

Возьмем случайную переменную $f \in \mathscr{L}^2$, ее среднее $E(f) = a$, дисперсию $D(f) = \sigma^2$ и число $\varepsilon > 0$. Предположим, что множество $\{x\colon |f(x)-a| \geq \varepsilon\}$ — событие и его индикатор A — случайная переменная. В этом случае, как и в дискретном, верно

Неравенство Чебышева.

$$P(\{x\colon |f(x) - a| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-2} D(f).$$

□ Интегрируя и переходя к средним значениям, из неравенств

$$(f(u) - a)^2 \geq (f(u) - a)^2 A(u) \geq \varepsilon^2 A(u)$$

получаем соотношения

$$D(f) = E((f - a)^2) \geq \varepsilon^2 E(A) = \varepsilon^2 P(A),$$

из которых следует доказываемое неравенство. ■

Как и в дискретном случае, неравенство Чебышева показывает, что дисперсия может служить для оценки вероятности отклонения случайной величины от ее среднего значения. Дополнительное предположение о том, что множество $\{x\colon |f(x) - a| \geq \varepsilon\}$ является событием, связано с данным определением события.

8.4. Корреляционная теория

Геометрический язык позволяет изложить эту теорию для непрерывных пространств так же, как для дискретных, используя квадратичную интегрируемость рассматриваемых переменных.

1. Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, p)$ квадратично интегрируемых по p переменных на непрерывном пространстве (U, p). Пространство $\mathscr{L}^2$ является подпространством пространства $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, p)$ интегрируемых переменных на (U, p).

Если переменные f, g на U квадратично интегрируемы по p, то их произведение интегрируемо по p. Интегрируемость произведения fg позволяет определить скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = E(fg)$$

для каждых квадратично интегрируемых переменных f, g и сделать $\mathscr{L}^2$ евклидовым пространством. Свойства скалярного произведения проверяются так же, как для дискретного пространства. Скалярное произведение симметрично, линейно по каждой переменной, положительно на диагонали, но может быть вырожденным.

2. Квадратично интегрируемые переменные с нулевым средним значением составляют подпространство $\mathscr{L}_0^2 = \mathscr{L}_0^2(U,p)$ евклидова пространства $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U,p)$. Каждой переменной $f \in \mathscr{L}^2$ соответствует полученная центрированием переменная $f_0 = f - Ef \in \mathscr{L}_0^2$. Из определений следует, что

$$D(f_0) = E\bigl(f_0^2\bigr) = \langle f_0, f_0\rangle = \|f_0^{|},$$
$$S(f_0) = \sqrt{D(f_0)} = \sqrt{\langle f_0, f_0\rangle} = \|f_0\|$$

для каждой $f \in \mathscr{L}^2$. Дисперсия центрированной переменной равна квадрату ее евклидовой нормы, а стандартное отклонение — ее норме в пространстве $\mathscr{L}_0^2$.

Норма для евклидова пространства $\mathscr{L}^2$ определяет сходимость последовательности случайных переменных $f_n \in \mathscr{L}^2$ к переменной $f \in \mathscr{L}^2$. По определению

$$f_n \to f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0.$$

В частности, можно определить среднеквадратическую сумму A ряда попарно непересекающихся событий $A_i \subseteq A$:

$$A = \sum A_i \Leftrightarrow \left\| A - \sum_{i=1}^{n} A_i \right\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

а вместе с этим определить *счетную аддитивность* вероятности P для такой суммы:

$$P(A) = \sum P(A_i) \quad (A = \sum A_i).$$

Такая счетная аддитивность следует из равенств

$$P(A) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \int Ap - \sum_{i=1}^{n} \int A_i p$$
$$= \int \left(A - \sum_{i=1}^{n} A_i\right) p = \int \left(A - \sum_{i=1}^{n} A_i\right)^2 p = \left\| A - \sum_{i=1}^{n} A_i \right\|^2.$$

Здесь множества отождествлены со своими индикаторами и использована их идемпотентность.

3. Скалярное произведение позволяет измерять зависимость между квадратично интегрируемыми переменными как величину угла между векторами в евклидовом пространстве. Число

$$K(f,g) = \frac{C(f,g)}{S(f)S(g)} = \frac{E(fg) - E(f)E(g)}{\sqrt{D(f)}\sqrt{D(g)}}$$

называется *коэффициентом корреляции* между квадратично интегрируемыми переменными f, g, для которых $Df > 0$, $Dg > 0$. Коэффициент корреляции симметричен: $K(f,g) = K(g,f)$.

Если $K(f,g) = 0$, то переменные f, g называются *некоррелированными* или *ортогональными.* Равенство $K(f,g) = 1$ означает *стохастическую* линейную зависимость между f и g.

8.5. Условные средние и вероятности

В непрерывных пространствах, как и в дискретных, условия могут описываться бесконечными разбиениями. Нужно только всюду проверять интегрируемость.

1. Рассмотрим непрерывное пространство (U,p) и разбиение $\mathscr{B} = (B_j)$ множества U:

$$\sum B_j = U, \quad P(B_j) \neq 0, \quad B_j B_k = \varnothing \quad (j \neq k).$$

Разбиение $\mathscr{B}$ может быть конечным или бесконечным. Пусть $\mathscr{G} = \mathscr{G}\mathscr{L}(\mathscr{B})$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U,p)$ интегрируемых по p переменных на U, составленное из интегрируемых по p переменных $g = \sum y_j B_j$.

Условным средним переменной f при условии $\mathscr{B}$ называется переменная

$$E(f \mid \mathscr{B}) = \sum E(f \mid B_j) B_j.$$

Переменная $g = E(f \mid \mathscr{B})$ принадлежит $\mathscr{G}$ и имеет то же среднее значение, что и f. В самом деле, благодаря счетной аддитивности и линейности среднего E

$$\begin{aligned}E(g) = \sum E(E(f \mid B_j)B_j) = \sum E(f \mid B_j)E(B_j) \\ = \sum (E(fB_j)/P(B_j))P(B_j) = \sum E(fB_j) \\ = E\left(f \sum B_j\right) = E(f).\end{aligned}$$

Каждая ограниченная переменная f на U имеет условное среднее при любом $\mathscr{B}$.

Переменная
$$P(A \mid \mathscr{B}) = E(A \mid \mathscr{B})$$
называется *условной вероятностью* события $A \subseteq U$.

Рассмотрим переменную h со счетным множеством значений z. Если разбиение $\mathscr{B}$ составлено из прообразов $B_z = h^{-1}(z)$ значений z переменной h на U, которые предполагаются событиями, то вместо $E(f \mid \mathscr{B})$ пишут также $E(f \mid h)$:

$$E(f \mid h) = \sum E(f \mid h = z)h^{-1}(z),$$
$$E(f \mid h = z) = E(f \cdot h^{-1}(z))/P(h^{-1}(z)).$$

Для события $f = A$ это равенство превращается в

$$P(f \mid h) = \sum P(A \mid h = z)h^{-1}(z).$$

2. Условное среднее для интегрируемых переменных на непрерывных пространствах имеет те же свойства, что и для переменных на дискретных пространствах:

$$E(f \mid \mathscr{B}) = f \ (f \in \mathscr{G}); \quad E(E(f \mid \mathscr{B}) \mid \mathscr{B}) = E(f \mid \mathscr{B});$$
$$E(E(f \mid \mathscr{C}) \mid \mathscr{B}) = E(f \mid \mathscr{B}),$$

если разбиение $\mathscr{C}$ мельче разбиения $\mathscr{B}$;

$$E(f_1 + f_2 \mid \mathscr{B}) = E(f_1 \mid \mathscr{B}) + E(f_2 \mid B), \quad E(hf \mid \mathscr{B}) = hE(f \mid B)$$

при $f, f_1, f_2 \in \mathscr{L}$ и $h \in \mathscr{G}$;

$$E(f \mid \mathscr{B}) \geq 0 \quad (f \in \mathscr{L},\ f \geq 0).$$

Условное среднее $E(\cdot \mid \mathscr{B})$ есть положительный линейный оператор, проектирующий $\mathscr{L}$ на $\mathscr{G}\mathscr{L}(\mathscr{B})$.

3. Для непрерывных пространств верны формула полной вероятности и формула Байеса, аналогичные описанным для дискретных пространств. Доказательства тоже идентичны.

Рассмотрим непрерывное вероятностное пространство (U, p) и разбиение $\mathscr{B} = (B_j)$ множества U. Для каждого события $A \subseteq U$ верна *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum P(A \mid B_j) P(B_j).$$

Верна также *формула Байеса*

$$P(B_j \mid A) = P(A \mid B_j)P(B_j) \Big/ \sum P(A \mid B_k) P(B_k).$$

С помощью этих формул решаются многие задачи.

8.6. Классические предельные теоремы

В заключение доказываются несколько классических предельных теорем теории вероятностей. Формально они описывают пределы некоторых последовательностей функций и их интегралов.

8.6.1. Леммы

Пусть $\alpha \in]0,1[$, $\beta = 1 - \alpha$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, $k = 1, 2, \ldots$, $l = k - j$, $\mu = k\alpha$, $\sigma = \sqrt{k\alpha\beta}$, $u(j) = \sigma^{-1}(j - \mu)$,

$$b(u(j), k) = \begin{cases} \binom{k}{j} \alpha^j \beta^{k-j} & \text{при} \quad j \leq k, \\ 0 & \text{при} \quad j < k; \end{cases}$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad (u \in \mathbb{R});$$

$$-\infty < t < v < \infty.$$

Для простоты записей зависимость рассматриваемых переменных от k не всегда указывается явно. В частности, $\sigma = \sigma(k)$.

1. Верна

Лемма о локальном приближении.

$$b(u,k) = g(u) \cdot \sigma^{-1}(1 + c(u) \cdot \sigma^{-1})$$

при всех $u = u(j) \in [t,v]$ *и некоторых* $M > 0$, $|c(u)| \leq M$.

□ Заметим, что $j = u\sigma + \mu$ и $t \leq u \leq v$,

$$t\sigma + \mu \leq j \leq v\sigma + \mu \Leftrightarrow k - (v\sigma + \mu) \leq l \leq k - (t\sigma + \mu).$$

Применяя формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta(n)} \quad (0 < \theta(n) < \frac{1}{12n}),$$

получаем ($|\theta(j,k,l)| \leq \frac{1}{12}(j^{-1} + k^{-1} + l^{-1})$)

$$b(u,k) = \frac{k!}{j!l!}\alpha^j \beta^l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{k}{jl}}\left(\frac{k\alpha}{j}\right)^j \left(\frac{k\beta}{l}\right)^l \cdot e^{\theta(j,k,l)}.$$

Как легко проверить, равенство $j\,l/k = \sigma^2(1 + c(u) \cdot \sigma^{-1})$ выполняется при всех $u = u(j) \in [t,v]$ и некоторых $M_1 > 0$, $c_1(u)$ таких, что $|c_1(u)| \leq M_1$. По формуле Тейлора для $1/\sqrt{1+x}$ отсюда вытекает, что

$$\sqrt{\frac{k}{jl}} = \frac{1}{\sigma}\left(1 + c_2(u) \cdot \frac{1}{\sigma}\right)$$

при всех $u = u(j) \in [t,v]$ и некоторых $M_2 > 0$, $c_2(u)$ таких, что $|c_2(u)| \leq M_2$.

Применяя формулу Тейлора для $\ln(1+x)$, получаем

$$\ln\left(\frac{k\alpha}{j}\left(\frac{k\beta}{l}\right)^l\right) = -(k\alpha + \sigma u)\left(\beta u \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2}\beta^2 u^2 \frac{1}{\sigma^2} + c_3(u)\frac{1}{\sigma^3}\right)$$
$$-(k\beta - \sigma u)\left(-\alpha u \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2}\alpha^2 u^2 \frac{1}{\sigma^2} + c_4(u)\frac{1}{\sigma^3}\right) = -\frac{1}{2}u^2 + c_5(u)\sigma$$

при всех $u = u(j) \in [t,v]$ и некоторых $M_i > 0$, $c_i(u)$ таких, что $|c_i(u)| \leq M_i$ ($i = 3,4,5$). Используя формулу Тейлора для e^x, находим

$$\left(\frac{k\alpha}{j}\right)^j \left(\frac{k\beta}{l}\right)^l = e^{-u^2/2} \cdot \left(1 + c_6(u)\frac{1}{\sigma}\right)$$

при всех $u = u(j) \in [t, v]$ и некоторых $M_6 > 0$, $c_6(u)$ таких, что $c_6(u)| \leq M_6$.

Снова применяя формулу Тейлора, получаем

$$e^{\theta(j,k,l)} = 1 + c_7(u)\frac{1}{\sigma}$$

при всех $u = u(j) \in [t, v]$ и некоторых $M_7 > 0$, $c_7(u)$ таких, что $|c_7(u)| \leq M_7$.

Из полученных соотношений вытекает, что

$$\begin{aligned} b(u,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\frac{1}{\sigma}\cdot\left(1+\frac{c_2(u)}{\sigma}\right)\left(1+\frac{c_6(u)}{\sigma}\right)\left(1+\frac{c_7(u)}{\sigma}\right) \\ = g(u)\left(1+c(u)\frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

при всех $u = u(j) \in [t, v]$ и некоторых $M > 0$, $c(u)$ таких, что $|c(u)| \leq M$. ■

2. По определению $x(k) \sim y(k) \Leftrightarrow x(k)/y(k) \to 1$ $(k \to \infty)$. Из полученных результатов следует

Теорема Муавра (1732).

$$b(u,k) \sim \frac{1}{\sigma(k)}g(u) \quad (n \to \infty)$$

равномерно по $u = u(j) \in [t, v]$.

□ Используя лемму о локальном приближении, получаем, что $b(u,k)/(\sigma^{-1}g(u)) = 1 + c(u)\sigma^{-1}$ при всех $u = u(j) \in [t, v]$ и некоторых $M > 0$, $c(u)$ таких, что $|c(u)| \leq M$. Вместе с тем $\sigma = \sigma(k) = (k\alpha\beta)^{-1/2} \to 0$ $(k \to \infty)$. ■

Теорему Муавра называют *локальной предельной теоремой*.

3. Пусть

$$B(v,k) = \sum_{u(j)<v} b(u(j),k), \quad G(v) = \int\limits_{-\infty}^{v} g(u)\,du,$$

$$g_k(u) = \begin{cases} g(u(j)) & (u \in [u(j),\ u(j+1)[), \\ 0 & (u \in \mathbb{R} \setminus [u(0), u(k+1)[), \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup\{|f(u)|\colon u \in \mathbb{R}\}.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.

$$\int\limits_{\sqrt{\ln k}}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du \le \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k \ge 3).$$

□ Заметим, что $t = \sqrt{\ln k} \ge 1$ при $k \ge 3$. Поэтому

$$\frac{e^{-t^2/2}}{t} \le e^{-t^2/2} = e^{-(\sqrt{\ln k})^2/2} = (e^{l \ln k})^{-1/2} = \frac{1}{k}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. ■

Лемма 2.

$$\|g - g_k\| \le \frac{1}{2\pi\sigma(k)} \quad (k \ge k(0) \ge \frac{(1+\sqrt{\beta})^2}{\alpha^2}).$$

□ Заметим, что

$$|g(u) - g_k(u)| = |g(u) - g(u(j))| \le |g(u(j+1)) - g(u(j))| \le \frac{e^{-1/2}}{2\pi\sigma} \le \frac{1}{2\pi\sigma}$$

при $u \in [u(j), u(j+1)[$. Пусть $k \ge k(0) \ge (1+\sqrt{\beta}\,)^2/\alpha^2$. Тогда

$$u(0) = \frac{-k\alpha}{\sigma} \le -\sqrt{\ln k}, \quad \sqrt{\ln k} \le u(k) = \frac{(k-1)\alpha}{\sigma}$$

и, следовательно,

$$|g(u) - g_k(u)| \le g(u) \le g(u(0)) \le g(-\sqrt{\ln k}\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (u \in]-\infty, u(0)[).$$

Вместе с тем,

$$|g(u) - g_k(u)| \le g\left(u - \frac{1}{\sigma}\right) \le g(u(k)) \le g(\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (u \in [u(k+1), \infty[). \quad ■$$

4. Пусть M — число, фигурирующее в лемме о локальном приближении. Тогда верна

Лемма 3.

$$B(v,k)=\int\limits_{-\infty}^{v} g_k(u)\,du+R(v),\quad |R(v)|\le (M+1)\sigma^{-1}(k).$$

□ Определим $j(v)$ условием $v\in]u(j(v)),u(j(v)+1)]$, и пусть $r(u)=c(u)g(u)\sigma^{-2}$, $|c(u)|\le M$. Из леммы о локальном приближении следует, что

$$\begin{aligned}B(v,k)&=\sum b(u(j),k)=\sum g(u(j))\sigma^{-1}+\sum r(u(j))\\&=\int\limits_{-\infty}^{u(j(v)+1)} g_k(u)\,du+\sum r(u(j))=\int\limits_{-\infty}^{v} g_k(u)\,du+R(v),\end{aligned}$$

$$R(v)=\int\limits_{-\infty}^{u(j(v)+1)} g_k(u)\,du+\sum r(u(j))\quad (j\le j(v)).$$

Заметим, что $|g_k|\le|g|\le 1/\sqrt{2\pi}\le 1$, и поэтому

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{u(j(v)+1)} g_k(u)\,du\right|\le\|g_k\|\sigma^{-1}\le\sigma^{-1},$$

$$\begin{aligned}\left|\sum r(u(j))\right|&\le M\sigma^{-1}\sum\int\limits_{u(j)}^{u(j+1)} g_k(u)\,du\\&\le M\sigma^{-1}\int\limits_{-\infty}^{u(j(v)+1)} g_k(u)\,du\le M\sigma^{-1}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\le M\sigma^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $|r(v)|\le\sigma^{-1}+M\sigma^{-1}=(M+1)\sigma^{-1}$. ■

Лемма 4. *$B(v,k) = G(v) + c(v)\cdot\sqrt{\ln k}\cdot\sigma^{-1}(k)$ при всех $v \in \mathbb{R}$, $k \geq k(0) \geq (1+\sqrt{\beta})\alpha^{-2}$ и некоторых $L > 0$, $c(v)$ таких, что $|c(v)| < L$.*

□ Из леммы 3 следует, что

$$B(v,k) - G(v) = \int\limits_{-\infty}^{v} \Delta_k(u)\,du,$$

$$\Delta_k(u) = g_k(u) - g(u), \quad |(v)| \leq (M+1)\sigma^{-1}(k).$$

Вместе с тем,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{v} \Delta_k(u)\,du\right| \leq \left|\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\ln k}} \Delta_k(u)\,du\right| + \left|\int\limits_{-\sqrt{\ln k}}^{\sqrt{\ln k}} \Delta_k(u)\,du\right| + \left|\int\limits_{\sqrt{\ln k}}^{\infty} \Delta_k(u)\,du\right|.$$

Используя неравенства лемм 1 и 3, при $k \geq k(0) \geq (1+\sqrt{\beta})\alpha^{-2}$ получаем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\ln k}} \Delta_k(u)\,du\right| \leq \int\limits_{\sqrt{\ln k}}^{\infty} g(u)\,du \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\left|\int\limits_{\sqrt{\ln k}}^{-\infty} \Delta_k(u)\,du\right| \leq \int\limits_{\sqrt{\ln k}}^{\infty} g(u-\sigma^{-1})\,du \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\left|\int\limits_{-\sqrt{\ln k}}^{\sqrt{\ln k}} \Delta_k(u)\,du\right| \leq \|g_k - g\|\cdot 2\sqrt{\ln k} \leq \sqrt{\ln k}\sigma^{-1}(k).$$

Следовательно, при $k \geq k(0) \geq (1+\sqrt{\beta})\alpha^{-2}$ верно неравенство

$$|B(v,k) - G(v)| \leq (\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\ln k} + \sqrt{\alpha\beta} + (M+1))\sigma^{-1}(k). \quad \blacksquare$$

Рассмотрим приращения биномиальной и нормальной функций распределения ($-\infty \le t < v \le \infty$):

$$B(t,v,k) = B(v,k) - B(t,k), \quad G(t,v) = G(v) - G(t).$$

8.6.2. Теоремы Лапласа и Пуассона

Эти классические теоремы часто применяются при решении теоретических и прикладных задач.

1. Из полученных результатов следует

Теорема Лапласа (1801). $B(t,v,k) \to G(t,v)$ $(k \to \infty)$ *равномерно по* t, v.

□ Используя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} |B(t,v,k) - G(t,v)| &= |B(v,k) - G(v) - (B(t,k) - G(t))| \\ &= |c(v) - c(t)|\sqrt{\ln k}\,\sigma^{-1}(k) \le L\sqrt{\ln k}\,\sigma^{-1}(k) \\ &= L\sqrt{\ln k}/\sqrt{k\alpha\beta} \to 0 \quad (k \to \infty). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорему Лапласа называют *интегральной предельной теоремой.*

2. Рассмотрим распределение Бернулли с параметрами k, α/k и распределение Пуассона с параметром $\alpha > 0$:

$$b(\alpha/k, j, k) = \binom{k}{j}\left(\frac{\alpha}{k}\right)^j \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^{k-j} \quad (0 \le j \le k),$$

$$p(\alpha, j) = \frac{\alpha^j}{j!}e^{-j} \quad (j \ge 0).$$

Верна

Теорема Пуассона (1832).

$$b(\alpha/k, j, k) \to p(\alpha, j) \quad (k \to \infty).$$

□ В самом деле,

$$\begin{aligned} b(\alpha/k, j, k) &= \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}\left(\frac{\alpha}{k}\right)^j \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^{k-j} \\ &= \frac{\alpha^j}{j}\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\dots\left(1 - \frac{j-1}{k}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^{-j} \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\alpha^j}{j!}e^{-j} = p(\alpha, j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9. ОБЩИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вероятность — это нормировнная мера, случайное событие – измеримое множество, случайная переменная — измеримая функция, среднее значение случайной переменной — ее интеграл по данной мере. Из общей теории меры теория вероятностей выделяется благодаря своим широким применениям. Кроме того, в теории вероятностей изучаются не сами случайные переменные, а их распределения. Связь теории вероятностей и теории меры подробно описана в книгах [58, 71].

9.1. Вероятностное пространство

Данное в 3.3 определение пространства с мерой слишком общее. Оно охватывает не только числовые, но и операторные меры. Поэтому здесь будут даны более подходящие и более употребительные определения основных понятий.

9.1.1. Определения

Основными понятиями теории вероятностей являются событие и его вероятность.

1. Рассмотрим непустое множество U и класс $\mathscr{P} = \mathscr{P}(U)$ всех его частей. Множество U будем называть *универсальным*, его элементы u — *исходами*, его части — *множествами*.

Назовем булеву алгебру множеств $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}$ *σ-алгеброй*, если вместе с каждой последовательностью множеств A_n ей принадлежит их объединение $A = \cup A_n$. Множества из $\mathscr{A}$ называются *событиями*. Выделяются *элементарные события* $\{u\}$. Они часто отождествляются с образующими их исходами $u \in U$.

2. Будем говорить, что мера $P\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ на σ-алгебре $\mathscr{A}$ *σ-аддитивна*, если для каждой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{A}$ и их объединения A верно равенство $P(A) = \sum P(A_n)$. Назовем σ-аддитивную меру $P\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ на σ-алгебре $\mathscr{A}$ *вероятностью*, если $P(A) \geq 0$ $(A \in \mathscr{A})$ и $P(U) = 1$. Число $P(A)$ называется *вероятностью события* A. Выделяются вероятности $p(u) = P(\{u\})$ элементарных событий $\{u\}$, если $\{u\} \in \mathscr{A}$. Функция $p\colon U \to \mathbb{R}$ называется *элементарной вероятностью.* Ясно, что $p(u) \leq 1$ $(u \in U)$ и $P(A) \leq 1$ $(A \in \mathscr{A})$.

3. Множество U и σ-алгебра $\mathscr{A}$ составляют *измеримое пространство* или *пространство событий.* Множество U исходов, σ-алгебра $\mathscr{A}$ событий и вероятность P составляют *вероятностное пространство* $(U, \mathscr{A}, P)$. Таким образом, вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ — это пространство событий $(U, \mathscr{A})$ и вероятность P.

9.1.2. Примеры

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть U — счетное множество и $\mathscr{A} = \mathscr{P}$ — алгебра всех его частей. Ясно, что алгебра всех частей множества является σ-алгеброй. Пара $(U, \mathscr{A})$ является пространством событий.

Рассмотрим функцию $p\colon U \to [0,1]$ со значениями $p(u) \geq 0$, $\sum p(u) = 1$ $(u \in U)$. Она определяет функцию $P\colon \mathscr{A} \to [0,1]$ со значениями $P(A) = \sum\limits_{u \in A} p(u)$. Как нетрудно проверить, функция P является вероятностью.

Тройка $(U, \mathscr{A}, P)$ является *дискретным вероятностным пространством*, описанным в главе 7.

Пример 2. Пусть $U = [0,1[\, \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathscr{A} = \mathscr{B}[0,1[$ — σ-алгебра частей U, порожденная классом $\mathscr{I}$ всех интервалов $[a,b[\, \subseteq U$ $(0 \leq a < b \leq 1)$. По определению, $\mathscr{A}$ равна пересечению всех σ-алгебр частей U, содержащих класс $\mathscr{I}$. Алгебра $\mathscr{B}[0,1[$ и множества из нее называются *борелевскими.* Равенство $dx[a,b[\, = b - a$ определяет меру Лебега dx на $\mathscr{B}[0,1[$. Это следует из теоремы о продолжении меры, доказанной в 3.3.4(3). Из определений следует, что $P = dx$ есть вероятность и $([0,1[, \mathscr{B}[0,1[, dx)$ — вероятностное пространство.

Замечание. Интервалы $[a, b[$ выбраны потому, что они составляют полукольцо множеств, которое рассматривалось в 3.3 при определении меры и интеграла. Существует много других способов определения меры Лебега.

Пример 3. Пусть $U = \mathbb{R}$ и $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра частей $\mathbb{R}$, порожденная классом всех интервалов $[a, b[\subseteq \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$. Алгебра $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ и множества из нее называются *борелевскими.* Рассмотрим возрастающую непрерывную слева функцию $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Она называется *функцией распределения.* Равенство

$$dF[a, b[= F(b) - F(a)$$

определяет меру Стилтьеса dF на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ [58, § 10]. Из определений следует, что $P = dF$ есть вероятность и $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), dF)$ — вероятностное пространство.

3. Среди функций распределения выделяются гладкие с интегрируемыми по мере Лебега производными. Производная f такой функции F называется *плотностью* распределения. По определению

$$dF = f dx.$$

Верны также равенства

$$P(A) = \int\limits_A dF = \int\limits_A f dx \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

Рассмотрим положительную непрерывную интегрируемую по мере Лебега функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, интеграл которой по $\mathbb{R}$ равен единице:

$$f(x) \geq 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1.$$

Равенство

$$F(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} f(x) dx \quad (u \in \mathbb{R})$$

определяет гладкую функцию распределения F с непрерывной плотностью f.

С помощью плотностей в главе 8 определялись непрерывные вероятностные пространства. Примером непрерывной плотности служит нормальная плотность со значениями

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

и параметрами $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

9.1.3. Случайные величины

Так называются измеримые вещественные функции на вероятностном пространстве.

1. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ и борелевская алгебра $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ составляют *борелевское пространство* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Рассмотрим пространство событий $(U, \mathscr{A})$ и функцию $x\colon U \to \mathbb{R}$. Она называется *вещественной случайной переменной* или *случайной величиной*, если прообраз $x^{-1}[a, \infty[$ каждого интервала $[a, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ является событием: $x^{-1}[a, \infty[\in \mathscr{A}$ $(a \in \mathbb{R})$. Отсюда следует, что функция x измерима и прообраз каждого борелевского множества в $\mathbb{R}$ является событием: $x^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ $(B \in \mathscr{B})$ или $x^{-1}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$.

Среди случайных величин выделяются индикаторы, которые часто удобно отождествлять с определяющими их событиями, как это делалось в главах 7 и 8. Пусть $A \in \mathscr{A}$, его индикатор $\chi_A\colon U \to \{0, 1\}$ определяется равенствами $\chi_A(u) = 1$ $(u \in A)$ и $\chi_A(u) = 0$ $(u \in U \setminus A)$. В выкладках удобно вместо χ_A писать A. Можно также называть случайную величину χ_A событием. При достаточной осторожности это не приводит к путанице.

Случайные величины образуют алгебру $\mathscr{M} = \mathscr{M}(U, \mathscr{A})$: сумма, произведение и произведение на вещественное число случайных величин являются случайными величинами. Это следует из свойств измеримых функций (3.3.4).

Пример 1. Если $\mathscr{A} = \mathscr{P}(U)$, то любое множество $A \subseteq U$ является событием и любая функция $x\colon U \to \mathbb{R}$ является случайной величиной. В частности, это относится к дискретным вероятностным пространствам. Если $\mathscr{A} = \{O, U\}$ — наименьшая σ-алгебра, составленная из *невозможного* (пустого) события O и *достоверного* U, то случайными величинами являются только постоянные $x\colon U \to \mathbb{R}$.

Пример 2. Пусть $U = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Тогда каждая функция $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не имеющая сложных разрывов, является случайной величиной. Такие случайные величины рассматривались для непрерывных вероятностных пространств. Данное в этой главе определение случайной величины более общее, чем данное в главе 8.

2. Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ и случайную величину $x\colon U \to \mathbb{R}$. Вероятность $P\colon \mathscr{A} \to [0,1]$ определяет вероятность $Q = Px^{-1}\colon \mathscr{B} \to [0,1]$ со значениями

$$Q(B) = P(x^{-1}(B)) \quad (B \in \mathscr{B}).$$

Вероятность Q называется *распределением* случайной величины x.

Если считать, что P описывает распределение массы на множестве U, то Q будет описывать распределение массы на вещественной прямой $\mathbb{R}$, перенесенную случайной величиной x: на борелевском множестве $B \in \mathscr{B}$ распределена масса $P(A)$ множества $A = x^{-1}(B) \in \mathscr{A}$.

Говорят также, что случайная величина x *имеет значение* в борелевском множестве $B \subseteq \mathbb{R}$ с вероятностью

$$Q(B) = P(x^{-1}(B)) = P(\{u : x(u) \in B\}) \quad (B \in \mathscr{B}).$$

Часто вместо пространства $(U, \mathscr{A}, P)$ удобнее рассматривать $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), Q)$.

Примеры случайных величин и их распределений рассматривались в главах 7 и 8.

3. Функция $F_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со значениями

$$F_x(b) = Q(]-\infty, b[) = P\{u : x(u) < b\} \quad (b \in \mathbb{R})$$

называется *функцией распределения* случайной величины x. Это возрастающая непрерывная слева функция с предельными значениями $F_x(-\infty) = 0$, $F_x(+\infty) = 1$. Она однозначно определяет распределение Q случайной величины x.

Если функция F_x имеет интегрируемую по мере Лебега производную f_x, то функция f_x называется *плотностью* случайной величины x. Плотность f_x положительна и нормирована:

$$f_x(u) \geq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt = 1.$$

С функцией распределения F_x ее связывают равенства

$$f_x(u) = F_x', \quad F_x(b) = \int\limits_{-\infty}^{b} f_x(t)\,dt \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Пример. Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ с $U = \mathbb{R}$ и $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, описанное в примере 3 п. 9.1.2. Тождественная функция $\mathrm{id}(u) = u$ $(u \in \mathbb{R})$ является случайной величиной, имеющей распределение с указанной в примере 3 нормальной плотностью.

В общем случае замена пространства $(U, \mathscr{A}, P)$ на пространство $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), Q)$ тоже позволяет вместо случайной величины $x\colon U \to \mathbb{R}$ рассматривать тождественную функцию $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Это дает возможность сосредоточиться на основном объекте — распределении случайной величины.

9.1.4. Случайные векторы

Так называются векторы, компонентами которых служат числовые случайные переменные.

1. Борелевская алгебра $\mathscr{B}^m = \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ частей пространства $\mathbb{R}^m$ определяется как алгебра, порожденная прямоугольниками

$$R = \prod [a_i, b_i[\quad (-\infty < a_i < b_i < \infty,\ i = 1, \ldots, m).$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ и борелевская алгебра $\mathscr{B}^m$ составляют *борелевское пространство* $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$. Рассмотрим пространство событий $(U, \mathscr{A})$ и векторную функцию $x\colon U \to \mathbb{R}^m$. Она называется *случайным вектором*, если прообраз $x^{-1}(R)$ каждого прямоугольника $R \subseteq \mathbb{R}^m$ является событием: $x^{-1}(R) \in \mathscr{A}$. Отсюда следует, что функция $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ является измеримым отображением и прообраз каждого борелевского множества в $\mathbb{R}^m$ является событием: $x^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ $(B \in \mathscr{B}^m)$.

Подчеркнем, что, как и при определении случайной величины, вероятность P на алгебре событий $\mathscr{A}$ в данном определении не используется.

2. Представление вектора пространства $\mathbb{R}^m$ семейством его координат в стандартной базе позволяет представить случайный вектор $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ семейством случайных величин $x_i\colon U \to \mathbb{R}$ и писать $x = (x_1, \dots, x_m)$ или $x = (x_i)$, $1 \le i \le m$. А каждое семейство случайных величин $x_i\colon U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ определяет случайный вектор $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, для которого x_i являются компонентами. Поэтому случайный вектор $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ можно определить как семейство случайных величин $x_i\colon U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$.

При определении случайного вектора как семейства случайных величин конечность множества индексов не играет роли. Она существенна для определения случайного вектора как измеримого отображения, так как для определения измеримого отображения $x\colon U \to \mathbb{R}^T$ при бесконечном множестве T нужен специальный выбор σ-алгебры для $\mathbb{R}^T$.

3. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $(U, \mathscr{A})$ — измеримое пространство с множеством $U = \{0, 1\}^m$ и алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{P}(U)$. Обозначим x_i число единиц на i-м месте в строке $u = (u_1, \dots, u_m)$. Отображение $x = (x_1, \dots, x_m)$ со значениями $x(u) = u$ является случайным вектором. Он описывает расположение нулей и единиц в строке u.

Пример 2. Рассмотрим $U = \mathbb{R}^m$ и $\mathscr{A} = \mathscr{B}^m$. Тождественное отображение $x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ является случайным вектором. Его компонентами служат тождественные отображения вещественной прямой.

Каждое непрерывное отображение $x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ также является случайным вектором. Его компонентами служат непрерывные вещественные функции вещественной переменной.

Случайный вектор $x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ можно составить и из функций $x_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не имеющих сложных разрывов.

4. Распределение случайного вектора формально определяется так же, как и распределение случайной величины. Но оно обладает более сложными свойствами.

Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ и случайный вектор $x\colon U \to \mathbb{R}^m$, составленный из случайных величин $x_i\colon U \to \mathbb{R}$. Вероятность $P\colon \mathscr{A} \to [0, 1]$ определяет вероятность $Q = Px^{-1}\colon \mathscr{B}^m \to [0, 1]$ со значениями

$$Q(B) = P(x^{-1}(B)) \quad (B \in \mathscr{B}^m).$$

Вероятность Q называется *распределением* случайного вектора x. Говорят, что случайный вектор x имеет значение в борелевском множестве $B \subseteq \mathbb{R}^m$ с вероятностью $Q(B)$.

Распределение $Q = Px^{-1}$ случайного вектора $x = (x_i)$ называется *совместным* распределением его компонент x_i. А распределения $Q_i = Px_i^{-1}$ компонент x_i называются *маргинальными* распределениями случайного вектора x.

5. Каждое конечное семейство борелевских множеств $B_i \subseteq \mathbb{R}$ составляет борелевский прямоугольник $B = \prod B_i = \{x = (x_i) : x_i \in B_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Из определений следует, что $x^{-1}(B) = \cap x_i^{-1}(B_i)$. Если для всех борелевских прямоугольников $\prod B_i$ верно равенство

$$P\left(x^{-1}\left(\prod B_i\right)\right) = \prod P\big(x_i^{-1}(B_i)\big),$$

то случайные величины x_i называются *стохастически независимыми* или, коротко, просто *независимыми*. Если это равенство не верно хотя бы для одного борелевского прямоугольника, то случайные величины x_i называют *стохастически зависимыми*.

6. Пусть M — произвольное множество. События $A_i \in \mathscr{A}$, $i \in M$, называются независимыми, если независимы их индикаторы χ_i, $i \in K$, для каждого конечного $K \subseteq M$. Как нетрудно проверить, независимость индикаторов χ_i эквивалентна равенству

$$P\biggl(\bigcap_{i \in K} A_i\biggr) = \prod_{i \in K} P(A_i).$$

Эти равенства обычно используются для определения независимости событий A_i, $i \in M$. Из определений следует, что независимость семейства $(A_i)_{i \in M}$ влечет независимость семейства $(A_i)_{i \in L}$ для каждого множества $L \subseteq M$. Для того чтобы убедиться в этом, нужно в определяющем равенстве взять $B_i = \mathbb{R}$ для всех $i \notin K$. В частности, из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. (Но не наоборот.)

Аналогичные утверждения верны и для случайных величин.

7. Понятие стохастической независимости имеет формальный характер и не всегда хорошо согласуется с интуицией. Например, в пространстве $([0,1], \mathscr{B}[0,1], dx)$ события $A = [0,1/2]$ и $B = [1/4, 3/4]$ стохастически независимы, а события $C = [0, 2/3]$ и $D = [1/3, 1]$ стохастически зависимы, хотя в обоих случаях пересечения равны половинам рассматриваемых отрезков. Из-за своего формального характера понятие стохастической независимости эффективно используется в теории чисел [37]. Благодаря глубокому содержанию стохастическая независимость является одним из центральных понятий теории вероятностей.

8. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Возьмем пространство Бернулли $B(n,a)$, составленное из множества $U=\{0,1\}^n$ двоичных строк $u=(u_1,\ldots,u_n)$ длины n, алгебры $\mathscr{A}=\mathscr{P}(U)$ всех частей множества U и вероятности P, задаваемой элементарной вероятностью p со значениями

$$p(u)=a^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)} \quad \Big(s(u)=\sum u_i,\ a\in[0,1]\Big).$$

Случайные величины $s_i(u)=u_i$ стохастически независимы в соответствии со сказанным в главе 7.

Пример 2. Для борелевского пространства $(\mathbb{R}^m,\mathscr{B}^m)$ определим вероятность P с помощью семейства нормальных плотностей f_i, имеющих параметры $a_i\in\mathbb{R}$ и $\sigma=1$:

$$P(B)=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_B e^{-\frac{1}{2}\|x-a\|^2}\,dx.$$

Здесь $a=(a_i)$, $x=(x_i)$, $\|x-a\|^2=\sum(x_i-a_i)^2$ и $dx=dx_1\ldots dx_m$ — мера Лебега для $\mathbb{R}^m$.

Проекции $x_i\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ со значениями $x_i(x_1,\ldots,x_m)=x_i$ являются независимыми случайными величинами и имеют нормальные плотности с параметрами a_i и $\sigma=1$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть борелевский прямоугольник $B=\prod B_i$ и применить теорему Фубини о кратных и повторных интегралах.

9.1.5. Случайные отображения

Понятие случайного отображения является естественным обобщением понятий случайной величины и случайного вектора.

1. Рассмотрим вероятностное пространство $(U,\mathscr{A},P)$ и измеримое пространство $(X,\mathscr{B})$. Отображение $x\colon U\to X$ называется *случайным*, если прообраз каждого измеримого множества в X является событием: $x^{-1}(B)\in\mathscr{A}$ $(B\in\mathscr{B})$ или $x^{-1}(\mathscr{B})\subseteq\mathscr{A}$. Вероятность P в этом определении не используется, поэтому можно говорить просто об *измеримом отображении*.

Случайные величины и векторы являются случайными отображениями, в которых образами элементарных событий служат соответственно вещественные числа и векторы.

2. Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$, измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$ и случайное отображение $x\colon U \to X$. Вероятность P на алгебре $\mathscr{A}$ определяет вероятность $Q = Px^{-1}$ на алгебре $\mathscr{B}$ со значениями

$$Q(B) = P(x^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Вероятность Q называется *распределением* случайного отображения x. Это определение обобщает определение распределений для случайных величин и векторов.

Если считать, что P описывает распределение массы на множестве U, то Q будет описывать распределение массы на множестве X, перенесенной отображением $x\colon U \to X$. Такая физическая интерпретация вероятностных распределений часто бывает удобна.

3. Приведем примеры случайных отображений.

Пример 1. Во многих задачах рассматриваются случайные переменные с абстрактными значениями.

Рассмотрим множество $U = (\mathbb{B} \times \mathbb{B})^n$, элементами которого являются строки $u = (u_i)$ длины n из пар $u_i = u_{i_1} u_{i_2} \in \{11, 10, 01, 00\}$, и алгебру $\mathscr{A} = \mathscr{P}(U)$ всех частей множества U. Вероятность P на $\mathscr{A}$ определим с помощью элементарной вероятности p со значениями

$$p(11) = ab,\ p(10) = a(1-b), \quad p(01) = (1-a)b,\ p(00) = (1-a)(1-b),$$

где $0 \le a, b \le 1$, и правила произведения:

$$p(u) = \prod p(u_i) \quad (u = (u_i)).$$

Пусть $X = \mathbb{B}^n$ и $\mathscr{B} = \mathscr{P}(X)$. Определим случайное отображение $x = x_i\colon U \to X$ равенствами

$$x_i(u) = u_{i_1} + u_{i_2} \quad (u = (u_i) = (u_{i_1} u_{i_2}))$$

(сумма булева). Из определений следует, что

$$q(1) = P(x_i^{-1}) = a(1-b) + (1-a)b, q(0) \\ = P(x_i^{-1}(0)) = ab + (1-a)(1-b).$$

Вероятность $Q(B) = P(x^{-1}(B))$, $B \subseteq X$, — распределение случайного отображения $x = (x_i)$ — определяется элементарной вероятностью q со значениями

$$q(x) = \prod q(x_i) \quad (x = (x_i)).$$

В частности, если $b = 1/2$, то $q(1) = q(0) = 1/2$ и $q(x) = 1/2^n$ для всех $x \in X$. Все последовательности значений равновероятны.

Двоичные булевы последовательности и их суммы используются при передаче информации по каналам связи.

Пример 2. Рассмотрим произвольное множество T и обозначим $\mathbb{R}^T$ множество всех функций $x\colon T \to \mathbb{R}$. Тихоновская топология для $\mathbb{R}^T$ порождается открытыми прямоугольниками $G(K) = \prod G(t)$, $t \in T$, и $G(t) = \mathbb{R}$, $t \notin K$, $K \in \mathscr{K}$. Здесь $\mathscr{K} = \mathscr{K}(T)$ — класс всех конечных множеств в T, а $G(t)$ — открытое множество в $\mathbb{R}$ (3.1.1). *Борелевская алгебра* $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ для $\mathbb{R}^T$ определяется как σ-алгебра, порожденная классом всех открытых прямоугольников $G(K)$, $K \in \mathscr{K}(T)$.

Алгебра $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ называется также *цилиндрической*, так как порождается и классом всех *цилиндров*

$$C(K, B) = B \times \mathbb{R}^{T \setminus K} = \{x \in \mathbb{R}^T : x(K) \in B\}$$

с прямоугольными борелевскими основаниями $B = \prod B(t)$, $B(t) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $t \in K$. Цилиндр $C(K, B)$ состоит из всех функций $x\colon T \to \mathbb{R}$ со значениями $x(t) \in B(t)$ для $t \in K$ и произвольными значениями $x(t)$ для $t \notin K$. Примером может служить цилиндр $C(\{1, 2\}, [0, 1] \times [0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, основанием которого служит квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ принадлежат и цилиндры $C(K, B)$ с произвольными борелевскими основаниями $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^K)$, $K \in \mathscr{K}(T)$. Примером может служить цилиндр

$$C(\{1, 2\}, B(0, 1)) = B(0, 1) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

основанием которого служит круг $B(0, 1) = \big\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\big\}$. Единичный куб и единичный шар тоже принадлежат алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$. Терминология, связанная с цилиндрами, принята в теории вероятностей.

Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ и борелевское пространство $(X, \mathscr{B})$, где $X = \mathbb{R}^T$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$. *Случайное отображение* U в X есть отображение $x\colon U \to X$, для которого прообраз каждого борелевского множества в $\mathbb{R}^T$ является событием: $x^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$. Примеры таких случайных отображений будут в следующей главе, посвященной случайным процессам.

4. Каждое случайное отображение $x\colon U \to \mathbb{R}^T$ и конечное множество $K \subseteq T$ определяют случайный вектор $x_K\colon U \to \mathbb{R}^K$ с компонентами $x_t\colon U \to \mathbb{R}$, $t \in K$. Распределения $Q_K = Px_k^{-1}$ векторов x_K называются *конечномерными распределениями* отображения x. Эти распределения *согласованы*:

$$Q_K(B) = Q_M(B \times \mathbb{R}^{M \setminus K})$$

для каждых $K, M \in \mathscr{K}$, $K \subseteq M$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^K)$.

По теореме Колмогорова [58, § 4] существует единственная вероятность Q на борелевской алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ такая, что

$$Q(B \times \mathbb{R}^{T \setminus K}) = Q_K(B)$$

для каждых $K \in \mathscr{K}(T)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^K)$. Вероятность Q называется *распределением* случайного отображения $x\colon U \to \mathbb{R}^T$. Из определений следует, что

$$Q(B \times \mathbb{R}^{T \setminus K}) = P\big(x_K^{-1}(B)\big).$$

Семейства согласованных конечномерных распределений используются в теории случайных процессов.

9.2. Средние

Среднее значение случайной переменной несомненно является одним из основных понятий теории вероятностей.

9.2.1. Среднее значение

Среднее значение случайной величины определяется как интеграл по вероятностной мере.

1. Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{A}, P)$ и алгебру $\mathscr{M} = \mathscr{M}(U, \mathscr{A})$ всех случайных величин $x\colon U \to \mathbb{R}$. Выделим в ней нормированное пространство $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, \mathscr{A})$ интегрируемых по мере P случайных величин x (3.3.2).

Число

$$Ex = \int\limits_U x(u) dP(u)$$

называется *средним значением* случайной величины $x \in \mathscr{L}$. По традиции его называют также *математическим ожиданием*.

2. Замена переменных позволяет выразить среднее значение через распределение случайной величины (3.3.6):

$$Ex = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, dQ(x) \quad (Q = Px^{-1}).$$

Если мера Q имеет плотность $f = \dfrac{dQ}{dx}$ по мере Лебега dx, то верно равенство $Ex = \int\limits_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$.

3. Из определений следует, что индикатор $\chi_A\colon U \to \{0, 1\}$ события $A \in \mathscr{A}$ принадлежит $\mathscr{L}$ и

$$E(\chi_A) = P(A).$$

Поэтому формулы для вероятностей можно получать с помощью средних.

Среднее $E\colon \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ является нормированным линейным функционалом:

$$E(1) = 1, \quad E(x) \geq 0 \quad (x \geq 0), \quad E(ax + by) = aE(x) + bE(y).$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$; $x, y \in \mathscr{L}$, а единица обозначает число и постоянную функцию на U с таким значением.

Примеры средних значений были в главах 7 и 8.

9.2.2. Дисперсия и ковариация

Эти понятия определяются через среднее.

1. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(U, \mathscr{A})$ квадратично интегрируемых по мере P случайных величин x: $U \to \mathbb{R}$ (4.1.3). Так как мера P вероятностная, то $\mathscr{L}^2 \subseteq \mathscr{L}$ [58]. Для таких случайных величин определена *дисперсия*

$$D(x) = E((x - Ex)^2)$$

и *стандартное отклонение* от среднего

$$S(x) = \sqrt{Dx}.$$

Вычислять дисперсию часто удобно по *правилу квадратов*:

$$D(x) = E(x^2) - E^2(x).$$

При физической интерпретации среднее $E(x)$ играет роль *центра* распределения Q массы, а дисперсия $D(x)$ — *момента инерции* относительно центра.

3. Рассмотрим случайные величины $x, y \in \mathscr{L}^2$ и их средние значения $a = E(x)$, $b = E(y)$. Скалярное произведение центрированных случайных величин $x - a$, $y - b$ называется *ковариацией* x, y и обозначается $C(x, y)$:

$$C(x, y) = E((x - a)(y - b)) = E(xy) - E(x)E(y).$$

Заметим, что $D(x) = C(x, x)$.

Если $D(x) \neq 0$, $D(y) \neq 0$, то нормирование дает *коэффициент корреляции* $K(x, y)$ для x, y:

$$K(x, y) = E\left(\frac{x - a}{S(x)} \cdot \frac{y - b}{S(y)}\right) = \frac{C(x, y)}{S(x)S(y)}.$$

Когда $K(x, y) = 0$, говорят, что случайные величины x, y *некоррелированы.* Некоррелированность x и y эквивалентна равенству

$$E(xy) = E(x)E(y).$$

Можно сказать, что некоррелированные случайные величины *независимы в среднем.*

В главах 7 и 8 были описаны подпространство $\mathscr{L}_0^2$ гильбертова пространства $\mathscr{L}^2$, составленного из случайных величин с нулевым средним, и геометрический смысл введенных понятий. Там же приведены примеры.

9.2.3. Законы больших чисел

В общем случае, как и в дискретном, обычный закон больших чисел следует из неравенства Чебышева, а усиленный — из неравенства Колмогорова. Благодаря операторному языку эти неравенства в общем случае формулируются и доказываются так же, как в дискретном. Описание проблемы и подробные доказательства есть в [58, § 20].

1. Рассмотрим последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $x_i \in \mathscr{L}^2(U, \mathscr{A})$ с общим средним $Ex_i = a$ и дисперсией $Dx_i = b^2$. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Благодаря независимости x_i верны равенства

$$E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = a, \quad D\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}b^2,$$

и из неравенства Чебышева следует

Закон больших чисел Чебышева.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n}\frac{b^2}{\varepsilon^2}.$$

здесь $\left|\frac{1}{n}S_n - a\right| \geq \varepsilon$ обозначает множество всех исходов u, для которых верно это неравенство:

$$\left\{u : \left|\frac{1}{n}S_n(u) - a\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq U.$$

Всюду дальше используются аналогичные упрощенные записи.

Упражнение. Доказать закон больших чисел Чебышева для последовательности независимых $x_i \in \mathscr{L}^2$ со средним $Ex_i = a_i$ и дисперсиями $Dx_i = b_i^2$, полагая

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Частным случаем закона больших чисел Чебышева является закон больших чисел Бернулли (гл. 7).

2. Рассмотрим последовательность случайных величин y_n и случайную величину y на вероятностном пространстве $(U, \mathscr{A}, P)$. Говорят, что последовательность y_n сходится к y *по мере* P, и пишут $y_n \xrightarrow{P} y$, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$P(|y_n - y| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

Если ясно, какая вероятностная мера P имеется в виду, то говорят о сходимости *по вероятности.*

Из неравенства Чебышева следует, что $\dfrac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} a$: средние арифметические случайных величин x_i сходятся по вероятности к их общему среднему a. При достаточно больших n среднее a служит хорошей оценкой для $\dfrac{1}{n}S_n$.

3. Сходимость последовательности y_n к y почти всюду (P) в теории вероятностей принято называть *почти наверное* (P) и записывать $y_n \xrightarrow{\text{as}} y$ (P). Сходимость почти всюду по данной мере описывалась в 3.3.2. Благодаря тому, что мера P нормирована, такая сходимость определяется эквивалентными неравенствами

$$P(y_n \to y) = 1, \quad P(y_n \not\to y) = 0.$$

Если последовательность сходится почти наверное, то она сходится и по вероятности. Но не наоборот [45, гл. 5, § 4].

Из неравенства Колмогорова следует

Усиленный закон больших чисел Колмогорова.

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{as}} a \quad (P).$$

Подробное доказательство этого закона есть в [58, § 16] и в [89, § 10.5]. Он позволяет с большей уверенностью использовать среднее a как приближение для среднего арифметического случайных величин $x_1, \ldots, x_n$. Неравенство Колмогорова дает вероятностную оценку погрешности такого приближения.

9.2.4. Центральная предельная теорема

В главе 8 элементарными методами были доказаны несколько классических предельных теорем и среди них интегральная теорема Лапласа. Применение преобразований Фурье позволяет получить простое доказательство более общей теоремы.

1. Рассмотрим последовательность случайных величин y_n и случайную величину y на вероятностном пространстве $(U, \mathscr{A}, P)$. Обозначим Q_n и Q их распределения, а φ_n и φ — характеристические функции (преобразование Фурье) этих распределений (4.4.4):

$$\varphi_n(t) = \int e^{itx} dQ_n(x), \quad \varphi(t) = \int e^{itx} dQ(x) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Функции φ_n и φ называются также характеристическими функциями случайных величин y_n и y. Свойства характеристических функций и их связь со свойствами распределений подробно описаны в [58, гл. 4].

Из определений и свойств преобразований Фурье следует, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Связь сходимости распределений со сходимостью характеристических функций описывает *теорема непрерывности.*

Будем говорить, что последовательность распределений Q_n слабо сходится к Q, и писать $Q_n \xrightarrow{w} Q$, если

$$\int f(x)\, dQ_n(x) \to \int f(x)\, dQ$$

для каждой ограниченной непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можно доказать [71, 5.1.2], что эта сходимость эквивалентна сходимости $Q_n(B) \to Q(B)$ для каждого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$, мера Лебега границы ∂B которого равна нулю. В частности, множество B может быть отрезком. Верна

Теорема непрерывности.

$$Q_n \xrightarrow{w} Q \Leftrightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Доказательство более общего утверждения есть в [71, 53.17].

2. Рассмотрим последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $x_i \in \mathscr{L}^2(U, \mathscr{A})$ с общими средним $Ex_i = \mu$, дисперсией $Dx_i = \sigma^2$ $(\sigma > 0)$ и характеристической функцией φ. Пусть

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Тогда центрирование и нормирование дают

$$\overline{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

В этих обозначениях верна

Центральная предельная теорема.

$$P(a \le \overline{S}_n \le b) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-x^2/2}\, dx \quad (-\infty \le a < b \le +\infty).$$

□ Для характеристической функции φ_n случайной величины $\overline{S}_n$ верно равенство

$$\varphi_n(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

Так как $Dx_i = \sigma^2$, то

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2), \quad t \to 0.$$

Поэтому при каждом $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}.$$

Найденная предельная функция является характеристической для стандартного нормального распределения. По теореме непрерывности отсюда следует доказываемое утверждение. ■

В книге [58, гл. 6] доказаны более общие предельные теоремы для сумм независимых, но не обязательно одинаково распределенных случайных величин. Различным обобщениям классических предельных теорем посвящена обширная специальная литература.

3. Центральная предельная теорема позволяет дать оценку среднему значению μ, когда оно неизвестно. Подстановка значения $\bar{S}_n$ и решение неравенств дают для $a = -b$, $b > 0$:

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{b\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \frac{S_n}{n} + \frac{b\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Если $b = 2$ и $b = 3$, то правая часть приближенно равна соответственно 0.954 и 0.997. В прикладных задачах часто применяется *правило трех сигм*: считается практически достоверным, что неизвестное среднее μ находится между $S_n/n - 3\sigma/\sqrt{n}$ и $S_n/n + 3\sigma/\sqrt{n}$.

При некоторых дополнительных предположениях о поведении на бесконечности общей функции распределения составляющих сумму S_n случайных величин найдены оценки для скорости сходимости к нормальному распределению [122, гл. 4, § 5]. В «Математической энциклопедии» (Москва, 1982) в статье «Ляпунова теорема» приведены оценки расстояния до предельного нормального распределения и ссылки на статьи с доказательствами. Это расстояние позволяет оценивать погрешность нормального приближения.

9.2.5. Условные средние

В общем случае в качестве основного понятия удобно использовать не условную вероятность, а условное среднее значение, определив его как некоторую случайную величину, более простую, чем данная.

1. Рассмотрим вероятностное пространство $(U, \mathscr{F}, P)$ и нормированное пространство $\mathscr{L} = \mathscr{L}(U, \mathscr{F}, P)$ интегрируемых по мере P случайных величин $x\colon U \to \mathbb{R}$. Каждая σ-алгебра $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ определяет подпространство $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L}(U, \mathscr{A}, P)$ пространства $\mathscr{L}$, составленное из $\mathscr{A}$ — измеримых случайных величин $x \in \mathscr{L}$.

Здесь и дальше сужение меры P на σ-алгебру $\mathscr{A}$ тоже обозначается P.

Каждая $x \in \mathscr{L}$ определяет вещественную меру $Q\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ со значениями

$$Q(A) = \int\limits_A x\,dP \quad (A \in \mathscr{A}).$$

Мера Q непрерывна по мере P и по теореме Радона — Никодима существует $\bar{x} = \dfrac{dQ}{dP} \in \bar{\mathscr{L}}$ такая, что для всех $A \in \mathscr{A}$

$$\int\limits_A \bar{x}\,dP = \int\limits_A x\,dP.$$

Так как производная Радона — Никодима определена с точностью до эквивалентности по мере P, то все связанные с нею равенства выполняются почти наверное по мере P. Не будем в дальнейшем отмечать это явно. Случайная величина $\bar{x}$ называется *условным средним* случайной величины x. По определению: (1) $\bar{x} \in \bar{\mathscr{L}}$; (2) $E(A\bar{x}) = E(Ax)$ $(A \in \mathscr{A})$. Заметим, что вследствие (2) достаточно требовать $\mathscr{A}$-измеримость $\bar{x}$. В (2) множество A отождествлено со своим индикатором $\operatorname{ind} A$. Соглашение о таком отождествлении позволяет упрощать запись выкладок. Равенство (2) можно записать также $E(\mathscr{A}\bar{x}) = E(\mathscr{A}x)$. При $A = U$ равенство (2) дает $E\bar{x} = Ex$: условие $\mathscr{A}$ сохраняет среднее значение случайной величины.

Условные средние относительно σ-алгебр обобщают рассматривавшиеся в главе 7 условные средние относительно разбиений: нужно рассматривать порожденные этими разбиениями σ-алгебры.

2. Для оператора условного усреднения $x \to \bar{x}$ можно использовать также обозначения $\bar{E}$, $E(\cdot \mid \mathscr{A})$ и $E_{\mathscr{A}}$:

$$\bar{x} = \bar{E}x = E(x \mid \mathscr{A}) = E_{\mathscr{A}}x \quad (x \in \mathscr{L}).$$

Если $\mathscr{A} = \{0, U\}$, то $E_{\mathscr{A}}x = Ex$. Из определений следует также, что

$$\bar{E}(\bar{E}x) = \bar{E}x \quad (x \in \mathscr{L}), \qquad \bar{E}\bar{x} = \bar{x} \quad (\bar{x} \in \bar{\mathscr{L}}).$$

Оператор $\bar{E}\colon \mathscr{L} \to \bar{\mathscr{L}}$ является проектором $\mathscr{L}$ на $\bar{\mathscr{L}}$: $\bar{E}^2 = \bar{E}$. Из линейности производной Радона — Никодима следует линейность оператора $\bar{E}$:

$$\bar{E}(ax + by) = a\bar{E}x + b\bar{E}y \quad (a, b \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathscr{L}).$$

Оператор $\bar{E}$ обладает более общим свойством линейности: вместо числовых коэффициентов a, b можно взять функции $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathscr{L}}$, если произведения $\bar{a}x$, $\bar{b}y$ интегрируемы по мере P. Можно говорить об $\mathscr{A}$-линейности оператора $\bar{E} = E_{\mathscr{A}}$.

Сужение $\bar{E}$ на $\mathscr{L}^2(U, \mathscr{F}, P)$ является ортогональным проектором на подпространство $\mathscr{L}^2(U, \mathscr{A}, P)$. Оно всюду плотно и поэтому такое сужение определяет $\bar{E}$ на $\mathscr{L}(U, \mathscr{F}, P)$. Иногда сначала определяют условное среднее как ортогональный проектор на $\mathscr{L}^2$, а потом продолжают его на $\mathscr{L}$ [71, § 44].

Условное среднее $\bar{E}$ является положительным оператором:

$$\bar{E}x \geq 0 \quad (x \geq 0).$$

Из линейности и положительности оператора $\bar{E}$ следует его монотонность:

$$\bar{E}x \leq \bar{E}y \quad (x \leq y).$$

Подчеркнем, что все рассматривавшиеся соотношения с условными средними выполняются только с вероятностью 1. Подробные их доказательства есть в [122, гл. 2, § 7].

3. Часто используется *цепное правило* для условных средних

$$E(E(x \mid \mathscr{A}) \mid \mathscr{B}) = E(x \mid \mathscr{B}) = E(E(x \mid \mathscr{B}) \mid \mathscr{A}) \quad (\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}).$$

Последнее равенство сразу следует из $\mathscr{A}$-измеримости случайной величины $E(x \mid \mathscr{B})$, вытекающей из ее $\mathscr{B}$-измеримости, и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$. А первое равенство следует из цепного правила для производных Радона — Никодима. Это равенство имеет простой геометрический смысл: последовательное проектирование дает проекцию на меньшее подпространство. При $\mathscr{B} = \{0, U\}$ из цепного правила следует равенство

$$E(E(x \mid \mathscr{A})) = Ex.$$

Его можно назвать *формулой полного среднего*.

4. Каждая случайная величина y на $(U, \mathscr{F}, P)$ порождает σ-алгебру $\sigma(y) = y^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{F}$. Условное среднее случайной величины $x \in \mathscr{L}(U, \mathscr{F}, P)$ относительно y определяется равенством

$$E(x \mid y) = E(x \mid \sigma(y)).$$

Если x не зависит от y, то $E(x \mid y) = Ex$.

Пусть независимые случайные величины $x, y \in \mathscr{L}$. Тогда $xy \in \mathscr{L}$ и верно равенство

$$E(xy) = ExEy.$$

Равенства для независимых случайных величин доказываются с помощью теоремы Фубини.

Так как функция $\bar{x} = E(x \mid y)$ $\sigma(y)$-измерима, то существует борелевская функция f такая, что

$$f(y(u)) = \bar{x}(u) \quad (u \in U).$$

Функция f обозначается $E(x \mid y = z)$ и называется средним x *при условии* $y = z$ $(z \in \mathbb{R})$. Это равенство означает событие $\{u : y(u) = z\}$.

5. Условная вероятность события определяется как условное среднее его индикатора:

$$P(A \mid \mathscr{B}) = E(\operatorname{ind} A \mid \mathscr{B}).$$

Свойства условных вероятностей определяются свойствами условных средних. В частности, из формулы полного среднего следует *формула полной вероятности*

$$E(P(A \mid \mathscr{B})) = P(A).$$

Из нее следуют формулы полной вероятности для дискретных и непрерывных распределений, полученные в главах 7 и 8.

Если случайные величины x, y имеют плотности f, g и совместную плотность h по мере Лебега, то условное распределение x при условии $y = z$ имеет плотность

$$f_c(x, z) = \frac{h(x, z)}{g(z)}$$

($f_c(x, z) = 0$ при $g(z) = 0$). Для каждого борелевского множества $X \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство

$$P(x \in X \mid y = z) = \int\limits_X f_c(x, z)\, dx$$

В дискретном случае вместо плотностей рассматриваются элементарные вероятности, и интеграл превращается в сумму. Дискретный, непрерывный и общий случаи подробно описаны в [122].

10. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Кратко описываются основные понятия случайных процессов. Выделяются марковские процессы и мартингалы, имеющие широкое применение в самых разных областях и наиболее тесно связанные с теорией операторов. Случайным процессам посвящена обширная литература, в частности, книги [10, 19]. Марковские процессы и их приложения описаны в книгах [129, 6].

10.1. Определения и примеры

Случайный процесс можно определить как случайное отображение специального типа. Чаще всего его рассматривают как семейство случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве.

10.1.1. Определение случайного процесса

Случайные отображения были описаны в п. 9.1.5. Здесь определения будут модифицированы с учетом принятой в теории случайных процессов терминологии.

1. Рассмотрим семейство измеримых пространств $(X_t, \mathscr{B}_t)$, индексированных элементами множества T. Декартово произведение $X = \prod X_t$ состоит из семейств (x_t), $x_t \in X_t$, $t \in T$. Если $X_t = Y$, $t \in T$, то эти семейства отождествляют с функциями $y\colon T \to Y$ и пишут $X = Y^T$.

Произведение $\mathscr{B} = \prod \mathscr{B}_t$ σ-алгебр $\mathbb{B}_t$ определяется как σ-алгебра множеств в $X = \prod X_t$, порожденная классом всех *элементарных цилиндров*

$$C(s, B_s) = \{(x_t) : x_s \in B_s\}, \quad B_s \in \mathscr{B}_s, \quad s \in T.$$

Эта σ-алгебра называется *цилиндрической*. Ей принадлежат, в частности, *прямоугольные цилиндры* — конечные пересечения элементарных цилиндров. Будем называть измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$ *произведением измеримых пространств* $(X_t, \mathscr{B}_t)$ и писать $(X, \mathscr{B}) = \prod (X_t, \mathscr{B}_t)$.

Выделяются случаи, когда X_t — топологические пространства, а $\mathscr{B}_t$ — их борелевские алгебры. В тихоновском произведении X-топологических пространств X_t определена борелевская алгебра, порожденная классом всех открытых множеств в $X = \prod X_t$. В некоторых важных частных случаях она совпадает с цилиндрической [108]. В частности, борелевская и цилиндрическая алгебры совпадают в случае конечного множества индексов T.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ с множеством исходов Ω, алгеброй событий $\mathscr{F}$ и вероятностью P и произведение измеримых пространств $(X, \mathscr{B}) = \prod (X_t, \mathscr{B}_t)$, $t \in T$. Измеримое по $\mathscr{B} = \prod \mathscr{B}_t$ отображение $x \colon \Omega \to X$ называется *случайным процессом* с множеством значений $X = \prod X_t$. Значениями x являются семейства $x_t(\omega) \in X_t$, $t \in T$.

Как и всякое случайное отображение, случайный процесс имеет распределение $Q = Px^{-1}$ со значениями

$$Q(B) = P(x^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Такие распределения и порождающие их конечномерные распределения были описаны в п. 9.1.5.

2. Будем рассматривать, главным образом, процессы, составленные из вещественных случайных величин и индексированные вещественными числами. Сформулируем для них специальные определения.

Чаще всего случайный процесс определяется как семейство случайных величин.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и (абстрактное) множество *индексов* T. Семейство $x = (x_t)$ случайных величин $x_t \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in T$, называется *случайной функцией* или (*вещественным*) *случайным процессом* (с множеством индексов T). Подчеркнем, что все составляющие случайный процесс случайные величины x_t определены на одном и том же вероятностном пространстве.

По данному определению $x \colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$, причем каждая $x_t = x(t, \cdot) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ измерима $(x_t^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{F})$. Случайные величины x_t называются *значениями* случайного процесса x. Его можно рассматривать как отображение $T \to \mathbb{R}^{\Omega}$, $t \to x_t$.

Для каждого исхода $\omega \in \Omega$ определена функция $x^\omega = x(\cdot, \omega)$: $T \to \mathbb{R}$ со значениями $x^\omega(t) = x(t, \omega)$. Функции x^ω называются *реализациями* или *траекториями* случайного процесса x. Его можно рассматривать как отображение $\Omega \to \mathbb{R}^T$, $w \to x^\omega$.

Термин *случайный процесс* чаще всего используется для $T \subseteq \mathbb{R}$. Обычно тогда индексы t называются *моментами времени.* Различают процессы с дискретным и непрерывным временем. Если $T = \mathbb{N}$, то говорят о *случайной последовательности.* Когда $T \subseteq \mathbb{R}^m$, $m > 1$, говорят о *случайном поле.* Рассматриваются и процессы с абстрактными значениями [19, гл. 1; 10, гл. 1].

Как и для случайной величины, для случайного процесса главным является его распределение.

Рассмотрим измеримое пространство траекторий $(\mathbb{R}^T, \mathscr{C}(\mathbb{R}^T))$, где $\mathscr{C}(\mathbb{R}^T)$ — цилиндрическая алгебра для $\mathbb{R}^T$. Распределением процесса x, рассматриваемого как отображение $\Omega \to \mathbb{R}^T$, является мера $Q = Px^{-1}$ со значениями

$$Q(X) = P(x^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^T).$$

Распределение Q определяется семейством *согласованных конечномерных распределений* — его сужением на порождающий алгебру $\mathscr{C}(\mathbb{R}^T)$ класс цилиндров. Теория случайных процессов в первую очередь изучает их конечномерные распределения и свойства траекторий.

В общей теории рассматриваются также векторные и абстрактные случайные процессы [19, 10].

10.1.2. Примеры

Приведем несколько примеров случайных процессов.

1. Последовательность Бернулли. Пусть $T = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{B}^\mathbb{N}$, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{C}(\mathbb{B}^\mathbb{N})$. Элементами множества Ω являются двоичные последовательности $u = (u_n)$. Алгебра $\mathscr{F}$ порождена цилиндрами $C(n) = \{\omega : \omega(n) = 1\}$. Она содержит, в частности, все конечные пересечения $C(K)$ цилиндров $C(n)$, $n \in K \subset \mathbb{N}$.

Возьмем $a \in [0, 1]$ и положим

$$P(C(K)) = \prod a^{\omega(n)}(1-a)^{1-\omega(n)}, \quad n \in K.$$

Это равенство задает согласованное семейство вероятностей. Оно определяет вероятность P на алгебре $\mathscr{F}$ и вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Последовательность случайных величин $x_n : \Omega \to \mathbb{R}$ со значениями $x_n(u) = u(n)$ называется *последовательностью Бернулли* с параметром a. Ее конечномерные распределения определяются вероятностями $P(C(K))$ на двоичных цилиндрах $C(K)$. Они подробно рассматривались в главе 7. Там отмечалось, что случайные величины x_n независимы.

Последовательность Бернулли является примером случайного процесса с дискретным временем и независимыми значениями. Его траекториями служат двоичные последовательности. Их можно представлять точками отрезка $[0, 1]$. Рассматриваемый процесс определен на множестве своих траекторий.

Если $a = 1/2$, то вероятность P связана с мерой Лебега для отрезка $[0, 1]$. При $a \neq 1/2$ она имеет более сложный характер.

2. Двоичная последовательность Маркова. Рассмотрим множество $T = \{0\} \cup \mathbb{N}$ и то же измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{B}^T, \mathscr{C}(\mathbb{B}^T))$, что и для последовательности Бернулли. Заметим, что для определения вероятности P на $\mathscr{F}$ достаточно задать ее значения на цилиндрах с основаниями $K(n) = \{0, 1, \ldots, n\}$. Значения на остальных получаются суммированием по дополняющим номерам.

Пусть $a \in [0, 1]$ и $q(x, y)$ — стохастическая 2×2-матрица:

$$q(x, y) \geq 0, \quad q(x, 0) + q(x, 1) = 1 \quad (x, y \in \mathbb{B}).$$

Положим

$$p(\omega) = a^{\omega(0)}(1 - a)^{1-\omega(0)} \prod_{m=1}^{n} q(\omega(m - 1), \omega(m)),$$

$$P(CK(n)) = \sum p(\omega), \quad \omega \in CK(n).$$

По индукции нетрудно доказать, что эти равенства задают согласованное семейство вероятностных распределений. Это семейство определяет вероятность P на $\mathscr{F}$ и вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Последовательность $x_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ со значениями $x_n(u) = u(n)$ называется двоичной последовательностью Маркова или *двоичной марковской цепью.* Случайные величины x_n в последовательности Маркова независимы только тогда, когда матрица $(q(x, y))$

имеет одинаковые строки: $q(0, y) = q(1, y)$, $y \in \mathbb{B}$. Из определений следует, что

$$q(x, y) = P(x_{n+1} = y \mid x_n = x).$$

Это равенство выражает цепной характер марковской зависимости.

В своей пионерской работе [59] А. А. Марков рассматривал двоичную цепь. Идея цепной зависимости оказалась чрезвычайно плодотворной. Ее обобщения в различных направлениях привели к созданию современной теории марковских процессов.

3. Аддитивные процессы. Рассмотрим семейство случайных величин $x_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Если для каждого набора $t(0) \leq t(1) \leq \dots \leq t(n)$, $t(i) \in T$, случайные величины $x_{t(1)} - x_{t(0)}, \dots, x_{t(n)} - x_{t(n-1)}$ независимы, то случайный процесс $x = (x_t)$ называется *аддитивным* или процессом с *независимыми приращениями.* Такие процессы составляют важный класс случайных процессов. Если множество индексов T дискретно, то говорят о процессе с дискретным временем. Если T — интервал, то говорят о непрерывном времени.

Пусть $T = \mathbb{N}$ и (a_n) — последовательность независимых случайных величин на пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Тогда последовательность сумм $s_n = a_1 + \dots + a_n$ есть аддитивный процесс: $s_n - s_{n-1} = a_n$. В частности, если (a_n) — последовательность Бернулли, то s_n описывает число единиц в $(a_1, \dots, a_n)$.

4. Пуассоновский процесс. Пусть $T = [0, \infty[$, $0 = t(0) < t(1) < \dots < t(n)$, $\Delta t(i) = t(i) - t(i-1)$, $0 = m(0) \leq m(1) \leq \dots \leq m(n)$ целые, $\Delta m(i) = m(i) - m(i-1)$, $\alpha > 0$. Положим

$$P(x_{t(0)} = m(0), x_{t(1)} = m(1), \dots, x_{t(n)} = m(n)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\alpha \Delta t(i))^{\Delta m(i)}}{\Delta m(i)!} e^{-\alpha \Delta t(i)},$$

доопределив вероятность P нулевыми значениями. Она задает семейство согласованных конечномерных распределений и определяет аддитивный процесс, который называется *стандартным пуассоновским.* Число $\alpha > 0$ служит его параметром.

Стандартный пуассоновский процесс можно определить также следующим образом. Рассмотрим последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $u_n \geq 0$, для которых

$$P(u_n > t) = e^{-\alpha t},$$

и ступеньку Хевисайда h. Случайные величины

$$x_t = \sum_{n=1}^{\infty} h\left(t - \sum_{m=1}^{n} u_m\right)$$

составляют стандартный процесс Пуассона с параметром $\alpha > 0$. Его траектории — возрастающие ступенчатые функции. Он описывает число редких событий, происходящих за время t. Например, число регистрируемых счетчиком космических частиц.

5. Винеровский процесс. Пусть T, t_i, $\Delta t(i)$ те же и $x(0) = 0$, $x(i) \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$. Положим

$$f_{t(1)\ldots t(n)}(x(1), \ldots, x(n)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t(i)}} \exp\left(-\frac{\Delta x(i)^2}{2\Delta t(i)}\right).$$

Семейство плотностей $f_{t(1)\ldots t(n)}$ задает семейство согласованных конечномерных распределений и определяет аддитивный процесс, который называется *стандартным винеровским*. Он описывает, в частности, броуновское движение частицы. Почти все траектории винеровского процесса непрерывны и нигде не дифференцируемы.

Стандартные пуассоновский и винеровский процессы являются представителями одних из самых важных классов случайных процессов: пуассоновских и гауссовских.

6. Стационарные процессы. Так называются случайные процессы, конечномерные распределения которых не зависят от допустимых сдвигов по времени. Рассмотрим семейство случайных величин x_t, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, заданных на одном вероятностном пространстве, и наборы $t(i) \in T$, $t(i) + \Delta \in T$, $1 \le i \le n$. Случайный процесс (x_t) называется *стационарным*, если конечные семейства $(x_{t(i)})$ и $(x_{t(i)+\Delta})$ имеют одинаковые совместные распределения.

Примером стационарного процесса служит последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Часто вместо множества индексов $T = \mathbb{N}$ рассматривается $T = \mathbb{Z}$. В этом случае сдвигом Δ может быть любое целое число.

Стационарные процессы моделируют случайные изменения в реальных процессах, протекающих в одних и тех же условиях. Стационарным процессам посвящена книга [51].

10.2. Марковские процессы

Среди семейств зависимых случайных переменных, индексированных вещественными числами как моментами времени, марковские процессы выделяются свойством: при известном настоящем прошлое и будущее процесса стохастически независимы. На языке механики это марковское свойство означает отсутствие у процесса *стохастической инерции*: распределение значений процесса в моменты, следующие за данным, определяется его значением в данный момент и не зависит от значений в предшествующие моменты. Говорят также об отсутствии *памяти* у марковского процесса.

10.2.1. Определение марковского процесса

Так как марковский процесс составляется из зависимых случайных переменных, то естественно, что он определяется с помощью условных вероятностей и средних.

1. Рассмотрим случайный процесс $x = (x_t)$, составленный из абстрактных случайных переменных $x_t \colon \Omega \to X_t$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и индексированных элементами упорядоченного множества T. Возьмем $t \in T$ и рассмотрим σ-алгебры, порожденные семейством переменных x_s, $s \leq t$, переменной x_t и семейством переменных x_u, $u \geq t$:

$$\mathscr{A}_t = \sigma(x_s : s \leq t) = \sigma\bigg(\bigcup_{s \leq t} x_s^{-1}(\mathscr{B}_s)\bigg), \quad \mathscr{C}_t = \sigma(x_t) = x_t^{-1}(\mathscr{B}_t),$$

$$\mathscr{B}_t = \sigma(x_u : u \geq t) = \sigma\bigg(\bigcup_{u \geq t} x_t^{-1}(\mathscr{B}_t)\bigg).$$

Эти алгебры содержатся в основной алгебре $\mathscr{F}$ и описывают соответственно прошлое, настоящее и будущее процесса в данный момент t. Включения $\mathscr{C}_t \subseteq \mathscr{A}_t$, $\mathscr{C}_t \subseteq \mathscr{B}_t$ сделаны для формального удобства. Условимся также для упрощения формул иногда опускать индекс t и писать $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$, $\mathbb{B}$ вместо $\mathscr{A}_t$, $\mathscr{C}_t$, $\mathscr{B}_t$.

Случайный процесс (x_t) называется *марковским*, если для каждого индекса t и каждых событий $A \in \mathscr{A} = \mathscr{A}_t$, $B \in \mathscr{B} = \mathscr{B}_t$ верно равенство

$$P(AB \mid \mathscr{C}) = P(A \mid \mathscr{C})P(B \mid \mathscr{C}). \tag{1}$$

Подчеркнем, что, как и все равенства для условных вероятностей и средних, равенство (1) верно с вероятностью единица. Это относится и ко всем следующим аналогичным равенствам.

Часто удобно вместо (1) использовать равенства

$$P(B \mid \mathscr{A}) = P(B \mid \mathscr{C}), \quad B \in \mathscr{B}, \tag{2}$$

$$P(A \mid \mathscr{B}) = P(A \mid \mathscr{C}), \quad A \in \mathscr{A}. \tag{3}$$

Равенства (1)–(3) эквивалентны. Это можно доказать, переходя к условным средним и используя их свойства. Равенство (1) выражает условную независимость событий из прошлого и будущего при известном настоящем. Равенство (2) показывает, что добавление сведений из прошлого не меняет условную вероятность события из будущего при известном настоящем. В равенстве (3) прошлое и будущее меняются местами. Вследствие условности терминов *прошлое* и *будущее* в некоторых задачах формула (3) удобнее других.

2. Данное определение марковского процесса очень общее. Разрабатываются различные частные случаи, имеющие важное теоретическое и прикладное значение. Прежде всего рассматриваются семейства случайных переменных, не только определенных на одном и том же вероятностном пространстве, но и принимающем значения в одном и том же множестве. Как и среди всех случайных процессов, среди марковских процессов по свойствам множеств значений и множеств индексов естественно выделяются четыре класса: множества значений и индексов дискретны; первое непрерывно, второе дискретно; первое дискретно, а второе непрерывно; оба множества непрерывны.

Так как марковские процессы широко применяются в теоретической физике, то часто используется принятая там терминология. Множество значений процесса называется его *фазовым пространством*, индексы называются *моментами*, говорят о процессах с *дискретным* и *непрерывным* временем. Марковские процессы с дискретным временем принято называть *марковскими цепями*. Пример марковской цепи рассматривался в п. 10.1.2.

10.2.2. Конечные цепи Маркова

Так в теории вероятностей принято называть марковские последовательности с конечным множеством значений.

1. Марковские процессы с конечным множеством значений и дискретным временем — наиболее простой класс марковских процессов. Из книг, посвященных конечным цепям Маркова, можно выделить [135, 40].

Каждое счетное (в частности, конечное) множество можно занумеровать. Поэтому, не уменьшая общности, в качестве множества значений конечной цепи Маркова можно выбрать $Y = \{1, \ldots, m\}$, а в качестве множества индексов $T = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\Omega = Y^T$ последовательностей $\omega = (\omega_t)$, $\omega_t \in Y$, $t \in T$, и его цилиндрическую σ-алгебру $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\Omega)$.

Вероятность P определяется двумя *стохастическими* матрицами: *начальной* строкой $a = (a(i))$, $1 \le i \le m$, и *переходной* матрицей $Q = (q(i,j))$, $1 \le i, j \le m$. Строка a и строки матрицы Q являются распределениями вероятностей: $a(i) \ge 0$, $\sum\limits_i a(i) = 1$ и $q(i,j) \ge 0$, $\sum\limits_j q(i,j) = 1$, $1 \le i \le m$. Вероятность P достаточно определить для цилиндров

$$C(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \times Y^{\mathbb{N}}, \quad y_t \in Y, \quad 0 \le t \le n.$$

На всех остальных цилиндрах она получается суммированием по соответствующим значениям y_t. Определим вероятность P для цилиндра $C(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ равенством

$$P(y_0, y_1, \ldots, y_n) = P\{\omega : \omega_t = y_t, 0 \le t \le n\} = a(y_0) \prod_{t=1}^{n} q(y_{t-1}, y_t).$$

2. Так как матрицы a и P стохастические, то

$$P(y_0, y_1, \ldots, y_n) \ge 0, \quad \sum P(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 1$$

для всех $y_t \in Y$, $0 \le t \le n$, $n \ge 0$. Равенство для суммы проверяется последовательно. При $n = 0$ оно верно, так как

$\sum P(y) = \sum a(y) = 1$. Для каждого $n \geq 1$ по индукции доказывается, что

$$P(y_n \mid y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = P(y_n \mid y_{n-1}) = q(y_{n-1}, y_n).$$

Так как $\sum\limits_y q(x, y) = 1$ при любом $x \in Y$, то отсюда следует, что

$$\sum_y P(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y) = P(y_0, \ldots, y_{n-1})$$

и последовательное суммирование по $y_{n-1}, \ldots, y_0$ дает нужное значение единица для суммы по $y_0, y_1, \ldots, y_n$ для каждого $n \geq 1$. Значит, для каждого n функция P определяет элементарную вероятность на множестве Y^n и, следовательно, вероятность на алгебре $\mathscr{P}(Y^n)$ всех частей конечного множества Y^n и на соответствующей алгебре Ω_n цилиндров. Так как $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ и $\Omega = \cup \Omega_n$, то P аддитивно продолжается на Ω.

Так как алгебра Ω_n конечна, то аддитивность меры P на ней является счетной аддитивностью. Для данных определений вероятностей цилиндров легко проверяются условия согласованности. По теореме Колмогорова P счетно аддитивна и продолжается на σ-алгебру $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\Omega)$. Таким образом, определено вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Его можно назвать *марковским.*

3. Последовательность $x = (x_t)$ случайных переменных $x_t\colon \Omega \to Y$ со значениями $x_t(\omega) = \omega_t$, $t \in T = \{0\} \cup \mathbb{N}$, называется *марковской.* Она определяется множеством Y, стохастическими матрицами a и Q, марковским свойством

$$P(x_n = j \mid x_{n-1} = i, x_{n-2}, \ldots, x_0) = P(x_n = j \mid x_{n-1} = i) = q(i, j)$$

для всех $n \geq 1$. Общее марковское свойство, выражаемое равенством (1) из п. 10.2.1., выводится отсюда по индукции с помощью свойств условных средних.

Из определений следует, что случайная переменная x_n имеет распределение $p^{(n)} = aQ^n$, $n \geq 0$. В частности, $p^{(0)} = a$. По данному определению траекториями процесса $x = (x_t)$ являются последовательности номеров из множества $Y = \{1, \ldots, m\}$. Они же служат исходами $\omega = (\omega_t)$ вероятностного пространства: $\Omega = Y^T$. Процесс x является тождественным отображением $\Omega \to Y^T$.

Подборки конкретных примеров марковских последовательностей с различным содержанием есть в [40] и [106, т. 1, гл. 15, § 2]. Там конечные цепи Маркова описываются без привлечения теории случайных процессов.

Замечание. В теории вероятностей рассматриваются также *неоднородные* марковские цепи, определяемые последовательностями переходных матриц.

4. Свойства конечной цепи Маркова определяются свойствами начальной строки a и, главным образом, свойствами переходной матрицы Q.

Равенство $a(y) = 1$ означает, что все траектории на плоскости $T \times Y$ почти наверное начинаются в точке $(0, y)$. Равенства $a(y) = 1/m$, $y \in Y$, означают случайный (равновероятный) выбор начальной точки.

Классификация марковских последовательностей с конечным множеством значений определяется классификацией их переходных матриц Q. Свойства стохастических матриц подробно описаны в [22]. Стохастическая матрица Q имеет собственный вектор $e = (1, 1, \ldots, 1)$ при характеристическом числе $\lambda = 1$, которое является максимальным по абсолютной величине характеристическим числом для Q.

Стохастические матрицы делятся на *разложимые* и *неразложимые*. В разложимой матрице перестановкой строк и столбцов можно выделить квадратную нулевую матрицу. Если матрица Q неразложима и $q^{(k)}(i, j)$ — элементы матрицы Q^k, то для каждых номеров $1 \leq i, j \leq m$ существует $1 \leq k = k(i, j) \leq m$ такое, что $q^{(k)}(i, j) > 0$. Это означает, что траектория со строго положительной вероятностью из точки (t, i) попадает в точку $(t + k, j)$ при любом $t \geq 0$.

Назовем цепь Маркова и ее переходную матрицу Q *регулярными*, если Q неразложима, имеет простое характеристическое число $\lambda = 1$ и не имеет других характеристических чисел, равных единице по абсолютной величине. Для регулярной матрицы Q существует степень Q^k, все элементы которой $q^{(k)}(i, j) > 0$. Это означает, что траектории регулярной цепи со строго положительной вероятностью из каждой точки (t, i) попадают в точки $(t+k, j)$ при любом $t \geq 0$. Существование степени со строго положительными элементами можно принять в качестве определения регулярности матрицы Q [40, гл. 4].

Классы разложимых цепей определяются блочными разложениями их переходных матриц. Эти разложения подробно описаны в [22, гл. 13]. Детальное исследование свойств различных классов конечных цепей Маркова проведено в [106, т. 1, гл. 15].

5. Во многих задачах решающее значение имеет поведение процесса в достаточно далекие моменты времени. Для регулярной цепи это поведение описывается *предельными* переходными вероятностями:

$$q^{\infty}(i,j) = \lim_{k\to\infty} q^{(k)}(i,j)$$

или в матричной записи

$$Q^{\infty} = \lim_{k\to\infty} Q^{k}.$$

Используя свойства регулярных матриц, можно доказать [22, гл. 13, § 7], что

$$Q^{\infty} = (I-Q)^{-1}\Delta(1)/\Delta'(1),$$

где $\Delta(\lambda)$ — характеристический полином матрицы Q. При этом все строки предельной матрицы Q^{∞} одинаковы и составляют *предельное распределение*

$$p = (p(j)), \quad p(j) = \lim_{k\to\infty} q^{(k)}(i,j), \quad 1 \le j \le m,$$

регулярной цепи: $p(j) > 0$, $\sum p(j) = 1$. Кроме того, $pQ = p$. Строка p является собственным вектором матрицы Q. По индукции доказывается, что $pQ^n = p$ для всех номеров n.

Возьмем предельное распределение в качестве начального: $a = p$. Тогда для каждого номера n верны равенства $p^{(n)} = aQ^n = pQ^n = p = a$. Все случайные переменные x_n последовательности $x = (x_n)$ имеют одно и то же распределение p. Последовательность *стационарна*.

Так как все строки матрицы Q^{∞} равны p, а сумма элементов начальной строки a равна единице, то $aQ^{\infty} = p$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (aQ^n) = aQ^{\infty} = p$$

при любом начальном распределении a. Это позволяет с определенной погрешностью считать, что в последовательности $x = (x_n)$ случайные переменные x_n с достаточно большими номерами имеют распределение p. Регулярная марковская последовательность при любом начальном распределении приближается к стационарной.

10.2.3. Счетные цепи Маркова

Счетные цепи Маркова являются естественным обобщением конечных. Их объединяют термином *дискретные* цепи Маркова.

1. Будем для простоты вместо произвольного бесконечного счетного множества Y сразу рассматривать множество номеров $\mathbb{N}$. Пусть $T = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{N}^T$ — множество всех последовательностей $\omega = (\omega_t)$, $\omega_t \in \mathbb{N}$, $t \in T$, натуральных чисел и $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\Omega)$ — цилиндрическая алгебра для Ω. Вероятность P на σ-алгебре $\mathscr{F}$ определим с помощью *начальной* строки $a = (a(i))$, $i \geq 1$, и *переходной* матрицы $Q = (q(i,j))$, $i \geq 1, j \geq 1$: $a(i) \geq 0$, $\sum a(i) = 1$ и $q(i,j) \geq 0$, $\sum\limits_j q(i,j) = 1$.

Свойства бесконечных матриц подробно описаны в гл. 6. Там было, в частности, показано, что строку a можно умножать на матрицу Q и матрицу Q возводить в степень. Стохастическая матрица Q представляет ограниченный оператор в пространстве l^1 суммируемых последовательностей, имеющий норму единица.

Для $Y = \mathbb{N}$ марковское вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и счетная марковская последовательность $x = (x_t)$, $x_t \in Y$, $t \in T$, определяется так же, как и для конечного $Y = \{1, \ldots, m\}$. Сохраняются равенства для марковского свойства и распределения случайной переменной x_n:

$$P(y_0, y_1, \ldots, y_n) = a(y_0) \prod_{t=1}^{n} q(y_{t-1}, y_t),$$

$$P(x_n = j \mid x_{n-1} = i, x_{n-2}, \ldots, x_0) = P(x_n = j \mid x_{n-1} = i) = q(i,j),$$

$$p^{(n)} = aQ^n, \quad n \geq 1.$$

Примеры счетных марковских цепей с различным содержанием есть в [41, гл. 4] и в [106, т. 1, гл. 15, § 2]. Вероятностное пространство последовательностей и счетные случайные процессы на нем подробно описаны в [41, гл. 2].

2. Счетные цепи Маркова делятся на классы, аналогичные классам конечных цепей. Отличия подробно описаны в [122, гл. 8].

Регулярная марковская цепь определяется свойством переходной матрицы Q иметь степень Q^k, все элементы которой

$q^{(k)}(i,j) > 0$. Для регулярной цепи существует предельная переходная матрица $Q^\infty = \lim\limits_{k\to\infty} Q^k$, все строки которой равны предельному распределению $p = (p(j))$: $p(j) = \lim\limits_{k\to\infty} q^{(k)}(i,j)$, $j \geq 1$, при любом $i \geq 1$. Для предельного распределения p верно равенство $pQ = p$. Если начальное распределение равно предельному, то цепь становится стационарной: $p^{(n)} = a = p$.

3. Назовем значения i, j цепи *связанными*, если $q^{(k)}(i,j) > 0$, $q^{(l)}(j,i) > 0$ для некоторых k, l. Это означает, что при любом $t \geq 0$ возможны траектории цепи, проходящие через точки (t,i), $(t+k,j)$, и траектории, проходящие через точки (t,j), $(t+l,i)$. Отношение связанности симметрично. Так как

$$Q^0 = I, \quad Q^{k+l} = Q^k Q^l,$$

то оно рефлексивно и транзитивно. Значит (п. 1.3.2), отношение связанности разбивает множество значений цепи на множества значений, связанных друг с другом и не связанных со значениями других множеств. Эти множества называются *замкнутыми*.

Марковскую цепь можно представить ориентированным графом, вершинами которого служат значения цепи. Возможные переходы за один шаг и их вероятности описываются стрелками с величинами этих вероятностей (> 0). Замкнутые множества представляются *связными компонентами* такого графа. Для каждых двух вершин такой компоненты есть пути, ведущие из одной в другую. И для каждой ее вершины нет путей, ведущих к вершинам, не принадлежащим компоненте.

Если замкнутое множество состоит из одного единственного значения, то это значение называется *поглощающим* или *ловушкой*. Из ловушки нет стрелок к другим вершинам.

Пример.

$$a = (1/2, 1/2, 0),$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & 2 & & 3 \\ & \downarrow & \searrow & & & \\ 1 & 1 & & 2 & & 3 \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ 2 & 1 & & 2 & & 3 \end{array}$$

Ненулевые величины вероятностей не выписаны: все они равны 1/2. Ловушкой является значение 3.

Марковским цепям с поглощающими значениями посвящена отдельная глава в [40] и параграф в [41].

4. При большом конечном или бесконечном счетном множестве значений цепи их целесообразно группировать. Если переходные вероятности удовлетворяют определенным условиям, то для полученной *агрегированной* цепи сохранится марковское свойство. Эти условия заключаются в том, что вероятности перехода за один шаг из каждого значения данной группы в выбранную группу агрегирующего разбиения должны быть одинаковы.

Рассмотрим разбиение $(Y(m))$ множества Y значений цепи и два произвольных его множества $Y(k), Y(l)$. Пусть вероятности

$$q(i, Y(l)) = \sum_{j \in Y(l)} q(i, j)$$

не зависят от $i \in Y(k)$. Тогда $(Y(m))$ служит множеством значений для агрегированной марковской цепи с переходными вероятностями $q(Y(k), Y(l)) = q(i, Y(l))$, $i \in Y(k)$. Агрегированные марковские цепи подробно описаны в [40, гл. 6].

5. Классические примеры дискретных цепей Маркова связаны с моделями *случайных блужданий* частицы по линейной, плоской или пространственной решеткам. В простейшем случае переходы за один шаг возможны только в соседние состояния. Многие интересные и важные задачи описываются моделями с различными экранами: поглощающими, отражающими и эластичными.

Случайным блужданиям посвящена обширная литература [101, 97]. Примеры некоторых простых моделей подробно описаны в [106, т. 2, гл. 12] и [122, гл. 1]. Им посвящены отдельные параграфы в [41, гл. 5]. Там же рассматриваются суммы независимых целочисленных случайных величин. В [6, гл. 1] описывается связь модели случайных блужданий с важным классом *ветвящихся процессов*.

Дискретные марковские цепи и их применения в различных областях описаны в [114, гл. 9]. Там, в частности, рассматривается связь марковских цепей с теорией потенциала.

10.2.4. Однородные марковские процессы

Подробному описанию марковских процессов как случайных процессов, обладающих марковским свойством, посвящены отдельные главы в [106, 10, 19]. Однородные марковские процессы выделяются своей относительной простотой и важными применениями.

1. Будем считать, что $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ или $T = [0, \infty[$, и говорить соответственно о дискретном или непрерывном времени. В качестве множества значений выберем измеримое пространство $(Y, \mathscr{B})$, предполагая измеримыми все точечные множества: $\{y\} \in \mathscr{B}$, $y \in Y$.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и семейство случайных переменных $x_t \colon \Omega \to Y$, $t \in T$. Будем предполагать, что для каждого исхода $\omega \in \Omega$ и момента $v \in T$ существует исход $\omega(v) \in \Omega$ такой, что $x_t(\omega(v)) = x_{t+v}(\omega)$ при всех $t \in T$. Рассмотрим также σ-алгебру $\mathscr{F}_0 = \sigma(x_t, t \in T)$, порожденную прообразами $x_t^{-1}(\mathscr{B})$, $t \in T$, и σ-алгебру $\mathscr{A}_t = \sigma\{x_s, s \le t\}$, порожденную прообразами $x_s^{-1}(\mathscr{B})$, $s \le t$, для данного $t \in T$. Алгебра $\mathscr{F}_0$ описывает *будущее* семейства (x_t), а алгебра $\mathscr{A}_t$ — его *прошлое* до момента t включительно. Для каждой точки $y \in Y$ выберем семейство *начальных вероятностей* P_y на $\mathscr{F}_0$.

2. Основные свойства однородного марковского процесса определяет его *переходная функция* $Q(t, y, B)$, $t \in T$, $y \in Y$, $B \in \mathscr{B}$, обладающая свойствами:

(1) $Q(t, y, \cdot)$ — вероятность на $\mathscr{B}$;
(2) $Q(t, \cdot, B)$ — измеримая функция на $\mathscr{B}$;
(3) $Q(0, y, \cdot)$ — точечная мера на $\mathscr{B}$;
(4) $Q(t + v, y, B) = \int Q(v, \cdot, B)\, dQ(t, y, \cdot)$.

Здесь $Q(v, y, B)$ выражает вероятность перехода из точки (t, y) в множество $(t + v, B)$ при любом $t \in T$. В частности, $Q(0, y, B) = \delta(y, B) = 1$ при $y \in B$ и $Q(0, y, B) = \delta(y, B) = 0$ при $y \notin B$. Измеримость и ограниченность функции $Q(t, \cdot, B)$ позволяет интегрировать ее по мере $Q(v, y, \cdot)$. Равенство (4) называется *уравнением Чепмена — Колмогорова*. Оно обеспечивает согласованность конечномерных распределений и марковское свойство определяемого марковского процесса. Формулы и доказательства для общего случая есть в [19, гл. 8]. Равенство (4) имеет простой вероятностный смысл: оно означает, что вероятность траектории из точки $(0, y)$ попасть в множество $(t + v, B)$ равна вероятности из $(0, y)$ попасть в какую-нибудь точку (t, z), а из нее в множество $(t + v, B)$.

3. Семейство начальных вероятностей P_y, $y \in Y$, и переходная функция Q составляют *однородное марковское семейство*, если для каждых $t, v \in T$, $y \in Y$, $B \in \mathscr{B}$:

(5) процесс (x_t) марковский на $(\Omega, \mathscr{F}_0, P_y)$;

(6) $P(x_{t+v} \in B \mid x_t = y) = Q(v, y, B)$;

(7) $P_y(x_0 = y) = 1$.

Равенство (7) означает, что рассматриваемый процесс *начинается* в точке $(0, y)$ или что траектория процесса *выходит* из этой точки.

Теоремы о существовании однородных и неоднородных марковских семейств для пространства Y и его борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}$ доказаны в [19, гл. 8].

Для дискретного пространства Y значения переходной функции Q получаются суммированием значений *элементарной переходной функции*

$$q(t, y, z) = Q(t, y, \{z\}), \quad z \in Y.$$

Если мера $Q(t, y, \cdot)$ имеет *плотность* $q(t, y, \cdot) = Q(t, y, \cdot)/dz$ по мере dz (п. 3.3.6), то значения получаются интегрированием:

$$Q(t, y, B) = \int\limits_B q(t, y, z)\, dz.$$

Если мера dz *считающая*, то интеграл превращается в сумму. Выделяется случай, когда $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ и dz — мера Лебега.

Каждый процесс с независимыми приращениями является марковским. В частности, марковскими являются пуассоновский и винеровский процессы. Элементарная переходная функция стандартного пуассоновского процесса определяется равенством

$$q(t, y, y + n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n/n!,$$

где $\alpha > 0$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Для винеровского процесса верно равенство

$$q(t, y, z) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(z-y)^2/(2t)},$$

где $t > 0$ и $y, z \in \mathbb{R}$.

4. С однородным марковским процессом естественно связаны полугруппы операторов (п. 4.10) на соответствующих пространстве мер и пространстве функций.

Для измеримого пространства $(Y, \mathscr{B})$ определены банахово пространство F ограниченных измеримых числовых функций на Y с sup-нормой и пространство M вещественных мер с ограниченными вариациями. Эти пространства подробно описаны в [45, гл. 5, 6] и [108, гл. 3, 4]. Равенство

$$\langle \mu, f \rangle = \int f \, d\mu$$

устанавливает связь между F и M: каждой мере $\mu \in M$ соответствует линейный функционал $\langle \mu, \cdot \rangle$ на F, а каждой функции $f \in F$ — функционал $\langle \cdot, f \rangle$. Нормы элементов и соответствующих функционалов совпадают. Пространство M вкладывается в сопряженное к F, и наоборот.

Однородной переходной функции Q ставятся в соответствие два семейства операторов, индексированные элементами $t \in T$:

$$Q^t f(y) = \int f \, dQ(t, y, \cdot), \quad \mu Q^t(B) = \int Q(t, \cdot, B) \, d\mu.$$

Эти семейства операторов на своих пространствах обладают следующими свойствами [19, гл. 8]:

(а) операторы Q^t линейные, сжимающие, монотонные и нормированные;

(б) $Q^0 = \mathrm{id}$;

(в) для всех $t, v \in T$ верно равенство

$$Q^{t+v} = Q^t Q^v.$$

Последнее равенство оправдывает экспоненциальную форму записи индексов. Для дискретного времени $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ семейство Q^t получается возведением в степень оператора $Q = Q^1$.

Нормированность операторов Q^t означает, что $Q^t 1 = 1$ и $\mu Q^t(Y) = \mu(Y)$. Сжатие означает, что $\|Q^t\| \leq 1$. Монотонность, благодаря линейности, эквивалентна положительности: $Q^t f \geq 0$ при $f \geq 0$. С учетом (а) равенство (в) означает, что операторы Q^t образуют *сжимающую полугруппу* операторов (п. 4.10.2). По равенству (б) ей принадлежит единица — тождественный оператор.

Зависимость от t отмечают термином *однопараметрическая.* Такие полугруппы подробно описаны в [43].

5. Для дискретного времени $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ полугруппа Q^t, $t \in T$, определяется оператором Q^1 или переходной функцией $Q(1, \cdot, \cdot)$.

Для непрерывного времени $T = [0, \infty[$ ее определяет *инфинитезимальный оператор* A со значениями

$$Af = \lim_{t \to 0+} t^{-1}(Q^t f - f)$$

(сходимость по норме). Примеры есть в [19, гл. 10].

Главными результатами для порождающих полугруппы операторов является теорема Хилле — Иосиды (п. 4.10.2) и теорема Стоуна (п. 4.10.4). Теорема Хилле — Иосиды формулирует условия, при которых оператор порождает сильно непрерывную полугруппу операторов. Теорема Стоуна формулирует условия, при которых полугруппа выражается операторной экспонентой. Связь сжимающих полугрупп операторов с марковскими процессами подробно описана в [55, гл. 7].

Фундаментальным трудом по применению полугрупп в функциональном анализе является книга [116]. Там есть доказательства всех использовавшихся утверждений о полугруппах операторов. В частности, приведены десять экспоненциальных формул для операторов [116, гл. 11]. Рассматривается экспонента с неограниченным операторным показателем A, определяемая равенством

$$e^{At} = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n}.$$

Она также определяет некоторую полугруппу по правилу сложения показателей [116, гл. 12].

10.2.5. Уравнения эволюции и диффузии

Однородные марковские процессы тесно связаны с эволюционными и диффузионными процессами. А инфинитезимальные операторы связаны с операторными дифференциальными уравнениями, описывающими эти процессы [19, гл. 10, 11; 6 , гл. 2, 3]. Эволюционные уравнения и уравнения диффузии описываются в заключительной части книги, посвященной некорректным задачам.

1. Будем использовать те же обозначения, что и при определении инфинитезимального оператора в 10.2.4. Выберем $f \in F$ и рассмотрим функцию $u\colon T \to F$ со значениями

$$u(t) = Q^t f, \quad t \in T.$$

Предположим, что она непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и $u(t) \to f$, когда $t \to 0$, $t > 0$. При этих условиях функция u является единственным решением операторного эволюционного уравнения

$$\dot{u} = Au.$$

Доказательство в более общем случае есть в [55, гл. 7].

Операторные уравнения рассматривались в п. 4.10.5; им посвящена глава в части «Некорректные задачи».

2. Переходная плотность

$$q(t, y, z) = (2\pi t)^{1/2} e^{-(z-y)^2/(2t)}$$

винеровского процесса является *фундаментальным решением* классического *уравнения диффузии*

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Это значит, что функция q является решением уравнения (1) при $t > 0$ и что меры с плотностью $q(t, y, \cdot)$ слабо сходятся к точечной мере $\delta(y, \cdot)$. Уравнение (1) называется *прямым* уравнением Колмогорова. Слабая сходимость эквивалентна сходимости соответствующих функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.

Рассмотрим ограниченную непрерывную функцию f на $\mathbb{R}$ и функцию

$$v(t, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) q(t, y, z)\, dz.$$

Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} q(t, y, y - z)\, dz \to 0$$

и существуют пределы

$$\frac{1}{t}\int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}(y-z)q(t,y,z)\,dz=a(y),\quad \frac{1}{t}\int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}(y-z)^2q(t,y,z)\,dz=b(y).$$

Предположим также, что функция v непрерывно дважды дифференцируема по y при всех $t>0$. При этих условиях v является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a(y)\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{2}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$v(t,y)\to f(y),\quad t\to 0,\quad t>0,\quad y\in\mathbb{R}.$$

Уравнение (2) называется *обратным* уравнением Колмогорова. Коэффициенты a, b уравнения имеют ясный физический и вероятностный смысл. Подробные объяснения и доказательства есть в [106, т. 2, гл. 10; 55, гл. 7; 6, гл. 3]. Там кратко описана история вопроса и указана литература.

Стохастические дифференциальные уравнения и их связь с диффузионными процессами подробно описаны в [10, гл. 8; 77, 18].

10.3. Мартингалы

Вместе с марковскими процессами мартингалы являются важным классом случайных процессов, составленных из зависимых переменных. Они широко используются в теории и приложениях.

В марковских процессах настоящее процесса определяет распределение его будущего, а в мартингалах оно определяет будущее только в среднем. Но этого достаточно для решения многих теоретических и прикладных задач.

Современной теории мартингалов посвящена книга [57].

10.3.1. Мартингальные последовательности

Рассмотрим мартингалы с дискретным временем $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Равенства для условных средних выполняются почти наверное.

1. Существо дела хорошо поясняет следующий простой пример.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, составленное из отрезка $\Omega = [0, 1]$, борелевской алгебры $\mathscr{F} = \mathscr{B}[0, 1]$ и лебеговой меры $P = d\omega$. Введем для него *шкалу* $\mathscr{F}_n$, $n \geq 0$, из σ-алгебр $\mathscr{F}_n = \sigma\{A_{kn} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] : 0 \leqslant k < 2^n\}$, порожденных отрезками A_{kn}, полученными последовательным делением пополам отрезка $[0, 1]$. Заметим, что $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}$, $n \geq 0$. Пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и шкала $(\mathscr{F}_n)$ составляют *градуированное* вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_n))$.

Обозначим χ_{kn} индикатор отрезка A_{kn} и рассмотрим случайные величины

$$x_{kn} = (k + 1/2)2^{-n} \cdot \chi_{kn}, \quad x_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} x_{kn}$$

и тождественную $x(\omega) = \omega$, $\omega \in [0, 1]$. Ясно, что $x_n(\omega) \to x(\omega)$, $n \to \infty$, равномерно. Это хорошо видно на графиках. Как легко проверить.

$$Ex_{kn} = (k + 1/2)2^{-2n}, \quad Ex_n = Ex = 1/2, \quad n \geq 0.$$

Из определений следует, что функция x_n измерима в алгебре $\mathscr{F}_n$, но не измерима в алгебрах $\mathscr{F}_m$ при $m < n$. А функция x измерима в $\mathscr{F}$, но не измерима в $\mathscr{F}_n$.

Легко проверить, что $E(x \mid \mathscr{F}_n) = x_n$. В самом деле, x_n измерима в $\mathscr{F}_n$. Остается доказать равенство интегралов функций x и x_n на каждом множестве $A \in \mathscr{F}_n$. Так как $\mathscr{F}_n$ порождена конечным множеством отрезков A_{kn}, $0 \leq k < 2^n$, то это следует из равенств

$$\int_0^1 \chi_{kn}(\omega)x(\omega)\, d\omega = (k + 1/2)2^{-2n} = \int_0^1 \chi_{kn}(\omega)x_n(\omega)\, d\omega.$$

Кроме того, из определений следует, что для всех $n \geq 0$ верны равенства

$$\int_0^1 \chi_{kn}(\omega) x_{n+1}(\omega)\, d\omega = \int_0^1 \chi_{kn}(\omega) x_n(\omega)\, d\omega.$$

Поэтому $E(x_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = x_n$, $n \geq 0$. Так как $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$, то x_n измерима и в $\mathscr{F}_{n+1}$. Следовательно, верно цепное правило:

$$E(E(x \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_{n+1}) = E(E(x \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) = x_n.$$

Ясно, что условные средние $E(x \mid \mathscr{F}_n) = x_n$ с увеличением номера n приближают x все точнее сравнительно со средним $Ex = 1/2$. Все равенства для условных средних выполняются почти наверное.

По индукции для каждого $m \geq 1$ доказывается равенство

$$E(x_{n+m} \mid \mathscr{F}_n) = x_n.$$

Оно уточняет утверждение, что в последовательности случайных величин (x_n) настоящее в среднем определяет будущее. Имея в виду это равенство и измеримость x_n в алгебре $\mathscr{F}_n$, говорят, что последовательность (x_n) есть *мартингал*,, согласованный со шкалой $(\mathscr{F}_n)$.

2. Рассмотрим *градуированное* вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_n))$, составленное из вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и возрастающей по вложению последовательности σ-алгебр $\mathscr{F}_n$: $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1} \subseteq \mathscr{F}$, $n \geq 0$. Обозначим $\mathscr{M}_n$ алгебру функций $\Omega \to \mathbb{R}$, измеримых в $\mathscr{F}_n$. Ясно, что $\mathscr{M}_n \subseteq \mathscr{M}_{n+1} \subseteq \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — алгебра функций, измеримых в $\mathscr{F}$. Последовательность $(\mathscr{F}_n)$ естественно считать *шкалой*, а приближение функции из $\mathscr{M}$ функциями из $\mathscr{M}_n$ — ее измерениями в этой шкале. Чем больше номер n деления шкалы, тем точнее измерение. На примере в п. 1 это хорошо видно.

В литературе по случайным процессам вместо термина *шкала* используются термины *поток*, *фильтрация*, *стохастический базис* [122, гл. 7; 10, гл. 4; 57, гл. 1] Каждый из этих терминов связан с определенными приложениями теории мартингалов. В чисто математическом плане градуированное вероятностное пространство естественно связано с понятием *индуктивного предела* направленности мер [85, 65].

Будем говорить, что последовательность (x_n) случайных величин $x_n \in \mathscr{M}_n$ *градуирована* по своей естественной шкале σ-алгебр $\mathscr{F}_n = \sigma\{x_m : m \leq n\}$, определяющих *прошлое* последовательности в момент $n \geq 0$.

Выделим среди рассматриваемых измеримых функций интегрируемые по мере P и обозначим $\mathscr{L}_n$, $\mathscr{L}$ множества интегрируемых функций из $\mathscr{M}_n$, $\mathscr{M}$.

3. Градуированная по шкале $(\mathscr{F}_n)$ последовательность случайных величин $x_n \in \mathscr{L}_n$ называется *мартингалом*, если для каждого $n \geq 0$ и всех $p \geq n$ верно равенство

$$E(x_p \mid \mathscr{F}_n) = x_n. \tag{1}$$

Последовательность (x_n) в п. 1 является мартингалом. Там интегрируемость рассматриваемых функций следует из их ограниченности и измеримости.

Данное определение можно упростить.

Лемма. *Последовательность $x_n \in \mathscr{L}_n$ является мартингалом, если для всех $n \geq 0$ верно равенство*

$$E(x_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = x_n. \tag{2}$$

□ Пусть $p = n + m$, $m \geq 1$. При $m = 1$ равенство (1) следует из (2). Предположим, что (1) верно для данного m, и докажем, что тогда оно верно для $m + 1$. В самом деле, так как $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+m}$, то по цепному правилу для условных средних равенству (2) и предположению индукции имеем

$$E(x_{n+m+1} \mid \mathscr{F}_n) = E(E(x_{n+m+1} \mid \mathscr{F}_{n+m}) \mid \mathscr{F}_n) = E(x_{n+m} \mid \mathscr{F}_n)x_n.$$

По принципу индукции отсюда следует, что равенство (1) верно для всех $p = n + m > n$. Для $p = n$ оно следует из $x_n \in \mathscr{M}_n$. ■

Из равенства (2) следует, что в мартингале все случайные величины имеют одно и то же среднее:

$$E(x_{n+1}) = E(E(x_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = E(x_n).$$

Классическим примером мартингала служат конечные суммы ряда интегрируемых независимых случайных величин. Рассмотрим последовательность интегрируемых независимых случайных величин u_m, $m \geq 0$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и последовательность сумм $x_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Выберем естественную шкалу $\mathscr{F}_n = \sigma\{u_m : m \leq n\}$. Суммы x_n измеримы и интегрируемы вместе с u_m: $x_n \in \mathscr{L}_n$.

Так как $x_n \in \mathscr{M}_n$, то $E(x_n \mid \mathscr{F}_n) = x_n$. А так как u_{n+1} и u_m, $m \leq n$, независимы и $\mathscr{F}_n = \sigma\{u_m : m \leq n\}$, то $E(u_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = E(u_{n+1})$. Это следует из измеримости постоянной $E(u_{n+1})$ в любой σ-алгебре и линейности интеграла. Поэтому

$$\begin{aligned} E(x_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= E(x_n + u_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \\ &= E(x_n \mid \mathscr{F}_n) + E(u_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = x_n + E(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Последовательность сумм x_n является мартингалом тогда и только тогда, когда $E(u_{n+1}) = 0$ для всех $n \geq 0$. (При этом возможно $E(u_0) \neq 0$.)

4. Каждая интегрируемая по мере P случайная величина x на градуированном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_n))$ порождает мартингал $x_n = E(x \mid \mathscr{F}_n)$.

В самом деле, из определения условного среднего следует, что $x_n = E(x \mid \mathscr{F}_n) \in \mathscr{L}_n$. А по цепному правилу

$$\begin{aligned} E(x_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= E(E(x \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \\ &= E(E(x \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_{n+1}) = E(x_n \mid \mathscr{F}_{n+1}) = x_n, \end{aligned}$$

так как $x_n \in \mathscr{L}_n \subseteq \mathscr{L}_{n+1}$.

Мартингал $x_n = E(x \mid \mathscr{F}_n)$ называется мартингалом Леви. Такой мартингал рассматривался в п. 1. Мартингал Леви реализует идею приближения случайной величины последовательностью условных средних.

5. В теории мартингалов вместе с ними рассматриваются *полумартингалы*, определяемые заменой в равенстве для условных средних знака $=$ на $\geq$ или $\leq$. Мартингальные последовательности подробно описаны в [122, гл. 7].

Доказывается целый ряд неравенств для мартингалов и полумартингалов, обобщающих классические неравенства для последовательностей независимых случайных величин. В частности, приводится обобщение неравенства Колмогорова.

Доказываются различные предельные теоремы для мартингалов и полумартингалов и выводятся многочисленные следствия для последовательностей независимых случайных величин и их сумм. Рассматривается вопрос об условиях абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер. Доказывается альтернатива Какутани. Отдельный параграф посвящен центральной предельной теореме для сумм зависимых случайных величин.

10.3.2. Мартингальные процессы

Рассмотрим мартингалы с непрерывным временем $T = [0, \infty[$. Равенства для условных средних выполняются почти наверное.

1. Рассмотрим *градуированное* вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$, составленное из вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и возрастающей по вложению направленности σ-алгебр $\mathscr{F}_t$: $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_u \subseteq \mathscr{F}$, $t < u$; $t, u \in T$. Обозначим $\mathscr{M}_t$, $\mathscr{M}$ алгебры измеримых в $\mathscr{F}_t$, $\mathscr{F}$ функций $\Omega \to \mathbb{R}$. Назовем $(\mathscr{F}_t)$ *шкалой.* Об этом термине можно повторить все сказанное в п. 10.3.1 для дискретного времени. Для непрерывного времени иногда делаются дополнительные предположения [57, гл. 1].

Будем говорить, что случайный процесс (x_t) *градуирован* по шкале $(\mathscr{F}_t)$, если $x_t \in \mathscr{M}_t$ для каждого $t \in T$. Обозначим $\mathscr{L}_t$, $\mathscr{L}$ множества интегрируемых по мере P функций из $\mathscr{M}_t$, $\mathscr{M}$.

Градуированный по шкале $(\mathscr{F}_t)$ процесс называется *мартингалом,* если для каждого $t \in T$ и всех $u \in T$, $u \geq t$ верно равенство

$$E(x_u \mid \mathscr{F}_t) = x_t.$$

Каждая случайная величина $x \in \mathscr{L}$ на $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ по аналогии с дискретным временем порождает *мартингал Леви* $x_t = E(x \mid \mathscr{F}_t)$, $t \in T$.

2. Каждый случайный процесс (x_t) с независимыми приращениями $x_u - x_t$, $t < u$ и постоянными средними $Ex_t = 0$, $t \in T$, градуированный по своей естественной шкале $\mathscr{F}_t = \sigma\{x_s : s \leq t\}$, является мартингалом. В самом деле, по определению $x_n - x_t$ не зависит от x_s, $s \leq t$ (иногда считают $x_0 \equiv 0$), и, следовательно,

$$\begin{aligned} E(x_u \mid \mathscr{F}_t) &= E(x_t + x_u - x_t \mid \mathscr{F}_t) \\ &= E(x_t \mid \mathscr{F}_t) + E(x_u - x_t \mid \mathscr{F}_t) = x_t + E(x_u - x_t) = x_t. \end{aligned}$$

В частности, винеровский процесс является мартингалом при естественной градуировке.

Рассмотрим квадратично интегрируемый мартингал (x_t) с естественной градуировкой $(\mathscr{F}_t)$: $x_t \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и $\mathscr{F}_t = \sigma\{x_s : s \leq t\}$, $t \in T$. Докажем, что (x_t) имеет некоррелированные приращения $x_u - x_t$, $t < u$. Произведения $(x_t - x_s)(x_u - x_t)$, $s < t < u$, интегрируемы по мере P и

$$
\begin{aligned}
&E((x_t - x_s)(x_u - x_t)) = E(E((x_t - x_s)(x_u - x_t) \mid \mathscr{F}_t)) \\
&\quad = E((x_t - x_s)E((x_u - x_t) \mid \mathscr{F}_t)) = E((x_t - x_s)(x_t - x_t)) = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, квадратично интегрируемые мартингалы с естественной градуировкой занимают промежуточное положение между процессами с независимыми и с некоррелированными приращениями.

3. По аналогии с последовательностями для процессов вместе с мартингалами рассматриваются полумартингалы, определяемые заменой в равенстве для условных средних знака $=$ на $\geq$ или $\leq$. Мартингалы и полумартингалы подробно описаны в [19, гл. 7; 10, гл. 4; 57].

Доказываются многочисленные равенства и неравенства, связанные с мартингалами и полумартингалами. Часть из них верна и для дискретного, и для непрерывного времени.

Доказываются разнообразные теоремы о сходимости. Выделяются полумартингалы с положительными значениями. Предельные теоремы для них аналогичны классическим теоремам для монотонных ограниченных функций.

Замечание. В общей теории рассматриваются обобщенные [23] и квантовые [38, 117] случайные процессы, составленные соответственно из обобщенных и операторных случайных переменных. Среди обобщенных выделяются процессы с независимыми значениями.

Развивается также теория вероятностей на алгебраических структурах, тесно связанная с теорией операторов и имеющая широкие применения [25].

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Определения и примеры

Рассмотрим основные определения и различные примеры обратных и некорректных задач. Подобные задачи решались учеными давно, но только к середине XX века обратные и некорректные задачи стали изучаться систематически и постепенно завоевывать право называться перспективной областью современной науки. В части «Некорректные задачи» используются терминология и система обозначений, принятые в специальной литературе. Иногда они отличаются от общих, использующихся в предыдущих частях.

1.1. Об определении обратных и некорректных задач

В отличие от обратных задач, для которых нет единого строгого определения, термин «некорректная задача» означает, что задача либо не имеет решения (в интересующем нас классе), либо, напротив, имеет много решений (как минимум два), либо процедура нахождения решения неустойчива (т. е. при малейшей ошибке измерений полученное решение может как угодно сильно отличаться от точного). Наибольшую сложность при решении представляет собой именно третье свойство некорректных задач — неустойчивость. Поэтому под некорректными задачами часто подразумевают неустойчивые.

Для определения различных классов обратных задач следует сначала договориться о том, что такое прямая задача. В самом деле, «обратное» бывает не иначе как по отношению к чему-то «прямому». Рассмотрим в качестве примера задачи математической физики.

В математической физике под прямыми задачами обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются:

1) область, в которой процесс изучается;
2) уравнение, описывающее данный процесс;
3) начальные условия (если процесс нестационарный);
4) условия на границе исследуемой области.

Например, для уравнения акустики можно поставить начально-краевую прямую задачу следующим образом. В области

$$\begin{gathered} \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{с границей} \quad \Gamma = \partial\Omega, \\ \mathbb{R}^n \text{ — евклидово пространство,} \end{gathered} \tag{1}$$

требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения акустики

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla u + h(x,t), \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g(x,t). \tag{4}$$

Здесь $u(x,t)$ — акустическое давление; $c(x)$ — скорость распространения звука в среде; $\rho(x)$ — плотность среды; $h(x,t)$ — функция источников. Эта задача (как большинство прямых задач математической физики) корректна, т. е. однозначно разрешима и устойчива по отношению к малым вариациям данных. Данными для решения прямой задачи (1)–(4) являются область Ω, коэффициенты $c(x)$, $\rho(x)$ и функция источника $h(x,t)$ в уравнении (2), начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (3) и граничные условия $g(x,t)$ в (4).

В обратной задаче помимо $u(x,t)$ неизвестны некоторые функции, входящие в прямую задачу. Эти неизвестные называются *решением обратной задачи*. Для их определения к заданным уравнениям (1)–(4) добавляется какая-либо информация о решении прямой задачи — данные обратной задачи. (Иногда к данным обратной задачи относят и известные коэффициенты прямой, вариантов бывает очень много.) Пусть, например, дополнительной информацией будет значение решения прямой задачи (1)–(4) на границе

$$u|_{\Gamma} = f(x,t). \tag{5}$$

В обратной задаче требуется по данным $f(x,t)$ определить неизвестные функции, входящие в формулировку прямой задачи. В зависимости от того, какие из функций являются неизвестными, обратные задачи математической физики можно разделить на группы. Сделаем это на рассмотренном нами примере (1)–(5).

Классификация по искомым функциям. Обратная задача (2)–(5) называется *ретроспективной*, если требуется восстановить начальные условия, т. е. функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (3). Обратная задача (2)–(5) называется *граничной*, если требуется найти функцию, входящую в граничное условие (функцию $g(x,t)$). Обратная задача (2)–(5) называется *задачей продолжения*, если начальные условия (3) не известны, дополнительная информация (5) и граничные условия (4) заданы только на части границы $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ области Ω и требуется определить решение $u(x,t)$ уравнения (2) (продолжить решение внутрь области). Обратная задача (2)–(5) называется *задачей об источнике*, если требуется определить источник, т. е. функцию $h(x,t)$ из уравнения (2). Обратная задача (2)–(5) называется *коэффициентной*, если требуется восстановить коэффициенты ($c(x)$ и $\rho(x)$), входящие в основное уравнение.

Сразу же отметим, что данная классификация не является полной. Бывает так, что не известны и начальные, и граничные условия. Бывает, что неизвестной оказывается сама область Ω (или часть ее границы).

Классификация по дополнительной информации. Возможны и другие (помимо начально-краевой (2)–(4)) постановки прямой задачи акустики (спектральная, рассеяния, кинематическая), в которых требуется найти соответствующие характеристики акустического процесса (собственные частоты, отраженные волны, времена пробега волны и т. д.). Измерения этих характеристик экспериментаторами порождают новые классы обратных задач акустики.

Наиболее доступными на практике являются измерения на границе исследуемой области (5), но иногда измерительные приборы могут быть размещены внутри объекта:

$$u(x_m, t) = f_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

(внутренние задачи). В ретроспективных обратных задачах (по аналогии с задачами оптимального управления) используются так называемые финальные наблюдения

$$u(x, T) = \hat{f}(x). \tag{7}$$

При гармоническом режиме колебаний $u(x, t) = e^{iwt}\bar{u}(x, \omega)$ ставятся обратные задачи рассеяния и дополнительная информация задается, например, в виде

$$\bar{u}(x, \omega_\alpha) = \bar{f}(x, \alpha), \quad x \in X_1, \quad \alpha \in \Omega, \tag{8}$$

где X_1 — множество точек наблюдений; $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — множество частот, на которых ведутся наблюдения. В некоторых случаях известны собственные частоты соответствующего дифференциального оператора

$$\Delta U - \nabla \ln \rho \cdot \nabla U = \lambda U$$

и различные характеристики собственных функций (спектральные обратные задачи). Иногда удается фиксировать в точках $\{x_k\}$ времена прихода волн, порожденных локальными источниками, сосредоточенными в точках $\{x^m\}$:

$$\tau(x^m, x_k) = \tilde{f}(x^m, x_k), \quad x_k \in X_1, \quad x^m \in X_2.$$

В этом случае задача восстановления скорости $c(x)$ называется *обратной кинематической задачей.*

Классификация по уравнениям. Итак, только для уравнения акустики мы получаем набор M_1 различных обратных задач в зависимости от количества и вида неизвестных функций, совокупность которых будем обозначать символом q. С другой стороны, можно получить M_2 различных вариантов обратных задач в зависимости от количества и типа измеряемых величин (дополнительной информации) — данных обратной задачи, совокупность которых будем обозначать через f. Тогда символически обратную задачу можно записать в виде операторного уравнения

$$Aq = f, \tag{9}$$

где A — оператор, действующий из пространства искомых элементов Q в пространство измеряемых величин F.

Заметим, что вместо уравнения акустики мы могли бы рассмотреть уравнения теплопроводности, переноса излучения, Лапласа, Пуассона или систему уравнений Ламе, Максвелла и т. п., скажем, M_3 различных вариантов. Но тогда только для уравнений математической физики можно определить порядка $M_1M_2M_3$ различных обратных задач, многим из которых посвящены целые монографии.

Замечание 1. Разумеется, можно еще более обобщить понятие обратной задачи, поскольку иногда и сам закон (уравнение) не известен. В этом случае требуется по результатам опытов (наблюдений) установить закон (уравнение).

Открытию новых законов в математической форме (уравнений) предшествует множество экспериментов, размышлений и дискуссий, и этот сложный (исторический) процесс вряд ли стоит называть решением обратной задачи. Однако термин «обратные задачи» все чаще проникает в самые разные разделы научной литературы. Например, появляются попытки взглянуть на математическую статистику как на обратную задачу по отношению к теории вероятностей. Очень много общего можно найти между теорией обратных задач и теорией управления, распознавания образов и многими другими областями знаний.

О структуре оператора A. Символически прямую задачу можно записать в операторной форме

$$A_1(\Gamma, c, \rho, h, \varphi, \psi, g) = u.$$

Это означает, что оператор A_1 переводит множество прямой задачи в решение прямой задачи $u(x,t)$. Назовем A_1 *оператором прямой задачи.* В обратной задаче некоторые из данных прямой задачи не известны. Обозначим совокупность этих неизвестных через q, а сужение оператора A_1 на q через $\bar{A}_1$. *Оператор измерений* A_2 переводит решение прямой задачи $u(x,t)$ в дополнительную информацию f, например $A_2u = u|_\Gamma$ или $A_2u = u(x_k,t)$,

$k = 1, 2, \ldots$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$Aq \equiv A_2 \bar{A}_1 q = f,$$

где оператор A является результатом последовательного применения (суперпозицией) двух операторов $\bar{A}_1$ и A_2, например в ретроспективной обратной задаче $q = (\varphi, \psi)$, $f = u(x, T)$, $\bar{A}_1 q = u(x, t)$, $A_2 \bar{A}_1 q = u(x, T)$, в коэффициентной задаче $q = (c, \rho)$, $f = u|_\Gamma$, $\bar{A}_1 q = u(x, t)$, $A_2 \bar{A}_1 q = u|_\Gamma$ и т. д. Оператор прямой задачи A_1 обычно непрерывен (прямая задача корректна). Оператор измерений, как правило, также непрерывен (измерять стремятся устойчивые характеристики процесса). Суперпозиция $A_2 \bar{A}_1$ обычно бывает даже слишком хорошей ($A = A_2 \bar{A}_1$ в некорректных задачах — чаще всего вполне непрерывный оператор). Тем труднее его обращать, т. е. решать обратную задачу $Aq = f$. На простейшем примере (A — постоянное число) это означает, что чем на меньшее число A мы умножим число q, тем меньше (вообще говоря) будет ошибка (в случае приближенно заданного q):

$$A(q + \delta q) = \tilde{f},$$

т. е. оператор прямой задачи хороший. Но при решении обратной задачи по приближенным данным $\tilde{f} = f + \delta f$ ошибка

$$\delta q = \tilde{q} - q = \delta f / A$$

может быть очень велика, если число A достаточно мало.

Интерес к обратным и некорректным задачам возник в начале XX века. В 1902 году Ж. Адамар сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений [56]. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от данных. Там же Адамар привел пример некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). В 1943 году А. Н. Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого их решения. В пятидесятых и шестидесятых годах XX века появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание многих математиков. С появлением мощных компьютеров интерес к обратным и некорректным задачам стал стремительно расти. К настоящему времени обратные и некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики, включая алгебру, анализ, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т. д. В таблице ниже даны примеры корректных и некорректных задач. Еще раз отметим, что так или иначе каждую некорректную задачу (см. правую колонку таблицы) можно сформулировать как обратную к некоторой корректной прямой задаче (соответствующие задачи из левой колонки).

С другой стороны, теория обратных и некорректных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в

- физике (квантовая механика, акустика, электродинамика и т. д.);
- геофизике (сейсморазведка, электроразведка, гравиразведка, магниторазведка, каротаж, магнитотеллурическое зондирование и т. д.);
- медицине (рентгеновская томография, ЯМР-томография, УЗИ и т. д.);
- экологии (диагностика состояния воздуха, воды, космический мониторинг и т. д.);
- экономике (теория оптимального управления, финансовая математика и т. д.).

Не вдаваясь более в детали математических определений, отметим, что в большинстве случаев обратные и некорректные задачи объединяет одно главное свойство — неустойчивость. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными и, наоборот, некорректную задачу, как правило, можно свести к обратной по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

Подводя итоги, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач. Иначе говоря, создаются и изучаются устойчивые методы приближения неустойчивых отображений. С информационной точки зрения теория обратных и некорректных задач изучает отображения таблиц данных с очень малой эпсилон-энтропией в таблицы с большой эпсилон-энтропией [3].

Корректные задачи	Некорректные задачи
Арифметика	
Умножение на малое число A $Aq = f$	Деление на малое число A $q = A^{-1}f$ $(A \ll 1)$
Алгебра	
Умножение на матрицу $Aq = f$	Решение системы $Aq = f$ в случаях, если A плохо обусловлена, вырождена или прямоугольна
Анализ	
Интегрирование $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x q(\xi)\,d\xi$	Дифференцирование $q(x) = f'(x)$
Дифференциальные уравнения	
Задача Штурма — Лиувилля $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x),$ $u(0) - hu'(0) = 0,$ $u(1) - Hu'(1) = 0$	Обратная задача Штурма — Лиувилля $\{\lambda_n, \|u_n\|^2\} \to q(x).$ Определение $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \|u_n\|\}$
Интегральная геометрия	
Определение интеграла $\int\limits_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)$ вдоль кривой $\Gamma(\xi,\eta)$	Определение $q(x,y)$ по семейству интегралов

Продолжение таблицы

Корректные задачи	Некорректные задачи
Интегральные уравнения	
Уравнения Вольтерра и Фредгольма второго рода $q(x) + \int_0^x K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$	Уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода $\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$
Операторные уравнения $Aq = f$	
$\exists m > 0\colon \forall q \in Q$ $m\langle q, q\rangle \le \langle Aq, q\rangle$	$A\colon D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ A — компактный линейный оператор
Гиперболические уравнения	
Задача Коши $u_{tt} = \Delta u$, $t > 0$, $u\vert_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\vert_{t=0} = \psi(x)$. Начально-краевая задача $u\vert_\Gamma = g$	Задачи Дирихле и Неймана. Задача Коши с данными на времениподобной поверхности $u_{tt} = \Delta u$, $x \in \Omega$, $u\vert_{\Gamma_1} = f_1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\vert_{\Gamma_1} = f_2$
Параболические уравнения	
$u_t = \Delta u$, $t > 0$, $x \in \Omega$. Задача Коши $u\vert_{t=0} = f(x)$. Начально-краевая задача $u\vert_{t=0} = 0$, $u\vert_\Gamma = g(x,t)$	Задача Коши с обратным временем $-u_t = \Delta u$, $t > 0$, $x \in \Omega$, $u\vert_{t=0} = f$. Начально-краевая задача с данными на части границы $u_t = \Delta u$, $x \in \Omega$, $u\vert_{\Gamma_1} = f_1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\vert_{\Gamma_1} = f_2$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$

Продолжение таблицы

Корректные задачи	Некорректные задачи
Эллиптические уравнения	
$\Delta u = 0,\ x \in \Omega,$ $u\|_\Gamma = g$ или $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_\Gamma = f$ или $\left.\left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right\|_\Gamma = h.$ Задачи Дирихле, Неймана, Робина (смешанная)	$\Delta u = 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$ Задача Коши. Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$
Прямые задачи	Обратные коэффициентные задачи
$u_{tt} = \Delta u - q(x)u,$ $u\|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\|_{t=0} = \psi(x);$	$u_{tt} = \Delta u - q(x)u,$ $u\|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\|_{t=0} = \psi(x),$ $u\|_\Gamma = f(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_\Gamma = g;$
$u_t = \Delta u - q(x)u,$ $u\|_{t=0} = 0;$	$u_t = \Delta u - q(x)u;$ $u\|_{t=0} = 0,\ u\|_\Gamma = f,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_\Gamma = g;$
$\nabla(q(x)\nabla u) = 0,\ x \in \Omega,$ $u\|_\Gamma = 0$ или $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_\Gamma = f_2$	$\nabla(q(x)\nabla u) = 0,$ $u\|_\Gamma = g,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_\Gamma = f$

1.2. Примеры обратных и некорректных задач

Пример 1 (алгебра, система линейных алгебраических уравнений)**.** Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Aq = f, \tag{1}$$

где A — матрица размера $m \times n$; q, f — векторы размерности n и m соответственно. Пусть ранг матрицы равен $\min(m, n)$. При $m < n$ уравнение имеет много решений. При $n < m$ решение может не существовать. Если $m = n$, то система однозначно разрешима для любой правой части. В этом случае обратный оператор A^{-1} (матрица) существует и, следовательно, ограничен как линейный оператор в конечномерном пространстве. Таким образом, выполнены все три условия корректности Адамара.

Выясним подробнее зависимость решения от возмущения правой части f в случае невырожденной матрицы A. Вычитая из возмущенного уравнения

$$A(q + \delta q) = f + \delta f \tag{2}$$

исходное уравнение (1), получаем $A\delta q = \delta f$, откуда $\delta q = A^{-1}\delta f$, $\|\delta q\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta f\|$. Кроме того, $\|A\|\|q\| \geq \|f\|$.

Из этих соотношений мы имеем неулучшаемую оценку для относительной ошибки решения:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}. \tag{3}$$

Таким образом, погрешность определяется константой $\mu(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, которая называется *числом обусловленности* системы (матрицы). Системы с относительно большим числом обусловленности называют *плохо обусловленными.* Для нормированных матриц ($\|A\| = 1$) это означает, что в обратной матрице есть относительно большие элементы и, следовательно, малые изменения правой части могут привести к относительно большим (хотя и конечным) изменениям в решении. Поэтому системы с плохо обусловленными матрицами можно считать практически неустойчивыми, хотя формально задача корректна и выполнено условие устойчивости $\|A^{-1}\| < \infty$. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

при достаточно большом n и $[a] > 1$ плохо обусловлена, так как обратная матрица содержит элементы вида a^{n-1}.

В случае возмущения матрицы оценка (3) принимает вид

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \mu(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1 - \mu(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

(при $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$).

Пусть $m = n$ и определитель матрицы A равен нулю. Тогда решение системы (1) может не существовать, а если существует, то будет неединственным. Следовательно, для вырожденных матриц A ($\det A = 0$) задача $Aq = f$ является некорректной.

Пример 2 (анализ, суммирование рядов Фурье)**.** Задача суммирования ряда Фурье состоит в нахождении функции $q(x)$ по ее коэффициентам Фурье.

Покажем, что задача суммирования рядов Фурье неустойчива к малым в метрике l_2 изменениям коэффициентов Фурье, если уклонение суммы оценивать в метрике $C(\mathbb{R})$. Положим

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx$$

и придадим коэффициентам Фурье f_k функции $q(x)$ малые возмущения $\tilde{f}_k = f_k + \varepsilon/k$. Обозначим

$$\tilde{q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \cos kx.$$

Коэффициенты рядов Фурье в метрике l_2 отличаются на величину

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(f_k - \tilde{f}_k)^2\right\}^{1/2} = \varepsilon\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right\}^{1/2} = \varepsilon\sqrt{\pi^2/6},$$

которая стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Но разность самих функций

$$q(x) - \tilde{q}(x) = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos kx$$

может быть сделана сколь угодно большой, поскольку при $x = 0$ ряд расходится.

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике $C(\mathbb{R})$, то суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Пример 3 (геометрия)**.** Пусть в пространстве расположено тело, которое можно освещать с различных сторон. Если известна форма тела, задача определения очертания тени является корректной. Обратная к ней задача восстановления формы тела по проекциям (теням) на различных плоскостях является корректной только для выпуклых тел, поскольку, очевидно, впадину таким образом обнаружить невозможно.

Одним из первых подобную задачу сформулировал и решил Аристотель. Наблюдая тень Земли на поверхности Луны, он пришел к выводу, что Земля имеет шарообразную форму.

Пример 4 (интегральная геометрия по прямым)**.** В компьютерной томографии возникает задача определения функции двух переменных $q(x, y)$ по семейству интегралов

$$\int\limits_{L(p,\varphi)} q(x, y)\, dl = f(p, \varphi),$$

взятых вдоль различных прямых $L(p, \varphi)$ (p и φ — параметры, определяющие прямую) в плоскости x, y. Эта задача не является корректной, поскольку нарушено условие существования решения для любой правой части $f(\rho, \varphi)$.

Пример 5 (интегральная геометрия по окружностям)**.** Рассмотрим задачу определения функции двух переменных $q(x, y)$ по интегралам от этой функции, вычисленным по семейству окружностей, центры которых лежат на фиксированной прямой.

Пусть функция $q(x, y)$ определена и непрерывна для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство окружностей с центрами, лежащими на фиксированной прямой, в качестве которой, для определенности, возьмем координатную ось $y = 0$. Окружность $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, принадлежащую этому семейству, обозначим через $L(a, r)$. Задача состоит в определении функции $q(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\int\limits_{L(x,r)} q(\xi, \tau)\, dl = f(x, r), \tag{4}$$

где $f(x, r)$ — функция, заданная для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$.

В классе непрерывных функций решение этой задачи не является единственным, поскольку для любой непрерывной функции $\tilde{q}(x, y)$, обладающей свойством $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$, интегралы

$$\int\limits_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau)\, dl$$

равны нулю при всех $x \in \mathbb{R}$ и $r > 0$. В самом деле, заменяя переменные $\xi = x + r\cos\varphi$, $\tau = r\sin\varphi$, получаем

$$\int\limits_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau)\, dl = \int\limits_0^{2\pi} \tilde{q}(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi$$
$$= \int\limits_0^{\pi} \tilde{q}(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \tilde{q}(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi. \quad (5)$$

Последний интеграл с помощью замены переменной $\bar{\varphi} = 2\pi - \varphi$ и условия $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \tilde{q}(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi = \int\limits_{\pi}^{0} \tilde{q}(x + r\cos\bar{\varphi}, -r\sin\bar{\varphi}) r\, d\bar{\varphi}$$
$$= -\int\limits_0^{\pi} \tilde{q}(x + r\cos\bar{\varphi}, r\sin\bar{\varphi}) r\, d\bar{\varphi}.$$

Подставив это выражение в (5), получим

$$\int\limits_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau)\, dl = 0$$

для $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Следовательно, если $q(x, y)$ — решение задачи (4), то функция $q(x, y) + \tilde{q}(x, y)$, где $\tilde{q}(x, y)$ — любая непрерывная функция со свойством $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$, также будет решением задачи (4). Поэтому задачу можно переформулировать как задачу об определении только четной по y части функции $q(x, y)$.

В рассмотренной задаче нарушено также первое условие корректности: при некоторых $f(x, r)$ решение может не существовать. Однако единственность решения в классе четных по y функций доказать можно.

Пример 6 (дифференциальное уравнение)**.** Скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества с коэффициентом пропорциональности q_1, называемым *коэффициентом распада.* Процесс радиоактивного распада описывается решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = -q_1 u(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

$$u(0) = q_0, \tag{7}$$

где $u(t)$ — количество вещества в данный момент времени, а q_0 — количество радиоактивного вещества в начальный момент времени.

Прямая задача: зная постоянные q_0 и q_1, определить, как будет изменяться количество вещества $u(t)$ с течением времени. Очевидно, что эта задача корректна. Более того, ее решение может быть представлено в явном виде:

$$u(t) = q_0 e^{-q_1 t}, \quad t \geq 0.$$

Предположим теперь, что коэффициент распада q_1 и первоначальное количество q_0 радиоактивного вещества не известны, но можно измерять количество радиоактивного вещества $u(t)$ для некоторых t.

Обратная задача заключается в определении коэффициента q_1 в (6) и начального условия q_0 по дополнительной информации о решении прямой задачи $u(t_k) = f_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ [11].

Пример 7 (система дифференциальных уравнений)**.** Процесс химической кинетики описывается решением задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = q_{i1} u_1(t) + q_{i2} u_2(t) + \dots + q_{in} u_n(t), \tag{8}$$

$$u_i(0) = \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Здесь $u_i(t)$ — концентрация i-го вещества в момент времени t. Постоянные параметры q_{ij} характеризуют зависимость скорости изменения концентрации i-го вещества от концентрации веществ, участвующих в процессе.

Прямая задача: определить $u_i(t)$, зная параметры q_{ij} и концентрации $\bar{q}_i$ в начальный момент времени.

Для системы дифференциальных уравнений (8) может быть сформулирована следующая обратная задача. В течение некоторого интервала времени $t \in [t_1, t_2]$ измеряются концентрации веществ $u_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, и требуется определить величины параметров q_{ij}, т. е. по решению системы дифференциальных уравнений (8) требуется найти ее коэффициенты. Эта обратная задача может рассматриваться в двух вариантах. В первом случае начальные условия (9) известны, т. е. $\bar{q}_i$ заданы и измеряются решения $u_i(t)$, соответствующие этим $\bar{q}_i$. Во втором варианте $\bar{q}_i$ не известны и их нужно определить вместе с q_{ij} [11].

Пример 8 (дифференциальное уравнение второго порядка). Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

$$\ddot{u}(t) = q(t), \quad t \in [0, T], \tag{10}$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0. \tag{11}$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t. Предположим теперь, что сила $q(t)$, действующая на частицу, не известна, но в каждый момент времени (или в отдельных точках отрезка $[0, T]$) мы можем измерять положение частицы $u(t)$ и хотим по $u(t)$ восстановить $q(t)$. Таким образом, мы получили следующую обратную задачу: найти правую часть уравнения (10) (функцию $q(t)$), если известно решение задачи (10), (11) (функция $u(t)$).

Покажем неустойчивость этой обратной задачи. Пусть $u(t)$ – решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n}\cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - n\cos(nt).$$

Очевидно, что $\|u - u_n\|_{C[0,T]} \to 0$ при $n \to \infty$, а $\|q - q_n\|_{c[0,T]} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Таким образом, задача определения правой части линейного дифференциального уравнения (10), (11) по его решению неустойчива.

Отметим, что если $u(t)$ задана при всех $t \in [0, T]$, то обратная задача сводится к двукратному дифференцированию.

Пример 9 (интегральное уравнение Фредгольма первого рода)**.** Рассмотрим задачу решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(x,s)q(s)\,ds = f(x), \quad c \le x \le d, \tag{12}$$

в которой по заданному ядру $K(x,s)$ и функции $f(x)$ требуется найти решение $q(s)$. Предположим, что $K(x,s)$, $K_x(x,s)$, $K_s(x,s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \le x \le d$, $a \le s \le b$, $f(x) \in C[c,d]$ и $q(s) \in C[a,b]$. Задача решения уравнения (12) является некорректной, поскольку решение существует не для любой функции $f(x) \in C[c,d]$. Для доказательства достаточно взять функцию $f(x)$, непрерывную на $[c,d]$, но не являющуюся дифференцируемой на этом отрезке. Для такой правой части $f(x)$ уравнение не может иметь непрерывное решение $q(s)$, поскольку из условий на ядро $K(x,s)$ следует, что для любой непрерывной функции $q(s)$ интеграл, стоящий в левой части (12), можно дифференцировать по параметру x.

Для уравнения (12) не выполнено также условие непрерывной зависимости решения от исходных данных. Рассмотрим последовательность функций

$$q_n(s) = q(s) + n\sin(n^2 s), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Подставляя вместо $q(s)$ выражение для $q_n(s)$ в уравнение (12), получаем

$$f_n(x) = \int\limits_a^b K(x,s)q_n(s)\,ds = f(x) + \int\limits_a^b K(x,s)n\sin(n^2 s)\,ds,$$

$$n = 0, 1, \ldots.$$

Оценим $\|f_n - f\|_{C[c,d]}$. Так как

$$|f_n(x) - f(x)| \le \left| \int_a^b K(x,s) n \sin(n^2 s)\, ds \right|$$
$$= \left| -\frac{1}{n} \cos(n^2 s) K(x,s)|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b K_s(x,s) \cos(n^2 s)\, ds \right| \le K_1/n,$$

где постоянная K_1 не зависит от n, мы приходим к неравенству

$$\|f_n - f\|_{C[c,d]} \le K_1/n, \quad n = 0, 1, \dots .$$

С другой стороны, из определения последовательности $q_n(s)$ следует, что

$$\|q_n - q\|_{C[a,b]} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, исходные данные $f_n(x)$ сколь угодно близки к $f(x)$ при $n \to \infty$, а соответствующие решения $q_n(s)$ не сходятся к $q(s)$ при $n \to \infty$, что и означает отсутствие непрерывной зависимости.

Пример 10 (интегральное уравнение Вольтерра первого рода)**.** Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,s) q(s)\, ds = f(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{13}$$

Предположим, что функция $K(x,s)$ непрерывна, имеет первые частные производные при $0 \le s \le x \le 1$ и $K(x,x) = 1$ для $x \in [0,1]$. Предположим также, что $q(s)$ ищется в пространстве $C[0,1]$, а $f(x) \in C_0[0,1]$, где $C_0[0,1]$ — пространство непрерывных на $[0,1]$ функций таких, что $f(0) = 0$, с равномерной метрикой.

Пример 11 (задача Коши для уравнения Лапласа)**.** Пусть $u = u(x,y)$ — решение следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{14}$$
$$u(0,y) = f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{15}$$
$$u_x(0,y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Если данные $f(y)$ представимы в виде

$$f(y) = f_n(y) = u(0, y) = \frac{1}{n}\sin(ny),$$

то решением задачи (14)–(16) является функция

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n}\sin(ny)(e^{nx} + e^{-nx}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Решение $u_n(x, y)$ при любом фиксированном $x > 0$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$, в то время как $f_n(y)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, сколь угодно малое изменение данных задачи в C^l или W_2^l (при любом $l < \infty$) приводит к отнюдь не малым вариациям решения, т. е. задача (14)–(16) является некорректной.

Пример 12 (обратная задача для уравнения в частных производных первого порядка)**.** Пусть $q(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда задача Коши

$$u_x - u_y + q(x)u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{18}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

поставлена корректно. Рассмотрим обратную задачу восстановления $q(x)$ по дополнительной информации о решении задачи (18), (19):

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Решение задачи (18), (19) находится по формуле

$$u(x, y) = \varphi(x + y)\exp\left(\int\limits_{x+y}^{x} q(\xi)\, d\xi\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие (20) приводит к равенству

$$\psi(y) = \varphi(y)\exp\left(\int\limits_{y}^{0} q(\xi)\, d\xi\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Таким образом, выполнение условий

1) $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывно дифференцируемы для $y \in \mathbb{R}$, т. е. $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$;
ıtem2) $\psi(y)/\varphi(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}$; $\psi(0) = \varphi(0)$

необходимо и достаточно для существования решения обратной задачи, которое можно вычислить по формуле

$$q(x) = -\frac{d}{dx}\left[\ln\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Если же φ и ψ только непрерывны, т. е. $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$, то задача будет некорректной.

Пример 13 (задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем)**.** Задача Коши с обратным временем формулируется следующим образом: найти значения функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{23}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \tag{24}$$

в начальный момент времени

$$u(x,0) = q(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{25}$$

если известны ее значения в фиксированный момент времени $t = T > 0$:

$$u(x,T) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{26}$$

Эта задача является обратной по отношению к задаче определения функции $u(x,t)$, удовлетворяющей (23)–(25) с заданной функцией $q(x)$. Решение прямой задачи (23)–(25) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} q_n \sin nx, \tag{27}$$

где $\{q_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $q(x)$:

$$q_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\sin(nx)\,dx.$$

Полагая $t = T$ в (27), получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} q_n \sin nx, \quad x \in [0, \pi], \tag{28}$$

откуда

$$q_n = f_n e^{n^2 T}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{f_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Но коэффициенты Фурье $\{q_n\}$ однозначно определяют функцию $q(x)$ из $L_2(0, \pi)$. Следовательно, решение обратной задачи единственно в $L_2(0, \pi)$. Заметим, что условие (25) выполняется в предельном смысле:

$$\lim_{t \to +0} \int_0^{\pi} [u(x, t) - q(x)]^2 \, dx = 0.$$

Для существования решения обратной задачи (23)–(26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{2n^2 T} < \infty,$$

которое, очевидно, не может быть выполнено для любой функции $f \in L_2(0, \pi)$.

Пример 14 (коэффициентная обратная задача теплопроводности)**.** Решение $u(x, t)$ краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$c\rho u_t = (k u_x)_x - \alpha u + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{29}$$
$$u(0, t) - \lambda_1 u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{30}$$
$$u(l, t) - \lambda_2 u_x(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{31}$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{32}$$

описывает многие физические процессы (распространение тепла в стержне, диффузию в полой трубке и т. д.). Коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, представляют собой характеристики исследуемой среды. Если задача (29)–(32) описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответственно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. В этом случае прямая задача состоит в определении температуры в стержне в точке x в момент времени t (функции $u(x,t)$) по известным величинам c, ρ, k, α, f, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, φ. Предположим теперь, что все коэффициенты и функции, определяющие решение $u(x,t)$, известны, кроме коэффициента теплопроводности $k = k(x)$, но мы можем измерить температуру стержня в некоторой внутренней точке x_0: $u(x_0, t) = f(t)$, $0 \le t \le T$. Возникает обратная задача: определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $f(t)$ и все остальные функции в (29)–(32). Аналогично могут быть поставлены и другие обратные задачи, включая случаи $C = C(u)$, $k = k(u)$ и т. д. [2].

Пример 15 (интерпретация показаний физических приборов)**.** Действия многих приборов, регистрирующих нестационарные физические поля, описываются следующей схемой: на вход прибора поступает сигнал $q(t)$, а на выходе прибора регистрируется функция $f(t)$. В простейшем случае функции $q(t)$, $f(t)$ связаны соотношением

$$\int_0^t g(t-\tau)q(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{33}$$

Функция $g(t)$ в этом случае называется *импульсной переходной функцией* прибора. Теоретически $g(t)$ представляет собой функцию, которая регистрируется прибором в случае, когда на вход прибора поступает обобщенная функция $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака: $\int_0^t g(t-\tau)\delta(t)\,d\tau = g(t)$. На практике для получения функции $g(t)$ на вход подают достаточно короткий и мощный импульс. Тогда регистрируемая на выходе функция будет в определенном смысле близка к импульсной переходной функции.

Таким образом, задача интерпретации показаний прибора, т. е. определения формы поступившего сигнала (функции $q(t)$), сводится к решению интегрального уравнения первого рода (33).

Связь между поступающим на вход прибора сигналом $q(t)$ и регистрируемой на выходе функцией $f(t)$ может быть и более сложной. В случае «линейного» прибора эта связь имеет вид

$$\int_0^t K(t,\tau)q(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Возможна и нелинейная связь между функциями $q(t)$, $f(t)$:

$$\int_0^t K(t,\tau,q)\,d\tau = f(t).$$

По данной схеме работают, в частности, приборы, регистрирующие переменные электромагнитные поля, режимы давлений и напряжений в сплошной среде, сейсмографы, регистрирующие колебания земной поверхности и т. д.

Замечание 1. Для решения простейшего уравнения (33) могут быть использованы преобразования Фурье или Лапласа. Например, продолжим нулем все функции в (33) при $t < 0$, и пусть $\tilde{g}(\lambda)$, $\tilde{q}(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $g(t)$, $q(t)$ и $f(t)$:

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\subset\lambda t} g(t)\,dt, \quad \tilde{q}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\subset\lambda t} q(t)\,dt, \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\subset\lambda t} f(t)\,dt.$$

Тогда по теореме о свертке

$$\tilde{g}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda),$$

откуда, обращая преобразование Фурье, получаем формулу для решения (33):

$$q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\subset\lambda t}\tilde{q}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\subset\lambda t}\frac{\tilde{f}(\lambda)}{\tilde{g}(\lambda)}\,d\lambda. \qquad (34)$$

Вычисления по формуле (34) неустойчивы, так как функция $\tilde{g}(\lambda)$ — преобразование Фурье импульсной переходной функции прибора — для реальных приборов стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ и, таким образом, сколь угодно малые помехи в определении $\tilde{f}(\lambda)$ для достаточно больших λ могут привести к большим изменениям в решении $q(t)$.

Замечание 2. В случае, если $g(t)$ постоянна, задача решения (33) есть задача дифференцирования.

Пример 16 (продолжение стационарных полей)**.** К некорректным задачам, эквивалентным задаче Коши для уравнения Лапласа, приводят некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поисками полезных ископаемых. Если бы Земля была сферически-однородным шаром, то напряженность гравитационного поля на поверхности была бы постоянной. Неоднородности рельефа и распределения плотности вещества служат причиной того, что напряженность гравитационного поля на поверхности Земли отклоняется от среднего значения. Эти отклонения в процентном отношении невелики, но хорошо регистрируются физическими приборами — гравиметрами. Данные гравитационных наблюдений используются при разведке месторождений полезных ископаемых.

Задача гравиразведки заключается в том, чтобы по данным гравитационных измерений сделать выводы о расположении и форме неоднородностей под поверхностью.

Если расстояние между геологическими телами больше, чем расстояние от тел до поверхности Земли, то положения тел соответствуют локальным максимумам аномалий. В случае, когда расстояние между телами меньше расстояния от тел до поверхности, двум телам может соответствовать один локальный максимум. При разведке полезных ископаемых геофизические измерения и их интерпретация являются предварительным этапом. Основной этап обнаружения месторождений — это бурение разведочных скважин и анализ данных бурения. Если на основании вида аномалии делается заключение о том, что она порождена одним телом, то место бурения естественно выбрать в центре аномалии. Однако если заключение было ошибочным, то скважина может пройти между интересующими нас телами. Такая ситуация неоднократно встречалась в практике геологоразведочных работ. Поэтому было высказано следующее предложение: нужно рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли по данным гравитационных измерений на поверхности Земли (т. е. решить задачу Коши для уравнения Лапласа). Если на глубине аномалия сохранит один локальный максимум, то можно с большой достоверностью считать, что аномалия порождена лишь одним телом. Если же после пересчета появятся два локальных максимума, то следует сделать вывод о наличии двух тел и соответственно изменить места бурения.

Аналогичная постановка задачи возникает и при интерпретации аномалий постоянного магнитного поля, так как потенциал и компоненты напряженности этого поля вне магнитных масс также удовлетворяют уравнению Лапласа.

При электроразведке постоянным током к двум точкам на поверхности Земли подводятся электроды и включается постоянный ток. На поверхности Земли измеряется разность потенциалов. Требуется на основании результатов измерений сделать выводы о внутреннем строении Земли. Если слой осадков — однородная проводящая среда, а сопротивление фундамента много выше, то линии тока будут обтекать рельеф фундамента. Следовательно, для определения рельефа фундамента достаточно найти линии тока в слое осадков. В однородной среде потенциал постоянного тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Нормальная производная потенциала на поверхности Земли равна нулю, а сам потенциал измеряется. Таким образом, мы опять приходим к задаче Коши для уравнения Лапласа.

2. Основы теории некорректных задач

В данной главе кратко излагаются основы теории некорректных задач. Сначала даются определения корректности, некорректности и условной корректности задач. Разделы 2.2–2.4 посвящены результатам, полученным основоположниками теории некорректных задач А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и М. М. Лаврентьевым. Теорема о непрерывности обратного отображения $A^{-1}\colon A(M) \to M$ в случае, если M — компакт, а оператор A непрерывен и взаимно однозначен, является основой теории условно-корректных задач и построения множества эффективных численных алгоритмов их решения [49]. Понятие квазирешения, введенное В. К. Ивановым, во-первых, обобщает понятие решения, во-вторых, восстанавливает все условия корректности и, в-третьих, приводит к новым алгоритмам приближенного решения некорректных задач. Метод Лаврентьева позволяет построить численные алгоритмы решения широкого класса алгебраических систем уравнений линейных и нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода. Фундаментальным для теории некорректных задач является понятие регуляризирующего семейства операторов. Коротко говоря, регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ (или регуляризирующая последовательность $\{R_n\}$) состоит из операторов R_α, для каждого из которых можно устойчивым образом построить приближенное решение $q_\alpha = R_\alpha f$ уравнения $Aq = f$, причем q_α стремится к точному решению $q_{\text{т}}$ при $\alpha \to +0$. Вторым важным свойством регуляризирующих операторов является возможность построения приближенного решения $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$ по приближенным данным f_δ, для которых решения уравнения $Aq = f_\delta$ может и не существовать. При этом во многих случаях удается доказать сходимость $q_{\alpha\delta}$ к точному решению $q_{\text{т}}$ при согласованном стремлении к нулю параметра регуляризации α и погрешности δ задания правой части f. Одним из самых эффективных и широко применяемых методов регуляризации является итерационная регуляризация, основанная на минимизации целевого функционала $J(q) = \|Aq - f\|^2$ и методах градиентного спуска. Основой градиентных методов является известное утверждение о том, что если в некоторой точке $q \in Q$ градиент $J'q$ функционала $J(q)$ не равен нулю, то, двигаясь в направлении антиградиента в точку $q+\delta q$, можно уменьшить значение функционала $J(q+\delta q)$ при условии, что шаг спуска достаточно мал. В самом деле, выбирая $\delta q = -\alpha J'q$, где α положителен, и вспоминая определение градиента (полагаем, что Q — гильбертово пространство), мы можем записать

$$J(q-\alpha J'q)-J(q)=\langle J'q,-\alpha J'q\rangle+o(\alpha\|J'q\|)=-\alpha\|J'q\|^2+o(\alpha\|J'q\|),$$

откуда видно, что правая часть становится отрицательной при $\alpha \to +0$, а это означает, что при достаточно малых α имеет место соотношение $J(q+\delta q) = J(q-\alpha J'q) < J(q)$. Поэтому, выбирая различными способами шаг спуска α_n, а иногда и корректируя направления спуска (см. метод сопряженных градиентов), можно построить минимизирующую последовательность $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n$, обладающую свойством $J(q_{n+1}) < J(q_n)$. При этом даже в случае некорректности задачи $Aq = f$ для многих градиентных методов оказывается возможным оценить скорость убывания функционала $J(q_n)$. Сложнее обстоит дело с сильной сходимостью $\|q_n - q_{\text{т}}\| \to 0$ при $n \to \infty$, которая, разумеется, возможна лишь в случае, если хотя бы одно точное решение $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ существует. Сравнительно простыми средствами удается доказать монотонное стремление к нулю $\|q_n - q_{\text{т}}\| \searrow 0$ последовательностей, построенных по методам простой итерации, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов. Однако в силу некорректности при численном решении особенно важно знать оценку скорости сходимости и понять, на каком номере итерации следует остановиться. Давно замечено, что если некорректная задача $Aq = f$ решается градиентным методом и по приближенным данным f_δ ($\|f - f_\delta\| \le \delta$), то минимизирующая последовательность $\{q_{n\delta}\}$ сначала приближается к точному решению, а затем с ростом итераций величина $\|q_{n\delta} - q_{\text{т}}\|$ может начать расти. Но как же тогда выбрать номер n, на котором следует остановиться? Наиболее часто применяемым на практике является принцип невязки, в основе которого лежит естественная гипотеза о том, что если невязка $\|Aq - f_\delta\|$ достигла уровня погрешности измерений δ, то вряд ли стоит продолжать процесс. Сказанное относится и к выбору параметра регуляризации α с той лишь разницей, что вместо последовательного осуществления итераций можно, например, выбрать набор параметров регуляризации $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, вычислить соответствующие $q_{\alpha_j\delta}$ и сравнить невязки $\|Aq_{\alpha_j\delta} - f_\delta\|$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Если для задачи $Aq = f$ удается получить оценку условной устойчивости, то можно оценить скорость сильной сходимости градиентных методов и сформулировать новое правило выбора номера остановки итерационного процесса.

Метод сингулярного разложения, предложенный в разд. 2.9 для задачи $Aq = f$, где $A\colon Q \to F$ — линейный компактный оператор, Q и F — сепарабельные гильбертовы пространства, позволяет исследовать более детально свойства оператора A и оценить степень некорректности задачи $Aq = f$.

2.1. Корректные и некорректные задачи

Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F ($A\colon Q \to F$). Для топологического пространства Q символом $\mathscr{O}(q)$ обозначим окрестность элемента $q \in Q$. Всюду в дальнейшем $D(A)$ — область определения, $R(A)$ — область значений оператора A.

Определение 1 (корректность задачи, корректность по Адамару)**.** Задача $Aq = f$ корректна на паре топологических пространств Q и F, если выполнены следующие три условия:

1) для любого элемента $f \in F$ существует решение $q_{\text{т}} \in Q$ уравнения $Aq = f$, т. е. $R(A) = F$ (условие существования решения);

2) решение $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ единственно в Q, т. е. существует обратный оператор $A^{-1}\colon F \to Q$ (условие единственности решения);

3) для любой окрестности $\mathscr{O}(q_{\text{т}}) \subset Q$ решения $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ найдется окрестность $\mathscr{O}(f) \subset F$ правой части f такая, что при всех $f_\delta \in \mathscr{O}(f)$ элемент $A^{-1}f_\delta = q_\delta$ принадлежит окрестности $\mathscr{O}(q_{\text{т}})$, т. е. оператор A^{-1} непрерывен (условие устойчивости решения).

Определение 1 можно конкретизировать, заменяя топологические пространства Q и F на метрические, банаховы, гильбертовы, евклидовы. Иногда более естественно брать в качестве Q топологическое пространство, а в качестве F — евклидово и т. д. Неизменными в понятии корректности остаются лишь требования существования, единственности и устойчивости решения.

Определение 2. Задача $Aq = f$ некорректна на паре пространств Q и F, если хотя бы одно из трех требований корректности не выполнено.

Из всех некорректных задач М. М. Лаврентьев предложил выделить класс условно-корректных. Пусть Q, F — топологические пространства и $M \subset Q$ — фиксированное множество. Через $A(M)$ обозначим образ множества M при отображении $A\colon Q \to F$, т. е. $A(M) = \{f \in F : \exists q \in M$ такой, что $Aq = f\}$. Очевидно, что $A(M) \subset F$.

Определение 3 (условная корректность, корректность по Тихонову)**.** Пусть $M \subset Q$ и $f \in A(M)$, т. е. существует решение задачи $Aq = f$ в M. Задача $Aq = f$ называется условно-корректной на множестве M, если выполнены следующие условия:

1) решение $q_т$ уравнения $Aq = f$ единственно на множестве M;

2) для любой окрестности $\mathscr{O}(q_т)$ решения уравнения $Aq = f$ существует такая окрестность $\mathscr{O}(f)$, что при любом $f_\delta \in \mathscr{O}(f) \cap A(M)$ решение уравнения $Aq = f_\delta$ содержится в $\mathscr{O}(q_т)$ (условная устойчивость).

Важно отметить, что во втором условии допускаются только такие вариации f_δ данных f, которые не выводят из класса существования $A(M)$.

Определение 4. Множество M из определения 3 называется множеством корректности задачи $Aq = f$.

Замечание 1. Для доказательства корректности задачи $Aq = f$ необходимо доказать теоремы существования, единственности и устойчивости решения. Для доказательства условной корректности задачи $Aq = f$ необходимо выбрать множество корректности M, доказать единственность решения в M и условную устойчивость q относительно малых вариаций данных (правой части) f, не выводящих решение за пределы множества корректности M.

Замечание 2. Важно отметить, что если для обоснования корректности задачи необходимо доказать существование решения, то в случае условной корректности существование решения предполагается. Разумеется, это не означает, что теорема существования решения не важна или что к доказательству этой теоремы не стоит стремиться. Просто условия существования решения $q_т$ условно-корректной задачи $Aq = f$, которым с необходимостью должны удовлетворять данные f, в наиболее интересных и важных случаях оказываются слишком сложными для проверки и непосредственного применения в численных алгоритмах (см. критерий Пикара, условия разрешимости обратной задачи Штурма — Лиувилля и др.). В этом смысле показательно название статьи В. П. Маслова «Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса» [32], которое вскрывает одну из основных проблем исследования существенно некорректных задач. Поэтому введение понятия условной корректности переносит центр тяжести на поиск устойчивых методов приближенного решения некорректных задач. Однако проблема детального математического изучения условий разрешимости каждой конкретной задачи не становится от этого менее интересной и важной. Отметим, что иногда при отсутствии точного решения можно построить регуляризирующие алгоритмы, сходящиеся к квазирешению [16].

В следующем разделе будет показано, что для компактных множеств корректности M из единственности решения следует его условная устойчивость.

2.2. Устойчивость в различных пространствах

Одним из первых методов приближенного решения условно-корректных задач был метод подбора [49]. При его описании будем предполагать, что Q и F — метрические пространства, M — компакт. В качестве приближенного решения выбирается такой элемент $q_{\text{к}}$ из множества корректности M, на котором невязка $\rho_F(Aq, f)$ достигает минимума, т. е.

$$\rho_F(Aq_{\text{к}}, f) = \inf_{q \in M} \rho_F(Aq, f).$$

Пусть $\{q_n\}$ — такая последовательность элементов пространства Q, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_F(Aq_n, f) = 0$. Обозначим через $q_{\text{т}}$ точное решение задачи $Aq = f$. Если множество M компактно, то из $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_F(Aq_n, f) = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_Q(q_n, q_{\text{т}}) = 0$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть Q и F — метрические пространства, $M \subset Q$ компактно. Предположим, что отображение A взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset F$. Тогда если A непрерывно, то и обратное отображение*

$$A^{-1}\colon A(M) \to M$$

тоже непрерывно.

Отметим, что из теоремы 1 вытекает существование такой монотонно возрастающей функции $\beta(\delta)$, что

1) $\lim\limits_{\delta\to+0}\beta(\delta)=0$;
2) для любых $q_1, q_2 \in M$ из неравенства $\rho_F(Aq_1, Aq_2) \leq \delta$ следует $\rho_Q(q_1, q_2) \leq \beta(\delta)$.

Эта функция называется оценкой условной устойчивости задачи $Aq = f$ на множестве корректности M.

Определение 1. Пусть Q и F — метрические пространства, множество $M \subset Q$ — компакт, а оператор $A\colon Q \to F$ взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset F$ и непрерывен. Функцию

$$\omega(A(M),\delta) = \sup_{\substack{f_1,f_2\in A(M)\\ \rho_F(f_1,f_2)\leq\delta}} \rho_Q(A^{-1}f_1, A^{-1}f_2)$$

будем называть модулем непрерывности оператора A^{-1} на множестве $A(M)$.

Если известен модуль непрерывности $\omega(A(M),\delta)$ или его мажоранта, например оценка условной устойчивости $\beta(\delta)$, то можно оценить норму уклонения точного решения от решения, соответствующего приближенным данным. В самом деле, пусть $q_{\text{т}} \in M$ — точное решение задачи $Aq = f$, а $q_\delta \in M$ — решение задачи $Aq = f_\delta$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Тогда если M — компакт, то $\|q_{\text{т}} - q_\delta\| \leq \omega(A(M),\delta)$. Поэтому важнейшим этапом исследования условно-корректной задачи после доказательства теоремы единственности является получение оценки условной устойчивости.

Замечание 1. Устойчивость зависит от топологий, выбранных в Q и F. Формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1}, например, наделив F сильнейшей топологией. Если A – линейный взаимно однозначный оператор, а Q и F — нормированные пространства, то можно ввести в F норму следующим образом:

$$\|f\|_A = \|A^{-1}f\|.$$

В этом случае

$$\|A^{-1}\| = \sup_{f\neq 0}\frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|_A} = 1$$

и, значит, A^{-1} непрерывен. Однако на практике чаще всего используются пространства C^m и H^k, в которых m и k не очень велики.

Замечание 2. Теорема 1 может быть обобщена на случай топологических пространств Q и F, где F хаусдорфово [16].

Некорректные задачи могут быть поставлены в форме вычисления значения оператора T (вообще говоря, неограниченного) в точке f:

$$Tf = q, \quad f \in F, \quad q \in Q. \tag{1}$$

Если в задаче $Aq = f$ оператор A^{-1} существует, то эта задача эквивалентна задаче 1. Но, во-первых, оператор A^{-1} может не существовать. Во-вторых, во многих прикладных задачах (дифференцирование функции, суммирование рядов и др.) переход к виду $Aq = f$ бывает неудобен или вообще невозможен, хотя теоретически обе задачи можно исследовать по одной схеме [16, 33]. Переформулируем условия корректности по Адамару для задачи 1:

1) оператор определен на всем F, $D(T) = F$;

2) T — однозначное отображение;

3) оператор T непрерывен.

Задача (1) называется некорректной, если хотя бы одно из условий корректности нарушено. Наиболее важен и содержателен случай нарушения третьего условия (случай неустойчивости). При этом задача (1) сводится к задаче приближения неограниченного оператора ограниченным.

2.3. Квазирешение. Теоремы Иванова

Возможны и другие подходы к некорректным задачам, связанные с обобщением понятия решения.

Пусть A — вполне непрерывный оператор. Построение устойчивого к малым изменениям f приближенного решения по формуле

$$q = A^{-1} f$$

возможно, если q ищется на компакте $M \subset Q$ и $f \in A(M) \subset F$.

Обратим внимание на тот факт, что принадлежность f множеству $A(M)$ является существенным условием для того, чтобы можно было искать приближенное решение в виде $q = A^{-1}f$, поскольку в противном случае символ $A^{-1}f$ может не иметь смысла. Однако, во-первых, задача установления принадлежности f множеству $A(M)$ сама по себе является сложной. Во-вторых, даже если $f \in A(M)$, неточность измерений может выводить f за рамки

$A(M)$, т. е. f_δ может не принадлежать $A(M)$. Для того чтобы устранить затруднения, связанные с отсутствием решения уравнения $Aq = f$, вводится понятие квазирешения уравнения $Aq = f$, обобщающее понятие решения этого уравнения [14].

Определение 1. Пусть F — метрическое пространство. Квазирешением $q_\text{к}$ уравнения $Aq = f$ на множестве $M \subset Q$ называется элемент $q_\text{к} \in M$, на котором достигается нижняя грань невязки

$$\rho_F(Aq_\text{к}, f) = \inf_{q \in M} \rho_F(Aq, f).$$

Если M — компакт, то квазирешение существует при всех $f \in F$, а если, кроме того, $f \in A(M)$, то квазирешение $q_\text{к}$ совпадает с точным решением ($q_\text{к}$ может быть неединственным!).

Можно указать достаточные условия, при которых квазирешение единственно и непрерывно зависит от правой части f.

Определение 2. Пусть элемент h и множество G принадлежат метрическому пространству F. Элемент $g \in G$ называется проекцией элемента h на G, если

$$\rho_F(h, g) = \rho_F(h, G) := \inf_{p \in G} \rho_F(h, p).$$

Проекция g элемента h на G обозначается равенством $g = P_G h$.

Теорема 1. *Пусть уравнение $Aq = f$ имеет на компакте M не более одного решения и проекция каждого $f \in F$ на $A(M)$ единственна. Тогда квазирешение уравнения $Aq = f$ единственно и непрерывно зависит от f.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книгах [49, 16].

Отметим, что если условия теоремы 1 выполнены, то при переходе к квазирешению восстанавливаются все условия корректности. Следовательно, задача нахождения квазирешения на компакте корректна.

Замечание 1. Если квазирешение уравнения $Aq = f$ на компакте M не единственно, то квазирешения образуют некоторое подмножество D компакта M. В этом случае на множестве $A(M)$ сохраняется непрерывная зависимость множества D от f, но в смысле непрерывности многозначных отображений [14].

Если оператор A линеен, то теорема 1 конкретизируется следующим образом.

Теорема 2 [14]**.** *Пусть оператор $A\colon Q \to F$ линеен и однородное уравнение $Aq = \mathbf{0}$ имеет только нулевое решение. Предположим также, что множество M выпукло и компактно, а всякая сфера в F строго выпукла. Тогда квазирешение уравнения $Aq = f$ на M единственно и непрерывно зависит от f.*

Рассмотрим теперь случай, когда Q и F являются сепарабельными гильбертовыми пространствами. Пусть $A\colon Q \to F$ — вполне непрерывный оператор,

$$M = B(\mathbf{0}, r) := \{q \in Q : \|q\| \le r\}.$$

Обозначим через A^* оператор, сопряженный к оператору A.

Известно, что A^*A — самосопряженный положительный (т. е. $\langle A^*Aq, q\rangle > 0$ для всех $q \ne \mathbf{0}$) вполне непрерывный оператор, действующий из Q в Q.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений оператора A^*A (упорядоченных по невозрастанию), а $\{\varphi_n\}$ — отвечающая им полная ортонормированная последовательность собственных функций.

Элемент A^*f представим в виде ряда

$$A^*f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n, \quad f_n = \langle A^*f, \varphi_n\rangle. \tag{1}$$

В этих условиях справедлива следующая

Теорема 3 [14]**.** *Квазирешение уравнения $Aq = f$ на множестве $B(\mathbf{0}, r)$ выражается формулами*

$$q_{\text{к}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n, & \text{если} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} \le r^2, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n}{\lambda_n + \beta}\varphi_n, & \text{если} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} > r^2, \end{cases},$$

где β — корень уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = r^2.$$

Доказательство. В случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} \leq r^2$ квазирешение $q_{\text{к}}$, минимизирующее на $B(\mathbf{0}, r)$ функционал $\rho_F^2(Aq, f) := J(q) = \langle Aq-f,\, Aq-f\rangle$, можно получить, решая уравнение Эйлера — Лагранжа

$$A^*Aq = A^*f. \tag{2}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$q_{\text{к}} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n\varphi_n.$$

Подставив этот ряд в уравнение (20) и воспользовавшись разложением (1) для A^*f, получим

$$A^*Aq_{\text{к}} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n A^*A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n\lambda_n\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n.$$

Значит, $q_n = f_n/\lambda_n$. Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} \leq r^2$, то $q_{\text{к}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n \in B(\mathbf{0}, r)$ минимизирует на $B(\mathbf{0}, r)$ функционал $J(q)$.

Если же $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} > r^2$, то, учитывая, что $q_{\text{к}}$ должно принадлежать $B(\mathbf{0}, r)$, надо минимизировать функционал $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle$ на сфере $\|q\|^2 = r^2$.

Методом неопределенных множителей Лагранжа эта задача сводится к нахождению безусловного экстремума функционала

$$J_\alpha(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle + \alpha\langle q, q\rangle.$$

Для нахождения минимума функционала J_α нужно решить соответствующее уравнение Эйлера

$$\alpha q + A^*Aq = A^*f.$$

Подставим сюда $q_{\text{к}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n\varphi_n$ и $A^*f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n$. Находим $q_n = f_n/(\alpha + \lambda_n)$. Параметр α определяем из условия $\|q\|^2 = r^2$, которое эквивалентно условию $w(\alpha) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} = r^2$. Выбирая в качестве β корень уравнения $\omega(\alpha) = r^2$, мы завершаем доказательство теоремы. ■

Замечание 2. Корень уравнения $w(\alpha) = r^2$ существует, поскольку $w(0) > r^2$, а с ростом α величина $w(\alpha)$ монотонно убывает и при $\alpha \to \infty$ стремится к нулю.

2.4. Метод Лаврентьева

Если в уравнении $Aq = f$ приближенно заданная правая часть f_δ не принадлежит $A(M)$, можно попытаться заменить это уравнение близким к нему уравнением

$$\alpha q + Aq = f_\delta, \qquad \alpha > 0,$$

для которого задача будет корректной. Ниже мы докажем, что во многих случаях решение этого уравнения $q_{\alpha\delta}$ существует и стремится к точному решению $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ при $\alpha \to 0$ и при согласованном с α стремлении к нулю ошибки δ задания f [23].

Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A = \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — линейный, вполне непрерывный, положительный и самосопряженный оператор.

Предположим, что для $f \in \mathscr{H}$ существует $q_{\text{т}} \in \mathscr{H}$ такое, что $Aq_{\text{т}} = f$. Тогда решение $q_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} f$ уравнения $\alpha q + Aq = f$ (существование q_α докажем ниже) будем считать приближенным решением уравнения $Aq = f$.

Если данные f известны с ошибкой, т. е. вместо f нам известен элемент f_δ, удовлетворяющий условию $\|f - f_\delta\| \le \delta$, то полагаем

$$q_{\alpha\delta} = (\alpha E + A)^{-1} f_\delta.$$

Семейство операторов $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, $\alpha > 0$, является регуляризирующим для задачи $Aq = f$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная последовательность собственных функций, $\{\lambda_k\}$ $(0 < \cdots \le \lambda_{k+1} \le \lambda_k \le \cdots \le \lambda_1)$ — соответствующая ей последовательность собственных значений оператора A. Предположим, что решение $q_{\text{т}}$ уравнения

$$Aq = f \tag{2}$$

существует. Подставляя разложения

$$\begin{aligned} q_{\text{т}} &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k, \quad q_k = \langle q_{\text{т}}, \varphi_k \rangle, \\ f &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad f_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

в (2), заключаем, что $q_k = f_k/\lambda_k$. Значит,

$$q_т = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k}\varphi_k,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{\lambda_k}\right)^2 < \infty. \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\alpha q + Aq = f. \tag{5}$$

По аналогии с предыдущим замечаем, что решение q_α уравнения (5) представимо в виде

$$q_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k}\varphi_k. \tag{6}$$

Учитывая, что $f_k = \lambda_k q_k$, оценим разность

$$\begin{aligned} q_т - q_\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k\varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\alpha + \lambda_k}\varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(q_k - \frac{\lambda_k q_k}{\alpha + \lambda_k}\right)\varphi_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\alpha + \lambda_k}\varphi_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|q_т - q_\alpha\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2}. \tag{7}$$

Теперь уже нетрудно показать, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} \|q_т - q_\alpha\| = 0$. В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число. Оценим сверху ряд (7):

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} &= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} + \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\ &\le \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2}\|q\|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k^2$ сходится, то для $\varepsilon/2$ можно найти такой номер n, что второе слагаемое в правой части (8) будет меньше $\varepsilon/2$. Затем уже можно выбрать $\alpha > 0$ таким, что и первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to+0} \|q_{\text{т}} - q_\alpha\| = 0$.

Рассмотрим теперь задачу с приближенными данными

$$Aq = f_\delta, \tag{9}$$

в которой $\|f - f_\delta\| \le \delta$, а также регуляризованную задачу (1):

$$\alpha q + Aq = f_\delta.$$

Пусть $f_{\delta,k} = \langle f_\delta, \varphi_k\rangle$. Тогда решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения (1) представимо в виде ряда

$$q_{\alpha\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{\delta,k}}{\alpha + \lambda_k}\varphi_k. \tag{10}$$

Оценим теперь разность

$$\|q_{\text{т}} - q_{\alpha\delta}\| \le \|q_{\text{т}} - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|.$$

Первое слагаемое в правой части (10) стремится к нулю при $\alpha \to +0$. Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k}{\alpha+\lambda_k} - \frac{f_{\delta,k}}{\alpha+\lambda_k}\right)\varphi_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f_k - f_{\delta,k})^2}{(\alpha+\lambda_k)^2} \\ &\le \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty}(f_k - f_{\delta,k})^2 = \frac{1}{\alpha^2}\|f - f_\delta\|^2 \le \frac{\delta^2}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{11}$$

Докажем теперь, что $q_{\alpha\delta} \to q_{\text{т}}$ при согласованном стремлении к нулю α и δ. Пусть ε — произвольное положительное число. Сначала для $\varepsilon/2$ находим α такое, что $\|q_{\text{т}} - q_\alpha\| < \varepsilon/2$. Затем находим $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\delta/\alpha < \varepsilon/2$. Тогда в силу (10) и (11) получаем

$$\|q_{\text{т}} - q_{\alpha\delta}\| \le \|q_{\text{т}} - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

В дальнейшем мы применим метод Лаврентьева для регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода как в линейном, так и нелинейном случаях.

В заключение отметим, что если оператор A не является положительным самосопряженным, то уравнение $Aq = f$ можно свести к уравнению с положительным самосопряженным оператором, применяя оператор A^*:

$$A^*Aq = A^*f.$$

В этом случае регуляризирующий оператор записывается в виде

$$R_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}A^*.$$

2.5. Метод регуляризации Тихонова

Во многих некорректных задачах $Aq = f$ класс возможных решений $M \subset Q$ не является компактом, а ошибки измерений данных f могут выводить за пределы класса существования решения $A(M)$. Для построения приближенных решений таких задач можно использовать предложенный А. Н. Тихоновым [47, 48] метод регуляризации.

Приведем сначала общее определение регуляризирующего алгоритма для задачи $Aq = f$ [8]. Предположим, что Q и F — банаховы пространства, $A\colon Q \to F$ — линейный ограниченный оператор, имеющий обратный. Пусть вместо оператора A и правой части f нам известны их приближения A_h и f_δ, удовлетворяющие условиям

$$\|A - A_h\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\|_F \leq \delta.$$

Напомним, что норма оператора $A\colon Q \to F$ определяется по формуле

$$\|A\| = \sup_{\substack{q\in Q\\ q\neq \mathbf{0}}} \frac{\|Aq\|_F}{\|q\|_Q}.$$

В дальнейшем для упрощения записи мы не будем указывать пространство при упоминании нормы его элементов.

Обозначим $\overline{B(A,h)} = \{A_h\colon Q \to F$ такие, что $\|A - A_h\| \leq h\}$, $\overline{B(f,\delta)} = \{f_\delta \in F : \|f - f_\delta\| \leq \delta\}$.

Определение 1. Семейство отображений $R_{\delta h}\colon \overline{B(f,\delta)} \times \overline{B(A,h)} \to Q$ называется регуляризирующим алгоритмом для задачи $Aq = f$, если

$$\sup_{f_\delta \in \overline{B(f,\delta)},\, A_h \in \overline{B(A,h)}} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \to 0$$

при $\delta \to 0$, $h \to 0$ для всех $f \in R(A) = A(Q)$. Множество $\{R_{\delta h}(f_\delta, A_h)\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $h \in (0, h_0]$, называется регуляризованным семейством приближенных решений задачи $Aq = f$.

Если о решении $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ известна априорная информация, например условие $q_{\text{т}} \in M \subset Q$, то в определении достаточно заменить множество $A^{-1}f$ на $A^{-1}f \cap M$. В большинстве случаев в дальнейшем будем предполагать, что оператор A задан точно.

Пусть $q_{\text{т}}$ — точное решение некорректной задачи $Aq = f$ для некоторого $f \in F$.

Определение 2 (регуляризирующее семейство)**.** Семейство операторов $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ называется регуляризирующим для задачи $Aq = f$, если:

1) для любого $\alpha > 0$ оператор $R_\alpha\colon F \to Q$ непрерывен;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha_* > 0$ такое, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$

$$\|R_\alpha f - q_{\text{т}}\| < \varepsilon;$$

другими словами,

$$\lim_{\alpha \to +0} R_\alpha f = q_{\text{т}}. \tag{1}$$

Если правая часть уравнения $Aq = f$ задана приближенно и известна погрешность δ исходных данных, $\|f - f_\delta\| \le \delta$, то регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ позволяет не только построить приближенное решение $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$, но и оценить уклонение приближенного решения $q_{\alpha\delta}$ от точного $q_{\text{т}}$. В самом деле, в силу неравенства треугольника имеем

$$\|q_{\alpha\delta} - q_{\text{т}}\| \le \|q_{\alpha\delta} - R_\alpha f\| + \|R_\alpha f - q_{\text{т}}\|. \tag{2}$$

При $\alpha \to +0$ второе слагаемое в правой части (2) стремится к нулю. В силу некорректности задачи оценка первого слагаемого при $\alpha \to +0$, $\delta \to +0$ является сложной проблемой, решаемой в каждой конкретной задаче с учетом особенностей этой задачи, а также априорной и/или апостериорной информации о точном решении.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда Q, F — банаховы пространства, $A\colon Q \to F$ — линейный вполне непрерывный оператор, R_α — линейный оператор при всех $\alpha > 0$. Предположим, что для $f \in F$ существует единственное решение $q_{\text{т}}$ и вместо f задано его приближение $f_\delta \in F$ такое, что

$$\|f - f_\delta\| \le \delta. \tag{3}$$

Оценим норму разности между точным решением $q_{\text{т}}$ и регуляризованным $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$:

$$\|q_{\text{т}} - q_{\alpha\delta}\| \le \|q_{\text{т}} - R_\alpha f\| + \|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\|. \tag{4}$$

Обозначим $\|q_{\text{т}} - R_\alpha f\| = \gamma(q_{\text{т}}, \alpha)$. В силу свойства (1) регуляризирующего семейства первое слагаемое в правой части (4) стремится к нулю при $\alpha \to +0$, т. е. $\lim\limits_{\alpha\to+0} \gamma(q_{\text{т}}, \alpha) = 0$.

Из линейности R_α и условия (3) следует, что

$$\|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\| \le \|R_\alpha\|\delta.$$

В силу некорректности задачи норма $\|R_\alpha\|$ не может быть равномерно ограниченной, иначе $\lim\limits_{\alpha\to+0} R_\alpha = A^{-1}$ и задача $Aq = f$ была бы классически корректной. Однако если α и δ стремятся к нулю согласованно, то правая часть полученной оценки

$$\|q_{\text{т}} - q_{\alpha\delta}\| \le \gamma(q_{\text{т}}, \alpha) + \|R_\alpha\|\delta$$

стремится к нулю. Обозначим $\omega(q_{\text{т}}, \delta) = \inf\limits_{\alpha>0}\{\gamma(q_{\text{т}}, \alpha) + \|R_\alpha\|\delta\}$ и покажем, что

$$\lim_{\delta\to0} \omega(q_{\text{т}}, \delta) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to0} \gamma(q_{\text{т}}, \alpha) = 0$, то найдется такое $\alpha_0(\varepsilon)$, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$

$$\gamma(q_{\text{т}}, \alpha) < \varepsilon/2.$$

Обозначим $\mu_0(\varepsilon) = \inf\limits_{\alpha\in(0,\alpha_0(\varepsilon))} \|R_\alpha\|$ и возьмем $\delta_0(\varepsilon) = \varepsilon/(2\mu_0(\varepsilon))$. Тогда при всех $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$

$$\inf_{\alpha>0}\{\|R_\alpha\|\delta\} \le \delta \inf_{\alpha\in(0,\alpha_0(\varepsilon))}\{\|R_\alpha\|\} \le \varepsilon/2.$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти $\alpha_0(\varepsilon)$ и $\delta_0(\varepsilon)$ такие, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$ и $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$

$$\|q_{\text{т}} - q_{\alpha\delta}\| < \varepsilon.$$

Для конкретных операторов A и семейств $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ зависимость между параметром регуляризации α и уровнем погрешности данных δ можно получить в явном виде.

Одним из наиболее известных способов построения регуляризирующего семейства является минимизация функционала Тихонова

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f_\delta\|^2 + \alpha\Omega(q - q^0).$$

Здесь q^0 — пробное решение; α — параметр регуляризации; Ω — стабилизирующий функционал, выбираемый обычно в виде нормы (или полунормы), например $\Omega(q) = \|q\|^2$. Стабилизатор Ω учитывает априорную информацию о степени гладкости точного решения (или о структуре решения) и определяет тип сходимости приближенных решений к точному при заданной зависимости $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Например, при численном решении интегральных уравнений первого рода, решение которых существует, единственно и является достаточно гладким, метод Тихонова эффективен при $\Omega(q) = \|q\|^2_{W_2^1}$ (см. [8] и приведенную там библиографию).

Рассмотрим регуляризирующий функционал $M(q, f_\delta, \alpha)$ в случае $\Omega(q) = \|q\|^2$:

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f_\delta\|^2 + \alpha\|q\|^2, \quad \alpha > 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть Q и F — гильбертовы пространства, A — линейный вполне непрерывный оператор. Тогда для любых $f \in F$ и $\alpha > 0$ функционал $M(q, f, \alpha) = \|Aq-f\|^2+\alpha\|q\|^2$ достигает своей нижней грани на единственном элементе q_α.*

Используя теорему 1, можно по приближенным данным $f_\delta \in F$, удовлетворяющим условию $\|f - f_\delta\| \le \delta$, построить приближенное решение $q_{\alpha\delta}$ и доказать его сходимость к точному решению $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ при согласованном стремлении к нулю параметров α и δ [11]. В самом деле, пусть нижняя грань функционала $M(q, f_\delta, \alpha)$ достигается в точке $q_{\alpha\delta}$, которая по теореме 1 существует и единственна.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует единственное решение $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$. Обозначим через $\{f_\delta\}_{\delta>0}$ семейство приближенных данных, каждый элемент которого удовлетворяет условию $\|f - f_\delta\| < \delta$. Тогда если при стремлении δ к нулю параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается так, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \delta^2/\alpha(\delta) = 0$, то элемент $q_{\alpha(\delta),\delta}$, на котором достигается минимум регуляризирующего функционала* (6), *стремится к точному решению $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$, т. е. $\lim\limits_{\delta\to 0} \|q_{\alpha(\delta),\delta} - q_{\text{т}}\| = 0$.*

Для более общего случая $A_h q = f_\delta$ справедлива следующая

Теорема 3 [16]**.** *Предположим, что оператор A_h и правая часть f_δ удовлетворяют условиям аппроксимации*

$$\|A_h - A\| \le h, \quad \|f - f_\delta\| \le \delta, \tag{7}$$

$h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$. Предположим также, что A и A_h — линейные ограниченные операторы, действующие из Q в F, Q и F — гильбертовы пространства. Пусть $q^0_{\text{н}}$ — нормальное относительно q^0 решение задачи $Aq = f$ (т. е. элемент, доставляющий минимум функционалу $\|q - q^0\|$ на множестве Q_f всех решений задачи $Aq = f$). Тогда при любых $\alpha > 0$, $q_0 \in Q$, $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ существует единственное решение $q^\alpha_{h\delta}$ задачи

$$\min\{\|A_h q - f_\delta\|^2 + \alpha\|q - q^0\|^2,\ q \in Q\}. \tag{8}$$

При этом если параметр регуляризации α удовлетворяет условиям ($\Delta = \sqrt{h^2 + \delta^2}$)

$$\lim_{\Delta\to 0} \alpha(\Delta) = 0, \quad \lim_{\Delta\to 0} \frac{(h+\delta)^2}{\alpha(\Delta)} = 0,$$

то

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\|q^{\alpha}_{h\delta}-q^{0}\right\|=0.$$

Пример 1 (задача дифференцирования). Пусть функция $f(x)\in C^1(0,1)$ задана приближенно с ошибкой

$$\|f-f\delta\|_{C(0,1)}<\delta.$$

Требуется по функции $f_\delta(x)\in C(0,1)$ вычислить приближенное значение производной $f'(x)$.

Некорректность данной задачи следует уже из того, что функция $f_\delta(x)$ вообще может не иметь производной. Но даже если $f'_\delta(x)$ существует, задача может оказаться неустойчивой. В самом деле, при добавлении к $f(x)$ ошибки вида $\delta\sin(x/\delta^2)$ получаем, что приближенная функция

$$f_\delta(x)=f(x)+\delta\sin(x/\delta^2)$$

стремится к $f(x)$ при $\delta\to 0$. В то же время разность между производными

$$f'_\delta(x)-f'(x)=\frac{1}{\delta}\cos(x/\delta^2)$$

бесконечно растет.

Рассмотрим простейшее регуляризирующее семейство $R_\alpha f(x)=(f(x+\alpha)-f(x))/\alpha$, где $x\in(0,1)$, $\alpha\in(0,1-x)$. Оценим уклонение $f'(x)-R_\alpha f_\delta(x)$ в некоторой фиксированной точке $x\in(0,1)$. В силу дифференцируемости $f(x)$

$$f(x+\alpha)=f(x)+f'(x)\alpha+o(\alpha),$$

поэтому

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}-f'(x)=\frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|f'(x)-R_\alpha f_\delta(x)|\le\left|f'(x)-\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}\right|\\ +\left|\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}-\frac{f_\delta(x+\alpha)-f_\delta(x)}{\alpha}\right|\le\frac{o(\alpha,x)}{\alpha}+\frac{2\delta}{\alpha}.\end{aligned}\tag{9}$$

В данном случае для того чтобы правая часть неравенства (9) стремилась к нулю, достаточно потребовать, чтобы α и δ стремились к нулю, но не произвольно, а с соблюдением условия $\delta/\alpha \to 0$, т. е. $\delta = o(\alpha)$.

Оценку (6) можно улучшить, если повысить требования на гладкость функции $f(x)$. Например, предположим существование второй производной $f''(x)$, ограниченной в некоторой окрестности $O(x, \varepsilon) = \{x' \in R : |x - x'| < \varepsilon\}$ точки x по модулю некоторой постоянной c_1:

$$\sup_{x' \in \mathscr{O}(x,\varepsilon)} |f''(x')| < c_1. \tag{10}$$

Возьмем $\alpha \in (0, \min\{\varepsilon, 1-x\})$ и воспользуемся формулой Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x+\alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + \frac{f''(x+\theta\alpha)\alpha^2}{2}, \quad \theta \in (0,1).$$

Отсюда

$$\left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| \le \frac{c_1 \alpha}{2}.$$

Таким образом, вместо (9) мы получим оценку

$$|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)| \le c_1\alpha/2 + 2\delta/\alpha. \tag{11}$$

Можно уточнить зависимость α от δ, например, если выбрать $\alpha > 0$ так, чтобы минимизировать правую часть (11). Минимум по α достигается на положительном решении уравнения

$$c_1/2 = 2\delta/\alpha^2,$$

т. е. при $\alpha = 2\sqrt{\delta/c_1}$. В этом случае

$$|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)| \le 2\sqrt{c_1\delta}.$$

Замечание 1. Можно построить и исследовать на сходимость и другие семейства регуляризирующих операторов, например, $R_\alpha f(x) = (f(x) - f(x-\alpha))/\alpha$, $R_\alpha f(x) = (f(x+\alpha) - f(x-\alpha))/(2\alpha)$.

Замечание 2. Мы оценивали уклонение $|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)|$ в окрестности произвольной фиксированной точки $x \in (0,1)$. Ясно, что оценка (11) будет справедлива для всех $x \in (0,1)$, если условие (10) заменить на $\|f''\|_{C(0,1)} < \mathrm{const}$. (Более подробно о точечной и равномерной регуляризации см. [16].)

Регуляризирующая последовательность. Иногда при построении регуляризирующего семейства вместо вещественного параметра $\alpha \to 0$ выбирают натуральное число n, стремящееся к бесконечности. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2 (разложение по собственным функциям). Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $A\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — линейный вполне непрерывный положительный самосопряженный оператор, а $\{\varphi_n\}$, $\{\lambda_n\}$ — соответствующие последовательности собственных функций и собственных значений оператора A ($\lambda_{k+1} \le \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$). Точное решение $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$ представимо в виде

$$q_{\text{т}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k}\, \varphi_k, \quad f_k = \langle f, \varphi_k \rangle. \tag{12}$$

Поскольку решение существует и принадлежит гильбертову пространству, ряды (12) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{f_k}{\lambda_k}\right)^2$ сходятся. Но если для $f_\delta \in \mathscr{H}$, удовлетворяющего условию $\|f - f_\delta\| < \delta$, не существует решения уравнения $Aq = f_\delta$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{f_{\delta k}}{\lambda_k}\right)^2$, $f_{\delta k} = \langle f_\delta, \varphi_k \rangle$, расходится (см. критерий Пикара). Построим последовательность операторов $\{R_n\}$ таких, что

$$R_n f_\delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{\delta k}}{\lambda_k} \varphi_k, \tag{13}$$

и покажем, что она обладает всеми свойствами регуляризирующего семейства при $n \to \infty$. Операторы R_n, очевидно, непрерывны, $\|R_n\| = 1/\lambda_n$ и при всех $q \in Q$

$$\lim_{n\to\infty} R_n A q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi_k = q, \quad q_k = \langle q, \varphi_k \rangle.$$

Но тогда для точного решения (12) уравнения $Aq = f$ и регуляризованного решения $q_{\delta n} = R_n f_\delta$ справедлива оценка

$$\|q_{\text{т}} - q_{\delta n}\| \le \|q_{\text{т}} - R_n f\| + \|R_n f - R_n f_\delta\|$$
$$\le \|q_{\text{т}} - R_n A q_{\text{т}}\| + \|R_n(f - f_\delta)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2 + \|R_n\|\delta = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2 + \frac{\delta}{\lambda_n}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно сначала выбрать номер n_0 такой, чтобы $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} q_k^2 < \varepsilon/2$, а затем выбрать $\delta > 0$ из условия $\delta < \lambda_n \varepsilon/2$. Тогда получаем, что при всех $n > n_0$ и $\delta \in (0, \lambda_n \varepsilon/2)$ выполнено неравенство $\|q_{\text{т}} - q_{\delta n}\| < \varepsilon$.

Пример 3 (метод последовательных приближений)**.** Пусть выполнены все условия примера (2) и дополнительно $\lambda_1 < 1$. Определим последовательность $\{q_n\}$ по правилу

$$q_{n+1} = q_n - Aq_n + f, \quad q_0 = f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Покажем, что если существует точное решение $q_{\text{т}} \in Q$ уравнения $Aq = f$, то

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q_{\text{т}}.$$

В самом деле,

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} (E - A)^k f = \sum_{k=0}^{n} (E - A)^k A q_{\text{т}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$q_{\text{т}} - q_n = (E - A)^{n+1} q_{\text{т}}. \qquad (14)$$

Разложим (14) по базису $\{\varphi_n\}$:

$$q_{\text{т}} - q_n = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{n+1} q_k \varphi_k, \quad q_k = \langle q_{\text{т}}, \varphi_k \rangle.$$

Следовательно,

$$\|q_{\text{т}} - q_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{2(n+1)} q_k^2.$$

Завершить доказательство мы предоставляем читателю.

Упражнение 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|q_{\text{т}} - q_n\| = 0$.

Упражнение 2. Доказать, что последовательность операторов, определяемых равенством $R_n f = \sum\limits_{k=0}^{n} (E-A)^k f$, является регуляризирующей и $\|R_n\| = n+1$.

2.6. Градиентные методы

Идея замены исходного уравнения (задачи)

$$Aq = f \tag{1}$$

задачей поиска минимума целевого функционала

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \to \min \tag{2}$$

восходит к работам А. Лежандра [57] и К. Гаусса [55], предложивших метод наименьших квадратов для решения систем алгебраических уравнений. О. Коши [52] разработал метод наискорейшего спуска для решения задачи о минимуме функции n переменных. Л. В. Канторович [19] предложил решать линейные операторные уравнения $Aq = f$ в гильбертовых пространствах, минимизируя функционал $H(q) = \langle Aq, q\rangle - 2\langle f, q\rangle$ методом наискорейшего спуска и исследовал его сходимость в случае $m\langle q,q\rangle \le \langle Aq,q\rangle \le M\langle q,q\rangle$, $m > 0$, наметив путь исследования и для случая $m = 0$. Вместо $H(q)$ мы будем использовать более распространенный на практике функционал $J(q)$. Отметим, что в случае $A = A^*$ градиент $H'q$ функционала $H(q)$ равен $2(Aq - f)$ и его убывание по q означает, что q приближается к решению уравнения $Aq = f$.

В данном разделе мы кратко изложим общую структуру нескольких градиентных методов решения операторного уравнения $Aq = f$ и обсудим вопросы сходимости этих методов в случае, когда задача $Aq = f$ некорректна. Более детально градиентные методы и их применение в обратных задачах изложены в [2].

Структура градиентных методов. Рассмотрим случай, когда Q, F — гильбертовы пространства, A — дифференцируемый по Фреше оператор, действующий из Q в F. Решение уравнения $Aq = f$ будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle = \|Aq - f\|^2.$$

Лемма 1. *Если оператор A дифференцируем по Фреше, то функционал $J(q)$ также дифференцируем и его градиент $J'q$ выражается через оператор A' по формуле*

$$J'q = 2(A'q)^*(Aq - f). \tag{3}$$

Замечание 1. Если A — линейный оператор, то $J'q = 2A^*(Aq - f)$.

Простейшие из градиентных методов записываются в форме

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n. \tag{4}$$

Здесь способ задания положительного параметра α_n определяет тот или иной метод. Всюду ниже предполагаем, что A — линейный оператор.

Теорема 1. *Пусть $A\colon Q \to F$ — линейный непрерывный оператор, Q и F — гильбертовы пространства, а операторы A и A^* имеют нулевые ядра. Тогда функционал*

$$J(q) = \|Aq - f\|^2$$

не может иметь более одной стационарной точки.

Рассмотрим несколько градиентных методов:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad q_n \in Q, \quad \alpha_n > 0,$$

для которых параметр спуска α_n либо фиксирован, либо выбирается из условия минимума некоторого функционала качества. Как и ранее, обозначим через $q_{\text{т}}$ точное решение задачи $Aq = f$ (возможно, неединственное).

Метод простой итерации (метод итераций Ландвебера в теории некорректных задач). Параметр α_n фиксирован:

$$\alpha_n = \alpha \in (0, 1/\|A\|^2).$$

Метод минимальных ошибок. Параметр α_n выбирается из условия минимума по α величины

$$\begin{aligned}\|q_{n+1} - q_{\text{т}}\|^2 &= \|q_n - \alpha J' q_n - q_{\text{т}}\|^2 \\ &= \|q_n - q_{\text{т}}\|^2 - 2\alpha\langle q_n - q_{\text{т}}, J' q_n\rangle + \alpha^2 \|J' q_n\|^2.\end{aligned}$$

Этот минимум достигается в точке

$$\alpha_n = \frac{\langle q_n - q_т, J'q_n\rangle}{\|J'q_n\|^2} = \frac{\langle q_n - q_т, 2A^*(Aq_n - f)\rangle}{\|J'q_n\|^2}$$
$$= 2\frac{\langle Aq_n - f, Aq_n - f\rangle}{\|J'q_n\|^2} = \frac{2J(q_n)}{\|J'q_n\|^2}.$$

Отметим, что $q_т$ входит в выражение $\|q_{n+1} - q_т\|^2$, но шаг спуска не зависит от $q_т$.

Замечание 2. Условия $J(q_n) \neq 0$ и $J'q_n \neq 0$ будут использоваться далее при анализе градиентных методов. Первое из условий должно проверяться перед каждым очередным шагом спуска. Если даже $J(q_n) \neq 0$, но очень мало, то дальнейшие вычисления могут не иметь смысла. Тем более при $J(q_n) = 0$ процесс необходимо остановить, поскольку мы получили искомое решение: $q_т = q_n$.

Второе условие $J'q_n \neq 0$ означает, что мы не попадаем на минимум функционала.

Метод наискорейшего спуска. Параметр α_n выбирается из условия минимума по α выражения

$$J(q_{n+1}) = J(q_n - \alpha J'q_n) = \|Aq_n - \alpha AJ'q_n - f\|^2$$
$$= \|Aq_n - f\|^2 - 2\langle Aq_n - f, \alpha AJ'q_n\rangle + \alpha^2\|AJ'q_n\|^2$$
$$= J(q_n) - \alpha\|J'q_n\|^2 + \alpha^2\|AJ'q_n\|^2.$$

Упражнение 1. Доказать, что минимум достигается в точке

$$\alpha_n = \frac{\|J'q_n\|^2}{2\|AJ'q_n\|^2}.$$

В случае, когда A имеет непрерывный обратный оператор, методы простой итерации, минимальных ошибок и наискорейшего спуска имеют линейную скорость сходимости. Для их реализации требуется минимальный (по сравнению с другими методами, например методом сопряженных градиентов) объем вычислений на каждую итерацию.

Метод	Параметр спуска α
простой итерации	$\alpha = \text{const} \in (0, \|\|A\|\|^{-2})$
минимальных ошибок	$\alpha_n = 2J(q_n)\\|J'q_n\\|^{-2}$
наискорейшего спуска	$\alpha_n = (1/2)\\|J'q_n\\|^2\\|AJ'q_n\\|^{-2}$

Метод сопряженных градиентов. Сначала задается q_0 и вычисляется $p_0 = J'q_0$. Предположим, что q_n и p_n уже вычислены.

На шаге $n+1$ сначала вычисляется вспомогательная функция

$$p_n = J'q_n + \|J'q_n\|^2\|J'q_{n-1}\|^{-2}p_{n-1},$$

далее — параметр спуска

$$\alpha_n = \frac{\langle J'q_n, p_n\rangle}{\|Ap_n\|^2},$$

а затем приближенное решение

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n p_n.$$

Исследование вопросов сходимости градиентных методов. Рассмотрим случай, когда A — линейный непрерывный оператор, а уравнение $Aq = f$ имеет более одного решения. В этом случае можно ввести дополнительные условия на искомое решение, например, потребовать, чтобы решение было минимальным по норме или самым близким к некоторому заьу данному элементу $q^0 \in Q$. Обозначим $Q_f = \{q \in Q\colon\ Aq = f\}$.

Определение 1. Нормальным относительно $q^0 \in Q$ решением уравнения $Aq = f$ назовем то решение $q^0_{\text{н}} \in Q_f$, которое имеет наименьшее уклонение от q^0, т. е.

$$\left\|q^0_{\text{н}} - q^0\right\| = \min_{q\in Q_f} \|q - q^0\|.$$

Нормальное относительно нулевого элемента решение уравнения $Aq = f$ называется нормальным решением и обозначается $q_{\text{н}}$:

$$\|q_{\text{н}}\| = \min_{q\in Q_f} \|q\|.$$

Замечание 3. Обычно элемент q^0 выбирают с учетом априорной информации об искомом решении.

Рассмотрим задачу нахождения нормального относительно некоторого $q^0 \in Q$ решения уравнения $Aq = f$. Как и ранее, обозначим область значений оператора A через

$$R(A) = A(Q) = \{f \in F : \exists q \in Q\text{ьу такой, что } Aq = f\}. \qquad (6)$$

Результаты по сходимости градиентных методов и их устойчивости к погрешностям в правой части, полученные для корректных задач, переносятся и на случай нахождения нормального относительно q^0 решения, если область значений $R(A)$ оператора A замкнута.

Если $R(A)$ не замкнуто, то и в случае единственности решения уравнения $Aq = f$ не всякая минимизирующая последовательность будет сходящейся, так как A^{-1} не ограничен. Однако можно показать, что минимизирующая последовательность, построенная градиентными методами, сходится по функционалу ($J(q_n) \searrow 0$ при $n \to \infty$) и по норме ($\|q_n - q^0_{\text{н}}\| \to 0$ при $n \to \infty$) к нормальному относительного начального приближения $q^0 = q_0$ решению уравнения $Aq = f$.

Пусть A — линейный непрерывный оператор, не имеющий ограниченного обратного оператора. Предположим, что уравнение

$$Aq = f \qquad (7)$$

имеет решение, но, возможно, неединственное.

Рассмотрим метод простой итерации для решения уравнения (7):

$$\begin{gathered} q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \\ q_0 \in Q, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \alpha = \text{const} \in (0, 1/\|A\|^2). \end{gathered} \qquad (8)$$

Ограничения на α потребуются при обосновании сходимости.

Лемма 2. *При всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо равенство*

$$J(q_n) - J(q_{n+1}) = \alpha \|J' q_n\|^2 - \alpha^2 \|A J' q_n\|^2. \qquad (9)$$

Лемма 3. *Пусть $q_{\text{т}} \in Q_f$ — одно из решений* (7). *Тогда при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеет место равенство*

$$\|q_n - q_{\text{т}}\|^2 - \|q_{n+1} - q_{\text{т}}\|^2 = 4\alpha J(q_n) - \alpha^2 \|J' q_n\|^2. \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь метод наискорейшего спуска

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad q_0 \in Q, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{11}$$

$$\alpha_n = \arg\min_{\alpha \geq 0} J(q_n - \alpha J' q_n). \tag{12}$$

Лемма 4. *Последовательность, определяемая формулами* (11), (12), *обладает свойствами*

$$J(q_n) - J(q_{n+1}) = \frac{\alpha_n}{2} \, \|J' q_n\|^2, \tag{13}$$

$$\alpha_n = \|J' q_n\|^2 / (2\|AJ' q_n\|^2). \tag{14}$$

Лемма 5. *Пусть $q_{\text{т}} \in Q$ — одно из решений задачи* (7). *Тогда при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо равенство*

$$\|q_n - q_{\text{т}}\|^2 - \|q_{n+1} - q_{\text{т}}\|^2 = 2\alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})). \tag{15}$$

Лемма 6. *Если α_n выбрано из условия* (12), *то при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2\|A\|^2} \leq \alpha_n. \tag{16}$$

Теорема 2. *Если решение задачи $Aq = f$ существует и единственно, то последовательность приближенных решений* (11), (12), *полученная методом наискорейшего спуска, сходится к точному решению $q_{\text{т}}$ уравнения $Aq = f$.*

Доказательство. Из лемм 4 и 5 следует, что

$$0 < J(q_{n+1}) < J(q_n), \tag{17}$$

$$0 < \|q_{n+1} - q_{\text{т}}\| < \|q_n - q_{\text{т}}\|, \tag{18}$$

т. е. последовательности $\{J(q_n)\}$, $\{\|q_n - q_{\text{т}}\|\}$ положительны и монотонно убывают, а значит, имеют предел.

Суммируем неравенство (15) по $n = \overline{0, k}$:

$$\|q_0 - q_{\text{т}}\|^2 - \|q_{k+1} - q_{\text{т}}\|^2 = 2 \sum_{n=0}^{k} \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})). \tag{19}$$

Поскольку последовательность $\{\|q_n - q_т\|\}$ имеет предел, из (19) следует, что для всех $k \in \beta N \cup \{0\}$

$$2\sum_{n=0}^{k} \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})) \le C,$$

где C — некоторая константа. С другой стороны, ввиду (16)

$$2\sum_{n=0}^{k} \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})) \ge \frac{1}{\|A\|}\sum_{n=0}^{k} (J(q_n) + J(q_{n+1})) \ge \frac{2}{\|A\|}\sum_{n=0}^{k+1} J(q_n).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{k} J(q_n) \le C$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(q_n) < \infty. \tag{20}$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} J(q_n) = 0$ и $\{q_n\}$ — минимизирующая последовательность.

Из (18) следует ограниченность последовательности $\{q_n\}$. Поэтому существуют подпоследовательности $\{q_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, и $q_c \in Q$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \langle q, q_{n_k}\rangle = \langle q, q_c\rangle$ для всех $q \in Q$.

Заметим, что из непрерывности A следует его слабая непрерывность. Действительно, $A^*\varphi = w \in R(A^*) \subset Q$ для любого $\varphi \in F$. Значит, $\langle q_{n_k}, w\rangle = \langle Aq_{n_k}, \varphi\rangle$ и $\langle w, q_c\rangle = \langle \varphi, Aq_c\rangle$. Следовательно, последовательность $\{Aq_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится слабо к Aq_c. Но $\{q_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, также является минимизирующей последовательностью, т. е. $\{Aq_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится сильно (а значит, и слабо) к f. Поэтому $Aq_c = f$ и в силу единственности решения задачи $Aq = f$ заключаем, что $q_c = q_т$.

2.7. Псевдообратный оператор и сингулярное разложение оператора

В данном разделе мы изучим два важнейших (и взаимосвязанных) понятия — псевдообратный оператор и сингулярное разложение линейного оператора.

Любой непрерывный линейный оператор $A\colon Q \to F$, действующий из гильбертова пространства Q в гильбертово пространство F, порождает разложение пространств в прямые ортогональные суммы

$$Q = N(A) \oplus N(A)^{\perp} = N(A) \oplus \overline{R(A^*)},$$
$$F = N(A^*) \oplus N(A^*)^{\perp} = N(A^*) \oplus \overline{R(A)},$$

где A^* — сопряженный к A оператор, $N(A)$ и $N(A^*)$ — ядра операторов A и A^*, $R(A)$ и $R(A^*)$ — образы операторов A и A^* соответственно. Это разложение индуцирует пару ортогональных проекторов $P_{N(A)}$ и $P_{\overline{R(A)}}$ таких, что

$$P_{N(A)}\colon Q \to Q, \quad R(P_{N(A)}) = N(A);$$
$$P_{\overline{R(A)}}\colon F \to F, \quad R(P_{\overline{R(A)}}) = \overline{R(A)}.$$

В свою очередь, эта пара ортогональных проекторов единственным образом определяет псевдообратный оператор $A^{\dagger}$, который в данном случае называется также ортогональным обобщенным обратным или обобщенным обратным оператором и определяется соотношениями [59]

$$D(A^{\dagger}) = R(A) \oplus N(A^*), \tag{1}$$
$$AA^{\dagger} f = P_{\overline{R(A)}} f \quad \text{для всех} \quad f \in D(A^{\dagger}), \tag{2}$$
$$A^{\dagger} A q = (I - P_{N(A)}) q \quad \text{для всех} \quad q \in Q. \tag{3}$$

Псевдообратный оператор плотно определен в F и представляется на своей области определения в виде

$$A^{\dagger} = \big(A\big|_{R(A^*)}\big)^{-1} P_{\overline{R(A)}},$$

где $A\big|_{R(A^*)}$ есть сужение оператора A на линейное многообразие $R(A^*)$. Причем $A^{\dagger}$ является непрерывным на всем F тогда и только тогда, когда $\overline{R(A)} = R(A)$.

Псевдообратный оператор выделяется из всех других обобщенных обратных тем, что он тесно связан с псевдорешениями операторного уравнения

$$Aq = f. \tag{4}$$

Определение 1. Элемент $q_{\text{п}} \in Q$ называется псевдорешением уравнения $Aq = f$ (или решением в смысле наименьших квадратов), если

$$\|Aq_{\text{п}} - f\}^2 = \inf_{q \in Q} \|Aq - f\|^2.$$

Другими словами, $q_{\text{п}} = \arg\min_{q \in Q} \|Aq - f\|^2$.

Следует отметить, что понятие псевдорешения аналогично понятию квазирешения — с той лишь разницей, что квазирешение ищется не на всем пространстве Q, а на некотором его множестве $M \subset Q$. Однако это различие может играть существенную роль, так как часто задача поиска квазирешения исследуется в предположении, что множество M обладает определенными свойствами, например компактно.

Если при фиксированном $f \in F$ через $Q_f^{\text{п}}$ обозначить множество всех псевдорешений уравнения $Aq = f$, то

$$Q_f^{\text{п}} = \{q_{\text{п}} : \|Aq_{\text{п}} - f\| = \inf_{q \in Q} \|Aq - f\|\} = \{q : Aq = P_{\overline{R(A)}} f\},$$

откуда следует, что $Q_f^{\text{п}}$ не пусто тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. В этом случае $Q_f^{\text{п}}$ есть выпуклое замкнутое множество и $Q_f^{\text{п}}$ содержит в себе элемент минимальной длины $q_{\text{нп}}$ — псевдорешение минимальной нормы [59], называемое также нормальным (относительно нулевого элемента) псевдорешением уравнения $Aq = f$. Связь $q_{\text{нп}}$ и псевдообратного оператора дается следующей теоремой.

Теорема 1 [59]**.** *Уравнение $Aq = f$ имеет псевдорешение минимальной нормы $q_{\text{нп}}$ тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. При этом $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$, где $A^\dagger$ — псевдообратный оператор, определяемый соотношениями* (1)–(3).

Задачи $Aq = f$ с компактным линейным оператором A составляют один из наиболее важных и интересных классов некорректных задач. Достаточно отметить, что к таким задачам относятся интегральные уравнения первого рода при достаточно общих предположениях относительно ядра. Наиболее естественным методом исследования (а зачастую и численного решения) таких задач является метод сингулярного разложения.

Пусть сначала A — линейный компактный самосопряженный ($A = A^*$) оператор. И пусть для A существует собственная система $\{\lambda_n, \varphi_n\}$, которая состоит из ненулеых собственных значений $\{\lambda_n\}$ и полной ортогональной последовательности соответствующих собственных векторов $\{\varphi_n\}$ (т. е. таких, что $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$), с помощью которых оператор A может быть «диагонализирован», т. е. представлен в виде

$$Aq = \sum_n \lambda_n \langle q, \varphi_n\rangle \varphi_n$$

для всех $q \in Q$.

Если же оператор $A\colon Q \to F$ не является самосопряженным, но является линейным и компактным, а пространства Q и F гильбертовы и сепарабельны, то, используя связь между уравнениями $Aq = f$ и $A^*Aq = A^*f$, можно построить аналог собственной системы $\{\lambda_n, \varphi_n\}$, который будем называть сингулярной системой $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$ оператора A. Сначала приведем формальное определение. Пусть $A\colon Q \to F$ — линейный компактный оператор, Q и F — сепарабельные (т. е. имеющие счетный базис) гильбертовы пространства. Совокупность $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n \geq 0$, $u_n \in F$, $v_n \in Q$, будем называть *сингулярной системой оператора* A, если выполняются следующие условия:

- последовательность $\{\sigma_n\}$ состоит из неотрицательных чисел таких, что $\left\{\sigma_n^2\right\}$ — последовательность собственных значений оператора A^*A, расположенных в порядке невозрастания с учетом кратности;
- последовательность $\{v_n\}$ состоит из соответствующих $\left\{\sigma_n^2\right\}$ собственных векторов оператора A^*A (и является ортогональной и полной, $\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*A)}$);
- последовательность $\{u_n\}$ определяется через $\{v_n\}$ по правилу $u_n = Av_n/\|Av_n\|$.

Последовательность $\{u_n\}$ является ортонормированной полной системой собственных векторов оператора AA^*, при этом

$$Av_n = \sigma_n u_n, \quad A^*u_n = \sigma_n v_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и справедливы разложения

$$Aq = \sum_n \sigma_n \langle q, v_n \rangle u_n, \quad A^* f = \sum_n \sigma_n \langle f, u_n \rangle v_n.$$

Бесконечные ряды в разложениях сходятся по норме гильбертовых пространств Q и F соответственно и называются сингулярным разложением оператора A (по аналогии с сингулярным разложением матрицы).

Структура образа $R(A)$ и образа сопряженного оператора A^* описываются следующей теоремой [21, 58].

Теорема 2 (о сингулярном разложении компактного оператора)**.** *Если $A\colon Q \to F$ есть линейный компактный оператор из сепарабельного гильбертова пространства Q в сепарабельное гильбертово пространство F, то существуют ортонормированные последовательности функций $\{v_n\} \subset Q$ (правые сингулярные векторы), $\{u_n\} \subset F$ (левые сингулярные векторы) и невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{\sigma_n\}$ (сингулярные числа) такие, что*

$$Av_n = \sigma_n u_u, \quad A^* u_n = \sigma_n v_n,$$
$$\overline{\mathrm{span}\{v_n\}} = \overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp}, \quad \overline{\mathrm{span}\{u_n\}} = \overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp},$$

причем множество $\{\sigma_n\}$ не имеет предельных точек, отличных от нуля.

Отметим еще одно важное свойство, присущее компактным операторам [21, 20]: отличные от нуля сингулярные числа компактного оператора имеют конечную кратность.

Следствие 1. *Если A — компактный оператор, то*:

1) *справедлив критерий Пикара разрешимости задачи $Aq = f$: задача разрешима, т. е. $f \in R(A) \oplus N(A^*)$, в том и только в том случае, если*

$$\sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{\langle f, u_n \rangle^2}{\sigma_n^2} < \infty;$$

2) *для любого $f \in R(A) \oplus N(A^*)$ элемент*

$$A^{\dagger} f = \sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$$

есть нормальное псевдорешение уравнения $Aq = f$.

Замечание 1. Оператор $A^\dagger$ является ограниченным на всем пространстве F тогда и только тогда, когда его образ $R(A)$ является замкнутым подпространством F. В то же время образ компактного оператора замкнут тогда и только тогда, когда он имеет конечную сингулярную систему $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$. Следовательно, если сингулярная система компактного линейного оператора A бесконечна, то $A^\dagger$ неограничен.

Если $f \in D(A^\dagger)$, то уравнение $Aq = f$ имеет единственное нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$, при этом псевдорешения $q_{\text{п}}$, и только они, являются решением уравнения $A^*Aq = A^*f$, которое называется нормальным по отношению к уравнению $Aq = f$.

Разложение

$$q_{\text{нп}} = A^\dagger f = \sum_n \frac{\langle f, u_n\rangle}{\sigma_n} v_n$$

показывает, как ошибки в задании данных f влияют на результат $q_{\text{нп}}$: ошибки в задании компонент $f_n = \langle f, u_n\rangle$, соответствующие малым сингулярным числам σ_n, делятся на малое число σ_n и, значит, неограниченно увеличиваются с ростом n. Это позволяет построить пример Адамара, показывающий неустойчивость задачи $Aq = f$ с линейным компактным оператором A. В самом деле, пусть $q_{\text{т}} \in Q$ — точное решение задачи $Aq = f$, а возмущение в правой части f имеет вид δu_n, $\delta \in \mathbb{R}_+$. Тогда решение $q_{\delta n}$ задачи $Aq = f + \delta u_n$ отличается от точного на величину

$$q_{\text{т}} - q_{\delta n} = \frac{\langle \delta u_n, u_n\rangle}{\sigma_n} v_n.$$

Но тогда, с одной стороны, ошибка задания правой части $\|f - f_{\delta n}\| = \delta$ не зависит от n и может быть сколь угодно малой. С другой стороны, соответствующая ошибка в решении $\|q_{\text{т}} - q_{\delta n}\| = \delta/\sigma_n$ стремится к бесконечности с ростом n, и тем быстрее, чем быстрее убывает последовательность сингулярных чисел $\{\sigma_n\}$. Таким образом, некорректность задачи $Aq = f$ непосредственно связана с характером убывания σ_n, что позволяет классифицировать некорректные задачи по степени некорректности. Так, задачу $Aq = f$ называют слабо некорректной, если $\sigma_n = O(n^{-\gamma})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}_+$, и сильно некорректной в других случаях (например, при $\sigma_n = O(e^{-n})$).

Сингулярное разложение оператора A позволяет построить метод регуляризации задачи $Aq = f$, основанный на проектировании:

$$q_{\delta n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle f_{\delta n}, u_j \rangle}{\sigma_j} v_j.$$

Можно показать, что

$$\|q_{\delta n} - q_{\text{нп}}\| = O(\sigma_{n+1} + \delta/\sigma_n), \quad n \to \infty.$$

Введем в рассмотрение системы подпространств и соответствующие им ортогональные проекторы:

$$\begin{gathered} Q_r = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\} \subset Q, \\ P_{Q_r} \colon Q \to Q, \quad P_{Q_r}(Q) = Q_r, \\ F_r = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\} \subset F, \\ P_{F_r} \colon F \to F, \quad P_{F_r}(F) = F_r, \end{gathered}$$

причем номера r выбираются так, чтобы $\lambda_r > \lambda_{r+1}$. Такое ограничение связано с тем, что при $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ ортогональные проекторы P_{Q_r}, P_{F_r} определены некорректно в том смысле, что они оказываются зависящими от нумерации сингулярной системы.

Определение 2. Оператор $A_r^\dagger = A^\dagger P_{F_r} \colon F \to Q$ называется r-псевдообратным оператором, а элемент

$$q_{(r)} = A_r^\dagger f = \sum_{n=1}^{r} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$$

обобщенным нормальным r-решением (в дальнейшем просто r-решением) операторного уравнения (4).

Оператор $A_r^\dagger$ очевидно определен и ограничен на всем пространстве F. Для всех $f \in F_r \subset R(A)$ справедливо равенство $A_r^\dagger f = A^\dagger f$, а для всех $f \in R(A) \oplus N(A^*)$ выполнено $A_r^\dagger f = P_{Q_r}(A^\dagger f)$. Далее, так как $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{N}} Q_r = R(A^*)$, очевидно, что для всех $f \in D(A^\dagger)$ и $\delta > 0$ существует $r(\delta, f)$ такой, что $\left\|A^\dagger f - A_r^\dagger f\right\| < \delta$. Таким образом, семейство операторов $A_r^\dagger$ можно рассматривать как аппроксимирующее для псевдообратного оператора $A^\dagger$ на его области определения.

При численном решении уравнения (4) ни сам оператор A, ни правая часть f не известны точно. Вместо них заданы A_h и f_δ такие, что $\|A - A_h\| \le h$, $\|f - f_\delta\| \le \delta$ (погрешности численной аппроксимации оператора и ошибки измерений), причем правая часть f_δ, вообще говоря, не принадлежит области определения псевдообратного оператора $A_h^\dagger$ (даже если $f \in D(A^\dagger)$). Поэтому не имеет смысла рассматривать поведение величины $\left\|A^\dagger f - A_h^\dagger f_\delta\right\|$ при $\delta, h \to 0$. В то же время, так как операторы $A_r^\dagger$ и $A_{hr}^\dagger$ определены и ограничены на всем пространстве F, разность $\|A_r^\dagger f - A_{hr}^\dagger f\|$ характеризует точность вычисления проекции решения уравнения (4) на первые r сингулярных векторов.

Понятие r-решения системы алгебраических уравнений $Aq = f$ позволяет строить численно устойчивые алгоритмы решения, если число обусловленности матрицы

$$\mu_r(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A)},$$

параметр зазора в сингулярном спектре

$$d_r(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A) - \sigma_{r+1}(A)}$$

и параметр несовместности системы

$$\theta_r(A, f) = \frac{\|Aq_{(r)} - f\|}{\sigma_r(A)\|q_{(r)}\|}$$

не слишком велики. Во всяком случае, ограничение на величину допустимых возмущений h, δ выражается в терминах величин $\mu_r(A)$, $d_r(A)$, $\theta_r(A, f))$ [9, 18].

3. Классические задачи

3.1. Математическое описание основных законов и уравнений математической физики

Математическое описание физических явлений состоит в том, что каждой точке пространства (или области пространства) в каждый момент времени ставятся в соответствие числа или векторы, соответствующие свойствам материи в этой точке. Если свойство материи описывается одним числом, то говорят, что имеется скалярное поле, если вектором — векторное поле. Примеры скалярных полей — плотность, температура, давление. Примеры векторных полей — скорость частицы текущей жидкости, напряженность силового поля, в частности гравитационного, магнитного, электрического.

Из физических законов следует, что поля и их производные связаны определенными соотношениями. Говоря иначе, поля удовлетворяют дифференциальным уравнениям или системам дифференциальных уравнений. Множество явлений природы, которые описываются дифференциальными уравнениями, весьма обширно. Дифференциальные уравнения описывают химические реакции, биологические процессы самой различной природы

Приведем уравнения для некоторых основных физических полей. При этом мы ограничиваемся теми полями, уравнения для которых исследуются в нашей книге.

Гравитационное поле. Уравнение для гравитационного поля следует из закона тяготения Ньютона: две материальные частицы с массами m, M притягиваются друг к другу с силой $\mathscr{F}$, равной

$$\mathscr{F} = kmM/r^2, \tag{1}$$

где r — расстояние между частицами, k — гравитационная постоянная.

Из (1) следует, что гравитационное поле, порожденное распределением масс в пространстве с плотностью ρ, имеет потенциал φ:

$$\mathscr{F} = \operatorname{grad} \varphi$$

и потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho. \tag{2}$$

Электрические и магнитные поля. Постоянное электрическое поле, как и гравитационное, имеет потенциал u:

$$E = \operatorname{grad} u,$$

и этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность объемных электрических зарядов, ε — диэлектрическая постоянная.

Постоянное магнитное поле удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}j, \quad \operatorname{div} H = 0. \tag{4}$$

Здесь j — вектор плотности тока.

В части пространства, где отсутствуют токи, магнитное поле имеет потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$H = \operatorname{grad} v, \quad \Delta v = 0.$$

Электромагнитное поле. Переменное электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}, \quad \operatorname{div}\mathscr{D} = 4\pi\rho,\\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad j = \sigma(E + E').\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $B = \mu H$ — вектор магнитной индукции, $\mathscr{D} = \varepsilon E$ — вектор электрической индукции, μ — магнитная проницаемость, σ — электропроводность, c — скорость света, E' — напряженность электрического поля, вызванная внешними источниками.

Отметим, что уравнения (3), (4) следуют из системы (5) в случае, если ε, μ постоянны.

Система (5) является в общем случае весьма сложной. Рассмотрим случай, когда система (5) описывает электромагнитное поле в пустоте или в воздухе. В этом случае

$$\mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \sigma = 0.$$

Предположим, кроме того, что отсутствуют объемные электрические заряды, т. е. $\rho = 0$. В этом случае система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{div} E = 0, \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{div} H = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из последнего равенства в (6) следует, что у поля H существует векторный потенциал A:

$$H = \operatorname{rot} A. \tag{7}$$

Подставляя (7) в третье из равенств (6), получим

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + cE\right) = 0. \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\frac{\partial A}{\partial t} + cE = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{9}$$

Подставляя (9) во второе из равенств (6), получим

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} A = 0. \tag{10}$$

Как известно, вектор-потенциал A определяется полем H с точностью до произвольного потенциального вектора.

Выберем A таким, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi \tag{11}$$

(это условие называется *условием калибровки*).

Тогда мы получим, что скалярный потенциал φ и векторный потенциал A удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A. \tag{12}$$

Газовая динамика. Рассмотрим движение газа или жидкости. Пусть V — поле скоростей частиц жидкости, p — давление и ρ — плотность жидкости.

Если жидкость идеальная (вязкость отсутствует) и движение адиабатическое (отсутствует теплообмен между отдельными частями жидкости), векторное поле скорости и скалярные поля давления и плотности удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V,\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \tag{14}$$

$$p = a\rho^n. \tag{15}$$

Уравнение (13) называется *уравнением Эйлера*, оно следует из закона изменения импульса. Уравнение (14) называется *уравнением неразрывности*, оно следует из закона сохранения количества вещества. Уравнение (15) называется *уравнением состояния.*

Из (13) получается уравнение, содержащее только поле V:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} V = \operatorname{rot}[V \times \operatorname{rot} V]. \tag{16}$$

Приведем два случая, когда уравнения газовой динамики сводятся к более простым уравнениям.

1. Пусть жидкость несжимаема, т. е.

$$\rho = \rho_0 = \text{const},$$

и поле скоростей потенциально:

$$V = \operatorname{grad}\varphi.$$

Тогда уравнение (16) выполняется автоматически, а из (14) следует

$$\Delta\varphi = 0, \tag{17}$$

т. е. потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

2. Рассмотрим случай малых колебаний жидкости или газа. Такие колебания называются звуковыми волнами.

Пусть
$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1,$$
где p_0, ρ_0 постоянны, p_1, ρ_1 достаточно малы.

Пусть, кроме того, поле скоростей также мало, так что в уравнениях (13)–(15) можно пренебречь величинами V, p_1, ρ_1 в квадратах, их произведениями и произведениями их производных. В этом случае уравнения (13)–(15) примут вид
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}\,V = 0, \quad p_1 = a\rho_0^{n-1}\rho_1. \tag{18}$$
Из (18) следует
$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + a\rho_0^n\,\mathrm{div}\,V = 0.$$
Предположим, что поле скоростей имеет потенциал
$$V = \mathrm{grad}\,\varphi.$$
Тогда из (18) следует, что функция φ удовлетворяет волновому уравнению
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi,$$
где $c = \sqrt{a\rho_0^{n-1}}$ — скорость звука.

Уравнение колебаний струны. Струной в классической механике называется твердое тело, в котором длина намного превосходит поперечное сечение. Предполагается, что сопротивление этого тела при изгибании пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением растяжению. Математическая модель струны, которую мы рассмотрим, достаточно хорошо описывает струны в музыкальных инструментах.

Обозначим отклонение струны от положения равновесия в момент времени t через $u(x,t)$. Пусть $\alpha(x)$ — угол, образованный направлением касательной к струне с осью x, $\rho(x)$ — линейная плотность струны и $T(x)$ — сила натяжения, направленная по касательной к линии струны. Рассмотрим точки x_1, x_2 на струне,

$x_1 < x_2$. Составляющие силы натяжения в этих точках будут равны
$$-T(x_1)\sin\alpha(x_1), \quad T(x_2)\sin\alpha(x_2).$$
Угол $\alpha(x)$ определяется по формуле
$$\sin\alpha(x) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Если считать отклонение струны от положения равновесия малым и пренебречь величиной $(\partial u/\partial x)^2$, то с учетом сил инерции мы получим следующее уравнение для функции $u(x,t)$:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Сходным образом получается и так называемое уравнение колебаний мембраны. Если $u(x,y,t)$ есть отклонение от положения равновесия пленки — тонкого твердого тела, натянутого равномерно по всем направлениям, то функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u,$$
где $a^2 = T/\rho$, T — натяжение, ρ — плотность мембраны.

Уравнение теплопроводности. Пусть u — распределение температуры в некоторой среде, c — удельная теплоемкость среды, ρ — плотность. Изменение распределения температуры в среде основано на законе Фурье
$$W = -k\,\mathrm{grad}\,u,$$
где W — вектор плотности теплового потока, k — коэффициент теплопроводности.

Из закона Фурье следует, что функция u удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\,\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u). \tag{19}$$
Такому же уравнению удовлетворяет распределение концентрации вещества в процессе диффузии.

3.2. Уравнения первого порядка

Уравнение эйконала. Рассмотрим процесс распространения некоторого возмущения в сплошной среде. Среда может быть однородной — воздух, вода или неоднородной — земные недра. Отклонения элементов среды от положения равновесия, как отмечалось выше, описываются волновыми уравнениями.

Пусть x — точка трехмерного пространства с координатами (x_1, x_2, x_3), $v(x)$ — скорость распространения возмущения в точке x. Обозначим через $\tau(x, x^0)$ время прихода возмущения из точки x^0 в точку x. Функция $\tau(x, x^0)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_3}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{v(x)}.$$

Это уравнение называется *уравнением эйконала*. Уравнение эйконала есть уравнение с частными производными первого порядка, задача его решения эквивалентна решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть x — n-мерный вектор $x \in \mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, $u(x)$ — функция, определенная в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$. Уравнением первого порядка относительно функции $u(x)$ называется равенство

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x_1, \ldots, x_n\right) = 0.$$

Задача решения этого уравнения при определенных ограничениях на функцию F сводится к задаче интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы ограничимся тем, что приведем два результата по решению частного случая уравнения первого порядка:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x, u) = 0. \tag{1}$$

Эти результаты содержатся в известном учебнике И. Г. Петровского (см. [35]). Уравнения такого вида названы в этом учебнике полулинейными.

Пусть коэффициенты $a_k(x)$ имеют в области G непрерывные частные производные по всем аргументам, функция $b(x,u)$ определена для всех ограниченных в области $\overline{G}$ функций u и имеет по всем аргументам x_k непрерывные первые производные. Пусть, кроме того, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, через каждую точку области G проходит одна и только одна траектория этой системы. Эти траектории называются характеристиками.

Теорема единственности. *Если функция $u(x)$ удовлетворяет в G уравнению* (1) *и имеет непрерывные производные, то все значения $u(x)$ на любой характеристике, где $|u| < M$, определяются ее значением в какой-либо одной точке этой характеристики $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$.*

Теорема существования. *Пусть S — $(n-1)$-мерная поверхность, содержащаяся в G, имеющая непрерывную вращающуюся касательную плоскость и не касающаяся ни одной из характеристик уравнения.*

Пусть на S задана функция $f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) $|f(x)| < M$;

2) *каждая точка S обладает окрестностью, в которой $f(x)$ можно представить функцией каких-либо $(n-1)$ координат из координат $(x_1, \ldots, x_n)$, имеющей непрерывные производные по этим координатам.*

Пусть, далее, существует окрестность R_0 поверхности S, обладающая следующими свойствами:

1) $R_0 \subset G$;

2) *характеристика, проходящая через любую точку $x \in S$, при своем продолжении в обе стороны внутри R_0 не пересекает S. Через каждую $x \in R_0$ проходит одна характеристика;*

3) *для любой точки $x^0 \in S$ решение уравнения $u(x)$, удовлетворяющее условию*

$$u(x^0) = f(x^0),$$

можно продолжить на всю часть характеристики, содержащуюся в R_0, причем это решение удовлетворяет условию

$$|u(x)| < M.$$

Тогда существует функция $u(x)$, определенная в R_0, удовлетворяющая следующим условиям:

1) *$u(x)$ имеет непрерывные первые производные по всем переменным x_k*;

2) *$u(x)$ удовлетворяет уравнению* (1);

3) *для любого $x^0 \in S$ справедливо $u(x^0) = f(x^0)$*.

Задача нахождения функции $u(x)$, удовлетворяющей этим условиям, называется задачей Коши для нашего уравнения.

3.3. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \tag{1}$$

Вместо переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ введем новые независимые переменные $(y_1, \ldots, y_n)$ по формулам

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j.$$

Матрица $\|b_{kj}\|$ предполагается невырожденной.

В новых переменных уравнение (1) примет вид

$$\sum_{p,q=1}^{n} a'_{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_{p=1}^{n} b'_p \frac{\partial u}{\partial y_p} + cu = f, \tag{1$'$}$$

где

$$a'_{pq} = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jp} b_{kq} a_{jk}, \quad b'_p = \sum_{j=1}^{n} b_{pj} b_j.$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{0} \xi_j \xi_k, \tag{2}$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{jk} уравнения (1) в некоторой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Если в квадратичной форме (2) мы введем новые переменные

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \eta_j \quad (k = 1, \ldots, n),$$

то форма (2) примет вид

$$\sum_{p,q} a_{pq}^{01} \eta_p \eta_q,$$

где

$$a_{pq}^{01} = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jp} b_{kq} a_{jk}^{0}.$$

Таким образом, коэффициенты при вторых производных в уравнении (1) меняются в точке $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ при линейной замене переменных так же, как и коэффициенты квадратичной формы (2).

Как известно, квадратичная форма заменой переменных может быть приведена к канонической форме:

$$\begin{gathered} a_{pq}^{01} = 0, \quad p \neq q, \\ a_{pp}^{01} = 1, \quad p = 1, \ldots, m-1, \\ a_{pp}^{01} = -1, \quad p = m, \ldots, n_1 - 1, \\ a_{pp}^{01} = 0, \quad p = n_1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3}$$

Если в (3) $m = n+1$ или $m = 1, n_1 = n+1$, уравнение (1) называется *эллиптическим* в точке $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Если $m = n$, $n_1 = n+1$ или $m = 2, n_1 = n+1$, уравнение (1) называется *гиперболическим* в точке $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Если $2 < m < n, n_1 = n + 1$, уравнение (1) называется *ультрагиперболическим.*

Если $n_1 \leq n$, уравнение (1) называется *параболическим.*

Если уравнение (1) является эллиптическим (гиперболическим, параболическим) в каждой точке области, то оно называется эллиптическим (гиперболическим, параболическим) в области.

3.4. Эллиптические уравнения

Эллиптическим уравнениям удовлетворяют, во-первых, стационарные (не изменяющиеся во времени) поля. Классические эллиптические уравнения — уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

и уравнение Пуассона

$$\Delta u = f. \tag{2}$$

Стационарные поля в среде с переменными свойствами удовлетворяют уравнениям с переменными коэффициентами. Например, поле концентрации вещества в стационарном процессе диффузии удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0, \tag{3}$$

где k — коэффициент диффузии.

Кроме стационарных полей эллиптическим уравнениям удовлетворяют поля, описывающие установившиеся колебательные процессы. Например, если решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \Delta u$$

представимо в виде

$$u = e^{i\lambda t} v(x, y, z),$$

то функция v удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda^2 v = 0. \tag{4}$$

Как было отмечено нами ранее, потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа по пространственным переменным в любой фиксированный момент времени.

Классическими задачами для эллиптических уравнений являются краевые задачи: требуется найти решение эллиптического уравнения внутри некоторой области, удовлетворяющее определенному условию на границе области. Приведем несколько примеров краевых задач.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область трехмерного пространства с гладкой границей S, f — непрерывная функция, заданная на S.

Требуется определить решение уравнения Лапласа (1) внутри $\mathscr{D}$, удовлетворяющее условию

$$u|_S = f.$$

Задача Неймана. Требуется определить решение уравнения Лапласа (1) внутри $\mathscr{D}$, удовлетворяющее условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f.$$

Здесь $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ — производная функции u по направлению внешней нормали n к поверхности S.

Общая краевая задача. Пусть l — вектор и a — функция, заданные на S. Требуется определить решение уравнения Лапласа (1) внутри $\mathscr{D}$, удовлетворяющее условию (на S)

$$(l, \nabla u) + au = f.$$

В задаче Дирихле предполагается, что функция u непрерывна в замкнутой области $\overline{\mathscr{D}}$, в задачах Неймана и общей задаче функция непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\mathscr{D}}$. Эти же краевые задачи рассматриваются и для других эллиптических уравнений.

Теория краевых задач состоит в исследовании вопросов единственности решения, существования и непрерывной зависимости решения от данных краевой задачи.

Единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа следует из фундаментального свойства решений уравнения Лапласа — принципа максимума.

Принцип максимума. *Решение уравнения Лапласа в ограниченной области $\mathscr{D}$, непрерывное в замыкании $\overline{\mathscr{D}}$, достигает своего максимального (и минимального) значения на границе области $\mathscr{D}$. Если решение уравнения Лапласа достигает своего максимального (или минимального) значения внутри области $\mathscr{D}$, то оно постоянно.*

Из принципа максимума следует, что если решение (1) равно нулю на границе $\mathscr{D}$

$$u|_S = 0,$$

то оно тождественно равно нулю. В силу линейности задачи это означает единственность решения.

Принцип максимума в несколько измененной формулировке имеет место и для решений эллиптических уравнений общего вида.

Рассмотрим уравнение в ограниченной области $\mathscr{D}$ n-мерного пространства

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0. \tag{5}$$

Коэффициенты a_{jk}, b_j, c в уравнении (5) предполагаются непрерывными.

Пусть, кроме того, имеют место неравенства

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k \geq \delta \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2, \quad \delta > 0, \quad c < 0. \tag{6}$$

Первое из условий (6) означает эллиптичность уравнения (5). Для решений уравнения (5) справедлив следующий

Принцип максимума. *Решение уравнения* (5) *не может достигать внутри области $\mathscr{D}$ положительного максимума и отрицательного минимума.*

Из этого принципа максимума следует единственность решения задачи Дирихле для уравнения (5).

Решение вопроса о единственности в задаче Неймана следует из формул Грина.

Формулы Грина. *Пусть u, v — функции, дважды непрерывно дифференцируемые внутри ограниченной области $\mathscr{D}$ трехмерного пространства и непрерывно дифференцируемые в замыкании $\overline{\mathscr{D}}$. Тогда имеют место равенства*

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left(u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z\right) dxdydz + \int\limits_{\mathscr{D}} v \cdot \Delta u \, dxdydz = \int\limits_{S} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma, \qquad (7)$$

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (u\Delta v - v\Delta u) \, dxdydz = \int\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma,$$

где S — граница $\mathscr{D}$.

Пусть теперь u — решение уравнения Лапласа. Полагая в первом из равенств (7)

$$v = u,$$

получим

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left(u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z\right) dxdydz = \int\limits_{S} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что если

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0,$$

то

$$\operatorname{grad} u = 0$$

и, значит,

$$u = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение. *Если u_1, u_2 — решения задачи Неймана для уравнения Лапласа и*

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S,$$

то $u_1 - u_2 = \mathrm{const}$.

Перейдем к вопросам существования решений краевых задач.

В задаче Дирихле для уравнения Лапласа справедлива следующая теорема существования.

Теорема. *Пусть f — непрерывная функция, заданная на гладкой поверхности*[*]) *S — границе ограниченной области $\mathscr{D}$. Тогда существует функция u, дважды непрерывно дифференцируемая внутри $\mathscr{D}$ и непрерывная в замыкании $\overline{\mathscr{D}}$, удовлетворяющая условиям*

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = f.$$

Отметим, что теорема существования решения задачи Дирихле имеет место и при меньших ограничениях на поверхность S — для так называемых поверхностей Ляпунова.

Приведем теорему существования для задачи Неймана.

Теорема. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на S — удовлетворяет условию*

$$\int f\, d\sigma = 0.$$

Тогда существует функция u, дважды непрерывно дифференцируемая внутри $\mathscr{D}$ и непрерывно дифференцируемая в замыкании $\overline{\mathscr{D}}$, удовлетворяющая условиям

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f.$$

В случае некоторых простейших областей для решений задач Дирихле и Неймана можно получить формулы. Для шара и полупространства эти формулы называются формулами Пуассона. В этих случаях для доказательства теорем существования достаточно проверить, что функции, определяемые этими формулами, действительно удовлетворяют уравнению Лапласа и краевому условию.

Для областей общего вида известно несколько методов доказательства теорем существования. Один из классических методов — сведение краевых задач к интегральным уравнениям.

---

[*]) Под гладкой поверхностью мы понимаем поверхность, которая в окрестности любой своей точки определяется дважды непрерывно дифференцируемой функцией.

Решения краевых задач ищутся в виде потенциалов. Решение задачи Дирихле ищется в виде потенциала двойного слоя

$$u = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\varphi\, d\sigma,$$

решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя

$$u = \int\limits_S \frac{1}{r}\varphi\, d\sigma.$$

Решение краевой задачи оказывается эквивалентным решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно плотности φ

$$\varphi + \int\limits_S G\varphi\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}f. \qquad (9)$$

Наряду с уравнением (9) рассматривается так называемое *союзное однородное интегральное уравнение*

$$\psi + \int\limits_S G^*\psi\, d\sigma = 0. \qquad (10)$$

Возможны два случая.

1. Уравнение (10) имеет лишь тривиальное решение

$$\psi = 0.$$

Тогда решение уравнения (9) единственно и существует для любой правой части f.

2. Уравнение (10) имеет конечное число линейно независимых решений

$$\psi_k + \int\limits_S G^*\psi_k\, d\sigma = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда однородное уравнение (9) (при $f = 0$) тоже имеет n линейно независимых решений. Для существования решения уравнения (9) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int\limits_S f\psi_k \, d\sigma = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Сформулированные утверждения называются теоремами Фредгольма.

При исследовании краевых задач доказывается, что союзное интегральное уравнение эквивалентно некоторой краевой задаче, называемой сопряженной по отношению к исходной задаче. Из единственности решения сопряженной краевой задачи следует единственность решения союзного интегрального уравнения и, значит, в силу теорем Фредгольма — существование решения интегрального уравнения, соответствующего исходной краевой задаче.

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца (4) сводятся к интегральным уравнениям с помощью потенциалов

$$\int\limits_S \frac{\cos(\lambda r)}{r}\varphi \, d\sigma, \quad \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos(\lambda r)}{r}\right)\varphi \, d\sigma.$$

Краевые задачи для эллиптических уравнений общего вида с переменными коэффициентами также могут быть сведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, но доказательство существования соответствующих потенциалов эквивалентно доказательству существования решения исходной краевой задачи.

Классический метод доказательства теорем существования решений краевых задач для эллиптических уравнений общего вида — сведение этих задач к вариационным задачам, т. е. задачам нахождения экстремума некоторых функционалов.

3.5. Гиперболические и параболические уравнения

Простейшее уравнение гиперболического типа — уравнение колебаний струны или уравнение Даламбера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Решение этого уравнения описывает малые колебания натянутой струны: функция $u(x,t)$ — отклонение струны от положения равновесия.

Для уравнения (1) рассматривается задача Коши: требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = f_0(x), \quad u'_t(x,0) = f_1(x). \tag{2}$$

Теория решения задачи Коши (2) для уравнения (1) получается сравнительно просто из общего представления решений уравнения (1). Показывается, что любое решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x+t), \tag{3}$$

где φ, ψ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Из представления (3) получается формула Даламбера, дающая решение задачи Коши

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f_0(x-t) + f_0(x+t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} f_1(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

и также единственность решения.

Кроме задачи Коши для уравнения (1) рассматриваются так называемые смешанные задачи, в которых вместе с данными Коши задаются краевые условия. Приведем простейшие смешанные задачи:

1) колебания струны с закрепленными концами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0;$$

2) колебания струны со свободными концами

$$u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0.$$

Решения смешанных задач могут быть получены как с помощью представления (3), так и методом разделения переменных — методом Фурье.

В случае двух независимых переменных гиперболическое уравнение общего вида заменой переменных может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0. \tag{5}$$

Задача Коши для уравнения (5) с переменными коэффициентами сводится к частному случаю интегральных уравнений Фредгольма второго рода — уравнениям Вольтерра. Как установлено в теории интегральных уравнений, решение уравнения Вольтерра всегда существует, единственно и может быть получено методом последовательных приближений.

Решения задач Коши для волновых уравнений в случаях двух, трех и более пространственных переменных получаются в виде формул; эти формулы называются формулами Кирхгофа.

Задачи Коши и смешанные задачи для гиперболических уравнений сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Вопросы единственности решаются с помощью так называемых энергетических неравенств.

Простейшее уравнение параболического типа — одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{6}$$

Для уравнения (6) рассматривается задача Коши: требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$u(x,0) = f(x). \tag{7}$$

Для единственности решения задачи требуются определенные ограничения на поведение функции $u(x,t)$ при $|x| \to \infty$.

В простейшем случае при условии

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$$

единственность следует из принципа максимума.

Решение задачи (7) дается формулой Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} f(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Для уравнения (6) рассматриваются также смешанные задачи, когда кроме начального условия (7) требуется выполнение краевых условий таких, как

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

или

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0.$$

Теоремы единственности, существования и непрерывной зависимости (устойчивости) установлены для задач Коши и смешанных задач в случаях параболических уравнений общего вида с переменными коэффициентами.

3.6. Понятие корректности

Понятие корректности (правильности) постановки задач для дифференциальных уравнений было сформулировано в начале нашего века Ж. Адамаром.

Задача называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия:

1) *решение задачи существует*,
2) *решение задачи единственно*,
3) *решение задачи непрерывно зависит от данных.*

Первое условие требует, чтобы данных в задаче не было слишком много (чтобы задача не была переопределенной).

Второе условие требует, чтобы данных было достаточно для определенности задачи.

Третье условие связано со следующим обстоятельством. Если задача связана с описанием физического явления, данные в задаче не могут считаться известными абсолютно точно. Можно считать лишь, что нам известно некоторое приближение к данным задачи. Таким образом, если непрерывная зависимость решения от данных не имеет места, решение задачи будет фактически неопределенным.

Сформулированные нами условия корректности требуют уточнения. Именно, в теории краевых задач и решение, и данные рассматриваются как элементы некоторых функциональных пространств, а условия корректности формулируются следующим образом:

1) *решение задачи существует для любых данных, принадлежащих некоторому замкнутому подпространству в линейном*

нормированном пространстве $\mathbb{C}^{(K)}, \mathbb{L}_p, \mathbb{W}_p^{(l)}, \ldots$, *и принадлежит одному из этих пространств*;

2) *решение задачи единственно в каком-либо из указанных пространств*;

3) *бесконечно малым вариациям данных в том пространстве, в котором рассматриваются данные, соответствуют бесконечно малые вариации решения* (*в том пространстве, в котором рассматриваются решения*).

Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от данных являются доказательством корректности постановки задачи.

Для эллиптических уравнений корректными являются задачи, в которых краевые условия задаются на всей границе области, где требуется определить решение.

Для гиперболических и параболических корректными являются задачи Коши и смешанные задачи, в которых данные задаются на части границы области. Данные Коши с точки зрения физического процесса, которому соответствует математическая задача, означают, что нам известно состояние поля в некоторый начальный момент времени. Задача — определить поле в последующие моменты времени.

Сформулировав понятие корректности, Ж. Адамар привел пример некорректной задачи для дифференциальных уравнений, которая, по его мнению, не соответствовала никакой реальной физической постановке. Это задача Коши для уравнения Лапласа.

Эту задачу, а также другие, некорректные в смысле Адамара, задачи мы детально обсудим в следующей главе. Здесь мы ограничимся замечанием, что задача Коши для уравнения Лапласа, а также ряд других некорректных задач удовлетворяют условиям классической теоремы Коши — Ковалевской. В силу этой теоремы в множестве аналитических функций решение задачи Коши для уравнения Лапласа существует и единственно.

4. Примеры некорректных задач

4.1. Некорректные начально-краевые задачи

Некорректно поставленной задачей или просто некорректной задачей можно назвать любую задачу, которая не удовлетворяет по крайней мере одному из условий корректности. Однако в теории некорректных задач основное внимание уделяется третьему условию.

Перейдем к рассмотрению примеров некорректных задач для уравнений второго порядка.

Начально-краевая задача для уравнения Лапласа. Простейший вариант некорректной задачи для уравнения Лапласа — двумерная смешанная задача.

Требуется определить функцию двух переменных $u(x, y)$ в прямоугольнике $\{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le y_0\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = f_0(x), \quad u'_y(x, 0) = f_1(x). \end{gathered} \tag{1}$$

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее однородным условиям на боковых границах полуполосы, представимо в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx (a_k e^{ky} + b_k e^{-ky}).$$

Из начальных условий получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^\pi f_0(x) \sin kx \, dx + \frac{1}{k} \int\limits_0^\pi f_1(x) \sin kx \, dx \right), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^\pi f_0(x) \sin kx \, dx - \frac{1}{k} \int\limits_0^\pi f_1(x) \sin kx \, dx \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1) единственно.

Из приведенных формул видно, что для существования решения задачи (1) недостаточно принадлежности данных $f_0(x)$, $f_1(x)$ какому-либо функциональному пространству, в определении нормы которого участвует конечное число производных.

Приведем пример Адамара для задачи (1).

Рассмотрим следующее решение уравнения Лапласа:

$$u_n(x, y) = a_n \sin(nx) e^{ny}.$$

Данные Коши для функции u_n будут равны

$$f_{0n}(x) = a_n \sin nx, \quad f_{1n}(x) = n a_n \sin nx.$$

Очевидно, что при соответствующем подборе n, a_n данные Коши для функции u_n будут сколь угодно малы по норме, а сама функция будет сколь угодно велика при любом фиксированном y.

Сформулируем начально-краевую задачу для уравнения Лапласа в общем виде.

Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область n-мерного пространства с гладкой границей S, S_1 — часть S, f_0, f_1 — функции, заданные на S_1.

Требуется определить функцию u, удовлетворяющую в области $\mathscr{D}$ уравнению Лапласа с граничными условиями

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_1} = f_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1} = f_1. \tag{2}$$

Задача (2) обладает теми же свойствами, что и отмеченные свойства задачи (1). Решение единственно, для существования решения недостаточно принадлежности данных функциональным пространствам указанного типа, непрерывная зависимость решения от данных не имеет места.

Аналогичными свойствами обладают и начально-краевые задачи для эллиптических уравнений общего вида с переменными коэффициентами.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с обратным временем. Требуется определить функцию двух переменных $u(x, t)$ в прямоугольнике

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x). \tag{3}$$

Решение задачи (3) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) e^{k^2 t},$$

где $a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(kx) f(x)\, dx$. Из этой формулы следует единственность решения задачи и пример Адамара:

$$u_n(x,t) = a_n \sin(nx) e^{n^2 t}.$$

Задача Коши для уравнения теплопроводности с данными на времениподобном многообразии. Требуется определить функцию двух переменных $u(x,t)$ в прямоугольнике

$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le t_0,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = f_0(t), \quad u'_x(0,t) = f_1(t). \tag{4}$$

Задача (4) удовлетворяет условиям теоремы Коши — Ковалевской. Решение задачи единственно, доказательство единственности не является столь простым, как в задаче (3). Приведем для этой задачи пример Адамара

$$u_n(x,t) = a_n \sin(2n^2 t + nx) e^{nx}.$$

Начально-краевая задача для волнового уравнения с данными на времениподобном многообразии. Требуется определить функцию трех переменных $u(x,y,t)$ в части пространства

$$0 \le x, \quad 0 \le y \le \pi, \quad 0 \le t \le \pi,$$

удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,\\ u(x,y,0) = u(x,y,\pi) = 0, \quad u(0,y,t) = f_0(y,t),\\ u'_x(0,y,t) = f_1(y,t).\end{gathered} \tag{5}$$

Решение задачи (5) единственно. Приведем для этой задачи пример Адамара

$$u_n(x,y,t) = n^{-2} e^{nx} \sin(\sqrt{5}\, ny) \sin(2nt).$$

4.2. Аналитическое продолжение и внутренние задачи

Имеется несколько постановок задач аналитического продолжения. Приведем две постановки задач аналитического продолжения для функций комплексного переменного.

Первая постановка. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в некоторой ограниченной области $\mathscr{D}$ на комплексной плоскости, непрерывная на замыкании $\bar{\mathscr{D}}$,

$$|f(z)| \le c, \quad z = x + iy, \quad z \in \mathscr{D}, \tag{1}$$

Γ — граница области $\mathscr{D}$, Γ_1, Γ_2 — части Γ: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Пусть далее нам известны значения $f(z)$ на Γ_1 и требуется определить $f(z)$ в некоторой внутренней части $\mathscr{D}$. Если $\Gamma = \Gamma_1$, то решение задачи дается интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Покажем, что если $\Gamma_1 \ne \Gamma$, то задача аналитического продолжения эквивалентна задаче Коши для уравнения Лапласа.

1. Пусть на Γ_1 заданы значения гармонической функции u и ее нормальной производной u_n. Обозначим через $f(z)$ следующую функцию:

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

где v — функция, сопряженная с u. Как известно, на кривой Γ_1

$$v(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial}{\partial n} u(z)\, ds + C_1,$$

где z_0 — один из концов Γ_1. Таким образом, если на Γ_1 известны u, u_n, то можно считать, что на Γ_1 известны значения аналитической функции $f(z)$.

2. Пусть на Γ_1 задана функция $f(z) = u(z) + iv(z)$, u, v — сопряженные гармонические функции. Из условий Коши — Римана следует

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{\Gamma_1}$$

(v'_s — производная функции v вдоль Γ_1). Поэтому, взяв производную функции $f(z)$ и $\bar{f}(z)$ вдоль Γ_1, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(f - \bar{f})\right|_{\Gamma_1}.$$

Таким образом, приходим к данным Коши для функции $u(x, y)$. Итак, если $\Gamma_1 \neq \Gamma$, то задача аналитического продолжения эквивалентна задаче Коши для уравнения Лапласа и, следовательно, в классическом смысле некорректна.

Доказательство единственности решения сформулированной задачи аналитического продолжения приводится в учебниках по теории функций комплексного переменного.

Вторая постановка. Пусть значения аналитической функции $f(z)$ заданы не на Γ_1, а на некотором множестве $\mathscr{M}$, лежащем внутри области $\mathscr{D}$. Если множество $\mathscr{M}$ имеет хотя бы одну предельную точку внутри $\mathscr{D}$, решение задачи аналитического продолжения единственно. Это классическая теорема теории аналитических функций. Пусть множество $\mathscr{M}$ — последовательность, имеющая одну (или конечное число) предельную точку внутри $\mathscr{D}$. Оказывается, что неустойчивость задачи аналитического продолжения в определенном смысле даже больше, чем в задаче Коши для уравнения Лапласа.

Вторая постановка задачи аналитического продолжения является частным случаем класса задач для дифференциальных уравнений, которые мы назовем *внутренними задачами*.

Под внутренними задачами мы понимаем задачи следующего типа.

Требуется определить решение некоторого уравнения (или системы уравнений), регулярное в области $\mathscr{D}$, *если заданы значения решения (возможно, и его производных) на множестве* $\mathscr{M}$, *лежащем внутри* $\mathscr{D}$.

Приведем пример внутренней задачи для двумерного уравнения диффузии.

Пусть $u(x, y, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

регулярное в цилиндре

$$x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < t < t_0,$$

и пусть (x_k, y_k) — последовательность точек внутри единичного круга, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$.

Требуется определить функцию u, если заданы функции

$$\begin{aligned} u(x_k, y_k, t) &= f_{0k}(t), \\ u'_x(x_k, y_k, t) &= f_{1k}(t), \\ u'_y(x_k, y_k, t) &= f_{2k}(t). \end{aligned}$$

4.3. Слабо и сильно некорректные задачи. Задачи дифференцирования

В приведенных выше примерах некорректных задач отсутствует непрерывная зависимость решений от данных, если рассматривать решения и данные как элементы функциональных пространств, в определении нормы которых участвуют конечное число производных.

Однако можно называть некорректными и задачи, в которых нет непрерывной зависимости решения от данных для одной пары пространств, а для другой пары имеется непрерывная зависимость решения от данных. В теории некорректных задач задачи, в которых нет непрерывной зависимости ни для какой пары функциональных пространств с нормами, включающими конечное число производных, называются *сильно некорректными.*

Задачи, в которых для одной пары пространств непрерывной зависимости нет, а для другой пары есть, называют *слабо некорректными.*

Классическая слабо некорректная задача — задача дифференцирования. Задача дифференцирования корректна, если рассматривать ее для пар пространств $\{\mathbb{C},\mathbb{C}^1\}$, $\left\{\mathbb{L}_2,\mathbb{W}_2^1\right\}$ и т. д., и некорректна для пар пространств $\{\mathbb{C},\mathbb{C}\}$, $\{\mathbb{L}_2,\mathbb{L}_2\}$.

Если рассматривать задачу дифференцирования функции, полученной на основании показаний физических приборов, то ее целесообразно рассматривать именно для двух последних пар пространств, так как погрешности показаний приборов обычно оцениваются в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{L}_2$.

4.4. Сведение некорректных задач к интегральным уравнениям

Классические корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Некоторые краевые задачи сводятся к сингулярным интегральным уравнениям, для которых справедливы теоремы Нетер.

Некорректные задачи, примеры которых были нами приведены, сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, свойства решений которых существенно отличаются как от свойств решений уравнений Фредгольма второго рода, так и от свойств решений классических сингулярных уравнений. Приведем несколько примеров сведения некорректных задач к интегральным уравнениям.

Задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем. Требуется определить ограниченную функцию $u(x,t)$ в полосе

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \le t \le t_0,$$

удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x). \tag{1}$$

Функция $f(x)$ предполагается ограниченной и непрерывной.

Пусть решение задачи (1) существует и непрерывно в замкнутой полосе. Обозначим

$$\varphi(x) = u(x, t_0).$$

Тогда по формуле Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_0 - t)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t_0-t)}} \varphi(\xi)\, d\xi$$

и, значит, решение задачи (1) эквивалентно решению следующего интегрального уравнения относительно функции $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t_0}} \varphi(\xi)\, d\xi = f(x).$$

Внутренняя задача для уравнения Лапласа в полуплоскости. Требуется определить ограниченную функцию $u(x, y)$ в полуплоскости $y \geq 0$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u(x, y_0) = f(x), \quad y_0 > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть решение задачи существует. Обозначим

$$\varphi(x) = u(x, 0).$$

Тогда по формуле Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2} \varphi(\xi)\, d\xi$$

и решение задачи (2) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{y_0^2 + (x-\xi)^2} \varphi(\xi)\, d\xi = f(x).$$

Задача Коши для уравнения Лапласа. Пусть $\mathscr{D}$ — область трехмерного пространства, ограниченная гладкой поверхностью S; S_1, S_2 — части поверхности S:

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \varnothing;$$

f_0, f_1 — непрерывные функции, заданные на S_1.

Требуется определить функцию $u(x)$, дважды непрерывно дифференцируемую внутри $\mathscr{D}$ и непрерывно дифференцируемую в замыкании $\overline{\mathscr{D}}$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u|_{S_1} = f_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1} = f_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть решение задачи (3) существует. Будем искать решение задачи (3) в виде потенциалов простого слоя

$$u = \int\limits_{S_1} \frac{1}{r}\varphi_1\, d\sigma + \int\limits_{S_2} \frac{1}{r}\varphi_2\, d\sigma.$$

Из условий Коши получим, что функции φ_1, φ_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered} \int\limits_{S_1} \frac{1}{r}\varphi_1\, d\sigma + \int\limits_{S_2} \frac{1}{r}\varphi_2\, d\sigma = f_0, \quad x \in S_1, \\ 2\pi\varphi_1 + \int\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_1\, d\sigma + \int\limits_{S_2} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_2\, d\sigma = f_1, \quad x \in S_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначим

$$f_1 - \int\limits_{S_2} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_2\, d\sigma = 2\pi f_2.$$

При этом второе из равенств (4) примет вид

$$\varphi_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_1\, d\sigma = f_2. \tag{5}$$

Рассмотрим (5) как интегральное уравнение относительно φ_1. Можно показать, что решение уравнения (5) существует и представимо в виде

$$\varphi_1 = f_2 + \int\limits_{S_1} G f_2 \, d\sigma,$$

где G — некоторая функция пары точек поверхности S_1.

Подставляя выражение для φ_1 в первое из уравнений (4), мы получим интегральное уравнение первого рода относительно функции φ_2

$$\int\limits_{S_2} K \varphi_2 \, d\sigma = f_0.$$

Смешанная задача для уравнения теплопроводности с данными Коши на времениподобном многообразии. Требуется определить функцию $u(x,t)$ в прямоугольнике

$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le t_0,$$

удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Будем искать решение задачи (6) в виде теплового потенциала

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left[e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+l)^2}{4(t-\tau)}} \right] \varphi(\tau) \, d\tau.$$

Функция, представимая в таком виде, удовлетворяет уравнению теплопроводности, а также второму и третьему из краевых условий (6).

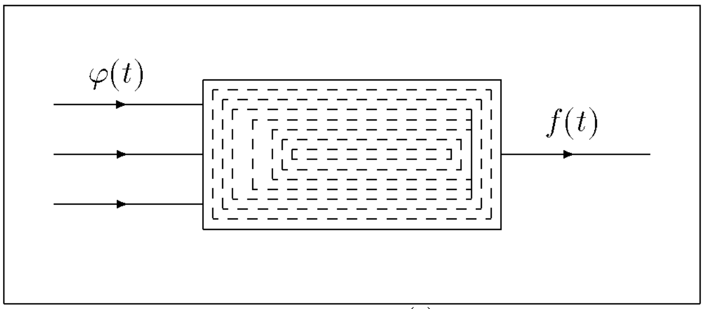
Первое из краевых условий в (6) приводит к следующему интегральному уравнению типа Вольтерра относительно функции φ:

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{l^2}{4(t-\tau)}} \varphi(\tau) \, d\tau = f(t).$$

5. Задачи физики, приводящие к некорректным задачам

5.1. Интерпретация показаний физических приборов

Действия многих приборов, регистрирующих нестационарные физические поля, описываются следующей схемой:



На вход прибора поступает сигнал $\varphi(t)$, на выходе прибора регистрируется функция $f(t)$. В простейшем случае функции $\varphi(t)$, $f(t)$ связаны соотношением

$$\int_0^t g(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{1}$$

Функция $g(t)$ в этом случае называется *импульсной переходной функцией* прибора. Теоретически $g(t)$ представляет функцию, которая регистрируется прибором в случае, если на вход прибора поступает обобщенная функция $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. На практике для получения функции $g(t)$, характеризующей работу прибора, на вход подают достаточно короткий импульс.

Таким образом, задача интерпретации показаний прибора, т. е. определения формы поступившего сигнала, сводится к решению интегрального уравнения первого рода (1).

Связь между поступающим на вход прибора сигналом $\varphi(t)$ и регистрируемой на выходе функцией $f(t)$ может быть и более сложной. В случае «линейного» прибора эта связь имеет вид

$$\int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Возможна и нелинейная связь между функциями $\varphi(t)$, $f(t)$:

$$\int\limits_0^t K(t,\tau,\varphi)\,d\tau = f(t).$$

По отмеченной схеме работают, в частности, приборы, регистрирующие переменные электромагнитные поля, режимы давлений и напряжений в сплошной среде, сейсмографы, регистрирующие колебания земной поверхности.

Для решения простейшего уравнения (1) могут быть использованы преобразования Фурье и Лапласа. Пусть $\tilde g(\lambda)$, $\widetilde\varphi(\lambda)$, $\tilde f(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $g(t)$, $\varphi(t)$ и $f(t)$:

$$\tilde g(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} g(t)\,dt, \quad \widetilde\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\varphi(t)\,dt, \quad \tilde f(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\,dt.$$

Тогда по теореме о свертке

$$\tilde g(\lambda)\widetilde\varphi(\lambda) = \tilde f(\lambda),$$

откуда, обращая преобразование Фурье, получаем для решения (1) формулу

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\widetilde\varphi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\frac{\tilde f(\lambda)}{\tilde g(\lambda)}\,d\lambda. \tag{2}$$

Формула (2) неустойчива, так как функция $\tilde g(\lambda)$ — преобразование Фурье импульсной переходной функции прибора — для реальных приборов стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, и, таким образом, сколь угодно малые помехи в определении $\tilde f(\lambda)$ для достаточно больших λ могут привести к большим изменениям в решении $\varphi(t)$.

В случае, если функция $g(t)$ постоянна, задача решения (1) есть задача дифференцирования.

5.2. Интерпретация гравиметрических данных

К некорректным задачам, эквивалентным задаче Коши для уравнения Лапласа, приводят некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поисками полезных ископаемых.

Если бы Земля была сферически однородным шаром, напряженность гравитационного поля на поверхности была бы постоянной. Неоднородности рельефа и распределения плотности вещества служат причиной того, что напряженность гравитационного поля на поверхности Земли отклоняется от среднего значения. Эти отклонения в процентном отношении невелики, но хорошо регистрируются физическими приборами — гравиметрами[*)]. Данные гравитационных наблюдений используются при поисках и разведке месторождений полезных ископаемых.

На рис. 1 и 2 изображены в разрезе типичные геологические строения участков земной коры и данные гравитационных измерений — вертикальные компоненты аномалий напряженности гравитационного поля. Эти аномалии порождаются тем, что плотность фундамента и интрузий[**)] обычно заметно выше плотности осадков[***)]. Задача интерпретации гравитационных данных — по данным гравитационных измерений сделать выводы о рельефе фундамента, расположении и форме интрузий. К характерным формам фундамента и интрузиям часто приурочены месторождения полезных ископаемых, например, в нефтеносных районах месторождения нефти часто связаны с поднятиями рельефа фундамента — куполами, а с интрузиями — рудные месторождения.

[*)] Средняя напряженность гравитационного поля Земли 1 кг = 980 Гал. Типичные аномалии имеют напряженность 0,5–10 мГал.

[**)] Геологическое тело, образовавшееся после внедрения в окружающую породу расплавленной магмы.

[***)] Плотность осадков 2–4 г/см^3. Плотность фундамента и интрузии 4–6 г/см^3.

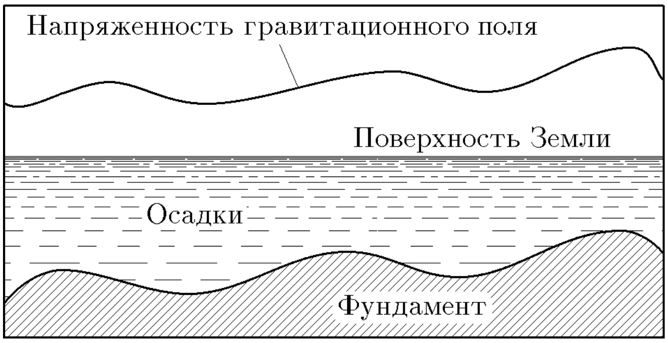


Рис. 1.

Рис. 2.

Остановимся подробнее на задаче определения местоположения интрузий по данным гравитационных измерений. В случае, если расстояние между геологическими телами — интрузиями — больше, чем расстояние от тел до поверхности Земли, положения тел соответствуют локальным максимумам аномалий (см. левую часть рис. 2). В случае же, если расстояние между телами меньше расстояния от тел до поверхности, двум телам соответствует один локальный максимум (см. правую часть рис. 2). При разведке полезных ископаемых геофизические измерения и их интерпретация являются предварительным этапом. Основной этап для месторождений, скрытых осадками, — это бурение разведочных скважин и анализ данных бурения.

Если мы решим на основании вида аномалии, изображенной в правой части рис. 2, что она порождена одним телом, мы естественно выберем место бурения в центре аномалии, при этом скважина пройдет между интересующими нас телами. Такая ситуация неоднократно встречалась в практике геологоразведочных работ.

Геофизиками было высказано следующее предложение: по данным гравитационных измерений на поверхности Земли рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли. В случае, если на глубине аномалия сохранит вид одного локального максимума, можно с большей достоверностью сделать вывод о том, что аномалия порождена одним телом. В случае, если после пересчета появятся два локальных максимума, можно сделать вывод, что тел — два, и соответственно выбрать места бурения.

Рассмотрим теперь математическую постановку, соответствующую сформулированной выше задаче пересчета гравитационного поля. Для простоты ограничимся случаем двух переменных. Отметим, что это ограничение часто соответствует реальным геофизическим ситуациям, так как геологические структуры бывают вытянуты в определенном направлении, а геофизические измерения производятся на трассе, перпендикулярной этому направлению.

Как известно, вне масс, порождающих гравитационное поле, потенциал поля и компоненты напряженности удовлетворяют уравнению Лапласа. Итак, пусть линия на поверхности Земли совпадает с осью x; $u(x, y)$ — вертикальная компонента напряженности гравитационного поля, порожденного несколькими телами, лежащими ниже уровня $y = -H$, $H > 0$. Тогда функция $u(x, y)$ есть решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, регулярное в полуплоскости $y > -H$. Значения функции $u(x, y)$ заданы на оси x, т. е. задана функция $f(x)$:

$$f(x) = u(x, 0).$$

Требуется определить значения функции

$$\varphi(x) = u(x, -h), \quad 0 < h < H.$$

Решение сформулированной задачи с помощью формулы Пуассона сводится к интегральному уравнению первого рода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h\varphi(\xi)}{h^2 + (x - \xi)^2}\, d\xi = f(x).$$

Сформулированная задача эквивалентна задаче Коши для уравнения Лапласа. Для этой задачи пример Адамара имеет вид: если $f(x) = \alpha \sin nx$, то $\varphi(x) = \alpha e^{nh} \sin nx$.

Целиком аналогичная постановка возникает и при интерпретации аномалий постоянного магнитного поля, так как потенциал и компоненты этого поля вне магнитных масс также удовлетворяют уравнению Лапласа.

5.3. Задачи для уравнения диффузии

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

описывающее процесс изменения температуры в однородном стержне или процесс диффузии — изменение концентрации вещества в растворе. Классической задачей для уравнения (1) является смешанная задача

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{2}$$

Физический смысл задачи (1), (2) состоит в следующем: мы знаем в некоторый начальный момент времени распределение температуры в стержне или концентрации вещества в цилиндрическом сосуде. Требуется определить распределение температуры или концентрации вещества в последующие моменты времени. Краевые условия означают, что в нашем процессе на концах поддерживается постоянная температура или концентрация.

Рассмотрим теперь для уравнения (1) некорректную задачу:

$$u(x, T) = f(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что задача (3) для уравнения (1) эквивалентна задаче (2) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Эта задача имеет вполне определенный физический смысл. Мы знаем (на основании физических измерений) распределение температуры или концентрации в некоторый момент времени. Нас интересует история процесса: какое было распределение температуры или концентрации в предыдущие моменты времени.

Физический смысл имеет и следующая некорректная задача для уравнения (1):

$$u(0,t) = f_1(t), \quad u'_x(0,t) = f_2(t). \tag{5}$$

Допустим, что мы не имеем возможности производить измерения концентрации вещества во всем цилиндре, а можем измерять концентрацию и поток вещества на одном из концов. Некорректность задачи (5) следует из примера:

$$f_1(t) = \sqrt{2/n}\sin nt, \quad f_2(t) = \cos nt + \sin nt,$$
$$u(x,t) = \sqrt{2/n}\sin(nt + \sqrt{2/n}\,x)e^{\sqrt{2/n}\,x}.$$

5.4. Определение физических полей по данным измерений

В задаче интерпретации данных гравитационных измерений, о которой говорилось в п. 5.1, геофизики на самом деле располагают значениями компоненты гравитационного поля не на всей поверхности Земли и не на отрезке, а на некотором конечном множестве точек. Таким образом, возникает задача: требуется определить функцию $\varphi(x)$ из уравнения (1) в п. 5.1, если известны значения правой части в конечном наборе точек, т. е. известны

$$f_k = f(x_k) \quad k = 1, \ldots, n.$$

Решение сформулированной задачи неоднозначно, однако очевидно, что если точки $\{x_k\}$ заполняют некоторый отрезок $[a,b]$ достаточно густо, можно с помощью интерполяции доопределить функцию $f(x)$ на весь отрезок. При этом возникнет дополнительная погрешность в правой части уравнения (1) из п. 5.1.

В прикладных задачах, в частности в задаче интерпретации гравиметрических данных, измерение значения функции в точке требует определенных затрат. В связи с этим возникает задача о рациональном выборе системы точек измерений. Ясно, что нецелесообразно выбирать слишком густую сетку, при которой погрешности простейшей интерполяции значительно меньше погрешностей измерительных приборов. Представляет практический интерес решение следующего вопроса: с какой точностью можно определить решение уравнения (1) в п. 5.1, если нам известны числа

$$\{f_k^\varepsilon\}, \quad \left|f_k^\varepsilon - f(x_k)\right| \le \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Аналогичная постановка имеет смысл и в случае, когда множество точек $\{x_k\}$ бесконечно. Если у множества $\{x_k\}$ существует предельная точка, решение уравнения (1) в п. 5.1 однозначно определяется по последовательности чисел

$$f_k = f(x_k), \quad k = 1, \ldots, \infty.$$

Единственность решения уравнения (1) в п. 5.1 по данным $\{f_k\}$ следует из известной теоремы теории аналитических функций: если аналитическая функция обращается в нуль на множестве, имеющем предельную точку внутри области регулярности, то она тождественно равна нулю.

Отметим, что аналитическими функциями пространственных переменных описываются многие физические поля.

Компоненты напряженности переменного электромагнитного поля в среде с постоянными свойствами удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Решения этого уравнения с постоянным коэффициентом k являются аналитическими функциями, и, таким образом, задача определения структуры электромагнитного поля по данным измерений на дискретном множестве сводится к задаче восстановления аналитических функций (одной или нескольких переменных) по ее значениям на этом множестве.

5.5. Томография

Томография — интенсивно развивающееся в последние годы научно-техническое направление. Слово имеет происхождение от греческих слов «томос» (слой) и «графия» (изображение). В научно-технической литературе это слово появилось в 20-х годах прошлого века в связи с созданием медицинских рентгеновских томографов. Интенсивное развитие томографии началось в 70-х годах

XX века в современном томографе имеется два основных аспекта. Это, во-первых, техническое устройство, позволяющее получать данные просвечивания исследуемого объекта, во-вторых, преобразование этих данных в изображение слоя объекта. Второй аспект базируется на математической теории.

Хотя термин томография до сравнительно недавнего времени использовался в основном в связи с задачами медицины, фактически те же принципы давно используются в геофизике при построении разрезов участков земной коры по данным геофизических измерений на профиле.

В настоящее время томографы и томография широко используются в самых разнообразных научно-технических областях.

Математические задачи, возникающие при интерпретации томографических данных — получение изображения слоя исследуемого объекта — относятся к так называемым обратным задачам математической физики.

Математический аппарат, используемый в настоящее время в медицинских рентгеновских томографах, основан на обращении преобразования Радона. Использование преобразования Радона в рентгеновской томографии базируется на определенной модели взаимодействия потока рентгеновского излучения с веществом исследуемого объекта. В этой модели не учитывается ряд факторов, которые могут играть в различных томографических задачах существенную роль. В модели, приводящей к преобразованию Радона, рентгеновские лучи предполагаются прямолинейными, не учитываются, в частности, геометрическое расхождение и рассеивание.

Итак, пусть имеется поток рентгеновских лучей, просвечивающих некоторый объект. Обозначим через ψ поток рентгеновских лучей, a — коэффициент поглощения. Предполагается, что просвечивание производится в тонком слое, так что коэффициент поглощения есть функция двух переменных, отличная от нуля в ограниченной области $\mathscr{D}$.

В томографах производится просвечивание слоя исследуемого объекта серией плоскопараллельных потоков рентгеновских лучей под разными углами. Таким образом, поток ψ есть функция переменных x, y и угла α:

$$\psi = \psi(x, y, \alpha).$$

При сделанных выше предположениях поток ψ удовлетворяет простейшему уравнению переноса

$$(\cos\alpha)\psi_x + (\sin\alpha)\psi_y + a\psi = 0. \tag{1}$$

Для функции $u = \ln\psi$ из (1) следует

$$(\cos\alpha)u_x + (\sin\alpha)u_y + a = 0. \tag{2}$$

Пусть первоначальный до прохождения через объект поток постоянен:

$$\psi = c.$$

Тогда функция u в точках после прохождения потока через объект будет равна

$$u(x, y, \alpha) = \int\limits_{\Gamma(x,y,\alpha)} a(\xi, \eta)\, ds, \tag{3}$$

где Γ — прямая, проходящая через область $\mathscr{D}$.

Первоначальный поток ψ нам известен, поток после прохождения измеряется. Таким образом, мы сможем считать известной величину $u(x, y, \alpha)$ и равенство (3) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно распределения интенсивности поглощения $a(x, y)$.

Приведем более детальную постановку задачи решения (3). Требуется определить функцию $a(x, y)$, равную нулю вне ограниченной области $\mathscr{D}$, если известна функция

$$\int\limits_{\Gamma(x,y,\alpha)} a(\xi, \eta)\, ds = u(x, y, \alpha). \tag{4}$$

Преобразование, ставящее в соответствие функции $a(x, y)$ функцию $u(x, y, \alpha)$, называется *преобразованием Радона.* Задача решения уравнения (4) есть задача обращения преобразования Радона.

Известны несколько формул обращения преобразования Радона. Если в (4) рассматривать u, a как элементы пространства $\mathbb{C}$, задача решения (4) некорректна. Уравнение (4) не является операторным уравнением первого рода, так как оператор Радона не является вполне непрерывным.

Задача Радона является одной из задач интегральной геометрии. Сформулируем общую задачу интегральной геометрии на плоскости. Пусть $\Gamma(p,q)$ — семейство кривых на плоскости, зависящее от двух параметров и обладающее следующим свойством: через каждую точку области $\mathscr{D}$ проходит пучок кривых семейства. Пусть далее $g(x,y,p,q)$ — заданная функция четырех переменных. Требуется определить функцию $u(x,y)$, равную нулю вне области $\mathscr{D}$, если известна функция

$$\int\limits_{\Gamma(p,q)} g(x,y,p,q)u(x,y)\,ds = f(p,q). \tag{5}$$

Приведем теперь задачу геофизики — задачу интерпретации сейсмических данных, которая приводит к задаче интегральной геометрии — задаче решения уравнения типа (5). Эту задачу называют задачей сейсмической томографии.

Пусть $v(x,y)$ — скорость распространения волнового процесса в двумерной среде, $\tau(x_1,y_1,x_2,y_2)$ — время прихода волны из точки (x_1,y_1) в точку (x_2,y_2).

Как известно,

$$\tau = \int\limits_{\Gamma(x_1,y_1,x_2,y_2)} n(x,y)\,ds, \quad n = 1/v, \tag{6}$$

где Γ — луч, соединяющий точки (x_1,y_1), (x_2,y_2). Функция τ удовлетворяет уравнениям эйконала

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y_1}\right)^2 &= n^2(x_1,y_1),\\ \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y_2}\right)^2 &= n^2(x_2,y_2).\end{aligned} \tag{7}$$

Прямая кинематическая задача — это задача определения функции τ по заданной функции v или n. Математически это классическая задача Коши для уравнений первого порядка (7) или краевая задача для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обратную задачу можно рассматривать как задачу решения операторного уравнения (6). Так как лучи Γ зависят от искомой функции n, уравнение (6) нелинейное.

Предположим, что

$$n = n_0 + n_1$$

и функция n_0 нам известна, а функция n_1 достаточно мала, так что мы в наших уравнениях можем пренебречь величинами порядка $(n_1)^2$.

В геофизике подобное предположение будет в случае, когда расстояние между парами точек невелико — тогда n_0 просто постоянно (сейсмическое просвечивание между скважинами) — или когда n_0 зависит только от одной переменной и определяется по решению одномерной обратной задачи (сейсмозондирование осадочного слоя). Данная гипотеза может быть использована и в задаче акустической стратификации океана, где скорость звука мало отличается от среднего значения.

В соответствии с нашими предположениями уравнения (7) примут вид

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial x_j}\frac{\partial \tau_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y_j}\frac{\partial \tau_1}{\partial y_j} = n_0(x_j, y_j) n_1(x_j, y_j). \tag{8}$$

Из (8) получим

$$\tau_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = \int\limits_{\Gamma_0(x_1, y_1, x_2, y_2)} n_1(x, y)\, ds, \tag{9}$$

где Γ_0 — луч, соединяющий точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) в среде, соответствующей функции $n_0(x, y)$. Так как n_0 предполагается известным, то можно считать известным и семейство лучей Γ_0.

6. Операторные и интегральные уравнения

6.1. О понятиях корректности

Здесь мы обсудим введенные и используемые рядом авторов понятия корректности. Мы будем рассматривать эти понятия применительно к операторным уравнениям или отображениям векторных топологических пространств. В таком виде сравнительно просто можно представить отмеченные выше задачи математической физики, математического анализа, алгебры, линейного программирования и т. д.

Вначале введем общее определение корректности, которое охватывает различные определения этого понятия.

Пусть $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ — топологические векторные пространства, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ — множества, $\mathscr{C} = \mathscr{C}(B, X)$ — выбранный класс допустимых отображений $B \to X$ и их сужений (например, компактные или замкнутые), $T\colon X \to Y$ — произвольное отображение из выбранного класса (например, непрерывное или замкнутое), $T^{-1}\colon Y \to X$ — обратное соответствие (не обязательно однозначное).

Определение 1. Отображение (оператор) T называется $(A, B, \mathscr{C})$-*корректным*, если:

(1) $TA \supseteq B$,

(2) T_B^{-1} однозначно,

(3) T_B^{-1} допустимо.

Заменив условие (1) на

(1′) $\overline{TA} \supseteq B$,

получим определение $(A, B, \mathscr{C})'$-корректности в широком смысле.

Если хотя бы одно из условий (1)–(3) нарушается, то отображение T называется $(A, B, \mathscr{C})$-некорректным (соответственно в узком или широком смысле).

Как уже отмечалось, понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений было сформулировано Ж. Адамаром. Так, в работе [56] отмечается: «С уравнениями в частных производных связаны две фундаментальных проблемы: Дирихле и Коши. В задачах Коши условия определяют значения функции и ее первых производных в каждой точке границы. Нужно найти достаточно широкие классы случаев, в которых каждая из этих задач была бы хорошо поставлена, т. е. разрешима и определена».

Также в [56] сказано: «Каждая граничная задача состоит в определении неизвестной функции, которая:

(1°) является решением (неопределенного) уравнения с частными производными;

(2°) удовлетворяет некоторым граничным условиям (или условиям определенности).

Такая задача называется *корректно поставленной*, если эти условия обеспечивают существование и единственность решения рассматриваемого уравнения». Простейшей граничной задачей является задача Коши.

Таким образом, первоначальное определение Адамара корректности содержит два условия: существование и единственность.

Если сформулировать задачу в виде отображения $T\colon X \to Y$, то отображение, соответствующее корректной задаче, $(A, B, \mathscr{C})$-корректно при $A = X$, $B = Y$, $\mathscr{C}$ — произвольное отображение.

Условие непрерывной зависимости решения от данных было введено Д. Гильбертом и Р. Курантом. В п. 3.6 приведено определение корректности, данное в работе [22]. В дальнейшем это определение сформулировано более подробно. В п. 3.6 приведено и это более подробное понятие, так как оно было сформулировано, например, в известных учебниках С. Л. Соболева [43], И. Г. Петровского [35].

Применительно к введенному нами понятию корректности отображения справедливо следующее утверждение.

Отображение, соответствующее корректной задаче, $(A, B, \mathscr{C})$-корректно при $A = X$, $B = Y$, $\mathscr{C}$ — произвольное отображение.

Приведем примеры, связанные с введенным понятием.

Примеры. 1) Гомеоморфизм $A = X$ на $B = Y$ является $(A, B, \mathscr{C})$-корректным отображением при $\mathscr{C} = \mathscr{C}(B, A)$.

2) Пусть: X — банахово пространство с метрической топологией $\mathscr{U}$; A — плотное подпространство X ($\bar{A} = X$); $Y = X$ и $\mathscr{V} = \mathscr{U}$, $B = Y$; $\mathscr{C} = \mathscr{C}(Y, X)$ — пространство непрерывных отображений $Y \to X$; I — тождественный оператор $X \to X$; $S\colon A \to X$ — компактный оператор,

$\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число; $T = \lambda I - S$ — фредгольмов оператор $A \to X$.

Тогда фредгольмов оператор $T = \lambda I - S$ при каждом $\lambda \notin \Sigma(S)$ (не из спектра оператора S) всегда является $(A, B, \mathscr{C})$-корректным в широком смысле (выполняются условия ($1'$), (2), (3)). А при каждом $\lambda \in \Sigma(S)$ (из спектра оператора S) — некорректным в широком смысле (и тем более в узком).

Если оператор S замкнут, то при $\lambda \notin \Sigma(S)$ оператор T $(A, B, \mathscr{C})$-корректен в узком смысле (см. [30, 3.8.2]). Это тем более так, если $A = X$ и оператор S ограничен.

3) Компактный взаимно однозначный линейный оператор $S\colon X \to X$, преобразующий бесконечномерное банахово пространство X в себя, при $A = X$, $B = SA$, $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X, X)$ — непрерывное отображение, является $(A, B, \mathscr{C})$-некорректным, так как $S^{-1}\colon B \to A$ неограничен (см. [30, 3.6.2]).

В работе [30] на основании концепций, изложенных в работе А. Н. Тихонова [46], один из авторов сформулировал понятие корректности по Тихонову или условной корректности. Рассматривается уравнение

$$Tx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{1}$$

Определение 2. Задача решения (1) называется *поставленной корректно по Тихонову*, если выполняются следующие условия.

1) Априори известно, что решение задачи существует и принадлежит заданному множеству A.

2) Решение единственно на множестве A.

3) Решение x непрерывно зависит от правой части y для тех вариаций y, которые не выводят решение за пределы множества A.

Другая формулировка условия 3):

$3'$) Оператор T_{TA}^{-1} непрерывен.

Как было отмечено в главе 1 части «Основные понятия», в случае, если множество A компактное, выполнение условия 3) или $3'$) следует из выполнения условий 1), 2). Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если задача решения* (1) *поставлена корректно по Тихонову, то отображение T $(A, B, \mathscr{C})$-корректно, если $\mathscr{C}$ — класс непрерывных отображений.*

Утверждение 2. *Если, кроме того, множество A компактно и отображение T непрерывно, то отображение T*

$(A, B, \mathscr{C})$*-корректно, если выполняются первые два условия корректности по Тихонову.*

Пусть теперь X, Y — полные метрические пространства, T — непрерывное отображение. Приведем две теоремы, изложенные в работах [16, 46], в которых установлены достаточные условия, при которых из выполнения 1), 2) следует справедливость условия 3) или 3′).

Теорема 1 (А. М. Тихонов)**.** *Пусть решение уравнения* (1) *единственно, множество $A \subset X$ компактно. Тогда на множестве TA оператор T_{TA}^{-1} непрерывен.*

Теорема 2 (В. К. Иванов)**.** *Пусть решение уравнения* (1) *единственно и множество корректности $A \subset X$ является алгебраической суммой*

$$A = A_1 + X_1,$$

где A_1 — компактное множество, X_1 — конечномерное подпространство пространства X. Тогда на множестве TA оператор T_{TA}^{-1} равномерно непрерывен.

6.2. Регуляризация

В этом пункте мы следуем монографии [24]. Пусть X, Y — полные метрические пространства, $T\colon X \to Y$ — непрерывное отображение (оператор), оператор T^{-1} однозначный, но не является непрерывным.

Рассмотрим уравнение

$$Tx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{1}$$

Предположим, что правая часть в (1) известна не точно, а приближенно, т. е. задан элемент y_δ такой, что

$$\rho(y_t, y_\delta) \le \delta,$$

где y_t — точная правая часть (1), $Tx_t = y_t$, x_t — точное решение (1).

Требуется по элементу y_δ определить приближенное решение уравнения (1), т. е. определить такой элемент x_ε, что

$$\rho(x_t, x_\varepsilon) \le \varepsilon,$$

где величина ε достаточно мала при достаточно малом δ.

Определение. Оператор $R(y,\alpha)\colon Y \to X$, зависящий от параметра α, называется *регуляризирующим* для уравнения (1) в окрестности $y = y_t$, если он обладает следующими свойствами.

1) Существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(y,\alpha)$ определен для всякого $\alpha > 0$ и любого $x \in X$, для которого

$$\rho(y, y_t) \le \delta_1.$$

2) Существует такая функция $\alpha = \alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$, что если $\rho(y_\delta, y_t) \le \delta(\varepsilon)$ и $x_\delta = R(y_\delta, \alpha(\delta))$, то $\rho(x_\delta, x_t) \le \varepsilon$.

Если для уравнения (1) построен регуляризирующий оператор, то в качестве приближенного решения уравнения, построенного по приближенным данным, можно взять элемент

$$x_\alpha = R(y_\delta, \alpha),$$

где значения параметра α согласовано с погрешностью данных δ. Числовой параметр α называется *параметром регуляризации.*

Таким образом, задача определения приближенного решения по приближенным данным сводится к нахождению регуляризирующего оператора и параметра регуляризации. Отметим, что выбор параметра регуляризации должен быть согласован не только с величиной погрешности δ, но и с определенными априори заданными свойствами искомого решения x_t. Методы такого согласования будут рассмотрены далее.

Теорема. *Пусть оператор $R(y,\alpha)$ определен для всех $y \in Y$, $\alpha > 0$, непрерывен по y и для любого $y \in Y$*

$$\lim_{\alpha\to 0} R(Tx, \alpha) = x. \tag{2}$$

Тогда оператор $R(y,\alpha)$ является регуляризирующим для уравнения (1).

□ Пусть $x_t \in X$, $y_t \in Y$, $y_\delta \in Y$, $Tx_t = y_t$, $\rho(y_\delta, y_t) \le \delta$. Тогда

$$\rho(R(y_\delta,\alpha), x_t) \le \rho(R(y_\delta,\alpha), R(y_t,\alpha)) + \rho(R(y_t,\alpha), x_t).$$

Из непрерывности оператора $R(y,\alpha)$ следует, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ из неравенства

$$\rho(y_\delta, y_t) \le \delta$$

следует
$$\rho(R(y_\delta,\alpha),R(y_t,\alpha))\le\omega(\delta),$$
где $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Из (2) следует, что для любого $\delta>0$ существует такое $\alpha_1=\alpha_1(\delta,x_t)$, что при $\alpha\le\alpha_1$
$$\rho(R(y_t,\alpha),x_t)\le\omega(\delta)$$
и, таким образом,
$$\rho(R(y_\delta,\alpha),x_t)\le 2\omega(\delta).$$
Так как $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что из указанных неравенств при $\delta\le\delta(\varepsilon)$ следует
$$\rho(R(y_\delta,\alpha),x_t)\le\varepsilon.\quad\blacksquare$$

Рассмотрим теперь так называемый *вариационный принцип регуляризации.*

Пусть $\Omega(x)$ — неотрицательный функционал, определенный на всюду плотном в X множестве X_1, и пусть

1) $x_t\in X_1$;

2) для любого $a>0$ множество элементов из X_1, для которых $\Omega(x)\le a$, является компактным;

3) если последовательность $\{x_n\}\in X_1$, $n=1,2,\ldots$, сходится,
$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\quad\text{и}\quad\Omega(x_{n+1})\le\Omega(x_n),$$
то $x_0\in X_1$ и $\Omega(x_0)\le\Omega(x_n)$.

Функционалы $\Omega(x)$, удовлетворяющие этим условиям, называются *стабилизирующими функционалами*, а последовательности $\{x_n\}\in X_1$ — *минимизирующими последовательностями* для $\Omega(x)$.

Пусть задан элемент y_δ такой, что
$$\rho(y_\delta,y_t)\le\delta,\quad y_t=Tx_t.$$
Будем искать приближенное решение (1) на множестве $P_\delta\subset X$:
$$x\in P_\delta:\rho(Tx,y_\delta)\le\delta.$$

В силу того, что оператор, обратный к оператору T, не является непрерывным, множество P_δ может для любых сколь угодно малых δ содержать элементы, отклоняющиеся от искомого элемента x_t на конечную величину. Обозначим

$$Q_{1,\delta} = P_\delta \cap X_1,$$
$$\tilde{x}_\delta : \Omega(\tilde{x}_\delta) = \inf \Omega(x), \quad x \in Q_{1,\delta}$$

(существование элемента $\widetilde{x}_\delta$ будет показано ниже).

Элемент $\tilde{x}_\delta$ можно рассматривать как результат применения к элементу y_δ некоторого оператора

$$\tilde{x}_\delta = \widetilde{R}(y_\delta, \delta).$$

Покажем, что оператор $\widetilde{R}(y_\delta, \delta)$ является регуляризирующим по отношению к уравнению (1). Вначале покажем, что оператор $\widetilde{R}(y, \delta)$ определен для любого y_δ такого, что

$$\rho(y_\delta, y_t) \le \delta.$$

Так как функционал $\Omega(x)$ неотрицателен, существует точная нижняя грань

$$\inf \Omega(x) = \Omega_0, \quad x \in Q_{1,\delta}.$$

Пусть x_n — минимизирующая последовательность для $\Omega(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(x_n) = \Omega_0 \quad \text{и} \quad \Omega(x_{n+1}) \le \Omega(x_n).$$

В силу свойства 2) последовательность x_n принадлежит компактному множеству и, значит, из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что эта подпоследовательность совпадает с самой последовательностью, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\delta \quad \text{и} \quad \Omega(x_\delta) = \Omega_0 = \inf_{x \in Q_{1,\delta}} \Omega(x).$$

В силу того, что элемент x_δ минимизирует функционал $\Omega(x)$ на множестве $Q_{1,\delta}$, имеет место неравенство

$$\Omega(x_\delta) \le \Omega(x_t)$$

и, таким образом, элемент x_δ принадлежит компактному множеству

$$Q_t = \{x : \Omega(x) \le \Omega(x_t)\}.$$

Пусть задана последовательность y_n такая, что

$$\rho(y_t, y_n) \le \delta_n, \quad \delta_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для каждого δ_n определено множество P_{δ_n} и $Q_{1,\delta_n} = P_{\delta_n} \cap Q_1$.

Как установлено выше, в каждом множестве Q_{1,δ_n} существует элемент x_{δ_n}, минимизирующий функционал $\Omega(x)$ на этом множестве. Значит, последовательности чисел δ_n соответствует последовательность элементов x_{δ_n}, принадлежащая компактному множеству Q_t. Из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что это есть сама последовательность x_{δ_n}. Пусть $\tilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\delta_n}$. Так как $x_{\delta_n} \in Q_{1,\delta_n} \subset P_{\delta_n}$, то для всякого элемента x_{δ_n} выполняется неравенство

$$\rho(Tx_{\delta_n}, y_{\delta_n}) \le \delta_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\rho(T\tilde{x}, y_t) = 0,$$

откуда, в силу единственности решения (1), $\tilde{x} = x_t$. Таким образом, для последовательности $\delta_n \to 0$ соответствующая последовательность x_{δ_n} сходится к точному решению x_t уравнения (1).

6.3. Линейные операторные уравнения

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, операторное уравнение первого рода

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in \mathscr{F}, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, U, $\mathscr{F}$ — гильбертовы пространства.

Для линейных уравнений понятия, введенные в п. 6.2, существенно упрощаются. Кроме того, удается построить регуляризирующие семейства, которые выражаются в явном виде через оператор A. Мы ограничимся изложением ряда вопросов регуляризации в предположении, что регуляризирующее семейство является семейством линейных операторов.

Пусть решение (1) единственно, и пусть V — некоторое подмножество пространства U.

Определение 1. Семейство линейных операторов $\{R_\alpha\}$, $0 < \alpha < \alpha_0$, действующих из $\mathscr{F}$ в U, называется *регуляризирующим* (см. [16]) для уравнения (1) на множестве V, если:

1) для любого α, $0 < \alpha < \alpha_0$, оператор R_α определен на всем $\mathscr{F}$ и ограничен;

2) для любого $u \in V$

$$\lim_{\alpha\to 0} R_\alpha A u = u.$$

Если сходимость в 2) равномерна на V, то R_α называется *равномерно регуляризирующим* [16]. Так как оператор A^{-1} неограничен, то при $V = U$ равномерно регуляризирующего семейства не существует.

Иногда удобнее использовать регуляризирующие семейства, зависящие от целочисленного параметра n.

Определение 2. Семейство линейных операторов $\{R_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, действующих из $\mathscr{F}$ в U, называется *регуляризирующим* для уравнения (1) на множестве V, если:

1) для любого n оператор R_n определен на всем $\mathscr{F}$ и ограничен;

2) для любого $u \in V$

$$\lim_{n\to 0} R_n A u = u.$$

Предположим, что регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}$ для уравнения (1) нам известно, и рассмотрим задачу определения приближенного решения уравнения (1) по приближенным данным [16, 24].

Итак, пусть нам известен элемент f_ε:

$$\|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon.$$

Обозначим через $u_{\alpha\varepsilon}$ результат применения оператора R_α к приближенной правой части

$$u_{\alpha\varepsilon} = R_\alpha f_\varepsilon$$

и оценим разность $u - u_{\alpha\varepsilon}$:

$$\|u - u_{\alpha\varepsilon}\| \le \|u_{\alpha\varepsilon} - R_\alpha A u\| + \|u - R_\alpha A u\| \le \|R_\alpha\|\varepsilon + \|u - R_\alpha A u\|. \quad (2)$$

Если $u \in V$, то второе слагаемое в правой части (2) стремится к нулю при $\alpha \to 0$. Если R_α — равномерно регуляризирующее семейство, то

$$\|u - R_\alpha Au\| \leq \beta(\alpha),$$
$$\beta(\alpha) = \sup \|R_\alpha Av - v\|, \quad \lim_{\alpha\to 0} \beta(\alpha) = 0,$$

и, значит,

$$\|u - u_{\alpha\varepsilon}\| \leq \|R_\alpha\|\varepsilon + \beta(\alpha).$$

В этом случае мы будем иметь при соответствующем выборе α гарантированную оценку точности приближенного решения $u_{\alpha\varepsilon}$. В частности, можно положить

$$\alpha = \alpha_0(\varepsilon),$$

где $\alpha_0(\varepsilon)$ определяется соотношением

$$\|R_{\alpha_0}\|\varepsilon + \beta(\alpha_0) = \inf_\alpha [\|R_\alpha\|\varepsilon + \beta(\alpha)].$$

Приведем теперь несколько примеров регуляризирующих семейств для уравнений в гильбертовом пространстве $U = \mathscr{F}$.

Сведение к уравнениям второго рода. Пусть оператор A самосопряженный и положительный. Наряду с (1) рассмотрим семейство уравнений

$$\alpha u_\alpha + Au_\alpha = (\alpha E + A)u_\alpha = f. \tag{3}$$

Обозначим через R_α оператор

$$R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}.$$

Покажем, что семейство $\{R_\alpha\}$ является регуляризирующим для уравнения (1) на всем пространстве U.

Из положительности и компактности оператора A следует

$$\|R_\alpha\| = 1/\alpha.$$

Рассмотрим теперь разность

$$u - R_\alpha Au = \alpha(\alpha E + A)^{-1}u.$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} > 0$, полную ортонормированную систему собственных элементов и собственных значений оператора A. Тогда

$$
\begin{gathered}
u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad a_k = (u, \varphi_k), \\
u - R_\alpha A u = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k, \\
\|u - R_\alpha A u\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\
= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} + \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \leq \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2} \|u\|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ второе слагаемое в правой части (4) будет сколь угодно мало при достаточно большом n. Первое слагаемое сколь угодно мало при достаточно малом α и фиксированном n, откуда следует

$$
\lim_{\alpha \to 0} \|u - R_\alpha A u\| = 0.
$$

Если оператор A не является положительным самосопряженным, уравнение (1) можно свести к уравнению с положительным и самосопряженным оператором, применив к обеим частям оператор A^*. При этом мы получим уравнение

$$
A_1 u = f_1, \quad A_1 = A^* A, \quad f_1 = A^* f.
$$

Регуляризирующее семейство для первоначального уравнения (1) при этом будет иметь вид

$$
R_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^*.
$$

Разложение по собственным элементам. Пусть оператор A самосопряженный, $\{\varphi_k\}$ — собственные элементы,

$\{\lambda_k\}$ — собственные значения, $|\lambda_{k+1}| \le |\lambda_k|$. Обозначим через R_n оператор

$$R_n f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} f_k \varphi_k, \quad f_k = (f, \varphi_k).$$

Очевидно, что операторы R_n непрерывны и

$$\|R_n\| = 1/\lambda_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} R_n A u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = u, \quad a_k = (u, \varphi_k).$$

Таким образом, семейство операторов $\{R_n\}$ является регуляризирующим семейством, зависящим от параметра n.

Метод последовательных приближений. Пусть оператор A — положительный самосопряженный, $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ — последовательности собственных элементов и значений A, $\|A\| = \lambda_1 \le 1$. Рассмотрим последовательность

$$u_{k+1} = u_k - A u_k + f, \quad u_0 = f, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Действительно,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (E - A^k) A u, \quad u - u_n = (E - A)^{n+1} u.$$

Разлагая элементы u, u_n по базису $\{\varphi_k\}$, получим

$$u - u_n = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{n+1} a_k \varphi_k, \quad a_k = (u, \varphi_k),$$

$$\|u - u_n\|^2 = \sum_{k=0}^{m} (1 - \lambda_k)^{2(n+1)} a_k^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{2(n+1)} a_k^2 \tag{5}$$
$$\le (1 - \lambda_m)^{2(n+1)} \|u\|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^2.$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (5) будет сколь угодно мало при достаточно большом m, а первое слагаемое сколь угодно мало при достаточно большом n и фиксированном m.

Регуляризирующее семейство, соответствующее изложенному выше методу последовательных приближений, имеет вид

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} (E - A)^k, \quad \|R_n\| = n + 1.$$

Отметим теперь, что регуляризирующие семейства могут давать критерии существования решений уравнений.

Теорема. *Пусть* $\{R_\alpha\}$ *— регуляризирующее семейство для* (1) *на всем пространстве* U, $U = \mathscr{F}$ *и операторы* R_α, A *перестановочны*:

$$R_\alpha A = A R_\alpha.$$

Тогда если для некоторого f_0 *существует предел*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha f_0 = u_0,$$

то этот предел является решением (1) *с правой частью* f_0:

$$A u_0 = f_0.$$

□ В силу непрерывности оператора A

$$\lim_{\alpha \to 0} A R_\alpha f_0 = A u_0,$$

откуда получим

$$A u_0 = \lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A f_0 = f_0. \quad \blacksquare$$

6.4. Интегральные уравнения со слабыми особенностями

Пусть D — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — элементы $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ — функция, определенная в D.

Интегральными уравнениями первого и второго рода относительно функции $u(x)$ называются уравнения вида

$$\int\limits_D K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1}$$

$$u(x) + \int\limits_D K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = f(x). \tag{2}$$

Здесь функция $K(x,\xi)$ такова, что интегральный оператор в уравнениях (1), (2) является интегральным оператором в узком смысле, определенным в [30, ч. I, п. 3.6.1]. В уравнении первого рода (1) функция $f(x)$ может быть определена в некоторой области D_1, отличной от D. Соответственно ядро K будет определено в области $D_1 \times D$. Функции $u(x)$ и $f(x)$ могут рассматриваться как элементы различных функциональных пространств.

В уравнениях второго рода области определения функций $u(x)$, $f(x)$ и соответствующие функциональные пространства совпадают.

Среди интегральных уравнений первого рода выделяется класс уравнений, которые могут быть приведены к уравнениям второго рода применением дифференциальных или псевдодифференциальных операторов. В настоящем разделе мы рассмотрим интегральные уравнения первого рода именно этого класса. Мы ограничимся случаем, когда оператор, приводящий уравнение первого рода к уравнению второго рода, будет степенью оператора Лапласа. Решение уравнения $u(x)$ мы будем считать элементом гильбертова пространства $L_2(D)$.

Итак, пусть в (1)

$$K(x,\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{n-\alpha}} + K_0(x,\xi), \tag{3}$$

где

$$0 < \alpha < n, \tag{4}$$

α — целое четное число, $n \geq 3$, $K_0(x,\xi) \in C^{\alpha}(\overline{D \times D})$. Известно, что

$$\Delta^{\alpha/2}|x-\xi|^{-n+\alpha} = c\delta(x-\xi),$$

где $c = c(n, \alpha)$ — отличная от нуля константа. Следовательно, применяя к (1) оператор $c^{-1}\Delta^{\alpha/2}$, получаем

$$u(x) + \int\limits_D K_1(x,\xi)u(\xi)d\xi = f_1(x),$$
$$K_1(x,\xi) = c^{-1}\Delta^{\alpha/2}K_0(x,\xi), \quad f_1(x) = c^{-1}\Delta^{\alpha/2}f(x). \tag{5}$$

Таким образом, задача решения уравнения первого рода (1) свелась к задаче решения уравнения второго рода (5). В случае, если решение уравнения (5) единственно, решение уравнения (1) также единственно. Кроме того, задача решения (1) будет корректна по Фикере, если считать, что

$$u(x) \in L_2(D), \quad f(x) \in W_2.$$

Редукция уравнения первого рода с ядром (3) к уравнению второго рода возможна также при одном условии (4) без предположения четности числа α. Для этого нужно предварительно определить дробные степени оператора Лапласа. В случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения (1) задана в области $D_1 = \mathbb{R}^n$, это легко сделать с помощью преобразования Фурье. Это также удается сделать в более общем случае, когда $D_1 \supset \bar{D}$.

6.5. Скалярные уравнения Вольтерра

Интегральными уравнениями Вольтерра первого и второго рода относительно функции $u(x)$ называются уравнения вида

$$\int\limits_0^x K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1}$$

$$u(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = f(x). \tag{2}$$

Мы будем рассматривать уравнения на конечном отрезке

$$x \in [0, l].$$

Так как интегральный оператор в уравнениях Вольтерра квазинильпотентный, решение уравнения второго рода всегда существует, единственно и представимо в виде сходящегося ряда Неймана.

Для уравнений Вольтерра первого рода, вообще говоря, возможно почти такое же разнообразие случаев, как и для интегральных уравнений первого рода общего вида. В настоящем разделе мы рассмотрим уравнения Вольтерра первого рода, принадлежащие к классу интегральных уравнений со слабыми особенностями и сводящиеся к уравнениям второго рода. Искомое решение $u(x)$ мы будем считать элементом пространства $C[0, l]$.

Теорема. *Пусть в* (1) *функция* $K(x, \xi)$ *представима в виде*

$$K(x, \xi) = (x - \xi)^{\alpha - 1}/\Gamma(\alpha) + K_0(x, \xi),$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\Gamma(\alpha)$ *— гамма-функция, а функция*

$$K_0(x, \xi) \in C^1(\Omega), \quad \Omega = \{(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l] : 0 < \xi < x < l\}.$$

Тогда:

1) *решение* (1) *единственно*;

2) *для любого* $f(x) \in C^1[0, l]$ *и удовлетворяющего условию* $f(0) = 0$ *существует решение* $u \in C[0, l]$.

□ Определим оператор дифференцирования порядка α следующей формулой:

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f'(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^\alpha}. \quad (3)$$

Так как

$$\int\limits_s^x (x - \xi)^{-\alpha} (\xi - s)^{\alpha - 1}\, d\xi = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha),$$

то после применения к правой и левой частям уравнения (1) оператора D^α имеем

$$u(x) + \int\limits_0^x K_1(x, \xi) u(\xi)\, d\xi = f_1(x), \quad (4)$$

где $f_1 = D^\alpha f$, а непрерывное ядро $K_1(x,\xi)$ выражается через функцию $K_0(x,\xi)$. Нетрудно показать, что уравнения (1) и (4) эквивалентны. ■

Уравнение (1) является частным случаем общего интегрального уравнения первого рода и к этому уравнению применимы общие методы регуляризации, приведенные в п. 6.3. Однако интегральный оператор в (1) не является самосопряженным. Применение к (1) сопряженного оператора понижает устойчивость решения. В связи с этим, а также в связи с тем, что вольтерровские операторы обладают рядом преимуществ с точки зрения вычислений, целесообразно исследовать возможности регуляризации уравнения (1) с помощью вольтерровских операторов. Мы приведем пример вольтерровской регуляризации (1) в случае $K(x,x) = 1$. Дополнительно предположим, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию $u(0) = 0$.

Обозначим через $u_\delta(x)$ ($\delta > 0$) решение уравнения

$$\delta u_\delta(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi) u_\delta(\xi)\, d\xi = f(x). \tag{5}$$

Решение уравнения (5) существует, единственно и может быть представлено в виде

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta} f(x) + \frac{1}{\delta} \int\limits_0^x R(x,\xi,\delta) f(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

где $R(x,\xi,\delta)$ — непрерывная функция.

Правая часть в (6) при фиксированном δ есть результат применения к функции $f(x)$ непрерывного оператора. Покажем, что семейство этих операторов, зависящее от параметра δ, является регуляризирующим семейством по отношению к уравнению (1). Для этого достаточно показать сходимость семейства функций $u_\delta(x)$ к решению (1) $u(x)$ при $\delta \to 0$. Дифференцируя уравнение (5), получим

$$\delta u'_\delta(x) + u_\delta(x) + \int\limits_0^x K_1(x,\xi) u_\delta(\xi)\, d\xi = f_1(x). \tag{7}$$

Из (7) следует, что функция $u_\delta(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_\delta(x) + \int\limits_0^x K_\delta(x,\xi)u_\delta(\xi)\,d\xi = f_\delta(x),$$

$$K_\delta(x,\xi) = \frac{1}{\delta}\int\limits_\xi^x e^{-(x-y)/\delta}K_1(y,\xi)\,dy, \tag{8}$$

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int\limits_\xi^x e^{-(x-\xi)/\delta}f_\delta(\xi)\,d\xi.$$

Теперь рассмотрим разность

$$u(x) - u_\delta(x) = f_1(x) - f_\delta(x)$$
$$-\int\limits_0^x [K_1(x,\xi) - K_\delta(x,\xi)]u(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^x K_0(x,\xi)[u(\xi) - u_\delta(x)]\,d\xi. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что разности $f_1(x) - f_\delta(x)$, $K_1 - K_\delta$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}
|f_1(x) - f_\delta(x)| \le e^{-x/\delta}\mathscr{M}(x),\\
|K_1(x,\xi) - K_\delta(x,\xi)| \le e^{-(x-\xi)/\delta}\mathscr{M}_1(x,\xi),\\
\mathscr{M}(x) = \max_\xi\{|f(\xi)|:\ \xi \in [0,x]\},\\
\mathscr{M}_1(x,\xi) = \max_{x,y}\{|K_1(x,y)|:\ y \in [x,\xi]\}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Из (10) следует, что первые два слагаемых в правой части (9) стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Учитывая равномерную ограниченность по δ функции $K_\delta(x,\xi)$, отсюда получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\|u(x) - u_\delta(x)\|_C = 0.$$

6.6. Операторные уравнения Вольтерра

Пусть $u(t)$ — непрерывная функция скалярного аргумента t со значениями в гильбертовом пространстве U, и пусть $A(t,\tau)$ —

семейство непрерывных операторов с областью определения U и областью значений из U. Семейство операторов $A(t,\tau)$ предполагается непрерывно зависящим от переменных t, τ. Операторным уравнением Вольтерра первого рода относительно функции $u(t)$ называется уравнение

$$\int_0^t A(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{1}$$

Операторным уравнением Вольтерра второго рода назовем уравнение

$$Bu(t) + \int_0^t A(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{2}$$

где B — непрерывный оператор и

$$N(B) = 0. \tag{3}$$

Мы будем рассматривать уравнения (1), (2) на конечном отрезке $t \in [0,T]$.

Если оператор B^{-1} ограничен, уравнение второго рода (2), очевидно, эквивалентно уравнению вида

$$u(t) + \int_0^t A(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Так как интегральный оператор в (2) является квазинильпотентным в банаховом пространстве $U_T = C([0,T];U)$ с нормой

$$\|u(t)\|_{U_T} = \max \|u(t)\|_U,$$

то решение уравнения (2) всегда существует, единственно и непрерывно зависит от правой части f.

Если операторное уравнение Вольтерра первого рода (1) сводится к уравнению второго рода (2) с ограниченным оператором B^{-1} применением дифференцирования по переменной t, результаты, изложенные в предыдущем разделе относительно скалярных уравнений Вольтерра, без изменения переносятся на операторные уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение (2) в случае, когда оператор B^{-1} не является ограниченным.

Теорема. *Пусть оператор B самосопряженный и перестановочный со всеми операторами $A(t,\tau)$. Тогда решение уравнения* (2) *единственно.*

□ Обозначим через B_T продолжение оператора B на пространство U_T, через A_T — интегральный оператор в (2) как оператор из U_T в U_T. Из того, что оператор B самосопряженный, и из (3) следует (см. [30, ч. I, п. 3.9]), что для любого $u(t) \subset U_T$ существует число $c > 0$ такое, что

$$\left\|B_T^n u(t)\right\|_{U_T} \geq c^n \|u(t)\|_{U_T}.$$

С другой стороны, из квазинильпотентности интегрального оператора в (2) получим: для любого $\delta > 0$ существует такое n_0, что для всех $n \geq n_0$

$$\left\|A_T^n u(t)\right\|_{U_T} \leq \delta^n \|u(t)\|_{U_T},$$

откуда и следует справедливость утверждения теоремы. ■

Отметим, что для нормы оператора A_T^n нетрудно получить следующее неравенство:

$$\left\|A_T^n\right\| \leq a^n T/n!,$$

где $a = \max \|A(t,\tau)\|$.

Приведем пример операторных уравнений Вольтерра первого рода, которые приводятся к уравнениям второго рода с неограниченным B^{-1}. Пусть все операторы $A(t,\tau)$ самосопряженные и перестановочные. Тогда существует семейство проекционных операторов $\{E_\lambda\}$ и такая скалярная функция $a(t,\tau,\lambda)$, что

$$A(t,\tau) = \int a(t,\tau,\lambda)\, dE_\lambda.$$

В этом случае операторное уравнение Вольтерра (1) эквивалентно семейству скалярных уравнений Вольтерра, зависящих от параметра λ:

$$\int\limits_0^t a(t,\tau,\lambda) u(\tau,\lambda)\, d\tau = f(t,\lambda). \qquad (4)$$

Если для любого λ функция $a(t,\tau,\lambda)$ непрерывно дифференцируема по переменной t и $a(t,\tau,\lambda) > 0$, то при фиксированном λ уравнение (4) эквивалентно уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{gathered} u(t,\lambda) + \int\limits_0^t a_1(t,\tau,\lambda)u(\tau,\lambda)\,d\tau = f_1(t,\lambda), \\ a_1(t,\tau,\lambda) = a_t(t,\tau,\lambda)/a(t,t,\lambda), \\ f_1(t,\lambda) = f_t(t,\lambda)/a(t,t,\lambda). \end{gathered} \tag{5}$$

При фиксированном λ решение уравнения (5) единственно и непрерывно зависит от правой части f. Из этого следует единственность решения уравнений (4) и (1). Однако функция $a_1(t,\tau,\lambda)$ может стремиться к бесконечности при $\lambda \to \infty$, и непрерывная зависимость решения уравнения (2) от правой части может не иметь места.

Обозначим
$$\mu(\lambda) = \max |a_1(t,\tau,\lambda)|.$$

Легко видеть, что в нашем случае уравнение (1) сводится к уравнению (2), где $B = \int \mu(\lambda)^{-1}\,dE_\lambda$.

7. Эволюционные уравнения

7.1. Задача Коши и полугруппы операторов

Пусть $u(t)$ — функция скалярного аргумента t со значениями в банаховом пространстве, A — линейный оператор с областью определения $D(A)$, всюду плотный в U и со значениями из U. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется сильно непрерывно дифференцируемая функция, принадлежащая области определения оператора A для каждого значения $t \geq 0$ и удовлетворяющая уравнению (1) [30].

Задачей Коши для уравнения (1) называется задача определения решения (1), удовлетворяющего условию

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A).$$

В соответствии с данными нами ранее определениями задача Коши для уравнения (1) называется *корректной*, если выполняются следующие условия:

1) для любого $u_0 \in D(A)$ решение задачи существует;

2) решение задачи единственно;

3) решение задачи непрерывно зависит от начальных данных, т. е. из того, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(0) = 0, \quad u_n(0) \in D(A),$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = 0$$

для любого t.

Вообще говоря, мы будем рассматривать задачу Коши на конечном отрезке $t \in [0, T]$. Однако в случае корректной задачи

Коши из корректности задачи на отрезке $[0, T]$ следует корректность на любом другом отрезке $[0, T_1]$, т. е. на всей полуоси $[0, \infty)$.

Действительно, рассмотрим отрезок $[0, 2T]$, и пусть $u(t)$ есть решение на отрезке $[0, T]$. Построим решение $v(t)$ уравнение (1) с данными $v(0) = u(T)$ и определим функцию $W(t)$

$$W(t) = u(t), \quad t \in [0, T],$$
$$W(t) = v(t - T), \quad t \in [T, 2T].$$

Очевидно, что $W(t)$ будет решением уравнения (1) на отрезке $[0, 2T]$ с данными

$$W(0) = u_0.$$

Обозначим через $B(t)$ оператор, ставящий в соответствие элементу $u_0 \in D(A)$ значение решения $u(t)$ задачи Коши при фиксированном $t > 0$.

Если задача Коши корректна, то оператор $B(t)$ определен на $D(A)$ и непрерывен.

Следовательно, оператор $B(t)$ может быть расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве U. Легко видеть, что семейство операторов $B(t)$ является полугруппой, т. е.

$$B(t_1 + t_2) = B(t_1) \cdot B(t_2), \quad t_1, t_2 > 0.$$

Действительно, пусть $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $W(t) = u(t+\tau) = B(t+\tau)u_0$ удовлетворяет по переменной t уравнению (1) и начальному условию $W(0) = u(\tau) = B(\tau)u_0$.

Функция $v(t) = B(t) \cdot B(\tau)u_0$ также является решением уравнения (1) с начальным условием $B(\tau)u_0$. В силу единственности решения получим $v(t) = W(t)$.

Таким образом, операторы $B(t + \tau)$ и $B(t) \cdot B(\tau)$ совпадают на всюду плотном в U множестве $D(A)$, а значит, и на всем U. Если u_0 не принадлежит $D(A)$, то функция $B(t)u_0$ называется *обобщенным решением* уравнения (1).

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + f. \tag{2}$$

Здесь $f(t)$ — заданная непрерывная функция со значениями в U.

Если задача Коши для однородного уравнения (1) с оператором A корректна, решение неоднородного уравнения (2) определяется по формуле

$$u(t) = B(t)u(0) + \int\limits_0^t B(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где $B(t)$ — оператор, определяющий решение задачи Коши для однородного уравнения.

Действительно, дифференцируя (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= B'(t)u(0) + B(0)f(t) + \int\limits_0^t B'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \\ &= AB(t)u(0) + f(t) + A\int\limits_0^t B(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = Au(t) + f(t). \end{aligned}$$

7.2. Уравнения в гильбертовом пространстве

Пусть $u(t)$ — функция со значениями в вещественном гильбертовом пространстве над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, A — самосопряженный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть* $u(t)$ *— решение уравнения* (1) *на отрезке* $[0,T]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|u(t)\| \le \|u(T)\|^{t/T}\|u(0)\|^{(T-t)/T}. \tag{2}$$

Следствие. *Решение задачи Коши для уравнения* (1) *единственно.*

□ Предположим вначале, что $u(t) \ne 0$, $t \in [0,T]$, и что функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим функции

$$\varphi(t) = \|u(t)\|^2 = (u,u), \quad \psi(t) = \ln\varphi(t).$$

Дифференцируя функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, получим

$$\varphi'(t) = 2(u, u_t) = 2(u, Au),$$
$$\varphi''(t) = 2(Au, Au) + 2(u, A^2u) = 4(Au, Au).$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\psi''(t) = \frac{1}{\varphi^2(t)}[\varphi(t)\varphi''(t) - \varphi'^2(t)] \geq 0. \tag{3}$$

Из неравенства (3) следует

$$\psi(t) \leq \frac{t}{T}\psi(T) + \frac{T-t}{T}\psi(0),$$

а значит, и неравенство (2).

В случае, если функция $u(t)$ не имеет второй производной, рассмотрим функцию

$$u_h(t) = \int\limits_{t-h}^{t+h} g_h(\tau)u(\tau)\,d\tau,$$

где $g_h(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$g_h(-h) = g_h(h) = 0, \quad \int\limits_{-h}^{h} g_h(t)\,dt = 1.$$

Можно, например, положить

$$g_h(t) = \frac{1}{2h}\left(1 + \cos\frac{\pi}{h}t\right).$$

Функция $u_h(t)$ будет, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1) на отрезке $[h, T-h]$.

Из неравенства

$$\psi_h''(t) \geq 0, \quad \psi_h(t) = \ln\|u_h(t)\|,$$

следует, что для любых t_1, t_2, t,

$$h \le t_1 \le t \le t_2 \le T - h, \quad t_1 < t_2,$$

имеет место неравенство

$$\|u_h(t)\| \le \|u_h(t_2)\|^{(t-t_1)/(t_2-t_1)} \cdot \|u_h(t_1)\|^{(t_2-t)/(t_2-t_1)}. \tag{4}$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, мы получим, что неравенство (4), а значит, и неравенство (2) справедливы для функции $u(t)$.

Из неравенства (4) следует, что если $u(t_0) = 0$ для какого-либо $t_0 \in [0, T]$, то и $u(t) = 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Таким образом, неравенство (2) справедливо и в этом случае. ■

Теорема 2. *Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1) *была корректна, необходимо и достаточно, чтобы оператор* A *был полуограниченным сверху.*

□ Пусть $\{E_\lambda\}$ — семейство проекционных операторов, порожденное оператором (см. [30, ч. I, п. 3.9]):

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda.$$

Если оператор A полуограничен сверху, то

$$A = \int\limits_{-\infty}^{a} \lambda \, dE_\lambda.$$

В этом случае решение задачи Коши для уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{a} e^\lambda \, dE_\lambda \right) u_0, \quad u(0) = u_0. \tag{5}$$

Действительно, функция, определяемая по формуле (5), является решением задачи, а единственность решения задачи была установлена выше. Непрерывная зависимость решения от данных очевидна.

Пусть теперь оператор A не является полуограниченным сверху. Тогда для любого $a > 0$ существует такое $b > a$, что подпространство $U_{ab} = (E_b - E_a)U$ непусто.

Пусть $u_0 \in U_{ab}$. Тогда норма решения задачи Коши с начальным условием u_0 удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| = \left\| \left(\int_a^b e^{\lambda}\, dE_\lambda \right) u_0 \right\| \geq e^a \|u_0\|. \tag{6}$$

Из (6), очевидно, следует, что сколь угодно малым данным Коши могут соответствовать сколь угодно большие по норме решения, т. е. непрерывная зависимость от данных не имеет места. ■

Установленные теоремы допускают обобщения на эволюционные уравнения с нормальным оператором в гильбертовом пространстве над полем вещественных чисел. Пусть A — нормальный оператор.

Теорема 3. *Пусть* $u(t)$ *— решение уравнения* (1) *на отрезке* $[0, T]$. *Тогда имеет место неравенство* (2).

□ Как и ранее, предположим, что $u(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, и рассмотрим функции φ, ψ (см. доказательство теоремы 1).

Дифференцируя эти функции, получим

$$\varphi'(t) = (u, (A + A^*)u),$$

A^* — оператор, сопряженный с A,

$$\varphi''(t) = (Au, (A + A^*)u) + (u, (A + A^*)u) \\ = ((A + A^*)u, (A + A^*)u),$$

$$\psi''(t) = \frac{1}{\varphi^2(t)} [\varphi(t)\varphi''(t) - \varphi'^2(t)] \geq 0,$$

откуда, целиком аналогично изложенному выше, следует справедливость утверждения теоремы. ■

Напомним, что нормальный оператор A может быть представлен в виде

$$A = X + iY,$$

где операторы X, Y самосопряженные и перестановочные.

Теорема 4. *Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1) *была корректна, необходимо и достаточно, чтобы оператор* X *был полуограничен сверху.*

Доказательство этой теоремы целиком аналогично доказательству теоремы 2.

7.3. Уравнения с переменным оператором

Пусть $u(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве U над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, $A(t)$ — семейство операторов, зависящих от параметра t, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{1}$$

Предположим, что $A = A_0 + A_1$, где оператор A_0 постоянный и самосопряженный, оператор $A_1(t)$ имеет непрерывную производную $A_1'(t)$ и операторы $A_1(t)$, $A_1'(t)$ ограничены.

Теорема *Пусть существуют такие постоянные* $a, b_0 \geq 0$, *что для любого* u *имеет место неравенство*

$$\big(A_0u, A_1^*u\big) - (A_0u, A_1u) \geq -a(u, Au) - b_0(u, u). \tag{2}$$

Тогда любое решение уравнения (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t)\| \leq \|u(T)\|^{\omega(t)} \|u(0)\|^{1-\omega(t)} c(t), \tag{3}$$
$$\omega(t) = \frac{1 - e^{-at}}{1 - e^{-aT}},$$
$$c(t) = \exp\left\{\frac{b}{a}\frac{(1 - e^{-at})T - (e^{-aT} - 1)t}{1 - e^{-aT}}\right\},$$
$$b = 2b_0 + 4a_1^2 + 2a_2,$$
$$a_1 = \max \|A_1(t)\|, \quad a_2 = \max \big\|A_1'(t)\big\|.$$

Следствие. *Решение задачи Коши для уравнения* (1) *единственно.*

□ Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \|u(t)\|^2 = (u, u)$. Дифференцируя функцию $\varphi(t)$, получим

$$\begin{gathered}\varphi'(t) = 2(u, Au) = 2(u, A_0 u) + 2(u, A_1 u);\\ \varphi''(t) = 2(Au, Au) + 2(u, A^2 u) + 2(u, A_1' u) = 4(Au, Au)\\ +2(A_0 u, A_1^* u) - 2(A_0 u, A_1 u) + 2(A_1^* u, A_1 u) - 2(A_1 u, A_1 u)\\ +2(u, A_1' u) \geq 4(Au, Au) - 2a(u, Au) - b(u, u).\end{gathered} \tag{4}$$

Из (4) следует, что если $\varphi(t) \neq 0$, то вторая производная функции $\psi(t) = \ln \varphi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\psi''(t) + a\psi'(t) + b \geq 0. \tag{5}$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функция $\psi(t)$, удовлетворяющая неравенству (5), удовлетворяет и неравенству

$$\psi(t) \leq \psi_0(t), \tag{6}$$

где $\psi_0(t)$ — решение дифференциального уравнения $\psi_0''(t) + a\psi_0'(t) + b = 0$ с краевыми условиями $\psi_0(0) = \psi(0)$, $\psi_0(T) = \psi(T)$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{gathered}\psi_0(t) = c_1 + c_2 e^{-at} - (b/a)t,\\ c_1 = \frac{\psi(T) - \psi(0)e^{-aT} + (b/a)T}{1 - e^{-aT}},\\ c_2 = \frac{\psi(0) - \psi(T) - (b/a)T}{1 - e^{-aT}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Доказываемое неравенство (3) следует из (6) и (7). ■

7.4. Уравнения второго порядка

Пусть $u(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве над полем вещественных чисел, A — самосопряженный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = Au. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для любого решения уравнения* (1) *имеет место неравенство*

$$\begin{gathered}\|u(t)\|^2 \le c(t)(\|u(T)\|^2 + |a|)^{t/T}(\|u(0)\|^2 + |a|)^{(T-t)/T} - |a|, \\ c(t) = e^{2t(T-t)}, \\ a = 1/2[(Au(0), u(0)) - (u'(0), u'(0))].\end{gathered} \tag{2}$$

☐ Рассмотрим функцию $\varphi(t) = (u, u)$. Дифференцируя функцию $\varphi(t)$, получим

$$\varphi'(t) = 2(u, u'), \quad \varphi''(t) = 2(u', u') + 2(u, Au).$$

Продифференцируем второе слагаемое в выражении для $\varphi''(t)$:

$$\frac{d}{dt}(u, Au) = 2(u', Au) = 2(u', u'') = \frac{d}{dt}(u', u').$$

Следовательно,

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|).$$

Дифференцируя функцию $\psi(t)$, получим

$$\begin{aligned}\psi''(t) = {} & \frac{\varphi''(t)(\varphi(t) + |a|) - (\varphi')^2(t)}{(\varphi(t) + |a|)^2} \\ & = 4\frac{[(u', u') + a]\,[(u, u) + |a|] - (u, u')^2}{[\varphi(t) + |a|]^2} \ge -4,\end{aligned}$$

$$\psi(t) \le \frac{t}{T}\psi(T) + \frac{T-t}{T}\psi(0) + 2t(T-t),$$

откуда очевидно следует справедливость утверждения теоремы. ■

Теорема 2. *Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1) *была корректна, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был полуограничен сверху.*

$\square$ Пусть $\{E_\lambda\}$ — семейство проекционных операторов, порожденное оператором A:

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda.$$

Если оператор A полуограничен сверху, то

$$A = \int\limits_{-\infty}^{a} \lambda\, dE_\lambda.$$

Пусть для определенности $a > 0$. В этом случае решение задачи Коши имеет вид

$$u(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \cos(\sqrt{-\lambda}\, t)\, dE_\lambda\right) u_0 + \left(\int\limits_{0}^{a} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t)\, dE_\lambda\right) u_0$$
$$+ \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\, t)}{\sqrt{-\lambda}}\, dE_\lambda\right) u_1 + \left(\int\limits_{0}^{a} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}}\, dE_\lambda\right) u_1,$$

$u_0 = u(0)$, $u_1 = u'(0)$. $\blacksquare$

Если оператор A не является полуограниченным сверху, то при достаточно большом $a > 0$ и $b > a$ решение Коши с данными

$$u_0 \in E_b - E_a, \quad u_1 = 0$$

может быть сколь угодно велико по норме при сколь угодно малых данных Коши.

7.5. Корректные и некорректные задачи Коши

Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей S. Рассмотрим в D самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор с краевым условием Дирихле:

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu,$$
$$u|_S = 0,$$
$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2, \quad \delta > 0.$$

Здесь a_{jk} — непрерывно дифференцируемые функции, c — непрерывная функция.

Как известно, данный оператор имеет полную ортогональную нормированную систему собственных функций. Последовательность собственных значений оператора ограничена сверху и стремится к минус бесконечности.

Рассмотрим смешанные задачи для дифференциальных уравнений в цилиндрических областях $D_T = D \times [0, T]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu, \quad u|_{t=0} = u_0,\ u'|_{t=0} = u_1, \tag{3}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu, \quad u|_{t=0} = u_0,\ u'|_{t=0} = u_1, \tag{4}$$
$$u|_S = 0.$$

В соответствии с результатами, изложенными в пп. 7.2, 7.4, задачи (1), (3) являются корректными, а задачи (2), (4) некорректны. Решения всех данных задач единственны. Теоремы, изложенные в пп. 7.2, 7.4, дают оценки условной устойчивости некорректных задач (2), (4).

7.6. Уравнения с интегродифференциальными операторами

Пусть $u(t)$ — непрерывная функция скалярного аргумента t со значениями в гильбертовом пространстве U, и пусть $A(t,\tau)$ — семейство непрерывных линейных операторов с областью определения U и со значениями в U. Семейство $A(t,\tau)$ предполагается непрерывно зависящим от переменных t, τ. Рассмотрим следующее интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + \int_0^t A(t,\tau)u(\tau)\,d\tau + f(t) \tag{1}$$

с начальным условием $u(0) = 0$.

Пусть B — замкнутый оператор, удовлетворяющий условию

$$B^*B - BB^* \geq 0.$$

Оператор B не обязательно ограничен, семейство операторов $A(t,\tau)$ ограничено.

Теорема. *Решение уравнения* (1) *единственно.*

□ Рассмотрим функцию

$$u_\sigma(t) = e^{\sigma(T-t)^2} \cdot u(t).$$

Нетрудно показать, что функция $u_\sigma(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt}u_\sigma(t) + 2\sigma(T-t)u_\sigma(t) = Bu_\sigma(t) + \int_0^t A_\sigma(t,\tau)u_\sigma(\tau)\,d\tau + f_\sigma(t), \tag{2}$$

$$A_\sigma(t,\tau) = e^{\sigma(T-t)^2 - \sigma(T-\tau)^2} A(t,\tau),$$
$$f_\sigma(t) = e^{\sigma(T-t)^2} f(t).$$

Лемма. *Пусть $v(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция со значениями в гильбертовом пространстве U, B — замкнутый оператор. Тогда имеет место тождество*

$$\begin{aligned}\Big[-\left(\frac{\partial}{\partial t}+B^*+\sigma t\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-B-\sigma t\right)\\ +\left(\frac{\partial}{\partial t}-B-\sigma t\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+B^*+\sigma t\right)\Big]v(t)\\ =[2\sigma+(B^*B-BB^*)]v(t).\end{aligned}\quad (3)$$

Для доказательства справедливости (3) достаточно произвести умножение операторов в левой части равенства. После этого левая часть (3) представится в виде суммы, в которой все члены, кроме совпадающих с членами правой части, сократятся.

Рассмотрим функционал на решении $u_\sigma(t)$ уравнения (2):

$$\mathscr{F}(u_\sigma(t))=\int_0^T\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}-B+2\sigma(T-t)\right]u_\sigma(t)\right\|_U^2 dt.$$

Используя (3) и применяя интегрирование по частям по переменной t, получим

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(u_\sigma(t))=\int_0^t\left\|\left[\frac{\partial}{\partial t}+B^*-2\sigma(T-t)\right]u_\sigma(t)\right\|_U^2 dt\\ -\langle(B+B^*)u_\sigma(T),u_\sigma(T)\rangle+4\sigma T\|u_\sigma(T)\|_U^2\\ +\int_0^T\langle[2\sigma+(B^*B-BB^*)]u_\sigma(t),u_\sigma(t)\rangle\,dt\\ =\int_0^T\int_0^t\|A_\sigma(t,\tau)u_\sigma(\tau)+f_\sigma(t)\|_U^2\,d\tau dt.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь $\langle u,v\rangle$ — скалярное произведение элементов u, v пространства U.

Из (4) следует справедливость неравенства

$$4\sigma \int\limits_0^T \|u_\sigma(t)\|\,dt \le \|(B+B^*)u(T)\|\cdot\|u(T)\| + \int\limits_0^T \|A_\sigma(t,\tau)u_\sigma(\tau)+f_\sigma(t)\|_U^2\,dt. \quad (5)$$

Если $f(t)=0$, то из (5) следует

$$(4\sigma - aT)\int\limits_0^T e^{2\sigma(T-t)^2}\|u(t)\|^2\,dt \le \|(B+B^*)u(T)\|\cdot\|u(T)\|, \quad a=\max\|A_\sigma(t,\tau)\|. \quad (6)$$

Очевидно, что при достаточно большом σ неравенство (6) возможно только при

$$u(t)=0, \quad t\in[0,T],$$

откуда и следует справедливость теоремы. ■

8. Задачи интегральной геометрии

8.1. Постановка задач интегральной геометрии

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $S(y)$ — семейство многообразий в $\mathbb{R}^n$, зависящее от параметра y размерности m, $\dim S = p$. Пусть, далее, $u(x)$ — функция, определенная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $\rho(x, y)$ — функция переменных x, y, $\omega(y)$ — мера на многообразии $S(y)$.

Рассмотрим функцию

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x, y) u(x)\, d\omega = f(y). \tag{1}$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1).

Мы будем считать, что в (1) $S(y)$, $\rho(x, y)$, $f(x)$ заданы и рассматривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x)$.

8.2. Задача Радона

Рассмотрим задачу Радона для финитных функций двух переменных.

Пусть $u(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных, равная нулю вне единичного круга

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Требуется определить функцию u, если известны интегралы от этой функции по всем прямым, пересекающим D.

Укажем два представления задачи Радона в виде задач решения линейных операторных уравнений, соответствующих классическим формулам параметризации систем прямых на плоскости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x + s\cos\alpha, y + s\sin\alpha)\, ds = f(x, y, \alpha), \tag{1}$$

$$\iint_D u(\xi, \eta)\delta(x_0\xi + y_0\eta - p)\, d\xi d\eta = \varphi(x_0, y_0, p). \tag{2}$$

Так как интегралы от функции u по прямым, не пересекающим D, равны нулю, мы можем считать функции f и φ заданными для всех значений переменных (x, y, α), (x_0, y_0, p).

В правых частях уравнений (1), (2) стоят функции трех переменных, однако они определяются через функции двух переменных.

Функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f'_x \cdot \cos\alpha + f'_y \cdot \sin\alpha = 0,$$

откуда следует

$$f(x, y, \alpha) = f_0(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot y, \alpha).$$

Функция φ в силу свойств δ-функции удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x_0, y_0, p) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x_0}{r}, \frac{y_0}{r}, \frac{p}{r}\right) = \frac{1}{r}\psi(\beta, \tau),$$

где $\tau = p/r$, $x_0 = r\cos\beta$, $y_0 = r\sin\beta$.

Представление (1) наиболее естественно с точки зрения прикладных задач, представление (2) дает наиболее простую формулу обращения. Очевидно, что путем замены переменных нетрудно перейти от представления (1) к (2) и наоборот.

В силу отмеченного свойства функции φ уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\iint u(\xi, \eta)\delta(x_0\xi + y_0\eta - \tau)\, d\xi d\eta = \psi(\beta, \tau). \tag{3}$$

Из того, что функция u равна нулю вне круга D, следует

$$\psi(\beta,\tau)=0, \quad |\tau|>1.$$

Таким образом, оператор в (3) переводит функцию u, заданную в круге D, в функцию ψ, заданную в прямоугольнике:

$$|\beta|\le\pi, \quad |\tau|\le 1.$$

Функция ψ есть интеграл от функции u по прямой, определяемой уравнением

$$\xi\cos\beta+\eta\sin\beta-\tau=0$$

с дифференциалом, равным элементу длины на этой прямой.

Установим несколько свойств решения уравнения (3).

1. Задача решения (3) некорректна, если рассматривать u, ψ как элементы из пространств $\mathbb{L}_2$ или $\mathbb{C}$. Пусть

$$u(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\le\delta^2\\ 0, & x^2+y^2>\delta^2\end{cases} \quad (0<\delta<1).$$

Тогда

$$\psi(\beta,\tau)=\begin{cases}2\sqrt{\delta^2-\tau^2}, & |\tau|\le\delta,\\ 0, & |\tau|>\delta,\end{cases}$$
$$\|u\|_{\mathbb{L}_2}=\pi\delta^2, \quad \|\psi\|_{\mathbb{L}_2}=8\frac{\pi}{\sqrt{3}}\delta^{3/2},$$
$$\|u\|_{\mathbb{C}}=1, \quad \|\psi\|_{\mathbb{C}}=2\delta.$$

Таким образом, при достаточно малом δ отношение норм функций u и ψ будет сколь угодно велико и, значит, сколь угодно малым изменениям ψ могут соответствовать конечные изменения u.

2. Задача решения уравнения (3) слабо некорректна.

Применяя к (2) преобразование Фурье по переменной p, получим

$$\int e^{ip}\varphi(x_0,y_0,p)\,dp=\iint e^{i(x_0\xi+y_0\eta)}u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$
$$=\frac{1}{r}\int e^{ip}\psi\left(\beta,\frac{p}{r}\right)dp=\int e^{i\tau r}\psi(\beta,\tau)\,d\tau=v(\beta,r), \quad (4)$$

где v — преобразование Фурье от функции u в полярной системе координат.

Равенство Парсеваля для функций u, v дает

$$\iint u^2(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \iint |v(\beta,r)|^2 r\,dr d\beta.$$

Обозначим через $H_{0,1/2}$ пространство функций ψ с нормой

$$\|\psi\|_H = \left(\iint |v(\beta,r)|^2 r\,dr d\beta\right)^{1/2},$$

где v — преобразование Фурье от функции ψ по переменной τ, определяемое равенством (4). Тогда

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2} = \|\psi\|_H.$$

Приведем теперь другой метод исследования единственности и устойчивости задачи Радона. Этот метод дает несколько более слабые оценки устойчивости, но зато допускает обобщение на некоторый класс задач интегральной геометрии общего вида.

Рассмотрим задачу решения уравнения (1). Обозначим через $F(x,y)$ функцию

$$F(x,y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,y,\alpha)\,d\alpha.$$

Легко видеть, что функции F и u связаны формулой

$$F(x,y) = \iint\limits_D \frac{1}{r} u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{5}$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,.$$

Равенство (5) можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода со слабой особенностью относительно искомой функции u.

Для уравнения (5) получим формулу обращения, использующую фактически дробную степень оператора Лапласа. Рассмотрим функцию

$$W(x,y,z) = \iint\limits_D \frac{1}{R} u(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$
$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}\,.$$

Функция W есть потенциал простого слоя с плотностью распределения на круге D.

Из известных формул теории потенциала получим

$$W(x,y,z) = \iint \frac{z}{R^3} F(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$
$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} W(x,y,z)\big|_{z=0}.$$

Задача Радона с неполными данными. С точки зрения приложений значительный интерес представляет задача обращения преобразования Радона в случае, когда интегралы от искомой функции известны не для всех прямых, пересекающих область.

Итак, рассмотрим задачу решения операторного уравнения (1) в случае, когда правая часть f задана для всех переменных x, y и значений переменной α на отрезке:

$$|\alpha| \le \alpha_0 < \pi.$$

Можно показать, что в этом случае задача решения (1) является сильно некорректной. Характер неустойчивости в этой задаче такой же, как в задаче Коши для уравнения Лапласа.

Если мы сведем решение задачи Радона с неполными данными к уравнению (5), то можно считать, что правая часть $F(x,y)$ задана не для всех значений x, y, а лишь для значений, принадлежащих некоторой области D_1:

$$D_1 \cap D = \varnothing.$$

В пространстве (x,y,z) функция W вне круга D будет решением уравнения Лапласа. Очевидно, что

$$W'_z(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in D_1,$$

и, таким образом, задача Радона с неполными данными сводится к задаче определения функции $W(x, y, z)$ по следующим данным:

$$W(x, y, 0) = F(x, y), \quad W'_z(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D_1,$$

т. е. к задаче Коши для уравнения Лапласа.

8.3. Задача определения функции по сферическим средним

В настоящем пункте мы рассмотрим другую классическую задачу интегральной геометрии, связанную с некорректной задачей Коши для волнового уравнения.

Изложение материала пункта базируется на результатах, приведенных в книгах [22, 29].

Рассмотрим в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ для $n \geq 2$ задачу об отыскании функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ через ее средние значения по сферам (по окружностям при $n = 2$) произвольного радиуса r $(0 < r < \infty)$, центр которых пробегает множество точек фиксированной плоскости. Для удобства совместим эту плоскость с координатной плоскостью $x_n = 0$ и обозначим произвольную точку пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ через (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Таким образом, $u = u(x, y)$. Сферу радиуса r с центром в точке $(x, 0)$ обозначим через $S(x, r)$. В этих обозначениях сформулированная задача заключается в отыскании функции $u(x, y)$ по ее интегралам

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S(x,r)} u(\xi, \eta)\, d\omega = v(x, r). \tag{1}$$

Здесь (ξ, η) – переменная точка на сфере $S(x, r)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, ω_n — площадь единичной сферы в n-мерном пространстве: $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $d\omega$ — элемент телесного угла, связанный с элементом площади поверхности $dS = r^{n-1} d\omega$.

Очевидно, что любая функция $u(x, y)$, нечетная по переменной y, является решением однородного уравнения (1), т. е. уравнения в котором $v(x, r) = 0$. В связи с этим разумно ставить задачу об определении по функции $v(x, r)$ только четной части функции $u(x, y)$, т. е. функции $u_1(x, y) = 1/2[u(x, y) + u(x, -y)$. Это эквивалентно рассмотрению класса функций $u(x, y)$, четных по y. Очевидно, что данной постановке эквивалентна задача определения функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условию

$$u(x,y)=0, \quad y\le 0.$$

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Любая функция $u(x,y)$, непрерывная в области $D(x_0,r_0)=\{(x,y):|x-x_0|^2+y^2<r_0^2\}$ и четная по y, однозначно определяется в этой области заданием функции $v(x,r)$ в области $G_\varepsilon(x_0,r_0)=\{(x,r):|x-x_0|<\varepsilon,\ 0<r<r_0-|x-x_0|\}$, где ε — любое фиксированное положительное число, такое, что $\varepsilon\le r_0$.*

□ Доказательство теоремы основано на вычислении всех моментов функции $u(x,y)$, отвечающих переменной x на каждой фиксированной сфере $S(x,r)$ такой, что $(x,r)\in G_\varepsilon(x_0,r_0)$. Область $G_\varepsilon(x_0,r_0)$ напоминает собой остро заточенный карандаш (рис. 3). При $\varepsilon=r_0$ этот «карандаш» вырождается в кусок конуса (рис. 4).

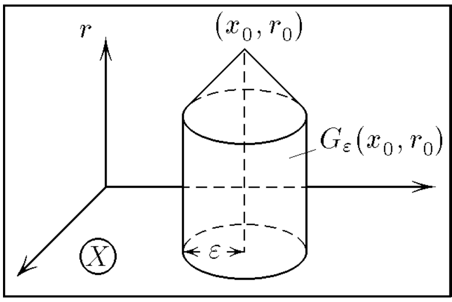


Рис. 3.

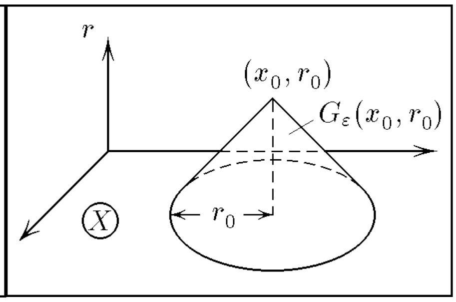


Рис. 4.

Для любой точки $(x,r)\in G_\varepsilon(x_0,r_0)$, $0<\varepsilon\le r_0$, сфера $S(x,r)$ целиком лежит внутри области $D(x_0,r_0)$.

Рассмотрим результат применения оператора

$$A_i v=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^r \tau^{n-1}v(x,r)\,d\tau, \quad i=1,\ldots,n-1,$$

к уравнению (1). Проводя последовательно ряд выкладок, находим

$$A_i v = \frac{1}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_0^r \tau^{n-1}\left[\int\limits_{S(x,\tau)} u(\xi,\eta)\,d\omega\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{|\xi-x|_i^2+\eta^2\le r^2}\left[\int\limits_{x_i-(r^2-\eta^2-|\xi-x|_i^2)^{1/2}}^{x_i+(r^2-\eta^2-|\xi-x|_i^2)^{1/2}} u(\xi,\eta)\,d\xi_i\right] \times d\eta d\xi_1\dots d\xi_{i-1}d\xi_{i+1}\dots d\xi_n$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S(x,r)} u(\xi,\eta)\cos(\widehat{n,\xi_i})\,ds = \frac{r^{n-2}}{\omega_n}\int\limits_{S(x,r)} u(\xi,\eta)(\xi_i-x_i)\,d\omega.$$

Здесь в промежуточных выкладках через $|\xi-x|_i^2$ обозначено выражение $[|\xi-x|^2-|\xi_i-x_i|^2]^{1/2}$, численно совпадающее с длиной проекции отрезка прямой, соединяющей точки $(\xi,0)$, $(x,0)$, на плоскость $x_i=0$, $y=0$, а через n — единичный вектор внешней нормали к $S(x,r)$.

Обозначая теперь через L_i оператор, определяемой равенством

$$L_i v = \frac{1}{r^{n-2}}A_i v + x_i v(x,r), \quad i=1,\dots,n-1,$$

из полученной формулы находим , что результат его применения к уравнению (1) эквивалентен вычислению сферического среднего от функции $u_i(x,y)=x_i u(x,y)$. Действительно,

$$L_i v = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S(x,r)} u(\xi,\eta)\xi_i\,d\omega.$$

Понятно, что результат применения суперпозиции операторов L_jL_i к функции $v(x,r)$ эквивалентен вычислению сферического среднего от функции $u(x,y)x_ix_j$. Вообще, если $P_m(x)$ — полином степени m с постоянными коэффициентами, то результат применения оператора $P_m(L)$, $L=(L_1,\dots,L_{n-1})$, к уравнению (1) приводит к равенству

$$P_m(L)v = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S(x,r)} u(\xi,\eta)P_m(\xi)\,d\omega.$$

Зафиксируем теперь (x, r). Пусть $D_0(x, r) = \{\xi : |\xi - x| \le r\}$. На сфере $S(x, r)$ полученное равенство может быть представлено в виде

$$P_m(L)v = \int\limits_{D_0(x,r)} \varphi(\xi, x, r) P_m(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

где функция $\varphi(\xi, x, r)$ (x, r фиксированы!) связана с функцией $u(x, y)$ формулой

$$\varphi(\xi, x, r) = \frac{2}{\omega_n r^{n-2}} \frac{u(\xi, [r^2 - |x - \xi|^2]^{1/2})}{[r^2 - |x - \xi|^2]^{1/2}}.$$

При этом учтена четность функции $u(x, y)$ по переменной y.

Системой равенств (2), отвечающей различным полиномам $P_m(\xi)$, функция $\varphi(\xi, x, r)$, а следовательно, и функция $u(x, y)$ определяются однозначно. Теорема, таким образом, доказана. ■

Для конструктивного построения функции $u(x, y)$ по функции $v(x, r)$ можно взять в качестве $P_m(\xi)$ систему ортогональных внутри $D_0(x, r)$ полиномов. Тогда функция $\varphi(\xi, x, r)$ может быть выписана явно в виде ряда Фурье. Это потребует, правда, более жестких условий на функцию $u(x, y)$, чтобы гарантировать сходимость ряда Фурье.

Следствие. *Если функция $u(x, y)$ непрерывна в области $D(x_0, r_0)$ вместе с частной производной $u_y(x, y)$, то она однозначно определяется в $D(x_0, r_0)$ заданием сферических средних от самой функции $u(x, y)$ и ее частной производной $u_y(x, y)$ по всевозможным сферам $S(x, r)$ таким, что $(x, r) \in G_\varepsilon(x_0, r_0)$, $0 < \varepsilon \le r_0$.*

Действительно, в этом случае однозначно определяется четная часть по переменной y функции $u(x, y)$ и четная часть частной производной $u_y(x, y)$. Но любую функцию $u(x, y)$ из рассматриваемого класса можно представить в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[u(x, y) + u(x, -y)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^y [u_y(x, y) + u_y(x, -y)]\, dy$$

и, следовательно, однозначно найти ее.

Из доказанной теоремы видно, что задание функции $v(x, r)$ в области $G_\varepsilon(x_0, r_0)$ при сколь угодно малом положительном ε определяет функцию $u(x, y)$ в области $D(x_0, r_0)$. Но зная функцию $u(x, y)$ области $D(x_0, r_0)$, можно вычислить интегралы по всевозможным сферам, целиком лежащим внутри области $D(x_0, r_0)$, и, следовательно, найти функцию $v(x, r)$ для $(x, r) \in G_\varepsilon(x_0, r_0)$ при $\varepsilon = r_0$. Таким образом, задание функции $v(x, r)$ в области $G_\varepsilon(x_0, r_0)$ однозначно определяет ее в большей области $G_{r_0}(x_0, r_0)$ $\supset G_\varepsilon(x_0, r_0)$. Полученный факт говорит о том, что функция $v(x, r)$ не может задаваться произвольно. Более того, что любая функция $v(x, r)$, представимая в виде (1), обладает свойством, аналогичным свойству аналитических функций: она однозначно определяется в $G_{r_0}(x_0, r_0)$ своими значениями в произвольно тонкой области $G_\varepsilon(x_0, r_0)$. В то же время ясно, что неаналитическим функциям $u(x, y)$ отвечают функции $v(x, r)$, также неаналитические. В связи с изложенным выше, конструктивное описание класса функций $v(x, r)$, представимых в виде (1), составляет довольно трудную задачу.

Покажем сейчас, что задача решения уравнения (1) является классически некорректной, а именно, что она сильно неустойчива по отношению к малым изменениям функции $v(x, r)$. Удобнее всего это сделать для трехмерного пространства, поэтому в дальнейшем будем считать $n = 3$. Кроме того, предположим здесь, что функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема во всем пространстве (x, y) и четна по переменной y. Введем в рассмотрение функцию

$$w(x, y, r) = \frac{r}{\omega_3} \int\limits_{|\xi - x|^2 + (\eta - y)^2 = r^2} u(\xi, \eta)\, d\omega, \tag{3}$$

которая с точностью до множителя r представляет собой сферическое среднее по сфере радиуса r с центром в точке (x, y). Из курса уравнений математической физики (см., например, [22]) известно, что функция $w(x, y, r)$ удовлетворяет в полупространстве $r > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \Delta_{xy} w. \tag{4}$$

Здесь Δ_{xy} — оператор Лапласа по переменным x, y. Непосредственно из формулы (3) видно, что

$$w(x, y, 0) = 0. \tag{5}$$

Из (1) вытекает равенство

$$w(x, y, r)|_{y=0} = rv(x, r). \tag{6}$$

Наконец, условие четности функции $u(x, y)$ по переменной y приводит к равенству

$$w_y(x, y, r)|_{y=0} = 0. \tag{7}$$

Задача отыскания функции $w(x, y, r)$, удовлетворяющей уравнению (4) и условиям (5)–(7), представляет собой краевую задачу, которая, очевидно, эквивалентна задаче Коши (4), (6), (7) во всем пространстве (x, y, r), если в область $r < 0$ продолжить функцию $v(x, r)$ четным образом.

Теорема 2. *Задача* (4)–(7) *эквивалентна задаче решения уравнения* (1) *в классе четных по* y *функций.*

□ Действительно, если $u(x, y)$ — решение уравнения (1) такое, что $u(x, y) = u(x, -y)$, то функция $w(x, y, r)$, вычисляемая по формуле (3), есть решение задачи (4)–(7). Это решение единственное, так как однородная задача (4)–(7) имеет только нулевое решение. Итак, каждой функции $u(x, y)$ отвечает решение задачи (4)–(7), притом только одно.

Покажем, что верно и обратное утверждение. А именно, каждое решение задачи (4)–(7) порождает, и притом только одно, решение уравнения (1) такое, что $u(x, y) = u(x, -y)$. Пусть $w(x, y, r)$ — решение задачи (4)–(7). Обозначим

$$w_r(x, y, 0) = u(x, y). \tag{8}$$

Тогда функция $w(x, y, r)$ в области $r \geq 0$ может быть однозначно представлена как решение задачи Коши с данными (5), (8) в виде (3). Сравнивая формулу (3) при $y = 0$ с формулой (6), получаем, что $u(x, y)$ есть решение уравнения (1). Вычисляя от обеих частей равенства (3) производную по переменной y, полагая $y = 0$ и учитывая (7), находим

$$\int\limits_{S(x,r)} w_r(\xi, \eta)\, d\omega = 0. \tag{9}$$

Из этого равенства и теоремы 1 вытекает, что четная часть функции $u(x, y)$ равна нулю:

$$u(x, y) + u(x, -y) = 0,$$

т. е. $u(x, y) = -u(x, -y)$.

Итак, функция $u(x, y)$, вычисляемая по решению задачи (4)–(7) с помощью формулы (8), обладает свойством четности по переменной y. В силу теоремы 1 при условии $u(x, y) = u(x, -y)$ существует взаимно однозначное соответствие. Это и составляет теорему эквивалентности. ■

Проиллюстрируем теперь неустойчивость задачи (4)–(7). Пусть

$$v(x, r) = \frac{1}{k^s} \frac{\sin kr}{r} \sin kx_1 \sin kx_2.$$

При достаточно больших k и s функция $v(x, r)$ мала вместе с любым конечным числом производных. В то же время легко убедиться непосредственной проверкой, что решение задачи (4)–(7) дается в этом случае формулой

$$w(x, y, r) = \frac{1}{k^s} \sin(kr) \sin(kx_1) \sin(kx_2) \operatorname{ch}(ky).$$

Но это решение при любом фиксированном y стремится к бесконечности при $k \to \infty$. Тем же свойством обладает и функция $u(x, y)$, вычисляемая по формуле (8) и дающая решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \frac{1}{k^{s-1}} \sin(kx_1) \sin(kx_2) \operatorname{ch}(ky),$$

а это означает сильную неустойчивость решения задачи (4)–(7) и эквивалентной ей задачи решения уравнения (1).

8.4. Задача общего вида на плоскости

Рассмотрим на плоскости (x, y) ограниченную открытую односвязную область D с границей Γ. Пусть граница задана уравнением вида $x = g(s)$, $y = p(s)$, где s — длина, отсчитываемая от фиксированной точки на Γ в положительном направлении, согласованном с выбором ориентации на Γ, а $g(s)$, $p(s)$ — функции класса $\mathbb{C}^1[0, l]$, $g(0) = g(l)$, $p(0) = p(l)$, l — длина Γ. Пусть, далее, в области D задано двупараметрическое семейство кривых $L(t_1, t_2)$, обладающее следующими свойствами.

1. Каждую пару точек области $\bar{D}$ соединяет единственная кривая семейства $L(t_1, t_2)$; каждая кривая $L(t_1, t_2)$ пересекает Γ

в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), т. е.

$$x_1 = g(s_1), \quad x_2 = g(s_2),$$
$$y_1 = p(s_1), \quad y_2 = p(s_2),$$

другие точки кривой $L(t_1, t_2)$ принадлежат D, длины кривых $L(t_1, t_2)$ ограничены в совокупности.

2. Уравнение кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) в направлении $\nu^0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, задается равенствами

$$\begin{aligned} x &= f_1(s, \theta_0, x_0, y_0) = x_0 + s\cos\theta_0 + s^2 \tilde{f}_1(s, \cos\theta_0, \sin\theta_0, x_0, y_0), \\ y &= f_2(s, \theta_0, x_0, y_0) = y_0 + s\sin\theta_0 + s^2 \tilde{f}_2(s, \cos\theta_0, \sin\theta_0, x_0, y_0), \end{aligned} \tag{1}$$

в которых $\tilde{f}_j(s, \cos\theta_0, \sin\theta_0, x_0, y_0)$ — непрерывно дифференцируемые и ограниченные вместе с производными функции длины дуги S, отсчитываемой от точки (x_0, y_0), и параметров $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ и $(x_0, y_0) \in \bar{D}$; $f_j(s, 0, x_0, y_0) = f_j(s, 2\pi, x_0, y_0)$ и, кроме того,

$$\frac{1}{s} \frac{D(f_1, f_2)}{D(s, \theta_0)} \geq c_0 > 0 \tag{2}$$

во всей области изменения переменных (s, θ_0, x_0, y_0).

Отметим, что для s, близких к нулю, выполнение неравенства (2) очевидным образом следует из (1), поэтому неравенство (2) существенно для s конечных. В этом случае оно эквивалентно положительности якобиана $D(f_1, f_2)/D(s, \theta_0)$.

По отношению к семейству кривых L справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть семейство кривых удовлетворяет отмеченным выше условиям и, сверх того, функции $f_j(s, \theta_0, x_0, y_0)$ обладают непрерывными и ограниченными производными до порядка $m > 1$. Тогда равенство (1) определяет s, ν^0 как однозначные и непрерывно дифференцируемые m раз функции точек (x_0, y_0), (x, y) для всех (x_0, y_0), $(x, y) \in \bar{D}$ и $(x_0, y_0) \neq (x, y)$, а в окрестности множества $(x_0, y_0) = (x, y)$, $(x_0, y_0) \in \bar{D}$, для них справедливы оценки*

$$\begin{gathered} |D^\alpha s(x_0, y_0, x, y)| \leq \frac{c}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{(|\alpha| - 1)/2}}, \\ |D^\alpha \nu^0(x_0, y_0, x, y)| \leq \frac{c}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{|\alpha|/2}}, \\ |\alpha| \leq m. \end{gathered} \tag{3}$$

□ Для доказательства заметим, что из (1) вытекают следующие равенства:

$$s = \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}}{\left[(\cos\theta_0 + s\tilde{f}_1)^2 + (\sin\theta_0 + s\tilde{f}_2)^2\right]^{1/2}};$$

$$\cos\theta_0 = \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}} \times [(\cos\theta_0 + s\tilde{f}_1)^2 + (\sin\theta_0 + s\tilde{f}_2)^2]^{1/2} + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\frac{\tilde{f}_1}{[(\cos\theta_0 + s\tilde{f}_1)^2 + (\sin\theta_0 + s\tilde{f}_2)^2]^{1/2}};$$

$$\sin\theta_0 = \frac{y-y_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}} \times [(\cos\theta_0 + s\tilde{f}_1)^2 + (\sin\theta_0 + s\tilde{f}_2)^2]^{1/2} + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\frac{\tilde{f}_2}{[(\cos\theta_0 + s\tilde{f}_1)^2 + (\sin\theta_0 + s\tilde{f}_2)^2]^{1/2}}.$$

Отсюда применением теоремы о неявно заданных функциях находим, что в достаточно малой области $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta^2$ функции s и ν имеют такую структуру:

$$s = [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\{1 + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\varphi\};$$

$$\cos\theta = \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}\{1 + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\varphi\} + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\psi;$$

$$\sin\theta = \frac{y-y_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}\{1 + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\varphi\} + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\psi,$$

где

$$\varphi = \varphi\biggl(x_0, y_0, [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}, \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}, \frac{y-y_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}\biggr);$$

$$\psi = \psi\biggl(x_0, y_0, [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}, \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}, \frac{y-y_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}}\biggr)$$

— m раз непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Отсюда, в частности, вытекают оценки (3). Для $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 > \delta^2$ очевидно выполнение неравенства $s > \delta$, а следовательно, и неравенства $D(f_1, f_2)/D(s, \theta_0) \geq c_0\delta > 0$. Но в этом случае постулируемая леммой гладкость функций s, ν^0 следует из гладкости функций $f_j(s, \theta_0, x_0, y_0)$, а их существование и однозначность вытекают из условия 1 на семейство кривых. ■

Обозначим через $L(x_0, y_0, x, y)$ отрезок кривой семейства, проходящий через точки (x_0, y_0), (x, y) и заключенный между ними, и через $\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$ — единичный вектор, касательный к кривой $L(x_0, y_0, x, y)$, построенный в точке (x, y). Вектор ν можно также рассматривать как функцию точек (x_0, y_0), (x, y), обладающую такими же свойствами гладкости, что и вектор ν^0. В самом деле, если $\nu^0 = (h_1(x, y, x_0, y_0), h_2(x, y, x_0, y_0))$, то в силу равноправия точек (x_0, y_0), (x, y) очевидно, что $\nu = (-h_1(x_0, y_0, x, y), -h_2(x_0, y_0, x, y))$.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\theta(g(s_1), p(s_1), x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in D,\ s_1 \in [0, l]. \tag{4}$$

□ Для доказательства заметим, что функция $\theta(x_0, y_0, x, y)$, рассматриваемая при фиксированном $(x, y) \in D$ как функция (x_0, y_0), имеет своими линиями уровня отрезки кривых семейства L, проходящие через точку (x, y) и заключенные между (x, y)

и границей Γ. Следовательно, $\operatorname{grad}\theta(x_0,y_0,x,y)$ направлен по нормали к кривой $L(x_0,y_0,x,y)$ в точке (x_0,y_0) в сторону увеличения θ. Так как линии $L(x_0,y_0,x,y)$ при фиксированных x, y пересекаются друг с другом только в точке (x,y), то на любой замкнутой кривой, содержащей точку $(x,y)\in D$ внутри себя и, в частности, на Γ, положительному направлению соответствует увеличение θ. Полагая $x_0=g(s_1)$, $y_0=p(s_1)$, получаем, что бо́льшим s_1 соответствуют бо́льшие значения $\theta(g(s_1),p(s_1),x,y)$. Отсюда вытекает неравенство (4). ■

Рассмотрим теперь для $u(x,y)\in\mathbb{C}^1(\bar D)$ и $\rho(x_0,y_0,x,y)\in\mathbb{C}^1(\bar D\times\bar D)$ функцию $w(x_0,y_0,x,y)$, определенную формулой

$$w(x_0,y_0,x,y)=\int\limits_{L(x_0,y_0,x,y)}\rho(x_0,y_0,x_1,y_1)u(x_1,y_1)\,ds, \tag{5}$$

и поставим следующую задачу: найти $u(x,y)$ при заданных функциях $\rho(x_0,y_0,x,y)$ и $v(t_1,t_2)$

$$v(t_1,t_2)=w(g(t_1),p(t_1),g(t_2),p(t_2)),\quad t_1,t_2\in[0,l]. \tag{6}$$

Теорема 1. *Если семейство кривых обладает свойствами* 1, 2, *а весовая функция* $\rho(x_0,y_0,x,y)\in\mathbb{C}^1(\bar D\times\bar D)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\rho(x_0,y_0,x,y)\ge\rho_0>0,\quad (x_0,y_0)\in\Gamma,\quad (x,y)\in\bar D, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\rho_0(g(t_1),p(t_1),x,y)\right|\le q\frac{\partial}{\partial t_1}\theta(g(t_1),p(t_1),x,y),\qquad 0\le q<1, \tag{8}$$

то решение поставленной задачи единственно для $u\in\mathbb{C}^1(\bar D)$ *и для него имеет место оценка устойчивости*

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2(D)}\le\frac{1}{\rho_0\sqrt{1-q^2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\|\operatorname{grad}_{t_1,t_2}v(t_1,t_2)\|_{\mathbb{L}_2(Q)},\qquad Q=[0,l]\times[0,l]. \tag{9}$$

□ Вначале докажем справедливость оценки (9) для того случая, когда гладкость функций u, ρ и функций $\tilde f_j$, входящих в (1), на единицу выше, чем сформулировано в условиях теоремы. В этом случае для функции $w(x_0,y_0,x,y)$ справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть функции $\tilde{f}_j$, ρ, и дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и ограничены вместе с частными производными. Тогда функция $w(x_0, y_0, x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по (x_0, y_0, x, y) всюду, кроме точек $(x_0, y_0) = (x, y)$, в окрестности которых имеют место оценки*

$$|D^\alpha w(x_0, y_0, x, y)| \le c[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{(1-|\alpha|)/2}, \quad |\alpha| \le 2. \tag{10}$$

□ Справедливость леммы вытекает из представления

$$w(x_0, y_0, x, y) = \int\limits_0^{s(x_0,y_0,x,y)} \rho(x_0, y_0, f_1, f_2) u(f_1, f_2)\, ds,$$

где $f_j = f_j(s, \theta_0(x_0, y_0, x, y), x, y)$, $j = 1, 2$, и леммы 1. ■

Получим теперь для функции $w(x_0, y_0, x, y)$ дифференциальное уравнение. Для этого заметим, что

$$w(x_0, y_0, , f_1(s, \theta_0(x_0, y_0, x, y), x, y), f_2(\cdot)) = \int\limits_0^s \rho[x_0, y_0, f_1, f_2] u(f_1, f_2)\, ds.$$

Дифференцируя это равенство по s и используя, что

$$(f_1(s, \theta_0, x_0, y_0), f_2(\cdot)) = (x, y), \quad (f_{1s}(\cdot), f_{2s}(\cdot)) = \nu(x_0, y_0, x, y),$$

находим

$$(\mathrm{grad}_{x,y} w(x_0, y_0, x, y), \nu(x_0, y_0, x, y)) = \rho(x_0, y_0, x, y) u(x, y). \tag{11}$$

Деля обе части этого равенства на $\rho(x_0, y_0, x, y)$, полагая $x_0 = g(t_1)$, $y_0 = p(t_1)$ и дифференцируя найденное равенство по t_1, получаем уравнение для функции $w(g(t_1), p(t_1), x, y) = \widetilde{w}(t_1, x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}(t_1, x, y)} (\mathrm{grad}_{x,y} \widetilde{w}, \tilde{\nu}) \right\} = 0, \tag{12}$$

в котором

$$\tilde{\rho}(t_1, x, y) = \rho(g(t_1), p(t_1), x, y), \quad \tilde{\nu}(t_1, x, y) = \nu(g(t_1), p(t_1), x, y).$$

Уравнение (12) относится к уравнениям смешанного типа, а именно, гиперболо-параболического. Оно выполняется в цилиндрической области $[0,l]\times\bar{D}$. На границе этой области имеем условие периодичности

$$\widetilde{w}(0,x,y)=\widetilde{w}(l,x,y),\quad (x,y)\in\bar{D}, \tag{13}$$

и условие, вытекающее из формулы (6):

$$\widetilde{w}(t_1,g(t_2),p(t_2))=v(t_1,t_2). \tag{14}$$

Таким образом, функция $\widetilde{w}$ является решением неклассической задачи (12)–(14). Отметим, что из формул (5), (6) вытекает, что $v(t_1,t_1)=0$ $(t_1\in[0,l])$. При выполнении этого условия задача (12)–(14) и поставленная выше задача интегральной геометрии эквивалентны. Поэтому достаточно найти $\widetilde{w}(t_1,x,y)$, чтобы потом из формулы (11) определить $u(x,y)$. Для исследования вопросов единственности и устойчивости задачи (12)–(14) применим метод энергетических оценок.

Для $x\neq g(t_1)$, $y\neq p(t_1)$ и $\beta=(-\sin\tilde{\theta},\cos\tilde{\theta})$, $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(t_1,x,y)=\theta(g(t_1),p(t_1),x,y)$ имеем два очевидных тождества:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{1}{\tilde{\rho}}(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})\right]&=(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\widetilde{\nu}_{t_1})\\&+(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w}_{t_1},\tilde{\nu})-(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{1}{\tilde{\rho}}(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})\right]&=\frac{\partial}{\partial t_1}[(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})]\\&-(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta_{t_1})-(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w}_{t_1},\beta)\\&-(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho}.\end{aligned}$$

Складывая эти тождества и учитывая, что

$$\tilde{\nu}_{t_1}=\beta\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1},\quad \beta_{t_1}=-\tilde{\nu}\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial t_1},$$

$$(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)(\nabla_{x,y}\widetilde{w}_{t_1},\nu)-(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w}_{t_1},\beta) \\ =\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{w}_{t_1},\widetilde{w}_y)-\frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{w}_{t_1},\widetilde{w}_x),$$

находим

$$2\tilde{\rho}(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{\widetilde{\rho}}\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu}\right) \\ =\left\{[(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})^2+(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)^2]\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial t_1}-2(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho}\right\} \\ +\frac{\partial}{\partial t_1}[(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)]+\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{w}_{t_1},\widetilde{w}_y)-\frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{w}_{t_1},\widetilde{w}_x). \quad (15)$$

На решениях уравнения (12) левая часть этого тождества обращается в нуль. Проинтегрируем тождество (15) в предположении, что $\widetilde{w}(t_1,x,y)$ — решение уравнения (12), по области G_ε, получающейся из области $G=[0,l]\times\bar{D}$ выбрасыванием множества $\{(t_1,x,y): t_1\in[0,l],\ (x,y)\in\bar{D},\ (x-g(t_1))^2+(y-p(t_1))^2\le\varepsilon^2\}$ для достаточно малого положительного ε. Тогда, используя формулу Гаусса — Остроградского, получаем

$$\int\limits_{G_\varepsilon}\left\{[(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})^2+(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)^2]\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1}\right. \\ \left.-2(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho}\right\}dxdydt_1 \\ +\int\limits_{S_\varepsilon}\{[(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\tilde{\nu})^2+(\nabla_{x,y}\widetilde{w},\beta)]\cos(\widehat{n,t_1})+\widetilde{w}_{t_1}[\widetilde{w}_y\cos(\widehat{n,x}) \\ -\widetilde{w}_x\cos(\widehat{n,y})]\}\,dS=0.$$

Здесь S_ε — граница множества G_ε, n — внешняя нормаль к S_ε, dS — элемент площади.

Перейдем в этом равенстве к пределу, устремив ε к нулю. При этом в силу оценок леммы 3 интегралы по G_ε и S_ε сходятся как несобственные к интегралам по G и S (S — граница G). Интеграл по поверхности S можно разбить на две части: интеграл по верхнему и нижнему основаниям цилиндра G и интеграл по боковой поверхности $[0,l]\times\Gamma$. Но на нижнем и верхнем основаниях цилиндра $\cos(\widehat{n,x}) = \cos(\widehat{n,y}) = 0$, а $\cos(\widehat{n,t_1})$ в соответствующих точках имеет противоположные знаки. Условие периодичности (13) приводит к тому, что сумма интегралов по верхнему и нижнему основаниям цилиндра обращается в нуль. На боковой поверхности $\cos(\widehat{n,t_1}) = 0$ и для $x = g(t_2)$, $y = p(t_2)$

$$\widetilde{w}_{t_1} = v_{t_1}(t_1, t_2),$$
$$\widetilde{w}_y \cos(\widehat{n,x}) - \widetilde{w}_x \cos(\widehat{n,y}) = \frac{\partial}{\partial t_2}\widetilde{w}(t_1, g(t_2), p(t_2)) = v_{t_2}(t_1, t_2),$$

а $dS = dt_1 dt_2$. Таким образом, окончательно получаем

$$\int\limits_G \left\{ [(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})^2 + (\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \beta)^2] \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1} - 2(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho} \right\} dxdydt_1 = -\int\limits_0^l \int\limits_0^l v_{t_1} v_{t_2}\, dt_1 dt_2. \quad (16)$$

По лемме 2 $\dfrac{\partial\tilde{\theta}_0}{\partial t_1} \geq 0$. Во всех точках, где $\dfrac{\partial\tilde{\theta}_0}{\partial t_1} = 0$, выражение в фигурных скобках обращается в нуль в силу условия (8). Для точек, в которых $\dfrac{\partial\tilde{\theta}_0}{\partial t_1} > 0$, имеем

$$[(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})^2 + (\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \beta)^2] \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1} - 2(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \beta)\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho}$$
$$= (\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})^2 \left[\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1} - \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho}\right)^2 \left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_2}\right)^{-1} \right]$$
$$+ \left[(\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tilde{\rho} \left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1}\right)^{-1/2} - (\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \beta)\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1}\right)^{1/2} \right]$$
$$\geq (\nabla_{x,y}\widetilde{w}, \tilde{\nu})^2 (1 - q^2)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1} \geq \rho_0^2 (1 - q^2) u^2(x,y)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1}.$$

Поэтому, усиливая неравенство (16), получаем

$$\rho_0^2(1-q^2)\int\limits_D u^2(x,y)\,dxdy\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t_1}\,dt_1 \le \frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l |\nabla_{t_1,t_2}v|^2\,dt_1dt_2.$$

Отсюда и вытекает оценка (9).

Для завершения доказательства теоремы заметим, что выражение в правой части равенства (9) имеет смысл для $u \in \mathbb{C}^1(\bar{D})$, $\rho(x_0,y_0,x,y) \in \mathbb{C}^1(\Gamma\times\bar{D})$ и семейства кривых L, удовлетворяющих условиям 1, 2. Поэтому, приближая функции u, ρ, $\tilde{f}$, удовлетворяющие условиям теоремы, функциями u_n, ρ_n, $\tilde{f}_n$, для которых оценка (9) уже установлена, и переходя в ней к пределу при $n\to\infty$, получаем оценку (9) в условиях теоремы. Из этой оценки, в частности, вытекает единственность решения задачи интегральной геометрии в пространстве $\mathbb{C}^1(\bar{D})$. ■

8.5. Задачи общего вида в пространстве

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, заданы ограниченная область D и Ω — открытая область, принадлежащая D. Для случая четномерного пространства будем предполагать, что границы областей D и Ω равномерно удалены друг от друга на некоторую положительную величину h и, таким образом, Ω лежит строго внутри D. В случае нечетномерного пространства D и Ω могут совпадать между собой. Пусть, далее, для любой точки $x\in D$ и любого единичного вектора $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ существует единственная гладкая гиперповерхность $S(x,\nu)$, которая проходит через точку x и имеет в этой точке нормаль ν.

Обозначим через $\mathscr{U}$ класс функций $u(x)$, носитель которых содержится в Ω и $u(x)\in\mathbb{L}_2(\Omega)$. Для функций $u(x)\in\mathscr{U}$ рассмотрим задачу об ее отыскании из уравнения

$$v(x,\nu)=\int\limits_{S(x,\nu)}\rho(\xi,x,\nu)u(\xi)\,dS,\quad x\in D,\quad |\nu|=1, \tag{1}$$

в котором $\rho(\xi,x,\nu)$ — заданная гладкая функция своих аргументов, dS — элемент площади поверхности.

Поставленная задача, вообще говоря, переопределена, так как функция $u(x)$ зависит от n переменных, а функция v от $2n-1$ переменных. Отметим, однако, важный случай, когда число существенных переменных у функций u и v совпадает. Рассмотрим поверхность $S(x,\nu)$ и произвольную точку $x^0 \in S(x,\nu)$. Пусть ν^0 — нормаль к $S(x,\nu)$ в точке x^0. Тогда $S(x^0,\nu^0) = S(x,\nu)$. Если же $\rho(\xi,x^0,\nu^0) = \rho(\xi,x,\nu)$ для $\xi \in S(x,\nu)$, то $v(x^0,\nu^0) = v(x,\nu)$. Так как каждая точка гиперповерхности $S(x,\nu)$ характеризуется $n-1$ параметром, то это равенство показывает, что существенных параметров, от которых зависит в этом случае $v(x,\nu)$, всего n. Итак, если весовая функция зависит только от точки $\xi \in D$ и поверхности $S(x,\nu)$, то число существенных переменных у функций u и v совпадает. Это говорит о том, что существует, повидимому, более хорошая по форме постановка задачи интегральной геометрии при том же семействе поверхностей, связанная с другой параметризацией этого семейства, при которой переопределенности задачи нет.

Задача решения уравнения (1) будет рассмотрена в этом разделе в предположении, что диаметр области D достаточно мал. В дальнейшем будем предполагать, что уравнение поверхности $S(x,\nu)$ может быть охарактеризовано с помощью гладкой функции $\varphi(\xi,x,\nu)$:

$$S(x,\nu) = \{\xi : \varphi(\xi,x,\nu) = 0\}, \tag{2}$$

причем в точках $S(x,\nu)$ $|\nabla_\xi \varphi| \neq 0$.

Предположения о способе параметризации приводят к следующим необходимым условиям на функцию φ:

$$\varphi(x,x,\nu) = 0, \quad \nabla_\xi \varphi|_{\xi=x} = \nu |\nabla_\xi \varphi|_{\xi=x}. \tag{3}$$

Очевидно, что всегда можно считать

$$|\nabla_\xi \varphi|_{\xi=x} = 1, \tag{4}$$

поделив в случае необходимости φ на $|\nabla_\xi \varphi|_{\xi=x}$, поэтому в дальнейшем будем предполагать равенство (4) выполненным. Тогда для функции φ имеет место представление

$$\varphi(\xi,x,\nu) = (\nu, \xi - x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi,x,\nu)(\xi_i - x_i)(\xi_j - x_j), \tag{5}$$

где
$$a_{ij}(\xi,x,\nu)=\int\limits_0^1 \varphi_{\xi_i\xi_j}(x+t(\xi-x),x,\nu)(1-t)\,dt.$$

Этим представлением мы будем пользоваться в дальнейшем.

Мы вначале сформулируем результат и докажем его для случая нечетномерного пространства, а уже затем для случая четномерного пространства.

Теорема 1. *Пусть n нечетно, $s=(n-1)/2\ge 1$, функция $\varphi(\xi,x,\nu)$ непрерывна в области $G=\{(\xi,x,\nu):\ \xi\in\bar D,$ $x\in\bar D,\ |\nu|=1\}$ вместе с частными производными до порядка $n+2$, а весовая функция $\rho(\xi,x,\nu)$ непрерывна в G вместе с частными производными до порядка n и удовлетворяет в G условию*
$$\rho(x,x,\nu)\ge\rho_0>0. \tag{6}$$

Тогда существует такое число $d^*>0$, $d^*=d^*(\varphi,\rho)$, что при условии $\operatorname{diam}D<d^*$ решение уравнения (1) в классе функций $\mathscr{U}$ единственно и имеет место оценка устойчивости
$$\|u\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}\le C\|\Delta^s v_1\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)},\quad v_1=\int\limits_{|\nu|=1}\frac{v(x,\nu)}{\rho(x,x,\nu)}\,d\omega_\nu. \tag{7}$$

Здесь $d\omega_\nu$ — элемент площади единичной сферы, Δ^s — s-я степень оператора Лапласа.

□ Используя δ-функцию и финитность функции $u(x)$, запишем уравнение (1) в виде
$$\int\limits_\Omega \rho(\xi,x,\nu)u(\xi)|\nabla_\xi\varphi(\xi,x,\nu)|\delta(\varphi(\xi,x,\nu))\,d\xi=v(x,\nu) \tag{8}$$

и, поделив его на $\rho(x,x,\nu)$, усредним равенство (8) при фиксированном $x\in D$ по всем ν. С учетом обозначения (7) равенство (8) примет вид
$$\int\limits_\Omega K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi=v_1(x). \tag{9}$$

Здесь

$$K(x,\xi) = \int\limits_{|\nu|=1} \tilde{\rho}(\xi,x,\nu)\delta(\varphi(\xi,x,\nu))\,d\omega_\nu,$$
$$\tilde{\rho}(\xi,x,\nu) = \frac{\rho(\xi,x,\nu)}{\rho(x,x,\nu)}|\nabla_\xi\varphi(\xi,x,\nu)|. \tag{10}$$

Ядро уравнения (10) достаточно просто исследуется для точек ξ, x, близких друг к другу. Но этого и достаточно, так как при доказательстве теоремы можно считать диаметр области D малым. Воспользуемся инвариантностью меры $d\omega_\nu$ относительно ортогональных преобразований пространства $\nu_1,\ldots,\nu_n$ и совершим преобразование с ортогональной матрицей Q. При этом формула для подсчета ядра примет вид

$$K(x,\xi) = \int\limits_{|\nu|=1} \tilde{\rho}(\xi,x,Q\nu)\delta(\varphi(\xi,x,Q\nu))\,d\omega_\nu. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение единичный вектор $\nu^0 = (\xi - x)/|\xi - x|$, $\nu^0 = \big(\nu_1^0,\ldots,\nu_n^0\big)$. При вычислении интеграла (11) в зависимости от расположения вектора ν^0 на единичной сфере используем два различных ортогональных преобразования. А именно, пусть $e^1 = (1,0,\ldots,0)$. Тогда для $(\nu^0,e^1)\geq 0$ возьмем преобразование, определяемое равенством

$$Q\nu = \nu + 2(\nu^0,e^1)\nu^0 - \frac{(\nu,\nu^0)+(\nu^0,e^1)}{1+(\nu^0,e^1)}(\nu^0+e^1). \tag{12}$$

Легко проверить непосредственно, что для любого единичного вектора ν справедливо равенство $(Q\nu,Q\nu)=1$. Кроме того,

$$Qe^1 = \nu^0. \tag{13}$$

Для $(\nu^0,e^1) < 0$ при вычислении интеграла используем преобразование (12), в котором e^1 заменено на $-e^1$ и, следовательно, $Qe^1 = -\nu^0$.

Очевидно, достаточно исследовать случай такого расположения точек x, ξ, при котором $(\nu^0,e^1)\geq 0$. В дальнейшем именно этим случаем мы и ограничимся. Уравнение $\varphi(\xi,x,Q\nu)=0$ при фиксированных x, ξ определяет на поверхности сферы поверхность размерности $n-2$. Действительно, в силу (5) это равенство можно записать, поделив на $|x-\xi|$, в виде

$$(\nu^0, Q\nu) + |x-\xi| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x + |x-\xi|\nu^0, x, Q\nu)\nu_i^0\nu_j^0 = 0. \tag{14}$$

Представим вектор ν таким образом:

$$\nu = qe^1 + \sqrt{1-q^2}\bar{\nu}, \tag{15}$$

где $\bar{\nu}$ — единичный вектор, ортогональный вектору e^1. Тогда в силу (13)

$$(\nu^0, Q\nu) = (Q^*\nu^0, \nu) = (e^1, \nu) = q,$$

и равенство (14) принимает вид

$$q + |x-\xi| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x + |x-\xi|\nu^0, x, q\nu^0 + \sqrt{1-q^2}Q\bar{\nu})\nu_i^0\nu_j^0 = 0. \tag{16}$$

Из принципа сжатых отображений вытекает следующая

Лемма 1. *Если функция φ удовлетворяет условиям теоремы, то для любого $q_0 \in (0,1)$ существует такое $d_0 = d_0(\varphi, q_0)$, что для областей Ω с $\operatorname{diam}\Omega < d_0$ уравнение $\varphi(\xi, x, Q\nu) = 0$ для $x, \xi \in \Omega$ определяет q как однозначную, непрерывную и ограниченную функцию аргументов x, $|x-\xi|$, ν^0, $\bar{\nu}$, имеющую по этим аргументам непрерывные и ограниченные производные до порядка n и удовлетворяющую неравенству*

$$|q(x, |x-\xi|, \nu^0, \bar{\nu})| \le q_0 < 1. \tag{17}$$

□ Действительно, так как φ удовлетворяет условиям теоремы, то $a_{ij}(\xi, x, \nu)$ равномерно ограничены для $x, \xi \in \Omega$, $|\nu| = 1$ некоторой константой c_0. Поэтому, записав равенство (16) в виде $q = A(q)$, убеждаемся, что при условии $c_0 d_0 \le q_0$ оператор A переводит множество непрерывных функций, удовлетворяющих неравенству (17), в себя. Условие равномерной ограниченности производных от a_{ij} по $\nu_1, \ldots, \nu_n$ приводит к тому, что при условии малости $|x-\xi|$ оператор A является на этом множестве сжимающим. Таким образом, уравнение (16) определяет q как непрерывную функцию аргументов x, $|x-\xi|$, ν^0, $\bar\nu$, удовлетворяющую неравенству (17). Существование и ограниченность производных у функций q по аргументам до порядка n легко вытекает из самого равенства (16), так как функции a_{ij} и матрица $Q = Q(\nu^0)$, определяемая формулой (12), имеют соответствующие производные. ■

Из равенства (16) вытекает также, что $q > 0$ при $|x-\xi| \to 0$.

Выберем теперь фиксированное $q_0 \in (0,1)$ и будем в дальнейшем считать, что $\operatorname{diam}\Omega < d_0(\varphi, q_0)$. Формула (15), в которой q — решение уравнения (16) при произвольном единичном векторе $\bar\nu$, $(\bar\nu, e^1) = 0$, определяет (при фиксированных x, ξ) ν как гладкую однозначную функцию $\bar\nu$ и задает, таким образом, на сфере $|\nu| = 1$ поверхность размерности $n-2$. Обозначим ее через $\Sigma(x,\xi)$. Если $x \to \xi$ так, что $(\tilde\xi - x)/|\xi - x| \to \nu^0$, то поверхность $\Sigma(x,\xi)$ в пределе совпадает с сечением сферы $|\nu| = 1$ плоскостью, проходящей через центр сферы и ортогональной вектору e^1.

Пусть n — единичный вектор нормали к $\Sigma(x,\xi)$, лежащий в плоскости, касательной в точке ν к сфере $|\nu| = 1$. Учитывая сказанное выше, формулу (11) для ядра $K(x,\xi)$ уравнения (9) можно записать в виде

$$K(x,\xi) = \int\limits_{\Sigma(x,\xi)} \tilde\rho(\xi, x, Q\nu) \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^{-1} d\sigma, \tag{18}$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности $\Sigma(x,\xi)$. Так как на $\Sigma(x,\xi)$ вектор n параллелен вектору

$$\nabla_\nu\varphi(\xi, x, Q\nu) - \nu(\nu, \nabla_\nu\varphi(\xi, x, Q\nu)),$$

то

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = [|\nabla_\nu\varphi(\xi, x, Q\nu)|^2 - |\nu, \nabla_\nu\varphi(\xi, x, Q\nu)|^2]^{1/2}. \tag{19}$$

Из формулы (5) находим

$$\frac{1}{|x-\xi|}\nabla_\nu\varphi(\xi, x, Q\nu) = e^1 + |x-\xi| \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_\nu a_{ij}(\xi, x, Q\nu)\nu_i^0\nu_j^0.$$

Используя формулу (19) и то обстоятельство, что на $\Sigma(x,\xi)$ $\nu = \nu(x, |x-\xi|, \nu^0, \bar{\nu})$, для $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|$ на $\Sigma(x,\xi)$ получаем представление

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^{-1} = \frac{1}{|x-\xi|} + b(x, |x-\xi|, \nu^0, \bar{\nu}), \tag{20}$$

в котором b — непрерывная и ограниченная функция своих аргументов вместе с частными производными до порядка $n-1$. Аналогично на $\Sigma(x,\xi)$ для функции $\tilde{\rho}$ справедливо представление

$$\tilde{\rho}(\xi, x, Q\nu) = 1 + |x-\xi| c(x, |x-\xi|, \nu^0, \bar{\nu}), \tag{21}$$

где функция c обладает теми же свойствами, что и функция b.

Вектор $\bar{\nu}$ ортогонален вектору e^1 и имеет единичную длину, поэтому он полностью характеризуется угловыми сферическими координатами $\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}$ в координатной плоскости, ортогональной к вектору e^1. Элемент поверхности $d\sigma$ подсчитывается по формуле

$$d\sigma = \left[\Gamma\left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi_1}, \ldots, \frac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}\right)\right]^{1/2} d\psi, \tag{22}$$

в которой $d\psi = d\psi_1 \ldots d\psi_{n-2}$, а через Γ обозначен определитель Грама, построенный для векторов $\dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_1}, \ldots, \dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}$:

$$\Gamma\left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi_1}, \ldots, \frac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}\right) = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_1}, \dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_1}\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_1}, \dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}, \dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_1}\right) & \ldots & \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}, \dfrac{\partial\nu}{\partial\psi_{n-2}}\right) \end{vmatrix}.$$

Из формул (18)–(22) вытекает, что ядро $K(x,\xi)$ можно представить в виде

$$K(x,\xi) = \frac{\omega_{n-1}}{|x-\xi|} + K_0(x, |x-\xi|, \nu^0), \tag{23}$$

где K_0 — непрерывная и ограниченная функция своих аргументов вместе с производными до $(n-1)$-го порядка. Но тогда, применяя к уравнению (9) по переменной x оператор Δ^s, $s = (n-1)/2$, и используя

$$\Delta^s \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) = (-1)^s (4\pi)^s (s-1)! \delta(x-\xi), \quad \omega_{n-1} = 2\pi^s/\Gamma(s),$$

для $u(x)$ получаем уравнение

$$u(x) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{K}(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = \frac{(-1)^s}{2^n \pi^{2s}} \Delta^s v_1(x). \tag{24}$$

Здесь

$$\widetilde{K}(x,\xi) = \frac{(-1)^s}{2^n \pi^{2s}} \Delta_x^s K_0(x, |x-\xi|, \nu^0).$$

Ядро $\widetilde{K}(x,\xi)$ уравнения (24) имеет интегрируемую особенность. Действительно, вычисление оператора Δ^s приводит к дифференцированию K_0 до порядка $2s$ по переменным x, $|x-\xi|$, ν^0 и к дифференцированию до порядка $2s$ аргументов $|x-\xi|$, ν^0 по x. Но $2s = n-1$ и, следовательно, производные по аргументам функции K_0 непрерывны и ограничены. В то же время, очевидно, для производных от $|x-\xi|$, ν^0 по x справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} (|x-\xi|) \right| \le \frac{c_1}{|x-\xi|^{k-1}}, \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} (\nu^0) \right| \le \frac{c_1}{|x-\xi|^k}, \quad 1 \le k \le 2s.$$

Из этих рассуждений вытекает, что ядро $\widetilde{K}(x,\xi)$ непрерывно всюду, кроме множества точек x, ξ, на котором $x=\xi$. В окрестности же этого множества для $\widetilde{K}(x,\xi)$ справедлива оценка

$$|\widetilde{K}(x,\xi)| \le c_2/|x-\xi|^{n-1}.$$

Известно, что уравнение (24) с ядром такого типа имеет единственное решение из $\mathbb{L}_2(\Omega)$, если диаметр области Ω достаточно мал. Оценка (17) для решения уравнения (24) при этом очевидна. ■

Рассмотрим теперь случай четномерного пространства. Как было сказано выше, в этом случае мы будем предполагать, что Ω лежит строго внутри D, так что расстояние между Ω и границей области D больше некоторого $h > 0$. Дополнительно предположим, что $h > \operatorname{diam} \Omega$. Обозначим через Ω_h открытое множество, получающееся в результате объединения всех открытых шаров радиуса h с центром в точках $x \in \Omega$.

Теорема 2. *Пусть* $n = 2s$, $s \geq 1$, *а функции* φ, ρ *удовлетворяют всем условиям теоремы* 1 *с заменой* n *на* $n+1$. *Тогда существует число* $d^* > 0$, $d^* = d^*(\varphi, \rho, h)$, *такое, что при условии* $\operatorname{diam}\Omega < d^*$ *решение уравнения* (1) *в классе функций* $\mathscr{U}$ *единственно и имеет место оценка устойчивости*

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \leq \mathrm{c}_0 \|\Delta^s v_2\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}, \tag{25}$$

в которой

$$v_2(x) = \int\limits_{|x-y|\leq h} \frac{v_1(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy, \tag{26}$$

а $v_1(x)$ *вычисляется через* $v(x,\nu)$ *по формуле* (7).

□ Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме. Вначале так же, как и в случае n нечетного, получим уравнение (9). Для ядра $K(x,\xi)$ этого уравнения справедливо представление (23), причем гладкость функции K_0 в силу предположений теоремы на единицу выше, а именно, K_0 имеет по аргументам x, $|x-\xi|$, $\nu^0 = (\xi - x)|x-\xi|^{-1}$ непрерывные ограниченные производные до порядка n. Применим теперь к обеим частям равенства оператор усреднения по шару радиуса h, определенный формулой (26). Тогда получим уравнение

$$\int\limits_{\Omega} T(x,\xi) u(\xi)\, d\xi = v_2(x), \quad x \in \Omega, \tag{27}$$

в котором

$$T(x,\xi) = \int\limits_{|x-y|\leq h} \frac{K(y,\xi)}{|x-y|^{n-1}}\, dy. \tag{28}$$

Далее покажем, что для $T(x,\xi)$, $x, \xi \in \Omega$, имеется представление

$$T(x,\xi) = -\omega_{n-1}\omega_n \ln|x-\xi| + T_0(\xi, |\xi - x|, \nu^0), \tag{29}$$

в котором $T_0(\xi, |\xi-x|, \nu^0)$ — непрерывная и ограниченная вместе с производными до порядка n функция всюду, кроме множества $\rho = 0$, в окрестности которого $T_0(\xi, |\xi - x|, \nu^0)$ удовлетворяет неравенствам ($|\alpha| + k \leq n$)

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} D^{\alpha}_{\xi,\nu^0} T_0(\xi, \rho, , \nu^0) \right| \leq c_0 \begin{cases} \ln\rho, & k = 1, \\ \rho^{1-k}, & k \geq 2. \end{cases} \tag{30}$$

Применяя к уравнению (27) оператор Δ^s и используя

$$\Delta_x^s \ln|x-\xi| = (-1)^{s-1} 2^{n-1} \pi^s (s-1)! \delta(x-\xi),$$

получаем уравнение типа Фредгольма, аналогичное уравнению (24), с особенностью вида $|x-\xi|^{n-1}\ln|x-\xi|$, откуда и вытекает справедливость теоремы.

Нам осталось, таким образом, убедиться в том, что ядро T действительно обладает отмеченными свойствами. Вычислим для этого интеграл (28) отдельно для каждого из слагаемых (23) функции $K(x,\xi)$. Вычисление интеграла от первого слагаемого эквивалентно вычислению интеграла

$$\begin{aligned} f_1(\rho) = \int\limits_{|x-y|\le h} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y-\xi|}\, dy \\ = \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_0^h \frac{dr}{[r^2+\rho^2+2r\rho(\nu^0,\nu)]^{1/2}} \\ = \int\limits_{|\nu|=1} [\ln|h+\rho(\nu^0,\nu)+[r^2+\rho^2+2r\rho(\nu^0,\nu)]^{1/2}| \\ - \ln|1+(\nu,\nu^0)|]\, d\omega_\nu - \omega_n \ln\rho. \end{aligned}$$

Здесь введена сферическая система координат $y = x + r\nu$, а через $(\rho, -\nu)$ обозначены сферические координаты точки ξ в этой системе, т. е. $\rho = |\xi - x|$, $\nu^0 = (x-\xi)/|\xi - x|$. Как видно из полученной формулы, вычисление интеграла (28) от первого из слагаемых функции $K(x,\xi)$ приводит к появлению главной части ядра $T(x,\xi)$, а именно, $\ln\rho$ и некоторой гладкой функции (даже аналитической при $\rho < h$), зависящей только от ρ. Здесь существенно использовано также, что $\rho \le \operatorname{diam}\Omega < h$ при $x \in \Omega$, $\xi \in \Omega$. Покажем теперь, что вычисление интеграла (28) от второго из слагаемых функции $K(x,\xi)$ приводит к функции, обладающей свойствами функции T_0. При этом удобно для вычисления интеграла ввести сферическую систему с центром в точке ξ, $y = \xi + r\nu$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $x = \xi + \rho\nu^0$:

$$f_2(\xi,\rho,\nu^0) = \int\limits_{|x-y|\le h} \frac{K_0(y,|y-\xi|,\nu^0)}{|x-y|^{n-1}}dy$$

$$= \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_0^{r(\rho,(\nu^0,\nu))} \frac{r^{n-1}K_0(\xi+r\nu,r,-\nu)}{[r^2+\rho^2-2r\rho(\nu^0,\nu)]^{(n-1)/2}}\,dr,$$

$$r(\rho,(\nu^0,\nu)) = \rho(\nu^0,\nu) + [h^2-\rho^2[1-(\nu,\nu^0)^2]]^{1/2}.$$

Введем, как мы уже однажды делали, ортогональное преобразование системы координат с матрицей Q так, чтобы выполнялось $Q^*\nu^0 = e^1 = (1,0,\dots,0)$ (при условии $(\nu^0,e^1)\ge 0$). Тогда, обозначая $K_0(\xi+rQ\nu,r,-Q\nu)=\widetilde{K}(\xi,r,\nu,\nu^0)$, найдем

$$f_2(\xi,\rho,\nu^0) = \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_0^{r(\rho,\nu_1)} \frac{r^{n-1}\widetilde{K}(\xi,r,\nu,\nu^0)}{(r^2+\rho^2-2r\rho\nu_1)^{(n-1)/2}}\,dr.$$

Отсюда непосредственно видно, что производные $D^\alpha_{\xi,\nu^0}f_2$, $|\alpha|\le n$, непрерывны и ограничены для $\xi, x\in\Omega$. Действительно,

$$D^\alpha_{\xi,\nu^0}f_2 = \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_0^{r(\rho,\nu_1)} \frac{r^{n-1}D^\alpha_{\xi,\nu^0}\widetilde{K}(\cdot)}{(r^2+\rho^2-2r\rho\nu_1)^{(n-1)/2}}\,dr. \tag{31}$$

Нам осталось разобраться с производными, содержащими дифференцирование по переменной ρ. Замена переменной $r=\rho r_1$ во внутреннем интеграле сразу показывает, что при $\rho>0$ интеграл f_2 непрерывно зависит от ξ, ρ, ν^0 вместе с производными до порядка n. Однако при $\rho\to 0$ производные, которые содержат дифференцирование по переменной ρ, не ограничены. Действительно, при достаточно малых ρ мы всегда можем выбрать $\delta>0$ так, чтобы

$$\rho(1+\delta) < r(\rho,\nu_1), \quad \nu_1\in[-1,1].$$

Тогда, разбивая внутренний интеграл на два: один по отрезку $[0, \rho(1+\delta)]$, а второй по отрезку $[\rho(1+\delta), r(\rho,\nu_1)]$ — и выполняя в первом из них замену переменной $r = \rho r_1$, получаем

$$f_2(\xi,\rho,\nu^0) = \rho \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_0^{1+\delta} \frac{r_1^{n-1}\widetilde{K}(\xi,\rho r_1,\nu,\nu^0)}{(r_1^2+1-2r_1\nu_1)^{(n-1)/2}}\,dr_1$$

$$+ \int\limits_{|\nu|=1} d\omega_\nu \int\limits_{\rho(1+\delta)}^{r(\rho,\nu_1)} \frac{r^{n-1}\widetilde{K}(\xi,r,\nu,\nu^0)}{(r^2+\rho^2-2r\rho\nu_1)^{(n-1)/2}}\,dr. \qquad (32)$$

Первый из интегралов по этой формуле представляет собой непрерывную и ограниченную функцию вместе с производными до порядка n. Все особенности в производных порождаются вторым интегралом. Заметим теперь, что во втором интеграле множитель, стоящий перед $\widetilde{K}$, можно представить в виде

$$\frac{r^{n-1}}{(r^2+\rho^2-2r\rho\nu_1)^{(n-1)/2}} = \Phi\left(\frac{\rho}{r},\nu_1\right),$$

причем функция $\Phi(z,\nu_1)$ как функция аргументов z, ν_1 ограничена вместе с любым конечным числом производных в области $|z| \le (1+\delta)^{-1}$, $\nu_1 \in [-1,1]$. Следовательно, для ее производных по переменной ρ имеют оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\Phi\left(\frac{\rho}{r},\nu_1\right)\right| \le \frac{c_0}{r^k}, \quad r \ge \rho(1+\delta). \qquad (33)$$

При вычислении производных $\dfrac{\partial^k}{\partial\rho^k} D^\alpha_{\xi,\nu^0}$ от второго слагаемого формулы (32) мы можем внести символ D^α_{ξ,ν^0} под знак внутреннего интеграла. Вычисление производной $\dfrac{\partial^k}{\partial\rho^k}$ от внутреннего интеграла приводит к появлению ряда слагаемых за счет вычисления производных по верхнему и нижнему пределам и интеграла за счет дифференцирования подынтегральной функции. Первые из слагаемых, очевидно, ограничены, так как функция $\Phi(\rho/r,\nu_1)$ на нижнем пределе ограничена и от ρ не зависит, а на верхнем пределе совпадает с аналитической функцией

$h^{1-n}[r(\rho,\nu_1)]^{n-1}$. Интеграл, возникающий при дифференцировании подынтегрального выражения, имеет вид

$$\int\limits_{\rho(1+\delta)}^{r(\rho,\nu_1)} \frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\Phi\left(\frac{\rho}{r},\nu_1\right) D^{\alpha}_{\xi,\nu^0}\widetilde{K}(\xi,r,\nu,\nu^0)\,dr$$

и в силу неравенства (33) оценивается интегралом

$$c_1\int\limits_{\rho(1+\delta)}^{r(\rho,\nu_1)}\frac{dr}{r^k} = c_1\begin{cases} \ln\frac{\nu_1+[(h/\rho)^2-(1-\nu_1^2)]^{1/2}}{1+\delta}, & k=1,\\ \frac{1}{1-k}\{[r(\rho,\nu_1)]^{1-k}-[\rho(1+\delta)]^{1-k}\}, & k>1.\end{cases}$$

Отсюда и вытекает оценка (30). Тем самым доказательство теоремы 2 завершено. ■

Замечание 1. Обозначим через $D(x,\nu)$ множество точек области D, для которых $\varphi(\xi,x,\nu)\geq 0$. Более общей, чем задача решения уравнения (1), является задача об отыскании $u(x)$ из уравнения

$$\int\limits_{S(x,\nu)}\rho(\xi,x,\nu)u(\xi)\,d\xi+\int\limits_{D(x,\nu)}\rho_1(\xi,x,\nu)u(\xi)\,d\xi=v(x,\nu),$$
$$x\in D,\quad |\nu|=1.$$

При условии, что гладкость функции $\rho_1(\xi,x,\nu)$ не более чем на единицу хуже гладкости функции $\rho(\xi,x,\nu)$, для этой задачи имеют место теоремы 1 и 2.

Замечание 2. Если в формуле (1) заменить весовую функцию $\rho(\xi,x,\nu)$ на матричную весовую функцию $R(\xi,x,\nu)$ произвольной конечной размерности $m\times m$, а функцию $u(\xi)$ — на векторную функцию $\mathbf{u}(\xi)$ с компонентами $u_1,\ldots,u_m$, то мы получим векторную задачу интегральной геометрии. Для нее справедливы теоремы 1 и 2 с естественной заменой условия (6) на условие

$$|\det R(\xi,x,\nu)|\geq\rho_0>0$$

и функции ρ^{-1} в оценке (7) на матричную функцию $R^{-1}(x,x,\nu)$.

Замечание 3. Из теорем 1 и 2 вытекает в качестве следствия оценка

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \leq c_0 \sup_{|\nu|=1} \|v(x,\nu)\|_{W_2^l(\bar{D})}, \quad l = 2\left[\frac{n}{2}\right], \tag{34}$$

пригодная для любого $n \geq 2$.

В настоящем разделе мы рассматривали постановку задачи интегральной геометрии для случая, когда для каждой точки x и любого направления ν существует гладкая гиперповерхность $S(x,\nu)$ с нормалью ν, проходящей через точку x. Возможна более общая постановка этой задачи, когда через точку x проходят поверхности $S(x,\nu)$ только для ν, принадлежащих некоторому множеству $\omega(x)$ точек единичной сферы. При этом множество $\omega(x)$, вообще говоря, не совпадает с единичной сферой. Оказывается, что со структурой множества $\omega(x)$ тесно связан вопрос о характере устойчивости задачи интегральной геометрии [5, 29].

Рассмотрим для простоты случай, когда $\omega(x)$ не зависит от x: $\omega(x) = \omega_0$. Пусть $\omega_{\delta\alpha} = \{\nu : |\nu| = 1, |(\nu,\alpha)| \leq \delta\}$ — сферический пояс. Тогда если для какого-либо единичного вектора α и $\delta > 0$ выполнено условие $\omega_{\delta\alpha} \cap \omega_0 \neq \varnothing$, то оценок типа (34) (с заменой под знаком sup множества $|\nu| = 1$ на множество ω_0) ни при каком l для задачи интегральной геометрии существовать не может. Отсюда вытекает, в частности, что ни при каких конечных k, l и постоянной $c_0 > 0$ не может существовать и оценок вида

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} \leq c_0 \sup_{\nu\in\omega_0} \|v(x,\nu)\|_{W_2^l(\bar{D})}. \tag{35}$$

Покажем это для частного случая $n = 2$, положив $\varphi(\xi,x,\nu) = \nu(\xi - x)$, $\rho = 1$. Принцип доказательства на этом примере проявляется в полной мере. Пусть $\omega_{\delta\alpha} \cap \omega_0 = \varnothing$ при $\delta > 0$ и $\alpha = (0,1)$. Возьмем функцию $u_\lambda \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ следующего вида:

$$u_\lambda = \sin(\lambda x_1)\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем в Ω, отличная от тождественного нуля, а λ — достаточно большой числовой параметр. Тогда

$$\|u\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \cos(2\lambda x_1)\psi^2\,dx.$$

Проводя в этой формуле достаточное число раз интегрирование по частям, получаем

$$\left| \int\limits_{\Omega} \cos(2\lambda x_1)\psi^2(x)\, dx \right| \le c_k/|\lambda|^k.$$

С другой стороны, для $x \in D$, $\nu \in \omega_0$ имеем

$$v_\lambda(x,\nu) = \frac{1}{|\nu_2|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_\lambda \left(\xi_1, x_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2}(\xi_1 - x_1) \right) d\xi_1$$

$$= \frac{1}{|\nu_2|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda\xi_1)\psi \left(\xi_1, x_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2}(\xi_1 - x_1) \right) d\xi_1.$$

Так как для $\nu \in \omega_0$ выполнено неравенство $|(\nu,\alpha)| = |\nu_2| \ge \delta$, то $|\nu_2|^{-1} \le \delta^{-1}$ и, следовательно,

$$\left| D^\alpha_{x,\nu} v_\lambda(x,\nu) \right| \le \frac{c_{\alpha k}}{|\lambda|^k}, \quad x \in D,\ \nu \in \omega_0.$$

Устремляя λ к бесконечности, получаем, что $\|v_\lambda\|_{W^l_2(D)} \to 0$ равномерно по всем $\nu \in \omega_0$ и любом конечном l, а $\|v_\lambda\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \to (1/\sqrt{2})\|\psi\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \ne 0$. Отсюда и вытекает высказанное ранее утверждение.

8.6. Задачи вольтерровского типа с многообразиями, инвариантными относительно группы движения

Здесь мы подробно рассмотрим задачи интегральной геометрии на плоскости. Отметим, что результаты настоящего раздела переносятся на задачи интегральной геометрии этого типа в пространстве любой размерности.

Итак, пусть $u(x,y)$ — функция двух переменных. Мы будем рассматривать функцию $u(x,y)$ в полуплоскости $y \ge 0$ и будем предполагать, что функция $u(x,y)$ непрерывна и финитна по переменной x:

$$u(x,y) = 0, \quad |x| \ge l > 0.$$

Далее, пусть заданы функции $\varphi(y,\eta)$, $g(y,\eta)$, $y \ge \eta$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(y,\eta) = \sqrt{y-\eta}\,\varphi_0(y,\eta)$,

2) $g(y,\eta) = (1/\sqrt{y-\eta})g_0(y,\eta)$,

где $\varphi_0(y,\eta)$, $g_0(y,\eta)$ — непрерывно дифференцируемые функции,

$$\varphi_0(y,\eta) \ge \varphi^0 > 0, \quad g_0(y,\eta) \ge g^0 > 0.$$

Рассмотрим уравнение относительно функции $u(x,y)$:

$$\int\limits_0^y g(y,\eta)[u(x-\varphi,\eta) + u(x+\varphi,\eta)]\,d\eta = f(x,y). \tag{1}$$

Задача решения уравнения (1) есть проблема интегральной геометрии, т. е. определение функции, если заданы интегралы от этой функции по заданному семейству кривых. В нашем случае и семейство кривых, определяемое функцией $\varphi(y,\eta)$, и весовая функция $g(y,\eta)$ инвариантны относительно группы движений, параллельных оси x.

Для исследования уравнения (1) можно применить два по существу эквивалентных способа.

Первый способ. Применим к (1) преобразование Фурье по переменной x. После преобразования Фурье уравнение (1) примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_0^y g(y,\eta)\cos(\lambda\varphi)v(\lambda,\eta)\,d\eta = \tilde{f}(\lambda,y),\\ v(\lambda,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}u(x,\eta)\,dx, \quad \tilde{f}(\lambda,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x,y)\,dx.\end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, уравнение (1) перешло в семейство вольтерровских интегральных уравнений первого рода. Из свойств функций $\varphi(y,\eta)$, $g(y,\eta)$ следует, что уравнения (2) удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 4.5 данной части. Следовательно, решение уравнения (2), а значит, и (1) единственно.

После применения к (2) оператора дробного дифференцирования мы получим следующее уравнение второго рода:

$$v(\lambda, \eta) + \int_0^y G(\lambda, y, \eta) v(\lambda, \eta)\, d\eta = \tilde{f}_1(\lambda, y), \tag{3}$$

$$G(\cdot) = \frac{1}{\pi g_0(y, y)} \frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y [g_{0y} \cos(\lambda\varphi) - \lambda g_0 \varphi_y \sin(\lambda\varphi)] \sqrt{\frac{y-\eta}{\xi-\eta}}\, d\xi,$$

$$\tilde{f}_1(\lambda, y) = \frac{1}{\pi g_0(y, y)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \tilde{f}(\lambda, \eta)\, d\eta.$$

Решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$v(\lambda, y) = \tilde{f}_1(\lambda, y) + \int_0^y R(\lambda, y, \eta) \tilde{f}_1(\lambda, \eta)\, d\eta. \tag{4}$$

Норма интегрального оператора в уравнении (3), вообще говоря, неограниченно возрастает с увеличением параметра λ, так что задача решения семейства уравнений (3), а значит, и уравнения (1) некорректна.

Приведем полное исследование характера неустойчивости решения уравнений (1) и (3) в одном простейшем случае.

Пусть в (1)

$$\varphi_0(y, \eta) = g_0(y, \eta) = 1.$$

Уравнение (1) при этом примет вид

$$\int_0^y [u(x - \sqrt{y-\eta}\,, \eta) + u(x + \sqrt{y-\eta}\,, \eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = f(x, y). \tag{5}$$

После преобразования Фурье уравнение (5) примет вид

$$\int_0^y \cos(\lambda\sqrt{y-\eta}) v(\lambda, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = \tilde{f}(x, y). \tag{6}$$

Покажем, что решение уравнения (6) дается формулой

$$v(\lambda, y) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{y-\eta})\tilde{f}(\lambda,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}. \tag{7}$$

Действительно, применяя к (6) вольтерровский оператор с ядром $\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{z-y})/\sqrt{z-y}$, получим

$$\int\limits_0^z \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{z-y})\tilde{f}(\lambda,y)\frac{dy}{\sqrt{z-y}}$$
$$= \int\limits_0^z\int\limits_\eta^z \cos(\lambda\sqrt{y-\eta})\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{z-y})\frac{dy}{\sqrt{(y-\eta)(z-y)}}v(\lambda,\eta)\,d\eta,$$

откуда в силу известной формулы

$$\int\limits_0^1 \cos(p\sqrt{t})\operatorname{ch}(p\sqrt{1-t})\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$$

следует справедливость (7).

Из формулы (7) следует, что характер неустойчивости решения уравнения (5) такой же, как в задаче Коши для уравнения Лапласа. Для общего уравнения (1) и соответствующего ему уравнения (2) можно получить аналогичные оценки условной устойчивости.

Именно, можно показать, что в (4) функция удовлетворяет неравенству

$$|R(\lambda,y,\eta)| \le ae^{b\sqrt{y-\eta}\lambda}\frac{1}{\sqrt{y-\eta}},$$

где a, b — некоторые постоянные.

Второй способ. Будем в уравнении (1) рассматривать функцию $u(x,y)$ при фиксированном y как элемент гильбертова пространства W:

$$u(x,y) = w(y) \in W.$$

Тогда уравнение (1) можно считать вольтерровским операторным уравнением, определенным в разделе 4.6 данной части.

$$\int_0^y A(y,\eta)w(\eta)\,d\eta = \psi(y). \tag{8}$$

В (8) семейство операторов $A(y,\eta)$ определяется следующим образом:

$$A(y,\eta)w(\eta) = g(y,\eta)[u(x-\varphi,\eta) + u(x+\varphi,\eta)].$$

Нетрудно показать, что определенное таким образом вольтерровское операторное уравнение (8) сводится к уравнению, удовлетворяющему условиям теоремы 1 раздела 4.6 данной части. В качестве оператора B теоремы можно взять, например, следующий интегральный оператор:

$$Bw(y) = \int_{-l}^{l} p(x,\xi)u(\xi,y)\,d\xi,$$

$$p(x,\xi) = \frac{1}{2l}(l+\xi)(l-x)\xi \le x, \quad \frac{1}{2l}(l-\xi)(l+x)x \le \xi.$$

Такие же результаты можно получить для задач интегральной геометрии в пространстве большей размерности.

8.7. Задачи интегральной геометрии с возмущением на плоскости

Рассмотрим операторное уравнение

$$\int_0^y [u(x+h,\eta) + u(x-h,\eta)]\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}$$
$$+ \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = f(x,y), \quad h = \sqrt{y-\eta}, \tag{1}$$

относительно функции $u(\xi,\eta)$. Функция u предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и финитной с носителем в прямоугольнике $-l_0 \le \xi \le l_0$, $0 \le \eta \le b$. Функция K имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условию $K(x,y,\xi,\eta) = 0$ при $|\xi + x| \le h$. Функция $f(x,y)$ предполагается заданной в полосе $0 \le y \le b$.

Уравнение (1) соответствует задаче интегральной геометрии с возмущением.

Первое слагаемое в левой части (1)

$$\int_0^y [u(x+h,\eta) + u(x-h,\eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = f_0(x,y)$$

есть совокупность интегралов от искомой функции u по семейству парабол с вершинами в точках (x,y). Второе слагаемое

$$f_1(x,y) = f(x,y) - f_0(x,y)$$

— интегралы с весом K по частям полуплоскости, ограниченным параболами.

Теорема. *Решение уравнения* (1) *единственно.*

□ Итак, пусть правая часть в (1) тождественно равна нулю:

$$f(x,y) \equiv 0.$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y [u(x+gh,\eta) + u(x-gh,\eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}},$$
$$g(t) = \sqrt{1-t}, \quad t \in [0,1].$$

Она удовлетворяет следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y} v(x,y,t) = -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,y,\tau)\, d\tau + \varphi(x,y), \\ \varphi(x,y) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x,y) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(x,y). \end{gathered} \tag{2}$$

Положим $v_\sigma(x,y,t) = e^{\sigma(b-y)^2}v(x,y,t)$. Из (2) получим, что v_σ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}v_\sigma(x,y,t)$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}v_\sigma(x,y,\tau)\,d\tau - 2\sigma(b-y)v_\sigma(x,y,t) + \varphi_\sigma(x,y), \qquad (3)$$

$$\varphi_\sigma(x,y) = e^{\sigma(b-y)^2}\varphi(x,y).$$

Лемма 1. *Существует постоянная M такая, что*

$$\int\limits_0^b\int\limits_{-l}^l \varphi_\sigma^2(x,y)\,dxdy \le M\int\limits_0^b\int\limits_{-l}^l\int\limits_0^1 v_\sigma^2(x,y,t)\,dxdydt, \qquad (4)$$

где $l = l_0 + \sqrt{b}$.

Из определения функций v, f и свойств K следует, что

$$2\int\limits_0^y u(x,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + f_1(x,y) = \int\limits_0^1 v(x,y,t)\,dt;$$

$$u(x,y) + \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_1(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^y\int\limits_0^1 v'_\eta(x,\eta,t)\,dt\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}; \qquad (5)$$

$$K_1(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta+(x-\xi)^2}^y K'_{y_1}(x,y_1,\xi,\eta)\frac{dy_1}{\sqrt{y-y_1}}.$$

Левая часть в (5) является результатом применения к функции u вольтерровского оператора второго рода. Обращая указанный оператор, получим

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^y\int\limits_0^1 v'_\eta(x,\eta,t)\,dt\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} + \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_2(x,y,\xi,\eta)v'_\eta(\xi,\eta,t)\,dtd\xi d\eta, \tag{6}$$

где K_2 — непрерывная функция.

Из (6) с помощью переноса оператора дифференцирования функции v по переменной y на функции K, K_2 имеем равенство

$$\varphi(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h}\int\limits_0^1 K_3(x,y,\xi,\eta)v(\xi,\eta,t)\,dtd\xi d\eta, \tag{7}$$

где K_3 — непрерывная функция, зависящая от функции K и ее производных.

Из (7) вытекает, что

$$\begin{gathered}\varphi_\sigma(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h}\int\limits_0^1 K_{3\sigma}(x,y,\xi,\eta)v(\xi,\eta,t)\,dtd\xi d\eta,\\ K_{3\sigma}(x,y,\xi,\eta) = e^{\sigma(b-y)^2}K_3(x,y,\xi,\eta).\end{gathered} \tag{8}$$

Неравенство (4) очевидно следует из (8).

Применим теперь к уравнениям (2) и (3) преобразование Фурье по переменной x. Уравнения примут вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\omega(\lambda,y,t) = \frac{\lambda^2}{4}\int\limits_0^t \omega(\lambda,y,\tau)\,d\tau + \psi(\lambda,y),\\ \omega(\lambda,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}v(x,y,t)\,dx,\\ \psi(\lambda,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\varphi(x,y)\,dx,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\omega_\sigma(\lambda, y, t) = \frac{\lambda^2}{4}\int\limits_0^t \omega_\sigma(\lambda, y, \tau)\,d\tau$$
$$- 2\sigma(b-y)\omega_\sigma(\lambda, y, t) + \psi_\sigma(\lambda, y). \quad (10)$$

Обозначим

$$\omega_1(\lambda, t) = \begin{cases} \omega(\lambda, b, t), & t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим для уравнения (9) задачу Коши

$$\omega(\lambda, b, t) = \omega_1(\lambda, t) \quad (11)$$

в полуполосе $0 \le y \le b$, $0 \le t < \infty$ и доопределим функцию $\omega(\lambda, y, t)$ при $t > 1$ как решение этой задачи Коши.

Очевидно, что при $t \le 1$ решение задачи Коши (11) для уравнения (9) будет совпадать с определенной ранее функцией ω. Нетрудно убедиться, что решение задачи (11) для уравнения (9) дается формулой

$$\omega(\lambda, y, t) = \int\limits_0^t \frac{\cos\lambda\sqrt{(t-\tau)(b-y)}}{\sqrt{t-\tau}}\omega_2(\lambda, \tau)\,d\tau$$
$$+ \frac{1}{\lambda\sqrt{t}}\int\limits_y^b \sin\lambda\sqrt{t(\eta-y)}\psi_1(\lambda, \eta)\,d\eta, \quad (12)$$

$$\omega_2(\lambda, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \omega_1(\lambda, \tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\psi_1(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^b \psi(\lambda, \eta)\frac{d\eta}{\sqrt{\eta-y}}.$$

Действительно, как известно из свойств решения эволюционных уравнений, решение задачи (11) для уравнения (9) единственно, а то, что функция ω из (12) является решением этой задачи, легко проверяется.

Обозначим через J вольтерровский интегральный оператор

$$J\omega = \int_0^t \omega(\lambda, y, \tau)\, d\tau$$

и рассмотрим функционал

$$F(\omega_\sigma) = \int_0^b \int_0^\infty e^{-\sigma t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\lambda^2}{4} J + 2\sigma(b-y) \right) \omega_\sigma(\cdot) \right]^2 dtdy$$

$$= - \int_0^b \int_0^\infty e^{-\sigma t} \Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{4} J^* - 2\sigma(b-y) \right)$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\lambda^2}{4} J + 2\sigma(b-y) \right) \omega_\sigma(\cdot)\omega_\sigma(\cdot) \Bigg] dtdy$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\sigma t} \left[\frac{\partial}{\partial y} \omega_\sigma^2(\lambda, b, t) - \frac{\lambda^2}{4} J\omega_\sigma(\lambda, b, t) + 2\sigma b \omega_\sigma^2(\lambda, b, t) \right] dt,$$

где J^* — оператор, сопряженный к оператору J в гильбертовом пространстве функций, определенных на полуоси $0 \le t < \infty$ со скалярным произведением

$$(g, h) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} g(t) h(t)\, dt.$$

Из (10) и леммы п. 7.6 получим, что

$$F(\omega_\sigma) = - \int_0^b \int_0^\infty e^{-\sigma t} \Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{4} J^* - 2\sigma(b-y) \right)$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\lambda^2}{4} J + 2\sigma(b-y) \right) \omega_\sigma(\cdot)\omega_\sigma(\cdot) \Bigg] dtdy$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left[\frac{\partial}{\partial y}\omega_\sigma^2(\lambda,b,t)-\frac{\lambda^2}{4}J\omega_\sigma(\lambda,b,t)\omega_\sigma(\lambda,b,t)+2\sigma b\omega_\sigma^2(\lambda,b,t)\right]dt$$

$$+\int\limits_0^b\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left\{\left[2\sigma+\frac{\lambda^4}{16}(J^*J-JJ^*)\right]\omega_\sigma(\cdot)\right\}\omega_\sigma(\cdot)\,dtdy$$

$$=\int\limits_0^b\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\lambda^2}{4}J^*+2\sigma(b-y)\right)\omega_\sigma(\cdot)\right]^2 dtdy$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left[\frac{\lambda^2}{4}(J+J^*)\omega_\sigma(\cdot)\omega_\sigma(\cdot)\right]dt$$

$$+\int\limits_0^b\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\lambda^2}{16}(J^*J-JJ^*)\right]\omega_\sigma(\cdot)\right\}\omega_\sigma(\cdot)\,dtdy$$

$$=\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^b\psi_\sigma^2(\lambda,y)\,dy. \quad (13)$$

Лемма 2. *Пусть $g(t)$ — функция, непрерывная и ограниченная на полупрямой $0 \le t < \infty$, $|g(t)| \le g_0$. Тогда имеет место равенство*

$$(J^*J-JJ^*)g=\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\infty e^{-\sigma(t+\tau)}g(\tau)\,d\tau, \quad (14)$$

где J^* определяется равенством

$$J^*g=e^{\sigma t}\int\limits_t^\infty e^{-\sigma\tau}g(\tau)\,d\tau.$$

В силу определения J^*

$$J^*Jg=\int\limits_0^\infty G(t,\tau)g(\tau)\,d\tau,\quad G(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\sigma t}, & \tau\le t,\\ \dfrac{1}{\sigma}e^{-\sigma\tau}, & \tau\ge t,\end{cases}$$

$$JJ^*g = \int\limits_0^\infty R(t,\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

$$R(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma\tau})e^{-\sigma t}, & \tau \le t, \\ \dfrac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})e^{-\sigma\tau}, & \tau \ge t, \end{cases}$$

$$G(t,\tau) - R(t,\tau) = \frac{1}{\sigma}e^{-\sigma(t+\tau)},$$

$$(J^*J - JJ^*)g = \frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\infty e^{-\sigma(t+\tau)}g(\tau)\,d\tau.$$

Из (13) и (14) следует справедливость неравенства

$$2\sigma \int\limits_0^b \int\limits_0^\infty \omega_\sigma^2(\lambda, y, t)\,dtdy \le \int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\left[\frac{\lambda^2}{4}(J + J^*)\omega_\sigma(\cdot) - 4\sigma b\omega_\sigma(\cdot)\right]\omega_\sigma(\cdot)\,dt + \frac{1}{\sigma}\int\limits_0^b \psi_\sigma^2(\lambda, y)\,dy. \quad (15)$$

Переходя в (15) от образов Фурье функций ω_σ, ψ_σ к их прообразам, получим

$$2\sigma \int\limits_0^b \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\sigma t}v_\sigma^2(x, y, t)\,dxdydt \le \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\sigma t}\left[\frac{1}{4}(J + J^*)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_\sigma(x, b, t) - 4\sigma b v_\sigma(x, b, t)\right]v_\sigma(x, b, t)\,dxdt + \frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi_\sigma(x, y)\,dxdy. \quad (16)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (16). Оно является интегралом по плоскости $y = b$ в пространстве (x, y, t) от квадратичной формы, содержащей функции v_σ и $(J + J^*)v''_{\sigma xx}$.

Из условий, наложенных на функцию u, и из определения функции v_σ следует, что существуют постоянные M_0, M_1 такие, что

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma t}\left[\frac{1}{4}(J + J^*)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_\sigma(x, b, t) - 4\sigma b v_\sigma(x, b, t)\right]v_\sigma(x, b, t)\,dxdt \le (M_0 + M_1\sigma)e^{-2\sigma b^2}. \quad (17)$$

Из неравенств (4), (16), (17) вытекает, что

$$(2\sigma - M_2)\int_0^b \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v_\sigma^2(x, y, t)\,dxdydt \le (M_0 + M_1\sigma)e^{-2\sigma b^2}, \quad (18)$$

где M_2 — некоторая постоянная. Легко видеть, что если функция u, а значит, и функция v_σ не равны тождественно нулю, то существует число q, $0 < q < 1$, такое, что

$$\int_0^b \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v_\sigma^2(x, y, t)\,dxdydt \ge M_3 e^{-2\sigma b^2 q}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) получаем неравенство

$$M_3(2\sigma - M_2)e^{-2\sigma b^2 q} \le (M_0 + M_1\sigma)e^{-2\sigma b^2}. \quad (20)$$

Очевидно, что оно не имеет места при достаточно больших значениях постоянной σ, что и доказывает справедливость утверждения теоремы. ■

9. Обратные задачи

9.1. О постановке обратных задач

Термин «обратная задача» для дифференциальных уравнений или уравнений математической физики употребляется для весьма различных постановок.

Общая концепция употребления этого термина состоит в следующем. Вначале определяется прямая задача. В прямой задаче имеются данные и искомое решение. Обратной по отношению к прямой задаче можно назвать задачу, в которой часть данных прямой задачи предполагается не заданной, подлежащей определению, но зато предполагается заданной некоторая дополнительная информация (семейство функционалов) от решения прямой задачи.

Иногда под обратной задачей понимают задачу определения обратного оператора. Классический пример — дифференцирование и интегрирование.

Приведем несколько примеров задач, которые ряд авторов называют обратными.

1. Обратная задача для уравнения теплопроводности. Это задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени, которая была сформулирована в п. 4.1.

2. Одномерная обратная кинематическая задача сейсмики. Требуется определить скорость распространения возмущения среды (сейсмические волны) внутри шара (в геофизике — Земного шара), если известны времена распространения возмущения между двумя любыми точками на поверхности шара. Предполагается, что эта скорость зависит только от одной переменной — расстояния от точки до центра шара. Задача была исследована в начале прошлого столетия геофизиками Г. Герглотцем и Е. Вихертом. На основании решения этой задачи и обработки данных о временах прихода сейсмических волн от землетрясений была построена модель внутреннего строения Земли, которая приводится в школьных учебниках.

3. Обратная задача для уравнения Штурма — Лиувилля. Рассматривается дифференциальный оператор с краевым условием

$$L_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in [a, b],$$
$$y'(a) - h_1 y(a) = 0, \quad y'(b) - h_2 y(b) = 0.$$

Требуется по спектральной функции задачи $\rho(\lambda)$ определить коэффициенты дифференциального оператора $q(x)$. Это простейший вариант задач подобного типа.

Первые результаты по теории задачи были получены известным астрофизиком В. А. Амбарцумяном в 1929 г. и Г. Борном в 1945 г. В дальнейшем в различных вариантах эти задачи рассматривались в работах В. А. Марченко, М. Г. Крейна, И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и ряда других авторов. Оказалось, что эта задача связана с многими прикладными: обратными задачами квантовой теории рассеяния, задачами интерпретации данных геофизических наблюдений и рядом других.

4. Обратная задача теории потенциала. Требуется определить форму тела по ньютоновскому потенциалу, порожденному этим телом. Предполагается, что тело однородно, т. е. его плотность постоянна и известна, а потенциал известен в некоторой области вне тела. Если искомое тело звездно относительно начала координат, то задача эквивалентна задаче решения следующего нелинейного интегрального уравнения типа Урысона:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\varphi(\alpha,\beta)} \frac{\rho^2 \sin\beta}{r(x,y)}\, d\rho d\alpha d\beta = u(x).$$

Здесь x, y — точки трехмерного пространства, (ρ, α, β) — полярные координаты точки, $r(x, y)$ — растояние между точками x, y. Функция $u(x)$ предполагается заданной в некоторой области вне области, по которой производится интегрирование, $\varphi(\alpha, \beta)$ — искомая функция.

Обратная задача теории потенциала связана с задачами интерпретации данных гравиметрических наблюдений, о которой говорилось в п. 5.2 главы 5.

Теорема единственности решения обратной задачи в классе звездных тел была доказана С. П. Новиковым в 1938 г. Впоследствии обратные задачи теории потенциала в сходных постановках привлекали внимание ряда исследователей, в частности В. К. Иванова, А. И. Прилепко, одного из авторов настоящей книги.

Наибольшее количество исследований по обратным задачам относится к задачам определения коэффициентов дифференциального уравнения. К этим задачам относятся, в частности, задачи типа обратных для уравнения Штурма — Лиувилля. Можно сказать, что теория обратных задач образует направление в современной математике.

Вначале исследовались одномерные обратные задачи — искомый коэффициент предполагается функцией одной переменной.

По-видимому, первой работой, в которой исследовалась многомерная обратная задача — коэффициент предполагался функцией нескольких переменных — принадлежит Ю. М. Березанскому [4]. Широкое исследование различных типов многомерных обратных задач началось в 1965 г. в Новосибирске [25, 27, 28]. Мы ограничимся рассмотрением четырех типов многомерных обратных задач. В трех последующих разделах мы будем следовать монографии [40].

9.2. Обратная динамическая задача. Метод линеаризации

Пусть L — равномерно эллиптический оператор с коэффициентами, зависящими от переменной $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u,$$

$$\mu \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \le \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2, \quad 0 < \mu < \infty.$$

Рассмотрим задачу

$$u_{tt} - Lu = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0. \tag{2}$$

Если для нахождения коэффициентов уравнения (1) задается информация о решениях $u(x,t)$ на многообразиях временного типа (например, на некотором множестве прямых, параллельных оси t), то задача отыскания коэффициентов носит название обратной динамической задачи. Это название подчеркивает, что информация, рассматриваемая в задаче, представляет собой режим колебаний по времени некоторого множества точек пространства $\mathbb{R}^3$. Информация такого типа может быть с успехом использована для определения коэффициентов как при старших, так и при младших производных оператора L.

Общая постановка обратной динамической задачи об определении одного из коэффициентов оператора L, неизвестного внутри некоторой области D, ограниченной поверхностью S, может быть сформулирована в следующем виде. Решение задачи (1), (2) известно в точках S как функция времени:

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

требуется найти неизвестный коэффициент внутри D.

Аналогичным образом может быть сформулирована задача об определении всех коэффициентов оператора L. Естественно, что для определения более одного коэффициента оператора L нужна бо́льшая информация, чем (3). Эта информация может быть получена, например, за счет того, что рассматривается несколько задач типа (1), (2), отвечающих различным функциям $f(x,t)$, и относительно каждой из задач задается информация вида (3). Возможно также введение в функцию f некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$. Тогда $f = f(x,t,\lambda)$ и решение задачи (1), (2) также зависит от λ. В этом случае информация (3) зависит от параметра λ. Таким параметром λ может быть, например, точка приложения сосредоточенного источника.

Обратная динамическая задача об определении коэффициентов оператора L является задачей нелинейной. В самом деле, решение задачи (1), (2) есть результат применения оператора

$$u = A(q,f), \quad q = (a_{ij}, b_i, c),$$

линейного по отношению к функции f и нелинейного по отношению к коэффициентам оператора L, т. е. к компонентам вектора q, составленного из коэффициентов оператора L. Используя информацию (3), приходим к нелинейному операторному уравнению

$$A(q, f) = g. \tag{4}$$

При исследовании нелинейных уравнений очень важную роль играет линейное уравнение, которое получается в результате линеаризации. Это уравнение, как правило, отражает основные характерные особенности нелинейного уравнения и способствует пониманию существа проблемы. Исходя из этого принципа, изложим здесь схему линеаризации обратной задачи и рассмотрим отдельные вопросы исследования возникающей линейной задачи.

Рассмотрим задачу об определении коэффициента $c(x)$ оператора L в постановке (1)–(3). Предположим, что коэффициент $c(x)$ можно представить в виде

$$c(x) = c_0(x) + c_1(x), \tag{5}$$

где коэффициент $c_0(x)$ известен, а $c_1(x)$ мал по абсолютной величине. (Заметим, что для обоснования линеаризации, когда дело касается коэффициентов при производных оператора L, необходимо требование малости добавочного коэффициента понимать как малость по норме, содержащей производные коэффициента до некоторого порядка.) Обратная задача, таким образом, приводится к задаче определения малого добавка к функции $c_0(x)$.

Суть метода линеаризации заключается в следующем. Формально вводится параметр λ и $c(x, \lambda)$:

$$c(x, \lambda) = c_0(x) + \lambda c_1(x). \tag{6}$$

Решение задачи (1), (2) при $c = c(x, \lambda)$ представляется бесконечным рядом по степени λ:

$$u(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x, t), \tag{7}$$

который подставляется в равенства (1), (2). Уравнения для $u_n(x, t)$ получаются в результате приравнивания выражений, содержащих λ^n. При этом u_0 является решением задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_0\right) u_0 = f(x, t), \quad u_0|_{t<0} \equiv 0, \tag{8}$$

в которой через L_0 обозначен оператор L при $c = c_0$; функции u_n при $n \geq 1$ удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_0\right) u_n = c_1 u_{n-1}, \quad u_n|_{t<0} \equiv 0, \ n \geq 1. \tag{9}$$

Как видно из этих равенств, u_0 от c_1 не зависит, u_1 зависит линейным образом от коэффициента c_1, все же остальные u_n, начиная с $n = 2$, зависят от c_1 нелинейным образом. Поэтому линеаризации задачи соответствует обрывание ряда (7) и замена его первыми двумя слагаемыми. Так как равенство (5) получается из равенства (6) при $\lambda = 1$, то это соответствует представлению решения задачи (1), (2) в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t). \tag{10}$$

В рамках этого приближения данные обратной задачи можно записать как данные для функции $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t) = g_1(x,t) \equiv g(x,t) - u_0(x,t) \quad x \in S, \ t \geq 0. \tag{11}$$

Функцию $g_1(x,t)$ можно считать известной, так как функция $u_0(x,t)$ известна как решение (8).

Таким образом, обратная задача в линейном приближении приводится к задаче определения функции $c_1(x)$, входящей в соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_0\right) u_1 = c_1 u_0, \quad u_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{12}$$

при известной функции $u_0(x,t)$ и информации (11). Как отсюда видно, эта задача определения правой части специального вида дифференциального уравнения.

Подобные задачи возникают, если роль коэффициента играет один из коэффициентов a_{ij} или b_i. Например, для коэффициента b_i в предположении

$$b_i = (b_i)_0 + (b_i)_1,$$

аналогичном (5), для u_1 возникает уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_0\right) u_1 = (b_i)_1 \frac{\partial}{\partial x_i} u_0, \quad u_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{13}$$

и обратная задача об определении $(b_i)_1$ из соотношений (13), (11).

Если неизвестны все коэффициенты оператора L, то естественно рассматривать, как мы уже говорили, несколько задач типа (1), (2) с различными функциями f. Фактически это означает, что следует функцию $f(x,t)$ считать векторной функцией. Ее размерность должна совпадать с числом неизвестных коэффициентов оператора L. При этом функции u, g также становятся векторными. Представляя каждый из коэффициентов оператора L в виде, аналогичном (5):

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + (a_{ij})_1, \quad b_i = (b_i)_0 + (b_i)_1, \quad c = c_0 + c_1$$

и обозначая через L_k оператор L, отвечающий коэффициентам $(a_{ij})_k$, $(b_i)_k$, c_k, $k = 0, 1$, получим обратную задачу об отыскании $(a_{ij})_1$, $(b_i)_1$, c_1 из соотношений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_0\right) u_1 = L_1 u_0, \quad u_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{14}$$

при условии (11). В результате имеем векторный вариант обратной задачи об определении правой части специального вида.

Вернемся теперь к задаче (12), (11) как более удобному объекту для демонстрации метода. Задачу об определении $c_1(x)$ можно интерпретировать как некоторую задачу интегральной геометрии. Чтобы показать это, воспользуемся для решения задачи Коши (12) формулой, дающей представление решения через фундаментальное решение

$$u_1(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} c_1(\xi) u_0(\xi,\tau) H_0(x, t-\tau, \xi)\, d\xi d\tau.$$

Здесь H_0 отвечает оператору L_0. Используя структуру фундаментального решения, можно записать эту формулу в виде

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\tau(x,\xi)\le t} c_1(\xi) u_0(\xi, t-\tau(x,\xi)) \frac{d\xi}{\tau(x,\xi)}$$

$$+ \int\limits_{\tau(x,\xi)\le t} c_1(\xi) \int\limits_0^{t-\tau(x,\xi)} u_0(\xi,\tau) v_{-1}(x, t-\tau, \xi)\, d\tau d\xi, \quad t \ge 0, \tag{15}$$

где v_{-1} — регулярная часть функции H_0. Из условия (11) находим интегральное уравнение для определения коэффициента $c_1(x)$:

$$\int\limits_{\tau(x,\xi)\le t} c_1(\xi)\rho(x,\xi,t)\,d\xi = g_1(x,t), \quad x\in S, \quad t\ge 0, \tag{16}$$

в котором весовая функция $\rho(x,\xi,t)$ определяется равенством

$$\rho(x,\xi,t) = u_0(\xi, t-\tau(x,\xi))/4\pi\tau(x,\xi)) + \int\limits_0^{t-\tau(x,\xi)} u_0(\xi,\tau)v_{-1}(x,t-\tau,\xi)\,d\tau.$$

Задача решения уравнения (16) относительно функции $c_1(x)$, $x\in D$, есть задача интегральной геометрии. Ее свойства определяются во многом весовой функцией ρ, которая, в свою очередь, зависит от функции f и коэффициентов оператора L_0.

Рассмотрим простейший вариант (16). Пусть

$$L_0 = \Delta, \quad f(x,t) = \delta(x-x^0, t).$$

В этом случае

$$\tau(x,\xi) = |x-\xi|, \quad u_0(x,t) = \frac{1}{4\pi|x-x^0|}\delta(t-|x-x^0|), \quad v_{-1}\equiv 0,$$

и уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} c_1(\xi)\frac{\delta(t-|x-\xi|-|\xi-x^0|)}{|x-\xi|\cdot|\xi-x^0|}\,d\xi = g_1(x,t), \quad x\in S, \quad t\ge 0. \tag{16$'$}$$

Так как носитель подынтегральной функции сосредоточен на эллипсоиде

$$S(x,x^0,t) = \{\xi : |x-\xi| + |\xi-x^0| = t\},$$

то интеграл в левой части равенства (16$'$) можно привести к интегралу по поверхности $S(x,x^0,t)$. Наиболее удобно это сделать, перейдя к сферической системе координат r, θ, φ, у которой полюс находится в точке x^0, а полярная ось проходит через точки x, x^0. Уравнение эллипсоида $S(x, x^0, t)$ в этой системе координат имеет вид

$$r = \left(t^2 - r_0^2\right)/2(t - r_0\cos\theta), \quad r_0 = |x - x^0|, \quad r = |\xi - x^0|.$$

При этом

$$|x - \xi| = \left(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta\right)^{1/2}.$$

Уравнение ($16'$) приводится после замены координат к следующему виду:

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{c_1(\xi)}{\left(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta\right)^{1/2}}$$
$$\times\,\delta\big(t - r - (r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta\big)^{1/2})r\,dr d\omega = g_1(x,t), \quad x \in S,\ t \geq 0.$$

Здесь

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Воспользуемся для вычисления интеграла по переменной r следующими свойствами δ-функции. Пусть $r = r^*$ — простой нуль дифференцируемой функции $\psi(r)$ и в ε-окрестности точки r^* других нулей у функции $\psi(r)$ нет. Тогда

$$\int\limits_{r^*-\varepsilon}^{r^*+\varepsilon} f(r)\delta(\psi(r))\,dr = \frac{f(r^*)}{|\psi'(r^*)|}.$$

В данном случае

$$\psi(r) = t - r - \left(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta\right)^{1/2}, \quad r^* = \left(t^2 - r_0^2\right)/2(t - r_0\cos\theta).$$

Так как

$$|\psi'(r^*)| = \left[1 + \frac{r - r_0\cos\theta}{\left(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta\right)^{1/2}}\right]_{r=r^*}$$
$$= \frac{t - r_0\cos\theta}{|x - \xi|} = \frac{t^2 - r_0^2}{2r^*|x - \xi|}, \quad r^* = |\xi - x^0|,$$

то уравнение (16′) принимает вид

$$\iint\limits_{S(x,x^0,t)} |x^0-\xi|^2 c_1(\xi)\,d\omega = 8\pi^2(t^2-|x-x^0|^2)g_1(x,t),\qquad x\in S,\quad t\geq 0. \tag{17}$$

Пусть

$$S=\{x: x_3=0\}$$

и x^0 — фиксированная точка S. В работе [38] установлена следующая

Теорема. *Если функция $c_1(x)$ четна относительно плоскости S и непрерывна в $\mathbb{R}^3$, то она однозначно определяется из уравнения* (17).

Так как любую функцию можно представить в виде ее четной и нечетной частей

$$c_1(x) = [c_1(x_1,x_2,x_3)+c_1(x_1,x_2,-x_3)]/2 + [c_1(x_1,x_2,x_3)-c_1(x_1,x_2,-x_3)]/2,$$

то из этой теоремы в качестве следствия вытекает: если функция $c_1(x)$ известна в области $x_3<0$, то в области $x_3\geq 0$ она однозначно определяется заданием $g_1(x,t)$. Приведем доказательство теоремы. Введем сферические координаты $x\in S$ и $\xi\in S(x,x^0,t)$:

$$\begin{gathered} x=x^0+r_0\nu^0,\quad r_0=|x-x^0|,\quad \nu^0=(\cos\varphi_0,\sin\varphi_0,0),\\ \xi=x^0+rQ(\varphi_0)\nu,\quad \nu=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta),\\ Q(\varphi_0)=\begin{Vmatrix} 0 & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\\ 0 & -\cos\varphi_0 & \sin\varphi_0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix}, \end{gathered} \tag{18}$$

а также эксцентриситет эллипсоида ε и полярный параметр p:

$$\varepsilon=r_0/t,\quad p=t(1-\varepsilon^2)/2.$$

Тогда для $\xi\in S(x,x^0,t)$

$$r=p(1-\varepsilon\cos\theta)^{-1}. \tag{19}$$

Запишем уравнение (17) в виде

$$\int\limits_{|\nu|=1} r^2 c_1(x^0 + rQ\nu)\, d\omega = g_2(p, \varepsilon, \varphi_0),$$
$$0 \le p < \infty, \quad 0 \le \varepsilon < 1, \quad 0 \le \varphi_0 \le 2\pi. \tag{20}$$

В этом уравнении r определяется равенством (19), а функция g_2 выражением

$$g_2(p, \varepsilon, \varphi_0) = \frac{32p^2}{1-\varepsilon^2} g_1 \left(x^0 + \frac{2\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\nu_0, \frac{2p}{1-\varepsilon^2} \right).$$

Применим к обеим частям равенства (20) оператор M:

$$Mg_2 \equiv p\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int\limits_0^p g_2(z, \varepsilon, \varphi_0)\frac{dz}{z}.$$

Возможность его использования и результат применения следуют из цепочки равенств

$$\begin{aligned} Mg_2 &= p\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int\limits_0^p \frac{dz}{z} \int\limits_{|\nu|=1} r^2 c_1(x^0 + rQ\nu)\Big|_{r=z(1+\varepsilon\cos\theta)^{-1}} d\omega \\ &= p\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int\limits_{|\nu|=1} \int\limits_0^p r^2 c_1(x^0 + rQ\nu)\Big|_{r=z(1+\varepsilon\cos\theta)^{-1}} \frac{dz}{z}\, d\omega \\ &= p\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int\limits_{|\nu|=1} \int\limits_0^{p(1+\varepsilon\cos\theta)^{-1}} r c_1(x^0 + rQ\nu)\, dr d\omega \\ &= \int\limits_{|\nu|=1} r^3 \cos\theta c_1(x^0 + rQ\nu)\, d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, применение оператора M к равенству (20) приводит к появлению под знаком интеграла множителя $r\cos\theta$.

Поэтому повторное использование k раз оператора M приведет к появлению множителя $(r\cos\theta)^k$:

$$M^k g_2 = \int\limits_{|\nu|=1} r^{k+2}\cos^k\theta c_1(x^0 + rQ\nu)\,d\omega, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Положим в этих равенствах $\varepsilon = 0$. Тогда $r = p = t/2$ и интегралы по эллипсоидам $S(x, x^0, t)$ переходят в интегралы по сферам $|\xi - x^0| = t/2$. Так как при этом

$$r\cos\theta = \left(\xi_1 - x_1^0\right)\cos\varphi_0 + \left(\xi_2 - x_2^0\right)\sin\varphi_0,$$

то равенства (21) при $\varepsilon = 0$ можно записать в виде

$$\int\limits_{|\xi - x^0| = t/2} c_1(\xi)\left[\left(\xi_1 - x_1^0\right)\cos\varphi_0 + \left(\xi_2 - x_2^0\right)\sin\varphi_0\right]^k dS_\xi$$
$$= M^k g_2|_{\varepsilon=0}, \quad k = 0, 1, 2\ldots,\ t \geq 0,\ 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi. \tag{22}$$

В силу произвольности величины φ_0 отсюда находятся величины

$$\int\limits_{|\xi - x^0| = t/2} c_1(\xi)\left(\xi_1 - x_1^0\right)^n\left(\xi_2 - x_2^0\right)^m dS_\xi = g_{nm}, \qquad n, m = 0, 1, 2\ldots, \tag{23}$$

которые при фиксированной сфере $|\xi - x^0| = t/2$ образуют полную систему моментов четной по x_3 функции $c_1(x)$. Отсюда и вытекает справедливость сформулированной выше теоремы.

Из моментов g_{nm}, заданных формулой (23), можно сконструировать на сфере $|\xi - x^0| = t/2$ систему коэффициентов Фурье по сферическим функциям и построить $c_1(\xi)$ в виде ряда Фурье.

Возможна другая модификация постановки задачи об определении функции $c_1(x)$, использующая уравнение (17). Пусть S — плоскость $x_3 = 0$, а x^0 — переменная точка этой плоскости. Рассмотрим случай, когда $x = x^0$. Тогда поверхности $S(x^0, x^0, t)$ представляют сферы $|\xi - x^0| = t/2$ и уравнение (17) принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\xi - x^0| = t/2} c_1(\xi)\,d\omega = 8\pi g_1(x, t), \quad x \in S,\ t \geq 0. \tag{24}$$

Возникает задача об определении функции $c_1(x)$ по ее сферическим средним, когда центр сфер пробегает множество точек фиксированной плоскости, а радиус сфер произволен.

9.3. Общая схема исследования обратных задач для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим вопросы, связанные с единственностью и устойчивостью решений обратной динамической задачи. Эти два вопроса оказываются тесно связанными с линейными задачами определения правой части дифференциального уравнения.

Изучим задачу (1)–(3) из п. 9.2 в несколько уточненной постановке. Пусть все коэффициенты оператора L известны вне некоторой замкнутой области $\Omega \subset D$ и неизвестны в Ω. Их требуется найти по дополнительной информации (3) п. 9.2. Будем предполагать, что f — вектор-функция и ее размерность совпадает с числом неизвестных коэффициентов оператора L (в данном случае их 10, учитывая симметрию коэффициентов при старших производных: $a_{ij} = a_{ji}$). В соответствии с этим функции u, g также являются векторными. Обозначим упорядоченный набор коэффициентов оператора L через

$$q = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, c)$$

и через Q некоторое множество, состоящее из функций $q(x)$. Будем предполагать, что $q(x)$, $f(x,t)$ имеют производные достаточно высокого порядка.

При изучении вопроса об устойчивости по данным обратной задачи нужно рассмотреть некоторое множество G, состоящее из функций $g(x,t)$, и оценить для любых двух его элементов некоторую норму разности решений обратных задач, отвечающих этим элементам, через норму разности элементов из G. В соответствии с этим обозначим через $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ два произвольных элемента из G. Пусть $(u^{(1)}, q^{(1)})$, $(u^{(2)}, q^{(2)})$ — отвечающие им решения задачи (1)–(3) в п. 9.2, а

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \tilde{u}, \quad q^{(1)} - q^{(2)} = \tilde{q}, \quad g^{(1)} - g^{(2)} = \tilde{g}.$$

Кроме того, обозначим через $L^{(i)}$ оператор, отвечающий $q = q^{(i)}$, $i = 1, 2$, через $\widetilde{L}$ — оператор, соответствующий $q = \tilde{q}$. Для функций $\tilde u$, $\tilde q$, $\tilde g$ получаем задачу

$$\tilde u_{tt} - L^{(1)}\tilde u = \tilde q(x)\Phi(x,t), \tag{1}$$

$$\tilde u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\tilde u(x,t) = \tilde g(x,t), \quad x \in S,\ t \ge 0. \tag{3}$$

Здесь $\Phi(x,t)$ — матрица, определяемая равенством

$$\tilde q(x)\Phi(x,t) = \widetilde L u^{(2)}, \quad \Phi(x,t) = (\Phi_{ij},\, i,j = 1,\ldots,10). \tag{4}$$

Если задача (1)–(3) об определении $\tilde q(x)$ допускает оценку устойчивости, равномерную по отношению к множеству Q, то эта же оценка устойчивости справедлива и для обратной задачи (1)–(3) в п. 9.2. Равномерность оценки задачи (1)–(3) относительно множества Q необходима, так как от $q^{(1)} \in Q$ зависит оператор $L^{(1)}$, а от $q^{(2)} \in Q$ — матрица Φ. Заметим, что оценка устойчивости при этом носит условный характер, так как предполагает принадлежность решения обратной задачи к множеству Q. Таким образом, необходимость получения оценки устойчивости задачи (1)–(3) в 9. 7.2 приводит к задаче определения правой части специального вида, схожей с задачей в п. 9.2, возникшей при линеаризации постановки обратной задачи. Это лишний раз подтверждает тезис о том, что линейная часть оператора обратной задачи сохраняет основные черты исходной задачи. Отметим также, что вопрос о единственности решения обратной задачи сводится к вопросу об однозначности решения задачи (1)–(3). В самом деле, если функция $\tilde g \equiv 0$ отвечает $\tilde q \equiv 0$, то это означает, что $g^{(1)} = g^{(2)}$ соответствует $q^{(1)} = q^{(2)}$.

Для случая, когда $f(x,t)$ является обобщенной функцией, задача (1)–(3) из п. 9.2 и соответствующая ей задача (1)–(3) настоящего пункта (напомним, что Φ выражается только через функцию $u^{(2)}(x,t)$, которая сама зависит от $f(x,t)$) исследованы лишь в специальных классах функций.

В случае гладких функций $f(x,t)$, удовлетворяющих некоторым дополнительным предположениям, исследование может быть проведено до конца. Приведем результаты, полученные в работе [39].

Лемма 1. *Пусть* $\det \Phi_{tt}(x,0) \ne 0,\ x \in \Omega.$ *Тогда исследование вопросов единственности и устойчивости по данным* (3) *обратной задачи* (1)–(3) *в п.* 9.2 *на множестве* Q *сводится к исследованию аналогичных вопросов для задачи определения векторной функции* $\varphi(x)$, $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \Omega$, *из соотношений*

$$v_{tt} - Lv = \varphi(x)R(x,t), \tag{5}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \varphi(x), \tag{6}$$

$$v(x,t) = h(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

в которых L *— заданный оператор,* $q \in Q$, $R(x,t)$, $h(x,t)$ *— заданные функции,* R *— квадратная матрица.*

□ Заметим, что

$$u^{(2)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad u_{tt}^{(2)}\big|_{t=0} = f(x,0). \tag{8}$$

Поэтому условие $\det \Phi_{tt}(x,0) \neq 0$, $x \in \Omega$, есть легко проверяемое условие на функцию $f(x,0)$.

Продифференцировав равенства (1), (3) три раза по переменной t, обозначим

$$\tilde{u}_{ttt} = v, \quad \varphi(x) = \tilde{q}\Phi_{tt}(x,0),$$
$$R(x,t) = \Phi_{tt}^{-1}(x,0)\Phi_{ttt}(x,t), \quad h(x,t) = \tilde{g}_{ttt}(x,t)$$

и переобозначим $L^{(1)}$ через L. Тогда, учитывая (8), получим равенства (5)–(7) и лемма доказана. ■

Возьмем в качестве Q множество бесконечно дифференцируемых функций $q(x)$ с ограниченными заданной постоянной M частными производными, для которых константа μ равномерной положительности оператора L фиксирована. Будем предполагать, что для $q \in Q$ семейство характеристических коноидов регулярно в том смысле, что бихарактеристики, выходящие из одной точки, нигде более между собой не пересекаются. При этих предположениях и достаточно гладкой функции $f(x,t)$ любое решение задачи (1)–(3) в п. 9.2 для $q \in Q$ равномерно ограничено вместе с производными в цилиндре $G_T = \{(x,t) : x \in D, 0 \leq t \leq T\}$, причем соответствующая константа зависит только от M, T, μ и функции $f(x,t)$. В связи с этим функции R, v можно считать равномерно ограниченными в G_T относительно множества Q.

Обозначим

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{\Omega} |\varphi(x)|^2\,dx, \quad \|h\|_T^2 = \max_{0\le t\le T} \int\limits_{S} |h(x,t)|^2\,dS,$$
$$\|R\|_T^2 = \max_{(x,t)\in\Omega\times[0,T]} \sum_{i,j} |R_{ij}(x,t)|^2.$$

Здесь dS — элемент площади поверхности S, $R_{ij}(x,t)$ — компоненты матрицы $R(x,t)$.

Имеют место следующие две теоремы устойчивости задачи (5)–(7).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$T > \frac{1}{\mu}\operatorname{diam} D. \tag{9}$$

Тогда существует такое $\delta > 0$*, что при выполнении условий*

$$\operatorname{diam}\Omega < \delta, \quad \|R\|_T < \delta \tag{10}$$

решение задачи (5)–(7) *удовлетворяет оценке*

$$\|\varphi\| \le C\|h\|_T^{1/2} \tag{11}$$

равномерно по отношению к множеству Q*.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (9)*. Тогда существует такое* $\delta > 0$*, что при условии*

$$\operatorname{diam} D < \delta \tag{12}$$

для функции $\varphi(x)$ *справедлива оценка* (11)*, равномерная по отношению к множеству* Q*.*

Эти теоремы имеют характер теорем «в малом», так как в них есть ограничения на малость носителя искомой функции. Доказательство их проводится по той же схеме и основано на энергетических оценках для уравнения (5).

Умножим левую и правую части равенства (5) скалярно на $2v_t(x,t)$. Левая часть получившегося равенства может быть записана в виде

$$(2v_t, [v_{tt} - Lv]) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left[(v_t, v_t) + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) - c(v,v)\right]$$
$$- 2\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_t, a_{ij}v_{x_j}) - 2\sum_{i=1}^{3}\left(b_i - \sum_{j=1}^{3}(a_{ij})_{x_j}\right)(v_t, v_{x_i}).$$

Обозначим через

$$I(t) = \int\limits_{t=\mathrm{const}} \left[(v_t, v_t) + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) - c(v,v)\right] dv \qquad (13)$$

интеграл по сечению области $G_T = D \times [0,T]$ плоскостью $t = \mathrm{const}$. Заметим, что квадратичная форма, стоящая в (13) под знаком интеграла, положительна, если $-c > 0$. Будем считать, что последнее условие выполнено. Заметим, что на самом деле оно не ограничивает общности, так как выполнения его всегда можно добиться с помощью замены функции v на новую функцию $\tilde{v} = ve^{\lambda t}$ при соответствующем выборе числового параметра λ. При этом, правда, появляется в операторе L член, содержащий первую производную по переменной t. Однако его наличие несущественно для метода энергетических оценок. Проинтегрируем обе части равенства (5), умноженного скалярно на $2v_t$, по части цилиндра G_T, заключенной между сечениями $t = t_1$, $t = t_2$, $t_2 > t_1$. Используя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$I(t_2) - I(t_1) = 2\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{S} \left(v_\tau, \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} v_{x_i} \cos(\widehat{n, x_j})\right) dS$$
$$+ 2\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{D} \left[(v_\tau, \varphi R) + \left(v_\tau, \sum_{i=1}^{3}\left(b_i - \sum_{j=1}^{3}(a_{ij})_{x_j}\right) v_{x_i}\right)\right] dx.$$

Здесь n — направление внешней нормали к S. Так как $v_t|_S = h_t$, а v_{x_i} на S ограничены равномерно относительно Q, то, используя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\left| 2\int\limits_S \left(v_\tau, \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} v_{x_i} \cos(\widehat{n, x_j}) \right) dS \right| \le C_1 \|h_t\|_T.$$

Кроме того,

$$2|(v_\tau, \varphi R)| \le (v_\tau, v_\tau) + (\varphi R, \varphi R) \le |v_\tau|^2 + \|R\|_T^2 |\varphi|^2.$$

Поэтому

$$2\left| \int\limits_D (v_\tau, \varphi R)\, dx \right| \le I(\tau) + \|R\|_T^2 |\varphi|^2.$$

Аналогично

$$2\left| \int\limits_D \left(v_t, \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{3} (a_{ij})_{x_j} \right) v_{x_i} \right) dx \right| \\ \le \int\limits_D \left[|v_t|^2 + \left| \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{3} (a_{ij})_{x_j} \right) v_{x_i} \right|^2 \right] dx \le C_2 I(t)$$

с некоторой достаточно большой константой C_2. Ее величина зависит только от оценки b_i, $(a_{ij})_{x_j}$ в области D и константы μ.

Из полученных оценок легко вытекает оценка производной от I по параметру t:

$$\left| \frac{d}{dt} I(t) \right| \le C_1 \|h_t\|_T + \|R\|_T^2 \|\varphi\|^2 + C_3 I(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{14}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(I(t)e^{-C_3 t}) \le \big(C_1\|h_t\|_T + \|R\|_T^2 \|\varphi\|^2\big) e^{-C_3 t},$$
$$I(t) \le \big[I(0) + \big(C_1\|h_t\|_T + \|R\|_T^2\|\varphi\|^2\big)t\big] e^{C_3 t}, \quad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Оценка (15) является обычной энергетической оценкой решения, используемой при исследовании граничных задач. Для наших целей она особенного интереса не представляет. Более интересной является оценка снизу для $I(t)$, вытекающая из оценки производной $I'(t)$ снизу:

$$\frac{d}{dt}(I(t)e^{C_3 t}) \geq -\big(C_1\|h_t\|_T + \|R\|_T^2\|\varphi\|^2\big)e^{C_3 t}.$$

Отсюда

$$I(t)e^{C_3 t} \geq I(0) - \big(C_1\|h_t\|_T + \|R\|_T^2\|\varphi\|^2\big)te^{C_3 t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Полагая здесь $t = T$, находим

$$I(0) \leq \big[I(T) + T\big(C_1\|h_t\|_T + \|R\|_T^2\|\varphi\|^2\big)\big]e^{C_3 T}. \tag{16}$$

Но в силу данных (6) $I(0) = \|\varphi\|^2$. Поэтому неравенство (16) можно записать в виде

$$\|\varphi\|^2\big(1 - \|R\|_T^2 T e^{C_3 T}\big) \leq [I(T) + TC_1\|h_t\|_T]e^{C_3 T}.$$

Отсюда при условии

$$\|R\|_T^2 T e^{C_3 T} < 1 \tag{17}$$

можно получить неравенство для $\|\varphi\|$ вида

$$\|\varphi\|^2 \leq C_4(I(T) + TC_1\|h_t\|_T). \tag{18}$$

Условие (17) заведомо выполняется, если выполено условие (10) на функцию R с достаточно малым δ либо в теореме 2 величина T мала и согласована с малостью δ так, что верно (9). Условия теорем позволяют перейти к неравенству (18) с универсальной постоянной C_4, равномерной по отношению к множеству Q.

Оценим теперь $I(T)$. Для этого представим решения уравнения (5) с данными Коши (6) в виде $v = v_1 + v_2$, где v_1 — решение неоднородного уравнения (5) с нулевыми данными Коши, а v_2 — решение однородного уравнения, отвечающего (5) с данными (6). Обозначим через $I_1(T)$, $I_2(T)$ интегралы (13) при $t = T$, соответствующие функциям v_1 и v_2. Очевидно, что

$$I(T) \leq 2[I_1(T) + I_2(T)].$$

Интеграл $I_1(T)$ можно оценить так же, используя метод энергетических оценок решения задачи Коши. Для этого нужно построить куполообразную область, ограниченную сверху пространственно подобной поверхностью, содержащей в себе верхнее основание цилиндра G_T, а снизу плоскостью $t = 0$ (см. рис. 5).

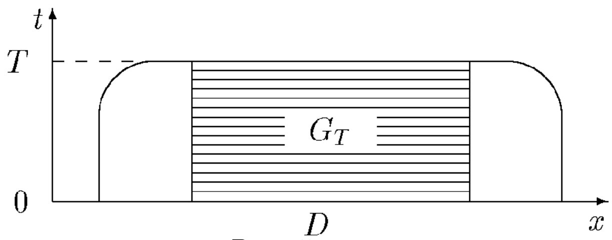


Рис. 5

Энергетические оценки для сечений этой области плоскостями $t = \text{const}$ имеют вид оценки (15), в которой нужно опустить член, содержащий h_t. При этом, вообще говоря, изменится константа C_3, так как сечения куполообразной области плоскостями $t = \text{const}$ содержат в себе соответствующие сечения области G_T как часть. Оценка для $I_1(T)$ имеет вид

$$I_1(T) \le \|R\|_T^2 \|\varphi\|^2 e^{C_3' T}. \tag{19}$$

Здесь учтено, что в силу нулевых данных Коши $I_1(0) = 0$. Для оценки $I_2(T)$ используем представление решения v_2 через фундаментальное решение $H(x, t - \tau, \xi)$:

$$v_2(x,t) = \int\limits_{\Omega} H(x,t,\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Для $x \in D$, $\xi \in \Omega$ и значений t, близких к T, функция $H(x,t,\xi)$ представляет собой обычную регулярную функцию, ибо коноид $t = T - \tau(x,\xi)$, на котором сосредоточена сингулярная часть функции, в случае (9) пересекает плоскость $t = 0$ вне области D: поверхность $\tau(x,\xi) = T$ содержит в себе область D для любых $\xi \in \Omega$. Поэтому функция $H(x,t,\xi)$ в указанной области изменения переменных ограничена вместе с частными производными первого порядка равномерно по отношению к Q. Используя формулу (20) для оценки функции v_2 и ее производных, входящих в интеграл $I_2(T)$, находим

$$I_2(T) \le C_6 \|\varphi\|^2,$$

где

$$C_6 = \int\limits_D \left\{ \int\limits_\Omega \left(H_t^2 - cH^2\right) d\xi \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) \biggl(\int\limits_\Omega H_{x_i}^2 \, d\xi \biggr)^{1/2} \biggl(\int\limits_\Omega H_{x_j}^2 \, d\xi \biggr)^{1/2} \right\}_{t=T} dx$$
$$\le C_7 (d(D) d(\Omega))^3,$$

здесь $d(D)$, $d(\Omega)$ — диаметры областей D, Ω. Из полученных оценок для $I_1(T)$, $I_2(T)$ следует, что

$$I(T) \ge C_8 \|\varphi\|^2,$$

где $C_8 \to 0$, если $\|R\|_T \to 0$, $d(\Omega) \to 0$ или если $T \to 0$, $d(D) \to 0$. Из неравенства (18) вытекает тогда оценка (9).

Из оценки (9) следует и теорема единственности: если $h = 0$, то $\varphi = 0$, $x \in \Omega$.

9.4. Связь между обратными задачами для уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов

Между решениями задач математической физики, описывающих различные физические процессы, можно установить взаимно однозначное соответствие. Этот факт замечен давно. Особенно просто это соответствие выводится для уравнений с постоянными коэффициентами при использовании преобразований Фурье, Лапласа. В работе К. Г. Резницкой [37] впервые было указано на полезность связи между решениями различных типов при рассмотрении обратных задач. Оказывается возможным при исследовании обратных задач для уравнений параболического или эллиптического типов переходить к исследованию некоторых эквивалентных им задач гиперболического типа. Иногда, впрочем, оказывается полезным и обратный переход. Изложим суть этого метода на конкретных примерах постановок обратных задач.

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$, ограниченной поверхностью S, рассматривается смешанная задача для уравнения параболического типа

$$u_t = Lu + f(x,t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(x,t). \tag{1}$$

Здесь L — равномерно эллиптический оператор с непрерывными коэффициентами, зависящий только от переменной x; n — конормаль к S. Поставим в соответствие задаче (1) задачу для уравнения гиперболического типа

$$\tilde{u}_{tt} = L\tilde{u} + \tilde{f}(x,t),\ \tilde{u}|_{t=0} = \varphi(x),\ \tilde{u}_t|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right|_S = \widetilde{\psi}(x,t). \tag{2}$$

Пусть функции $\tilde{f}$, $\widetilde{\psi}$ — гладкие функции своих аргументов, растущие при $t \to \infty$ не быстрее, чем $Ce^{\alpha t}$, связаны с функциями f, ψ соотношениями

$$f(x,t) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(x,t)G(t,\tau)\,d\tau, \quad \psi(x,t) = \int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}(x,t)G(t,\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

в которых

$$G(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau/4t}$$

— решение уравнения теплопроводности

$$G_t = G_{\tau\tau}.$$

Тогда

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,\tau)G(t,\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} u_t = \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,\tau)G_t(t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,\tau)G_{\tau\tau}(t,\tau)\,d\tau \\ = (\tilde{u}G_\tau - \tilde{u}_\tau G)|_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \int\limits_0^\infty \tilde{u}_{\tau\tau}(x,\tau)G(t,\tau)\,d\tau \\ = \int\limits_0^\infty \tilde{u}_{\tau\tau}(x,\tau)G(t,\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

$$Lu = \int\limits_0^\infty G(t,\tau) L\tilde{u}(x,\tau)\,d\tau.$$

Поэтому при $t > 0$

$$u_t - Lu - f = \int\limits_0^\infty (\tilde{u}_{\tau\tau} - L\tilde{u} - \tilde{f}) G(t,\tau)\,d\tau = 0.$$

С другой стороны,

$$u|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,\tau) G(t,\tau)\,d\tau$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x, 2\sqrt{t}\,\tau) e^{-\tau^2}\,d\tau = \tilde{u}(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \int\limits_0^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\Big|_S G(t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}(x,\tau) G(t,\tau)\,d\tau = \psi(x,t).$$

Таким образом, формула (4) дает решение задачи (1) через решение задачи (2), если данные этих задач связаны формулами (3). Известно, что решение задачи (1) единственно при довольно общих предположениях об операторе L и поверхности S и дается формулой (4). Заметим, что равенство (4) обратимо при каждом фиксированном x, так как его можно представить в форме преобразования Лапласа с параметром преобразования $p = 1/4t$:

$$u(x, 1/4p) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-zp} \tilde{u}(x, \sqrt{z}) \frac{dz}{\sqrt{z}}. \tag{5}$$

Поэтому формула (4) устанавливает между решениями задач (1), (2) взаимно однозначное соответствие.

Предположим теперь, что для уравнения (1) рассматривается обратная задача, заключающаяся в определении $f(x,t)$ или некоторого коэффициента q, входящего в оператор L, по решению задачи (1), заданному в точках S:

$$u|_S = g(x,t), \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Поставим функции $g(x,t)$ в соответствие функцию $\tilde{g}(x,t)$, $x \in S$, как решение уравнения

$$g(x,t) = \int_0^\infty \tilde{g}(x,\tau) G(t,\tau)\, d\tau, \quad x \in S,\ t \geq 0. \tag{7}$$

Функция $\tilde{g}(x,t)$ для $x \in S$ отсюда находится однозначно. Положим

$$\tilde{u}|_s = \tilde{g}(x,t), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Тогда обратная задача (1), (6) эквивалентна соответствующей обратной задаче (2), (8).

Отметим еще следующее обстоятельство. Из курса математической физики известно, что для решения задачи (2) при довольно общих предположениях о коэффициентах оператора L имеет место оценка

$$|\tilde{u}(x,t)| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Формула (4) или эквивалентная ей формула (5) показывает, что функция $u(x,t)$ является в области $t > 0$ аналитической функцией аргумента t. Поэтому функцию $g(x,t)$ в формуле (6) достаточно задать в сколь угодно малой окрестности значения $t = 0$, например в интервале $0 \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Благодаря установленной связи между обратными задачами можно перенести целый ряд результатов, полученных для гиперболических уравнений, на уравнения параболические. Это возможно во всех случаях, когда множество, на котором задаются данные обратной задачи, представляет собой цилиндр с образующими, параллельными оси t.

В частности, простейшая обратная задача для уравнения параболического типа об определении коэффициента $q(x)$, входящего в уравнение

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \tag{9}$$

по информации о решениях задачи Коши

$$u|_{t=0} = \delta(x), \tag{10}$$

заданной при $x = 0$

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad u_x|_{x=0} = f_2(t), \tag{11}$$

приводится к следующей обратной задаче:

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - q(x)\tilde{u}, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \delta(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}|_{x=0} = \tilde{f}_1(t), \quad u_x|_{x=0} = \tilde{f}_2(t).\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь функции $\tilde{f}_k$ связаны с f_k формулами

$$f_k(t) = \int\limits_0^\infty G(t,\tau)\tilde{f}_k(\tau)\,d\tau, \quad k = 1, 2.$$

В обратной задаче (9)–(11) коэффициент $q(x) \in \mathbb{C}(-\infty, \infty)$ однозначно определяется заданием функций f_1, f_2 на отрезке $[0, \delta]$, где δ — произвольное положительное число.

Перейдем теперь к уравнениям эллиптического типа. Пусть область D_0 пространства переменных x, y ($x \in \mathbb{R}^n$) имеет вид полубесконечного цилиндра с образующими, параллельными оси y:

$$D_0 = D \times \mathbb{R}^+, \quad x \in D, \quad \mathbb{R}^+ = \{y : y \geq 0\}.$$

Рассмотрим в области D_0 уравнение

$$u_{yy} + Lu + f(x,y) = 0, \tag{13}$$

в котором L — равномерно эллиптический оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, не зависящими от y. Обозначим границу области D через S. Поставим для уравнения (13) задачу, заключающуюся в отыскании решения уравнения (13), удовлетворяющего на границе D условиям

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x,y), \quad \Gamma = S \times \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

и условию убывания решения при $y \to \infty$.

Наряду с задачей (13), (14) рассмотрим задачу (12), в которой $\tilde{f}$, $\widetilde{\psi}$ связаны с f, ψ формулами

$$f(x,y) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(x,t)H(y,t)\,dt, \quad \psi(x,y) = \int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}(x,t)H(y,t)\,dt. \tag{15}$$

Здесь

$$H(y,t) = \frac{2}{\pi}\frac{y}{y^2+t^2}$$

— решение уравнения Лапласа

$$H_{tt} + H_{yy} = 0.$$

Для существования интегралов (15) предположим, что $\tilde{f}$, $\widetilde{\psi}$ ограничены. Аналогичное предположение сделаем о решении задачи (2). Тогда единственное решение задачи (13), (14) дается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,t)H(y,t)\,dt. \tag{16}$$

Покажем справедливость этой формулы в предположении, что все операции, проводимые ниже, имеют смысл.

Имеем

$$u_{yy} = \int\limits_0^\infty H_{yy}(y,t)\tilde{u}(x,t)\,dt = -\int\limits_0^\infty H_{tt}(y,t)\tilde{u}(x,t)\,dt$$

$$= (-H_t\tilde{u} + H\tilde{u}_t)\big|_{t=0}^{t=\infty} - \int\limits_0^\infty H(y,t)\tilde{u}_{tt}(x,t)\,dt = -\int\limits_0^\infty H(y,t)\tilde{u}_{tt}(x,t)\,dt,$$

$$Lu = \int\limits_0^\infty H(y,t)L\tilde{u}(x,t)\,dt.$$

Поэтому

$$u_{yy} + Lu + f = \int\limits_0^\infty (-\tilde{u}_{tt} + L\tilde{u} + \tilde{f})H(y,t)\,dt = 0.$$

В то же время

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma = \int\limits_0^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\bigg|_\Gamma H(y,t)\,dy = \int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}(x,t)H(y,t)\,dt = \psi(x,y),$$

$$u|_{y=0} = \lim_{y\to 0} \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,t) H(y,t)\, dt$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \tilde{u}(x, y\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \tilde{u}(x,0) = \varphi(x).$$

Таким образом, функция $u(x,y)$, определяемая формулой (16), действительно является решением задачи (13), (14).

При каждом фиксированном x равенство (16) однозначно обратимо как интегральное преобразование с ядром Коши. Поэтому если для эллиптического уравнения рассмотреть задачу об определении коэффициента, входящего в оператор L, по информации о решении задачи (13), (14) вида

$$u|_\Gamma = g(x,y), \tag{17}$$

то обратную задачу (13)–(17) можно свести к эквивалентной ей обратной задаче (2), (8). При этом функции g и $\tilde{g}$ связаны обратимым соответствием:

$$g(x,y) = \int\limits_0^\infty \tilde{g}(x,y) H(y,t)\, dt, \quad x \in S, \; y \in \mathbb{R}^+.$$

Из изложенного выше следует также, что переход от эллиптического уравнения к гиперболическому возможен только при соблюдении следующих двух условий: 1) область, в которой рассматривается уравнение, должна быть цилиндрической с образующими, параллельными оси y; 2) коэффициенты уравнения не должны зависеть от y. Это довольно серьезные ограничения, так как в прикладных задачах чаще всего переменные x, y равноправны.

Укажем еще на один класс обратных задач для уравнений эллиптического типа, который можно исследовать на основе сведения к обратным задачам гиперболических уравнений. Ограничимся здесь конкретным примером. Пусть для уравнения

$$\Delta u + \omega^2 c(x) u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

рассматривается задача об определении функции $f(x)$ или коэффициента $c(x) \geq c_0 > 0$ по следующей информации. Для серии частот ω_k $(k = 1, 2, \dots)$ известно решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям излучения, в точках некоторой поверхности S:

$$u(x, \omega_k) = g(x, \omega_k), \quad x \in S,\ k = 1, 2, \dots. \tag{19}$$

Уравнение (18) возникает, если рассматривать установившиеся гармонические колебания, описываемые волновым уравнением

$$c(x)v_{tt} = \Delta v + f(x)e^{i\omega t}.$$

Представляя функцию v в виде

$$v = u(x)e^{i\omega t},$$

придем к уравнению (18). В случае $c = 1$ уравнение (18) представляет собой уравнение Гельмгольца. Обратные задачи об определении $f(x)$ для уравнения Гельмгольца рассматривались в работах [12, 13]. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$c(x)w_{tt} = \Delta w + f(x)\delta(t), \quad w|_{t<0} \equiv 0. \tag{20}$$

При условии ограниченности $c(x)$, $f(x)$ решение этой задачи допускает оценку $|w| \leq Ce^{\alpha t}$. Поэтому существует преобразование Лапласа $\widetilde{w}(x, p)$ функции $w(x, t)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$, представляющее собой аналитическую функцию переменной p. При определенных условиях (например, $c = 1$, $f(x)$ — финитная функция) функция $\widetilde{w}(x, p)$ допускает аналитическое продолжение на мнимую ось $p = i\omega$. Следовательно,

$$\widetilde{w}(x, i\omega_k) = g(x, \omega_k), \quad x \in S,\ k = 1, 2, \dots.$$

Если $\omega_k \to \omega_0$, где ω_0 — внутрення точка области аналитичности функции $\widetilde{w}(x, i\omega)$, то значения $\widetilde{w}(x, i\omega_k)$ позволяют найти $\widetilde{w}(x, p)$ во всей области аналитичности, а следовательно, вычислить

$$w|_S = \tilde{g}(x, t). \tag{21}$$

В результате приходим к обратной задаче (20), (21), эквивалентной задаче (18), (19).

9.5. Задачи определения римановой метрики

Пусть в двумерном пространстве x, y задана ограниченная односвязная область D с кусочно-гладкой границей Γ, удовлетворяющей уравнениям

$$x = \xi(z),\ y = \eta(z),\ z \in [0, Z],\ \xi(0) = \xi(Z),\ \eta(0) = \eta(Z), \quad (1)$$

где z — евклидова длина кривой Γ.

Пусть, далее, элемент длины в области D определяется по формуле

$$d\tau = n(x, y)(dx^2 + dy^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Функция $n(x, y)$ из (2) принадлежат классу $\mathbb{C}^4(\bar{D})$ и $n(x, y) > 0$. Определяемые функцией $n(x, y)$ геодезические (по метрике (2)) задаются уравнениями

$$x = \varphi(x_0, y_0, \theta; \tau), \quad y = \psi(x_0, y_0, \theta; \tau), \quad (3)$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка, из которой выходит геодезическая под углом θ, параметр кривой τ имеет смысл, характеризуемый формулой (2), и измеряется по формуле

$$\tau = \int\limits_{K(x_0,y_0,x,y)} n(x, y)\, ds,$$

где $K(x_0, y_0, x, y)$ — геодезическая, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y). Функция $n(x, y)$ должна быть такой, чтобы определяемые ей геодезические удовлетворяли условиям:

а) через любые две различные точки из $\bar{D}$ проходит единственная геодезическая, концы каждой геодезической $K(\gamma, z)$ лежат на Γ и являются точками $(\xi(\Gamma), \eta(\Gamma))$ и $(\xi(z), \eta(z))$, другие точки $K(\gamma, z)$ не лежат на Γ; длины всех геодезических равномерно ограничены;

б) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{D[\varphi(x_0, y_0, \theta; \tau), \psi(x_0, y_0, \theta; \tau)]}{D(\theta, \tau)} \geq c > 0$, где c — постоянная и $(x_0, y_0) \in \bar{D}$.

Существование требуемых в условии б) производных, как будет показано ниже, следует из условий $n(x, y) \in \mathbb{C}^4(\bar{D})$, $n(x, y)>0$.

Рассматриваемая нами задача формулируется следующим образом: требуется определить функцию $n(x,y)$, если заданы расстояния в метрике (2) между любой парой точек на границе области D. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\tau(\gamma,z)=\int\limits_{K(\gamma,z)} n(x,y)\,ds,\quad ds=(dx^2+dy^2)^{1/2} \tag{4}$$

относительно $n(x,y)$ по известной функции $\tau(\gamma,z)\in\mathbb{C}^1([0,Z]\times[0,Z])$. Геодезическая $K(\gamma,z)$, соединяющая граничные точки области D, является также неизвестной. Отсюда видно, что задача (4) в отличие от задачи интегральной геометрии является нелинейной, так как здесь неизвестными будут также кривые $K(\gamma,z)$, в определении которых входит неизвестная функция $n(x,y)$. Сформулируем теперь теорему.

Теорема 1. *Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу* (1), *искомая функция $n(x,y)\in\mathbb{C}^4(\bar{D})$, $n(x,y)>0$ и, кроме того, $n(x,y)$ такова, что геодезические, определяемые метрикой* (2), *куда входит $n(x,y)$, удовлетворяет условиям* а), б), *то задача* (4) *может иметь не более одного решения и справедлива оценка устойчивости*

$$\|\tilde{n}\|_{\mathbb{L}_2(\bar{D})}\le(2\pi)^{-1/2}\|\tilde{\tau}(\gamma,z)\|_{\mathbb{L}_2([0,Z]\times[0,Z])}, \tag{5}$$

где $\tilde{n}(x,y)=n_1(x,y)-n_2(x,y)$, $\tilde{\tau}=\tau_1(\gamma,z)-\tau_2(\gamma,z)$, $n_i(x,y)$ — решение задачи (4) *с данными $\tau_i(\gamma,z)$, $i=1,2$.*

Леммы о геодезических. Введем функцию

$$\tau(x,y;x_0,y_0)=\int\limits_{K(x_0,y_0,x,y)} n(x,y)\,ds, \tag{6}$$

где $(x,y)\in\bar{D}$, $(x_0,y_0)\in\bar{D}$ и $K(x_0,y_0,x,y)$ геодезическая, соединяющая точки (x,y), (x_0,y_0).

Лемма 1. *Если $n(x,y)\in\mathbb{C}^4(\bar{D})$, $n(x,y)>C_1>0$, то уравнение геодезических в параметрической форме представимо в виде*

$$x=\varphi(x_0,y_0,\tau p,\tau q),\quad y=\psi(x_0,y_0,\tau p,\tau q), \tag{7}$$

где $(x,y)\in\bar{D}$*,* p *и* q *определяются формулами*

$$p=2n(x_0,y_0)\cos\theta,\quad q=2n(x_0,y_0)\sin\theta,$$

θ *— угол выхода геодезической из точки* (x_0,y_0)*, параметр* τ *геодезической есть расстояние между точками* (x,y) *и* (x_0,y_0) *в метрике* (2)*. Функции* φ*,* ψ *имеют непрерывные ограниченные производные по всем своим аргументам* x_0*,* y_0*,* τp*,* τq *до второго порядка включительно, причем*

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial(\tau p)}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial(\tau q)}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{2n^2(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial(\tau q)}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial(\tau p)}\right|_{\tau=0}=0.$$

Ввиду громоздкости доказательство леммы приводиться не будет. Аналогичное утверждение имеется, например, в [42].

Лемма 2. *Для того чтобы* $\frac{1}{\tau}\frac{D(x,y)}{D(\tau,\theta)}\geq c_1>0$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{D(x,y)}{D(\tau p,\tau q)}\geq c_2>0$*, где* c_1 *и* c_2 *— некоторые постоянные.*

□ Из леммы 1 нетрудно получить

$$\frac{1}{\tau}\frac{D(x,y)}{D(\tau,\theta)}=\frac{D(x,y)}{D(\tau p,\tau q)}\cdot 4n^2(x_0,y_0).$$

Отсюда утверждение леммы очевидно. ■

Отметим, что из леммы 1 следует

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(\tau p,\tau q)}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{4n^2(x_0,y_0)}.$$

В дальнейшем понадобится методика доказательства теоремы единственности задачи интегральной геометрии, в которой семейством кривых $K(\gamma,z)$ являются геодезические (7). Если при доказательстве этой теоремы за семейство кривых $K(\gamma,z)$ возьмем наше семейство геодезических, а вместо параметра s кривых возьмем τ, то, как нетрудно проверить, можно получить все совершенно аналогичные утверждения. Заметим только, что при доказательстве леммы 1 в п. 8.4 в силу представления функций φ и ψ в форме (7) достаточно, чтобы эти функции были дифференцируемы только до второго порядка включительно.

Итак, для задачи

$$v(\gamma,z)=\int\limits_{K(\gamma,z)}u\,ds \tag{8}$$

получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу* (1). *Семейство кривых $K(\gamma, z)$ является геодезическими, которые определяются данной функцией $n(x, y) \in \mathbb{C}^4(\bar{D})$ и $n(x, y) > 0$ с помощью метрики* (2), *и $n(x, y)$ такова, что выполняются условия* а), б) *для геодезических. Тогда в классе функций $u(x, y) \in \mathbb{C}^2(\bar{D})$ задача интегральной геометрии* (8) *может иметь не более одного решения и справедлива оценка устойчивости*

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbb{L}_2(\bar{D})} \leq (2\pi)^{-1/2} \|\tilde{v}_z(\gamma, z)\|_{\mathbb{L}_2([0,Z]\times[0,Z])}.$$

Если линеаризовать задачу (4), то получим задачу (8). Таким образом, теорему 2 можно считать теоремой единственности для задачи (4) в линеаризованной постановке.

Доказательство теоремы 1. Будем считать пока, что граница Γ области D является гладкой. Введем функцию

$$\tau(x, y, z) = \int\limits_{K(x,y,z)} n\, ds, \tag{9}$$

где $K(x, y, z)$ — часть геодезической, соединяющей точки (x, y) и $(\xi(z), \eta(z))$, $(x, y, z) \in \Omega = \bar{D} \times [0, Z]$, $n(x, y)$ — некоторое решение задачи (4). Функция $\tau(x, y, z)$ обладает аналогичными дифференциальными свойствами, как и функция $w(x, y, z)$ в задаче интегральной геометрии п. 8.4. Нетрудно видеть, что $\tau(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x, y). \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по z, получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение для $\tau(x, y, z)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(\tau_x^2 + \tau_y^2\big) = 0. \tag{11}$$

Из данных задачи (4) следует, что функция $\tau(x, y, z)$ должна удовлетворять условию

$$\tau(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau(\gamma, z), \quad \tau(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \tag{12}$$

Если выполнены условия теоремы относительно $n(x, y)$, то задача (4) эквивалентна задаче (11), (12) при выполнении дифференциальных свойств для $\tau(x, y, z)$, аналогичных 1), 2) из п. 8.4.

Уравнение (11) является нелинейным гиперболо-параболическим уравнением с двумя семействами бихарактеристик. Одно семейство образуют геодезические $K(\gamma, z)$, другое семейство — прямые

$$x = x_0, \quad y = y_0, \tag{13}$$

где $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Данные задачи (12) заданы на всей поверхности тора Ω. Эта поверхность, как нетрудно заметить, является характеристической поверхностью, состоящей из бихарактеристик семейства (13).

Для уравнения (11) можно поставить другую задачу. Для этого зададим следующие данные:

$$\tau(x, y, z)|_{z=0} = f(x, y), \quad \tau(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \tag{12$'$}$$

Задача (11), (12$'$) решается известным образом. Эту задачу обычно называют прямой, в то время как задачу (4) или эквивалентную ей задачу (11), (12) называют обратной.

Пусть имеем решения $\tau_i(x, y, z)$ уравнения (11), удовлетворяющие на границе Ω соответственным условиям

$$\tau_i(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau_i(\gamma, z), \quad \tau_i(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \quad i = 1, 2.$$

Подставляя $\tau_i(x, y, z)$ в (11) и вычитая соответственные выражения одно из другого, получим

$$\begin{aligned} Lw \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial y}\right] \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial y}\right] = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $w(x, y, z) = \tau_1(x, y, z) - \tau_2(x, y, z)$. Аналогично, из (12) имеем

$$w(\gamma, z) = w(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau_1(\gamma, z) - \tau_2(\gamma, z). \tag{15}$$

Используя известные формулы вариационного исчисления

$$(\tau_i)_x = n_i \cos\theta_i, \quad (\tau_i)_y = n_i \sin\theta_i, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

где $(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ есть касательный вектор в точке (x, y) к геодезической, соединяющей (x, y) и $(\xi(z), \eta(z))$, перепишем (14) в виде

$$\frac{1}{n_1}Lw \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta_1\right) + \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta_2\right) = 0. \quad (17)$$

Далее, из (17) имеем

$$\frac{2}{n_1}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta_1\right)Lw \equiv \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta_1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta_1 - \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta_1\right)\right]_z - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x + \frac{1}{2}\left[n_2^2\sin 2(\theta_1 - \theta_2)\right]_z - \left[n_2^2(\theta_1 - \theta_2)\right]_z = 0. \quad (18)$$

Последние два слагаемых в (18) получаются следующим образом:

$$2\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta_1\right)\frac{n_2}{n_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta_2\right)$$
$$= 2[-(n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2)\sin\theta_1 + (n_1\sin\theta_1 - n_2\sin\theta_2)\cos\theta_1]$$
$$\times \frac{n_2}{n_1}\frac{\partial}{\partial z}[(n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2)\cos\theta_2 + (n_1\sin\theta_1 - n_2\sin\theta_2)\sin\theta_2]$$
$$= 2n_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\frac{\partial}{\partial z}\cos(\theta_1 - \theta_2) = -2n_2^2\sin^2(\theta_1 - \theta_2)\cdot(\theta_1 - \theta_2)_z - n_2^2[1 - \cos 2(\theta_1 - \theta_2)](\theta_1 - \theta_2)_z = \frac{1}{2}\left[n_2^2\sin 2(\theta_1 - \theta_2)\right]_z - \left[n_2^2(\theta_1 - \theta_2)\right]_z.$$

Остальные члены в (18) получаются аналогично, как и в задаче интегральной геометрии п. 8.4.

Функции w_{xz}, w_{yz}, w_{xy} и $[\theta(x, y, z)]_z$ имеют особенности типа $[(\xi(z) - x)^2 + (\eta(z) - y)^2]^{-1/2}$. Далее совершаем аналогично, как и в задаче интегральной геометрии п. 8.4, преобразования с формулой (18), т. е. отделяем от множества Ω ε-окрестность особой кривой $x = \xi(z)$, $y = \eta(z)$, $z \in [0, Z]$, интегрируем по оставшемуся множеству равенство (18), применяя при этом формулу Остроградского, и переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega = -\int_0^L\int_0^L \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \gamma}\, dz d\gamma. \quad (19)$$

Используя

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = (n_1 - n_2)^2 + 4n_1 n_2 \sin^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (20)$$

$(\theta_1)_z \geq 0$ и неравенство Коши, из (19) получаем оценку (5).

В случае, если граница Γ кусочно-гладкая, доказательство проводится аналогично, как и в задаче интегральной геометрии п. 8.4. Доказательство теоремы завершено.

Любопытно отметить, что оценка (5) совпадает с оценкой устойчивости задачи интегральной геометрии п. 8.4.

Формулы для среднеквадратического значения $\boldsymbol{n(x, y)}$ по области $\boldsymbol{D}$. Используя (16), перепишем (11) в виде

$$L\tau \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\tau}{\partial y}\sin\theta\right) = 0. \quad (21)$$

Для $2\left(-\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial\tau}{\partial y}\cos\theta\right) L\tau$ имеем аналогичное (18) выражение, только без двух последних слагаемых. Совершая теперь аналогичные предыдущему преобразования и используя равенство (10) вместо (20), получим

$$2\pi \iint_D n^2\, dxdy = -\int_0^L\int_0^L \frac{\tau(\gamma, z)}{\gamma}\frac{\partial\tau(\gamma, z)}{\partial z}\, d\gamma dz. \quad (22)$$

Из (22) нетрудно получить среднеквадратичное значение $n(x, y)$ по области D. Правую часть в (22) можно представить в другой форме, а именно, выразить через значения $n(x,y)$ на границе области D и через угол между геодезической на границе Γ и касательной в той же точке к границе области D.

Пусть $\beta(z)$ — угол, определяющий направление касательной к границе Γ области D в точке $(\xi(z),\eta(z))$ в сторону возрастания z, а $\alpha(z,\gamma)$ — угол, определяющий направление касательной к геодезической, соединяющей точки $(\xi(z),\eta(z))$ и $(\xi(\gamma),\eta(\gamma))$, в точке $(\xi(z),\eta(z))$. Тогда нетрудно получить

$$\frac{\partial\tau(\gamma,z)}{\partial z} = n(\xi(z),\eta(z))\cos[\alpha(z,\gamma)-\beta(z)], \tag{23}$$

$$\frac{\partial\tau(\gamma,z)}{\partial\gamma} = n(\xi(\gamma),\eta(\gamma))\cos[\alpha(z,\gamma)-\beta(\gamma)] \tag{24}$$

и вместо (22) получаем

$$2\pi\iint\limits_D n^2\,dxdy = -\int\limits_0^L\int\limits_0^L n(\xi(z),\eta(z))n(\xi(z),\eta(z)) \times\cos[\alpha(z,\gamma)-\beta(z)]\cos[\alpha(z,\gamma)-\beta(\gamma)]\,dzd\gamma. \tag{25}$$

В заключение приведем формулы перехода от данной функции $\tau(\gamma,z)$ к величинам, использованным в (25):

$$n(\xi(z),\eta(z)) = \lim_{\gamma\to z}\frac{\tau(\gamma,z)}{|z-\gamma|},$$

$\alpha(z,\gamma)$ находится из (23).

10. Несколько направлений в теории некорректных задач, обратных задач и приложений

В настоящее время теории некорректных задач, обратных задач и приложениям этих теорий посвящена весьма обширная литература. Для изложения с достаточной полнотой всех достижений по данным направлениям потребовалась бы монография, по объему в несколько раз превышающая настоящую. В данном дополнении мы охарактеризуем результаты по нескольким направлениям, связанным по содержанию с нашей частью работы.

1. Приложения. Как было отмечено в [24, 46, 49], первые прикладные задачи, приводящие к некорректным задачам, были связаны с интерпретацией данных геофизических наблюдений.

Мы отметили две области прикладных задач, возникших в связи с интерпретацией данных измерений. Первая — интерпретация данных астрофизики. Работы в этой области изложены в монографии [10]. Одна из задач, изложенных в [10] — это задача интерпретации для ряда звезд кривых блеска. Как известно, для некоторых звезд светимость периодически изменяется. Это явление связывают с прохождением спутника звезды между звездой и земным наблюдателем. Для определения параметров спутника получается определенное интегральное уравнение первого рода, для которого с помощью регуляризации строится алгоритм численного решения.

Вторая область — интерпретация томографических данных в газодинамике и физике плазмы — изложена в работе [36]. В [34] изложены принципы использования томографических данных в сейсморазведке и сейсмологии. В работе [26] классическая задача, связанная с интерпретацией томографических данных — задача обращения преобразования Радона — рассмотрена с точки зрения теории некорректных задач. В этой же монографии рассмотрены новые постановки задач сейсморазведки — задачи определения строения геологических тел.

2. Общая теория некорректных задач. Отметим направления в общей теории некорректных задач, которые не нашли или почти не нашли отражения в нашей монографии.

Первое — вариационные методы. Об этих методах кратко говорится в [49] и главе 6. В [31] дано подробное изложение ряда вопросов, связанных с применением вариационных методов.

Второе — итерационные методы. Мы ограничились изложением одного итерационного метода для линейных операторных уравнений. В монографиях [8, 44] изложен широкий круг вопросов, связанных с применением итерационных методов к решению нелинейных некорректных задач. В этих же монографиях рассмотрены вопросы дискретизации некорректных задач.

3. Задачи аналитического продолжения. Эти задачи занимают заметное место в теории некорректных задач. В монографии [29] изложены результаты по вопросам задач аналитического продолжения, рассматриваемых как некорректные задачи. В частности, приведены оценки условной устойчивости и формулы типа Карлемана, являющиеся регуляризующими для этих задач. Это направление в дальнейшем получило значительное развитие — результаты были получены для аналитических функций нескольких переменных и в задачах Коши для решений эллиптических уравнений в пространствах различной размерности [1, 17, 45, 50, 51].

4. Уравнения Вольтерра и эволюционные уравнения. В главах 6, 7 части «Некорректные задачи» изложены результаты по интегральным операторным уравнениям Вольтерра и по эволюционным уравнениям. Значительная серия результатов по этим направлениям содержится в монографиях [6, 15].

5. Интегральная геометрия. Оригинальное направление в интегральной геометрии изложено в монографии [60].

6. Обратные задачи. В главе 9 при изложении вопросов теории обратных задач мы следовали в основном монографии [40]. Существенные достижения в области обратных коэффициентных задач были достигнуты при исследовании задач определения коэффициентов в системе уравнений Максвелла [41]. Ряд важных результатов теории обратных задач изложен в монографии [54].

Классическое направление в теории обратных задач — обратные задачи теории ньютоновского потенциала — получило развитие в работах ряда авторов и изложено в монографии [53].

Многие обратные задачи сводятся к вольтерровским операторным уравнениям, линейным и нелинейным. Из соответствующих результатов общей теории вольтерровских уравнений в банаховых пространствах получаются теоремы единственности и априорные оценки для обратных задач. Результаты по этому направлению изложены в монографии [7].

Литература к части «Теория операторов»

1. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. **Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.** Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
3. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.
4. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
5. **Балакришнан А. В.** Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
6. **Баруча-Рид А.Т.** Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.
7. **Биллингсли П.** Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1989.
8. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984.
9. **Бремерман Г.** Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
10. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
11. **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965.
12. **Бурбаки Н.** Алгебра. Главы I–III. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Бурбаки Н.** Общая топология. Главы I–X. М.: Наука, 1968–1975.
14. **Бурбаки Н.** Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
15. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Книга IV. М.: Наука, 1967, 1970, 1977.
16. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
17. **Варден Б. Л. ван дер.** Алгебра. М.: Наука, 1976.
18. **Ватанабэ С., Икэда И.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.

19. **Вентцель А. Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996.

20. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

21. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

22. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1970.

23. **Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.** Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961.

24. **Годбийон К.** Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

25. **Гренандер У.** Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965.

26. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

27. **Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

28. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Части 1–3. М.: Мир, 1962–1974.

29. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1986.

30. **Зуланке Р., Винтген П.** Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.

31. **Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

32. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

33. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

34. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962.

35. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

36. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

37. **Кац М.** Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967.

38. Квантовые случайные процессы и открытые системы. М.: Мир, 1988.

39. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968.

40. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.

41. Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А. Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987.

42. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

43. Клемент Ф., Хейман Х., Ангенент С., Дуйн К. ван, Пахтер Б. де. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.

44. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.

45. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

46. Коробейник Ю. Ф. Теорема Стоуна — Вейерштрасса. Ростов н/Д: изд. Ростов. гос. ун-та, 1992.

47. Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

48. Коротков В. Б. Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН, 1988.

49. Коротков В. Б. Методы решения интегральных уравнений. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1985.

50. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

51. Крамер Г., Линдбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

52. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.

53. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

54. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.

55. Ламперти Дж. Случайные процессы. Киев: Вища школа, 1983.

56. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.

57. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

58. **Лоэв М.** Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
59. **Марков А. А.** Исчисление вероятностей. СПб., 1913.
60. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
61. **Мартин Н., Ингленд Дж.** Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
62. **Маслов В. П.** Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Феймана. М.: Наука, 1976.
63. **Маслов В. П.** Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
64. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.
65. **Недогибченко Г. В., Савельев Л. Я.** Индуктивные направленности непрерывных мер // Труды ИМ СО АН СССР. 1982. Т. 1. С. 168–179.
66. **Нейман Дж. фон.** Избранные труды по функциональному анализу. М.: Наука, 1987.
67. **Ниренберг Л.** Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
68. **Обен Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.
69. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
70. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
71. **Партасарати К.** Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
72. **Пич А.** Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
73. **Постников М. М.** Лекции по геометрии. I–V. М.: Наука, 1986–1988.
74. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. 1–4. М.: Мир, 1977–1982.
75. **Рихтмайер Р.** Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
76. **Робертс Ф. С.** Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.
77. **Розанов Ю. А.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1982.

78. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. М.: Наука, 1983.

79. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

80. Савельев Л. Я. Лекции по математическому анализу. Введение, части 1–4. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1969–1975.

81. Савельев Л. Я. Сборник лекций по курсу «Дифференциальное исчисление». Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1987.

82. Савельев Л. Я. Лекции по интегральному исчислению. Главы 1–10. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1988–1989.

83. Савельев Л. Я. Интегрирование равномерно измеримых функций. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1984.

84. Савельев Л. Я. Теорема о продолжении секвенциальных мер // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, №2. С. 307–309.

85. Савельев Л. Я. Индуктивные последовательности непрерывных мер // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, №5. С. 1060–1063.

86. Савельев Л. Я. Меры на орторешетках // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, №5. С. 1091–1094.

87. Савельев Л. Я. Внешние меры и внешние топологии // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, №2. С. 133–149.

88. Савельев Л. Я. Длинные серии в марковских последовательностях // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1985. Т. 5. С. 137–144.

89. Савельев Л. Я. Приложения к теории вероятностей. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1989.

90. Савельев Л. Я. Серии в марковских последовательностях // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, №4. С. 116–132.

91. Савельев Л. Я. Пространства с мерами // Докл. РАН. 1995. Т. 343, №6. С. 740–742.

92. Савельев Л. Я. Пространства с мерами // Докл. РАН. 1997. Т. 357, №3. С. 310–312.

93. Савельев Л. Я. Элементарная теория вероятностей. Ч. 1, 2. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 2005.

94. Савельев Л. Я., Балакин С. В., Хромов Б. В. Накрывающие серии в двоичных марковских последовательностях // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 1. С. 50–76.

95. **Савельев Л. Я., Балакин С. В.** Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях // Дискретная математика. 2004. Т. 16, вып. 3. С. 43–62.
96. **Садовничий В. А.** Теория операторов. М.: Высш. школа, 1999.
97. **Скороход А. В., Слободенюк Н. П.** Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. думка, 1970.
98. **Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.** Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
99. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
100. **Спивак М.** Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.
101. **Спицер Ф.** Принципы случайных блужданий. М.: Мир, 1969.
102. **Стернберг С.** Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
103. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
104. **Файнстейн А.** Основы теории информации. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
105. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
106. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
107. **Фрелихер А., Бухер В.** Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М.: Мир, 1970.
108. **Халмош П.** Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
109. **Халмош П.** Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1980.
110. **Халмош П., Сандер В.** Ограниченные интегральные операторы в пространствах $\mathscr{L}^2$. М.: Наука, 1985.
111. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
112. **Хелгасон С.** Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
113. **Хелемский А. Я.** Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.

114. Хеннекен П. Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974.

115. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1–4. М.: Мир, 1986–1988.

116. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

117. Холево А. С. Статистические структуры квантовой теории. Ижевск: Ин-т компьютерных исследов., 2003.

118. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972.

119. Чисар И., Кернер Я. Теория информации. М.: Мир, 1985.

120. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970.

121. Шварц Л. Анализ. Т. 1, 2. М.: Мир, 1972.

122. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

123. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1, 2. М.: Мир, 1985.

124. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.

125. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

126. Amari S. Differential-Geometrical Methods in Statistics // Lecture Notes in Statictics, 28. Berlin: Springer–Verl., 1985.

127. Benedek A., Panzone R. The spaces L^p, with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28, N 3. P. 301–324.

128. Berberian C. K. Notes on Spectral Theory. Princeton: Van Nostrand, 1966.

129. Breamaud P. Markov Chains. Berlin: Springer-Verl., 1999.

130. Brezis H. Operateurs Maximaux Monotone et Semigroups de Contractions dans les Espaces de Hilbert. Math. Studies, 5. Amsterdam: North-Holland Publ., 1973.

131. Borwein D., Jakimovski A. Matrix operators on l^p // Rocky Mountain J. Math. 1979. V. 9, N 3. P. 463–477.

132. Carleson L. On the convergence and grow of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–157.

133. Cohen L. W., Dunford N. Transformations on sequence spaces // Duke Math. J. 1937. V. 3, N 3. P. 689–701.

134. Crone L. Characterisation of matrix operators on l^2 // Math. Z. 1971. V. 123, N 4. P. 315–317.

135. Haggström O. Finite Markov Chains and Algoritmic Applications. Cambridge: Univ. Press, 2002.
136. Harrison J. Stokes' theorem for nonsmooth chains // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29, N 2. P. 235–242.
137. Knopp K., Lorentz G. Beträge zur absoluten Limitierung // Arch. Math. 1949. V. 2, N 1. P. 10–16.
138. Maddox I. J. Elements of Functional Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1970.
139. McLeod R. M. The Generalized Riemann Integral. Washington: Math. Ass. of America, 1980.
140. Monna A. F. Analyse non-archimédienne. Berlin: Springer-Verl., 1970.
141. Petersen G. M. Regular Matrix Transformations. N. Y.: McGrau Hill, 1966.
142. Robinson A. Non-standard Analysis. Amsterdam: North-Holland Publ., 1966.
143. Sargent W. L. G. On compact matrix transformations between sectionally boubed BK-spaces // J. London Math. Soc. 1966. V. 41, N 161. P. 79–87.
144. Schwartz J. T. Nonlinear Functional Analysis. N. Y.: Gordon&Breach, 1969.
145. Schwartz L. Théorie des Distributions. Paris: Hermann, 1966.
146. Segal I. E., Kunze R. A. Integrals and Operators. Berlin: Springer-Verl., 1978.
147. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenräumen. Eine Ergenbnisubersicht // Math. Z. 1977. V. 154, N 1. P. 1–16.
148. Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces. N. Y.: Springer-Verl., 1980.
149. Zaidman S. Functional Analysis and Differential Equations in Abstract Spaces. N. Y.: Chapman&Hall, 1999.
150. Zeller K., Beekmann W. Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin: Springer-Verl., 1970.

Литература к части «Некорректные задачи»

1. **Айзенберг Л. А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.
2. **Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
3. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Москва; Ижевск: Регулярная и динамическая динамика, 2002.
4. **Березанский Ю. М.** К теории единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шрёдингера // Труды Моск. мат. о-ва. 1958. Т. 7. С. 3–51.
5. **Бухгейм А. Л.** Необходимые условия устойчивости одного класса интегродифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1975. С. 78–85.
6. **Бухгейм А. Л.** Операторные уравнения Вольтерра. Новосибирск: Наука, 1983.
7. **Бухгейм А. Л.** Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988.
8. **Васин А. В., Агеев. А. Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
9. **Годунов С. К., Антонов А. Г., Кириллюк О. П., Костин В. И.** Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.
10. **Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.** Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1986.
11. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
12. **Запреев А. С.** Теорема единственности решения одной плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1976. С. 46–63.

13. **Запреев А.С., Цецохо В.А.** Обратная задача для уравнений Гельмгольца. Новосибирск, 1976. 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; №22).
14. **Иванов В. К.** О некорректно поставленных задачах // Мат. сборник. 1963. Т. 61, № 2. С. 211-223.
15. **Иванов В. В., Мельникова И. В., Филипов А. И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. Екатеринбург: Наука, 1993.
16. **Иванов В. В., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
17. **Ишанкулов Т.** О двух задачах аналитического продолжения для функций многих переменных // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, №3. С. 89–94.
18. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
19. **Канторович Л. В.** Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, №6. С. 89–185.
20. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
21. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
22. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
23. **Лаврентьев М. М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С.31–33.
24. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
25. **Лаврентьев М. М.** Об обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, №3. С. 520–521.
26. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1999.
27. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г.** О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171, №6. С. 1279–1281.
28. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г, Васильев В. Г.** Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.

29. Лаврентьев М. М, Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

30. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.

31. Лисковец О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981.

32. Маслов В. П. Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, №3. С. 183–184.

33. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

34. Николаев А. В. Сейсмология: научно-техническая революция и задачи XXI столетия // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск: Наука, 1988.

35. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

36. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.

37. Резницкая К. Г. Связь между решениями задачи Коши для уравнений различных типов и обратные задачи // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1974. Вып. 5, ч. 1. С. 55–62.

38. Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых один фокус неподвижен // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 766–769.

39. Романов В. Г. Обратные задачи для гиперболических уравнений и энергетические неравенства // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 3. С. 541–544.

40. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

41. Романов В. Г., Кабанихин С. И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.

42. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: Гостехиздат, 1953.

43. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

44. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.

45. **Тарханов Н. Н.** Ряд Лорана для решения эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1990.
46. **Тихонов А. Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
47. **Тихонов А. Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
48. **Тихонов А. Н.** Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 2. С. 268–271.
49. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
50. **Цих А. К.** Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.
51. **Ярмухамедов Ш.** Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв. АН УзССР. Сер. физ-мат. 1980. № 6. С. 34–40.
52. **Cauchy A. L.** Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées // C. R. Acad. Sci. Paris. 1847. V. 25. P. 536–538.
53. **Cherednichenko V. G.** Inverse Logarithmic Potential Problem. Utrecht: VSP, 1996.
54. **Denisov A. M.** Elements of the Theory of Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
55. **Gauss C. G.** Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Hamburg: Perthes & Besser, 1809.
56. **Hadamard J.** Sur les problèmes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. 1902. V. 13. P. 49–52.
57. **Legendre A. M.** Nouvelles Methodes pour la Determination des Orbits des Cometes. Paris: Courcier, 1806.
58. **Nashed M. Z.** Aspects of generalized inverses in analysis and regularization // Generalized Inverses and Applications. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1976. P. 193–244.
59. **Nashed M. Z., Votruba G. F.** A unified theory of generalized inverses // Generalized Inverses and Applications. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1976. P. 1–110.
60. **Sharafutdinov V. A.** Integral Geometry of Tensor Fields. Utrecht: VSP, 1994.

Предметный указатель