С. И. КУЗНЕЦОВ

КУРС ФИЗИКИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

Издание третье,
переработанное и дополненное

ДОПУЩЕНО
НМС по физике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2014

ББК 22.3я73
К 89

Кузнецов С. И.

К 89 Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: Учебное пособие / Под ред. В. В. Ларионова. — 3-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1587-8

В пособии изложены все разделы I части курса общей физики. Даны разъяснения основных законов, явлений и понятий классической механики, релятивистской механики и основные положения общей теории относительности. Рассмотрены основные вопросы молекулярно-кинетической теории вещества и термодинамики. Учитываются наиболее важные достижения в современной науке и технике, уделяется большое внимание физике различных природных явлений.

Цель пособия — помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, связанные с повышением ресурсоэффективности. Пособие ориентировано на организацию самостоятельной работы студентов. В нем анализируются решения многих физических задач, приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей и направлений подготовки бакалавриата очной и дистанционной форм обучения.

Рецензенты:

А. В. ШАПОВАЛОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики ТГУ; *Ю. П. КУНАШЕНКО* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики ТГПУ.

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 14.11.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,36. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Посвящается моим любознательным студентам, которые подвигли меня к переизданию этой книги.

Курс физики в высших технических учебных заведениях охватывает все важнейшие разделы классической и современной физики. Выпускник технического университета обязан владеть одной из основных фундаментальных дисциплин — физикой, твердо усвоить принципы и подходы естественных наук, обеспечившие, особенно в последнее время, невиданный технический прогресс и резкое сокращение сроков между научными открытиями и их внедрением в жизнь.

Все это приводит к повышению требований, которые предъявляются к современному курсу физики в вузе. Эти требования находят свое выражение в обновлении материала по сравнению с традиционными курсами, в повышении научно-технического уровня и в использовании инновационных технологий.

Задача общей физики, не вдаваясь глубоко в подробности рассматриваемых теорий и не увлекаясь математикой, дать общее представление о физической картине мира, установить действующие в нем законы, изучить основные методы физических исследований и обозначить области применения этих законов и методов.

Цель книги — помочь студентам освоить материал программы и приобрести уверенность в самостоятельной работе, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи.

Учебное пособие включает одиннадцать тем и представляет систематическое изложение основ классической механики на макроскопическом уровне, молекулярной физики и термодинамики. Приведены элементы специальной и общей теории относительности, рассмотрена связь пространства — времени с телами, движущимися со скоростями, близкими к скорости света. При этом:

- содержание теоретического материала охватывает все темы раздела «Механика. Молекулярная физика. Термодинамика», изучаемые в технических вузах;
- учитываются наиболее важные достижения в развитии современной науки и техники;
- уделяется большое внимание физике различных явлений природы;
- анализируются решения большого количества физических задач, связанных с повышением ресурсоэффективности;
- приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать двухуровневым. Главы и разделы, содержащие материал повышенной сложности, отмечены звездочкой (*). Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал как первого, так и второго уровня сложности.

Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки.

В пособии приведено большое количество рисунков, схем, графиков и гистограмм, способствующих лучшему восприятию прочитанного материала.

Пособие разработано в соответствии с действующей программой курса общей физики и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук, техники и технологии.

Подготовлено на кафедре общей физики ТПУ и соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей, изучающими курс физики по очной и дистанционной программам образования в течение трех семестров.

За помощь в подготовке пособия и целый ряд полезных советов автор благодарен профессорам кафедры общей физики ТПУ: Ю. И. Тюрину, И. П. Чернову, Ю. Ю. Крючкову; доцентам Л. И. Семкиной, Н. Д. Толмачевой, Э. В. Поздеевой. Особая признательность за редактирование пособия профессору В. А. Ларионову.

Наиболее полно материал курса изложен на сайте преподавателя http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SMIT, в Web course tools ТПУ и в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru.

Надеюсь, что книга сможет послужить студентам разных специальностей, действительно интересующихся проблемами точного знания.

Автор с благодарностью примет все замечания и пожелания читателей, способствующие улучшению курса, по адресу smit@tpu.ru.

КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КНИГОЙ

Книга, господа, это множество нарезанных в четверку листов бумаги, напечатанных и собранных вместе, переплетенных и склеенных клейстером. Да-с.

Ярослав Гашек.
Похождения бравого солдата Швейка

Порядок изложения в книге — систематический, но это не значит, что читатель обязан читать ее подряд — страницу за страницей, главу за главой. Главы в значительной степени независимы одна от другой и представляют собой *самостоятельные дидактические единицы*. Часто начало раздела покажется легкодоступным, но потом дорога постепенно пойдет вверх, становясь круче в конце главы и в дополнениях к ней. Поэтому читатель, нуждающийся скорее в общей информации, чем в приобретении специальных знаний, поступит правильно, если удовлетворится таким отбором материала, который может быть осуществлен по принципу избегания более детализированных рассмотрений.

Студент с ограниченной математической подготовкой пусть выбирает по своему вкусу. Звездочками отмечено то, что может быть опущено при первом чтении без серьезного ущерба для понимания последующего. Большой беды не будет, если при изучении книги читатель ограничится теми разделами или главами, которые представляют для него наибольший интерес.

Курсивом выделены основные определения и теоремы, которые необходимо запомнить. Жирным курсивом отмечены законы, новые термины и основные понятия, на которые необходимо обратить особое внимание. Для обозначения векторных величин на рисунках и в тексте используется курсивный шрифт со стрелкой.

Материал курса подобран и структурирован таким образом, чтобы облегчить самостоятельную работу студентов. Лучшему усвоению материала способствуют:

- четкость и корректность определений и формулировок;
- большое количество рисунков, дающих возможность наглядно представить физическую сущность процесса;
- однотипность оформления задач;
- проведение сопоставительного анализа различных процессов в рамках единого естественнонаучного представления.

Каждый из разделов начинается с изложения теоретического материала. Подача некоторых вопросов отличается от принятой в учебниках, чтобы избежать излишних математических выкладок при выводе формул. После прочтения теории следует проверить понимание и запоминание определений основных физических понятий и величин, понимание физического смысла формулировок и законов. Для этого в книге приведено большое количество вопросов и упражнений. Изучение каждого раздела курса физики рекомендуется завершить решением задач.

В пособии рассмотрены примеры решения задач, после тщательной проработки которых можно приступать к самостоятельному решению задач. Все задачи, предлагаемые для самостоятельной работы, снабжены ответами, как в общем виде, так и в числовом.

Многие задачи предназначены, по существу, для углубления основного материала и даже порой частично заменяют длинные количественные выводы, не приводившиеся в тексте главы.

Большинство вопросов и задач не носит чисто формального характера; более трудные отмечены звездочкой. Не надо слишком огорчаться, если вы не сумеете выполнить некоторые из них. Дополнительное собрание задач могло бы облегчить использование пособия при самоподготовке и на практических занятиях.

Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя — можно только научиться. Но для этого существует единственный путь — самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типовых задач выполняют другую роль: они показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче. Решение задач приводится в общем виде. Вычисления и проверка единиц измерений ради экономии места в ряде примеров опускаются.

Для удобства работы с данным пособием в приложении приведены фундаментальные физические константы, таблицы физических величин, некоторые справочные данные и сведения о размерностях физических величин. Более точные значения физических постоянных и таблицы физических величин приведены в справочнике «Фундаментальные константы. Таблицы физических величин», размещенном в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2010/m99.pdf.

Для настоящего курса физики реализовано его мультимедийное сопровождение и создан электронный учебник, размещенный на сайте преподавателя.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Заставить человека думать — это значит сделать для него значительно больше, чем снабдить его определенным количеством инструкций.

Чарльз Бэббидж

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в интернациональной системе единиц (СИ).

СИ состоит из *основных*, *дополнительных* и *производных* единиц. *Основными единицами* являются: единица *длины* — метр (м); *массы* — килограмм (кг); *времени* — секунда (с); *силы электрического тока* — ампер (А); *термодинамической температуры* — кельвин (К); *количества вещества* — моль (моль); *силы света* — кандела (кд).

Дополнительные единицы: *единица плоского угла* — радиан (рад); *единица телесного угла* — стерадиан (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими величинами.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. приложение).

2. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, луч света.

3. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж.

4. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т. е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.

5. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.

6. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей.

7. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

> Удачные обозначения обладают утонченностью и будят мысль, порой делая это, кажется, почти так же, как искусный учитель.
>
> *Бертран Рассел*

Обозначения физических величин, используемых в книге

Основные физические величины	
Длина	l, м
Масса	m, кг
Время	t, с
Термодинамическая температура	T, К
Сила света	J, кд
Сила электрического тока	I, А
Количество вещества	ν, моль
Дополнительные физические величины	
Плоский угол	α, φ, рад
Телесный угол	Ω, ср
Производные физические величины	
Гравитационная постоянная	γ, м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$
Давление	P, Па
Длина свободного пробега молекул, длина волны	λ, м
Добротность, количество тепла	Q
Импульс	p, кг·м·с$^{-1}$
Индекс суммирования, число степеней свободы	i
Концентрация молекул	n

Производные физические величины	
Коэффициент диффузии	D, м^2·с$^{-1}$
Коэффициент жесткости	k, Н·м$^{-1}$
Коэффициент трения	μ
КПД цикла	η
Модуль Юнга	E, Па
Момент импульса	L, кг·м^2·с$^{-1}$
Момент инерции	J, кг·м^2
Момент силы	M, Н·м
Мощность	N, Вт
Напряжение упругое	σ, Па
Объем	V, м^3
Период колебаний	T, с
Плотность	ρ, кг·м$^{-3}$
Площадь, энтропия	S
Работа	A, Дж
Сила	F, Н
Скорость	v, м·с$^{-1}$
Скорость угловая	ω, рад·с$^{-1}$
Скорость центра инерции	υ_c, м·с$^{-1}$
Теплоемкость при постоянном давлении	C_P, Дж/моль·К
Теплоемкость при постоянном объеме	C_V, Дж/моль·К
Угол поворота	φ, рад
Ускорение	a, м·с$^{-2}$
Ускорение нормальное	a_n, м·с$^{-2}$
Ускорение свободного падения	g, м·с$^{-2}$
Ускорение тангенциальное	a_τ, м·с$^{-2}$
Ускорение угловое	ε, рад·с$^{-2}$
Частота	ν, Гц
Частота круговая	ω, с$^{-1}$
Энергия внутренняя	U
Энергия кинетическая	$E_к$, Дж
Энергия покоя	E_0, Дж
Энергия полная	E, Дж
Энергия потенциальная	$E_п$, Дж
Энергия удельная	w, Дж·м$^{-3}$

ВВЕДЕНИЕ

Дорога к мудрости проста,
найди ее без толстых книжек:
мимо, и мимо, и мимо опять,
но ближе, и ближе, и ближе.

Пит Хайн Груки

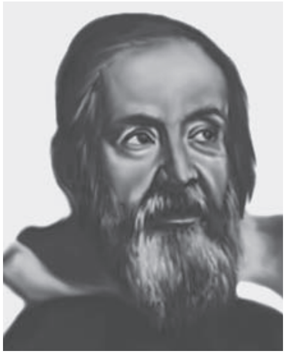
Физика — *это наука о природе* (от *греч*. physis — природа).

Физика — одна из самых совершенных и глубоких современных наук, являющаяся источником знаний и наиболее достоверных представлений об окружающем нас мире, составляющих базу для дальнейшего освоения конкретных разделов науки и техники. В основании современной естественнонаучной картины мира лежат физические законы, принципы и концепции. Физика отражает основные этапы сложного исторического пути познания физической природы вещей, способствует формированию целостного взгляда на окружающий мир.

Первые научные представления возникли еще очень давно, по-видимому, на самых ранних этапах истории человечества, и были отражены в письменных источниках. Однако считается, что физика, как наука, в своем современном виде берет начало со времен Галилео Галилея, это XV в. Действительно, Галилей и великий английский ученый Исаак Ньютон в XVI в. совершили революцию в научном познании.

Физика, которая успешно развивалась в течение трех столетий, достигла своей кульминации во второй половине XIX в. созданием электромагнитной теории света и называется *классической физикой*. Тогда, на рубеже XIX–XX вв., казалось, что достигнуто полное понимание физического мира. Однако уже в самом начале XX в. новые эксперименты и новые идеи в физике стали указывать на то, что неко-

Галилей Галилео (1564–1642) — выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания. Оказал значительное влияние на развитие научной мысли. Именно от него берет начало физика как наука. Галилею человечество обязано двумя принципами механики. Это известный галилеевский принцип относительности для равномерного и прямолинейного движения и принцип постоянства силы тяжести.



Ньютон Исаак (1643–1727) — выдающийся английский ученый, заложивший основы современного естествознания, создатель классической физики. Работы относятся к механике, оптике, астрономии, математике. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, дисперсию света, развил корпускулярную теорию света, разработал дифференциальное и интегральное исчисление.

торые законы классической физики неприменимы к крошечному миру атома, а также к объектам, движущимся с высокими скоростями. Следствием всего этого явилась очередная великая революция в физике, которая привела нас к тому, что мы называем *современной физикой*.

Важнейшая задача курса физики — формирование у студентов представлений о современной физической картине мира.

В последние десятилетия мир переживает невиданный по своим масштабам научно-технический прогресс, который базируется на фундаментальных физических исследованиях. Достижение нового теоретического и экспериментального понимания физических процессов и явлений послужит основой для создания новейших технических решений, технологий, приборов и устройств.

Наряду с колоссальными достижениями физической науки во всех ее разделах остается масса нерешенных проблем, разработка которых позволит человечеству достигнуть принципиально нового уровня развития земной цивилизации.

Совершенно очевидно, что быстро ориентироваться и успешно работать в современном мире могут только те выпускники вузов, которые получили в процессе обучения достаточно широкую и глубокую фундаментальную подготовку и навыки самостоятельной исследовательской работы.

1. МЕХАНИКА

Все, что видим мы, —
Видимость только одна.
Далеко от поверхности мира
До дна!

Омар Хайам

1.1. ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Физика — наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения. В этой главе мы познакомимся с основными методами исследования в физике, рассмотрим связь физики с другими науками и оценим масштабы пространства, времени и скоростей.

1.1.1. ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ

Главная цель любой науки, в том числе и ***физики***, рассматривается обычно как приведение в систему представлений о сложных явлениях, регистрируемых нашими органами чувств, т. е. упорядочение того, что мы называем *окружающим нас миром*.

Окружающий нас мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений, представляет собой материю. ***Материя — это объективная реальность, данная нам в ощущениях.***

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является ***движение*** *— это в широком смысле слова всевозможные изменения материи — от простого перемещения до сложнейших процессов мышления.*

Дать строгое определение предмета физики довольно сложно, потому что границы между физикой и рядом смежных дисциплин условные.

Академик А. Ф. Иоффе[1], российский физик, определил *физику как науку, изучающую общие свойства и законы движения вещества и поля*. В настоящее время общепринято, что все взаимодействия осуществляются посредством ***полей*** (например, гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил).

Поле *наряду с веществом является одной из форм существования материи*. Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены нами по мере изучения курса физики.

1.1.2. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ В ФИЗИКЕ

В курсе физики мы часто будем использовать понятия: ***эксперимент***, ***гипотеза***, ***теория***, ***модель***, ***закон***.

Каждая наука определяется не только предметом изучения, но и специфическими методами, которые она применяет. Основным методом исследования в физике является ***опыт*** — *наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений, многократно воспроизводить его при повторении этих условий*.

Наиболее широко в науке используется ***индуктивный метод***, *заключающийся в накоплении* ***фактов*** *и последующем их обобщении для выявления общей закономерности —* ***гипотезы***. На следующем этапе познания ставят специальные эксперименты для проверки гипотезы. Если результаты эксперимента не противоречат гипотезе, то последняя получает статус ***теории***.

Однако научное познание нельзя представлять в виде механического процесса накопления фактов и осмысления теорий — это творческий процесс.

Теории никогда не выводят непосредственно из наблюдений, напротив, их создают для объяснения полученных

---

[1] Иоффе Абрам Федорович (1880–1960) — российский, советский физик, обыкновенно именуемый «отцом советской физики», академик, вице-президент АН СССР, создатель научной школы, давшей многих выдающихся советских физиков.

из опыта фактов в результате осмысления этих фактов разумом человека. Например, к атомистической теории, согласно которой вещество состоит из атомов, ученые пришли вовсе не потому, что кто-либо реально наблюдал атомы (в XVIII в. это не удавалось никому). Представление об этом было создано творческим разумом человека. Аналогичным образом возникли и такие фундаментальные теории, как специальная теория относительности (СТО), электромагнитная теория света и закон всемирного тяготения Ньютона.

Великие научные теории как творческие достижения можно сравнить с великими творениями литературы и искусства. Однако наука все же существенно отличается от других видов творческой деятельности человека, и основное отличие состоит в том, что наука требует проверки своих понятий или теорий — ее предсказания должны подтверждаться ***экспериментом***. Действительно *тщательно поставленные эксперименты представляют собой важнейшую задачу физики*.

История свидетельствует о том, что созданные теории, отслужив свой срок, сдаются в архив, а им на смену приходят новые теории.

В некоторых случаях новая теория принимается учеными потому, что ее предсказания согласуются количественно с экспериментом лучше, чем прежняя теория. Во многих случаях новую теорию принимают, когда по сравнению с прежней теорией она позволяет объяснить более широкий *класс явлений*. Например, построенная Коперником[1] теория Вселенной с центром на Солнце не описывала движение небесных тел более точно, чем построенная ранее Птолемеем теория Вселенной с центром на Земле. Однако теория Коперника содержит некоторые новые важные следствия. В частности, с ее помощью становилось возможным определение порядка рас-

---

[1] Коперник Николай (1473–1543) — польский астроном, математик, экономист, каноник. Наиболее известен как автор средневековой гелиоцентрической системы мира, положившей начало первой научной революции.

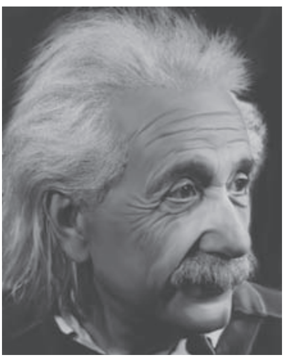
положения планет Солнечной системы и расстояний до них; для Венеры были предсказаны фазы, аналогичные лунным.

Весьма важным в любой теории является то, насколько точно она позволяет получить количественные данные. Например, СТО Эйнштейна почти во всех обыденных ситуациях дает предсказания, которые крайне слабо отличаются от предшествующих теорий Галилея и Ньютона, но она приводит к *более точным результатам в предельном случае высоких скоростей*, близких к скорости света.

Под влиянием СТО Эйнштейна существенно изменилось наше представление о пространстве и времени. Более того, мы пришли к пониманию взаимосвязи массы и энергии (на основе знаменитого соотношения $E=mc^2$). Таким образом, теория относительности резко изменила наши взгляды на природу физического мира.

Пытаясь понять и объяснить определенный класс явлений, ученые часто прибегают к использованию ***модели***. При этом под ***моделью*** *понимают некоторый мысленный образ явления, опирающийся на уже известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию.*

Примером может служить волновая модель света. Световые волны нельзя наблюдать подобно тому, как мы видим волны на воде, однако результаты опытов со светом указывают на его большое сходство с волнами на воде.



Эйнштейн Альберт (1879–1955) — выдающийся физик-теоретик, один из основателей современной физики, создатель специальной и общей теорий относительности, коренным образом изменивших представления о пространстве, времени и материи. Исходя из своей теории открыл в 1905 г. закон взаимосвязи массы и энергии.

Другой пример — модель атома, которую много раз строили и усовершенствовали.

Модельное представление всегда строится на основе какого-либо ***закона***. ***Законом*** *называют некоторые краткие, но достаточно общие утверждения относительно характера явлений природы* (таково, например, утверждение о сохранении импульса). Иногда подобные утверждения принимают форму определенных соотношений между величинами, описывающими явления, например *закон всемирного тяготения* Ньютона, согласно которому

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1.1)$$

Для того чтобы называться законом, утверждение должно выдержать экспериментальную проверку *в широком классе наблюдаемых явлений*. То есть закон представляет объединяющее начало для многих наблюдений. Это ведущий принцип, который высвечивает закономерности явлений природы.

Таков путь развития знания. Однако известны случаи, когда путь открытия был противоположным описанному. Это так называемый ***дедуктивный метод***, *когда на основе общих закономерностей выделяются частные явления*. Так, на основе закона всемирного тяготения Леверье[1] в 1848 г. открыл планету Нептун, а Томбо[2] в 1930 г. — Плутон (в настоящее время исключен из состава планет).

---

[1] Леверье Урбен (1811–1877) — французский математик, занимавшийся небесной механикой. Бо́льшую часть своей жизни проработал в Парижской обсерватории. Наиболее известным достижением является предсказание существования планеты Нептун, сделанное с помощью математического анализа астрономических наблюдений.

[2] Томбо Клайд Уильям (1906–1997) — американский астроном, открывший большое число астероидов, в том числе Плутон в 1930 г.

1.1.3. ФИЗИКА И ДРУГИЕ НАУКИ

Ричард Фейнман[1], читая свои знаменитые лекции по физике, говорил: «*Физика — это самая фундаментальная из всех наук, самая всеобъемлющая; огромным было ее влияние на все развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней натуральной философии, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль*».

Химия (неорганическая) испытывает на себе влияние физики более чем любая другая наука. Все химические процессы — это образование или разрушение связи между валентными электронами. В сущности, теоретическая химия — это физика.

Астрономия старше физики, но как наука астрономия встала на ноги только тогда, когда физики смогли объяснить, почему планеты и звезды движутся именно так, а не иначе. Самым поразительным открытием астрономии был тот факт, что звезды состоят из тех же атомов, что и Земля. Доказано это было физиками-спектроскопистами. Откуда звезды черпают свою энергию? Ясно это стало только к 1940 г., после открытия физиками реакции деления и термоядерного синтеза. Астрономия столь близка к физике, что трудно провести грань между ними.

Биология. Механизм всех биологических процессов можно понять только на молекулярном и внутриклеточном уровне. И здесь биологам не обойтись без знания физики и без физической аппаратуры, например электронных микроскопов, с помощью которых была открыта структура ДНК. А сложнейшие процессы нервной деятельности? По сути это электромагнитные явления.

---

[1] Фейнман Ричард Филлипс (1918–1988) — выдающийся американский физик. Один из создателей квантовой электродинамики. Входил в число разработчиков атомной бомбы. Предложил партонную модель нуклона, теорию квантованных вихрей. Лауреат Нобелевской премии по физике.

Здесь приведены примеры из областей науки, казалось бы, далеких от физики. А все предметы, которые изучаются в техническом университете (кроме истории, иностранных языков и т. д.), являются частными случаями различных разделов физики.

Например, ***электротехника*** началась с чисто физических исследований Эрстеда[1], Ампера[2], Фарадея[3], Максвелла[4]. ***Электроника*** — это синтез нескольких разделов физики: электромагнетизма, физики твердого тела, физики вакуума и газов и т. д. И даже королева наук — ***математика*** — является инструментом для физических исследований.

Связь между ***физикой*** и ***горно-геологическими науками*** неоспорима. Нельзя объяснить никакой геологический процесс, не опираясь на физические законы, описывающие элементарные составляющие этого процесса.

Для иллюстрации перечислим часть из большого числа глобальных проблем геологии, теснейшим образом связанных с физикой:

- происхождение Земли и других планет;
- строение и состав различных геосферных оболочек;
- возраст Земли и датирование этапов ее развития;
- термическая история Земли;
- разработка теории разрушения горных пород;
- прогноз геодинамических процессов (землетрясения, горные удары, внезапные выбросы газов и др.).

---

[1] Эрстед Ханс Христиан (1777–1851) — датский ученый-физик, исследователь явлений электромагнетизма.

[2] Ампер Андре-Мари (1775–1836) — знаменитый французский физик, математик, естествоиспытатель. Член многих академий наук, в частности Петербургской и Парижской академий наук.

[3] Фарадей Майкл (1791–1867) — английский физик, химик, основоположник учения об электромагнитном поле, член Лондонского королевского общества.

[4] Максвелл Джеймс Клерк (Кларк) (1831–1879) — британский физик. Описал термодинамический парадокс. Создал теорию электромагнитных волн.

В результате связи физики и геологии обособились граничные области знаний: геофизика, петрофизика, физика земной коры, физика атмосферы, физика пласта, физика океанов и др.

Есть надежда, что таким коротким экскурсом в проблемы связи физики с другими науками автору удалось поколебать бытующее среди студентов мнение, что физика им совершенно ни к чему.

Итак, физика в полном объеме важна и нужна для любого специалиста, но мы не ставим цели изучить все проявления физических законов в различных областях. Вы с ними встретитесь, изучая специальные предметы. Наша задача — изучить *основные законы физики*.

1.1.4. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Механика — *наука о простом перемещении тел в пространстве и во времени*. Согласно основным положениям материалистического учения окружающий нас мир состоит из различных видов материи, которая движется в пространстве и изменяется с течением времени. Другими словами, пространство и время есть формы существования материи, неотделимые от самой материи.

Трудно дать краткое, общее и строгое определение понятиям пространства и времени. Можно сказать, что пространство есть совокупность протяженных тел, а время — совокупность часов, расположенных в различных частях пространства и отсчитывающих длительности временны́х интервалов. Протяженность тел характеризуется длиной l, а длительность протекающих процессов — временем t.

Движение, понимаемое в широком смысле, является неотъемлемым всеобщим свойством материи. Простейшей формой движения является механическое движение, или перемещение.

Основными понятиями классической механики являются *абсолютное пространство* и *абсолютное время*.

Основными свойствами абсолютного пространства являются однородность и изотропность, т.е. все точки абсолютного пространства и все направления в нем равноценны. Абсолютное время по определению протекает равномерно, не зависит от свойств материи и места в пространстве. Оно однородно, но не изотропно, т. е. его мгновения равноценны, но из двух мгновений одно было раньше другого.

Пространство — это форма сосуществования материальных объектов и процессов, характеризующих структурность и протяженность материальных систем.

Время — это форма последовательной смены явлений и состояний материи, которая характеризует длительность их бытия. Пространство и время не существуют в отрыве от материи.

Масштабы пространства, времени и скоростей перемещения могут изменяться в очень широких пределах.

***Масштабы пространства*:**

- пространство Вселенной, доступное для наблюдения посредством современных методов, достигает 10^{26} м;
- размеры ядер имеют порядок 10^{-15} м;
- на мощных ускорителях исследуется структура частиц до расстояний 10^{-18} м.

***Масштабы времени*:**

- время существования Вселенной оценивается в 10^{18} с;
- современные методы дают возможность измерять время жизни нестабильных частиц до 10^{-11} с.

***Скорость*:**

- естественным масштабом скоростей в природе служит скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м·с$^{-1}$;
- скорость света в вакууме является предельно высокой скоростью любого материального объекта. Ее называют универсальной (мировой) постоянной.

Если скорость движения объекта пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света, так что $(v/c)^2 \ll 1$, *то движение является нерелятивистским. В противном случае — релятивистским.*

Законы движения существенно отличаются в зависимости от *пространственных масштабов* (макромир и микромир). Линейный размер атомов равен 10^{-10} м. Этот размер является одним из признаков перехода от макромира к микромиру. Он получил название ***ангстрем*** (1 Å$=10^{-10}$ м) в честь знаменитого шведского ученого А. Ангстрема[1].

Критерием применимости законов макро- или микромира является универсальная константа — ***постоянная Планка***[2],

$$\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34} \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Движение макроскопических тел подчиняется законам классической механики — именно с этого раздела мы с вами начнем изучать физику. Движение микрочастиц подчиняется законам квантовой механики, качественно отличающимся от классических.

Другими словами, движение описывается классическими законами, если произведение массы тела m на скорость v и на расстояние R значительно больше постоянной Планка, $mvR \gg \hbar$.

Пример 1. Электрон в атоме водорода имеет: массу $m=10^{-30}$ кг, скорость $v=10^2$ м$\cdot$с$^{-1}$, радиус орбиты R~10^{-10} м, тогда $mvR \approx 10^{-38} \ll \hbar$, т. е. здесь движение подчинено *квантовым законам*.

Пример 2. Камень весом 1000 кг свалился с горы высотой 30 м со скоростью 5 м$\cdot$с$^{-1}$, следовательно $mvR = 1{,}5 \cdot 10^5$ кг$\cdot$м$^2\cdot$с$^{-1} \gg \hbar$.

В данном случае применяются *законы классической механики*.

Обобщая вышесказанное, следует отметить, что механика подразделяется на классическую и квантовую. В пределах каждой из них рассматривают релятивистское и нерелятивистское движение.

Квантовые и релятивистские представления имеют более общий характер, и законы классической и нерелятивистской механики вытекают из квантовых и релятивистских представлений при переходе соответствующих границ.

---

[1] Ангстрем Андерс Йонас (1814–1874) — шведский ученый-астрофизик, один из основателей спектрального анализа.

[2] Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (1858–1947) — выдающийся немецкий физик. Как основатель квантовой теории, предопределил основное направление развития физики с начала XX в.

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить...

А. С. Пушкин

1.2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Приводятся абстрактные понятия, отражающие реальные свойства тел. Описываются важнейшие системы координат. Излагаются сведения о векторах. Дается определение основных физических величин кинематики точки.

1.2.1. ПОНЯТИЕ МЕХАНИКИ. МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ

Механика (от *греч.* mechanike — орудие, сооружение) — *часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение — *это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Механика подразделяется на три части: *статику, кинематику* и *динамику*.

Кинематика (от *греч.* kinema — движение) — *раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (от *греч.* dynamis — сила) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают это движение.

Статика (от *греч.* statike — равновесие) изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучаются.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения. Развитие механики как науки начиналось с III в. до н. э., когда древнегреческий ученый Архимед[1] сформулировал закон

[1] Архимед (287 до н. э. — 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик, механик и инженер из Сиракуз. Сделал мно-

рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем и окончательно сформулированы английским физиком И. Ньютоном.

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической***, *так как она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, которые значительно меньше скорости света в вакууме*. Движение тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматривает ***релятивистская механика***, другое ее название — ***специальная теория относительности***. Рассмотрением движения элементарных частиц занимается ***квантовая механика***.

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели*. Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела и материальной точки*.

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т. е. изменять свои размеры и форму.

Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют **абсолютно твердым телом** (*хотя абсолютно твердых тел в природе не существует*).

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется ***материальной точкой***.

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце тоже материальная точка в Солнечной системе).

1.2.2. СИСТЕМА ОТСЧЕТА, ТЕЛО ОТСЧЕТА. СВЕДЕНИЯ О ВЕКТОРАХ

Всякое движение *относительно*, поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение

жество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда важных изобретений.

данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета.***

Система отсчета *— совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого изучается движение.*

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени и наоборот).

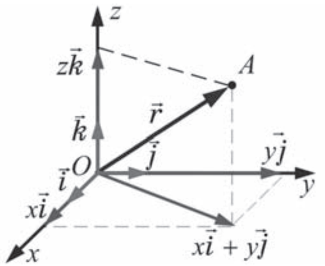


Рис. 1.1
Декартова система координат:
положение точки A характеризуется координатами x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$.

Для описания движения практически приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова (рис. 1.1), сферическая (рис. 1.2), цилиндрическая и др.).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является декартова, или прямоугольная, система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

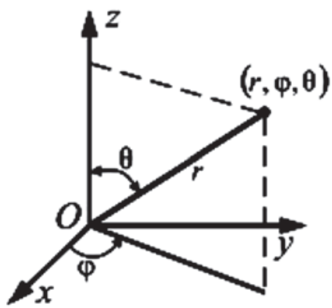


Рис. 1.2
Сферическая система координат:
положение точки характеризуется длиной r, углами θ и φ.

В декартовой системе координат положение точки A в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами — x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку.

Преобразования от сферических к декартовым координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta.$$

Сведения о векторах

Векторными называются величины, характеризующиеся не только численным значением (модулем), но и направлением (в тексте векторы обозначают буквами прямого шрифта со стрелкой сверху, например $\vec{r}$).

На чертежах векторы, направленные к нам, обозначают точкой ($\cdot$), а от нас — крестиком ($\times$).

Радиус-вектором $\vec{r}$ *некоторой точки A называется вектор, проведенный из выбранного начала координат в данную точку* (рис. 1.1). Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки: x, y, z. Умножив их на единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.2}$$

Слагаемые $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ называются *компонентами*, или *составляющими* вектора $\vec{r}$; числа x, y, z — его координатами, а само соотношение (1.2) — формулой разложения вектора $\vec{r}$ по единичным ортам.

Модуль радиус-вектора, используя теорему Пифагора[1], можно выразить через координаты вектора $\vec{r}$:

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.3}$$

Сложение векторов осуществляется по следующей схеме: начало каждого последующего вектора совмещают с концом предыдущего, результирующий вектор проводится из начала первого в конец последнего. Эта операция называется *правилом многоугольника*.

Умножение векторов производится на скалярную или векторную величину. Перемножение векторов может быть *скалярным* или *векторным*.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ дает скалярную величину c и вычисляется по формуле

$$c = \vec{d} \cdot \vec{b} \equiv \vec{d}\ \ \vec{b} \equiv (\vec{d}, \vec{b}) = |\vec{d}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha, \tag{1.4}$$

---

[1] Пифагор Самосский (570–490 до н. э.) — древнегреческий философ и математик.

где $|\vec{d}|$ и $|\vec{b}|$ — модули перемножаемых векторов; α — угол между ними. При этом произведение $d\cos\alpha$ называется проекцией вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}$. Очевидно, что скалярное произведение векторов не зависит от того, в каком порядке они расположены: $\vec{d}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{d}$.

В частном случае, когда $\vec{d}=\vec{b}$, формула (1.4) дает $(\vec{b},\vec{b})\equiv\vec{b}^2=b^2$. Если векторы $\vec{d}$ и $\vec{b}$ ортогональны друг другу, то их скалярное произведение согласно (1.4) равно нулю:

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=0$$

при $\vec{d}\perp\vec{b}$.

Векторным произведением векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c}=\vec{d}\times\vec{b}\equiv[\vec{d},\vec{b}]=(|\vec{d}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha)\cdot\vec{n}, \tag{1.5}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. Направление вектора $\vec{n}$, а также результирующего вектора $\vec{c}$ можно найти по *правилу правого винта*, или по *«правилу буравчика»*.

Модуль векторного произведения равен произведению модулей $\vec{d}$ и $\vec{b}$, умноженному на синус угла между ними:

$$|[\vec{d},\vec{b}]|=db\sin\alpha. \tag{1.6}$$

Вектор $[\vec{d},\vec{b}]$ равен по модулю вектору $[\vec{b},\vec{d}]$ и направлен в противоположную сторону:

$$[\vec{b},\vec{d}]=-[\vec{d},\vec{b}]. \tag{1.7}$$

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$[\vec{d},\vec{b}]=0, \tag{1.8}$$

если $\vec{d}\parallel\vec{b}$.

Векторное произведение $\vec{d}$ и $\vec{b}$ можно записать с помощью определителя:

$$[\vec{d},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ d_x & d_y & d_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}, \tag{1.9}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — единичные векторы, направленные по соответствующим осям.

1.2.3. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Путь, перемещение

Итак, положение точки A в пространстве задается с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки отсчета O, или начала координат (рис. 1.1). При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае ее движение определяется *скалярными уравнениями*:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \tag{1.10}$$

В соответствии с (1.4) эти уравнения эквивалентны *векторному уравнению*

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}. \tag{1.11}$$

Уравнения (1.10) и (1.11) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки***.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы.***

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z); если она движется на плоскости — две степени свободы; если вдоль линии — одну степень свободы.

При движении материальной точки A из положения *1* в положение *2* (рис. 1.3) ее радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т. е. $\vec{r}$ зависит от времени t.

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ ***называется траекторией точки.*** *Длина траектории* есть ***путь*** Δs. Если точка движется по прямой, то приращение $|\Delta\vec{r}|$ равно пути Δs.

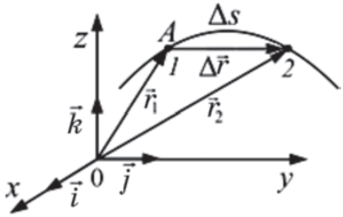


Рис. 1.3
Перемещение точки *A* в пространстве из положения *1* в положение *2*:
вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Пусть за время Δt точка *A* переместилась из точки *1* в точку *2*. ***Вектор перемещения*** $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

или

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}; \qquad (1.12)$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \qquad (1.13)$$

Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \langle\vec{v}\rangle. \qquad (1.14)$$

Вектор $\langle\vec{v}\rangle$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.4).

Средняя путевая скорость материальной точки:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

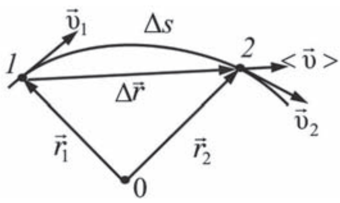


Рис. 1.4
Перемещение точки *A* в пространстве из положения *1* в *2* за время Δt

Мгновенная скорость $\vec{v}$ *— вектор скорости в данный момент времени, равный первой производной от*

$\vec{r}$ по времени и направленный по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки A:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Подобное обозначение, введенное Г. Лейбницем[1], более удобно, особенно при вычислении производных от сложных функций.

Модуль вектора скорости:

$$v \equiv |\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|. \qquad (1.15)$$

При $\mathrm{d}t \to 0$, т. е. на бесконечно малом участке траектории, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае *мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину — путь*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Обратное действие — интегрирование (рис. 1.5). $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ — площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь s за время t, надо сложить площади всех прямоугольников. В пределе перейдем к определенному интегралу:

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t.$$

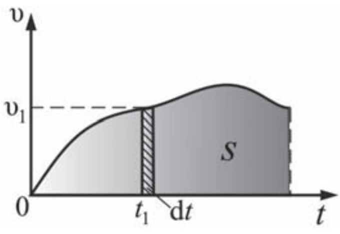


Рис. 1.5
Площадь S под кривой $v(t)$ есть путь s, пройденный телом за время t

Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой $v(t)$ есть путь тела за время t.

При равномерном движении (с постоянной скоростью) $s = vt$.

---

[1] Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, математик, юрист, дипломат. Ввел понятие «живой силы» (кинетической энергии).

Принцип независимости движения (принцип суперпозиции)

Рассмотрим простой опыт (рис. 1.6). Первый шарик участвует в двух движениях, второй — в одном, но так как вертикально вниз на оба шарика действует только одна сила — сила тяжести, то они упадут на пол одновременно.

Этот опыт доказывает *принцип независимости движения* (*действия сил*).

Если материальная точка участвует в нескольких движениях (рис. 1.7), то ее *результирующее перемещение* $\mathrm{d}\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности.

В общем случае

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}_1 + \mathrm{d}\vec{r}_2 + \ldots + \mathrm{d}\vec{r}_i + \mathrm{d}\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_i,$$

но так как $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, то $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_i + \vec{v}_n$, или $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{v}_i$.

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

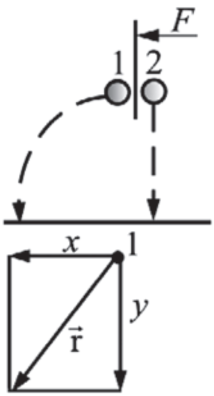


Рис. 1.6
Принцип независимости действия сил: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

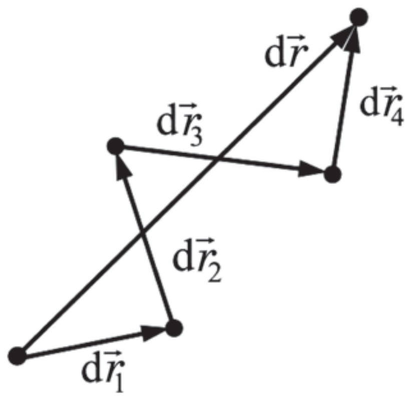


Рис. 1.7
Результирующее перемещение: $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}_1 + \mathrm{d}\vec{r}_2 + \mathrm{d}\vec{r}_3 + \mathrm{d}\vec{r}_4$

В физике существует общий принцип, который называется ***принципом суперпозиции*** (***принцип наложения***) — *допущение, согласно которому результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Принцип суперпозиции играет большую роль в теории колебаний, теории цепей и во многих других разделах физики и техники.

Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета. Положение точки A (рис. 1.8) задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси x, y, z.

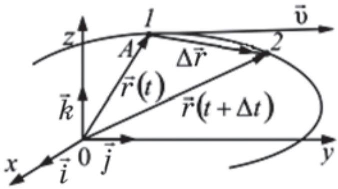


Рис. 1.8
Вектор перемещения точки A и ее скорость $\vec{\upsilon}$

Понятно, что x, y, z зависят от времени t, т. е. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки), можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z в обозначениях Лейбница:

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\ \ \upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};\ \ \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Эти три равенства эквивалентны векторному равенству $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

Согласно общей формуле (1.3) *модуль вектора скорости*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \qquad \textbf{(1.16)}$$

Так как скорость — величина векторная, то ее можно представить с помощью единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}.$$

Ускорение и его составляющие

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуется* ***ускорением***

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.17}$$

Ускорение — величина векторная. При криволинейном движении $\vec{v}$ изменяется также и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Выражение (1.17) на эти вопросы не отвечает.

Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рис. 1.9), связанный с точкой A и направленный по касательной к траектории движения точки A (векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{v}$ в точке A совпадают). Тогда можно записать:

$$\vec{v} = v\vec{\tau},$$

где $v = |\vec{v}|$ — модуль вектора скорости.

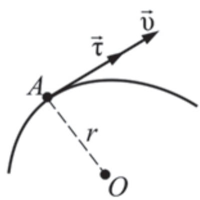


Рис. 1.9
К выводу тангенциальной составляющей ускорения:
единичный вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории

Найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.18}$$

Получаем два слагаемых ускорения: $\vec{a}_\tau$ — ***тангенциальное ускорение***, совпадающее с направлением $\vec{v}$ в данной точке, $\vec{a}_n$ — ***нормальное ускорение***, или ***центростремительное***, так как направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно вектору $\vec{\tau}$.

$$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}, \text{ или, по модулю, } a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{1.19}$$

где $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ — скорость изменения модуля вектора скорости $\vec{v}$.

Итак, $\vec{a}_\tau$ показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t > 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{v}$, т. е. ускоренное движение;
- если $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{v}$, т. е. замедленное движение;
- при $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{v} = \mathrm{const}$ — движение с постоянной по модулю скоростью.

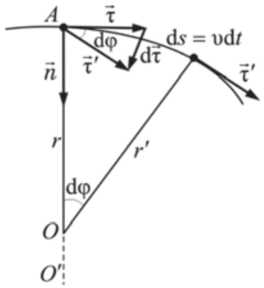


Рис. 1.10
К выводу нормальной составляющей ускорения, показывающей быстроту изменения направления касательной к траектории

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (1.18):

$$\vec{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

Быстрота изменения направления касательной к траектории $(\mathrm{d}\vec{\tau}\,/\,\mathrm{d}t)$ определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий (рис. 1.9, 1.10).

Степень искривленности плоской кривой характеризуется *кривизной C. Радиус кривизны r* — радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке $\mathrm{d}s$.

Центры таких окружностей — центры кривизны точек O и O'.

$$r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}. \qquad (1.20)$$

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор, показывающий направление изменения угла:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{n},$$

здесь $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной $(\vec{\tau})$ в данной точке, т. е. по радиусу к центру кривизны.

За время Δt материальная точка перемещается вдоль траектории на расстояние ds в пределе (при $\Delta t \to 0$), центры кривизны O и O' сливаются и угол поворота $\Delta\varphi$ равен элементарному углу $\mathrm{d}\varphi$, который определяет поворот $\mathrm{d}\vec{\tau}$.

Из (1.20) следует, что $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}s/r$, но так как $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$, то $\mathrm{d}\varphi = v\mathrm{d}t/r$.

Тогда $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{r}$, следовательно, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{r}\vec{n}$; наконец, $v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v^2}{r}\vec{n}$, т. е.

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}.$$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости.* Модуль нормального ускорения

$$|\vec{a}_n| \equiv a_n = v^2/r. \quad (1.21)$$

Центростремительным называют ускорение, когда движение происходит по окружности. А когда движение происходит по произвольной кривой, говорят — *нормальное ускорение,* перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Итак, возвращаясь к выражению (1.18), можно записать, что *суммарный вектор ускорения* при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n}.$$

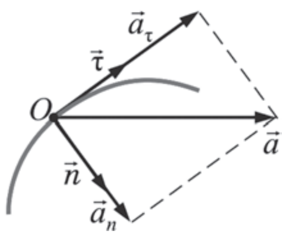


Рис. 1.11
Суммарное ускорение, нормальная и тангенциальная составляющие ускорения

На рисунке 1.11 изображено взаимное расположение векторов ускорения.

Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.22)$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

- $a_\tau=0$; $a_n=0$ — равномерное прямолинейное движение;
- $a_\tau=\text{const}$; $a_n=0$ — равноускоренное прямолинейное движение;
- $a_\tau=0$; $a_n=\text{const}$ — равномерное движение по окружности.

Прямая задача кинематики *сводится к определению кинематических характеристик по известному закону движения.*

При движении с постоянным ускорением ($a=\text{const}$)

$$s=\int at\mathrm{d}t=a\int t\mathrm{d}t=at^2\,/\,2.$$

Если $v=v_0\pm at$ ($a=\text{const}$), то

$$s=s_0+v_0t\pm at^2/2. \tag{1.23}$$

Обратная задача кинематики *заключается в нахождении закона движения по известной скорости (ускорению) и начальному кинематическому состоянию.*

Пусть нам известно ускорение точки в каждый момент времени.

По определению имеем $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, отсюда

$$v(t)=v(t_0)+\int_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t,$$

так как $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, следовательно, $r(t)=r(t_0)+\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t.$

1.2.4. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Виды движения

Различают пять видов движения:

- *поступательное*;
- *вращательное — вокруг неподвижной оси*;
- *плоское*;
- *вокруг неподвижной точки*;
- *свободное*.

Поступательное движение *и вращательное* движение вокруг оси — основные виды движения твердого тела. Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному из основных видов или их совокупности.

Поступательное *— это движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе и все точки твердого тела совершают равные перемещения за одинаковое время (рис. 1.12).*

При ***вращательном движении*** вокруг оси все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью OO′ вращения* (рис. 1.13). Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

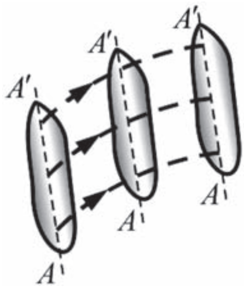


Рис. 1.12
Поступательное движение тела

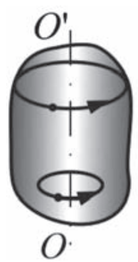


Рис. 1.13
Вращательное движение тела

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O′ остаются неподвижными, называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси****, а неподвижную прямую OO′ называют* ***осью вращения****.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO' (рис. 1.14).

Проследим за некоторой точкой M этого твердого тела. За время $\mathrm{d}t$ точка M совершает элементарное перемещение $\mathrm{d}\vec{r}$.

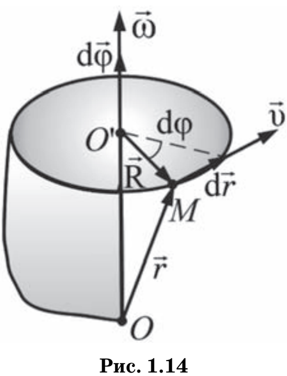


Рис. 1.14
Вращательное движение твердого тела вокруг оси OO'

При том же самом угле поворота $\mathrm{d}\varphi$ другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояние, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела, ни первая производная $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, ни вторая производная $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.

За это же время $\mathrm{d}t$ радиус-вектор $\vec{R}$, проведенный из точки O' в точку M, повернется на угол $\mathrm{d}\varphi$. На такой же угол повернется радиус-вектор любой другой точки (так как тело абсолютно твердое, в противном случае расстояние между точками должно измениться).

Угол поворота $\mathrm{d}\varphi$ характеризует *перемещение всего тела за время* $\mathrm{d}t$.

Удобно ввести $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ — вектор элементарного поворота тела, численно равный $\mathrm{d}\varphi$ и направленный вдоль оси вращения OO' так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика).

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$\mathrm{d}\vec{\varphi} = \mathrm{d}\vec{\varphi}_1 + \mathrm{d}\vec{\varphi}_2.$$

Угловой скоростью *называется вектор* $\vec{\omega}$, *численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении* $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону):

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.24}$$

Если ω — const, то имеет место равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.

Пусть $\vec{v}$ — линейная скорость точки M. За промежуток времени $\mathrm{d}t$ точка M проходит путь $\mathrm{d}r = v\mathrm{d}t$. В то же время, $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\varphi$ (центральный угол). Тогда можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega R. \tag{1.25}$$

В векторной форме $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Вектор $\vec{v}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Наряду с угловой скоростью вращения используют понятия периода и частоты вращения.

Период T *— промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т. е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$).

Частота ν *— число оборотов тела за* 1 *секунду.*

При вращении с угловой скоростью ω имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.26)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении ($\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t > 0$), а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении ($\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t < 0$), рисунок 1.15.

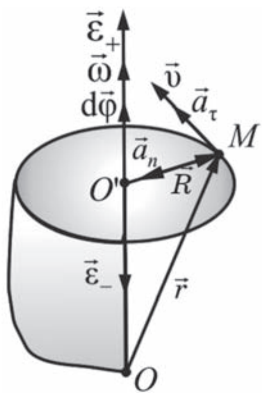


Рис. 1.15
Вращательное движение вокруг неподвижной оси OO'

Как и любая точка твердого тела, точка M имеет нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Выразим нормальное и тангенциальное ускорение точки M через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega R) = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon;$$

$$a_\tau = R\varepsilon; \qquad (1.27)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (1.28)$$

Обратите внимание. *Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота),* ***направлены вдоль оси вращения.***

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- равномерное вращение: $\varepsilon = 0$; $\omega = \text{const}$; $\varphi = \varphi_0 \pm \omega t$;
- равнопеременное вращение: $\varepsilon = \text{const}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$; $\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. На какие части подразделяется механика?
2. Что такое система отсчета? Тело отсчета?
3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
4. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
5. Какое движение называется поступательным? Вращательным?
6. Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
7. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения, нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
8. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение, тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
9. Дайте понятие кривизны траектории и радиуса кривизны.
10. В чем заключается обратная задача кинематики?
11. Перечислите пять видов движения твердого тела.
12. Что называется углом поворота? Что он характеризует?
13. Что называется угловой скоростью, угловым ускорением? Как определяются их направления?

14. Какова связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами?
15. Что такое период и частота вращения?
16. Как направлены кинематические параметры, характеризующие вращательное движение?
17. Приведите формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси.
18. Изобразите твердое тело, вращающееся вокруг своей оси, и укажите его кинематические параметры.
19. По приведенному графику $a_x(t)$ (рис. 1) постройте графики $\upsilon_x(t)$, $x(t)$ и $s(t)$ при следующих начальных условиях: $\upsilon(0)=0$, $x(0)=0$.
20. Используя график (рис. 2) зависимости скорости тела от времени, определите, каким видам движения соответствуют участки $A–B$, $B–C$, $C–D$.
21. Пользуясь приведенными на рисунке 3 графиками зависимости скорости поступательного движения тел 1, 2 и 3 от времени, определите характер движения каждого тела и его ускорение.
22. Проведите аналогии между кинематическими величинами, используемыми для характеристики поступательного и вращательного движений.

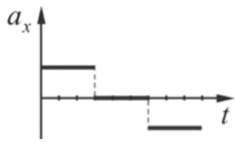


Рис. 1

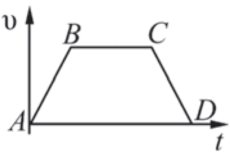


Рис. 2

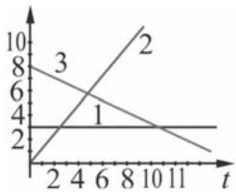
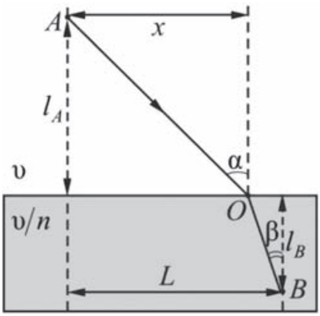


Рис. 3

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.2.1. ***Принцип Ферма*** — постулат, сформулированный в 1662 г. П. Ферма, предписывающий лучу света двигаться из начальной точки в конечную по пути, *минимизирующему* время движения. Принцип Ферма справедлив не только для простейших примеров отражения и преломления света. С помощью этого принципа можно понять и точно рассчитать механическое движение.



Пункт A находится на асфальтированной площадке, пункт B — на примыкающем к нему земляном поле, на котором скорость машины в n раз меньше. Для того чтобы за кратчайшее время добраться из A в B, был выбран оптимальный маршрут, показанный на рисунке. Найти соотношение между синусами углов α и β.

Решение. Все расстояния указаны на рисунке. Время t_1, затрачиваемое на путь AO, равно: $t_1 = \dfrac{\sqrt{l_A^2 + x^2}}{\upsilon}$.

Время t_2, затрачиваемое на путь OB, преодолеваемый со скоростью v/n, равно: $t_2 = \dfrac{n\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}}{v}$.

Полное время в пути

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{v}\left(\sqrt{l_A^2 + x^2} + n\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}\right).$$

Поскольку точка O была выбрана так, что на путь затрачивалось минимальное время, должна быть равна нулю производная времени t по расстоянию x:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} - n\frac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}}\right) = 0.$$

Так как

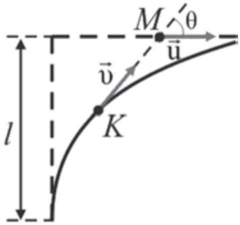
$$\frac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} = \sin\alpha, \frac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}} = \sin\beta,$$

то $\sin\alpha - n\sin\beta = 0$, т. е.

$$\sin\alpha/\sin\beta = n.$$

Сходство с известным законом преломления света на границе двух сред не случайно: природа устроена так, что свет выбирает оптимальный путь.

Ответ: $\sin\alpha/\sin\beta = n$.



Задача 1.2.2*. ***Кошка и мышка.*** Кошка K преследует мышь M (см. рис.), бегущую по прямой линии с постоянной скоростью $u = \text{const}$. Скорость кошки по модулю $v > |u|$ постоянна и направлена на мышь.

В начальный момент скорости кошки и мыши перпендикулярны, а расстояние между ними l. Найти, через какое время кошка догонит мышь.

Решение. Обозначим r и θ расстояние между мышью и кошкой и угол между скоростью кошки и скоростью мыши (отсчитывается от направления скорости кошки). Записывая относительную скорость $v_{\text{отн}} = -v + u$ в полярной системе координат с началом в точке нахождения кошки, получаем

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v + u\cos\theta, \quad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -u\sin\theta.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(u\cos\theta + v) - r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ и $\sin\theta = u^2 - v^2$

или

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r(u\cos\theta + v)] = u^2 - v^2.$$

Интегрируя обе части этого уравнения в пределах от 0 до t и учитывая, что $r(0) = l$, $\theta(0) = \pi/2$, получаем

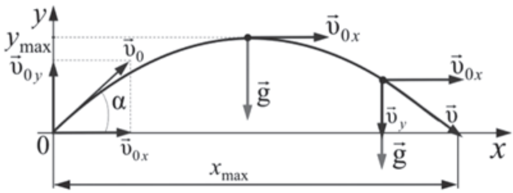
$$r(u\cos\theta + v) - vl = (u^2 - v^2)t.$$

Кошка догонит мышь тогда, когда $r = 0$, и, следовательно, затрачиваемое для этого время равно: $t = \dfrac{vl}{(v^2 - u^2)}$.

Ответ: $t = \dfrac{vl}{(v^2 - u^2)}$.

Задача 1.2.3. Рассмотреть движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Найти: уравнение траектории движения; время полета тела; время подъема на максимальную высоту; максимальную высоту подъема; максимальную дальность полета и угол подъема при этом.

Решение. При отсутствии сопротивления воздуха движение будет происходить по траектории, изображенной на рисунке.



Движение данного тела можно представить как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям *Ox* и *Oy*, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней.

По оси *Ox* движение равномерное с постоянной скоростью:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha.$$

Воспользовавшись формулой для равномерного прямолинейного движения, запишем уравнение движения тела вдоль оси *Ox*:

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos\alpha,$$

где t — время движения.

По оси *Oy* движение равнопеременное с ускорением $a_y = -g$ и с начальной скоростью

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Для равномерного движения запишем:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время t из уравнений движения, найдем уравнение траектории:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Это уравнение ***параболы***.

В момент падения тела на Землю координата $y=0$. Тогда найдем ***время полета***:

$$t\left(v_0\sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0,\ \ t_1 = 0,\ \ t_2 = \left(\frac{2v_0}{g}\right)\sin\alpha.$$

Значение времени $t_1=0$ соответствует точке бросания тела. Таким образом, время полета тела

$$t_{\text{п}} = 2v_0\sin\frac{\alpha}{g}.$$

При подъеме тела значение скорости v_y уменьшается и при $y_{\max}$ превращается в ноль. Из уравнения $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$, при $v_y=0$, находится ***время подъема*** тела на максимальную высоту:

$$0=v_0\sin\alpha-gt_{\text{под}},$$

отсюда $t_{\text{под}} = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$.

Сопоставляя выражения, видим, что время подъема тела на высоту $y_{\max}$ равно времени спуска его с этой высоты.

Подставив время подъема $t_{\text{под}}$ в формулу $y=v_{0y}t-gt^2/2$ $=v_0t\sin\alpha-gt^2/2$, найдем ***максимальную высоту подъема*** тела:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

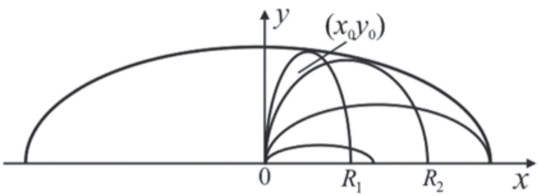
Дальность полета $x_{\max}$ определяется, если в уравнение $x=v_{0x}t=v_0t\cos\alpha$ вместо t подставить время полета:

$$x_{\max} = v_0t_{\text{п}}\cos\alpha = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Дальность полета максимальна, когда значение $\sin 2\alpha$ максимально:

$$\sin 2\alpha_0 = 1, \quad 2\alpha_0 = 90^\circ, \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

Задача 1.2.4*. ***Парабола безопасности.*** Из начала координат под углом α к горизонтальной оси x бросают камень со скоростью u. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. При каком угле α_0 камень попадет в точку с координатами x_0, y_0 (см. рис.)?



Решение. Радиус-вектор камня в момент времени t дается формулой $r = ut + gt^2/2$, где g — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз. Ориентируя ось y вверх, запишем уравнение в координатах: $x = ut\cos\alpha$, $y = ut\sin\alpha - gt^2/2$.

Исключив t, найдем уравнение траектории: $y = x\operatorname{tg}\alpha - gx^2/(2u^2\cos^2\alpha)$.

Из этого уравнения, при $y = y_0$, $x = x_0$, находим

$$tg\alpha_0 = \left\{1 \pm \left[1 - \frac{2g}{u^2}\left(y_0 + \frac{gx_0^2}{2u^2}\right)\right]^{1/2}\right\}\frac{u^2}{gx_0}. \qquad (1)$$

Действительно значения α_0, определяющие возможные траектории, получаются лишь при условии неотрицательности выражения под знаком квадратного корня, т. е. при условии

$$1 \geq \frac{2g}{u^2}\left(y_0 + \frac{gx_0^2}{2u^2}\right)$$

или

$$y_0 \leq \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2x_0^2}{u^4}\right).$$

Таким образом, при начальной скорости u камнем могут быть достигнуты лишь точки, лежащие ниже точек параболы,

$$y = \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2x^2}{u^4}\right), \tag{2}$$

называемой ***параболой безопасности***.

Точки, лежащие вне ограничиваемой этой параболой области, не могут быть достигнуты.

Достаточно обсудить лишь область $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$. Из (2) видно, что $u^2/(gx_0) \geq 0$. Это в сочетании с (1) означает, что по крайней мере одно значение α_0 больше или равно $\pi/4$. Точка на параболе безопасности может быть достигнута лишь при одном значении $\alpha_0 \geq \pi/4$, а точки ниже параболы безопасности — при двух значениях: α_{01} и α_{02}. Расстояния, на которых соответствующие траектории пересекут горизонтальную плоскость, равны $R_1 = u^2\sin 2\alpha_{01}/g$, $R_2 = u^2\sin 2\alpha_{02}/g$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.2.1. Автомобиль движется равномерно и прямолинейно со скоростью 72 км/ч. Начиная с некоторого момента в течение 20 с он движется с ускорением, проходя за это время путь $s = 800$ м. Найдите ускорение a и расстояние Δl, пройденное автомобилем за последнюю секунду ускоренного движения.

Ответ:

$$a = \frac{2s - 2v_0t}{t^2} = 2\,\text{м/с}; \quad \Delta s = v_0(t - t_1) + \frac{a}{2}(t^2 - t_1^2) = 59\,\text{м}.$$

Задача 1.2.2. Воздушный шар с пассажирами поднимается с ускорением 1 м/с^2. Через 10 с после начала движения один из пассажиров уронил небольшой предмет. Определите время падения предмета и значение его скорости в момент соприкосновения с Землей. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ:

$$t = t_1\,\frac{a \pm \sqrt{a(a+g)}}{g} = 4{,}37\,\text{с}; \quad v = -t_1\sqrt{a(a+g)} = -32{,}9\,\text{м/с}.$$

Задача 1.2.3. Определите угол α броска тела к горизонту, если оказалось, что максимальная высота подъема $h_{\max}=s/4$, где s — дальность полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\alpha=45°$.

Задача 1.2.4*. Мячик брошен горизонтально со скоростью $v=10$ м/с с вершины наклонной плоскости, которая составляет с горизонтом угол $\alpha=45°$. Найти расстояние l до места падения мяча и угол β, который образует скорость мяча в момент падения с наклонной плоскости.

Ответ: $l=\dfrac{2v_0^2\operatorname{tg}\alpha}{g}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=28{,}8$ м;

$\beta=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)-\alpha=18{,}5°$.

Задача 1.2.5. Определите скорость капель дождя относительно Земли, если они оставляют на боковом стекле автомобиля следы под углом 60° к горизонту? Скорость по спидометру 90 км/ч, встречный ветер отсутствует.

Ответ: $v=v_a\operatorname{tg}\alpha=43{,}3$ м/с.

Задача 1.2.6. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты 680 м. Какова начальная скорость пули, если скорость звука 340 м/с? Выстрел произведен вертикально вверх. Сопротивление воздуха движению пули не учитывать. Принять $g=10$ м/с^2. Ответ представьте в единицах СИ.

Ответ: $\upsilon_0=\dfrac{h}{t}+\dfrac{gt}{2}=359$ м / с.

Задача 1.2.7*. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью 10 м/с. В момент падения камня на склон холма угол между направлением скорости камня и горизонтом составил 60°, а разность высоты точек бросания и падения оказалась равной 5 м. Найдите угол между направлением начальной скорости камня и горизонтом. Принять $g=10$ м/с^2. Ответ представьте в градусах и округлите до целого числа.

Ответ: $\alpha=45°$.

Задача 1.2.8. Найти линейную скорость v и центростремительное ускорение a точек на поверхности земного шара: а) на экваторе; б) на широте $\varphi=60°$. Радиус земли принять равным $R=6400$ км.

Ответ: а) $v_0 = \dfrac{2\pi R}{T} = 465\,\text{м / с}$; $a_0 = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = 0{,}034\,\text{м / с}^2$;

б) $v_\varphi = \dfrac{2\pi R\cos\varphi}{T} = 233\,\text{м / с}$; $a_\varphi = \dfrac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2} = 0{,}017\,\text{м / с}^2$.

Задача 1.2.9*. Муравей бежит из муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1=1$ м от центра муравейника, его скорость $v_1=2$ см/с. За какое время t муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2=2$ м от центра муравейника? Ответ представьте в единицах СИ и округлите до целого числа.

Ответ: $t=75$ с.

Задача 1.2.10*. Некоторое тело последовательно совершило два перемещения со скоростями v_1 и v_2. Первое перемещение направлено под углом φ_1 к некоторому выбранному направлению, второе — под углом φ_2. Известно также, что модуль первого перемещения в n раз меньше модуля второго. Определите среднюю скорость изменения модуля перемещения.

Ответ: $v_{\text{ср}} = \dfrac{\sqrt{1+n^2+2n\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\,v_1}{1+nv_1/\upsilon_2}$.

Опираться можно только на то,
что оказывает сопротивление.

Стендаль

1.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Основной смысл динамики Ньютона состоит в том, что именно ускорение, а не скорость обусловливается внешними условиями, описываемыми посредством понятия силы. Рассматриваются законы Ньютона, обсуждаются уравнения динамики поступательного движения произвольной системы тел.

1.3.1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В основе так называемой классической, или ньютоновской, механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Законы Ньютона рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов. Большинство физиков к концу XIX в. были убеждены в том, что они уже знают о природе все, что можно было узнать. Однако наиболее проницательные физики понимали, что в знании классической физики есть слабые места. Так, например, английский физик У. Томсон[1] (он же лорд Кельвин) говорил, что на горизонте безоблачного неба классической физики имеются два темных облачка: неудача попыток создания теории абсолютно черного тела и противоречивое поведение эфира — гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн. Эти факты получили свое объяснение в новых теориях — специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привел к созданию «механики больших скоростей», или, как ее еще называют, *релятивистской механики*. Новая механика не привела, однако,

---

[1] Томсон Уильям (лорд Кельвин) (1824–1907) — один из величайших физиков, основателей термодинамики.

к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе (для скоростей малых по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как ее частный случай и сохранила свое прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями значительно меньшими, чем скорость света.

Аналогично обстоит дело и с соотношениями в классической и квантовой механике, возникшей в 1920-х гг. в результате развития физики атома.

Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс больших по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла в квантовую механику в качестве ее предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало ее ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее (его) изменить это состояние.*

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остается постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения. Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется* ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции*.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчета.*

Инерциальной системой отсчета *является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью).*

Таким образом, *первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной системой отсчета можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из приведенных выше примеров легко понять, что *основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.*

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трем основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции*;
- *существуют инерциальные системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона*;
- *движение относительно. Если тело A движется относительно тела отсчета B со скоростью v, то и тело B, в свою очередь, движется относительно тела A с той же скоростью, но в обратном направлении*: $v=-v'$.

1.3.2. МАССА И ИМПУЛЬС ТЕЛА

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т. е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает различным телам разные по величине ускорения.

Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения. Это свойство тел, как мы уже говорили, называется *инертностью* (следует из первого закона Ньютона).

Мерой инертности тела *является величина, называемая* ***массой.***

Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за *эталон массы* (или сравнить с телом уже известной массы).

Масса — величина ***аддитивная*** *(масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело).*

Система тел, взаимодействующих только между собой, называется ***замкнутой.***

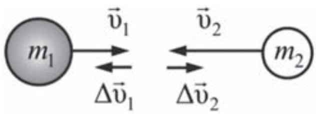


Рис. 1.16
Замкнутая система тел массами m_1 и m_2, сталкивающихся друг с другом со скоростями v_1 и v_2

Рассмотрим замкнутую систему тел массами m_1 и m_2 (рис. 1.16).

Столкнем эти два тела. Опыт показывает, что приращенные скорости $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.29)$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2.$$

При $v \ll c$ масса $m = \text{const}$ (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) = -\Delta(m_2\vec{v}_2).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{v}$ называется ***импульсом тела*** $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.30)$$

1.3.3. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Во многих прикладных задачах требуется знать движение тела под действием заданных сил. Все подобные задачи, вместе взятые, *составляют* ***основную задачу динамики***: найти закон движения тела или системы тел при условии, что действующие силы известны. Решение задачи динамики может быть найдено при помощи второго закона Ньютона. В некоторых случаях эта задача имеет простое решение, в других — ее решение наталкивается на непреодолимые математические трудности.

Математическое выражение ***второго закона Ньютона***:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{1.31}$$

— скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.

Отсюда $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t$ — *изменение импульса тела равно импульсу силы.*

Из (1.31) получим выражение второго закона через ускорение a:

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.$$

Так как $m = \text{const}$, то $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$. Но $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}$, тогда

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.32}$$

Это привычная запись второго закона Ньютона, или ***основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки***.

Принцип суперпозиции, или принцип независимости действия сил

Силы в механике подчиняются ***принципу суперпозиции***. *Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу $\vec{F}$ можно найти из выражения*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.33}$$

Из второго закона Ньютона имеем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i,$$

где $\vec{a}_i$ — ускорение тела под действием силы $\vec{F}_i$. Таким образом, *ускорение тоже подчиняется принципу суперпозиции:*

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i. \tag{1.34}$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было. Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t,$$

или

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t, \tag{1.35}$$

т. е. изменение импульса тела равно импульсу силы.

1.3.4. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению***:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{1.36}$$

Однако третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т. е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при $v \approx c$ (релятивистская механика), а также при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц.

1.3.5. ИМПУЛЬС ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка C, называемая *центром инерции*, или *центром масс*, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение этой точки характеризует распределение масс этой системы.

Радиус-вектор простой системы двух частиц (рис. 1.17) m_1 и m_2 можно найти по формуле $\vec{r}_C = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$.

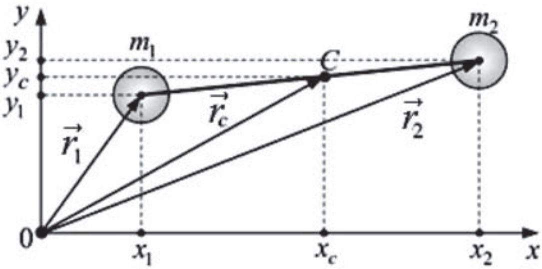


Рис. 1.17
Координаты центра масс системы, состоящей из двух тел массами m_1 и m_2

В общем случае (рис. 1.18) радиус-вектор центра масс системы, состоящей из n материальных точек, равен:

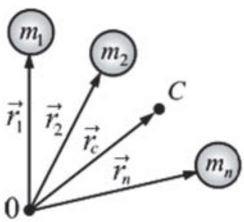


Рис. 1.18
Произвольная система тел с центром инерции C

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \tag{1.37}$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — общая масса системы; n — число точек системы.

При этом не надо путать *центр масс* с центром *тяжести систе-*

мы — с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если g (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы $\vec{v}_C$ равна:

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i.$$

Здесь

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \tag{1.38}$$

— импульс системы тел; $\vec{v}_i$ — скорость i-го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_C,$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{p} = m\vec{v}_C. \tag{1.39}$$

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

Центр масс замкнутой системы движется всегда с постоянной скоростью, поскольку импульс такой системы сохраняется.

Если продифференцировать теперь (1.39) по времени и учесть, что производная импульса системы есть равнодействующая внешних сил, то получим ***уравнение движения центра масс системы*** в общем случае:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Видно, что центр масс системы движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всех частиц системы, под действием суммы всех внешних сил, приложенных к системе.

1.3.6. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

*Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют **внешними телами**, а силы, действующие на систему со стороны этих тел, — **внешними силами**. Силы взаимодействия между телами внутри системы называют **внутренними силами**.*

Результирующая всех внутренних сил, действующих на i-е тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$ — так как i-я точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ — *результирующая всех внешних сил*, приложенных к i-й точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_1^{\text{внеш}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_2^{\text{внеш}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n},$$

....

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_n^{\text{внеш}} + \vec{F}_{n1} + \ldots + \vec{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + \ldots + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}).$$

По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда остается

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Назовем $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}}$ *главным вектором всех внешних сил*, тогда

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \qquad (1.40)$$

Скорость изменения импульса системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел.***

Так как импульс системы $\vec{p} = m\vec{v}_C$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C) = \vec{F}.$$

Можно по-другому записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел***:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}, \qquad (1.41)$$

здесь $\vec{a}_C$ — ускорение центра инерции.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

На основании третьего закона Ньютона, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_C$ и вращательного вокруг *центра инерции*.

1.3.7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

Механическая система называется ***замкнутой*** *(или изолированной), если на нее не действуют внешние силы, т. е. она не взаимодействует с внешними телами.*

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда незамкнута, так как подвержена как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например, Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \equiv 0, \qquad (1.42)$$

отсюда

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_C = \text{const}. \qquad (1.43)$$

Это есть ***закон сохранения импульса****: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции: $\vec{p} = m\vec{v}_C$, тогда

$$m\vec{v}_C = \text{const}. \qquad (1.44)$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но справедлив и для микрочастиц, и для релятивистских скоростей, когда $v \approx c$.

Если система не замкнута, но главный вектор внешних сил $\vec{F} = 0$, *то* $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$, *как если бы внешних сил не было* (например, прыжок из лодки, выстрел из пушки или реактивное движение (рис. 1.19, 1.20)).

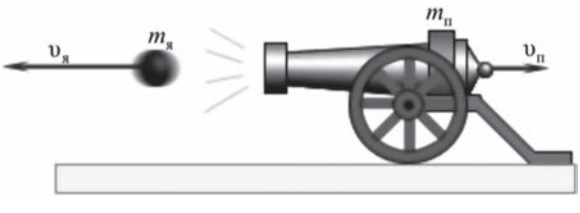


Рис. 1.19
Выстрел из пушки:
скорость ядра $v_я$; масса ядра $m_я$; скорость пушки $v_п$; масса пушки $m_п$. $v_я m_я = v_п m_п$.

Закон сохранения импульса является следствием симметрии пространства — времени, в его основе лежит такое свойство пространства — времени, как *однородность пространства.*

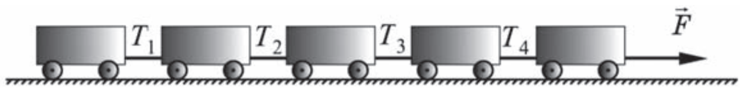
Рис. 1.20
Реактивное движение:
полет шаттла.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Неинерциальной?
2. Почему система отсчета, связанная с Землей, неинерциальная?
3. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
4. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона Ньютона? Почему?
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?
6. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?
7. Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?
8. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?
9. Почему он является фундаментальным законом природы?
10. Каким свойством пространства и времени обусловливается справедливость закона сохранения импульса?
11. Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?
12. В чем физическая сущность первого закона Ньютона?
13. Сообщаете ли вы импульс Земле во время прогулки?
14. Телу какой массы сила 1 Н сообщает ускорение 1 м/с^2?
15. Тело массой 1 кг получило ускорение 1 см/с^2. Чему равна сила, действующая на тело?
16. Может ли КПД быть больше единицы, равным единице?
17. Масса самолета в 100 раз больше массы автомобиля, а скорость автомобиля в 20 раз меньше скорости само-

лета. Чему равна кинетическая энергия самолета или автомобиля?

18. Пусть из ружья в горизонтальном направлении стреляет охотник, стоящий на абсолютно гладком льду. Масса охотника 60 кг. Чему равна его скорость при выстреле?
19. Состав из 5 вагонов паровоз тянет с силой $\vec{F}$, как показано на рисунке. Масса вагона m.

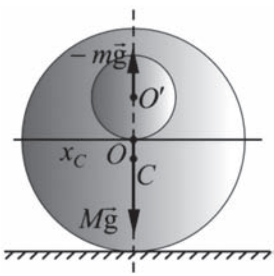


а) Выразите натяжение связей T_1, T_2, T_3 и T_4 через F и m. Трением можно пренебречь.

б) Чему равно ускорение паровоза?

20. Что можно сказать о тормозном пути двух одинаковых грузовиков, движущихся с одинаковой скоростью на одном и том же участке дороги, если один грузовик пустой, а другой полностью загружен? Поясните ответ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Задача 1.3.1. Из однородной круглой пластинки вырезан круг, центр которого O' находится в середине вертикального радиуса большего круга R=0,5 м (см. рис). Определите положение центра масс фигуры, если радиус отверстия r=0,2 м. Каким типом равновесия обладает тело в данном положении?

Дано:
R=0,5 м
r=0,2 м
$OO'=R/2$
x_C — ?

Решение. Представим, что отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделан круг. Тогда центр масс сплошного большого круга находится в точке O и в ней приложена сила тяжести $M\vec{g}$. Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, считаем, что в центре маленького круга должна быть приложена сила $-m\vec{g}$, направленная вверх.

Из соображений симметрии центр масс фигуры находится на вертикальной оси, соединяющей центры кругов OO'. Поместим начало вертикальной оси x в центр большого круга O. Учитывая выражение для центра масс $x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$, получаем

$$x_C = \frac{-m\cdot(R/2)}{M-m} = -\frac{\rho\pi r^2\cdot(R/2)}{\rho\pi h(R^2-r^2)} = -\frac{r^2 R}{2(R^2-r^2)},$$

где ρ — плотность пластинки; h — ее толщина.

Центр масс находится ниже центра большого круга на расстоянии x_C. Равновесие фигуры — устойчивое, поскольку центр тяжести занимает наинизшее из возможных положений. При отклонении круг будет стремиться вернуться в прежнее положение.

$$x_C = -\frac{0{,}2^2\cdot 0{,}5}{2(0{,}5^2-0{,}2^2)} = -0{,}048\,\text{м}.$$

Ответ: $x_C = 0{,}048$ м.

Задача 1.3.2. Стреляя из автомата АК-47, солдат испытывает отдачу: на него действует средняя сила $F_{\text{ср}}$, эквивалентная весу массы $M = 6{,}4$ кг. Учитывая, что масса пули $m = 7$ г и вылетает она с начальной скоростью $v = 850$ м/с, определить скорострельность n автомата.

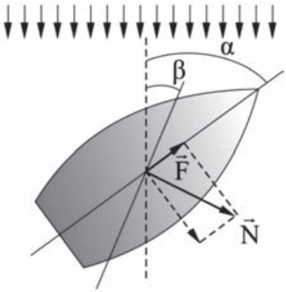
Решение. За время Δt выпускается $\Delta N = n\Delta t$ пуль. Они уносят импульс $\Delta p = mv\Delta N = mvn\Delta t$. По закону сохранения такой же импульс передается автомату. Поэтому по второму закону Ньютона средняя сила отдачи равна:

$$F_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mvn.$$

По условию $F_{\text{ср}} = Mg$. Отсюда находим скорострельность оружия:

$$n = \frac{F_{\text{ср}}}{mv} = \frac{Mg}{mv} = \frac{6{,}5\cdot 9{,}8}{7\cdot 10^{-3}-850} = 10{,}7\,\text{с}^{-1} \approx 642\,\text{мин}^{-1}.$$

Естественно, при стрельбе короткими очередями и, тем более, одиночными выстрелами число выстрелов в минуту будет меньшим.



Задача 1.3.3*. ***Курс бейдевинд.*** Объясните, почему яхта может идти против ветра курсом бейдевинд (от *гол.* bijde wint), когда угол между линией ветра и направлением корма — нос яхты меньше 90°.

Решение. На рисунке угол между направлением скорости ветра и осью яхты равен $\pi-\alpha$. Если плоскость паруса расположена перпендикулярно направлению скорости ветра, то величина силы давления ветра R, действующей на парус, максимальна. Если же плоскость паруса образует с направлением скорости ветра угол β, то сила давления на парус $N=R\sin\beta$. Эта сила заставляет яхту смещаться. Однако реальной движущей силой является проекция силы N на направление оси яхты, она равна

$$F=N\sin(\alpha-\beta),$$

поскольку большая поверхность киля не позволяет яхте смещаться в направлении, перпендикулярном оси. Из этого следует, что

$$F(\beta)=R\sin\beta\sin(\alpha-\beta).$$

Эта функция достигает максимального значения при $\beta=\alpha/2$:

$$F_m=R\sin^2(\alpha/2).$$

В этом случае парус расположен так, что делит точно пополам угол между направлением скорости ветра и осью.

Задача 1.3.4*. ***Кембриджская задача.*** Разберем задачу о движении цепи, решение которой известно с середины XIX в.

Однородная цепь свешивается с края стола. Остальная часть цепи сложена в кучу на краю стола. В начальный момент времени скорость цепи равна нулю. Найти ускорение цепи.

Решение. Направим ось z вертикально вниз, начало координат — на уровне поверхности стола. Пусть z — координата нижнего конца цепи A, $v_z = v$ — проекция скорости точки A. Масса движущейся части цепи $m = \rho z$, ρ — линейная плотность цепи. Исходя из уравнения Мещерского $\frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F}$, получим уравнение

$$\mathrm{d}(zv)/\mathrm{d}t = gz. \qquad (1)$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий начальным условиям $z(0) = 0$, $v(0) = 0$: первоначальная длина свисающей части цепи ничтожно мала.

Для получения решения уравнения (1) умножим обе части на zv. Тогда уравнение можно представить в виде производной функции $F(z, v)$:

$$zv\frac{\mathrm{d}zv}{\mathrm{d}t} = gz^2v, \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$F = \frac{1}{2}(zv)^2 - \frac{1}{3}gz^3,$$

следовательно, $F = C$:

$$\frac{1}{2}(zv)^2 - \frac{1}{3}gz^3 = C. \qquad (2)$$

Согласно начальным условиям $C = 0$. Из (2) находим $v^2 = 2gz/3$. Дифференцируя по времени, получим ускорение движущейся части цепи

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2g}{3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \text{ отсюда } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = \frac{g}{3}.$$

Ответ: $a = g/3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.3.1. При маневрировании космического корабля из его двигателей вырывается струя газов со скоростью $v = 850$ м/с, при этом расход горючего составляет $\Delta m/\Delta t = 0{,}25$ кг/с. Определите реактивную силу двигателей корабля.

Ответ: $F = Q_m v = 212{,}5$ Н.

Задача 1.3.2. Вертолет с ротором, диаметр d которого равен 14 м, находится в воздухе над одной и той же точкой поверхности Земли. Ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха со скоростью $v=10$ м/с. Определите, какая масса воздуха ежесекундно отбрасывается ротором вертолета вертикально вниз (считайте, что диаметр струи приблизительно равен диаметру вращающегося ротора; плотность воздуха $\rho=1{,}32$ кг/м^3).

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \dfrac{\pi d^2}{4} v = 2031 \text{ кг / с}.$

Задача 1.3.3*. На внутренней поверхности сферы радиусом 0,1 м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую составляет угол 45°? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы равен 0,2 ($g \approx 10$ м/с^2).

Ответ: $n = \dfrac{\varphi}{2\pi} \omega = 1{,}55 \text{ об / с}.$

Задача 1.3.4. По наклонной плоскости скользят два груза массами $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны, соответственно: $\mu_1=0{,}7$; $\mu_2=0{,}6$. Определите силу натяжения нити, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$.

Ответ: $F_{\text{нат}} = (\mu_2 - \mu_1) \dfrac{m_1 m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0{,}58 \text{ Н}.$

Задача 1.3.5. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью $v_1=20$ м/с и ускорением $a_1=13$ м/с^2. После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью $v_2=10$ м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара?

Ответ: $a_2 = (k / m) v_2^2 + g = 12 \text{ м / с}^2.$

Задача 1.3.6*. Человек, сидящий в лодке, бросает камень вдоль нее под углом 45° к горизонту. Масса камня 10 кг, масса человека и лодки 100 кг, начальная скорость камня относительно берега 10 м/с. Найдите расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснется воды. Считать, что во время полета камня, лодка движется равномерно.

Ответ: $x = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right) = 11\,\text{м}.$

Задача 1.3.7. Орудие, имеющее массу ствола 500 кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 460 м/с. После выстрела ствол откатывается на 40 см. Определите среднее значение силы торможения, возникающей в противооткатном устройстве. Ответ представьте в килоньютонах.

Ответ: $F_{\text{т}} = m_1 a = 13{,}2$ кН.

Задача 1.3.8. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массами 1 кг и 2 кг. На второй из грузов положен перегрузок массой 0,5 кг. С какой силой будет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, если вся система придет в движение?

Ответ: $F_{\text{д}} = \dfrac{2m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}28\,\text{Н}.$

Задача 1.3.9*. При движении в воздухе пули массой $m = 20$ г ее скорость уменьшилась от $v_0 = 700$ м/с до $v = 100$ м/с за время $\Delta t = 1$ с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления движению k. (Действием силы тяжести пренебрегаем.)

Ответ: $k = \dfrac{m(v_0 - v)}{v v_0 t} = 1{,}7 \cdot 10\,\text{кг}/\text{с}\,.$

Задача 1.3.10. Два одинаковых шарика налетают друг на друга со скоростями v_1 и v_2 под углом α и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найти угол β разлета шариков после соударения.

Ответ: $\beta = \arccos\left(\dfrac{v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 - u_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}{2u_1 u_2}\right)$.

Задача 1.3.11. Через неподвижный блок перекинули нить, к концам которой подвесили два груза массой 200 г. Какой добавочный груз нужно поместить на один из висящих грузов, чтобы каждый из них переместился на 150 см за 5 с.

Ответ: $\Delta m = 2ma/(g-a) = 0{,}005$ кг.

Задача 1.3.12. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концу которого привязали грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг, $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Ответ: $F = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 39{,}2$ Н.

Задача 1.3.13*. Парашютист, масса которого $m = 80$ кг, совершает затяжной прыжок. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста $F_r = kv^2$, где коэффициент сопротивления равен $k = 0{,}6$ кг/м. Начальная скорость парашютиста равна нулю. Определить, через какой промежуток времени t скорость падения парашютиста будет равна 0,9 от скорости v_c установившегося движения.

Ответ: $t = \dfrac{\ln 19}{2}\sqrt{\dfrac{80}{0{,}6 \cdot 9{,}8}} = 5{,}43$ с.

1.4. СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Динамика исследует законы и причины, вызывающие движение тела, т. е. изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. В этой главе анализируются виды и категории сил в природе, рассматриваются силы тяжести, силы упругости, силы трения.

1.4.1. ВИДЫ И КАТЕГОРИИ СИЛ В ПРИРОДЕ

Одно из простейших определений силы: *влияние одного тела (или поля) на другое, вызывающее ускорение, — это* ***сила***.

Однако спор вокруг определения силы не закончен до сих пор. Это обусловлено трудностью объединения *в одном определении* сил, различных по своей природе и характеру проявления. По современным представлениям все явления, протекающие во Вселенной, обусловлены четырьмя типами *сил или взаимодействий*:

- ***гравитационные*** (проявляются в виде сил всемирного тяготения);
- ***электромагнитные*** (обусловливают существование атомов, молекул и макротел);
- ***сильные*** (ответственны за связь частиц в ядрах);
- ***слабые*** (ответственны за распад частиц).

Гравитационные и ***электромагнитные*** силы нельзя свести к другим, более простым, силам, поэтому их называют ***фундаментальными***.

Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Для примера можно привести формулу гравитационной силы взаимодействия двух материальных точек, имеющих массы m_1 и m_2:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.45}$$

где r — расстояние между точками; γ — гравитационная постоянная.

В качестве второго примера можно привести формулу для определения силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2:

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1.46}$$

где k_0 — коэффициент пропорциональности.

Для других сил, например для упругих сил и сил трения, можно получить лишь приближенные, эмпирические формулы.

Силы, рассматриваемые в классической механике, имеют электромагнитную (силы упругости, силы трения) и гравитационную природу (силы тяготения, силы тяжести).

1.4.2. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ВЕС ТЕЛА

В динамике, при изучении движения тел, необходимо знать силы, действующие на тело, и их зависимость от различных величин.

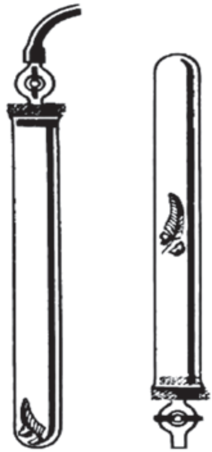


Рис. 1.21
Трубка Ньютона:
вакуумированная колба, в которой находятся перо и дробина. Поскольку оба этих тела движутся с одним и тем же ускорением, то дна трубки они достигают одновременно.

Одна из фундаментальных сил, ***сила гравитации***, проявляется на Земле в виде ***силы тяжести*** — *силы, с которой все тела притягиваются к Земле.*

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением — *ускорением свободного падения* g, как, например, в школьном опыте — «трубка Ньютона» (рис. 1.21). Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует ***сила тяжести*** $m\vec{g}$. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле (различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальная.

Если подвесить тело (рис. 1.22) или положить его на опору, то сила тяжести уравновесится силой $\vec{R}$, которую называют ***реакцией опоры***, или ***подвеса***.

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору *с силой* $\vec{G}$, *которая называется* ***весом тела***. Итак, ***вес тела*** — это сила, с которой тело в состоянии покоя действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле. Поскольку силы $m\vec{g}$ и $\vec{R}$ уравновешивают друг друга, то выполняется соотношение

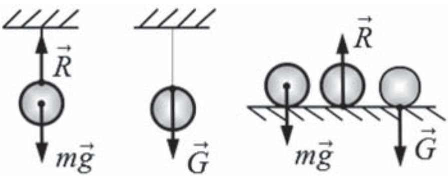


Рис. 1.22
Тело на подвесе (*а*) и на опоре (*б*)

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{G} = -\vec{R}$. Тогда

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{1.47}$$

т. е. *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес — к подвесу или опоре, сила тяжести — к самому телу*. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a). \tag{1.48}$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если g и a направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то $G < mg$, и если наоборот, то $G > mg$. Если же тело движется с ускорением $a = g$, то $G = 0$ — т. е. наступает *состояние невесомости*.

1.4.3. УПРУГИЕ СИЛЫ

Электромагнитные силы в механике проявляют себя как *упругие силы* и *силы трения*.

Под действием внешних сил возникают *деформации* (от *лат.* deformatio — искажение), т. е. смещение частиц тела из равновесных положений. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой*. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, называемого *пределом упругости*. При превышении этого предела деформация становится *пластичной, или неупругой*, т. е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливаются.

Рассмотрим упругие деформации.

В деформированном теле (рис. 1.23) возникают упругие силы, уравновешивающие внешние силы. Под действием *внешней силы* $F_{\text{вн}}$ пружина получает *удлинение* x, в результате в ней возникает *упругая сила* $F_{\text{упр}}$, *уравновешивающая* $F_{\text{внеш}}$.

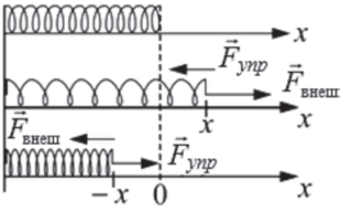


Рис. 1.23
Сжатие или растяжение пружины под действием внешней силы $F_{внеш}$:

сила упругости $F_{упр}$ уравновешивает внешнюю силу $F_{внеш}$, $F_{упр}=-F_{внеш}$.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости $F_{упр}$.

Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется ***законом Гука***:

$$x=\frac{1}{k}F_{внеш}, \qquad (1.49)$$

где k — жесткость пружины. Видно, что чем больше k, тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.

Так как упругая сила отличается от внешней только знаком, т. е. $F_{упр}=-F_{внеш}$, закон Гука можно записать в виде

$$x=-\frac{1}{k}F_{упр},$$

отсюда $F_{упр}=-kx$.

Потенциальная энергия *упругой пружины равна работе, совершенной над пружиной.*

Так как сила не постоянна, элементарная работа $\mathrm{d}A=F\mathrm{d}x$, или $\mathrm{d}A=-kx\mathrm{d}x$.

Гук Роберт (1635–1703) — знаменитый английский физик, сделавший множество изобретений и открытий в области механики, термодинамики, оптики. Установил постоянные точки термометра — точку таяния льда, точку кипения воды. Усовершенствовал микроскоп, что позволило ему осуществить ряд микроскопических исследований, в частности наблюдать тонкие слои в световых пучках, изучать строение растений. Положил начало физической оптике.

Тогда ***полная работа***, *которая совершена пружиной, равна*:

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_0^x kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2}.$$

Закон Гука для стержня

Одностороннее (или продольное) растяжение (сжатие) стержня состоит в увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы $\vec{F}$ (рис. 1.24).

Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать *напряжением* σ:

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S},$$

где $S=\pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения стержня; d — его диаметр.

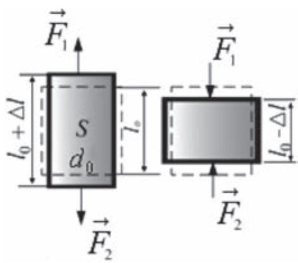


Рис. 1.24
Одностороннее растяжение (сжатие) стержня под действием внешней силы $\vec{F}$

В случае растяжения σ считается положительной, а в случае сжатия — отрицательной. Опыт показывает, что *приращение длины* стержня $\Delta l = l - l_0$ *пропорционально напряжению* σ:

$$\Delta l = \sigma/k.$$

Коэффициент пропорциональности k, как и в случае пружины, зависит от свойств материала и длины стержня.

Доказано, что $k = E/l_0$, где E — *величина, характеризующая упругие свойства материала стержня,* — ***модуль Юнга***[1] (см. приложение). E измеряется в Н/м^2 или в Па.

Тогда приращение длины можно выразить через модуль Юнга:

$$\Delta l = \frac{l_0\sigma}{E},$$

[1] Юнг Томас (1773–1829) — английский физик, врач, астроном и востоковед, один из создателей волновой теории света.

или, обозначив $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ (*относительное продольное растяжение /сжатие*), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma. \qquad (1.50)$$

Закон Гука для стержня: *относительное приращение длины стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*

Заметим, что растяжение или сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров d_0 и d (рис. 1.24).

Относительное поперечное растяжение (*сжатие*)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}.$$

Отношение относительного поперечного растяжения стержня $\frac{\Delta d}{d_0}$ *к относительному продольному растяжению* $\frac{\Delta l}{l_0}$ *называют* ***коэффициентом Пуассона***[1] (см. Основные законы и формулы):

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \qquad (1.51)$$

Потенциальная энергия упруго растянутого (сжатого) стержня

$$E_\text{п} = \int\limits_0^{\Delta l} F dx = \frac{1}{2}\frac{ES}{l_0}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon}{2}V,$$

где V — объем стержня. Объемная плотность потенциальной энергии тела w_σ при растяжении (сжатии) определяется удельной работой по преодолению упругих сил $A_\text{упр}$, рассчитанной на единицу объема тела:

$$w_\sigma = A_\text{упр} = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (1.52)$$

---

[1] Пуассон Симеон Дени (1781–1840) — знаменитый французский физик и математик.

Диаграмма деформации

На рисунке 1.25 показан график зависимости нормального напряжения $\sigma = F/S$ от относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l/l$ при растяжении тела.

В области *0–1* (рис. 1.25) упругие деформации подчиняются закону Гука: напряжение $\sigma_п$, возникающее под действием внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon = E\Delta l/l_0.$$

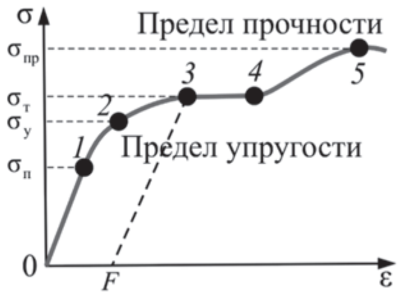


Рис. 1.25
График зависимости нормального напряжения от относительного удлинения

Максимальное напряжение, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости* $\sigma_у$ (точка *2*).

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок *2–3*). За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации, и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, будет представлен параллельной прямой *3F*. Затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок *3–4*). Точка *3* на графике соответствует *пределу текучести* $\sigma_т$.

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело, не разрушаясь, называется *пределом прочности* $\sigma_{пр}$ (точка *5*). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, ее проектируют с *запасом прочности*:

$$\frac{\sigma_{пр}}{\sigma_{доп}} = n,$$

где $\sigma_{доп}$ — допустимое напряжение.

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявить себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим.

Некоторые японские производители получают углеродное волокно, способное выдерживать напряжение $\sigma_{пр}$ до $12 \cdot 10^{11}$ Па. Основное применение таких материалов — устройства для отвода тепла в авиационной и космической технике. Отметим, что алмаз выдерживает напряжение $\sigma_{пр} = 8{,}5 \cdot 10^{11}$ Па. Атомные подводные лодки с корпусом из титанового сплава могут погружаться на глубину $h = 800$ м. Здесь давление достигает величины $P = \rho g h \sim 7{,}3 \cdot 10^{6}$ Па.

«Забывчивость» и «память» металлов

При остаточной относительной деформации $\varepsilon_{ост} = 0{,}1$–$0{,}01$ металл *забывает исходную форму и принимает новую*. На такой «забывчивости» основаны технологические процессы обработки металлов.

В 1953 г. появился сплав Оландера, а в 1963-м — нитинол (сплав никеля с титаном), обладающие способностью *запоминать форму*.

Пусть остаточная деформация стержня при температуре t_1 равна $\varepsilon_{ост} \sim 0{,}1$. При нагревании деформированного стержня из обычного металла до температуры $t_2 > t_1$ сохраняется остаточная деформация. Поэтому его форма не изменяется. Такой же стержень из сплава, запоминающего форму, при температуре $t > t_1$ начинает укорачиваться, а при температуре t_2 остаточная деформация исчезает. Положение интервала (t_1, t_2) на температурной шкале, в котором происходит «вспоминание» исходной формы, можно регулировать. Следовательно, можно деформировать стержень при температуре $t_0 < t_1$ и возвратить к прежней форме в интервале (t_1, t_2).

Как же стержень может сжиматься при нагревании? Если мы растягивали стержень, то он удлинялся вдоль оси, но сжимался в поперечном направлении. «Вспоминая» при нагреве исходную форму, стержень сжимается вдоль оси, а его поперечные размеры возрастают. Как всегда, при нагревании относительное увеличение объема стержня соответствует приращению температуры. При этом относительное изменение линейных размеров достигает значений 0,1. Растянем, например, скобку при комнатной температуре. Состав сплава подберем так, что при температуре 36–37°С скобка вспоминает прежнюю форму — она сжимается. Так можно сращивать костные переломы.

Сплавы, обладающие уникальным свойством запоминать форму, нашли широкое практическое применение в технике и медицине.

1.4.4. ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА*

Под действием силы $\vec{F}$, приложенной касательно к верхней грани, брусок получает *деформацию сдвига* (рис. 1.26).

Назовем величину γ, *равную тангенсу угла сдвига* φ, ***относительным сдвигом***:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x},$$

здесь Δx — абсолютный сдвиг.

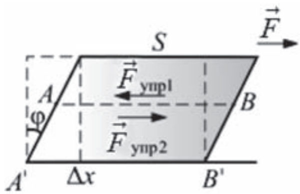


Рис. 1.26
Деформация сдвига тела под действием силы $\vec{F}$:
AB — плоскость сдвига; Δx — абсолютный сдвиг.

При упругих деформациях угол φ бывает очень малым, поэтому $\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$.

Таким образом, *относительный сдвиг*

$$\gamma = \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi.$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска *тангенциального упругого напряжения* τ, которое определяется как *отношение модуля силы упругости к единице площади*:

$$\tau = \frac{F_{упр}}{S}, \qquad (1.53)$$

где S — площадь плоскости AB.

Опытным путем доказано, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau, \qquad (1.54)$$

где G — модуль сдвига, зависящий от свойств материала и равный такому тангенциальному напряжению, при котором $\gamma = \mathrm{tg}\varphi = 1$, а $\varphi = 45°$ (если бы столь огромные упругие деформации были возможны).

Модуль сдвига измеряется так же, как и модуль Юнга в паскалях (Па).

Удельная потенциальная энергия деформируемого тела при сдвиге равна:

$$w_s = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (1.55)$$

1.4.5. СИЛЫ ТРЕНИЯ

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. *Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.*

Различают трение *внешнее и внутреннее.*

Внешнее трение *возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).*

Внутреннее трение *наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).*

Различают ***сухое*** и ***жидкое*** (или ***вязкое***) *трение.*

Сухое трение *возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.*

Жидким (вязким) *называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.*

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на ***трение скольжения*** *и* ***трение качения.***

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 1.27).

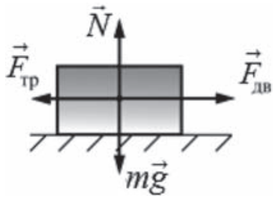


Рис. 1.27
На брусок, лежащий на плоскости, действует сила $\vec{F}_{дв}$

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{дв}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{дв}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{дв}$. В этом случае $\vec{F}_{тр}$ и есть *сила трения покоя*.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю *силы нормального давления N*:

$$F_{тр.пок} = \mu_0 N,$$

где μ_0 — *коэффициент трения покоя*, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре — трение покоя $F_{тр.пок}$ сменится трением скольжения $F_{тр.ск}$ (рис. 1.28):

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (1.56)$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

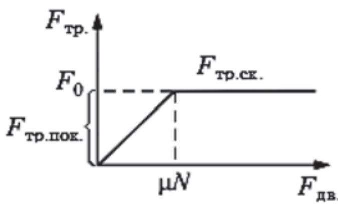


Рис. 1.28
Когда модуль внешней силы $F_{дв}$ превысит значение F_0, брусок скользит

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ здесь значительно меньше: $F_{тр} = \mu N/R$, где R — радиус катящегося тела.

Сила трения скольжения на наклонной плоскости

На тело, находящееся на наклонной плоскости (рис. 1.29), действуют три силы: *сила тяжести* $m\vec{g}$, *нормальная сила реакции опоры* $\vec{N}$ и *сила сухого трения* $\vec{F}_{тр}$. Сила $\vec{F}$ есть *равнодействующая* сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рисунка 1.29 видно, что

$$F = mg\sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha.$$

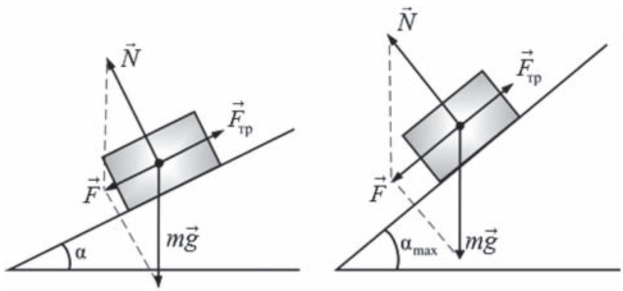


Рис. 1.29
Тело на наклонной плоскости

Если $F < (F_{тр})_{max} = \mu N$ — тело остается неподвижным на наклонной плоскости. *Максимальный угол наклона* α определяется из условия $(F_{тр})_{max} = F$ или $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{max} = \mu,$$

где μ — коэффициент сухого трения.

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

$$F = mg\sin\alpha. \qquad (1.57)$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad (1.58)$$

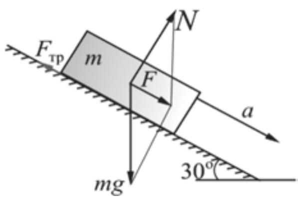
$$F_{ск} = ma = F - F_{тр}. \qquad (1.59)$$

Если дополнительная сила $F_{вн}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

Основные закономерности движения по наклонной плоскости рассмотрены в задаче 1.4.2.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие типы сил (взаимодействий) вы знаете?
2. Чем характеризуется сила в каждый момент времени?
3. Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?
4. Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?
5. На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?
6. Как себя проявляют в механике упругие силы и силы трения?
7. Сформулируйте закон Гука для пружины и для стержня.
8. Что такое модуль Юнга? Коэффициент Пуассона?
9. Каков физический смысл модуля Юнга?
10. Дайте объяснение диаграммы напряжений. Что такое переделы пропорциональности, упругости и прочности?
11. Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого?
12. Какие виды внешнего (сухого) трения вы знаете?
13. Предполагая, что на рисунке угол наклона возрастает до тех пор, пока брусок не начинает скользить, выведите соотношение между ускорением бруска и величинами: μ_s — статический коффициент трения, μ_d — динамический коэффициент трения и g — ускорение свободного падения. Исходя из рисунка и зная, что $\mu_s = 0,3$, а $\mu_d = 0,2 + Av$, где $A = 2$ с/м, найдите:



а) чему равно начальное ускорение;

б) какова предельная скорость.

14. Автомобиль медленно съезжает с горы, имеющей уклон 30°. Он попадает на травяной участок, на котором $\mu_s=0,5$ и $\mu_d=0,48$. Начнет ли автомобиль скользить, и если да, то через какое время скорость скольжения достигнет 60 км/ч?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.4.1. К стальному стержню длиной 30 см и сечением 2 см^2 подвешен груз массой 3 т. Определите относительное удлинение стержня; энергию упругой деформации стержня. Модуль Юнга принять равным $2,2\cdot10^{11}$ Па.

Дано:
$l=0,3$ м
$S=2\cdot10^{-4}$ м^2
$m=3\cdot10^3$ кг
$E=2,2\cdot10^{11}$ Па

ε — ? $E_у$ — ?

Решение. Согласно закону Гука

$$\sigma=E\varepsilon,$$

где $\sigma=F/S$ — механическое напряжение, а F — упругая сила, по модулю равная силе тяжести $F=mg$.

Исходя из этого $\varepsilon=\dfrac{mg}{ES}$,

$$\varepsilon=\frac{3\cdot10^3\cdot9,81}{2,2\cdot10^{11}\cdot2\cdot10^{-4}}=6,69\cdot10^{-4}.$$

Энергия упругой деформации стержня равна работе деформирующей силы $\langle F\rangle$ по удлинению стержня на Δl:

$$E_у=A=\langle F\rangle\Delta l;$$

$$\langle F\rangle=\frac{0+F}{2}=\frac{F}{2}=\frac{mg}{2}.$$

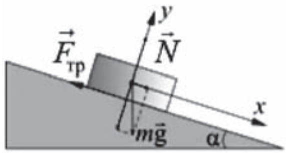
Абсолютное удлинение $\Delta l=\varepsilon l$. Тогда искомая энергия упругой деформации стержня:

$$E_у=\frac{mg}{2}\varepsilon l,$$

$$E_у=\frac{3\cdot10^3\cdot9,81\cdot6,69\cdot10^{-4}\cdot0,3}{2}=2,95\,\text{Дж}.$$

Ответ: $\varepsilon=6,69\cdot10^{-4}$; $E_у=2,95$ Дж.

Задача 1.4.2. Определите, за какое время тело, соскальзывая по наклонной плоскости, пройдет вторую половину пути, если угол наклона $\alpha=30^\circ$, коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}5$, длина наклонной плоскости $s=2{,}8$ м.



Дано:
$\alpha=45^\circ$
$\mu=0{,}5$
$s=2{,}8$ м
$s_2=\dfrac{s}{2}$

t_2 — ?

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося вдоль наклонной плоскости в векторном виде:

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}, \quad (1)$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — сила нормальной реакции опоры; $\vec{F}_{тр}$ — сила трения между телом и поверхностью.

Выбрав оси координат, как показано на рисунке, запишем уравнение (1) в проекциях на оси x и y:

$$x\colon\ ma=mg\sin\alpha-\mu N, \quad (2)$$

$$y\colon\ 0=N-mg\cos\alpha. \quad (3)$$

Решая уравнения (2) и (3) совместно и учитывая, что сила трения $F_{тр}=\mu N$, получим выражение для ускорения:

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

Поскольку начальная скорость $v_{0x}=0$, то $s=at^2/2$, отсюда время, затраченное для прохождения всей наклонной плоскости,

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}.$$

Для первой половины пути с учетом того, что $s_1=s/2$,

$$s_1=\frac{at_1^2}{2}$$

и

$$t_1=\sqrt{\frac{s}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}.$$

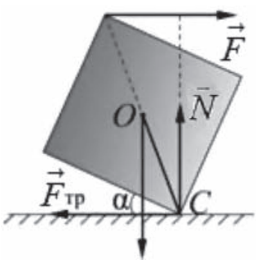
Искомое время

$$t_2 = t - t_1 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Проверим размерность: $[t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м}}\text{с}^2} = \text{с}$,

$$t_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{2{,}8}{9{,}81(0{,}5 - 0{,}5\cdot 0{,}866)}} = 0{,}854\ \text{с}.$$

Ответ: $t_2 = 0{,}854$ с.



Задача 1.4.3. На рисунке изображен кубик, лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости. Масса кубика m, коэффициент трения кубика о плоскость μ. Наша задача — опрокинуть его через ребро, прилагая горизонтально направленную $\vec{F}$. Найдем условие смещения кубика без проскальзывания.

Решение. На кубик действует сила $\vec{F}$, силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Из условия $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = \mathbf{0}$ находим $N = mg$, $F_{\text{тр}} = F$. Скольжение отсутствует при условии

$$F \le \mu N$$

или

$$F \le \mu mg.$$

Найдем теперь область возможных значений величины силы F в зависимости от угла α между нижней гранью кубика и горизонтальной плоскостью. Приравняем к нулю сумму моментов сил относительно прямой, на которой лежит ребро кубика. Плечо силы тяжести $h_0 = R\cos(\alpha + \pi/4)$, плечо силы $\vec{F}$ равно $h = 2R\sin(\alpha + \pi/4)$, где $R = OC$. Из второго условия равновесия находим

$$-2R\sin(\alpha + \pi/4)F + R\cos(\alpha + \pi/4)mg = 0.$$

$$F = (mg/2)\text{tg}(\pi/4 - \alpha).$$

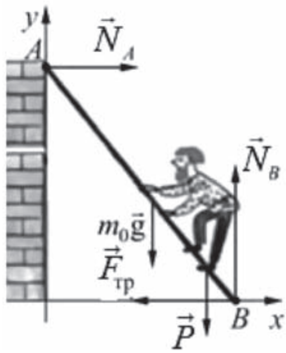
Величина F изменяется от значения $mg/2$ при $\alpha=0$ до значения $F=0$ при $\alpha=\pi/4$.

Следовательно, кубик можно «кантовать» при условии $\mu \geq 1/2$.

А теперь попытаемся перевернуть через ребро призму, имеющую в сечении правильный $2n$-угольник. К ребру верхней грани приложим горизонтально направленную силу $\vec{F}$.

Покажите, что в этом случае $F=(mg/2)\text{tg}(\pi/2n-\alpha)$. Условие «качения» призмы приобретает вид $\mu \geq (1/2)\text{tg}(\pi/2n)$. При увеличении числа граней величина силы F уменьшается и условия качения становятся менее жесткими.

Задача 1.4.4. ***Как не упасть с лестницы.*** Лестница AB массой m_0 упирается в гладкую стену и опирается на шероховатый пол. Под каким наименьшим углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней до самого верха мог подняться человек массой m? Коэффициент трения скольжения лестницы о пол равен μ.



Решение. Изобразим лестницу (см. рис.), примем ее за стержень длиной l, изобразим приложенные к нему силы. Со стороны стены на лестницу действует реакция $\vec{N}_A$, со стороны пола — реакция $\vec{N}_B$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. При скольжении лестницы $F_{тр}=\mu N_B$. Очевидно, лестница не будет скользить при условии

$$F_{тр} \leq \mu N_B. \tag{1}$$

Сила тяжести $m_0\vec{g}$ приложена в середине лестницы. Со стороны человека, стоящего на расстоянии s от конца B лестницы, действует сила давления, равная весу человека $\vec{P}=m\vec{g}$.

Выберем два взаимно перпендикулярных направления по горизонтали и вертикали (оси x и y). Тогда первое условие равновесия имеет вид

$$-m_0g-mg+N_B=0, \tag{2}$$

$$N_A-F_{тр}=0. \tag{3}$$

Запишем далее второе условие равновесия — приравняем нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через точку B (в этом случае моменты сил $F_{тр}$ и N_B равны нулю):

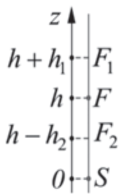
$$mgs\cos\alpha + m_0 g(1/2)\cos\alpha - N_A\sin\alpha = 0. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) получим

$$F_{тр} = \left(\frac{1}{2}m_0 + \frac{s}{l}m\right)g\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \tag{5}$$

Подставляя $F_{тр}$ и N_B из (1) в (2), находим, что человек может подняться наверх ($s=l$), если угол α удовлетворяет условию

$$\mathrm{tg}\,\alpha \geq \frac{2m + m_0}{2\mu(m + m_0)}.$$



Задача 1.4.5*. ***Альпинист на вертикальной стене.*** На рисунке показаны этапы прохождения стенки связкой — двойкой. Веревка закреплена в точке S. Лидер с рюкзаком общей массой $m=100$ кг поднялся на скалу высотой h относительно напарника S, забил в точке страховки F крюк, подвернул веревку через карабин и поднялся еще на расстояние h_1. Длина веревки в этом положении $l_0=h + h_1$, $h=5$ м, $h_1=3$ м. При срыве лидер падает до точки F_2, в которой скорость равна нулю. Качество веревки задается «модулем веревки» $f=kl_0$, где k — коэффициент жесткости веревки, $f=40$ кН. Найдите удлинение веревки $\Delta l=l_2-l_0$ ($l_2=h + h_2$ — длина веревки в положении F_2) и величину силы $F=k\Delta l$, ($k=f/l_0$), действующей на лидера со стороны веревки в точке F_2.

Решение. Выберем начало оси z в точке S. Потенциальная энергия альпиниста $W(z)=mgz + k(l-l_0)^2/2$, где l — длина веревки, $k=f/l_0$. Для оценок трением отдельных нитей веревки друг о друга пренебречь. Тогда полные энергии груза в положениях $z=l_0$ и $z=l_2$ одинаковы. Из закона сохранения полной энергии получим уравнение

$$0 + mgl_0 + 0 = 0 + mg(h-h_2) + k(l_2-l_0)^2/2. \tag{1}$$

Удлинение веревки $\Delta l = h_2 - h_1$, $l_2 = l_0 + \Delta l$, $h - h_2 = 2h - l_0 - \Delta l$. Из уравнения (1) получим:

$$k(\Delta l)^2 - 2mg[\Delta l + 2(l_0 - h)] = 0,$$

отсюда находим

$$k\Delta l = mg(1 + \sqrt{1 + 2f\varepsilon_0 / mg}),$$

где $\varepsilon_0 = 2(l_0 - h)/l_0$ — фактор падения; $2(l_0 - h)$ — «потеря» высоты.

Полагая $\varepsilon_0 = 1{,}6$, получим удлинение веревки $\Delta l = 2{,}42$ м, относительное удлинение $\Delta l / l_0 = 0{,}3$. Величина силы, действующей на альпиниста со стороны веревки, $F = 12{,}18$ кН. Однако максимальное значение усиления, которое может выдержать тело человека, $F_{max} = 5$ кН. Наиболее серьезное падение с фактором $\varepsilon_0 = 2$: высота падения равна удвоенной длине веревки. В этом случае $\Delta l / l_0 = 0{,}34$, $F = 13{,}4$ кН. Из второго закона Ньютона $ma_2 = -mg + k(l_2 - l_0)$ получим $a_2 = 12{,}71g$.

Современная альпинистская веревка содержит сердцевину с модулем f_1 при удлинении $\Delta l_1 = l_1 - l_0$ и модулем $f_2 < f_1$ при дальнейшем удлинении $\Delta l_2 = l_2 - l_0$. Такая веревка позволяет получить приемлемое значение величины силы $F = k_2 \Delta l_2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.4.1. К пружине жесткостью 500 Н/кг подвесили груз массой 1 кг, при этом длина пружины стала 0,12 м. До какой длины растянется пружина, если к ней подвесить еще один груз массой 1 кг?

Ответ: $l_2 = \dfrac{m_2 g}{k} + l_0 = 0{,}14$ м.

Задача 1.4.2. К резиновому шнуру прикреплен шарик массой $m = 50$ г. Длина шнура в нерастянутом состоянии $l = 30$ см. Известно, что под влиянием силы, равной $F = 9{,}8$ Н, шнур растянется на $\Delta l = 1$ см. Считая растяжение шнура пропорциональным приложенной силе, определите, на сколько удлинится шнур при вращении шарика со скоростью $n = 180$ об/мин.

Ответ: $\Delta l_1 = \dfrac{4m\pi^2 n^2 l}{k - 4m\pi^2 n^2} = 5{,}5$ мм.

Задача 1.4.3. При насадке маховика на ось центр тяжести оказался на расстоянии $r = 0{,}1$ мм от оси вращения. В каких пределах меняется сила F давления оси на подшипники, если частота вращения маховика $n = 10$ с$^{-1}$? Масса m маховика равна 100 кг.

Ответ: $F = m(g \pm 4\pi^2 n^2 r)$; $F_{max} = 1{,}02$ кН; $F_{min} = 942$ Н.

Задача 1.4.4. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус R кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения μ колес с покрытием дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости v автомобиля начнется его занос?

Ответ: $v = \sqrt{\mu g R} = 14$ м/с.

Задача 1.4.5. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $s = 5$ м и приобрела скорость $v = 2$ м/с. Определить работу A силы, если масса m вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения $\mu = 0{,}01$.

Ответ: $A = \mu g m s + m v^2/2 = 996$ Дж.

Задача 1.4.6. Вычислить работу A, совершенную при равноускоренном подъеме груза массой $m = 100$ кг на высоту $h = 4$ м за время $t = 2$ с.

Ответ: $A = mh(g + 2h/t^2) = 4{,}72$ кДж.

Задача 1.4.7*. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью $v_1 = 20$ м/с и ускорением $a_1 = 13$ м/с^2, после удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара?

Ответ: $a_2 = \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 \sqrt{a_1^2 - g^2} + g = 12$ м/с^2.

Задача 1.4.8*. Конькобежец массой $m = 45$ кг, находящийся в начале ледяной горки с углом наклона 10°, бросает в горизонтальном, противоположном от горки направлении, камень массой $m=5$ кг со скоростью $v=18$ м/с. На какое расстояние вдоль горки поднимется конькобежец, если известно, что коэффициент трения лезвий коньков о лед равен 0,02? Принять $g=10$ м/с^2.

Ответ: $s=\dfrac{(m_2v_2)^2}{2m_1^2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}=1{,}03$ м.

Задача 1.4.9*. К грузу массой 7 кг подвешен на веревке груз массой 5 кг. Определите модуль силы натяжения середины веревки, если всю систему поднимать вертикально с силой 240 Н, приложенной к большему грузу. Веревка однородна и ее масса равна 4 кг.

Ответ: $T=\dfrac{F\cdot m''}{m'+m''}=\dfrac{240\cdot 7}{9+7}=105$ Н.

Задача 1.4.10. По поверхности льда пущена шайба, которая, пройдя путь $S=400$ м, остановилась через $t=40$ с. Определите коэффициент трения μ шайбы об лед.

Ответ: $\mu=\dfrac{2S}{gt^2}=0{,}05.$

Задача 1.4.11. После включения тормозной системы тепловоз массой $m=100$ т прошел путь $S=200$ м до полной остановки за время $t=40$ с. Определите силу торможения.

Ответ: $F=m\dfrac{2S}{t^2}=25$ кН.

Задача 1.4.12. Определите показания пружинных весов с подвешенной гирей массой $m=8$ кг в опускающемся лифте при торможении с ускорением $a=2$ м/с^2; при разгоне с тем же ускорением.

Ответ: $P_1=m(g+a)=94{,}5$ Н; $P_2=m(g-a)=62{,}5$ Н.

Задача 1.4.13*. Во время вертикального взлета с Луны за первые 10 с ракета проходит расстояние 2 км. Найдите вес космонавта массой 90 кг. Масса луны $7{,}35\cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны 1740 км.

Ответ: $P=m\left(\gamma\dfrac{M_{Л}}{R_{Л}^2}+\dfrac{2s}{t^2}\right)=3{,}75$ кН.

> Когда кончился бензин, автомобиль вынужден был остановиться. Это я тоже сам вчера видел. А после этого еще болтают об инерции, господа! Не едет, стоит, с места не трогается! Нет бензина. Ну не смешно ли?
>
> *Я. Гашек.*
> *Похождения бравого солдата Швейка*

1.5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Как уже отмечалось, законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными. В принципе использование неинерциальных систем отсчета ничем не запрещено. Надо только соответствующим образом подправить законы динамики.

1.5.1. УРАВНЕНИЕ НЬЮТОНА ДЛЯ НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета. А как описать движение тела в неинерциальной системе?

Рассмотрим пример: вы стоите в троллейбусе спокойно. Вдруг троллейбус резко трогается, и вы невольно отклонитесь назад. Что произошло? Кто вас толкнул?

С точки зрения наблюдателя на Земле (в инерциальной системе отсчета), в тот момент, когда троллейбус тронулся, вы остались стоять на месте — в соответствии с первым законом Ньютона.

С точки зрения сидящего в троллейбусе — вы начали двигаться назад, как если бы кто-нибудь вас толкнул. На самом деле никто не толкнул, просто ваши ноги, связанные силами трения с троллейбусом, «поехали» вперед из-под вас и вам пришлось падать назад.

Можно описать ваше движение в инерционной системе отсчета. Но это не всегда просто, так как обязательно нужно вводить силы, действующие со стороны *связей*. А они могут быть самыми разными и ведут себя по-разному — нет единого подхода к их описанию.

А можно и в неинерциальной системе воспользоваться законами Ньютона, если ввести *силы инерции*. Они *фиктивны*. Нет тела или поля, под действием которого вы начали двигаться в троллейбусе. Силы инерции вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем выражение для силы инерции при *поступательном движении* неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения:

- $\vec{a}'$ — ускорение тела массой m относительно неинерциальной системы;
- $\vec{a}''$ — ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной (относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы

$$\vec{a} = \vec{a}'' + \vec{a}'. \tag{1.60}$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй закон Ньютона:

$$\vec{F} / m = \vec{a}'' + \vec{a}',$$

отсюда $\vec{a}' = \vec{F} / m - \vec{a}''$.

Мы можем и $\vec{a}''$ представить в соответствии с законом Ньютона (формально):

$$\vec{a}'' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{\text{ин}}}{m},$$

где $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}''$ — сила, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы.

Тогда получим

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} \tag{1.61}$$

— уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета.

Здесь $\vec{F}_{\text{ин}}$ — фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции не инвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движение тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любому движению системы материальных тел.

1.5.2. ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНАЯ И ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛЫ

Рассмотрим вращение камня массой m на веревке (рис. 1.30).

В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть ***центростремительная сила*** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации):

$$\vec{F}_{\text{цс}} = m\vec{a}_{\text{цс}},$$

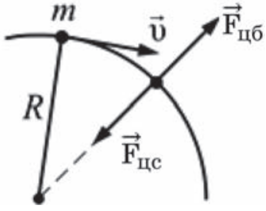


Рис. 1.30
Вращение камня массой m на веревке длиной R:

$\vec{F}_{\text{цс}}$ приложена к камню и направлена к центру вращения; $\vec{F}_{\text{цб}}$ приложена к связи и направлена от центра.

но так как

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{a}_n = v^2 / R,$$

то

$$\vec{F}_{\text{цс}} = m\vec{a}_n,$$

или

$$F_{\text{цс}} = mv^2/R. \qquad (1.62)$$

Сила, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется ***центробежной.***

Центробежная сила — сила инерции первого рода. Центробежной силы, приложенной к вращающемуся телу, не существует.

Центростремительная сила возникла в результате действия камня на веревку, т. е. это сила, приложенная к телу, — *сила инерции второго рода.* Она фиктивна — ее нет.

Центростремительная сила приложена к вращающемуся телу, а центробежная сила — к связи.

С точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета, он не приближается к центру, хотя видит, что $F_{цс}$ действует (об этом можно судить по показанию пружинного динамометра). Следовательно, с точки зрения наблюдателя, в неинерциальной системе есть сила, уравновешивающая $\vec{F}_{цс}$, равная ей по величине и противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n$$

или

$$F_{цб} = mv^2/R.$$

Так как $a_n = \omega^2 R$ (здесь ω — угловая скорость вращения камня, а v — линейная), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \tag{1.63}$$

1.5.3. ВКЛАД ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ В УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

Все мы (и физические приборы тоже) находимся на Земле, вращающейся вокруг своей оси, следовательно, в неинерциальной системе (рис. 1.31). Из рисунка видно, что ускорение свободного падения и сила тяжести зависят от широты местности φ.

В тех случаях, когда требуется исследовать движение тел относительно земной поверхности с достаточно высокой точностью, необходимо учитывать действие сил инерции, вызванных вращением Земли вокруг своей оси.

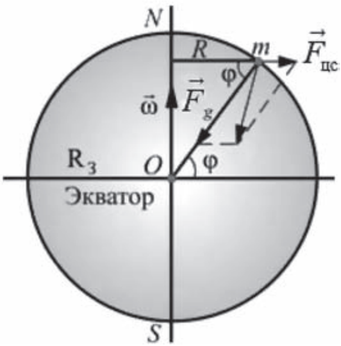


Рис. 1.31
К определению зависимости ускорения свободного падения g и силы тяжести от широты местности φ

Сила тяжести $\vec{P}$ есть результат сложения двух сил: $F_g = mg$ и $F_{цб} = m\omega^2 R$.

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}. \qquad (1.64)$$

Практически наблюдаемое значение g' пропорционально силе тяжести $P = mg'$. Таким образом, *P зависит от широты местности*.

Расстояние R от рассматриваемого тела до оси вращения Земли является функцией географической широты φ:

$$R = R_З \cos\varphi,$$

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_З \cos\varphi,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

Возведем последнее уравнение в квадрат. Подставив полученное таким образом равенство выражения для модулей сил, после несложных преобразований, приведем к формуле

$$g' = \sqrt{g^2 - 2g\omega^2 R_0 \cos\varphi + \omega^4 R_0^2 \cos^2\varphi},$$

которая определяет зависимость ускорения g' свободного падения от широты φ. Согласно этой формуле наибольшее значение,

$$g'_{\max} = g,$$

ускорение свободного падения принимает на полюсах Земли ($g'_{\max} \approx 9{,}83$), а наименьшее — на экваторе, при $\varphi = 0$:

$$g'_{\min} = g - \omega^2 R_З.$$

На экваторе вес тела $P \approx m(g - \omega^2 R_З)$ на 0,3% меньше, чем на полюсах, в результате вращения Земли.

Если бы Земля вращалась с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g / a}$, то на экваторе тела бы находились в состоянии невесомости. Тогда линейная скорость тел была бы равна первой космической скорости v_1.

Прямая линия, вдоль которой направлена нить с подвешенным на ней покоящимся телом, называется *вертикалью*, или *линией отвеса*. Направление силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}'$ совпадает с вертикальным направлением. Поэтому прямая, проходящая через центр Земли и какую-либо точку на ее поверхности, вообще говоря, не совпадает с линией отвеса в этой точке. Вертикаль направлена к центру Земли только в полюсах, где центробежная сила равна нулю, и на экваторе, где эта сила коллинеарна силе тяготения.

Вклад в ускорение свободного падения вносит также и Луна. Вклад Луны в ускорение свободного падения разобран в задаче 1.8.3.

1.5.4. СИЛА КОРИОЛИСА

Земля — дважды неинерциальная система отсчета, поскольку она движется вокруг Солнца и вращается вокруг своей оси. На тела неподвижные действует лишь центробежная сила. В 1829 г. французский физик Г. Кориолис[1] показал, что *на движущееся тело* действует еще одна сила инерции. Ее называют ***силой Кориолиса***. Эта сила всегда перпендикулярна оси вращения и направлению скорости v.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую OA (рис. 1.32).

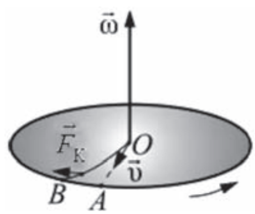


Рис. 1.32
К определению силы Кориолиса

Запустим в направлении от O к A шарик со скоростью $\vec{v}$. Если диск

---

[1] Гаспар-Гюстав де Кориолис (1792–1843) — французский математик, физик, инженер. Больше всего известен работой, посвященной изучению эффекта, названного эффектом Кориолиса, теоремой об ускорениях в абсолютном и относительном движениях, называемой теоремой Кориолиса.

не вращается, шарик должен катиться вдоль OA. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по кривой OB, причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_{\text{К}}$, перпендикулярная направлению движения шарика.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Чтобы заставить шарик катиться вдоль OA, нужно сделать направляющую, выполненную в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что эта сила уравновешивается приложенной к шарику силой инерции

$$\vec{F}_{\text{К}} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \quad (1.65)$$

здесь $\vec{F}_{\text{К}}$ — *сила Кориолиса*[1], также являющаяся силой инерции; $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения диска.

Сила Кориолиса вызывает *кориолисово ускорение*. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$\vec{a}_{\text{К}} = 2[\vec{v}, \vec{\omega}]. \quad (1.66)$$

Ускорение направлено перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ и максимально, если относительная скорость точки $\vec{v}$ ортогональна угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю,

[1] Вывод формулы для расчета силы Кориолиса можно посмотреть на примере задачи 1.5.1.

если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ равен нулю или π либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю.

Следовательно, в общем случае, при использовании уравнений Ньютона во вращающейся системе отсчета, возникает необходимость учитывать центробежную, центростремительную силы инерции, а также кориолисову силу.

Таким образом, $\vec{F}_{\text{К}}$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Сила Кориолиса возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета.

Влияние кориолисовых сил необходимо учитывать в ряде случаев при движении тел относительно земной поверхности. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обусловливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах. Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. Например, при выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в Северном полушарии и к западу — в Южном. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в восточном направлении.

Возникновение некоторых циклонов в атмосфере Земли происходит в результате действия силы Кориолиса. В Северном полушарии все устремляющиеся к месту пониженного давления воздушные потоки отклоняются вправо по своему движению.

Сила Кориолиса действует на тело, *движущееся вдоль меридиана, в Северном полушарии вправо и в Южном влево* (рис. 1.33).

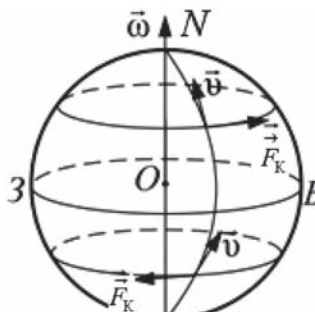


Рис. 1.33
Действие силы Кориолиса на тело, движущееся вдоль меридиана в Северном полушарии вправо, в Южном влево

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в Северном полушарии и левый в Южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника.

В 1851 г. французский физик Ж. Фуко[1] установил в Пантеоне Парижа маятник массой 28 кг на тросе длиной 67 м (маятник Фуко). Такой же маятник массой 54 кг на тросе длиной 98 м более 20 лет назад, к сожалению, был демонтирован в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга в связи с передачей собора в собственность церкви.

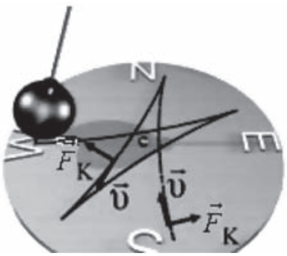


Рис. 1.34
Влияние силы Кориолиса на отклонение маятника Фуко

Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе (рис. 1.34). На Северном полюсе сила Кориолиса будет направлена вправо по ходу маятника. В итоге траектория движения маятника будет иметь вид розетки.

Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так: плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот.

Таким образом, вращение плоскости качаний маятника Фуко дает непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

Если тело удаляется от оси вращения, то сила $\vec{F}_К$ *направлена противоположно вращению и замедляет его.*

Если тело приближается к оси вращения, то $\vec{F}_К$ *направлена в сторону вращения.*

---

[1] Фуко Жан Бернар Леон (1819–1868) — французский физик и астроном, член Парижской АН. Известен прежде всего как создатель маятника, названного маятником Фуко.

С учетом всех сил инерции уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета (1.61) примет вид

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{К}}, \tag{1.67}$$

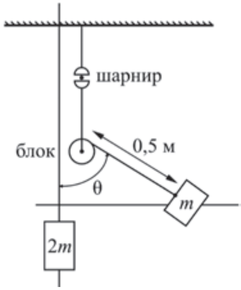
где $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$ — сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета; $\vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{a}_n$ и $\vec{F}_{\text{К}} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$ — две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета; $\vec{a}'$ — ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?
2. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
3. Запишите уравнение Ньютона для неинерциальной системы с учетом всех сил инерции.
4. Какую систему отсчета называют инерциальной? Неинерциальной?
5. Какая физическая величина характеризует инертность тел?
6. В чем проявляется инертность тел?
7. Как изменяется сила притяжения в зависимости от расстояния до центра Земли? В каких точках Земли сила тяготения равна силе тяжести?
8. В каких точках Земли наблюдается наибольшая разность между силой тяготения и силой тяжести?
9. К каким последствиям привело бы внезапное исчезновение силы тяготения?
10. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?
11. В Северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?
12. Самолет, двигаясь со скоростью v, совершает в вертикальной плоскости мертвую петлю радиусом r. Как направлены сила реакции опоры в нижней точке; в верхней точке и нормальное (центростремительное) ускоре-

ние в нижней и в верхней точке траектории?

13. Тело массой m движется по окружности в плоскости xz (блок вращается с телом массой m). Тело массой $2m$ находится на оси вращения (см. рис.). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением в блоке, найдите период обращения тела массой m. Чему равен угол θ?

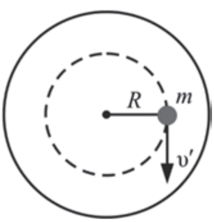


ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.5.1*. *Сила Кориолиса.* Найти силу, действующую на частицу массой m относительно системы отсчета, вращающейся по окружности радиуса R, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Частица привязана к оси вращения нитью. Скорость частицы относительно вращающейся системы равна v'. Угловая скорость вращения ω.

Дано:
m
v'
ω
$F_К$ — ?

Решение. Скорость частицы относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета $v = v' + \omega R$. Для того, чтобы частица двигалась относительно неподвижной системы по окружности, на нее должна действовать сила, направленная к центру, — сила натяжения нити F. Величина этой силы равна



$$F = ma_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} =$$

$$= \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R.$$

Ускорение тела относительно диска $a' = v'^2/R$.

Тогда сила натяжения нити

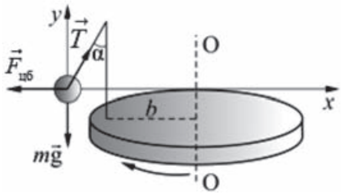
$$F = ma_n' + m\omega^2 R + 2mv'\omega,$$

отсюда $ma_n' = F - m\omega^2 R - 2m\omega v'$.

Таким образом, во вращающейся системе частица ведет себя так, как если бы на нее, кроме центробежной силы $F_{цб} = m\omega^2 R$, действовала еще и $F_К = 2mv'\omega$ — кориолисова сила инерции.

В векторной форме сила Кориолиса: $\vec{F}_К = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$.

Задача 1.5.2. Вертикальный стержень укреплен на вращающемся в горизонтальной плоскости с частотой $n = 1$ с$^{-1}$ столике. К вершине стержня привязана нить длиной $l = 10$ см с шариком (см. рис.). Определить расстояние b от стержня до оси вращения, если угол, который составит нить с вертикалью, $\alpha = 30°$.



Дано:
$n = 1$ с$^{-1}$
$l = 0{,}1$ м
$\alpha = 30°$
b — ?

Решение. Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся столиком. В этой системе отсчета на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и центробежная сила $\vec{F}_{цб}$, направленная по радиусу от оси вращения (см. рис).

Поскольку шарик неподвижен в системе отсчета, связанной с вращающимся столиком, его ускорение $\vec{a}' = 0$, и Второй закон Ньютона в векторном виде запишем так:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{цб} = 0.$$

Это уравнение в проекции на выбранные оси имеет вид:

$$\text{ось } x: \ T\sin\alpha - \frac{mv^2}{R} = 0,$$

где $R = l\sin\alpha + b$,

$$\text{ось } y: \ T\cos\alpha - mg = 0.$$

Используя эти уравнения, получим

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = v^2/R = 4\pi^2 n^2 (b + l\sin\alpha),$$

при этом необходимо учесть, что $v=\omega R=2\pi nR$ и $R=b+l\sin\alpha$, где R — расстояние от центра отклоненного шарика до оси вращения; $\omega=2\pi n$ — угловая скорость. Из этого уравнения получаем искомое расстояние от стержня до оси вращения:

$$b=\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\pi^2n^2}-l\sin\alpha,$$

$$[b]=\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{с}^{-2}}-\text{м}\right]=\text{м},$$

$$b=\frac{9{,}81\cdot 0{,}577}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 1^2}-0{,}05=0{,}094\,\text{м}.$$

Ответ: $b=0{,}094$ м.

Задача 1.5.3. С какой скоростью движется автомобиль по выпуклому мосту радиусом кривизны $R=80$ м, если в верхней точке сила его давления на мосту уменьшается вдвое по сравнению с движением по горизонтальному участку пути?

Дано:
$R=80$ м
$N_1=\dfrac{N_2}{2}$
v — ?

Решение. Направив ось x к центру кривизны траектории, запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$ma_n=mg-N_1.$$

На горизонтальном участке пути сила давления на поверхность $N_2=mg$, следовательно, $N_1=mg/2$ или

$$mg-N_1=\frac{mv^2}{R}, \qquad (1)$$

учли, что $a_n=\dfrac{mv^2}{R}$.

Воспользовавшись полученным соотношением $N_1=mg/2$, запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{mv^2}{R}=mg-\frac{1}{2}mg,$$

откуда искомая скорость автомобиля $v=\sqrt{\dfrac{Rg}{2}}$.

Проверим размерность: $[v] = \sqrt{\frac{м \cdot м}{с^2}} = м / с.$

Вычисления: $v = \sqrt{\frac{80 \cdot 9{,}81}{2}} = 19{,}8\ м / с.$

Ответ: $v = 19{,}8$ м/с.

Задача 1.5.4. Поезд массой $m = 3000$ т движется на северной широте $\varphi = 30°$. С какой боковой силой давят рельсы на колеса поезда, если скорость поезда $v = 60$ км/ч и направлена вдоль меридиана? В каком направлении и с какой скоростью должен двигаться поезд, чтобы сила бокового давления была равна нулю?

Дано:
$m = 3 \cdot 10^6$ кг
$\varphi = 30°$
а) $v = 17$ м/с;
б) $R = 0$

а) $\vec{F}$ — ?; б) $\vec{v}$ — ?

Решение. а) Боковое давление поезда на рельс обусловлено силой Кориолиса. Оно действует на правый (по ходу поезда) рельс независимо от того, движется поезд на север или на юг.

То есть $F_{бок} = F_К = 2mv\omega\sin\varphi$;

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = 24\ ч = 86\,400\ с;$$

$$F_{бок} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot \sin 30°}{86\,400} = 3{,}71\ кН.$$

б) Сила бокового давления равна 0, когда сила Кориолиса направлена противоположно $F_{цб}$. Это происходит, когда поезд движется по параллели с востока на запад. Тогда $F_{цб} = F_К$.

$$m\omega^2 r = 2mv\omega,$$

отсюда $r = R\cos\varphi$.

$$\omega R\cos\varphi = 2v,$$

отсюда $v = \frac{\omega R\cos\varphi}{2}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\quad v = \frac{\pi R\cos\varphi}{T};$$

$$v = \frac{3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^3 \cdot \cos 30°}{24} = 722\ км / ч.$$

Ответ: а) $F_{бок} = 3{,}71$ кН; б) $v = 722$ км/ч.

Задача 1.5.5 Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиусом R. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение a_0, и тело начало скользить вниз. Найти скорость тела относительно шара в момент отрыва.

Дано:
a_0
R
$v-?$

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с шаром. В этой системе отсчета в начальный момент времени

$$v_0=0.$$

По закону сохранения энергии $mg(R-R\cos\alpha)=mv^2/2$.

$$mv^2=mgR\cos\alpha;\quad 2mgR-2mgR\cos\alpha=mv^2;$$

$$2mgR=3mgR\cos\alpha,$$

отсюда $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$.

$$v=\sqrt{gR\cos\alpha}=\sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Ответ: $v=\sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.5.1. Центробежная стиральная машина наполнена мокрым бельем и вращается со скоростью 1200 об/мин. Во сколько раз центростремительная сила к моменту отрыва капли воды от ткани больше веса капли, если капля находится на расстоянии 0,3 м от оси вращения?

Ответ: $F_{ц}/F_{тяж}=483$.

Задача 1.5.2. В вертикальной плоскости вращается груз весом 20 Н с частотой 2 об/с. Шнур, на котором подвешен груз, может выдержать нагрузку 320 Н. Выдержит ли шнур натяжения в те моменты, когда груз проходит через высшую и низшую точки окружности? Определите максимальную и минимальную силы натяжения шнура, если его длина равна 1 м.

Ответ: $F_{max}=368{,}6$ Н; $F_{min}=328{,}6$ Н.

Задача 1.5.3. Поезд движется по закруглению радиусом 500 м. Ширина железнодорожной колеи 152,4 см. Наружный рельс расположен на 12 см выше внутреннего. При какой скорости движения поезда на закруглении колеса не оказывают давления на рельсы?

Ответ: $v = 19{,}64$ м/с.

Задача 1.5.4. Платформа движется по закруглению с линейной скоростью v. Шарик, подвешенный на нити на этой платформе, отклоняется на угол α. Определите радиус закругления.

Ответ: $R = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$.

Задача 1.5.5. Какова должна быть скорость движения мотоциклиста, чтобы он мог описывать горизонтальную окружность на внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом r, если при езде по горизонтальной поверхности с таким же коэффициентом трения скольжения минимальный радиус поворота при скорости v_1 равен R?

Ответ: $v \geq \dfrac{g}{v_1}\sqrt{Rr}$.

Задача 1.5.6. Груз, подвешенный к невесомой нити, описывает горизонтальную окружность с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до центра окружности равно h. Определите число оборотов маятника за 1 с.

Ответ: $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$.

Задача 1.5.7. Определите наименьший радиус R круга, по которому сможет проехать велосипедист со скоростью $v = 30$ км/ч, если коэффициент трения скольжения между колесами и землей $\mu = 0{,}25$. Определите также наибольший угол φ наклона велосипеда, при котором велосипедист еще не будет падать.

Ответ: $R = \dfrac{v^2}{\mu g} = 27{,}8$ м; $\varphi = \operatorname{arctg} \mu = 14°$.

Задача 1.5.8. Спутник движется по орбите так, что он все время находится над одной и той же точкой экватора и той же высоте. Каково расстояние от такого спутника до центра Земли? Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Ответ представьте в мегаметрах и округлите до целого числа.

Ответ: $r = \sqrt[3]{\dfrac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 42 \cdot 10^6$ м.

Задача 1.5.9. На сколько следует приподнять наружный рельс по отношению к внутреннему на закруглении пути при скорости движения поезда 54 км/ч и радиусе кривизны 300 м? Ширина пути 1,524 м. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в сантиметрах и округлите до десятых.

Ответ: $h = d\dfrac{v^2}{gR} = 0{,}114$ м.

Задача 1.5.10. На внутренней поверхности сферы радиусом 0,1 м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую составляет угол 45°? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы равен 0,2.

Ответ: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{9{,}7}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}55$ с$^{-1}$.

Задача 1.5.11. С какой скоростью движется конькобежец по закруглению ледяной дорожки радиусом 10 м, если, проходя этот поворот, он наклоняется к горизонту под углом 76°?

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{gR}{\operatorname{tg}\alpha}} = 4{,}9$ м / с.

Задача 1.5.12. Мотоциклист совершает крутой поворот, двигаясь по дуге окружности радиусом 20 м со скоростью 20 м/с. Под каким углом к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие? Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}(v^2/gR) = 63{,}9°$.

Задача 1.5.13. Во время взлета с Земли вес космонавта становится равным 5 mg. Сколько времени длится разгон, если ракета поднимается за это время равноускоренно на высоту 13,5 км?

Указание: решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с ракетой.

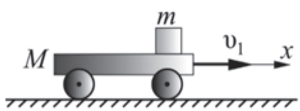
Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{s}{2g}} = 26{,}2$ с.

Задача 1.5.14. При вращении горизонтального диска, лежащего на расстоянии $R = 10$ см от центра грузик слетает при частоте вращения $n = 1$ с$^{-1}$. Найдите предельный коэффициент трения μ_0, при котором начнется проскальзывание.

Указание: решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском.

Ответ: $\mu_0 = \dfrac{4\pi^2 n^2 R}{g} = 0{,}402$.

Задача 1.5.15. На край тележки, движущейся с ускорением $a = 3{,}5$ м/с^2, поставили кубик. Определите длину тележки, если кубик соскальзывает с нее за 2 с. Коэффициент трения между кубиком и тележкой $\mu = 0{,}3$.



Указание: решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой.

Ответ: $l = \dfrac{t^2(a - \mu g)}{2} = 1{,}11$ м.

Задача 1.5.16. Определите ускорение свободного падения на поверхности Солнца, если радиус Солнца $r = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, а радиус земной орбиты $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м.

Ответ: $g_C = \dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2 r^2} = 271$ м / с^2.

Задача 1.5.17. На экваторе некоторой планеты тело весит в 1,5 раза меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, если период ее вращения вокруг оси составляет 20 часов.

Ответ: $\rho = \dfrac{9\pi}{\gamma T^2} = 81\,\text{кг}/\text{м}^3$.

Суровость законов в Российской империи смягчается их неукоснительным неисполнением.

Н. Е. Салтыков-Щедрин

1.6. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этой главе мы начинаем знакомство с простейшими формулами энергии — потенциальной энергией тела в силовом поле и кинетической энергией движущегося тела. Показывается, что законы сохранения справедливы для изолированных систем и в целом обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени — однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени.

1.6.1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является *энергия*. Кинетическая энергия $E_к$ — физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Уравнение движения тела массой m под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид (рис. 1.35)

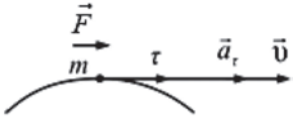


Рис. 1.35
Движение тела массой m под действием силы $\vec{F}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

или, в проекции на направление движения,

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau. \qquad (1.68)$$

Умножив обе части равенства (1.68) на $v\mathrm{d}t = \mathrm{d}r$, получим

$$mv\mathrm{d}v = F_\tau \mathrm{d}r.$$

Левая часть равенства есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$mv\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

тогда

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.$$

Если система замкнута, то $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$ и $F_\tau = 0$, тогда и $\mathrm{d}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = 0$.

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы, равен нулю, то эта функция может служить характеристикой состояния данной системы.

Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется ***кинетической энергией***:

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1.69)$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

Кинетическая энергия — величина аддитивная: $E_\text{к} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i v_i^2}{2}$, где $E_\text{к}$ — относительная величина, ее значение зависит от выбора системы координат (так же как и скорость $\vec{v}$ — относительная величина).

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т. е. в ньютонах на метр 1 Н·м = 1 Дж.

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица — электрон-вольт (эВ). 1 эВ = $1{,}6\cdot 10^{19}$ Дж.

При решении задач полезна формула, связывающая кинетическую энергию с импульсом p. Получим ее:

$$\frac{mv^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{m^2v^2}{2m},$$

отсюда

$$E_{\text{к}}=\frac{p^2}{2m}. \qquad (1.70)$$

Связь кинетической энергии с работой и мощностью

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда элементарная работа по перемещению тела из точки 1 в точку 2 будет равна произведению силы F на перемещение $\mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}A=F\mathrm{d}r,$$

отсюда $A=\int_1^2 F\mathrm{d}r$.

$$F=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}r=v\mathrm{d}t.$$

$$A=\int_1^2 F\mathrm{d}r=m\int_1^2 v\mathrm{d}v=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем

$$A=\int_1^2 F\mathrm{d}r=E_{\text{к}2}-E_{\text{к}1}.$$

Следовательно, ***работа*** *силы, приложенной к телу на пути r, численно равна изменению кинетической энергии этого тела*:

$$A=\Delta E_{\text{к}}. \qquad (1.71)$$

Или изменение кинетической энергии $dE_{\text{к}}$ равно работе внешних сил:

$$\mathrm{d}K=\mathrm{d}A.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется в джоулях.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется *мощностью*, т. е. ***мощность** есть работа, совершаемая в единицу времени.*

Мгновенная мощность $N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, или $N = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Fv$.

Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$.

Измеряется мощность в ваттах; 1 Вт=1 Дж/с.

1.6.2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И СИСТЕМЫ

Кроме контактных взаимодействий, наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством физических полей (особая форма материи). *Каждое тело* создает вокруг себя поле, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.

*Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела, называются **консервативными**.*

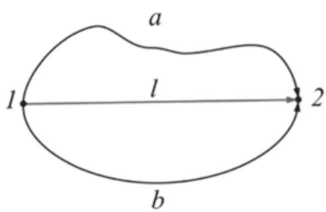


Рис. 1.36
Работа консервативных сил по перемещению тела из точки *1* в точку *2* не зависит от формы пути, а зависит от положения начальной и конечной точки

Пусть A — работа консервативных сил по перемещению тела из точки *1* в точку *2* (рис. 1.36).

$$A_{1a2}=A_{1b2}=A_{1l2}=A_{12}.$$

Изменение направления движения на противоположное вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0. \qquad (1.72)$$

Интеграл по замкнутому контуру L $\oint \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ называется *циркуляцией вектора* $\vec{F}$. Следовательно, ***если циркуля-***

***ция** какого-либо вектора силы **равна нулю**, то эта **сила консервативна**.*

Центральные силы являются консервативными независимо от их природы. *Сила называется центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой центром сил.

Консервативные силы: гравитационные силы тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля и т. д.

Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля и т. д.

***Консервативная система** — система, внутренние силы которой только консервативные, внешние — консервативные и стационарные.*

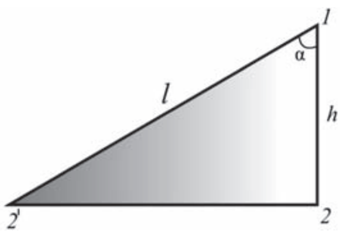


Рис 1.37
Работа силы тяжести по перемещению тела массой m из положения *1* в положение *2:*
$A_{12}=A_{12'}=mgh$.

Пример консервативных сил — гравитационные силы (рис. 1.37).

Работа силы тяжести $A_{12}=mgh$. С другой стороны, $A_{12'}=mgl\cos\alpha=mgh$, где α — угол между силой $m\vec{g}$ и направлением перемещения.

Таким образом, из примера видно, что работа не зависит от формы пути, значит, силы консервативны, а поле этих сил потенциально.

Здесь полезно вспомнить золотое правило механики, согласно которому ни один из простых механизмов не дает выигрыша в работе; во сколько раз выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии.

1.6.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Итак, кинетическая энергия $E_к$ — энергия движения. Потенциальная энергия $E_п$ — энергия взаимодействия тел или частиц тела, зависящая от их взаимного расположения. Можно говорить о потенциальной энергии тела массой m в поле тяжести Земли, заряда q в электростатическом поле, о потенциальной энергии тела в поле упругой силы пружины и т. д.

Если на систему материальных тел действуют *консервативные силы*, то можно ввести понятие *потенциальной энергии*.

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, т. е. при изменении положения тел относительно системы отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

$$A_{12}=E_{п1}-E_{п2}, \qquad (1.73)$$

здесь потенциальная энергия $E_п(x, y, z)$ — *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил*.

Итак, $E_к$ определяется скоростью движения тел системы, а U — их взаимным расположением.

Из (1.7.3) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A=-\mathrm{d}E_п.$$

Нет единого выражения для $E_п$. В разных случаях она определяется по-разному.

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Работа тела при падении $A=mgh$. Или $A=E_п-E_{п0}$. Условились считать, что на поверхности Земли ($h=0$) $E_{п0}=0$, тогда $E_п=A$, т. е.

$$E_п=mgh. \qquad (1.74)$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле

$$E_п=-\gamma\frac{Mm}{r}. \qquad (1.75)$$

На рисунке 1.38 изображена диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m.

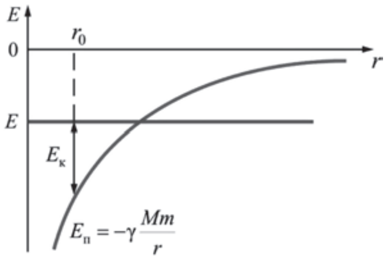


Рис. 1.38
Диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m:
полная энергия $E = E_к + E_п$.

Здесь полная энергия $E = E_к + E_п$. Отсюда кинетическая энергия

$$E_к = E - E_п.$$

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины, стержня)

Найдем работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости, $F_{упр} = -kx$, где k — коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$ (знак «−» говорит о том, что работа совершена над пружиной). Тогда

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \qquad (1.76)$$

т. е. $A = E_{п1} - E_{п2}$. Примем $E_{п2} = 0$, $E_{п1} = E_п$, тогда

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \qquad (1.77)$$

На рисунке 1.39 показана диаграмма потенциальной энергии пружины.

Здесь $E = E_к + E_п$ — полная механическая энергия системы, $E_к$ — кинетическая энергия в точке x_1.

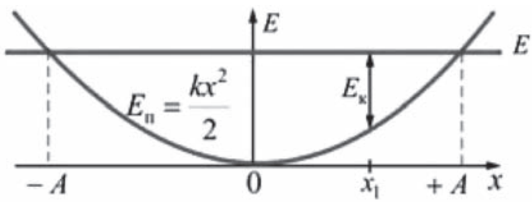


Рис. 1.39
Диаграмма потенциальной энергии пружины:
полная энергия $E = E_к + E_п$

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.***

Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$, действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $E_п$. Значит, между силой $\vec{F}$ и $E_п$ должна быть связь $dA = \vec{F}d\vec{r}$, с другой стороны, $dA = -dE_п$, следовательно, $\vec{F}d\vec{r} = -dE_п$, отсюда

$$\vec{F} = -\frac{dE_п}{d\vec{r}}. \quad (1.78)$$

Для компонент силы по осям x, y, z можно записать:

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x}; \;\; F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y}; \;\; F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, получим

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_п = -\mathrm{grad}\, E_п, \quad (1.79)$$

где ∇ — оператор Гамильтона[1] (оператор набла),

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент — это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции. Знак «−» показывает, что вектор $\vec{F}$ направлен в сторону наибыстрейшего уменьшения $E_п$.

Следовательно, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком «−»*:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_п.$$

---

[1] Гамильтон Уильям Роуэн (1805–1865) — ирландский математик и физик, член Ирландской АН. Физические исследования в области оптики и механики. Разработал теорию оптических явлений («математическую оптику»).

1.6.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В 1840-х гг. трудами ученых Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц.

Силы взаимодействия между частицами ($\vec{F}^{\text{внутр}}$) — консервативные. Кроме внутренних сил, на частицы действуют внешние консервативные и неконсервативные силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда для этой системы можно найти полную энергию системы

$$E = E_{\text{к}} + U_{\text{внутр}} + E_{\text{внеш}} = \text{const}. \tag{1.80}$$

Для механической энергии ***закон сохранения*** звучит так: ***полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остается постоянной.***

Для *замкнутой системы*, т. е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать

$$E = E_{\text{к}} + U_{\text{внутр}} = \text{const}, \tag{1.81}$$

т. е. ***полная механическая энергия*** *замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы,* ***остается постоянной.***

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется — частично она переходит в другие виды энергии, неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной***, сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии.***

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остается постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т. д.). Здесь действует общий закон сохранения энергии.

Этот процесс хорошо демонстрирует маятник Максвелла (рис. 1.40).

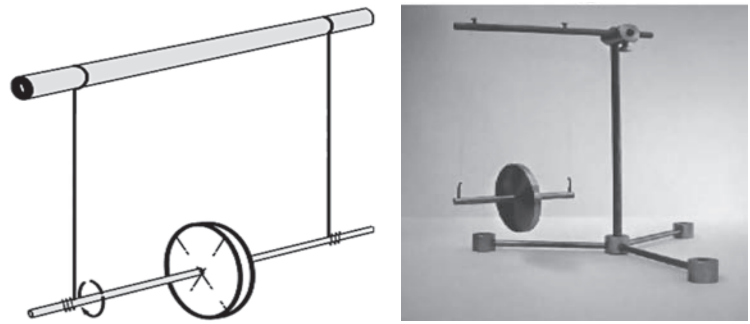


Рис. 1.40
Маятник Максвелла

Роль консервативной внешней силы здесь играет гравитационное поле. Маятник прекращает свое движение из-за наличия внутренних неконсервативных сил (сил трения, сопротивления воздуха).

1.6.5. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Мерой устойчивости тела в положении равновесия является наименьшее значение работы, совершаемой внешней силой, для того, чтобы переместить тело в такое положение, откуда после действия силы оно уже не сможет вернуться в исходное состояние. *Из двух тел* ***более устойчивым*** *является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется совершение большей работы.*

Механическая система будет находиться в ***равновесии****, если на нее не будет действовать сила.* Это условие *необходимое*, но *не достаточное*, так как система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении.

В замкнутой системе полная энергия $E = \text{const}$. Поэтому кинетическая энергия $E_к$ может возрастать только за счет убывания потенциальной энергии $E_п$ (кинетическая энергия не может быть отрицательной).

Если система находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а $E_п = E_{п\,\min}$, то без воздействия извне, тела системы не могут прийти в движение, т. е. система будет находиться в равновесии.

Таким образом, для замкнутой системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует $E_{\text{п}\,\min}$.

Рассмотрим пример, изображенный на рисунках 1.41 и 1.42 (Земля — шарик, скользящий без трения по изогнутой проволоке). В этом случае взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью одной величины — координаты x.

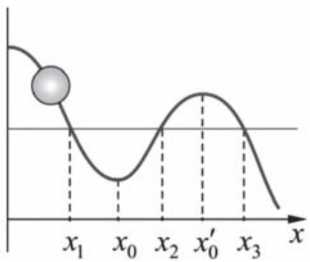


Рис. 1.41
Система «Земля — шарик, скользящий без трения по проволоке»

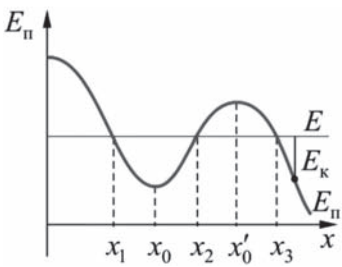


Рис. 1.42
Полная кинетическая и потенциальная энергии системы

Итак, по определению, $F_x=0$ — условие равновесия системы. Из (1.79) имеем $|\vec{F}_x|=-\dfrac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}$. Следовательно, при $\dfrac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}=0$ система будет находиться в состоянии равновесия.

Именно так находят положение точек экстремума.

$$\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}=0$$

при $x=x_0$ и $x=x_0'$:

- при x_0' $E_{\text{п}}=\max$ — состояние неустойчивого равновесия;
- при x_0 $E_{\text{п}}=\min$ — система находится в устойчивом равновесии.

Следовательно, *достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения* $E_{\text{п}}$ (это справедливо не только для механической системы, но, например, и для атома).

Область между x_1 и x_2, в которой частица оказывается запертой, называется *потенциальной ямой*, а область между x_2 и x_3, через которую частица не может пройти, называется *потенциальным барьером*. В классической механике потенциальный барьер является абсолютным для движения частицы. В квантовой механике при определенных условиях частица может пройти через потенциальный барьер. Это явление называется туннельным эффектом и играет важную роль в микромире. Более подробно этот эффект рассматривается в квантовой механике.

1.6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ*

Абсолютно упругий центральный удар

При *абсолютно неупругом ударе* закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при ***абсолютно упругом ударе*** *— ударе, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии.*

На рисунке 1.43 изображены два шара m_1 и m_2. Скорости шаров $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$, поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону, все равно будет удар. Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

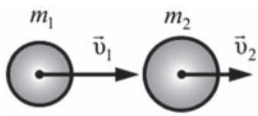


Рис. 1.43
Абсолютно упругий центральный удар шаров массами m_1 и m_2

Обозначим $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ как скорость шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса (в проекциях на ось x):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2}; \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно v_1' и v_2', получим:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $v_2 = 0$, массой $m_2 \to \infty$. Разделим числитель и знаменатель на m_2 и пренебрежем m_1/m_2, тогда

$$v_1' = \frac{2v_2 + (m_1 / m_2 - 1)v_1}{m_1 / m_2 + 1} = \frac{2v_2 - v_1}{1},$$

т. е. $v_1' = -v_1$.

Таким образом, шар m_1 изменит направление скорости на *противоположное*.

Абсолютно неупругий удар

***Абсолютно неупругий удар** — это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше как единое целое.*

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров — m_1 и m_2, их скорости до удара — v_1 и v_2, то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v, \tag{1.82}$$

где $\vec{v}$ — скорость движения шаров после удара. Тогда

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.83}$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы и скорости шаров равны,

$$v = \frac{v_1 - v_2}{2} = 0.$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (диссипация энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta E_{\text{к}} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{1.84}$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta E_{\text{к}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 \gg m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $v \ll v_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $v \approx v_1$, и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток — гвоздь).

Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

Движение тел с переменной массой

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае импульс системы

$$\vec{p} = M\vec{v}_{\text{ц.м}}\,. \tag{1.85}$$

Полный импульс системы частиц равен произведению полной массы системы M на скорость ее центра масс $\vec{v}_{\text{ц.м}}$.

Если продифференцировать обе части равенства по времени, то при условии, что M постоянна, получим

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{ц.м}}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_{\text{ц.м.}} = \vec{F}^{\text{внеш}}, \tag{1.86}$$

где $\vec{F}^{\text{внеш}}$ — внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса.

Важным примером систем с переменной массой может служить погрузка сыпучих или иных материалов на транспортерную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т. е. $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t > 0$.

Другим примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса M ракеты все время уменьшается, т. е. $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t < 0$.

Рассмотрим движение тел с переменной массой на примере ракеты.

Реактивное движение основано на *принципе отдачи*. В ракете при сгорании топлива *газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла с большой скоростью* $v_{\text{г}}$ (рис. 1.20). Ракета и выбрасываемые газы взаимодействуют между собой по закону сохранения импульса:

$$m_{\text{р}}v_{\text{р}} = m_{\text{г}}v_{\text{г}}.$$

Уравнение движения ракеты (уравнение Мещерского[1]):

---

[1] Мещерский Иван Всеволодович (1859–1935) — российский ученый, основоположник механики тел переменной массы.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{р}}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{\text{р}},$$

отсюда

$$\vec{F}_{\text{р}}=\vec{v}_{\text{г}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$$

где вектор $\vec{F}_{\text{р}}$ — реактивная сила.

Из этого уравнения можно получить

$$\mathrm{d}v_{\text{р}}=-v_{\text{г}}\frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

При $v_{\text{г}}=\text{const}$ из этого уравнения путем интегрирования можно найти максимальную скорость ракеты (*характеристическую скорость*):

$$v_{\text{р}}=-v_{\text{г}}\ln(M_0/M), \tag{1.87}$$

где M_0 и M — стартовая и конечная массы ракеты.

Это соотношение в физике называют *формулой Циолковского*[1]. Из него следует, что для достижения скорости v, в 4 раза превышающей по модулю относительную скорость выбрасываемых газов, стартовая масса одноступенчатой ракеты должна примерно в 50 раз превышать ее конечную массу.

Свойства пространства — времени и законы сохранения

Знакомство с конкретными примерами позволяет сформулировать важные общие положения.

1. Законы сохранения носят фундаментальный характер и тесно связаны с симметрией пространства и времени:

- закон сохранения энергии связан с однородностью времени, т. е. равнозначностью всех моментов времени;
- закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, т. е. равнозначностью всех точек пространства.

---

[1] Циолковский Константин Эдуардович (1857–1935) — российский, советский ученый-самоучка, школьный учитель.

2. Законы сохранения носят общий характер и не зависят от конкретной системы и ее движения. Из законов сохранения вытекает, что какие-то процессы заведомо оказываются невозможными. Так, в 1775 г. Французская академия решила не принимать к рассмотрению проекты вечных двигателей — как противоречащие закону сохранения энергии.

3. Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о протекании процессов во времени. Поэтому законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы точно не известны. Так, в частности, обстоит дело в физике элементарных частиц. Даже в тех случаях, когда силы заданы точно, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?
3. Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
4. Что такое мощность? Выведите ее формулу.
5. Дайте определения и выведите формулы для известных видов механической энергии.
6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
7. Чем обусловлено изменение потенциальной энергии?
8. Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
9. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
10. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
11. Что такое потенциальная яма, потенциальный барьер?
12. Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?

13. Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия?
14. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
15. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?
16. Может ли быть отрицательной кинетическая энергия, потенциальная энергия?
17. Можно ли на основе закона сохранения ответить на вопрос о том, как будет происходить то или иное движение?
18. Можно ли на основе законов сохранения высказать суждение о принципиальной возможности или невозможности того или иного движения точки?
19. В каком случае закон сохранения импульса можно применить к неизолированной системе?
20. На систему бильярдных шаров, движущихся по горизонтальному столу, действует сила трения, и поэтому эта система в отношении горизонтальных движений не является изолированной. Можно ли применять закон сохранения импульса к столкновению шаров? Почему?

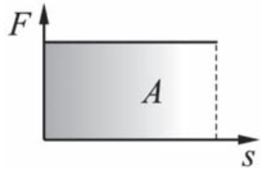


Рис. 1

21. На рисунках 1, 2 закрашенные площади определяют совершенную работу. Что можно сказать о силах, действующих на тела?

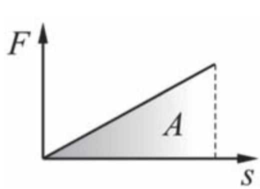


Рис. 2

22. На рисунке 3 приведен график зависимости мощности двигателя от времени. Как по графику можно определить совершенную двигателем работу за время $t = t_2 - t_1$?

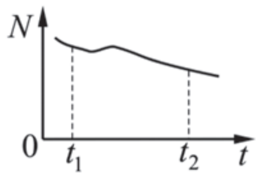


Рис. 3

23. На рисунке 4 представлен график зависимости потенциальной энергии упругодеформирован-

ной пружины от деформации. Полная механическая энергия пружины не меняется при изменении положения пружины (на графике — горизонтальная прямая E=const). Используя данный график, начертите зависимость кинетической энергии упругодеформированной пружины от деформации.

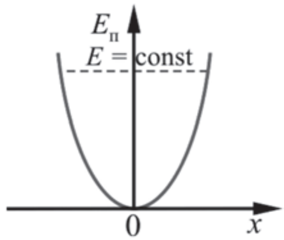


Рис. 4

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.6.1. Мощность моторов самолета массой 4 т при отрыве от земли N=600 кВт. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости v=30 м/с. Принимая, что коэффициент сопротивления μ=0,04 не зависит от скорости, определите длину пробега самолета перед взлетом.

Дано:	**СИ:**
m=4 т	$4\cdot10^3$ кг
N=600 кВт	$6\cdot10^5$ Вт
v=30 м/с	
μ=0,04	
l — ?	

Решение. Выбрав направление оси x в горизонтальном направлении в сторону движения самолета (см. рис.), запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось при движении самолета по взлетной полосе:

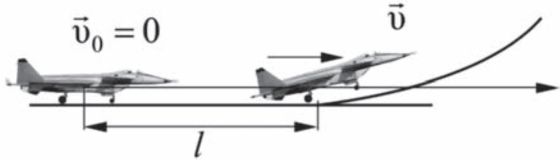
$$ma=F_T-\mu N,$$

где F_T — сила тяги моторов. Так как $N=mg$, то

$$ma=F_T-\mu mg,$$

отсюда сила тяги моторов

$$F_T=ma+\mu mg.$$



Мощность двигателя $N=F_{\text{Т}}v$, следовательно,

$$F_{\text{Т}}=N/v.$$

Исходя из этого, получаем

$$N/v=ma+\mu mg.$$

Так как движение равноускоренное, а начальная скорость не дана, это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{N}{v}=\frac{mv^2}{2l}=\mu mg,$$

отсюда длина пробега самолета перед взлетом

$$l=\frac{mv^2}{2(N/v-\mu mg)},$$

$$[l]=\left[\frac{\text{кг}\cdot(\text{м}^2/\text{с}^2)}{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2\text{м}}{\text{с}\cdot\text{м}/\text{с}}-\text{кг}\cdot(\text{м}/\text{с}^2)}\right]=\text{м},$$

$$l=\frac{4\cdot10^3\cdot9\cdot10^2}{2\left(\dfrac{6\cdot10^5}{30}-0{,}04\cdot4\cdot10^3\cdot9{,}81\right)}=97{,}7\text{ м}.$$

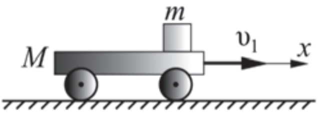
Ответ: $l=97{,}7$ м.

Задача 1.6.2. На край тележки массой $M=5$ кг, равномерно движущейся по рельсам, опускают с небольшой высоты короткий брусок массой $m=1$ кг. Коэффициент трения бруска о тележку $\mu=0{,}5$, между тележкой и рельсами трение отсутствует. На какое расстояние s переместится брусок по тележке, если ее длина $l=0{,}5$ м, а скорость тележки постоянна и равна $v_1=2$ м/с? При какой минимальной скорости тележки брусок соскользнет с нее? Какое количество тепловой энергии выделится при этом?

Дано:
$M=5$ кг
$m=1$ кг
$\mu=0{,}5$
$l=0{,}5$ м
$v_1=2$ м/с

s — ?
$v_{1\min}$ — ?
Q — ?

Решение. При взаимодействии бруска и тележки выполняется закон сохранения импульса. Поскольку в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, то



в проекции на ось x (см. рис.) закон сохранения импульса можно записать в виде

$$Mv_1 = (M+m)v,$$

где v — скорость тележки после остановки бруска. Отсюда

$$v = v_1 = \frac{M}{M+m}.$$

В системе «брусок — тележка» действует сила трения, поэтому закон сохранения энергии можно представить в виде

$$E_{2\text{к}} - E_{1\text{к}} = A_{12}^{\text{тр}} < 0,$$

где $E_{1\text{к}}$, $E_{2\text{к}}$ — кинетическая энергия системы в момент времени сразу после опускания бруска и в момент остановки бруска соответственно.

Используя это выражение и работу силы трения скольжения, получим

$$-\mu mgs = \frac{(M-m)v^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2}.$$

Исходя из этого, получим искомое расстояние:

$$s = \frac{Mv_1^2}{2vg(M+m)},$$

$$[s] = \left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2\cdot\text{кг}}\right] = \text{м},$$

$$s = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 6} = 0{,}339\,\text{м}.$$

По условиям задачи брусок должен соскользнуть с тележки, это случится, если $s \geq l$, т. е.

$$\frac{Mv_1^2}{2vg(M+m)} \geq l.$$

Искомая минимальная скорость, при которой брусок соскользнет с нее:

$$v_{1\min} = \sqrt{\frac{2\mu g l(M+m)}{m}},$$

$$[v_{1\min}] = \sqrt{\frac{(\text{м}/\text{с}^2)\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{кг}}} = \text{м}/\text{с},$$

$$v_{1\min} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\cdot 6}{1}} = 5{,}42\ \text{м}/\text{с}.$$

Количество теплоты, выделившееся за время движения бруска относительно тележки:

$$Q = |A_{\text{тр}}| = \frac{Mv_1^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2};$$

используя это выражение и выражение для скорости тележки, получим:

$$Q = \frac{Mv_1^2}{2}\left(1 - \frac{M}{M+m}\right),$$

$$Q = \frac{5\cdot 4}{2}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = 1{,}67\ \text{Дж}.$$

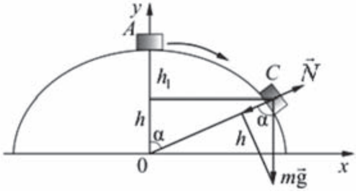
Ответ: $s = 0{,}339$ м; $v_{1\min} = 5{,}42$ м/с; $Q = 1{,}67$ Дж.

Задача 1.6.3. С вершины идеально гладкой полусферы радиусом $R = 60$ см без трения соскальзывает небольшое тело. Определите, на каком расстоянии от вершины тело оторвется от полусферы.

Дано:
$R = 60$ см
h_1 — ?

Решение. Тело вплоть до момента отрыва движется по полусфере под действием силы тяжести mg и силы нормальной реакции N полусферы. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекциях на ось Y, направленную вдоль радиуса к центру окружности. Согласно рисунку

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$



где $\cos\alpha = h/R$, h — высота, на которой тело оторвется от полусферы.

В момент отрыва сила реакции опоры $N=0$. Тогда

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R},$$

отсюда

$$v^2 = gR\cos\alpha. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения механической энергии

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), найдем

$$mgR = mgh + \frac{mgR\cos\alpha}{2}$$

или

$$R = h + \frac{R\cos\alpha}{2}.$$

Искомое расстояние

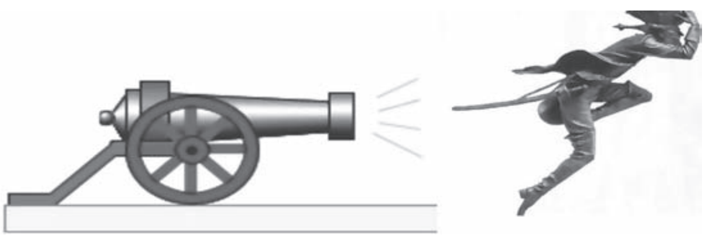
$$h_1 = R - h = \frac{R\cos\alpha}{2} = \frac{Rh}{2R} = \frac{h}{2} = \frac{R - h_1}{2},$$

тогда

$$h_1 = R/3 = 0{,}2 \text{ м}.$$

Ответ: $h_1 = 20$ см.

Задача 1.6.4. ***Полет на ядре.*** Артиллеристы стреляют так, чтобы ядро попало в неприятельский лагерь, находящийся в $l_0 = 7{,}2$ км от пушки. В момент вылета ядра из дула на него вскакивает барон Мюнхаузен (абсолютно неупругий удар), масса которого в $n=5$ раз больше массы ядра. Из-за этого ядро падает, не долетев до цели. Какое расстояние барону придется пройти пешком, чтобы добраться до



неприятельского лагеря? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Если ядро вылетело из дула со скоростью $\vec{v}_0$, то после вскакивания на него барона его скорость стала равной $\vec{v} = \dfrac{mv_0}{M+m}$, где m — масса ядра, а M — масса Мюнхаузена. Артиллеристы рассчитывали угол возвышения α орудия по формуле $l_0 = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Поскольку скорость изменилась, а угол остался прежним, дальность полета составит

$$l = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 l_0 = l_0\left(\frac{m}{M+m}\right)^2.$$

Поэтому барону надо будет пройти расстояние

$$s = l_0 - l = l_0 \cdot \frac{M(M+2m)}{(M+m)^2} = l_0\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

$$s = 7{,}2 \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} = 7 \text{ км}.$$

Иными словами, барону удалось пролететь на ядре только 200 м.

Задача 1.6.5*. Ракета движется, выбрасывая струю газа с постоянной скоростью $v_г = 900$ м/с. Расход газа $q = 0{,}25$ кг/с, начальная масса ракеты $m_0 = 1{,}5$ кг. Какую скорость относительно Земли приобретет ракета через $t = 2$ с после начала движения?

Дано:
$v_г = 900$ м/с
$q = 0{,}25$ кг/с
$m_0 = 1{,}5$ кг
$t = 2$ с
v — ?

Решение. На основании закона сохранения импульса для системы «ракета — струя газа» запишем

$$d\vec{p} = d\vec{p}_р + d\vec{p}_г = 0, \qquad (1)$$

где $d\vec{p}_р$ и $d\vec{p}_г$ — изменение импульса ракеты и газа, соответственно, за промежуток времени dt.

В проекции на ось oy уравнение (1) примет вид

$$\mathrm{d}p_{\text{р}} - \mathrm{d}p_{\text{г}} = 0. \qquad (2)$$

Если в момент времени t ракета имела массу $m = m_0 - qt$, то за время $\mathrm{d}t$ скорость ракеты за счет реактивного действия газовой струи изменится на $\mathrm{d}v$, а импульс ракеты — на величину

$$\mathrm{d}p_{\text{р}} = (m_0 - qt)\mathrm{d}v. \qquad (3)$$

Порция газа $q\mathrm{d}t$, двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{v}$. Покинув ракету, эта же масса газа за время $\mathrm{d}t$ приобретает относительно Земли скорость $\vec{v} + \vec{v}_{\text{г}}$. Таким образом, импульс порции газа, выброшенной из ракеты, изменится на величину

$$\mathrm{d}p_{\text{г}} = q(v + v_{\text{г}})\mathrm{d}t - qv\mathrm{d}t = qv_0\mathrm{d}t. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в (2), получим

$$(m_0 - qt)\mathrm{d}v - qv_{\text{г}}\mathrm{d}t = 0$$

или

$$\mathrm{d}v = \frac{qv_{\text{г}}\mathrm{d}t}{m_0 - qt}.$$

Интегрировав эти уравнения при начальной скорости ракеты, равной нулю, получим

$$\int_0^{v} \mathrm{d}v = \int_0^{t} \frac{qv_{\text{г}}}{m_0 - qt}\,\mathrm{d}t,$$

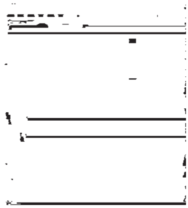
$$v = v_{\text{г}} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right).$$

Размерность: $[v] = \text{м/с}$.

Проведем расчеты: $v = 900\ln\left(\dfrac{1{,}5}{1{,}5 - 0{,}25 \cdot 2}\right) = 365\ \text{м/с}.$

Ответ: $v = 365$ м/с.

Задача 1.6.6. Гибкая однородная цепь длиной L может двигаться по желобу, имеющему в сечении форму равно-



бедренного треугольника с углом 2α при вершине и расположенному в вертикальной плоскости. Трение отсутствует, предполагается, что цепь прилегает к желобу. Найти наименьшую начальную скорость цепи, необходимую для преодоления такой горки. В начальный момент времени расстояние между горизонтальными прямыми, проходящими через центр тяжести цепи и вершины желоба, равно H.

Решение. Цепь перевалит через горку, если в тот момент времени, когда середина цепи достигнет вершины желоба, скорость цепи обратится в нуль. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через вершину желоба. Тогда в начальном состоянии полная энергия цепи равна

$$\frac{mv_0^2}{2}+(-mgH).$$

В конечном состоянии центр тяжести цепи находится на расстоянии $(L/4)\cos\alpha$ от вершины треугольника; полная энергия

$$0+\left(-mg\frac{L}{4}\cos\alpha\right).$$

$$v_0=\sqrt{2gH\left(1-\frac{L}{4H}\cos\alpha\right)}.$$

Заметим, что для точечного тела наименьшая скорость равна $\sqrt{2gH}$. В нашем примере $v<\sqrt{2gH}$.

Этот пример поясняет, почему прыгун в высоту, использующий технику «форсбери-флоп», может достичь большей высоты, чем при прыжке перекатом. Совершая прыжок, Дик Форсбери перенес через планку сначала корпус, голову и ноги, при этом центр тяжести оставался ниже уровня планки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.6.1. Два груза массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг подвешены на нитях длиной $l=2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Маленький груз был отклонен на угол $\varphi = 60°$ и пущен. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

Ответ: $h = l(1-\cos\varphi)(m_1/(m_1 + m_2)^2) = 0{,}16$ м.

Задача 1.6.2. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда m_1 равна 10 кг и его скорость $v = 1$ км/с. Масса m_2 платформы с орудием и прочим грузом равна 20 т. На какое расстояние l откатится платформа после выстрела, если коэффициент сопротивления $\mu = 0{,}002$?

Ответ: $l = m_1^2 u_1^2 / (2\mu g m_2^2) = 6{,}37$ м.

Задача 1.6.3. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола? Трением пренебречь.

Ответ: $\alpha = \arccos(2/3) = 0{,}268\pi$.

Задача 1.6.4. Молот массой $m_1 = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД η удара молота при данных условиях.

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}952$.

Задача 1.6.5. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найти КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при ее углублении пренебречь.

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}833$.

Задача 1.6.6*. Шар массой $m = 1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял $\omega=0{,}36$ своей кинетической энергии $E_{к1}$. Определить массу большего шара.

Ответ: $M=\dfrac{m(1+\sqrt{1-\omega})^2}{\omega}=16{,}2$ кг.

Задача 1.6.7*. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял $\omega=3/4$ своей кинетической энергии. Определить отношение $k=M/m$ масс шаров.

Ответ: $k=\dfrac{(1+\sqrt{1-\omega})^2}{\omega}=3$.

Задача 1.6.8. Частица массой $m_1=10^{-25}$ кг обладает импульсом $p_1=5\cdot10^{-20}$ кг м/с. Определить, какой максимальный импульс p_2 может передать эта частица, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2=4\cdot10^{-25}$ кг, которая до соударения покоилась.

Ответ: $p_2=\dfrac{2m_2p_1}{m_1-m_2}=8\cdot10^{-20}$ кг·м / с.

Задача 1.6.9*. С поверхности Луны стартовала ракета массой $m_с=2$ т. Спустя время $\tau=1$ мин ракета достигла первой (лунной) космической скорости $v_1=1{,}68$ км/с. Определить массовый расход μ топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты равна 4 км/с. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $\mu=\dfrac{m_с}{\tau}\left(1-\exp\dfrac{-v_1}{u}\right)=11{,}4$ кг / с.

Задача 1.6.10*. Топливо баллистической ракеты составляет $\eta=3/4$ от стартовой массы ракеты. Определить скорость v ракеты после полного сгорания топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты постоянна и равна 2 км/с. Силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v=u\ln\dfrac{1}{1-\eta}=2{,}77$ км / с.

Задача 1.6.11*. Во сколько раз будет отличаться ускорение a ракеты от стартового ускорения $a_с$ в тот момент времени, когда ее скорость v станет равной скорости u истечения газов из сопла ракеты. Силу тяги считать неизменной. Силами тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\frac{a}{a_c} = \exp\frac{v}{u} = 2{,}72.$

Задача 1.6.12*. Каково относительное изменение $|\Delta m|/m_c$ (m_c — стартовая масса) массы ракеты к тому моменту времени, когда ее скорость v достигнет скорости u истечения газов из сопла ракеты? Силами тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\frac{|\Delta m|}{m_c} = \frac{\exp\frac{v}{u} - 1}{\exp\frac{v}{u}} = 0{,}632.$

Задача 1.6.13. С какой наименьшей скоростью следует бросить с уровня Земли камень, чтобы он смог перелететь через вертикальную стену высотой 20 м и шириной 10 м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = 22{,}4$ м / с.

Задача 1.6.14. Орудие, имеющее массу ствола 500 кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 460 м/с. После выстрела ствол откатывается на 40 см. Определите среднее значение силы торможения, возникающей в противооткатном устройстве.

Ответ: $F = \frac{(m_2 v_0)^2}{2m_1 s} = \frac{(5 \cdot 460)^2}{2 \cdot 500 \cdot 0{,}4} = 13\,225$ Н.

Задача 1.6.15. Два тела, массы которых одинаковы, движутся навстречу друг другу, при этом скорость одного тела в 2 раза больше скорости второго. Какая часть механической энергии системы перейдет во внутреннюю энергию при центральном абсолютно неупругом ударе?

Ответ: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{2{,}25 m v_2^2}{2{,}5 m v_2^2} = 0{,}9.$

Задача 1.6.16. Пуля ударяет со скоростью 400 м/с в центр шара, подвешенного на нити длиной 4 м, и застревает в нем. Определите косинус угла, на который отклоняется нить, если масса пули 20 г, масса шара 5 кг.

Ответ: $\cos\alpha = 1 - \left(\dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \dfrac{1}{2gl} = 0{,}97.$

Задача 1.6.17. Ракета массой $M = 200$ г вместе с зарядом взлетает вертикально вверх. Определите высоту подъема, если масса заряда $m = 50$ г, а скорость истечения газов $v_1 = 120$ м/с.

Ответ: $h = \dfrac{v_1^2 m}{2(M+m)g} = 81{,}5$ м.

Задача 1.6.18. Шар массой $m = 500$ кг, падая с высоты $h = 1$ м, ударяется о металлическую плиту. Определите среднее значение силы удара $\langle F \rangle$, если его длительность $t = 0{,}01$ с. Удар считать абсолютно упругим.

Ответ: $\langle F \rangle = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{t} = 221$ кН.

1.7. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Любое движение твердого тела сводится к поступательному и вращательному. Это означает, что произвольное движение можно представить в виде суперпозиции поступательного движения тела, характеризуемого движением любой его точки (центра масс), и вращения тела вокруг этой точки (т. е. вокруг осей, проходящих через нее).

1.7.1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Рассмотрим твердое тело как некую систему (рис. 1.44), состоящую из n точек (m_1, m_2, ..., m_n); $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки, проведенный из точки O — центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим $\vec{F}_i$ — внешняя сила, действующая на i-ю точку, $\vec{F}_{ik}$ — сила действия со стороны k-й точки на i-ю.

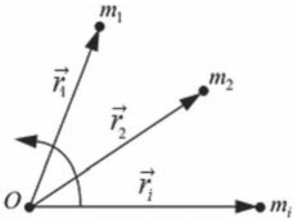


Рис. 1.44
Вращение системы материальных точек вокруг точки O — центра неподвижной инерциальной системы отсчета

Запишем основное уравнение динамики для точки (см. п. 1.3.6):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \vec{F}_{ik}\vec{F}_i.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}_i$:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \sum_k [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на ее импульс называется ***моментом импульса (количества движения)*** *$\vec{L}_i$ этой точки относительно точки O:*

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$$

или

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \qquad (1.88)$$

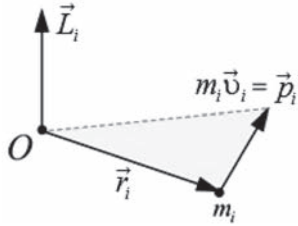


Рис. 1.45
Три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ $L_i = p_i r_i$

Для материальной точки массой m момент импульса

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Три вектора в (1.88) образуют правую тройку векторов, связанных правилом буравчика (рис. 1.45).

Направление вектора $\vec{L}_i$ ортогонально плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$, а величина этого вектора

$$|\vec{L}_i| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl, \qquad (1.89)$$

где $l = r\sin\alpha$ — плечо импульса (рис. 1.46).

Векторное произведение $\vec{r}_i$, проведенного в точку приложения силы, на эту силу называется ***моментом силы*** $\vec{M}_i$ (рис. 1.47):

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \qquad (1.90)$$

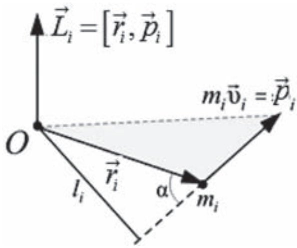


Рис. 1.46
Модуль момента импульса
$|\vec{L}_i| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl$

Пусть l_i — плечо силы F_i (рис. 1.48). Так как $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$, то

$$|\vec{M}_i| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i. \qquad (1.91)$$

С учетом новых обозначений

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i.$$

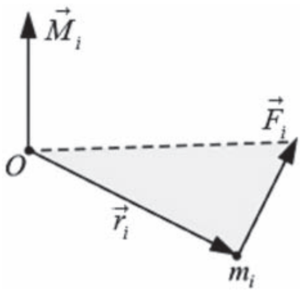


Рис. 1.47
Момент силы $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим их левые и правые части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i.$$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

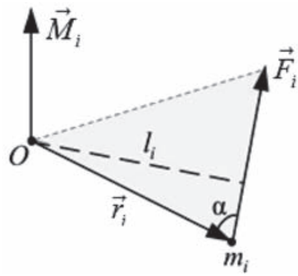


Рис. 1.48
Модуль момента силы
$|\vec{M}_i| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i$

где $\vec{L}$ — момент импульса системы, а сумма моментов равна результирующему моменту $\vec{M}$ всех внешних сил относительно точки O.

Так как

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki},$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_{ik} = 0.$$

Отсюда получим ***основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки***:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}^{\text{внеш}}. \qquad (1.92)$$

Это выражение называется ***уравнением моментов***.

Момент импульса системы $\vec{L}$ является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Из сравнения этого уравнения с основным уравнением динамики поступательного движения (п. 3.6) видно их внешнее сходство:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.$$

1.7.2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

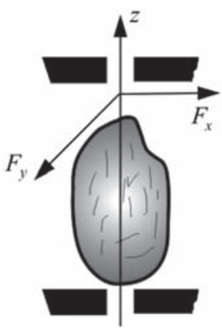


Рис. 1.49
Вращение произвольного тела относительно неподвижной оси z

Описанное выше движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор $\vec{L}$ — момент импульса системы относительно произвольной точки — не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (рис. 1.49). В этом случае составляющие $\vec{M}$ — момента внешних сил, направленные вдоль x и y, *компенсируются момен-*

тами сил реакции закрепления. Вращение вокруг оси z происходит только под действием $\vec{M}_z$.

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси z (рис. 1.50).

Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела, находящегося на расстоянии R_i от оси вращения. При этом помним, что $\vec{L}_z$ и $\vec{M}_z$ направлены всегда вдоль оси вращения z, поэтому в дальнейшем опустим индекс z.

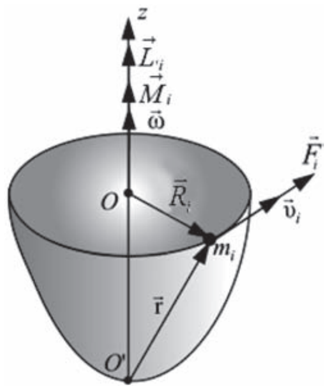


Рис. 1.50
Вращение твердого тела под действием $\vec{M}_z$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_i$$

или

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{R}_i, m_i\vec{v}_i] = \vec{M}_i .$$

Поскольку линейная скорость $\vec{v}_i$ у всех точек разная, введем вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, причем $\omega = \dfrac{v}{R}$. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i R_i^2 \vec{\omega}) = \vec{M}_i.$$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда

$$m_i R_i^2 \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_i.$$

Пусть J_i — ***момент инерции*** точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения,

$$J_i = m_i R_i^2. \tag{1.93}$$

Момент инерции *тела служит* ***мерой инертности*** *при вращательном движении*, так же как масса — мера инертности при поступательном движении.

В общем случае тело состоит из огромного количества точек, и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения. *Момент инерции* системы (тела) равен

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс

$$J = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m = \int_0^V \rho R^2 \mathrm{d}V, \qquad (1.94)$$

где ρ — плотность тела; $\mathrm{d}V$ — объем малого элемента тела массой $\mathrm{d}m$, отстоящего от оси вращения на расстоянии R.

Как видно, момент инерции J — величина скалярная. В СИ момент инерции измеряется в кг·м^2.

Просуммировав (1.93) по всем i-м точкам, получим

$$J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

или

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \qquad (1.95)$$

Это ***основное уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси***. (Сравним: $m\vec{a} = \vec{F}$ — основное уравнение динамики поступательного движения тела.)

Для ***момента импульса*** $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг оси z, имеем:

$$J\mathrm{d}\vec{\omega} = \vec{M}\mathrm{d}t;$$

$$J\mathrm{d}\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{L},$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \qquad (1.96)$$

(Сравним: $\vec{p} = m\vec{v}$ — для поступательного движения.)

При этом помним, что $\vec{L}$ и $\vec{M}$ — динамические характеристики вращательного движения, направленные всегда вдоль оси вращения. Причем $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$, а направление $\vec{M}$ зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

1.7.3. РАСЧЕТ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

По формуле $J = \int R^2 \mathrm{d}m$ не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

Наиболее легко эта задача решается для тел простых форм, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела C. В этом случае, при вычислении J_c по формуле (1.72), появляется коэффициент k:

$$J_c = kmR^2.$$

Рассмотрим однородный диск, имеющий радиус R, массу m и толщину a, ось вращения OO' которого проходит через центр масс — C (рис. 1.51).

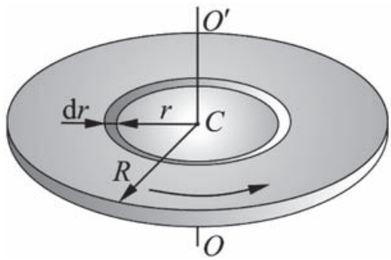


Рис. 1.51
К выводу момента инерции при вращении однородного диска вокруг оси OO'

Разобьем мысленно диск на малые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним (r + dr). По формуле (1.94) найдем момент инерции диска как сумму моментов инерции малых полых цилиндров объемом $2\pi r \mathrm{d}r \cdot a$:

$$J = \int_0^V \rho r^2 \mathrm{d}V = \rho a \int_0^R r^2 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi a \rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r.$$

Интегрируя данное выражение, получим

$$J = \frac{1}{2}\pi a \rho R^4 = \frac{1}{2} mR^2.$$

Далее без вывода запишем формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел, имеющих массу m, когда ось вращения проходит через центр масс (рис. 1.52).

При вычислении момента инерции тела, вращающегося *вокруг оси, не проходящей через центр инерции* (рис. 1.53),

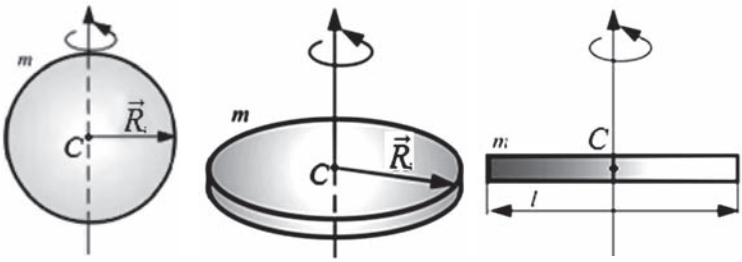


Рис. 1.52
Моменты инерции шара, диска, стержня

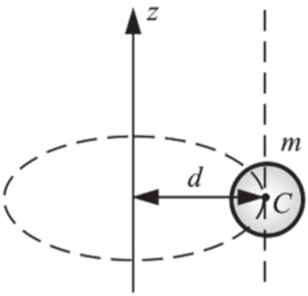


Рис. 1.53
К теореме Штейнера

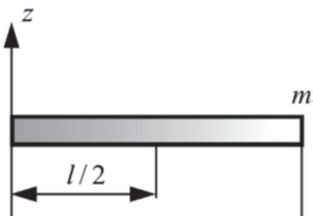


Рис. 1.54
К расчету момента инерции стержня

следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей*, ***теоремой Штейнера***[1]:

$$J = J_C + md^2. \qquad (1.97)$$

Момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

С помощью теоремы Штейнера, например, можно легко рассчитать момент инерции стержня массой m длиной l, вращающегося вокруг оси, проходящей через конец стержня (рис. 1.54).

Момент инерции стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр,

[1] Штейнер Якоб (1796–1863) — немецкий математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей второго и высших порядков.

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2,$$

тогда

$$J_z = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

1.7.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Кинетическая энергия — величина аддитивная. Поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$E_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i}{2}. \qquad (1.98)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то линейная скорость i-й точки $\vec{v}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i — расстояние до оси вращения. Следовательно, кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_\text{к}^\text{вр} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1.99)$$

Сопоставив (1.98) и (1.99), можно увидеть, что момент инерции тела J является *мерой инертности при вращательном движении*, так же как масса m — *мера инерции при поступательном движении*.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений — поступательного со скоростью v_C и вращательного с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела

$$E_\text{полн} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}. \qquad (1.100)$$

Здесь J_C — момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

Применение закона сохранения энергии при скатывании тел с наклонной плоскости

При скатывании тел (например, обруча, сплошного цилиндра, шара) с наклонной плоскости считаем, что скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно геометрической оси и при движении не возникает скольжения (рис. 1.55).

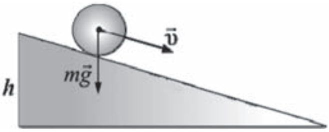


Рис. 1.55
Скатывание тела с наклонной плоскости

Пусть с наклонной плоскости высотой h без скольжения скатываются: обруч; сплошной цилиндр; шар. Определим скорости, которые будут иметь тела у основания наклонной плоскости. Радиусы тел равны R.

При скатывании тела с наклонной плоскости согласно закону сохранения энергии потенциальная энергия тела переходит в кинетическую энергию поступательного движения со скоростью v центра масс и кинетическую энергию вращения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m — масса тела; J — момент инерции тела.

Учитывая, что $\omega = v/R$, получаем

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}.$$

Тогда искомая скорость тела $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + J/(mR^2)}}$.

1. Для обруча $J = mR^2$, где $v = \sqrt{gh}$.

2. Для сплошного цилиндра $J = \dfrac{mR^2}{2}$, $v = 2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$.

3. Для шара $J = \dfrac{2}{5}mR^2$, $v = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$.

1.7.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Для замкнутой системы тел момент внешних сил $\vec{M}$ всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Поэтому

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \equiv 0,$$

т. е.

$$\vec{L} = \mathrm{const}$$

или

$$J_z\vec{\omega} = \mathrm{const}.$$

Закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки* ***не изменяется*** *с течением времени.*

Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси z:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_z \equiv 0,$$

отсюда

$$\vec{L}_z = \mathrm{const},$$

или

$$J_z\vec{\omega} = \mathrm{const}.$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства — эквивалентности свойств пространства в различных направлениях. Существует множество различных задач, связанных с вращающимися системами, в которых скорости вращения или моменты импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным ***гироскопом*** — *быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы* (рис. 1.56).

Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гирокомпас, гирогоризонт). Один из примеров навигационного гироскопа изображен на рисунке 1.57.

Рис. 1.56
Модель гироскопа

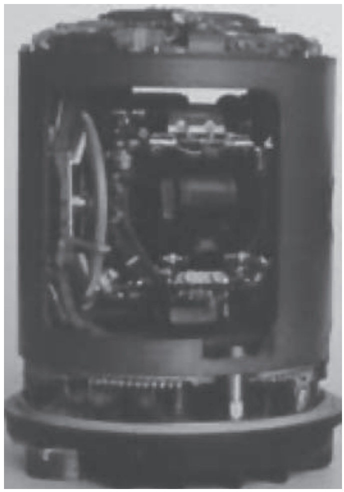


Рис. 1.57
Навигационный гироскоп

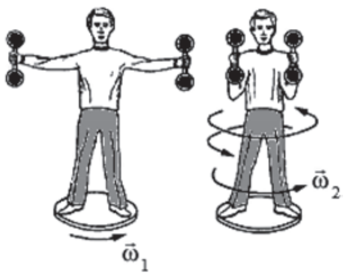


Рис. 1.58
Демонстрация закона сохранения момента импульса с помощью скамьи Жуковского:

в силу закона сохранения момента импульса студент, прижимая к себе гантели, начинает вращаться быстрее, $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$; $J_1 > J_2$; $\omega_1 < \omega_2$.

Именно закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду для изменения скорости вращения. Или еще известный пример — скамья Жуковского[1] (рис. 1.58).

[1] Жуковский Николай Егорович (1847–1921) — выдающийся русский ученый, создатель аэродинамики как науки.

Изученные нами законы сохранения есть следствие симметрии пространства — времени.

Принцип симметрии всегда был путеводной звездой физиков, и она их не подводила. Но вот в 1956 г. Ву Цзяньсюн[1] обнаружила асимметрию в слабых взаимодействиях: она исследовала β-распад ядер изотопа Co^{60} в магнитном поле и обнаружила, что число электронов, испускаемых вдоль направления магнитного поля, не равно числу электронов, испускаемых в противоположном направлении. В этом же году Л. Ледерман[2] (США) обнаружил нарушение симметрии при распаде пионов и мюонов. Эти факты означают, что законы слабого взаимодействия не обладают зеркальной симметрией.

1.7.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТЬ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ И ИХ СВЯЗЬ С СИММЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

В предыдущих разделах рассмотрены *три фундаментальных закона природы*: *закон сохранения импульса*, *момента импульса* и *энергии*. Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета.

В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а они применимы только в инерциальных системах. Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если система *замкнутая* (сумма всех внешних сил и всех моментов сил равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно — тело должно быть еще и *адиабатически изолированным* (т. е. не участвовать в теплообмене).

---

[1] Ву Цзяньсюн (1912–1997) — американский радиофизик китайского происхождения. Поставила знаменитый «эксперимент Ву», доказавший несохранение пространственной четности в слабых взаимодействиях.

[2] Ледерман Леон Макс (1922) — американский физик, лауреат премии Вольфа по физике, лауреат Нобелевской премии по физике «за метод нейтринного луча и доказательство двойственной структуры лептонов посредством открытия мюонного нейтрино».

Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

В основе закона сохранения энергии лежит ***однородность времени***, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени). Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 на момент времени t_2, без изменения значений координат и скорости частиц, не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени $t_2 + t$ такие же значения, какие имели до замены, в момент времени $t_1 + t$.

В основе закона сохранения импульса лежит ***однородность пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.

В основе закона сохранения момента импульса лежит ***изотропия пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах.

И наконец, следует сказать ***о симметрии классической механики*** по отношению к направлению хода времени t — его возрастанию или убыванию. Формально это следует из инвариантности уравнений механики по отношению к замене переменной t на $-t$.

В самом деле, исходное уравнение ньютоновской механики — уравнение второго закона Ньютона:

$$\mathrm{d}\vec{p} \,/\, \mathrm{d}t = \vec{F}.$$

Оно полностью сохраняет свой вид, если произвести замену t на $t' = -t$ и $\vec{p}$ на $\vec{p}\,' = -\vec{p}$, т. е. изменить направление хода времени, а также изменить направление движения материальной точки на противоположное:

$$\mathrm{d}\vec{p}\,' / \mathrm{d}t' = \vec{F}.$$

Эта симметрия уравнений классической механики свидетельствует об *обратимости механических процессов*: если механическая система совершает какое-либо движение, то она может под действием тех же сил совершать и прямо противоположное движение, при котором будет проходить через те же самые промежуточные конфигурации в обратном порядке.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как ***принципы запрета:*** *любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.*

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, — а только этого и требует закон сохранения импульса.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

1.7.7. СХОДСТВО И РАЗЛИЧИЕ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

Основные величины и уравнения кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются, если сопоставить их с величинами и уравнениями поступательного движения (табл. 1.1). В таблице приведена связь между линейными и угловыми характеристиками движения и формулы для расчета кинетической и потенциальной энергий.

Таблица 1.1

Поступательное движение		**Вращательное движение**	
Кинематика			
Путь	$s = \int_0^t v\mathrm{d}t$; $s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	Угол поворота	$\varphi = \int_0^t \omega\mathrm{d}t$; $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$; $v = v_0 \pm at$	Угловая скорость	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
Ускорение	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
$s = R\varphi$; $v = R\omega$; $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_n = v^2/R = \omega^2 R$; $\alpha_\tau = R\cdot\varepsilon$			

Продолжение табл. 1.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Динамика			
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$; $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$; $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{v} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$J\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot s$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Мощность	$N = F \cdot v$	Мощность	$N = M \cdot \omega$
Кинетическая энергия	$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{P^2}{2m}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$E_к = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Энергия тела, катящегося с высоты h		$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$	
Потенциальная энергия сжатой пружины		$E_п = \frac{kx^2}{2}$	
Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия		$E_п = \gamma \frac{M \cdot m}{r}$; $E_п = mgh$	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое момент импульса материальной точки, твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
2. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки, относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
3. Что такое момент инерции тела?
4. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
5. Выведите формулу для момента инерции обруча.
6. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
7. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
8. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

9. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
10. Каким свойством симметрии пространства и времени обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?
11. В каком случае закон сохранения момента импульса можно применять к неизолированной системе?
12. Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?
13. Какими физическими обстоятельствами обусловливается возможность применения закона сохранения момента импульса к неизолированной системе?
14. Твердое тело с моментом инерции J вращается с угловым ускорением ε вокруг своей оси и мгновенной угловой скоростью ω. Чему равна мощность, сообщенная телу?
15. Обод велосипедного колеса диаметром 0,8 м имеет массу 1,5 кг. Чему равен момент импульса колеса, если скорость велосипеда 3 м/с?
16. Где следует посадить ребенка массой 30 кг, чтобы уравновесить 4-метровые качели (масса отца 80 кг, а матери — 50 кг)?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.7.1*. Найти момент инерции обруча, радиус которого равен $R=30$ см и масса $m=200$ г относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости кольца.

Дано:
$R=0{,}3$ м
$m=0{,}2$ кг
J — ?

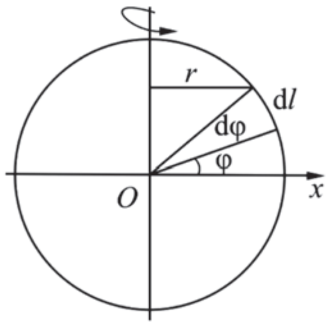
Решение. Момент инерции находится по формуле момента инерции для сплошного однородного тела:

$$J=\int r^2 \mathrm{d}m.$$

Интегрирование данного выражения производится по всем точкам тела, где r — расстояние от выбранной точки до оси вращения.

Выделим на обруче элемент длиной $\mathrm{d}l$, массой $\mathrm{d}m=\dfrac{m}{2\pi R}\mathrm{d}l.$ Положение элемента $\mathrm{d}l$ относительно центра обруча можно определить углом φ и радиус-вектором $\mathrm{d}m = \dfrac{m}{2\pi R}\mathrm{d}l$. При этом $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\varphi$, $r = R\cos\varphi$. Из этого следует

$$\mathrm{d}l = \frac{m}{2\pi R}\int R(\cos\varphi)^2 R\mathrm{d}\varphi.$$



Для нахождения момента инерции обруча интегрируем это выражение в пределах от $\varphi_1 = (-\pi/2)$ до $\varphi_2 = (\pi/2)$. Полученный результат удваиваем:

$$J = 2\cdot\frac{mR^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{mR^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi\right] = \frac{mR^2}{2\pi}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}(\pi + \sin\pi) = \frac{mR^2}{2} = \frac{0{,}2\cdot(0{,}3)^2}{2} = 9\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 9\cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.7.2. Горизонтальная платформа, масса которой $m_1 = 250$ кг, имеет форму диска, радиус которого $R = 2{,}5$ м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. Какая будет угловая скорость ω платформы, если вдоль ее края будет двигаться человек массой $m = 75$ кг со скоростью $\upsilon = 2{,}5$ м/с относительно платформы?

Дано:
$m_1 = 250$ кг
$m_2 = 75$ кг
$R = 2{,}5$ м
$\upsilon = 2{,}5$ м/с
ω — ?

Решение. Согласно условию задачи платформа, на которой находится человек, вращается по инерции. Это говорит о том, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «платформа — человек» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_{\text{ч}} + \vec{L}_{\text{п}} = 0,$$

где $\vec{L}_ч = m_2 vR$ — момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $\vec{L}_п$ — момент импульса платформы с человеком:

$$\vec{L}_п = \omega(J_п + J_ч),$$

где $J_п = \frac{1}{2}m_1R^2$, $J_ч = m_2R^2$ — момент инерции платформы и человека соответственно.

Получаем

$$m_2 vR^2 = \omega\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right). \qquad (1)$$

Проверим размерность: $[\omega] = \left[\frac{кг \cdot м}{м \cdot с \cdot кг}\right] = с^{-1}$.

Из уравнения (1) находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{m_2 v}{(1/2)\cdot m_1 R + m_2 R} = \frac{2m_2 v}{R(m_1 + 2m_2)},$$

$$\omega = \frac{2\cdot 75\cdot 2{,}5}{2{,}5(250 + 2\cdot 75)} = 37{,}5\cdot 10^{-2}\ с^{-1}.$$

Ответ: $\omega = 37{,}5\cdot 10^{-2}\ с^{-1}$.

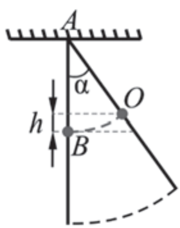
Задача 1.7.3. Тонкий однородный стержень длиной $l = 0{,}8$ м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найти скорость нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия при отклонении его от вертикали на угол $\alpha = 30°$.

Дано:
$l = 0{,}8$ м
$\alpha = 30°$
v — ?

Решение. При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимется на высоту h, которую можно определить из треугольника AOB:

$$\frac{l}{2} - h = \frac{1}{2}\cos\alpha,$$

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$



При этом потенциальная энергия стержня увеличивается на величину $\Delta U = mgh$, где m — масса стержня.

При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия ΔU переходит в кинетическую энергию:

$$K = J\omega^2/2,$$

где J — момент инерции стержня; ω — угловая скорость вращения стержня.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец,

$$J = (1/3)ml^2.$$

По закону сохранения энергии

$$K = \Delta U.$$

Из вышеуказанных уравнений получим

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

или

$$g(1-\cos\alpha) = \frac{1}{3}l\omega^2.$$

Из этого уравнения найдем угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}.$$

Проверим размерность:

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Линейная скорость:

$$v = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\alpha)},$$

$$v = \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8(1-\cos 30^\circ)} = 1{,}78\ \text{м}/\text{с}.$$

Ответ: $v = 1{,}78$ м/с.

Задача 1.7.4. На барабан массой $M = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Считая барабан однородным цилиндром и пренебрегая трением, определить ускорение груза.

Дано:
$M = 9$ кг
$m = 2$ кг
a — ?

Решение. Согласно закону сохранения энергии при опускании груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию груза и кинетическую энергию вращения барабана:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где J — момент инерции барабана.

Учитывая, что $J = \frac{Mr^2}{2}$, $\omega = \frac{v}{r}$, где r — радиус барабана, запишем уравнение (1) в виде

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{4} = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right). \qquad (2)$$

Груз опускается под действием постоянной силы, поэтому его движение равноускоренное, следовательно,

$$h = at^2/2, \qquad (3)$$

$$v = at. \qquad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (2):

$$mg\frac{at^2}{2} = \frac{a^2t^2}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right). \qquad (5)$$

Из уравнения (5) получим искомое ускорение груза:

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

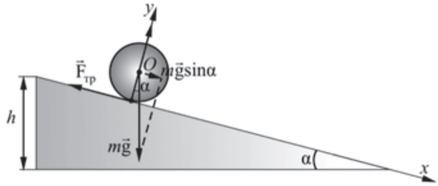
Проверим размерность:

$$[a] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a = \frac{2 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{9 + 2 \cdot 2} = 3{,}02\ \text{м} / \text{с}^2.$$

Ответ: $a = 3{,}02$ м/с^2.

Задача 1.7.5. Круглое однородное тело (обруч, цилиндр, шар) радиусом R и массой m скатывается без скольжения по наклонной плоскости под углом α к горизонту с высоты



h (см. рис.). Начальная скорость тела равна нулю. Найти скорость центра масс в конце спуска. У какого из тел (обруч, цилиндр, шар) конечная скорость будет наибольшей и наименьшей?

Решение. Используем закон сохранения полной энергии. В конце спуска тело приобретает кинетическую энергию:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right).$$

Эта кинетическая энергия приобретена за счет потенциальной энергии mgh. Отсюда следует выражение для скорости в конце спуска:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J / mR^2}}.$$

Подставляя сюда моменты инерции обруча ($J = mR^2$), цилиндра ($J = mR^2/2$) и шара ($J = 0{,}4mR^2$), находим:

$$v_{обр} = \sqrt{gh},$$

$$v_{цил} = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

$$v_{шар} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Ответ: скорость обруча наименьшая; скорость шара наибольшая.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.7.1. Три маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

Ответ: $J=ma^2$; 1) $4\cdot10^{-4}$ кг·м^2; 2) $2\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 1.7.2. Найти момент J тонкого однородного кольца радиусом $R=20$ см и массой $m=100$ г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

Ответ: $J=mR^2/2=0{,}002$ кг·м^2.

Задача 1.7.3. Определить момент инерции J кольца массой $m=50$ г и радиусом $R=10$ см относительно оси, касательной к кольцу.

Ответ: $J=(3/2)mR^2=7{,}5\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 1.7.4. Диаметр диска $d=20$ см, масса $m=800$ г. Определить момент инерции J диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости дисков.

Ответ: $J=(3/4)mR^2=6\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.7.5. Определить момент инерции тонкой J плоской пластины со сторонами $a=10$ см и $b=20$ см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно большей стороне. Масса пластины равномерно распределена по ее площади с поверхностной плотностью $\sigma=1{,}2$ кг/м^2.

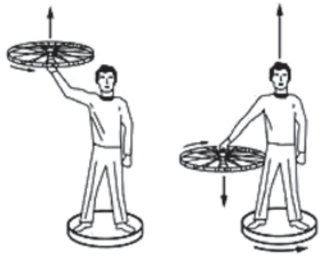
Ответ: $J=\sigma a^3b/12=2\cdot10^{-5}$ кг·м^2.

Задача 1.7.6. Тонкий однородный стержень длиной $l=50$ см и массой $m=400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon=3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

Ответ: $M=ml^2\varepsilon=0{,}025$ Н·м.

Задача 1.7.7. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой

$n = 10$ с$^{-1}$. Радиус R колеса равен 20 см, его масса $m = 3$ кг. Определить частоту вращения n_2 скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.



Ответ: $n_2 = 2mR^2n_1/(J + mR^2) = 0{,}392$ с$^{-1}$.

Задача 1.7.8. Кинетическая энергия $E_к$ вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равномерно и, сделав $N = 80$ оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

Ответ: $M = T/(2\pi N) = 1{,}99$ Н·м.

Задача 1.7.9. Сплошной цилиндр массой $m = 4$ кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость v оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию $E_к$ цилиндра.

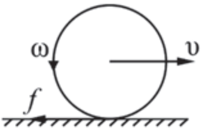
Ответ: $E_к = 3mv^2/4 = 3$ Дж.

Задача 1.7.10*. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $M = 80$ г, перекинута тонкая гибкая нерастяжимая нить. К концам нити присоединены грузы, массы которых соответственно равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если систему предоставить самой себе?

Ответ: $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2} g = 2{,}88$ м/с^2.

Задача 1.7.11*. Гироскоп длиной l вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Момент инерции гироскопа J_0. К концу гироскопа приложена сила $\vec{F}$, перпендикулярная вектору $\vec{\omega}$, действующая в течение короткого времени Δt. Найти угол, на который отклонится ось гироскопа.

Ответ: $\Delta\Theta = \dfrac{Fl}{J_0\omega} \cdot \Delta t$.



Задача 1.7.12*. Цирковой артист бросает на арену обруч массой m и радиусом R, который катится в горизонтальном направлении со скоростью v. При этом обручу придано обратное вращение с угловой скоростью ω. При какой угловой скорости обруч после остановки покатится назад к артисту? Найти конечную скорость v_f поступательного движения обруча.

Ответ: $\omega > v/R$; $v_f = v - \omega R/2$.

Вселенная — это сфера, центр которой повсюду, а граница — нигде.

Б. Паскаль

1.8. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Это взаимодействие называется гравитационным и является одним из фундаментальных взаимодействий в природе. Мы знаем о нем очень мало, гораздо меньше, чем, например, об электромагнитном взаимодействии. Тем не менее на уровне механики мы можем описать гравитацию.

1.8.1. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

Рассмотрим более подробно гравитационные силы — один из видов фундаментальных сил.

Первые высказывания о тяготении как о всеобщем свойстве материи относятся к Античности. В XVI–XVII вв. в Европе возродились попытки доказать существование взаимного тяготения тел. Немецкий астроном И. Кеплер[1] говорил, что «тяготение есть взаимное стремление всех тел». Классическая формулировка ***за-***

[1] Кеплер Иоганн (1571–1630) — немецкий математик, астроном, оптик и астролог. Открыл законы движения планет.

кона всемирного тяготения была дана И. Ньютоном в 1687 г. в его труде «Математические начала натуральной философии».

Согласно этому закону ***сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними***:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1.101)$$

где γ — коэффициент пропорциональности, называемый *гравитационной постоянной.*

Надо помнить, что силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

В данном случае тела, о которых шла речь, представляют собой материальные точки. Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку (рис. 1.59).

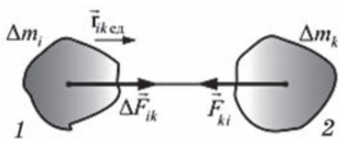


Рис. 1.59
К определению силы взаимодействия тел произвольной формы

Тогда i-я элементарная масса тела *1* притягивается к k-й элементарной массе тела *2* с силой

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}}, \qquad (1.102)$$

где $\vec{r}_{ik\,\text{ед}}$ — единичный вектор (орт), направленный от Δm_i к Δm_k.

Просуммировав последнее выражение по всем значениям k, получим результирующую всех сил, действующую со стороны тела *2* на принадлежащую телу *1* элементарную массу Δm_i:

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{r}_{ik\,\text{ед}}. \tag{1.103}$$

Наконец, просуммировав полученное выражение по всем значениям индекса i, т. е. сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело *2* действует на тело *1*:

$$\vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{r}_{ik\,\text{ед}}. \tag{1.104}$$

Суммирование производилось по всем значениям i и k. Следовательно, если тело *1* разбить на n_1, а тело *2* на n_2 элементарных масс, то сумма будет содержать $n_1 \cdot n_2$ слагаемых. Практически суммирование сводится к интегрированию и является довольно сложной математической задачей.

Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, то вычисление последней суммы приводит к следующему результату:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_{12}, \tag{1.105}$$

где r — расстояние между центрами шаров; $\vec{r}_{12}$ — единичный вектор от центра шара *1* к центру шара *2*.

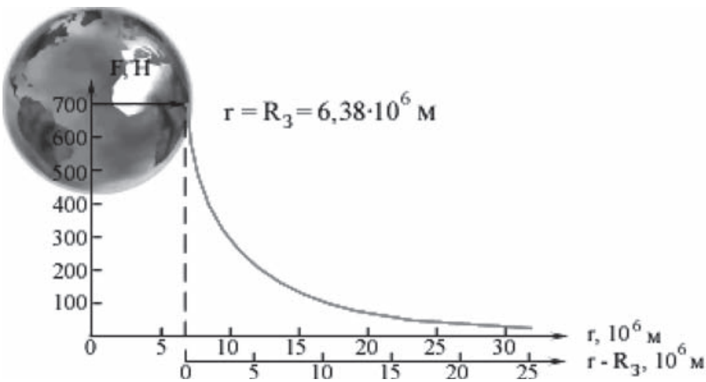


Рис. 1.60
Сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния

Таким образом, в упрощенном варианте шары действуют как материальные точки, помещенные в их центры и имеющие их массы.

Если одно из тел представляет собой шар очень больших размеров радиусом R (земной шар), а второе тело имеет размеры гораздо меньше R и находится вблизи поверхности большого шара, то их взаимодействие описывается формулой (1.105), где $r=R_З$ (рис. 1.60).

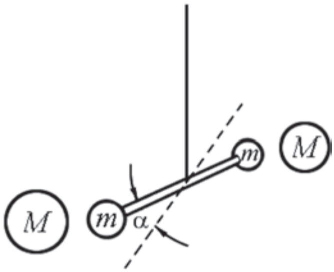


Рис. 1.61
Опыт Кавендиша по определению гравитационной постоянной

Физический смысл гравитационной постоянной в том, что она равна силе в $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, центры которых отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.

Гравитационная постоянная γ была определена впервые Генри Кавендишем[1] в 1798 г. с помощью изобретенных им крутильных весов (рис. 1.61). На рисунке 1.62 изображены современные торсионные весы, на которых ученые Вашингтонского университета уточняют значение гравитационной постоянной.

Рис. 1.62
Современные торсионные весы, используемые для уточнения величины γ

Наиболее точным из определенных опытным путем считается значение $\gamma=(6{,}67428\pm0{,}00067)\cdot10^{-11}$ Н$\cdot$м$^2\cdot$кг$^{-2}$.

[1] Кавендиш Генри (1731–1810) — знаменитый британский физик и химик, член Лондонского королевского общества.

1.8.2. ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не дает ответа на вопрос о том, *как* осуществляется это взаимодействие.

Тяготение (*гравитационное взаимодействие*), в отличие от таких механических взаимодействий, как удар, трение и т. д., принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно *проявляется между телами, удаленными друг от друга. Причем сила тяготения не зависит от того, в какой среде эти тела находятся.* Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью ***поля тяготения*** (***гравитационного поля***).

Физики до XIX в. считали, что абсолютно пустого пространства не существует, что все заполнено какой-то средой, например мировым эфиром, через который и осуществляется взаимодействие. Однако к XX в. выяснилось, что нет никакого эфира, через который якобы передается взаимодействие. Современная физика утверждает, что *силовые взаимодействия осуществляются полями,* т. е. тело *1* возбуждает в окружающем пространстве силовое поле, которое в месте нахождения тела *2* проявляется в виде действующих на него сил. В свою очередь тело *2* возбуждает аналогичное силовое поле, действующее на тело *1*.

Поле *— это объективная реальность, посредством которой передается взаимодействие.* ***Поле*** *наряду с* ***веществом*** *является одним из* ***видов материи***.

Итак, гравитационное поле порождается телами и, так же как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), является одной из форм материи.

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой m, внесенную в это поле, действует сила притяжения F, пропорциональная m: $\vec{F} = m\vec{G}$. *Отсюда*

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{1.106}$$

где $\vec{G}$ — вектор, названный ***напряженностью поля тяготения.***

Вектор напряженности $\vec{G}$ *численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает с этой силой по направлению.*

Вектор напряженности является силовой характеристикой гравитационного поля и изменяется при переходе от одной точки поля к другой.

Поле тяготения является ***центральным*** *и* ***сферически симметричным.***

Поле называется ***центральным****, если во всех его точках векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке О, неподвижной относительно какой-либо инерционной системы отсчета. Точка О называется центром сил.*

Центральное поле называют сферически симметричным, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил О: G=G(r).

При наложении нескольких полей тяготения напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i.$$

Этот принцип вытекает из принципа независимости действия сил и называется *принципом суперпозиции* (*наложения полей*).

1.8.3. РАБОТА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

Силы тяготения являются консервативными. Это значит, что работа в поле этих сил пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного положения этих точек. Покажем это на простом примере (рис. 1.63).

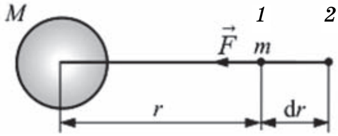


Рис. 1.63
К определению работы сил гравитационного поля при перемещении материальной точки массы m из положения *1* в положение *2*

Определим работу, совершенную силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки массой m (работу по удалению материальной точки массой m от Земли массой M на расстояние r).

На данную точку в положении *1* действует сила $F = \gamma mM/r^2$.

При перемещении этой точки на расстояние $\mathrm{d}r$ совершается работа

$$\mathrm{d}A = -\gamma \frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

(знак «−» показывает, что сила и перемещение противоположны). Тогда общая работа

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}A = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right). \qquad (1.107)$$

Эта формула показывает, что затраченная работа не зависит от траектории, а зависит лишь от координат точки.

Работа консервативных сил при перемещении точки m вдоль произвольного замкнутого контура L тождественно равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \equiv 0$$

или

$$\oint_L \vec{G}\mathrm{d}\vec{r} \equiv 0. \qquad (1.108)$$

Напомним, что эти интегралы называются *циркуляцией* соответствующих векторов $\vec{F}$ и $\vec{G}$ вдоль замкнутого контура. Равенство нулю этих циркулирующих векторов является *необходимым и достаточным* признаком консервативности силового поля $\vec{F}$.

Из (1.107) следует, что *работа A, совершенная консервативными силами, равна уменьшению потенциальной* *энергии системы*. В нашем случае работа равна уменьшению потенциальной энергии U материальной точки, перемещающейся в поле тяготения.

$$A_{12} = -\Delta E_{\text{п}} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}$$

или

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{\text{п}}.$$

В случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой массой M,

$$E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (1.109)$$

При рассмотрении гравитационного поля Земли формулу (1.109) можно переписать в виде

$$E_{\text{п}} - E_{\text{п.З}} = mgR_З^2\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{r}\right). \qquad (1.110)$$

Принято считать, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю (рис. 1.64). Штрихованной линией здесь показана потенциальная энергия внутри Земли. При $r=0$ в центре Земли:

$$E_{\text{п}} - E_{\text{п.З}} = -\frac{1}{2}mgR_З.$$

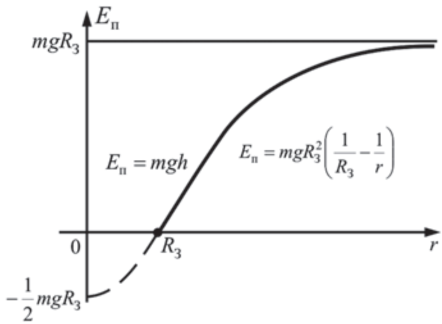


Рис. 1.64
Зависимость потенциальной энергии гравитационного поля от расстояния до центра Земли

Если условиться считать, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля точки M, тогда из (1.109) получаем

$$\lim_{r_2 \to \infty} E_{\text{п}} = 0$$

и

$$E_{\text{п}1} = -\gamma \frac{mM}{r_1},$$

или, в силу произвольности выбора точки *1*,

$$E_{\text{п}} = -\gamma \frac{mM}{r}. \qquad (1.111)$$

Величину $E_{\text{п}}$ называют ***взаимной*** *потенциальной энергией* обеих точек.

Величина φ *равна отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе* m*:*

$$\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{m} = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}, \qquad (1.112)$$

является энергетической характеристикой самого поля тяготения и называется ***потенциалом поля тяготения.***

По аналогии с потенциалом электростатического поля роль заряда здесь выполняет масса m. Потенциал — величина скалярная.

Потенциал поля тяготения, создаваемый одной материальной точкой с массой M, равен $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$, где r — расстояние от этой точки до рассматриваемой точки поля.

Из сопоставления двух последних соотношений следует

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

т. е. потенциал в некоторых точках поля, являющегося результатом наложения полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности (принцип суперпозиции).

Между двумя характеристиками поля тяготения — напряженностью и потенциалом — существует взаимосвязь. Найдем ее.

Из выражений (1.106) и (1.112) следует, что $\vec{F} = m\vec{G}$, а $E_{\text{п}} = m\varphi$.

Так как $\vec{F} = -\nabla E_{\text{п}}$ (1.79), то $m\vec{G} = -m\nabla\varphi$, откуда

$$\vec{G} = -\nabla\varphi.$$

Таким образом, вектор напряженности $\vec{G}$ может быть выражен как градиент скалярной функции гравитационного потенциала φ:

$$\vec{G} = -\text{grad}\varphi, \quad (1.113)$$

где

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Здесь вектор, называемый градиентом потенциала со знаком «–», показывает, что в каждой точке поля тяготения вектор напряженности $\vec{G}$ направлен в сторону *наиболее быстрого убывания потенциала*.

Гравитационное поле можно изобразить с помощью *силовых линий* и *эквипотенциальных поверхностей* (рис. 1.65).

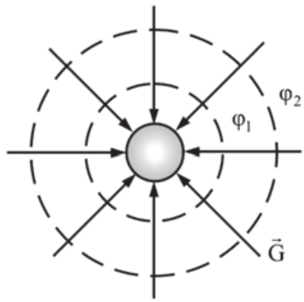


Рис. 1.65
Линии напряженности $\vec{G}$ и эквипотенциальные поверхности φ_1 и φ_2 гравитационного поля

Эквипотенциальные поверхности *— геометрическое место точек с одинаковым потенциалом. Линии напряженности* $\vec{G}$ (*силовые линии поля*) всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Графическая зависимость напряженности гравитационного поля Земли (и ускорения a) от расстояния до центра Земли изображена на рисунке 1.66.

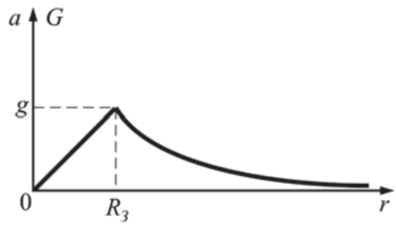


Рис. 1.66
Зависимость напряженности $\vec{G}$ и ускорения $\vec{a}$ от расстояния до центра Земли

Из рисунка видно, что внутри Земли $\vec{G}$ растет пропорционально r, а вне Земли убывает ~$1/r^2$. Так же и ускорение $a = gr/R_З$ — внутри Земли; $a = gR_З^2 / r^2$ — вне Земли.

Закон всемирного тяготения и механика Ньютона явились величайшим достижением естествознания. Они с большой точностью описывают обширный круг явлений, в том числе движение в иных системах небесных тел — двойных звезд в звездных скоплениях, галактиках. На основе теории тяготения Ньютона было предсказано существование планеты Нептун, спутников Сириуса и др. В астрономии закон тяготения Ньютона является фундаментом, на основе которого вычисляются движение, строение и эволюция небесных тел. Однако в некоторых случаях поле тяготения и движение физических объектов в полях тяготения не может быть описано законами Ньютона. Сильные гравитационные поля и движение в них с большими скоростями $v \approx c$ описываются в общей теории относительности (ОТО), созданной А. Эйнштейном.

1.8.4. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАСС*

Понятие «масса» фигурирует в двух разных законах — во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения.

В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором — гравитационные свойства, т. е. способность тел притягиваться друг к другу. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать ***инертную массу*** m_{in} и ***массу гравитационную*** (или тяготеющую) m_g? Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения

$$F = \gamma \frac{m_g M}{R_З^2} = m_g g. \quad (1.114)$$

Под действием этой силы тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M}{R_З^2} \frac{m_g}{m_{in}} = g \frac{m_g}{m_{in}}. \tag{1.115}$$

Опыт показывает, что ускорение a для всех тел в гравитационном поле одинаково: $a=g$. Следовательно, и $m_g=m_{in}$, при надлежащем выборе единиц измерения. Поэтому говорят просто о массе.

Постоянство отношения m_g/m_{in} для всех тел является характерной особенностью гравитационного поля.

1867 г. Ньютон доказал это равенство с точностью до 10^{-3}.

1901 г. Венгерский физик Этвеш[1] получил такое совпадение с точностью до 10^{-8}.

1964 г. Американский ученый Дикке[2] улучшил точность измерения в 300 раз.

Тождественность ***инерциальной*** *и* ***гравитационной масс*** *Эйнштейн положил в основу общей теории относительности.*

Следствием этого является тот факт, что, находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg: тем, что кабина движется с ускорением $a=g$ или действием притяжения Земли?

1.8.5. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Еще в глубокой древности было замечено, что, в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птолемей[3] (II в. н. э.), считая Землю

---

[1] Этвеш Лоранд барон фон (1848–1919) — венгерский физик. Сформулировал зависимость силы поверхностного натяжения от температуры.

[2] Дикке Роберт (р. 1916) — американский физик. Работы в области теории относительности, гравитации, космологии, астрофизики, атомной спектроскопии, квантовой физики, радиофизики, квантовой электроники.

[3] Птолемей Клавдий (87–165) — древнегреческий астроном, математик, оптик, теоретик музыки и географ.

расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название *птолемеевой, или геоцентрической, системой мира*.

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником обоснована *гелиоцентрическая система*, согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли (рис. 1.67).

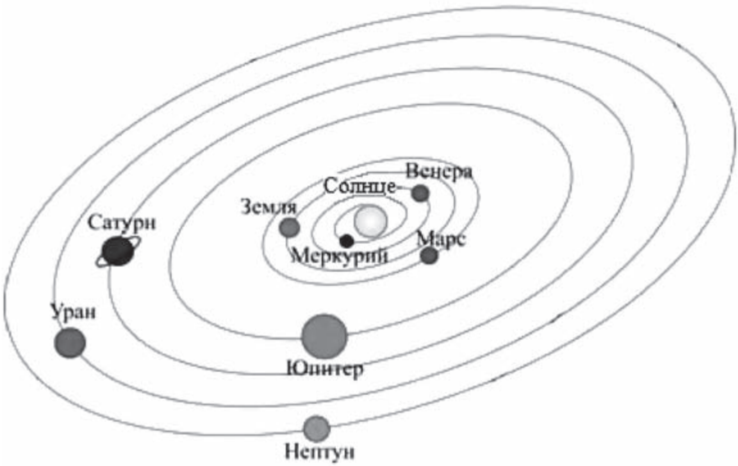


Рис. 1.67
Гелиоцентрическая система мира

Теория наблюдения Коперника воспринималась как занимательная фантазия. В XVI в. это утверждение рассматривалось церковью как ересь. Известно, что Дж. Бруно[1], открыто выступивший в поддержку гелиоцентрической системы Коперника, был осужден инквизицией и сожжен на костре.

---

[1] Джордано Бруно (1548–1600) — итальянский монах-доминиканец, философ и поэт, представитель пантеизма.

Кеплер Иоганн (1571–1630) — немецкий ученый, один из творцов небесной механики. Работы в области астрономии, механики, математики. Используя наблюдения Тихо Браге и свои собственные, открыл законы движения планет (три закона Кеплера). Известен как конструктор телескопа (так называемая зрительная труба Кеплера, состоящая из двух двояковыпуклых линз).

Однако к началу XVII столетия большинство ученых убедились в справедливости гелиоцентрической системы мира. Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге[1] (которого называют «человеком, измерившим небо»), получил законы движения планет вокруг Солнца.

Закон всемирного тяготения был открыт Ньютоном на основе трех законов Кеплера.

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце* (рис. 1.68).

Второй закон Кеплера. *Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади* (рис. 1.69).

Третий закон Кеплера. *Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \qquad (1.116)$$

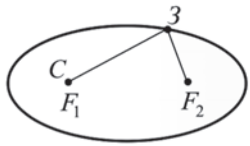


Рис. 1.68
Эллиптическое движение Земли вокруг Солнца. F_1 и F_2 — фокусы эллипса

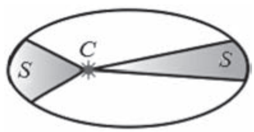


Рис. 1.69
Равные площади S, описанные радиус-вектором за равные времена

[1] Тихо Браге (1546–1601) — датский астроном, астролог и алхимик эпохи Возрождения. Первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения.

Почти все планеты (кроме Плутона, который по современным представлениям уже не считается планетой) движутся в одной плоскости по орбитам, близким к круговым. Для круговых орбит первый и второй законы Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что $T^2 \sim R^3$ (T — период обращения; R — радиус орбиты).

Ньютон решил *обратную задачу механики* и из законов движения планет получил выражение для гравитационной силы:

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \tag{1.117}$$

Как нам уже известно, гравитационные силы являются *консервативными*. При перемещении тела в гравитационном поле консервативных сил по замкнутой траектории работа равна нулю. Свойство консервативности гравитационных сил позволило нам ввести понятие *потенциальной энергии*.

Потенциальная энергия тела массой m, расположенного на расстоянии r от большого тела массой M, есть

$$E_\text{п} = -\gamma \frac{Mm}{r}. \tag{1.118}$$

Если тело находится в гравитационном поле на некотором расстоянии r от центра тяготения и имеет некоторую скорость v, его *полная механическая энергия* равна сумме кинетической и потенциальной энергий и в соответствии с законом сохранения энергии *остается неизменной*:

$$E = E_\text{к} + E_\text{п} = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}. \tag{1.119}$$

Полная энергия может быть положительной и отрицательной, а также равняться нулю. Знак полной энергии определяет характер движения небесного тела.

При $E < 0$ тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние $r_0 > r_{\max}$. В этом случае небесное тело движется по *эллиптической орбите* (спутники планет, планеты Солнечной системы, кометы) (рис. 1.70).

Период обращения небесного тела по эллиптической орбите равен периоду обращения по круговой орбите радиусом R, где R — большая полуось орбиты.

При $E=0$ тело движется по *параболической траектории*. Скорость тела на бесконечности равна нулю.

При $E>0$ движение происходит по *гиперболической траектории*. Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

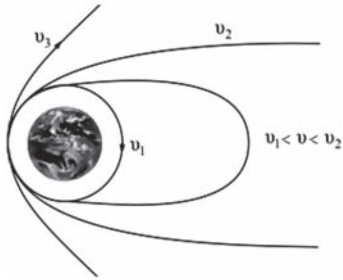


Рис. 1.70
Траектории движения тел с различными космическими скоростями

Первой космической скоростью *называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли* (рис. 1.70). Для этого, как следует из второго закона Ньютона, центробежная сила должна уравновешиваться гравитационной силой:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R_З} = \gamma\frac{Mm}{R_З^2} = gm,$$

отсюда

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_З} = \sqrt{9{,}81\cdot 6{,}38\cdot 10^6} \approx 7{,}9\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Второй космической скоростью *называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев земное притяжение, стало искусственным спутником Солнца* (*искусственная планета*). Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была не меньше работы по преодолению тяготения Земли:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_R^\infty \gamma\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{\gamma mM}{R_З},$$

отсюда

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR_З} = \sqrt{2}\upsilon_1 \approx 11{,}2\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Третья космическая скорость *— скорость движения, при которой тело может навсегда покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.*

Чтобы преодолеть силу притяжения Солнца, телу, находящемуся на Земле, надо придать скорость v_3. Эта скорость определяется аналогично v_2, т. е. из равенства кинетической энергии тела и его потенциальной энергии в поле Солнца при его удалении в бесконечность:

$$\frac{mv_3^2}{2} = \gamma \frac{mM_\text{С}}{R_\text{О}},$$

где $R_\text{О}$ — радиус земной орбиты; $M_\text{С}$ — масса Солнца. Отсюда

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_\text{С}}{R_\text{О}}} \approx 42{,}1 \cdot 10^3 \text{ м / с}.$$

С учетом того что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет и изменяются в пределах от 16,6 до 73 км/с. Таким образом, ***при оптимальном запуске*** $v_3 = 16{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

Более подробно расчет третьей космической скорости приведен в задаче 1.8.2.

Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Теоретическую разработку таких задач начал русский ученый К. Э. Циолковский.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения Ньютона.
2. Каков физический смысл, значение и размерность гравитационной постоянной?
3. Что такое напряженность поля тяготения?
4. Какие поля называются однородными, центральными, сферически симметричными?
5. Какие величины вводятся для характеристики поля тяготения и какова связь между ними?
6. Покажите, что силы тяготения консервативны.

7. Чему равно максимальное значение потенциальной энергии системы из двух тел, находящихся в поле тяготения?
8. Как вычисляется работа в поле сил тяготения?
9. Изобразите силовые линии и эквипотенциальные поверхности.
10. Приведите графическую зависимость напряженности гравитационного поля от расстояния до центра Земли.
11. Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности Эйнштейна.
12. Сформулируйте законы Кеплера.
13. Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?
14. Как вычисляются первая, вторая и третья космические скорости?
15. Самолет движется по дуге радиусом R с постоянной скоростью 500 км/ч. При каком радиусе R пассажиры испытывают состояние невесомости?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.8.1. ***Простая астрономия Солнечной системы.*** Физические формулы обладают замечательным свойством. Иногда с их помощью можно сделать то, что невозможно сделать даже при помощи точных измерительных приборов.

Покажем, как можно, используя закон всемирного тяготения, определить: массу Земли, радиус орбиты Луны, скорость Луны на орбите, угловой диаметр Луны, радиус Луны, расстояние от Земли до Солнца, радиус Солнца, массу Солнца и орбитальную скорость Земли.

Решение. Радиус Земли можно найти с помощью геометрических измерений на ее поверхности. Современное значение радиуса Земли $R_З = 6{,}38 \cdot 10^6$ м.

Найдем массу Земли. Каждое тело массой m притягивается к Земле с силой

$$F = \gamma \frac{mM_З}{R^2},$$

где $M_З$ — масса Земли, а R — расстояние от тела до центра Земли. С другой стороны, отношение силы к массе — это ускорение свободного падения g:

$$g = \gamma \frac{M_З}{R^2}.$$

Из этого уравнения следует, что g не зависит от массы и размеров тела и определяется исключительно параметрами Земли и расстоянием до нее. Вблизи поверхности земли $R \approx R_З$ и $g = 9{,}81$ м/с^2. Исходя из этого, находим массу Земли:

$$M_З = \frac{gR_З^2}{\gamma} = \frac{9{,}81 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Найдем радиус орбиты Луны. Период обращения Луны вокруг Земли равен $T_Л = 27{,}32$ сут $= 2{,}36 \cdot 10^6$ с. Центростремительное ускорение Луны

$$a_Л = \omega_Л^2 R_{ОЛ} = \left(\frac{2\pi}{T_Л}\right)^2 \cdot R_{ОЛ}$$

должно быть равно ускорению свободного падения на орбите Луны. Приравняв g и $a_Л$, получим выражение для нахождения радиуса орбиты Луны:

$$R_{ОЛ} = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_З T_Л^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (2{,}36 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Найдем скорость Луны на орбите. Скорость находим по формуле

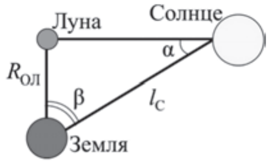
$$v_Л = \frac{2\pi R_Л}{T_Л} = 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ м / с}.$$

Найдем угловой диаметр Луны. Большой палец, толщина которого примерно равна $d \approx 0{,}01$ м, закрывает диск Луны при вытянутой руке ($l = 1$ м). Из этого получаем $\varphi \approx \sin\varphi = d/l = 10^{-2}$ рад $\approx 0{,}57°$. Более точные измерения дают для углового диаметра $\varphi = 0{,}518° = 0{,}009$ рад.

Найдем радиус Луны. Радиус Луны находим, используя точное значение углового диаметра Луны:

$$R_Л = L_Л \sin(\varphi/2) \approx L_Л(\varphi/2) \approx$$

$$3{,}84 \cdot 10^8 \cdot 0{,}009/2 = 1{,}73 \cdot 10^6 \text{ м}.$$



Найдем расстояние от Земли до Солнца. Расстояние найдем с помощью геометрии (см. рис.), используя расстояние от Земли до Луны. Когда луна находится в первой четверти, направления от нее в сторону Земли и в сторону Солнца составляют прямой угол. Угол β между направлениями с Земли на Луну и Солнце близок к прямому ($\beta = 89°51'$). Для расчета расстояния от Земли до Солнца используем угол $\alpha = \pi/2 - \beta = 0{,}15°$:

$$l_С = \frac{R_{ОЛ}}{\sin\alpha} \approx \frac{R_{ОЛ}}{\alpha} = \frac{3{,}84 \cdot 10^8}{2{,}6 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}48 \cdot 10^{11} \text{ м}.$$

Более точно это расстояние (астрономическая единица) равно $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м $= 149{,}6$ млн км.

Найдем скорость Земли на орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З = 1$ год $= 3{,}156 \cdot 10^7$ с. Скорость Земли:

$$v_З = \frac{2\pi l_С}{T_З} = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{3{,}156 \cdot 10^7} = 2{,}98 \cdot 10^4 \text{ м / с}.$$

Найдем радиус Солнца. Угловой диаметр Солнца приблизительно равен угловому диаметру Луны: $\varphi = 9{,}31 \cdot 10^{-3}$ рад. Радиус Солнца:

$$R_С = l_С \sin(\varphi / 2) \approx \frac{l_С \varphi}{2} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} \cdot 9{,}31 \cdot 10^{-3}}{2} = 696 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Найдем массу Солнца, используя закон всемирного тяготения. Центростремительное ускорение Земли на орбите $a_З = \dfrac{v_З^2}{l_С} = \dfrac{4\pi^2 l_С}{T_З^2}$ должно быть равно ускорению свободного падения Земли на Солнце $g_\text{С} = \dfrac{\gamma M_\text{С}}{L_\text{С}^2}$. Приравняв $a_\text{З}$ и $g_\text{С}$, получим

$$M_\text{С} = \frac{4\pi^2 l_\text{С}^3}{\gamma T_\text{З}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}156 \cdot 10^7)^2} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Задача 1.8.2. Рассчитать **третью космическую скорость** — скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно навсегда покинуло пределы солнечной системы. Найти оптимальное значение скорости.

Решение. Чтобы преодолеть силу притяжения Солнца, объекту, находящемуся на орбите Земли, надо придать скорость $v_\text{кр}$. Эта скорость определяется из равенства кинетической энергии объекта изменению его потенциальной энергии в поле Солнца при удалении на бесконечно большое расстояние (1.120):

$$\frac{mv_\text{кр}^2}{2} = \gamma \frac{mM_\text{С}}{L_C},$$

где $M_\text{С}$ — масса Солнца; L_C — радиус земной орбиты. Отсюда

$$v_\text{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma M_\text{С}}{R_\text{О}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^3}{1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 42{,}1 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Это минимальная скорость, которую надо придать неподвижному телу, находящемуся на земной орбите. Так как Земля движется вокруг Солнца с линейной скоростью $v_\text{З}$=29,8 км/с, то ракету целесообразно запускать в направлении движения Земли вокруг Солнца. Рассчитаем третью космическую скорость *при оптимальном запуске*, исходя из энергетических соображений. Подсчет третьей космической скорости аналогичен вычислению второй космической скорости, но с дополнительным условием — тело на большом расстоянии от Земли все еще должно иметь скорость относительно Земли $v_\text{отн}$:

$$v_\text{отн} = v_\text{кр} - v_{\text{З}+},$$

$$v_\text{отн} = 42{,}1 \cdot 10^3 - 29{,}8 \cdot 10^3 = 12{,}3 \cdot 10^3 \text{ м/с,}$$

тогда

$$\frac{mv_З^2}{2}-\gamma\frac{mM_З}{R_З}=\frac{mv_{отн}^2}{2}.$$

Выразим потенциальную энергию через вторую космическую скорость и отсюда найдем третью космическую скорость:

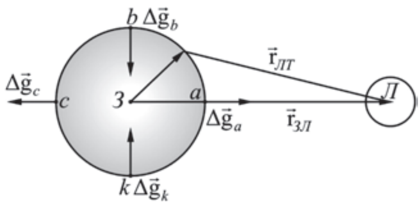
$$\frac{mv_З^2}{2}-\frac{mv_2^2}{2}=\frac{mv_{отн}^2}{2}.$$

$$v_З=\sqrt{v_2^2+v_{от}^2},$$

$$v_З=\sqrt{11{,}2^2+12{,}3^2}=16{,}6\cdot 10^3 \text{ м / с}.$$

Ответ: $v_З=16{,}6\cdot 10^3$ м/с.

Задача 1.8.3*. ***Оценить вклад Луны в ускорение свободного падения.*** В каждые лунные сутки наблюдаются два прилива и два отлива. В течение примерно шести часов в открытых морях происходит подъем уровня воды, вода надвигается на берег — это прилив. Затем наступает отлив, который длится тоже 6 часов. Причина этого явления в том, что Луна и Солнце вносят вклад в ускорение свободного падения — вектор $\vec{g}$ зависит от взаимного расположения Луны, Солнца и точки наблюдения.



Решение. В точке a, наиболее близкой к Луне, вектор $\Delta\vec{g}_a$ направлен к Луне (см. рис.). Величина ускорения свободного падения $g_a=g_0-2\gamma m_Л R/r_З$. На противоположной стороне земного шара в точке c вектор $\Delta\vec{g}$ направлен от Луны. Поэтому величина ускорения свободного падения $g_c=g_a$: неожиданный результат — и здесь сила притяжения уменьшается. На средней линии в точках b и k величина ускорения свободного падения возрастает:

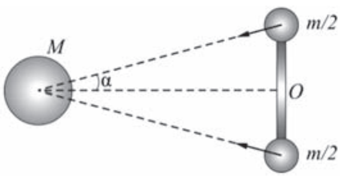
$$g_b=g_k=g_0+\gamma m_Л R/r_З^3.$$

Оценим вклад Луны в ускорение свободного падения. Масса Луны $m_Л = m_З/81{,}3$, среднее расстояние от Земли до Луны $r_З = 384\,400$ км $= 60{,}34R$.

Величина приращения ускорения свободного падения обусловлена влиянием Луны, $\Delta g/g_0 \approx (m_Л/m_З)(R/r_Л)^3 = 5{,}33 \cdot 10^{-8}$. Ничтожное различие в силе линии в точках b, k уровень понижает. В результате суточного вращения Земли вокруг своей оси двугорбая водяная поверхность перемещается. Это и есть приливы.

Задача 1.8.4*. ***Гравилет.*** Два шара массами $m_1 = m_2 = m/2$, прикрепленные к концам стержня пренебрежимо малой массы, образуют гантель. Расстояние между центрами шаров — l. Найдем силу, действующую на гантель в поле тяжести Земли. Расстояние от центра Земли до середины гантели — r.

Очевидно сила, действующая на гантель, зависит от ориентации гантели относительно Земли. Пусть ось гантели перпендикулярна плоскости орбиты, по которой движется центр масс (см. рис.). Величины сил, действующих на массы m_1 и m_2, одинаковы и равны:



$$F_1 = F_2 = f,$$

$$f = \frac{\gamma M m}{2(r^2 + (l/2)^2)}.$$

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлена по прямой, проходящей через центр Земли и центр масс гантели, величина силы

$$F(r) = 2f\cos\alpha,$$

$$F(r) = \frac{\gamma M m r}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}}. \qquad (1)$$

Пусть $l \ll r$, т. е. гантель является почти материальной точкой массой m. Используя разложение бинома Ньютона $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, получим

$$\frac{1}{[r^2+(l/2)^2]^{3/2}}=\frac{1}{r^3[1+(l/2r)^2]^{3/2}}=\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3l^2}{8r^2}+\ldots\right).$$

Следовательно,

$$F(r)=\frac{\gamma Mm}{r^2}(1-\frac{3l^2}{8r^2}+\ldots).$$

Второе слагаемое можно рассматривать как силу $\vec{f}$, возмущающую Кеплерово движение тела массой m:

$$\vec{f}=\gamma Mm\frac{3l^2r^2}{8r^4}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор центра масс тела.

Итак, величина силы притяжения, действующей на гантель (1), меньше величины силы притяжения, действующей на точечное тело той же массы. Это обстоятельство позволило предсказать новый эффект — в результате периодического изменения распределения массы внутри космического корабля появляется возможность целенаправленно изменять параметры Кеплерова эллипса.

Пусть длина гантели представляет собой периодическую функцию. В течение каждого периода T:

$$l(t)=l_0,\quad 0\le t\le T/2;\quad l(t)=0,\quad T/2<t<T.$$

В интервале времени, когда выполняется условие $fv>0$, длина гантели должна быть равна нулю. В течение остальной части периода, когда $fv<0$, длина гантели должна быть максимальной. В результате работы внутренних сил полная энергия гантели E возрастает. Значению $E=0$ соответствует вторая космическая скорость. Появляется возможность, подобно барону Мюнхаузену, вытащившему себя за волосы из болота, покинуть сферу действия Земли. Этот эффект возможен только в неоднородном поле тяготения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.8.1. Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое можно считать бесконечно большим. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние до Солнца будет равно среднему расстоянию от Земли до Солнца?

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 42{,}1$ км / с.

Задача 1.8.2. Радиус планеты вчетверо больше земного. Определите длительность суток на планете, если тела на ее экваторе невесомы.

Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\frac{R_З}{g}} = 48$ ч.

Задача 1.8.3. Космическая станция вращается по круговой орбите вокруг Земли на высоте $h_1 = 4000$ км, медленно снижаясь. Определите высоту станции h_2 над Землей, когда ускорение ее свободного падения увеличится на 20% по сравнению с первоначальным.

Ответ: $h_2 = \frac{R_З + h_1}{\sqrt{1{,}2}} - R_З = 3{,}1 \cdot 10^3$ км.

Задача 1.8.4. Какова первая космическая скорость для планеты с массой втрое большей и радиусом вдвое большим, чем у Земли?

Ответ: $v_1 = \sqrt{1{,}5 v_{1_З}} = 9{,}66$ км / с.

Задача 1.8.5. На экваторе некоторой планеты тело весит в $1{,}5$ раза меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, если период ее вращения вокруг оси составляет 20 часов.

Ответ: $\rho = \frac{9\pi}{\gamma T^2} = 81$ кг / м^3.

Задача 1.8.6. На какой высоте должен вращаться спутник в плоскости экватора, чтобы за земные сутки совершать $n = 14$ оборотов вокруг Земли?

Ответ: $h = \sqrt[3]{\frac{R_З^2 g}{4\pi^2 n^2}} - R_З = 900$ км.

Задача 1.8.7*. Пусть имеется полая сферическая оболочка массой m с внешним радиусом R_2 и внутренним R_1, так что толщина оболочки равна R_2-R_1. Чему равно поле тяготения внутри оболочки, т. е. при $R_1 < r < R_2$? Запишите ответ через γ, m, R_1 и R_2, предполагая плотность оболочки однородной.

Ответ: $\gamma \dfrac{m(r^3 - R_1^3)}{r^2(R_2^3 - R_1^3)}$.

Задача 1.8.8. Телу сообщили на полюсе Земли скорость $v_0=2$ км/с, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, определите высоту, на которую поднимется тело. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 211$ км.

Задача 1.8.9*. Космическое тело движется в направлении к Солнцу, имея вдали от него скорость $v_1=8{,}3$ км/с и предельный параметр $\rho=2{,}81$ а. е. Определите наименьшее расстояние $r_{\min}$, на которое это тело приблизится к Солнцу.

Ответ: $r_{\min} = \dfrac{\gamma M}{v_1^2}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\rho v_1^2}{\gamma M}\right)^2} - 1\right) = 1{,}074$ а. е.

Задача 1.8.10*. Космический корабль, запущенный на Марс, движется по эллиптической орбите. Большая ось эллипса равна сумме расстояний от Земли и Марса до Солнца. Сколько времени понадобится космическому кораблю, чтобы достичь Марса? Расстояние r_1 между Солнцем и Марсом равно $2{,}28\cdot 10^{11}$ м.

Ответ: $t = \left(1+\dfrac{r_1}{r_2}\right)\cdot\sqrt{0{,}5+\dfrac{r_1}{2r_2}}\cdot\dfrac{T_2}{4} = 259{,}7$.

Задача 1.8.11. Определите период обращения искусственного спутника, движущегося в непосредственной близости от поверхности планеты, средняя плотность вещества которой равна ρ.

Ответ: $\sqrt{3\pi/(\gamma\rho)}$.

Задача 1.8.12. Получите в общем виде выражение для поля тяготения на поверхности планеты радиусом R, средняя плотность вещества которой равна ρ.

Ответ: $(4/3)\pi\gamma\rho R$.

Задача 1.8.13. Бур поднимают на поверхность Земли из скважины глубиной h. Вычислить относительную погрешность, допускаемую при определении работы по поднятию бура без учета изменения его веса.

Ответ: $\Delta A/A = \varepsilon = h/(2R - h)$.

Задача 1.8.14. По какому закону падало бы тело по трубе, проложенной от Северного к Южному полюсу через центр Земли? За какой промежуток времени оно прошло бы это расстояние при отсутствии сопротивления? Землю считать однородной сферой.

Ответ: $\tau = \pi\sqrt{R / g_0}$.

Задача 1.8.15*. Каким должен быть радиус однородной сферы плотностью $\rho = 5500$ кг/м^3, чтобы потенциал ее гравитационного поля φ в точке, лежащей на поверхности сферы, был равен 10^4 Дж/кг?

Ответ: $R = \sqrt{3\varphi / 4\pi\gamma\rho} = 8 \cdot 10^4$ м.

Задача 1.8.16*. Каким должен быть радиус однородной сферы плотностью 5500 кг/м^3, чтобы потенциальная энергия $E_п$ молекулы азота, расположенной у поверхности сферы, в гравитационном поле этой сферы была равной $1{,}6 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Ответ: $R = \sqrt{\dfrac{3E_п}{4\pi\gamma\rho m}} = 4{,}7 \cdot 10^5$ м.

Задача 1.8.17. Найти выражение для напряженности поля и силы гравитационного взаимодействия между тонким однородным кольцом радиусом R и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на высоте h на перпендикуляре, восстановленном из центра кольца к его плоскости.

Ответ: $F = \gamma \dfrac{Mmh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$; $\quad E = \dfrac{\gamma M h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$.

Задача 1.8.18. Тонкое однородное полукольцо радиусом R имеет массу M. Найти выражение для силы взаимодействия между этим полукольцом и телом массой m, помещенным в центре кривизны, и для напряженности гравитационного поля полукольца в этой точке.

Ответ: $F = 2\gamma \dfrac{Mm}{\pi R^2}$.

Задача 1.8.19*. ***Межконтинентальный перелет.*** Телу на поверхности Земли сообщили начальную скорость, равную первой космической скорости, направленную под углом α к горизонту. Найдите максимальную высоту подъема над поверхностью Земли и дальность полета.

Ответ: $h_m = R\sin\alpha$; $s = R(\pi - 2\alpha)$.

1.9. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

В механике с большой точностью жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. В данной главе рассматриваются поверхностное натяжение жидкости, капиллярные явления, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, трение и вязкость жидкости.

1.9.1. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Согласно молекулярно-кинетической теории каждая молекула жидкости испытывает притяжение со стороны других молекул. При удалении молекул друг от друга силы притяжения быстро уменьшаются. На расстоянии порядка ~10^{-9} м, называемом *радиусом молекулярного действия r*, силами молекулярного притяжения можно пренебречь ввиду их малости.

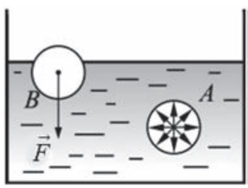


Рис. 1.71
Действие сил на отдельную молекулу, находящуюся:
A — внутри жидкости; *B* — на поверхности.

Рассмотрим отдельную молекулу *A* (рис. 1.71), находящуюся внутри жидкости. Если провести вокруг этой молекулы сферу радиусом r, то силы притяжения со стороны молекул, заключенных в данной сфере, будут направлены в разные стороны и их равнодействующая будет равна нулю.

Выделим молекулу B, находящуюся на расстоянии меньше r от поверхности жидкости. Снова проведем сферу радиусом r вокруг молекулы. Как видно из рисунка, часть этой сферы выйдет за пределы жидкости.

В связи с тем что концентрация молекул газа над жидкостью мала, равнодействующая сил молекулярного притяжения $\vec{F}$, действующих на молекулу B, не будет равна нулю. Эта равнодействующая направлена внутрь жидкости. Таким образом, молекулы поверхностного слоя жидкости оказывают на жидкость давление, которое называют молекулярным давлением. Жидкость оказывается сжатой. Поэтому жидкости малосжимаемы при внешнем воздействии.

Молекулы жидкости в поверхностном слое за счет сил межмолекулярного взаимодействия обладают большей потенциальной энергией по сравнению с другими молекулами. Чтобы молекулы из глубины жидкости переместились к ее поверхности, необходимо совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекулы и расходуется на увеличение ее потенциальной энергии. Итак, в поверхностном слое жидкости обладают дополнительной поверхностной энергией ΔE. Величина энергии ΔE тем больше, чем больше поверхность жидкости.

Если поверхность жидкости ограничена каким-либо замкнутым контуром, то на нее будут действовать силы, стремящиеся сократить эту поверхность. Эти силы *называют силами поверхностного натяжения*.

Для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить работу ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta A = \sigma \Delta S,$$

где ΔS — приращение площади приповерхностного слоя жидкости.

Тогда

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}.$$

Здесь *поверхностное натяжение* σ равно отношению работы, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости площадью ΔS, к площади этой поверхности.

Поверхностным натяжением σ называется физическая величина, равная отношению силы F, действующей на участок контура поверхности, к длине l этого участка,

$$\sigma = F/l. \qquad (1.120)$$

Поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр (Дж/м^2) или в ньютонах на метр (Н/м).

1.9.2. СМАЧИВАНИЕ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Можно наблюдать, как легко капля воды растекается по поверхности стола, прилипая к нему, а капля ртути свободно перекатывается с одного места на другое, образуя шарик. При этом молекулы ртути преодолевают не только силу тяжести, но и силу притяжения к молекулам стола. Следовательно, сила притяжения молекул ртути друг к другу сильнее, чем к молекулам стола.

В первом случае жидкость *смачивает* поверхность твердого тела, а во втором — *не смачивает*. Без каких-либо внешних воздействий капелька ртути принимает сферическую форму. Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под выпуклой поверхностью больше, а под вогнутой меньше, чем под плоской. Силы поверхностного натяжения создают *добавочное давление* P (в случае выпуклой поверхности — положительное, а при вогнутой — отрицательное). Вычислим давление P для сферической поверхности.

Пусть радиус сферы r увеличивается на малую величину Δr. При этом поверхность сферы увеличивается на величину $\Delta S = 8\pi r \Delta r$, а объем — на величину $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$. Найдем работу ΔA по увеличению объема:

$$\Delta A = P\Delta V = 4\pi r^2 P \Delta r.$$

Для образования новой поверхности требуется совершить работу:

$$\Delta A_1 = \Delta S\sigma = 8\pi r\sigma\Delta r.$$

Приравнивая ΔA и ΔA_1, найдем величину добавочного давления:

$$P = 2\sigma/r. \qquad (1.121)$$

Для поверхности любой формы добавочное давление можно рассчитать по формуле П. Лапласа[1]:

$$P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1.122)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхности.

Жидкость может смачивать поверхность одного тела и не смачивать поверхность другого. Например, вода смачивает дерево, стекло, но не смачивает парафин. Ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает поверхности дерева и стекла.

Если опустить в воду тонкие стеклянные трубки разного диаметра (капилляры), то она в них поднимется на разную высоту. Чем тоньше капилляр, тем на большую высоту поднимется жидкость. Если взять жидкость (не смачивающую жидкость, например ртуть), то уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде (рис. 1.72). Наблюдаемые явления изменения высоты уровней жидкости в капиллярах получили названия *капиллярных явлений*.

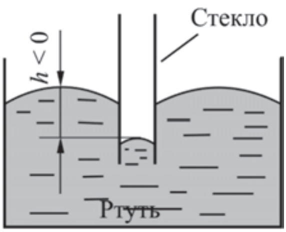


Рис. 1.72
Не смачивающая жидкость

Если жидкость смачивает трубку (рис. 1.73), то поверхность жидкости в трубке (мениск) имеет вогнутую форму, если не сма-

[1] Лаплас Пьер-Симон (1749–1827) — французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

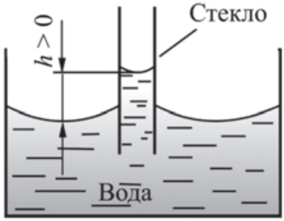


Рис. 1.73
Жидкость, смачивающая трубку

чивает — выпуклую. Под вогнутой поверхностью образуется отрицательное добавочное давление и жидкость поднимается вверх по капилляру до тех пор, пока это давление не уравновесится высотой столба жидкости в капилляре (гидростатическим давлением).

Найдем высоту подъема жидкости h в капилляре. Пусть жидкость смачивает капилляр радиусом r (рис. 1.73), образуя вверху вогнутый мениск. Наименьший радиус кривизны мениска r. Как следует из уравнения (1.121), добавочное давление $P \approx 2\sigma/r$. Тогда величина направленной вверх силы:

$$F = \frac{2\sigma S}{r},$$

где S — площадь поперечного сечения трубки.

Эта сила уравновешивается силой тяжести столбика жидкости $mg = h\rho gS$, т. е. $F = mg$ или

$$\frac{2\sigma S}{r} = h\rho gS,$$

где ρ — плотность жидкости.

Из этого уравнения находим

$$h = \frac{2\sigma}{\rho rg}.$$

Для несмачивающей жидкости мениск выпуклый и добавочное давление дает силу, направленную вниз. Уровень жидкости в капиллярной трубке при этом будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину h, определяемую формулой $h = \dfrac{2\sigma}{\rho rg}$.

1.9.3. ДАВЛЕНИЕ В НЕПОДВИЖНЫХ ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Гидроаэромеханика *— раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами.*

В этом разделе механики используется единый подход к изучению жидкостей и газов, так как во многих механических явлениях их поведение можно описать одинаковыми параметрами и уравнениями.

Жидкость, как и газ, принимает форму сосуда, в котором она находится. При этом жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в той области пространства, которую они занимают. Газ заполняет весь предоставленный ему объем, т. е. объем газа определяется объемом сосуда, в котором он находится. Объем жидкости не зависит от объема сосуда и остается практически постоянным. Эти и другие отличия жидкостей и газов объясняются характером движения и силами взаимодействия их молекул.

Плотность жидкости мало зависит от давления, плотность газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что в ряде задач сжимаемостью жидкости можно пренебречь без ущерба для точности решения. В этом случае пользуются понятием *несжимаемая жидкость*. Считают, что плотность ее везде одинакова и не зависит от времени.

Давление *— физическая величина, равная отношению силы ΔF, действующей на элемент поверхности ΔS нормально к ней, к площади этого элемента:*

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \qquad (1.123)$$

Единица измерения давления — паскаль (Па).

Давление внутри жидкости

Определим давление внутри жидкости, считая ее несжимаемой, т. е. считая ее плотность неизменной с глубиной.

Пусть на жидкость в сосуде действует внешнее давление P_0. Выделим мысленно в жидкости вертикальный цилиндр с поперечным сечением S и высотой h.

На верхний слой жидкости действует внешнее давление P_0, которое также передается и другим слоям жидкости.

Однако к этому давлению в нижележащих слоях добавляется давление, создаваемое весом слоев жидкости, расположенных выше.

На верхнее основание цилиндра действует сила

$$F_0 = P_0 S,$$

на нижнее основание —

$$F = PS,$$

где P — давление на глубине h.

Кроме того, вертикально вниз действует вес столба жидкости, находящейся в объеме цилиндра, равный

$$F_m = mg = \rho h S g,$$

где ρ — плотность жидкости; hS — ее объем в цилиндре. Боковые силы не учитываются, так как они взаимно уравновешены.

Запишем условие равновесия выделенного столба жидкости:

$$F_0 + F_m = F$$

или

$$P_0 S + \rho g h S = PS.$$

Из этого равенства следует, что искомое давление P на глубине h равно

$$P = P_0 + \rho g h.$$

Гидростатическое давление:

$$P_r = \rho g h. \tag{1.124}$$

Допустим, что внешнее давление $P_0 = 0$. Тогда давление на глубине h равно гидростатическому:

$$P = P_r.$$

Следовательно, гидростатическое давление обусловлено весом слоев жидкости, лежащих над данным слоем.

Если выделить любой горизонтальный тонкий слой жидкости, то он оказывает одинаковое давление, так как для такого слоя можно считать $h=\text{const}$ и остальные величины в формуле тоже постоянны.

Давление при равновесии жидкостей или газов подчиняется закону Паскаля[1]: ***давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.***

При переходе к более глубоким слоям жидкости давление возрастает, т. е. сила давления на нижние слои жидкости больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила — *сила Архимеда*. Эта сила определяется по ***закону Архимеда***: ***на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной телом жидкости или газа***:

$$F_A=\rho gV, \tag{1.125}$$

где ρ — плотность жидкости или газа; V — объем тела.

1.9.4. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Жидкости и газы являются текучими средами: если на частицы жидкости или газа действуют сдвигающие внешние силы, то частицы будут перемещаться до тех пор, пока не исчезнут или не уравновесятся эти силы. Внутренние силы не могут остановить это движение, но могут его замедлять. Тормозящие силы, возникающие между слоями двигающейся жидкости или газа, называются *силами вязкого трения*.

Жидкость, в отличие от газа, считается средой несжимаемой, иногда газ до определенных границ можно рассматривать как несжимаемый.

Рассмотрим течение жидкости по трубе с переменным сечением. Уравнение неразрывности выводится на основании закона сохранения массы и невозможности разрыва

---

[1] Паскаль Блез (1623–1662) — французский математик, физик, литератор и философ; автор основного закона гидростатики.

жидкости и образования в ней пустот (отсюда происходит название закона).

Рассмотрим жидкость в объеме V между сечениями S_1 и S_2 (рис. 1.74).

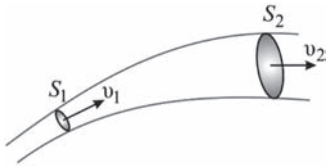


Рис. 1.74
Течение жидкости по трубе:
сечения трубы S_1 и S_2 различны, поэтому и скорости v_1 и v_2 в этих сечениях неодинаковы.

За время Δt жидкость пройдет через сечение S_1 и переместится на расстояние

$$l_1 = v_1 \Delta t.$$

В объем V втечет жидкость, имеющая объем

$$V_1 = l_1 S_1 = S_1 v_1 \Delta t,$$

масса которой

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t,$$

здесь ρ — плотность жидкости; v_1 — ее скорость в сечении S_1.

Аналогично для сечения S_2 получим:

$$V_2 = l_2 S_2 = S_2 v_2 \Delta t,$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t.$$

Так как жидкость несжимаемая и в ней не могут образовываться пустоты, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 в объеме V не может измениться, т. е.

$$m_1 = m_2.$$

Исходя из этого, получим

$$l_1 S_1 = l_2 S_2,$$

т. е. $V_1 = V_2$,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}. \qquad (1.126)$$

Это уравнение называется ***уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости: произведение скорости течения несжимаемой жидкости на ее поперечное сечение есть величина постоянная***.

1.9.5. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ*

Уравнение Д. Бернулли[1] выводится из закона сохранения энергии для *идеальной* (без вязкости) жидкости для стационарных течений. *Стационарным* считается течение, при котором скорость жидкости в каждой точке течения не меняется со временем. Для реальных жидкостей уравнением Бернулли можно пользоваться, если у них низкая вязкость.

Рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе между сечениями S_1 и S_2 (рис. 1.74). Так как течение стационарное, то кинетическая энергия жидкости в объеме V между сечениями S_1 и S_2 не изменится. А так как труба неподвижная, то не изменится и потенциальная энергия жидкости в этом объеме. Таким образом, полная механическая энергия рассматриваемого объема жидкости в момент времени t будет равна

$$E_1 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2 / 2,$$

в конце промежутка времени Δt:

$$E_2 = E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2 / 2,$$

где E_V — энергия жидкости в объеме V. В сечении S_1 жидкость, которая находится слева от этого сечения, совершит работу

$$A_1 = P_1 S_1 l_1 = P_1 V_1,$$

которая пойдет на увеличение энергии жидкости между сечениями S_1 и S_2. В свою очередь, эта жидкость совершит работу в сечении S_2:

$$A_2 = P_2 S_2 l_2 = P_2 V_2,$$

что уменьшит ее энергию на эту величину. Здесь P_1 и P_2 — давления жидкости в объемах V_1 и V_2 соответственно.

В результате получим

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2$$

---

[1] Бернулли Даниил (1700–1782) — выдающийся швейцарский физик-универсал и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.

или

$$E_2 + A_2 = E_1 + A_1.$$

Исходя из этого, получим

$$E_V + m_2 g h_2 + m_2 v_2^2 / 2 + P_2 V_2 = E_V + m_1 g h_1 + m_1 v_1^2 / 2 + P_1 V_1.$$

Учитывая, что $m_1 = m_2$, и поделив это уравнение на $V_1 = V_2$, получим ***уравнение Бернулли***:

$$\rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + P_2 = \rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + P_1. \qquad (1.127)$$

Оно выполняется для любых точек стационарного течения идеальной жидкости. Так как сечения выбирались произвольно, то можно записать

$$\rho v^2/2 + \rho g h + P = \text{const}. \qquad (1.128)$$

В технике величина $\rho g h$ называется *гидростатическим напором* (давлением); $\rho v^2/2$ — *гидродинамическим* (скоростным) напором; P — *статическим давлением*, а их сумма $\rho v^2/2 + \rho g h + P$ — *полным давлением*.

Частные случаи. Пусть жидкость покоится, т. е. $v_1 = v_2 = 0$. Исходя из этого, получим:

$$P_2 = P_1 + \rho g(h_1 - h_2),$$
$$P_2 - P_1 = \Delta P,$$

отсюда

$$\Delta p = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g h.$$

В покоящейся жидкости изменение статического давления равно гидростатическому напору. Так как в неподвижной жидкости силы вязкости отсутствуют, то это уравнение верно и для реальных жидкостей.

Пусть труба, по которой течет жидкость, горизонтальная, т. е. $h_1 = h_2$. Исходя из этого, получим

$$\rho v_2^2 / 2 + P_2 = \rho v_1^2 / 2 + P_1.$$

Пусть $v_2 > v_1$, тогда $P_2 < P_1$. В горизонтальной трубе давление меньше там, где скорость потока больше (сужение трубы).

Уравнение Бернулли используется для объяснения явлений в различных технических условиях.

Применение уравнения Бернулли

Подъемная сила крыла самолета. Происхождение подъемной силы крыла самолета было объяснено выдающимся русским ученым Н. Е. Жуковским. В деталях теория довольна сложна. Рассмотрим ее в упрощенном виде.

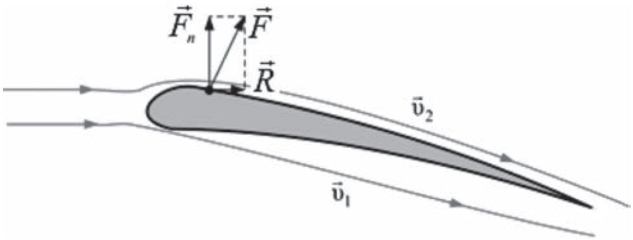


Рис. 1.75
Профиль крыла самолета

Профиль крыла самолета (рис. 1.75) имеет такую форму, что скорость обтекающего потока воздуха относительно крыла внизу меньше, а вверху больше: $\upsilon_2 > \upsilon_1$. Поэтому давление над крылом меньше, чем под крылом: $P_1 > P_2$. Это приводит к избыточной силе $\vec{F}$, которую можно разложить на две составляющие: подъемную силу $\vec{F}_п$ и силу сопротивления $\vec{R}$.

Таким же образом объясняется происхождение подъемной силы у кораблей на подводных крыльях.

Измерение скорости течения жидкости и газа. Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 1.76. Применив уравнение Бернулли для впаянных в трубу (*1*) тонких вертикальных трубок (*2* и *3*), получим для каждой из них:

$$P_1 = \rho g h_1$$

и

$$P_2 = \rho g h_2.$$

В широкой части давление больше, поэтому и высота поднятия жидкости больше.

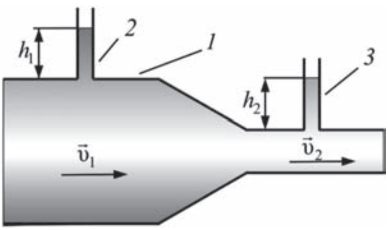


Рис. 1.76
Установка для измерения скорости течения жидкости

Используя уравнение Бернулли и эти данные, получим

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = 2g(h_1 - h_2).$$

Таким образом, если известна скорость течения в одной точке (допустим v_1), то, измерив манометром разность давлений или разность высот жидкости в трубах, которые и являются в этом случае манометрами, по этой формуле можно определить скорость течения v_2.

Подобным образом можно измерять скорость самолета относительно воздуха (рис. 1.77).

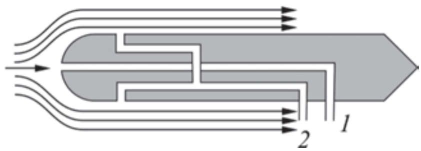


Рис. 1.77
Трубка Пито

За борт самолета выводится тонкая трубка, называемая трубкой Пито[1]. Трубка Пито присоединяется к дифференциальному манометру, измеряющему разность давлений: полного — с помощью внутреннего канала (*1*) и статического — с помощью канала (*2*). Разность этих давлений есть динамический напор $\rho v^2/2$.

Если манометр проградуировать в величинах скорости, учитывая изменение плотности воздуха, то получим прибор для измерения скорости самолета.

1.9.6. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ. ВЯЗКОСТЬ

Течение реальной жидкости по трубе постоянного сечения сопровождается падением статического давления. Это явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (вязкости) и сопровождается переходом части ее механической энергии во внутреннюю.

Ламинарное течение — течение жидкости, при котором слои скользят друг относительно друга, не перемешиваясь.

---

[1] Пито Анри (1695–1771) — французский математик, инженер-гидравлик. Изобрел приспособление для измерения скорости течения воды (трубка Пито).

Турбулентное течение — течение, сопровождающееся образованием вихрей и перемешиванием слоев.

Установившееся течение может быть только ламинарным. При ламинарном течении жидкости по трубе скорость слоев непрерывно изменяется от максимальной (по оси трубы) до нуля (у стенок).

Любой слой тормозит движение соседнего слоя, расположенного ближе к оси трубы, и оказывает ускоряющее действие на слой, расположенный дальше от оси. Между соприкасающимися слоями жидкости действуют тангенциальные *силы внутреннего трения*. Модуль этих сил зависит от площади S слоев и градиента скорости $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ (изменение скорости на единицу длины в направлении, перпендикулярном скорости) и определяется ***формулой Ньютона***:

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S,$$

где η — динамическая вязкость, численно равная силе трения, возникающей между параллельно движущимися слоями жидкости единичной площади при единичном градиенте скорости.

Единица измерения вязкости — паскаль-секунда (1 Па·с = 1 кг/(с·м)).

Коэффициент вязкости различен для разных сред и зависит от температуры. С ростом температуры вязкость жидкости уменьшается, а вязкость газов увеличивается.

Вязкость некоторых жидкостей (эмульсии, суспензии, растворы полимеров) зависит от давления, градиента скорости. Это объясняется тем, что структурные элементы жидкости (белковые молекулы, дисперсные частицы) располагаются в потоке по-разному при разной скорости. Такую жидкость называют неньютоновской. Плазма (суспензия клеток крови в белковом растворе) также относится к неньютоновским жидкостям.

Число Рейнольдса

С увеличением скорости потока ламинарное течение может перейти в турбулентное, а скорость, при которой происходит этот переход, называется ***критической***.

Экспериментально английским ученым О. Рейнольдсом[1] в 1883 г. установлено, что важнейшей характеристикой течения является безразмерная величина, названная ***числом Рейнольдса*** (Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\langle v\rangle l}{\eta},$$

где ρ — плотность жидкости (газа); $\langle v\rangle$ — средняя (по сечению трубы) скорость потока; l — линейный размер, характерный для поперечного сечения трубы; η — динамическая вязкость.

При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение; при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ (критическое значение) ламинарное течение переходит в турбулентное. Для гладких круглых труб $\mathrm{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовите примеры повседневных проявлений закона Паскаля.
2. Гидравлический пресс дает выигрыш в силе. Дает ли он выигрыш в работе? Почему?
3. Как устанавливается свободная поверхность однородной по плотности жидкости во всех сообщающихся сосудах? Почему? На основании какого закона?
4. Что можно сказать о давлении в сосудах на какой-то определенной высоте, например h_1? Сравните давления в сосудах на уровнях h_1 и h_2, если $h_2 = 2h_1$.
5. Три сосуда разной формы (площадь дна у сосудов одинакова) заполнены водой до одного и того же уровня. Как объяснить «гидростатический парадокс» (сила «весового» давления на дно не совпадает с весом налитой жидкости)?

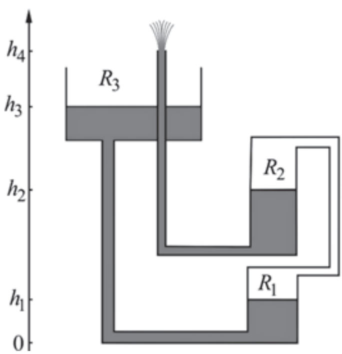
---

[1] Рейнольдс Осборн (1842–1912) — английский инженер и физик, специалист в области гидравлики.

6. В каком случае тело тонет? Плавает?
7. Ученик Галилея — Эванджелиста Торричелли взял закрытую с одного конца длинную стеклянную трубку (l=1 м), наполнил ртутью и, закрыв отверстие трубки пальцем, перевернул ее и погрузил в сосуд с ртутью, после чего убрал палец. Почему ртуть не вытекла полностью?
8. Что такое установившееся (стационарное) течение?
9. Зависит ли скорость в стационарном потоке от площади поперечного сечения?
10. Жидкость течет по горизонтальной трубе. Будет ли гидростатическое давление в первой и третьей четвертях трубы разным?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.9.1. ***Фонтан Герона***[1] (80 г. до н. э.). На рисунке изображена конструкция одного из фонтанов. Резервуар R_1, содержащий воздух и слой воды, соединен трубками с открытым резервуаром R_3, заполненным водой, и резервуаром R_2. От резервуара R_2 отходит тонкая трубка, из которой бьет струя фонтана с уровня h_4=1,55 м. Уровни воды в резервуарах соответственно равны h_1=0,25 м, h_2=0,95 м, h_3=1,35 м. Найти скорость воды на уровне h_4 и длину струи.



Решение. Пусть P — давление в резервуарах R_1 и R_2. Согласно уравнению Бернулли $\rho v^2/2 + \rho gh$=const параметры состояния воды на уровне h_4 основания струи

---

[1] Герон Александрийский — греческий математик и механик. Герон считается величайшим инженером за всю историю человечества. Он практически вплотную подобрался к индустриальной революции, которая произошла приблизительно через 2000 лет.

и уровне h_2 поверхности воды в резервуаре R_2 связаны уравнением

$$\rho v^2/2 + \rho g h_4 + P_{\text{ат}} = \rho g h_2 + P.$$

Рассматривая частицы жидкости на уровне h_3 в открытом резервуаре R_3 и на уровне h_1 в резервуаре R_1, получим еще одно уравнение

$$\rho g h_3 + P_{\text{ат}} = \rho g h_1 + P.$$

Исключая P, находим

$$v = (2gh)^{1/2}, \quad h = (h_2 - h_1) - (h_4 - h_3).$$

Длина струи $L = h$, $L = 0{,}5$ м, $v = 3{,}132$ м/с.

Задача 1.9.2. Два друга решили во время ледохода покататься на льдинах. Удержит ли их обоих льдина площадью $S = 1{,}5$ м^2 и толщиной $h = 50$ см? Масса одного мальчика $m_1 = 28$ кг, масса другого — $m_2 = 32$ кг. Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, а плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Дано:
$S = 1{,}5$ м^2
$h = 0{,}5$ м
$m_1 = 28$ кг
$m_2 = 32$ кг
$\rho = 9\cdot 10^2$ кг/м^3
$\rho_0 = 1000$ кг/м^3

$S_{\min}$ — ?

Решение. Максимальная выталкивающая сила (сила Архимеда) действует на льдину, когда она погрузилась полностью. Для наименьшей площади льдины условие плавания определяется из равенства этой силы и силы тяжести, действующей на систему:

$$S_{\min} h \rho_0 g = S_{\min} h \rho g (m_1 + m_2) g.$$

Из этого уравнения находим:

$$S_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_0 + \rho)},$$

$$[S] = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot(\text{кг}/\text{м}^3)},$$

$$S_{\min} \frac{28 + 32}{0{,}5(1000 - 900)} = 1{,}2\ \text{м}^2.$$

$S > S_{\min}$, т. е. льдина, которую выбрали друзья, их, к счастью, удержит.

Ответ: $S_{\min} = 1{,}2$ м^2.

Задача 1.9.3. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения. По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определите массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8$ см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны $S_1 = 6$ см^2 и $S_2 = 12$ см^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Дано:
$\Delta h = 8 \cdot 10^3$ м
$S_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2
$S_2 = 12 \cdot 10^{-4}$ м^2
$\rho = 10^3$ кг/м^3

Q — ?

Решение. Массовый расход воды — это масса воды, протекающая сквозь сечение за единицу времени:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{pv_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = pv_2 S_2, \qquad (1)$$

где ρ — плотность воды; v — скорость течения воды в месте сечения S_2. При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняется уравнение неразрывности:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (2)$$

Уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$):

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \qquad (3)$$

где P_1, P_2 — статические давления в сечениях манометрических трубок; v_1, v_2 — скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2.

Учитывая, что

$$P_2 - P_1 = \rho g \Delta h,$$

и решая систему уравнений (2), (3), получаем

$$v_2 S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}} = 0{,}868\ \text{кг / с}.$$

Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

Задача 1.9.4. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 50$ см имеется малое круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найдите зависимость скорости v_1 понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Рассчитайте числовое значение этой скорости для $h = 20$ см.

Дано:
$D = 0{,}5$ м
$d = 0{,}01$ м
$h = 0{,}2$ м
$v = f(h)$ — ?

Решение. Обозначим: S_1 и S_2 — площади поперечных сечений сосуда и отверстия, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия.

Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

или

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2.$$

В силу уравнения неразрывности

$$S_1 v_1 = S_1 v_2,$$

или

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}.$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$v_1^2 + 2gh = \frac{S_1^2 v_1^2}{S_2^2},$$

$$2ghS_2^2 = (S_1^2 - S_2^2)v_1,$$

отсюда

$$v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Так как $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ и $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, то

$$v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Поскольку $d^4 \ll D^4$, искомая зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты этого уровня

$$v_1 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

При $h = 0{,}2$ м числовое значение $v_1 = 7{,}92 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Ответ: $v_1 = 7{,}92 \cdot 10^{-4}$ м/с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.9.1. Шар равномерно падает в жидкости, плотность которой в 2,5 раза меньше плотности шара, испытывая силу сопротивления со стороны жидкости, равную 1,2 Н. Какова масса шара?

Ответ: $m = \frac{F_c}{g(1 - \rho_ж / \rho_т)} = 0{,}2$ кг.

Задача 1.9.2. Металлический брусок плавает в сосуде, в который налита ртуть и вода. При этом брусок погружен в ртуть на 1/4 и в воду на 1/2 своей высоты. Какова плотность металла бруска?

Ответ: $\rho = \frac{\rho_1}{4} + \frac{\rho_2}{2} = 3{,}9 \cdot 10^3$ кг / м^3.

Задача 1.9.3. Аэростат, наполненный водородом, поднимается с ускорением 1 м/с^2. Масса оболочки аэростата с грузом 700 кг. Плотность воздуха 1,29 кг/см^3. Определите объем аэростата.

Ответ: $V = \frac{m_1(g+a)}{\rho_{возд} g - \rho_{вод}(g+a)} = 647$ м^3.

Задача 1.9.4. Определите натяжение нити, связывающей два шарика объемом 10 см^3 каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду. Масса нижнего шарика в три раза больше массы верхнего шарика. Плотность воды 10^3 кг/м^3, $g=10$ м/с^2.

Ответ: $T=\dfrac{\rho gV}{8}=\dfrac{1000\cdot 10\cdot 10^{-5}}{8}=12{,}5\cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 1.9.5. Тонкая палочка шарнирно закреплена одним концом и опущена свободным концом в воду. Определите плотность палочки, если равновесие достигается, когда в воду погружена половина палочки. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Ответ: $\rho_п=\dfrac{3}{4}\rho_в=750\,\text{кг}/\text{м}^3$.

Задача 1.9.6. Резиновый мяч массой 200 г и объемом 220 см^3 погружают под воду на глубину 3 м и отпускают. На какую высоту (в метрах), считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении мяча не учитывать. Плотность воды 10^3 кг/м^3.

Ответ: $H=h\left(\dfrac{\rho_в V}{m}-1\right)=0{,}3$ м.

Задача 1.9.7. Вода течет по круглой гладкой трубке диаметром $d=5$ см со средней по сечению скоростью $\langle v\rangle=10$ см/с. Определите число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе и укажите характер течения жидкости.

Ответ: $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho\langle v\rangle d}{\eta}=5000$ (η — динамическая вязкость); движение турбулентное, так как полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ ($\mathrm{Re}_{кр}=2300$).

Задача 1.9.8. Медный шарик диаметром $d=1$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}=0{,}5$.

Ответ: $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho_2(\rho_1-\rho_2)gd^3}{18\eta^2}=4{,}17$ (ρ_1 и ρ_2 — плотность меди и масла; η — динамическая вязкость масла); так как полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$, движение турбулентное.

Задача 1.9.9. Латунный шарик диаметром d=0,5 мм падает в глицерине. Определить: 1) скорость v установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

Ответ: 1) $v = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta} 6{,}71\,\text{мм}/\text{с}$ (ρ_1 и ρ_2 — плотность латуни и глицерина; η — динамическая вязкость глицерина); 2) обтекание шарика ламинарное.

Задача 1.9.10. При движении шарика радиусом r_1=2,4 мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости v_2. При какой скорости шарика радиусом r_2=1 мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Ответ: $v_2 = \dfrac{\rho_1 r_1 \eta_2}{\rho_2 r_2 \eta_1} v_1 = 27{,}7\,\text{см}/\text{с}$ (ρ_1 и η_1 — плотность и динамическая вязкость касторового масла; ρ_2 и η_2 — то же для для глицерина).

Задача 1.9.11. В трубе с внутренним диаметром d=3 см течет вода. Определить максимальный массовый расход $Q_{m,\max}$ воды при ламинарном течении.

Ответ: $Q_{m,\max}=(1/4)\pi\eta$, $\mathrm{Re}_{\text{кр}} d$=54,2 г/с ($\eta$ — динамическая вязкость масла).

Задача 1.9.12. В горизонтально расположенной трубе с площадью S_1 поперечного сечения, равной 20 см^2, течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь S_2 сечения равна 12 см^2. Разность Δh уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определить объемный расход Q_V жидкости.

Ответ: $Q_V = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}} = 1{,}88\,\text{л}/\text{с}.$

Задача 1.9.13. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня S_1=20 см^2, правого — 100 см^2. На какую высоту опустится левый поршень, если на него поставить гирю массой $m=1{,}5$ кг? Плотность масла $\rho=0{,}9$ г/см^3.

Ответ: $\Delta h=\dfrac{m}{S_1\rho\left(1+\dfrac{S_1}{S_2}\right)}=69\,\text{см}.$

Задача 1.9.14. Сплошной металлический шарик радиусом $r=20$ см был взвешен в воде, затем в некоторой жидкости. Разность показаний весов составила $\Delta P=65{,}7$ Н. Определите плотность жидкости, если плотность воды $\rho_0=1$ г/см^3.

Ответ: $\rho=\rho_0-\dfrac{3P}{4\pi r^3 g}=0{,}8\,\text{г}/\text{см}^3.$

Задача 1.9.15. Серебряная ложка в воде весит $P=2$ Н. Определите ее объем V, если плотность серебра $\rho=10{,}5$ г/см^3, плотность воды $\rho_0=1$ г/см^3.

Ответ: $V=\dfrac{P}{g(\rho-\rho_0)}=21{,}5\,\text{см}^3.$

Задача 9.16. Льдину толщиной $H=1{,}5$ м вынесло из реки в океан. Насколько поднялась льдина над поверхностью воды по сравнению с первоначальным уровнем? Плотность льда $\rho_л=0{,}9$ г/см^3, плотность пресной воды $\rho=1$ г/см^3, плотность соленой воды $\rho_с=1{,}03$ г/см^3.

Ответ: $\Delta h=H\dfrac{\rho_л(\rho_с-\rho_{пр})}{\rho_с\rho_{пр}}=2{,}62\,\text{см}.$

С тех пор как за теорию относительности принялись математики, я ее уже сам больше не понимаю.

Шутка А. Эйнштейна

1.10. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Г. Галилей установил, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму: в этом заключается суть механического принципа относительности. Противоречия между этим принципом и уравнениями электродинамики привели к отказу от преобразований Галилея и созданию специальной теории относительности (СТО), являющейся предметом этой главы.

1.10.1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

При изложении механики предполагалось, что все скорости движения тел значительно меньше скорости света. Причина этого в том, что механика Ньютона (называемая также классической) неверна при скоростях движения тел, близких к скорости света ($v \to c$). Правильная теория для этого случая называется релятивистской механикой (от *англ.* relativity — относительность), или *специальной теорией относительности*. Механика Ньютона оказалась замечательным приближением к релятивистской механике, справедливым в области $v \ll c$.

Большинство встречающихся в повседневной жизни скоростей значительно меньше скорости света. Но существуют явления, где это не так (в ядерной физике, электромагнетизме, астрономии и т. д.).

Согласно представлениям классической механики *механические явления происходят одинаково в двух системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга*.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета k и k'. Система k' движется относительно k со скоростью $v=\text{const}$ вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета (рис. 1.78).

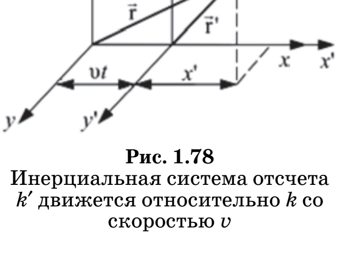


Рис. 1.78
Инерциальная система отсчета k' движется относительно k со скоростью v

Найдем связь между координатами точки M в обеих системах отсчета. Отсчет начнем, когда начала координат систем совпадают, т. е. $t=t'$. Тогда:

$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{1.129}$$

Совокупность уравнений (1.129) называется ***преобразованиями Галилея.***

В уравнениях (1.129) время $t = t'$, т. е. в классической механике предполагалось, что время течет одинаково в обеих системах отсчета независимо от скорости. («*Существует абсолютное время, которое течет всегда одинаково и равномерно*», — говорил Ньютон.)

В векторной форме преобразования Галилея можно записать так:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t. \tag{1.130}$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \vec{v}.$$

Отсюда получим ***закон сложения скоростей*** в классической механике (рис. 1.79):

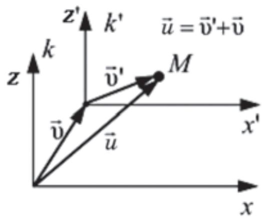


Рис. 1.79
К закону сложения скоростей в классической механике

$$\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}. \tag{1.131}$$

Из (1.131) следует, что скорость движения точки M (сигнала) $\vec{v}'$ в системе k' и $\vec{v}$ в системе k различна.

Законы природы, определяющие изменение состояния движения механических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчета они относятся. Это и есть ***принцип относительности*** Галилея.

Из преобразований Галилея и принципа относительности следует, что *взаимодействия в классической физике должны передаваться с бесконечно большой скоростью* $c \to \infty$ (теория *дальнодействия*), так как в противном случае можно было бы одну инерциальную систему отсчета отличить от другой по характеру протекания в них физических процессов.

Принцип относительности Галилея и законы Ньютона подтверждались ежечасно при рассмотрении любого движения и господствовали в физике более 200 лет.

Но вот в 1865 г. появилась теория Дж. Максвелла, и уравнения Максвелла не подчинялись преобразованиям Галилея. Ее мало кто принял сразу, она не получила признания при жизни ученого. Но вскоре все сильно изменилось, когда в 1887 г., после открытия электромагнитных волн Герцем[1], были подтверждены все следствия, вытекающие из теории Максвелла, ее признали. Появилось множество работ, развивающих теорию Максвелла.

Дело в том, что в теории Максвелла скорость света (скорость распространения электромагнитных волн) конечна и равна $c = 3 \cdot 10^8$ м·с$^{-1}$.

Исходя же из принципа относительности Галилея, скорость передачи сигнала $\vec{u}$ бесконечна и зависит от системы отсчета (1.131).

Первые догадки о конечности распространения скорости света были высказаны еще Галилеем. Астроном Ремер[2] в 1676 г. пытался найти скорость света. По его приближенным расчетам она была равна $c = 214\,300\,000$ м·с$^{-1}$.

Нужна была экспериментальная проверка теории Максвелла. Он сам предложил идею опыта — использовать Землю в качестве движущейся системы. (Известно, что скорость движения Земли сравнительно высокая: $\upsilon_З \approx 30$ км/с $\approx 3 \cdot 10^4$ м/с.)

В 1880-х гг. были выполнены опыты, которые доказали независимость скорости света от скорости источника или наблюдателя.

Необходимый для опыта прибор изобрел блестящий военно-морской офицер США А. Майкельсон.

---

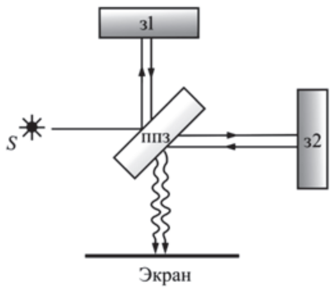
[1] Герц Генрих Рудольф (1857–1894) — немецкий физик. Экспериментально подтвердил электромагнитную теорию света Джеймса Максвелла.

[2] Ремер Оле Кристенсен (1644–1710) — датский астроном, первым измеривший скорость света.

Майкельсон Альберт Абрахам (1852–1931) — американский физик. Основные работы в области оптики и спектроскопии. Изобрел прибор, названный «интерферометром Майкельсона», сыгравший значительную роль в обосновании специальной теории относительности и изучении спектральных линий. Осуществил серию экспериментов по точному определению скорости света. Доказал при помощи оптического метода вращение Земли вокруг оси и определил скорость вращения. Лауреат Нобелевской премии в 1907 г.

Прибор состоял из интерферометра с двумя «плечами», расположенными перпендикулярно друг к другу (рис. 1.80). Вследствие сравнительно большой скорости движения Земли свет должен был иметь различные скорости по вертикальному и горизонтальному направлениям. Поэтому *время*, затрачиваемое на прохождение вертикального пути *источник S — полупрозрачное зеркало* ппз — *зеркало* (з1) — ппз и горизонтального пути *источник* — ппз — *зеркало* (з2) — ппз, *должно быть различным*. В результате, световые волны, пройдя указанные пути, должны были изменить интерференционную картину на экране.

Майкельсон проводил эксперименты в течение семи лет с 1881 г. в Берлине и с 1887 г. в США совместно



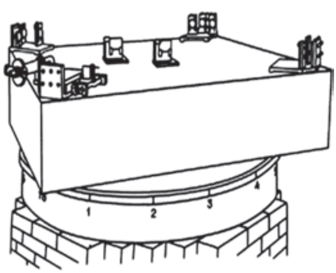


Рис. 1.80
Схема и внешний вид интерферометра Майкельсона:
S — источник света; ппз — полупрозрачное зеркало; з1 и з2 — отражающие зеркала.

с профессором Морли[1]. Точность первых опытов была невелика ±5 км/с. Однако опыт дал *отрицательный результат*: сдвиг интерференционной картины обнаружить не удалось. Таким образом, результаты опытов Майкельсона — Морли показали, что величина скорости света постоянна и не зависит от движения источника и наблюдателя. Эти опыты повторяли и перепроверяли многократно. В конце 1860-х гг. Ч. Таунс[2] довел точность измерения до ±1 м/с. Скорость света осталась неизменной $c = 299\,792\,458$ м$\cdot$с$^{-1}$.

Независимость скорости света от движения источника и от направления недавно была продемонстрирована с рекордной точностью в экспериментах, выполненных исследователями из университетов городов Констанц и Дюссельдорф (современная версия эксперимента Майкельсона — Морли), в которых установлена лучшая на сегодняшний день точность $1{,}7\cdot10^{-15}$. Исследовалась стоячая электромагнитная волна в полости кристалла сапфира, охлажденного жидким гелием. Два таких резонатора были ориентированы под прямым углом друг к другу. Вся установка могла вращаться, что позволило установить независимость скорости света от направления.

Было много попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли. Наиболее известна гипотеза Лоренца о сокращении размеров тел в направлении движения. Он даже вычислил эти сокращения, использовав для этого преобразование координат, которые так и называются «сокращения Лоренца — Фитцджеральда[3]».

---

[1] Морли Эдвард Уильямс (1839–1923) — американский физик. Наибольшую известность получили его работы в области интерферометрии, выполненные совместно с Майкельсоном.

[2] Таунс Чарлз Хард (1915) — американский физик, лауреат Нобелевской премии по физике. Член Национальной академии наук США, иностранный член РАН.

[3] Фитцджеральд Джордж Френсис (1851–1901) — английский физик. Последователь Максвелла, разрабатывал теорию электрических и магнитных явлений.

Дж. Лармор[1] в 1889 г. доказал, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Очень близок был к созданию теории относительности Анри Пуанкаре[2]. Но Альберт Эйнштейн был первым, кто четко и ясно сформулировал основные идеи теории относительности.

1.10.2. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

В 1905 г. в журнале «Анналы физики» вышла знаменитая статья А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», в которой была изложена специальная теория относительности (СТО). Затем было много статей и книг, поясняющих, разъясняющих, интерпретирующих эту теорию.

Принцип относительности Эйнштейна представляет собой фундаментальный физический закон, согласно которому любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Иначе говоря, законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

В основе СТО лежат ***два постулата***, выдвинутых Эйнштейном.

1. ***Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.***

Уравнения, выражающие законы природы, *инвариантны* по отношению к любым инерциальным системам отсчета.

Инвариантность — неизменность вида уравнения при переходе из одной системы отсчета в другую (при замене координат и времени одной системы — другими).

---

[1] Лармор Джозеф (1857–1942) — ирландский физик и математик. С 1903 по 1932 гг. профессор на кафедре математики Кембриджского университета. Он опубликовал теорию, позже названную теорией преобразования Лоренца, за два года до Лоренца и за восемь лет до Эйнштейна.

[2] Пуанкаре Жюль Анри (1854–1912) — выдающийся французский математик, физик, философ и теоретик науки; глава Парижской академии наук, член Французской академии.

2. ***Скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника и приемника света.***

Все как-то пытались объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли, а Эйнштейн — постулировал это как закон.

В первом постулате главное то, что время тоже относительно — такой же параметр, как и скорость, импульс и др.

Второй — возводит отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли в ранг закона природы: $c = \text{const}$.

Специальная теория относительности представляет собой физическую теорию, изучающую пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов, когда можно пренебречь действием тяготения. СТО, опираясь на более совершенные данные, раскрывает новый взгляд на свойства пространства и времени. Эти свойства необходимо учитывать при скоростях движения, близких к скорости света.

1.10.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Формулы преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую, с учетом постулатов Эйнштейна, предложил Лоренц в 1904 г.

Так же как и в п. 1.10.1, рассмотрим две инерциальные системы отсчета (неподвижную и подвижную) k и k'

Лоренц Хендрик Антон (1853–1928) — нидерландский физик-теоретик, создатель классической электронной теории на основе электромагнитной теории Максвелла — Герца. Его работы посвящены термодинамике, электродинамике, статической динамике, оптике, теории излучения, атомной физике. На основе электронной теории он объяснил целый ряд физических факторов и явлений и предсказал новые. Разработал электродинамику движущихся тел (преобразования Лоренца). Член многих академий наук, в том числе и АН СССР, лауреат Нобелевской премии.

(рис. 1.78). Пусть x, y, z, t — координаты и время некоторого события в системе k, а x', y', z', t' — координаты и время того же события в k'. Как связаны между собой эти координаты и время?

В рамках классической теории при $v \ll c$ эта связь устанавливается преобразованиями Галилея, в основе которых лежат представления об абсолютном пространстве и независимом времени:

$$x = x' + vt; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \tag{1.132}$$

Из этих преобразований следует, что взаимодействия, в том числе и электромагнитные, должны передаваться с бесконечно большой скоростью $c \to \infty$, и скорость движения сигнала в системе k отличается от скорости в системе k': $\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}$ (рис. 1.79).

Лоренц установил связь между координатами и временем события в системах отсчета k и k', основываясь на тех экспериментальных фактах, что:

- *все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны*;
- *скорость света в вакууме постоянна и конечна во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя*.

Таким образом, при больших скоростях движения, сравнимых со скоростью света, Лоренц получил ($\beta = v/c$):

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.133}$$

$$y = y', \quad y' = y, \quad z = z', \quad z' = z,$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Это и есть знаменитые ***преобразования Лоренца***.

Истинный физический смысл этих формул был впервые установлен Эйнштейном в 1905 г. в СТО. В теории относительности *время* иногда *называют четвертым измерением*. Точнее говоря, *величина ct*, имеющая ту же размерность, что и x, y, z, ведет себя как *четвертая пространственная координата*. В теории относительности ct и x проявляют себя с математической точки зрения сходным образом.

Полученные уравнения связывают координаты и время в подвижной k' и неподвижной k системах отсчета. Отличие состоит только в знаке скорости v, чего и следовало ожидать, поскольку система k' движется относительно k слева направо со скоростью v, но наблюдатель в системе k' видит систему k, движущуюся относительно него справа налево со скоростью $-v$.

Как видно из преобразований Лоренца, скорость v относительного движения систем отсчета может быть только меньше скорости света c, так как в противном случае коэффициент $1/\sqrt{1-\beta^2}$ становится мнимым (если $v > c$) или обращается в бесконечность (если $v=c$) и преобразования Лоренца теряют смысл. В случае, когда $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (***принцип соответствия***). Чтобы в этом убедиться, достаточно в формулах преобразований совершить предельный переход при $c \to \infty$.

Зная формулу преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно более строго сформулировать ***обобщенный принцип относительности***: *уравнения, выражающие законы природы, должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца, т. е. их вид не должен измениться при этих преобразованиях*.

1.10.4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Непосредственное ***следствие преобразований Лоренца***: *не может быть объектов, движущихся быстрее света*. ***Скорость света играет роль предельно возможной скорости распространения сигнала.***

1. Инвариантность интервала

Величина интервала является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

Пусть даны два события: одно произошло в момент времени t_1 в точке с координатами x_1, y_1, z_1, а второе — в момент времени t_2 в точке с координатами x_2, y_2, z_2. ***Интервалом*** *между событиями называется величина*

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.134)$$

Подставив над координатами и временами штрихи, мы получим величину интервала s'_{12} между этими же событиями в другой системе отсчета. Из преобразований Лоренца находим:

$$c^2(t_2-t_1)^2=\frac{c^2(t'_2-t'_1)^2+2V(t'_2-t'_1)(x'_2-x'_1)+V^2/c^2(x'_2-x'_1)^2}{1-v^2/c^2},$$

$$(x_2-x_1)^2=\frac{(x'_2-x'_1)^2+2V(t'_2-t'_1)(x'_2-x'_1)+V^2(t'_2-t'_1)}{1-v^2/c^2},$$

$$(y_2-y_1)^2=(y'_2-y'_1)^2,\ (z_2-z_1)^2=(z'_2-z'_1)^2,$$

откуда следует

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2}.$$

Таким образом, величина интервала является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

В классической механике таким свойством обладали по отдельности временной интервал $t_{12}=t_2-t_1$ и пространственное расстояние $l_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$. В релятивистской физике этим свойством обладает только интервал $s_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}$.

2. Одновременность событий в СТО

По Ньютону, если два события происходят одновременно, то это будет одновременно для любой системы отсчета (*время абсолютно*). Эйнштейн задумался, как доказать одновременность?

Возьмем два источника света на Земле A и B (рис. 1.81).

Если свет встретится на середине AB, то вспышки для человека, находящегося на Земле, будут одновременны.

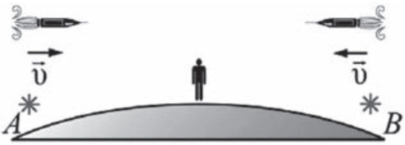


Рис. 1.81
В неподвижной системе k (на Земле) в точках A и B одновременно произошли два события в момент времени $t_1=t_2=t$:
в движущейся системе k' (в ракете) эти события не одновременны $t_1' \neq t_2'$.

Но со стороны пролетающих мимо космонавтов со скоростью v вспышки не будут казаться одновременными, так как $c=\text{const}$. Рассмотрим это более подробно.

Пусть в системе k (на Земле) в точках x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1=t_2=t$. Будут ли эти события одновременны в k' (в пролетающей мимо ракете)?

Для определения координат в k' воспользуемся преобразованиями Лоренца:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.135}$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца для времени в системе k' получим:

$$t_1' = \frac{t - \dfrac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t - \dfrac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.136}$$

Если события в системе k происходят одновременно в одном и том же месте, $x_1=x_2$, то и $x_1' = x_2'$, т. е. и для k' эти события тоже одновременны.

Таким образом, события будут абсолютно ***одновременны*** в системах k и k', если они происходят в один и тот же момент времени $t_2' = t_1'$ в одном и том же месте $x_2' = x_1'$.

Если же в системе k, $x_1 \neq x_2$, то из (1.135) видно, что и в k' $x_1' \neq x_2'$, тогда из (1.136) следует, что *события в системе k' не одновременны*, т. е. $t_1' \neq t_2'$.

Интервал времени между событиями в системе k':

$$t_2' - t_1' = \frac{v(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.137}$$

Разница во времени будет зависеть от v, и она может отличаться по знаку (ракета подлетает с той или другой стороны).

3. Лоренцево сокращение длины (длина тел в разных системах отсчета)

Рассмотрим рисунок 1.82, на котором изображены две системы координат k и k'.

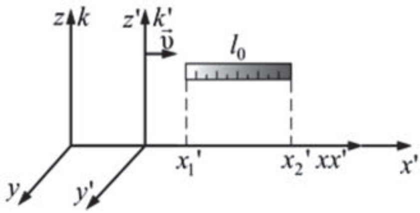


Рис. 1.82
Собственная длина линейки l_0 в движущейся системе k'

Пусть $l_0 = x_2' - x_1'$ — *собственная длина тела* в системе, относительно которой тело неподвижно (например: в ракете, движущейся со скоростью $v \approx c$ мимо неподвижной системы отсчета k (Земля)). Измерение координат x_1 и x_2 производим одновременно в системе k, т. е. $t_1 = t_2 = t$.

Используя преобразования Лоренца, для координат получим

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (1.138)$$

Формула (1.138) называется *лоренцевым сокращением длины*. Собственная длина тела есть максимальная длина. Длина движущегося тела короче, чем покоящегося (рис. 1.83). Причем сокращается только проекция на ось x, т. е. *размер тела вдоль направления движения*.

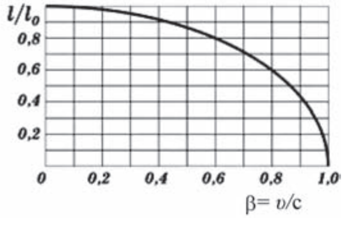


Рис. 1.83
Зависимость длины тела от скорости

4. Замедление времени (длительность событий в разных системах отсчета)

Пусть вспышка лампы на ракете длится $\Delta t_0 = \tau = t_2' - t_1'$, где τ — *собственное время*, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами. Чему равна длительность вспышки $(t_2 - t_1)$ с точки зрения человека, находящегося на Земле, мимо которого пролетает ракета?

Так как $x_1' = x_2'$, тогда из преобразований Лоренца:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.139)$$

Из этого уравнения следует, что *собственное время — минимально* (*движущиеся часы идут медленнее покоящихся*) (рис. 1.84). Таким образом, вспышка на Земле будет казаться длиннее.

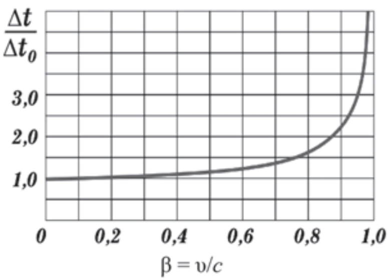


Рис. 1.84
Замедление времени в движущейся системе k'

Этот вывод имеет множество экспериментальных подтверждений.

Так, нестабильные элементарные частицы — пионы, рождающиеся в верхних слоях атмосферы, на высоте 20–30 км, при воздействии на нее космических лучей имеют собственное время жизни $\tau \sim 2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время они могут пройти короткий путь $S = c \cdot \tau = 600$ м. Но в результате того, что они двигаются с очень большими скоростями, сравнимыми со скоростью света, их время жизни увеличивается и они до своего распада способны достигать поверхности Земли. Отсюда следует вывод, что у движущихся пионов секунды «длиннее» земных секунд.

В 1970-е гг. замедление времени наблюдалось не только с помощью нестабильных микрочастиц, но и проводились прямые измерения с использованием высокоточных часов, основанных на эффекте Мессбауэра[1]. Двое таких часов показывают одно и то же время с точностью до 10^{-16} с.

В 1971 г. Хафеле[2] и Китинг[3] осуществили прямое измерение замедления времени, отправив два экземпляра атомных часов в кругосветное путешествие на реактивном самолете. Потом их показания сравнили с показаниями таких же часов, оставленных на Земле, в лаборатории ВМС США. Время запаздывания составило $273 \cdot 10^{-9}$ с, что в пределах ошибок согласуется с теорией.

Это следствие из преобразований Лоренца объясняет известный всем «*парадокс близнецов*».

Мы убедились, что наряду с относительностью временны́х интервалов и пространственных расстояний даже одновременность событий не имеет абсолютного значения. Все они *относительны*, т. е. зависят от движения наблюдателя. В классической физике относительными были, например, скорости тел, их кинетические энергии. Теперь список подобных величин пополнился.

1.10.5. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

Мы говорили, что *скорость света — максимально возможная скорость распространения сигнала*. Но что будет, если свет испускается движущимся источником в направлении его скорости v (рис. 1.78)? Согласно закону сложения скоростей, следующему из преобразований Галилея, скорость света должна быть равна $c + v$. Но в теории относительности это невозможно. Получим закон сложения скоростей из преобразований Лоренца. Для этого запишем их для бесконечно малых величин:

---

[1] Мессбауэр Рудольф Людвиг (1929) — немецкий физик, специалист в физике атомного ядра и элементарных частиц, лауреат Нобелевской премии по физике.

[2] Хафеле Джозеф — американский ученый. В 1971 г. совместно с Ричардом Китингом провел эксперимент (эксперимент Хафеле — Китинга), ставший одним из тестов теории относительности, непосредственно продемонстрировавшим реальность парадокса близнецов.

[3] Китинг Ричард — американский ученый.

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y', \ \ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z',$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \dfrac{v\mathrm{d}x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

По определению скорости ее компоненты в системе отсчета k находятся как отношения соответствующих перемещений к временны́м интервалам: $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ и т. д. Аналогично определяется скорость объекта в движущейся системе отсчета k', только пространственные расстояния и временны́е интервалы надо взять относительно этой системы: $v'_x = \mathrm{d}x' / \mathrm{d}t'$ и т. д. Следовательно, разделив выражение $\mathrm{d}x$ на выражение $\mathrm{d}t$, получим

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \dfrac{v\mathrm{d}x'}{c^2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\mathrm{d}t'$, находим связь x-компонент скоростей в разных системах отсчета, которая отличается от правила сложения скоростей по Галилею:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x v / c^2}. \qquad (1.140)$$

Эта формула выражает ***правило сложения скоростей*** *в релятивистской механике.*

Кроме того, в отличие от классической физики, меняются и компоненты скоростей, ортогональные направлению движения. Аналогичные вычисления для других компонент скоростей дают:

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x v / c^2}, \ \ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v'_x v / c^2}.$$

Таким образом, получены формулы для преобразования скоростей в релятивистской механике. Формулы обратного преобразования получаются при замене штрихованных величин на нештрихованные и обратно и заменой v на $-v$.

На рисунке 1.85 приведен график зависимости скорости частицы от времени. Подробно этот случай рассмотрен в задаче 1.10.1.

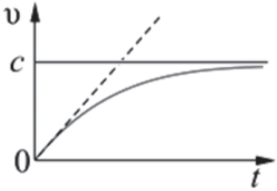


Рис. 1.85
Зависимость скорости частицы от времени:

пунктирной линией показано увеличение скорости нерелятивистской частицы под действием постоянной силы. Скорость релятивистской частицы асимптотически приближается к скорости света.

При малых скоростях движения $v \ll c$ скорость пропорциональна времени. Такая зависимость соответствует *равноускоренному движению нерелятивистской частицы* под действием постоянной силы. При увеличении скорости движения $v \to c$, скорость частицы асимптотически приближается к скорости света.

Классическая физика — это теория, где допустима бесконечно большая скорость распространения сигналов. Такое допущение хорошо работает при малых скоростях объектов $v \ll c$.

Действительно, когда скорость движения подвижной системы отсчета $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, мы получаем обычный закон сложения скоростей $v_x = v'_x + v$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$. При этом ход течения времени и длина линейки будут одинаковы в обеих системах отсчета.

Таким образом, законы классической механики применимы, если скорости объектов много меньше скорости света. *Теория относительности* не зачеркнула достижения классической физики, она *установила рамки их справедливости.*

Рассмотрим закон сложения скоростей на примере. Пусть тело внутри космического корабля движется со скоростью $v' = 2 \cdot 10^8$ м/с и сам корабль движется с такой же скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с относительно Земли. Чему равна скорость тела относительно Земли v_x? Используем для рассмотрения примера рисунок 1.78.

Классическая механика ответит на этот вопрос просто: в соответствии с преобразованиями Галилея скорость тела относительно Земли будет

$$v_x = v' + v = 4\cdot 10^8 \text{ м/с},$$

что, конечно же, противоречит положению СТО о том, что ***скорость света является предельной скоростью переноса информации, вещества и взаимодействий***: $c \approx 3\cdot 10^8$ м·с$^{-1}$.

Оценим скорость тела, используя преобразования Лоренца.

Внутри корабля перемещение dx' за время dt' равно d$x' = v'$dt'. Найдем v_x с точки зрения наблюдателя на Земле, исходя из ***правила сложения скоростей*** *в релятивистской механике* (1.140):

$$v_x = \frac{v' + v}{1 + \frac{vv'}{c^2}}.$$

Скорость тела в нашем примере в соответствии с этой формулой $v_x = 2{,}8\cdot 10^8$ м/с.

Полученный результат не противоречит положению СТО о предельности скорости света.

В предельном случае, если движение происходит со скоростью света, то

$$v_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c.$$

При медленных движениях, когда $v \ll c$, получаем нерелятивистские формулы, соответствующие преобразованиям Галилея.

Вопрос о ***сложении скоростей*** *в релятивистской механике* подробно, со всеми предельными случаями, разобран в задаче 1.10.2.

Полученные формулы сложения скоростей запрещают движение со скоростью большей, чем скорость света. Уравнения Лоренца преобразуют время и пространство так, что свет распространяется с одинаковой скоростью с точки зрения всех наблюдателей, независимо, двигаются они или покоятся.

В настоящее время в научной литературе продолжается обсуждение проблемы существования частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света. Они получили название *тахионы* (от *греч.* tachys — быстрый). Анализ экспериментальных данных не позволяет пока говорить о реальности этих объектов.

1.10.6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Релятивистское выражение для импульса

Найдем такое выражение для импульса, чтобы закон сохранения импульса был инвариантен к преобразованиям Лоренца при любых скоростях (как мы уже говорили, уравнения Ньютона не инвариантны к преобразованиям Лоренца и закон сохранения импульса в системе k выполняется, а в k' — нет).

Ньютоновское выражение для импульса $\vec{p} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, или $p = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Вот это выражение надо сделать инвариантным. Это возможно, если в него будут входить инвариантные величины. В выражении

$$p = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{1.141}$$

где m — масса частицы в системе k, ***инвариантная величина***[1]; $\mathrm{d}t$ — интервал времени по часам неподвижного наблюдателя.

Если заменить $\mathrm{d}t$ на $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$ — *собственное время частицы*, тоже инвариантная величина, то получим инвариантное выражение для импульса $p = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$.

Преобразуем это выражение с учетом того, что $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

[1] В соответствии с трактовкой, принятой в современной литературе, решено было отказаться от устаревших понятий релятивистской массы частицы и ее массы покоя. Здесь рассматривается только инвариантная масса, обозначаемая m.

$$p = m\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.142)$$

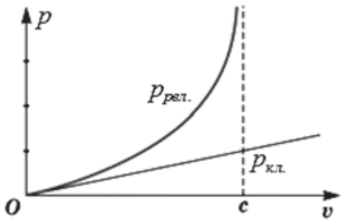


Рис. 1.86
Зависимость импульса частицы от скорости в классической и релятивистской механике:
когда скорость релятивистской частицы приближается к скорости света, ее импульс возрастает до бесконечности.

Это и есть ***релятивистское выражение для импульса*** (рис. 1.86).

Из (1.142) следует, что *никакое тело* не может двигаться со скоростью, большей или *даже равной скорости света* (при $v \to c$ знаменатель стремится к нулю, тогда $p \to \infty$, что невозможно в силу закона сохранения импульса).

Релятивистское выражение для энергии

По определению $\vec{p}$ — импульс релятивистской частицы, а скорость изменения импульса равна силе, действующей на частицу, $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.

Работа силы по перемещению частицы идет на увеличение энергии частицы:

$$\mathrm{d}A = (\vec{F}, \mathrm{d}\vec{r}) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{r}\right) = (\mathrm{d}\vec{p}, \vec{v}) = \mathrm{d}E.$$

После интегрирования этого выражения получим ***релятивистское выражение для полной энергии*** частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.143)$$

При $v=0$ в системе координат, где частица покоится, выражение (1.143) преобразуется:

$$E_0 = mc^2 \qquad (1.144)$$

— *энергия покоя*. Мы пришли к знаменитой *формуле Эйнштейна*.

Выражение (1.144) является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Именно утверждение, что покоящаяся масса (материя) обладает огромными запасами энергии, является главным практическим следствием СТО. Энергия покоя E_0 — ***внутренняя энергия частицы*** (*учитывающая все*).

Полная энергия в теории относительности складывается из энергии покоя и кинетической энергии. Тогда

$$E_{к} = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Как видно из графика зависимости кинетической энергии релятивистской частицы от ее скорости (рис. 1.87), когда скорость частицы приближается к скорости света, ее энергия возрастает до бесконечности.

Справедливость теории проверяется *принципом соответствия*: при $v \ll c$ (нерелятивистский предел) формула (1.142) примет вид $\vec{p} \approx m\vec{v}$, а выражение для энергии (1.143) преобразуется к виду $E_{к} \approx mv^2/2$.

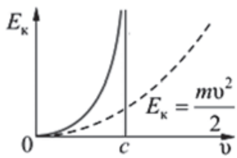


Рис. 1.87
Зависимость кинетической энергии релятивистской частицы от ее скорости:
пунктиром показана зависимость энергии классической частицы от скорости.

Связь энергии с импульсом

Получим еще одно очень важное соотношение, связывающее полную энергию с импульсом частицы.

Из уравнения (1.142) получим

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{p^2c^2}{m^2c^2 + p^2}.$$

Подставив в (1.143), получим

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{(m^2c^2+p^2)c^2}}},$$

отсюда

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}. \qquad (1.145)$$

Или

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

Таким образом, получено инвариантное выражение, связывающее энергию и импульс.

Измеренные в разных системах координат E и $\vec{p}$ будут разными, но их разность будет одинакова в любой системе координат.

Изменяются при переходе из одной системы координат в другую лишь t, E, $\vec{p}$, $\vec{r}$; а m — величина инвариантная.

Сделаем важное замечание. Означает ли утверждение об эквивалентности массы и энергии, что они сходны по существу? Нет, не означает. Масса — инвариант, энергия — динамическая характеристика состояния частицы совсем другой природы. Она зависит от выбора системы отсчета. Взаимосвязь массы и энергии имеет смысл только в системе покоя частицы, по этой причине понятие «массы» $m/\sqrt{1-(v/c^2)}$, зависящей от скорости, лишено какого-либо содержания.

1.10.7. ВЗАИМОСВЯЗЬ МАССЫ И ЭНЕРГИИ ПОКОЯ

Масса и энергия покоя связаны уравнением

$$E_0 = mc^2, \tag{1.146}$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0.

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m.$$

Это утверждение носит название закона ***взаимосвязи массы и энергии покоя***, оно стало символом современной физики.

Взаимосвязь между массой и энергией оценивалась А. Эйнштейном как самый значительный вывод специальной теории относительности. По его выражению, масса должна рассматриваться как «сосредоточение колоссального количества энергии». При этом масса в теории относительности не является более сохраняющейся величиной, а зависит от выбора системы отсчета и характера взаимодействия между частицами.

Определим энергию, содержащуюся в 1 г любого вещества, и сравним ее с химической энергией, равной $2{,}9{\cdot}10^4$ Дж, получаемой при сгорании 1 г угля. Согласно уравнению Эйнштейна $E=mc^2$ имеем

$$E_0=(10^{-3}\text{ кг})(3{\cdot}10^8\text{ м}{\cdot}\text{с}^{-1})^2=9{\cdot}10^{13}\text{ Дж}.$$

Таким образом, собственная энергия в $3{,}1{\cdot}10^8$ раз превышает химическую энергию.

Из этого примера видно, что если высвобождается лишь одна тысячная доля собственной энергии, то и это количество в миллионы раз больше того, что могут дать обычные источники энергии.

Суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется.

Рассмотрим другой пример. Пусть две одинаковые по массе частицы m движутся с одинаковыми по модулю скоростями навстречу друг другу и абсолютно неупруго столкнутся.

До соударения полная энергия каждой частицы E равна: $E=mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$. Полная энергия образовавшейся частицы Mc^2. Эта новая частица имеет скорость $v=0$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=Mc^2,$$

отсюда M равно:

$$M=\frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}>2m. \tag{1.147}$$

Таким образом, *сумма масс исходных частиц $2m$ меньше массы образовавшейся частицы M*. В этом примере кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это привело к возрастанию массы:

$$\Delta M=\frac{\Delta E_{\text{к}}}{c^2}$$

(это при отсутствии выделения энергии при соударении частиц).

Пусть система (ядро) состоит из N частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_i$. Ядро не будет распадаться на отдельные частицы, если они связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией связи $E_{\text{св}}$. *Энергия связи — энергия, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на расстояние, при котором взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь.*

$$E_{\text{св}} = c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - Mc^2 = c^2 \Delta M, \qquad (1.148)$$

где $\Delta M = (m_1 + m_2 + \ldots + m_i) - M$; ΔM — дефект массы.

Видно, что $E_{\text{св}}$ будет положительна, если $M < \sum_{i=1}^{n} m_i$, что и наблюдается на опыте.

При слиянии частиц энергия связи высвобождается (часто в виде электромагнитного излучения).

Например, ядро U^{238} имеет энергию связи

$$E_{\text{св}} = 2{,}9 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж} \approx 1{,}8 \cdot 10^9\ \text{эВ} = 1{,}8\ \text{ГэВ}.$$

Ядерные реакции

Ядерной реакцией *называется процесс взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или другим ядром, приводящий к преобразованию исходного ядра.* Например:

$${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}.$$

Это реакция взаимодействия протона с ядром лития. Реакция протекает с выделением энергии.

В ядерной энергетике большой практический интерес представляют реакции с участием нейтронов, в частности реакция деления ядер ${}^{235}_{92}\text{U}$:

$${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0 n \to {}^{95}_{39}\text{Y} + {}^{139}_{53}\text{I} + 2({}^1_0 n).$$

Реакция протекает при захвате ядрами ${}^{235}_{92}\text{U}$ медленных нейтронов. Ядра иттрия и йода — это осколки деления. Ими могут быть и другие ядра. Характерно, что в каждом акте деления возникает 2–3 нейтрона, которые могут вызвать деление других ядер урана, причем также с испусканием нейтронов. В результате количество делящихся ядер стремительно возрастает. Возникает *цепная ядерная реакция* с выделением большого количества энергии.

Устройство, в котором поддерживается управляемая реакция деления атомных ядер, называется *ядерным реактором*. Его основные элементы: ядерное топливо, замедлитель нейтронов, теплоноситель для отвода тепла и устройство для регулирования скорости реакции (рис. 1.88).

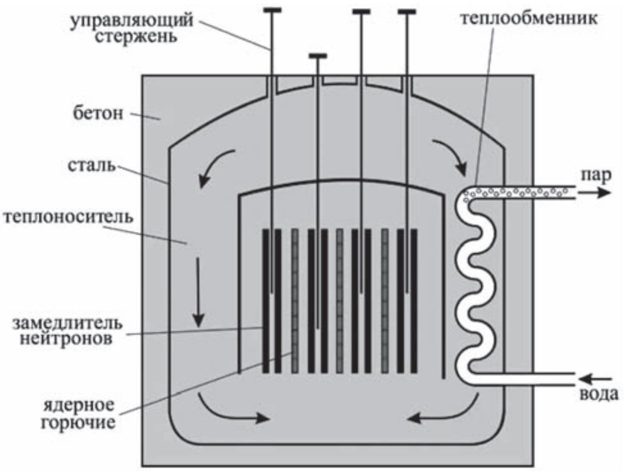


Рис. 1.88
Ядерный реактор

Термоядерные реакции

***Термоядерные реакции** — это реакции синтеза легких ядер, протекающие при очень высоких температурах*. Высокие температуры необходимы для сообщения ядрам энергии, достаточной для того, чтобы сблизиться до расстояния, сравнимого с радиусом действия ядерных сил (10^{-15} м).

Энергия, выделяющаяся в процессе термоядерных реакций в расчете на один нуклон, существенно превышает удельную энергию, выделяющуюся в процессе реакций деления тяжелых ядер. Так, при синтезе тяжелого водорода — дейтерия со сверхтяжелым изотопом водорода — тритием выделяется энергия около 3,5 МэВ на один нуклон, в то время как в процессе деления ядер урана, выделяется примерно 0,85 МэВ энергии на один нуклон.

Термоядерная реакция синтеза дейтерия с тритием:

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \to {}_2^4\mathrm{He} + {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1 n + 17{,}6\,\text{МэВ}, $$

наиболее перспективна в плане получения практически неисчерпаемого источника энергии. Однако осуществление такой реакции в управляемом режиме, равно как и других реакций синтеза, в настоящее время является пока проблемной задачей, хотя успехи в этом направлении несомненны. В настоящее время уже получена плазма, температура которой порядка $2 \cdot 10^8$ К, а время удержания не менее 2 с при выделяемой мощности до 2 МВт.

На рисунке 1.89 изображена одна из моделей термоядерного реактора токамак.

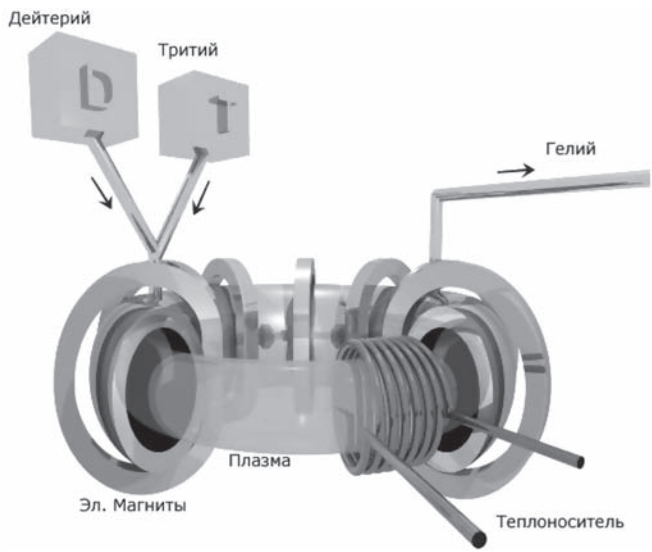


Рис. 1.89
Модель термоядерного реактора токамак

Есть надежда, что термоядерный реактор практического применения будет создан уже в первой четверти XXI в.

Выделяется в виде энергии не более 0,1% массы вещества. Полностью энергия покоя выделяется только при ***аннигиляции*** в виде электромагнитного излучения, как, например, при *аннигиляции электрона* и *позитрона* (рис. 1.90).

На рисунке 1.91 представлен фотоснимок треков частиц при аннигиляции антипротона на протоне.

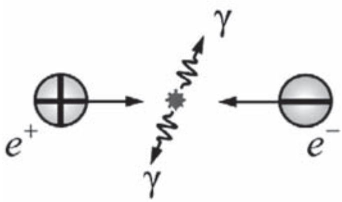


Рис. 1.90
Схема аннигиляции электрона и позитрона

Рис. 1.91
Треки частиц при аннигиляции антипротона на протоне

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключается физическая сущность механического принципа относительности?
2. В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
3. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
4. В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?
5. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела, скорость света?
6. Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?
7. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?
8. Одновременны ли события в системе K', если в системе K они происходят в одной точке и одновременны?

В системе K события разобщены, но одновременны? Обоснуйте ответ.

9. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обоснуйте ответ.
10. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25% ?
11. В чем состоит «парадокс близнецов» и как его разрешить?
12. В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?
13. Как определяется интервал между событиями? Докажите, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
14. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
15. В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?
16. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу? Сделайте этот переход.
17. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.
18. Почему формула, связывающая массу и энергию, не может быть названа формулой превращения массы в энергию, а является формулой соотношения между этими величинами?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.10.1*. Тело начинает двигаться из состояния покоя под действием силы F. Найти зависимость скорости тела от времени. Сравнить с классическим результатом.

Решение. Так как скорость тела в этом случае будет направлена вдоль линии силы, можно записать основное уравнение динамики в скалярной форме:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right)=F,$$

где $v(t)$ — скорость тела в момент времени t, причем $v(0)=0$. Интегрируя, находим

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}=\frac{F}{m}t=a_{c1}t,$$

где $a_{c1}=F/m$ — классическое ускорение тела. Возводя уравнение в квадрат, получаем зависимость скорости от времени:

$$v(t)=\frac{a_{c1}t}{\sqrt{1+(a_{c1}t/c)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+(a_{c1}t/c)^2}}.$$

Таким образом, в любой момент времени $v(t)<c$, а при $t\to\infty$ скорость тела становится все ближе к скорости света (см. рис. 1.85). В случае небольших значений времени ($t\ll c/a_{c1}$) мы получаем результат классической нерелятивистской механики для равноускоренного движения:

$$v(t)\approx a_{c1}t.$$

Приведем численные оценки. Пусть ракета движения с ускорением (классическим) $a_{c1}=g=9{,}8$ м/с^2 (т. е. космонавты испытывают привычную земную силу тяжести). Согласно классическому закону движения ракета достигнет скорости света через время $t_{c1}=c/a_{c1}=3\cdot10^8/9{,}8=3{,}06\cdot10^7$ с, т. е. примерно через год. На самом деле в этот момент времени ее скорость будет

$$v(t_{c1})=\frac{c}{\sqrt{1+(c/a_{c1}t_{c1})^2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}=0{,}707\,\text{c}.$$

Через 2 года пути скорость станет равной

$$v(2t_{c1})=c/\sqrt{1+0{,}25}=0{,}894\,\text{c};$$

через 5 лет будет

$$v(5t_{c1})=c/\sqrt{1+0{,}04}=0{,}891\,\text{c};$$

через 10 лет получим

$$v(10t_{c1}) = c / \sqrt{1 + 0{,}01} = 0{,}995\,\text{c}$$

и т. д.

Сколько бы времени ни ускорялась ракета, ее скорость никогда не достигнет скорости света.

Задача 1.10.2. Тело со скоростью v_0 налетает перпендикулярно на стенку, двигающуюся ему навстречу со скоростью v. Пользуясь формулами для релятивистского сложения скоростей, найти скорость v_1 тела после отскока. Проанализировать предельные случаи, если удар абсолютно упругий, масса стенки намного больше массы тела. Найти скорость v_1, если $v_0 = v = c/3$.

Решение. Воспользуемся *правилом сложения скоростей* в релятивистской механике:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x v / c^2}.$$

Отсюда получим формулу для обратного преобразования:

$$v'_x = \frac{v_x + v}{1 - v_x v / c^2}, \qquad (1)$$

где v — скорость системы отсчета k' относительно системы k. Направим ось x вдоль начальной скорости тела v_0 и свяжем систему отсчета k' со стенкой. Тогда $v_x = v_0$ и $v = -v$. В системе отсчета, связанной со стенкой, начальная скорость v'_0 тела согласно уравнению (1) равна

$$v'_0 = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v / c^2}.$$

Поскольку стенку можно считать бесконечно массивной, по закону сохранения энергии после упругого удара тело отскочит в обратном направлении с тем же (относительно стенки) абсолютным значением скорости:

$$v'_1 = -v'_0 = -\frac{v_0 + v}{1 + v_0 v / c^2}.$$

Вернемся теперь назад в систему отсчета k. Подставляя в $v_x = \dfrac{v'_x + v}{1 + v'_x v / c^2}$ $\vec{v}_1$ вместо $\vec{v}_x$ и учитывая, что $v = -v$, после преобразований находим искомую скорость:

$$v_1 = \frac{v'_1 - v}{1 - v'_1 v / c^2} = -\frac{v_0(1 + v^2 / c^2) + 2v}{1 + 2v_0 v / c^2 + v^2 / c^2}. \qquad (2)$$

Проанализируем ***предельные случаи.***

1. Если скорости тела и стенки малы ($v_0 \ll c$, $v \ll c$), то можно пренебречь всеми членами, где эти скорости делятся на скорость света. Получаем тогда из (2) результат классической механики $v_1 = -(v_0 + 2v)$: скорость шара после отскока увеличивается на удвоенную скорость стенки и направлена, естественно, противоположно начальной. Ясно, что в релятивистском случае этот результат не годится. Из него следует, что скорость тела после отскока будет равна $v_1 = -c$, чего не может быть.

2. Пусть теперь на стенку налетает тело, двигающееся со скоростью света (например, луч света отражается от двигающегося зеркала).

Подставляя $v_0 = c$ в соотношение (2), получаем

$$v_1 = -\frac{c(1 + v^2 / c^2) + 2v}{1 + 2cv / c^2 + v^2 / c^2} = -c\frac{(1 + v / c)^2}{(1 + v / c)^2} = -c.$$

Отсюда видно, что скорость луча света изменила направление, но не свою абсолютную величину, как и должно быть.

3. Рассмотрим теперь случай, когда стенка движется с релятивистской скоростью: $v \to c$. В этом случае (2) дает нам

$$v_1 \to -\frac{2v_0 + 2c}{2 + 2v_0 c / c^2} = -c.$$

То есть тело после отскока также будет двигаться со скоростью, близкой к скорости света.

4. Наконец, подставим в (2) значения $v_0 = v = c/3$, тогда $v_1 = -0{,}78c$. Таким образом, в отличие от классической механики, теория относительности дает для скорости после отскока значение, меньшее скорости света.

5. Посмотрим, что случится, если стенка удаляется от тела с той же скоростью ($v = -v_0$). В этом случае из (2) получим:

$$v_1 = -\frac{v_0(1 + v_0^2/c^2) - 2v_0}{1 - 2v_0^2/c^2 + v_0^2/c^2} = -\frac{v_0(-1 + v_0^2/c^2)}{1 - v_0^2/c^2} = v_0.$$

Как и в классической механике, тело стенку не догонит, и его скорость не изменится.

Задача 1.10.3. В ускорителе электронов — бататроне — частицы приобретают энергию $E_к = 0{,}67$ МэВ. До какой скорости разгоняются электроны?

Дано:
$E_к = 0{,}67$ МэВ $= 1{,}072 \cdot 10^{-13}$ Дж

v — ?

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы находится по формуле

$$E_к = E - E_0 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $\beta = v/c$ — скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Отсюда запишем

$$\frac{E_к}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_к}{E_0} + 1\right)^2}} = 0{,}902.$$

Скорость, до которой разгоняют электроны: $v = \beta c$, $v = 0{,}902 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $v = 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.10.4. Поток энергии, излучаемый Солнцем, $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Решение. Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии системы на величину

Дано:
$P=4\cdot10^{26}$ Вт
$m_0/m=0$

t — ?

$$\Delta E=c^2\Delta m.$$

За время t при постоянном излучении Солнце выделит энергию $\Delta E=Pt$, а потеряет при этом массу $\Delta m=m_0/2$, где $m_0=1{,}98\cdot10^{30}$ кг — масса Солнца. Тогда

$$Pt=\frac{c^2m_0}{2},$$

откуда время: $t=\dfrac{c^2m_0}{2P}$.

$$[t]=\left[\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{Вт}}\right]=\left[\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}}\right]=\left[\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}\right]=\text{с},$$

$$t=\frac{3\cdot10^8\cdot1{,}98\cdot10^{30}}{2\cdot4\cdot10^{26}}=0{,}74\cdot10^{12}\text{ с}.$$

Ответ: $t=0{,}74\cdot10^{12}$ с.

Задача 1.10.5. Реакция деления ядра урана $^{235}_{92}\text{U}$ сопровождается выделением энергии $\Delta E_0=200$ МэВ. Определите изменение массы Δm при делении одного моля урана.

Дано:
$\Delta E_0=200$ МэВ$=$
$=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж
$\nu=1$ моль
$\text{N}_\text{A}=6{,}022\cdot10^{23}$

Δm — ?

Решение.
Изменение массы: $\Delta m=\dfrac{\Delta E}{c^2}$.

При делении ν молей урана освобождается энергия: $\Delta E=$ $=\Delta E_0\nu\text{N}_\text{A}$, где ΔE_0 — энергия, освобождаемая при делении одного ядра, N_A — число Авогадро.

Исходя из этого получим

$$\Delta m=\frac{\Delta E_0\nu\text{N}_\text{A}}{c^2},\quad [\Delta m]=\left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{м}^2}\right]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2}\right]=\text{кг},$$

$$\Delta m=\frac{3{,}2\cdot10^{-11}\cdot1\cdot6{,}022\cdot10^{23}}{(3\cdot10^8)^2}=0{,}2\cdot10^{-2}\text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m=0{,}2\cdot10^{-2}$ кг.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.10.1*. Оцените с помощью соотношений неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося внутри сферы радиусом $R = 0{,}05$ нм, со скоростью $v \ll c$.

Ответ: $E_{\text{к}\,\min} = \dfrac{\hbar^2}{2R^2 m} = 15$ эВ.

Задача 1.10.2. Предположим, что мы можем измерить длину стержня с точностью $\Delta l = 0{,}1$ мкм. При какой относительной скорости u двух инерциальных систем отсчета можно было бы обнаружить релятивистское сокращение длины стержня, собственная длина l_0 которого равна 1 м?

Ответ: $u = c\sqrt{2\Delta l / l_0} = 134$ км / с.

Задача 1.10.3. Двое часов после синхронизации были помещены в начало системы координат K и K', движущихся друг относительно друга. При какой скорости u их относительного движения возможно обнаружить релятивистское замедление хода часов, если собственная длительность τ_0 измеряемого промежутка составляет 1 с? Измерение времени производится с точностью $\Delta\tau = 10$ пс.

Ответ: $u = c\sqrt{2\Delta\tau / \tau_0} = 1{,}34$ км / с.

Задача 1.10.4. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость спутника v_0 составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя за время τ_0 0,5 года?

Ответ: $\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57$ с.

Задача 1.10.5. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45°$ с осью x'. Определите длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость v_0 системы K' относительно K равна 0,8 с.

Ответ: $l = l_0\sqrt{1 - (v_0^2 / c^2)\cos\varphi} = 0{,}825$ м.

Задача 1.10.6. В лабораторной системе отсчета (K-системе) пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l=75$ м. Скорость v пи-мезона равна 0,995 с. Определить собственное время жизни τ_0 пи-мезона.

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{1}{v}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 25$ нс.

Задача 1.10.7. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, другая движется со скоростью $v=0{,}8$ с по направлению к покоящейся частице. Определить: 1) релятивистскую массу движущейся частицы в лабораторной системе отсчета; 2) скорость частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы; 3) релятивистскую массу частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции.

Ответ: 1) $(5/3)m_0=1{,}67m_0$; 2) $v=c/2$, $2m_0/\sqrt{3}=1{,}15m_0$.

Задача 1.10.8. На сколько процентов изменятся продольные размеры протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $U=10^6$ В?

Ответ: $\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)_{\text{e}} = 66{,}1\%$; $\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)_{\text{p}} = 0{,}1\%$.

Задача 1.10.9. При какой скорости масса движущегося электрона вчетверо больше массы покоя?

Ответ: $v = c\sqrt{1-\dfrac{m_0^2}{m^2}}$; $v \approx 2{,}9\cdot10^8$ м/с.

Задача 1.10.10. Две ракеты движутся навстречу друг другу со скоростью 3/4 с относительно неподвижного наблюдателя k. Определить скорость сближения ракет.

Ответ: $U = \dfrac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1v_2}{c^2}}$; $U=2{,}88\cdot10^8$ м/с.

Задача 1.10.11. Стержень, собственная длина которого равна l_0, покоится в системе отсчета K': он расположен так, что составляет с осью x' угол φ. Какой угол составляет этот стержень с осью x другой системы отсчета K? Чему равна длина этого стержня в системе K?

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'}$; $l = l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}\cos^2}$.

Задача 1.10.12. В K-системе отсчета мю-мезон, движущийся со скоростью $v=0{,}99$ c, пролетел от места рождения до точки распада расстояние $l=3$ км. Определить: 1) собственное время жизни мезона; 2) расстояние, которое пролетел мезон в K-системе с «его точки зрения».

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{l}{v}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = 1{,}4$ мкс; $l' = l\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = 0{,}42$ км.

Задача 1.10.13. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\tau_0=10$ нс. Найти путь, который пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\tau=20$ нс.

Ответ: $S = c\tau\sqrt{1-\left(\dfrac{\tau_0}{\tau}\right)^2} = 5$ м.

Задача 1.10.14. Две частицы движутся в K-системе отсчета под углом друг к другу, причем первая со скоростью v_1, а вторая со скоростью v_2. Найти скорость одной частицы относительно другой.

Ответ: $v_2' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \left(\dfrac{v_1 v_2}{c_2}\right)^2}$.

Задача 1.10.15. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi=45°$ с осью x'. Определить длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость v_0 системы K' относительно K равна 0,8 с.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{tg}_0}{1-v^2/c^2} = 59°$.

Задача 1.10.16. Частицы с зарядами z_1e и z_2e и с массами покоя m_{01} и m_{02} соответственно прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, после чего масса частицы *1* составила $1/k$ массы частицы *2*. Найти разность потенциалов.

Ответ: $U = \dfrac{(m_{02} - km_{01})c^2}{e(kz_1 - z_2)}$.

Задача 1.10.17. Мощность излучения Солнца $3{,}9{\cdot}10^{26}$ Вт. Считая его излучение постоянным, найдите, за какое время масса Солнца уменьшится вдвое? Принять массу Солнца $1{,}9894{\cdot}10^{30}$ кг, скорость света в вакууме $3{\cdot}10^8$ м/с. Результат представьте в терагодах (1 Тера $= 10^{12}$) и округлите до целого числа.

Ответ: $t = \dfrac{Mc^2}{2P} = 7$.

В далеком созвездии Тау-Кита
Все стало для нас непонятно.
Сигнал посылаем: «Вы что это там?»
А нас посылают обратно.

В. Высоцкий.
В далеком созвездии Тау-Кита

1.11. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

В данной главе рассматривается обобщение теории тяготения Ньютона на основе специальной теории относительности, сделанное А. Эйнштейном. Эта теория была названа им общей теорией относительности (ОТО). В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени, а эти измененные свойства пространства — времени влияют на сам характер физических процессов.

1.11.1. ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

Между любыми видами материи существует универсальное взаимодействие, проявляющееся в притяжении тел.

Потенциальная энергия тела массой m в поле тяготения равна

$$U = m\varphi,$$

где φ — потенциал поля тяготения.

Если величина U мала по сравнению с энергией тела mc^2, т. е. если $(\varphi/c^2) \ll 1$ и тело движется со скоростью, намного меньшей скорости света ($v \ll c$), то мы имеем дело с классическим гравитационным полем, для которого справедлив закон всемирного тяготения Ньютона.

В полях тяготения обычных небесных тел это условие выполняется. Так, на поверхности Солнца $\varphi/c^2 \approx 4 \cdot 10^{-6}$, а на поверхности белых карликов — порядка 10^{-3}.

Теория тяготения Ньютона предполагает мгновенное распространение полей тяготения, что не согласуется с принципами специальной теории относительности, основанной на том экспериментальном факте, что любое взаимодействие распространяется со скоростью меньшей или равной скорости света. Поэтому теорию тяготения Ньютона нельзя применять к сильным полям тяготения, разгоняющим частицы до скорости, близкой к скорости света.

Теория тяготения Ньютона неприменима для описания движения частиц вблизи массивных тел (в частности, для описания траектории движения света в поле тяготения). Неприменима теория тяготения Ньютона и для описания переменных полей тяготения, создаваемых движущимися телами.

Обобщение теории тяготения на основе специальной теории относительности было сделано А. Эйнштейном в 1908–1916 гг. Эта теория была названа им общей теорией относительности (ОТО). В этой теории описываются *сильные гравитационные поля* ($\varphi/c^2 \approx 1$) и движение в них с большими скоростями ($v \approx c$). В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени, а эти измененные свойства пространства — времени влияют на сам характер физических процессов.

1.11.2. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИЛ ИНЕРЦИИ И СИЛ ТЯГОТЕНИЯ

Как мы уже говорили в п. 1.8.4, важнейшей особенностью полей тяготения является то, что тяготение совершенно одинаково действует на разные тела, сообщая им одинаковые ускорения, независимо от свойств тел. Это было известно еще в ньютоновской теории и положено в основу новой, эйнштейновской теории тяготения. Под действием гравитационной силы, $F = \gamma \frac{Mm_g}{r^2} = m_g g$, все тела вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением — *ускорением свободного падения*. Этот факт был установлен Ньютоном и может быть сформулирован как принцип строгой пропорциональности гравитационной массы m_g, определяющей взаимодействие тела с полем тяготения, и инертной массы m_{in}, определяющей сопротивление тела действующей на него силе и входящей во второй закон Ньютона:

$$F = m_{in} a.$$

Уравнение движения тела в поле тяготения записывается так:

$$m_{in}\vec{a} = m_g \vec{g},$$

где $\vec{a}$ — ускорение, приобретаемое телом под действием поля тяготения напряженностью $\vec{G} = \vec{g}$. В этом случае, согласно Ньютону, для всех тел $m_g = m_{in}$ и $\vec{a} = \vec{g}$ — ускорение не зависит от массы и равно напряженности поля тяготения.

Таким образом, все тела в поле тяготения и в поле сил инерции, при $\vec{a} = \vec{g}$, движутся совершенно одинаково. Например, движение тел в космическом корабле, летящем с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, и в корабле, находящемся на Земле в поле тяжести с напряженностью $\vec{G} = \vec{g}$, будет одинаковым. Силы инерции в ускоренно движущемся корабле будут неотличимы от гравитационных сил, действующих в истинном поле тяготения. *Поэтому **силы инерции** можно считать **эквивалентными гравитационным силам**.*

Тождественность инерциальной и гравитационной масс, которую мы доказали в п. 1.8.4, является следствием эквивалентности сил инерции и сил тяготения. Этот факт называется ***принципом эквивалентности Эйнштейна***. *Согласно этому принципу все физические процессы в истинном поле тяготения и в ускоренной системе отсче-*

та, при отсутствии тяготения, протекают одинаковым образом. Это фундаментальный закон природы.

Следствием этого закона является то, что, находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg. Тем, что кабина движется с ускорением $\vec{a}=\vec{g}$, или действием притяжения Земли?

Ярчайшим доказательством равенства сил инерции и гравитации является состояние невесомости космонавтов в космическом корабле (падают под действием гравитационных сил и отлетают под действием центробежных сил инерции).

Принцип эквивалентности — основополагающий в ОТО Эйнштейна.

1.11.3. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОТО

Итак, мы с вами показали, что силы инерции эквивалентны силам тяготения. Эквивалентность, однако, это не тождественность, существуют некоторые различия.

Допустим, $\vec{G}=\vec{a}$ (вагон движется прямолинейно). При уменьшении ускорения $\vec{a}$ напряженность эквивалентного поля должна изменяться во всех точках вагона одновременно, т. е. изменения должны распространяться мгновенно. Эти рассуждения предполагают так называемое дальнодействие сил инерции, в то время как возмущения гравитационного поля распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. То есть гравитационные взаимодействия являются близкодействующими.

Ускоренно движущийся космический корабль имитирует только однородное поле тяготения, одинаковое по величине и направлению во всем пространстве. Но поля тяготения, создаваемые отдельными телами, не таковы. Чтобы имитировать, например, сферическое поле тяготения, надо, исходя из принципа эквивалентности, потребовать, чтобы истинное гравитационное поле создавалось локальными, соответствующим образом ускоренными в каждой точке системами отсчета.

В результате в любой конечной области пространство — время окажется искривленным — неевклидовым.

Сумма углов треугольника в таком пространстве не равна π, отношение длины окружности к радиусу отлично от 2π, время в разных точках течет по-разному. Согласно Эйнштейну, истинное гравитационное поле есть проявление искривления четырехмерного пространства — времени.

Кривизна пространства — времени создается источниками гравитационного поля — массами вещества и всеми видами энергии, присутствующими в системе, поскольку энергия и масса эквивалентны:

$$E = -\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, давления и напряжений, имеющихся в телах от всех физических полей. Движение тел в искривленном пространстве — времени происходит по кратчайшим траекториям — геодезическим, которые в трехмерном пространстве — времени воспринимаются как движение по искривленным траекториям с переменной скоростью. Изменение гравитационных полей в вакууме *распространяется со скоростью света.*

В основу ОТО положены два постулата.

1. *Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации. (Этот факт можно считать доказанным. Эффекты гравитации и ускорения движения частиц неразличимы.)*

2. *Гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью, равной скорости света (c), в виде гравитационных волн. (Пока кванты гравитационного поля — гравитоны — не обнаружены.)*

Еще одним ключевым моментом в ОТО является понятие *кривизны пространства — времени*. Проведем мысленный эксперимент (рис. 1.92).

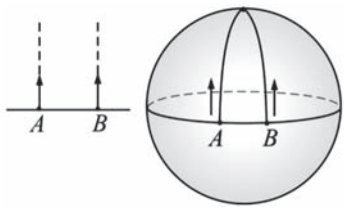
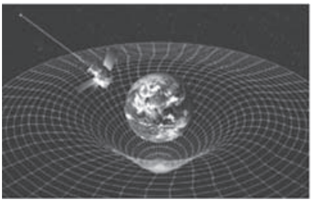


Рис. 1.92
Мысленный эксперимент, поясняющий то, что геометрические свойства пространства выступают в роли реально действующих сил

В ходе путешествия плоские двумерные существа отправившиеся из A и B по параллельным дорогам будут замечать, что они приближаются друг к другу (кривизны сферы, если она достаточно велика, они не замечали, не знали, что живут на сфере). И приближаются они все быстрее и быстрее — с ускорением, как будто под действием некой силы. Назовем эту силу *гравитацией.* Наблюдатель со стороны видит, что сама кривизна выступает в роли силы, т. е. *геометрические свойства пространства выступают в роли реально действующих сил!*

Анализируя этот мысленный эксперимент и тот факт, что *любые массы притягиваются всегда*, Эйнштейн пришел к мысли, что *сила тяготения не есть специфическая сила*, то, что мы принимаем за силу притяжения, следует рассматривать лишь как *проявление специфики геометрических свойств пространства — времени.*

СТО оперирует плоским пространством — временем, а ОТО — искривленным. *Любая масса искривляет пространство — время, другая масса, попадая в область искривления, испытывает силу притяжения* (рис. 1.93).



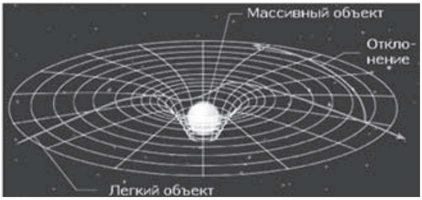


Рис. 1.93
Гравитация в ОТО рассматривается как геометрический эффект — проявление искривления пространства — времени. Тяжелая масса искривляет пространство — время — легкий объект отклоняется от своей траектории

Герман Минковский[1], бывший учитель математики Эйнштейна, ввел четырехмерное пространство — время и дал геометрическое представление теории относительности.

[1] Минковский Герман (1864–1909) — немецкий математик который использовал геометрические методы для решения сложных проблем в области теории чисел, математической физики и теории относительности.

Математики Г. Риман[1] и Н. Лобачевский[2] создали теорию искривленного пространства произвольного числа измерений. Эйнштейн воспользовался математическими формулами Римана (четырехмерного пространства — времени).

Серьезная проверка положений ОТО началась лишь с 1920-х гг., и пока нет ни одного факта, противоречащего ОТО.

1.11.4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ОТО

1. Замедление времени в гравитационных полях

Общая теория относительности предсказывает замедление хода часов в гравитационных полях и изменение частоты фотонов в гравитационном поле. Пусть часы движутся с ускорением g, тогда их скорость, после того как они прошли расстояние x, равна: $v=\sqrt{2gx}$. С точки зрения неподвижного наблюдателя промежутки времени $\mathrm{d}t$ в неподвижной и $\mathrm{d}t_0$ в подвижной системах отсчета связаны соотношением

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1-\dfrac{2gx}{c^2}}},$$

где $\mathrm{d}t$ — промежуток времени в пространстве без поля.

Поскольку $\varphi=gx$ — гравитационный потенциал, то имеем в слабых гравитационных полях ($\varphi \ll c^2$)

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1-2\varphi/c^2}}\cong \mathrm{d}t_0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right),$$

---

1 Риман Георг Фридрих Бернхард (1826–1866) — немецкий математик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики.

2 Лобачевский Николай Иванович (1792–1856) — великий русский математик, создатель геометрии Лобачевского, деятель университетского образования и народного просвещения.

— время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного потенциала.

Этот эффект был подтвержден прямым экспериментом. В 1976 г. на высоту 10^4 км на ракете были подняты водородные часы, точность хода которых составляет 10^{-15} с. На Земле оставили точно такие же часы, предварительно синхронизировав с улетевшими часами. Через два года часы вернули и сравнили показания, разность $4{,}5\cdot10^{-10}$ с совпала с расчетной по ОТО с точностью до $0{,}02\%$.

2. Красное гравитационное смещение частоты фотонов

При приближении света к телам, создающим гравитационное поле, частота света убывает с увеличением абсолютной величины потенциала поля.

Для частоты света в гравитационном поле можно записать:

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right),$$

где ν — частота света с точки зрения неподвижного наблюдателя; ν_0 — частота света в подвижной системе отсчета.

Так, если свет испускается в точке с потенциалом φ_1 и приходит в точку с потенциалом φ_2, то линии спектра смещаются в сторону красного цвета на величину

$$\Delta\nu = \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\nu_0}{c^2}.$$

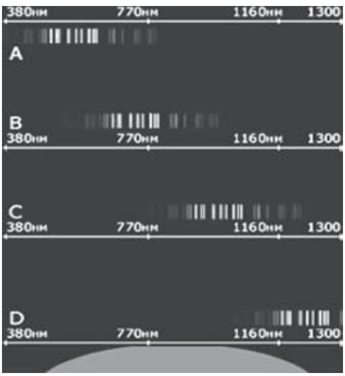


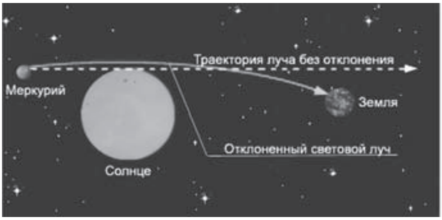
Рис. 1.94
Гравитационное смещение спектра в сторону меньших частот

Если на Земле наблюдать спектр, испускаемый Солнцем и звездами, то $|\varphi_2| < |\varphi_1|$ и $\Delta\nu < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот (красный спектр) (рис. 1.94).

Этот факт был доказан еще в 1960 г. с помощью эффекта Мессбауэра и подтверждается ОТО с точностью до 1%.

3. Отклонение светового луча массивными телами

ОТО объясняет вдвое большее отклонение светового луча вблизи массивных тел, чем это предсказывала теория Ньютона (рис. 1.95). Эксперимент был проведен еще в 1919 г. Световой луч вблизи одной из планет отклонился на 1,75″, тогда как по теории Ньютона искривление должно было произойти на 0,87″, т. е. вдвое меньше.



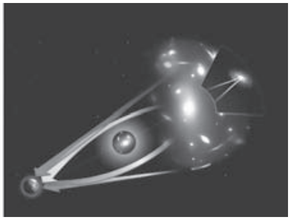


Рис. 1.95
Отклонение светового луча в гравитационном поле массивных тел

4. Объяснение смещения орбиты Меркурия

Известно, что за 100 лет орбита Меркурия сместилась на 1°33′20″. Из теории Ньютона следует, что смещение, за счет влияния планет, должно быть на 1°32′37″, т. е. на 43″ меньше. Подставив в формулы ОТО параметры Солнца и Меркурия, Эйнштейн получил скорость прецессии орбиты на 43″ за 100 лет.

5. Черные дыры

ОТО предполагает наличие во Вселенной *черных дыр* — космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности (к горизонту событий) (рис. 1.96).

Допуская, что фотон обладает гравитационной массой, можно оценить размеры r_g и массу M космического объекта, способного стать черной дырой. Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия фотона была меньше или равна его потенциальной энергии на бесконечности:

$$mc^2 \le \gamma \frac{mM}{r_g}.$$

Отсюда *критический радиус*, при котором массивное тело под влиянием своего собственного притяжения ста-

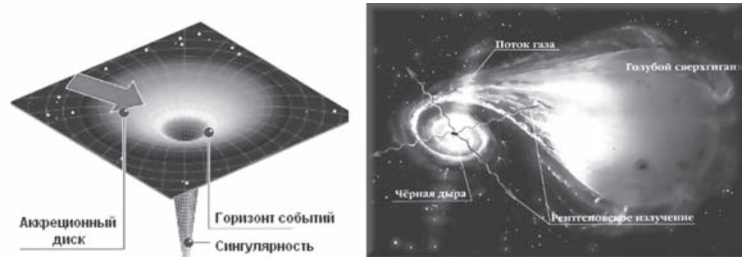


Рис. 1.96
Черная дыра:

черная дыра это самоподдерживающееся гравитационное поле, сконцентрированное в сильно искривленной области пространства — времени.

новится черной дырой (радиус Шварцшильда[1], или гравитационный радиус):

$$r_g \leq \gamma \frac{M}{c^2}.$$

При этих условиях свет не сможет покинуть данный космический объект.

[1] Шварцшильд Карл (1873–1916) — немецкий астроном и физик.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

2.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Совокупность тел, составляющих ***макроскопическую*** систему, называется ***термодинамической системой***.

Система может находиться в различных состояниях. *Величины, характеризующие состояние системы, называются* ***параметрами состояния: давление*** P, ***температура*** T, ***объем*** V *и т. д.* Связь между P, T, V специфична для каждого тела и называется ***уравнением состояния***.

Любой параметр, имеющий *определенное* значение для каждого равновесного состояния, является ***функцией состояния системы***.

Равновесной *называется такая система, параметры состояния которой одинаковы во всех точках системы и не изменяются со временем (при неизменных внешних условиях). При этом в равновесии находятся отдельные макроскопические части системы.*

Термодинамическое равновесие существенно отличается от механического тем, что, хотя параметры системы остаются неизменными, частицы, из которых состоит система, находятся в непрерывном движении.

Например, рассмотрим газ, равномерно распределенный по всему объему. При огромном числе молекул, некоторые из них отклоняются от равномерного распределения. Параметры состояния не остаются строго постоянными, а испытывают небольшие колебания внутри своих равновесных состояний. Такие колебания называются ***флуктуациями***.

Термодинамический процесс *— переход из одного равновесного состояния в другое.*

Релаксация *— возвращение системы в равновесное состояние.* Если система выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, т. е. подвержена внешним воздействиям, то в течение достаточно большого промежутка времени самопроизвольно происходит процесс перехода к равновесному состоянию. *Время перехода —* ***время релаксации.***

Если равновесие установилось, то система самопроизвольно не сможет выйти из него. Например, если опустить горячий камень в холодную воду, то через некоторое время наступит равновесное состояние: температуры выровняются. Но обратный процесс невозможен — температура камня самопроизвольно не увеличится.

Атомная единица массы (а. е. м.) — единица массы, равная 1/12 массы изотопа углерода $^{12}\mathrm{C}$ — m_C:

$$m_{\text{ед}}=(1/12)m_\mathrm{C}=1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Атомная масса химического элемента (атомный вес) A есть отношение массы атома этого элемента m_A к 1/12 массы изотопа углерода C^{12} (атомная масса — безразмерная величина).

$$A=\frac{m_\mathrm{A}\,(\text{масса атома элемента})}{m_{\text{ед}}\,(1/12\ \text{массы атома углерода})}.$$

Молекулярная масса (молекулярный вес)

$$M=\frac{m_\mathrm{M}\,(\text{масса молекулы})}{m_{\text{ед}}}.$$

Отсюда можно найти массу атома и молекулы в килограммах:

$$m_\mathrm{A}=Am_{\text{ед}};\quad m_\mathrm{M}=Mm_{\text{ед}}.$$

Моль *— это стандартизированное количество любого вещества, находящегося в газообразном, жидком или твердом состоянии.*

1 моль *— количество грамм вещества, равное его молекулярной массе.*

Авогадро Амедео (1776–1856) — итальянский физик и химик. Основные физические работы посвящены молекулярной физике. Уже первыми своими исследованиями в этой области заложил основы молекулярной теории, выдвинув молекулярную гипотезу. Открыл важный для химии и физики закон, по которому в равных объемах различных газов при одинаковых условиях содержится одинаковое количество молекул (закон Авогадро). Исходя из этого закона, разработал метод определения молекулярного и атомного веса.

Количество вещества, масса которого, выраженная в килограммах, равна его молекулярному весу, называется ***киломолем*** μ*:*

$$\mu[\text{кг/кмоль}=\text{г/моль}]=M \text{ или } A \text{ (безразмерные)}.$$

В 1811 г. А. Авогадро высказал предположение, что число частиц в киломоле любого вещества постоянно и равно величине, названной впоследствии ***числом Авогадро***:

$$\mathrm{N_A}=\frac{\mu(\text{кг / кмоль})}{M\cdot m_{\text{ед}}(\text{кг})}=\frac{1}{m_{\text{ед}}}=$$

$$=6{,}022\cdot 10^{26}\,\frac{1}{\text{кмоль}}=6{,}022\cdot 10^{23}\,\frac{1}{\text{кмоль}}.$$

Молярная масса — масса одного моля (μ): $\mu=Am_{\text{ед}}\mathrm{N_A}$.

При одинаковых температурах и давлениях все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. *Число молекул идеального газа, содержащихся в* 1 м^3 *при нормальных условиях, называется* ***числом Лошмидта***[1]:

$$\mathrm{N_L}=P_0/kT_0=2{,}68\cdot 10^{25}\text{ м}^{-3}.$$

[1] Лошмидт Иоганн Йозеф (1821–1895) — австрийский физик и химик. Член Австрийской академии наук. Работал в области термодинамики, электродинамики и оптики, занимался структурой кристаллов, стереохимией.

Нормальные условия: $P_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К.

Под ***идеальным газом*** мы будем понимать газ, для которого:

- *радиус взаимодействия двух молекул много меньше среднего расстояния между ними (взаимодействуют только при столкновении)*;
- *столкновения молекул между собой и со стенками сосуда — абсолютно упругие (выполняются законы сохранения энергии и импульса)*;
- *объем всех молекул газа много меньше объема, занятого газом*.

Следует помнить, что классические представления в молекулярно-кинетической теории и термодинамике, как и вообще в микромире, не объясняют некоторые явления и свойства. Здесь, как и в механике, *условием применимости классических законов* является выполнение неравенства

$$mvR \gg \hbar,$$

где m — масса; v — скорость; R — размер пространства движения частицы; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. В противном случае используются *квантово-механические* представления.

2.1.2. ДАВЛЕНИЕ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим подробнее, что представляет собой один из основных параметров состояния — давление P. Еще в XVIII в. Даниил Бернулли предположил, что ***давление газа*** есть *следствие столкновения газовых молекул со стенками сосуда*. Именно давление чаще всего является единственным сигналом присутствия газа.

Итак, находящиеся под давлением газ или жидкость действуют с некоторой силой на любую поверхность, ограничивающую их объем. В этом случае сила ΔF действует по нормали к ограничивающей объем поверхности ΔS. Давление на поверхность

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Можно также говорить о давлении внутри газа или жидкости. Его можно измерить, помещая в газ или жидкость небольшой куб с тонкими стенками, наполненный той же средой.

Поскольку среда покоится, на каждую грань куба со стороны среды действует одна и та же сила ΔF. В окрестности куба давление равно $\Delta F/\Delta S$, где ΔS — площадь грани куба. Из этого следует, что ***внутреннее давление** является одним и тем же во всех направлениях и во всем объеме, независимо от формы сосуда*. Этот результат называется ***законом Паскаля***: *если к некоторой части поверхности, ограничивающей газ или жидкость, приложено давление P, то оно одинаково передается любой части этой поверхности.*

Одним из примеров использования закона Паскаля является гидравлический домкрат (рис. 2.1), принцип действия которого разобран в задаче 2.1.2.

Гидравлический пресс, создающий давление 160 МПа, сжимает металлический контейнер с мусором объемом 250 л в течение нескольких секунд в диск толщиной 20 см.

Вычислим давление, оказываемое газом на одну из стенок сосуда (рис. 2.2).

Обозначим: n — концентрация молекул в сосуде; m — масса одной молекулы. Движение молекул по всем

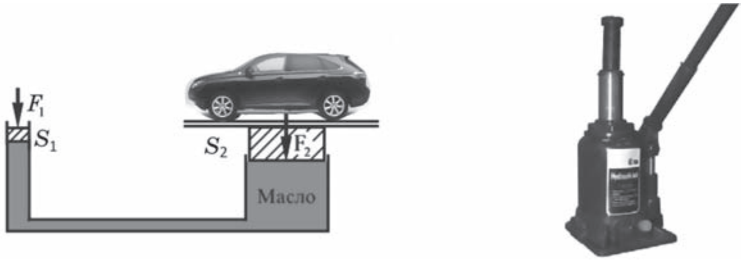


Рис. 2.1
Принцип действия гидравлического домкрата и его внешний вид

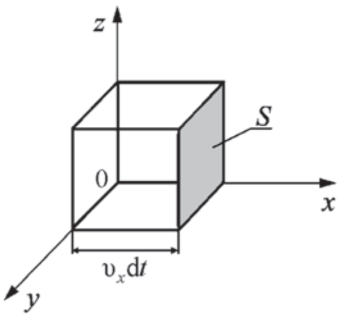


Рис. 2.2
К вычислению числа молекул, падающих на стенку площадью S за время Δt

осям равновероятно, поэтому к одной из стенок сосуда площадью S подлетает в единицу времени $(1/6)n\upsilon_x$ молекул, где υ_x — проекция вектора скорости на направление, перпендикулярное стенке.

Каждая молекула обладает импульсом $m\upsilon_x$, но стенка получает импульс $2m\upsilon_x$ (при абсолютно упругом ударе $m\upsilon_x-(-m\upsilon_x)=2m\upsilon_x$). За время d$t$ о стенку площадью S успеет удариться число молекул, которое заключено в объеме V: $n=S\upsilon_x dt$.

Общий импульс, который получит стенка, $p=F\mathrm{d}t$. Тогда

$$F\mathrm{d}t=\frac{1}{6}n2m\upsilon_x\upsilon_x S\mathrm{d}t=\frac{1}{3}mn\upsilon_x^2 S\mathrm{d}t.$$

Разделив обе части равенства на S и dt, получим выражение для давления:

$$\frac{F}{S}=\frac{1}{3}nm\upsilon_x^2=P. \qquad (2.1)$$

Таким образом, мы определили ***давление как силу, действующую в единицу времени на единицу площади,***

$$P=\mathrm{d}F/\mathrm{d}S. \qquad (2.2)$$

Наивно полагать, что все молекулы подлетают к стенке S с одной и той же скоростью υ_x (рис. 2.2). На самом деле молекулы имеют разные скорости, направленные в разные стороны, т. е. скорости газовых молекул — *случайные величины*. Более точно *случайную величину* характеризует *среднеквадратичная величина*. Поэтому под скоростью υ^2 понимаем ***среднеквадратичную скорость***

$$\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}.$$

Вектор скорости, направленный произвольно в пространстве, можно разделить на три составляющих:

$$\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Ни одной из этих проекций нельзя отдать предпочтение из-за *хаотичного теплового движения молекул*, т. е. в среднем $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$. Следовательно, на другие стенки будет точно такое же давление. Тогда можно записать в общем случае:

$$P = \frac{1}{3} mn \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2}.$$

Отсюда получим ***основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:***

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{к}} \rangle, \tag{2.3}$$

где $\langle E_{\text{к}} \rangle$ — *средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы*.

Итак, *давление газов определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул*.

Уравнение (2.3) называют основным уравнением, потому что давление P — макроскопический параметр системы здесь связан с основными характеристиками — массой и скоростью движения молекул.

Рассмотрим *единицы измерения давления*.

По определению, $P = F/S$, поэтому размерность давления Н/м^2.

$$1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}; \quad 1 \text{ атм} = 9{,}8 \text{ Н/см}^2 = 98\,066 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}.$$

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 1 \text{ тор} = 1/760 \text{ атм} = 133{,}3 \text{ Па}.$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}; \quad 1 \text{ атм} = 0{,}98 \text{ бар}.$$

2.1.3. ТЕМПЕРАТУРА И СРЕДНЯЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ

Из опыта известно, что если привести в соприкосновение два тела, горячее и холодное, то через некоторое время их температуры выравниваются. Что перешло от одного тела к другому? Раньше, во времена Ломоносова и Лавуазье, считали, что носителем тепла является некоторая жидкость — *теплород*. На самом деле ничто не переходит, только изменяется средняя кинетическая энергия — энергия движения молекул, из которых состоят эти тела. Именно средняя кинетическая энергия атомов и молекул служит характеристикой системы в состоянии равновесия.

Это свойство позволяет определить параметр состояния, выравнивающийся у всех тел, контактирующих между собой, как величину, пропорциональную средней кинетической энергии частиц в сосуде. Чтобы связать энергию с температурой, Больцман ввел коэффициент пропорциональности k, который впоследствии был назван его именем:

$$T = \frac{2}{3k}\frac{m\left\langle v_{\text{кв}}^2 \right\rangle}{2}, \tag{2.4}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$ — ***постоянная Больцмана***.

Величину *T называют* ***абсолютной температурой*** *и измеряют в кельвинах* (К). Она служит *мерой кинетической энергии теплового движения частиц идеального газа*.

Больцман Людвиг (1844–1906) — австрийский физик-теоретик, один из основоположников классической статистической физики. Основные работы — в области кинетической теории газов, термодинамики и теории излучения. Вывел основное кинетическое уравнение газов, являющееся основой физической кинетики. Впервые применил к излучению принципы термодинамики.

Из (2.4) получим

$$E_к = \frac{m\left\langle v_{кв}^2 \right\rangle}{2} = \frac{3}{2}kT. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) применима для расчетов *средней кинетической энергии на одну молекулу* идеального газа.

Можно записать

$$\frac{m\left\langle v_{кв}^2 \right\rangle}{2}\mathrm{N_A} = k\mathrm{N_A}T.$$

Обозначим $k\mathrm{N_A}=R$ — ***универсальная газовая постоянная***, тогда

$$\frac{\mu\left\langle v_{кв}^2 \right\rangle}{2} = \frac{3}{2}RT, \qquad (2.6)$$

— это формула для *молярной массы газа*.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является *статистической* величиной, т. е. параметром, проявляющимся в результате совокупного действия огромного числа молекул. Поэтому не говорят: «температура одной молекулы», нужно сказать: «энергия одной молекулы, но температура газа».

С учетом вышесказанного о температуре, *основное уравнение молекулярно-кинетической теории* можно записать по-другому. Так как из (2.3) $P=2/3_n\langle E_к\rangle$, где $\langle E_к\rangle=3/2kT$,

$$P=nkT. \qquad (2.7)$$

В таком виде *основное уравнение молекулярно-кинетической теории* употребляется чаще.

Термометры. Температурные шкалы

Наиболее естественно было бы использовать для измерения температуры определение $T = \frac{2}{3k}\frac{m\left\langle v_{кв}^2 \right\rangle}{2}$, т. е. измерять кинетическую энергию поступательного движения молекул газа. Однако чрезвычайно трудно проследить за

Рис. 2.3
Газовый термометр

молекулой газа и еще сложнее за атомом. Поэтому для определения температуры идеального газа используется уравнение

$$PV=(m/\mu)RT.$$

Действительно, величины P и V легко поддаются измерению.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рисунке 2.3 простейший газовый термометр с постоянным давлением. Объем газа в трубке

$$V=\frac{nk}{P_0}T,$$

как видно, пропорционален температуре, а поскольку высота подъема ртутной капли пропорциональна V, то она пропорциональна и T.

Существенно то, что в газовом термометре необходимо использовать идеальный газ. Если же в трубку вместо идеального газа поместить фиксированное количество жидкой ртути, то мы получим обычный ртутный термометр. Хотя ртуть далеко не идеальный газ, при комнатной температуре ее объем изменяется почти пропорционально температуре. Термометры, в которых вместо идеального газа используются какие-либо другие вещества, приходится калибровать по показаниям точных газовых термометров.

В физике и технике ***за абсолютную шкалу температур принята шкала Кельвина***, названная в честь знаменитого английского физика лорда Кельвина; 1 К — одна из основных единиц СИ.

Кроме того, используются и другие шкалы:

- шкала Цельсия[1] — точка таяния льда — 0°С, точка кипения воды — 100°С;

---

[1] Цельсий Андерс (1701–1744) — шведский астроном, геолог и метеоролог. Предложил шкалу температур, впоследствии названную его именем.

- шкала Фаренгейта[1] — точка таяния льда 32°F, точка кипения воды — 212°F. Соотношение между этими двумя шкалами:

$$t°\mathrm{C}=(5/9)(t°\mathrm{F}-32°\mathrm{C}). \quad (2.8)$$

Абсолютная температура T связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением $T(\mathrm{K})=273{,}15+t°\mathrm{C}$.

На рисунке 2.4 приведено сравнение разных температурных шкал.

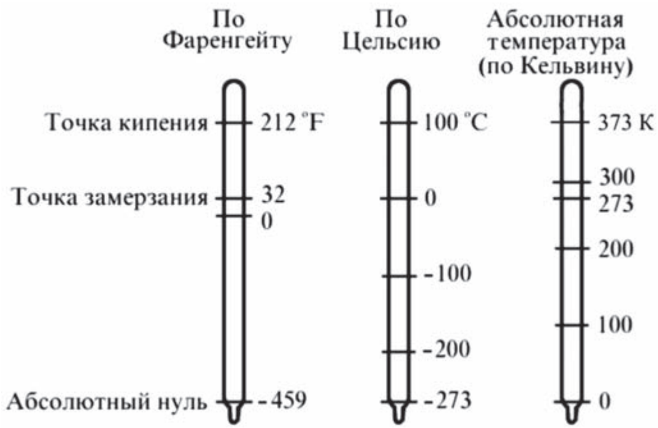


Рис. 2.4
Различные температурные шкалы

Так как кинетическая энергия $mv^2/2 \geq 0$ всегда, то и T *не может* быть отрицательной величиной.

Своеобразие температуры заключается в том, что она ***не аддитивна*** (*аддитивный — получаемый сложением*). Если мысленно разбить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей (длина, объем, масса, сопротивление и т. д. — аддитивные величины). Поэтому температуру нельзя измерять, сравнивая ее с эталоном.

---

[1] Фаренгейт Габриель Даниель (1686–1736) — данцигский физик немецкого происхождения. Изобрел первый весовой ареометр и термобарометр.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, где в качестве термометрической величины используют давление. Шкала газового термометра — является абсолютной ($T=0$; $P=0$).

2.1.4. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

В XVII–XIX вв. были сформулированы опытные законы идеальных газов. Кратко напомним их.

Изопроцессы идеального газа — *процессы, при которых один из параметров остается неизменным.*

1. ***Изохорический процесс***. Закон Шарля[1]. $V=\text{const}$.

Изохорическим *процессом называется процесс, протекающий при* ***постоянном объеме V***. Поведение газа при изохорическом процессе подчиняется ***закону Шарля***: *при постоянном объеме и неизменных значениях массы газа и его молярной массы* ***отношение давления газа к его абсолютной температуре остается постоянным***:

$$P_1/T_1=P_2/T_2=\ldots P_0/T_0$$

или

$$P/T=\text{const}.$$

График изохорического процесса на PV-диаграмме называется ***изохорой***. Полезно знать график изохорического процесса на PT- и Pt-диаграммах (рис. 2.5).

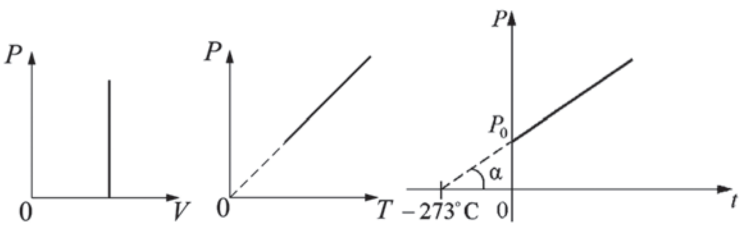


Рис. 2.5
Графики изохорического процесса

[1] Шарль Жак Александр Сезар (1746–1823) — французский изобретатель и ученый. Известен как изобретатель наполняемого водородом или другим газом легче воздуха воздушного шара, получившего по имени изобретателя название «шарльер».

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изохорического процесса записывается в виде

$$P = P_0(1 + \alpha t), \qquad (2.9)$$

где P_0 — давление при 0°C; α — температурный коэффициент давления газа, равный $1/273$ град$^{-1}$.

2. ***Изобарический процесс.*** Закон Гей-Люссака[1]. $P = \text{const}$.

Изобарическим *процессом называется процесс, протекающий при* ***постоянном давлении*** *P*. Поведение газа при изобарическом процессе подчиняется ***закону Гей-Люссака***: *при постоянном давлении и неизменных значениях массы газа и его молярной массы отношение объема газа к его абсолютной температуре остается постоянным*:

$$V_1/T_1 = V_2/T_2 = \ldots V_0/T_0$$

или

$$V/T = \text{const}.$$

График изобарического процесса на VT-диаграмме называется ***изобарой***. Полезно знать графики изобарического процесса на PV- и Vt-диаграммах (рис. 2.6).

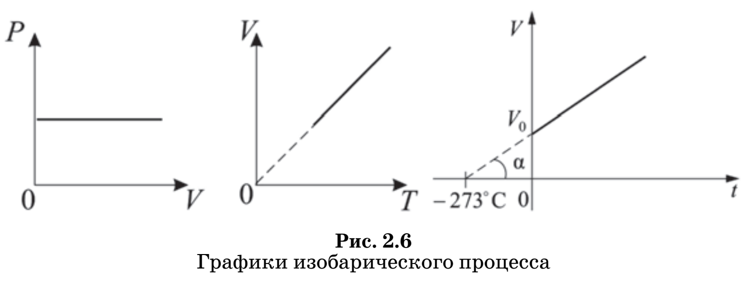


Рис. 2.6
Графики изобарического процесса

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изобарического процесса записывается в виде

---

[1] Гей-Люссак Жозеф Луи (1778–1850) — французский химик и физик, член Французской академии наук. Открыл закон теплового расширения газов, независимо от Дж. Дальтона.

$$V = V_0(1 + \alpha t), \qquad (2.10)$$

где $\alpha = 1/273$ град$^{-1}$ — температурный коэффициент расширения.

3. ***Изотермический процесс.*** Закон Бойля[1] — Мариотта[2]. $T = \text{const}$.

Изотермическим *процессом называется процесс, протекающий при* ***постоянной температуре*** T.

Поведение идеального газа при изотермическом процессе подчиняется ***закону Бойля — Мариотта***: *при постоянной температуре и неизменных значениях массы газа и его молярной массы* ***произведение объема газа на его давление остается постоянным***:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = \ldots = P_0V_0$$

или

$$PV = \text{const}.$$

График изотермического процесса называется ***изотермой*** и изображается на PV-диаграмме в виде гиперболы (рис. 2.7, 2.8). С повышением температуры газа изотерма удаляется от начала координат.

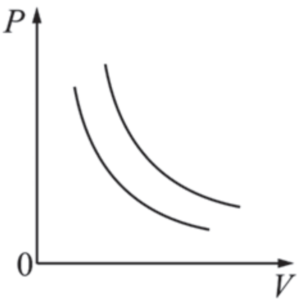


Рис. 2.7
Графики изотермического процесса

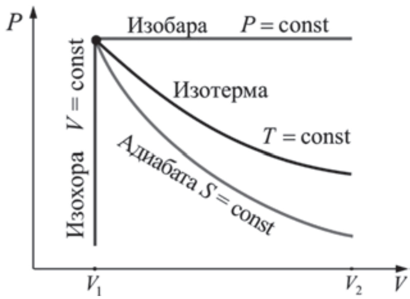


Рис. 2.8
Графики различных изопроцессов в PV-координатах

---

[1] Бойль Роберт (1627–1691) — физик, химик и богослов. Он доказал, что явление волосности, а именно поднятие жидкостей в узких трубках, происходит в разреженном пространстве.

[2] Мариотт Эдм (1620–1684) — французский аббат, физик. Открыл зависимость между упругостью газа и его объемом.

4. ***Адиабатический процесс*** (*изоэнтропийный* ($\Delta S=0$, $S=\mathrm{const}$)).

Адиабатический процесс — термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

Уравнение адиабаты: $PV^{\gamma}=\mathrm{const}$, где γ — показатель адиабаты.

На рисунке 2.8 показаны графики различных изопроцессов в PV-координатах. Как видно из рисунка, адиабата идет круче, чем изотерма.

5. ***Политропический процесс*** — *процесс, при котором теплоемкость газа остается постоянной.* Политропический процесс — общий случай всех перечисленных выше процессов.

6. ***Закон Авогадро***: *при одинаковых температурах и давлениях в равных объемах любого газа содержится одинаковое число молекул* $\mathrm{N_A}=6{,}022\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. Следствием этого закона является то, что *моли любых газов, при одинаковых температуре и давлении, занимают одинаковые объемы.* При нормальных условиях объем моля равен:

$$V_\mu=22{,}41\cdot10^{-3}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

7. ***Закон Дальтона***[1]: ***давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений*** P_i, ***входящих в нее газов***:

$$P_{\text{см}}=P_1+P_2+\ldots+P_n. \tag{2.11}$$

Парциальное давление P_i — давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объем.

При $P_{\text{см}}=P_1+P_2$, $\nu_{\text{см}}=m_1/\mu_1+m_2/\mu_2$, давление смеси газов

$$P_{\text{см}}=\frac{m_1RT}{\mu_1V}+\frac{m_2RT}{\mu_2V}=\frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right). \tag{2.12}$$

[1] Дальтон Джон (1766–1844) — английский физик и химик, сыгравший большую роль в развитии атомистических представлений применительно к химии. Открыл несколько законов, получивших позднее его имя. Также именем Дальтона назван дефект зрения — дальтонизм.

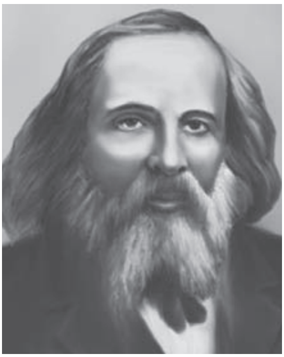
8. ***Объединенный газовый закон*** (закон Клапейрона[1]).

В соответствии с законами Бойля — Мариотта и Гей-Люссака, Клапейрон сделал заключение, что для данной массы газа

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \text{ или } \frac{PV}{T}=\text{const}. \qquad (2.13)$$

2.1.5. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА (УРАВНЕНИЕ МЕНДЕЛЕЕВА — КЛАПЕЙРОНА)

Уравнение, связывающее основные параметры состояния идеального газа, вывел великий русский ученый Д. И. Менделеев.



Менделеев Дмитрий Иванович (1834–1907) — русский ученый. Работы преимущественно в области химии, а также физики, метрологии, метеорологии. Открыл в 1869 г. один из фундаментальных законов природы — периодический закон химических элементов и на его основе создал периодическую таблицу химических элементов. Исправил значения атомных весов многих элементов, предсказал существование и свойства новых. Предсказал существование критической температуры.

Менделеев объединил известные нам законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака и Шарля с законом Авогадро. Уравнение, связывающее все эти законы, называется ***уравнением Менделеева — Клапейрона*** и записывается так:

$$PV=\frac{m}{\mu}RT, \qquad (2.14)$$

здесь $m/\mu=\nu$ — число молей.

Уравнение Менделеева — Клапейрона для смеси газов:

$$PV=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}+\ldots\frac{m_n}{\mu_n}\right)RT. \qquad (2.15)$$

---

[1] Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (1799–1864) — французский физик и инженер. Известен работами по термодинамике.

Основные выводы

Давление на поверхность — это отношение силы ΔF к площади поверхности ΔS: $P = \Delta F/\Delta S$.

Давление атмосферы на поверхности Земли $P_{\text{атм}} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Н/м^2.

Идеальный газ, заключенный в сосуд объемом V, оказывает на стенки сосуда давление P, удовлетворяющее соотношению

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m\left\langle v_{\text{кв}}^2 \right\rangle}{2}.$$

В кинетической теории дается связь абсолютной температуры T идеального газа с кинетической энергией:

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m\left\langle v_{\text{кв}}^2 \right\rangle}{2}.$$

Из этих двух формул можно получить уравнение состояния идеального газа (Менделеева — Клапейрона):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Температуру можно измерять высотой столба идеального газа при постоянном давлении или давлением в постоянном объеме идеального газа.

Можно доказать, что температуры двух тел, находящихся достаточно долго в контакте друг с другом, являются одинаковыми. Это утверждение называется нулевым законом термодинамики.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?
2. Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры известны?
3. Как объяснить закон Бойля — Мариотта с точки зрения молекулярно-кинетической теории? Какими за-

конами описываются изобарные и изохорные процессы? Перечислите основные законы идеальных газов.

4. Каков физический смысл числа Авогадро? Числа Лошмидта?
5. При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?
6. В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа, термодинамической температуры?
7. В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?
8. Приведите уравнения состояния идеального газа.
9. Почему динамическое описание системы многих частиц неосуществимо с технической, непригодно с теоретической и бесполезно с практической точек зрения?
10. В чем (в общих чертах) состоит термодинамический метод описания системы многих частиц?
11. Как глубоко нужно нырнуть в озеро, чтобы давление на 50% превысило давление на поверхности?
12. Оцените давление и температуру в центре Юпитера. Его масса $1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг, радиус $7{,}2 \cdot 10^{4}$ км.
13. Частица массой m и скоростью v падает на стенку под углом 30°, как показано на рисунке 1. Она отскакивает с той же скоростью так же под углом 30°. Насколько изменится импульс частицы? Какой импульс получит стенка?

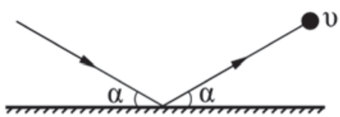


Рис. 1

14. В ящике объемом V имеется N частиц, причем средняя кинетическая энергия одной частицы равна $E_к$. Найдите следующие величины, записав ответ через V, N, $E_к$ и k:
   а) полную кинетическую энергию системы;
   б) температуру системы;
   в) давление системы;

г) что произойдет с давлением и температурой, если удвоить объем системы, соединив ящик с другим пустым ящиком такого же объема?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1.1. ***Температура Солнца.*** Физические формулы обладают замечательным свойством. Иногда с их помощью можно сделать то, что невозможно сделать при помощи измерительных приборов. Например, формулы позволяют «не вставая с мягкого кресла», «взвесить» Солнце, Землю и другие планеты (т. е. определить их массы), «измерить» давление в центре Земли и вычислить значения других физических величин, которые недоступны прямым измерениям. Покажем, как можно вычислить температуру Солнца.

Решение. Солнце — газовый шар, состоящий главным образом из атомов водорода и гелия. Средняя кинетическая энергия $\langle E_к \rangle$ одного атома вещества, находящегося в газообразном состоянии согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы пропорциональна абсолютной температуре T:

$$E_к = \frac{3}{2}kT.$$

N есть число атомов в газе, следовательно, его средняя кинетическая энергия будет равна:

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2}kTN.$$

Пусть m — средняя масса атома солнечного вещества. Тогда число атомов

$$N = \frac{M}{m},$$

где M — масса Солнца.

Среднюю потенциальную энергию шарообразного скопления частиц, притягивающихся друг к другу гравитационными силами, можно оценить по формуле

$$\langle E_п \rangle = -\frac{3\gamma M^2}{5R}.$$

Применяя теорему $\langle E_к \rangle = -\frac{1}{2}\langle E_п \rangle$, придем к уравнению, из которого найдем среднее значение абсолютной температуры Солнца

$$T = \frac{\gamma m M}{5kR}.$$

Если смотреть на Солнце с Земли, то его радиус будет виден под некоторым углом α, который нетрудно измерить. Так как расстояние a до Солнца известно, его радиус можно вычислить по формуле $R = a\sin\alpha$. Вычисления дают значение $R \approx 7 \cdot 10^8$ м. Среднюю массу одного атома солнечного вещества принимают равной примерно удвоенной массе протона, т. е. $m = 3 \cdot 10^{-27}$ кг. Подстановка в формулу значений известных величин дает среднюю температуру Солнца $T \approx 10^7$ К.

Приведенные оценки показывают, как много можно узнать о мире, наблюдая его из удобного кресла и понимая законы природы.

Задача 2.1.2. ***Домкрат.*** Пусть автомобиль поднимается гидравлическим домкратом, состоящим из двух соединенных трубкой цилиндров с поршнями (рис. 2.1). Диаметр большого цилиндра равен 1 м, а диаметр малого — 10 см. Автомобиль имеет вес F_2. Найдем силу давления на поршень малого цилиндра, необходимую для подъема автомобиля.

Решение. Поскольку оба поршня являются стенками одного и того же сосуда, то в соответствии с законом Паскаля они испытывают одинаковое давление. Пусть $P_1 = F_1/S_1$ — давление на малый поршень, а $P_2 = F_2/S_2$ — давление на большой поршень. Тогда, так как $P_1 = P_2$, имеем

$$F_1/S_1 = F_2/S_2.$$

Отсюда $F_1 = F_2(S_1/S_2) = 0{,}01F_2$.

Таким образом, для подъема автомобиля достаточно давить на малый поршень с силой, составляющей лишь 1% веса автомобиля.

Задача 2.1.3. Определить **размер молекулы воды**. Масса одного моля воды $m = 18 \cdot 10^{-3}$ кг, объем — $V_\mu = 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль.

Решение. Допустим, что молекулы воды плотно прилегают друг к другу и образуют кубическую ячейку. Тогда объем, занимаемый молекулой $V_0 = d^3$, а линейный размер молекулы $d = \sqrt[3]{V_0}$. Для этого объем моля разделим на число Авогадро:

$$V_0 = V_\mu / \mathrm{N_A} = 18 \cdot 10^{-6} / 6{,}02 \cdot 10^{23} \approx 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Отсюда линейный размер молекулы $d = \sqrt[3]{V_0} \approx 0{,}3$ нм.

Ответ: $d \approx 0{,}3$ нм.

Задача 2.1.4. Вы читали произведение ***Рэя Бредбери***[1] «451° по Фаренгейту»? Получите соответствующее значение температуры по шкале Цельсия. Что происходит при этой температуре? При какой температуре показания по шкалам Фаренгейта и Цельсия одинаковы?

Решение. Используя рисунок 2.4, а так же соотношение (2.8), можно найти, что 451°F соответствует 233°C. При этой температуре происходит самовозгорание бумаги. Показания по шкалам Фаренгейта и Цельсия одинаковы при температуре −40°: −40°C = −40°F.

Задача 2.1.5. В сообщающуюся трубку с водой площадью сечения $S = 1$ см² долили: в левую — масло объемом $V_1 = 30$ мл, а в правую — керосин объемом $V_2 = 25$ мл. Определить разность установившихся уровней воды в трубках, если плотность масла $\rho_1 = 0{,}9$ г/см³, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8$ г/см³, плотность воды $\rho_3 = 1$ г/см³.

Дано:
$S = 10^{-4}$ м
$V_1 = 30 \cdot 10^{-6}$ м³
$V_2 = 25 \cdot 10^{-6}$ м³
$\rho_1 = 900$ кг/м³
$\rho_2 = 800$ кг/м³
$\rho_3 = 1000$ кг/м³

x — ?

Решение. Рассмотрим давление на уровне A (уровне воды в левом сосуде):

$$P_\text{л} = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g (V_1/S).$$

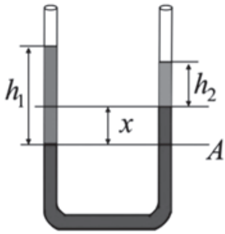
Давление в правом сосуде:

$$P_\text{п} = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g x = \rho_2 g (V_2/S) + \rho_3 g x.$$

В сообщающихся сосудах давление в точках на одной горизонтали одинаково. Следовательно,

$$\rho_1 g (V_1/S) = \rho_2 g (V_2/S) + \rho_3 g x,$$

[1] Брэдбери Рэй Дуглас (1920–2012) — выдающийся американский писатель-фантаст.



отсюда разность установившихся уровней воды:

$$x = \frac{\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{S\rho_3},$$

$$[x] = \left[\frac{(\text{кг}/\text{м}^3)\cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot (\text{кг}/\text{м}^3)}\right] = \text{м},$$

$$x = \frac{900\cdot 30\cdot 10^{-6} - 800\cdot 25\cdot 10^{-6}}{10^{-4}\cdot 10^3} = 7\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Ответ: $x = 7\cdot 10^{-2}$ м.

Задача 2.1.6. Объем газа при адиабатическом расширении увеличился в два раза, а температура уменьшалась в 1,32 раза. Найти число степеней свободы молекулы этого газа.

Дано:
$V_2/V_1 = 2$
$T_1/T_2 = 1{,}32$

i — ?

Решение. Показатель адиабаты равен $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$. Запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Исходя из условий задачи, получим

$$2^{\gamma-1} = 1{,}32$$

или

$$\left(\frac{i+2}{i} - 1\right)\ln 2 = \ln 1{,}32,$$

$$\frac{i+2-i}{i} = \frac{2}{i} = \frac{\ln 1{,}32}{\ln 2} = 0{,}4.$$

Из этого следует, что $i = 5$.

Ответ: $i = 5$.

Задача 2.1.7. В баллон емкостью 110 л помещено $m_1 = 0{,}8$ г водорода и $m_2 = 1{,}6$ г кислорода. Определить давление смеси на стенки сосуда, если температура окружающей среды $t = 27$°C.

Дано:
$V = 110 \cdot 10^{-3}$ м^3
$m_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг
$m_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг
$T = 273 + 27 = 300$ К

$P_{см}$ — ?

Решение. Согласно закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$P_{см} = P_1 + P_2.$$

Из уравнения (2.13) Менделеева — Клапейрона найдем P_1 — парциальное давление водорода:

$$P_1 = \frac{m_1}{V_{\mu_1}} RT \qquad (1)$$

и P_2 — парциальное давление кислорода:

$$P_2 = \frac{m_2}{V_{\mu_2}} RT. \qquad (2)$$

Молярные массы водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, кислорода — $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Используя уравнения (1) и (2), получим:

$$P_{см} = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right),$$

$$[P] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К} \cdot \frac{1}{\text{м}^3} \cdot \text{моль}\right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right] = \text{Па}.$$

Произведем вычисления:

$$P_{см} = \frac{8{,}31 \cdot 300}{110 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}}\right) = 1{,}02 \cdot 10^4.$$

Ответ: $P_{см} = 1{,}02 \cdot 10^4$ Па.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.1.1. Найти молярную массу μ смеси кислорода массой $m_1 = 25$ г и азота массой $m_2 = 75$ г.

Ответ: $\mu_{см} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 / \mu_1 + m_1 / \mu_1} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2.1.2. В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $P_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона был израсходован гелий массой $m = 10$ г, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Ответ: $P_2 = \dfrac{T_2}{T_1}P_1 - \dfrac{m\,RT_2}{M\,V} = 3{,}64 \cdot 10^5$ Па.

Задача 2.1.3. Найти молярную массу μ серной кислоты H_2SO_4.

Ответ: $\mu = \mu_r k = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (μ_r — относительная молекулярная масса; $k = 10^{-3}$ кг/моль).

Задача 2.1.4. Определить массу m_1 молекулы: 1) углекислого газа; 2) поваренной соли.

Ответ: $m_1 = \mu_r k/\mathrm{N_A}$; 1) $m_1 = 7{,}31 \cdot 10^{-26}$ кг; 2) $m_1 = 9{,}7 \cdot 10^{-26}$ кг.

Задача 2.1.5. В сосуде вместимостью $V = 2$ л находится кислород, количество вещества ν которого равно 0,2 моль. Определить плотность ρ газа.

Ответ: $\rho = \mu_r k\nu/V = 3{,}2$ кг/м^3 (μ_r — относительная молекулярная масса; $k = 10^{-3}$ кг/моль).

Задача 2.1.6. Кислород при нормальных условиях заполняет сосуд вместимостью $V = 11{,}2$ л. Определить количество вещества ν и его массу m.

Ответ: $\nu = V/V_m = 0{,}5$ моль; $m = \mu_r k\nu = 16$ г.

Задача 2.1.7. Определить количество вещества ν водорода, заполняющего сосуд вместимостью $V = 3$ л, если плотность газа $\rho = 6{,}65 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\nu = \rho V/\mu = 9{,}97 \cdot 10^{-3}$ моль.

Задача 2.1.8. Колба вместимостью $V = 0{,}5$ л содержит газ при нормальных условиях. Определить число N молекул газа, находящихся в колбе.

Ответ: $N = \mathrm{N_A} V/V_m = 1{,}34 \cdot 10^{22}$ ($V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль — молярный объем идеального газа при нормальных условиях).

Задача 2.1.9. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится однородный газ, количество вещества $\nu = 0{,}2$ моль. Определить, какой это газ, если его плотность $\rho = 1{,}12$ кг/м^3.

Ответ: азот, так как $\mu_r = \rho V/(k\nu) = 28$.

Задача 2.1.10*. Одна треть молекул азота массой $m = 10$ г распалась на атомы. Определить полное число N частиц, находящихся в газе.

Ответ: $N = \dfrac{4m}{3\mu} \mathrm{N_A} = 2{,}87 \cdot 10^{20}$.

Задача 2.1.11*. Определить среднее расстояние $\langle l \rangle$ между центрами молекул водяных паров при нормальных условиях и сравнить его с диаметром d самих молекул ($d = 0{,}311$ нм).

Ответ: $\dfrac{\langle l \rangle}{d} = \sqrt[3]{V_m \rho / \mu} = 10{,}7$.

Задача 2.1.12*. В цилиндр длиной $l = 1{,}6$ м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении P_0, начали медленно вдвигать поршень площадью $S = 200$ см^2. Определить силу F, которая будет воздействовать на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1 = 10$ см от дна цилиндра.

Ответ: $F = (l/h)PS = 32{,}3$ кН.

Задача 2.1.13*. Колба вместимостью $V = 300$ см^2, закрытая пробкой с краном, содержит разряженный воздух. Для измерения давления в колбе горлышко колбы погрузили в воду на незначительную глубину и открыли кран, в результате чего в колбу вошла вода массой $m = 292$ г. Определить первоначальное давление P в колбе, если атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа.

Ответ: $P = P_0\left(1 - \dfrac{m}{\rho V}\right) = 2{,}67$ кПа.

Задача 2.1.14. В баллоне содержится газ при температуре $t_1 = 100$°С. До какой температуры t_2 нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

Ответ: $t_2 = \dfrac{P_2}{P_1}(t_1 + T_0) - T_0 = 473$°С.

Задача 2.1.15. В оболочке сферического аэростата находится газ объемом $V = 1500$ м^3, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько изменится подъемная сила аэростата, если газ в аэростате нагреть от $T_0=273$ К до $T=293$ К? Давление газа в оболочке и окружающего воздуха постоянны и равны нормальному атмосферному давлению.

Ответ: $\Delta F = \dfrac{\rho_0 g V\left(T - T_0\right)}{T_0} = 1{,}39\,\text{кН}.$

2.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.2.1. СКОРОСТИ ГАЗОВЫХ МОЛЕКУЛ. ОПЫТ ШТЕРНА

В середине XIX в. была сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но тогда не было никаких доказательств существования самих молекул. Вся теория базировалась на предположении о движении молекул, но как измерить скорость их движения, если они невидимы? Размеры молекул и атомов очень малы, например размер атома золота $d=0{,}26$ нм (1 нм$=10^{-9}$ м; приставка нано- образована от *греч.* nanos — карлик). С помощью современного электронного микроскопа с разрешением 0,12 нм при увеличении в 7 млн раз видны ряды атомов, находящихся друг от друга на расстоянии 0,24 нм.

Теоретики позапрошлого века первыми нашли выход. Из уравнения молекулярно-кинетической теории газов известно, что

$$\frac{m\left\langle v_{\text{кв}}^2\right\rangle}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где m — масса молекулы. Отсюда ***среднеквадратичная скорость*** равна:

$$\left\langle v_{\text{кв}}\right\rangle = \sqrt{3kT/m}. \qquad (2.16)$$

Получена формула для расчета среднеквадратичной скорости, но масса молекулы m неизвестна. Запишем по-другому значение $\langle v\rangle_{\text{кв}}$:

$$\left\langle v_{\text{кв}}\right\rangle = \sqrt{\frac{3k\mathrm{N_A}T}{m\mathrm{N_A}}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (2.17)$$

Известно, что $P = RT(\rho/\mu)$, тогда

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{(3P)/\rho}, \qquad (2.18)$$

где P — давление; ρ — плотность. Это уже измеряемые величины.

Например, при плотности азота, равной 1,25 кг/м^3, при $t = 0°$С и $P = 1$ атм скорости молекул азота $v_{N_2} = 500$ м/с, водорода $v_{N_2} = 2000$ м/с.

При этом интересно отметить, что скорость звука в газе близка к скорости молекул в этом газе $v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma(P/\rho)}$, где γ — показатель адиабаты. Это объясняется тем, что звуковые волны переносятся молекулами газа.

Проверка того факта, что *атомы и молекулы идеальных газов в термически равновесном пучке имеют различные скорости*, была осуществлена немецким физиком Отто Штерном[1] в 1920 г. Схема его установки приведена на рисунке 2.9.

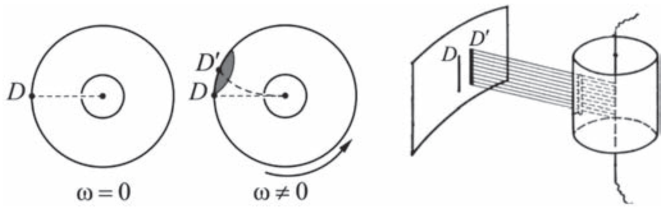


Рис. 2.9
Схема установки О. Штерна для измерения скорости газовых молекул

Платиновая нить A, покрытая снаружи серебром, располагается вдоль оси коаксиальных цилиндров S_1, S_3. Внутри цилиндров поддерживается низкое давление порядка 10^{-3}–10^{-4} Па. При пропускании тока через платиновую нить она разогревается до температуры выше точки плавления серебра (961,9°С). Серебро испаряется, и его атомы через узкие щели в цилиндре S_1 и диафрагме S_2 летят к охлаждаемой поверхности цилиндра S_3, на которой они осаждаются. Если цилиндры S_1, S_3 и диафрагма не

[1] Штерн Отто (1888–1969) — немецкий физик, лауреат Нобелевской премии по физике. Открыл спин электрона.

вращаются, то пучок осаждается в виде узкой полоски D на поверхности цилиндра S_3. Если же вся система приводится во вращение с угловой скоростью $\omega \cong 2\pi\ 50$ рад/с, то изображение щели смещается в точку D' и становится расплывчатым.

Температура нити в опытах Штерна равнялась 1200°C, что соответствует среднеквадратичной скорости $v_{кв} = 584$ м/с. В эксперименте для этой величины получилось значение от 560 до 640 м/с. Кроме того, изображение щели D' всегда оказывалось размытым, что указывало на то, что атомы Ag движутся с различными скоростями.

В дальнейшем предложенная Штерном методика использовалась многими учеными для изучения распределения атомов по скоростям (например, опыт Ламмерта[1] в 1929 г.).

Таким образом, опытным путем были не только измерены скорости газовых молекул, но и показано, что они имеют большой разброс по скоростям. Причина — в хаотичности теплового движения молекул. Еще в XIX в. Дж. Максвелл утверждал, что молекулы, беспорядочно сталкиваясь друг с другом, как-то «распределяются» по скоростям, причем вполне определенным образом.

2.2.2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

С точки зрения атомно-молекулярного строения вещества величины, встречающиеся в макроскопической физике, имеют смысл средних значений, которые принимают некоторые функции от микроскопических переменных системы. Величины такого рода называются статистическими. Примерами таких величин являются давление, температура, плотность и др. Наличие большого числа сталкивающихся атомов и молекул обусловливает важные закономерности в поведении статистических переменных, не свойственные отдельным атомам и молекулам. Такие закономерности называются вероятностными, или статистическими.

---

[1] Ламмерт — физик, который в 1929 г. провел опыт для подтверждения распределения Максвелла.

Пусть имеется совокупность очень большого числа n одинаковых молекул, находящихся в равновесном состоянии. Предположим, что некоторая величина x, характеризующая молекулу, может принимать ряд дискретных значений:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i.$$

Если бы удалось измерить одновременно значение величины x у всех n молекул, то оказалось бы, что у всех n_1 молекул величина x имеет значение x_1, у n_2 молекул — значение x_2, у n_i молекул — значение x_i и т. д.

Математическое определение вероятности: ***вероятность*** *какого-либо события — это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев при бесконечном увеличении последних*:

$$W_i = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}.$$

Здесь n_i — число случаев, когда событие произошло, а n — общее число опытов. Отсюда следует, что W может принимать значения от нуля до единицы: $0 \le W \le 1$.

Очевидно, что $\sum n_i = n$, поэтому сумма вероятностей всех возможных значений величины n_i равна единице (***условие нормировки вероятности***):

$$\sum W_i = \sum n_i / n = 1. \tag{2.19}$$

Теорема о сложении вероятностей: $W = \sum W_i$.

Среднее значение величины $\langle x \rangle$ по результатам произведенных измерений определяется как отношение суммы всех полученных значений x_i к числу измерений n:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.20}$$

В пределе, при $n \to \infty$, среднее значение величины можно найти по формуле

$$\langle x \rangle = \sum W_i x_i. \tag{2.21}$$

Если значения одной из величин x не зависят от того, какое значение имеет другая y, то эти величины называются ***статистически независимыми***. Вероятность одновременного появления статистически независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$W(x, y) = W(x) \cdot W(y). \qquad (2.22)$$

Это ***теорема об умножении вероятностей***.

Задача статистической физики заключается в отыскании функции распределения случайной величины и вычислении ее среднего значения. Совпадение экспериментальных и теоретических средних значений является критерием правильности теории исследуемого явления.

Функция распределения вероятности

Определение распределения молекул по скоростям вовсе не значит, что нужно определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью. Ибо число молекул, приходящихся на долю каждого значения скорости, равно нулю. Вопрос нужно поставить так: *сколько молекул обладают скоростями, лежащими в интервале, включающем заданную скорость*? Так всегда ставятся статистические задачи.

Например: на переписи населения, когда указывается возраст 18 лет — это не значит, что 18 лет 0 часов 0 минут. Эта цифра свидетельствует, что возраст лежит в интервале от 18 до 19 лет.

Итак, молекулы движутся хаотически. Среди них есть и очень быстрые, и очень медленные. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений молекулы определенным образом распределяются по скоростям. Это распределение оказывается однозначным и единственно возможным, и не только не противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено. Мы будем искать число частиц (Δn), скорости которых лежат в определенном интервале значения скорости Δv (от v до $v + \Delta v$). То есть Δn — *число благоприятных молекул*, попавших в этот интервал.

Очевидно, что в единице объема число таких благоприятных молекул тем больше, чем больше Δv.

Ясно также, что Δn должно быть пропорционально концентрации молекул (n). Число Δn зависит и от самой скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости число молекул будет различным. Смысл сказанного легко понять из простого примера: неодинаково число людей в возрасте от 20 до 21 года и от 90 до 91 года. Таким образом,

$$\Delta n = f(v) n \Delta v,$$

где $f(v)$ — **функция распределения** молекул по скоростям.

Перейдя к пределу, получим, что число молекул, попавших в интервал скоростей от v до $v + \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}n = f(v) n \mathrm{d}v. \tag{2.23}$$

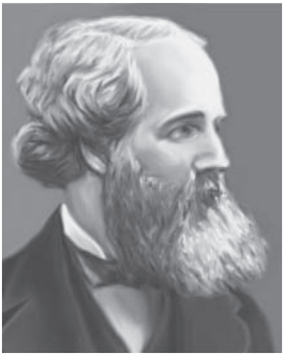
Физический смысл $f(v)$ в том, что это отношение числа молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, к общему числу молекул в единичном интервале скоростей:

$$f(v) = \mathrm{d}n/n. \tag{2.24}$$

Таким образом, $f(v)$ *имеет смысл* ***вероятности***, т. е. показывает, какова *вероятность* любой молекулы газа в единице объема иметь скорость, заключенную в единичном интервале, включающем заданную скорость v. В данном случае $f(v)$ называют ***плотностью вероятности***.

2.2.3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Пусть имеется n тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. После каждого акта столкновения между молекулами их скорости меняются случайным образом. В результате невообразимо большого числа столкновений устанавливается стационарное равновесное состояние, когда число молекул в заданном интервале скоростей сохраняется постоянным.



Максвелл Джеймс Клерк (1831–1879) — английский физик. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статике, оптике, механике, теории упругости. Установил статистический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям. Самым большим достижением Максвелла является теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений, выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений.

В результате каждого столкновения проекции скорости молекулы испытывают случайное изменение на Δv_x, Δv_y, Δv_z, причем изменения каждой проекции скорости независимы друг от друга. Будем предполагать, что силовые поля на частицы не действуют. Найдем в этих условиях, какое число частиц $\mathrm{d}n$ из общего числа n имеет скорость в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$. При этом мы не можем ничего определенного сказать о точном значении скорости той или иной частицы v_i, поскольку за столкновениями и движениями каждой из молекул невозможно проследить ни в опыте, ни в теории. Такая детальная информация вряд ли имела бы практическую ценность.

Распределение молекул идеального газа по скоростям впервые было получено знаменитым английским ученым Дж. Максвеллом в 1860 г. с помощью методов теории вероятностей.

Подробное обсуждение и вывод формулы функции распределения молекул по скоростям есть в учебнике Б. В. Бондарева и др. (Кн. 3)[1].

Воспользуемся результатами этого вывода.

Скорость — векторная величина. Для ***проекции скорости на ось x*** (x-й составляющей скорости) из (2.23) имеем

$$\mathrm{d}n_x = f(v_x) n \mathrm{d}v_x.$$

[1] См. в библиографическом списке.

Тогда из (2.24)

$$f(v_x) = \frac{\mathrm{d}n_x}{n\mathrm{d}v_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) = \\ = A_1 \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \tag{2.25}$$

где A_1 — постоянная, равная $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}$.

Графическое изображение функции показано на рисунке 2.10. Видно, что доля молекул со скоростью $v_x=0$ не равна нулю. При $v_x=0$ $f(v_x)=A_1$ (в этом физический смысл постоянной A_1).

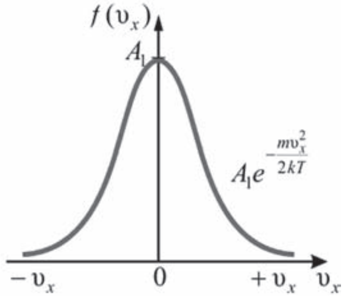


Рис. 2.10
Графическое изображение распределения молекул газа по x-компонентам скорости

Приведенное выражение и график справедливы для *распределения молекул газа по x-компонентам скорости*. Очевидно, что и по y- и z-компонентам скорости также можно получить:

$$\frac{\mathrm{d}n_y}{n\mathrm{d}v_y} = A_1 \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) \text{ и } \frac{\mathrm{d}n_z}{n\mathrm{d}v_z} = A_1 \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

Вероятность того, что скорость молекулы одновременно удовлетворяет трем условиям: x-компонента скорости лежит в интервале от v_x до $v_x + \mathrm{d}v_x$, y-компонента — в интервале от v_y до $v_y + \mathrm{d}v_y$, z-компонента — в интервале от v_z до $v_z + \mathrm{d}v_z$, будет равна *произведению вероятностей каждого из условий (событий) в отдельности* (см. (2.22)):

$$\frac{\mathrm{d}n_{xyz}}{n} = A_1^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kt}\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z,$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, или

$$dn_{xyz} = \frac{n}{\pi^{3/2}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z. \qquad (2.26)$$

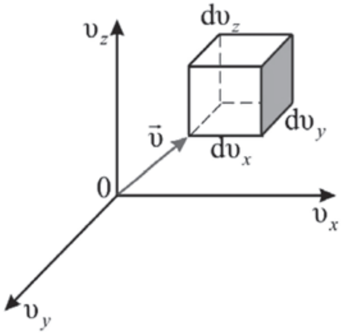


Рис. 2.11
К определению числа молекул в объеме $dV = dv_x dv_y dv_z$

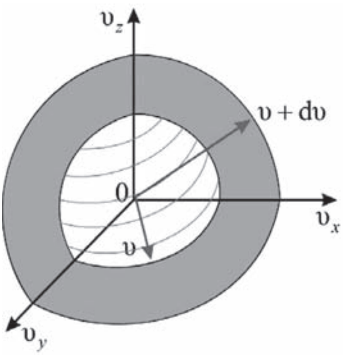


Рис. 2.12
Молекулы, оказавшиеся в шаровом слое радиусом v и толщиной dv

Формуле (2.26) можно дать геометрическое истолкование: dn_{xyz} — это число молекул в параллелепипеде со сторонами dv_x, dv_y, dv_z, т. е. в объеме $dV = dv_x dv_y dv_z$ (рис. 2.11), находящемся на расстоянии $\vec{v}$ от начала координат в пространстве скоростей.

Эта величина (dn_{xyz}) не может зависеть от направления вектора скорости $\vec{v}$. Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, т. е. по абсолютному значению скорости.

Если собрать вместе все молекулы в единице объема, скорости которых заключены в интервале от v до $v + dv$ по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в шаровом слое толщиной dv и радиусом v (рис. 2.12). Этот *шаровой слой* складывается из тех параллелепипедов, о которых говорилось выше.

Объем этого шарового слоя $dV = 4\pi v^2 dv$.

Общее число молекул в слое, как следует из (2.26):

$$dn = \frac{n}{\pi^{3/2}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dV.$$

Отсюда следует ***закон распределения молекул по абсолютным значениям скоростей, выведенный Максвеллом***:

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2\mathrm{d}\upsilon, \qquad (2.27)$$

где $\mathrm{d}n/n$ — доля всех частиц в шаровом слое объема $\mathrm{d}V$, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + \mathrm{d}\upsilon$.

При $\mathrm{d}V=1$ получаем ***плотность вероятности***, или ***функцию распределения Максвелла***, ***характеризующую распределение молекул по скоростям***:

$$f(\upsilon) = \frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}\upsilon} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2\mathrm{d}\upsilon. \qquad (2.28)$$

Эта функция обозначает долю молекул единичного объема газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость.

Обозначим:

$$A = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2},$$

тогда из (2.28) получим окончательное выражение ***функции распределения Максвелла*** (рис. 2.13):

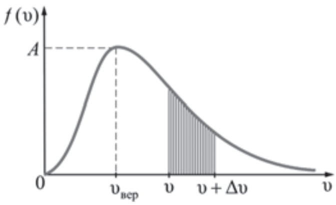


Рис. 2.13
График функции распределения Максвелла, показывающий среднее число молекул $f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon$, имеющих скорости от υ до $\upsilon + \mathrm{d}\upsilon$

$$f(\upsilon) = A\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2. \qquad (2.29)$$

Из графика видно, что при «малых» скоростях от 0 до $\upsilon_{\text{вер}}$ функция $f(\upsilon) \sim \upsilon^2$ монотонно возрастает. Затем при значении скорости $\upsilon_{\text{вер}}$, которую называют *наиболее вероятной скоростью*, функция достигает максимума A и далее экспоненциально спадает, стремясь к нулю при $\upsilon \to \infty$. Поэтому кривая несимметрична относительно максимума.

Функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки (2.19):

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1.$$

Зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа

На рисунке 2.14 показано, что при увеличении массы молекул ($m_1 > m_2 > m_3$) и при уменьшении температуры ($T_1 < T_2 < T_3$) максимум функции распределения Максвелла смещается влево, в сторону уменьшения скоростей.

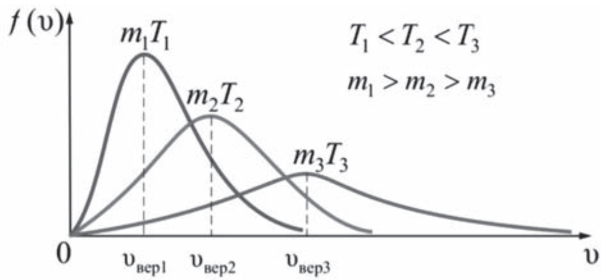


Рис. 2.14
Максвелловское распределение скоростей молекул, имеющих разные массы и температуры

Площадь под кривой — величина постоянная, равная единице ($f(v)$=const=1), поэтому важно знать, как будет изменяться положение максимума кривой:

$$f(v) \sim \sqrt{m / T},$$

кроме того

$$v \sim \sqrt{T / m}.$$

Выводы:

- вид распределения молекул газа по скоростям для каждого газа зависит от рода газа (m) и от параметра состояния (T). Давление P и объем газа V на распределение молекул не влияют;

- в показателе степени функции $f(v)$ (2.29) стоит отношение $\frac{mv^2}{2kT}$, т. е. кинетической энергии, соответствующей данной скорости v, к kT — средней энергии теплового движения молекул при данной температуре. Значит, ***распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии*** (т. е. показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии);
- максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. ***Закон статистический*** и выполняется тем лучше, чем больше число молекул.

Рассмотрим пределы применимости классического описания распределения частиц по скоростям. Для этого, так же как и в п. 2.1.1, воспользуемся соотношением неопределенностей Гейзенберга[1]. Согласно этому соотношению координаты и импульс частицы не могут одновременно иметь определенное значение. Классическое описание возможно, если выполнены условия:

$$\Delta x \Delta p_x \gg \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \gg \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \gg \hbar.$$

Здесь постоянная Планка $\hbar$ — фундаментальная константа, определяющая масштаб квантовых (микроскопических) процессов.

Таким образом, если частица находится в объеме $\Delta x \Delta y \Delta z \gg \hbar^3/p^3$, то в этом случае возможно описание ее движения на основе законов классической механики.

2.2.4. СРЕДНИЕ СКОРОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим, как изменяется с абсолютной величиной скорости число частиц, приходящихся на единичный интервал скоростей, при единичной концентрации частиц.

---

[1] Гейзенберг Вернер Карл (1901–1976) — немецкий физик, один из создателей матричной квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике.

Из графика функции распределения Максвелла, приведенного на рисунке 2.15, видно, что ***наиболее вероятная скорость*** — *скорость, на которую приходится максимум зависимости*

$$f(v) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2.$$

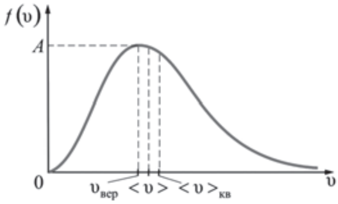


Рис. 2.15
Наиболее вероятная, среднеарифметическая и среднеквадратичная скорости газовых молекул: $\langle v\rangle/v_{\text{вер}}=1{,}13$; $\langle v\rangle_{\text{кв}}/v_{\text{вер}}=1{,}22$

Найдем *наиболее вероятную скорость* одной молекулы из условия равенства нулю производной:

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right] = 2v\left(1-\frac{mv^2}{2kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0.$$

Значение скорости v, при котором выражение в скобках равно нулю, и есть ***наиболее вероятная скорость одной молекулы***:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{2kT/m}. \qquad (2.30)$$

Для одного моля газа наиболее вероятная скорость

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2k\mathrm{N_A}T}{m\mathrm{N_A}}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \qquad (2.31)$$

Среднюю квадратичную скорость для одной молекулы и для одного моля газа найдем, используя соотношение $m\langle v^2\rangle_{\text{кв}}/2 = 3/2kT$:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m} \quad \text{и} \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{3RT/\mu}. \qquad (2.32)$$

Среднюю арифметическую скорость найдем, используя (2.20):

$$\langle v\rangle = \frac{1}{n}\int_0^\infty v n f(v)\mathrm{d}v,$$

где $nf(v)\mathrm{d}v = \mathrm{d}n$ — число молекул со скоростью от v до $v + v\mathrm{d}$. Если подставить сюда $f(v)$ и вычислить, то получим:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2{,}25kT}{m}} \text{ — для одной молекулы;} \quad (2.33)$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2{,}25RT}{\mu}} \text{ — для одного моля газа.} \quad (2.34)$$

Формула Максвелла для относительных скоростей

Для решения многих задач удобно использовать формулу Максвелла, где скорость выражена в относительных единицах.

Относительную скорость обозначим через $u = v/v_{\text{вер}}$.

Тогда из (2.28) получим распределение Максвелла в приведенном виде:

$$f(u) = \frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2. \quad (2.35)$$

Это уравнение универсальное. *В таком виде* ***функция распределения*** *не зависит ни от рода газа, ни от температуры.*

2.2.5. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим еще один очень важный закон.

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом слоев газа, лежащих выше. Пусть P — давление на высоте h, а $P + \mathrm{d}P$ — на высоте $h + \mathrm{d}h$ (рис. 2.16).

Причем $\mathrm{d}h > 0$, а $\mathrm{d}P < 0$, так как на большей высоте давление меньше. Разность давления $P - (P + \mathrm{d}P)$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра с площадью основания, равной единице, и высотой $\mathrm{d}h$.

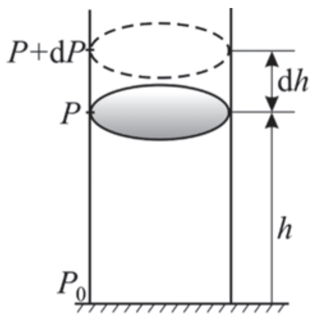


Рис. 2.16
К выводу барометрической формулы

Так как по закону Паскаля $P=\rho gh$, где $\rho=\dfrac{P\mu}{RT}$ — плотность газа на высоте h, медленно убывающая с высотой, то можно записать: $P-(P+\mathrm{d}P)=\rho g\mathrm{d}h$. Отсюда

$$\mathrm{d}P=-\frac{\mu gP}{RT}\mathrm{d}h \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}P}{P}=-\frac{\mu g}{RT}\mathrm{d}h.$$

Возьмем интеграл от полученного выражения:

$$\int\limits_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}P}{P}=-\frac{\mu g}{RT}\int\limits_0^h \mathrm{d}h, \ln P=-\frac{\mu gh}{RT}+\ln C.$$

В силу произвольности постоянной C примем, что $C=P_0$ — давление на высоте $h=0$. Отсюда, после потенцирования, получаем ***барометрическую формулу***, показывающую зависимость атмосферного давления от высоты:

$$P=P_0\exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right). \qquad (2.36)$$

В авиации эта формула используется для определения высоты полета:

$$h=\frac{RT\ln P_0/P}{\mu g}.$$

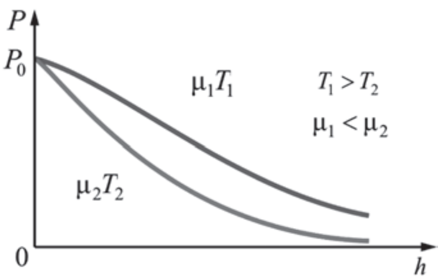


Рис. 2.17
Давление как функция высоты в гравитационном поле Земли при разных молярных массах и температурах

Из барометрической формулы следует, что *давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ* (чем больше μ) *и чем ниже температура*. Например, на больших высотах концентрация легких газов He и H_2 гораздо больше, чем у поверхности Земли (рис. 2.17).

2.2.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Распределение Больцмана определяет распределение частиц в силовом поле в условиях теплового равновесия.

Пусть идеальный газ находится в поле консервативных сил в условиях теплового равновесия. При этом концентрация газа будет различной в точках с различной потенциальной энергией, что необходимо для соблюдения условий механического равновесия. Так, число молекул в единичном объеме n убывает с удалением от поверхности Земли, и давление, в силу соотношения $P=nkT$, падает.

Если известно число молекул в единичном объеме, то известно и давление, и наоборот. Давление и плотность пропорциональны друг другу, поскольку температура в нашем случае постоянна. Давление с уменьшением высоты должно возрастать, потому что нижнему слою приходится выдерживать вес всех расположенных сверху атомов.

Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $P=nkT$, заменим P и P_0 в барометрической формуле (2.36) на n и n_0 и получим ***распределение Больцмана*** для молярной массы газа:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \tag{2.37}$$

где n_0 и n — число молекул в единичном объеме на высоте $h=0$ и h.

Так как $\mu=m\mathrm{N_A}$, а $R=\mathrm{N_A}k$, то (2.37) можно представить в виде

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \tag{2.38}$$

С уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, убывает. При $T=0$ тепловое движение прекращается, все молекулы располагаются на земной поверхности. При высоких температурах, наоборот, молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой. Так как mgh — это потенциальная энергия $E_п$, то на разных высотах $E_п=mgh$ — различна. Следовательно, (2.38) характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии (рис. 2.18):

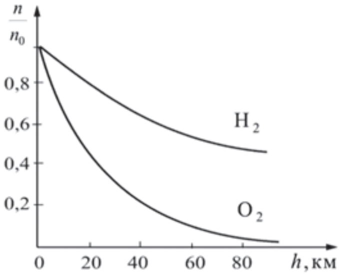


Рис. 2.18
Зависимость концентрации молекул H_2 и O_2 от высоты

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_п}{kT}\right) \qquad (2.39)$$

— это закон распределения частиц по потенциальным энергиям.

Из показанной на рисунке 2.18 зависимости концентрации различных газов от высоты видно, что число более тяжелых молекул с высотой убывает быстрее, чем легких.

Из (2.39) можно получить отношение концентраций молекул в точках с $E_{п1}$ и $E_{п2}$:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{E_{п1} - E_{п2}}{kT}\right). \qquad (2.40)$$

Больцман доказал, что соотношение (2.39) справедливо не только в потенциальном поле сил гравитации, но и в любом потенциальном поле, для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

2.2.7. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА — БОЛЬЦМАНА*

В п. 2.2.3 мы получили выражение для распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$\mathrm{d}n(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \mathrm{d}v.$$

Из этого выражения легко *найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии* $E_к$. Для этого перейдем от переменной v к переменной $E_к = \frac{mv^2}{2}$:

$$\mathrm{d}n(E_к) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E_к^{1/2} \exp\left(-\frac{E_к}{kT}\right)\mathrm{d}E_к = nf(E_к)\mathrm{d}E_к,$$

где $\mathrm{d}n(E_к)$ — число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от $E_к$ до $E_к + dE_к$. Отсюда получим ***функцию распределения молекул по энергиям теплового движения***:

$$f(E_к) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E_к^{1/2} \exp\left(-\frac{E_к}{kT}\right). \tag{2.41}$$

Средняя кинетическая энергия $\langle E_к \rangle$ молекулы идеального газа в соответствии с формулой (2.22):

$$\langle E_к \rangle = \int_0^\infty E_к f(E_к) dE_к = \frac{3}{2}kT.$$

То есть получаем результат, совпадающий с прежним результатом, полученным в п. 2.1.3.

Итак, закон Максвелла дает распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана — распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в единый ***закон Максвелла — Больцмана***:

$$\mathrm{d}n = n_0 A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right). \tag{2.42}$$

Здесь $E = E_п + E_к$ — полная энергия.

В последнем выражении потенциальная и кинетическая энергии, а следовательно, и полная энергия E, могут принимать непрерывный ряд значений. Если же энергия частицы может принимать лишь дискретный ряд значений E_1, E_2..., то в этом случае распределение примет вид

$$N_i = AN \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \tag{2.43}$$

где N_i — число частиц, находящихся в состоянии с энергией E_i, а A — коэффициент пропорциональности, который должен удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{N} N_i = A \sum_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) = N,$$

где N — полное число частиц в рассматриваемой системе.

2.2.8. КВАНТОВЫЕ ГАЗЫ*

Многие микроскопические частицы (элементарные частицы, ядра, атомы, молекулы) обладают некоторым внутренним строением, которое может изменяться. Множество различных внутренних состояний любой микрочастицы является конечным. Внутреннее состояние таких частиц характеризуется *спиновым квантовым числом* s. Все частицы, изучаемые в квантовой механике, по величине квантового числа делятся на два класса — ***фермионы*** и ***бозоны***.

Для бозонов величина s принимает *целые значения* ($s=1, 2, 3, \ldots$). Например, фотоны, атом гелия и т. п.

Для фермионов спиновое число принимает полуцелые значения ($s=1/2,\ 3/2, \ldots$). Например, электроны, протоны, нейтроны и т. п.

Итак, если у нас имеется термодинамическая система, состоящая из N частиц, энергии которых могут принимать дискретные значения $E_1, E_2, \ldots, E_n$, то говорят о системе квантовых чисел.

Поведение такой системы описывается *квантовой статистикой*, в основе которой лежит *принцип неразличимости тождественных частиц*. Основная задача этой статистики состоит в определении среднего числа $\langle N_i \rangle$ частиц, находящихся в ячейке фазового пространства: «координаты — проекции импульса» (x, y, z и p_x, p_y, p_z) частиц. При этом имеют место два закона распределения частиц по энергиям (две статистики: Ферми[1] — Дирака[2] и Бозе[3] — Эйнштейна).

---

[1] Ферми Энрико (1901–1954) — выдающийся итальянский физик, внесший большой вклад в развитие современной теоретической и экспериментальной физики, один из основоположников квантовой физики. Иностранный член АН СССР.

[2] Дирак Поль Адриен Морис (1902–1984) — английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике.

[3] Шатьендранат Бозе, или Бошу (1894–1974) — индийский физик, специализировавшийся в математической физике. Один из создателей квантовой механики, статистики, теории конденсата Бозе — Эйнштейна.

Распределение Ферми — Дирака:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) + 1}. \tag{2.44}$$

Функция Ферми — Дирака описывает квантовые частицы с полуцелым спином (фермионы). График этой функции показан на рисунке 2.19.

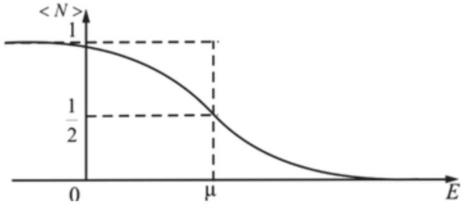


Рис. 2.19
Функция Ферми — Дирака. При $E_i = \mu$ $\langle N \rangle = 1/2$

Температура T и химический потенциал μ являются характеристикой всей макроскопической системы частиц, находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

Распределение Бозе — Эйнштейна:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) - 1}. \tag{2.45}$$

Функция Бозе — Эйнштейна описывает квантовые частицы с целым спином (бозоны).

Из формул (2.44) и (2.45) видно, что среднее число частиц (фермионов или бозонов) в одном квантовом состоянии зависит от энергии частицы в этом состоянии.

Распределение Ферми — Дирака, так же как и распределение Бозе — Эйнштейна, переходит в распределение Максвелла — Больцмана (2.42) в случае, когда среднее число частиц, приходящееся на одно квантовое состояние, достаточно мало.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Сравните скорости движения газовых молекул со скоростью звука.
2. Каковы результаты, физический смысл опыта Штерна?
3. Дайте понятие вероятности события.

4. Каков физический смысл функции распределения молекул по скоростям?
5. Каков физический смысл плотности вероятности распределения молекул по скоростям?
6. Проанализируйте график функции распределения молекул по скоростям.
7. Как определяется наиболее вероятная скорость? Средняя скорость? Среднеарифметическая скорость?
8. Приведите формулу Максвелла для относительных скоростей.
9. Приведите зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа.
10. Каков физический смысл распределения молекул по энергиям?
11. Как, зная функцию распределения молекул по скоростям, перейти к функции распределения по энергиям?
12. Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?
13. Приведите барометрическую формулу.
14. В чем суть распределения Больцмана?
15. Каков физический смысл закона Максвелла — Больцмана?
16. Приведите распределение Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака.
17. Какие частицы называются бозонами и фермионами?
18. Найдите среднюю квадратичную $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, среднюю арифметическую $\langle v \rangle$ и наиболее вероятную $v_{\text{в}}$ скорости молекул водорода. Вычисления выполните для трех значений температуры:
    1) $T = 20$ К;
    2) $T = 300$ К;
    3) $T = 5000$ К.
19. Какова вероятность W того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от $1/2v_{\text{в}}$ не более чем на 1%?
20. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м?

21. Температура воздуха $T=300$ К. Определите силу F, действующую на частицу, находящуюся во внешнем однородном поле силы тяжести, если отношение $n1/n2$ концентраций частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta h=1$ м, равное e. Температуру T считать везде одинаковой и равной 300 К.
22. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.2.1. Азот находится под давлением $P=1$ атм при температуре $T=300$ К. Найти относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей от $\langle v\rangle$ до $\langle v\rangle + \mathrm{d}v$, где $\mathrm{d}v=1$ м/с. Внешние силы отсутствуют.

Дано:
$P=105$ Па
$T=300$ К
$\mathrm{d}v=1$ м/с

$\mathrm{d}N/N$ — ?

Решение. При давлении $P=1$ атм и температуре $T=300$ К азот можно считать идеальным газом. В отсутствие внешних сил молекулы идеального газа подчиняются закону распределения Максвелла:

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right).$$

Таким образом, относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в заданном интервале, можно определить по формуле

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v. \qquad (1)$$

Выражение (1) справедливо, если интервал скоростей $\mathrm{d}v$ столь мал, что изменением функции распределения $f(v)$ на этом интервале скоростей можно пренебречь, считая ее приближенно постоянной. В нашем случае интервал $\mathrm{d}v=1$ м/с мал по сравнению со значением средней арифметической скорости:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \approx 475\,\text{м/с}. \qquad (2)$$

Подставив в уравнение (1) значение средней арифметической скорости (2), получаем решение задачи в общем виде:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{m_0}{\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{4}{\pi}\right)\mathrm{d}v. \qquad (3)$$

Масса молекулы азота находится по формуле

$$m_0 = \mu/\mathrm{N_A}.$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим

$$\mathrm{d}N/N = 1{,}9\cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $\mathrm{d}N/N = 0{,}19\%$.

Задача 2.2.2. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $P = 80$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту полета h неизменной. Однако температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1$ К. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $P_0 = 100$ кПа.

Дано:
$P_0 = 10^5$ Па
$P = 8\cdot 10^8$ Па
$\Delta T = 1$ К
$\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль

Δh — ?

Решение. Используем барометрическую формулу:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right).$$

Барометр в самолете может показывать неизменное давление P при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится на различных высотах h_1 и h_2. Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right),\quad P = P_0 \exp\left(\frac{\mu g h_2}{RT_2}\right). \qquad (1)$$

Найдем отношение давлений P_0/P в уравнениях (1), и обе части полученных равенств прологарифмируем:

$$\ln\frac{P_0}{P}=\frac{\mu g h_1}{RT_1},\ \ \ln\frac{P_0}{P}=\frac{\mu g h_2}{RT_2}. \qquad (2)$$

Из соотношений (2) выразим высоту h_1 и h_2, и найдем их разность:

$$\Delta h=h_2-h_1=\frac{R\ln(P_0\,/\,P)}{\mu g}\Delta T,$$

$$[\Delta h]=\left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}\right]=\left[\frac{\text{Дж}}{\text{Н}}\right]=\text{м},$$

$$\Delta h=\frac{8{,}3\cdot\ln(10^5\,/\,8\cdot10^4)}{29\cdot10^{-3}\cdot10}\cdot1=6{,}5\,\text{м}.$$

Ответ: $\Delta h = 6{,}5$ м.

Задача 2.2.3. Используя функцию распределения молекул по энергиям, определите наиболее вероятное значение энергии $E_\text{в}$.

Решение. Функция распределения молекул по энергиям, или плотность вероятности:

$$F(E)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{(kT)^{3/2}}E^{1/2}. \qquad (1)$$

При $E=E_\text{в}$, $F(E)=F(E_{\max})$ и $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}F_{(E=E_\text{в})}}=0$.

Дифференцируем (1), подставляем $E=E_\text{в}$ и, приравняв полученное выражение к нулю, определим $E_\text{в}$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E}=\frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^{3/2}}}\left(E^{1/2}\cdot\left(-\frac{1}{kT}\right)\cdot e^{-\frac{E}{kT}}+e^{-\frac{E}{kT}}\cdot\frac{1}{2}E^{-1/2}\right)e^{-\frac{E_\text{в}}{kT}}\times$$

$$\times\left(-\frac{\sqrt{E_\text{в}}}{kT}+\frac{1}{2\sqrt{E_\text{в}}}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{E_\text{в}}}-\frac{\sqrt{E_\text{в}}}{kT}=0,\ \frac{1}{2\sqrt{E_\text{в}}}=\frac{\sqrt{E_\text{в}}}{kT};\ kT=2E_\text{в};\ E_\text{в}=\frac{1}{2}kT.$$

Ответ: $E_\text{в}=\dfrac{1}{2}kT$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.2.1*. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью ω. Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации n частиц массой m, находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния r от оси вращения.

Ответ: $n = n_0 \exp(m\omega^2 r^2/2kT)$.

Задача 2.2.2. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу наиболее вероятной скорости $v_\text{в}$.

Ответ: $v_\text{в} = \sqrt{2kT/m}$.

Задача 2.2.3. Используя функцию распределения молекул по скоростям, получить функцию, выражающую распределение молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_\text{в}$).

Ответ: $f(u) = (4/\sqrt{\pi})u^2 \exp(-u^2)$.

Задача 2.2.4. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу, определяющую долю ω молекул, скорости v которых много меньше наиболее вероятной скорости $v_\text{в}$.

Ответ: $\omega = \dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2} v^3$.

Задача 2.2.5. Зная функцию распределения молекул по скоростям, определить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул.

Ответ: $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$.

Задача 2.2.6. По функции распределения молекул по скоростям определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_\text{кв} \rangle$.

Ответ: $\langle v_\text{кв} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}$.

Задача 2.2.7. Распределение молекул по скоростям в молекулярных пучках при эффузивном истечении отличается от максвелловского и имеет вид $f(v)\mathrm{d}v = Cv^3\exp(-mv^2/(2kT))v^3\mathrm{d}v$. Определить из условия нормировки коэффициент C.

Ответ: $C = \dfrac{m^2}{2k^2T^2}$.

Задача 2.2.8. Зная функцию распределения молекул по скоростям в некотором молекулярном пучке $f(v) = \dfrac{m^2}{2k^2T^2}\exp\dfrac{-mv^2}{2kT}v^3$, найти выражение: 1) для наиболее вероятной скорости $v_в$; 2) для средней арифметической скорости $\langle v\rangle$.

Ответ: $v_в = \sqrt{3kT/m}$; $\langle v\rangle = \sqrt{\pi kT/(8m)}$.

Задача 2.2.9. Вывести формулу наиболее вероятного импульса $p_в$ молекул идеального газа.

Ответ: $p_в = \sqrt{2mkT}$.

Задача 2.2.10. Найти выражение для импульса молекул идеального газа, энергии которых равны наиболее вероятному значению энергии.

Ответ: $p = \sqrt{2mkT}$.

Задача 2.2.11. Найти выражение средней кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ поступательного движения молекул. Функцию распределения молекул по энергиям считать известной.

Ответ: $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{3}{2}kT$.

Задача 2.2.12. Используя функцию распределения молекул по энергиям, определить наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$.

Ответ: $\varepsilon_в = \dfrac{1}{2}kT$.

Задача 2.2.13. Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $P = 90$ кПа. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывает давление $P_0 = 100$ кПа? Считайте, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

Ответ: $h = \dfrac{RT \cdot \ln \dfrac{P_0}{P}}{\mu g} 885$ м.

Задача 2.2.14. При каком значении скорости v пересекаются кривые распределения Максвелла для температур T_1 и $T_2 = 2T_1$? Исследуйте, сколько точек пересечения имеют данные кривые.

Ответ: $v = \sqrt{1{,}5 \ln v_{\text{вер}2}}$.

Задача 2.2.15. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты z, если при $z = 0$ давление $P = P_0$, а температура изменяется с высотой как $T = T_0\ (1 + \alpha z)$, где α — положительная постоянная.

Ответ: $P = P_0/(1 + \alpha z)^n$.

Задача 2.2.16. Во сколько раз надо сжать адиабатически газ, состоящий из одноатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость увеличилась в $\eta = 2$ раза.

Ответ: 8 раз.

Задача 2.2.17*. Наиболее вероятные скорости молекул смеси водорода и гелия отличаются друг от друга на $\Delta v = 20$ м/с. Какова при этом «температура» газов? Проанализировать ответ.

Ответ: $T = \dfrac{mN(\Delta v^2)}{2K\left(1 - \sqrt{mN / m_0}\right)^2} = 5{,}4$ К.

Задача 2.2.18. Определить температуру газа, для которой средняя квадратичная скорость молекул водорода больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 400$ м/с.

Ответ: $T = \dfrac{m(\Delta v)^2}{K\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = 330$ К.

Задача 2.2.19*. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при $h=0$ давление $P=P_0$, а температура изменяется с высотой как $T=T_0\,(1-ah)$.

Ответ: $P=P_0(1-ah)^n$, где $n=\dfrac{Mg}{aRT_0}$.

Задача 2.2.20*. В пучке частиц скорости имеют одно направление и лежат в интервале $(v,\ v+\Delta v)$. Масса частицы m. Определите скорость частиц после прохождения области, где на расстоянии L вдоль направления движения на частицы действовала сила F.

Ответ: $$v_{\min}=v\sqrt{1+2Fl/mv^2};$$
$$v_{\max}=v_{\min}+\Delta v\sqrt{1+2Fl/mv^2}.$$

2.3. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

2.3.1. ЧИСЛО СТОЛКНОВЕНИЙ И СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ В ГАЗАХ

Из п. 2.2.1 известно, что молекулы в газе движутся со скоростью звука, примерно с такой же скоростью движется пуля. Однако, находясь в противоположном конце комнаты, запах разлитой пахучей жидкости мы почувствуем через сравнительно большой промежуток времени. Это происходит потому, что молекулы движутся хаотически, сталкиваются друг с другом, траектория движения у них ломаная.

Пусть λ_i — длина свободного пробега молекулы (рис. 2.20).

Расстояние, проходимое молекулой в среднем без столкновений, называется ***средней длиной свободного пробега*** $\langle\lambda\rangle$.

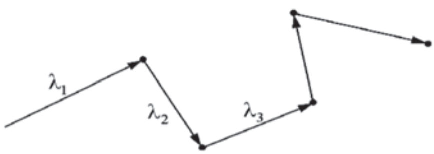


Рис. 2.20
К нахождению средней длины свободного пробега молекул в газе

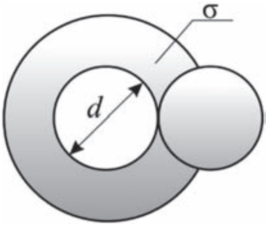


Рис. 2.21
Эффективное сечение молекулы:

$\sigma=\pi d^2$ — площадь, в которую не может проникнуть центр любой другой молекулы. Здесь $d=2r$ — диаметр молекулы.

Средняя длина свободного пробега молекулы $\langle\lambda\rangle=\langle v\rangle\langle\tau\rangle$, где $\langle v\rangle$ — средняя скорость теплового движения, $\langle\tau\rangle$ — среднее время между двумя столкновениями.

Пусть σ — ***эффективное сечение*** молекулы, т. е. ***полное поперечное сечение рассеяния***, характеризующее столкновение между двумя молекулами (рис. 2.21).

За одну секунду молекула проходит путь, равный средней арифметической скорости $\langle v\rangle$. За ту же секунду молекула претерпевает $\langle\nu\rangle$ столкновений. Следовательно,

$$\langle\lambda\rangle=\frac{\langle v\rangle}{\langle\nu\rangle}. \qquad (2.46)$$

Подсчитаем ***среднее число столкновений*** $\langle\nu\rangle$.

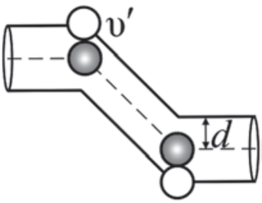


Рис. 2.22
К определению среднего числа столкновений $\langle\nu\rangle$

Вероятность столкновения трех и более молекул бесконечно мала.

Предположим, что все молекулы застыли, кроме одной. Ее траектория будет представлять собой ломаную линию. Столкновения будут только с теми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра радиусом d (рис. 2.22).

Путь, который пройдет молекула за одну секунду, равен длине цилиндра $\langle v'\rangle$. Умножим объем цилиндра $\langle v'\rangle\sigma$ на число молекул в единице объема n, получим среднее число столкновений в одну секунду:

$$\langle\nu\rangle=\pi d^2\langle v'\rangle n.$$

На самом деле, все молекулы движутся (и в стороны, и навстречу друг другу), поэтому число соударений определяется средней скоростью движения молекул относительно друг друга.

По закону сложения случайных величин

$$\langle v' \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle + \langle v^2 \rangle} = \sqrt{2\langle v^2 \rangle} = \langle v \rangle \sqrt{2}.$$

Из формулы для определения средней длины $\langle \lambda \rangle$ (2.46) получим

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}. \qquad (2.47)$$

Уравнение состояния идеального газа $P = nkT$ позволяет нам выразить n через давление P и термодинамическую температуру T. Тогда

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma P}. \qquad (2.48)$$

Таким образом, при заданной температуре *средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению* P:

$$\langle \lambda \rangle \sim 1/P.$$

Например, при $d = 3\text{Å} = 3 \cdot 10^{-10}$ м, $P = 1$ атм, $T = 300$ K средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle = 10^{-7}$ м, тогда при $\langle v \rangle = 10^3$ м/с среднее число столкновений в секунду $\langle \nu \rangle = 10^3/10^{-7} = 10^{10}$.

2.3.2. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

Особые *необратимые* процессы, возникающие в термодинамически неравновесных системах, называются явлениями *переноса*. К ним относятся ***диффузия*** (перенос массы); ***теплопроводность*** (перенос энергии) и ***вязкость,*** или ***внутреннее трение*** (перенос импульса).

Диффузия (от *лат.* diffusio — распространение, растекание) — *взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц вещества*. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему. Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах. Наиболее быстро диффузия происходит в газах, медленнее — в жидкостях, еще медленнее — в твердых телах, что обусловлено характером движения частиц в этих средах.

Для газа диффузия — это распределение молекул примеси от источника (или взаимная диффузия газа).

Диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации и подчиняется ***закону Фика***[1]:

$$J=-D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

или

$$J=-D\mathrm{grad}n.$$

Знак «−» в уравнении Фика показывает, *что диффузионный поток направлен в сторону уменьшения концентрации*. При этом ***коэффициент диффузии*** D *численно равен диффузионному потоку через единицу площади в единицу времени* при $\mathrm{grad}n=1$.

Согласно кинетической теории газов ***коэффициент диффузии*** D равен:

$$D=\frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle.$$

Так как $\langle\lambda\rangle=\dfrac{kT}{\sqrt{2}\sigma P}$, а $\langle v\rangle\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$, получаем, что коэффициент диффузии $D\sim T^{3/2}/\left(P\sqrt{\mu}\right)$. Таким образом, с увеличением температуры диффузия в газах ускоряется, с ростом давления — замедляется. Диффузия в газах с тяжелыми молекулами протекает медленнее.

Измеряется коэффициент диффузии в $\text{м}^2/\text{с}$.

***Внутреннее трение* (*вязкость*)** возникает между слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с разными по модулю скоростями. Если какое-либо тело движется в газе, то оно сталкивается с молекулами газа и сообщает им импульс. В то же время тело будет испытывать соударения со стороны молекул газа и получать собственный импульс, но направленный в противоположную сторону. Газ ускоряется, тело тормозится, т. е. на тело действуют силы трения. Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися с разными скоростями.

---

[1] Фик Адольф (1829–1901) — выдающийся немецкий физиолог.

Таким образом, причиной внутреннего трения в газах является перенос импульса из одного слоя в другой. Сила трения пропорциональна градиенту скорости и подчиняется ***закону Ньютона*** для вязкого трения:

$$f = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

или

$$f = -\eta\,\mathrm{grad}\,\vec{v}.$$

Здесь η — ***коэффициент динамической вязкости***, зависящий от плотности газа ρ:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle nm = D\rho.$$

Коэффициент вязкости η численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости, равном единице.

Коэффициент вязкости газов растет с повышением температуры пропорционально $\sqrt{T}$. Измеряется коэффициент вязкости в Па·с.

Теплопроводностью *называется явление переноса внутренней энергии из одного слоя газа в другой.* Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен тепла. Благодаря хаотическому движению молекулы в соседних слоях будут перемешиваться и их средние энергии будут выравниваться. Происходит перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным слоям. ***Тепловой поток*** q пропорционален градиенту температуры и подчиняется ***закону Фурье***[1]:

$$q = -\chi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

или

$$q = -\chi\,\mathrm{grad}\,T.$$

Кинетическая теория газов дает для ***коэффициента теплопроводности*** χ следующее выражение:

---

[1] Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) — французский математик и физик.

$$\chi = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle n\frac{i}{2}k$$

или

$$\chi = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle\rho C_{\text{уд}},$$

где $C_{\text{уд}}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме; i — число степеней свободы.

Анализ данного выражения показывает, что с увеличением температуры теплопроводность газа возрастает и не зависит от давления.

Измеряется коэффициент теплопроводности в Дж/м·с·К.

2.3.3. ДИФФУЗИЯ ГАЗОВ. ВЫВОД ЗАКОНА ФИКА*

Итак, диффузия — *взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга*. Для газа — это распределение молекул примеси от источника в направлении уменьшения концентрации вещества.

Решаем одномерную задачу. Пусть в газе присутствует примесь с концентрацией n в точке с координатой x. Концентрация примеси зависит от координаты x (рис. 2.23).

Градиент концентрации в общем случае равен:

$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\vec{k}.$$

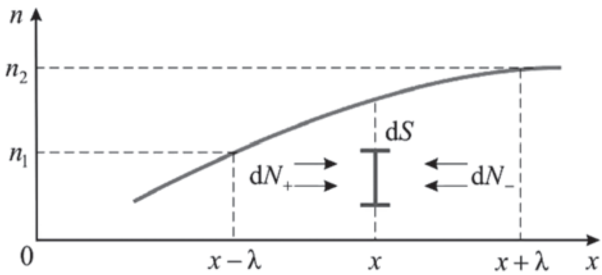


Рис. 2.23
К выводу закона Фика для диффузии газов:
диффузионный поток направлен в сторону уменьшения концентрации.

Так как у нас одномерная задача, то $\operatorname{grad} n = \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$.

При наличии $\operatorname{grad} n$ хаотическое движение будет более направленным и возникнет поток молекул примеси, направленный от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией. Найдем этот поток.

Пусть в плоскости с координатой x находится единичная площадка $\mathrm{d}S$, перпендикулярная оси x. Подсчитаем число молекул, проходящих через площадку в направлении слева направо $\mathrm{d}N_+$ и справа налево $\mathrm{d}N_-$ за время $\mathrm{d}t$ (рис. 2.23):

$$\mathrm{d}N_+ = \frac{1}{6} n_1 \langle v \rangle \mathrm{d}S \mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}N_- = \frac{1}{6} n_2 \langle v \rangle \mathrm{d}S \mathrm{d}t,$$

где n_1 — концентрация молекул слева от площадки, а n_2 — концентрация молекул справа от площадки $\mathrm{d}S$. Тогда

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N_+ - \mathrm{d}N_-.$$

Результирующий диффузионный поток через единицу площади в единицу времени:

$$J = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t} = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\langle v \rangle,$$

$$J = -\frac{1}{3}\langle \lambda \rangle \langle v \rangle \frac{n_2 - n_1}{2\langle \lambda \rangle},$$

но $n_2 - n_1 = \mathrm{d}n$; $2\langle\lambda\rangle = \mathrm{d}x$, из этого следует, что

$$\frac{n_2 - n_1}{2\langle \lambda \rangle} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}.$$

Обозначим: $D = \dfrac{1}{3}\langle \lambda \rangle \langle v \rangle$ — ***коэффициент диффузии***. Тогда ***диффузионный поток*** будет равен:

$$J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

или

$$J = -D \operatorname{grad} n.$$

Это выражение называется ***законом Фика*** и показывает, что диффузионный поток направлен в сторону уменьшения концентрации.

Следует отметить, что закон Фика справедлив не только для процесса взаимного проникновения одного газа в другой, но так же хорошо описывает диффузию частиц в жидкостях и твердых телах.

2.3.4. ВЫВОД ЗАКОНА НЬЮТОНА ДЛЯ СИЛЫ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ*

Рассмотрим еще одну систему координат: v от x (рис. 2.24).

Пусть в покоящемся газе вверх, перпендикулярно оси x, движется пластинка со скоростью v_0, причем $v_0 \ll v$ (v — скорость теплового движения молекул). Пластинка увлекает за собой прилегающий слой газа, тот слой — соседний и т. д. Весь газ делится как бы на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они от пластинки. Раз слои газа движутся с разными скоростями, возникает трение. Выясним причину трения в газе.

Каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях: тепловом и направленном.

Так как направление теплового движения хаотически меняется, то вектор тепловой скорости в среднем равен нулю, $\langle \vec{v} \rangle = 0$. При направленном движении вся совокупность молекул будет дрейфовать с постоянной скоростью v. Таким образом, средний импульс отдельной мо-

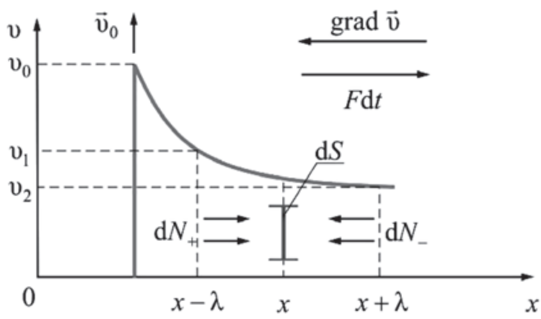


Рис. 2.24
К выводу уравнения вязкости Ньютона

лекулы массой m в слое определяется только дрейфовой скоростью v:

$$p_0 = mv.$$

Но так как молекулы участвуют в тепловом движении, они будут переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочный импульс, который будет определяться молекулами того слоя, куда перешла молекула. *Перемешивание молекул разных слоев приводит к выравниванию дрейфовых скоростей разных слоев, что и проявляется макроскопически как* ***действие сил трения между слоями.***

Вернемся к рисунку 2.24 и рассмотрим элементарную площадку $\mathrm{d}S$ перпендикулярно оси x. Через эту площадку за время $\mathrm{d}t$ влево и вправо переходят потоки молекул:

$$\mathrm{d}N_+ = \mathrm{d}N_- = \frac{1}{6} n\langle v\rangle \mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

Но эти потоки переносят разный импульс: $m_0 v_1 \mathrm{d}N_+$ и $m_0 v_2 \mathrm{d}N_-$.

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоев. Это значит, что на каждый из этих слоев действует сила, равная изменению импульса. Сила эта есть не что иное, как ***сила трения*** между слоями газа, движущимися с различными скоростями. Отсюда и название — ***внутреннее трение (вязкость газов).***

Закон вязкости был открыт И. Ньютоном в 1687 г.

Переносимый за время $\mathrm{d}t$ импульс $\mathrm{d}(mv)$ равен:

$$\mathrm{d}(mv) = F\mathrm{d}t$$

или

$$F\mathrm{d}t = \frac{1}{6} n\langle v\rangle m(v_1 - v_2)\mathrm{d}S.$$

Отсюда получим силу, действующую на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$\frac{F}{\mathrm{d}S} = f = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle nm\left(\frac{v_1 - v_2}{2\langle\lambda\rangle}\right) = -\frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle nm\frac{v_2 - v_1}{2\langle\lambda\rangle}.$$

Так как $v_2 - v_1 = \mathrm{d}v$, а $2\langle\lambda\rangle = \mathrm{d}x$, сила трения будет равна:

$$f = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

или в общем виде

$$f = -\eta \,\mathrm{grad}\,\vec{v}.$$

Это выражение называется ***законом Ньютона*** для силы вязкого трения. Здесь η — ***коэффициент вязкости***, равный:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle nm = D\rho. \tag{2.49}$$

Физический смысл η в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости, равном единице.

2.3.5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ. ВЫВОД ЗАКОНА ФУРЬЕ*

Учение о теплопроводности начало развиваться в XVIII в. и получило свое завершение в работах французского ученого Ж. Фурье, опубликовавшего в 1822 г. книгу «Аналитическая теория теплоты».

Рассмотрим газ, заключенный между двумя параллельными стенками, имеющими разную температуру $T_а$ и $T_б$ (рис. 2.25). Итак, у нас имеется градиент температуры

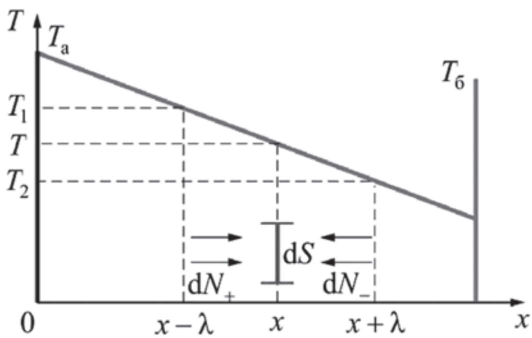


Рис. 2.25
К выводу закона Фурье для теплопроводности газов: тепловой поток направлен в сторону, противоположную градиенту температуры.

$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \neq 0\right)$, тогда через газ в направлении оси x будет идти поток тепла. Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа в другой, перенося с собой энергию. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию $E_{\text{к}} = \frac{m\langle v\rangle^2}{2} = \frac{i}{2}kT$, здесь i — число степеней свободы молекулы.

При подсчете потока тепла введем следующие упрощения:

- среднеарифметическая скорость теплового движения молекул $\langle v\rangle = \mathrm{const}$;
- концентрация молекул в соседних слоях одинакова (хотя на самом деле она различается, что дает ошибку $\approx 10\%$).

Снова вернемся к рисунку 2.25. Через площадку $\mathrm{d}S$ за время $\mathrm{d}t$ слева проходит $\mathrm{d}N_+ \frac{1}{6}\langle v\rangle n\mathrm{d}S\mathrm{d}t$ молекул. Средняя энергия этих молекул $E_{\text{к}}$ соответствует значению энергии в том месте, где они последний раз испытывают столкновение. Для одной молекулы газа:

$$E_{\text{к}1} = \frac{i}{2}kT_1.$$

Соответственно справа проходит $\mathrm{d}N_- = \frac{1}{6}n\langle v\rangle\mathrm{d}S\mathrm{d}t$ молекул.

Каждая из этих молекул перенесет энергию

$$E_{\text{к}2} = \frac{i}{2}kT_2.$$

Результирующий поток энергии через $\mathrm{d}S$ равен разности потоков $\mathrm{d}Q_+$ и $\mathrm{d}Q_-$, т. е.

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{6}n\langle v\rangle\mathrm{d}S\mathrm{d}t\frac{i}{2}k(T_1 - T_2).$$

Применяя те же рассуждения, получим: результирующий ***тепловой поток*** через единичную площадку в единицу времени равен q и направлен в сторону, противоположную направлению градиента:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t} = q = -\frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v_T\rangle n\frac{i}{2}k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},$$

$$q = -\chi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

или в общем виде

$$q = -\chi \mathrm{grad} T$$

— ***закон Ж. Фурье*** для теплопроводности.

Здесь χ — ***коэффициент теплопроводности***, равный:

$$\chi = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle n\frac{i}{2}k$$

или

$$\chi\frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle\rho C_{V\text{уд}},$$

где $C_{V\text{уд}}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

2.3.6. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА И ИХ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДАВЛЕНИЯ

Сопоставим уравнения переноса.

$$J = -D \mathrm{grad} n$$

или

$$J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

— закон Фика для диффузии.

Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle$.

$$f_{\text{тр}} = -\eta \mathrm{grad} v$$

или

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

— закон Ньютона для трения.

Коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle nm = D\rho$.

$$q = -\chi \operatorname{grad} T$$

или

$$q = -\chi \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

— закон Фурье для теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности $\chi = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle \rho C_{\text{уд}} = D\rho C_{\text{уд}}$.

Все законы кинетической теории газов были установлены опытно задолго до их обоснования молекулярно-кинетической теорией. Эта теория позволила установить, что внешнее сходство уравнений обусловлено общностью лежащего в их основе механизма перемешивания молекул в процессе их теплового хаотического движения.

Однако к концу XIX в., несмотря на блестящие успехи молекулярно-кинетической теории, ей недоставало твердой опоры — прямых экспериментов, доказывающих существование атомов и молекул. Это дало возможность некоторым философам, проповедовавшим субъективный идеализм, заявлять, что схожесть формул — это произвол ученых, упрощенное математическое описание явлений.

Все вышеуказанные коэффициенты переноса связаны между собой и все выводы молекулярно-кинетической теории подтверждены опытно.

Зависимость коэффициентов переноса от давления P

Скорость теплового движения молекул $v \sim \sqrt{T}$ и не зависит от давления P, а коэффициент диффузии $D \sim \langle\lambda\rangle$, следовательно, и зависимость D от P должна быть подобна зависимости $\langle\lambda\rangle \sim 1/P$. При обычных давлениях и в разреженных газах $D \sim 1/P$; в высоком вакууме $D = \text{const}$.

С ростом давления $\langle\lambda\rangle$ уменьшается и затрудняется диффузия.

В вакууме и при обычных давлениях плотность газа $\rho \sim P$, отсюда $\eta \sim P$ и $\chi \sim P$.

С увеличением P и ρ повышается число молекул, переносящих импульс из слоя в слой, но длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ уменьшается. Поэтому вязкость η и теплопроводность χ при высоких давлениях не зависят от P (η и χ — const). Все эти результаты подтверждены экспериментально.

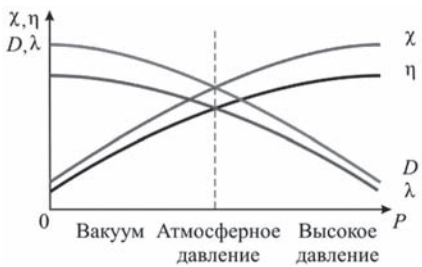


Рис. 2.26
Зависимость коэффициентов переноса и длины свободного пробега от давления

На рисунке 2.26 показаны качественные зависимости коэффициентов переноса и длины свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ от давления P. Эти зависимости широко используют в технике (например, при измерении вакуума). По численным значениям коэффициентов переноса можно приблизительно оценить среднюю длину свободного пробега молекул газа при различных условиях.

Молекулярное течение. Эффузия газов

Молекулярное течение — *течение газов в условиях вакуума*, т. е. когда молекулы не сталкиваются друг с другом.

В вакууме происходит передача импульса непосредственно стенкам сосуда, т. е. происходит трение газа о стенки сосуда. Трение перестает быть внутренним, и понятие вязкости теряет свой прежний смысл (как трение одного слоя газа о другой).

Течение газа в условиях вакуума через отверстие (под действием разности давлений) называется ***эффузией газа***.

Как при молекулярном течении, так и при эффузии, количество протекающего в единицу времени газа обратно пропорционально корню квадратному из молярной массы:

$$n \sim 1/\sqrt{\mu}. \quad (2.50)$$

Эту зависимость тоже широко используют в технике, например для разделения изотопов газа U^{235} (отделяют от U^{238}, используя газ UF_6).

2.3.7. ПОНЯТИЕ О ВАКУУМЕ

Газ называется ***разреженным****, если его плотность столь мала, что средняя длина свободного пробега молекул λ может быть сравнима с линейными размерами l сосуда, в котором находится газ.* Такое состояние газа называется ***вакуумом***.

Различают следующие степени вакуума: *сверхвысокий* ($\lambda \gg l$), *высокий* ($\lambda > l$), *средний* ($\lambda \approx l$) *и низкий вакуум*.

Свойства разреженных газов отличаются от свойств неразреженных газов. Это видно из таблицы 2.1, где приведены некоторые характеристики различных степеней вакуума.

Таблица 2.1

Характеристика	Вакуум			
	низкий	средний	высокий	сверхвысокий
	$\lambda < l$	$\lambda \approx l$	$\lambda > l$	$\lambda \gg l$
Давление в мм рт. ст.	760–1	$1–10^{-3}$	$10^{-3}–10^{-7}$	10^{-8} и менее
Число молекул в ед. объема (в $м^{-3}$)	$10^{25}–10^{22}$	$10^{22}–10^{19}$	$10^{19}–10^{13}$	10^{13} и менее
Зависимость от давления коэффициентов χ и η	не зависят от давления	определяются параметром $\frac{\lambda}{l}$	прямо пропорциональны давлению	теплопроводность и вязкость практически отсутствуют

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега. При достаточно большом разрежении столкновения между молекулами относительно редки, поэтому основную роль играют столкновения молекул со стенками сосуда.

В состоянии высокого вакуума уменьшение плотности разреженного газа приводит к соответствующей убыли частиц без изменения λ. Следовательно, уменьшается число носителей импульса или внутренней энергии в явлениях вязкости и теплопроводности. Коэффициенты переноса в этих явлениях прямо пропорциональны плотности газа. В сильно разреженных газах внутреннее трение, по существу, отсутствует.

Удельный тепловой поток в сильно разреженных газах пропорционален разности температур и плотности газа.

Стационарное состояние разреженного газа, находящегося в двух сосудах, соединенных узкой трубкой, возможно при *условии* равенства встречных потоков частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой: $n_1\langle v_1\rangle = n_2\langle v_2\rangle$, где n_1 и n_2 — число молекул в 1 см^3 в обоих сосудах; $\langle v_1\rangle$ и $\langle v_2\rangle$ — их средние арифметические скорости.

Если T_1 и T_2 — температуры газа в сосудах, то предыдущее условие стационарности можно переписать в виде уравнения, выражающего *эффект Кнудсена*[1]:

$$P_1 / P_2 = \sqrt{T_1 / T_2},$$

где P_1 и P_2 — давления разреженного газа в обоих сосудах.

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в технике, так как, например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях высокого вакуума. Для получения различных степеней разрежения применяются вакуумные насосы (рис. 2.27), позволяющие получить предварительное разрежение (форвакуум) до ≈0,13 Па, а также высоко-

[1] Кнудсен Мартин Ганс Христиан (1871–1949) — датский физик. Известен главным образом благодаря изучению молекулярного газового потока и разработке Knudsen cell, главного компонента молекулярно-лучевой эпитаксии.

Рис. 2.27
Современные вакуумные насосы:
слева — форвакуумный; справа — магниторазрядный высоковакуумный насос типа «НОРД».

вакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие получить давление до 13,3 мкПа — 1,33 пПа (10^{-7}–10^{-14} мм рт. ст.).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Перечислите явления переноса, происходящие в газах.
2. В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
3. Дайте определение средней длины свободного пробега.
4. Каков физический смысл эффективного сечения молекул?
5. Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
6. Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?
7. Объясните физическую сущность законов Фурье, Фика, Ньютона.
8. Каков физический смысл коэффициентов переноса?
9. Представьте графическую зависимость коэффициентов переноса от давления.
10. Что такое молекулярное течение, эффузия газов?
11. Дайте понятие о вакууме.
12. Дайте определение эффекта Кнудсена.

13. Найдите среднюю длину свободного пробега l молекул водорода при давлении $P = 0{,}1$ Па и температуре $T = 100$ К.
14. При каком давлении P средняя длина свободного пробега l молекул азота равна 1 м, если температура T газа равна 300 К?
15. Баллон вместимостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определите среднюю длину свободного пробега l молекул.
16. Средняя длина свободного пробега l атомов гелия при нормальных условиях равна 200 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.
17. Коэффициент диффузии D кислорода при температуре $T = 0$°C равен 0,19 см^2/с. Определите среднюю длину свободного пробега l молекул кислорода.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.3.1. Найти коэффициент диффузии и вязкость воздуха при давлении $P = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 10$°С. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 0{,}38 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение. Проведем решение для приближения идеального газа.

$$D = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} l.$$

Среднеарифметическая скорость молекул идеального газа:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Среднюю длину свободного пробега l рассчитаем из уравнения

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot P},$$

где эффективное сечение рассеяния молекул, $\sigma = \pi \cdot d^2$, равно площади круга с радиусом, равным эффективному диаметру молекулы.

Получим

$$D = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} = 1{,}45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Коэффициент вязкости можно рассчитать, выражая значения параметров через термодинамические величины, заданные в условии.

Или можно воспользоваться соотношением связи между коэффициентами в законах переноса: $D = \frac{\eta}{\rho}$.

Плотность газа ρ найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

по определению

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R \Rightarrow \rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

И наконец,

$$\eta = D \cdot \rho = D \cdot \frac{P\mu}{RT} = 1{,}45 \cdot \frac{101{,}3 \cdot 10^3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 283} = 1{,}75 \ \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}}.$$

Задача 2.3.2. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых давлениях и температурах. Найдите для этих газов отношения: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Дано:
$\mu_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $i_1 = 6$ $i_2 = 5$
D_1/D_2 — ? η_1/η_2 — ? χ_1/χ_2 — ?

Решение. Коэффициент диффузии:

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P}.$$

Так как диаметры молекул $\sigma_1 = \sigma_2$,

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 0{,}8.$$

Коэффициент динамической вязкости:

$$\eta=1/3\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\rho,$$

где $\rho=P\mu/(RT)$. Тогда

$$\eta=D\frac{P\mu}{RT},\quad \frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_2}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}=1{,}25.$$

Коэффициент теплопроводности:

$$\chi=1/3\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\rho C_V=\eta C_V,$$

где $C_V=\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ — удельная теплоемкость газа; i — число степеней свободы молекул. Из этого следует:

$$\chi=\eta C_V=\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\cdot\frac{i_1}{i_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{i_1}{i_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}=0{,}96.$$

Ответ: $D_1/D_2=0{,}8$; $\eta_1/\eta_2=1{,}25$; $\chi_1/\chi_2=0{,}96$.

Задача 2.3.3. При температуре 0°C и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $9{,}5\cdot10^{-8}$ м. Чему равно среднее число столкновений в 1 с молекул кислорода, если сосуд откачать до 0,01 первоначального давления? Температура останется неизменной.

Дано:
$T=273$ К
$\langle\lambda_1\rangle=9{,}5\cdot10^{-8}$ м
$P_2=0{,}01P_1$

$\langle z\rangle$ — ?

Решение. Среднее число столкновений в секунду молекул кислорода находится по формуле

$$\langle z\rangle=\frac{\langle v\rangle}{\lambda},\qquad(1)$$

где $\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$;

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.\qquad(2)$$

Запишем среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ для двух состояний. Для этого из формулы $P=nkT$ найдем среднее число молекул в единице объема n и подставим в уравнение (2):

$$\langle\lambda_1\rangle\frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P_1}, \qquad (3)$$

$$\langle\lambda_2\rangle\frac{kT_1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P_2}. \qquad (4)$$

Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим

$$\langle\lambda_1\rangle=\langle\lambda_2\rangle\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

Тогда по формуле (1) найдем

$$z=\frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}=\frac{\sqrt{8RT/(\pi\mu)}}{\langle\lambda_1\rangle(P_1/P_2)},$$

$$[z]=\left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\right]\cdot\left[\frac{\text{кг}/\text{моль}}{\text{м}}\right]^{-1/2}=\left[\frac{\sqrt{\text{Дж}/\text{кг}}}{\text{м}}\right]=\frac{1}{\text{с}}=\text{с}^{-1},$$

$$\langle z\rangle=\frac{\sqrt{\dfrac{8\cdot 8{,}3\cdot 273}{3{,}14\cdot 32\cdot 10^{-3}}}}{9{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 100}=4{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\langle z\rangle=4{,}5\cdot 10^{-7}$ с$^{-1}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.3.1. Найти зависимость средней длины свободного пробега $\langle l\rangle$ молекул идеального газа от давления P при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изотермическом. Изобразить эти зависимости на графиках.

Ответ: 1) не зависит; 2) $\langle l\rangle \sim 1/P$.

Задача 2.3.2. Найти зависимость средней длины свободного пробега $\langle l\rangle$ молекул идеального газа от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Ответ: 1) не зависит; 2) $\langle l\rangle \sim T$.

Задача 2.3.3. Определить зависимость коэффициента диффузии D от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном.

Ответ: 1) $D\sim\sqrt{T^3}$; 2) $D\sim\sqrt{T}$.

Задача 2.3.4. Определить зависимость динамической вязкости η от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном. Изобразить эти зависимости на графиках:

Ответ: 1) $\eta \sim \sqrt{T}$; 2) $\eta \sim \sqrt{T}$.

Задача 2.3.5. Найти зависимость теплопроводности λ от температуры T при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изобарном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Ответ: 1) $\lambda \sim \sqrt{T}$; 2) $\lambda \sim \sqrt{T}$.

Задача 2.3.6. Найти зависимость теплопроводности λ от давления P при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Ответ: 1) не зависит; 2) $\lambda \sim \sqrt{P}$.

Задача 2.3.7*. Самолет летит со скоростью $v = 360$ км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, $d_0 = 4$ см, найти касательную силу F_S, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул воздуха $d = 0{,}3$ нм. Температура воздуха $t = 0$°С.

Ответ: $F_S = \dfrac{F}{S} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\mu T}{R\pi}} \cdot \dfrac{k}{\pi d^2} \cdot \dfrac{v}{d_0} = 0{,}045\ \text{Н}/\text{м}^2$.

Задача 2.3.8*. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17°С, другая — при температуре 27°С. Определите количество теплоты, перешедшей за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальном давлении во все время опыта. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм. Температуру газа считать равной среднему арифметическому температур пластин $t = 22$°С.

Ответ: $Q = \dfrac{i}{3}\dfrac{k}{\pi d^2}\sqrt{\dfrac{RT}{\pi\mu}} \cdot \dfrac{(t_2 - t_1)}{\Delta x}\text{St} = 76{,}4$ Дж.

3. ТЕРМОДИНАМИКА

3.1. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И ТЕПЛОТА

3.1.1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И ТЕПЛОТА

Наряду с механической энергией любое тело (или система) обладает *внутренней энергией*. Внутренняя энергия — энергия покоя. Она складывается из теплового хаотического движения *молекул*, составляющих тело, потенциальной энергии *их взаимного* расположения, кинетической и потенциальной энергии *электронов* в атомах, *нуклонов* в ядрах и т. д.

В термодинамических процессах изменяется только кинетическая энергия движущихся молекул (тепловой энергии недостаточно, чтобы изменить строение атома, а тем более ядра). Следовательно, фактически *под внутренней энергией* в термодинамике подразумевают энергию *теплового хаотического* движения молекул.

Внутренняя энергия U одного моля идеального газа равна

$$U = E_{\text{к}} \mathrm{N_A} = \frac{3}{2} kT \mathrm{N_A} = \frac{3}{2} RT,$$

т. е.

$$U = \frac{3}{2} RT.$$

В термодинамике важно знать не абсолютное значение внутренней энергии, а ее изменение: $\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} R \mathrm{d}T$.

Из этих формул видно, что *внутренняя энергия зависит только от температуры*. ***Внутренняя энергия U является функцией состояния системы***, независимо от предыстории.

Понятно, что в общем случае термодинамическая система может обладать как внутренней, так и механической энергией, и разные системы могут обмениваться этими видами энергии.

Обмен *механической энергией* характеризуется совершенной *работой A*, а обмен внутренней энергией — *количеством переданного тепла Q*.

Например, зимой вы бросили в снег горячий камень. За счет запаса потенциальной энергии совершена механическая работа по смятию снега, а за счет запаса внутренней энергии снег был растоплен. Если же камень был холодный, т. е. температура камня равна температуре среды, то будет совершена только работа, но не будет обмена внутренней энергией.

При расширении газа совершается работа. Допустим, что газ заключен в сосуд, отделен от окружающего пространства невесомым поршнем и занимает объем V_1 (рис. 3.1). Давление газа в сосуде уравновешено давлением атмосферы P (изобарный процесс). Нагреем газ, передадим ему количество теплоты Q. Тогда газ, расширяясь, поднимет поршень на величину Δh, совершая работу

$$A = F\Delta h,$$

где $F = PS$ — сила давления атмосферы; S — площадь поршня.

Следовательно, работа

$$A = PS\Delta h = P\Delta V,$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема газа при нагревании.

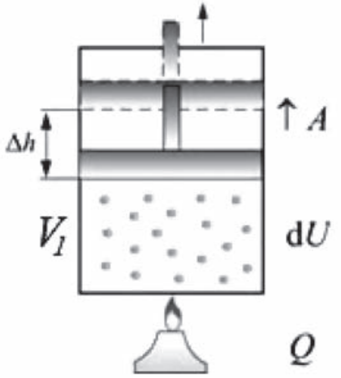


Рис. 3.1
Работа газа в термодинамике:

$A = P\Delta V$; dU — изменение внутренней энергии газа; Q — количество переданной теплоты.

Если поршень передвигается на бесконечно малое расстояние dh, то при этом производится работа d$A = P\Delta V$. Полная работа, совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2, определяется интегрированием:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V. \tag{3.1}$$

Давление P — величина всегда положительная. При расширении, $\Delta V > 0$, газ совершает положительную работу. Если газ сжимается, то $\Delta V < 0$ и работа $A < 0$. В этом случае работу над газом совершают внешние силы.

Итак, работа и теплота не есть особые формы энергии. Нельзя говорить о запасе теплоты или работы. Это *мера переданной* другой системе механической или внутренней энергии.

Механическая энергия может переходить в тепловую энергию и обратно. Например, если стучать молотком по наковальне, то через некоторое время молоток и наковальня нагреются (это пример *диссипации* энергии).

Опыт показывает, что во всех случаях *превращение механической энергии в тепловую и обратно совершается всегда в строго эквивалентных количествах*. В этом и состоит суть первого начала термодинамики, следующего из закона сохранения энергии.

Количество теплоты, сообщаемой телу, идет на увеличение внутренней энергии и на совершение телом работы:

$$Q = \Delta U + A \tag{3.2}$$

— это и есть ***первое начало термодинамики***, или ***закон сохранения энергии в термодинамике*** (в интегральной форме).

Из этой формулы следует, что количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Первое начало термодинамики можно записать в виде:

$$\Delta U = Q - A$$

— изменение внутренней энергии тела равно разности сообщаемой телу теплоты и произведенной телом работы.

Первое начало термодинамики (3.2) для бесконечно малого изменения состояния системы будет иметь вид (*первое начало термодинамики в дифференциальной форме*)

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A. \qquad (3.3)$$

В этом выражении U — функция состояния системы; изменение энергии $\mathrm{d}U$ — ее полный дифференциал, а δQ и δA — бесконечно малые приращения теплоты и работы — таковыми не являются.

В каждом состоянии система обладает определенным (и только таким) значением внутренней энергии, поэтому можно записать

$$U = \int_1^2 \mathrm{d}U = U_2 - U_1.$$

Важно отметить, что *теплота Q и работа A зависят* от того, каким образом совершен переход из состояния 1 в состояние 2 (изохорически, адиабатически и т. д.), *а внутренняя энергия U — не зависит*. При этом нельзя сказать, что система обладает определенным для данного состояния значением теплоты и работы.

Особое значение в термодинамике имеют круговые или циклические процессы, при которых система, пройдя ряд состояний, возвращается в исходное состояние.

Так как U — функция состояния, то в циклическом процессе

$$\oint \mathrm{d}U = 0.$$

Это справедливо для любой функции состояния.

Если $\Delta U = 0$, то согласно первому началу термодинамики $A = Q$, т. е. нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы б льшую работу, чем количество сообщенной ему извне энергии. Иными словами, ***вечный двигатель первого рода невозможен.*** Это одна из формулировок первого начала термодинамики.

Следует отметить, что *первое начало термодинамики не указывает, в каком направлении идут процессы изменения состояния*, что является одним из его недостатков.

3.1.2. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Теплоемкость *тела характеризуется количеством теплоты, необходимым для нагревания этого тела на один градус*:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \tag{3.4}$$

Размерность теплоемкости $[C]$=Дж/К.

Однако теплоемкость — величина неопределенная, поэтому пользуются понятиями удельной и молярной теплоемкости.

Удельная теплоемкость ($C_{уд}$) есть количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на 1 градус; $[C_{уд}]$=Дж/К.

Для газов удобно пользоваться ***молярной теплоемкостью***; C_μ — *количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля газа на 1 градус*:

$$C_\mu = C_{уд}\mu, \tag{3.5}$$

$$[C_\mu] = \text{Дж/(моль·К)}.$$

Теплоемкость термодинамической системы зависит от того, как изменяется состояние системы при нагревании.

Если газ нагревать при *постоянном объеме*, то все подводимое тепло идет на нагревание газа, т. е. изменение его внутренней энергии. Теплоемкость при этом обозначается C_V.

C_P — теплоемкость при *постоянном давлении*. Если нагревать газ при постоянном давлении P в сосуде с поршнем, то поршень поднимется на некоторую высоту h, т. е. газ совершит работу (рис. 3.1).

Следовательно, проводимое тепло затрачивается и на нагревание, и на совершение работы. Отсюда ясно, что $C_P > C_V$.

Итак, проводимое тепло и теплоемкость *зависят от того, каким путем осуществляется передача тепла.*

Значит, теплоемкость C, как и Q, и A, *не является функцией состояния*.

Величины C_P и C_V оказываются связанными простым соотношением, называемым уравнением Майера[1]:

$$C_P = C_V + R. \tag{3.6}$$

Полезно знать формулу Майера для удельных теплоемкостей:

$$\frac{C_P}{\mu} = \frac{C_V}{\mu} + \frac{R}{\mu}$$

или

$$C_{P_{\text{уд}}} - C_{V_{\text{уд}}} = \frac{R}{\mu}.$$

Используя это соотношение, Роберт Майер в 1842 г. вычислил механический эквивалент теплоты: 1 кал = 4,19 Дж.

3.1.3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МАЙЕРА*

Пусть мы нагреваем 1 моль идеального газа при постоянном объеме ($\mathrm{d}A = 0$). Тогда первое начало термодинамики запишем в виде:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U,$$

т. е. бесконечно малое приращение количества теплоты $\mathrm{d}Q$ равно приращению внутренней энергии $\mathrm{d}U$.

Теплоемкость при постоянном объеме будет равна:

$$C_V = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}T}. \tag{3.7}$$

В общем случае $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Отсюда видно, что C_V — функция состояния. Это обусловливает ее важное значение.

---

[1] Майер Юлиус Роберт фон (1814–1878) — немецкий врач и естествоиспытатель. Один из первых указал на эквивалентность затрачиваемой работы и производимого тепла и обосновал первый закон термодинамики.

В случае идеального газа справедлива формула (3.7), из которой следует, что $\mathrm{d}U_\mu = C_V \mathrm{d}t$. Тогда

$$U_\mu = \int_0^T C_V \mathrm{d}T = C_V T. \qquad (3.8)$$

Как видно из этого соотношения, ***внутренняя энергия идеального газа является только функцией температуры*** (*и не зависит от V, P и т. п.*), поэтому формула (3.8) справедлива для любого процесса.

Для произвольной идеальной массы газа

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T. \qquad (3.9)$$

При изобарическом процессе, кроме увеличения внутренней энергии, происходит совершение работы газом:

$$(\mathrm{d}Q)_P = \mathrm{d}U_\mu + P\mathrm{d}V_\mu = \mathrm{d}(U_\mu + PV_\mu). \qquad (3.10)$$

Это означает, что $(\mathrm{d}Q)_P$ — полный дифференциал, а $C_P = \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_P$ — функция состояния. Входящая в состав (3.10) функция состояния,

$$H = U + PV,$$

называется ***энтальпией***. Поэтому выражение для C_P можно преобразовать:

$$C_P = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right)_P.$$

Итак, для идеального газа имеем:

$$C_P = \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_P = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}T} + P\frac{\mathrm{d}V_\mu}{\mathrm{d}T}.$$

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $PV_\mu = RT$. При изобарическом процессе $P = \mathrm{const}$, получим

$$C_P = C_V + R. \qquad (3.11)$$

Это ***уравнение Майера*** *для одного моля газа.*

Из этого следует, что *физический смысл универсальной газовой постоянной в том, что R — численно равна работе, совершаемой одним молем газа при нагревании на один градус* в изобарическом процессе.

3.1.4. ЗАКОН О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

Числом степеней свободы i называется *число независимых переменных, определяющих положение тела в пространстве*.

Положение одноатомной молекулы, как и материальной точки, задается тремя координатами, поэтому она имеет три степени свободы (рис. 3.2).

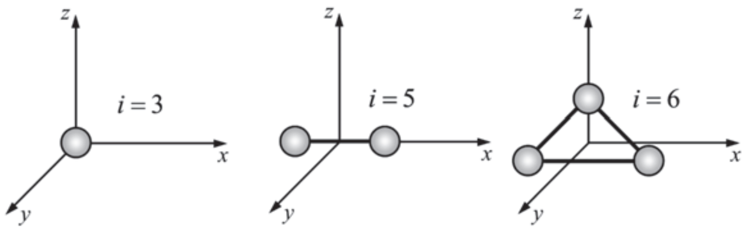


Рис. 3.2
Число степеней свободы одно-, двух- и трехатомных молекул

Многоатомная молекула может еще и вращаться. Например, у двухатомных молекул вращательное движение можно разложить на два независимых вращения, а любое вращение можно разложить на три вращательных движения вокруг взаимно перпендикулярных осей. Но для двухатомной молекулы вращение вокруг ее собственной оси не изменит ее положение в пространстве, а момент инерции относительно этой оси равен нулю (рис. 3.2).

Таким образом, у двухатомных молекул пять степеней свободы ($i = 5$), а у трехатомных — шесть степеней свободы ($i = 6$).

Итак, если частица идеального газа простая, то она имеет лишь три степени свободы поступательного движения. Ее энергия равна $\frac{3}{2}kT$.

Если же частица идеального газа сложная, то она обладает большим числом степеней свободы и, следовательно, большей энергией. Например, если сложная частица состоит из двух точечных частиц, то имеются две возможности. Если две частицы между собой жестко связаны и ведут себя подобно твердой гантели, то сложная частица имеет пять степеней свободы: три поступательные и две вращательные. В этом случае энергия частицы равна $\frac{5}{2}kT$.

Если же наряду с этим связь между частицами не жесткая и они могут совершать колебательное движение вдоль соединяющей их линии, то добавляются кинетическая энергия $\frac{1}{2}kT$ и потенциальная энергия $\frac{1}{2}kT$ колебаний, т. е. еще две степени свободы. Всего при этом на одну сложную частицу приходится энергия

$$U = \langle E_{\text{пост}} \rangle + \langle E_{\text{вращ}} \rangle + \langle E_{\text{колеб}} \rangle = \frac{7}{2}kT.$$

Л. Больцман доказал, что ***средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы, равна*** $\frac{1}{2}kT$.

Если частица имеет i степеней свободы, то ее энергия

$$U = \frac{i}{2}kT.$$

Это выражение называется ***законом Больцмана*** *или* ***теоремой о равномерном распределении средней энергии по степеням свободы.***

В моле имеется N_A частиц и, следовательно, внутренняя энергия моля идеального газа равна

$$U = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT.$$

Таким образом, если система находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре T, то средняя кинетическая энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы. На каждую поступательную $i_{\text{пост}}$ и вращательную $i_{\text{вращ}}$ степени свободы приходится энергия $1/2kT$. Для колебательной $i_{\text{колеб}}$ степени свободы она равна kT. Общее число степеней свободы $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$.

3.1.5. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ОДНОАТОМНЫХ И МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

Исходя из определения внутренней энергии (3.8), для ***теплоемкости одноатомных газов*** можно записать

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{3}{2}R = 12{,}5\ \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}.$$

Из этого выражения видно, что при постоянном объеме теплоемкость C_V — величина постоянная, от температуры не зависит.

Учитывая физический смысл R для одного моля при изобарическом процессе, можно записать

$$\mathrm{d}Q_P = \mathrm{d}U_\mu + R\mathrm{d}T.$$

Тогда *теплоемкость при постоянном давлении для одноатомных газов*

$$C_P = \frac{3}{2}R + R$$

или

$$C_P = \frac{5}{2}R = 20{,}8\ \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}.$$

Полезно знать соотношение $C_P/C_V = \gamma$, где γ — ***показатель адиабаты*** (коэффициент Пуасона), $\gamma = \dfrac{20{,}8}{12{,}5} = 1{,}67.$

Кроме того, $\lambda = \dfrac{i+2}{i}$. Учитывая это для теплоемкостей, можно получить выражения: $C_V = \dfrac{i}{2}R$ и $C_P = \dfrac{i+2}{2}R.$

Так как $\lambda = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$, $\gamma - 1 = \frac{R}{C_V}$. Из этого следует, что

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Подставив C_V в выражение для внутренней энергии, получим

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} T.$$

Так как $PV = \frac{m}{\mu} RT$, для *внутренней энергии получим* $U = \frac{PV}{\gamma - 1}$.

Теоретический расчет теплоемкости для двухатомных газов ($i = 5$):

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20{,}8 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$C_P = \frac{7}{2} R = 29{,}1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}),\ \gamma = 7/5 = 1{,}4.$$

Многоатомные газы ($i = 6$):

$$C_V = 3R = 24{,}93 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$C_P = 4R = 33{,}24 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}),\quad \gamma = 4/3 = 1{,}33.$$

Экспериментальные данные для различных газов неплохо совпадают с теоретическими расчетами, однако только в определенном диапазоне температур.

То, что $C_V = \frac{3}{2} R = 12{,}5\ \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$, хорошо подтверждается на опыте с Ne, He, Ar, Kr, парами одноатомных металлов (рис. 3.3).

При температурах ниже 100 К (рис. 3.3) теплоемкость $C_V \approx 3R/2$, что указывает на отсутствие у молекул как вращательных, так и колебательных степеней свободы. Далее,

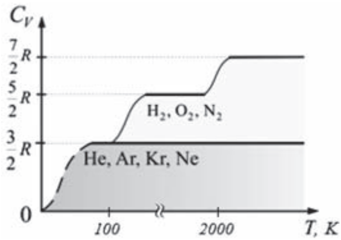


Рис. 3.3
Качественная экспериментальная зависимость молярной теплоемкости газов от температуры

с ростом температуры теплоемкость быстро возрастает (*явление «размораживания» степеней свободы молекулы*) до классического значения $C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R$, характерного для двухатомной молекулы с жесткой связью, в которой нет колебательных степеней свободы. При температурах свыше 2000 К теплоемкость обнаруживает новый скачок до значения $7R/2$. Этот результат свидетельствует о появлении еще и колебательных степеней свободы. Однако все это плохо объяснимый результат. Почему молекула не может вращаться при низких температурах? И почему колебания в молекуле возникают лишь при очень высоких температурах? Все это объясняется специфическими квантовыми эффектами, необъяснимыми с позиции классической физики.

Ступенчатый характер температурной зависимости $C_V = C_V(T)$ для многоатомных молекул можно рассмотреть как доказательство того, что энергия внутримолекулярных движений имеет дискретный спектр значений.

Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы перестает быть справедливым при квантовом описании системы частиц. При этом энергии вращения и колебания молекул принимают дискретные значения, или говорят, что они квантуются.

Энергия колебаний молекулы как квантового гармонического осциллятора равна:

$$E_{\text{колеб}} = (1/2 + n)\, h\nu,$$

где ν — собственная частота колебаний; $n = 0, 1, 2, \ldots$ — квантовое число.

Энергия $E_{\text{колеб}}$ при $n = 0$, равная $E_0 = 1/2(h\nu)$, называется нулевой колебательной энергией (***энергией нулевых колебаний***). Разность энергий $\Delta E_{\text{колеб}}$ между соседними уровнями энергии равна $h\nu$. Энергия вращательного движения молекулы зависит от ее вида. Для двухатомной молекулы с жесткой связью эта энергия имеет вид

$$E_{\text{вращ}} = \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 I},$$

где I — момент инерции молекулы вокруг оси, проходящей через центр инерции молекулы; $l=0, 1, 2, \ldots$ — вращательное квантовое число. Расстояние между соседними уровнями энергии вращения $\Delta E_{\text{вращ}}$ приблизительно в тысячу раз меньше $\Delta E_{\text{колеб}}$.

Подводя итоги этого раздела, можно заключить, что формулу для расчета внутренней энергии $U=C_V T$ можно считать справедливой, когда температура газа находится в некотором ограниченном интервале и теплоемкость $C_V=(i/2)R$ рассматривается как постоянная величина.

Классическая теория теплоемкости газов приводит к серьезным расхождениям с опытными данными. Прежде всего теория приводит к выводу о независимости теплоемкости от температуры, в то время как экспериментальные данные показывают, что теплоемкость всех веществ растет с увеличением температуры, а при низких температурах быстро убывает и стремится к нулю при $T \to 0$ К. Кроме того, классическая теория дает заниженное значение теплоемкостей многоатомных газов по сравнению с опытными данными. Причина всех этих трудностей заключается в ограниченной пригодности закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. В квантовой теории теплоемкостей все эти трудности преодолены.

3.1.6. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Применим первое начало термодинамики $\delta Q=\mathrm{d}U + \delta A$ к изопроцессам идеального газа (п. 1.4).

Изохорический процесс. *Уравнение процесса* $P/T=\text{const}$ (табл. 3.1).

Так как изохорический процесс протекает при постоянном объеме ($V=\text{const}$), то $\delta A=P\mathrm{d}V=0$, т. е. в этом

Таблица 3.1

	Название процесса			
	изохорический	изобарический	изотермический	адиабатический
Условие протекания процесса	$V=\text{const}$	$P=\text{const}$	$T=\text{const}$	$\delta Q=0$ $\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}=\dfrac{i+2}{i}$
Связь между параметрами	$\dfrac{P}{T}=\text{const}$	$\dfrac{V}{T}=\text{const}$ $P\mathrm{d}V=VR\mathrm{d}T$	$PV=\text{const}$	$PV^{\gamma}=\text{const}$ $TV^{\gamma-1}=\text{const}$ $T^{\gamma}P^{\gamma-1}=\text{const}$
Первое начало ТД	$\delta Q=\mathrm{d}U$	$\delta Q=\mathrm{d}U+\delta A$	$\delta Q=\delta A$	$\mathrm{d}U=-\delta A$
Работа в процессе	$\delta A=0$ $A=0$	$\delta A=P\mathrm{d}V$ $A=\int_{V_1}^{V_2}P\mathrm{d}V$ $A=P(V_2-V_1)$ $A=VR\Delta T$	$\delta A=P\mathrm{d}V$ $A=VRT\ln\dfrac{V_2}{V_1}$ $A=VRT\ln\dfrac{P_1}{P_2}$	$\delta A=-\mathrm{d}U$ $A=-C_V\Delta T$ $\delta A=-V\dfrac{i}{2}R\mathrm{d}T$ $A=\dfrac{P_1V_1}{\gamma-1}\times$ $\times\left[1-\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$
Количество теплоты	$\delta Q=\mathrm{d}U$ $Q=C_V\Delta T$	$Q=C_P\Delta T\delta$ $Q=C_P\mathrm{d}T$	$\delta Q=\delta A$ $Q=A$	$\delta Q=0$ $Q=0$
Изменение внутренней энергии	$\mathrm{d}U=\delta Q$ $\Delta U=\dfrac{i}{2}V\Delta P$ $\Delta U=\dfrac{V\Delta P}{\gamma-1}$	$\mathrm{d}U=C_V\mathrm{d}T$ $\Delta U=\dfrac{i}{2}P\Delta V$ $\Delta U=V\dfrac{i}{2}R\Delta T$	$\mathrm{d}U=0$	$\mathrm{d}U=-\delta A$ $\Delta U=-C_V\Delta T$ $\Delta U=\dfrac{P_1V_1}{T_1(\gamma-1)}$
Теплоемкость	$C_V=\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$ $C_V=V\dfrac{i}{2}R$ $C_V=V\dfrac{R}{(\gamma-1)}$	$C_P=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$ $C_P=V\left(\dfrac{i}{2}+1\right)R$ $C_P=V\dfrac{\gamma R}{(\gamma-1)}$	$C_T=\pm\infty$	$C_{\text{ад}}=0$

процессе газ работу над внешними телами не совершает. Сообщенная газу теплота идет на увеличение внутренней энергии (*первое начало термодинамики*):

$$\delta Q=\mathrm{d}U. \tag{3.12}$$

Но $\mathrm{d}U = C_V\mathrm{d}T$, интегрируя данные выражения, получим *выражение для внутренней энергии*:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1). \qquad (3.13)$$

Используя уравнение Майера и показатель адиабаты $\gamma = C_P/C_V$, из **(3.13)** для внутренней энергии получим

$$\Delta U = \frac{V}{\gamma - 1}(P_2 - P_1).$$

Теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}R$$

или

$$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{(\gamma - 1)}.$$

Аналогичным образом применим первое начало термодинамики к остальным изопроцессам.

В таблице 3.1 приведены сводные данные о характеристиках изопроцессов в газах.

Здесь уместно рассмотреть еще и ***политропический процесс*** — *такой процесс, при котором изменяются все основные параметры системы, кроме теплоемкости*, т. е. $C = \mathrm{const}$.

Уравнения политропы:

$$PV^n = \mathrm{const}$$

или

$$TV^{n-1} = \mathrm{const}.$$

Здесь n — *показатель политропы*. С помощью этого показателя можно легко описать любой изопроцесс:

1) изобарический процесс: $P = \mathrm{const}$, $n = 0$:

$$C = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma C_V = C_P;$$

2) изотермический процесс: $T = \mathrm{const}$, $n = 1$, $CT = \pm\infty$;

3) изохорический процесс: $V = \text{const}$, $n = \pm\infty$: $C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$;

4) адиабатический процесс: $\Delta Q = 0$, $n = \gamma$, $C_{\text{ад}} = 0$.

Во всех этих процессах работу можно вычислить по формуле

$$A = \frac{P_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right].$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Каков физический смысл первого начала термодинамики?
2. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
3. Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей — C_V или C_p — больше и почему?
4. Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?
5. Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?
6. Приведите уравнение Майера. В чем физический смысл универсальной газовой постоянной?
7. Каковы теплоемкости одноатомных и многоатомных газов?
8. Что такое показатель адиабаты?
9. Что называется числом степеней свободы молекулы?
10. В чем суть закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?
11. Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?
12. Чему равна работа изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании на 1 К?
13. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?
14. Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение

между сообщенным количеством теплоты и совершенной работой.

15. Газ переходит из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 в результате следующих процессов: а) изотермического; б) изобарного; в) изохорного. Рассмотрев эти процессы графически, покажите: 1) в каком процессе работа расширения максимальна; 2) когда газу сообщается максимальное количество теплоты.
16. Почему адиабата более крутая, чем изотерма?
17. Как изменится температура газа при его адиабатном сжатии?
18. Что такое политропический процесс?
19. Показатель политропы $n > 1$. Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?
20. Найдите удельную теплоемкость гелия, водорода и азота при постоянном объеме.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.1. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{вращ}}\rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T=350$ К, а также кинетическую энергию $E_{\text{к}}$ вращательного движения всех молекул кислорода, масса которого $m=4$ г.

Дано:
$\mu=32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$T=350$ К
$m=4\cdot10^{-3}$ кг

$\langle E_{\text{вращ}}\rangle$ — ?
$E_{\text{к}}$ — ?

Решение. На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия $E_1=(1/2)kT$. Так как вращательному движению двухатомной молекулы соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_{\text{вращ}}\rangle = 2\cdot\frac{1}{2}kT = kT. \quad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул заданного количества газа

$$E_{\text{к}}=\langle E_{\text{вращ}}\rangle N, \quad (2)$$

где $N = \mathrm{N_A}\dfrac{m}{\mu}$ — число молекул газа. Тогда $E_к = \mathrm{N_A}\dfrac{m}{\mu}\langle E_{вращ}\rangle$.

$$\langle E_{вращ}\rangle = kT = 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 350 = 4{,}83\cdot 10^{-21}\ Дж,$$

$$E_к = 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot \frac{4\cdot 10^{-3}}{32\cdot 10^{-3}}\cdot 4{,}83\cdot 10^{-21} = 364\ Дж.$$

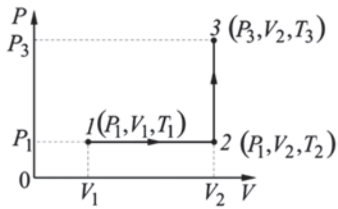
Ответ: $\langle E_{вращ}\rangle = 4{,}83\cdot 10^{-21}$ Дж, $E_к = 364$ Дж.

Задача 3.1.2. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $P_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

Дано:
$m = 2$ кг
$V_1 = 1$ м^3
$P_1 = 0{,}2$ МПа
$V_2 = 3$ м^3
$P_3 = 0{,}5$ МПа
$\mu = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$i = 5$

ΔU — ?
A — ?
Q — ?

Решение. График процесса приведен на рисунке к задаче.



Изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T, \qquad (1)$$

где $\Delta T = T_3 - T_1$ — разность температур газа в конечном и начальном состояниях.

Эти температуры найдем из уравнения Менделеева — Клайперона:

$$\begin{cases} T_1 \dfrac{P_1 V_1 \mu}{mR}, \\ T_3 = \dfrac{P_3 V_2 \mu}{mR}. \end{cases} \qquad (2)$$

Из уравнений (2) найдем ΔT и подставим в уравнение (1):

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(P_3V_2 - P_1V_1)\frac{\mu}{mR}$$

или

$$\Delta U = \frac{i}{2}(P_3V_2 - P_1V_1),$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}(0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 3 - 0{,}2\cdot 10^{-6}\cdot 1) = 3{,}24\cdot 10^{6}\ \text{Дж}.$$

Полная работа, совершаемая на участке 1–2–3,

$$A = A_{1-2} + A_{2-3}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т. е.

$$A_{2-3} = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом:

$$A = A_{1-2} = P(V_2 - V_1).$$

$$A = 0{,}2\cdot 10^{6}(3-1) = 0{,}4\cdot 10^{6}\ \text{Дж}.$$

Согласно первому началу термодинамики теплота Q, переданная газу, равна

$$Q = \Delta U + A.$$

$$Q = 3{,}24 + 0{,}4 = 3{,}64\ \text{МДж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3{,}24\cdot 10^{6}$ Дж; $A = 0{,}4\cdot 10^{6}$ Дж; $Q = 3{,}64$ МДж.

Задача 3.1.3. Молекулярный кислород (O_2) массой 6 г расширяется вдвое при постоянном давлении. Начальная температура газа 303 К. Определить работу расширения газа, изменение его внутренней энергии и количество сообщенной ему теплоты.

Решение. Изменение внутренней энергии можно найти как

$$\Delta U = (m/\mu)\cdot[(i/2)\cdot R + R]\cdot \Delta T,$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры; T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры газа.

Поскольку расширение происходит при постоянном давлении, воспользовавшись законом Гей-Люссака,

$$V_1/T_1 = V_2/T_2,$$

находим конечную температуру газа:

$$T_2 = T_1 \cdot V_2/V_1 = 2 \cdot T_1.$$

Таким образом, $\Delta T = T_1$, отсюда $\Delta U = 1{,}67$ кДж.

Поскольку давление постоянно, то работа расширения может быть найдена как

$$A = P \cdot \Delta V = P \cdot V_1.$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева найдем объем газа при температуре T_1:

$$V_1 = mRT_1/(\mu P).$$

Таким образом,

$$A = mRT_1/\mu; \quad A = 0{,}47 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты, сообщенной газу, согласно первому началу термодинамики будет

$$Q = \Delta U + A = 1{,}67 + 0{,}47 = 2{,}14 \text{ кДж}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1.1. Азот массой $m = 2$ г, имевший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатически сжат так, что его объем уменьшился в $n = 10$ раз. Определить конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

Ответ: $T_2 = T_1 n^{\gamma-1} = 754$ К; $A = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 674$ Дж.

Задача 3.1.2. При изотермическом расширении водорода массой $m = 1$ г, имевшего температуру $T = 280$ К, объем газа увеличился в 3 раза. Определить работу A расширения газа и количество теплоты Q.

Ответ: $A = Q = 1{,}28$ кДж.

Задача 3.1.3. Азот, занимавший объем $V_1 = 10$ л под давлением $P_1 = 0{,}2$ МПа, изотермически расширялся до объема $V_2=28$ л. Определить работу A расширения газа и количество теплоты Q.

Ответ: $A=Q=2{,}06$ кДж.

Задача 3.1.4. При адиабатическом сжатии кислорода массой $m=20$ г его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U=8$ кДж и температура повысилась до $T_2=900$ К. Найти: 1) повышение температуры ΔT; 2) конечное давление газа P_2, если начальное давление $P_1=200$ кПа.

Ответ: 1) $\Delta T=\dfrac{2\mu\Delta U}{imR}=616$ К;

2) $P_2=P_1(T_2-T_1)^{\gamma(\gamma-1)}=11{,}4$ МПа.

Задача 3.1.5. Один моль идеального одноатомного газа и 1 моль идеального двухатомного газа по отдельности адиабатно сжимают до уменьшения их объемов в 2 раза. Найти отношение температур и внутренних энергий газов после их сжатия.

Ответ: $(T_{\text{одноат}}/T_{\text{двухат}})=(V_1/V_2)^{0{,}267}=0{,}83$; 0,5.

Задача 3.1.6. Десять молей идеального двухатомного газа, занимающего при давлении 0,1 МПа и температуре 0°С объем 0,01 м^3, адиабатно расширяется до вдвое большего объема. Определить совершенную газом при расширении работу, конечное давление газа, конечную величину внутренней энергии газа.

Ответ: $P_2=P_1(V_1/V_2)\gamma=0{,}38\cdot10^5$ Па;
$W=(i/2)\cdot(P_1V_1-P_2V_2)=600$ Дж;
$U_2=U_1-\Delta U=(m/\mu)\cdot(i/2)\cdot RT_1-\Delta U=56116$ Дж.

Задача 3.1.7. В цилиндре с легкоподвижным невесомым поршнем находится ν молей идеального газа. Газу при постоянном давлении сообщено некоторое количество теплоты ΔQ. Определить: 1) изменение температуры газа; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) совершенную газом работу; 4) связь между молярными теплоемкостями при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V идеального газа.

Ответ: $\Delta T=\dfrac{\Delta Q}{\upsilon(C_V+R)}$; $\Delta U=\nu C_V\Delta T$;

$A=P_0\Delta V=\Delta Q[1-C_V/(C_V+R)]$;
$C_P=C_V+R$.

Задача 3.1.8*. Десять молей ($\nu = 10$) идеального двухатомного газа (число степеней свободы молекул газа $i = 5$) при температуре $T_1 = 280$ К находится в вертикальном цилиндре под невесомым, легкоподвижным поршнем. Площадь поршня $S = 0{,}01$ м^2. На поршень положили гирю массой $m = 10$ кг, в результате чего поршень опустился на некоторую высоту. Определить: 1) на сколько необходимо нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень возвратился в первоначальное положение; 2) количество теплоты, переданной газу для подъема поршня; 3) изменение внутренней энергии газа; 4) совершенную газом работу по подъему поршня.

Ответ: $\Delta T = mgT_1/Sp_1 = 28$ К;
$\Delta Q = \nu R[(i/2) + 1] \cdot \Delta T = 8{,}1$ кДж;
$\Delta U = \nu(i/2)R \cdot \Delta T = 5{,}8$ кДж; $A = \Delta Q - \Delta U = 2{,}3$ кДж.

Задача 3.1.9. В цилиндре под поршнем находится 2 кг кислорода (O_2). Поршень закреплен. Газ нагревают на 5 К. Найти подведенное к кислороду количество теплоты, увеличение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и удельную теплоемкость кислорода для этого случая.

Ответ: 6,57 кДж; 6,57 кДж; 0 Дж; 657 Дж/(кг·К).

Задача 3.1.10. В изотермическом процессе расширения 1,2 кг азота (N_2) ему было сообщено 120 кДж теплоты. Определить, во сколько раз изменилось давление азота. Температура газа 7°С.

Ответ: уменьшилась в 3,3 раза.

3.2. КРУГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

3.2.1. КРУГОВЫЕ ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

Прежде чем переходить к изложению второго закона термодинамики, рассмотрим круговые процессы. ***Круговым процессом**, или циклом, называется такой процесс, в результате которого термодинамическое тело возвращается в исходное состояние.* В диаграммах состояния P, V и других круговые процессы изображаются в виде замкнутых кривых (рис. 3.4). Это связано с тем, что в любой диаграмме два тождественных состояния (начало и конец

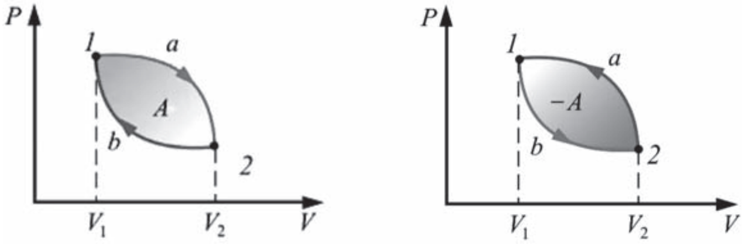


Рис. 3.4
Круговые процессы:
прямой — слева; обратный — справа.

кругового процесса) изображаются одной и той же точкой на плоскости.

***Цикл**, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы **расширения** (1–2) и **сжатия** (2–1)* газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры $1a2V_2V_11$) положительна ($dV > 0$), работа сжатия (определяется площадью фигуры $2b1V_1V_22$) отрицательна ($dV < 0$). Следовательно, ***работа**, совершаемая за цикл, определяется площадью, охваченной замкнутой кривой.* Если за цикл совершается положительная работа

$$A = \oint P dV > 0 \qquad (3.14)$$

(цикл протекает по часовой стрелке), то он называется ***прямым*** (рис. 3.4). Если за цикл совершается отрицательная работа

$$A = \oint P dV < 0 \qquad (3.15)$$

(цикл протекает против часовой стрелки), то он называется ***обратным***.

Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин: двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, паровых и холодильных машин и т. д.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \qquad (3.16)$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты.

Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2, \tag{3.17}$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой. Поэтому термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{3.18}$$

Все термодинамические процессы, в том числе и круговые, делят на две группы: обратимые и необратимые.

Процесс называют обратимым*, если он протекает таким образом, что после окончания он может быть проведен в* ***обратном направлении*** *через все те же промежуточные состояния, что и прямой процесс*. После проведения кругового обратимого процесса никаких изменений в среде, окружающей систему, не произойдет. При этом под средой понимается совокупность всех не входящих в систему тел, с которыми система непосредственно взаимодействует.

Процесс называется необратимым*, если он протекает так, что после его окончания систему нельзя вернуть в начальное состояние через прежние промежуточные состояния*. Нельзя осуществить необратимый круговой процесс, чтобы нигде в окружающей среде не осталось никаких изменений.

Свойством обратимости обладают только равновесные процессы. Каждое промежуточное состояние является состоянием термодинамического равновесия, нечувствительного к тому, идет ли процесс в прямом или обратном направлении.

Например, обратимым можно считать ***процесс адиабатического расширения*** или ***сжатия*** газа. При адиабатическом процессе условие теплоизолированности системы исключает непосредственный теплообмен между системой и средой. Поэтому, производя *адиабатическое расширение газа*, а затем *сжатие*, можно вернуть газ в исходное состояние так, что в окружающей среде никаких изменений не произойдет. Конечно в реальных условиях и в этом случае всегда имеется некоторая необратимость процесса, обусловленная, например, несовершенством теплоизоляции, трением при движении поршня и т. д.

Только в обратимых процессах теплота используется по назначению, не расходуется зря. Если процесс неравновесный, то будет необратимый переход, т. е. часть энергии уйдет (необратимо).

Максимальным КПД обладают машины, у которых только обратимые процессы.

Реальные процессы сопровождаются *диссипацией энергии* (из-за трения, теплопроводности и т. д.), которая нами не рассматривается. *Обратимые процессы* — это в какой-то степени идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам:

- многие процессы в природе и технике практически обратимы;
- обратимые процессы являются наиболее экономичными и приводят к максимальному значению термического коэффициента полезного действия тепловых двигателей.

3.2.2. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

Тепловой машиной *называется периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла.*

Любая тепловая машина работает по принципу кругового (*циклического*) процесса, т. е. возвращается в исходное состояние (рис. 3.4). Но чтобы при этом была совершена полезная работа, возврат должен быть произведен с наименьшими затратами. Полезная работа равна разности работ расширения и сжатия, т. е. равна площади, ограниченной замкнутой кривой.

Обязательными частями тепловой машины являются (рис. 3.5) *нагреватель* (источник энергии), *холодильник*, *рабочее тело* (газ, пар).

Зачем холодильник? Так как в тепловой машине реализуется круговой процесс, то вернуться в исходное состояние можно с меньшими затратами, если отдать часть тепла. Если охладить пар, то его легче сжать, следовательно, работа сжатия будет меньше работы расширения. Поэтому в тепловых машинах используется холодильник.

В *тепловом двигателе* используется *прямой цикл*.

Обратный цикл используется в ***холодильных машинах*** *— периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой*. Принцип действия холодильной машины представлен на рисунке 3.6.

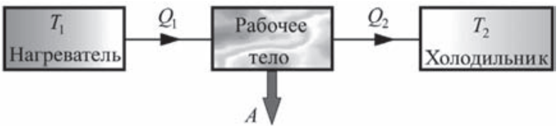


Рис. 3.5
Тепловая машина

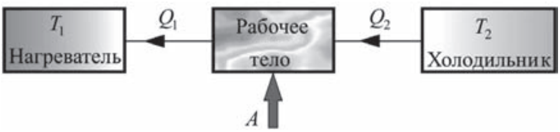


Рис. 3.6
Холодильная машина

Системой за цикл поглощается при низкой температуре T_2 количество теплоты Q_2 и отдается при более высокой температуре T_1 количество теплоты Q_1 за счет работы внешних сил A.

3.2.3. ЦИКЛ КАРНО

Основываясь на втором начале термодинамики, ***Карно*** вывел ***теорему***, носящую теперь его имя:

Из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины. Причем КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагрева-

Карно Никола Леонард Сади (1796–1832) — французский физик и инженер, один из создателей термодинамики. Впервые показал, что работу можно получить в случае, когда тепло переходит от нагретого тела к более холодному (второе начало термодинамики). Ввел понятие кругового и обратимого процессов, идеального цикла тепловых машин, заложил тем самым основы их теории. Пришел к понятию механического эквивалента теплоты. В 1824 г. опубликовал сочинение «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу».

телей и холодильников, равны друг другу и не зависят от конструкции машины и от природы рабочего вещества. При этом КПД меньше единицы.

Цикл, изученный Карно, является самым экономичным и представляет собой круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 3.7).

Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем (рис. 3.8). Определим его работу и КПД.

Тепловая машина, в которой тепло можно превратить в работу с максимальным КПД, изображена на рисунке 3.5. Чтобы термический КПД был равен 1, из (3.18)

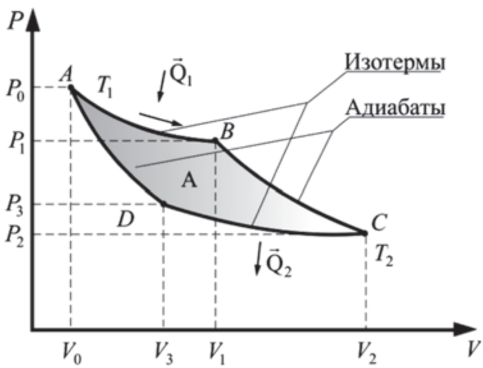


Рис. 3.7
Цикл Карно

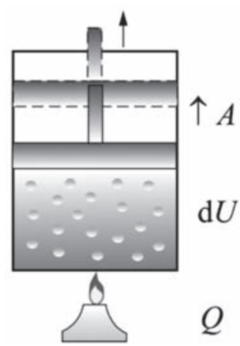


Рис. 3.8
Цилиндр с подвижным поршнем

следует условие $Q_2=0$, т. е. тепловой двигатель должен был бы иметь один источник теплоты. Однако согласно Карно для работы теплового двигателя необходимы два источника теплоты, иначе был бы возможен *вечный двигатель второго рода*.

Будем считать, что нагреватель и холодильник имеют бесконечную теплоемкость, т. е. их температуры не изменяются в процессе передачи тепла.

Рассмотрим процесс сначала качественно. Начнем процесс из точки A. Газ сжат до давления P_0 и находится в контакте с нагревателем при T_1. Расширение газа при каком процессе даст максимальную работу?

Из *первого начала термодинамики следует, что* $\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$.

В изотермическом процессе $\mathrm{d}U=0$, значит, все тепло перейдет в работу:

$$\delta Q = \delta A.$$

На участке AB — ***изотермическое расширение*** *при температуре* T_1 (процесс теплопередачи не происходит, так как нет разности температур, не происходит и передача тепла без совершения работы, т. е. процесс обратимый).

Полученное рабочим телом тепло нужно передать холодильнику. Но если просто привести его к соприкосновению с холодильником, то будет передача тепла без совершения работы. Поэтому рабочее тело нужно сначала охладить до T_2 (а охлаждать без затрат тепла — это ***адиабатическое расширение***, участок BC), а затем уже присоединять к холодильнику. *Адиабатическим* расширением заканчивается *первая половина цикла — совершение полезной работы*.

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т. е. сжать газ до P_0. Контакт с нагревателем опять не следует делать, пока рабочее тело не примет температуру нагревателя (T_1).

Возвращение в точку A опять происходит в два этапа: сначала рабочее тело сжимают, не прерывая контакта с холодильником, при этом холодильнику отдается тепло Q_2 (***изотермическое сжатие*** CD). Затем изолируют тело от холодильника, ***адиабатно сжимают*** его, при этом температура его повышается до T_1 (DA). Рабочее тело при *адиабатическом сжатии* нагревается за счет внешней работы, совершаемой над ним.

Как видим, на всех стадиях кругового процесса нигде не допускается соприкосновение тел с разной температурой, т. е. нет необратимых процессов теплопроводности. Весь цикл проводится обратимо (бесконечно медленно).

3.2.4. РАБОТА И КПД ЦИКЛА КАРНО

Проанализируем более подробно цикл Карно и найдем полезную работу и КПД цикла.

Процесс А–В. *Положительная работа, совершенная газом при* ***изотермическом расширении*** 1 моля газа от V_0 до V_1.

Тепло, полученное от нагревателя Q_1, идет на изотермическое расширение газа, совершая при этом работу A_1:

$$A_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_1}{V_0} = Q_1. \tag{3.19}$$

Процесс В–С — адиабатическое расширение. При адиабатическом расширении теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения A_2 совершается за счет изменения внутренней энергии.

Согласно уравнению Пуассона (п. 3.1.4) запишем уравнение адиабаты:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Давление при этом изменится до P_2. *Работа на этой стадии*:

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2). \tag{3.20}$$

Процесс *C–D* — *изотермическое сжатие*. На третьем этапе газ изотермический сжимается от V_2 до V_3. Теплота Q_2, отданная газом холодильнику при изотермическом сжатии, равна работе сжатия A_3 — *это работа, совершаемая над газом, она отрицательна*:

$$A_3 = -\frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_2}{V_3} = -Q_2. \qquad (3.21)$$

Процесс D–A — адиабатическое сжатие.

Уравнение адиабаты: $T_1V_0^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1}$.

Работа сжатия на последнем этапе:

$$A_4 = -\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2). \qquad (3.22)$$

Общая работа цикла $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ или

$$A = RT_1 \ln\frac{V_1}{V_0} + \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma-1} - RT_2 \ln\frac{V_2}{V_3} - \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma-1}.$$

Поделив уравнение в процессе B–C на уравнение адиабаты в процессе D–A, получим $V_1/V_0 = V_2/V_3$, тогда

$$A = Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2)\ln(V_1/V_0) > 0. \qquad (3.23)$$

Значит, работа, совершаемая газом, больше работы внешних сил.

Работа равна площади ограниченной кривой $ABCDA$ (рис. 3.7).

Из равенств следует важное соотношение:

$$\left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| = \left|\frac{T_1}{T_2}\right|. \qquad (3.24)$$

Полезная работа и КПД цикла равны: $A = Q_1 - Q_2$ и

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (3.25)$$

Из (3.25) видно, что $\eta < 1$, *зависит только от разности температур между нагревателем и холодильником и не зависит от конструкции машины и рода рабочего тела* (*доказательство* ***теоремы Карно***).

Цикл Карно, рассмотренный нами, был на всех стадиях проведен так, что не было необратимых процессов (не было соприкосновения тел с разными температурами). Поэтому здесь самый большой КПД. Больше получить в принципе невозможно.

3.2.5. НЕОБРАТИМЫЙ ЦИКЛ. ХОЛОДИЛЬНАЯ МАШИНА

Предположим, для простоты, что необратимость цикла обусловлена тем, что теплообмен между рабочим телом и источником теплоты (считаем холодильник тоже «источником» только отрицательной температуры) происходит при конечных разностях температур, т. е. нагреватель, отдавая тепло, охлаждается на ΔT, а холодильник нагревается на ΔT.

Любой процесс, не удовлетворяющий условию обратимости, мы называем ***необратимым процессом.*** Примером необратимого процесса является процесс торможения тела под действием сил трения. При этом скорость тела уменьшается и оно останавливается. Энергия механического движения тела расходуется на увеличение энергии хаотического движения частиц тела и окружающей среды. Происходит ***диссипация*** энергии. Для продолжения движения необходим компенсирующий процесс охлаждения тела и среды. В случае тепловых машин нагреватель и холодильник не идеальны, они не обладают бесконечной теплоемкостью и в процессе работы получают или теряют добавочную температуру ΔT (рис. 3.9).

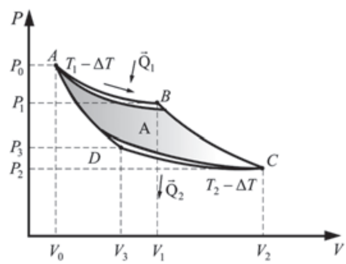


Рис. 3.9
Необратимый цикл:
площадь внутри фигуры *ABCD* уменьшилась, следовательно, уменьшилась и полезная работа. Поэтому $\eta_{необр} < \eta_{обр}$.

Как видно из рисунка, площадь внутри фигуры *ABCD* уменьшилась из-за потерь, значит, уменьшилась полезная работа цикла и КПД.

Для необратимого цикла

$$\eta_{необр} = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 - \Delta T} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (3.26)$$

Таким образом, КПД всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше КПД цикла Карно. То есть всегда $\eta_{обр} > \eta_{необр}$ — этот вывод справедлив независимо от причин необратимости циклического процесса.

Холодильная машина

Холодильная машина — это машина, работающая по обратному циклу Карно (рис. 3.6). То есть если проводить цикл в обратном направлении, тепло будет забираться у холодильника и передаваться нагревателю (за счет работы внешних сил).

Обратный цикл Карно можно рассмотреть на примере рисунка 3.7. При изотермическом сжатии B–A от газа отводится количество теплоты Q_1 при T_1. В процессе изотермического расширения D–C к газу подводится количество теплоты Q_2.

В этом цикле $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ и работа, совершаемая над газом, отрицательна, т. е.

$$A=(Q_1 + Q_2) < 0. \tag{3.27}$$

Если рабочее тело совершает обратный цикл, то при этом ***можно переносить энергию в форме тепла от холодного тела к горячему за счет совершения внешними силами работы.***

Для холодильных машин, работающих по циклу Карно, КПД рассчитывается по (3.25).

3.2.6. ЦИКЛЫ ОТТО, ДИЗЕЛЯ И СТИРЛИНГА

Цикл Отто[1]. По-разному комбинируя процессы — изотермический, изобарический, адиабатический и др., можно получить различные циклы, по которым работают современные тепловые двигатели. Из двух адиабатических и двух изохорических процессов (рис. 3.10) образуют цикл Отто бензинового двигателя. Цикл назван в честь немецкого инженера Николауса Отто, впервые построившего

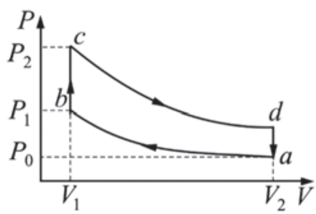


Рис. 3.10
Цикл Отто четырехтактного бензинового двигателя с искровым воспламенением

[1] Отто Николаус Август (1832–1891) — немецкий инженер и изобретатель-самоучка, изобретатель двигателя внутреннего сгорания.

в 1876 г. четырехтактный двигатель с искровым воспламенением.

КПД цикла Отто $\eta_O = \dfrac{T_c - T_d}{T_c}$ меньше КПД цикла Карно $\eta = \dfrac{T_c - T_a}{T_c}$.

Кроме того, КПД цикла Отто можно выразить через отношение объемов: $\eta_O = 1 - \dfrac{1}{(V_2 / V_1)^{\gamma - 1}}$. Величина V_2/V_1 называется *сжатием горючей смеси*.

В Уфимском авиационном институте изобрели сапоги-скороходы, которые позволяют делать четырехметровые «шаги», развивая скорость до 35 км/ч. В основе устройства «моторизации бега» — микродвигатель внутреннего сгорания ударного действия.

Цикл Дизеля[1]. В 1897 г. немецкий инженер Р. Дизель изобрел двигатель, основанный на цикле «сжатие — самопроизвольное воспламенение». Если заменить изохорический процесс bc (рис. 3.9), по которому идет нагрев топливной смеси, изобарическим, то получим цикл Дизеля. Компания БМВ выпустила 6-цилиндровый двигатель 730d объемом 3 л, мощностью 184 л. с., развивающий крутящий момент 410 Н·м при 2000–3000 об/мин.

Цикл Стирлинга[2]. В настоящее время ведущие мировые автомобильные компании совершенствуют двигатель «внешнего сгорания», основанный на цикле, предложенном в 1816 г. Р. Стирлингом. Если на диаграмме рисунка 3.9 заменить адиабаты cd и ab изотермами, то мы получим цикл Стирлинга. Согласно первому закону термодинамики имеем уравнение $0 = -Q'_{ab} + Q'_{bc} + Q'_{cd} - A'$. Поскольку $Q_{bc} = Q'_{da}$, то $0 = -Q'_{ab} + Q'_{cd} - A'$. Если обмен теплотой в изохорических процессах считать внутренним процессом, то $Q_2 = Q_{cd}$ — КПД цикла совпадает с КПД цикла Карно. Дви-

---

[1] Дизель Рудольф Кристиан Карл (1858–1913) — немецкий инженер и изобретатель, создатель дизельного двигателя.

[2] Стирлинг Роберт (1790–1878) — шотландский священник, изобретатель двигателя Стирлинга.

гатель внешнего сгорания имеет ряд преимуществ. Сгорание смеси происходит непрерывно, а не вспышками. Его можно использовать без глушителя. Выбросы продуктов сгорания значительно меньше, чем в других двигателях (рис. 3.11). Кроме того, двигатель Стирлинга работает не только за счет сжигания топлива, но и от любого источника тепла, например солнечных лучей. Его можно использовать и в космосе, и в авиации (рис. 3.12).

Рис. 3.11
Двигатель внешнего сгорания (двигатель Стирлинга)

Этот двигатель начинает внедряться только сейчас, благодаря созданию новых конструктивных материалов, выдерживающих длительную работу при высоких температурах.

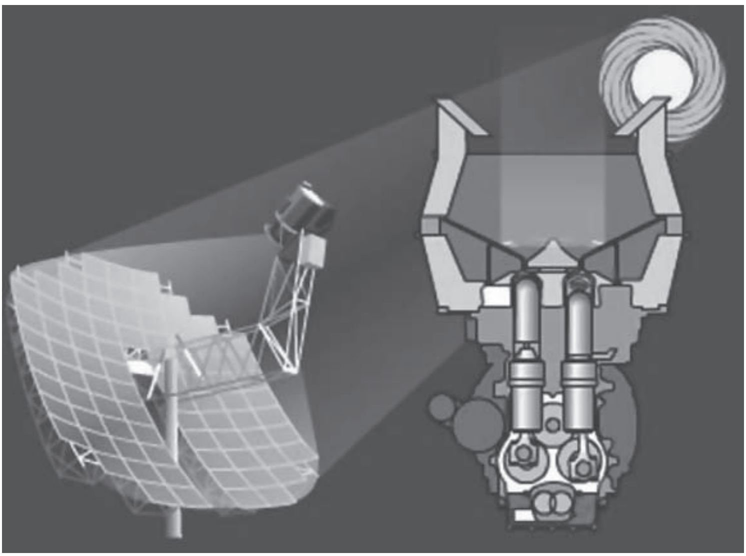


Рис. 3.12
Использование солнечной энергии в двигателе Стирлинга

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что назвается круговым процессом (циклом)?
2. Проанализируйте прямой и обратный циклы.
3. Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?
4. Дайте понятие тепловой машины, чем отличается тепловой двигатель от холодильной машины?
5. Для чего необходим холодильник тепловой машине?
6. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
7. Сформулируйте теорему Карно.
8. Проанализируйте PV-диаграмму цикла Карно.
9. Представив цикл Карно на PV-диаграмме графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
10. Как вычисляется работа и КПД цикла Карно?
11. Чем определяется КПД цикла Карно? Какие машины обладают максимальным КПД?
12. Кроме холодильных машин, обратный цикл Карно положен в основу действия тепловых насосов. Поясните, как это происходит?
13. Холодильник основан на цикле Карно и предназначен для хранения газообразного гелия при температуре 4 К. Сколько джоулей механической энергии требуется для того, чтобы изъять 1 Дж тепла из гелия, находящегося при этой температуре? (Температура горячего резервуара комнатная.)
14. Решите предыдущее упражнение для случая, когда температура образца гелия не 4 К, а 0,1 К.
15. Холодильник, основанный на цикле Карно (рис. 3.7), извлекает из охлаждаемого тела 140 Дж тепла. Это тепло передается теплообменнику, имеющему температуру 27°С. Среднюю температуру тела в процессе охлаждения можно считать равной 7°С. Сколько работы в джоулях нужно затратить на этот процесс?
16. Покажите, что КПД цикла Отто на рисунке 3.9 равен $\eta = 1 - T_d/T_c$.

17. Вычислите теоретический выигрыш в КПД при увеличении степени сжатия бензинового двигателя от 6 до 8?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.2.1*. Азот массой $m=10$ г, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2=1{,}4$ л. Найдем давление P_2, температуру T_2 и работу сжатия A, если азот сжимается: а) изотермически; б) адиабатически.

Дано:
$m=0{,}01$ кг
$\mu=28\cdot10^{-3}$ кг/моль
$P_1=10^5$ Па
$T_1=273$ К
$V_2=1{,}4\cdot10^{-3}$ м^3
P_2 — ?
T_2 — ?
A — ?

Решение. а) При изотермическом сжатии газа $T=\text{const}$, поэтому $T_1=T_2=273$ К. Из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$P_2V_2=\frac{m}{\mu}RT_2,$$

отсюда найдем давление газа:

$$P_2=\frac{mRT_2}{\mu V_2},$$

$$[P_2]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}\right]=\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right]=\text{Па},$$

$$P_2=\frac{0{,}01\cdot8{,}31\cdot273}{28\cdot10^{-3}\cdot1{,}4\cdot10^{-3}}=5{,}78\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Работа при изометрическом сжатии:

$$A=RT_1\frac{m}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

По закону Бойля — Мариотта запишем: $P_1V_1=P_2V_2$, отсюда $P_1/P_2=V_2/V_1$. Тогда получим:

$$A=RT_1\frac{m}{\mu}\ln\frac{P_1}{P_2},$$

$$[A]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}\right]=\text{Дж},$$

$$A=8{,}31\cdot273\cdot\frac{0{,}01}{28\cdot10^{-3}}\ln\frac{5{,}78\cdot10^5}{10^5}=-1{,}42\ \text{Дж}.$$

б) Поскольку азот двухатомный газ, то показатель адиабаты $\gamma=1,4$. Из уравнения Пуассона для адиабатического сжатия запишем:

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$$

или

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}.$$

Получим отношение:

$$\frac{P_1T_2}{P_2T_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-(\gamma-1)},$$

отсюда

$$V_1=\frac{V_2P_2T_1}{P_1T_2}.$$

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$P_1V_1=\frac{m}{\mu}RT_1,$$

тогда

$$V_1=\frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{P_1}.$$

Исходя из этого, получим

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{V_2\mu P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma},$$

отсюда найдем давление P_2:

$$P_2=P_1\Big/\left(\frac{V_2\mu P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma},$$

$$[P_2]=\left[\text{Па}\Big/\frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}\right]=\text{К},$$

$$P_2=10^5\Big/\left(\frac{1,4\cdot10^{-3}\cdot28\cdot10^{-3}\cdot10^5}{0,01\cdot8,31\cdot273}\right)^{1,4}=11,6\cdot10^5\ \text{Па}.$$

По схожему принципу получим отношение для температуры:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2\mu P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma-1},$$

отсюда найдем температуру T_2:

$$T_2=T_1\Big/\left(\frac{V_2\mu P_1}{mRT_1}\right)^{\gamma-1},$$

$$[T_2]=\left[\text{К}\Big/\frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}\right]=\text{К},$$

$$T_2=273\Big/\left(\frac{1{,}4\cdot10^{-3}\cdot28\cdot10^{-3}\cdot10^5}{0{,}01\cdot8{,}31\cdot273}\right)^{1{,}4-1}=545\,\text{К}.$$

Найдем работу адиабатического сжатия:

$$A=\frac{mT_1}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right),$$

$$[A]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}\right]=\text{Дж},$$

$$A=\frac{0{,}01\cdot273}{28\cdot10^{-3}}\cdot\frac{8{,}31}{1{,}4-1}\left(1-\frac{545}{273}\right)=-2{,}02\ \text{кДж}.$$

Ответ: а) $P_2=5{,}78\cdot10^5$ Па; $T_2=273$ К; $A=-1{,}42$ Дж;
б) $P_2=11{,}6\cdot10^5$ Па; $T_2=545$ К; $A=-2{,}02$ кДж.

Задача 3.2.2. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, показанный на рисунке. Определите КПД цикла, если $V_1=1$ л, $V_2=2$ л, $P_1=0{,}1$ МПа, $P_2=0{,}2$ МПа.

Решение. Термический коэффициент КПД цикла

Дано:
$V_1=10^{-3}$ м
$V_2=2\cdot10^{-3}$ м
$P_1=10^5$ Па
$P_2=2\cdot10^5$ Па

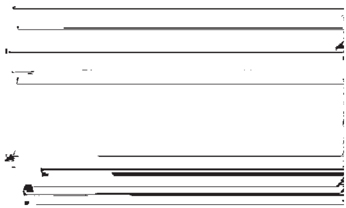
η — ?

$$\eta=A/Q,$$

где A — работа, совершаемая газом за цикл; Q — количество теплоты, подведенное при этом к газу.

Работа газа A равна площади прямоугольника $BCDE$, т. е.

$$A=(P_2-P_1)(V_2-V_1).$$



Газ получает тепло на участке BCD. Согласно первому началу термодинамики запишем

$$Q = \Delta U_{BD} + A_{CD},$$

где ΔU_{BD} — изменение внутренней энергии газа; A_{CD} — работа в газе в процессе CD.

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона, запишем выражение в виде

$$\Delta U_{BD} = (i/2)(P_2V_2 - P_1V_1).$$

Работа определяется по следующей формуле:

$$A_{CD} = P_2(V_2 - V_1).$$

Исходя из этого, найдем количество теплоты:

$$Q = (i/2)(P_2V_2 - P_1V_1) + P_2(V_2 - V_1).$$

Получим выражение для КПД:

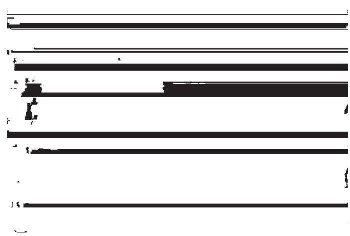
$$\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{(i/2)(P_2V_2 - P_1V_1) + P_2(V_2 - V_1)},$$

$$\eta = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{Па}\cdot\text{м}^3} = 1,$$

$$\eta = \frac{(2\cdot 10^5 - 10^5)(2\cdot 10^{-3} - 10^3)}{(i/2)(2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3} - 10^5\cdot 10^{-3}) + 2\cdot 10^5\cdot(2\cdot 10^{-3} - 10^3)} = 0{,}15.$$

Ответ: $\eta = 0{,}15$.

Задача 3.2.3. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изобары *1–2*, адиабаты *2–3* и изотермы *3–1* (см. рис.). Найти КПД машины как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температуры рабочего вещества, используемого в этом цикле.



Дано:
T_1
T_2
η — ?

Решение. Так как участок *3–1* — изотерма, то температура $T_3 = T_1$. КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1)$$

На участке *3–1* рабочее вещество получает количество теплоты

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln\frac{V_1}{V_3}. \quad (2)$$

На участке *1–2* происходит изобарное сжатие, рабочее вещество отдает количество теплоты холодильнику:

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) = -\frac{m}{\mu} C_P (T_1 - T_2). \quad (3)$$

На этом участке объем газа уменьшается от V_1 до V_2. Согласно закону Гей-Люссака для изобарного процесса температура тоже уменьшается, т. е. $T_2 < T_1$.

Для определения КПД цикла подставим выражения (2) и (3) в формулу (1):

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln\frac{V_1}{V_3} - \frac{m}{\mu} C_P (T_1 - T_2)}{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln\frac{V_1}{V_3}}. \quad (4)$$

Температура и объем газа, совершающего изобарный процесс, связаны между собой соотношением

$$V_1/V_2 = T_1/T_2, \quad (5)$$

а при адиабатном процессе соотношением

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (6)$$

Перемножим левые и правые части уравнений (5) и (6):

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в формулу (4), получим

$$\eta = 1 - \frac{C_P(T_1 - T_2)}{RT_1\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}.$$

Эту формулу можно упростить, заменив $\gamma = C_P/C_V$ и используя уравнение Майера:

$$\eta = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.2.1. Азот (молярная масса $M = 28 \cdot 10^3$ кг/моль) находится при температуре $T_1 = 280$ К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в 2 раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равной первоначальной. Определите: работу, совершенную газом; изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $A = \frac{(n-1)mRT_1}{nM} = 2{,}08 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 3.2.2*. В идеальной тепловой машине Карно, работающей по обратному циклу (холодильной машине), в качестве холодильника используется вода при 0°С, а в качестве нагревателя — вода при 100°С. Определите, сколько воды можно заморозить в холодильнике, если превратить в пар 200 г воды в нагревателе. Удельная теплота плавления льда $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $2{,}26 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг.

Ответ: $m_2 = \frac{T_2 m_1 r}{T_1 \lambda} = 0{,}987$ кг.

Задача 3.2.3. Кислород, взятый при температуре $T_1 = 300$ К, расширяется адиабатически, и его внутренняя энергия уменьшается на $\Delta U = 8$ кДж, а объем увеличивается в $n = 9$ раз. Определите массу m кислорода.

Ответ: $m = \dfrac{A\mu(\gamma - 1)}{RT_1\left(1 - \dfrac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} = \dfrac{\Delta U(\gamma - 1)}{RT_1\left(1 - \dfrac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} = 7 \cdot 10^{-2}$ кг.

Задача 3.2.4*. Воздух сжимается от объема $V_1 = 20$ л до объема $V_2 = 2$ л. При каком процессе сжатия — адиабатическом или изотермическом — затрачивается меньше работы?

Ответ: $A_1 / A_2 = (\gamma - 1)\ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) / \left(1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) = 0{,}6.$

Задача 3.2.5. Определить работу, совершенную над одним молем воздуха в цикле Карно, если степень изотермического и адиабатического сжатия равна двум, температура холодильника $T_2 = 300$ К.

Ответ: $Q_2 + A_{41} = 3216$ Дж.

Задача 3.2.6. Определить работу, совершаемую одним молем воздуха в цикле Карно, если степень изотермического и адиабатического расширения равна двум, температура нагревателя $T_1 = 400$ К.

Ответ: $Q_1 + A_{23} = 4288$ Дж.

Задача 3.2.7. Определить работу, совершенную одним молем воздуха в цикле Карно, если объем газа увеличился в 4 раза при получении в изотермическом процессе теплоты $Q_1 = 5650$ Дж. Первоначально газ находится при нормальных условиях.

Ответ: $A = 2478$ Дж.

Задача 3.2.8. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, в качестве рабочего тела использует воздух, который при нормальных условиях (давление $P_1 = 10^5$ Па, температура $T_1 = 273$ К) занимает объем $V_1 = 1$ л, а после изотермического и адиабатического расширения объемы равны $V_2 = 3$ л и $V_3 = 5$ л. Найти работу A_i, совершаемую газом на каждом участке цикла, полную работу A, совершаемую за весь цикл, и КПД цикла.

Ответ: $A = \sum_{i=1}^{4} A_i = 12{,}8$ Дж; $\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 0{,}17$.

Задачи 3.2.9. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм, причем минимальная температура $T_1 = 300$ К. Определить, во сколько раз максимальная температура цикла T_2 больше минимальной T_1, если степень сжатия газа $V_1/V_2 = 10$, а КПД цикла равен $\eta = 0{,}3$.

Ответ: $T_2/T_1 = 2$.

3.3. ЭНТРОПИЯ. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

3.3.1. ПРИВЕДЕННАЯ ТЕПЛОТА. ЭНТРОПИЯ

Из рассмотренного в п. 3.2.3 цикла Карно видно, что равны между собой отношения значений теплоты к температурам (3.24), при которых они были получены или отданы в *изотермическом процессе*.

Отношение теплоты Q в изотермическом процессе к температуре, при которой происходила передача теплоты, называется ***приведенной теплотой Q′***:

$$Q' = \frac{Q}{T}. \tag{3.28}$$

Для подсчета приведенной теплоты в произвольном процессе необходимо разбить этот процесс на бесконечно малые участки, где T можно считать константой. Приведенная теплота на таком участке будет равна $\delta Q/T$.

Суммируя приведенную теплоту на всех участках процесса, получим

$$Q'_{1-2} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Тогда в обратимом цикле Карно (п. 3.2.3, 3.2.4) имеем

$$Q'_{\text{Карно}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} + \int_B^C \frac{\delta Q}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q}{T_2} + \int_D^A \frac{\delta Q}{T}.$$

Этот результат справедлив для любого обратимого процесса.

Таким образом, *для процесса, происходящего по замкнутому циклу,*

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \tag{3.29}$$

Из равенства нулю интеграла, взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Это позволяет ввести новую функцию состояния S:

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}}. \tag{3.30}$$

Функция состояния, полный дифференциал которой равен $\frac{\delta Q}{T}$, называется ***энтропией*** (от *греч.* entropia — поворот, превращение) — мера способности теплоты превращаться в другие виды энергии.

Энтропия *S — это отношение полученной или отданной теплоты к температуре, при которой происходил этот процесс*: $S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}$.

Понятие энтропии впервые введено Р. Клаузиусом в 1865 г.

Для обратимых процессов ***изменение энтропии***, как следует из (3.29):

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0, \text{ т. е. } S = \text{const}, \text{ так как } \oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \tag{3.31}$$

Это выражение называется ***равенством Клаузиуса.***

В необратимом цикле известно (3.26), что КПД $\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}$, т. е.

$$1 - Q_2/Q_1 < 1 - T_2/T_1.$$

Клаузиус Рудольф (1822–1888) — немецкий физик-теоретик, один из создателей термодинамики и кинетической теории газов. Его работы посвящены молекулярной физике, термодинамике, теории паровых машин, теоретической механике, математической физике. Развивая идеи Карно, точно сформулировал принцип эквивалентности теплоты и работы. В 1850 г. получил общие соотношения между теплотой и механической работой (первое начало термодинамики) и разработал идеальный термодинамический цикл паровой машины.

Отсюда $\left|\dfrac{Q_2}{T_2}\right| > \left|\dfrac{Q_1}{T_1}\right|$, тогда

$$\Delta S_{\text{необр}} = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0.$$

Таким образом,

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0 \text{ или } \oint \frac{\delta Q}{T} > 0. \qquad (3.32)$$

Это выражение называют ***неравенством Клаузиуса***: *при любом необратимом процессе в замкнутой системе* ***энтропия возрастает*** ($\mathrm{d}S > 0$).

Примечание. На основании этих рассуждений Р. Клаузиус выдвинул ***гипотезу о тепловой смерти Вселенной*** — ошибочный вывод о том, что все виды энергии во Вселенной в конце концов должны перейти в энергию теплового движения, которая равномерно распределится по веществу Вселенной, после чего в ней прекратятся все макроскопические процессы.

Свойства энтропии:

1) энтропия является функцией состояния, так как зависит только от начальных и конечных параметров состояния системы и не зависит от пути протекания процесса;

2) энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной;

3) энтропия S — величина *аддитивная*, т. е. она равна сумме энтропий всех тел, входящих в систему:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i;$$

4) в теплоизолированной системе при протекании обратимого процесса энтропия не меняется. Поэтому равновесные адиабатические процессы называют *изоэнтропийными процессами*;

5) при постоянном объеме энтропия является непрерывно возрастающей функцией внутренней энергии системы.

3.3.2. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ В ИЗОПРОЦЕССАХ

Энтропия системы является функцией ее состояния, определенной с точностью до произвольной постоянной.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T}. \qquad (3.33)$$

Таким образом, по формуле (3.33) можно определить энтропию лишь с точностью до аддитивной постоянной, т. е. *начало энтропии произвольно*. Физический смысл имеет лишь ***разность энтропий***.

Исходя из этого найдем изменения энтропии в процессах идеального газа.

Так как $T=\text{const}$, то

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu} C_V \mathrm{d}T = 0,$$

$$\delta A = P\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}\mathrm{d}V;$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

или

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{3.34}$$

Таким образом, ***изменение энтропии*** $\Delta S_{1\to 2}$ *идеального газа при переходе его из состояния* 1 *в состояние* 2 ***не зависит от вида перехода*** $1 \to 2$.

Каждый из изопроцессов идеального газа характеризуется своим изменением энтропии, а именно:

- *изохорический*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$, так как $V_1 = V_2$;
- *изобарический*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} \int\limits_{T_1}^{T_2} C_P \frac{\mathrm{d}T_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_P \ln \frac{T_2}{T_1}$, так как $P_1 = P_2$;
- *изотермический*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$, так как $T_1 = T_2$;
- *адиабатический*: $\Delta S = 0$, так как $\delta Q = 0$.

Отметим, что в последнем случае адиабатический процесс называют *изоэнтропийным процессом*, так как $S = \text{const}$.

3.3.3. ПОВЕДЕНИЕ ЭНТРОПИИ В ПРОЦЕССАХ ИЗМЕНЕНИЯ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ*

Рассмотрим три агрегатных состояния: *твердое, жидкое и газообразное* и два перехода к ним.

Схема возможных изменений агрегатного состояния вещества:

Фазовый переход «твердое тело — жидкость»

Из школьного курса физики известны четыре факта об этом переходе.

Факт первый: переход вещества из твердого состояния (фазы) в жидкое называется *плавлением*, а обратный — *кристаллизацией*.

Факт второй: при плавлении система поглощает тепло, а при отвердевании — отдает тепло.

Факт третий: в процессе плавления (кристаллизации) температура системы остается постоянной до тех пор, пока вся система не расплавится. Эта температура называется *температурой плавления*.

Факт четвертый: закон плавления: количество тепла δQ, которое необходимо для плавления вещества массой dm, пропорционально этой массе:

$$\delta Q = \lambda dm. \tag{3.35}$$

Коэффициент пропорциональности λ есть константа, зависящая только от вещества системы и называемая *удельной теплотой плавления*.

Этот закон справедлив и для кристаллизации, правда с одним отличием: δQ в этом случае — тепло, выделяемое системой. Поэтому в обобщенном виде закон плавления и конденсации можно записать так:

$$\delta Q = \pm \lambda dm.$$

Изменение энтропии в процессе этого фазового перехода можно найти просто, если считать процесс *равновесным*.

Это вполне допустимое приближение, если считать, что разность температур между системой и тем объектом, который поставляет системе тепло, не слишком велика, намного меньше температуры плавления. *Тогда можно использовать термодинамический смысл энтропии*: с точки зрения термодинамики *энтропия* — это такая функция состояния системы, изменение которой $\mathrm{d}S$ в элементарном равновесном процессе равно отношению порции тепла δQ, которое система получает в этом процессе, к температуре системы T:

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$$

или

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} \mathrm{d}S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Подставим сюда выражение для δQ, получим

$$\Delta S = \pm \int_1^2 \frac{\lambda \mathrm{d}m}{T}.$$

Так как температура системы в данном фазовом переходе не меняется и равна температуре плавления, подынтегральное выражение — это величина, которая в ходе процесса не меняется, поэтому она от массы m вещества не зависит. Тогда

$$\Delta S = \pm \lambda m / T_{\text{пл}}. \tag{3.36}$$

Из этой формулы следует, ***что при плавлении энтропия возрастает, а при кристаллизации — уменьшается***. *Физический смысл этого результата достаточно ясен*: фазовая область молекулы в твердом теле гораздо меньше, чем в жидкости, так как в твердом теле каждой молекуле доступна только малая область пространства между соседними узлами кристаллической решетки, а в жидкости молекулы занимают всю область пространства. Поэтому при равной температуре энтропия твердого тела меньше энтропии жидкости. Это означает, что твердое тело представляет собой более упорядоченную и менее хаотичную систему, чем жидкость.

Фазовый переход «жидкость — газ»

Этот переход обладает всеми свойствами перехода «твердое тело — жидкость».

Существуют четыре факта, известные из школьного курса физики.

Факт первый: переход вещества из жидкости в газовую фазу называется *испарением*, а обратный переход — *конденсацией*.

Факт второй: при испарении система поглощает тепло, при конденсации — теряет.

Факт третий: процессы испарения и конденсации протекают в широком диапазоне температур, но фазовым переходом они являются лишь тогда, когда процесс захватывает всю массу вещества. Это происходит при определенной температуре $T_к$, которая называется *температурой кипения*. Для каждого вещества температура кипения своя. В процессе фазового перехода «жидкость — газ» температура остается постоянной и равной температуре кипения до тех пор, пока вся система не перейдет из одной фазы в другую.

Факт четвертый: закон испарения: *количество тепла* δQ, *необходимое для испарения вещества массой* $\mathrm{d}m$, *пропорционально этой массе*:

$$\delta Q = r\mathrm{d}m.$$

Коэффициент пропорции r в этом выражении есть константа, зависящая от вещества системы, называемая *удельной теплотой испарения*.

Этот закон справедлив и для конденсации, правда с одним отличием: δQ в этом случае — тепло, выделяемое системой. Поэтому закон испарения и конденсации можно записать в общем виде:

$$\delta Q = \pm r\mathrm{d}m, \qquad (3.37)$$

где знак «+» относится к испарению, а знак «−» — к конденсации.

Изменение энтропии в этом процессе можно найти просто, считая процесс равновесным. И опять это вполне допустимое приближение, при условии, что разность температур между системой и «поставщиком» тепла невелика, т. е. намного меньше температуры кипения. Тогда

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_{S_1}^{S_2} \mathrm{d}S = \int\limits_1^2 \delta Q / T = \pm\int\limits_1^2 \frac{r\mathrm{d}m}{T} = \pm rm / T_к. \qquad (3.38)$$

Из формулы (3.38) следует, ***что при испарении энтропия возрастает, а при конденсации уменьшается.***

Физический смысл этого результата состоит в различии фазовой области молекулы в жидкости и газе. Хотя в жидкости и газе каждой молекуле доступна вся область пространства, занятая системой, но сама эта область для жидкости существенно меньше, чем для газа. В жидкости силы притяжения между молекулами удерживают их на определенном расстоянии друг от друга. Поэтому каждая молекула хотя и имеет возможность свободно мигрировать по области пространства, занятой жидкостью, но не имеет возможности «оторваться от коллектива» остальных молекул: стоит ей оторваться от одной молекулы, как тут же притягивается другая. Поэтому *объем жидкости зависит от ее количества и никак не связан с объемом сосуда*.

Молекулы газа ведут себя иначе. У них гораздо больше свободы, среднее расстояние между ними таково, что силы притяжения очень малы и молекулы «замечают друг друга» лишь при столкновениях. В результате *газ всегда занимает весь объем сосуда*.

Поэтому при равных температурах фазовая область молекул газа значительно больше фазовой области молекул жидкости и ***энтропия газа больше энтропии жидкости***. *Газ по сравнению с жидкостью — гораздо менее упорядоченная, более хаотичная система.*

3.3.4. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамика — это наука о тепловых процессах, о превращении тепловой энергии. Для описания термодинамических процессов первого начала термодинамики недостаточно. Выражая общий закон сохранения и превращения энергии, первое начало не позволяет определить направление протекания процессов.

Исторически второе начало термодинамики возникло из анализа работы тепловых двигателей. Рассмотрим схему теплового двигателя (рис. 3.5). От термостата с более высокой температурой T_1, называемого *нагревателем,* за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а термостату с более низкой температурой T_2, называемому *холодиль-*

ником, за цикл передается количество теплоты Q_2 и совершается работа

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя был $\eta = 1$, должно быть выполнено условие $Q_2 = 0$, т. е. *тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты*, а это *невозможно*. Такой двигатель называется ***вечным двигателем второго рода***.

В 1824 г. С. Карно доказал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами. *Невозможность создания вечного двигателя второго рода подтверждается вторым началом термодинамики.*

Приведем некоторые формулировки второго начала термодинамики.

- *Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу* (принцип Кельвина).
- *Невозможен вечный двигатель второго рода* (формулировка Томсона — Планка).
- *Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему* (формулировка Клаузиуса).

Здесь необходимо отметить эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса, которые отличаются лишь по форме.

В п. 3.1.4 мы показали, что *при обратимом процессе имеет место равенство Клаузиуса*:

$$T\mathrm{d}S = \delta Q; \tag{3.39а}$$

при необратимом процессе имеет место неравенство Клаузиуса:

$$T\mathrm{d}S > \delta Q; \tag{3.39б}$$

Тогда ***для произвольного процесса***

$$\mathrm{d}S \geq \delta Q / T.$$

Значит, для замкнутой системы $\mathrm{d}S \geq 0$ — *математическая запись* ***второго начала термодинамики.***

Выражения (3.39*а*) и (3.39*б*) можно объединить:

$$T\mathrm{d}S \geq \delta Q. \tag{3.39}$$

Энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать (или увеличивается, или остается неизменной) — *закон возрастания энтропии.*

Первое и второе начала термодинамики в объединенной форме имеют вид

$$T\mathrm{d}S \geq \mathrm{d}U + \delta A. \tag{3.40}$$

3.3.5. СВОБОДНАЯ И СВЯЗАННАЯ ЭНЕРГИИ

Как следует из (3.40), в обратимом процессе

$$\delta A = -(\mathrm{d}U - T\mathrm{d}S).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\delta A = -\mathrm{d}(U - TS) - S\mathrm{d}T.$$

Обозначим: $U - TS = F$, где F — разность двух функций состояний, поэтому сама является также функцией состояния. Ее назвали ***свободной энергией.***

Тогда

$$\delta A = -(\mathrm{d}F + S\mathrm{d}T). \tag{3.41}$$

В обратимом изотермическом процессе $\mathrm{d}T = 0$. Тогда

$$\delta A = -\mathrm{d}F = -\int_1^2 \mathrm{d}F = -(F_2 - F_1) = F_2 - F_1,$$

т. е. $A_{\text{изот}} = F_1 - F_2$.

Следовательно, ***свободная энергия*** *есть та работа, которую могло бы совершить тело в обратимом изотермическом процессе, или свободная энергия есть максимальная возможная работа, которую может совершить система, обладая каким-то запасом внутренней энергии.*

Внутренняя энергия системы U равна сумме ***свободной*** (F) и ***связанной*** *энергии* (TS):

$$U = F + TS. \tag{3.42}$$

Связанная энергия — та часть внутренней энергии, которая не может быть превращена в работу, — это *обесцененная часть внутренней энергии*.

При одной и той же температуре связанная энергия тем больше, чем больше энтропия.

Таким образом, *энтропия системы есть мера обесцененности ее энергии* (т. е. мера той энергии, которая не может быть превращена в работу).

В термодинамике есть еще понятие «*энергетическая потеря в изолированной системе*»:

$$\Pi = T_{\text{мин}} \Delta S, \tag{3.43}$$

где $T_{\text{мин}}$ — температура окружающей среды.

При любом необратимом процессе энтропия увеличивается до того, пока не прекратятся какие-либо процессы, т. е. пока не станет $F = 0$. И это произойдет при достижении замкнутой системой равновесного состояния, т. е. когда все параметры состояния системы (P, T) во всех точках системы станут одинаковыми. Вывести систему из этого равновесного состояния можно, только затратив энергию извне.

3.3.6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭНТРОПИИ

Посмотрим на энтропию с другой стороны.

Макросостояние — это состояние вещества, характеризуемое его термодинамическими параметрами.

Состояние же системы, характеризуемое состоянием каждой входящей в систему молекулы, называют *микросостоянием*.

Так как молекулы движутся хаотически, то имеется много микросостояний, соответствующих одному макросостоянию. Пусть W — число микросостояний, соответствующее данному макросостоянию (как правило, $W \gg 1$).

Термодинамической вероятностью, или статистическим весом, макросостояния W называется число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние (или число перестановок одноименных элементов, при которых сохраняется данное макросостояние).

Термодинамическая вероятность W максимальна, когда система находится в *равновесном состоянии*.

В состоянии равновесия и термодинамическая вероятность максимальна, и энтропия максимальна. Из этого можно сделать вывод, что между ними существует связь.

Энтропия S — аддитивная величина: $S=\sum_{i=1}^{n} S_i$, где $\sum_{i=1}^{n} S_i$ — сумма энтропий тел, входящих в систему.

Вероятность сложного события есть произведение вероятностей состояний:

$$W = W_1 W_2,$$

где W_1 —первое состояние; W_2 — второе состояние.

Аддитивной величиной является логарифм *термодинамической вероятности*:

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \ln W_i.$$

Поэтому Л. Больцман предложил

$$S = k \ln W. \tag{3.44}$$

С этой точки зрения ***энтропия выступает как мера беспорядочности, хаотичности состояния***.

Например, в ящике черные и белые шары. Они порознь, есть порядок и W невелика. После встряхивания — шары перемещаются, W увеличивается и энтропия тоже. И сколько бы не встряхивать потом ящик, никогда черные шары не соберутся у одной стенки, а белые у другой, хотя эта вероятность не равна нулю.

Связь между S и W позволяет несколько иначе сформулировать второе начало термодинамики: ***наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание*** (*закон возрастания энтропии*).

Энтропия — вероятностная статистическая величина. Утверждение о возрастании энтропии потеряло свою категоричность. Ее увеличение вероятно, но не исключаются флуктуации.

Л. Больцман одним из первых опроверг гипотезу Клаузиуса о тепловой смерти Вселенной (о ней сказано ранее) и показал, что *закон возрастания энтропии — статистический закон*, т. е. возможны отклонения.

Российские физики Я. Б. Зельдович[1] и И. Д. Новиков[2] так же опровергли эту гипотезу и показали, что Р. Клаузиус не учел, что Вселенная не стационарна и в будущем не перейдет к одному состоянию, так как она эволюционирует, не остается статичной.

Из (3.44) следует, что ***энтропия замкнутой системы максимальна*** *при достижении системой равновесного состояния.*

3.3.7. ТРЕТЬЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое и второе начала термодинамики не позволяет определить значение энтропии при абсолютном нуле ($T = 0$ К).

На основании обобщения экспериментальных исследований свойств различных веществ при сверхнизких температурах был установлен закон, устранивший указанный недостаток. Сформулировал его в 1906 г. немецкий физик В. Нернст[3], и называется он теоремой Нернста.

Согласно Нернсту *изменение энтропии* ΔS *стремится к нулю при любых обратимых изотермических процессах, совершаемых между двумя равновесными состояниями при температурах, приближающихся к абсолютному нулю* ($\Delta S \to 0$ при $T \to 0$).

Как первое и второе начала термодинамики, ***теорема Нернста*** может рассматриваться как результат обобщения

---

[1] Зельдович Яков Борисович (1914–1987) — советский физик и физикохимик, член-корреспондент АН СССР, академик АН СССР.

[2] Новиков Игорь Дмитриевич (1935) — российский астрофизик-теоретик и космолог. В середине 1980-х гг. сформулировал принцип, названный принципом самосогласованности Новикова. Член-корреспондент РАН.

[3] Нернст Вальтер Герман (1864–1941) — немецкий химик, лауреат Нобелевской премии по химии.

опытных фактов, поэтому ее часто называют ***третьим началом термодинамики***. Иногда его формулируют следующим образом: *энтропия любой равновесной системы при абсолютном нуле температуры может быть равна нулю.*

Отсюда следует, что при $T \to 0$ интеграл $\int\limits_{T_0}^{T} \frac{\delta Q}{T}$ сходится на нижнем пределе, т. е. имеет конечное значение $S(0)=\text{const}$ или $S(0)=0$, причем *равенство нулю рассматривается как наиболее вероятное*. А нулевое значение энтропии (меры беспорядка) соответствует отсутствию теплового движения при абсолютном нуле. При $T=0$ внутренняя энергия и тепловая функция системы прекращают зависеть от температуры, кроме того, используя метод термодинамических функций, можно показать, что при $T=0$ от температуры не зависит коэффициент объемного расширения, термический коэффициент давления и другие параметры системы. Согласно классическим представлениям при абсолютном нуле возможно непрерывное множество микросостояний системы.

Объяснение теоремы Нернста можно дать только на основании квантово-механических представлений.

Третье начало термодинамики *можно сформулировать следующим образом:* ***при абсолютном нуле температуры любые изменения термодинамической системы происходят без изменения энтропии.***

$$\Delta S_{T=0}=0, \text{ т. е. } S_{T=0}=\text{const} \text{ или } S_{T=0}=0. \qquad (3.45)$$

Принцип Нернста был развит М. Планком, предположившим, что ***при абсолютном нуле температуры энергия системы минимальна***. Тогда можно считать, что при абсолютном нуле система имеет одно квантовое состояние:

$$S_{T=0}=0; \qquad (3.46)$$

$$S=k\ln W, \text{ а } W=1,$$

тогда

$$S_{T=0}=k\ln 1=0. \qquad (3.47)$$

Значит, термодинамическая вероятность W при $T = 0$ К должна быть равна единице, что *недостижимо*.

Следствием третьего начала является то, что невозможно охладить тело до абсолютного нуля — ***принцип недостижимости абсолютного нуля температуры***. Иначе был бы возможен вечный двигатель второго рода.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте понятие приведенной теплоты и энтропии.
2. Дайте определение, размерность и математическое выражение энтропии для различных процессов.
3. Что такое равенство и неравенство Клаузиуса?
4. Как ведет себя энтропия в процессах изменения агрегатного состояния?
5. Как изменяется энтропия при обратимых и необратимых процессах?
6. Приведите известные вам формулировки второго начала термодинамики.
7. Какой двигатель называется двигателем второго рода?
8. Какой вид имеет первое и второе начало термодинамики в объединенной форме?
9. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
10. В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы? незамкнутой системы?
11. Изобразите в системе координат T–S изотермический и адиабатный процессы.
12. Представьте графически цикл Карно в переменных T–S.
13. Дайте понятие свободной и связанной энергии.
14. Что такое энергетическая потеря в изолированной системе?
15. Каков статистический смысл энтропии?
16. Что такое макросостояние и микросостояние системы?
17. Что такое термодинамическая вероятность или статический вес макросостояния?
18. В каком состоянии энтропия и термодинамическая вероятность максимальны?

19. Какова связь между энтропией и термодинамической вероятностью?
20. На чем была основана гипотеза Клаузиуса о тепловой смерти Вселенной и почему она опровергнута?
21. Каковы недостатки первого и второго начала термодинамики?
22. Сформулируйте теорему Нернста.
23. Сформулируйте третье начало термодинамики.
24. Каково следствие третьего начала термодинамики?
25. В примере на рисунке будем считать, что имеется 0,5 л H_2 и 1,5 л N_2. Чему будет равно приращение энтропии при смешивании?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.3.1*. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 0{,}2$ МПа. Газ сначала был нагрет при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $P_3 = 0{,}5$ МПа. Найдите: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу. Постройте график процесса.

Дано:
$m = 2$ кг
$V_1 = 1$ м^3
$V_2 = 3$ м^3
$P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па
$P_3 = 5 \cdot 10^5$ Па
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

ΔU — ?
A — ?
Q — ?

Решение. Изобразим график процесса в P и V (см. рис.).

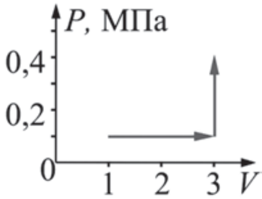
Изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T,$$

где $\Delta T = T_1 - T_3$ — разность между конечной и начальной температурой газа; m — масса газа; i — число степеней свободы газа.

Для нахождения T_1 и T_3 запишем уравнение Менделеева — Клайперона:

$$P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$$



и

$$P_3V_2 = \frac{m}{\mu}RT_3,$$

откуда T_1 и T_3:

$$T_1 = \frac{P_1V_1\mu}{mR}, \; T_3 = \frac{P_3V_2\mu}{mR}.$$

Исходя из этого, получим уравнение для изменения внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(\frac{P_3V_2\mu}{mR} - \frac{P_1V_1\mu}{mR}\right) = \frac{i}{2}(P_3V_2 - P_1V_1),$$

$$[\Delta U] = [\text{Па} \cdot \text{м}^3] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2}\right] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = \text{Дж},$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}(5 \cdot 10^5 \cdot 3 - 2 \cdot 10^5 \cdot 1) = 32{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Работу, совершенную газом, можно представить в виде суммы:

$$A = A_{BC} + A_{CD}.$$

Работа при изобарном BC и изохорном CD процессах соответственно

$$A_{BC} = P_1(V_2 - V_1) \text{ и } A_{CD} = 0.$$

Следовательно, работа равна:

$$A = P_1(V_2 - V_1),$$

$$[A] = [\text{Па} \cdot \text{м}^3] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2}\right] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = \text{Дж},$$

$$A = 2 \cdot 10^5 \cdot (3 - 1) = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, переданное газу, согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

$$Q = 32{,}5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = 36{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 32{,}5 \cdot 10^5$ Дж; $A = 4 \cdot 10^5$ Дж; $Q = 36{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

Задача 3.3.2*. Известно, что сила натяжения f резиновой нити фиксированной длины пропорциональна термодинамической температуре T, т. е. $f = \alpha T$, где $\alpha > 0$ и зависит только от длины нити. Доказать, что внутренняя энергия нити U является только функцией температуры, а энтропия нити S уменьшается с увеличением длины. Показать, что при адиабатном удлинении нити ее температура повышается.

Решение. Запишем соотношение для резиновой нити:

$$\mathrm{d}F = S\mathrm{d}T + f\mathrm{d}l,$$

где $F = F(l, T)$ — свободная энергия нити; S — ее энтропия.

Отсюда получаем

$$-S = (\partial F/\partial T)_l, \quad l = (\partial F/\partial l)_T.$$

Исходя из этого, получим

$$F = U + T(\partial F/\partial T)_l,$$

дифференцируем это выражение по l при $T = \mathrm{const}$:

$$f = (\partial U/\partial l)_T + T(\partial f/\partial T)_l.$$

Подставив в это выражение $f = \alpha T$, получим

$$(\partial U/\partial l)_T = 0,$$

следовательно, внутренняя энергия нити не зависит от ее удлинения.

Дифференцируем $-S = (\partial F/\partial T)_l$ по l при $T = \mathrm{const}$:

$$(\partial S/\partial l)_T = -\partial^2 F/\partial l \partial T = -(\partial f/\partial T)_l = -\alpha < 0,$$

т. е. энтропия уменьшается с увеличением длины нити.

При адиабатическом квазистатическом увеличении длины нити $S = \mathrm{const}$, следовательно,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{(\partial S/\partial l)_T}{(\partial S/\partial T)_l}.$$

$(\partial S/\partial T)_l = C_l/T$, следовательно, можно записать

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{T}{C_l}(\partial S/\partial l)_T = \frac{\alpha T}{C_l} > 0.$$

Из этого следует, что при адиабатическом удлинении нити ее температура повышается.

Задача 3.3.3. Объем газа при адиабатическом расширении увеличился в 2 раза, а температура уменьшалась в 1,32 раза. Найти число степеней свободы молекулы этого газа.

Дано:
$V_2/V_1=2$
$T_1/T_2=1{,}32$

i — ?

Решение. Показатель адиабаты равен $\gamma=\dfrac{i+2}{i}$. Запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Исходя из условий задачи, получим

$$2^{\gamma-1}=1{,}32$$

или

$$\left(\frac{i+2}{i}-1\right)\ln 2=\ln 1{,}32,$$

$$\frac{i+2-i}{i}=\frac{2}{i}=\frac{\ln 1{,}32}{\ln 2}=0{,}4.$$

Из этого следует, что $i=5$.

Ответ: $i=5$.

Задача 3.3.4. Найти изменение энтропии ΔS, если 30 г льда превращают в пар. Начальная температура льда −40°C, а температура пара 100°C. Теплоемкость воды и льда считать постоянными, а все процессы — происходящими при атмосферном давлении.

Дано:
$m=3\cdot 10^{-2}$ кг
$T_0=233$ К
$T_п=373$ К
$C_л=2{,}1\cdot 10^3$ Дж/(кг·К)
$C_в=4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·К)
$\lambda=3{,}35\cdot 10^5$ Дж/кг
$r=22{,}6\cdot 10^5$ Дж/кг

ΔS — ?

Решение. Найдем отдельно изменение энтропии при нагревании льда от −40°C до 0°C, плавлении льда, при нагревании образовавшейся изо льда воды до 100°C, превращении воды в пар при 100°C.

Полное изменение энтропии выразится суммой изменений энтропии ΔS_i для каждого из перечисленных процессов.

Изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}'Q}{T}. \qquad (1)$$

При бесконечно малом изменении $\mathrm{d}T$ температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты

$$\mathrm{d}Q_1 = Cm\mathrm{d}T, \qquad (2)$$

где C — удельная теплоемкость; m — масса тела.

Найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании льда, подставив уравнение (2) в (1):

$$\Delta S_1 \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_{\text{л}} m\mathrm{d}T}{T} = C_{\text{л}} m \ln\frac{T_1}{T_2},$$

где $T_1 = 273$ K;

$$\Delta S_1 = 2{,}1\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 10^{-2} \cdot \ln\frac{273}{233} = 9{,}98\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \qquad (3)$$

При вычислении по формуле (1) изменения энтропии во время таяния льда температура T выносится за знак интеграла как постоянная величина:

$$\mathrm{d}Q_2 = \lambda m,$$

где λ — удельная теплота плавления льда.

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ_2}{T_1} = \frac{Q_2}{T_1} = \frac{m\lambda}{T_1},$$

$$\Delta S_2 = \frac{3\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}35\cdot 10^5}{273} = 36{,}8\ \text{Дж}/\text{К}.$$

Найдем следующую формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды, полученной из льда, до 100°C.

$$\Delta S_3 = \int_{T_1}^{T_{\text{п}}} \mathrm{d}Q_3 = \int_{T_1}^{T_{\text{п}}} \frac{C_{\text{B}} m\mathrm{d}T}{T} = C_{\text{B}} m \ln\frac{T_{\text{п}}}{T_1},$$

где $T_{\text{п}} = 373$ К.

$$\Delta S_3 = 4{,}2\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 10^{-2} \cdot \ln\frac{373}{273} = 39{,}3\ \text{Дж}/\text{К}.$$

Превращение воды в пар происходит при постоянной температуре, поэтому при вычислении изменения энтропии в формуле (1) выносим T за знак интеграла:

$$Q_4 = rm,$$

где r — удельная теплота испарения воды.

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ_4}{T_п} = \frac{Q_4}{T_п} = \frac{rm}{T_п},$$

$$\Delta S_4 = \frac{22{,}6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{373} = 180 \text{ Дж / К}.$$

Полное изменение энтропии:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 266 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 266$ Дж/К.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.3.1. Смешали воду массой $m_1 = 5$ кг при температуре $T_1 = 280$ К с водой массой $m_2 = 8$ кг при температуре $T_2 = 350$ К. Найти: 1) температуру θ смеси; 2) изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

Ответ:
$$\theta = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 323 \text{ К};$$
$$\Delta S = c m_1 \ln\theta/T_1 + c m_2 \ln\theta/T_2 = 300 \text{ Дж/К}.$$

Задача 3.3.2. Лед массой $m_1 = 2$ кг при температуре $t_1 = 0$°C был превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру $t_2 = 100$°C. Определить массу m_2 израсходованного пара. Каково изменение ΔS энтропии системы «лед — пар»?

Ответ:
$$m_2 = \frac{m_1 r}{\lambda + c(t_2 - t_1)} = 0{,}25 \text{кг};$$
$$\Delta S = \frac{m_1 r}{T_1} - \frac{m_2 \lambda}{T_2} - c m_2 \ln\frac{T_2}{T_1} = 610 \text{Дж/кг}.$$

Задача 3.3.3. Водород массой $m=100$ г был изобарно нагрет так, что объем его увеличился в $n=3$ раза, затем водород был изохорно охлажден так, что давление его уменьшилось в $n=3$ раза. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = (m/\mu) R \ln n = 457$ Дж/кг.

Задача 3.3.4*. В бокал с коктейлем бросают кубик льда. Температура коктейля 20°С, масса 200 г, температура кубика 0°С, масса 10 г. Определите, насколько изменится энтропия содержимого бокала к тому моменту, когда кубик полностью растает. Удельная теплоемкость коктейля $c_к=4\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К) и удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

Ответ: $\Delta S=\Delta S_к+\Delta S_л=0{,}75$ Дж/К.

Задача 3.3.5*. Кислород массой $m=20$ г нагревается от температуры $t_1=20$°С до температуры $t_2=220$°С. Найдите изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Ответ: а) $\Delta S = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 6{,}75$ Дж / К;

б) $\Delta S=9{,}45$ Дж/К.

Задача 3.3.6*. Лед, имеющий массу $m=10$ г, взятый при температуре $t_1=-20$°С, нагревается и превращается в пар. Найдите изменение ΔS энтропии при таком превращении.

Ответ:

$$\Delta S = mc_Л \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_В \ln\left(\frac{T_П}{T_0}\right) + \frac{mr}{T_П} = 90 \text{ Дж / кг.}$$

Задача 3.3.7. Определите количество тепла, которое необходимо сообщить макроскопической системе, находящейся при температуре 290 К, чтобы при неизменном объеме ее статистический вес (термодинамическая вероятность) увеличился на 1%.

Ответ: $4\cdot10^{-23}$ Дж.

Задача 3.3.8. Кислород и водород, имеющие одинаковые массы и занимающие одинаковые объемы V, изотермически сжимают до объема $V/2$. Для какого газа приращение энтропии будет больше и во сколько раз?

Ответ: для водорода — в 16 раз.

Задача 3.3.9. Один киломоль идеального газа изобарически расширяется так, что при этом происходит увеличение энтропии на 5,75 кДж/К. Определите логарифм отношения термодинамических вероятностей конечного и начального состояний газа.

Ответ: $4{,}2 \cdot 10^{26}$.

3.4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

3.4.1. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Как известно, уравнение состояния устанавливает функциональную связь между давлением P, объемом V, температурой T и числом молей ν газа в состоянии равновесия. Эта связь может выражаться не только в форме уравнения, но также графически или в виде таблиц, которые часто используются, особенно для практических целей. Самым простым и известным уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \nu RT. \tag{3.48}$$

Реальные газы описываются уравнением состояния идеального газа только приближенно, и отклонения от идеального поведения становятся заметными при высоких давлениях и низких температурах, особенно когда газ близок к конденсации. Так, для газов с низкой температурой сжижения (He, H_2, Ne и даже N_2, O_2, Ar, CO, CH_4) при давлениях до 50 атм отклонения не превышают 5%, а при давлениях до 10 атм — 2%. Легко конденсирующиеся газы (CO_2, SO_2, Cl_2, CH_3Cl) уже при 1 атм обнаруживают отклонения до 3%.

Предпринималось много попыток для учета отклонений свойств реальных газов от свойств идеального газа путем введения различных поправок в уравнение состояния идеального газа.

Первая поправка в уравнении состояния идеального газа рассматривает собственный объем, занимаемый молекулами реального газа. В *уравнении Дюпре*[1] (1864)

$$P(V-\nu b)=\nu RT$$

постоянная b учитывает собственный мольный объем молекул, $\nu=m/\mu$ — число молей газа.

При понижении температуры межмолекулярное взаимодействие в реальных газах приводит к конденсации (образованию жидкости). Межмолекулярное притяжение эквивалентно существованию в газе некоторого внутреннего давления P' (иногда его называют статическим давлением). Изначально величина P' была учтена в общей форме в *уравнении Гирна*[2] (1865):

$$(P+P')(V-\nu b)=\nu RT.$$

Наибольшее распространение вследствие простоты и физической наглядности получило *уравнение* голландского физика *Ван-дер-Ваальса*. В 1873 г. он дал функциональную интерпретацию внутреннего давления. Согласно модели Ван-дер-Ваальса силы притяжения между молекулами (*силы Ван-дер-Ваальса*) обратно пропорциональны шестой степени расстояния между ними или второй степени объема, занимаемого газом. Считается также, что силы притяжения суммируются с внешним давлением. С учетом этих соображений уравнение состояния идеального газа преобразуется в *уравнение Ван-дер-Ваальса*:

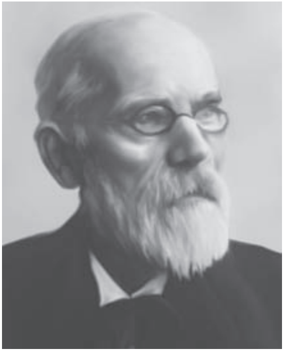
$$(V-\nu b)\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)=\nu RT, \tag{3.49}$$

где a — постоянная, учитывающая дополнительное давление за счет взаимного притяжения молекул.

---

[1] А. Дюпре — французский физик. В 1864 г. предложил учитывать собственный объем, занимаемый молекулами реального газа.

[2] Густав Адольф Гирн (1815–1890) — французский физик и инженер, член-корреспондент Парижской АН.



Ван-дер-Ваальс Ян Дидерик (1837–1923) — голландский физик. В 1910 г. Ван-дер-Ваальс получил Нобелевскую премию по физике «за работу над уравнением состояния газов и жидкостей». Помимо Нобелевской премии, Ван-дер-Ваальс получил почетную докторскую степень Кембриджского университета. Он являлся членом Нидерландской королевской академии наук и искусств и был избран иностранным членом Французской академии наук, Берлинской королевской академии наук, Московского императорского общества естествоиспытателей.

Реальные газы *— газы, свойства которых зависят от взаимодействия молекул.* В обычных условиях, когда средняя потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия много меньше средней кинетической энергии молекул, свойства реальных и идеальных газов отличаются незначительно. Поведение этих газов резко различно при высоких давлениях и низких температурах, когда начинают проявляться квантовые эффекты.

3.4.2. СИЛЫ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ван-дер-Ваальс, объясняя свойства реальных газов и жидкостей, предположил, что на *малых расстояниях между молекулами действуют* ***силы отталкивания****, которые с увеличением расстояния сменяются* ***силами притяжения****.* Межмолекулярные взаимодействия имеют электрическую природу и складываются из сил притяжения (ориентационных, индукционных) и сил отталкивания.

Ориентационные силы действуют между полярными молекулами — молекулами, обладающими дипольными или квадрупольными моментами. Сила притяжения между молекулами зависит от их взаимной ориентации, поэтому они и называются ориентационными. Хаотическое тепловое движение непрерывно меняет ориентацию полярных молекул, но среднее по всем ориентациям значение силы не равно нулю (рис. 3.13).

Среднее значение потенциальной энергии ориентационного межмолекулярного взаимодействия равно

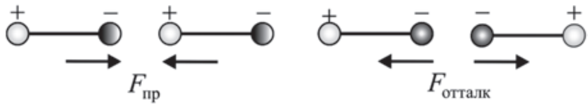


Рис. 3.13
Ориентационные силы, действующие между полярными молекулами

$U_{ор}(r) \sim p_1 p_2 r^{-6}$, где p_1, p_2 — дипольные моменты взаимодействующих молекул. Сила ориентационного взаимодействия $F_{ор} = -\partial U/\partial r \sim r^{-7}$ убывает с расстоянием значительно быстрее, чем кулоновская сила взаимодействия заряженных частиц $F_{кул} \sim r^{-2}$.

Индукционные (поляризационные) силы действуют между полярной и неполярной молекулами, а также между полярными молекулами. Полярная молекула создает электрическое поле, которое поляризует другую молекулу — индуцирует в ней дипольный момент. Потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия в этом случае пропорциональна дипольному моменту p_1 полярной молекулы и поляризуемости α_2 второй молекулы: $U_{инд} \sim p_1 \alpha_2 r^{-6}$. Индукционные силы убывают по тому же закону, что и ориентационные: $F_{инд} \sim r^{-7}$.

Дисперсионное молекулярное взаимодействие возникает благодаря виртуальному нарушению электронейтральности молекулы в отдельные моменты времени. Мгновенный диполь поляризует соседние молекулы — возникает взаимодействие мгновенных диполей. Данное взаимодействие называется дисперсионным, его энергия определяется поляризуемостью молекул α_1, α_2: $U(r) \sim \alpha_1 \alpha_2 r^{-6}$, а сила убывает по закону $F_{дисп} \sim r^{-7}$. Обычно дисперсионные силы превосходят ориентационные и индукционные. Например, при взаимодействии таких полярных молекул, как CO, HI, HBr и др., $F_{дисп}$ в десятки и сотни раз превосходит все остальные.

Отметим, что все три силы (рис. 3.14) и энергии (рис. 3.15) одинаковым образом убывают с расстоянием:

$$F = F_{ор} + F_{инд} + F_{дисп} \sim r^{-7},$$

$$U = U_{ор} + U_{инд} + U_{дисп} \sim r^{-6}.$$

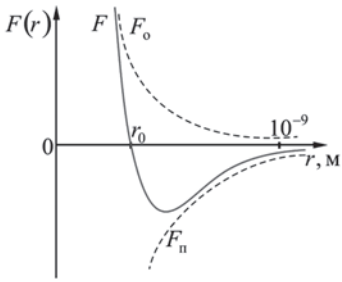


Рис. 3.14
Зависимость сил притяжения $F_п$ и сил отталкивания $F_о$ от расстояния

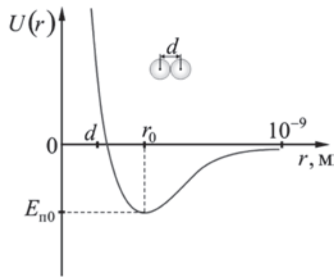


Рис. 3.15
Зависимость потенциальной энергии взаимодействия от расстояния

Силы отталкивания действуют между молекулами на очень малых расстояниях, когда происходит взаимодействие электронных оболочек атомов, входящих в состав молекул. Принцип Паули[1] запрещает проникновение заполненных электронных оболочек друг в друга. Возникающие при этом силы отталкивания зависят в большей степени, чем силы притяжения, от индивидуальных особенностей молекул. К хорошему согласию с данными экспериментов приводит допущение, что потенциальная энергия сил отталкивания возрастает с уменьшением расстояния по закону $U_{от}(r) \sim r^{-12}$, а соответственно сила отталкивания растет как $F_о \sim r^{-13}$. Полагаем, что $U(r=\infty)=0$, т. е. при больших расстояниях потенциальная энергия взаимодействия равна нулю. В этом случае *кривая взаимодействия описывается потенциалом Леннарда-Джонса*[2] (рис. 3.15):

$$U(r)=-ar^{-6}+br^{-12}.$$

Глубина потенциала равна $E_{п0}=-a^2/4b$ при $r_0=(2b/a)^{1/6}$ расстоянию, соответствующему *наибольшей энер-*

[1] Паули Вольфганг Эрнст (1900–1958) — родом из пражской еврейской семьи, внес существенный вклад в современную физику, особенно в области квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1945).

[2] Леннард-Джонс Джон Эдвард (1894–1954) — английский физик, химик. Член Лондонского королевского общества.

гии связи молекул, d — *эффективный диаметр молекулы*, определяющий размеры той области, в которую не может проникнуть другая молекула. Отметим, что в данном потенциале не учтены ориентационные взаимодействия, существенные для многоатомных молекул и кристаллов.

3.4.3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА*

Уравнение Ван-дер-Ваальса (3.49) — одно из первых уравнений состояния реального газа, учитывающее конечные размеры всех молекул, что становится существенным при больших давлениях, а также в случае притяжения молекул в результате межмолекулярного взаимодействия.

Уравнение состояния реального газа, предложенное Ван-дер-Ваальсом, можно получить из следующих рассуждений. Учтем влияние конечных размеров молекул на уравнение состояния реального газа. Давление определяется средней кинетической энергией теплового движения всех молекул:

$$P = nkT. \tag{3.50}$$

При конечных размерах молекул, имеющих радиус r, область $4\pi(2r)^3/3$ вокруг каждой из молекул будет недоступна для попадания в нее другой неточечной молекулы. В результате в сосуде, содержащем N молекул конечных размеров, область объемом $(N/2)4\pi(2r)^3/3 = 4NV_{\text{молек}}$ ($V_{\text{молек}} = 4\pi r^3/3$ — объем одной молекулы) будет недоступна для столкновений. Поэтому можно считать, что половина всех молекул занимает объем $b = 4NV_{\text{молек}}$ и покоится, а другая половина представляет собой точечные молекулы и движется с удвоенной кинетической энергией, обладая температурой $T' = 2T$. Объем, доступный точечным молекулам, будет равен $V - b$, а давление, оказываемое на стенки сосуда, определяется точечными подвижными молекулами ($N' = N/2$):

$$P = n'kT' = \frac{N'}{V - 4NV_{\text{молек}}} kT' = \frac{NkT}{V - 4NV_{\text{молек}}}.$$

Если в сосуде находится один моль газа, то уравнение состояния примет вид ($N = \mathrm{N_A}$, $\mathrm{N_A}k = R$, $b = 4\mathrm{N_A}V_{\text{молек}}$):

$$P(V - b) = RT.$$

Для $\nu = m/\mu$ молей газа уравнение состояния газа с учетом конечного размера молекул примет вид

$$P(V - \nu b) = \nu RT.$$

Отметим, что это уравнение является приближенным и выведено в предположении только парных столкновений. При больших давлениях это условие уже не выполняется и возможно одновременное соприкосновение трех и более частиц, а такие случаи были исключены из рассмотрения.

Рассмотрим теперь влияние сил притяжения на уравнение состояния идеального газа. Будем считать, для простоты, частицы газа точечными. Наличие сил притяжения между ними, действующих на больших расстояниях, приводит к появлению дополнительного внутреннего воздействия на газ. Это обусловлено тем, что в то время как в объеме газа действие сил притяжения между молекулами в среднем уравновешивается, на границе «газ — стенка сосуда» действие сил притяжения со стороны газа остается не скомпенсированным и появляется избыточная сила, направленная в сторону газа (рис. 3.16).

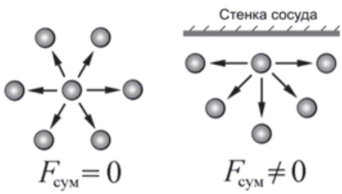


Рис. 3.16
Суммарные силы, действующие на молекулу

Дополнительное внутреннее давление пропорционально числу частиц, приходящихся на единицу площади границы n_S и силе взаимодействия этих частиц с другими частицами газа, находящимися в единице объема n_V.

В результате избыточное внутреннее давление P_i (i — *intrinsic*) будет пропорционально квадрату концентрации числа частиц

$$P_i \sim n_S n_V \sim N^2/V^2,$$

где N — полное число частиц в сосуде объема V. Если $N = \mathrm{N_A}$ — в сосуде находится 1 моль газа, то запишем

$$P_i = a/V^2,$$

где a — постоянная величина, своя для каждого сорта газа. В случае ν-молей имеем

$$P_i = \nu^2 a/V^2.$$

С учетом внутреннего давления уравнение состояния примет вид

$$P + P_i = nkT.$$

Давление P_i не зависит от материала стенки, в противном случае удалось бы создать вечный двигатель первого рода. Роль стенки может играть и сам газ. Достаточно для этого выполнить мысленное сечение произвольной плоскостью любой внутренней области объема газа. Полученное уравнение с учетом выражения для P_i переходит в новое уравнение состояния реального газа при наличии сил притяжения:

$$(P + \nu^2 a/V^2)V = \nu RT.$$

Учитывая совместное действие сил притяжения и сил отталкивания и полученные поправки для объема и давления в уравнении Менделеева — Клапейрона, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:

$$(P + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT, \tag{3.51}$$

или для одного моля:

$$(V_m - b)\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right) = RT. \tag{3.52}$$

Данное уравнение справедливо при условии $\nu b \ll V$ и $\nu^2 a/V^2 \ll P$. Помимо этого, предполагается, что частицы газа сферически симметричны. Поскольку реально это не так, то даже для неплотных газов величины a и b зависят от температуры. Таблица поправок Ван-дер-Ваальса и критических параметров приведена в приложении.

Примечание. Константы a и b выбраны таким образом, чтобы получить оптимальное согласование уравнения Ван-дер-Ваальса с измеренными изотермами для комнатной температуры.

Для плотных газов уравнение Ван-дер-Ваальса как количественное соотношение не годится. Однако качественно оно позволяет описывать поведение газов при высоких давлениях, конденсацию газов и переход газов в критическое состояние.

3.4.4. ИЗОТЕРМЫ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Проанализируем изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса — зависимости P от V для реального газа при постоянной температуре. Умножив уравнение Ван-дер-Ваальса на V^2 и раскрыв скобки, получим

$$PV^3 - (RT + bP)\nu V^2 + a\nu^2 V - ab\nu^3 = 0.$$

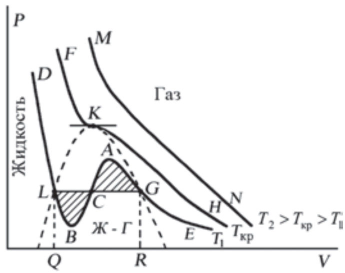


Рис. 3.17
Изотермы Ван-дер-Ваальса

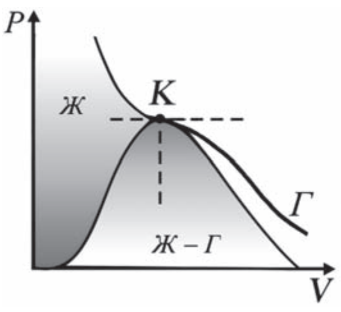


Рис. 3.18
Фазовые переходы:

«Ж — Г» — область двухфазных состояний: жидкость — газ; «Ж» — области жидких состояний; «Г» — газообразное состояние.

Поскольку данное уравнение имеет третью степень относительно V, а коэффициенты при V действительны, то оно имеет либо один, либо три вещественных корня, т. е. изобара $P = \text{const}$ пересекает кривую $P = P(V)$ в одной или трех точках, как это изображено на рисунке 3.17.

Критическую точку K мы определили как точку перегиба критической изотермы, в которой касательная к изотерме горизонтальна (рис. 3.17, 3.18). Ее можно определить также как точку, в которую в пределе переходят горизонтальные участки изотерм при повышении температуры до критической. На этом основан способ определения критических параметров P_k, V_k, T_k, принадлежащий английскому физику Т. Эндрюсу[1].

Полученные из уравнения Ван-дер-Ваальса значения параметров состояния в критической точке:

$$V_к = 3b,$$
$$P_к = a/(27b^2),$$
$$T_к = 8a/(27bR).$$

С повышением температуры мы перейдем от немонотонной зависимости $P = P(V)$ к монотонной однозначной функции. Изотерма при $T_{кр}$, которая разделяет немонотонные $T < T_{кр}$ и монотонные $T > T_{кр}$ изотермы, соответствует изотерме при критической температуре. При температуре выше критической зависимость $P = P(V)$ является однозначной монотонной функцией объема. Это означает, что при $T > T_{кр}$ вещество находится только в одном, газообразном состоянии, как это имело место у идеального газа.

При температуре газа ниже критической такая однозначность исчезает, а это означает возможность перехода вещества из газообразного состояния в жидкое и наоборот. На участке ACB изотермы T_1 давление растет с увеличением объема $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}V) > 0$. Данное состояние неустойчиво, поскольку здесь должны усиливаться малейшие флуктуации плотности. Поэтому область BCA не может устойчиво существовать. В областях DLB и AGE давление падает с увеличением объема $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}V)_T < 0$ — это необходимое, но не достаточное условие устойчивого равновесия. Эксперимент показывает, что система переходит из области устойчивых состояний GE (газ) в область устойчивых состояний LD (жидкость) через двухфазное состояние (газ — жидкость) GL вдоль горизонтальной изотермы GCL.

При квазистатическом сжатии, начиная с точки G, система распадается на две фазы — жидкость и газ, причем плотности жидкости и газа остаются при сжатии неизменными и равными их значениям в точках L и G соответ-

[1] Эндрюс Томас (1813–1885) — ирландский физикохимик.

ственно. При сжатии количество вещества в газообразной фазе непрерывно уменьшается, а в жидкой фазе — увеличивается, пока не будет достигнута точка L, в которой все вещество перейдет в жидкое состояние.

Наличие критической точки на изотерме Ван-дер-Ваальса означает, что для каждой жидкости существует такая температура, выше которой вещество может существовать только в газообразном состоянии. К этому заключению пришел и Д. И. Менделеев в 1861 г. Он заметил, что при определенной температуре прекращалось поднятие жидкости в капиллярах, т. е. поверхностное натяжение обращалось в нуль. При той же температуре обращалась в нуль скрытая теплота парообразования. Такую температуру Менделеев назвал температурой абсолютного кипения. Выше этой температуры (согласно Менделееву) газ не может быть сконденсирован в жидкость никаким увеличением давления.

При температурах, равных критической и выше, вещество становится вновь однородным при любых давлениях. Если температура выше критической, то вещество нельзя перевести в жидкое состояние.

3.4.5. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса слагается из внутренней энергии молекул, составляющих газ: кинетической энергии теплового движения центра масс молекул, равной $\int_0^T C_V \mathrm{d}T$, и потенциальной энергии взаимного притяжения молекул.

Потенциальная энергия притяжения молекул равна работе, необходимой для разведения молекул на бесконечное расстояние друг от друга. В этом конечном состоянии молекулы не взаимодействуют друг с другом, а потенциальную энергию можно считать равной нулю. Дополнительное давление газа Ван-дер-Ваальса за счет взаимного притяжения молекул равно $a/V_m{}^2$ и, следовательно, потенциальная энергия взаимодействия равна:

$$E_{\text{п}} = \int_{\infty}^{V_m} (a / V_m^2) dV_m = -a / V_m.$$

Знак «−» указывает на то, что между молекулами действуют силы притяжения; V_m — молярный объем, $V_m = V/\mu$, $\nu = m/\mu$.

Полная энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса определяется соотношением

$$U_m = \int_0^T C_V \mathrm{d}T - a / V_m.$$

Если C_V не зависит от температуры, то полная внутренняя энергия одного моля:

$$U_m = C_V T - a/V_m.$$

Причиной недостаточной точности уравнения Ван-дер-Ваальс считал ассоциацию молекул в газовой фазе, которую не удается описать, учитывая зависимость параметров a и b от объема и температуры, без использования дополнительных постоянных. После 1873 г. сам Ван-дер-Ваальс предложил еще шесть вариантов своего уравнения, последнее из которых относится к 1911 г. и содержит пять эмпирических постоянных. Две модификации уравнения предложил Клаузиус, и обе они связаны с усложнением вида постоянной b. Больцман получил три уравнения этого типа, изменяя выражения для постоянной a. Всего известно более сотни подобных уравнений, отличающихся числом эмпирических постоянных, степенью точности и областью применимости. Выяснилось, что ни одно из уравнений состояния, содержащих менее пяти индивидуальных постоянных, не оказалось достаточно точным для описания реальных газов в широком диапазоне P, V, T, и все эти уравнения оказались непригодными в области конденсации газов. Из простых уравнений с двумя индивидуальными параметрами неплохие результаты дают уравнения Дитеричи[1] и Бертло[2].

Принципиальное значение уравнения Ван-дер-Ваальса определяется следующими обстоятельствами:

---

[1] Дитеричи Конрад (1858–1929) — немецкий физик.

[2] Бертло Пьер Эжен Марселен (1827–1907) — французский физикохимик и общественный деятель.

- уравнение было получено из модельных представлений о свойствах реальных газов и жидкостей, а не явилось результатом эмпирического подбора функции $f(p, V, T)$, описывающей свойства реальных газов;
- уравнение долго рассматривалось как некоторый общий вид уравнения состояния реальных газов, на основе которого было построено много других уравнений состояния;
- с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса впервые удалось описать явление перехода газа в жидкость и проанализировать критические явления. В этом отношении уравнение Ван-дер-Ваальса имеет преимущество даже перед более точными уравнениями в вириальной форме.

3.4.6. ПРОЦЕСС ДЖОУЛЯ — ТОМСОНА. СЖИЖЕНИЕ ГАЗОВ*

Процесс протекания газа по теплоизолированной трубке, в которой имеется пористая перегородка, называется дросселированием газа, или процессом Джоуля — Томсона (рис. 3.19).

Если газ адиабатно расширяется и совершает при этом работу, то он охлаждается, так как работа в данном случае совершается за счет его внутренней энергии.

Подобный процесс, но с реальным газом — адиабатное расширение реального газа с совершением внешними силами положительной работы — осуществили английские физики Дж. Джоуль и У. Томсон (лорд Кельвин) в 1865 г.

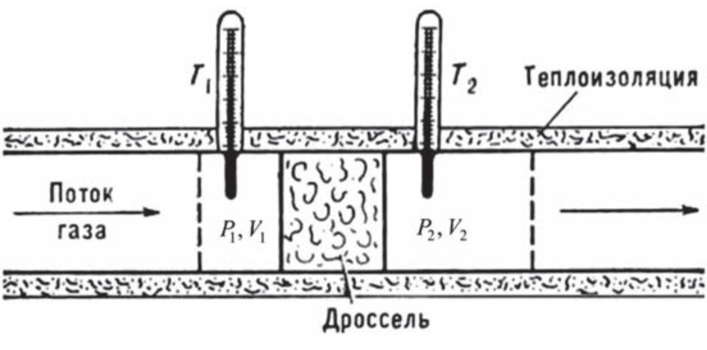


Рис. 3.19
Процесс Джоуля — Томсона

Эффект Джоуля — Томсона состоит в изменении температуры газа в результате медленного протекания газа под действием постоянного перепада давления сквозь дроссель — локальное препятствие газовому потоку, например пористую перегородку, расположенную на пути потока.

Первоначально в качестве дросселя использовалась мелкопористая перегородка из ваты.

Эффект Джоуля — Томсона свидетельствует о наличии в газе сил межмолекулярного взаимодействия. Расширение газа в условиях его изоляции приводит к росту его потенциальной энергии за счет увеличения расстояния между молекулами. Потенциальная энергия увеличивается за счет кинетической, и в результате замедления теплового движения молекул температура газа понижается.

Газ совершает внешнюю работу: последующие слои газа проталкивают предыдущие, а над самим газом совершают работу силы внешнего давления, обеспечивающие стационарность потока. Работа проталкивания через дроссель порции газа объемом V_1 при давлении P_1 равна P_1V_1, за дросселем эта порция газа занимает объем V_2 и совершает работу P_2V_2.

Совершенная над газом ***результирующая внешняя работа*** равна:

$$A = P_1V_1 - P_2V_2.$$

В адиабатических внешних условиях *эта работа идет на изменение его внутренней энергии*:

$$U_2 - U_1 = P_1V_1 - P_2V_2.$$

Из этого условия следует

$$P_1V_1 + U_1 = P_2V_2 + U_2.$$

Таким образом, в опыте Джоуля — Томсона сохраняется (остается неизменной) величина:

$$H = PV + U. \tag{3.53}$$

Она является *функцией состояния* и называется ***энтальпией***.

Энтальпия — термодинамический потенциал, характеризующий состояние системы в равновесии при выборе в качестве независимых переменных энтропии S и давления P. Она является функцией состояния. Полный дифференциал имеет вид

$$\mathrm{d}H = V\mathrm{d}P + T\mathrm{d}S.$$

Эффект Джоуля — Томсона принято называть ***положительным,*** если газ в процессе дросселирования охлаждается ($\Delta T < 0$), и ***отрицательным***, если газ нагревается ($\Delta T > 0$).

Для большинства газов, например для кислорода и азота, температура инверсии значительно выше комнатной. Поэтому эти газы при дросселировании охлаждаются. Для таких газов, как водород и гелий, температура инверсии значительно ниже комнатной. Поэтому они в процессе Джоуля — Томпсона нагреваются.

В технике низких температур процесс Джоуля — Томсона и адиабатическое расширение газов используются для понижения температуры и сжижения газов.

Сжижение газов

Превращение любого газа в жидкость — сжижение газа — возможно лишь при температуре ниже критической, однако критические температуры очень низкие (табл. 3.2).

Для достижения столь низких температур используют несколько методов: использование эффекта Джоуля — Томсона, адиабатическое расширение газа с совершением внешней работы, составление охлаждающих смесей.

Таблица 3.2

Газ	**He**	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{N_2}$	$\mathbf{O_2}$
$T_{кр}$, К	5,3	33	126,1	154,4

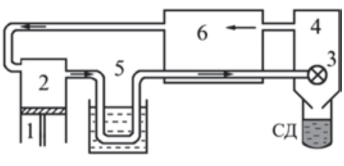
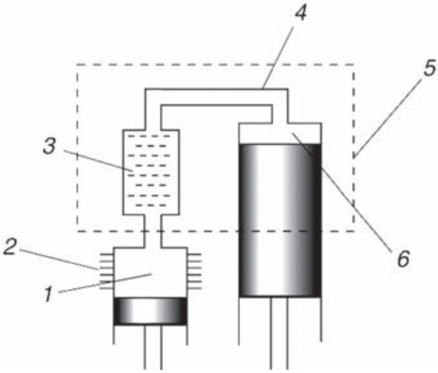


Рис. 3.20
Схема установки для сжижения газа (машина Линде)

Схема установки для сжижения газов (машина Линде), в которой используется эффект Джоуля — Томсона, изображены на рисунке 3.20.

Воздух *2* в компрессоре *1* сжимается до давления в десятки мегапаскалей и охлаждается в холодильнике *5*. Затем сжатый воздух проходит по внутренней



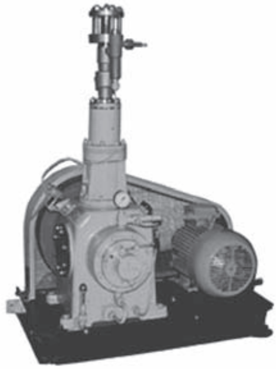


Рис. 3.21
Схема одноступенчатого криорефрижератора и его внешний вид:
1 — цилиндр компрессора; *2* — ребра охлаждения; *3* — регенератор; *4* — холодная головка; *5* — теплоизоляция; *6* — цилиндр детандера.

трубке теплообменника *6* и пропускается через дроссель *3* и цилиндр *4*. Так как каждая следующая порция воздуха предварительно охлаждается, а затем пропускается через дроссель, то температура понижается все больше — до температуры ниже критической. Сжиженный газ поступает в сосуд Дьюара[1] (СД).

Второй метод сжижения газов основан на охлаждении газа при совершении им работы.

Сжатый газ, поступая в поршневую машину (***детандер***) (рис. 3.21), расширяется и совершает при этом работу по передвижению поршня.

Так как ***работа совершается за счет внутренней энергии газа, то его температура при этом понижается.***

Вариант криорефрижератора, предложенный Дж. Даунтом, схематически изображен на рисунке 3.21. Компрессор соединен с детандером через регенератор без промежуточных клапанов. Рабочим веществом служит, как правило, газообразный гелий под давлением около 1,5 МПа. Компрессор и детандер работают со сдвигом по

[1] Дьюар Джеймс (1842–1923) — шотландский физик и химик. Важнейшие научные работы в области физики низких температур, термодинамики, оптики, спектроскопии и радиоактивности.

фазе на 90°, благодаря чему детандер поддерживает режим чистого охлаждения. В одноступенчатой схеме предельная температура составляет −253°C (20 К). Каскадная система из устройств подобного типа позволяет достичь еще более низких температур при высоком КПД.

ВЫВОДЫ

Уравнение Клапейрона — Менделеева $PV = \nu RT$, полученное в предположении, что молекулы газа не взаимодействуют друг с другом, удовлетворительно описывает состояния реальных газов только при достаточно низких значениях концентрации молекул. При высоких концентрациях и низких температурах наблюдаются определенные расхождения с экспериментально установленными зависимостями. Самое простое и достаточно точно описывающее состояния реальных газов является уравнение Ван-дер-Ваальса.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа учитывает конечный объем молекул νb и их взаимодействие между собой $\nu^2 a/V^2$:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса; V — объем, занимаемый газом; P — давление газа на стенки сосуда.

Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул:

$$P' = \frac{a}{V_m^2}$$

или

$$P' = \frac{\nu^2 a}{V^2}.$$

Связь критических параметров — объема, давления и температуры газа — с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса определяется соотношениями:

$$V_{m\text{кр}} = 3b, \quad P_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}.$$

Внутренняя энергия реального газа наряду с кинетической энергией хаотического движения частиц $\nu C_V T$ включает и потенциальную энергию их притяжения $\nu a/V_m$:

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Чем отличаются реальные газы от идеальных?
2. Запишите и проанализируйте уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моля газа; для произвольного количества вещества.
3. Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?
4. Из чего складывается межмолекулярное взаимодействие?
5. Какие силы действуют между молекулами?
6. Какое влияние оказывают силы притяжения на состояния идеального газа?
7. Проанализируйте изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса.
8. Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?
9. При адиабатном расширении газа в вакууме его внутренняя энергия не изменяется. Как изменится температура, если газ идеальный, реальный?
10. Что такое насыщенный пар?
11. Некоторое количество твердого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии. Почему при нагревании этой смеси ее температура не поднимается?
12. Что такое фаза, фазовый переход?
13. Что можно «вычитать» из диаграммы состояния, используемой для изображения фазовых превращений?
14. Каков критерий различных агрегатных состояний вещества?
15. Каково принципиальное значение уравнения Ван-дер-Ваальса?

16. В сосуде вместимостью $V=0,3$ л находится углекислый газ, содержащий количество вещества $\nu=1$ моль при температуре $T=300$ К. Определить давление P газа: 1) по уравнению Менделеева — Клапейрона; 2) по уравнению Ван-дер-Ваальса.
17. Критическая температура $T_{кр}$ аргона равна 151 К и критическое давление $P_{кр}=4,86$ МПа. Определить по этим данным критический молярный объем $V\mu$ аргона.
18. Определить внутреннюю энергию U азота, содержащего количество вещества $\nu=1$ моль, при критической температуре $T_{кр}=126$ К. Вычисления выполнить для четырех значений объемов V: 1) 20 л; 2) 2 л; 3) 0,2 л; 4) $V_{кр}$.
19. Найти внутреннюю энергию U углекислого газа массой $m=132$ г при нормальном давлении P_0 и температуре $T=300$ К в двух случаях, когда газ рассматривают: 1) как идеальный; 2) как реальный.
20. Кислород массой $m=8$ г занимает объем $V=20$ см^3 при температуре $T=300$ К. Определить внутреннюю энергию U кислорода.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.4.1. Найти наибольший объем V, который может занимать вода массой $m=1$ кг.

Решение. Из рисунка 3.16 видно, что наибольший объем данная масса жидкости может занимать в критической точке. Поэтому используем уравнение

$$V=V_k=(m/\mu)V_{m,k}.$$

Значение $V_{m,k}$ берем из таблицы «Критические параметры и поправки Ван-дер-Ваальса» в приложении пособия. Получаем

$$V=1/(18\cdot 10^{-3})\cdot 56,3=3,1\cdot 10^3 \text{ см}^3=3,1 \text{ л}.$$

Это в 3 раза больше объема воды в обычных условиях.

Задача 3.4.2. Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса для водорода, если известны, его критическая температура $T_{кр}=33,2$ К, критическое давление $P_{кр}=1,295$ МПа и молярный объем в критическом состоянии $V_{mкр}=6,5\cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

На основании выражения $R=8P_{кр}V_{кр}/(3T_{кр})$ имеем:

$$a=3P_{кр}V_{m кр}^2,\ \ b=V_{m кр}/3,$$

откуда

$$a=3\cdot 1{,}295\cdot(0{,}065)^2\ Па\cdot м^6/моль^2;$$

$$b=6{,}5\cdot 10^{-5}/3\ м^3/моль=2{,}2\cdot 10^{-5}\ м^3/моль;$$

$$R=\frac{8}{3}\cdot\frac{1{,}295\cdot 10^6\cdot 6{,}5\cdot 10^{-5}}{33{,}2}\cdot\frac{Дж}{моль\cdot К}=6{,}76\ Дж/(моль\cdot К).$$

Видно, что индивидуальная молярная газовая постоянная водорода вблизи критического состояния отличается от молярной газовой постоянной $R=8{,}31$ Дж/(моль/К).

Задача 3.4.3. Найти давление водорода по уравнению Ван-дер-Ваальса при температуре 300 К и молярном объеме 10^{-3} м^3/моль, а также при температуре 35 К и молярном объеме 10^{-4} м^3/моль.

В первичном случае состояние далеко от критического и можно пользоваться молярной газовой постоянной:

$$P=\frac{RT}{V_m-b}-\frac{a}{V_m^2}=\left[\frac{8{,}31\cdot 300}{10^{-3}-2{,}2\cdot 10^5}-\frac{1{,}64\cdot 10^{-2}}{(10^{-3})^2}\right]=2{,}53\cdot 10^6\ Па.$$

Давление газа при этих условиях:

$$P=\frac{RT}{V_m}=\frac{8{,}31\cdot 300}{10^{-31}}=24{,}93\cdot 10^5\ Па.$$

Во втором случае состояние газа близко к критическому и следует пользоваться индивидуальной газовой постоянной (для водорода $R=6{,}763$Дж/(моль·К)):

$$P=\left[\frac{7{,}763\cdot 35}{10^{-4}-2{,}2\cdot 10^{-5}}-\frac{1{,}64\cdot 10^{-2}}{(10^{-4})^2}\right]=\ 1{,}39\ МПа.$$

Давление же идеального газа в этом случае

$$P=\frac{8{,}31\cdot 35}{10^{-4}}=2{,}91\ МПа,$$

т. е. в два раза больше, чем давление реального газа. Таким образом, вблизи критического состояния учет индивидуальной газовой постоянной весьма существен.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.4.1. Внутреннюю полость толстостенного стального баллона наполовину заполнили водой при комнатной температуре. После этого баллон герметически закупорили и нагрели до температуры $T=650$ К. Определить давление P водяного пара в баллоне при этой температуре.

Ответ: $P=\dfrac{\rho RT}{2\mu-\rho b}-\dfrac{\rho^2 a}{4\mu}=554$ МПа.

Задача 3.4.2. Давление P кислорода равно 7 МПа, его плотность $\rho=100$ кг/м^3. Найти температуру T кислорода.

Ответ: $T=\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\mu P}{\rho}-Pb+\dfrac{a\rho}{\mu}-\dfrac{ab\rho^2}{\mu^2}\right)=287$ К.

Задача 3.4.3. Вычислить постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота, если известны критические температура $T_{кр}=126$ К и давление $P_{кр}=3{,}39$ МПа.

Ответ:
$$a=\frac{27\,T_{кр}^2R^2}{64P_{кр}}=0{,}136\ \text{Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2,$$
$$b=\frac{1}{8}\frac{T_{кр}R}{P_{кр}}=3{,}86\cdot10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

Задача 3.4.4. Критическая температура $T_{кр}$ аргона равна 151 К и критическое давление $P_{кр}=4{,}86$ МПа. Определить по этим данным критический молярный объем $V_{m\,кр}$ аргона.

Ответ: $V_{m\,кр}=3b=\dfrac{3T_{кр}}{8P_{кр}}R=96{,}8\cdot10^{-6}$ м^3/моль.

Задача 3.4.5. Жидким пентаном C_5H_{12}, плотность ρ которого равна 626 кг/м^3, частично заполняют прочную кварцевую колбу и запаивают ее так, что над пентаном остаются только насыщающие пары. Определить, какую часть ε внутреннего объема колбы должен занимать пентан, чтобы можно было наблюдать при нагревании переход вещества через критическую точку. Постоянная b Ван-дер-Ваальса равна $14{,}5\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

Ответ: $\varepsilon=\dfrac{\mu}{3b\rho}=0{,}264.$

Задача 3.4.6. Определить наибольший объем $V_{\max}$, который может занимать вода, содержащая количество вещества $\nu=1$ моль.

Ответ: $V_{\max}=3b\nu=91{,}2\cdot10^{-6}$ м^3.

Задача 3.4.7. Кислород массой $m=8$ г занимает объем $V=20$ см^3 при температуре $T=300$ К. Определить внутреннюю энергию U кислорода.

Ответ: $U=\dfrac{m}{\mu}C_V T-\dfrac{m^2 a}{\mu^2 V}=1130$ Дж.

Задача 3.4.8. Определить изменение ΔU внутренней энергии неона, содержащего количество вещества $\nu=1$ моль, при изотермическом расширении его объема от $V_1=1$ л до $V_2=2$ л.

Ответ: $\Delta U=\dfrac{a\Delta V}{V_1V_2}=104$ Дж.

Задача 3.4.9. Известны постоянные Ван-дер-Ваальса и индивидуальная газовая постоянная водного пара вблизи критического состояния:

$$a=0{,}199\ \text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2;\quad b=1{,}83\cdot10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль};$$
$$R=5{,}008\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}).$$

Найти параметры критического состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новые знания порождают новые вопросы, поскольку они расширяют область нашего соприкосновения с неизвестным.

Рене Декарт

Итак, изложение I части курса физики — физических основ механики, молекулярной физики и термодинамики — закончено. Начав его изучение с кинематики движения материальной точки, мы последовательно рассмотрели классические формулировки законов динамики материальной точки и твердого тела, обсудили виды и категории сил в природе, изложили законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени, рассмотрели теорию тяготения Ньютона и, указав на недостатки классической механики, перешли к современной физике, рассмотрев специальную теорию относительности и основные положения общей теории относительности. Далее были рассмотрены основные вопросы молекулярно-кинетической теории вещества и термодинамики.

Приведенный перечень разделов, изложенных в I части курса физики, позволяет проследить логику развития физики и основные периоды ее становления.

Со времени выхода в свет труда И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1678), в котором он сформулировал основные законы механики и закон всемирного тяготения, прошло более трехсот лет. За это время физика прошла путь от макроскопического уровня изучения явлений до исследования материи на уровне элементарных частиц.

Однако наряду с большими достижениями физики во всех ее разделах, в том числе в механике и термодинамике, остается масса вопросов. Например, построение квантовой теории тяготения, проблемы физики плазмы и атомного ядра, построение теории сильных взаимодействий, создание высокоэкономичных и экологически чистых двигателей, разработка альтернативных и долговечных источников энергии и т. д.

Отсюда становится ясно видна практическая важность фундаментальных физических исследований. Достижение нового экспериментального и теоретического понимания физических процессов и явлений послужит основой создания новейших технических решений, технологий, приборов и устройств.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

- Уравнение движения материальной точки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

- Вектор перемещения $\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$

- Модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}.$

- Средняя скорость $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$

- Мгновенная скорость $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$

- Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$

- Среднее ускорение $\langle\vec{a}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$

- Мгновенное ускорение $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$

- Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

- Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

- Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$

◆ Нормальная составляющая ускорения $a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

◆ Кинетическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x: $x = x_0 + vt$.

◆ Уравнения равнопеременного поступательного движения

$$x = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \quad v = v_0 \pm at.$$

◆ Кинетическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

◆ Угловая скорость $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

◆ Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

◆ Циклическая частота вращения $\omega = 2\pi\nu$.

◆ Период и частота вращения $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\nu = \dfrac{1}{T}$.

◆ Уравнения равнопеременного вращательного движения
$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$, $\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

◆ Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad a_n = v^2 / R = \omega^2 R; \quad a_\tau = R \cdot \varepsilon.$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

◆ Импульс (количество движения) $\vec{p} = m\vec{v}$.

◆ Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

◆ Второй закон Ньютона $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$.

◆ Третий закон Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

◆ Центр масс системы материальных точек $\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$.

◆ Импульс системы тел $\vec{p} = m\vec{v}_C$.

◆ Теорема о движении центра масс $\vec{a}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\text{внеш}}$.

3. СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

◆ Связь веса тела с силой тяжести и реакцией опоры
$$\vec{G} = m\vec{g} = -\vec{R}.$$

◆ Соотношение между весом, силой тяжести и ускорением
$$G = m(g \pm a).$$

◆ Сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

◆ Для тела на наклонной плоскости
$$F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha, \quad F = mg\sin\alpha, \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

◆ Закон Гука для пружины $F_{\text{упр}} = -kh$.

◆ Связь между силой и потенциальной энергией $\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{п}}}{\mathrm{d}\vec{r}}$.

◆ Потенциальная энергия упругой пружины $E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$.

◆ Работа, совершенная пружиной, $A = -\frac{kx^2}{2}$.

◆ Напряжение $\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}$.

◆ Приращение длины $\Delta l = \frac{l_0\sigma}{E}$.

◆ Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}.$$

◆ Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}.$$

◆ Коэффициент Пуассона $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.

◆ Закон Гука для стержня $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$.

◆ Модуль Юнга $E = \frac{Fl_0}{S\Delta l}$.

◆ Объемная плотность потенциальной энергии $w_\sigma = \frac{\sigma}{2E}$.

4. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

◆ Уравнение Ньютона для неинерциальной системы

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}.$$

◆ Центростремительная сила $F_{\text{цс}} = ma_{\text{цс}} = m\frac{v^2}{R}$.

◆ Центробежная сила $F_{\text{цб}} = ma_n = m\omega^2 R$.

◆ Сила Кориолиса $\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$.

5. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

◆ Кинетическая энергия $E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$.

◆ Изменение кинетической энергии $\Delta E_{\text{к}} = A$.

◆ Работа переменной силы на участке траектории 1–2

$$A = \int_1^2 F\cos\alpha\, \mathrm{d}s.$$

◆ Мгновенная мощность $N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = Fv$.

- Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$.
- Работа консервативных сил $A = E_{п1} - E_{п2}$.
- Потенциальная энергия тела при гравитационном взаимодействии $E_п = mgh$.
- Гравитационное взаимодействие между массами m и M

$$E_п = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

- Полная механическая энергия системы $E = E_к + E_п$.
- Закон сохранения полной механической энергии (для замкнутой системы) $E_к + U_{внутр} = E = \text{const}$.
- Скорость шаров массами m_1 и m_2 после абсолютного упругого центрального удара

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \text{ и } v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

- Скорость шаров после абсолютно неупругого удара

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

- Закон сохранения импульса при движении ракеты

$$m_р v_р = m_г v_г.$$

- Формула Циолковского $v_р = -v_г = \ln \frac{M_0}{M}$.

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

- Момент силы $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ или $M = Fr\sin\alpha = Fl$.
- Момент импульса относительно точки

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}].$$

- Основной закон динамики вращательного движения относительно точки $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внеш}$.

◆ Момент импульса относительно неподвижной оси

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_z \omega.$$

◆ Уравнение динамики вращательного движения твердого тела $M = J\varepsilon$.

◆ Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} = \text{const} \text{ или } J\vec{\omega} = \text{const}.$$

◆ Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \text{ или } J = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m.$$

◆ Момент инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии $J_C = mR^2$, $J_C = \frac{1}{2}mR^2$.

◆ Момент инерции шара и сферы $J_C = \frac{2}{5}mR^2$, $J_C = \frac{2}{3}mR^2$.

◆ Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, $J_C = \frac{1}{12}ml^2$.

◆ Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, $J_C = \frac{1}{3}ml^2$.

◆ Теорема Штейнера $J = J_C + md^2$.

◆ Кинетическая энергия вращающегося тела $E_{\text{к вр}} = \frac{J\omega^2}{2}$.

◆ Полная кинетическая энергия катящегося тела

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

◆ Закон сохранения энергии для тела, катящегося с высоты h, $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$.

7. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

- Закон всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

- Потенциальная энергия тела массы m, расположенного на расстоянии r от большого тела массы M, $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$.

- Напряженность поля тяготения $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$.

- Потенциал поля тяготения $\varphi = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{R}$.

- Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью $\vec{G} = -\mathrm{grad}\,\varphi$.

- Работа по перемещению тела в гравитационном поле

$$A = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right) = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}.$$

- Потенциальная энергия тела массой m на расстоянии r от Земли $E_{\text{п}} - E_{\text{п}З} = mgR_З^2\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{r}\right)$.

- Полная энергия тела в гравитационном поле

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}.$$

- Второй закон Кеплера $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \text{const}$.

- Третий закон Кеплера $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$.

- Первая космическая скорость $v_1 = \sqrt{gR}$.

- Вторая космическая скорость $v_2 = \sqrt{2gR}$.

8. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

- Давление $P = \dfrac{F}{S}$.
- Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $Sv = \text{const}$.
- Уравнение Бернулли $\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}$.
- Соотношение для гидравлического пресса $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{S_2}{S_1}$.
- Закон сообщающихся сосудов $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$.
- Архимедова сила $F_{\text{А}} = \rho g V$.
- Формула Торричелли $v = \sqrt{2gh}$.
- Формула Стокса $F = 6\pi\eta r v$.
- Формула Пуазейля $V = \pi R^4 \Delta P t/(8\mu l)$.
- Формула Лапласа для произвольной поверхности $\Delta P = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$.
- Формула Лапласа для сферической поверхности $\Delta P = 2\sigma/R$.
- Высота подъема жидкости в капиллярной трубке $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$.
- Поверхностное натяжение $\sigma = \dfrac{F}{l}$ или $\sigma = \dfrac{\Delta E}{\Delta S}$.

9. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

- Преобразования Галилея $x = x' + vt$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$ или $\vec{r} = \vec{r} + \vec{v}t$.
- Закон сложения скоростей в классической механике $\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}$.

◆ Преобразования Лоренца

$$x = \frac{x' \upsilon t}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$y = y'; \quad z = z';$$

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

◆ Интервал времени между событиями $\Delta t' = \dfrac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2 \sqrt{1 - \upsilon / c^2}}$.

◆ Релятивистское (Лоренцево) сокращение длины стержня $l = l_0 \sqrt{1 - \upsilon / c^2}$.

◆ Релятивистское замедление хода часов $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}$.

◆ Релятивистский закон сложения скоростей $u = \dfrac{\upsilon' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon' \upsilon}{c^2}}$.

◆ Релятивистское выражение для импульса

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}.$$

◆ Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$.

◆ Релятивистское выражение для энергии $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$.

◆ Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}} - 1 \right).$$

◆ Закон взаимосвязи массы и энергии

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}, \quad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}.$$

◆ Энергия покоя $E_0 = mc^2$.

- Взаимосвязь массы и энергии покоя $\Delta E_0 = \Delta mc^2$.
- Масса образовавшейся частицы $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} > 2m$.
- Энергия связи $E_{св} = c^2 \Delta M$.
- Дефект массы $\Delta M = \sum m_i - M$.
- Условие существования черной дыры $m_\gamma c^2 \le \gamma \dfrac{m_\gamma M}{r_g}$.
- Размеры черной дыры $r_g \le \gamma \dfrac{M}{c^2}$.

10. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

- Молярная масса вещества $\mu = A m_{ед} \mathrm{N_A}$ или $\mu = \dfrac{m}{\nu}$.
- Атомная масса $A = \dfrac{m_A}{m_{ед}}$.
- Атомная единица массы $m_{ед} = \dfrac{1}{12} m_C = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.
- Число Авогадро $\mathrm{N_A} = \dfrac{\mu}{M \cdot m_{ед}} = 6{,}023 \cdot 10^{26} \dfrac{1}{\text{моль}}$.
- Число Лошмидта $\mathrm{N_L} = \dfrac{P_0}{kT_0} = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.
- Концентрация частиц $n = \dfrac{N}{V}$.
- Универсальная газовая постоянная

$$R = k\mathrm{N_A} = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

- Нормальные условия $P_0 = 10^5$ Па; $T_0 = 273$ К.
- Давление на поверхность $P = \dfrac{\Delta F}{\Delta S}$.

- Давление газа на стенку сосуда $P = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} m_0 v_x^2$.
- Основное уравнение МКТ $P = \frac{2}{3} n \left\langle E_\text{к} \right\rangle = nkT = \frac{1}{3} n m_0 \left\langle v_\text{кв} \right\rangle^2$.
- Абсолютная температура $T = \frac{m_0 \left\langle v^2 \right\rangle}{3k}$.
- Объем газа в трубке газового термометра $V = \frac{nk}{P_0} T$.
- Изохорический процесс.

  Закон Шарля $\frac{P}{T} = \text{const}$ при V, $m = \text{const}$.
- Уравнение изохорического процесса для температуры по шкале Цельсия $P = P_0(1 + \alpha t)$.
- Изобарический процесс. Закон Гей-Люссака $\frac{V}{T} = \text{const}$

  при P, $m = \text{const}$.
- Изотермический процесс. Закон Бойля — Мариотта $PV = \text{const}$ при T, $m = \text{const}$.
- Адиабатический процесс (изоэнтропийный) $S = \text{const}$, $\Delta S = 0$.
- Политропический процесс $C = \text{const}$.
- Закон Дальтона $P_\text{см} = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$.
- Объединенный газовый закон (закон Клапейрона)

$$\frac{PV}{T} = \text{const}.$$

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона) $PV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT$; для смеси газов $PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_n}{\mu_n} \right) RT$.

11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗОВЫХ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ И ЭНЕРГИЯМ

◆ Скорость звука в газе $v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$.

◆ Наиболее вероятная скорость

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ или } v_{вер} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

◆ Средняя квадратичная скорость

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ или } v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

◆ Средняя арифметическая скорость

$$v_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \text{ или } v_{ср} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

◆ Относительная скорость $u = \frac{v}{v_{вер}}$.

◆ Функция распределения Максвелла

$$f(v) = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2.$$

◆ Функция распределения Максвелла для относительных скоростей $f(u) = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\exp(-u^2)u^2$.

◆ Функция распределения Максвелла по импульсам

$$f(p) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2mkT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right)p^2\mathrm{d}p.$$

◆ Функция распределения молекул по энергиям теплового движения $f(E_к) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E_к{}^{1/2} \exp\left(-\frac{E_к}{kT}\right)$.

◆ Плотность газа $\rho = \frac{P\mu}{RT}$.

◆ Барометрическая формула $P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$.

◆ Распределение Больцмана $n = n_0 \exp\left(-\frac{E_п}{kT}\right)$.

◆ Закон Максвелла — Больцмана $\mathrm{d}n = n_0 A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$.

12. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

◆ Эффективное сечение молекулы $\sigma = \pi d^2$.

◆ Среднее число столкновения молекулы за 1 с

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle.$$

◆ Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\nu} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P}.$$

◆ Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle$.

◆ Уравнение Фика для диффузии

$$J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \text{ или } J = -D\,\mathrm{grad}\,n.$$

◆ Динамическая вязкость $\eta = \frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle nm$ или $\eta = D\rho$.

◆ Уравнение Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$f_{тр} = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \text{ или } f_{тр} = -\eta\,\mathrm{grad}\,\vec{v}.$$

◆ Средняя энергия молекулы $E_к = \frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{i}{2}kT$.

◆ Уравнение Фурье для теплопроводности

$$q = -\chi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\chi\,\mathrm{grad}\,T.$$

◆ Коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3}\lambda\langle v_T \rangle n\frac{i}{2}k = \frac{1}{3}\lambda\langle v_T \rangle \rho C_{V уд} = D\rho C_{уд}.$$

13. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА И ТЕПЛОТА

- Первое начало термодинамики: $\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$.
- Внутренняя энергия одного моля идеального газа
$$U = \frac{3}{2}RT.$$
- Внутренняя энергия произвольной массы газа
$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT.$$
- Удельная теплоемкость $C_{\text{уд}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$.
- Молярная теплоемкость $C_\mu = C_{\text{уд}}\mu$.
- Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме
$$C_V = \frac{i}{2}R.$$
- Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении
$$C_p = \frac{i+2}{2}R.$$
- Уравнение Майера $C_P = C_V + R$.
- Коэффициент Пуассона (постоянная адиабата)
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$
- Внутренняя энергия одноатомного газа
$$U = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1}T = \frac{PV}{\gamma - 1}.$$
- Закон Больцмана о равномерном распределении энергии $\langle U \rangle = \frac{i}{2}kT$.
- Работа газа при изменении его объема $\delta A = p\mathrm{d}V$.
- Количество теплоты, сообщенное в изохорическом процессе, $Q = C_V(T_2 - T_1)$.
- Изменение внутренней энергии в изохорическом процессе $\mathrm{d}U = \delta Q$.

- Теплоемкость в изохорическом процессе

$$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1} = \frac{i}{2}R.$$

- Работа в изобарическом процессе

$$A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

- Количество теплоты, сообщенное в изобарическом процессе, $Q = C_P(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T\left(\frac{i}{2} + 1\right)$.

- Изменение внутренней энергии в изобарическом процессе $\Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$.

- Теплоемкость в изобарическом процессе

$$C_P = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

- Работа газа при изобарном расширении

$$A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

- Работа газа в изотермическом процессе

$$A = Q = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_1}{P_2}.$$

- Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона) $PV^{\gamma}=\mathrm{const}$, $TV^{\gamma-1}=\mathrm{const}$, $T^{\gamma}P^{1-\gamma}=\mathrm{const}$.

- Работа газа при адиабатическом расширении

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V(T_1 - T_2).$$

14. КРУГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

- Термический КПД для кругового процесса $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

- Термический КПД цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

◆ Термический КПД необратимого цикла

$$\eta_{\text{необр}} = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 - \Delta T}.$$

◆ Работа тепловой машины $A = Q_1 - Q_2$.

◆ Изотермическое расширение цикла Карно

$$A_1 = Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

◆ Адиабатическое расширение цикла Карно

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2).$$

◆ Изотермическое сжатие цикла Карно

$$A_3 = -Q_2 = -\frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

◆ Адиабатическое сжатие цикла Карно $A_4 = \frac{-R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$.

15. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

◆ Приведенная теплота $Q' = \frac{Q}{T}$.

◆ Энтропия $dS = (\delta Q/T)_{\text{обр}}$.

◆ Для произвольного процесса $dS \geq \delta Q/T$.

◆ Равенство Клаузиуса $\Delta S_{\text{обр}} = 0$, или $\oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0$,

или $T dS = \delta Q$.

◆ Неравенство Клаузиуса $\Delta S_{\text{необр}} > 0$, или $\oint \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} > 0$,

или $T dS > \delta Q$.

◆ Математическое выражение второго начала термодинамики: $dS \geq 0$.

◆ Первое и второе начала термодинамики: $T dS \geq dE_{\text{п}} + \delta A$.

◆ Изменение энтропии в изопроцессах:

- *изохорический процесс*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$, так как $V_1=V_2$;
- *изобарический процесс*:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}\int_{T_1}^{T_2} C_P \frac{dT_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_P \ln\frac{T_2}{T_1},\ P_1=P_2;$$

- *изотермический процесс*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R\ln\frac{V_2}{V_1}$, так как $T_1=T_2$;
- *адиабатический процесс*: $\Delta S=0$, так как $\delta Q=0$.

◆ Количество теплоты $Q=Cm(T_2-T_1)$.

◆ Процессы изменения агрегатного состояния вещества:

- *закон плавления и кристаллизации*: $\delta Q=\pm\lambda \mathrm{d}m$;
- *изменение энтропии* при плавлении и кристаллизации: $\Delta S=\pm\lambda m/T_{\text{пл}}$;
- *закон испарения и конденсации*: $\delta Q=\pm r\mathrm{d}m$;
- *изменение энтропии* при испарении и конденсации: $\Delta S=\pm rm/T_{\text{к}}$.

◆ Внутренняя энергия системы $U=F+TS$.

◆ Энергетическая потеря в изолированной системе

$$\Pi=T_{\text{мин}}\Delta S.$$

◆ Статистический смысл энтропии $S=k\ln W$.

◆ Третье начало термодинамики $S_{T=0}=k\ln W=0$.

16. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

◆ Уравнение состояние идеального газа $PV=\nu RT$.

◆ Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа

$$(P+\nu^2 a/V^2)(V-\nu b)=\nu RT.$$

◆ Связь критических параметров

$$V_{\text{кр}}=3b,\quad P_{\text{кр}}=a/(27b^2),\quad T_{\text{кр}}=8a/(27Rb).$$

◆ Внутренняя энергия произвольной массы реального газа $U=\nu(C_V T-a/V_m)$.

◆ Энтальпия системы $U_1+P_1V_1=U_2+P_2V_2$.

ГЛОССАРИЙ

> Истинный джентльмен — это тот, кто кошку всегда называет кошкой. Даже если он споткнулся о нее и упал.

В глоссарии перечислены использованные в пособии термины физики, математики, статистики, которые часто непереводимы напрямую. Их число быстро растет и неконтролируемо «размножается». Даны их выверенные толкования без претензий на истину в абсолютной инстанции.

Абсолютная температура — одно из основных понятий термодинамики, введенное У. Томсоном в 1848 г.; обозначается символом T.

Абсолютная температура выражается в Кельвинах (К), отсчитывается от абсолютного нуля температуры и измеряется по Международной практической температурной шкале.

Абсолютный нуль температуры — начало отсчета абсолютной температуры по термодинамической шкале (шкале Кельвина).

Абсолютный нуль температуры расположен на 273,16 К ниже температуры тройной точки воды (на 273,15 ниже нуля температуры по шкале Цельсия).

Согласно третьему началу термодинамики при стремлении температуры системы к абсолютному нулю к нулю стремятся и ее энтропия, теплоемкость, коэффициент теплового расширения.

При абсолютном нуле температуры прекращаются хаотические движения атомов, молекул, электронов, определяющие температуру системы, но остаются их регулярные движения, подчиняющиеся квантовой механике, например нулевые колебания атомов в решетке, с которыми связана нулевая энергия.

Агрегатные состояния вещества — состояния одного и того же вещества в различных интервалах температур и давлений.

Традиционно агрегатными считают газообразное, жидкое и твердое состояния, переходы между которыми сопровождаются скачкообразными изменениями свободной энергии вещества, энтропии, плотности и других физических характеристик.

С увеличением температуры газов при фиксированном давлении они переходят в состояние частично, а затем полностью ионизованной плазмы, которую также принято считать агрегатным состоянием.

Адсорбция (*лат.* ad — на, при и sorbeo — поглощаю) — поглощение газов, паров или жидкостей поверхностным слоем твердого тела (адсорбента) или жидкости.

Адаптация (*лат.* adaptio — приспособление) — приспособление функций и строения системы к условиям существования.

Аккреция (*лат.* accretio — приращение, увеличение) — гравитационный захват вещества и последующее его падение на космическое тело (например, звезду).

Анизотропия (*греч.* anisos — неравный и tropos — свойство) — зависимость свойств среды от направления. Она характерна, например, для механических, оптических, магнитных, электрических и других свойств кристаллов.

Аннигиляция (*лат.* annihilation — превращение в ничто, уничтожение) — превращение элементарных частиц и античастиц в другие частицы, число и вид которых определяются законами сохранения (например, при аннигиляции пары электрон — позитрон образуются фотоны).

Античастицы — элементарные частицы, имеющие ту же массу, спин, время жизни и некоторые другие внутренние характеристики, что и их «двойники», но отличающиеся от них знаками электрического заряда и магнитного момента, барионного заряда, странности и др.

Атмосфера — внесистемная единица давления. Физическая атмосфера (атм) — единица давления, равная нормальному атмосферному давлению: 1 атм = 760 мм рт. ст.; 1 атм = $1{,}013250 \cdot 10^5$ Па.

Атомная единица массы — единица массы, равная 1/12 массы изотопа углерода ^{12}C; применяется в атомной и ядерной физике для выражения масс элементарных частиц, атомов, молекул.

Бар — внесистемная единица давления, применявшаяся главным образом в метеорологии: 1 бар = 105 Па = 0,986923 атм.

Биосфера — область распространения жизни на Земле; включает нижнюю часть атмосферы, гидросферу и литосферу, населенные живыми организмами.

Бозе-газ — газ из частиц, подчиняющихся квантовой Бозе — Эйнштейна статистике. Бозе-газом являются, например, ^4He, атомы которого содержат четное число нуклонов, и газы фотонов (квантов электромагнитного поля) и некоторых квазичастиц, например фононов (элементарных возбуждений кристаллической решетки).

Бозоны — частицы или квазичастицы с целым спином, подчиняющимся статистике Бозе — Эйнштейна.

Вакуум — среда, содержащая газ при давлениях, существенно ниже атмосферного. Вакуум характеризуется соотношением средней длины свободного пробега молекул газа и размера, характерного для каждого конкретного процесса или прибора. Таким размером могут быть расстояние между стенками вакуумной камеры, диаметр вакуумного трубопровода, расстояние между электродами электровакуумного прибора и т. п.

Вес тела — сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемое каким-либо небесным телом, например Землей, Солнцем и т. д.), действует на опору или подвес, которые препятствуют свободному падению тела.

В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно инерциальной системы отсчета, вес тела P по величине и направлению совпадает с силой тяжести mg: $P = mg$, где m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Вес и сила тяжести приложены к разным объектам (вес — к опоре или подвесу, сила тяжести — к телу) и имеют различную физическую природу (соответственно вес — упругую, т. е. по существу электромагнитную, а сила тяжести — гравитационную).

Взаимодействие — воздействие тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению состояния их движения.

В механике Ньютона взаимное действие тел друг на друга характеризуется силой. Более общей характеристикой взаимодействия является потенциальная энергия. В современной физике утвердилась новая концепция — близкодействия, которая распространена на любые взаимодействия. Согласно этой концепции взаимодействие между телами осуществляется посредством тех или иных полей, непрерывно распределенных в пространстве. Так, всемирное тяготение осуществляется гравитационным полем.

Внесистемные единицы — единицы физических величин, не входящие ни в одну из существующих систем единиц, а также не входящие в СИ, но допускаемые к применению наравне с единицами этой системы. Внесистемные единицы можно разделить на независимые (определяемые без помощи других единиц, например градус Цельсия) и произвольно выбранные, но выражаемые некоторым числом других единиц (например, атмосфера, лошадиная сила, световой год, парсек).

Внутреннее трение — свойство твердых тел необратимо превращать в теплоту механическую энергию, сообщенную телу в процессах его деформирования, сопровождающихся нарушением в нем термодинамического равновесия.

Внутренняя энергия атома — его основная характеристика. Атом является квантовой системой, его внутренняя энергия квантуется — принимает дискретный (прерывный) ряд значений, соответствующих устойчивым, стационарным состояниям атома, промежуточные значения эта энергия принимать не может.

Время жизни — время, в течение которого вероятность обнаружить систему в данном состоянии уменьшается в e раз.

Время жизни характеризует скорость перехода квантово-механической системы из данного во все другие состояния.

Время релаксации — характеристика процесса установления термодинамического равновесия в макроскопической физической системе.

Вселенная — весь существующий материальный мир. Вселенная, изучаемая астрономией, — часть материального мира, которая доступна наблюдениям астрономическими средствами; эту часть Вселенной часто называют Метагалактикой.

Галактики (*греч.* gakaktikos — млечный) — гигантские (до сотен млрд звезд) звездные системы; к ним относится и наша Галактика, включающая Солнечную систему. Галактики подразделяются на эллиптические (E), спиральные (S) и неправильные (Ir). Ближайшие к нам галактики — Магеллановы Облака (Ir) и Туманность Андромеды (S).

Галилея принцип относительности — требование независимости законов классической (нерелятивистской) механики от выбора инерциальной системы отсчета (ИСО), понимаемое как инвариантность уравнений механики относительно преобразований Галилея, т. е. преобразований координат и времени движущейся материальной точки при переходе от одной ИСО к другой.

Газ — агрегатное состояние вещества, в котором составляющие его атомы и молекулы почти свободно и хаотически движутся в промежутках между столкновениями, во время которых происходит резкое изменение характера их движения.

Время столкновения молекул в газе значительно меньше среднего времени их пробега.

В отличие от жидкостей и твердых тел, газы не образуют свободной поверхности и равномерно заполняют весь доступный им объем.

Газообразное состояние — самое распространенное состояние вещества Вселенной (межзвездное вещество, туманности, звезды, атмосферы планет и т. д.).

По химическим свойствам газы и их смеси весьма разнообразны — от мало активных инертных газов до взрывчатых газовых смесей.

К газам иногда относят не только системы из атомов и молекул, но и системы из других частиц — фотонов, электронов, броуновских частиц, а также плазму.

Гипотеза — научное предположение, выдвигаемое в форме научных понятий с целью восполнить пробелы эмпирического познания или связать различные эмпирические знания в единое целое либо выдвигаемое для объяснения какого-либо явления, фактов и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования, для того чтобы стать достоверной научной теорией.

Гироскоп — быстровращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять свое направление в пространстве. Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторы турбин, устанавливаемых на судах, винты самолетов и т. п.

Гравитация (*лат.* gravitas — тяжесть) — тяготение, универсальное взаимодействие между любыми видами физической материи.

Гравитон — квант гравитационного поля, имеющий нулевую массу покоя, нулевые электрический заряд и спин (экспериментально пока не обнаружен).

Давление — скалярная величина, характеризующая напряженное состояние сплошной среды. В случае равновесия произвольной и движения идеальной сред давление равно взятой с обратным знаком величине нормального напряжения на произвольно ориентированной в данной точке площадке. Средняя величина давления на площадку равна отношению среднего значения действующей перпендикулярно площадке силы к площади этой площадки. Давление, так же как плотность и температура, представляет собой основной макроскопический параметр состояния жидкости и газа.

Детерминизм (*лат.* determine — определяю) — философское учение об объективной закономерности взаимосвязи и причинной обусловленности всех явлений, противостоит индетерминизму, отрицающему всеобщий характер причинности.

Дефекты — устойчивые нарушения правильного расположения атомов или ионов в узлах кристаллической решетки, соответствующего минимуму потенциальной энергии кристалла.

Деформация (*лат.* deformation — искажение) — 1) изменение положения точек твердого тела, при котором меняется расстояние между ними в результате внешнего воздействия; 2) изменение формы, искажение сущности чего-либо (например, деформация социальной структуры).

Деформация пластическая — изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое сохраняется при снятии напряжений и сопровождается рассеянием энергии. Величина ее зависит не только от значений приложенных сил, но и от предшествующей истории их изменения.

Деформация упругая — изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое возникает и исчезает одновременно с нагрузкой и не сопровождается рассеянием энергии.

Динамика — раздел механики, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил. Движения любых материальных тел (кроме микрочастиц), происходящие со скоростями, не близкими к скорости света, изучаются в классической динамике. Движение тел, перемещающихся со скоростями, приближающимися к скорости света, рассматривается в теории относительности.

Дискретный (*лат.* discretus — раздельный) — прерывистый, состоящий из отдельных частей.

Диссипация (*лат.* dissipatio — рассеяние) — улетучивание газов земной атмосферы в межпланетное пространство; диссипация энергии — переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и. т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге — в тепло.

Диссоциация (*лат.* dissociation — разъединение) — распад частицы (молекулы, радикала, иона) на несколько более простых частиц.

Единицы физических величин — конкретные физические величины, которым по определению присвоены числовые значения, равные единице.

Жесткость — способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформаций. Если материал подчиняется закону Гука, то характеристикой жесткости являются модули упругости E — при растяжении, сжатии, изгибе и G — при сдвиге.

Закон сохранения момента импульса — физический закон, в соответствии с которым момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется со временем. Закон сохранения момента импульса есть проявление изотропности пространства.

Запас прочности — характеристика состояния сооружения или его элемента в отношении сопротивления их разрушению.

Идеальная жидкость — воображаемая жидкость, лишенная вязкости и теплопроводности.

Идеальный газ — теоретическая модель газа, в которой пренебрегают размерами и взаимодействиями частиц газа и учитывают лишь их упругие столкновения. Внутренняя энергия идеального газа определяется лишь кинетической энергией его частиц.

Это первоначальное представление было расширено, в более широком понимании идеальный газ состоит из частиц, представляющих собой упругие сферы или эллипсоиды, у них проявляется атомная структура.

Изобарический процесс — термодинамический процесс, происходящий в системе при постоянном внешнем давлении. На термодинамической диаграмме изображается изобарой.

Для осуществления изобарического процесса к системе надо подводить (или отводить) теплоту, которая расходуется на работу расширения и изменение внутренней энергии.

Изобарная удельная теплоемкость — теплоемкость 1 кг вещества при постоянном давлении.

Изолированная система — термодинамическая система, находящаяся в состоянии адиабатической изоляции от окружающей среды, что достигается заключением системы в адиабатическую оболочку (например, сосуд Дьюара), которая исключает обмен системы теплотой и веществом с окружающей средой (тепловая и материальная изоляция). Поэтому изолированная система не может поглощать или отдавать теплоту, изменение ее внутренней энергии равно производимой работе.

Изотропность (*греч.* tropos — свойство) — одинаковость свойств объектов (пространства, вещества и др.) по всем направлениям.

Импульс — мера механического движения, представляющая собой векторную величину, равную для материальной точки произведению массы m этой точки на ее скорость v и направленную так же, как вектор скорости. Импульс точки остается постоянным только при отсутствии сил. Под действием силы импульс точки изменяется в общем случае и по численной величине, и по направлению.

Импульс силы — величина, характеризующая действие, которое оказывает на тело сила за некоторый промежуток времени; равна произведению среднего значения этой силы на время ее действия.

Инвариант (*фр.* invariant — неизменяющийся, от *лат.* invariabilis) — величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях.

Катализ (*греч.* katalysis — разрушение) — ускорение химической реакции в присутствии веществ-катализаторов, которые взаимодействуют с реагентом, но в реакции не расходуются и не входят в состав конечного продукта.

Кинематика — раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил. Исходными в кинематике являются понятия пространства и времени.

Корпускула (*лат.* corpusculum — частица) — частица в классической (неквантовой) физике.

Конденсированное состояние вещества — понятие, объединяющее твердые тела и жидкости в противопоставлении их газу.

Масса атома — определяется в основном массой его ядра и возрастает пропорционально массовому числу атома, т. е. общему числу протонов и нейтронов — числу нуклонов в ядре (ядро содержит Z протонов и $A–Z$ нейтронов).

Масса электрона ($0{,}91 \cdot 10^{-27}$ г) примерно в 1840 раз меньше массы протона или нейтрона ($1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г), поэтому центр тяжести атома практически совпадает с ядром.

Молярная теплоемкость — физическая величина, равная отношению теплоемкости вещества к количеству этого вещества.

Молярная теплоемкость — количество теплоты, которое получает или отдает 1 моль вещества при изменении его температуры на 1 К.

В зависимости от условий теплопередачи различают:

- молярную изобарную теплоемкость;
- молярную изохорную теплоемкость.

Мезоны — нестабильные элементарные частицы с нулевым или целым спином, принадлежащие к классу адронов.

Момент импульса — мера механического движения тела или системы тел относительно какой-либо точки (центра) или оси. Момент импульса равен векторному произведению импульса тела на плечо этого импульса относительно оси.

Пар — газообразное состояние, в которое переходит вещество в результате испарения, сублимации или кипения.

Парциальное давление — часть общего давления, относящаяся к одному из компонентов газовой смеси. Равно давлению, которое он оказывал бы в отсутствие всех других компонентов смеси, т. е. в том случае, когда масса данного компонента, содержащаяся в газовой смеси, одна занимала бы весь объем. Понятие парциального давления применимо только к идеальным газам.

Парсек (*сокр.* от параллакс и секунда) — единица длины, применяемая в астрономии, равна 3,26 световых года ($3{,}09 \cdot 10^{16}$ м).

Поле физическое — пространство, в котором можно обнаружить какие-либо физические воздействия, употребляют термин «поле» и в других науках или сферах деятельности: поле чувств, поле восприятия, поле зрения, поле напряжений, поле алгебраическое, например поле комплексных чисел и т. д.

Потенциальная энергия — часть механической энергии тела, зависящая от взаимного расположения его частей во внешнем силовом поле. Изменение потенциальной энергии равно совершенной работе.

Работа — мера действия силы, зависящая от ее модуля и направления и от перемещения точки приложения силы. Если сила F постоянна по модулю и направлению, а перемещение S прямолинейно, то работа определяется равенством $A = Fs\cos\alpha$, где α — угол между направлениями силы и перемещения.

Размеры атома — определяются размерами его электронной оболочки, не имеющей строго определенных границ, поэтому значения радиуса и объема атома зависят от способа их экспериментального определения. Линейные размеры атома: 10^{-10} м. Объем: ~10^{-30} м^3.

Рациональный (*лат.* rationalis — разумный) — разумный, целесообразный, обоснованный.

Сингулярность — область пространства с необычными, предельными свойствами по большинству физических параметров. Согласно концепции Большого взрыва начало Вселенной произошло из сингулярной области, сингулярности.

Синтез (*греч.* synthesis — соединение, сочетание) — соединение (мысленное или реальное) различных элементов объекта в единое целое.

Стратосфера (*лат.* stratum — слой и сфера) — слой атмосферы, лежащий над тропосферой от 8–10 км в высоких широтах и от 16–18 км вблизи экватора до 50–55 км; характеризуется повышенным по сравнению с ниже- и вышележащими слоями содержанием озона.

Твердое тело — агрегатное состояние вещества, характеризующееся стабильностью формы и тепловым движением атомов, которые совершают малые колебания около положений равновесия.

Теплоемкость — свойство материала при нагревании поглощать теплоту, а при охлаждении — отдавать ее. Показателем теплоемкости служит удельная теплоемкость.

Термодинамика — наука о физических свойствах объектов, которые состоят из очень большого числа беспорядочно движущихся частиц, об их различных состояниях и процессах.

Термодинамическая система — физический объект из очень большого числа частиц (атомов, молекул), которые совершают хаотическое тепловое движение, вследствие чего главной характеристикой ее состояния является температура. Простейшей термодинамической системой является идеальный газ, между частицами которого нет сил взаимодействий. Важнейшим свойством рассматриваемых систем является самопроизвольный переход из различных неравновесных состояний в определенное равновесное состояние.

Термоядерная реакция — реакция слияния (синтеза) легких ядер в более тяжелые, происходящая при температурах выше 10 млн градусов. Играет исключительно высокую роль в звездах как источник энергии.

Удельный вес — отношение веса тела к его объему.

Удельный объем — объем, занимаемый единицей массы вещества; величина, обратная плотности.

Удельная теплоемкость — физическая величина, равная отношению теплоемкости вещества к его массе. Удельная теплоемкость — количество теплоты, которое получает или отдает 1 кг вещества при изменении его температуры на 1 К.

В зависимости от условий теплопередачи различают:

- удельную изобарную теплоемкость;
- удельную изохорную теплоемкость.

Унифицировать (*лат.* unio — единство и facere — делать) — приводить к единой норме, единообразию.

Физика — наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и ее законы лежат в основе всего естествознания.

Флуктуация (*лат.* fluctuatio — колебание) — случайное отклонение физических величин от их средних значений.

Хаббла закон — пропорциональность скорости удаления внегалактического объекта расстоянию до него.

Химическая связь — межатомное взаимодействие, приводящее к образованию молекул или молекулярных соединений.

Центр инерции — геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Центральная сила — приложенная к материальному телу сила, линия действия которой при любом положении тела проходит через некоторую определенную точку, называемую центром силы. Примеры центральных сил — сила тяготения, направленная к центру планеты, кулоновы силы электростатического притяжения или отталкивания точечных зарядов и другие.

Черная дыра — космический объект, образующиеся при сжатии систем, масса которых превышает величину 2,5 масс Солнца. В таком случае нет сил, которые могли бы удержать вещество от гравитационного коллапса — неограниченного сжатия в бесконечно малый объем.

Эволюция (*лат.* evolutio — развертывание) — одна из форм движения в природе и обществе — непрерывное. Постепенное количественное изменение, в отличие от революции.

Энтропия — многоаспектное понятие: однозначная термодинамическая функция состояния системы многих частиц, мера вероятности пребывания системы в данном состоянии, мера теплообмена при фазовых переходах в системе. В целом служит критерием направленности самопроизвольных процессов в природе — от состояния с малым значением энтропии к состояниям с большим ее значением.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Греческий алфавит

Α α — альфа	Η η — эта	Ν ν — ню	Τ τ — тау
Β β — бета	Θ θ — тэта	Ξ ξ — кси	Υ υ — ипсилон
Γ γ — гамма	Ι ι — йота	Ο ο — омикрон	Φ φ — фи
Δ δ — дельта	Κ κ — каппа	Π π — пи	Χ χ — хи
Ε ε — эпсилон	Λ λ — ламбда	Ρ ρ — ро	Ψ ψ — пси
Ζ ζ — дзета	Μ μ — мю	Σ σ — сигма	Ω ω — омега

Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int e^x dx = e^x$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}(n \neq -1)$	$\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^n+1}$	
$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$	$\int\limits_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$	

Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв, σ_m, ГПа	Сжимаемость β, ГПа$^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	—	—	—	—	0,49

Значения фундаментальных констант

Гравитационная постоянная	$\gamma=6{,}6720\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Скорость света в вакууме	$c=2{,}99792458\cdot10^8$ м/с
Постоянная Планка	$h=6{,}626176\cdot10^{-34}$ Дж·с
Масса покоя электрона	$m_e=9{,}109534\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p=1{,}6726485\cdot10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n=1{,}6749543\cdot10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e=1836{,}15152$
Элементарный заряд	$e^-=1{,}6021892\cdot10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e^-/m_e=1{,}7588047\cdot10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы	1 а. е. м. $=1{,}6605655\cdot10^{-27}$ кг
Постоянная Авогадро	$\mathrm{N_A}=6{,}022045\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F=96{,}48456\cdot10^3$ Кл/моль
Молярная газовая постоянная	$R=8{,}31441$ Дж/(моль·К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0=22{,}41383\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	$k=1{,}380662\cdot10^{-23}$ Дж/К
Нормальное атмосферное давление	$P_0=1{,}013\cdot10^5$ Н/м^2
Точка плавления льда	273,15 К

Удельная теплота парообразования при температуре кипения и нормальном давлении, Дж/г

Азот жидкий	199	Керосин	210–230
Ацетон	524	Кислород жидкий	212
Бензин авиационный	230–315	Ртуть	285
Бензол	394	Сероуглерод	356
Вода	2255	Спирт этиловый	921
Водород жидкий	453	Толуол	364
Гелий жидкий	25	Эфир этиловый	351

Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

t, °C	0	50	100	200
r, МДж/кг	2,49	2,38	2,26	1,94

Внесистемные единицы измерений и их перевод в единицы СИ

Единица	Обозначение	Перевод в единицы СИ
Микрон	мкм	$1 \cdot 10^{-6}$ м
Ангстрем	Å	$1 \cdot 10^{-10}$ м
Световой год	св. год	$9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
Парсек	пк	$3{,}09 \cdot 10^{16}$ м
Литр	л	$1 \cdot 10^{-3}$ м^3
Атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Тонна	т	1000 кг
Минута	мин	60 с
Час	ч	3600 с
Сутки	сут	86 400 с
Секунда	″	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
Минута	′	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$ рад
Градус	°	0,017 рад
Оборот	об	6,28 рад
Полный телесный угол	–	12,57 ср
Оборот в секунду	об/с	1 с$^{-1}$
Оборот в минуту	об/мин	0,0167 с$^{-1}$
Километр в час	км/ч	0,278 м/с
Оборот в секунду	об/с	6,28 рад/с
Оборот в минуту	об/мин	0,105 рад/с
Миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	133 Па

Продолжение таблицы

Единица	Обозначение	Перевод в единицы СИ
Бар	бар	$1 \cdot 10^5$ Па
Киловатт-час	кВт·ч	$3,6 \cdot 10^6$ Дж
Электрон-вольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Ампер-час	А·ч	$3,6 \cdot 10^{-3}$ Кл
Калория	кал	$4,19 \cdot 10^6$ Дж
Рентген	Р	$2,58 \cdot 10^{-3}$ Кл/кг
Рад	рад	0,01 Дж/кг
Кюри	Ки	$3,7 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$
Распад в секунду	расп./с	1 с$^{-1}$

Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6,378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5,518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6,9599 \cdot 10^8$ м
Средняя плотность Солнца	$1,41\ 10^3$ кг/м^3
Масса Солнца	$1,989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3,844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1,49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин

Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ
Частота	герц	Гц		с$^{-1}$
Сила	ньютон	Н		м·кг·с$^{-1}$
Давление	паскаль	Па	Н/м^2	м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Энергия, работа, кол-во теплоты	джоуль	Дж	Н/м	м^2·кг·с$^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	м^2·кг·с$^{-3}$
Освещенность	люкс	лк		м$^{-2}$·кд·ср

Коэффициент линейного расширения α твердых тел при температуре $\approx$20°C, К$^{-1}$

Алмаз	$9{,}1 \cdot 10^{-7}$	Лед (от –10 до 0°C)	$5{,}07 \cdot 10^{-5}$
Алюминий	$2{,}29 \cdot 10^{-5}$	Магний	$2{,}51 \cdot 10^{-5}$
Бронза	$1{,}75 \cdot 10^{-5}$	Медь	$1{,}67 \cdot 10^{-5}$
Висмут	$1{,}34 \cdot 10^{-5}$	Никель	$1{,}34 \cdot 10^{-5}$
Вольфрам	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$	Олово	$2{,}14 \cdot 10^{-5}$
Гранит	$8{,}3 \cdot 10^{-6}$	Платина	$8{,}9 \cdot 10^{-6}$
Дерево (вдоль волокон)	$(2–6) \cdot 10^{-6}$	Свинец	$2{,}83 \cdot 10^{-5}$
Дерево (поперек волокон)	$(5–6) \cdot 10^{-5}$	Сталь нержавеющая	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$
Железо кованое	$1{,}19 \cdot 10^{-5}$	Стекло обычное	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$
Золото	$1{,}45 \cdot 10^{-5}$	Стекло перекс	$3 \cdot 10^{-6}$
Инвар (сплав 63,2% Fe, 36,1% Ni, 0,39% Cu, 0,39% Mn)	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	Углерод (графит)	$7{,}9 \cdot 10^{-6}$
Иридий	$6{,}5 \cdot 10^{-6}$	Фарфор	$3 \cdot 10^{-6}$
Кварц плавленый	$5 \cdot 10^{-7}$	Цемент и бетон	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Кирпичная кладка	$5{,}5 \cdot 10^{-6}$	Цинк	$3 \cdot 10^{-5}$
Константан	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	Чугун	$1{,}04 \cdot 10^{-5}$
Латунь	$1{,}89 \cdot 10^{-5}$	Эбонит	$7 \cdot 10^{-5}$

Скорость звука в различных средах

Среда	t, °C	v, м/с	Среда	t, °C	v, м/с
Воздух	0	331	Ртуть	20	1451
Азот	0	334	Спирт метиловый	20	1123
Аммиак	0	415	Алюминий	20	5080
Водород	0	1284	Медь	20	3710
Гелий	0	965	Железо	20	5170
Кислород	0	316	Стекло кварцевое	20	5370
Углекислый газ	0	259	Дерево ель	0	4800
Ацетон	20	1192	Дерево пробковое	—	430–530
Вода пресная	25	1497	Каучук	—	50
Вода морская	17	1510–1550			

Плотности некоторых веществ

Твердые тела	$\rho \cdot 10^{-3}$	Жидкости	$\rho \cdot 10^{-3}$	Газы	$\rho \cdot 10^{-3}$
Платина	21,5	Ртуть	13,6	Хлор	3,21
Золото	19,3	Вода	1	Кислород	1,43
Вольфрам	18,8	Масло растительное	0,92	Воздух	1,29
Свинец	11,4	Керосин	0,8	Азот	1,25
Серебро	10,5	Спирт этиловый	0,79	Гелий	0,18
Медь	8,9	Эфир этиловый	0,71	Водород	0,09
Латунь	8,7				
Никель	8,6				
Железо	7,8				
Алюминий	2,7				
Лед	0,9				
Дерево сухое	0,7				

Коэффициент объемного расширения жидкостей β при температуре ≈20 °C, $К^{-1}$

Анилин	$8{,}5 \cdot 10^{-4}$	Кислота азотная	$1{,}24 \cdot 10^{-3}$
Ацетон	$1{,}43 \cdot 10^{-3}$	Нефть	$9{,}2 \cdot 10^{-4}$
Бензол	$1{,}06 \cdot 10^{-3}$	Ртуть	$1{,}81 \cdot 10^{-4}$
Вода при температуре 5–10°C	$5{,}3 \cdot 10^{-5}$	Сероуглерод	$1{,}19 \cdot 10^{-3}$
Вода при температуре 10–20°C	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	Скипидар	$9{,}4 \cdot 10^{-4}$
Вода при температуре 20–40°C	$3{,}02 \cdot 10^{-4}$	Спирт этиловый	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
Глицерин	$5 \cdot 10^{-4}$	Керосин	$1 \cdot 10^{-3}$

Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность χ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	16,8
Воздух	—	17,2	24,1
Гелий	0,22	—	—
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	—	8,32	15,8
Хлор	0,45	—	—

Удельная теплота сгорания

Твердое, Дж/кг		Жидкое, Дж/кг	
Антрацит	$3{,}03\cdot10^7$	Бензин	$4{,}6\cdot10^7$
Бурый уголь	$9{,}3\cdot10^6$	Керосин	$4{,}31\cdot10^7$
Горючие сланцы	$9{,}6\cdot10^6$	Спирт (этиловый)	$2{,}7\cdot10^7$
Древесный уголь	$2{,}97\cdot10^7$	**Газообразное, Дж/м^3**	
Дрова сухие	$1{,}25\cdot10^7$	Водород	$1{,}05\cdot10^7$
Каменный уголь	$2{,}93\cdot10^7$	Коксогаз	$1{,}64\cdot10^7$
Порох	$3\cdot10^6$	Окись углерода	$1{,}3\cdot10^7$
Торф	$1{,}5\cdot10^7$	Природный газ	$1{,}55\cdot10^7$
		Светильный газ	$2{,}1\cdot10^7$

Давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах

t, °C	$P_н$, Па	t, °C	$P_н$, Па	t, °C	$P_н$, Па
−5	400	8	1070	40	7335
0	609	9	1145	50	12 302
1	656	10	1225	60	19 817
2	704	12	1396	70	31 122
3	757	14	1596	80	47 215
4	811	16	1809	90	69 958
5	870	20	2328	100	101 080
6	932	25	3165	150	486 240
7	1025	30	4229	200	1 549 890

Свойства некоторых жидкостей (при 20°C)

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Поверхностное натяжение, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Касторовое масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

Коэффициент теплопроводности κ некоторых веществ, кДж/(м·ч·К)

Металлы		Материалы	
Алюминий	755	Бакелитовый лак	1,05
Железо	268	Бумага сухая	0,504
Золото	1126	Гранит	7,93
Латунь	308	Глина (20% влаги)	3,35
Медь	1401	Дуб (поперек волокна, влажность 6–7%)	1,25–1,55
Ртуть	105	Железобетон	5,57
Серебро	1506	Кирпичная кладка (сухая)	2,42–2,93
Сталь	163	Пробковые плиты	0,151–0,193
Чугун	226	Штукатурка (влажность 6–8%)	2,84
Термоизоляторы		**Жидкости**	
Асбестовая бумага, сухая	0,482–0,637	Ацетон при температуре 0°C	0,63
Войлок асбестовый	0,188–0,33	Ацетон при температуре 50°C	0,59
Войлок шерстяной	0,167	Ацетон при температуре 100°C	0,55
Пенобетон, сухой	0,423–1,15	Вода при температуре 0°C	1,98
Пенопласт, сухой	0,155–0,21	Вода при температуре 50°C	2,33
Шлак котельный	0,84–1,34	Вода при температуре 100°C	2,46

Критические параметры и поправки Ван-дер-Ваальса

	$P_{кр}$, атм	$V_{кр}$, м^3/кмоль	$T_{кр}$, К	a, ат·м^6/кмоль^2	b, м^3/кмоль	$R/N_A k$
HCl	86	0,060	324,6	0,922	0,020	0,469
H_2	13,2	0,065	33,2	0,194	0,022	0,813
He	2,34	0,058	5,2	0,035	0,024	0,821
H_2O	225	0,056	647,3	5,65	0,031	0,602
O_2	51,4	0,075	154,3	1,40	0,032	0,768
N_2	34,8	0,090	126,0	1,39	0,039	0,782
CO_2	75	0,096	304,1	3,72	0,043	0,745

Удельная теплоемкость, температура плавления и кипения, удельная теплота плавления некоторых веществ

Вещество	Удельная теплоемкость при 20°С, Дж/(г·К)	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления, Дж/г	Температура кипения, °С
Алюминий	0,92	660,1	321	2330
Азот	1,04	−209,9	25,5	−195,8
Ацетон	2,18	−94,3	82	56,7
Бензол	1,7	5,5	127,1	80,2
Вода	4,19	0	335	100
Водород	14,3	−259,2	58,5	−253
Вольфрам	0,142	3380	—	6000
Гелий	5,23	−272,2	—	−268,9
Глицерин	2,42	−20	176	290
Железо	0,498	1535	27,2	3000
Золото	0,134	1063	66,5	2660
Калий	0,795	63	—	760
Кислород	0,9	−219	13,8	−181
Латунь	0,384	900	—	—
Лед (вода)	2,09	0	335	100
Магний	1,05	650	301	1100
Медь	0,394	1083	176	2582
Никель	0,46	1452	244–306	2800
Олово	0,25	231,9	58,5	2337
Платина	0,117	1769	114	4000
Ртуть	0,138	−38,9	11,7	356,7
Свинец	0,13	327,3	22,4	1750
Серебро	0,234	960,5	88	2100
Спирт (этиловый)	2,42	−117	108	78,3
Сталь	0,46	1300–1400	205	—
Цинк	0,38	419	117	907
Чугун	0,503	1100–1200	96–138	—
Эфир (этиловый)	2,34	−116,3	98,3	34,6

Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} $К^{-1}$
Алюминий	659	896	322	2,3
Железо	1530	500	272	1,2
Латунь	900	386	—	1,9
Лед	0	2100	335	—
Медь	1100	395	176	1,6
Олово	232	230	58,6	2,7
Платина	1770	117	113	0,89
Пробка	—	2050	—	—
Свинец	327	126	22,6	2,9
Серебро	960	234	88	1,9
Сталь	1300	460	—	1,06
Цинк	420	391	117	2,9

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	гига	Г
$1\,000\,000 = 10^{6}$	мега	М
$1000 = 10^{3}$	кило	к
$100 = 10^{2}$	гекто	г
$10 = 10^{1}$	дека	да
$0{,}1 = 10^{-1}$	деци	д
$0{,}01 = 10^{-2}$	санти	с
$0{,}001 = 10^{-3}$	милли	м
$0{,}000001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0{,}000000001 = 10^{-9}$	нано	н
$0{,}000000000001 = 10^{-12}$	пико	п
$0{,}000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0{,}000000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Коллектив большой. Народ квалифицированный. Работа проделана большая. Так не пойдет.

Огурцов. Из к/ф «Карнавальная ночь»

Основная

1. *Тюрин, Ю. И.* Физика. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика : учеб. пособие / Ю. И. Тюрин, И. П. Чернов, Ю. Ю. Крючков. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2002. — Ч. 1. — 502 с.
2. *Бондарев, Б. В.* Курс общей физики. В 3 кн. : учеб. пособие / Б. В. Бондарев, Н. П. Калашников, Г. Г. Спирин. — 2-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2005. — 352 с.
3. *Калашников, Н. П.* Основы физики. В 2 т. : учебник / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. — 3-е изд., стер. — М. : Дрофа, 2007.
4. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. В 5 кн. : учеб. пособие / И. В. Савельев. — М. : АСТ Астрель, 2006. — 336 с.
5. *Матвеев, А. Н.* Механика и теория относительности : учеб. пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2009. — 336 с.
6. *Трофимова, Т. И.* Курс физики : учеб. пособие. —14-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательский центр «Академия», 2007. — 560 с.
7. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. : учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., стер. — М. : Физматлит, 2006. — 560 с.
8. *Чернов, И. П.* Физика. Сборник задач. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика : учеб. пособие / И. П. Чернов, В. В. Ларионов, Ю. И. Тюрин. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2004. — Ч. 1. — 390 с.
9. *Детлаф, А. А.* Курс физики : учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — 4-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2002. — 718 с.
10. *Дмитриева, В. Ф.* Основы физики : учеб. пособие / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. — 4-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2009. — 527 с.
11. *Иванов, Б. М.* Законы физики. — М. : Наука, 1989. — 591 с.
12. *Грибов, Л. А.* Основы физики : учебник / Л. А. Грибов, Н. И. Прокофьева. — 3-е изд. — М. : Гардарина, 1998. — 564 с.
13. *Ремезов, А. Н.* Курс физики : учебник / А. Н. Ремезов, А. Я. Потапенко. — М. : Дрофа, 2002. — 720 с.

14. *Макаренко, Г. М*. Физика. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. — Минск. : Дизайн ПРО, 1997. — Т. 1. — 176 с.
15. *Иродов, И. Е*. Задачи по общей физике. — 12-изд., стер. — СПб. : Лань, 2007. — 416 с.
16. *Чертов, В. Г*. Задачник по физике / В. Г. Чертов, А. А. Воробьев. — 8 изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2007. — 640 с.

Дополнительная

1. *Воронов, В. К*. Современная физика : учеб. пособие / В. К. Воронов, А. В. Подоплелов. — М. : КомКнига, 2005. — 512 с.
2. *Грин, Б*. Элегантная Вселенная. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 288 с.
3. *Джанколли, Д*. Физика. Т. 1.— М. : Мир, 1989.
4. *Трофимова, Т. И*. Курс физики. Задачи и решения : учеб. пособие / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. — М. : Издательский центр «Академия», 2004. — 592 с.
5. *Фиргант, Е. В*. Руководство к решению задач по курсу общей физики : учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — СПб : Лань, 2008. — 352 с.
6. *Трофимова, Т. И*. Сборник задач по курсу общей физики с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. — М. : Высш. шк., 2003. — 592 с.
7. *Фейнман, Р*. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. Т. 1. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М. : Мир, 1978.
8. *Ландау, Л. Д*. Курс теоретической физики : в 10 т. Т. 1 : Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2002. — 224 с.
9. *Рогачев, Н. М*. Курс физики : учеб. пособие. — СПб. : Лань, 2008. — 448 с.
10. *Кузнецов, С. И*. Физические основы механики : учеб. пособие. — 2-е изд., испр., доп. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 121 с.
11. *Кузнецов, С. И*. Молекулярная физика. Термодинамика : учеб. пособие. — 2-е изд., испр., доп. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 113 с.
12. *Кузнецов, С. И*. Физика: Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика : учеб. пособие / С. И. Кузнецов, Э. В. Поздеева ; Томский политехнический университет. — 3-е изд., перераб. и доп. — Томск : Изд-во ТПУ, 2012. — Ч. I.— 34 с.
13. *Кузнецов, С. И*. Курс физики с примерами решения задач. Молекулярная физика и термодинамика : учеб. пособие / ТПУ. — 3-е изд., перераб. и доп. — Томск : Изд-во ТПУ, 2011. — 178 с.
14. *Кузнецов, С. И*. Краткий курс физики : учеб. пособие / Томский политехнический университет. — Томск : Изд-во ТПУ, 2011. — 187 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ