

А К А Д Е М И Я    Н А У К    С С С Р

Е. К А Р А Ф О Л И

**АЭРОДИНАМИКА  
БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ  
СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ**

*Перевод с английского  
М. А. ПАВЛИХИНОЙ*

*Под редакцией  
Л. П. СМЕРНОВА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
Москва. 1960

Книга Е. Карафоли была издана в Румынии  
на английском языке в переводе с румынского.  
С этого издания и был сделан настоящий пе-  
ревод

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

При любезном содействии Издательства Академии наук СССР в 1956 году появилась на русском языке моя первая книга «Аэродинамика крыла самолета», в которой рассматривались проблемы аэродинамики несжимаемых течений.

При том же содействии, за которое я выражаю здесь признательность, моя вторая книга «Аэродинамика больших скоростей» переведена на русский язык и выходит в том же издании.

В этой книге рассматриваются аэродинамические явления, наблюдаемые при больших скоростях движения газа, изучаются как дозвуковые, так и сверхзвуковые течения.

Скоростная авиация достигла за последнее время такой высокой степени развития, что задачи аэродинамики нельзя трактовать, не принимая во внимание значительных скоростей, достигаемых современными самолетами, а это приводит к необходимости учета эффекта сжимаемости воздуха при составлении уравнений движения.

Мы стремились представить некоторые современные проблемы, относящиеся к сжимаемой жидкости, как с теоретической стороны, так и в особенности в их приложении к текущим задачам авиации, ограничиваясь, разумеется, только областью идеальных жидкостей.

После физико-математического введения, которое мы считаем необходимым для того, чтобы упростить изложение и обеспечить понимание читателем некоторых преобразований, изучаются основные задачи течений сжимаемой жидкости, причем особо отмечается роль скорости звука в устанавливаемых уравнениях различной формы.

Рассматривая далее одномерные дозвуковые и сверхзвуковые течения, осуществляющиеся в трубках тока и соплах, мы пытались применить эти движения к случаю аэродинамических труб.

Значительная часть книги посвящена изучению дозвуковых двумерных течений, а также течений вокруг тел вращения как в предположении малых возмущений, так и в случае больших изменений скорости; при этом подчеркивается значение критического числа Маха.

Исследование сверхзвуковых течений включает анализ двумерных и осесимметричных движений не только при гипотезе малых возмущений, но также и в случае применения точных методов к ряду задач большой практической важности.

Другая существенная часть книги посвящена изучению конических и треугольных крыльев в сверхзвуковом потоке, причем описываются

основные задачи, связанные с типом крыльев, используемых в современной авиации.

В этом разделе мы пытались ввести некоторые, более адекватные поставленной задаче методы, чтобы представить предмет изучения возможно более исчерпывающим образом, создавая, кроме того, благоприятную возможность для развития дальнейших исследований, которые могут привести к новым достижениям.

С этой целью изучается большое число крыльев с постоянными или переменными толщиной и углом атаки путем использования различных методов исследования, включая, в определенных случаях, применение теории однородных течений высшего порядка.

Изучению неустановившихся течений посвящен определенный раздел книги, чтобы сделать обзор более исчерпывающим, охватывая возможно шире область современных сверхзвуковых задач.

Однако постоянно наблюдаемый прогресс в области авиации является столь значительным, что очень трудно в данный момент отразить все разделы современной аэродинамики, и в настоящей работе, конечно, не затронут ряд разделов, но мы надеемся добавить некоторые из них в будущем издании.

Мы старались дать единую точку зрения на всю работу и нашим постоянным стремлением было излагать задачи в логической последовательности, чтобы сделать их более доступными читателю.

Мы надеемся, что благодаря широкому охвату материала, применяемым методам исследования и разнообразию содержания книга представит интерес для всех специалистов, работающих в авиации или близких областях, а также для студентов, инженеров и преподавателей, которые желают изучить эту отрасль науки или стремятся способствовать развитию авиационной техники применением достигнутых результатов.

Ценная работа моих сотрудников, Беатрисы Хоровиц и Мирчи Ионеску, способствовала осуществлению изложенных целей. Я выражаю им здесь свою признательность за эффективное сотрудничество на протяжении всех стадий работы над этой книгой.

В заключение мне хочется выразить большую благодарность товарищам Л. П. Смирнову и М. А. Павлихиной за тяжелую работу по редактированию и переводу, которая так хорошо была выполнена, и за ценную помощь, оказанную ими по изданию книги.

*Е. Карафоли*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Вторая издаваемая на русском языке книга румынского академика Е. Карафоли «Аэродинамика больших скоростей» посвящена изучению сжимаемых течений при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях.

Первая часть обширного труда Е. Карафоли по аэродинамике, в которой рассматривались стационарные и нестационарные обтекания профиля и крыла конечного размаха потоком несжимаемой жидкости, также была издана на русском языке в 1956 г. под названием «Аэродинамика крыла самолета».

В настоящей книге описание произведенных в аэродинамике исследований распространено на круг более современных задач обтекания крыла сжимаемым потоком. По характеру своего построения книга может изучаться независимо от первой.

Книга открывается большим вводным отделом, в котором дается описание основных положений газовой динамики.

В главе, посвященной одномерным течениям, содержится разнообразный и интересный материал, касающийся принципиальных задач газовой динамики — течений через трубы и насадки, теории ударных волн.

Достаточно широко освещены вопросы дозвукового течения газа как в линейной постановке, так и в более точной трактовке, связанной с работами Чаплыгина, Кармана — Тзяна и других исследователей. Здесь же имеется интересный раздел, посвященный переходу через скорость звука. Автор уделяет большое внимание физической сущности возникающих явлений, связанных с образованием ударных волн за местной сверхзвуковой областью.

Большая часть книги содержит исследования сверхзвуковых течений газа. Широко освещается метод малых возмущений применительно к пространственным и плоским течениям. Подробно рассматривается вопрос о построении точных решений для плоских сверхзвуковых течений, основанном на рассмотрении полного расширения Прандтля — Мейера и диаграммы эпициклоид. В качестве приложения рассматриваются течения вокруг сверхзвуковых профилей. Много внимания уделено методу характеристик и приведен большой графический и числовой материал, облегчающий решение задач этим способом. При этом автор подробно рассматривает вопросы отражения и интерференции волн разрежения и ударных волн, а в качестве приложения дает построение сверхзвукового

эффузора. Далее рассматривается построение точных решений для конусов и тел вращения.

Наиболее значительное место в книге занимает теория крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, основанная главным образом на гипотезе малых возмущений. Здесь рассматривается метод источников и диполей и в особенности метод конических и обобщенных конических течений. Значительная часть излагаемого в этом разделе обширного материала, относящегося к сверхзвуковому обтеканию треугольных крыльев различной формы, крыльев, снабженных пластинкой, нормальной к крылу, принадлежит автору книги и работавшим с ним его сотрудникам. Небольшой раздел книги посвящен неустановившимся течениям.

Заключительный раздел книги содержит исследования автора и его сотрудников по теории конических течений высшего порядка применительно к прямым и обратным задачам обтекания крыла. Этот раздел не входит в книгу, с которой сделан русский перевод, и любезно добавлен автором к настоящему изданию. В этом разделе, в частности, рассматриваются гармонические колебания крыла и элеронов и обтекание крыла неоднородным периодическим потоком.

Книга Е. Карафоли не содержит задач газовой динамики, связанных с новой, развивающейся в настоящее время областью исследований течений разреженного газа и влияния магнитных полей на течение газа. Вопросы влияния вязкости в ней также не затронуты. Книга представляет изложение классических вопросов обтекания тел, в основном крылообразной формы, и частично течений в трубах. В этом ее главный интерес для читателя.

Автор всегда стремится обеспечить хороший контакт с читателем, расшифровывая в достаточной степени трудные вопросы. Как и в первой книге, автор уделяет много внимания практическим приложениям излагаемых расчетных методов.

Книга представит существенный вклад в литературу по газовой динамике на русском языке и в связи также с обширной библиографией, приводимой автором, позволит читателю хорошо ориентироваться во многих современных вопросах аэродинамики сжимаемых течений.

Перевод книги сделан с английского текста, изданного в Бухаресте в 1956 г.

Небольшие исправления и изменения некоторых формул, по сравнению с английским текстом, принадлежат редактору перевода.

*Л. Смирнов*

## Глава I

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В книге принята обычная векторная нотация, при использовании которой изложение большинства проблем механики жидкости становится более простым, ясным и наглядным. С целью ближе ознакомить читателя с некоторыми векторными операциями и с переносом получаемых результатов из одной системы координат в другую в данной главе излагаются основы векторного анализа, связанные с приложениями, содержащимися в книге.

Кроме того, имея в виду тесную связь между явлениями в газовом потоке и термодинамическими законами, применяемыми к вопросам преобразования энергии, дан краткий обзор основных соотношений термодинамики.

#### 1. НАИБОЛЕЕ ЧАСТО УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

##### 1.1. Скаляры и векторы. Определения

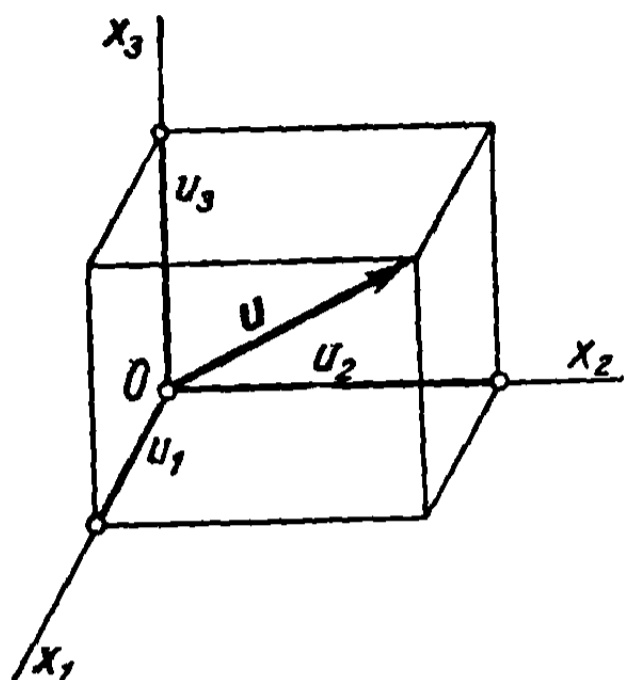
Количество, определяемое одним действительным числом, независимо от системы отсчета, называется *скаляром*. В более общем смысле скаляр характеризует определенное количество в каждой точке пространства, связанной с соответствующей функцией, называемой компонентой, одинаковой по величине в любой системе координат. Совокупность этих точек совместно со значениями компоненты (точечной функции) образует *скалярное поле*. Такие количества, как, например, давление, плотность, температура, энтропия, потенциал скорости и т. д., полностью определяются единственной числовой характеристикой в любой системе отсчета и поэтому представляют собой скаляры. Если скаляр есть точечная функция, т. е. рассматривается скалярное поле, он может быть представлен одной функцией в любой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ :

$$S = S(x_1, x_2, x_3). \quad (1.1)$$

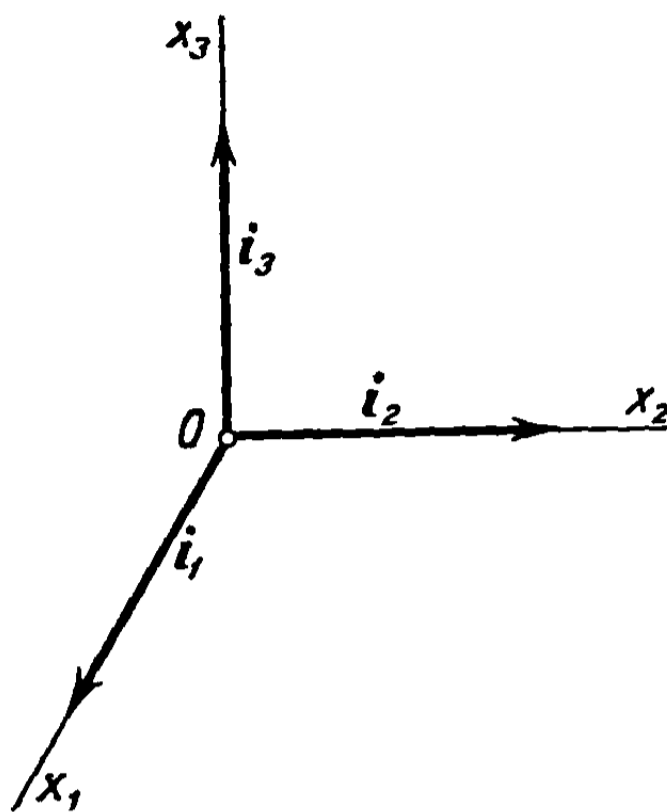
Количества, требующие установления величины (*модуля*) и *направления*, или ориентации, называются *векторами*. Вектор, вообще говоря, зависит от положения определенной точки в пространстве, связанной

с тремя функциями, называемыми компонентами, с помощью которых вектор будет полностью определен.

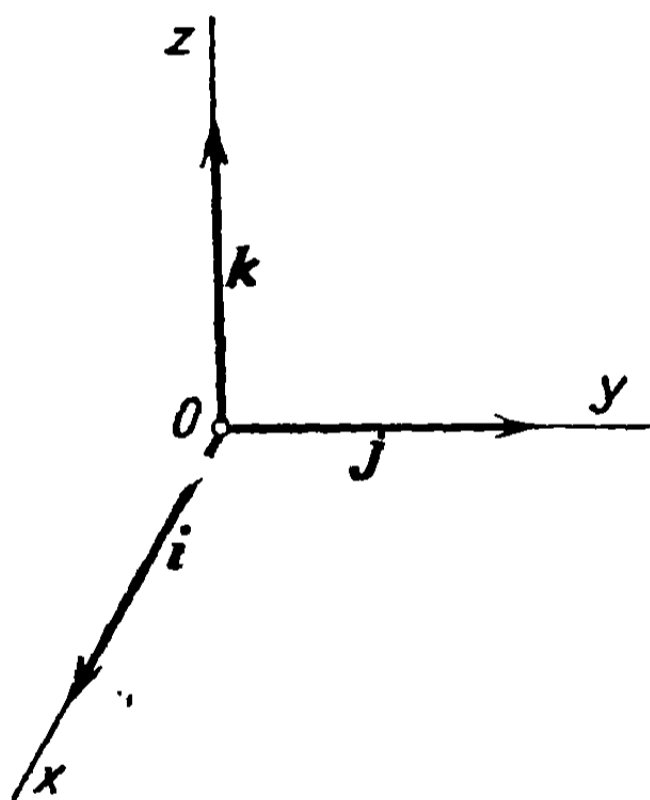
Совокупность этих точек совместно со значениями компонент образует *векторное поле*. Так, например, смещение, скорость, ускорение, сила, момент силы и т. д. представляются векторами или векторными функциями и определяются полностью тремя компонентами.



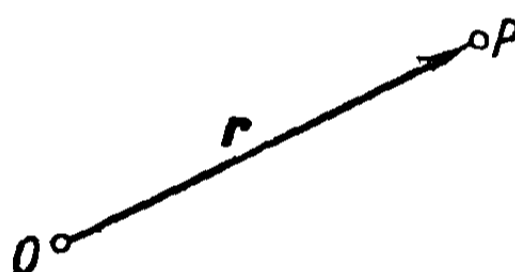
Фиг. 1.1



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3



Фиг. 1.4

Векторы будут обозначаться прямыми полужирными буквами ( $\mathbf{u}$ ), а их величины, или модули — соответствующими курсивными буквами ( $u$ ).

Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  могут быть выражены через его проекции  $u_1, u_2, u_3$  на три оси координат системы  $Ox_1x_2x_3$  (фиг. 1.1).

Вектор, величина которого равна единице, называется *единичным вектором*, или *версором*.

Обычно единичные векторы, направленные вдоль трех координатных осей, обозначаются через

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$$



в системе  $Ox_1x_2x_3$  (фиг. 1.2) или посредством

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$$

в системе  $Oxyz$  (фиг. 1.3).

Следовательно, вектор  $\mathbf{u}$  может быть представлен посредством равенства

$$\mathbf{u} = i_1u_1 + i_2u_2 + i_3u_3, \quad (1.2)$$

или, обозначая компоненты вектора в системе  $Oxyz$  через  $u_x, u_y, u_z$ ,

$$\mathbf{u} = i u_x + j u_y + k u_z. \quad (1.3)$$

Приведенные формулы выражают правило разложения вектора по направлениям трех осей координат, т. е. правило параллелепипеда, построенного на трех компонентах.

Ради удобства в этой вводной главе будут использованы обозначения  $x_1, x_2, x_3$  в системе  $Ox_1x_2x_3$ , а в дальнейшем перейдем к системе  $Oxyz$ .

Радиус-вектор, соединяющий начало системы координат с любой заданной точкой, определяющий положение этой точки, называется *вектором положения*; принимается, что он направлен от начала к заданной точке.

Так, на фиг. 1.4

$$\mathbf{r} = \vec{OP},$$

или, обозначая текущие координаты точки  $P$  через  $x_1, x_2, x_3$ ,

$$\mathbf{r} = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3. \quad (1.4)$$

## 1.2. Векторные операции

Сумма двух векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  есть вектор  $\mathbf{s}$ , получаемый геометрическим сложением обоих векторов, в соответствии с правилом параллелограмма (фиг. 1.5):

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Разность между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  есть вектор  $\mathbf{d}$ , определяемый выражением

$$\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}); \quad (1.6)$$

очевидно, что  $\mathbf{d}$  есть сумма  $\mathbf{u}$  и  $-\mathbf{v}$  (фиг. 1.6).

В соответствии с этим правилом результирующий вектор нескольких векторов

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} \quad (1.7)$$

может быть легко получен геометрически (фиг. 1.7).

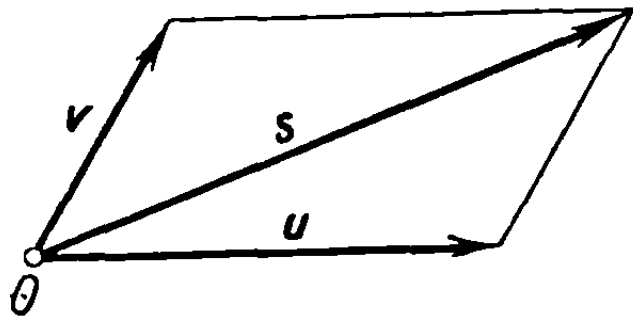
*Скалярное произведение* векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  будет обозначаться точкой  $(\cdot)$  и представляет скалярную величину, определяемую выражением

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.8)$$

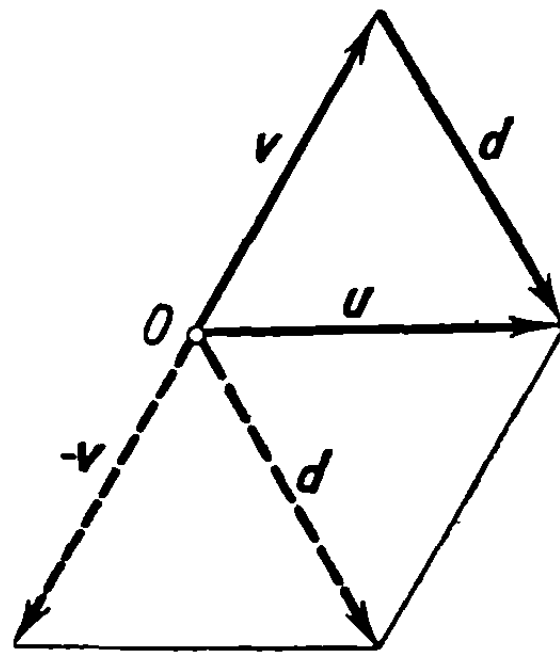
где  $\theta$  — угол между двумя векторами (фиг. 1.8).

В силу написанных выше соотношений и дистрибутивного свойства скалярного произведения получим, обозначая посредством  $i_1, i_2, i_3$  единичные векторы прямоугольной координатной системы:

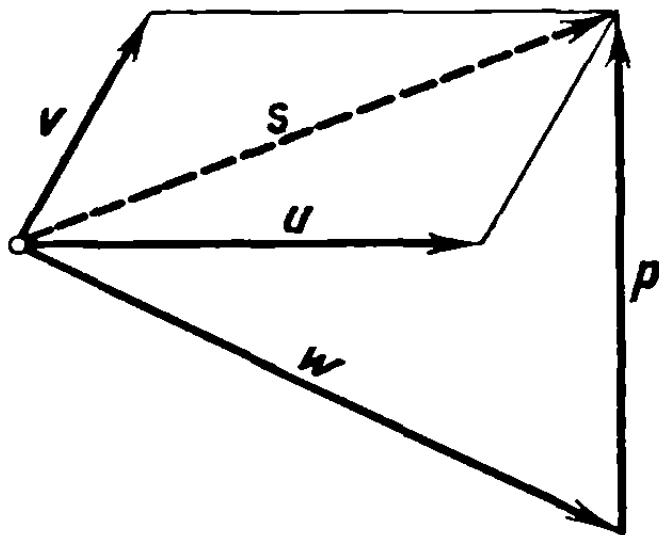
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3) \cdot (i_1 v_1 + i_2 v_2 + i_3 v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1.9)$$



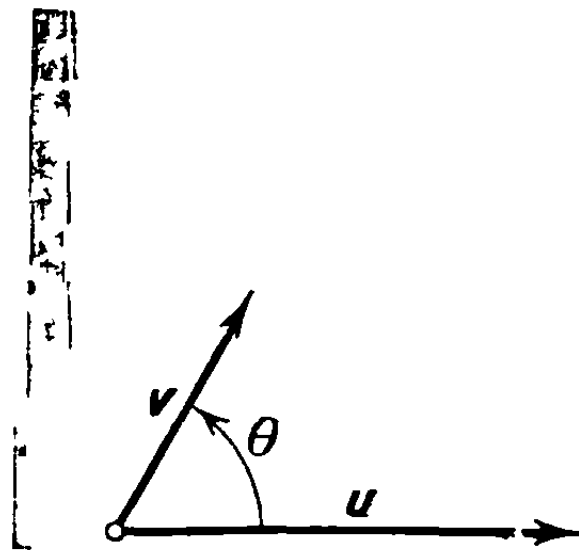
Фиг. 1.5



Фиг. 1.6



Фиг. 1.7



Фиг. 1.8

*Векторное произведение* векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , обозначаемое символом  $\times$ , есть вектор  $\mathbf{w}$ , определяемый выражением

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad (w = uv \sin \theta), \quad (1.10)$$

нормальный к плоскости, которую можно провести через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , и направленный в сторону, откуда кратчайшее вращение от  $\mathbf{u}$  к  $\mathbf{v}$  будет представляться совершающимся против часовой стрелки. Как и в предыдущем случае, можно получить важное соотношение:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + i_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + i_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1). \quad (1.11)$$

### 1.3. Точечные функции: градиент, дивергенция, вихрь

Выше было отмечено, что скаляры или векторы могут быть точечными функциями, причем в этом случае полная их совокупность называется скалярным или векторным полем.

Многочисленные другие функции могут быть выведены из этих скалярных или векторных функций; особенно важное значение будут иметь три такие функции, широко используемые в механике жидкостей, а именно *градиент, дивергенция, вихрь*.

1. 3. 1. **Градиент.** Пусть мы имеем скалярное поле, определяемое функцией  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ , непрерывной в рассматриваемом пространстве, вместе с первыми ее производными; существует бесконечное множество поверхностей  $S$ , во всех точках которых функция имеет постоянное значение

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (1.12)$$

Поверхности  $\Phi = \text{const}$  называются поверхностями уровня.

Пусть точка  $P$  лежит на одной из поверхностей  $\Phi = \text{const}$  и пусть  $P'$  будет соседняя точка, расположенная на малом расстоянии от первой

$$\vec{PP'} = d\mathbf{r} = i_1 dx_1 + i_2 dx_2 + i_3 dx_3 \quad (1.13)$$

и лежащая на другой поверхности  $\Phi + \Delta\Phi$  (фиг. 1.9).

Расстояние между двумя поверхностями, измеряемое вдоль общей к ним нормали, определится выражением

$$dn = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали.

Тогда будет иметь, с одной стороны,

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} dn = \frac{\partial\Phi}{\partial n} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.15)$$

а с другой, так как  $\Phi$  есть функция от  $x_1, x_2, x_3$ , принимая во внимание (1.9),

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} dx_3 = \left( i_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right) \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.16)$$

Приравнивая последние результаты, получаем два выражения одного и того же вектора, называемого *градиентом функции*  $\Phi$ :

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{n} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = i_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}. \quad (1.17)$$

Пусть  $\tau$  будет объем, содержащий точку  $P$  и ограниченный поверхностью  $\sigma$ ; если  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор внешней нормали к поверхности, то градиент выражается посредством

$$\text{grad } \Phi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \mathbf{n} \Phi d\sigma. \quad (1.18)$$

Действительно, применяя это соотношение к малому цилиндрическому объему  $\Delta\tau$  с поперечным сечением  $\Delta\sigma$ , образующие которого параллельны общей нормали, соединяющей две поверхности уровня  $\Phi$  и  $\Phi + \Delta\Phi$ , и замечая, что  $\Phi = \Phi'$  одно и то же на каждой поверхности уровня (фиг. 1.10), получим

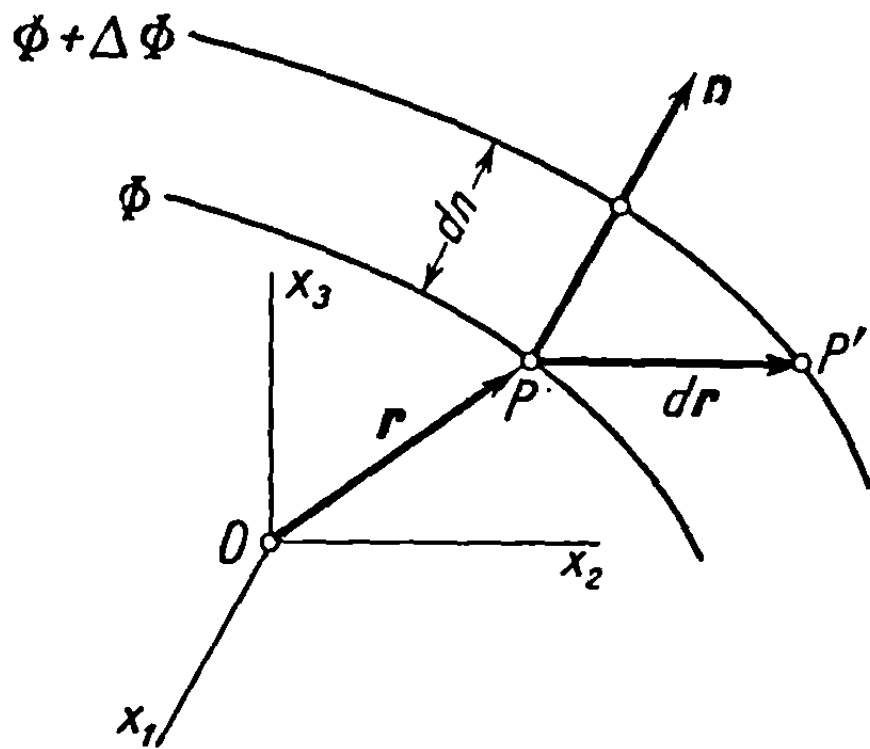
$$\int_{\sigma} \mathbf{n} \Phi d\sigma = \mathbf{n} \left( \Phi + \frac{\Delta\Phi}{\Delta n} \Delta n \right) \Delta\sigma - \mathbf{n} \Phi \Delta\sigma \approx \mathbf{n} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Delta\tau = \text{grad } \Phi \Delta\tau; \quad (1.19)$$

отсюда, полагая  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , приходим к соотношению (1.18).

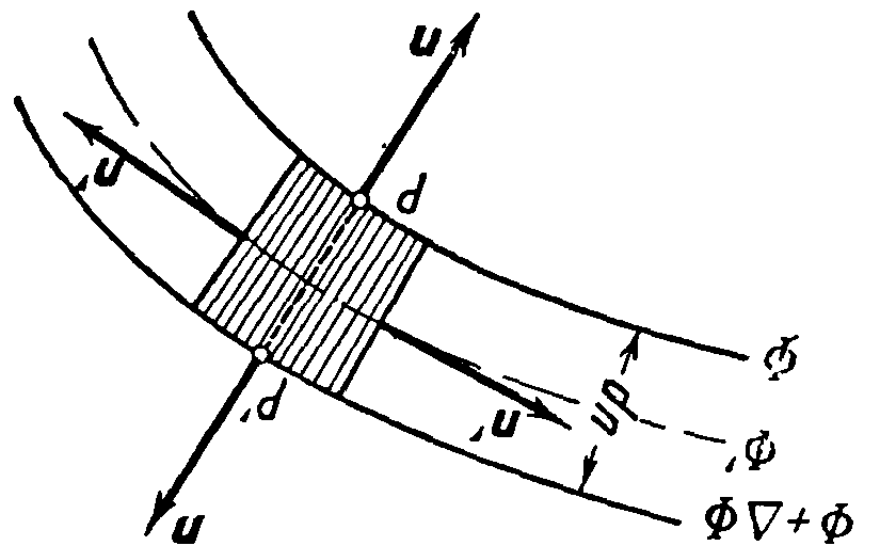
1.3.2. Дивергенция. Рассмотрим векторное поле, представленное векторной функцией  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ ; поток вектора  $\mathbf{u}$  через поверхность  $d\sigma$  определяется выражением

$$d\Psi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\sigma, \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к  $d\sigma$  (фиг. 1.11).



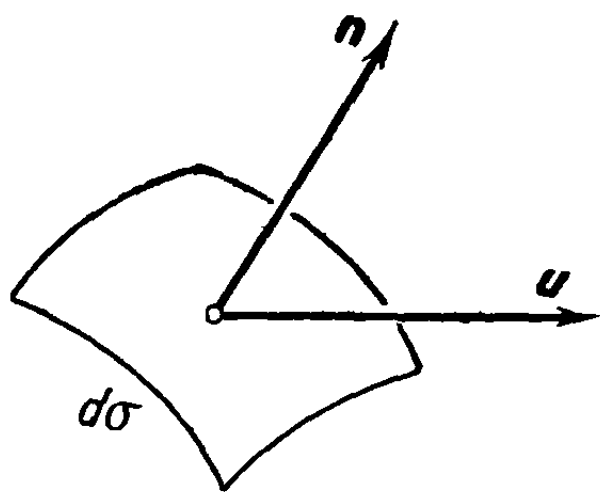
Фиг. 1.9



Фиг. 1.10

Если рассматривать замкнутую поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $\tau$ , то предел выражения для потока вектора  $\mathbf{u}$  через поверхность  $\sigma$ , разделенного на объем  $\tau$ , когда объем  $\tau$  стремится к нулю, называется *дивергенцией вектора  $\mathbf{u}$* :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\sigma, \quad (1.21)$$



Фиг. 1.11

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали.

Применяя это определение к элементарному прямоугольному параллелепипеду  $dx_1 dx_2 dx_3$  (фиг. 1.12), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (1.22)$$

1.3.3. Вихрь. По аналогии с выражениями для градиента и дивергенции вихрь вектора  $\mathbf{u}$  определяется выражением

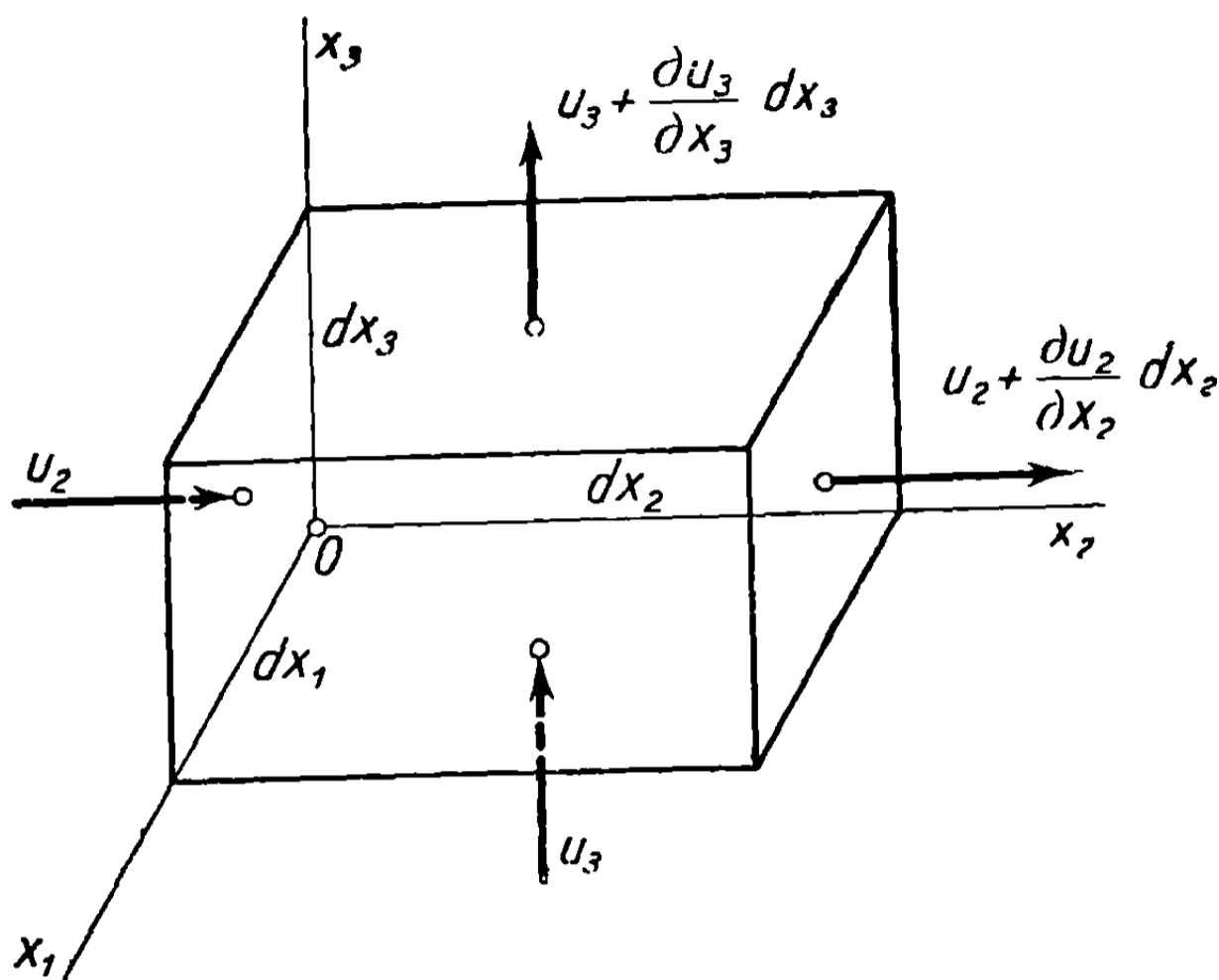
$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{u} d\sigma, \quad (1.23)$$

которое может быть применено к тому же элементарному параллелепипеду (фиг. 1.13). Очевидно, что следует принять во внимание приращения скорости при переходе от одной грани параллелепипеда к противоположной; таким образом, получим

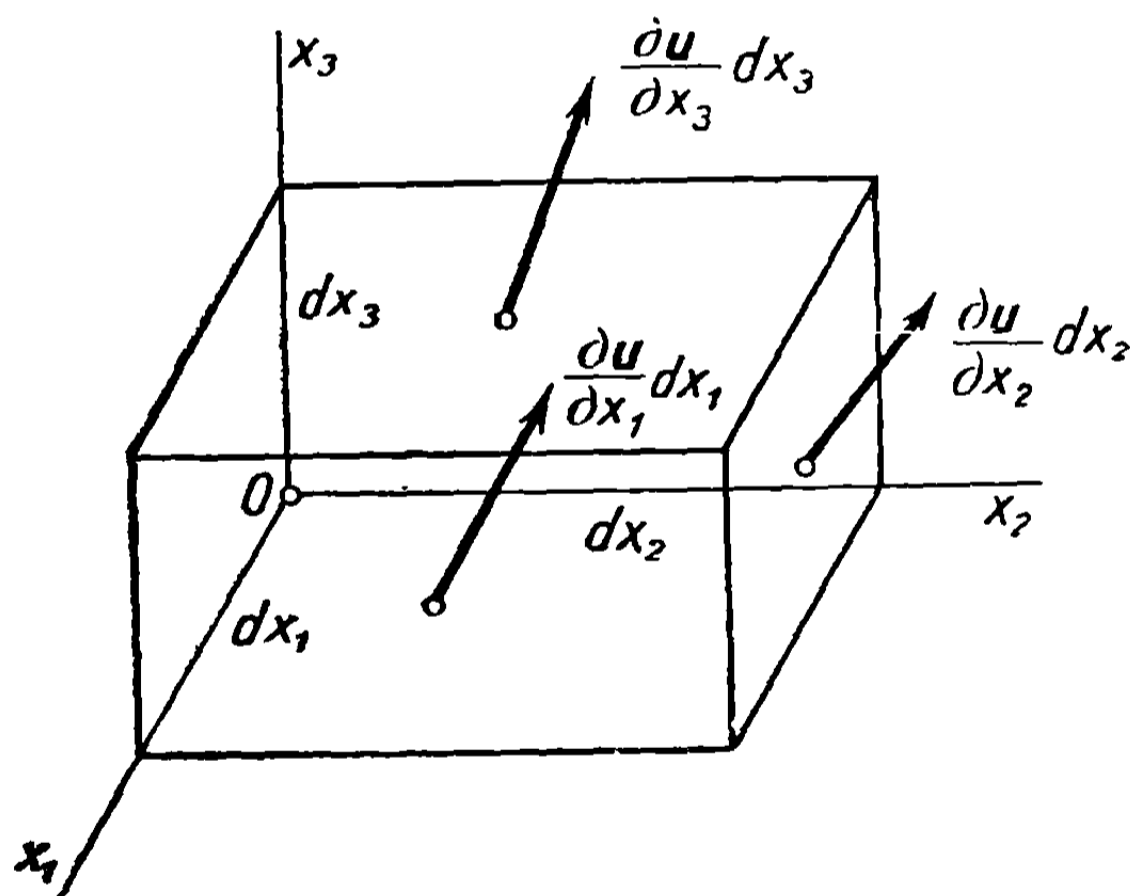
$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{i}_1 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}, \quad (1.24)$$

отсюда

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{i}_1 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{i}_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{i}_3 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (1.25)$$



Фиг. 1.12



Фиг. 1.13

#### 1.4. Символическое представление посредством оператора набла

Градиент, дивергенция, вихрь, как и другие функции, выводимые из скаляров или векторов, могут символически определяться с помощью *оператора набла*, обозначаемого посредством  $\nabla$  и представляющего вектор-производную, аналогичную скалярной производной по декартовым координатам. Этот оператор определяется выражением

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (1.26)$$

Если выбрана система координат  $Oxyz$  и единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей, обозначены посредством  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , то, как было указано ранее, соотношение может быть записано в виде

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.27)$$

Этот оператор, помещаемый перед скаляром или вектором, ведет себя так же, как вектор.

Отсюда получим:

для градиента

$$\nabla \Phi = \left( \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi = \mathbf{i}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \text{grad } \Phi; \quad (1.28)$$

для дивергенции

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \left( \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (\mathbf{i}_1 u_1 + \mathbf{i}_2 u_2 + \mathbf{i}_3 u_3) = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{u}; \end{aligned} \quad (1.29)$$

для вихря

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{u} \quad (1.30)$$

Подобно этому, если  $\nabla$  помещается после вектора, образуя скалярное произведение, получим

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad (1.31)$$

и этот новый оператор, ведущий себя как скаляр, может быть применен к скаляру или вектору. Таким образом,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \Phi = v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad (1.32a)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} = v_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}. \quad (1.32b)$$

Заменяя  $\mathbf{v}$  через  $d\mathbf{r}$ , получим соотношения

$$(d\mathbf{r} \cdot \nabla) \Phi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi = d\Phi, \quad (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} = d\mathbf{u}. \quad (1.33)$$

Ниже приводятся некоторые обычно употребляемые формулы, которые будут применяться в дальнейшем изложении:

$$\nabla (\Phi \Psi) = \Phi \nabla \Psi + \Psi \nabla \Phi = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi; \quad (1.34a)$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) = \Phi (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \Phi \cdot \mathbf{u} = \Phi \text{div } \mathbf{u} + \text{grad } \Phi \cdot \mathbf{u}; \quad (1.34b)$$

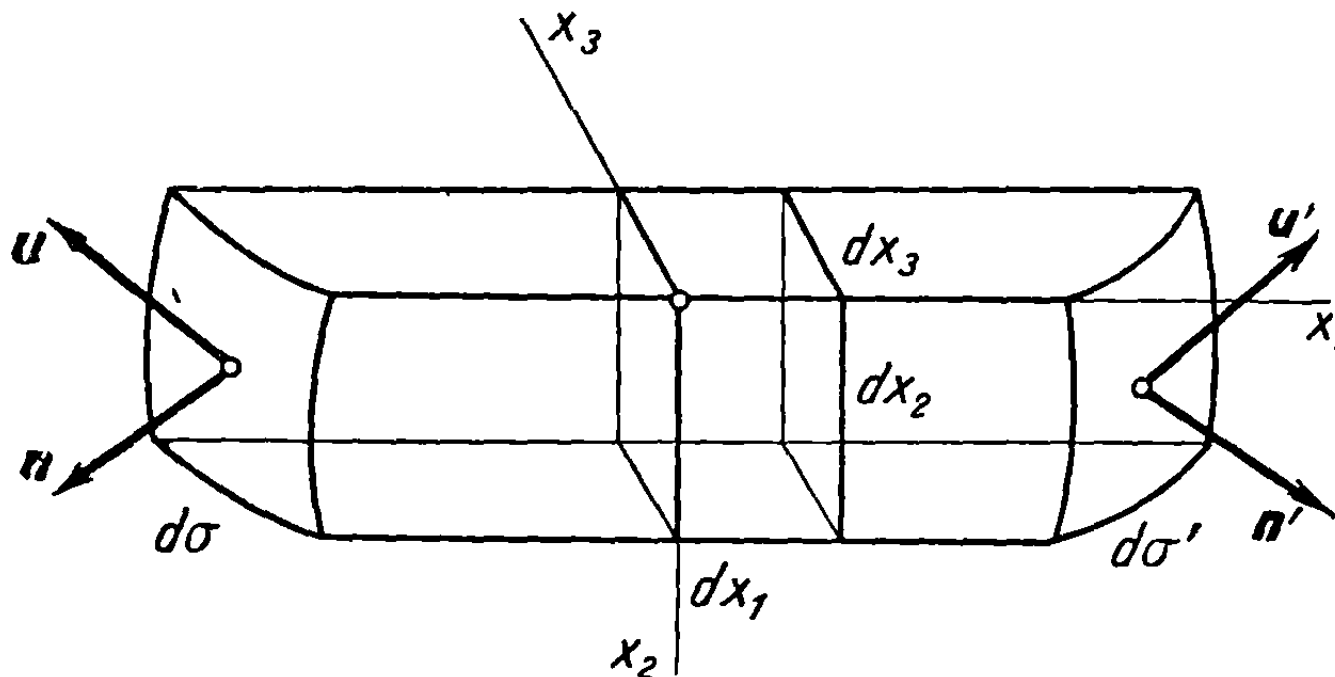
$$\nabla \times (\Phi \mathbf{u}) = \nabla \Phi \times \mathbf{u} + \Phi (\nabla \times \mathbf{u}) = \text{grad } \Phi \times \mathbf{u} + \Phi \text{rot } \mathbf{u}; \quad (1.34b)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \Delta \Phi; \quad (1.34g)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \right] \mathbf{u} = \\
&= \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}
\tag{1.34д}$$

### 1.5. Теорема Гаусса

Так как теорема Гаусса часто применяется, то ниже будут даны ее различные частные формы, с помощью которых поверхностные интегралы пре-



Фиг. 1.14

образуются в объемные, а объемные — в поверхностные. Все они легко выводятся из определения производных функций, представленных выше; так, если  $\sigma$  обозначает поверхность, ограничивающую объем  $\tau$ , и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности, то:

$$\int_{\tau} \nabla \Phi \, d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \Phi \, d\sigma;
\tag{1.35а}$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, d\sigma;
\tag{1.35б}$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{u} \, d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \, d\sigma.
\tag{1.35в}$$

Следует отметить, что если единичный вектор  $\mathbf{n}$  будет направлен внутрь объема  $\tau$ , то перед правыми частями написанных выше равенств должен быть поставлен знак минус.

Эти формулы преобразования интегралов могут быть выведены путем разбиения полного объема  $\tau$  на ряды элементарных параллелепипедов. Ранее уже было показано, что приведенные выше уравнения автоматически удовлетворяются для каждого такого элементарного параллелепипеда.

Поверхностные интегралы по общим границам двух примыкающих параллелепипедов взаимно погашаются, поэтому остаются только поверхностные интегралы по граням, лежащим на поверхности  $\sigma$  (фиг. 1.14). Таким образом, в конечном счете остается только поверхностный интеграл, распространенный по внешней поверхности, и, следовательно, написанные выше уравнения оказываются справедливыми.

Принимая во внимание соотношения (1.34), можно далее получить следующие выражения:

$$\int_{\tau} \nabla^2 \Phi d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot \nabla \Phi d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma; \quad (1.36a)$$

$$\int_{\tau} \nabla^2 u d\tau = \int_{\tau} (\nabla \cdot \nabla) u d\tau = \int_{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla) u d\sigma. \quad (1.36b)$$

## 1.6. Преобразование координатных систем

Представление скалярных или векторных функций, установленное ранее в декартовых координатах, не годится для других координатных систем.

Так как при решении ряда задач и изучении некоторых специальных течений удобнее перейти к полярной или цилиндрической системам

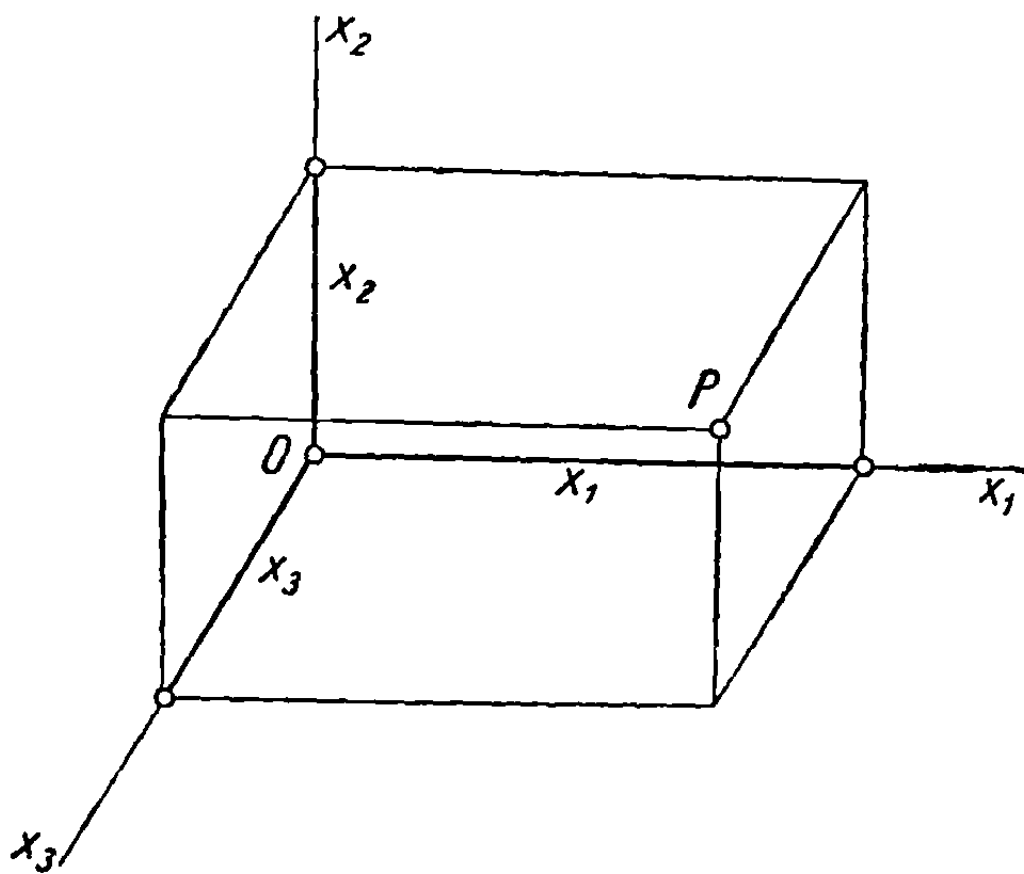
координат, то ниже дано представление определенных формул и функций в ортогональных криволинейных координатах.

В декартовой системе положение любой заданной точки устанавливается тремя координатами  $x_1, x_2, x_3$  и определяется пересечением трех перпендикулярных плоскостей (фиг. 1.15):

$$x_1 = \text{const},$$

$$x_2 = \text{const},$$

$$x_3 = \text{const}.$$



Фиг. 1.15

В полярной системе координат той же точке соответствуют координаты  $y_1, y_2, y_3$ , и ее положение определяется пересечением следующих ортогональных поверхностей (фиг. 1.16):

сферы радиуса  $y_1 = \text{const}$ ,

конуса с углом  $y_2 = \text{const}$ ,

плоскости  $y_3 = \text{const}$ .

В случае цилиндрических координат (фиг. 1.17), которые можно, например, обозначить через  $z_1, z_2, z_3$ , положение точки будет определено пересечением следующих ортогональных поверхностей:

плоскости  $z_1 = \text{const}$ ,

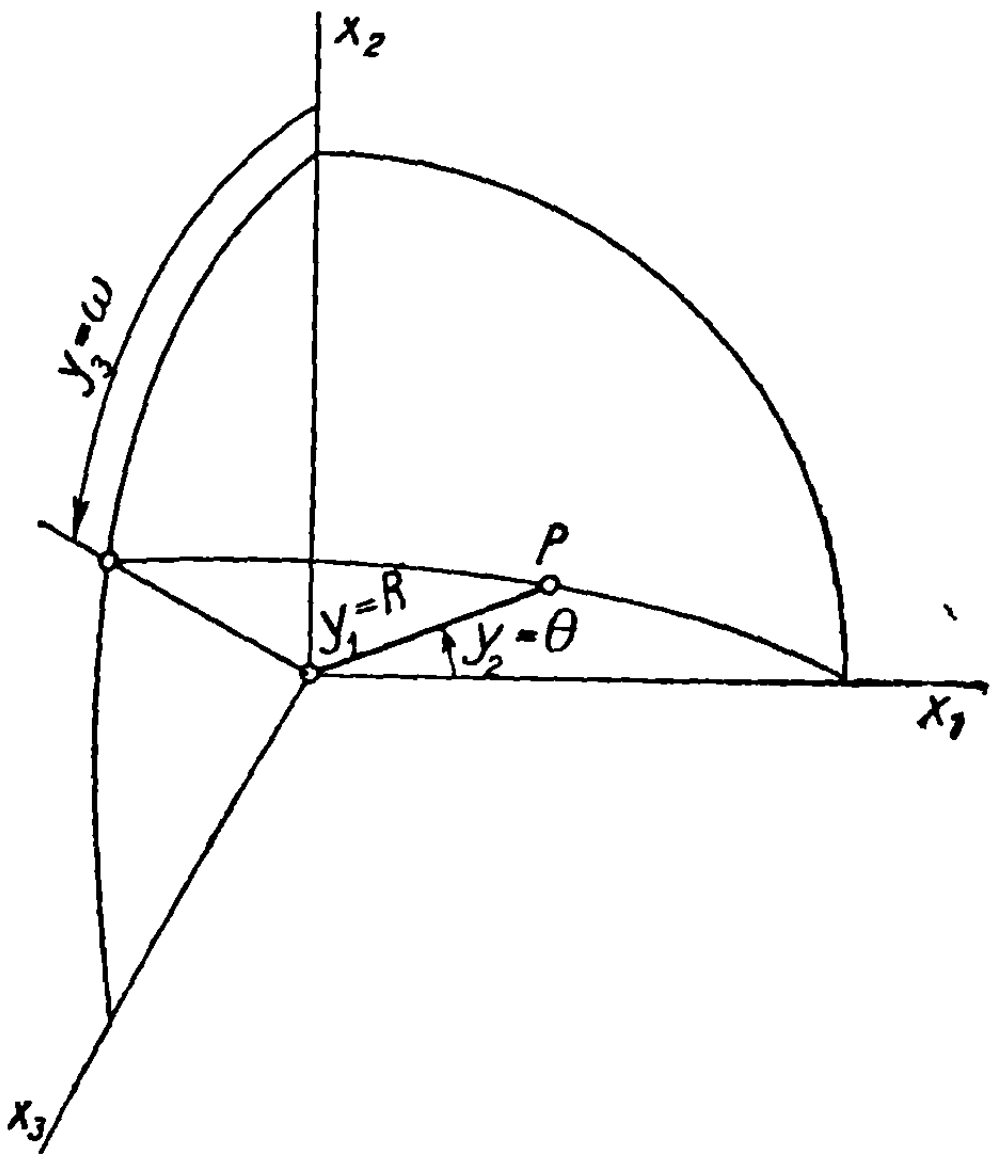
цилиндра радиуса  $z_2 = \text{const}$ ,

плоскости  $z_3 = \text{const}$ .

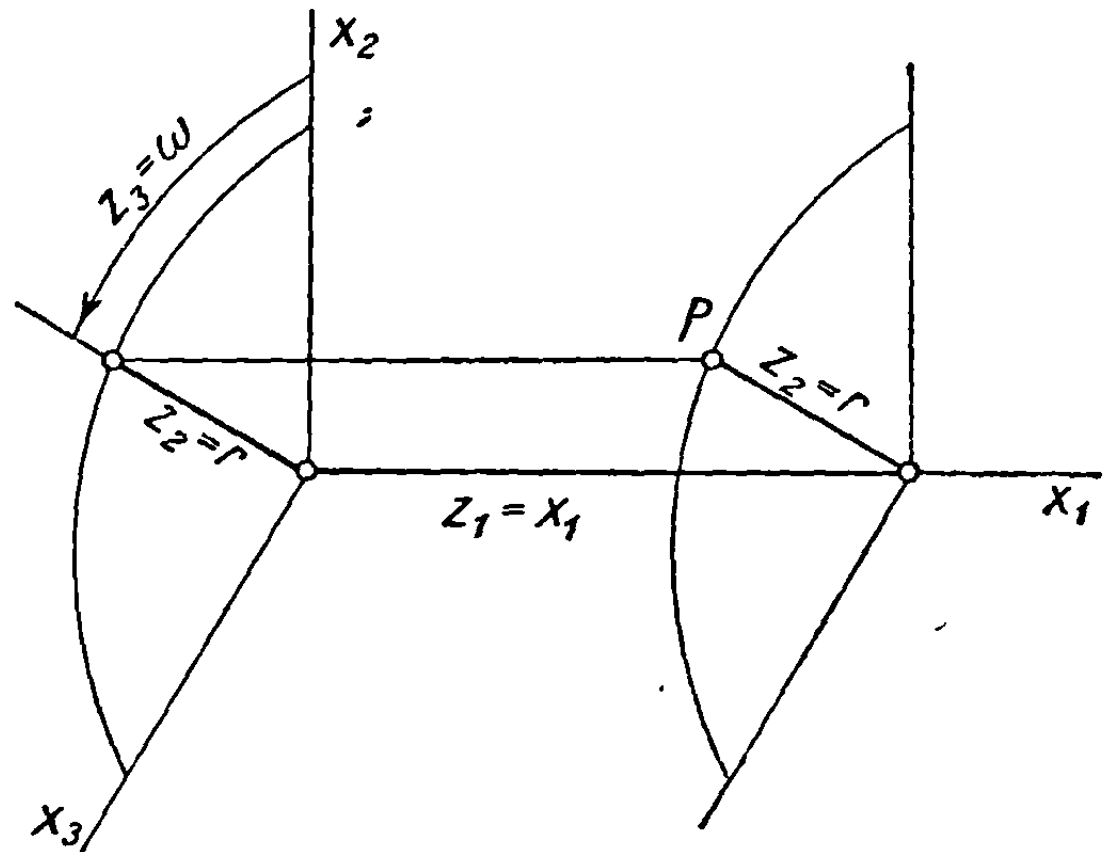


В общем случае в системе ортогональных криволинейных координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  положение точки будет определено пересечением ортогональных поверхностей:

$$\xi_1 = \text{const}, \xi_2 = \text{const}, \xi_3 = \text{const}.$$



Фиг. 1.16



Фиг. 1.17

Предполагая, что две ортогональные системы координат, декартова и криволинейная, связаны функциональными зависимостями

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.37)$$

получим путем дифференцирования:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} d\xi_3; \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} d\xi_3; \\ dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} d\xi_3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Очевидно, что элемент дуги  $ds$  выражается в двух координатных системах следующим образом:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\xi_3^2, \quad (1.39)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  получаются приравниванием попарно нулю дифференциалов  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ ; так, полагая  $d\xi_2 = d\xi_3 = 0$ , получим

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)^2. \quad (1.40)$$

Аналогично

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right)^2;$$

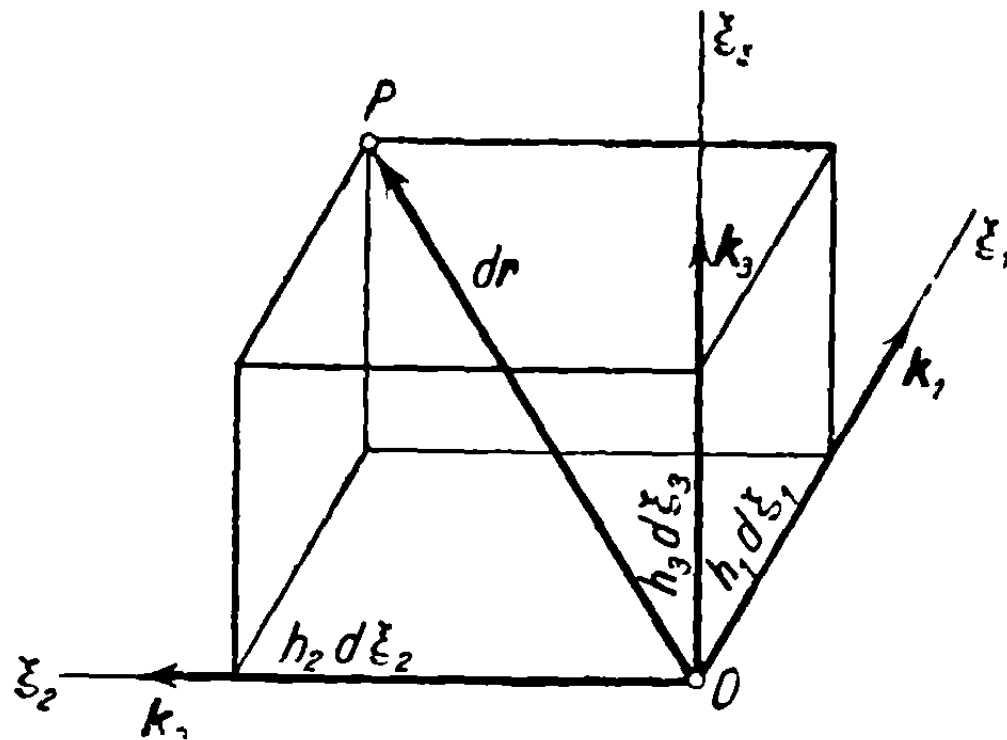
$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\right)^2. \quad (1.41)$$

Если применить эти результаты к полярным и цилиндрическим координатам (см. фиг.1.15, 1.16, 1.17), то получим соотношения для полярных координат:

$$x_1 = y_1 \cos y_2, \quad x_2 = y_1 \sin y_2 \cos y_3, \quad x_3 = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \quad (1.42)$$

и

$$h_1 = 1; \quad h_2 = y_1, \quad h_3 = y_1 \sin y_2; \quad (1.43)$$



Фиг. 1.18

для цилиндрических координат соответственно

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2 \cos z_3, \quad x_3 = z_2 \sin z_3 \quad (1.44)$$

и

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = z_2. \quad (1.45)$$

Вводя обычные обозначения полярных и цилиндрических координат:

$$y_1 = R, \quad y_2 = \theta, \quad y_3 = \omega, \quad (1.46a)$$

$$z_1 = x, \quad z_2 = r, \quad z_3 = \omega, \quad (1.46б)$$

получим соотношения для полярных координат:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R \sin \theta; \quad (1.47)$$

для цилиндрических координат

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = r. \quad (1.48)$$

Рассмотрим теперь элементарный параллелепипед, ребра которого  $h_1 d\xi_1$ ,  $h_2 d\xi_2$ ,  $h_3 d\xi_3$  вдоль ортогональных направлений  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  (фиг. 1.18) являются также проекциями вектора  $ds = dr$ , представляющего диагональ параллелепипеда.

Обозначая единичные векторы вдоль тех же ортогональных направлений через  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , получим

$$dr = k_1 h_1 d\xi_1 + k_2 h_2 d\xi_2 + k_3 h_3 d\xi_3. \quad (1.49)$$

С помощью написанных выше соотношений могут быть определены выражения для градиента, дивергенции и вихря в ортогональных криволинейных координатах.

1.6.1. Градиент. Дифференциал от скаляра  $\Phi$  может быть записан через новые переменные  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  в виде

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} h_1 d\xi_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} h_2 d\xi_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} h_3 d\xi_3 = \\ &= \left( \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} \right) \cdot d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

отсюда, в силу (1.16),

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3}. \quad (1.51)$$

Это выражение отличается от формы, которую оно имеет в декартовых координатах, только тем, что дифференциальные элементы  $h_1 d\xi_1, h_2 d\xi_2, h_3 d\xi_3$  стоят здесь вместо  $dx_1, dx_2, dx_3$ . В этом случае форма оператора  $\nabla$  подобна декартовой форме

$$\nabla = \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad (1.52a)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad (1.52b)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  представляют проекции вектора  $\mathbf{u}$  на новые координатные оси.

В случае полярных и цилиндрических координат получим, соответственно,

$$\nabla = k_1 \frac{\partial}{\partial R} + k_2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{k_3}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad (1.53a)$$

$$\nabla = k_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{k_3}{r} \frac{\partial}{\partial \omega}. \quad (1.53b)$$

Далее, используя обычные обозначения для компонент вектора  $\mathbf{u}$  в полярной и цилиндрической системах координат

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_\theta, \quad u_3 = u_\omega, \quad (1.54a)$$

$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_r, \quad u_3 = u_\omega, \quad (1.54b)$$

получим соотношения для полярных координат:

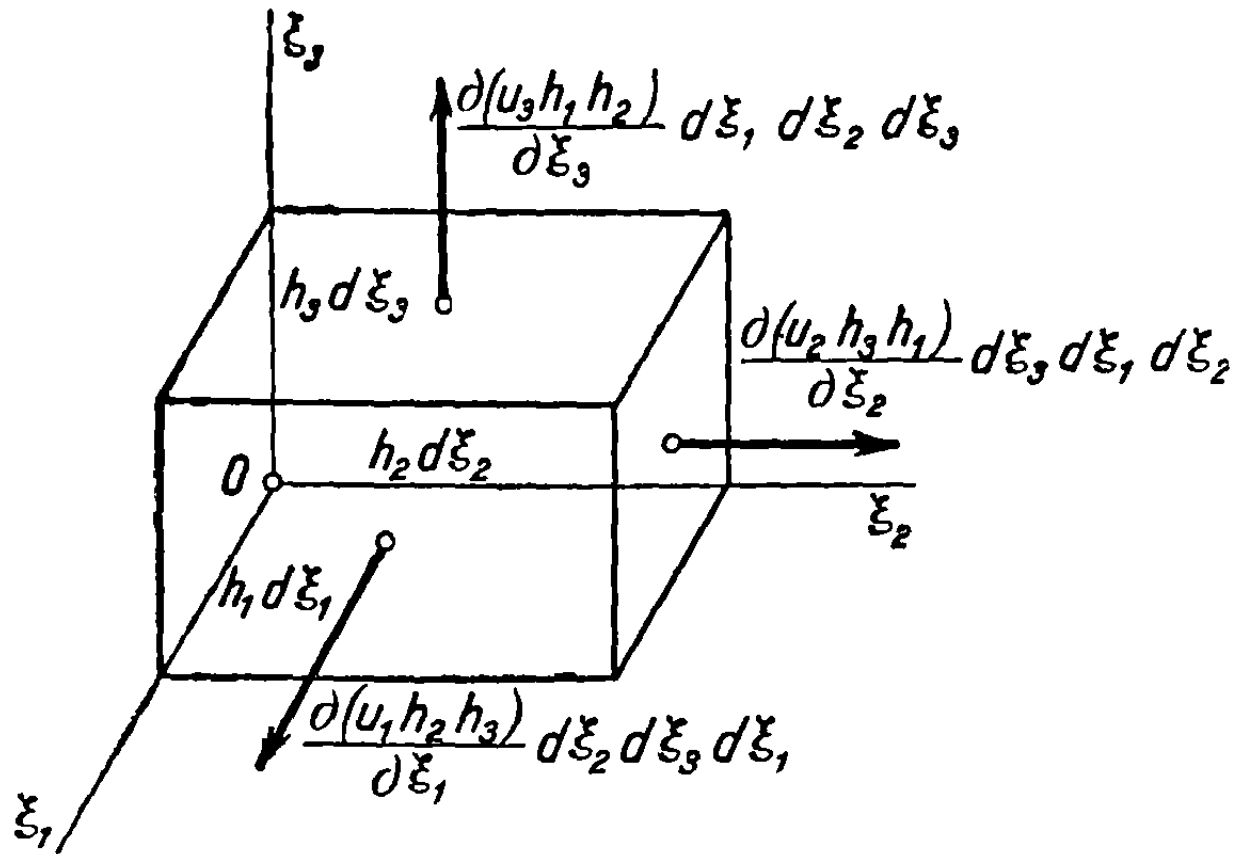
$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{u_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\omega}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad (1.55)$$

для цилиндрических координат

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial}{\partial \omega}. \quad (1.56)$$

Для того чтобы применить оператор  $\nabla$  к векторным функциям, как, например, при образовании дивергенции  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  или вихря  $\nabla \times \mathbf{u}$ , надо иметь в виду изменение единичных векторов  $k_1, k_2, k_3$ , которые не остаются постоянными, как в случае декартовой системы, когда единичные векторы  $i_1, i_2, i_3$  одинаковы во всех точках. Так как при этом указанные выше операции усложняются, то с целью упрощения вычислений определим дивергенцию и вихрь прямым путем.

1.6.2. Дивергенция. Применим формулу (1.21) к элементарному прямоугольному параллелепипеду, построенному на ребрах  $h_1 d\xi_1$ ,  $h_2 d\xi_2$ ,  $h_3 d\xi_3$  (фиг. 1.19). При этом разность потоков через параллельные грани, взятые попарно, непосредственно указана на фигуре; рассматривая, с другой стороны,



Фиг. 1.19

нормали, представляемые здесь единичными векторами  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3$ , направленные в наружную сторону, получим соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_2 h_3 u_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 u_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 u_3)}{\partial \xi_3} \right]. \quad (1.57)$$

Если вектор  $\mathbf{u}$  заменить через  $\nabla \Phi$ , то получим выражение для оператора Лапласа (1.34г)

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \Delta^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} \right) \right]. \quad (1.58)$$

В случае полярных и цилиндрических координат (1.46а, б), подставляя в (1.57) значения, найденные из (1.47), (1.48) и (1.54а, б), получим, соответственно, выражения

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (u_R R^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta R \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \omega} (u_\omega R) \right] \quad (1.59а)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (u_x r)}{\partial x} + \frac{\partial (u_r r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} \right]. \quad (1.59б)$$

Если  $\mathbf{u}$  заменить через  $\nabla \Phi$ , получим оператор Лапласа в полярных и цилиндрических координатах:

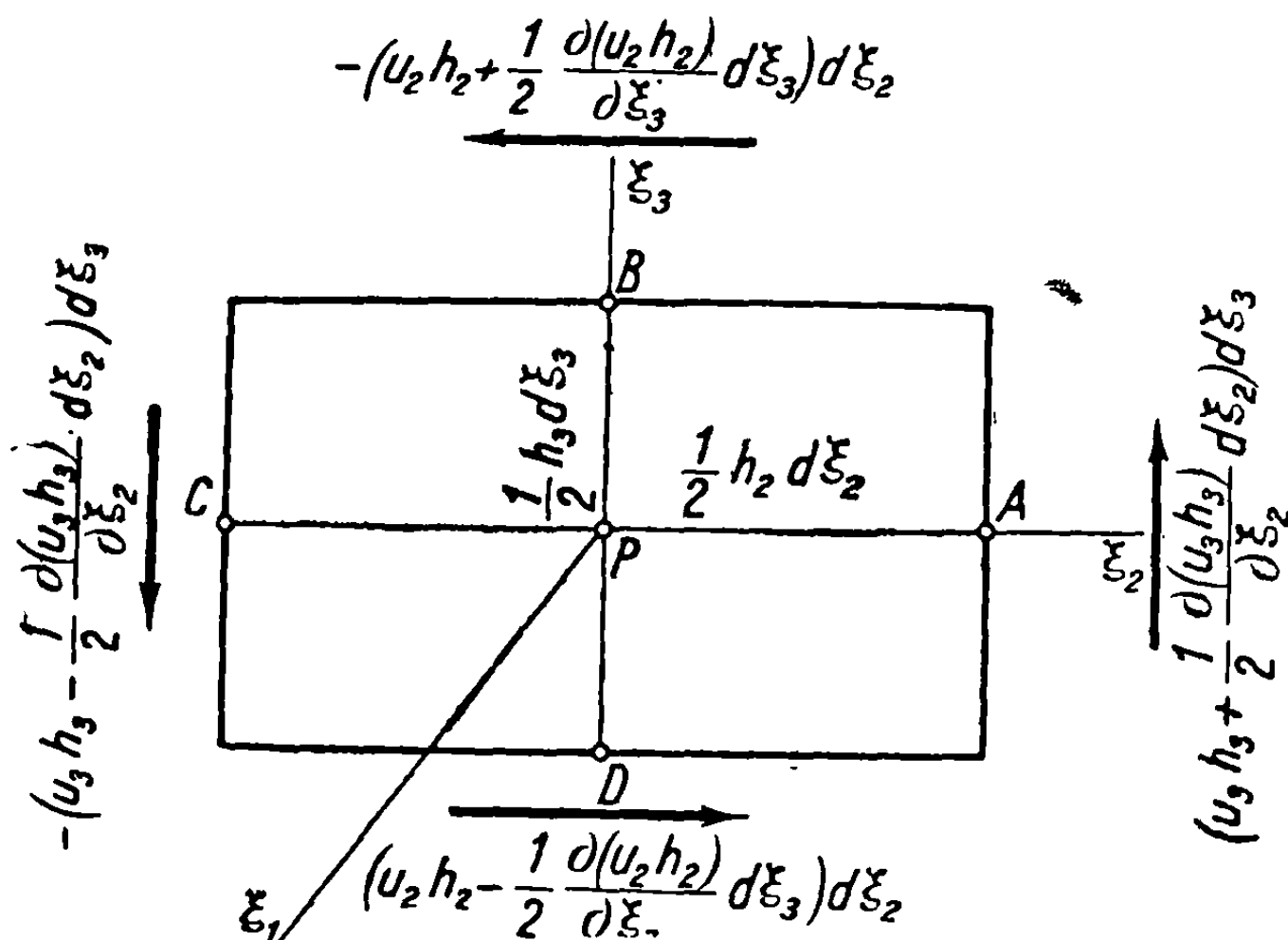
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} R^2 \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{1}{\sin \theta} \right) \right], \quad (1.60а)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} r \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} r \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (1.60б)$$

В случае плоского движения процесс не зависит от координаты  $x$ , и последнее выражение сводится к

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2}. \quad (1.61)$$

1.6.3. Вихрь. Рассмотрим элементарный прямоугольник со сторонами  $h_2 d\xi_2, h_3 d\xi_3$  (фиг. 1.20) в плоскости  $P\xi_2\xi_3$ , содержащий точку  $P$ ; циркуляция



Фиг. 1.20

средних скоростей, определяемых в точках  $A, B, C, D$ , вдоль сторон прямоугольника будет выражаться:

$$\begin{aligned} d\Gamma_1 &= -\frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial \xi_3} d\xi_3 d\xi_2 + \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial \xi_2} d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= \frac{d\sigma_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial \xi_3} \right], \end{aligned} \quad (1.62)$$

где

$$d\sigma_1 = h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3. \quad (1.63)$$

Если тот же прямоугольник будет рассматриваться в декартовой системе  $P x_1, x_2, x_3$  (фиг. 1.21), то, замечая, что  $d\sigma_1 = dx_2 dx_3$ , получим

$$d\Gamma_1 = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 dx_3 = d\sigma_1 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right). \quad (1.64)$$

Отсюда, приравнявая (1.62) и (1.64), будем иметь

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial \xi_3} \right] \quad (1.65)$$

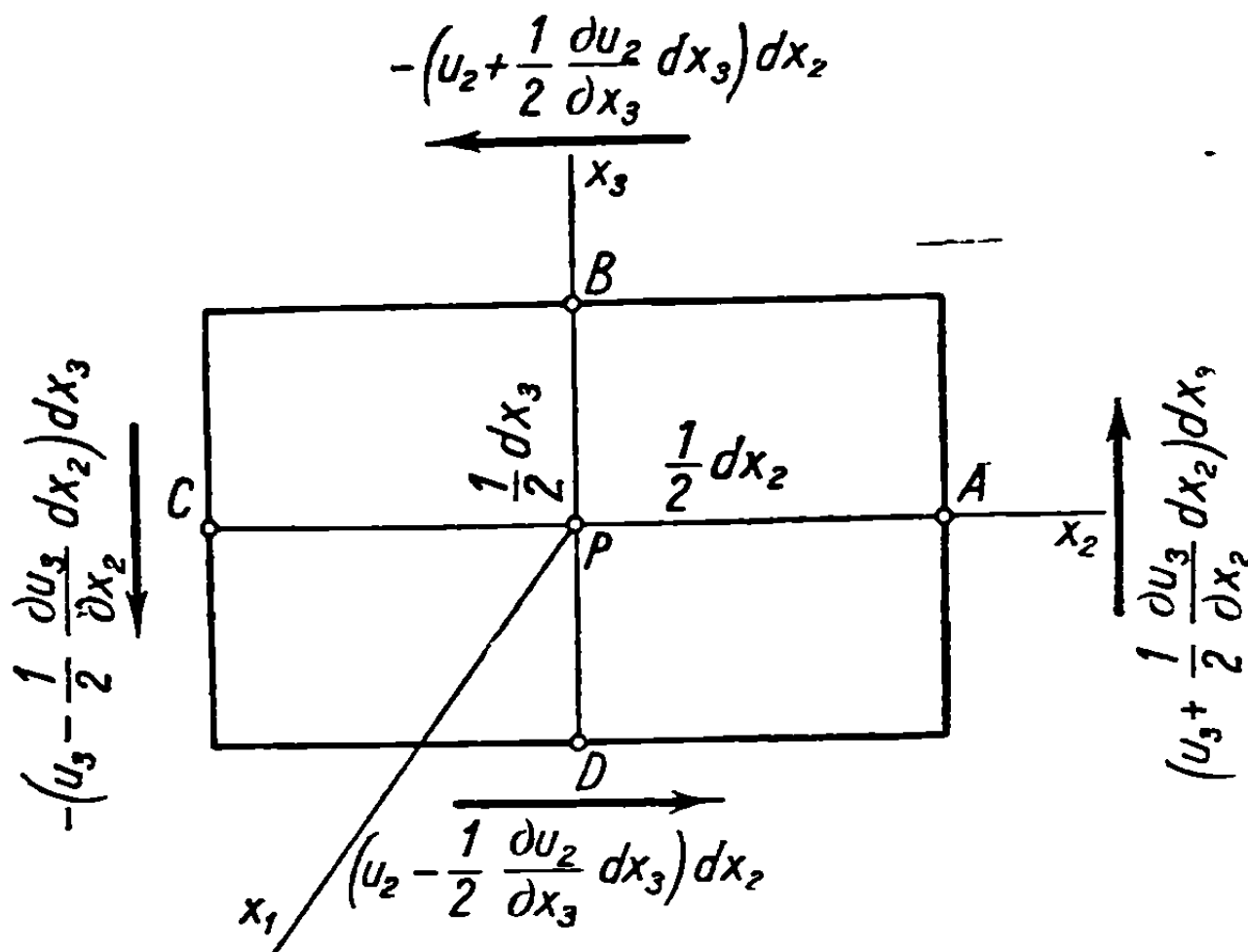
и два других подобных соотношения, получаемых с помощью круговой перестановки индексов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial \xi_1} \right], \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial \xi_2} \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Левые части соотношений (1.65) и (1.66) представляют компоненты вектора  $\text{rot } \mathbf{u}$  в декартовых координатах, правые части, соответственно, компоненты вихря в новых криволинейных, ортогональных координатах  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Теперь очевидно, что вихрь может быть выражен в простой форме, подобной (1.30):

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} k_1 h_1 & k_2 h_2 & k_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ u_1 h_1 & u_2 h_2 & u_3 h_3 \end{vmatrix}. \quad (1.67)$$



Фиг. 1.21

Применяя эти результаты к полярным и цилиндрическим координатам, получим соответственно в полярных координатах:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 R & k_3 R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \omega} \\ u_R & u_\theta R & u_\omega R \sin \theta \end{vmatrix} \quad (1.68)$$

и в цилиндрических

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 r \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \omega} \\ u_x & u_r & u_\omega r \end{vmatrix}. \quad (1.69)$$

## 2. ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВ

### 2.1. Предварительные рассмотрения

В проблемах гидродинамики и до известных границ в аэродинамике, когда скорости не слишком велики, плотность жидкости или газа предполагается постоянной во всей массе; это предположение может рассматриваться как почти точное для жидкостей и только как приближенное для газов.

При этой гипотезе уравнения движения значительно упрощаются и приводят к решениям основных задач аэрогидродинамики в случае обычных ее применений. При этом исследование соответствующих ре-

шений может быть произведено сравнительно просто с точки зрения математической техники.

Движение несжимаемой жидкости или такой, которая может быть рассматриваема как несжимаемая, исследовано исчерпывающим образом. Можно утверждать, что нет проблем прикладной гидродинамики, которые остались бы на своей прежней, эмпирической стадии; они изучены как теоретически, так и экспериментально на строго научной основе.

Однако постоянно возрастающие скорости современных летательных машин, в особенности вследствие использования реактивного двигателя, с одной стороны, и новых случаев применения сжимаемой жидкости в газовых и воздушных турбинах, в баллистике и т. д.— с другой, фундаментальным образом изменили основы научного исследования.

В этих условиях аэродинамика не может более ограничиться изучением движения воздуха вокруг летательных аппаратов, рассматривая воздух как несжимаемый газ. Область аэродинамики значительно расширилась.

Так как для действия указанных машин всегда имеют существенное значение свойства газа, связанные с преобразованием энергии, то изучение соответствующих случаев применения требует использования законов термодинамики.

Энергия системы может быть определена как ее способность производить механический, тепловой, электрический или химический эффекты.

Термодинамика изучает различные формы энергии и, в частности, законы ее превращения.

Некоторые термодинамические представления о течениях газа, как будет показано ниже, применимы также и к жидкостям, но, разумеется, в меньшей степени.

## 2.2. Физические свойства сжимаемой жидкости

Молекулы сложных веществ или атомы простых элементов предполагаются обладающими свойствами упругих частиц, находящихся в непрерывном хаотическом движении и расположенных друг от друга на больших, сравнительно с их размерами, расстояниях. Между этими частицами существуют силы взаимного притяжения или отталкивания, которые становятся тем больше, чем ближе друг к другу находятся частицы.

Расстояния между молекулами *твердых* тел малы, силы притяжения значительны, и поэтому молекулы благодаря сцеплению удерживаются вблизи определенных средних положений равновесия, вокруг которых происходят очень малые колебания.

*В жидкостях* силы притяжения и межмолекулярное сцепление малы и вследствие этого движение молекул более интенсивно — молекулы движутся по случайным путям, что ведет к возникновению общего сложного движения; жидкости принимают форму сосудов, в которые они помещены; сжимаемость жидкостей пренебрежимо мала.

В газах сцепление между молекулами почти равно нулю, и ничто не мешает им распространяться во всем пространстве, которое они занимают.

Расстояния между молекулами газа очень велики и молекулы могут быть сравнительно легко приближены друг к другу путем уменьшения пространства, в котором они движутся. Поэтому газы сжимаемы значительно в большей степени, чем жидкости.

Когда газы сжаты выше определенного предела, расстояние между молекулами становится достаточно мало, вследствие чего возрастает эффект сил притяжения; это ведет к изменению состояния, т. е. при определенных условиях газ становится жидкостью.

Скорость молекул очень велика и вследствие большого межмолекулярного пространства они движутся во всех направлениях, сталкиваясь с другими молекулами, встречающимися на их пути, или с окружающими стенками. Эти соударения приводят к резкому возрастанию взаимодействия между частицами или между частицами и стенками сосуда; эффект такого воздействия известен под названием *давления*.

В своем хаотическом движении молекулы обладают кинетической энергией, зависящей от их массы и скорости. Эта кинетическая энергия проявляется через *теплосодержание* жидкости или газа в данный момент в какой-нибудь точке. Эквивалентность механической энергии и тепла приводит к понятию *механического эквивалента* тепла, который количественно определен ниже. Эта эквивалентность представляет основной принцип термодинамики, который распространяется за область молекулярных свойств сжимаемых жидкостей и включает общий *закон сохранения энергии*, применяемый к конечной массе жидкости. В силу указанного принципа тепло может быть превращено в механическую работу, и наоборот.

Количество тепла относится к массе молекулы, и если рассматривать все молекулы, заключенные в определенном объеме, то это приведет к понятию *количества тепла*, содержащегося в данном объеме.

Если рассматривается масса жидкости, то количество тепла относится ко всем молекулам, которые образуют эту массу.

Пусть  $dm$ —элемент массы, содержащий какую-нибудь точку, и  $dQ$ —соответствующее количество тепла; отношение между ними представляет *тепловое состояние данной жидкости* в рассматриваемой точке и определяется температурой.

Все эти явления зависят, однако, от внутренних свойств молекул, их масс и числа молекул, содержащихся в единице объема, что приводит к понятию *плотности*.

Давление, плотность и температура, представляя основные физические свойства жидкостей и газов, определяют их физическое состояние.

Более просто эти свойства могут быть определены следующим образом:

*давление* есть эффект, связанный с контактом поверхностей двух соседних элементов, и измеряется силой, действующей на единицу площади;



*плотность*, или *удельная масса* есть масса, содержащаяся в единице объема. Понятие *удельного веса* связано с понятием плотности и определяется как вес массы, содержащейся в единице объема. Соотношение между плотностью и удельным весом выводится из основного закона динамики:

$$\text{удельный вес} = \text{плотность} \times g,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;

*температура* тела представляет степень его нагретости.

### 2.3. Единицы

Элементы термодинамики, рассмотренные ниже, позволяют объяснить явления, связанные с движением жидкости или газа в случае, когда их тепловое состояние оказывает влияние на эти явления. Следующие единицы выбраны как наиболее пригодные для описания явлений в механике жидкостей:

м — метр, единица длины;

кг — килограмм, единица силы;

сек. — секунда, единица времени.

Кроме этих, основных механических единиц, для проблем, в которых имеют значение термодинамические явления, принимаются еще следующие единицы:

$^{\circ}\text{C}$  — градус Цельсия, единица температуры;

ккал — килокалория, единица тепла, т. е. количество тепла, необходимое для повышения температуры 1 кг воды на  $1^{\circ}\text{C}$  (от  $14,5$  до  $15,5^{\circ}$ ).

По *шкале Цельсия* температура  $0^{\circ}$  соответствует точке замерзания воды, а отметка  $100^{\circ}$  — точке кипения воды при нормальном атмосферном давлении. В этой шкале температура обозначается через  $\theta^{\circ}$ . Однако в последующем обычно используется *абсолютная температура*, выводимая из формулы

$$T^{\circ} = 273^{\circ} + \theta^{\circ}. \quad (2.1)$$

Таким образом, значению  $T^{\circ} = 0^{\circ}$  соответствует  $\theta^{\circ} = -273^{\circ}$ , наименьшая достижимая температура, при которой движение молекул прекращается и давление исчезает.

Ранее уже было установлено, что тепло эквивалентно механической работе, которая выражается в системе единиц через килограммометры — кгм. Многочисленные примеры иллюстрируют этот основной принцип, который является следствием закона сохранения энергии.

Джоуль установил путем точных экспериментов, что

$$1 \text{ ккал} = 427 \text{ кгм.}$$

Значение отношения

$$J = 427 \text{ кгм/ккал} \quad (2.2)$$

называется *механическим эквивалентом* тепла.

В последующих вычислениях калории будут постоянно преобразовываться в килограммометры путем умножения каждой килокалории на  $J$ .

С целью упрощения может быть принято следующее условие: если нужно выразить какое-либо количество тепла, то последнее может быть измерено непосредственно в механических единицах.

Так, например, фраза: «прибавленное к системе количество тепла  $Q$ , равное 2 килокалориям...» должна быть заменена фразой: «прибавленное количество тепла эквивалентно 854 кгм». Указанное количество будем также обозначать через  $Q$  для того, чтобы отметить термическое происхождение этой энергии. Таким путем будет исключена дополнительная единица измерения, что даст возможность сделать вычисления более простыми, без использования множителя  $J$ , представляющего механический эквивалент тепла.

Преимущество, получаемое таким путем, станет очевидным позже.

Определив основные единицы, легко установим выражения для производных единиц: так, для давления [ $p$ ], удельного веса [ $\gamma$ ], ускорения [ $g$ ], плотности [ $\rho$ ] и т. д. получаются следующие соотношения:

$$[p] = \text{кг/м}^2;$$

$$[\gamma] = \text{кг/м}^3;$$

$$[g] = \text{м/сек}^2;$$

$$[\rho] = [\gamma/g] = \text{кгсек}^2/\text{м}^4. \quad (2.3)$$

Следующие значения даются в качестве примеров:

для нормального атмосферного давления на уровне моря, при  $\theta^\circ = 0^\circ$ ,

$$1 \text{ атм} = 10.330 \text{ кг/м}^2;$$

для удельного веса при нормальном атмосферном давлении, соответственно:

$$\gamma_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3 \text{ при } 4^\circ;$$

$$\gamma_{\text{воздуха}} = 1,229 \text{ кг/м}^3 \text{ при } 15^\circ;$$

для ускорения силы тяжести

$$g = 9,81 \text{ м/сек}^2;$$

для плотности при нормальном атмосферном давлении, соответственно

$$\rho_{\text{воды}} = \frac{1000}{9,81} \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}^4} \approx 102 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4 \text{ при } 4^\circ;$$

$$\rho_{\text{воздуха}} = \frac{1,229}{9,81} \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}^4} \approx 0,125 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4 \text{ при } 15^\circ.$$

## 2.4. Уравнение состояния

Равновесие или движение газа, как и его термическое состояние, могут быть определены, если известны скорость, давление, плотность и температура.

Для жидкостей плотность может рассматриваться как постоянная, независимо от давления и температуры, так что состояние движения в любой точке определяется одними только скоростью и давлением.

На газы, однако, термодинамические явления имеют прямое влияние, и поэтому необходимо изучить эти явления в связи с теми изменениями, которым подвергаются газы при своем движении.

Тесная взаимосвязь, устанавливаемая как теоретически, так и экспериментально, существует между отмеченными выше свойствами, т. е. давлением ( $p$ ), плотностью ( $\rho$ ) и абсолютной температурой ( $T$ ).

Как было указано ранее, давление и температура зависят, с одной стороны, от скорости молекул и, с другой — от их массы и числа, т. е. от плотности. Поэтому эти свойства не являются независимыми: если два из них заданы, то третье может быть определено.

Закон, связывающий  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , называется *уравнением состояния*, или *характеристическим уравнением*.

Если пренебречь межмолекулярным взаимодействием, считая расстояние между молекулами очень большим, и принять во внимание, что объем молекул пренебрежимо мал, по сравнению с полным видимым объемом изучаемого газа, как это представляется с молярной точки зрения, то уравнение состояния будет иметь следующую простую форму:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (2.4)$$

где  $R$  — газовая постоянная, которая в принятой нами системе единиц будет иметь для воздуха значение

$$R = 287 \text{ м}^2/\text{сек}^2 \times \text{°С}. \quad (2.5)$$

При принятых выше приближениях газ, подчиняющийся закону (2.4), не является реальным газом; это — *фиктивный*, или *идеальный* газ, называемый также *совершенным*; уравнение (2.4) называется поэтому уравнением состояния совершенного газа.

Уравнение состояния будет гораздо более сложным для реальных газов, когда при определенном давлении нельзя пренебрегать ни межмолекулярными силами притяжения, ни объемом молекул.

Среди уравнений, предложенных для реальных газов, наиболее часто применяемым является уравнение, данное Ван-дер-Ваальсом.

При выводе этого уравнения предполагается, что объем единицы массы рассматриваемого газа, обозначаемый через  $\tau$  и являющийся величиной, обратной плотности,

$$\tau = \frac{1}{\rho}, \quad (2.6)$$

не может быть сведен к нулю, какому бы высокому давлению газ ни подвергался; этот удельный объем не обращается в нуль даже при температуре, равной абсолютному нулю, при приближении к которой объем  $\tau$  приближается к предельному объему  $\tau_0 = 1/\rho_0$  молекулярного порядка. При этих условиях Ван-дер-Ваальс выводит уравнение

$$\left(p + \frac{a}{\tau^2}\right)(\tau - \tau_0) = \left(p + a\rho^2\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = RT, \quad (2.7)$$

где  $a$  — постоянная; для совершенного газа ( $a = \tau_0 = 0$ ) соотношение сводится к (2.4), т. е.

$$p\tau = \frac{p}{\rho} = RT.$$

Это простое соотношение, относящееся к совершенному газу, достаточно точно может служить для технических целей. Даже при таком упрощении задачи о течениях газа оказываются весьма трудными для решения.

## 2.5. Первый закон термодинамики

Выше было установлено, что состояние газа может быть определено любыми двумя из трех переменных величин  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , так как третья может быть выведена из уравнения состояния (2.4). В течение какого-нибудь процесса значения этих переменных меняются и вследствие этого изменяется энергетический баланс.

Эти преобразования могут быть получены различными методами, одним из которых является передача определенного количества тепла рассматриваемому газу. Как следствие этого температура будет возрастать, а давление и плотность будут также меняться. Привнесенное тепло, которое является одной из форм энергии, как было показано выше, будет превращено в рассматриваемой физической системе в другие формы энергии; так, в этой системе может возрасти *кинетическая энергия молекул*, зависящая от их скорости, массы и числа; может осуществиться *внутренняя механическая работа*, производимая при установлении равновесия межмолекулярных сил; может быть получена *внешняя механическая работа*, производимая при расширении газа; может измениться собственная *кинетическая энергия газа*, зависящая от его скорости.

Если газ совершенен, т. е. силами межмолекулярного притяжения можно пренебречь, и если нет изменений молекулярного состояния газа, как, например, диссоциации, изменения структуры молекул или их степеней свободы, то внутренняя механическая работа будет равна нулю. С другой стороны, если изменения будут произведены медленно, т. е. если скорости будут настолько малы, что ими можно пренебречь, то кинетическая энергия газа будет также пренебрежимо мала.

При этих условиях *количество тепла, добавленное к газу, равно изменению кинетической энергии молекул, суммированному с механической энергией, отдаваемой газом внешней среде*. Это есть первый закон термодинамики.

Кинетическая энергия молекул представляет *внутреннюю энергию*.

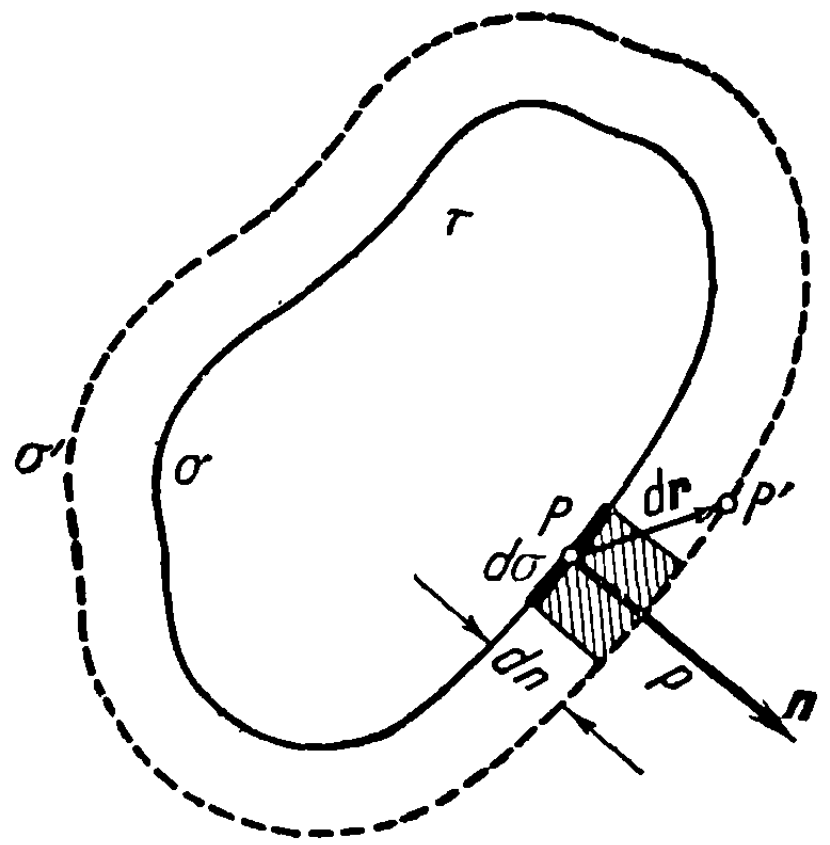
Обозначая через  $dQ$  тепло, прибавляемое единице массы газа, через  $dE$  возрастание внутренней энергии единицы массы и через  $dL$  внешнюю механическую работу, можно сформулировать первый закон термодинамики следующим образом:

$$dQ = dE + dL. \quad (2.8)$$

Должно быть отмечено, в соответствии с принятым ранее условием, что количество тепла  $dQ$  выражается в эквивалентных механических единицах.

**2.5.1. Внешняя механическая работа.** Пусть  $\sigma$  — поверхность, ограничивающая объем  $\tau$ , занимаемый рассматриваемой массой; в соответствии с вышеупомянутой гипотезой, скорости предполагаются малыми (медленное расширение) и давление постоянным внутри объема  $\tau$  и на поверхности  $\sigma$ , на которой оно направлено по нормали к поверхности (фиг. 2.1).

После привнесения в рассматриваемый объем некоторого количества тепла объем расширяется и становится равным  $\tau'$ , поверхность  $\sigma$  переходит в поверхность  $\sigma'$  и некоторая точка  $P$  перемещается в положение  $P'$ . Возрастание объема будет поэтому равно  $d\tau = \tau' - \tau$ .



Фиг. 2.1

Обозначая через  $n$  единичный вектор внешней нормали, через  $dn$  — расстояние между двумя поверхностями  $\sigma$  и  $\sigma'$ , измеренное вдоль нормали, через  $d\mathbf{r}$  — смещение  $\overrightarrow{PP'}$ , получим следующее выражение для механической работы, производимой давлением, действующим на поверхность:

$$dL = \int_{\sigma} p d\sigma \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = p \int_{\sigma} d\sigma dn = p d\tau. \quad (2.9)$$

В этом случае соотношение (2.8) приобретает вид

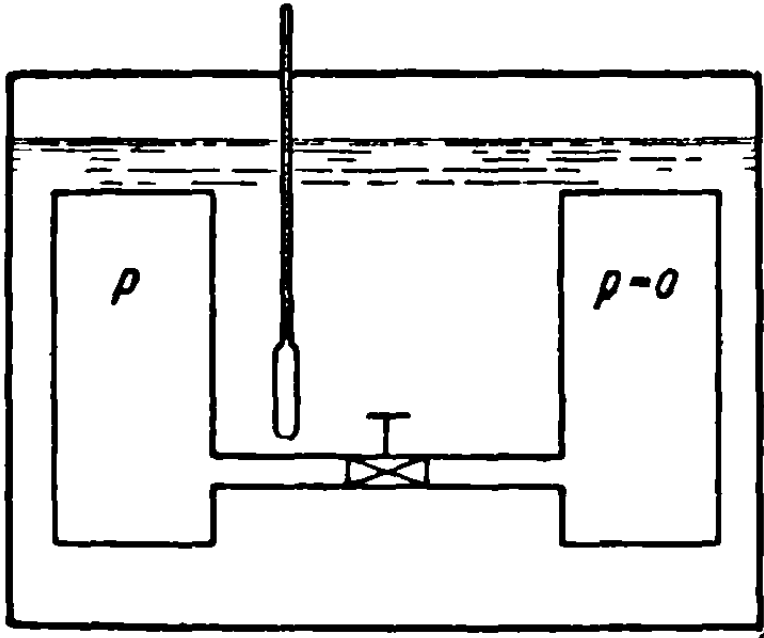
$$dQ = dE + p d\tau, \quad (2.10)$$

**2.5.2. Внутренняя энергия.** Должно быть отмечено, что кинетическая энергия молекул зависит от скорости их хаотического движения, от массы и числа молекул; проявлением этой энергии является степень нагретости газа. Эта энергия называется *внутренней энергией* и зависит только от температуры.

Внутренняя энергия связана, таким образом, с молекулами газа. Так как число молекул остается неизменным независимо от объема, в котором рассматриваемый газ содержится, то внутренняя энергия не меняется при изменении объема.

В действительности, однако, в случае газов высокой плотности, когда нельзя пренебрегать объемом молекул по отношению к полному объему, а также нельзя полностью пренебрегать межмолекулярными силами, внутренняя энергия может слегка изменяться с изменением объема. Это изменение чрезвычайно мало, как было показано экспериментально Джоулем и Гей-Люссаком, которые подвергали газ значительному изменению объема при постоянной температуре.

Пусть два сосуда помещены в изолированный калориметр, причем один из них наполнен газом при давлении  $p$ , а в другом создан «абсолютный» вакуум; оба сосуда соединены трубкой, закрытой пористой пробкой, для того чтобы возможно более замедлить течение газа; при открытии крана газ постепенно частично перетекает из одного сосуда в другой до установления равновесия (фиг. 2.2).



Фиг. 2.2

Хотя объем газа увеличился вдвое, при этом не наблюдается никаких изменений температуры в калориметре, следовательно, и *внутренняя энергия остается постоянной*.

Отсюда выводим заключение, что внутренняя энергия изменяется практически как функция одной температуры.

То же заключение вытекает из кинетической теории газов, с помощью которой получается соотношение

$$E = \frac{1}{2} NRT, \quad (2.11)$$

где  $N$  — число степеней свободы каждой молекулы газа.

Изменение внутренней энергии зависит только от разности между конечной и начальной температурами; это означает, что внутренняя энергия есть *характеристическое свойство газа*.

## 2.6. Теплоемкость

Представляя  $dE$  как функцию температуры, от которой эта величина исключительно и зависит, как было отмечено выше,

$$dE = \frac{dE}{dT} dT, \quad (2.12)$$

приведем соотношение (2.10) к виду

$$dQ = \frac{dE}{dT} dT + pd\tau. \quad (2.13)$$

Это выражение не является полным дифференциалом; оно указывает только, каким образом распределяется присоединенное количество тепла: часть его затрачивается на возрастание внутренней энергии, а за счет другой части производится внешняя механическая работа.

Если объем рассматриваемой массы газа остается постоянным ( $d\tau=0$ ), то полное количество прибавленного тепла создает одно только возрастание внутренней энергии. В этом случае

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_\tau = \frac{dE}{dT} = C_\tau, \quad (2.14)$$

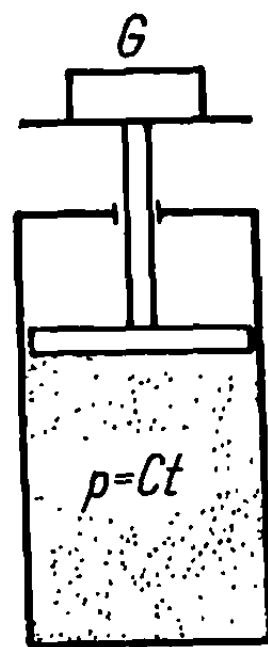
где индекс  $\tau$  обозначает преобразование при постоянном объеме ( $\tau=\text{const}$ ), а количество  $C_\tau$  называется *теплоемкостью при постоянном объеме*.

Для того чтобы поднять температуру единицы массы на один градус, поддерживая при этом постоянный объем ( $d\tau=0$ ), и таким образом увеличить соответствующую внутреннюю энергию, требуется количество тепла, равное  $C_\tau$ .

Эта теплоемкость не зависит от давления и, как показано экспериментально, приблизительно сохраняется постоянной.

При этих условиях внутренняя энергия единицы массы, температура которой возрастает от  $T=0$  до  $T$ , определится соотношением

$$E - E_0 = \int_0^T \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_\tau dT = \int_0^T \frac{dE}{dT} dT = C_\tau T, \quad (2.15)$$



Фиг. 2.3

где постоянная  $E_0$  представляет энергию той же единицы массы при температуре, равной абсолютному нулю независимо от объема массы. В случае совершенного газа, подчиняющегося уравнению (2.4),  $p=0$ , если  $T=0$ ; при этом в газе отсутствует какое-либо движение молекул и поэтому  $E_0=0$ , что также вытекает из уравнения (2.11), которое выводится с помощью кинетической теории газов. Поэтому можно написать:

$$E = C_\tau T. \quad (2.16)$$

Возвращаясь к уравнению (2.13), представим его в форме

$$dQ = C_\tau dT + p d\tau = C_\tau dT + d(p\tau) - \tau dp, \quad (2.17a)$$

далее, в соответствии с (2.4),

$$dQ = (R + C_\tau) dT - \tau dp. \quad (2.17b)$$

Предполагая теперь, что преобразование совершается при постоянном давлении ( $dp=0$ ), что может быть осуществлено с помощью цилиндра, закрытого подвижным поршнем, на который действует постоянный вес  $G$  (фиг. 2.3), будем иметь

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = R + C_\tau = C_p, \quad (2.18)$$

где индекс  $p$  обозначает преобразование при постоянном давлении.

Из этого соотношения можно вывести, что для повышения температуры единицы массы на один градус при постоянном давлении ( $dp=0$ ) необходимо количество тепла, равное  $C_p$ . Этот коэффициент называется поэтому *теплоемкостью при постоянном давлении*. Он практически постоянен и не зависит от давления или плотности.

Оба коэффициента  $C_\tau$  и  $C_p$  легко определяются экспериментально и полученные величины находятся в согласии с теми значениями, которые выводятся непосредственно из кинетической теории газов.

Итак, применяя соотношение (2.11), получим

$$E = \frac{1}{2} NRT = C_\tau T, \quad (2.19)$$

отсюда

$$C_{\tau} = \frac{1}{2} NR, \quad (2.20)$$

и, следовательно,

$$C_p = (R + C_{\tau}) = \left(1 + \frac{1}{2} N\right) R. \quad (2.21)$$

Отношение между теплоемкостью при постоянном давлении и теплоемкостью при постоянном объеме обозначается через  $\kappa$  и определяется выражением

$$\kappa = \frac{C_p}{C_{\tau}} = \frac{2 + N}{N}. \quad (2.22)$$

Это отношение будет играть важную роль в последующих преобразованиях и расчетах.

Используя его, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} C_{\tau} &= \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{287}{\kappa - 1} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}, \\ C_p &= \frac{\kappa R}{\kappa - 1} = \frac{287\kappa}{\kappa - 1} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для моноатомных газов, молекулы которых могут двигаться в трех направлениях, число  $N$  равно трем.

Для этих газов, в соответствии с (2.22),

$$\begin{aligned} C_{\tau} &= 430,5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}, \\ C_p &= 717,5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}, \\ \kappa &= 1,67. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Следует заметить, что молекулы могут иметь и другие возможности движения, как, например, вращение вокруг трех осей отсчета; но если соответствующие моменты инерции будут чрезвычайно малы, благодаря малым размерам молекул, то моментами количеств движения, связанными с этими вращениями, можно пренебречь, и число степеней свободы практически ограничивается числом  $N=3$ .

В случае двухатомных газов, таких, как воздух, если предположить, что два атома соединены неизменяемой осью, кроме трех направлений поступательного перемещения, могут еще рассматриваться вращения вокруг осей, нормальных по отношению к оси, соединяющей атомы; так как вращением вокруг последней оси можно пренебречь, полное число степеней свободы будет  $N=5$ .

В этом случае

$$\begin{aligned} C_{\tau} &= 717,5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}, \\ C_p &= 1004,5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2 \times \text{град}}, \\ \kappa &= 1,405 \approx 1,40. \end{aligned} \quad (2.25)$$



## 2.7. Другие функции состояния: энтальпия и энтропия

Кроме давления, плотности и температуры — основных характеристических свойств газа, — некоторые другие количества, выведенные из этих трех, могут служить в качестве новых характеристических свойств. Так, *внутренняя энергия*, определенная выше, *энтальпия* и *энтропия*, которые будут определены далее, представляют характеристические свойства, зависящие только от начальных и конечных значений определенных величин при некотором процессе их изменения, независимо от того способа, каким этот процесс производится.

С другой стороны, так как *состояние* газа определяется характеристическими свойствами, то отсюда следует, что энтальпия и энтропия, которые выводятся из основных свойств, могут рассматриваться как *функции состояния*.

**2.7.1. Энтальпия.** Энтальпию, или *теплосодержание*, как ее также называют, практически довольно трудно определить, так как она не является физическим свойством, поддающимся непосредственному измерению. Поэтому мы дадим аналитическое выражение энтальпии

$$h = E + p\tau \quad (2.26)$$

с последующей ее интерпретацией.

Предположим, что в заданный момент газ подвергается какому-нибудь постоянному давлению и его температура сведена к абсолютному нулю.

С этого момента, поддерживая давление постоянным, добавим некоторое количество тепла, которое повысит температуру до величины  $T$ ; полное количество тепла  $Q$ , прибавленное таким образом, равно изменению энтальпии.

Дифференцируя уравнение (2.26), получим последовательно

$$dh = dE + p d\tau + \tau dp = dQ + \tau dp, \quad (2.27)$$

откуда, предполагая  $p$  постоянным ( $dp = 0$ ) и интегрируя от 0 до  $T$ , получим формулу

$$h = \int_0^{Q(T)} dQ = Q, \quad (2.28)$$

из которой следует, что приращение энтальпии равно полному количеству тепла, введенному при постоянном давлении.

Если в общем выражении энтальпии (2.26) заменить  $E$  и  $p\tau$  через их значения, полученные из (2.19) и (2.4), и применить также формулы (2.23), то получим соотношения

$$h = C_\tau T + RT = C_p T = \frac{C_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} = \frac{x}{x-1} RT, \quad (2.29a)$$

или, в дифференциальной форме,

$$dh = C_p dT = \frac{x}{x-1} d\left(\frac{p}{\rho}\right). \quad (2.29b)$$

В различных формах энтальпия будет часто применяться к практическим задачам термо-аэродинамики газов.

2.7.2. **Энтропия.** Так как энтропия не может быть непосредственно измерена, ее определение также не может быть дано путем описания физических явлений. Она будет поэтому определена окольным путем.

Возвращаясь к уравнению (2.176), представим его в форме

$$dQ = (R + C_p) dT - \tau dp = C_p dT - \tau dp, \quad (2.30)$$

которая показывает, что  $dQ$  не является полным дифференциалом. В самом деле,

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} \neq \frac{\partial (-\tau)}{\partial T}, \quad (2.31)$$

так как теплоемкость при постоянном давлении не зависит от давления и поэтому  $\frac{\partial C_p}{\partial p} = 0$ , в то время как объем газа зависит от температуры и, следовательно,  $\frac{\partial \tau}{\partial T} \neq 0$ .

Умножая каждый член соотношения (2.30) на интегрирующий множитель  $1/T$ , получим полный дифференциал, обозначаемый через  $dS$ , который может быть последовательно записан в виде

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\tau}{T} dp = \frac{C_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp. \quad (2.32)$$

Отсюда легко выводим

$$dS = C_p d(\ln T) - R d(\ln p). \quad (2.33)$$

Интегрируя от начальных значений температуры  $T_0$  и давления  $p_0$  до их конечных значений, получим

$$S - S_0 = C_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0}. \quad (2.34)$$

Функция  $S$ , зависящая только от начального и конечного состояний газа и удовлетворяющая, таким образом, условиям, которым подчиняются его характеристические свойства, называется *энтропией*. Постоянная  $S_0$  есть начальная энтропия, соответствующая начальным значениям  $T_0$  и  $p_0$ . Эта постоянная практически используется лишь как отправная точка, потому что только изменение или возрастание энтропии существенно для процесса изменения характеристик газа.

Уравнение (2.34) может быть преобразовано:

$$S - S_0 = C_p \ln \left[ \frac{T}{T_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}} \right], \quad (2.35)$$

и так как из уравнения (2.23) следует, что

$$\frac{R}{C_p} = \frac{x-1}{x}, \quad (2.36)$$

то можно записать

$$S - S_0 = C_p \ln \left[ \frac{T}{T_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right]. \quad (2.37)$$

Подставляя вместо  $T$  и  $T_0$  их значения, выведенные из уравнения состояния (2.4), получим, в согласии с (2.23), более обычное выражение для энтропии

$$\begin{aligned} S - S_0 &= \kappa C_\tau \ln \left[ \frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/\kappa} \right] = C_\tau \ln \left[ \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\kappa \frac{\rho}{\rho_0} \right] \\ &= C_\tau \left( \ln \frac{\rho}{\rho^\kappa} - \ln \frac{\rho_0}{\rho_0^\kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Из этой формы легко видеть, что энтропия остается постоянной, если существует следующее соотношение между давлением и плотностью

$$\frac{\rho}{\rho^\kappa} = \frac{\rho_0}{\rho_0^\kappa} = \text{const.} \quad (2.39)$$

Преобразования, подчиняющиеся указанному закону, называются *изэнтропическим процессом*.

В этом случае энтропия остается постоянной, и, в соответствии с (2.32), имеем

$$dS = \frac{dQ}{T} = 0. \quad (2.40)$$

Следовательно, прибавленное или изъятное тепло равно нулю; получилось изменение состояния, называемое обычно *адиабатическим процессом*. Для идеальных газов (в которых нет потерь, связанных с трением) адиабатический процесс является также изэнтропическим; однако это неверно в случае реальных газов; для которых адиабатический процесс не совпадает с изэнтропическим, как будет показано ниже.

## 2.8. Эффект потери энергии, тепло диссипации

В предшествующих разделах рассматривался идеальный газ, подчиняющийся уравнению состояния (2.4); в этом газе не существовало возмущающих явлений, которые могли бы привести к потере энергии.

В реальных газах, однако, наблюдаются такие явления, как трение между слоями газа, связанное с *вязкостью*, *турбулентность* и *завихренность*, *волны сжатия* и т. д., которые приводят к потере механической энергии, называемой *диссипацией* энергии.

Эта диссипируемая энергия входит в энергетический баланс процесса в форме тепла и поэтому называется теплом диссипации.

Некоторые причины, обуславливающие эти процессы, будут анализироваться в других разделах. Здесь рассмотрим только влияние тепла диссипации на изменение состояния газов.

Вспомним, что когда шла речь о приложении первого закона термодинамики (2.8), было отмечено, что часть механической работы  $dL = p d\tau$  диссипируется и превращается в тепло, остающееся внутри газа, если он полностью изолирован. Обозначая это тепло через  $dQ_i$ , а через  $dL_e$  ту часть механической работы, которая отдается внешней среде, получим

$$dL = p d\tau = dL_e + dQ_i \quad (2.41)$$

поэтому вместо выражения (2.8), обозначая через  $dQ_e$  тепло, перенесенное внутрь газа извне, можно записать

$$dQ_e = dE + dL_e = dE + pd\tau - dQ_i. \quad (2.42)$$

Далее, обозначая через  $dQ$  полное количество тепла, т. е. тепло как внешнее, так и внутреннее

$$dQ = dQ_e + dQ_i, \quad (2.43)$$

получим снова формулу (2.8), которая может теперь быть применена и к реальным и к идеальным газам.

Другим примером потерь диссипации является адиабатический процесс в реальных газах. Если тепло, приносимое извне, равно нулю ( $dQ_e = 0$ ), то процесс будет адиабатическим, но не изэнтропическим, так как тепло диссипации никогда не равно нулю:

$$= \frac{dQ}{T} = \frac{dQ_e}{T} + \frac{dQ_i}{T} = \frac{dQ_i}{T} \neq 0. \quad (2.44)$$

Если потери, связанные с диссипацией, очень малы, как это бывает в случае ламинарного (или даже турбулентного) трения в пограничном слое, и относятся к очень малому проценту от полной массы газа, то ими можно пренебречь:

$$dQ = dQ_e + dQ_i \approx dQ_e, \quad (2.45)$$

следовательно, адиабатический процесс может рассматриваться как изэнтропический ( $dQ_e \approx dQ = 0$ ), как в случае идеального газа, для которого соотношение  $dQ_i = 0$  ( $dQ_e = dQ = 0$ ) выполняется точно.

В общем случае, однако, когда течение газа будет очень беспорядочным, потерями нельзя пренебрегать, а поэтому нельзя пренебрегать и теплом диссипации ( $dQ_i \neq 0$ ); таким образом, адиабатический процесс не будет совпадать с изэнтропическим. В этом случае, отмечая, что указанные потери представляют положительную внутреннюю механическую работу ( $dL_i > 0$ ), соответствующую положительному теплу диссипации ( $dQ_i > 0$ ), придем к заключению, что в адиабатическом процессе ( $dQ_e = 0$ ) энтропия возрастает:

$$dS = \frac{dQ_e}{T} + \frac{dQ_i}{T} = \frac{dQ_i}{T} > 0. \quad (2.46)$$

Это находится в согласии со вторым законом термодинамики, как будет видно позднее.

## 2.9. Изменение состояния газов

Изменение состояния газа приводит к значительным изменениям давления, плотности и температуры, обычно сопровождаемым обменом тепла и механической работы в процессе перехода от одного состояния к другому. Такое изменение называется также процессом превращения.

Среди имеющих практический интерес следует отметить процессы: при постоянном объеме, или *изометрический*;

при постоянном давлении, или *изобарический*;

при постоянной температуре, или *изотермический*;

адиабатический, во время которого нет передачи тепла от газа к внешней среде или обратно. Если можно пренебречь внутренними потерями, которые связаны с возмущающими явлениями и превращаются в тепло диссипации, то этот процесс совпадает с изэнтропическим ( $dQ = dQ_e = 0$ );

политропический, в котором могут изменяться все свойства газа, однако эти изменения определяются простым уравнением состояния.

Так как последний процесс является наиболее общим и включает все другие случаи, он будет рассмотрен в первую очередь.

**2.9.1. Политропическое уравнение состояния.** Во многих реальных процессах изменения состояния происходят в соответствии со сложным законом, который может быть сформулирован с помощью простого выражения

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const}, \quad (2.47)$$

где коэффициент  $n$  может принимать значение, практически изменяющееся между единицей и двумя ( $1 < n < 2$ ).

Явления, происходящие в действительности, более сложны и подчиняются этому простому закону только если  $n$  переменна, что приводит к трудоемким вычислениям. Только в случае, когда интервал между начальным и конечным состояниями мал, показатель  $n$  может рассматриваться как постоянный. В случае, когда этот интервал велик, он может быть разделен на малые участки, в каждом из которых показатель  $n$  будет рассматриваться как постоянный:  $n = n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$ .

В соответствии с этими соображениями, можно отметить, что все процессы могут быть выведены из политропического, а именно:

для  $n = \infty$   $\left(\frac{p^{1/n}}{\rho}\right)_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{\rho} = \tau = \text{const}$ , изометрический процесс;

для  $n = 0$   $\left(\frac{p}{\rho^n}\right)_{n \rightarrow 0} = p = \text{const}$ , изобарический процесс;

для  $n = 1$   $\frac{p}{\rho} = RT = \text{const}$ , изотермический процесс;

для  $n = \kappa$   $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$ ,  $dS = 0$ , изэнтропический процесс.

При этих условиях математические соотношения, полученные ниже для произвольного значения  $n$ , могут быть применены к любому из перечисленных выше процессов:

1) соотношение между температурой и давлением или плотностью для начального ( $T_0, \rho_0, p_0$ ) и конечного ( $T, \rho, p$ ) состояний:

$$\begin{aligned} \frac{RT}{\rho^{n-1}} &= \frac{(RT)^n}{p^{n-1}} = \text{const}; \\ \frac{T}{T_0} &= \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

которое можно легко вывести, применяя уравнения (2.4) и (2.47);

2) изменение внутренней энергии от начального ( $T_0, p_0, \rho_0$ ) до конечного  $T, p, \rho$  состояния определяется путем использования равенства (2.15):

$$E - E_0 = C_v T - C_v T_0 = C_v T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 \right] = C_v T_0 \left[ \frac{p}{p_0}^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = C_v T_0 \left[ \frac{p}{p_0}^{n-1} - 1 \right]; \quad (2.49)$$

3) изменение энтропии от начального до конечного состояния определяется путем использования равенства (2.29а):

$$h - h_0 = C_p T - C_p T_0 = C_p T_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = C_p T_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{n-1} - 1 \right]; \quad (2.50)$$

4) внешняя механическая работа, производимая давлением при расширении рассматриваемого объема единицы массы, в соответствии с (2.9),

$$L = \int_{p_0}^p p d\tau = \frac{p\tau - p_0\tau_0}{1-n} = \frac{1}{1-n} \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \frac{R}{1-n} (T - T_0); \quad (2.51)$$

5) полное тепло, получаемое единицей массы газа, как от внешней среды, так и за счет диссипации, определяется путем использования равенства 2.42

$$Q = E - E_0 - L = C_v \left( T - T_0 \right) - \frac{R}{1-n} (T - T_0) = C_n (T - T_0), \quad (2.52)$$

где  $C_n$  — удельная теплоемкость при политропическом превращении

$$C_n = C_v + \frac{R}{1-n} = \frac{C_p - nC_v}{1-n} = C_v \frac{\kappa - n}{1-n}; \quad (2.53)$$

6) изменение энтропии, которое легко может быть получено путем использования равенства (2.52)

$$dQ = C_n dT \quad (2.54)$$

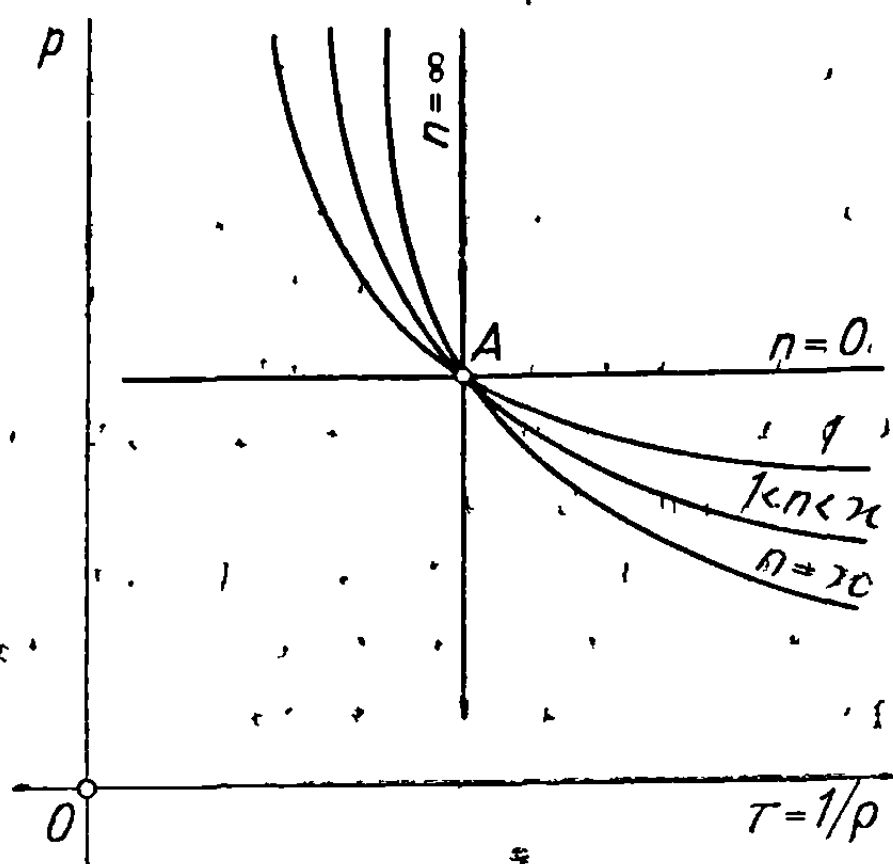
и подстановкой значения  $dQ$  в интеграл, определяющий энтропию:

$$\begin{aligned} S - S_0 &= \int_{T_0}^T \frac{dQ}{T} = C_n \ln \frac{T}{T_0} = C_n \frac{n-1}{n} \ln \frac{p}{p_0} = \\ &= C_n (n-1) \ln \frac{p}{p_0} = -C_v \frac{\kappa - n}{n} \ln \frac{p}{p_0} = -C_v (\kappa - n) \ln \frac{p}{p_0}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

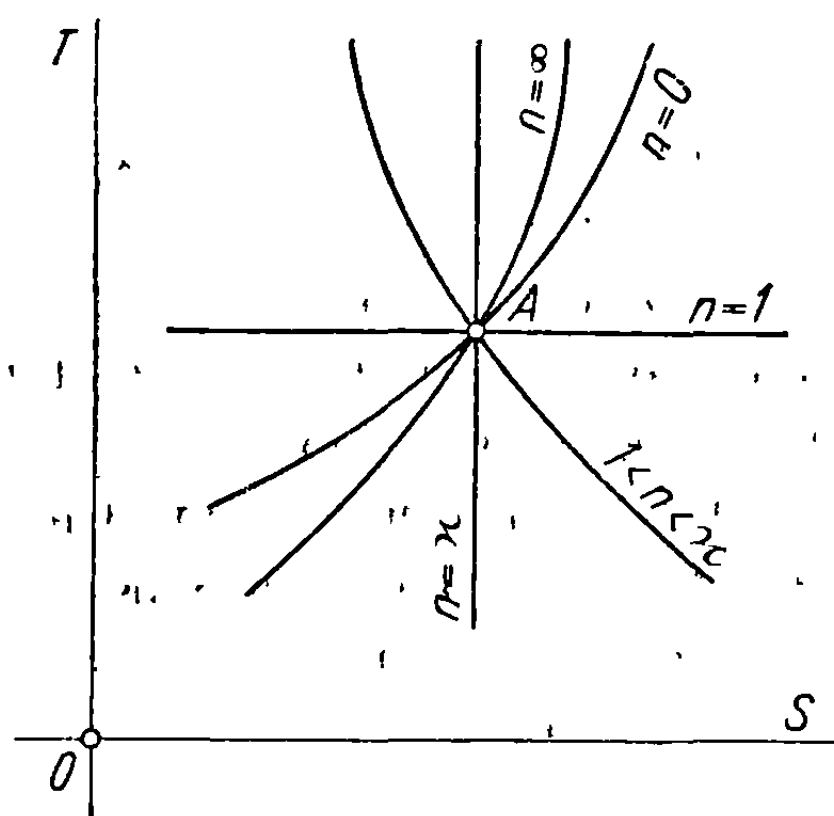
Приведенные результаты могут быть применены к обычным превращениям путем замены  $n$  соответствующим показателем политропы. Из этого метода также ясно, что энтропия остается постоянной, если  $n = \kappa$  т. е. для изэнтропического процесса, как показано выше. Интересно отметить, что адиабатический процесс в реальном газе, где потери достаточно велики и поэтому пренебрегать ими нельзя, является политропическим, и показатель  $n$  политропы легко может быть определен через коэффициент  $\kappa$  для изэнтропического процесса. В случае последнего ( $S = \text{const}$ ) из уравнений (2.37) или (2.48), в которых  $n$  нужно заменить через  $\kappa$ , получим

$$T = C_p \rho^{\frac{-1}{\kappa}}, \quad \frac{dT}{T} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2.56)$$

где  $C$  — постоянная. Однако вследствие потерь только часть изменения внутренней энергии ( $dE = C_v dT$ ) войдет в конечный баланс энергии процесса, приводя к возрастанию давления  $dp$ , остальная часть диссипируется. Если обозначить через  $\eta$  действительный коэффициент полезного



Фиг. 2.4



Фиг. 2.5

действия, то реальный политропический процесс будет определяться соотношением

$$\frac{dT}{T} = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{p} = \frac{\kappa-1}{\gamma\kappa} \frac{dp}{p}, \quad (2.57)$$

отсюда

$$n = \frac{\eta\kappa}{1 - \kappa(1 - \eta)}. \quad (2.58)$$

Таким образом, показатель  $n$  политропического процесса может быть легко выведен, если процент потерь  $(1 - \eta)$  известен.

**2.9.2. Графическое представление.** В случаях практических применений, описанные выше процессы представляются графически с помощью системы двух независимых переменных  $p$  и  $\tau$  (соответственно  $\frac{1}{\rho}$ ) или  $T$  и  $S$ .

Текущий процесс, как показано на фигурах (2.4) и (2.5), в обеих системах переменных начинается из точки  $\tau_0, p_0$  или  $S_0, T_0$ .

Отметим, что площадь между осью абсцисс и кривой, представляющей процесс превращения, выражает соответственно произведенную механическую работу ( $p d\tau = dL$ ) или количество перенесенного тепла ( $T dS = dQ$ ).

**2.9.3. Уравнение состояния в применении к динамике газа.** В проблемах течения газов, или движения тел внутри газа, таких, например, как самолеты, плотность может рассматриваться приближенно как постоянная до тех пор, пока скорость невелика и не превосходит определенного предела. Это может быть подтверждено как с помощью эксперимента, так и путем вычислений. В этом случае уравнение состояния будет иметь простое выражение

$$\rho = \text{const}, \quad (2.59)$$

которое также может рассматриваться как частный случай политропического уравнения, если приписать  $n$  значение  $\infty$ .

Как только скорости превышают некоторый предел, нельзя уже больше пренебрегать *сжимаемостью* и должно применяться уравнение (2.4) в упрощенной форме. В самом деле, так как движение происходит с очень большой скоростью, частицы переходят из одного состояния, соответствующего определенному положению, в другое состояние, соответствующее новому, достигаемому положению, в такое короткое время, что его не будет достаточно для осуществления переноса тепла. Поэтому процесс будет адиабатическим. Вследствие турбулентности и внутреннего трения, связанного с вязкостью, потерянная энергия при этих пассивных явлениях будет превращаться в тепло и процесс станет политропическим. Если этими потерями пренебречь и предположить, что газ идеален, то процесс может рассматриваться как изэнтропический, а уравнение состояния, применяемое в динамике газов, совпадает с установленным ранее соотношением (2.39):

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const.}$$

**2.9.4. Обратимые и необратимые процессы.** Понятия обратимых и необратимых процессов хорошо известны и становятся ясны при рассмотрении конкретных примеров в каждом отдельном случае. Данный раздел будет посвящен только изучению явлений, относящихся к термодинамике газов.

Обратимый процесс определяется как такой, в котором состояния системы, переходящей от начального к конечному состоянию, воспроизводятся точно в обратном порядке при ее возвращении снова в начальное состояние; при этом баланс энергии не претерпевает изменений. Так, например, если движение поршня осуществляется очень медленно внутри полностью изолированного цилиндра, содержащего идеальный газ, то этот газ постепенно сжимается, переходя через различные состояния, от начального  $p_0, \rho_0, T_0$  к конечному  $p, \rho, T$ . При обращении процесса, т. е. при движении поршня назад, газ возвращается к начальному состоянию, и получаемая механическая работа не отличается от затраченной при его движении вперед. Этот процесс называется поэтому *обратимым*.

В действительности благодаря внутреннему трению в газе при перемещении поршня вперед и назад часть механической работы расходуется на трение и превращается в тепло диссипации. Поэтому процессы прямой и обратный не идентичны, и последовательность состояний равновесия не повторяется, т. е. процессы *необратимы*.

Можно дать много примеров, приводящих к заключению, что вследствие диссипации в реальных газах не может быть полностью обратимых процессов.

В проблемах течения газов мы, тем не менее, пренебрегаем энергией диссипации и предполагаем, что процессы в первом приближении обратимы.

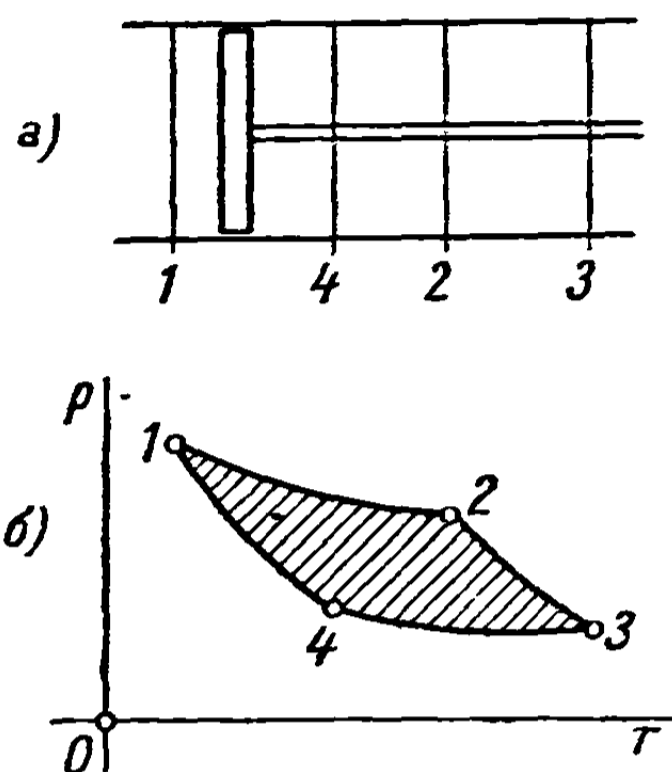
Однако если потери значительны, как в случае течения газа в непосредственной близости от стенок, где трение между его слоями очень ве-



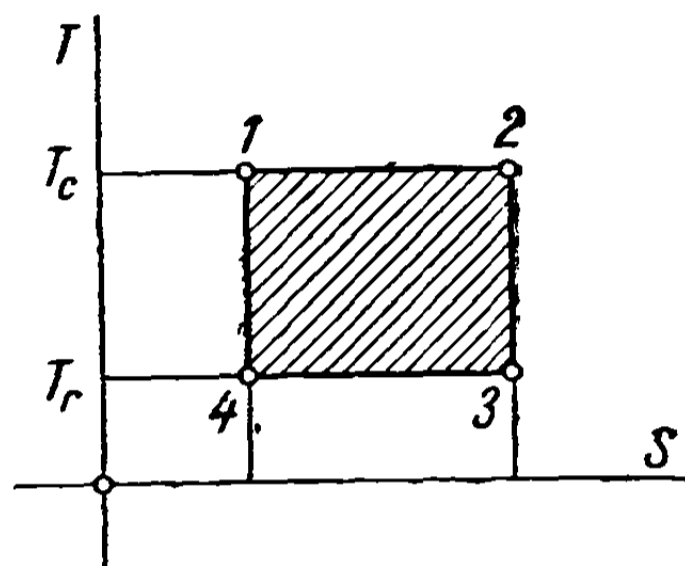
либо, или при наличии турбулентности и завихренности, развивающихся за обтекаемым препятствием, то тогда процесс не может рассматриваться более как обратимый и должен быть принят во внимание действительный процесс в каждом отдельном случае.

## 2. 10. Механизм обратимого процесса. Цикл Карно

Чтобы показать путь, которым тепло может быть прибавлено и превращено в механическую работу, рассмотрим поршень, движущийся в совершенно изолированном цилиндре (фиг. 2.6,а). Воспользуемся двумя



Фиг. 2.6



Фиг. 2.7

мощными источниками тепла, один из которых имеет температуру  $T_c$ , а другой более низкую температуру  $T_r < T_c$ . Проблема состоит в использовании тепла первого источника и превращении его в механическую работу при помощи системы поршень — цилиндр путем замкнутого обратимого преобразования. Газ, переносящий тепло, вытекает из первого источника тепла, и стадии процесса будут следующие:

изотермическое расширение ( $T = T_c$ ) от состояния 1 до состояния 2, в течение которого газ вводится внутрь цилиндра;

адиабатическое расширение от состояния 2 до состояния 3, в течение которого поступление газа от первого источника приостанавливается и обмен теплом прекращается, так как система изолирована; температура падает от  $T_c$  до  $T_r$ , соответствующей температуре второго источника;

изотермическое сжатие после приведения в действие второго источника ( $T_r$ ) от состояния 3 до состояния 4, в течение которого газ, содержащий тепло, переходит внутрь этого источника;

адиабатическое сжатие, в течение которого второй источник ( $T_r$ ) выключается и температура снова возрастает от  $T_r$  до  $T_c$ .

Диаграммы процесса даны на фигуре 2.6, б в координатах  $p$ ,  $\tau$  и на фигуре 2.7 в координатах  $T$ ,  $S$ . Полный процесс представляет собой цикл специальных преобразований, известный под названием цикла Карно.

Можно легко видеть, что заштрихованная площадь равна соответственно внешней механической работе (координаты  $p$ ,  $\tau$ ) и эквивалентному теплу, поглощенному системой (координаты  $T$ ,  $S$ ).

Отметим, что газ только переносит тепло, одна часть которого превращается в механическую работу, а другая транспортируется газом и отдается второму источнику ( $T_r$ ).

Далее можно видеть, что полное теплосодержание газа, получаемого из первого источника ( $T_c$ ), будет  $C_p T_c$ , а перешедшего внутрь второго источника  $C_p T_r$ , так что в результате разность количеств тепла, превращаемая в механическую работу, будет

$$H_c - H_r = Q = C_p (T_c - T_r). \quad (2.60)$$

Отношение между теплом, превращаемым в механическую работу, и полным начальным теплосодержанием называется коэффициентом полезного действия цикла:

$$\eta = \frac{T_c - T_r}{T_c}. \quad (2.61)$$

Коэффициент полезного действия, соответствующий циклу Карно, является максимальным, так как не существует другого цикла, в котором может быть получена большая разность между теплом, поглощаемым из первого источника и отдаваемым второму.

Изложенные выше рассуждения могут быть использованы при рассмотрении второго закона термодинамики.

### 2.11. Второй закон термодинамики

Второй закон термодинамики, как и первый, есть результат наблюдения и эксперимента. Этот принцип устанавливается в различных формах, которые могут быть сведены к следующему:

1) тепло не может передаваться от тела с низкой температурой к телу с высокой температурой без помощи внешнего воздействия или соответствующего изменения внутри системы.

2) Тепло от единственного источника не может быть превращено в механическую работу без помощи другого одновременного процесса в системе или без внешнего воздействия.

Это утверждение объясняет невозможность использования неисчерпаемых запасов тепла в окружающей среде. Если бы можно было воспользоваться теплом окружающей среды и превратить его в механическую работу, а последнюю превратить снова каким-нибудь способом, например, путем трения, в тепло, которое передавалось бы некоторому телу, то это тело могло бы быть нагрето до любой температуры. Таким путем тепло из внешней среды могло бы быть передано телу с более высокой температурой, что противоречило бы утверждению 1.

3) Превращение механической работы в тепло путем трения необратимо.

Это очень важное утверждение, так как отсюда может быть выведено заключение, что не существует совершенно обратимых процессов, так как внутреннее трение всегда существует в реальных газах благодаря вязкости.

Точнее говоря, явления, происходящие в природе, не могут рассматриваться как обратимые, но если иметь в виду, что для некоторых процессов трение очень мало, и им пренебречь, то они могут рассматриваться в первом приближении как обратимые процессы.

Необратимость процесса образования тепла, связанного с трением, приводит к общему выражению второго закона термодинамики.

4) Энтропия изолированной системы должна возрастать в реальном, следовательно, необратимом процессе.

Это возрастание энтропии за цикл является мерой обратимости процесса в любой замкнутой системе.

Последнее утверждение не может найти здесь более широкого освещения, так как это выходит за рамки настоящего исследования. В проблемах, относящихся к динамике газов, превращения обычно рассматриваются как обратимые в первом приближении; однако в некоторых случаях должно быть обращено внимание на необратимые явления, такие, как ударные волны и т. д.

Процессы, в которых существенную роль играет трение, должны быть исследованы особо.

## 2. 12. Теплопередача

В предыдущих разделах рассматривались тепло, передаваемое системе, а также энергетический баланс системы после окончания процесса. Однако способ, посредством которого тепловая энергия может быть прибавлена или передана системе, не был при этом указан.

Существуют три пути передачи тепла — *конвекция, теплопроводность и излучение*.

**2. 12. 1. Конвекция.** Конвекция представляет поток тепла, текущий связано с движущимися частицами; в этих частицах тепло и аккумулировано.

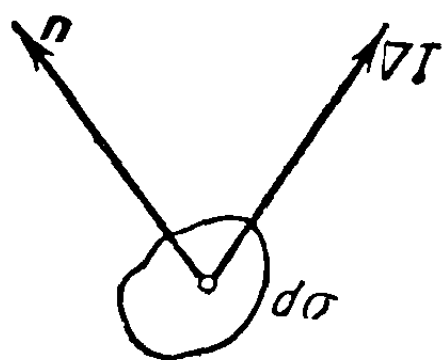
Конвекция называется *естественной*, если движение частиц происходит вследствие разности плотностей, и *вынужденной*, если для того, чтобы вызвать течение газа, разность давлений создается извне.

Механизм передачи тепла посредством конвекции очень сложен и зависит от состояния и свойств газа, скоростей и формы течения (турбулентной, ламинарной и т. д.) в непосредственной близости к поверхности, через которую тепло передается газу или отнимается от него. Поэтому необходимо изучить условия движения, в слоях вблизи поверхностей (ламинарные или турбулентные пограничные слои), так как эти слои образуют род пленки, через которую посредством чистой конвекции тепло передается движущимися частицами от некоторого тела окружающему газу, или в обратном направлении.

Передача тепла внутри пленки зависит от свойств поверхности тела, разности температур между двумя сторонами пленки, ее толщины, которая в свою очередь зависит от вязкости; передача тепла зависит также от плотности и общей скорости потока и, наконец, от удельной теплоемкости и теплопроводности газа.

**2.12.2. Теплопроводность.** Теплопроводность есть поток тепла внутри тела от более нагретых его областей к более холодным, осуществляемый путем одного только молекулярного процесса, без посредства каких-либо молярных движений вещества внутри тела.

При этом принимается, что в некоторой заданной точке, отвечающей высокой температуре, молекулы, движущиеся с большими скоростями,



Фиг. 2.8

передают часть количества своего движения соседним молекулам, что приводит к увеличению скорости последних и, следовательно, к возрастанию температуры в соседней точке.

Благодаря этому механизму внутренняя температура тела имеет тенденцию к выравниванию, если источник тепла ограничен и тело предполагается изолированным. Часть кинетической энергии молекул, находящихся в области тела с высокой температурой, передается соседним молекулам и постепенно распределение кинетической энергии становится равномерным по всему телу.

Если тело не изолировано и если существует два источника, один при высокой температуре, а другой — при низкой, то устанавливается поток тепла, управляемый законом, о котором упомянуто ниже.

Источники могут быть переменными, и в этом случае поток меняется с течением времени; они могут также действовать неограниченное время, сохраняя постоянную температуру, и тогда устанавливается *термическое равновесие* и поток тепла будет *стационарным*.

Температурное поле устанавливается во всем теле. Температура в любой точке зависит обычно от положения точки и от времени:

$$T = T(x, y, z, t), \quad (2.62)$$

где  $x, y, z$  — координаты рассматриваемой точки, а  $t$  — время. В общем случае будет существовать переменное, или нестационарное термическое состояние.

Если  $T$  не зависит от времени, состояние называется установившимся.

Закон, управляющий передачей тепла путем теплопроводности, был сформулирован Фурье и выражается следующим образом:

*Количество тепла  $dQ$ , проходящее в единицу времени через элементарную площадку  $d\sigma$  внутри тела, пропорционально величине  $d\sigma$  и производной от температуры по направлению нормали к этой площадке (фиг. 2.8):*

$$dQ = -k d\sigma \mathbf{n} \cdot \nabla T = -k d\sigma \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (2.63)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  называется коэффициентом теплопроводности. Этот коэффициент слегка меняется с изменением температуры, причем можно принять линейную зависимость:

$$k = k_0 + C_k (T - T_0), \quad (2.64)$$

здесь  $C_k$  — коэффициент, зависящий от рассматриваемого вещества и очень малый по величине. Им можно полностью пренебречь в случае твердых тел, так как величина коэффициента  $k_0$  значительно больше

$C_k$ ; им можно также пренебречь в случае жидкостей. Однако для газов, особенно если наблюдаются значительные разности температур, постоянная часть ( $k_0$ ) и переменная  $[C_k (T - T_0)]$  становятся величинами одного порядка и поэтому второй нельзя пренебречь. Коэффициент  $k$  может быть выведен теоретически с помощью кинетической теории газов, как было показано Максвеллом:

$$k = C\mu C_v, \quad (2.65)$$

где:  $C$  — постоянный коэффициент;  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $C$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

**2.12.3. Излучение.** Любое тело при температуре  $T \neq 0$  непрерывно излучает тепло; количество тепла, излучаемое в единицу времени, зависит от природы тела и его температуры, а также от протяженности и свойств его поверхности. Предположим, что система состоит из двух тел, из которых одно имеет более высокую температуру, причем эта система полностью изолирована; предположим также, что все тепло, излучаемое одним телом, полностью поглощается другим. В этом случае холодное тело получает тепла больше, чем его отдает, в то время как горячее тело — наоборот, получает тепла меньше, чем отдает.

Отсюда следует, что температура тел имеет тенденцию к выравниванию, и таким образом устанавливается термическое равновесие.

Лучистое тепло распространяется с помощью электромагнитных волн, подобно свету или другим излучениям того же рода.

Эти волны отдают часть своей энергии встречаемому ими телу или, наоборот, тело поглощает часть перехваченных волн, отражая оставшуюся часть или пропуская ее через себя. Жидкости и твердые тела обычно поглощают больше лучистого тепла, чем газы. Этим объясняется тот факт, что значительное количество тепла, излучаемого солнцем, достигает земли, хотя при этом лучи пересекают толстые слои воздуха (стратосферу и атмосферу).

### 2.13. Вязкость. Турбулентность

В предыдущих разделах отмечались потери, связанные с трением, которые превращаются в тепло диссипации; теперь рассмотрим причины, обуславливающие эти потери, такие, как *вязкость, турбулентность*.

Взаимодействие молекул газа, которые движутся одна относительно другой, создает тангенциальное напряжение, а также тангенциальную силу, называемую *силой трения*. Это специфическое свойство реального газа называется *вязкостью*.

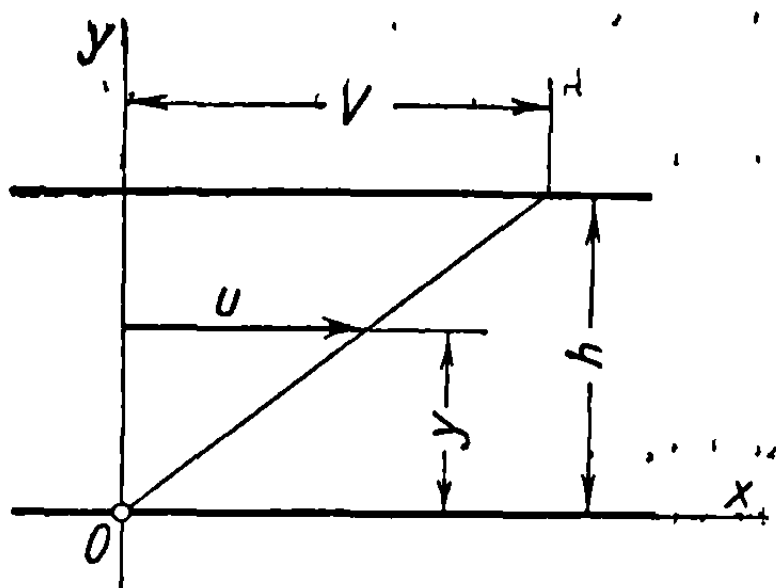
Невязкие жидкости и газы не существуют в действительности и поэтому называются *идеальными, или совершенными*.

Чтобы иллюстрировать влияние вязкости, рассмотрим две параллельные стенки, из которых одна движется относительно другой со скоростью  $V$ .

Благодаря вязкости частицы газа прилипают к стенкам, и потому на движущейся стенке частицы имеют скорость  $V$ , а на неподвижной — ну-

левую скорость. Вдоль всей толщины слоя  $h$  между стенками (фиг. 2. 9) скорость частиц газа изменяется от 0 до  $V$  в соответствии с законом

$$u = \frac{y}{h} V; \quad (2.66)$$



Фиг. 2.9.

взаимодействие между двумя соседними слоями, называемое трением, отнесенное к единице площади и обозначенное через  $\tau$ , выражается равенством

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{h}, \quad (2.67)$$

где  $\mu$  — характеристический коэффициент, называемый коэффициентом вязкости.

Эта формула находится в полном соответствии с экспериментальными результатами.

Коэффициент  $\mu$  изменяется как функция температуры, в соответствии со сложным законом. Формула, выражающая изменение этого коэффициента для воздуха, используемая обычно, имеет вид:

$$\mu = \frac{1,76}{10^6} \frac{1 + \frac{114}{273}}{1 + \frac{114}{T}} \sqrt{\frac{T}{273}} \text{ кг сек/м}^2. \quad (2.68)$$

Для  $\theta = 15^\circ$  и атмосферного давления  $\mu = 1,81 \cdot 10^{-6}$ . В практике используется коэффициент кинематической вязкости  $\nu$ , представляющий отношение собственно коэффициента вязкости к плотности:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ м}^2/\text{сек}. \quad (2.69)$$

Для газов  $\nu$  изменяется в зависимости от температуры и давления; для воздуха при  $15^\circ \text{C}$  и атмосферном давлении  $\nu = 1,48 \cdot 10^{-5}$ .

Турбулентность является другим свойством жидкости, подобным вязкости. Вязкость служит причиной трения между двумя частицами газа, скользящими одна относительно другой при их движении в параллельных слоях, как это наблюдается при *ламинарном* течении.

Как только скорость частиц газа превышает некоторую величину, их движение перестает быть устойчивым вдоль описываемых ими траекторий и они приобретают скорость флуктуации, нормальную к общему течению, и по причине этой неустойчивости переходят из одного слоя в другой, создавая обмен количеством движения. Это приводит к возникновению тангенциального воздействия, квази-трения, которое будет следствием описанного явления, называемого *турбулентностью*.

Трение, обусловленное вязкостью, или квази-трение, связанное с турбулентностью, являются причинами потерь, которые превращаются в тепло диссипации. С этими потерями мы имели дело в предшествующих разделах; однако для определенных безвихревых течений, изучению которых главным образом и посвящено настоящее исследование, указанными потерями можно пренебречь. Специальное указание сделано в случаях, когда эти потери, приводящие к возникновению вихревого течения, должны быть приняты во внимание.

## Глава 2

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящая глава касается общих уравнений, определяющих течение сжимаемой жидкости, уравнений неразрывности в различных системах координат, а также уравнения энергии.

Особое внимание обращено на вопрос о распространении движения в сжимаемой жидкости, причем отмечено влияние скорости звука на характер течения в дозвуковых, звуковых и сверхзвуковых условиях и установлены обычные формулы, определяющие давление через скорость звука и число Маха. Дано уравнение потенциала скорости в декартовой, цилиндрической и полярной системах координат.

#### 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

##### 3. 1. Уравнения движения

Рассмотрим движущуюся массу жидкости, из которой выделен объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$  (фиг. 3.1); действие окружающей жидкости можно заменить эквивалентной системой давлений  $p$ , нормальных к поверхности  $\sigma$ .

Пусть  $d\tau$  — элемент объема с элементарной массой  $\rho d\tau$ , имеющий скорость  $V$ ; обозначая время через  $t$ , получим, что величина  $-\frac{dV}{dt} \rho d\tau$  будет представлять силу инерции, действующую на эту массу. Далее, пусть  $f$  является внешней силой, отнесенной к единице массы, тогда  $f \rho d\tau$  будет элементарной силой, действующей на элемент объема.

Объем  $\tau$  будет находиться в динамическом равновесии под действием: результирующей сил инерции

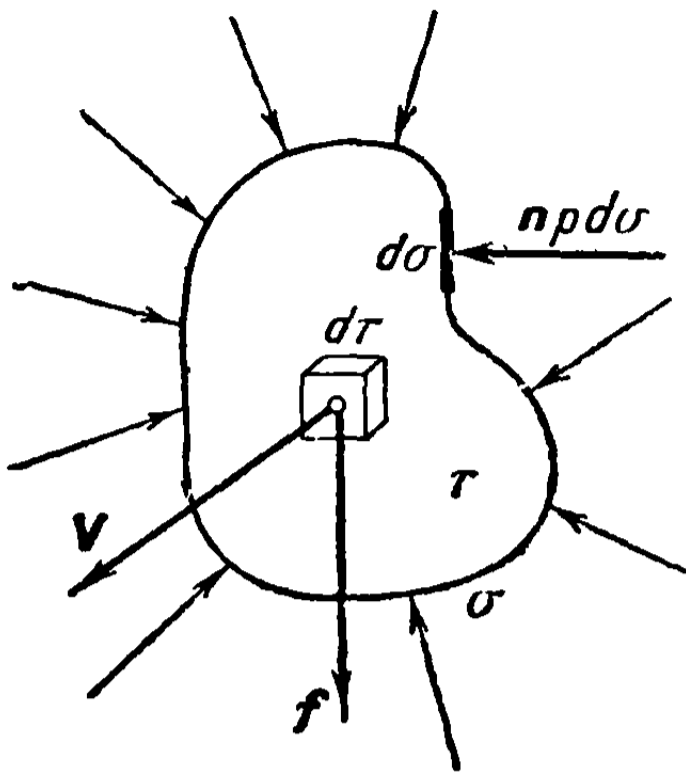
$$F_i = - \int \frac{dV}{dt} \rho d\tau; \quad (3.1)$$

результирующей внешних сил

$$F_e = \int f \rho d\tau; \quad (3.2)$$

результатирующей давлений, выраженной, в соответствии с формулой Гаусса (1.35а),

$$P = \int_{\sigma} p n d\sigma = - \int_{\tau} \nabla p d\tau, \quad (3.3)$$



Фиг. 3.1

где  $n$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленной внутрь объема.

Отсюда получим соотношение

$$\int_{\tau} \left( \rho \frac{dV}{dt} - \rho f + \nabla p \right) d\tau = 0, \quad (3.4)$$

из которого выводится общее уравнение движения:

$$\frac{dV}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.5)$$

Для газов внешняя сила будет очень мала; поэтому величиной  $f$  можно пренебречь, и в этом случае написанное выше уравнение принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.6)$$

Рассмотрим правостороннюю прямоугольную систему координат  $Oxyz$ ; обозначая через  $u, v, w$  проекции скорости  $V$  на три оси и через  $x, y, z$  координаты частицы, движущейся вдоль траектории, получим компоненты скорости этой частицы:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}. \quad (3.7)$$

Уравнение движения (3.5) можно записать в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = f - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.8)$$

или в проекциях на декартовы оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $f_x, f_y, f_z$  — проекции внешней силы  $f$ .



Течение называется *стационарным*, или *установившимся*, если скорость, давление и плотность не зависят явно от времени и частные производные рассматриваемых величин по времени будут равны нулю:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

Течение называется *неустановившимся*, если скорость, давление и плотность в данной точке будут меняться с течением времени.

Установившиеся течения соответствуют стационарным условиям, наиболее распространенным в практике, и представляют наибольший интерес. Поэтому на них обращено особое внимание, но одновременно затронуты также и некоторые проблемы, относящиеся к неустановившемуся течению, так как они имеют особое значение при современном высокоскоростном полете.

**3.1.1. Другие формы уравнений движения.** Рассмотрим вихрь вектора скорости:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i}\Omega_x + \mathbf{j}\Omega_y + \mathbf{k}\Omega_z, \end{aligned} \quad (3.11)$$

и заметим, что уравнения движения (3.9) содержат проекции этого вектора вихря  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$ .

Прибавляя и вычитая члены  $v \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $w \frac{\partial w}{\partial x}$  в левую часть первого уравнения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + w\Omega_y - v\Omega_z = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (3.12)$$

где  $V$  — полная скорость:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2. \quad (3.13)$$

Подобным же образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + u\Omega_z - w\Omega_x = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + v\Omega_x - u\Omega_y = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

В векторных обозначениях эта форма уравнений движения, при которой в левые части вводятся явно компоненты вихря, записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.15)$$

Отметим снова, что в случае газов величиной  $\mathbf{f}$  можно пренебречь и что в последующих выводах мы будем пренебрегать внешними силами. Если

$\Omega \neq 0$ , то течение называется вихревым; если  $\Omega = 0$ , то течение безвихревое. В последнем случае, приравнявая нулю каждый компонент выражения (3.11), легко установить, что скорости могут быть определены с помощью потенциала скорости  $\Phi$ :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (3.16)$$

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi.$$

Для безвихревого (или потенциального) течения, предполагая, что внешние силы определяются через силовую функцию  $U$

$$\mathbf{f} = \nabla U, \quad (3.17)$$

приведем уравнение (3.15) к виду

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - U \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (3.18)$$

а в случае безвихревого и установившегося течения получим

$$\nabla \left( \frac{1}{2} V^2 - U \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (3.19)$$

или, в дифференциальной форме,

$$V dV - dU + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (3.20)$$

Установившиеся течения будут главным объектом настоящего исследования.

Если пренебречь внешними силами, то написанные выше уравнения примут вид:

для неустановившегося потенциального течения

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0; \quad (3.21)$$

для установившегося течения

$$\nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad V dV + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (3.22)$$

**3.1.2. Линия тока. Вихревая линия.** *Линией тока* называется кривая, касательная к которой в каждой точке кривой совпадает по направлению с вектором скорости, построенным для данного момента времени в той же точке.

Дифференциальные уравнения линий тока, которые выводятся из такого определения, будут

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \quad (3.23)$$

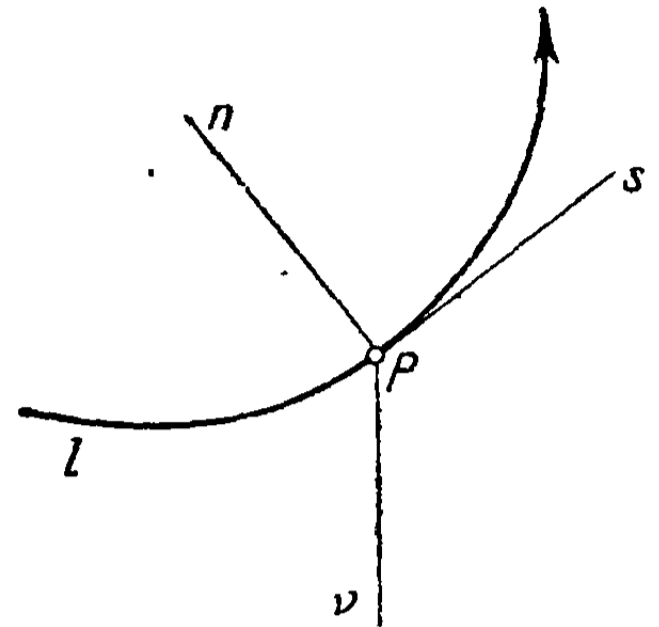
Кривая, касающаяся в каждой своей точке вектора вихря скорости, построенного для той же точки, называется *вихревой линией*. Введя проек-

ции этого вектора (3.11), можно записать уравнения вихревых линий в форме, аналогичной форме уравнений для линий тока:

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \quad (3.24)$$

**3.1.3. Уравнения движения вдоль линий тока:** естественны уравнения. В точке  $P$  какой-нибудь линии тока построим правостороннюю систему координат  $Ps\nu$ , образуемую касательной  $s$ , нормалью  $n$ , направленной к центру кривизны, и бинормалью  $\nu$  (фиг. 3.2). Обозначая радиус кривизны в точке  $P$  через  $R$ , можно представить уравнения движения относительно этих осей, так называемые естественные уравнения, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = f_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}; \quad (3.25) \\ \frac{V^2}{R} &= f_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad 0 = f_\nu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \nu}. \end{aligned}$$



Фиг. 3.2

Следует отметить, что распределение давления в направлении бинормали получается таким же, как в гидростатике.

Если течение безвихревое, то, пренебрегая внешними силами, можно последовательно записать первое уравнение в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (3.26)$$

т. е. свести его к уравнению (3.21).

### 3.2. Уравнение неразрывности

Изменение массы за единицу времени определяется интегралом

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau,$$

равным массе, протекающей через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $\tau$ ; поэтому, применяя формулу Гаусса (1.35б), подразумевая при этом, что нормаль направлена внутрь объема, получим

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\tau, \quad (3.27)$$

откуда вытекает уравнение *неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = - \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot \nabla \rho. \quad (3.28)$$

В декартовых координатах это уравнение может быть записано в виде

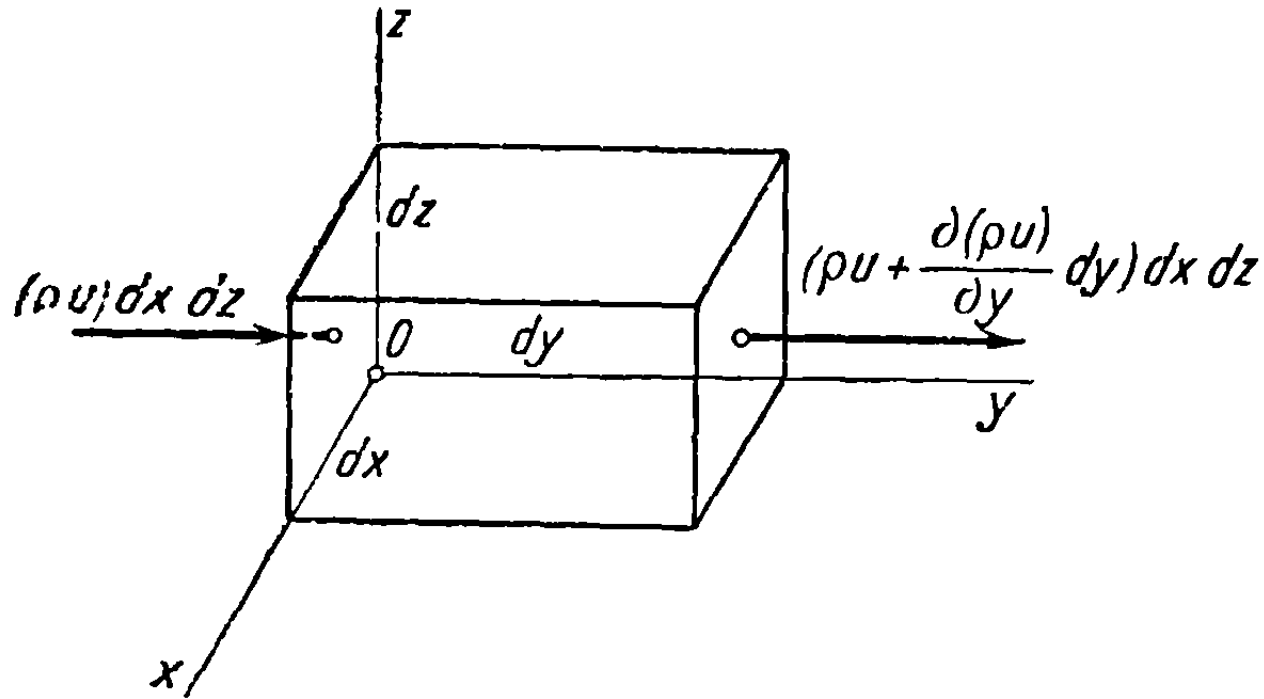
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0; \quad (3.29)$$

оно может быть также получено непосредственно путем определения изменения массы в элементарном параллелепипеде  $dx dy dz = d\tau$ .

Действительно, для этого элемента объема будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \sum \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (3.30)$$

где суммирование относится ко всем шести граням элементарного прямоугольного параллелепипеда (фиг. 3.3); правая часть соотношения (3.30) представляет поток массы через эти грани.



Фиг. 3.3

Очевидно, что сопоставляя попарно эти грани, получим поток массы через поверхность параллелепипеда в виде

$$\sum \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -d\tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = -\left( \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3.31)$$

Введя это выражение в равенство (3.30) и разделив обе его части на  $d\tau$ , приходим к ранее записанному уравнению неразрывности в декартовых координатах (3.29).

Если течение установившееся, уравнение неразрывности сводится к

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.32)$$

или

$$\rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (3.33)$$

Форма уравнения неразрывности в других системах координат, используемая при рассмотрении специальных вопросов, может быть установлена аналогичным образом.

**3.2.1. Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах.** Обращаясь к фигуре (3.4), определим координаты любой точки  $P$  через переменные  $x$ ,  $r$  и  $\omega$ , связанные с  $x$ ,  $y$  и  $z$  соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega; \\ y &= r \sin \omega; \\ z &= z. \end{aligned} \quad (3.34)$$

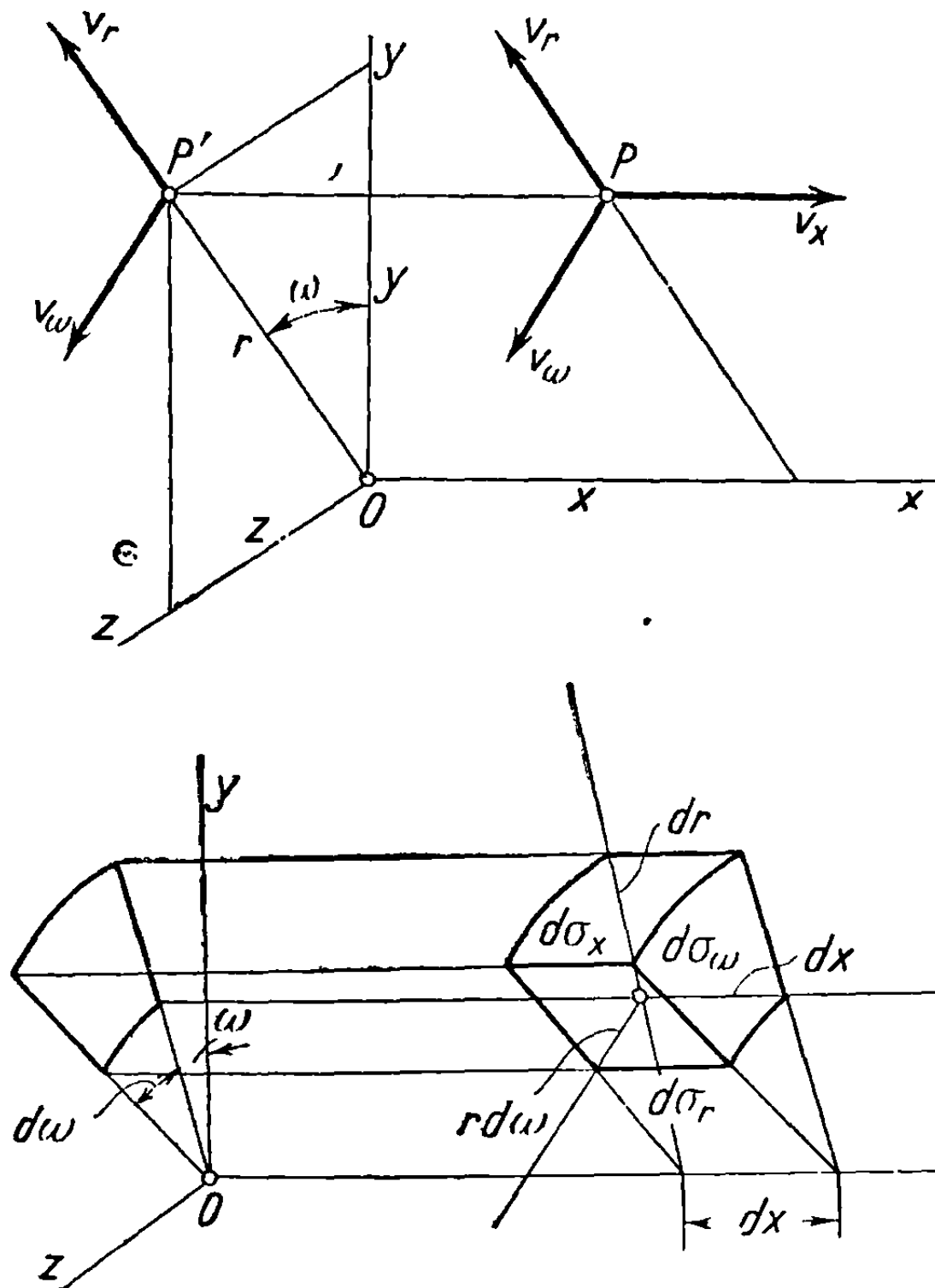
Меридиональная плоскость, проходящая через  $Ox$  и точку  $P$ , образуе-  
с плоскостью  $Oxy$  угол  $\omega$ .

Компоненты скорости будут:

$v_x$  вдоль  $Ox$ ;

$v_r$  вдоль  $OP'$ ;

$v_\omega$  вдоль нормали к меридиональной плоскости  $POx$ .



Фиг. 3.4

Площади граней параллелепипеда, бесконечно малые ребра которого оп-  
ределяются дифференциальными элементами  $dx, dr, r \cdot d\omega$ , будут:

для грани, нормальной к  $Ox$ ,  $d\sigma_x = r \cdot d\omega dr$ ;  
для грани, нормальной к меридиональной плоскости,  $d\sigma_r = r d\omega dx$  } (3.35);  
для грани, лежащей в меридиональной плоскости,  $d\sigma_\omega = dx dr$ .

Элементарный объем параллелепипеда имеет величину

$$d\tau = r d\omega dr dx. \quad (3.36)$$

Применяя соотношение (3.30) к этому элементарному параллелепипеду,  
будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \sum \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \frac{\partial (\rho v_x d\sigma_x)}{\partial x} dx - \frac{\partial (\rho v_r d\sigma_r)}{\partial r} dr - \frac{\partial (\rho v_\omega d\sigma_\omega)}{r d\omega} r d\omega. \quad (3.37)$$

Отсюда, подставляя вместо  $d\sigma_x, d\sigma_r, d\sigma_\omega$  их соответственные значения, вы-  
полняя дифференцирование и деля обе части равенства на  $d\tau$ , получим урав-  
нение неразрывности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (3.38)$$

Если течение установившееся,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , и написанное выше уравнение примет вид:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (3.39)$$

В случае плоского движения, когда  $r$  и  $\omega$  служат полярными координатами, уравнение сведется к

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\omega)}{\partial \omega} \right) = 0, \quad (3.40a)$$

а для несжимаемой жидкости будет

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} \right) = 0. \quad (3.40b)$$

В случае осесимметричного течения, т. е. когда поток идентичен в каждой меридиональной плоскости и не меняется с изменением  $\omega$ , получим уравнение

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} = 0. \quad (3.41)$$

Если жидкость несжимаемая, написанные выше уравнения будут соответственно:

в общем случае

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} = 0; \quad (3.42a)$$

для осесимметричного потока

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} = 0. \quad (3.42b)$$

**3.2.2. Уравнение неразрывности в сферических координатах.** Пусть сферические координаты какой-нибудь точки  $P$  определяются переменными  $R$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  (фиг. 3.5), причем:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta; \\ y &= R \sin \theta \cos \omega; \\ z &= R \sin \theta \sin \omega. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Компоненты скорости будут:

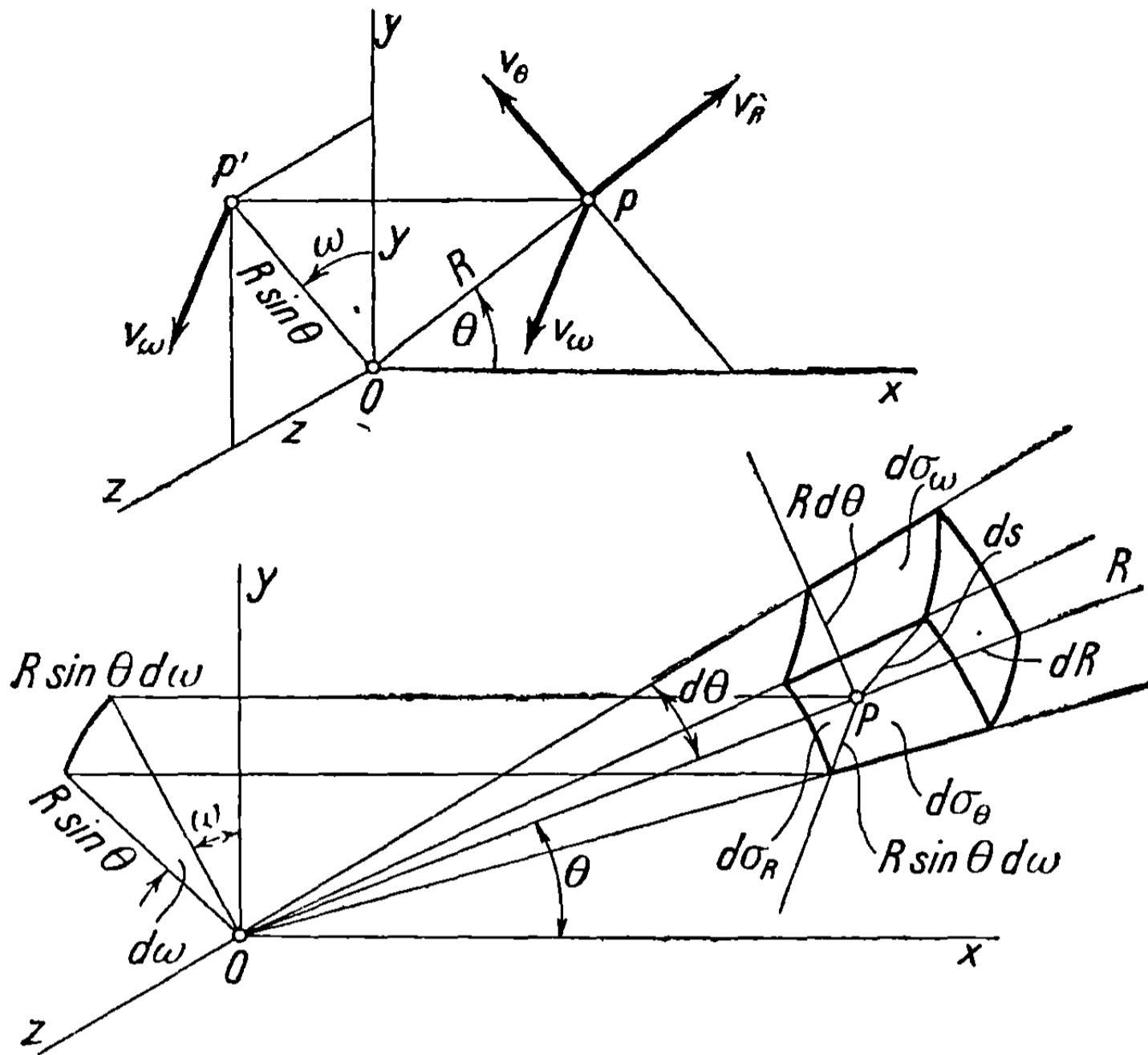
$v_R$  вдоль радиуса вектора  $OP$ ;

$v_\theta$  вдоль нормали к радиусу-вектору в меридиональной плоскости  $POx$ ;

$v_\omega$  вдоль нормали к меридиональной плоскости  $POx$ .

Площади граней элементарного параллелепипеда, построенного на сторонах  $dR$ ,  $Rd\theta$ ,  $R \sin \theta d\omega$ , являющихся также дифференциальными элементами, будут:

$$\left. \begin{aligned} &\text{для грани, нормальной к радиусу-вектору } OP, d\sigma_R = R^2 \sin \theta d\theta d\omega; \\ &\text{для грани, нормальной к меридиональной плоскости, } d\sigma_\theta = R \sin \theta d\omega dR; \\ &\text{для грани, лежащей в меридиональной плоскости, } d\sigma_\omega = R d\theta dR; \end{aligned} \right\} (3.44)$$



Фиг. 3.5

объем параллелепипеда

$$d\tau = R^2 \sin \theta d\theta d\omega dR. \quad (3.45)$$

Поступая так же, как в предыдущем случае, получим поток массы, проходящей через поверхность элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \sum \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = & - \frac{\partial (\rho v_R d\sigma_R)}{\partial R} dR - \frac{1}{R} \frac{\partial (\rho v_\theta d\sigma_\theta)}{\partial \theta} R d\theta - \\ & - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\omega d\sigma_\omega)}{\partial \omega} R \sin \theta d\omega = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Выполняя необходимые подстановки, дифференцируя и деля на  $d\tau$ , получим уравнение неразрывности в сферических координатах:

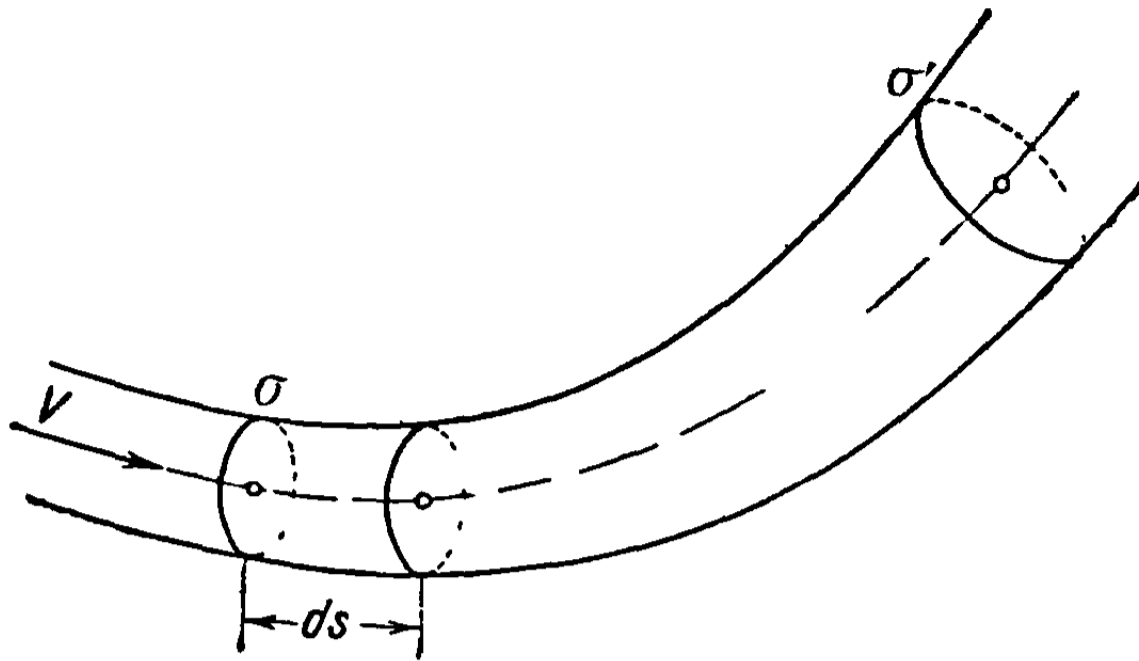
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial (\rho R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (3.47)$$

Если течение установившееся

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = & \frac{1}{R^2} \frac{\partial (\rho R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\omega)}{\partial \omega} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

и если плотность сохраняется постоянной (несжимаемая жидкость), то

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} = 0. \quad (3.49)$$



Фиг. 3.6

Если течение одинаково во всех меридиональных плоскостях (осесимметричное течение), то процесс не будет зависеть от переменной  $\omega$ , и записанные выше уравнения приобретут соответственно вид:

для сжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (\rho R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0; \quad (3.50)$$

для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.51)$$

**3.2.3. Уравнение неразрывности для течения вдоль узкой трубки тока.** Линии тока, пересекающие какую-нибудь площадку  $\sigma$  (фиг. 3.6), образуют в совокупности *трубку тока*.

Рассмотрим трубку тока с достаточно малой площадью поперечного сечения, так что скорость (а равным образом давление и плотность) может рассматриваться как постоянная по всему поперечному сечению и приниматься равной скорости вдоль средней линии тока трубки.

Так как масса, которая содержится в элементе объема  $d\tau = \sigma ds$ , будет  $\rho \sigma ds$  и изменение массы за единицу времени  $\frac{\partial (\rho \sigma)}{\partial t} ds$  равно потоку массы, протекающему через два нормальных поперечных сечения  $\sigma$  и  $\sigma + d\sigma$ , будем иметь

$$\frac{\partial (\rho \sigma)}{\partial t} ds = \rho V \sigma - \left( \rho V \sigma + \frac{\partial (\rho V \sigma)}{\partial s} ds \right) = - \frac{\partial (\rho V \sigma)}{\partial s} ds; \quad (3.52)$$

отсюда вытекает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial (\rho \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V \sigma)}{\partial s} = 0. \quad (3.53)$$



Для течения газа через трубы, поперечные сечения которых не изменяются со временем, имеем

$$\sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V \sigma)}{\partial s} = 0; \quad (3.54)$$

если течение установившееся, уравнение приобретает вид

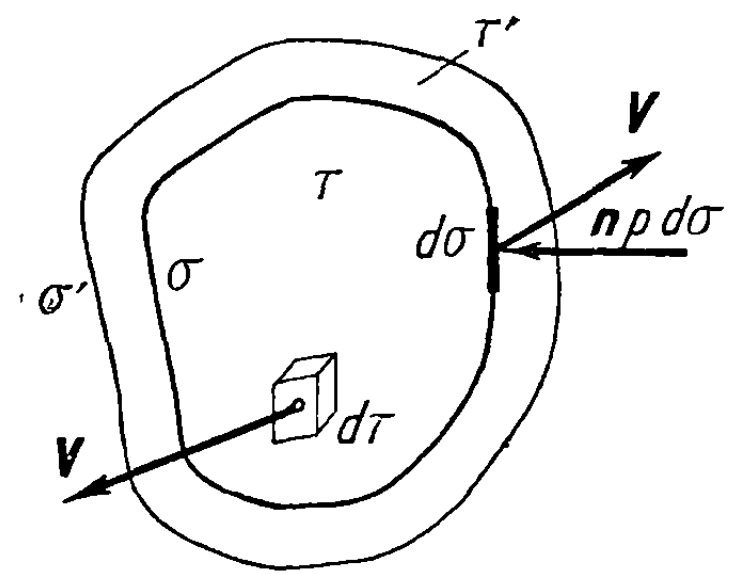
$$\rho V \sigma = \text{const.} \quad (3.55)$$

В случае, когда площадь поперечного сечения трубы достаточно велика, можно применять эти же уравнения, используя средние значения скоростей и плотностей в каждом поперечном сечении.

### 3. 3. Уравнение энергии, или уравнение давления

Рассмотрим объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$  (фиг. 3.7), и предположим, что этот объем становится равным  $\tau'$  через интервал времени  $dt$ ; внешняя механическая работа, произведенная давлением  $p$  в течение этого интервала времени, получит, если применить формулу Гаусса, выражение

$$- dt \int_{\sigma} p n \cdot \mathbf{V} d\sigma = dt \int_{\tau} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) d\tau; \quad (3.56)$$



Фиг. 3.7

отсюда для элементарного объема  $d\tau$  внешняя механическая работа будет  $dt \nabla \cdot (p \mathbf{V}) d\tau$ .

За тот же интервал времени внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, возрастет на  $dE$ , или для массы, содержащейся в том же элементе объема, на  $\rho dE d\tau$ .

С другой стороны, так как скоростью нельзя пренебречь, как мы это делали в случае медленного движения (см. разделы 2.5 и 2.5.1) нужно учесть возрастание кинетической энергии за интервал  $dt$ , которое определится выражением

$$\rho d\left(\frac{1}{2} V^2\right) d\tau.$$

Применяя закон сохранения энергии и принимая во внимание, что нет передачи тепла рассматриваемой массе или от нее окружающей среде (в предположении адиабатического процесса), получим соотношение

$$dt \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \rho (dE + V dV) = 0. \quad (3.57)$$

Далее, из (3.32) для установившегося течения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) &= \nabla \cdot \left( \frac{p}{\rho} \rho \mathbf{V} \right) = \frac{p}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = \\ &= \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right); \end{aligned} \quad (3.58)$$

отсюда, подставив в (3.57) полученный результат и интегрируя, придем к уравнению энергии:

$$\frac{p}{\rho} + E + \frac{1}{2}. \quad (3.59)$$

Необходимо иметь в виду, что это уравнение не зависит от условий движения внутри рассматриваемого объема — внутреннего трения, завихренности и других необратимых процессов, приводящих к диссипации энергии; при этом предполагается, что масса газа, содержащаяся в объеме  $\tau$ , не передает тепла окружающей среде и не воспринимает его извне, т. е. предполагается, что процесс адиабатический.

В силу соотношений (2.4), (2.15), (2.18), записанное выше уравнение может также быть выражено следующим образом:

$$\frac{p}{\rho} + C_v T + \frac{1}{2} V^2 = C_p T + \frac{1}{2} V^2 = h + \frac{1}{2} V^2 = C_p T_0, \quad (3.60a)$$

где  $T_0$  — абсолютная температура в точках, где газ находится в покое, и  $h$  — энтальпия.

В дифференциальной форме уравнение может быть записано в виде

$$C_p dT + V dV = 0. \quad (3.60b)$$

Применяя далее (2.29), получим

$$\frac{p}{\rho} + C_v T + \frac{1}{2} V^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}, \quad (3.61)$$

где  $p_0$  и  $\rho_0$  — соответственно давление и плотность в точках, где газ находится в покое.

Соотношение, выраженное в последней форме, в которой температура исключена, известно также как *уравнение давления*.

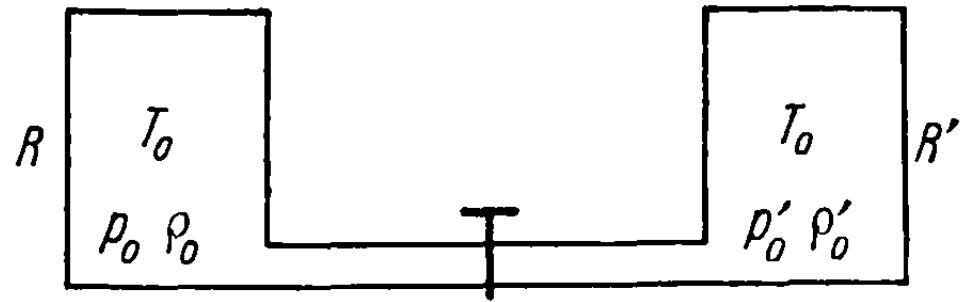
Таким образом, из уравнения (3.60 а) следует, что частицы газа могут при различных изменениях их состояния сохранять одинаковые температуру и скорость, несмотря на то, что часть их энергии может быть израсходована на трение, обусловленное вязкостью. Это объясняется тем, что механическая работа, превращенная в тепло, входит снова в энергетический баланс, если предположить, что тепло не переносится от рассматриваемой массы к внешней среде или обратно (адиабатический процесс). Поэтому если, например, газ из сосуда  $R$ , имея характеристики  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  и скорость, равную нулю, перетекает в сосуд  $R'$  (фиг. 3.8), где скорость снова равна нулю, то из уравнения энергии (3.60) следует, что температура возвращается к своему начальному значению  $T_0$ . Потери, обусловленные трением, вызывают эквивалентные потери давления  $p_0' < p_0$ , что, в силу уравнения (3.60), ведет также к уменьшению плотности  $\rho_0' < \rho_0$  и, следовательно, к соотношению

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p_0'}{\rho_0'} = \text{const}. \quad (3.62)$$

Отсюда можно вывести заключение, что давление превращается исключительно в кинетическую энергию и обратно только в случае обрат-

мых явлений; для необратимых процессов это будет верно только частично, так как потери, обусловленные диссипацией, вызывают понижение давления, причем отношение (3.62) остается постоянным.

В отношении температуры должен быть принят во внимание другой факт: вследствие вязкости вдоль стенок тел, помещенных в поток газа, образуется тонкий пограничный слой. Скорость в этом слое равна нулю на стенке и очень быстро возрастает, достигая скорости потока на малом расстоянии от нее. Так как скорость на стенке равна нулю, температура в этой точке будет  $T_0$ , так что температура потока не может быть измерена на самой стенке.



Фиг. 3.8

По той же причине скорость равна нулю на стенке колбочки термометра, помещенного в поток, так что термометр будет показывать с некоторым приближением температуру  $T_0$ . Следовательно, чтобы измерить температуру газового потока, должны быть приняты особые предосторожности и использованы соответствующие термометры.

**3.3.1. Замечания к уравнению давления.** Приведенные выше уравнения установлены с помощью термодинамических соображений. Основываясь на уравнениях движения, можно получить подобные же соотношения, которые окажутся полезными для последующих рассуждений. Так, если через  $P$  обозначить интеграл

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \quad (3.63)$$

и пренебречь внешними силами, то уравнение движения (3.15) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( P + \frac{1}{2} V^2 \right) = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}; \quad (3.64)$$

вектор в правой части этого уравнения нормален к плоскости, содержащей скорость и вихрь. Предполагая течение установившимся и умножая скалярно обе части уравнения на перемещение  $d\mathbf{r}$ , получим

$$d \left( P + \frac{1}{2} V^2 \right) = (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.65)$$

Из последнего соотношения очевидно, что если перемещение совершается вдоль линии тока, то правая часть будет равна нулю. Интегрируя, получим

$$P + \frac{1}{2} V^2 = C, \quad (3.66)$$

причем постоянная  $C$  будет одинакова вдоль всей линии тока, однако она будет изменяться от одной линии тока к другой.

Обращаясь теперь к уравнению (2.30), которое может быть написано в форме

$$dQ = TdS = C_p dT - \frac{dp}{\rho} = d(h - P), \quad (3.67)$$

и подставляя полученный результат в уравнение (3.65), будем иметь

$$d\left(h + \frac{1}{2}V^2\right) - TdS = (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.68)$$

Согласно уравнению энергии (3.60), первое слагаемое равно нулю, отсюда

$$TdS = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.69)$$

Так как правая часть последнего соотношения равна нулю вдоль линии тока, то отсюда следует, что энтропия постоянна вдоль всей линии тока; при этом предполагаем, что не существует никаких разрывов, которые, как это будет показано далее, могли бы стать причиной внезапного возрастания энтропии.

Энтропия может изменяться от одной линии тока к другой.

Те же самые рассуждения применимы и в случае, когда перемещение осуществляется вдоль вихревой линии.

Если перемещение нормально к линии тока, и  $\mathbf{n}$  представляет единичный вектор нормали, то  $d\mathbf{r} = \mathbf{n}dn$  и отсюда

$$T \frac{dS}{dn} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.70)$$

Итак, если изменение энтропии вдоль нормали к линии тока не равно нулю, то вихрь будет также отличен от нуля и течение будет завихренным. Написанное выше соотношение будет применено, чтобы в некоторых специальных случаях течения газа установить, является ли поток завихренным или нет.

Если вихрь равен нулю во всем пространстве, то из написанных выше уравнений следует, что энтропия будет постоянна, т. е. процесс является изэнтропическим и что, с другой стороны, скорость выводится из потенциала скорости. Отсюда, в силу соотношения (2,39), имеем

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho}, \quad (3.71)$$

и из уравнения (3.64) получим *уравнение давления* для неустановившегося течения, или уравнения Бернулли — Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = C; \quad (3.72)$$

В случае установившегося течения возвращаемся к уравнению (3.61), т. е. к уравнению Бернулли для сжимаемой жидкости:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} = \frac{x}{x-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (3.73)$$

Сравнивая последний результат с выражением (3.61), устанавливаем их идентичность, и, как кажется, приходим к противоречию, так как ранее выведенное соотношение было получено без использования условия об изэнтропическом характере превращений; соотношение (3.61) включало

возможность диссипации энергии, в то время как соотношение (3.73) предполагает, что процесс изэнтропичен.

Указанные расхождения объясняются следующим образом:

1) В первом случае вследствие потерь, связанных с трением, которые превращаются в тепло и, следовательно, удовлетворяют энергетическому балансу, процесс будет адиабатическим с постоянной энтальпией; по этой причине энтропия будет возрастать, следовательно, процесс не будет изэнтропическим, изменяясь, в конечном счете, в соответствии с некоторым другим политропическим законом внутри определенного интервала; отсюда

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const.} \quad (3.74)$$

Однако для того, чтобы прийти к условиям, выражаемым уравнением (3.61), требуется, чтобы отношение  $p/\rho$  оставалось постоянным в точках, соответствующих одинаковым значениям скорости:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p'}{\rho'}, \quad (3.75)$$

где разность  $p - p'$  представляет потерю давления, как было показано выше, в особом случае (3.62).

2) Во втором случае преобразование изэнтропично (2.39) и давление остается постоянным ( $p = p'$ ) во всех точках, соответствующих одинаковой скорости, так как теперь нет потерь давления.

**3.3.2. Различные формы уравнения Бернулли.** Исходя из уравнения Бернулли (3.73)

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

и выполняя подстановку, связанную с применением изэнтропического преобразования, получим выражение скорости в зависимости от давления:

$$V^2 = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]; \quad (3.76)$$

отсюда следует, что при  $p = 0$  достигается максимум скорости; обозначая максимальную скорость через  $V_m$ , получим

$$V_m^2 = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_0. \quad (3.77)$$

Отсюда следуют две другие формы уравнения (3.73):

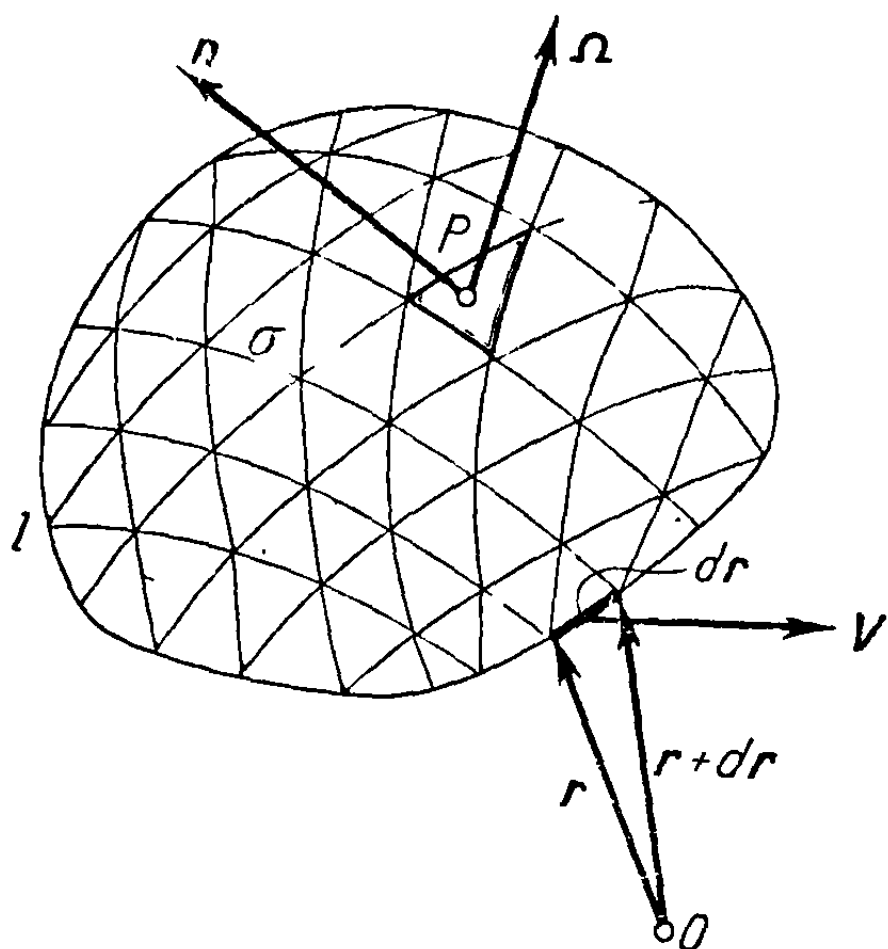
$$V^2 = V_m^2 - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = V_m^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]. \quad (3.78)$$

### 3.4. Теоремы о циркуляции

Циркуляция вдоль замкнутого контура  $l$  определяется как интеграл

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.79)$$

где  $d\mathbf{r}$  направлен вдоль касательной к контуру  $l$  (фиг. 3.9).



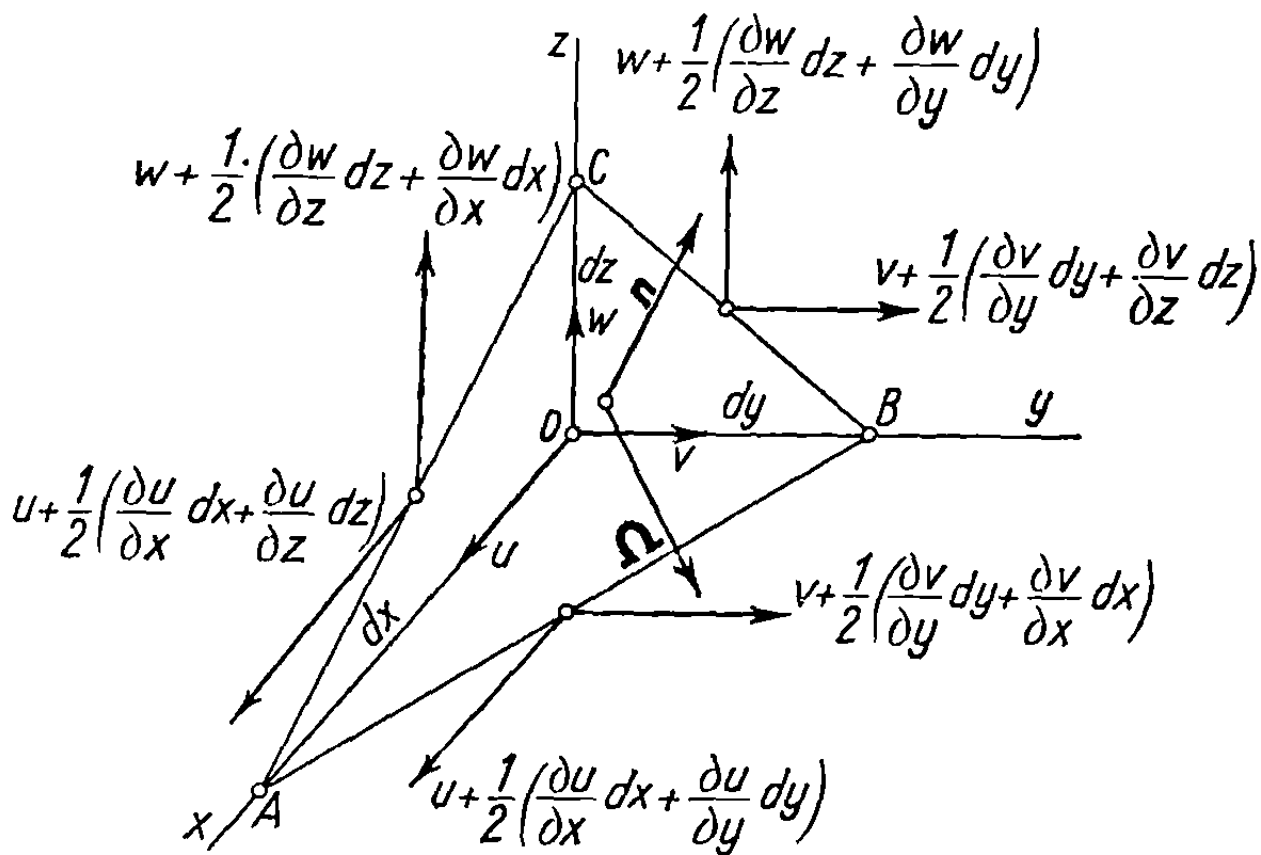
Фиг. 3.9

Пусть  $\sigma$  — поверхность, ограниченная контуром  $l$ , и пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к этой поверхности в точке  $P$ ; полагая, как и выше,  $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{V}$ , получим теорему Стокса:

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (3.80)$$

Это соотношение может быть доказано сначала применительно к элементарному треугольнику  $ABC$ , вершины которого лежат на осях прямоугольной системы  $Oxyz$  (фиг. 3.10). Ребра  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  тетраэдра  $OABC$  соответственно равны  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ .

Для подсчета циркуляции нужно рассматривать только компоненты скорости в каждой координатной плоскости, в средней точке каждой стороны.



Фиг. 3.10

Работа нормальных компонент равна нулю, так как они перпендикулярны к соответствующим сторонам элементарного треугольника; отсюда:

$$\begin{aligned} u_z &= u + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right), & u_y &= u + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right); \\ v_x &= v + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right), & v_z &= v + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right); \\ w_y &= w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right), & w_x &= w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Очевидно, что циркуляция вдоль сторон треугольника в этом случае будет

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (u_y - u_z) dx + (v_z - v_x) dy + (w_x - w_y) dz = \\ &= \frac{1}{2} dydz \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} dzdx \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} dxdy \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \end{aligned} \quad (3.82)$$

так как

$$2\mathbf{n} d\sigma = i dydz + j dzdx + k dxdy.$$

Для определения циркуляции вдоль всего контура  $l$  (фиг. 3.9) нужно разделить поверхность  $\sigma$  на бесконечно малые треугольники; написанное выше соотношение может быть тогда проинтегрировано по всей поверхности. Так как циркуляции вдоль элементарных сторон, общих для двух треугольников, взаимно погашаются, оставшаяся циркуляция будет совпадать с циркуляцией вокруг замкнутого контура  $l$ , что и приводит к соотношению (3.80).

Изменение этой циркуляции с течением времени будет рассмотрено ниже.

Исходя из уравнения движения (3.5), в котором предполагается, что внешние силы имеют силовую функцию (3.17)

$$\mathbf{f} = \nabla U,$$

и умножая скалярно каждое слагаемое на  $d\mathbf{r}$ , получим

$$d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = d\mathbf{r} \cdot \nabla U - \frac{1}{\rho} d\mathbf{r} \cdot \nabla p = dU - \frac{dp}{\rho}. \quad (3.83)$$

Если  $\mathbf{V}$  обозначает скорость в точке  $P$  и  $\mathbf{V}'$  — скорость в соседней точке  $P'$  (фиг. 3.11), то

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + d\mathbf{V} = \frac{d(\mathbf{r} + d\mathbf{r})}{dt} = \mathbf{V} + \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}), \quad (3.84)$$

отсюда

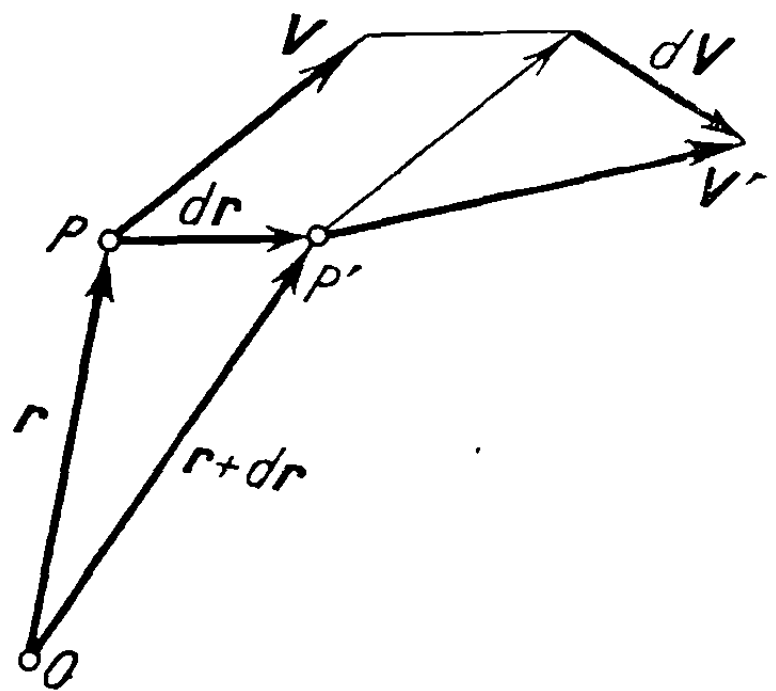
$$d\mathbf{V} = \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}). \quad (3.85)$$

Таким образом, уравнение (3.83) примет вид

$$d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = dU - \frac{dp}{\rho}. \quad (3.86)$$

Интегрируя вдоль контура  $l$  полученный результат и применяя соотношение (3.67), получим

$$\frac{d}{dt} \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\Gamma}{dt} = \left( U + \frac{1}{2} V^2 \right)_l - \oint_l \frac{dp}{\rho} = \left( U + \frac{1}{2} V^2 - h \right)_l + \oint_l T dS. \quad (3.87)$$



Фиг. 3.11

Так как функции  $U$ ,  $V$  и  $h$  однозначны, подстановка в правой части уравнения (3.87) равна нулю; отсюда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint \frac{dp}{\rho} = \oint T dS. \quad (3.88)$$

Если процесс изэнтропический, как это приближенно будет в случаях, встречающихся на практике, или если процесс изотермический, то интеграл во второй части соотношения (3.88) становится равным нулю, и циркуляция будет сохраняться постоянной с течением времени. Полученный результат известен как теорема Томсона. Если в начальный момент циркуляция была равна нулю, то вихри останутся постоянно равными нулю, т. е. течение будет безвихревым.

Если вследствие необратимых процессов (потери, обусловленные ударными волнами, и т. д.) энтропия будет изменяться вдоль контура, то интеграл в правой части уравнения (3.88) не будет равен нулю, и циркуляция появится даже в том случае, если вначале она отсутствовала; тогда течение становится завихренным, как будет показано в последующем для некоторых неизэнтропических течений.

### 3.5. Теорема о количестве движения

Условия динамического равновесия жидкой массы, содержащейся в объеме  $\tau$ , ограниченном поверхностью  $\sigma$ , были определены ранее в разделе 3.1 уравнением

$$\int_{\tau} \frac{dV}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} \mathbf{f} \rho d\tau + \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{F} + \mathbf{P}, \quad (3.89)$$

где  $\mathbf{F}$  — результирующая внешних сил и  $\mathbf{P}$  — результирующая давлений.

Первая часть равенства (3.89) представляет результирующую сил инерции, взятую со знаком минус, которую выразим в форме, более пригодной для применения. Обозначим элементарную массу через  $dm = \rho d\tau$  и соответствующее элементарное количество движения через

$$d\mathbf{l} = \mathbf{V} dm = \mathbf{V} \rho d\tau. \quad (3.90)$$

Интегрируя по всему объему, получим полное количество движения

$$\mathbf{I} = \int_{\tau} \mathbf{V} dm = \int_{\tau} \mathbf{V} \rho d\tau; \quad (3.91)$$

дифференцируя это соотношение по времени и учитывая, что масса  $dm$  не изменяется, получим результирующую сил инерции

$$\mathbf{F}_i = - \frac{d\mathbf{I}}{dt} = - \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau. \quad (3.92)$$

Для вычисления интеграла могут быть проведены следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\mathbf{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\mathbf{V})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\mathbf{V})}{\partial z} - \\ &- \mathbf{V} \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right\}; \end{aligned} \quad (3.93)$$



отсюда получим последовательно, применяя уравнение неразрывности (3.29),

$$\begin{aligned} \rho \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w V)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + i \nabla \cdot (\rho u V) + j \nabla \cdot (\rho v V) + k \nabla \cdot (\rho w V). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Подставляя результат в уравнение (3.92) и используя формулу Гаусса при условии, что нормаль  $n$  направлена внутрь объема, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\tau} \frac{dV}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} d\tau + i \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho u V) d\tau + \\ &+ j \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho v V) d\tau + k \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho w V) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} d\tau - i \int_{\sigma} \rho u (n \cdot V) d\sigma - j \int_{\sigma} \rho v (n \cdot V) d\sigma - k \int_{\sigma} \rho w (n \cdot V) d\sigma, \end{aligned} \quad (3.95)$$

или

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho V (n \cdot V) d\sigma. \quad (3.96)$$

Обозначая направляющие косинусы нормали к  $d\sigma$  через  $\alpha, \beta, \gamma$  и имея в виду, что

$$V \cdot n d\sigma = (\alpha u + \beta v + \gamma w) d\sigma = dQ \quad (3.97)$$

представляет объемный поток  $dQ$ , проходящий через элемент поверхности  $d\sigma$ , получим

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho V dQ = F + P. \quad (3.98)$$

Проектируя полученное векторное равенство на три оси координат, приходим к уравнениям Эйлера:

$$\frac{dI_x}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho u dQ = F_x + P_x; \quad (3.99a)$$

$$\frac{dI_y}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho v dQ = F_y + P_y; \quad (3.99б)$$

$$\frac{dI_z}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho w dQ = F_z + P_z. \quad (3.99в)$$

### 3.6. Момент количества движения

Пусть  $O$  — начало системы отсчета,  $r$  — радиус-вектор точки  $P$ ,  $dm = \rho d\tau$  — элементарная масса, содержащая точку  $P$ ; момент элементарной силы инерции относительно начала будет

$$\rho d\tau \frac{dV}{dt} \times r = -\rho \frac{d(r \times V)}{dt} d\tau, \quad (3.100)$$

так как

$$\frac{d(r \times V)}{dt} = r \times \frac{dV}{dt} + \frac{dr}{dt} \times V = r \times \frac{dV}{dt} + V \times V = r \times \frac{dV}{dt}. \quad (3.101)$$

Обозначая момент количества движения через  $K$

$$dK = \mathbf{r} \times \mathbf{V} dm = \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (3.102)$$

и

$$K = \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{V} dm = \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho d\tau, \quad (3.103)$$

получим

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\tau} \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{V})}{dt} dm = \int_{\tau} \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{V})}{dt} \rho d\tau = M_f + M_p, \quad (3.104)$$

где  $M_f$  — момент внешних сил,  $M_p$  — момент давлений.

Полагая с целью упрощения

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} \times \mathbf{V},$$

можем записать, аналогично предыдущему случаю, следующее соотношение

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial(\rho\mathbf{q})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\mathbf{q})}{\partial z} - \\ &- \mathbf{q} \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial(\rho\mathbf{q})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\mathbf{q})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\mathbf{q})}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Обозначая через  $q_x, q_y, q_z$  проекции вектора  $\mathbf{q}$ , получим

$$\rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial(\rho\mathbf{q})}{\partial t} + \mathbf{i} \nabla \cdot (\rho q_x \mathbf{V}) + \mathbf{j} \nabla \cdot (\rho q_y \mathbf{V}) + \mathbf{k} \nabla \cdot (\rho q_z \mathbf{V}); \quad (3.106)$$

вводя результат в уравнение (3.104) и применяя формулу Гаусса, будем иметь окончательно

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\tau} \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{V})}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{V})}{\partial t} d\tau - \int_{\sigma} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) dQ, \quad (3.107)$$

или, проектируя полученное равенство на три координатные оси, находим

$$\frac{dK_x}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y\omega - zv)] d\tau - \int_{\sigma} \rho (y\omega - zv) dQ; \quad (3.108a)$$

$$\frac{dK_y}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} [\rho (zu - x\omega)] d\tau - \int_{\sigma} \rho (zu - x\omega) dQ; \quad (3.108b)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} [\rho (xv - yu)] d\tau - \int_{\sigma} \rho (xv - yu) dQ. \quad (3.108в)$$

#### 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

##### 4.1. Предварительные соображения

Любое возмущение, появляющееся в несжимаемой жидкости, распространяется мгновенно через все занятое ею пространство.

Так, если предположить, что в несжимаемой жидкости начинает двигаться некоторое тело, то состояние движения окружающей жидкости распространяется мгновенно на всю жидкую массу, и уравнение движения

в какой-нибудь точке для идеальной жидкости совпадает с установленным ранее соотношением (3.5):

$$\frac{dV}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.1)$$

Пусть в течение очень короткого интервала времени  $\Delta t = t' - t$  будет происходить внезапное возрастание скорости движущегося тела. Скорость в некоторой точке жидкости возрастает в течение того же интервала времени от значения  $V$  до  $V'$  и написанное выше уравнение примет вид

$$\int_t^{t'} \frac{dV}{dt} dt = V' - V = \int_t^{t'} f dt - \frac{1}{\rho} \int_t^{t'} \nabla p dt. \quad (4.2)$$

Если пренебречь интегралом для внешних сил, которые будут сохранять обычный порядок величины в продолжение всего интервала времени  $\Delta t$ , то

$$\delta V = V' - V = - \frac{1}{\rho} \nabla \int_t^{t'} p dt = - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi = \nabla \phi, \quad (4.3)$$

где  $\Pi$  — интеграл во второй части равенства.

Из полученного выше соотношения очевидно, что увеличение скорости в заданной точке определяется потенциалом  $\phi$ .

Выше было принято, что при *импульсивном* движении тела скорости во всех точках жидкости будут возрастать мгновенно и что давление будет изменяться импульсивно во всем пространстве, занятом жидкостью; однако плотность будет оставаться неизменно постоянной.

В случае сжимаемой жидкости плотность ее изменяется одновременно с изменением скорости и давления; поэтому давление не может превзойти определенного предела, оно никогда не изменяется и не передается импульсивно. Распространение течения газа, вызванное движением тела внутри него, представляет весьма сложный процесс, в результате которого возмущение передается через все пространство с конечной скоростью.

Очевидно, что в случае, когда тело начинает внезапно двигаться в сжимаемой жидкости, потенциал скорости будет входить в соотношение

$$\delta V = V' - V = - \int_t^{t'} \frac{1}{\rho} \nabla p dt = - \nabla \int_t^{t'} P dt = - \nabla \Phi, \quad (4.4)$$

где  $P$  определяется посредством уравнения (3.71); однако нужно отметить, что этот потенциал распространяется не мгновенно, а постепенно через все пространство, занятое жидкостью. В каждый момент одна часть жидкости находится в движении, а другая — в покое.

В результате всякое возмущение, обусловленное, например, движением твердого тела, производит постепенное изменение распределения давления, т. е. распространяется в пространстве в соответствии с законом, который будет установлен в простых случаях.

Возмущение, вызванное движением твердого тела, обуславливает изменение движения близлежащих частиц; это изменение постепенно переносится в невозмущенное пространство. Пространства возмущенное

и невозмущенное разделяются *волновой поверхностью*, перемещающейся с течением времени; скорости элементов поверхности различны. Эта волновая поверхность представляет поверхность разрыва и изучение ее перемещения чрезвычайно сложно. Наше исследование ограничено поэтому только проблемой распространения возмущений при наличии плоских, цилиндрических и сферических волновых поверхностей.

Движение в этом случае зависит только от одной координаты.

#### 4. 2. Распространение плоских возмущений малой интенсивности

Рассмотрим *одномерное* течение, как, например, течение в прямой трубе постоянного поперечного сечения, в которой движется поршень (фиг. 4.1); если пренебречь внешними силами, то уравнения движения и неразрывности запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если предположить, что движение медленное, то можно пренебречь слагаемым  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  в первом уравнении и  $u \frac{\partial \rho}{\partial x}$  во втором; отсюда, так как  $\rho$  является функцией одной только плотности  $\rho$  и, следовательно,  $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{dp}{d\rho}$ , получим следующие упрощенные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = - \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 (\ln \rho)}{\partial x \partial t}, \\ \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial t} &= - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 (\ln \rho)}{\partial t \partial x} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В предположении медленного движения и, следовательно, малого интервала изменения плотности изменение давления, в зависимости от плотности, вблизи определенного значения последней, может рассматриваться как линейное, поэтому

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = \text{const}; \quad (4.7)$$

в этом случае два написанных выше уравнения сводятся к хорошо известному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

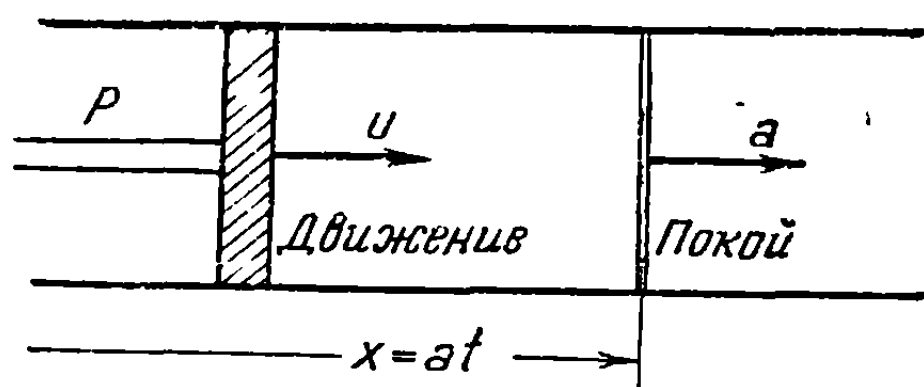
решение которого будет

$$u = u_1(x - at) + u_2(x + at), \quad (4.9)$$

где  $u_1$  и  $u_2$ , соответственно, функции от  $x - at$  и  $x + at$ .

При поставленных выше физических условиях  $u = u_1(x - at)$  при  $x > 0$  и  $u = u_2(x + at)$  при  $x < 0$ . Предположим, что  $u = u_1(x - at)$ ;

в начальный момент ( $t = 0$ ) скорость будет равна  $u_1^0$  в начале координат ( $x=0$ ), где возникает возмущение. Следуя вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $a$ , пройдем за время  $t$  расстояние  $x = at$ ; подставляя это значение  $x$  в выражение для  $u_1$ , получим то же значение  $u_1^0$  скорости, которое она имела в начале координат, в начальный момент времени. Это означает, что возмущение продвигается со скоростью  $a$ . Подобно этому из выражения  $u = u_2(x + at)$  можно вывести, что возмущение продвигается в противоположном направлении с той же скоростью. Величина  $a$  представляет скорость распространения акустических колебаний, которые являются возмущениями малой интенсивности; она известна поэтому под названием *скорости звука*.



Фиг. 4.1

Нужно отметить, что в случае газа, если превращения рассматриваются как изэнтропические, мы получим соотношения

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa RT. \quad (4.10)$$

Для воздуха при  $T = 273^\circ$ ,  $p = 10\,330$  кг/м<sup>2</sup>,  $\rho = 0.1293 \frac{\text{кг/ссж}}{\text{м}^3}$  и  $\kappa = 1.405$  будем иметь  $a = 331.9$  м/сек.

Аналогично для воды при температуре  $10^\circ\text{C}$  получается  $a \approx 1332$  м/сек. Очевидно, что сжимаемость воды, которой в общем случае можно пренебречь, играет существенную роль в задаче о распространении возмущений.

Чтобы иллюстрировать процесс более наглядно, рассмотрим поршень, движущийся в бесконечном цилиндре (фиг. 4.1) с очень малой скоростью  $u$ .

Частицы газа на поверхности контакта приобретают ту же скорость  $u$ , и это состояние движения переносится со скоростью  $a$  (скорость звука) идентично к соседним частицам, так что по истечении времени  $t$  поверхность, разделяющая движущийся и покоящийся газы, т. е. *плоская волновая поверхность*, или *плоская волна давления* будет находиться в точке  $x = at$ .

Предположим, что система отсчета движется по направлению распространения волны с постоянной скоростью  $a$ ; движение по отношению к этой системе будет установившимся, и волна давления, называемая также *простой волной*, будет оставаться фиксированной. Если разрывы скорости, давления, плотности и температуры будут малы, то изменение состояния поперек волны остается изэнтропическим, как будет показано далее.

Скорость в заданной точке по отношению к новой системе осей будет

$$u' = u - a. \quad (4.11)$$

Первое уравнение движения принимает в этом случае вид

$$(u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \approx -a \frac{\partial u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x}; \quad (4.12)$$

после интегрирования получим

$$\frac{u}{a} = \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (4.13)$$

где  $\rho_0$  — плотность при  $u = 0$ .

Если в этом предположении рассматривать  $u$  как величину, малую сравнительно с  $a$ , то отсюда следует, что  $\rho$  будет также мало отличаться от  $\rho_0$ ; таким образом, соотношение между скоростью и плотностью примет вид

$$\frac{u}{a} = \ln \frac{\rho_0 - (\rho_0 - \rho)}{\rho_0} \approx \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = s. \quad (4.14)$$

Отношение в последней части равенства, обозначенное символом  $s$ , называется *коэффициентом уплотнения*, или просто *уплотнением*.

Из этого соотношения очевидно, что коэффициент уплотнения в каждой точке равен отношению скорости газа к скорости звука в той же точке. Так как скорость газа предполагается малой по сравнению с  $a$ , то отсюда вытекает, что изменение плотности будет мало. Это соответствует случаю потока, обтекающего препятствия с малой скоростью. Из дифференциальной формы уравнения давления (3.22), если рассматривается установившееся движение, следует

$$V \cdot dV + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} d\rho = V \cdot dV + \frac{d\rho}{\rho} a^2 = 0; \quad (4.15)$$

предполагая, что это соотношение справедливо также при малых, но конечных изменениях  $\Delta\rho$  и  $\Delta V$ , получим на бесконечности зависимость для скорости  $V_\infty$  и плотности  $\rho_\infty$

$$\frac{V_\infty \Delta V}{a^2} + \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \approx -\frac{V_\infty (V_\infty - V)}{a^2} + s = 0. \quad (4.16)$$

Так как скорости  $V_\infty$  и  $V$  малы по сравнению со скоростью звука, изменение плотности и уплотнение  $s$  будут чрезвычайно малы; поэтому ими можно пренебречь, что позволяет рассматривать газ при низких скоростях как *несжимаемую жидкость*. Это допущение обычно и используется в аэродинамике в случае скоростей, не превышающих 600 км/час.

Хотя мы рассматривали только простой случай распространения возмущений в виде плоских волн (одномерное движение), подобные же результаты могут быть получены также для трехмерного движения.

**З а м е ч а н и е.** В приведенных рассуждениях не было сделано никаких ограничений на характер движения. Если предположить, что движение безвихревое, то скорости выводятся из потенциала  $\Phi$ , и уравнение (4.8) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (4.17)$$

где получающееся после интегрирования аддитивное слагаемое, которое будет функцией времени, включено в  $\Phi$ . Решение уравнения идентично (4.9):

$$\Phi = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (4.18)$$

Результаты можно получить прямым путем, исходя из уравнения для безвихревого движения (3.21), в котором слагаемым  $\frac{1}{2}V^2$  можно пренебречь; итак,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.19)$$

С другой стороны, уравнение неразрывности, если пренебречь второстепенными членами, дает

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (4.20)$$

что приводит к написанному выше уравнению (4.17).

#### 4. 3. Распространение сферических возмущений малой интенсивности

Рассмотрим источник возмущения сферической формы с центром в начале координат (фиг. 4.2); так как процесс симметричен относительно центра, характеристики движения будут одинаковы на любой концентрической сфере.

Отметим сначала, что движение безвихревое и что существует потенциал скорости  $\Phi$ . Из уравнения для безвихревого движения (3.21), в котором можно пренебречь слагаемым  $\frac{1}{2}V^2$ , так как скорость рассматривается очень малой, и из уравнения неразрывности (3.47) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a^2 \ln \rho \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (\rho R^2 V) = 0. \quad (4.21)$$

Из первого уравнения выводим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.22)$$

а из второго, если пренебречь второстепенными членами, получим следующий результат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left( \frac{\partial (\rho V)}{\partial R} + \frac{2\rho V}{R} \right) = -\left[ \rho \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial \rho}{\partial R} + 2 \frac{\rho V}{R} \right] \approx$$

$$\approx -\frac{\rho}{R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} + 2V \right) = -\frac{\rho}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R\Phi). \quad (4.23)$$

Из двух последних соотношений, наконец, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (R\Phi) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R\Phi), \quad (4.24)$$

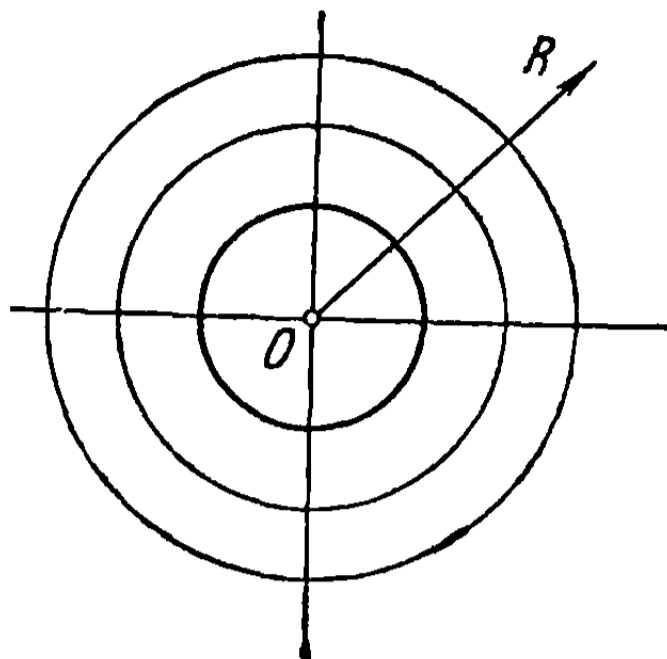
следовательно, как и в предшествующем случае,

$$R\Phi = g_1(R - at) + g_2(R + at). \quad (4.25)$$

Возмущение распространяется точно так же со скоростью звука:  $+a$  вне сферического источника возмущений,  $-a$  внутри источника. Волны

давления будут сферическими. Рассматривая только внешнее распространение, получим следующее значение скорости:

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial g_1}{\partial R} - \frac{1}{R^2} g_1. \quad (4.26)$$



Фиг. 4.2

Вторым слагаемым в последней части равенства можно пренебречь. Первое слагаемое исчезает на бесконечности, следовательно, и сферическое возмущение исчезает на бесконечности, в то время как плоское возмущение теоретически распространяется до бесконечности с одной и той же интенсивностью.

#### 4.4. Цилиндрические волны малой интенсивности

В случае цилиндрических волн решение можно получить непосредственно, основываясь на разобранным случае сферических волн. Рассмотрим источник возмущения, который дает волны цилиндрической формы, причем их ось совпадает с  $Oz$  (фиг. 4.3). Потенциал, создаваемый элементом  $dz$  источника возмущений в точке  $P$ , будет

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \frac{dz}{R} [g_1(R - at) + g_2(R + at)] = \\ &= \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} [g_1(\sqrt{r^2 + z^2} - at) + g_2(\sqrt{r^2 + z^2} + at)]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Интегрируя вдоль всей оси  $Oz$  и ограничиваясь рассмотрением только процесса внешнего распространения, будем иметь

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \Phi = 2 \int_0^{\infty} \frac{g_1(\sqrt{r^2 + z^2} - at)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz; \quad (4.28)$$

вводя далее новую переменную [1]

$$\text{sh } \zeta = \frac{z}{r}, \quad d\zeta = \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (4.29)$$

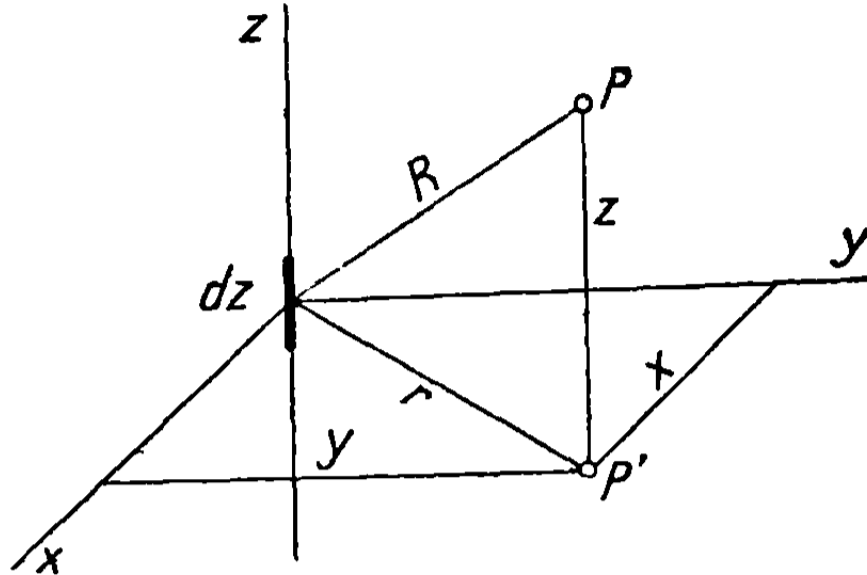
представим потенциал в следующей интегральной форме:

$$\Phi = 2 \int_0^{\infty} g_1(r \text{ ch } \zeta - at) d\zeta; \quad (4.30a)$$



дифференцируя относительно  $r$ , найдем скорость возмущения

$$\begin{aligned}
 V = \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dg_1}{d(r \operatorname{ch} \zeta - at)} \frac{\partial (r \operatorname{ch} \zeta - at)}{\partial r} d\zeta = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} g_1' (r \operatorname{ch} \zeta - at) \operatorname{ch} \zeta \cdot d\zeta.
 \end{aligned}
 \tag{4.306}$$



Фиг. 4.3

#### 4. 5. Распространение плоских волн большой интенсивности

Возвращаясь к предшествующим уравнениям (4.5), запишем их в форме, в которой представлено изменение плотности как функции от  $u$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\
 \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Из этих уравнений легко получается соотношение

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}}.
 \tag{4.32}$$

Так как возмущения предполагаются значительными, порождающими также высокие скорости, то никакими слагаемыми нельзя пренебречь.

Рассматривая уравнение (4.32) и предполагая процесс изэнтропическим, получим путем интегрирования соотношение, связывающее  $u$  и  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{x \frac{\rho}{\rho_0}} \frac{d\rho}{\rho} = \sqrt{x \frac{\rho_0}{\rho_0}} \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{x-1}{2}-1} \cdot d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \\
 &= \frac{2a_0}{x-1} \left[ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{x-1}{2}} - 1 \right],
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

где  $a_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_0$  — скорость звука, давление и плотность в невозмущенном пространстве, в котором  $u = 0$ .

Если скорость звука в произвольной точке обозначить через  $a$ , то написанное выше соотношение упрощается и принимает вид

$$a_0 + \frac{x-1}{2} u = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \sqrt{x \frac{\rho_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x-1}} = \sqrt{x \frac{\rho}{\rho}} = a.
 \tag{4.34}$$

Применяя уравнение (4.32) вместо первого уравнения (4.31), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.35)$$

Пусть точка  $\xi$  движется в направлении оси  $Ox$  так, что скорость  $u$  и, следовательно, плотность в этой точке остаются постоянными; за интервал времени  $\delta t$  смещение точки будет  $\delta \xi$ , в то время как изменение скорости  $\delta u$  будет постоянно равно нулю, поэтому

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \delta \xi \equiv 0; \quad (4.36)$$

отсюда, в силу двух предшествующих уравнений, получим для скорости этой точки выражение

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = a + u = a_0 + \frac{\kappa + 1}{2} u. \quad (4.37)$$

Распространение возмущения зависит от скорости возмущаемой точки. Если скорость ее мала, как предполагалось в предшествующем разделе, то скорость распространения возмущения равна приблизительно скорости звука, как в случае невозмущенного газа. Как было показано ранее, это наблюдается при акустических возмущениях, в связи с чем скорость распространения называют в этом случае скоростью звука.

Возвращаясь к уравнению скорости распространения в форме (4.37), предположим, что возмущение в начальный момент представляется изменением скорости приблизительно синусоидальной формы (фиг. 4.4,а). Точки, находившиеся в покое, продвигаются со скоростью  $a_0$ , другие точки на скоростной диаграмме перемещаются со скоростью

$$a + u = a_0 + \frac{\kappa + 1}{2} u. \quad (4.38)$$

Каждая точка этого возмущения, предполагаемого местом малых локальных изменений скорости, движется со скоростью звука в этой точке; по истечении заданного интервала времени  $t_1 - t_0 = \tau$  от начального момента  $t_0$  положение частицы, движущейся со скоростью  $u$ , соответствующей точке  $P_x$  (вдоль оси абсцисс  $x$ ), определится соотношением

$$\xi = x + (a + u) \tau. \quad (4.39)$$

Кривая  $u = f(\xi)$  изменяет свою форму; точка  $P_\xi$ , соответствующая той же скорости, будет иметь абсциссу  $\xi$ , так что изменение скорости примет форму, изображенную на фиг. 4.4,б,в; разность между двумя абсциссами будет

$$\xi - x = (a + u) \tau. \quad (4.40)$$

Только в случае, если  $a + u = \text{const}$ , возмущение может передаваться без того, чтобы кривая  $u = f(x)$  изменяла свою форму. Это, однако, подразумевает, в соответствии с уравнением (4.38), что  $\kappa = -1$ , чего не может быть для реальных газов.

С другой стороны, если рассматривать изменение формы кривой, то очевидно, что интервал, на котором скорость возрастает до ее максимальной величины и который соответствует уменьшению плотности, т. е. расширению, постепенно растет, тогда как интервал кривой от точки максимальной скорости до точки нулевой скорости ( $u=0$ ) постепенно уменьшается, причем в этом интервале скорость падает и плотность возрастает, что приводит к сжатию газа,

Точка  $M$  нулевой скорости сохраняет одно и то же положение ( $M_1, M_2, \dots$ ) в различные моменты времени, тогда как точки высокой скорости имеют тенденцию продвинуться за вертикаль, на которой находится точка  $M$ , и расположиться на кривой, имеющей форму, изображенную на фиг. 4.4, в.

Эта форма физически невозможна, так как она подразумевает, что каждому заданному значению абсциссы соответствуют три значения для скорости  $u$  и, следовательно, для плотности. Поэтому в действительности кривая не переходит за вертикаль точки  $M$ , где скорость резко падает, и касательная к кривой становится вертикальной, т. е.  $\frac{du}{dx}$  принимает бесконечное значение.

Таким образом, непрерывное возмущение конечной амплитуды может существовать не более чем конечное время, по истечении которого образуется поверхность разрыва; при переходе через нее скорость и плотность изменяются внезапно; эта поверхность называется *ударной волной*, или *скачком уплотнения*.

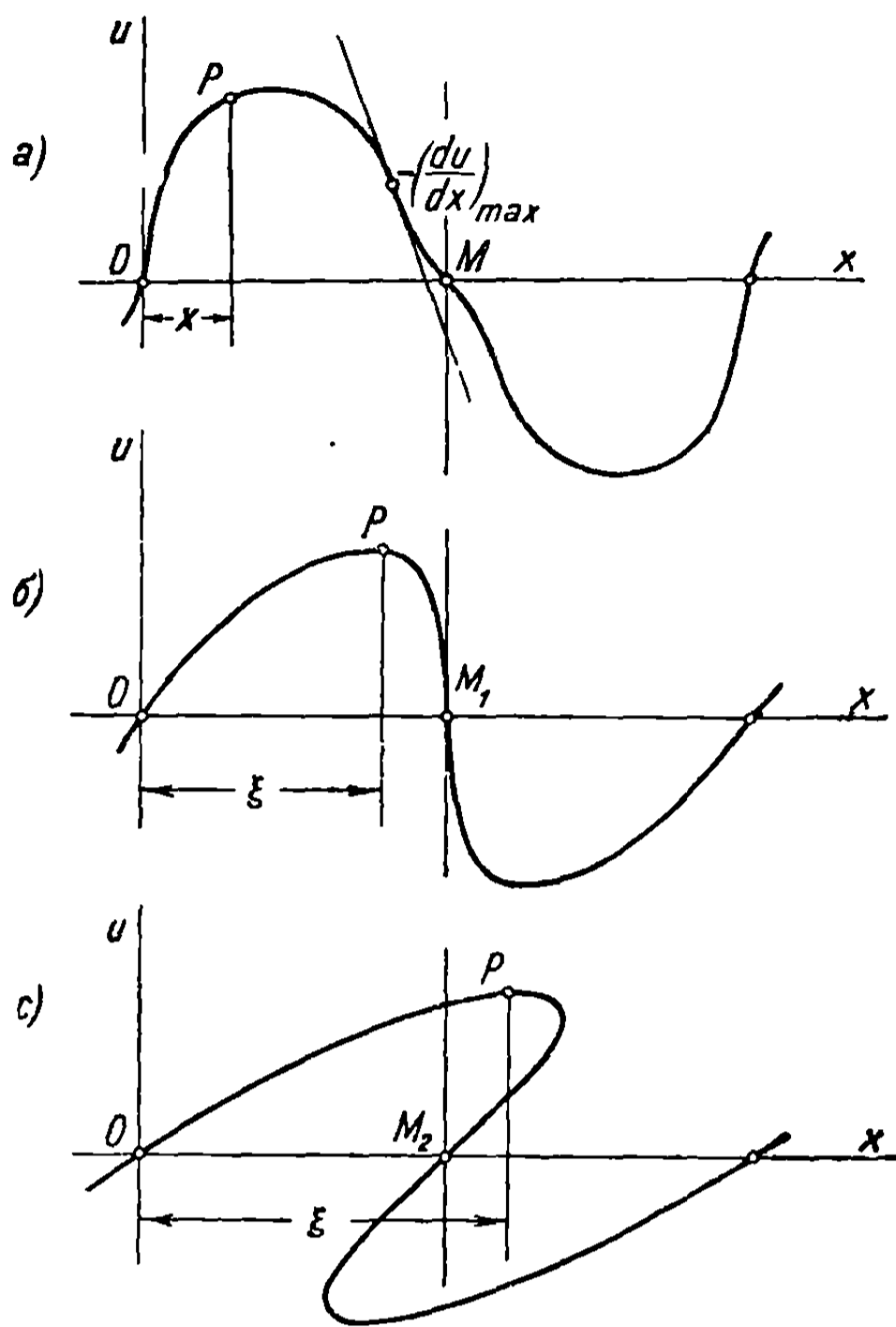
Приведенные соображения поясняют процесс образования ударных волн в сопле Лаваля, или впереди снаряда, движущегося с большой скоростью, или во многих других случаях, которые будут изучены позднее.

Сверх того, очевидно, что процесс образования ударных волн единообразен: плотность всегда внезапно увеличивается, а скорость внезапно уменьшается; никогда не бывает обратного процесса — внезапного уменьшения плотности и внезапного расширения (теорема Цемплена) [2].

Ранее было установлено, что непрерывное возмущение через некоторое время превращается в поверхность разрыва. Время, в течение которого этот переход осуществляется, зависит от максимального значения тангенса угла отрицательного наклона.

В самом деле, в начальный момент  $t = t_0$  изменение скорости в зависимости от текущей переменной  $x$  определяется уравнением

$$u = u(x) \text{ или } x = x(u). \quad (4.41)$$



Фиг. 4.4

По истечении времени  $\tau = t_1 - t_0$ , принимая во внимание уравнения (4.38) и (4.39), будем иметь

$$\xi = x(u) + \left( a_0 + \frac{x+1}{2} u \right) \tau, \quad (4.42)$$

откуда после дифференцирования получим

$$d\xi = \left( x'(u) + \frac{x+1}{2} \tau \right) du = \left( \frac{1}{\frac{dx}{du}} + \frac{x+1}{2} \tau \right) du. \quad (4.43)$$

Далее получим значение тангенса угла наклона кривой  $u = u(\xi)$  в зависимости от тангенса ее наклона в начальный момент и от времени  $\tau$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\frac{du}{dx}}{1 + \frac{x+1}{2} \frac{du}{dx} \tau}. \quad (4.44)$$

Разрыв скорости получается, очевидно, при  $\frac{du}{d\xi} = \infty$ , следовательно, по истечении времени  $\tau$ , для которого знаменатель правой части уравнения (4.44) становится равным нулю,

$$\tau = -\frac{2}{x+1} \left( \frac{du}{dx} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

Отсюда следует, что кратчайшее время соответствует максимуму отрицательного наклона:  $\left( -\frac{du}{dx} \right)_{\max}$ . Эти результаты были даны впервые Ирншоу и Риманом.

#### 4.6. Отличительный характер дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых течений

Выше было показано, что возмущение давления, возникшее в некоторой точке пространства, занятого газом, распространяется во всех направлениях со скоростью звука.

Скорость распространения будет служить критерием для определения характера движений, возникающих в газе.

Предположим, что в газе в заданной точке  $P$  произведено малое возмущение давления, вызванное, например, твердым телом, движущимся со скоростью  $V$ . Это возмущение передается во всех направлениях со скоростью звука  $a$ .

Если скорость  $V$  меньше скорости звука, то возмущение постепенно распространяется в окружающее пространство и все частицы газа будут участвовать в движении, вызванном этим возмущением (фиг. 4.5).

Пусть источник возмущений за четыре секунды продвинется от  $P_0$  до  $P_4$ , покрывая расстояние  $P_0P_4 = 4V$ ; первая сферическая волна распространится за это время до сферы радиуса, равного  $4a$ . Другая сферическая волна, выходящая через одну секунду, когда тело находится уже в точке  $P_1$ , распространится до сферы радиуса  $3a$ , и т. д.; волна, выходя-

щая в конце третьей секунды, когда тело находится в точке  $P_3$ , достигнет сферы радиуса  $a$ .

Точка  $P$  будет постоянно находиться в возмущенном пространстве, которое постепенно расширяется, и по истечении бесконечного промежутка времени каждая частица бесконечного пространства вовлекается в движение и испытывает действие возмущения в точке  $P$ .

Это характеристическое свойство, состоящее в распространении воздействия на все пространство, занятое газом, определяет *дозвуковое* течение.

Если тело движется прямолинейно, то по прошествии некоторого времени, в течение которого пространство, покрываемое распространяющимися волнами, оказывается достаточно обширным, течение вокруг тела будет очень похоже на асимптотическое, соответствующее *импульсивному* (мгновенно распространяющемуся) движению.

Если скорость  $V$  превышает скорость звука, то за время, пока источник возмущения покрывает расстояние  $P_0P_4=4V$  (фиг. 4. 6), первая сферическая волна достигает сферы радиуса  $4a$ , и в четвертую секунду, когда движущееся тело проходит отрезок  $P_3P_4=V$ , сферическая волна, вышедшая из точки  $P_3$ , достигает сферы радиуса  $a$ . Пространство внутри конуса с вершиной в  $P_4$  и углом при вершине  $2\mu$ , определяемым соотношением

$$\sin \mu = \frac{a}{V}, \quad (4.46)$$

оказывается теперь возмущенным благодаря движению тела.

Этот угол называется *углом Маха*, а соответствующий конус — *конусом Маха*. Линия  $P_4A$  известна также как *линия Маха*, или *волна Маха*, а отношение

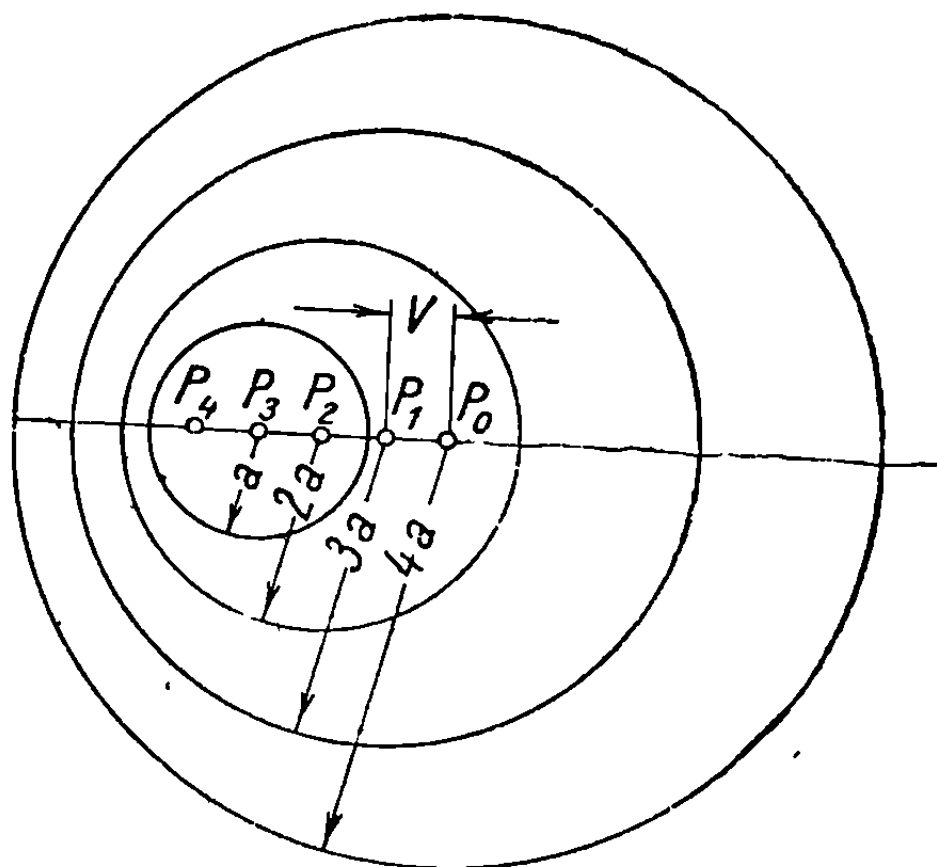
$$M = \frac{V}{a} = \frac{1}{\sin \mu} \quad (4.47)$$

называется *числом Маха*. Тангенс угла Маха  $\operatorname{tg} \mu$  и коэффициент  $B$ , определяемый соотношением

$$B = \sqrt{M^2 - 1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu} = \operatorname{ctg} \mu, \quad (4.48)$$

будут часто встречаться в дальнейших вычислениях.

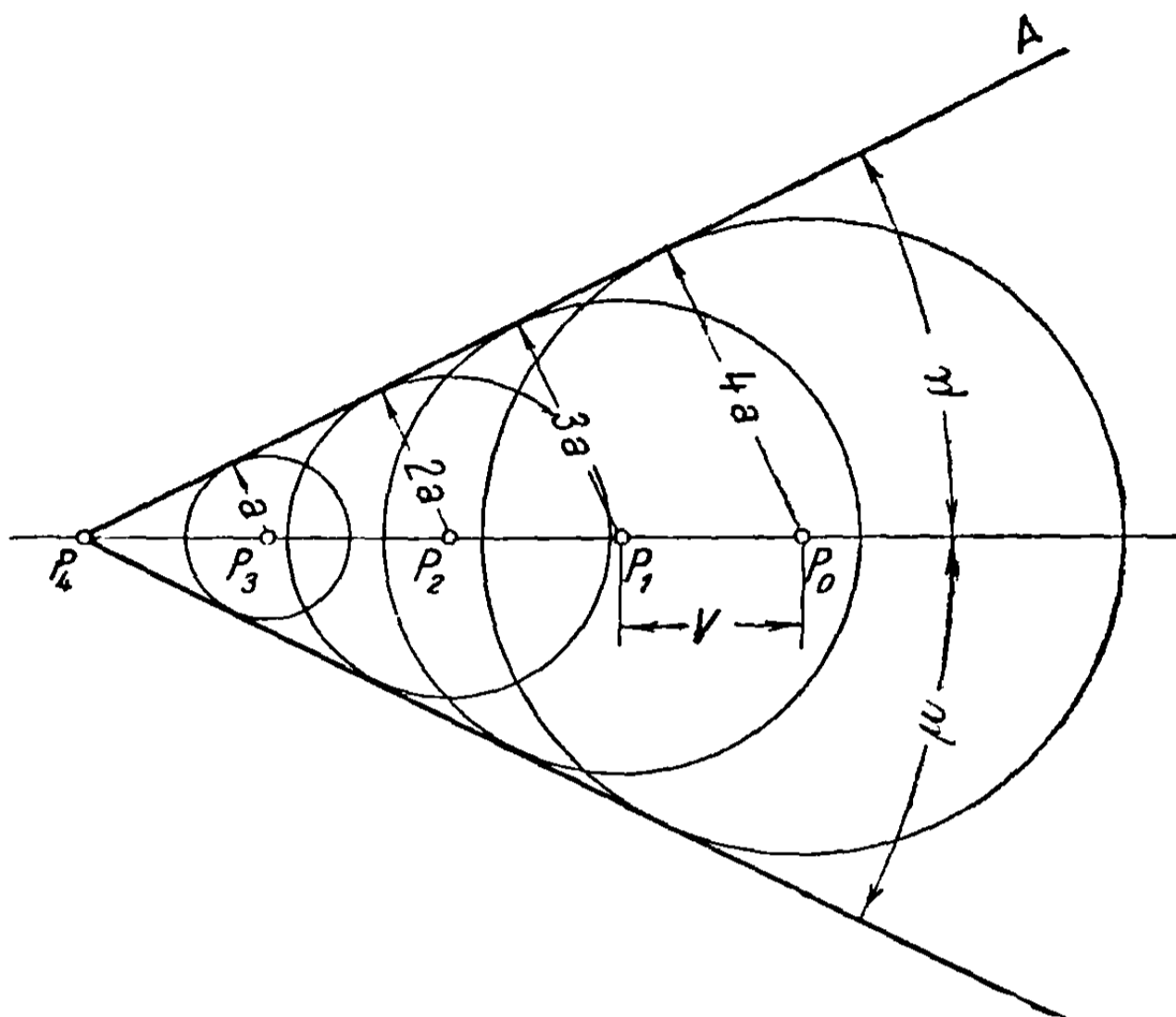
Газ разделяется на две области: внутри конуса Маха, которая возмущена движением тела, и вне конуса Маха, которая остается в покое. На последнюю область не оказывает воздействия возмущающее движение точки  $P$ .



Фиг. 4.5

Это характеристическое свойство, состоящее в том, что воздействие распространяется только на часть пространства, занятого газом, является существенным признаком сверхзвукового течения.

Если скорость  $V$  только очень мало отличается от скорости звука, и возмущения, производимые движущимся телом, вызывают дозвуковые



Фиг. 4.6

движения в одних точках и сверхзвуковые движения в других, т. е. если оба типа течения существуют одновременно, сближаясь вплотную у поверхности, где скорость становится звуковой, то это будет смешанное течение, иногда называемое *околозвуковым*, или *трансзвуковым*.

Определение характеристик движения в каждом из этих течений — дозвуковом, смешанном и сверхзвуковом — является весьма трудной задачей, и методы, используемые с этой целью, меняются для каждого типа течения.

В следующих главах введены упрощающие приближения для получения решения некоторых задач.

## 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, В КОТОРЫЕ ВВОДЯТСЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА И ЧИСЛО МАХА

### 5.1. Различные виды уравнения давления или уравнения энергии

Выше было показано, что скорость звука и число Маха играют существенную роль в установлении формы течения. При одном и том же типе течения скорость звука и число Маха являются основными параметрами, определяющими изменения физических характеристик; поэтому необходимо определить эти характеристики и в особенности выразить уравнение давления или энергии через указанные параметры.

Исходя из уравнения Бернулли

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0 = \text{const}, \quad (5.1)$$

и используя (4.10), можно записать

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{a_0^2}{\kappa-1} = \frac{1}{2} V_m^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0 = \text{const}, \quad (5.2a)$$

или деля на  $V^2$ , получим соотношение между скоростью  $V$  и числом Маха  $M$ :

$$\frac{1}{M^2} = \frac{\kappa-1}{2} \left( \frac{V_m^2}{V^2} - 1 \right). \quad (5.2b)$$

### 5. 1. 1. Критические скорость, давление, плотность и температура.

Скорость звука уменьшается в любой заданной точке, если собственная скорость течения в этой точке возрастает. Если последняя вначале мала и непрерывно возрастает или если она велика и непрерывно уменьшается, она может достигнуть в определенный момент значения, равного скорости звука. Скорость  $V$ , как говорят в этом случае, достигает *критического* значения. *Критическая скорость* частицы в какой-нибудь заданной точке равна скорости звука при физических условиях, отвечающих этой точке. Если обозначить через  $c$  эту скорость, то из уравнения (5.4 а), в котором  $V$  и  $a$  заменяются через  $c$ , получим соотношение

$$\frac{1}{2} c^2 + \frac{c^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{c^2}{2} = \frac{a_0^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0, \quad (5.3)$$

которое после упрощения примет вид

$$c^2 = \frac{2}{\kappa+1} a_0^2 = \frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_0. \quad (5.4)$$

Для воздуха ( $\kappa = 1,405$ )

$$c^2 = 0,83 a_0^2, \quad c = 0,915 a_0. \quad (5.5)$$

Из формулы (5.4) очевидно, что критическая скорость является физической характеристикой рассматриваемого газа.

Давление, плотность и температура в точках, соответствующих критической скорости, имеют определенные значения  $p_c$ ,  $\rho_c$ ,  $T_c$ , называемые *критическим давлением*, *критической плотностью* и *критической температурой*.

Подставляя в уравнение Бернулли, записанное в форме (3.78), значение критической скорости, выведенное из уравнения (5.4), и принимая во внимание выражение (4.10), получим

$$c^2 = \frac{2a_0^2}{\kappa+1} = \frac{2a_0^2}{\kappa-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right], \quad (5.6)$$

отсюда, соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} &= \left( \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}; \\ \frac{p_c}{p_0} &= \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}; \\ \frac{T_c}{T_0} &= \frac{p_c}{p_c} \frac{p_0}{p_0} = \frac{2}{x+1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для воздуха ( $x = 1,405$ ) получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{p_0} &= 0,528; \\ \frac{p_c}{p_0} &= 0,634; \\ \frac{T_c}{T_0} &= 0,833. \end{aligned} \quad (5.8)$$

### 5. 1. 2. Изменения характеристик в зависимости от числа Маха.

Для различных практических случаев применения необходимо ввести в качестве параметра число Маха. Поэтому, исходя из уравнения (5.2 а) и деля обе его части на  $\frac{a^2}{x-1}$ , получим

$$\frac{x-1}{2} \left( \frac{V}{a} \right)^2 + 1 = \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 = \frac{T_0}{T}; \quad (5.9)$$

отсюда может быть выведено изменение температуры как функция  $M$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{x-1}{2} M^2. \quad (5.10)$$

Часто необходимо определить температуру через число Маха, соответствующее условиям торможения, т. е. скорости звука в покоящейся газе ( $V = 0$ ,  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $T = T_0$ ):

$$M_0 = \frac{V}{a_0}. \quad (5.11)$$

Простая подстановка в уравнение (5.2а) дает

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{x-1}{2} \left( \frac{V}{a_0} \right)^2 = 1 - \frac{x-1}{2} M_0^2. \quad (5.12)$$

Из уравнения (3.76), деля обе части его на  $a_0^2$  и используя соотношения

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p} \frac{\rho_0}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \left( \frac{\rho_0}{p} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}}, \quad (5.13)$$

получим выражение для давления

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \left( 1 - \frac{x-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{x}{x-1}} = \left( 1 + \frac{x-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{x}{x-1}}; \quad (5.14)$$



для плотности, подобным же образом получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{2} M_0^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (5.15)$$

Обратно, числа  $M$  и  $M_0$  могут быть определены как функции от давления и плотности. В этом случае из уравнения (5.14) будем иметь:

$$M^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[ \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{2}{\kappa-1} \left[ \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\kappa-1} - 1 \right]; \quad (5.16a)$$

$$M_0^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \frac{2}{\kappa-1} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1} \right]. \quad (5.16b)$$

*Динамическое давление*, т. е. величина  $\frac{1}{2} \rho V^2$ , часто появляется при вычислениях. Обозначим его через  $q$  и определим как функцию от  $M$ :

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \rho a^2 M^2 = \frac{1}{2} \kappa p M^2. \quad (5.17)$$

Разность давлений  $(p_0 - p)$  выражается обычно по отношению к динамическому давлению таким образом:

$$\frac{p_0 - p}{q} = \frac{p_0 - p}{p} \frac{2}{\kappa M^2} = \frac{2}{\kappa M^2} \left[ \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right]; \quad (5.18)$$

разлагая правую часть последнего равенства в ряд, для  $M^2 < \frac{2}{\kappa-1}$  будем иметь

$$\frac{p_0 - p}{q} = 1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-\kappa}{24} M^4 + \frac{(2-\kappa)(3-2\kappa)}{192} M^6 + \dots \quad (5.19)$$

Для воздуха, полагая  $\kappa = 1,4$ , получим

$$\frac{p_0 - p}{q} = 1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{1}{40} M^4 + \frac{1}{1600} M^6 + \dots \quad (5.20)$$

Очевидно, что при  $M < 1$  разложение может быть ограничено двумя членами.

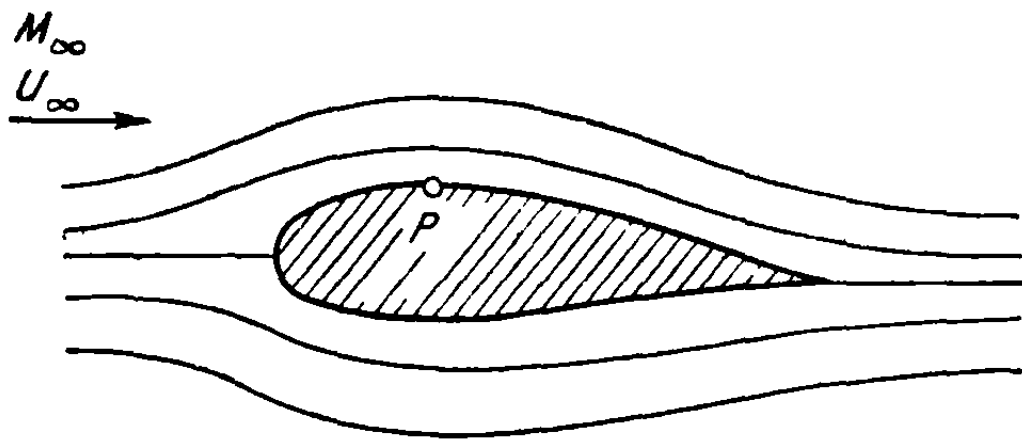
С помощью полученных соотношений могут быть решены различные практические задачи, связанные с определением значений скорости, давления, плотности и температуры некоторых газовых потоков.

Кстати, укажем, что местная температура потока может быть определена путем измерения скорости в этой точке и применения соотношения (5.12). Трудности, возникающие при измерении температуры в потоке газа, о которых упоминалось выше, могут быть таким образом обойдены.

Интересное применение находят выведенные выше формулы в случае течения газа вокруг тела, например, вокруг крыла (фиг. 5.1). Далеко впереди крыла, где скорость течения равна  $U_\infty$ , давление будет равно  $p_\infty$ , скорость звука  $a_\infty$  и число Маха  $M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ . В некоторых

точках, особенно на верхней поверхности крыла, скорость  $V$  будет превышать скорость  $U_\infty$ .

Пусть величина  $U_\infty$  будет возрастать, тогда скорость  $V$  будет возрастать в свою очередь, и в определенный момент достигнет в некоторой точке  $P$  критической скорости ( $M=1$ ), давление станет равным  $p_c$  и  $M_\infty$  будет равно  $M_c$ .



Фиг. 5.1

Применяя уравнение (5.14)

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (5.21)$$

и используя далее выражение (5.17), получим

$$\frac{p_c - p_\infty}{q_\infty} = \frac{2}{\gamma M_c^2} \left[ \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]. \quad (5.22)$$

До тех пор, пока  $M_\infty$  не достигнет значения  $M_c$  (практически  $M_c < 0,70$  для обычных профилей, используемых в авиации), скорость в любой точке профиля никогда не достигает критического значения и течение будет оставаться дозвуковым. При особом значении числа Маха, известном также как *критическое число Маха* ( $M_\infty = M_c$ ), в точке  $P$  достигается критическая скорость. Это явление имеет важное значение для авиации и поэтому рассмотрено с большей полнотой в последующих главах.

**5.1.3. Изменение давления в случае малых возмущений.** В обычных проблемах аэродинамики изменения скорости таковы, что ее значения лишь мало отличаются от величины скорости на бесконечности  $U_\infty$ ; благодаря этому могут быть введены некоторые упрощения в уравнение для давления. Рассмотрим течение со скоростью  $U_\infty$  и предположим, что скорости возмущения  $u, v, w$  вдоль трех координатных осей  $Ox, Oy, Oz$  будут малы.

В этом случае разность давлений  $p - p_\infty$  или соответствующий коэффициент давления могут быть выражены, в силу (5.17), посредством равенства

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \cdot \frac{2}{\gamma M_\infty^2}. \quad (5.23)$$

Применяя соотношение (5.14), можно записать

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p_\infty} = \left[ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (5.24)$$

Далее, применяя выражение (5.2а), получим

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\kappa-1}{2} (2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2), \quad (5.25)$$

откуда

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 &= 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{(U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2}{a_\infty^2 - \frac{\kappa-1}{2} (2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2)} = \\ &= \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2}{1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{a_\infty^2}}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &= \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \left( \frac{2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{a_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 1 - \kappa \frac{u}{U_\infty} M_\infty^2 - \\ &- \frac{\kappa}{2} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{U_\infty^2} M_\infty^2 + \frac{\kappa}{8} \left( \frac{2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2}{a_\infty^2} \right)^2 - \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

Пренебрегая членами второго и более высоких порядков и используя (5.23), будем иметь

$$C_p \parallel \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \approx -2 \frac{v}{U_\infty}. \quad (5.28)$$

Это соотношение, которое будет часто использоваться в дальнейшем, можно также вывести прямым путем из уравнения для давления в дифференциальной форме (3.22). Так, подставляя вместо дифференциалов малые, но конечные приращения, находим

$$\begin{aligned} \frac{p - p_\infty}{p_\infty} &= \frac{\delta p}{p_\infty} = -\frac{1}{2} \delta (V^2) = \\ &= \frac{1}{2} [(U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2 - U_\infty^2] \approx -uU_\infty; \end{aligned} \quad (5.29)$$

отсюда, после деления на  $\frac{U_\infty^2}{2}$ , получается предшествующее уравнение.

Предыдущее рассуждение было необходимо для того, чтобы показать степень приближения, получаемого в уравнении, весьма часто используемом при изучении последующих практических применений. Для трехмерных движений, когда может быть необходима большая точность, оказывается возможным пренебречь только членами третьего и более высоких порядков, и в этом случае соотношение

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \kappa \frac{u}{U_\infty} M_\infty^2 - \frac{\kappa}{2} \frac{v^2 + w^2}{U_\infty^2} M_\infty^2 + \frac{\kappa}{2} \frac{u^2}{U_\infty^2} M_\infty^2 (M_\infty^2 - 1) + \dots \quad (5.30а)$$

будет определять давление, а равенство

$$C_p = -2 \left( \frac{u}{U_\infty} + \frac{1}{2} \frac{v^2 + w^2}{U_\infty^2} \right) + \frac{u^2}{U_\infty^2} (M_\infty^2 - 1) \quad (5.30б)$$

коэффициент давления.

## 5. 2. Дифференциальное уравнение для потенциала скорости при установившемся течении

Так как рассматриваемые течения являются изэнтропическими, а также безвихревыми, то будет всегда существовать потенциал скорости  $\Phi$  (3.16). Предполагая, с другой стороны, что течение установившееся, получим из уравнений (3.22) и (3.32):

$$\frac{1}{2} \nabla(V^2) = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{a^2}{\rho} \nabla \rho, \quad (5.31a)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0; \quad (5.31b)$$

отсюда

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}}{2a^2} \cdot \nabla (V^2). \quad (5.31в)$$

Это уравнение будет далее выражено аналитически в различных координатных системах, а затем применено к различным задачам.

**5.2.1. Уравнение для потенциала в декартовых координатах.** Если заменить вектор  $\mathbf{V}$  его компонентами  $U, v, w$  (здесь компонент на ось  $Ox$  обозначен заглавной буквой по соображениям, которые будут пояснены в дальнейшем), то написанное выше уравнение преобразуется последовательно к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2a^2} (\mathbf{i}U + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V^2}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{U}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{v}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{w}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left( 1 - \frac{w^2}{a^2} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \\ - \frac{Uv}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{vw}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{wU}{a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (5.33a)$$

в случае плоского движения:

$$\left( 1 - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{Uv}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.33b)$$

Вводя потенциал  $\Phi$ ,

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (5.34)$$

получим дифференциальное уравнение для потенциала в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left( 1 - \frac{w^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \\ - \frac{2Uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{2v\tau w}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{2wU}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = 0, \end{aligned} \quad (5.35a)$$

которое в случае плоского движения будет иметь вид

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{Uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.35б)$$

Уравнение (5.33а) соответствует общему случаю трехмерного течения и может быть решено только при некоторых частных обстоятельствах. Однако путем применения упрощающих предположений можно получить менее сложные формы уравнений, которые легче изучить аналитическими математическими методами на их современной ступени развития.

**Малые возмущения.** Линеаризированное уравнение для потенциала. Если течение мало отклоняется от поступательного потока, движущегося со скоростью  $U_\infty$ , то могут быть использованы некоторые упрощающие приближения, для того чтобы привести уравнение (5.35а) к более простой форме. Пусть три компонента скорости будут

$$U = U_\infty + u, \quad v = v, \quad w = w \quad (5.36)$$

и пусть прибавляемые к свободному потоку скорости возмущения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будут очень малы по сравнению с  $U_\infty$ .

Полагая далее

$$\Phi = xU_\infty + \varphi, \quad (5.37)$$

где  $\varphi$  представляет потенциал скоростей возмущения,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5.38)$$

и, пренебрегая членами второго порядка,

$$\frac{u^2}{a^2}, \quad \frac{v^2}{a^2}, \quad \frac{w^2}{a^2},$$

по сравнению с единицей, и членами

$$\frac{Uv}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{vw}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{wU}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

по сравнению с  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ , приведем уравнение (5.35а) к виду

$$\left(1 - \frac{U_\infty^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.39)$$

Если скорость свободного потока  $U_\infty$  значительно меньше скорости звука, то отношением  $\frac{U_\infty^2}{a^2}$  можно пренебречь, и тогда уравнение для потенциала сводится к простому уравнению Лапласа, которое соответствует течению несжимаемой жидкости.

Из уравнения Бернулли (5.2а)

$$\frac{1}{2}(U_\infty^2 + 2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2) + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{1}{2}U_\infty^2 + \frac{a_\infty^2}{\kappa - 1} \quad (5.40)$$

вытекает последовательно, если пренебречь членами второго порядка,

$$a^2 \approx a_\infty^2 - (\kappa - 1)uU_\infty \approx a_\infty^2. \quad (5.41)$$

Полагая, как и выше,

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}, \quad (5.42)$$

т. е. вводя число Маха свободного потока, получим *линеаризированное уравнение с постоянными коэффициентами* в простой и наиболее обычной форме

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.43)$$

**5.2.2. Уравнение потенциала в цилиндрических координатах.** Поступая, как и выше, т. е. применяя уравнения (5.31в) и (3.42а) и вводя компоненты скорости  $U$ ,  $v_r$ ,  $v_\omega$  (заменяя  $v_x$  через  $U$  на фиг. 3.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} = \\ &= \frac{U}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{\partial x} \right) + \frac{v_r}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{v_\omega}{a^2} \left( U \frac{\partial U}{r \partial \omega} + v_r \frac{\partial v_r}{r \partial \omega} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} \right); \end{aligned} \quad (5.44)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left( 1 - \frac{v_r^2}{a^2} \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( 1 - \frac{v_\omega^2}{a^2} \right) \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} - \\ - \frac{Uv_r}{a^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{v_r v_\omega}{a^2} \left( \frac{\partial v_\omega}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \omega} \right) - \frac{v_\omega U}{a^2} \left( \frac{\partial U}{r \partial \omega} + \frac{\partial v_\omega}{\partial x} \right) + \frac{v_r}{r} = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Вводя далее потенциал  $\Phi$ ,

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\omega = \frac{\partial \Phi}{r \partial \omega}; \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial v_\omega}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \omega} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega},$$

запишем уравнение для потенциала в цилиндрических координатах в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left( 1 - \frac{v_r^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left( 1 - \frac{v_\omega^2}{a^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} - \\ - 2 \frac{Uv_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} - \frac{2v_r v_\omega}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \omega \partial r} - \frac{2v_\omega U}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \omega \partial x} + \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{v_\omega^2}{a^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Если жидкость несжимаема, то уравнения (5.45) и (5.47) заменяются следующими:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} = 0, \quad (5.48a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (5.48b)$$

Если рассматривается только двумерное движение, так что процесс не зависит от координаты  $x$ , полученные соотношения могут быть записаны

для сжимаемой жидкости в виде

$$\left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} - \frac{v_r v_\omega}{a^2} \left(\frac{\partial v_\omega}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \omega}\right) + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.49a)$$

$$\left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} - 2 \frac{v_r v_\omega}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \omega \partial r} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0; \quad (5.49b)$$

для несжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.50a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (5.50b)$$

В случае осесимметричного потока течение будет идентично в каждой меридиональной плоскости, процесс не будет зависеть от координаты  $\omega$  и уравнения (5.45), (5.47) сведутся поэтому к следующим:

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{U v_r}{a^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right) + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.51a)$$

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 2 \frac{U v_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (5.51b)$$

Для несжимаемой жидкости уравнения (5.51) принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.52a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (5.52b)$$

Случай малых возмущений. Полагая снова

$$U = U_\infty + u, \quad v_r = v_r, \quad v_\omega = v_\omega \quad (5.53)$$

и принимая, что  $u$ ,  $v_r$ ,  $v_\omega$  малы по сравнению с  $U_\infty$ , введем потенциал скоростей возмущения

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\omega = \frac{\partial \varphi}{r \partial \omega} \quad (5.54)$$

и сделаем необходимые приближения; получим тогда линеаризованное уравнение для потенциала, в предположении малых возмущений:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.55a)$$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (5.55b)$$

В случае осесимметричного течения уравнения примут, соответственно, вид:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{du}{dx} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.56a)$$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (5.56b)$$

**5.2.3. Уравнение потенциала в полярных координатах.** Исходя из уравнения (3.49) и поступая аналогично проведенным ранее выводам, получим, в силу соотношения (5.31в), следующие выражения в полярных координатах, которые были определены ранее (см. раздел 3.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} &= \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{2v_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \\ + \frac{v_\theta}{R} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} &= \frac{v_R}{a^2} \left( v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{\partial R} \right) + \\ + \frac{v_\theta}{a^2} \left( v_R \frac{\partial v_R}{R \partial \theta} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{R \partial \theta} \right) + \\ + \frac{v_\omega}{a^2} \left( v_R \frac{\partial v_R}{R \sin \theta \partial \omega} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{R \sin \theta \partial \omega} + v_\omega \frac{\partial v_\omega}{R \sin \theta \partial \omega} \right); \end{aligned} \quad (5.57)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v_R^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_R}{\partial R} + \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\omega}{R \sin \theta \partial \omega} - \\ - \frac{v_R v_\theta}{a^2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{\partial v_R}{R \partial \theta} \right) - \frac{v_\theta v_\omega}{a^2} \left( \frac{\partial v_\omega}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{R \sin \theta \partial \omega} \right) - \\ - \frac{v_\omega v_R}{a^2} \left( \frac{\partial v_R}{R \sin \theta \partial \omega} + \frac{\partial v_\omega}{\partial R} \right) + \frac{2v_R}{R} + \frac{v_\theta}{R} \operatorname{ctg} \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Вводя потенциал  $\Phi$  и замечая, что

$$v_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad \frac{\partial v_R}{\partial R} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}, \quad \frac{\partial v_R}{\partial \omega} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial \omega}, \quad \frac{\partial v_R}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial \theta}, \quad (5.59a)$$

$$v_\theta = \frac{\partial \Phi}{R \partial \theta}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \omega} = \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \theta \partial \omega}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial R} = \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \theta^2}, \quad (5.59b)$$

$$\begin{aligned} v_\omega = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial v_\omega}{\partial R} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial \omega} - \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \\ = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial \omega} - \frac{v_\omega}{R}, \quad \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2}, \quad \frac{\partial v_\omega}{\partial \theta} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \omega} - \\ - \frac{1}{R \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \omega} - v_\omega \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \quad (5.59b)$$



получим предшествующее уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{v_R^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \theta^2} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \sin^2 \theta \partial \omega^2} - \\ & - \frac{2v_R v_\theta}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial R \partial \theta} - \frac{2v_\theta v_\omega}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \sin \theta \partial \theta \partial \omega} - \frac{2v_\omega v_R}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{R \sin \theta \partial R \partial \omega} + \\ & + \left(2 + \frac{v_\theta^2 + v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \left(1 + \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (5.60a)$$

Если течение несжимаемо, то приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \quad (5.60б)$$

Если течение осесимметрично, то

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{v_R^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{2v_R v_\theta}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial R \partial \theta} + \\ & + \left(2 + \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0; \end{aligned} \quad (5.61a)$$

а в случае несжимаемой жидкости будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \quad (5.61б)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Зауер. Течения сжимаемой жидкости (пер. с франц.). ИЛ, 1954.
2. Н. Е. Кочин. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1949.

## Глава 3

### УСТАНОВИВШЕЕСЯ ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

В настоящей главе рассматриваются основные свойства одномерного течения и, в частности, условия течения через трубки тока и сопла, с точки зрения практического применения. Рассматриваются также нормальные и косые ударные волны, так как плоские волны разделяют два одномерных потока и зависят только от характеристик последних. Исследование одномерного течения можно использовать путем дополнительных рассуждений для изучения высокоскоростных аэродинамических труб, которые имеют широкое применение и распространение.

#### 6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ТРУБЫ И СОПЛА

##### 6.1. Уравнения для течения газа через трубы

Рассмотрим трубу, ось которой имеет очень малую кривизну, а площадь поперечного сечения переменна вдоль длины трубы, но достаточно мала для того, чтобы можно было рассматривать давление, плотность, температуру и скорость как постоянные в каждом поперечном сечении и равные значениям, соответствующим средней линии трубы. Рассматриваемые таким образом трубы могут быть также трубками тока.

При отмеченных условиях искривленная ось такой трубы может рассматриваться как прямая линия и быть принята в качестве оси  $x$  (фиг. 6.1); при этом течение совершается в одном направлении, вдоль  $Ox$ . Пусть  $\sigma$  будет площадью какого-нибудь заданного поперечного сечения и  $p$ ,  $\rho$ ,  $V$  — соответствующие значения давления, плотности и скорости.

В силу уравнения неразрывности для течения вдоль трубки тока (3.55)

$$\rho V \sigma = \text{const}$$

логарифмическим дифференцированием может быть получено соотношение

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} + \frac{d\sigma}{\sigma} = 0. \quad (6.1)$$

Сопоставляя этот результат с уравнением Бернулли, записанным в дифференциальной форме (3.22)

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}, \quad (6.2)$$

получим основное уравнение движения внутри трубки тока

$$\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \frac{dV}{V} + \frac{d\sigma}{\sigma} = 0, \quad (6.3)$$

или, введя число Маха  $\left(M = \frac{V}{a}\right)$ , будем иметь

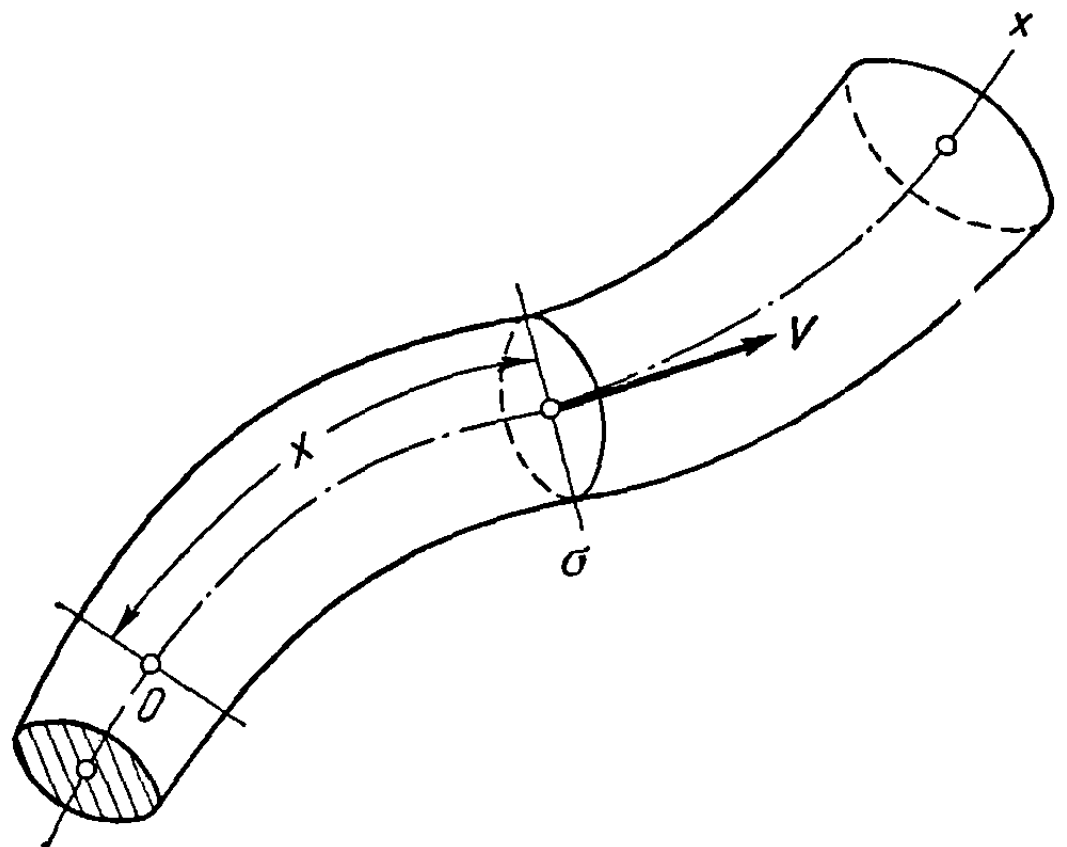
$$(1 - M^2) \frac{dV}{V} + \frac{d\sigma}{\sigma} = 0. \quad (6.4).$$

Этот закон управляет течением в каждом заданном поперечном сечении  $\sigma$ .

Предположим теперь, что значение  $V$ , вытекающее из условий течения вверх и вниз по потоку, меньше, чем местная скорость звука:

$$M = \frac{V}{a} < 1,$$

$$1 - M^2 > 0; \quad (6.5)$$



Фиг. 6.1

из этих неравенств и уравнения (6.4) следует, что уменьшение скорости ( $dV < 0$ ) соответствует увеличению поперечного сечения ( $d\sigma > 0$ ), и наоборот.

Следовательно, при *дозвуковом* течении, если поперечное сечение возрастает или уменьшается, то скорость, соответственно, уменьшается или возрастает.

Если условия течения вверх и вниз по потоку приводят к тому, что в сечении  $\sigma$  скорость  $V$  будет выше местной скорости звука, то имеем неравенства

$$M = \frac{V}{a} > 1,$$

$$1 - M^2 < 0; \quad (6.6)$$

отсюда при возрастании или убывании поперечного сечения будет, соответственно, возрастать или уменьшаться скорость.

Режим *сверхзвукового* течения может быть определен следующим образом: возрастание или убывание скорости соответствует возрастанию или убыванию площади поперечного сечения. Когда одновременно возрастают поперечное сечение и скорость, то происходит *расширение*.

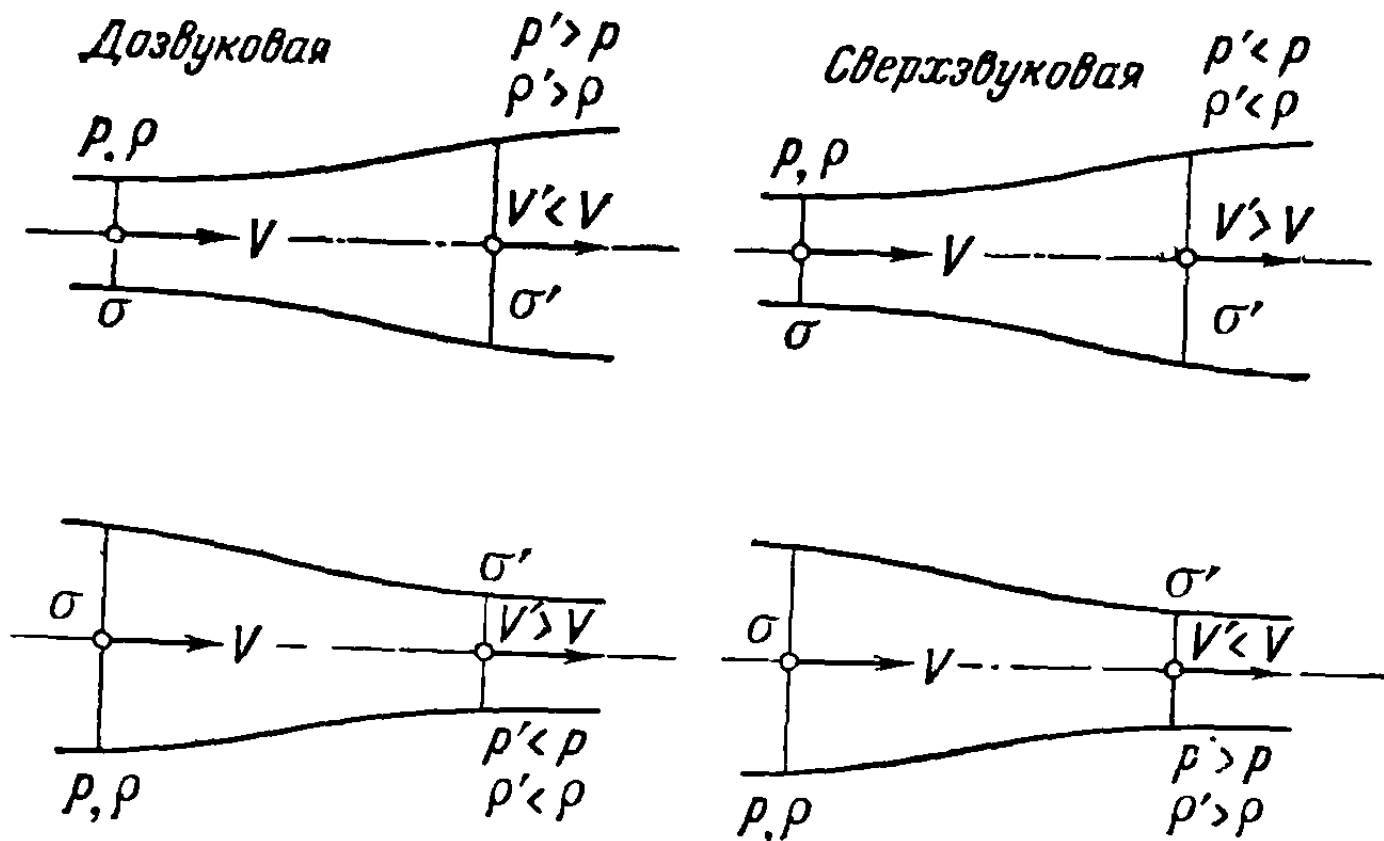
Что касается изменений давления и плотности, то, как очевидно из уравнения (6.2), имеем соотношение

$$\frac{dV}{V} = - \frac{1}{V^2} \frac{dp}{\rho} = - \frac{a^2}{V^2} \frac{dp}{\rho} = - \frac{1}{M^2} \frac{dp}{\rho}, \quad (6.7)$$

показывающее, что эти изменения обратны изменению скорости: увеличение последней соответствует уменьшению давления и плотности.

Формы течения во всех случаях показаны на фигуре 6.2.

Если  $d\sigma = 0$  в какой-нибудь заданной точке, то площадь поперечного сечения будет иметь минимум  $\sigma_m$  или максимум  $\sigma_M$  (фиг. 6.3, а, б); тогда либо  $dV = 0$ , либо  $M = 1$ .

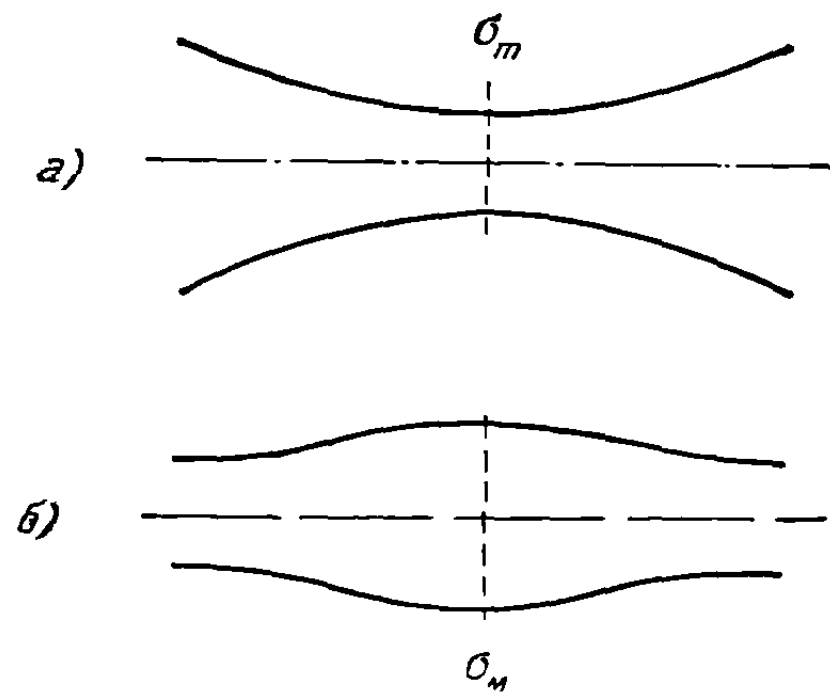


Фиг. 6.2

В сечении, где  $dV = 0$ , скорость имеет максимум (фиг. 6.3, а) или минимум (фиг. 6.3, б), причем в этом случае течение будет дозвуковым вдоль всей длины трубы; или, наоборот, скорость будет иметь минимум (фиг. 6.3, а) или максимум (фиг. 6.3, б), и в этом случае течение будет сверхзвуковым

вдоль всей длины трубы.

Случай  $M=1$  наблюдается только тогда (фиг. 6, 3, а), когда течение, дозвуковое или сверхзвуковое выше по потоку, переходит через критическую скорость при минимальном значении площади поперечного сечения ( $M=1$ ), после чего продолжает следовать расширение или сжатие. Это поперечное сечение называется звуковым проходом или



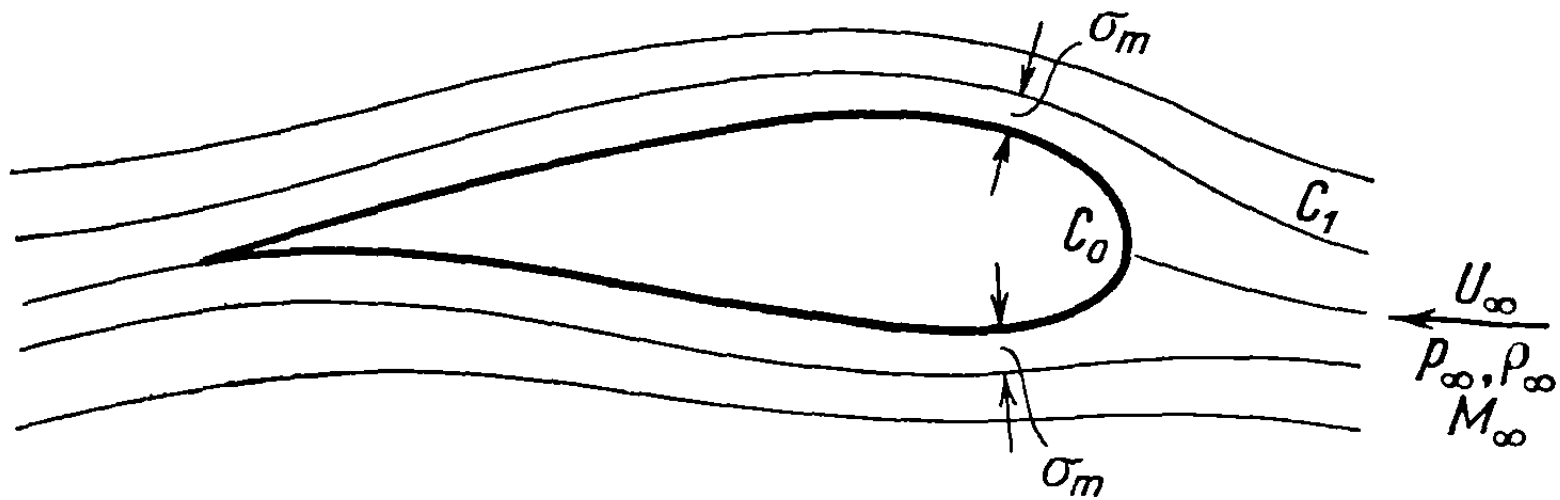
Фиг. 6.3

критическим поперечным сечением и обычно обозначается символом  $\sigma_c$ .

Указанный процесс не может осуществиться в том случае, если площадь поперечного сечения будет иметь максимум  $\sigma_M$  (фиг. 6.3, б), так как скорость звука ( $V = a$ ) в таком поперечном сечении не может быть достигнута; либо потому, что течение вверх по потоку будет дозвуковым, скорость которого  $V$  везде будет меньше скорости звука и тем более при  $\sigma_M$ ; либо, иначе, течение будет сверхзвуковым вверх по потоку, и в этом случае значение  $V$  всегда будет выше скорости звука и тем более при  $\sigma_M$ .

Поэтому можно заключить, что скорость звука ( $V = a$ ) получается только при наличии минимального поперечного сечения, другими словами, в случае сначала суживающихся, а затем расширяющихся трубок.

Отмеченные выше утверждения приложимы также к трубкам тока. Рассмотрим течение вокруг аэродинамического профиля (фиг. 6.4). Линии тока  $C_1$  и  $C_0$  ( $C_0$  совпадает частично с контуром профиля) являются границами трубки тока, внутри которой средняя скорость возрастает с ростом  $U_\infty$ .



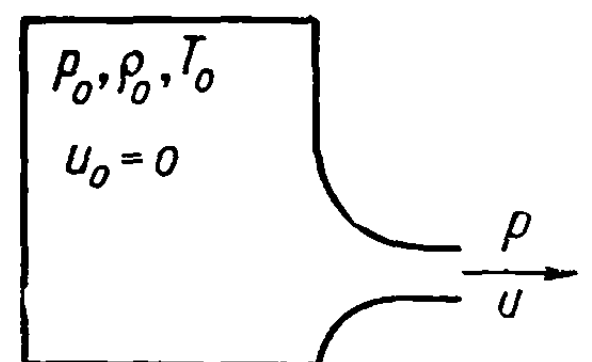
Фиг. 6.4

В наиболее суженном поперечном сечении трубки скорость может достичь критического значения, после чего может продолжаться расширение. На протяжении короткого интервала оба течения, дозвуковое и сверхзвуковое, существуют совместно; из-за этого возникают явления, которых стараются избежать при полете самолета и которые будут рассмотрены особо в последующих главах.

## 6.2. Течение через сопло Лавалья

Рассмотрим резервуар, в котором газ находится в покое при давлении  $p_0$ , плотности  $\rho_0$  и температуре  $T_0$ ; резервуар снабжен насадком, у которого минимальная площадь поперечного сечения соответствует свободному концу (фиг. 6.5).

Газ вытекает через насадок в область, где существует давление  $p$ . Предполагается, что течение изэнтропическое и что давление в выходном сечении насадка равно давлению  $p$  в окружающем пространстве. Поток  $m$  массы, движущейся через насадок, определяется уравнением неразрывности



Фиг. 6.5

$$m = \rho V \sigma. \quad (6.8)$$

Вводя значение  $V$  из уравнения Бернулли (5.1) и предполагая процесс изэнтропическим (2.39), получим уравнение Сен-Венана

$$m = \sigma \sqrt{\frac{2x}{x-1} p_0 \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{x}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]}. \quad (6.9)$$

Предполагая, что внешнее давление  $p$  понижается, начиная от величины  $p_0$ , при которой  $m = 0$ , получим путем дифференцирования по  $p$  очевидное соотношение, которое выражает, что максимальный поток массы будет наблюдаться при внешнем давлении  $p_m$ , определяемом равенством

$$\frac{p_m}{p_0} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}; \quad (6.10)$$

последнее идентично уравнению для критического давления, полученному ранее (5.7):

$$p_m = p_c. \quad (6.11)$$

Следовательно, при наличии выходного сечения с минимальной площадью и внешним давлением  $p = p_m = p_c$  скорость достигает критического значения  $c$ , плотность и температура также достигают своих критических значений  $\rho_c$  и  $T_c$ , и число Маха становится равным единице.

Если давление  $p$  понижается еще более, то можно было бы ожидать, что поток массы при этом также уменьшится; однако в действительности такое предположение не оправдывается.

Поэтому необходимо допустить, что скорость на свободном конце насадка остается постоянной и равной по величине критической скорости; точно так же давление, плотность и температура сохраняют значения  $p_c$ ,  $\rho_c$ ,  $T_c$ , определенные ранее. В результате появляется разность между критическим давлением внутри насадка, достигаемым в сечении с минимальной площадью на свободном конце насадка, и внешним давлением, которое предполагается меньшим предыдущего. При этом образуется струя газа, внутри которой давление изменяется разрывно, переходя через сложную систему волн, которые исследованы позже, от значения  $p_c$  к значению внешнего давления  $p < p_c$ .

Если насадок продолжается далее при постоянно возрастающем поперечном сечении (образуя при этом сначала сужающийся, а потом расширяющийся насадок, называемый соплом Лавалю), то очевидно, что то же критическое давление будет наблюдаться в поперечном сечении с минимальной площадью, после которого следует расширение. Обозначая, как и выше, минимальное поперечное сечение через  $\sigma_c$ , используя соотношения (5.7) и величину критической скорости, которая равна скорости звука при условиях, отвечающих критическим значениям характеристик газа ( $p_c$ ,  $\rho_c$ ,  $T_c$ ), получим, в соответствии с (4.10),

$$c^2 = \kappa \frac{p_c}{\rho_c} = \kappa R T_c, \quad (6.12)$$

значение максимального потока массы

$$m_c = \rho_c \sigma_c c = \rho_0 \sigma_c \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\kappa R T_c} = \sigma_c \rho_0 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\kappa R T_0 \frac{2}{\kappa + 1}}. \quad (6.13)$$

В расходящейся части сопла давление, определяемое площадью поперечного сечения в соответствующем месте, падает ниже критического; отсюда, для того, чтобы давление в выходном сечении было равно внешнему, площадь этого сечения должна иметь определенное значение, выводимое из уравнения (6.9) для потока массы. Давление в заданном сечении расходящегося канала ниже критического давления и определяется площадью этого

сечения, отношение которой к площади наиболее сжатого сечения выражается зависимостью, вытекающей из уравнений (6.9) и (6.13):

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 = \frac{x-1}{2} \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{x}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]} \quad (6.14)$$

Используя полученную формулу, можем решить следующую задачу:

определить сопло Лавалья для заданного потока массы газа  $m$ , вытекающего из резервуара, в котором газ имеет характеристики  $p_0, \rho_0, T_0$ , в другой резервуар, где давление  $p$  ниже критического.

Минимальная площадь  $\sigma_c$  определяется сначала при помощи соотношения (6.13).

Уравнение (6.14) дает изменение площади как функцию отношения давлений  $\frac{p}{p_0}$ .

Чтобы найти площадь выходного сечения  $\sigma_e$ , нужно заменить давление  $p$  в этом уравнении через заданное давление  $p_e$  во втором резервуаре.

Другие сечения будут определяться в функции от давления, которое мы хотим иметь в каждом из них, путем применения уравнения (6.14).

Правую часть этого уравнения можно также выразить через число Маха, соответствующее площади сечения сопла. Так, например, отношение  $\frac{p}{p_0}$  может быть заменено его значением, выведенным из уравнения (5.14):

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right)^{-\frac{x}{x-1}}, \quad (6.15)$$

тогда уравнение (6.14) примет вид

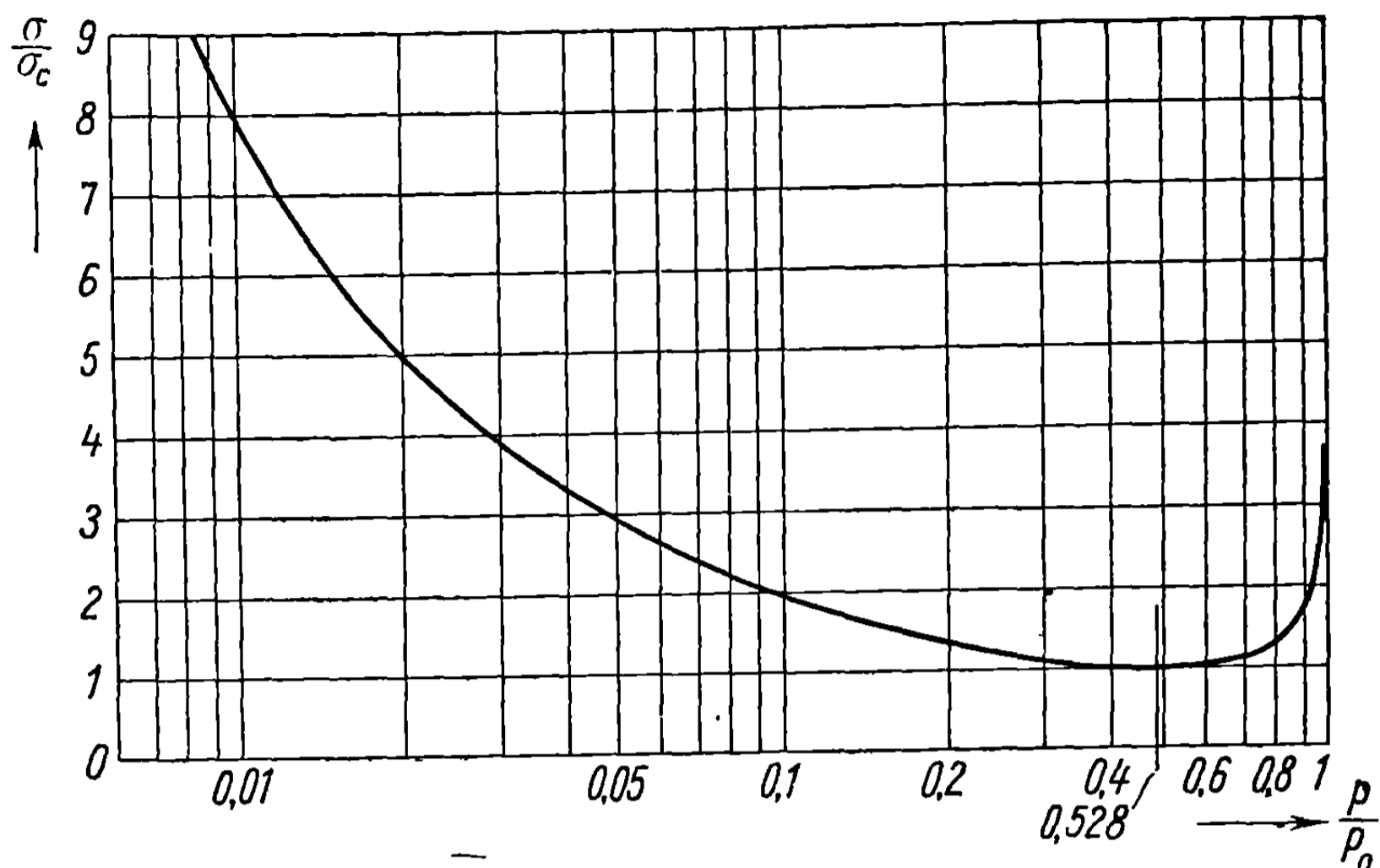
$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{x+1} \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{x+1}{x-1}}. \quad (6.16)$$

Исследование правой части этого равенства показывает, что она принимает минимальное значение (равное единице) при  $M = 1$ .

Уравнение (6.16) пригодно для расчета сопел, в которых должны получаться различные числа Маха. Так, для того, чтобы найти выходное сечение  $\sigma_e$ , нужно заменить число  $M$  в написанном выше уравнении через выходное число Маха  $M_e$ , которое предполагается заданным.

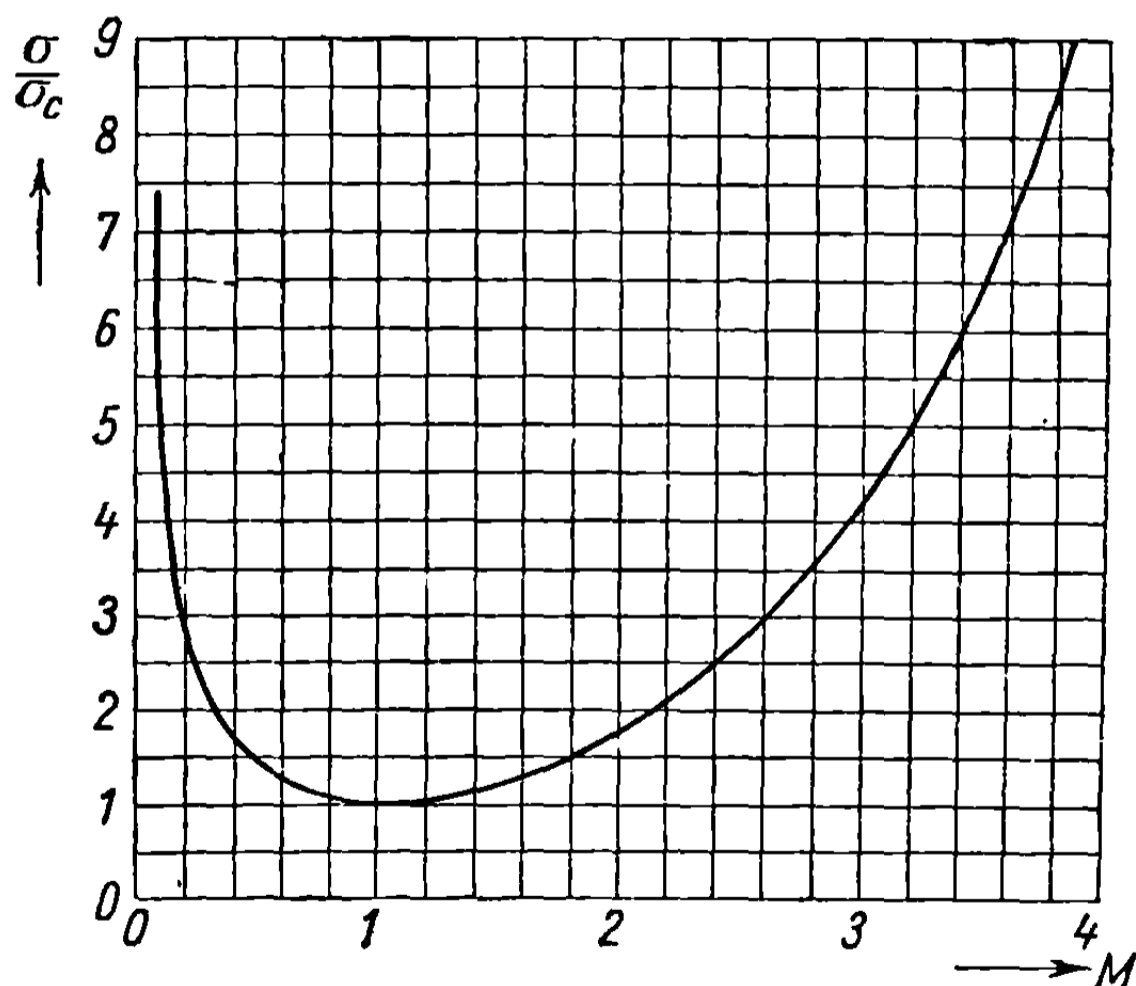
Обратно, чтобы определить  $p_e$  или  $M_e$ , если задано выходное сечение  $\sigma_e$ , можно применить те же уравнения (6.14) и (6.16), хотя вычисления становятся гораздо более трудоемкими; предпочтительнее поэтому графические методы, применяя которые можно нанести раз и навсегда, в соответствии с уравнением (6.14), диаграмму зависимости  $\frac{\sigma}{\sigma_c}$  от  $\frac{p}{p_0}$  или, в соответ-

вии с (6.16), от числа  $M$ , определяя  $\frac{p_e}{p_0}$  и  $M_e$  по абсциссе, соответствующей заданному значению отношения  $\frac{\sigma_e}{\sigma_c}$  (диаграммы фиг. 6.6 и 6.7 построены для случая, когда рассматриваемый газ — воздух; при этом  $\kappa = 1,4$ ).



Фиг. 6.6

Приведенные диаграммы показывают, что для  $\frac{p}{p_0}$  и  $M_e$  получаются, соответственно, два значения: первая пара значений  $\left(\frac{p_{e2}}{p_0} < \frac{p_c}{p_0}, M_e > 1\right)$  соответ-



Фиг. 6.7

ствует расширению в расходящемся канале и, следовательно, сверхзвуковому течению; вторая пара значений  $\left(\frac{p_{e1}}{p_0} > \frac{p_c}{p_0}, M_e < 1\right)$  соответствует возрастанию давления, как в случае несжимаемой жидкости, следовательно,



дозвуковому течению. В обоих случаях максимальный поток массы будет одним и тем же, причем он зависит только от давления, плотности и температуры в резервуаре, т. е. от  $p_0, \rho_0, T_0$ .

**6.2.1. Изменение скорости как функции поперечного сечения.** Исключая  $\frac{p}{\rho_0}$  из уравнений (5.1) и (6.14) и вводя скорость звука для покоящейся жидкости  $a_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}$ , получим последовательно соотношения

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}{\left(\frac{V}{a_0}\right)^2 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\kappa}} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}{\left(\frac{V}{a_0}\right)^2 \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{V}{a_0}\right)^2\right]^{\frac{2}{\kappa-1}}}. \quad (6.17)$$

Пользуясь этим уравнением, можно вычислить скорость, если известна площадь поперечного сечения, или, наоборот, определить площадь, если известна скорость.

**6.2.2. Методы для определения условий течения, когда поток массы меньше максимального.** Если поток массы меньше, чем максимальный поток через сопло Лавала, определенный выше, то течение будет дозвуковым во всех сечениях сопла.

Действительно, в этом случае не будет существовать сечения, в котором достигалась бы критическая скорость, так как поток массы не достигает своего максимального значения и отношение  $\frac{p_c'}{\rho_0}$  в самом узком сечении остается всегда выше критического отношения  $\frac{p_c'}{\rho_0} > \frac{p_c}{\rho_0}$ .

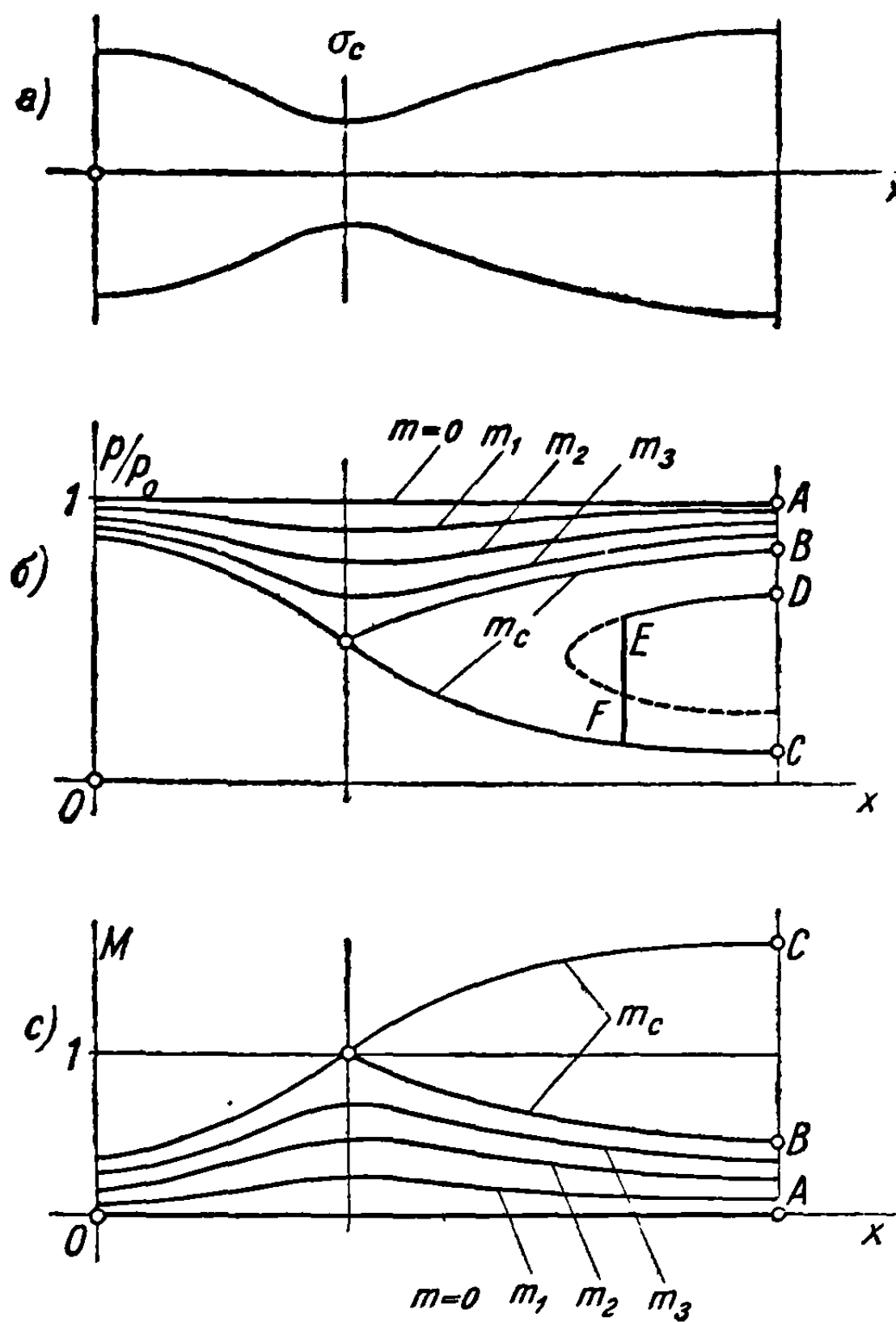
Следовательно, закон, управляющий изменением скоростей и давлений в соплах, будет подобен закону для несжимаемой жидкости, в соответствии с уравнением (6.4) и предыдущими замечаниями, сделанными по тому же поводу.

До тех пор, пока поток массы меньше максимального, обозначаемого символом  $m_c$  ( $m_{\max} = m_c$ ), изменение давления в сопле может определяться по диаграмме на фиг. 6.8б ( $m_0 = 0, m_1, m_2, m_3 \dots$ ); при этом течение будет дозвуковым. Если же достигается максимальный поток массы, то течение в расходящейся части канала будет сверхзвуковым.

Число Маха, получаемое в сопле, подвергается подобному же изменению (фиг. 6.8в): до значения  $m_c$  число  $M < 1$ ; если поток массы становится максимальным ( $m = m_c$ ), то  $M = 1$  в минимальном сечении и  $M > 1$  в расходящейся части сопла.

Используя поток массы  $m$  как параметр, как было принято выше, получим, что давление на выходе будет определяться из предшествующих соотношений через площадь сечения. Так, например, пока течение дозвуковое, давление на выходе и выходное число Маха изменяются от  $A$  до  $B$  (см. фиг. 6.8, б и в). Когда достигается максимальный поток массы ( $M = 1$  в наиболее узком сечении), течение может быть дозвуковым, если давление на выходе соответствует точке  $B$ , или сверхзвуковым, если оно соответ-

ствуется точке  $C$ . Каким будет поток, если давление соответствует точкам, расположенным между  $B$  и  $C$ , мы определим в следующих разделах, после изучения ударных волн.



Фиг. 6.8

В самом деле, если значение внешнего давления определяется точкой  $D$  (фиг. 6,8, б), то изменение давления снаружи вовнутрь, вплоть до точки  $E$ , подчиняется дозвуковому закону. С другой стороны, расширение до сверхзвукового течения наблюдается вплоть до точки  $F$ , в которой оно встречает давление, соответствующее точке  $E$ . Появляется скачок уплотнения, или ударная волна, которая будет исследована позднее.

Остается определить теперь условия течения в сопле, когда давление или число Маха изменяются от  $A$  до  $B$ , т. е. когда поток массы будет меньше максимального. Так как поток массы одинаков в любом сечении, обозначаемом через  $\sigma$ , то, обозначая через  $\sigma_e$  площадь выходного

сечения и применяя уравнение (6.9) к этим сечениям, получим

$$\sigma^2 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \sigma_e^2 \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (6.18)$$

Для определения  $p$  из этого уравнения должны быть проведены сложные вычисления; поэтому более удобно применить практический метод, используя диаграммы на фигурах 6.6 и 6.7.

Рассмотрим поэтому идеальное сопло [1], в минимальном сечении  $\sigma_c$  которого при заданном давлении на выходе и получающемся в результате этого действительном потоке массы получают критические условия ( $M_c = 1, c, p_c, \rho_c, T_c$ ).

В этом случае площадь минимального сечения может быть определена в соответствии с общим уравнением (6.14), в котором оба заданных значения  $\sigma_e$  и  $p_e$  заменяют, соответственно,  $\sigma$  и  $p$ :

$$\left( \frac{\sigma_c}{\sigma_e} \right)^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (6.19)$$

Если сечение  $\sigma_c < \sigma_m$ , где  $\sigma_m$  — минимальное сечение реального сопла, и в рассматриваемом идеальном сопле получается давление на выходе  $p_e$ , то отношение площадей будет определяться диаграммой на фиг. 6.6.

Замечая, что площади сечений реального сопла изменяются с изменением  $\sigma_c$  так же, как площади сечений идеального сопла, так как условия течения впереди наиболее узкого сечения идеального сопла будут те же, что и в реальном сопле, заключаем, что отношение площадей реального сопла к  $\sigma_c$  будет изменяться таким же образом с изменением  $\frac{p}{p_0}$  для значений, больших  $\frac{p_c}{p_0} = 0,528$ , как показано на диаграмме фиг. 6.6.

В сечении с минимальной площадью  $\sigma_m$  отношение давлений  $\frac{p_m}{p_0}$  будет равно отношению давлений, соответствующему отношению площадей  $\frac{\sigma_m}{\sigma_c}$ ; то же самое имеем и для других сечений, откуда получают промежуточные кривые  $m_1, m_2, \dots$  (см. фиг. 6.8).

Аналогично из уравнения (6.16), в котором  $\sigma$  должно быть заменено через  $\sigma_c$  и  $M$  через  $M_e$ , т. е. данными, соответствующими действительному потоку массы, получим соотношение

$$\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_e}\right)^2 = M_e^2 \left[ \frac{2}{x+1} \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right) \right]^{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (6.20)$$

из которого может быть найдено наиболее узкое сечение идеального сопла.

Используя диаграмму на фиг. 6.7, можно установить, что площадь любого сечения действительного сопла изменяется по отношению к  $\sigma_c$  таким же образом, как показано на этой диаграмме; следовательно, для каждого потока массы  $m_1, m_2, \dots$ , от которого зависят частные значения наиболее узких сечений, можно подсчитать числа Маха в каждом сечении и получить кривые, изображенные на фиг. 6.8в.

### 6.3. Течение в трубе с постоянной площадью поперечного сечения при наличии теплопередачи

В качестве иллюстрации изучим условия течения в трубе с постоянной площадью поперечного сечения, через стенки которой происходит передача тепла.

Уравнение неразрывности приводит к равенству

$$\rho V = \text{const}, \quad (6.21)$$

а уравнение давления, в дифференциальной форме (3.22), принимает вид

$$\rho V dV + dp = 0; \quad (6.22)$$

отсюда

$$p + \rho V^2 = p + \rho a^2 M^2 = p + \rho x \frac{p}{\rho} M^2 = p(1 + xM^2) = p_c(1 + x), \quad (6.23)$$

причем  $p_c$  представляет критическое давление в идеальном сечении, где  $M = 1$ . Отметим далее, что теплосодержание (полное, т. е. соответствующее условию адиабатического торможения потока) единицы массы газа возрастает от одного сечения к другому вследствие теплообмена через стенки трубы. В этом случае

$$dh = C_p dT_0 = C_p dT + VdV \quad (6.24)$$

представляет тепло, которое поглощает единица массы газа через стенки между двумя бесконечно близкими сечениями; отсюда путем интегрирования получим полное тепло в заданном сечении

$$h - h_c = C_p (T_0 - T_{0c}) = C_p (T - T_c) + \frac{1}{2} (V^2 - c^2), \quad (6.25)$$

используя, как и выше, для сопоставления идеальное сечение ( $M = 1$ ,  $h = h_c$ ,  $T_0 = T_{0c}$ ,  $T = T_c$ ,  $V = c$ ).

Далее

$$\frac{T}{T_c} = \frac{p}{p_c} \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{p}{p_c} \frac{\rho_c V}{\rho V} = \frac{p}{p_c} \frac{\rho_c a M}{\rho c} = \frac{p}{p_c} M \sqrt{\frac{T}{T_c}}, \quad (6.26)$$

отсюда, в согласии с уравнением (6.23),

$$\frac{T}{T_c} = \frac{(1 + \kappa)^2 M^2}{(1 + \kappa M^2)^2}. \quad (6.27)$$

Подобным же образом определим плотность

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \frac{p}{p_c} \frac{T_c}{T} = \frac{1 + \kappa M^2}{(1 + \kappa)^2 M^2}, \quad (6.28)$$

а применяя уравнение (5.10), получим отношение  $T_0$  к  $T_{0c}$ :

$$\frac{T_0}{T_{0c}} = \frac{T_0}{T} \frac{T}{T_c} \frac{T_c}{T_{0c}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \frac{2}{\kappa + 1} \frac{T}{T_c} = \frac{2(1 + \kappa) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) M^2}{(1 + \kappa M^2)^2}. \quad (6.29)$$

Характеристики течения в любом сечении могут быть найдены из написанных выше уравнений, если известны: поток массы; два из трех параметров  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , определяющих состояние газа в некотором сечении; количество тепла, поглощаемое через стенки между этим сечением и рассматриваемым.

Предполагая, например, что тепло, поглощаемое между сечениями 1 и 2, есть  $Q$ , определим разность температур ( $T_{02} - T_{01}$ ) из уравнения (6.25)

$$Q = h_2 - h_1 = C_p (T_{02} - T_{01}). \quad (6.30)$$

Предполагая далее, что в сечении 1 поток массы (или  $\rho_1 V_1$ ), плотность ( $\rho_1$ ) и температура ( $T_1$ ) известны, будем иметь

$$V_1 = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_1},$$

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\kappa R T_1}},$$

$$T_{01} = T_1 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right). \quad (6.31)$$

Применяя уравнение (6.29), получим соотношение

$$T_{0c} = T_{01} \frac{(1 + \kappa M_1^2)^2}{2(1 + \kappa) \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right) M_1^2}. \quad (6.32)$$

Полагая число Маха в сечении 2 равным  $M_2$  и определяя  $T_{02}$  из соотношения (6.30), можем, как и выше, записать уравнение

$$T_{0c} = T_{02} \frac{(1 + \kappa M_2^2)^2}{2(1 + \kappa) \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2 \right) M_2^2}, \quad (6.33)$$

из которого находим число  $M_2$ .

Из уравнений (6.23), (6.27) и (6.28) получаются соотношения:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \kappa M_1^2}{1 + \kappa M_2^2},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1 + \kappa M_1^2)^2 M_2^2}{(1 + \kappa M_2^2)^2 M_1^2},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \kappa M_2^2}{1 + \kappa M_1^2} \frac{M_1^2}{M_2^2}. \quad (6.34)$$

Следует заметить, что при рассмотрении задачи мы пренебрегли потерями, обусловленными трением, вихрями и т. д., считая процесс обратимым.

Но условия вниз по потоку, как они подсчитаны выше, могут не соответствовать действительным физическим условиям; в этом случае предположения, касающиеся формы течения и начальных условий, следует пересмотреть, чтобы получить совмещение расчетных и экспериментальных данных [2].

Проведенные рассуждения могут быть легко распространены на случай труб с переменной площадью поперечного сечения; нам представляется не нужным давать другие примеры, так как в намерение автора входило только указать метод вычислений для задач, когда происходит обмен тепла с окружающей средой [3].

## 7. ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

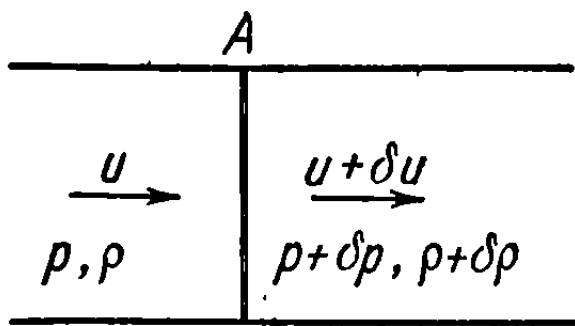
Выше было показано, что перемещающееся плоское возмущение превращается через некоторый промежуток времени в поверхность разрыва для скорости, давления, плотности и температуры. Этот разрыв называется

скачком уплотнения, или ударной волной. Если, однако, разрыв имеет малую интенсивность, то он называется простой волной.

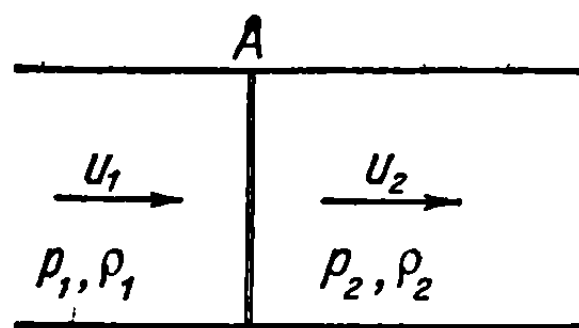
В следующих разделах изучены условия, при которых в установившемся течении появляются простые или ударные волны.

### 7.1. Простая нормальная волна

Рассмотрим установившееся течение с давлением  $p$ , плотностью  $\rho$  и скоростью  $u$ , встречающее на своем пути неподвижную поверхность  $A$ , нормальную к направлению течения, после прохождения через которую параметры течения становятся равными  $p + \delta p$ ,  $\rho + \delta \rho$ ,  $u + \delta u$  (фиг. 7.1).



Фиг. 7.1



Фиг. 7.2

Если предположить количества  $\frac{\delta p}{p}$ ,  $\frac{\delta \rho}{\rho}$ ,  $\frac{\delta u}{u}$  очень малыми, то поверхность будет называться *разрывом малой интенсивности*. В этом случае применимы общие уравнения в дифференциальной форме (если предположить, что приращения  $\delta p$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta u$  конечны, но достаточно малы):

$$u \delta u + \frac{\delta p}{\rho} = 0,$$

$$\frac{\delta u}{u} + \frac{\delta \rho}{\rho} = 0,$$

$$u \delta u + C_p \delta T = 0. \quad (7.1)$$

Из первого и второго уравнений вытекает

$$u^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} \approx \frac{dp}{d\rho} = a^2, \quad (7.2)$$

а из первого и третьего, принимая также во внимание (2.296), получим соотношение

$$\frac{\delta p}{\rho} = C_p \delta T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \delta \left( \frac{p}{\rho} \right), \quad (7.3)$$

показывающее, что при переходе от конечных малых приращений к дифференциалам изменение состояния будет изэнтропическим.

Следовательно, разрыв малой интенсивности может существовать, если скорость  $u$  равна скорости звука. В этом случае изменение состояния может рассматриваться как изэнтропическое, что показывает уравнение (7.3).

Если газу во всем занимаемом им пространстве сообщить дополнительную скорость  $-u = -a$ , то с левой стороны от поверхности  $A$  газ будет

оставаться неподвижным, в то время как с правой стороны частицы газа будут двигаться со скоростью  $\delta u$ ; следовательно, поверхность, отделяющая покоящийся газ от движущегося, будет перемещаться со скоростью звука.

Таким образом очевидно, что простые волны являются также акустическими волнами.

## 7.2. Нормальная ударная волна

Примем заранее, что внутри газа существует неподвижная поверхность разрыва  $A$ , при пересечении которой давление, плотность и скорость переходят от значений  $p_1, \rho_1, u_1$  вверх по потоку к значениям  $p_2, \rho_2, u_2$  в нижнем течении (фиг. 7.2). Можно применить общие теоремы и уравнения для определения конечных изменений механических величин, а именно теорему импульсов, уравнение неразрывности и уравнение давления.

Соответственно, будем иметь:

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; \quad (7.4a)$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad (7.4b)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT_0. \quad (7.4в)$$

Уравнение давления не изменяется при переходе через поверхность разрыва, так как температура  $T_0$  в точках, где скорость равна нулю, остается одинаковой с обеих сторон поверхности, в соответствии с уравнением энергии (3.60a).

Из первого и второго уравнений имеем

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}; \quad (7.5)$$

умножая обе части последнего равенства на  $(u_1 + u_2)$ , получим

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1 u_2}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2} = (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right); \quad (7.6)$$

подставляя вместо  $u_1^2 - u_2^2$  выражение этой разности, выведенное из уравнения давления, получим в конечном результате равенство

$$(p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right). \quad (7.7)$$

Это соотношение может быть преобразовано к специальным формам, называемым уравнениями Гюгонио — Ранкина:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{1 + \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}, \quad (7.8a)$$

если давления выражаются через отношение плотностей или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_1} + 1}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_2}{\rho_1}} = \frac{1 + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{p_2 - p_1}{\rho_1}}{1 + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{p_2 - p_1}{\rho_1}} = \frac{u_1}{u_2}, \quad (7.86)$$

если плотности и скорости выражаются через отношение давлений.

Следовательно, для того, чтобы ударная волна могла существовать, как это гипотетически предполагалось, изменение состояния при переходе через ударную волну должно подчиняться закону, отличному от закона изэнтропического изменения, а именно закону, выражаемому уравнениями (7.8а). Это означает, что в ударной волне происходит *диссипация механической энергии*, которая превращается в тепло, так как энтропия возрастает.

Скачок скорости при переходе через ударную волну может быть найден с помощью уравнения давления

$$u_1 - u_2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \right) = \frac{2a_0^2}{\kappa-1} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{2a_0^2}{\kappa-1} \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2}, \quad (7.9)$$

откуда, имея также в виду уравнение (7.5), получим соотношение

$$(u_1 - u_2) - \frac{2\kappa}{\kappa-1} (u_1 - u_2) + \frac{2a_0^2}{\kappa-1} \frac{(u_1 - u_2)}{u_1 u_2} = 0. \quad (7.10)$$

Вводя критическую скорость (5.4) и сокращая на общий множитель  $(u_1 - u_2)$ , получим важный результат:

$$u_1 u_2 = \frac{2a_0^2}{\kappa+1} = c^2; \quad (7.11)$$

другими словами, произведение скоростей  $u_1$  и  $u_2$  равно квадрату критической скорости.

Полезно также знать соотношение между числами Маха  $M_1$  и  $M_2$ , перед и за ударной волной.

Из уравнений (5.4) и (5.9) имеем

$$(\kappa-1) + \frac{2}{M_1^2} = (\kappa+1) \left( \frac{c}{u_1} \right)^2, \quad (7.12a)$$

$$(\kappa-1) + \frac{2}{M_2^2} = (\kappa+1) \left( \frac{c}{u_2} \right)^2, \quad (7.126)$$

откуда, применяя также выражение (7.11), получим уравнение, связывающее  $M_2$  и  $M_1$ :

$$\left[ \frac{\kappa-1}{2} + \frac{1}{M_1^2} \right] \left[ \frac{\kappa-1}{2} + \frac{1}{M_2^2} \right] = \left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^2. \quad (7.13)$$



Уравнение (7.8а) может быть подобным же образом легко преобразовано, если принять во внимание уравнение неразрывности и равенство (7.11):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} \left(\frac{u_1}{c}\right)^2 - 1}{\frac{x+1}{x-1} - \left(\frac{u_1}{c}\right)^2}; \quad (7.14)$$

далее, заменяя отношение  $\left(\frac{c}{u_1}\right)$  его значением, выведенным из уравнения (7.12а), получим соотношение, в которое введено число Маха:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2x}{x+1} M_1^2 - \frac{x-1}{x+1} \quad (7.15)$$

Аналогичным образом, исходя из уравнения (7.8б) и имея в виду уравнение (7.15), найдем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(x+1)M_1^2}{(x-1)M_1^2 + 2} = \frac{x+1}{(x-1) + \frac{2}{M_1^2}}. \quad (7.16)$$

Относительное возрастание давления за ударной волной может быть выражено равенством, выведенным из уравнения (7.15):

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2x}{x+1} (M_1^2 - 1). \quad (7.17)$$

Из уравнения (5.2а) очевидно, что если скорость  $u_1$  превышает критическую скорость  $c$ , то  $a_1 < c$  и, следовательно,  $M = \frac{u_1}{a_1} > 1$ . В этом случае из уравнения (7.17) следует, что давление возрастает при переходе через ударную волну.

Так как в силу уравнения (7.11)  $u_2 < c$ , то  $a_2 > c$ , а поэтому  $M_2 < 1$ ; таким образом, течение за нормальной ударной волной будет дозвуковым.

**7.2.1. Изменение энтропии.** Выше было установлено, что сверхзвуковой поток перед нормальной ударной волной преобразуется в дозвуковой поток за ней. Этот результат находится в полном согласии со вторым законом термодинамики, в силу которого энтропия при любом процессе должна оставаться постоянной или возрастать. В самом деле, применяя уравнение энтропии (2.38) к газу перед и за волной и имея в виду уравнения (7.15) и (7.16), получим соотношение

$$S_2 - S_1 = C_\tau \ln \frac{p_2 \left(\frac{p_1}{\rho_2}\right)^x}{p_1 \left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^x} = C_\tau \ln \left( \frac{2x}{x+1} M_1^2 - \frac{x-1}{x+1} \right) \left[ \frac{(x-1)M_1^2 + 2}{(x+1)M_1^2} \right]^x; \quad (7.18)$$

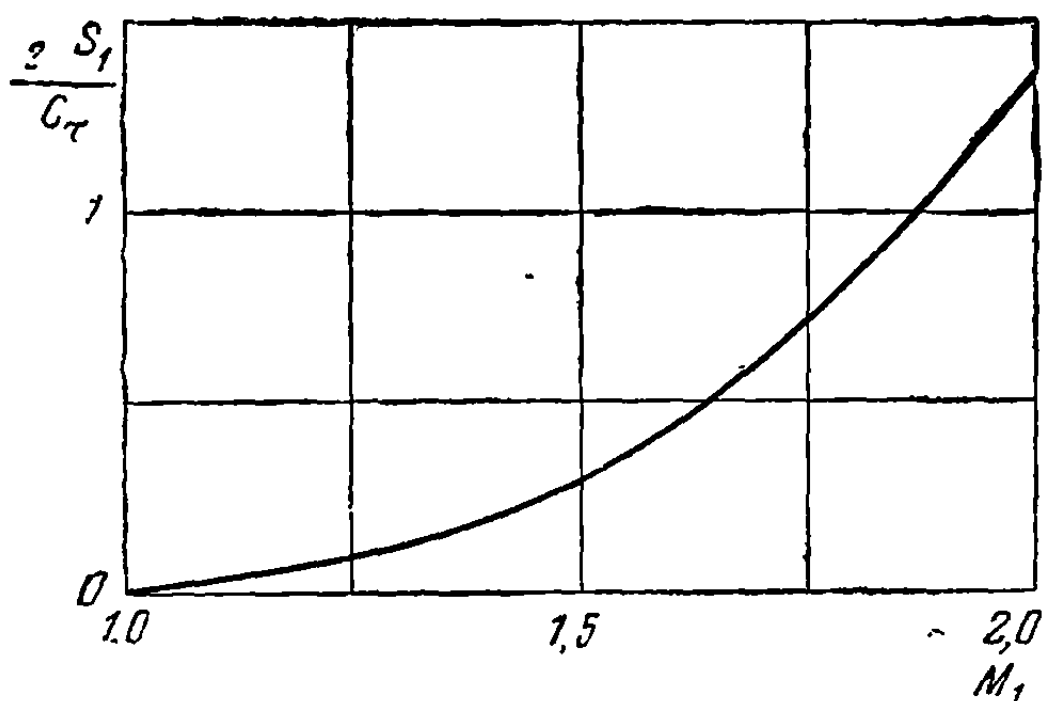
полагая далее

$$M_1^2 = 1 + \epsilon \quad (7.19)$$

и разлагая правую часть равенства (7.18) в ряд по степеням  $\epsilon$ , которое предполагается очень малым, находим последовательно:

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= C_\tau \ln \left( 1 + \frac{2x}{x+1} \epsilon \right) \left( 1 + \frac{x-1}{x+1} \epsilon \right)^x (1 + \epsilon)^{-x} = \\ &= C_\tau \left[ \ln \left( 1 + \frac{2x}{x+1} \epsilon \right) + x \ln \left( 1 + \frac{x-1}{x+1} \epsilon \right) - x \ln (1 + \epsilon) \right] \approx \quad (7.20) \\ &\approx C_\tau \frac{2x(x-1)}{(x+1)^2} \frac{\epsilon^3}{3} + \dots = C_\tau \frac{2x(x-1)}{(x+1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что энтропия возрастает при положительном  $\epsilon$ ; поэтому поток будет сверхзвуковым перед волной и дозвуковым за волной; ударная волна



Фиг. 7.3

будет, следовательно, волной сжатия, или, как ее иначе называют, скачком уплотнения.

Обратный переход от потока с числом  $M_1 < 1$  (дозвукового) к потоку с числом  $M_2 > 1$  (сверхзвуковому) невозможен, так как в этом случае  $\epsilon$  будет отрицательно, и изменение энтропии также отрицательно, что противоречит второму закону термодинамики. Отсюда следует, что скачки разрежения не могут существовать.

Приведенные выше вычисления показывают также, что изменение состояния при переходе через волну сжатия будет необратимым.

Точный подсчет с помощью уравнения (7.18) показывает, что изменение энтропии в зависимости от числа  $M_1$  будет таким, как показано на фиг. 7.3.

Напомним, что энтропия возрастает, как  $\epsilon^3$  (7.20), и что при малых значениях  $\epsilon$  (разрыв малой интенсивности или простая волна) процесс может рассматриваться как изэнтропический, что действительно может быть выведено непосредственно из уравнения (7.8а). В самом деле, заменяя  $\rho_2$  в этом уравнении через

$$\rho_2 = \rho_1 + \delta\rho, \quad (7.21)$$

получим соотношения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{x+1}{2} \frac{\delta\rho}{\rho_1}}{1 - \frac{x-1}{2} \frac{\delta\rho}{\rho_1}} = 1 + x \frac{\delta\rho}{\rho_1} + \frac{x(x-1)}{1.2} \frac{(\delta\rho)^2}{\rho_1^2} + x \left( \frac{x-1}{2} \right)^2 \frac{(\delta\rho)^3}{\rho_1^3} + \dots \quad (7.22a)$$

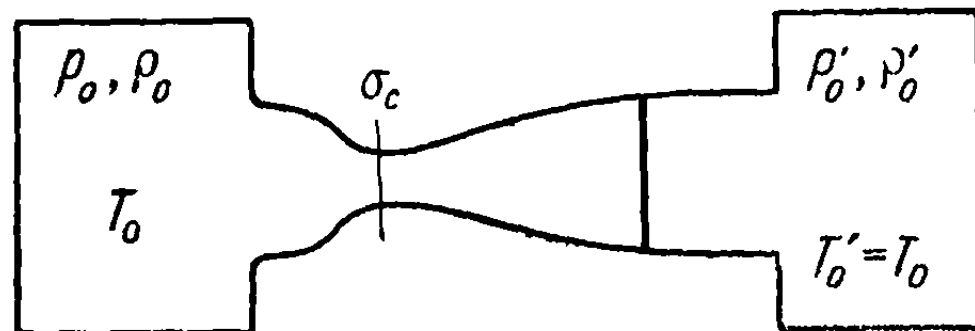
С другой стороны, из закона изэнтропического преобразования имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left( 1 + \frac{\delta p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\delta p}{p_1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{(\delta p)^2}{p_1^2} + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{1}{\gamma^3} \frac{(\delta p)^3}{p_1^3} + \dots, \end{aligned} \quad (7.22b)$$

что показывает идентичность первых трех членов разложений (7.22а) и (7.22б). Только четвертые члены разложений дают различие в изменении состояния при переходе через ударную волну по сравнению с изэнтропическим процессом:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{ударн}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{изэнтр}} = \frac{x(x^2 - 1)(\delta\rho)^3}{12\rho_1^3} + \dots; \quad (7.23)$$

подсчитанная разность очень мала. По этой причине в случае простой волны процесс может рассматриваться как изэнтропический; отмеченный результат совпадает с тем, что было получено прямым путем (7.3).



Фиг. 7.4

**7.2.2. Потеря напора при переходе через ударную волну.** Возрастание энтропии за ударной волной показывает, что механическая энергия рассеивается, превращаясь в тепло. Одновременно наблюдается потеря давления, так что если давление в верхнем резервуаре было  $p_0$ , то после того как поток пройдет через сопло (фиг. 7.4) и возникнет ударная волна, получающееся за ударной волной давление будет соответствовать другому давлению торможения, как если бы в воображаемом резервуаре вниз по потоку было давление  $p'_0$ , меньшее  $p_0$ . Для определения давления в воображаемом нижнем резервуаре следует иметь в виду, что энтальпия остается постоянной; таким образом, из уравнения (3.60а) имеем

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p'_0}{\rho'_0},$$

$$T'_0 = T_0. \quad (7.24)$$

Из уравнений (2.34) и (2.37), в которых следует положить  $T = T_0$ , вытекает, что разность энтропий в резервуарах, которая равна возрастанию энтропии, создаваемому ударной волной, а именно  $S_2 - S_1$ , может быть выражена соотношением

$$S'_0 - S_0 = R \ln \frac{p_0}{p'_0} = C_\tau \ln \left(\frac{p_0}{p'_0}\right)^{x-1} = S_2 - S_1, \quad (7.25)$$

из которого выводится метод определения возрастания энтропии путем измерения давлений  $p_0$  и  $p'_0$ .

С другой стороны, нужно отметить, что процесс перед и за ударной волной будет изэнтропическим; в этом случае

$$\frac{p_2}{\rho_2^x} = \frac{p'_0}{\rho_0'^x},$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^x} = \frac{p_0}{\rho_0^x}; \quad (7.26)$$

отсюда, используя также равенство (7.24), получим

$$\frac{p_2}{\rho_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^x = \frac{p_0'}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho_0'} \right)^x = \left( \frac{p_0}{\rho_0'} \right)^{x-1}, \quad (7.27)$$

что приводит к конечному результату путем применения уравнений (7.15) и (7.16):

$$\frac{p_0}{\rho_0'} = \left( \frac{2x}{x+1} M_1^2 - \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \left( \frac{(x-1)M_1^2 + 2}{(x+1)M_1^2} \right)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (7.28)$$

Если  $M_1$  мало отличается от единицы, потеря напора будет мала. Действительно, в соответствии с уравнениями (7.20) и (7.25),

$$\ln \frac{p_0}{\rho_0'} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{2x}{(x+1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3} + \dots = k \ll 1; \quad (7.29)$$

отсюда

$$\frac{p_0 - p_0'}{p_0} = 1 - e^{-k} \approx \frac{2x}{(x+1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3} + \dots \quad (7.30)$$

Хотя в правой части равенства (7.30) стоит очень малая величина, абсолютная разность давлений  $(p_0 - p_0')$  может быть заметна и потребует значительной энергии для своего образования. Так, полагая  $M_1^2 - 1 = 0,5$ , получим  $p_0 - p_0' = 0,0202 p_0 \approx 208 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$ , что представляет ощутимую величину.

Ниже рассмотрены специальные случаи применения сделанных выводов.

### 7.3. Косая ударная волна

В этом разделе тем же способом, как в случае нормальной ударной волны, показано, что может образоваться косая ударная волна, и определены условия ее возникновения.

Пусть  $\beta$  — угол, составляемый волной с начальным направлением потока  $u_1$ ;  $\theta$  и  $w_2$ , соответственно, угол отклонения и величина скорости за ударной волной (фиг. 7.5).

Компоненты этой скорости будут

$$u_2 = w_2 \cos \theta, \quad v_2 = w_2 \sin \theta. \quad (7.31)$$

Угол  $\theta$  может быть выражен через эти компоненты:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_2}{u_2}. \quad (7.32)$$

Рассмотрим компоненты скорости вдоль нормали и в направлении, параллельном плоскости ударной волны; получим соответственно:

$$\begin{aligned} u_{1n} &= u_1 \sin \beta, \quad u_{1t} = u_1 \cos \beta; \\ u_{2n} &= w_2 \sin (\beta - \theta) = u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta; \\ n_{2t} &= w_2 \cos (\beta - \theta) = u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Чтобы определить значения четырех неизвестных  $w_2$ ,  $\theta$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_2$  или  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_2$ , нужны четыре уравнения, которые будут выведены из уравнения неразрывности, теоремы об импульсе и уравнения давления. Рассмотрим *контрольный* прямоугольник  $C$  (фиг. 7.5); уравнение неразрывности при переходе через ударную волну ( $\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}$ ) может быть написано, в силу (7.31), следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 \sin \beta &= \rho_2 w_2 \sin (\beta - \theta) = \\ &= \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Из уравнения импульса в проекции на нормаль и на направление, параллельное плоскости ударной волны, получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_1 u_1^2 \sin^2 \beta &= \rho_2 + \rho_2 w_2^2 \sin^2 (\beta - \theta) = \rho_2 + \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta)^2, \\ \rho_1 u_1^2 \sin \beta \cos \beta &= \rho_2 w_2^2 \sin (\beta - \theta) \cos (\beta - \theta) = \\ &= \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta) (u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Уравнение давления, примененное к газу с обеих сторон ударной волны, содержит одну и ту же константу, потому что энтальпия остается постоянной для всего газа:

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} w_2^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (7.36)$$

Из уравнения (7.34) и второго уравнения (7.35) легко вывести соотношение

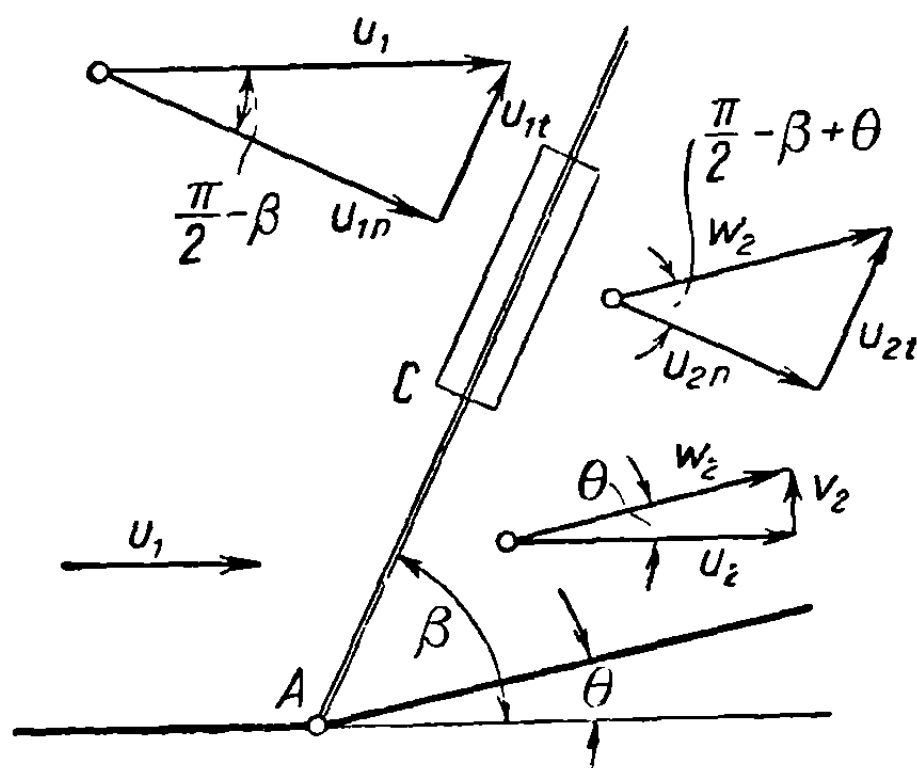
$$u_1 \cos \beta = w_2 \cos (\beta - \theta) = u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta, \quad (7.37)$$

из которого следует, что скорости в направлении, параллельном ударной волне, будут равны:

$$u_{1t} = u_{2t} = u_t; \quad (7.38a)$$

значение угла  $\beta$  как функции скоростей получается из того же уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_1 - w_2 \cos \theta}{w_2 \sin \theta} = \frac{u_1 - u_2}{v_2}. \quad (7.38b)$$



Фиг. 7.5

Отметим, что если рассматривать компоненты скоростей по нормали к косой ударной волне (7.33) и принять в расчет равенства (7.38а), то уравнения неразрывности, импульса и давления сведутся к формам уравнений для нормальной ударной волны (7.4), в которых  $u_1$  и  $u_2$  заменены на  $u_{1n}$  и  $u_{2n}$ :

$$\rho_1 + \rho_1 u_{1n}^2 = \rho_2 + \rho_2 u_{2n}^2;$$

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n};$$

(7.39)

$$\frac{1}{2} u_{1n}^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_{2n}^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{u_t^2}{2}.$$

Отсюда следует, что уравнения Гюгонио — Ранкина (7.8а) и (7.8б) справедливы и для косой ударной волны:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_1}};$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_1} + 1}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \frac{p_2}{\rho_1}}, \quad (7.40)$$

как и соотношения (7.22а) и (7.23). Полагая

$$M_{1n} = \frac{u_{1n}}{a_1} = \frac{u_1}{a_1} \sin \beta = M_1 \sin \beta,$$

(7.41)

$$M_{2n} = \frac{u_{2n}}{a_2} = \frac{u_2}{a_2} \sin(\beta - \theta) = M_2 \sin(\beta - \theta),$$

можно установить соотношения для косых ударных волн, подобные полученным для нормальных ударных волн, заменяя  $M_1$  и  $M_2$  в полученных ранее уравнениях соответственно через  $M_{1n}$  и  $M_{2n}$ .

По аналогии с равенствами (7.15) и (7.16) получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad (7.42а)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{2}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \quad (7.42б)$$

В результате вместо уравнения (7.17) будем иметь

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1). \quad (7.43)$$

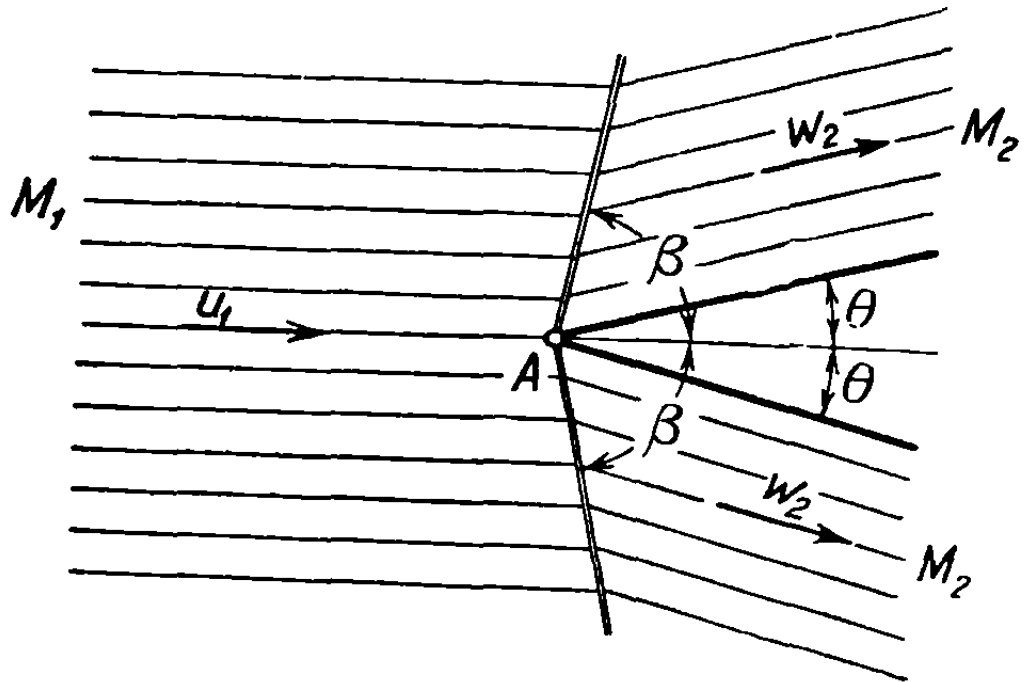
Соотношение между  $M_{1n}$  и  $M_{2n}$ , соответствующее уравнению (7.13) для случая нормальной ударной волны, выразится равенством

$$\left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right) \left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_2^2 \sin^2(\beta - \theta)} \right) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2. \quad (7.44)$$

Поступая таким же образом, по аналогии с уравнением (7.18), запишем уравнение для энтропии

$$S_2 - S_1 = C_\tau \ln \left( \frac{2x}{x+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{x-1}{x+1} \right) \left[ \frac{(x-1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(x+1) M_1^2 \sin^2 \beta} \right]^x. \quad (7.45)$$

Характеристики течения за ударной волной могут быть определены из написанных выше уравнений, при этом известными параметрами задачи будут либо  $M_1$  и  $\theta$ , либо в некоторых случаях  $M_1$  и  $\beta$ . Обычно рассматриваются течения вдоль стенки, так что отклонение  $\theta$  оказывается заданным; если предполагается, что препятствие имеет впереди заостренную форму, то задается значение угла  $2\theta$  между касательными в передней кромке (фиг. 7.6).



Фиг. 7.6

Если предположить, что  $M_1$  и  $\theta$  заданы, то в качестве третьего параметра в написанных выше уравнениях появляется еще угол  $\beta$ . С другой стороны, если будут заданы  $M_1$  и  $\beta$ , то останется определить  $\theta$ , поскольку этот угол будет также входить в уравнения. В обоих случаях требуется установить дополнительное соотношение.

Для этой цели, возвращаясь к уравнению давления (7.36) и используя уравнение (5.4), можно написать

$$\frac{x-1}{2} + \left( \frac{a_1}{u_1} \right)^2 = \left( \frac{a_0}{u_1} \right)^2 = \frac{x+1}{2} \left( \frac{c}{u_1} \right)^2. \quad (7.46)$$

Аналогично тому, как было получено соотношение (7.10), исходя из уравнений (7.39), получим равенство

$$\begin{aligned} u_{1n} - u_{2n} + \frac{2x}{x-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1 u_{1n}} - \frac{p_2}{\rho_2 u_{2n}} \right) &= \left( \frac{2a_0^2}{x-1} - u_t^2 \right) \left( \frac{1}{u_{1n}} - \frac{1}{u_{2n}} \right) = \\ &= - \left( u_{1n}^2 + \frac{2a_1^2}{x-1} \right) \frac{u_{1n} - u_{2n}}{u_{1n} u_{2n}}; \end{aligned} \quad (7.47a)$$

в соответствии с уравнением (7.5), выводя общий множитель  $u_{1n} - u_{2n}$  и производя требуемые упрощения, получим

$$a_1^2 + \frac{x-1}{2} u_{1n}^2 = \frac{x+1}{2} u_{1n} u_{2n}. \quad (7.47b)$$

Заменяя  $u_{1n}$  выражением (7.33) и  $u_{2n}$  выражением, которое может быть выведено из уравнений (7.31), (7.32) и (7.37),

$$u_{2n} = w_2 \sin(\beta - \theta) = v_2 \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \theta} = u_1 \operatorname{tg}(\beta - \theta) \cos \beta, \quad (7.48)$$

получим после простых алгебраических преобразований соотношение между начальным числом Маха ( $M_1$ ) и углами  $\beta$  и  $\theta$ .

$$\frac{1}{M_1^2} = \frac{x-1}{2} \sin^2 \beta + \frac{x+1}{2} \sin \beta \cos \beta \operatorname{tg}(\beta - \theta) = \sin^2 \beta - \frac{x+1}{2} \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} = \sin^2 \beta - \frac{x+1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \theta}, \quad (7.49)$$

или в другой форме, более удобной для некоторых практических вычислений:

$$\operatorname{ctg} \theta = \left( \frac{x+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta. \quad (7.50)$$

Чтобы определить угол  $\beta' = \beta - \theta$ , образуемый ударной волной с направлением скорости  $w_2$  течения ниже ударной волны, пользуясь уравнением неразрывности, запишем

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta}; \quad (7.51)$$

заменяя отношение  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  его значением из уравнения (7.42б), получим равенство

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{x+1} \left( \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{x-1}{2} \right). \quad (7.52a)$$

Последнее равенство может быть записано в форме

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)} = \frac{2}{x+1} \left( \frac{1}{M_2^2 \sin^2(\beta - \theta)} + \frac{x-1}{2} \right). \quad (7.52b)$$

Значение скорости за ударной волной определяется уравнением (7.37), из которого в соответствии с уравнениями (7.32) и (7.49) получаются следующие соотношения для компонент скорости  $u_2$  и  $v_2$ :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta} = 1 - \frac{2}{x+1} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right); \quad (7.53a)$$

$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta} = \frac{2}{x+1} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right) \operatorname{ctg} \beta. \quad (7.53b)$$

Чтобы выразить разность давлений в обычной форме, будем исходить из первого и второго уравнений (7.39) и, производя последовательные замены, получим

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{q_1} &= \frac{\rho_1 u_{1n}^2 - \rho_2 u_{2n}^2}{\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2} = 2 \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} = \frac{2}{1 + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \theta} = \\ &= \frac{4}{x+1} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right). \end{aligned} \quad (7.54)$$



7.3.1. Условия течения за ударной волной. Если характеристики течения определяются как функции заданных параметров  $M_1$  и  $\beta$ , то решение будет простым; если же будут заданы параметры  $M_1$  и  $\theta$ , то вычисления становятся очень трудоемкими, так как уравнение (7.50) является уравнением третьей степени относительно  $\operatorname{tg} \beta$ .

В этом случае удобнее решать задачу графическим методом.

При заданном угле отклонения  $\theta$  может быть построена кривая  $M_1 = f(\beta)$ ; сетка таких кривых, каждая из которых соответствует определенному  $\theta$ , изображена на графике 1. Из рассмотрения этого графика очевидно, что вертикальные линии, соответствующие заданному  $M_1$ , могут пересекать кривую  $M_1 = f(\beta)$ , при  $\theta = \operatorname{const}$ , в двух точках, могут касаться ее или совсем не иметь с ней общих точек. Это значит, что в первом случае существует два значения для  $\beta$ , при которых образуется плоская ударная волна, во втором — одно значение, а в третьем — плоская ударная волна вообще не может образоваться; в последнем случае ударная волна отделяется и дает начало другим, более сложным волнам, которые рассмотрены ниже.

Чтобы представить диаграммы более отчетливо, на графике 1 нанесены только кривые  $M_1 = f(\beta)$  при  $\theta = \operatorname{const}$ , с помощью которых определяется  $\beta$  при заданных значениях  $M_1$  и  $\theta$ . Остальные характеристики могут быть определены более точно путем вычислений<sup>1</sup>.

Так, например, при  $M_1 = 2,5$  и  $\theta = 12^\circ$  получаются два значения для  $\beta$ :  $\beta' = 33,8^\circ$  и  $\beta'' = 84,6^\circ$ . Применяя уравнения (7.42) и (7.44), получим:

$$\begin{aligned} \frac{p_2'}{p_1} &= 2,10, \quad M_2' = 2,02; \\ \frac{p_2''}{p_1} &= 7, \quad M_2'' = 0,56. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Первые результаты соответствуют сверхзвуковому течению, вторые — дозвуковому.

Таким образом, при заданных  $M_1$  и  $\theta$  течение за ударной волной может быть сверхзвуковым и дозвуковым.

Чтобы определить значение  $\beta$ , соответствующее  $M_2 = 1$ , нужно исключить  $(\beta - \theta)$  из уравнений (7.44) и (7.52а), в которых, разумеется, надо положить  $M_2 = 1$ ; обозначая искомый угол через  $\beta_s$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \beta_s \cos^2 \beta_s - \left( \sin^2 \beta_s - \frac{1}{M_1^2} \right) \left[ 1 - \frac{2}{x+1} \left( \sin^2 \beta_s - \frac{1}{M_1^2} \right) \right] = \\ = \frac{1}{M_1^2} \cos^2 \beta_s; \end{aligned} \quad (7.56)$$

отсюда находим [4]

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta_s = \frac{1}{x M_1^2} \left[ \frac{x+1}{4} M_1^2 - \frac{3-x}{4} + \right. \\ \left. + \sqrt{(x+1) \left( \frac{9+x}{16} - \frac{3-x}{8} M_1^2 + \frac{x+1}{16} M_1^4 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.57)$$

<sup>1</sup> Кривые  $M_2 = \operatorname{const}$  приведены на графике 1 для контроля расчетов.

Мы установили, что если  $M_1$  и  $\theta$  заданы, то для  $\beta$  получаются, вообще говоря, два значения:  $\beta'$  и  $\beta''$ ; если каждое из них больше  $\beta_s$ , которое определено написанным выше равенством, то течение будет, дозвуковым за ударной волной. Вообще течение будет сверхзвуковым для меньших значений  $\beta$  и дозвуковым для больших; в дальнейшем показано что оба значения могут соответствовать дозвуковому потоку ниже ударной волны.

Заслуживает внимания факт, что при  $M_1 = 1$  написанное выше соотношение приводит к результату  $\beta_s = \frac{\pi}{2}$ ; в действительности в этом случае нет ударной волны, так как поток остается одним и тем же:  $M_1 = M_2 = 1$ , но результат может быть интерпретирован как отвечающий наличию простой волны Маха.

Если  $M_1$  очень велико ( $M_1 \rightarrow \infty$ ),

$$\sin \beta_s = \sqrt{\frac{x+1}{2x}}, \quad (7.58)$$

т. е. ударная волна приближается к нормальной, без того, однако, чтобы сделаться нормальной ударной волной, так как существует угол отклонения  $\theta$ , вычисляемый из уравнения (7.52а). При  $M_1 \rightarrow \infty$

$$\operatorname{tg}(\beta_s - \theta_s) = \operatorname{ctg} \beta_s,$$

$$\theta_s = 2\beta_s - \frac{\pi}{2}; \quad (7.59)$$

отсюда максимальное значение отклонения сверхзвукового течения для воздуха  $\theta_s = 45,22^\circ$ . Выше этого значения волна отделяется независимо от величины числа  $M_1$ .

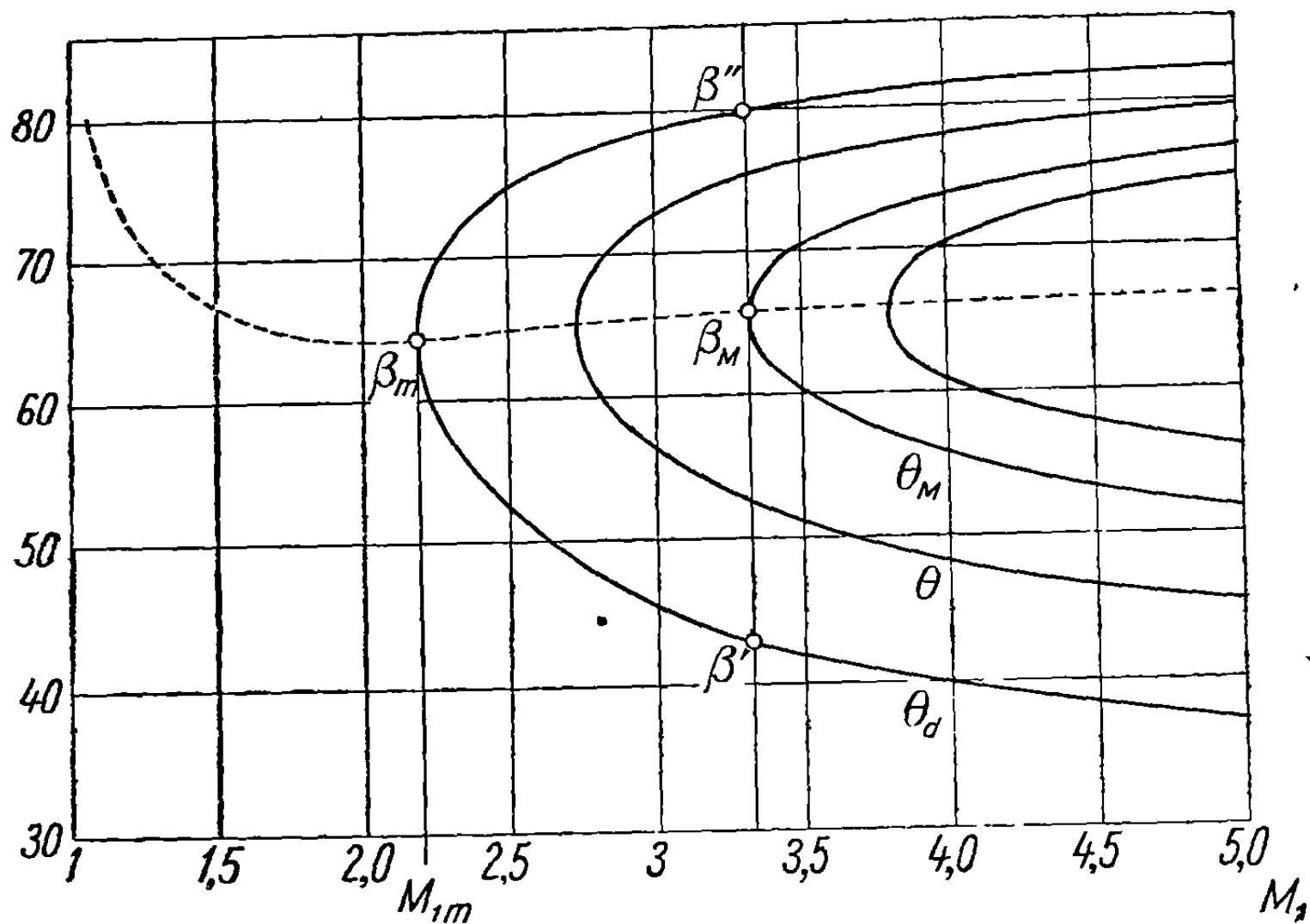
**7.3.2. Условия, приводящие к образованию плоских ударных волн. Фронтальные ударные волны.** Изучение диаграмм графика  $I$  показывает, что вертикаль  $M_1 = \operatorname{const}$  пересекает кривые  $M_1 = f(\beta)$  для определенного диапазона изменения угла отклонения  $\theta$ , который служит постоянным параметром при построении этих кривых, в точках  $\beta'$  и  $\beta''$  и касается одной из этих кривых, соответствующей максимальному отклонению, получаемому для заданного числа Маха  $M_1$  (фиг. 7.7). Угол отклонения не может быть выше этой величины, обозначаемой через  $\theta_m$ , и, следовательно, при  $\theta > \theta_m$  плоская волна не может образоваться.

Если, с другой стороны, рассматривать одну из кривых  $M_1 = f(\beta)$  при  $\theta = \theta_a$ , то она будет пересекаться в двух точках любой вертикалью  $M_1 = \operatorname{const}$ , вплоть до минимального значения  $M_{1m}$ , ниже которого также не может образоваться волна, так как в этом случае не существует решений для  $\beta$ .

Проблема сводится к нахождению угла  $\beta_m$ , соответствующего максимальному отклонению ( $\theta = \theta_m$ ) при заданном  $M_1$ , выше которого *плоская волна* не может возникнуть, или к нахождению угла, соответствующего минимальному значению числа Маха ( $M_1 = M_{1m}$ ), при заданном  $\theta$ , ниже которого плоская волна также не может существовать.

В первом случае можно применить уравнение (7.50); вычисляя производную  $\theta$  и приравняв ее нулю, получим квадратное уравнение относительно  $\beta$

$$\frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta} \left( 1 - \frac{2M_1^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} \right) - 1 = 0, \quad (7.60)$$



Фиг. 7.7

откуда выводим

$$\sin^2 \beta_M = \frac{1}{\kappa M_1^2} \left[ \frac{\kappa + 1}{4} M_1^2 - 1 + \sqrt{(\kappa + 1) \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 + \frac{\kappa + 1}{16} M_1^4 \right)} \right]. \quad (7.61)$$

Заменяя  $\beta$  в уравнении (7.50) этим значением, найдем максимальное отклонение, которое может испытывать поток, в котором возможно образование плоской волны. Нет необходимости выводить явное уравнение для  $\theta_M$ , так как это было бы длительным и сложным процессом.

Во втором случае, для определения минимального  $M_1$  ( $M_1 = M_{1m}$ ) при заданном отклонении  $\theta = \theta_d$ , исходя из уравнения (7.49) и приравняв нулю производную от величины  $\frac{1}{M_1^2}$ , являющейся функцией от  $\beta$ , получим выражение

$$\frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{ctg} \theta = \sin 2\beta (\sin \beta + \cos \beta \operatorname{ctg} \theta)^2, \quad (7.62)$$

или, в более простой форме,

$$\frac{\kappa + 1}{4} \sin 2\theta = \sin 2\beta \cos^2 (\beta - \theta) = \frac{\sin 2\beta}{2} (1 + \cos 2\beta \cos 2\theta + \sin 2\beta \sin 2\theta); \quad (7.63)$$

отсюда выводим уравнение четвертой степени относительно  $\sin 2\beta$ , решение которого дает значение  $\beta_m$ .

Подставляя в уравнение (7.49)  $\beta_m$  вместо  $\beta$ , получим минимальное значение  $M_{1m}$ , ниже которого невозможно образование плоской ударной волны.

Следует отметить, что все точки  $\beta_m$  или  $\beta$  соответствуют  $M_2 = 1$ , т. е. экстремумы кривых  $M = f(\beta)$  соответствуют потоку ниже ударной волны, движущемуся с критической скоростью.

Если  $\theta$  очень мало, то, пренебрегая [в уравнении (7.63) значением  $\theta$  по сравнению с  $\beta$  и замечая, что угол  $2\beta$  находится во втором квадранте, получим следующие соотношения:

$$(x + 1) \theta \approx \sin 2\beta (1 + \cos 2\beta); \quad (7.64a)$$

$$[(x + 1) \theta - \sin 2\beta]^2 = \sin^2 2\beta (1 - \sin^2 2\beta); \quad (7.64b)$$

$$2(x + 1) \theta \approx \sin^3 2\beta = \sin^3 (\pi - 2\beta); \quad (7.64b)$$

отсюда

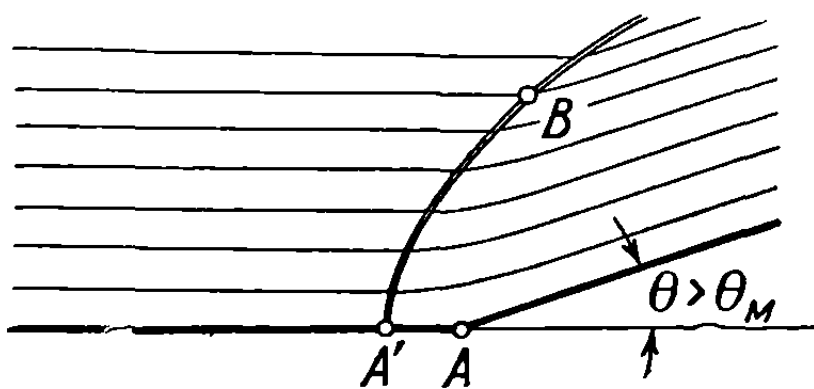
$$\beta_m \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt[3]{\frac{x + 1}{4} \theta}. \quad (7.65)$$

Подставляя  $\beta_m$  в уравнение (7.49), получим окончательный результат

$$M_{1m} = 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{x + 1}{4} \theta \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.66)$$

Отметим, что все предыдущие исследования можно выполнить проще и удобнее путем использования диаграмм на графике 1.

Если для заданного начального числа Маха  $M_1$  отклонение больше  $\theta_m$  или для данного  $\theta_d$  начальное число Маха меньше  $M_{1m}$ , то волна отойдет от головной точки и примет вид, показанный на фиг. 7.8. Эта волна называется фронтальной, или отошедшей ударной волной.



Фиг. 7.8

В точке  $A'$  волна нормальна по отношению к потоку, который будет дозвуковым ниже по течению. Далее волна отклоняется все больше и больше, потому что давление в нижнем течении падает с увеличением расстояния от точки  $A$ , в то время как скорость возрастает. Отклонение потока также возрастает, начиная от значения нуль в точке  $A'$ . В точке  $B$  нижнее течение становится снова сверхзвуковым. От  $A'$  до  $B$  вдоль искривленной фронтальной ударной волны, наклон которой зависит от давления и отклонения нижнего течения, можно наблюдать все типы условий течения через ударные волны — от нормальной ударной волны до косой — с отклонением, соответствующим точке  $B$ . Эти условия течения трудно определить аналитически; но некоторые из них могут быть установлены.

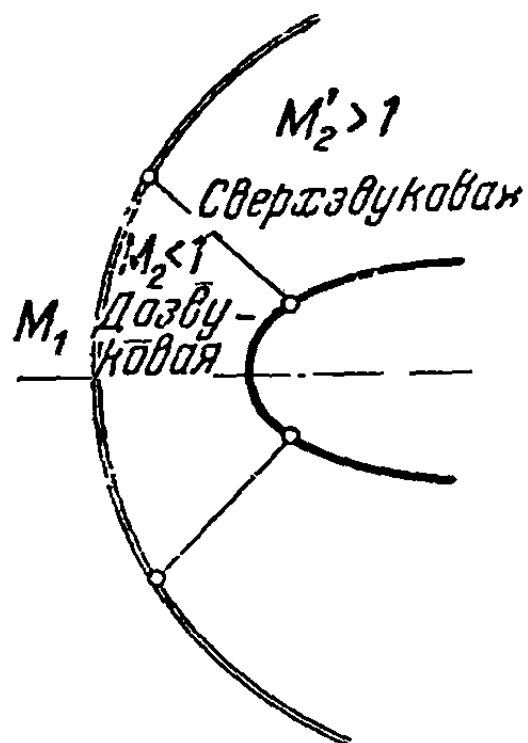
Так, из уравнения (7.45) для энтропии очевидно, что энтропия за ударной волной изменяется при переходе от одной линии тока к другой; следовательно, ее изменение вдоль нормали к линии тока не равно нулю:

$$\frac{dS}{dn} \neq 0. \quad (7.67)$$

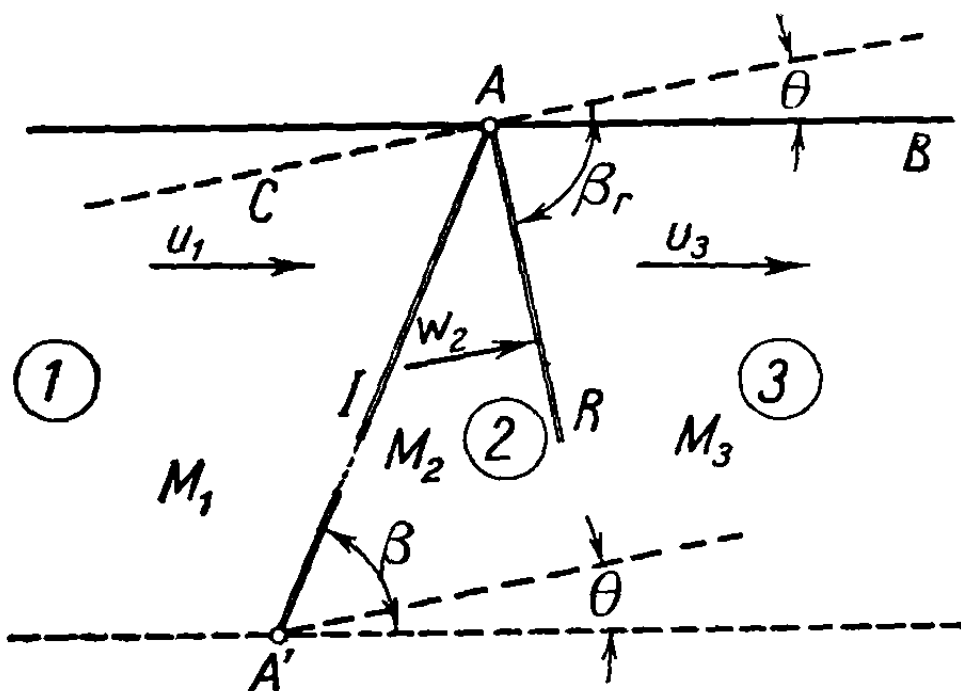
Поэтому из соотношения (3.70) следует, что течение за волной будет завихренным.

Отметим, что за ударной волной будут существовать два режима — дозвуковой и сверхзвуковой.

Если вблизи головной точки препятствие имеет закругленную форму (фиг. 7.9), то описанные явления будут выражены более резко. Фронтальная ударная волна играет важную роль, влияя на сопротивление, испытываемое телом; поэтому форма тела вблизи его головной точки имеет большое



Фиг. 7.9



Фиг. 7.10

значение, так как от нее зависят как интенсивность, так и характер ударной волны.

**7.3.3. Отраженные волны.** Пусть  $I$  будет косою волной (фиг. 7.10), образованной при условиях, изученных выше, и пусть поток после пересечения волны предполагается сверхзвуковым ( $M_1 > 1$ ,  $M_2 > 1$ ).

После пересечения волны скорость  $w_2$  будет составлять угол  $\theta$  с начальным направлением  $u_1$ . Если волна  $I$ , которая в этом случае называется *падающей волной*, встречает стенку, параллельную начальной скорости, в точке  $A$ , то поток, движущийся со скоростью  $w_2$ , будет находиться в таких же условиях, как если бы обтекалась стенка  $CAB$ , отклоненная на угол  $\theta$  в точке  $A$ . Поэтому должна образоваться новая ударная волна  $AR$  которую называют *отраженной волной*, вследствие чего скорость  $w_2$  возвращается к своему первоначальному направлению, но будет иметь измененную величину  $u_3$ .

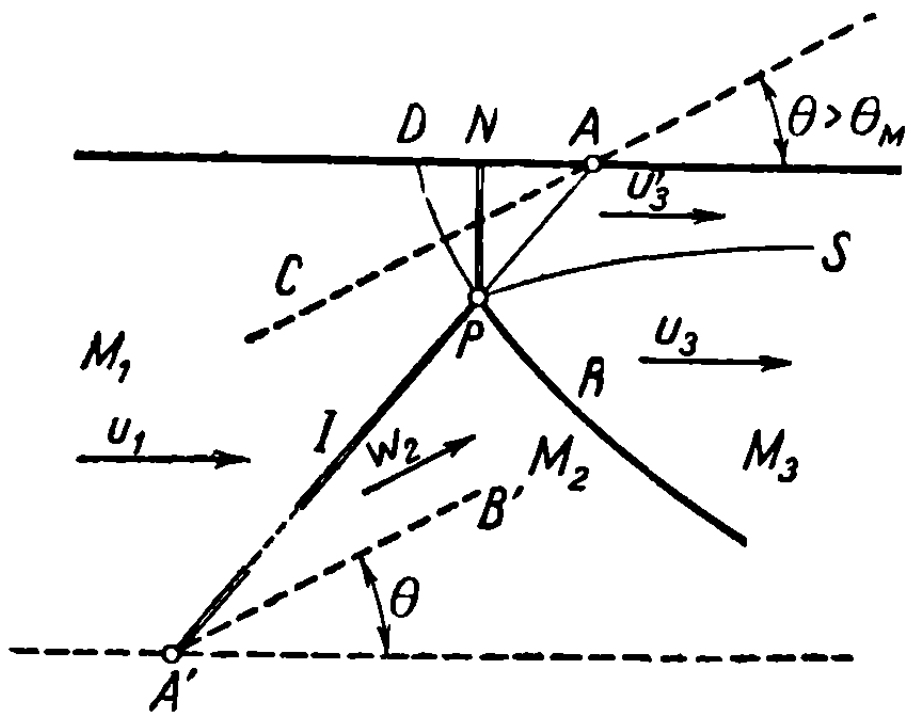
С помощью написанных выше соотношений, исходя из характеристик потока в начальной области (1), можно определить их во второй области (2), а затем в последней (3).

**З а м е ч а н и е.** Волна  $I$  предполагается отраженной в точке  $A$  твердой стенки; часто, однако, стенка эта будет «жидкой». В самом деле, если рассматривается симметричное течение и стенка  $AB$  будет линией тока, которая в то же время является осью симметрии течения, то эта ось может затвердевать без того, чтобы изменить течение. Такая линия играет поэтому ту же роль, что и твердая поверхность.

**Н о р м а л ь н а я** отраженная волна. Возможен случай, когда отклонение  $\theta$  скорости, которое будет совместно с законами преобразования при переходе через падающую ударную волну, будет, тем не менее, превышать максимальное значение

Ом вследствие новых условий течения за этой волной, если, например,  $M_2$  будет значительно меньше  $M_1$ .

Как и в предыдущем случае (фиг. 7. 8), можно ожидать образования отделившейся искривленной волны  $PD$ , нормальной к стенке. Хотя процесс очень сложен, он



Фиг. 7.11

может быть представлен схематически, как показано на фиг. 7, 11, где волны падающая  $I$ , отраженная  $R$  и нормальная  $N$  пересекаются в точке  $P$ . Даже если волны  $R$  и  $N$  предположить прямолинейными, то, вследствие различия условий в верхнем течении, возрастание энтропии, связанное с этими волнами, будет также различным, а следовательно,  $u_3$  будет отличаться от  $u_3'$ .

В таком случае появляется поверхность разрыва  $S$ , при переходе через которую скорость изменяется от  $u_3'$  до  $u_3$ . Исследование указанных волн очень сложно, и экспериментальные условия для такого исследования трудно воспроизвести. Отра-

женные нормальные волны называются также отраженными волнами Маха и более полно рассмотрены позже, в связи с изучением плоских дозвуковых течений между твердыми и свободными границами.

#### 7.4. Потеря напора. Волновое сопротивление

Возрастание энтропии за ударной волной, эквивалентное преобразованию механической энергии в тепло, соответствует потере давления в нижнем течении; так, если  $p_0$  будет давлением в воображаемом резервуаре вверх по течению, где скорость равна нулю, то в другом воображаемом резервуаре вниз по течению давление падает и становится равным  $p_0'$ . Как и в случае нормальной волны, для которой было установлено соотношение (7.28), можно, учитывая, что уравнения (7.39), относящиеся к нормальным компонентам  $(u_{1n}, u_{2n})$ , идентичны условиям (7.4), применимым к нормальной ударной волне, получить аналогичное выражение, заменяя  $M_1$  через  $M_{1n} = M_1 \sin \beta$ . Отсюда

$$\frac{p_0}{p_0'} = \left[ \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \left[ \frac{(\kappa - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\kappa + 1) M_1^2 \sin^2 \beta} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (7.68)$$

Напомним теперь, что

$$M_1 \sin \beta \geq 1; \quad (7.69)$$

действительно, из рассмотрения диаграмм  $M_1 = f(\beta)$  (график 1) можно установить, что минимальное значение  $\beta$  соответствует кривой  $\theta = 0$ . В этом случае левая часть уравнения (7.50) становится бесконечной и, следовательно,

$$M_1 \sin \beta = 1, \quad (7.70)$$

$$M_1 = \frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \mu},$$

т. е. при  $\theta \rightarrow 0$  угол  $\beta$  стремится к углу Маха и ударная волна становится простой волной Маха. Это осуществляется приближенно также в том случае, если  $\theta$  не равно нулю, но очень мало.

Для любой другой кривой  $\theta = \text{const}$ , угол  $\beta$  будет больше, следовательно,  $M_1 \sin \beta > 1$ , что подтверждает соотношение (7.69).

Для малых углов, что соответствует случаю практических применений,  $M_1 \sin \beta$  мало отличается от единицы, так что может быть использовано разложение, аналогичное разложению (7.30) для нормальной волны, что дает

$$\frac{p_0 - p'_0}{p_0} = \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3} + \dots \quad (7.71)$$

Резюмируем: при переходе через нормальную или косую ударные волны энтропия возрастает и механическая энергия превращается в тепло; так как процесс необратим, это влечет за собой потерю напора, что приводит к другим очень важным следствиям для авиации, так как дает начало новой разновидности сопротивления.

Таким образом, кроме сопротивления, обусловленного трением, которым мы временно пренебрегали, появляется другое, дополнительное сопротивление, называемое *волновым сопротивлением*, связанное с эффектом возрастания энтропии за ударной волной.

Благодаря присутствию тела течение вокруг него возмущается таким образом, что кинетическая энергия частиц жидкости уменьшается тотчас же после прохождения через ударную волну. Предполагая поэтому, что в некоторой точке  $A'_1$  за волной давление из-за присутствия тела становится равным давлению  $p_1$  в соответствующей точке  $A_1$  выше ударной волны, предполагая также, что скорость в точке  $A'_1$  принимает значение  $V'_1$  (фиг. 7.12), получим, в согласии с выражением (3.76), уравнения давления для частиц газа вверх и вниз по течению при сохраняющейся постоянной энтальпии в адиабатически заторможенном потоке:

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]; \quad (7.72a)$$

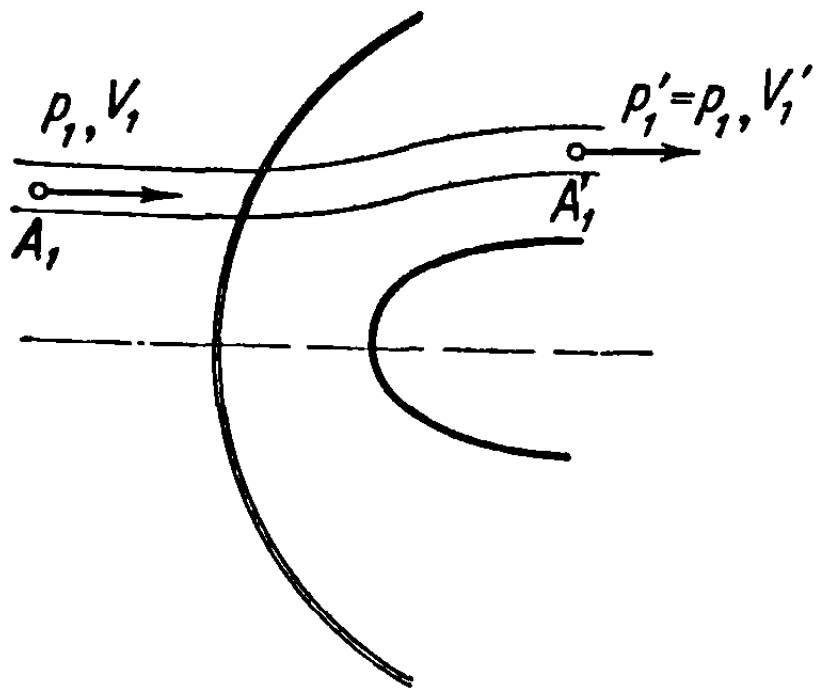
$$\frac{V_1'^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p'_0}{\rho'_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p'_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]; \quad (7.72b)$$

эти уравнения, в силу соотношения (5.16a), приводят к результату

$$\frac{V_1^2 - V_1'^2}{V_1^2} = \frac{\left( \frac{p_0}{p'_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1} = \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_1^2} \left[ \left( \frac{p_0}{p'_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]. \quad (7.73)$$

Величина, стоящая в правой части равенства (7.73), больше нуля, следовательно,  $V_1' < V_1$ , хотя давление возвращается к своему начальному зна-

чению  $\rho_1' = \rho_1$ . Частица газа потеряла часть своей кинетической энергии из-за присутствия тела, которое преодолело сопротивление для того, чтобы сохранить свое положение, и воздействовало поэтому с некоторой силой на



Фиг. 7.12

газ. Тело или движется в неподвижной атмосфере или остается неподвижным, будучи помещено в поток, имеющий скорость  $V_1$ ; в первом случае частицы газа приобретают кинетическую энергию благодаря движению тела, а во втором — они теряют часть своей кинетической энергии. В обоих случаях должна быть введена соответствующая величина энергии, появляющаяся вследствие действия тела на окружающую среду, равная *волновому сопротивлению*.

Интересно отметить соотношение между потерей кинетической энергии, величиной возрастания энтропии и теплом диссипации. Для малого возрастания энтропии, применяя уравнение (7.29), получим

$$\ln \left( \frac{\rho_0'}{\rho_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1}{x} \ln \frac{\rho_0'}{\rho_0} = \frac{x-1}{x} \frac{S_1' - S_1}{R} \approx \ln \left( 1 + \frac{x-1}{x} \frac{S_1' - S_1}{R} \right), \quad (7.74)$$

и предыдущее соотношение (7.73), если принять во внимание уравнение (7.71), получит вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (V_1^2 - V_1'^2) &= \frac{a_1^2}{x-1} \frac{x-1}{x} \frac{S_1' - S_1}{R} = T_1 (S_1' - S_1) \approx \\ &\approx T_1 R \frac{2x}{(x+1)^2} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^2}{3}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Потеря кинетической энергии, как и нужно было ожидать, пропорциональна температуре  $T_1$  и возрастанию энтропии  $(S_1' - S_1)$ .

Так как баланс энергии должен удовлетворяться в любой момент, потеря механической энергии на единицу массы компенсируется поглощением эквивалентного количества тепла, которое может быть определено путем применения уравнения энергии (3.60a) к частице, переходящей из точки  $A_1$  в точку  $A_1'$ :

$$\frac{1}{2} (V_1^2 - V_1'^2) = C_p (T_1' - T_1). \quad (7.76)$$

Явление эквивалентно *изменению состояния* при постоянном давлении.

Резюмируя, можно утверждать, что присутствие тела в сверхзвуковом потоке приводит к возникновению ударной волны, которая полностью определяется при некоторых условиях или в общем случае имеет очень сложный вид, зависящий от формы тела вблизи головной точки. Результирующее



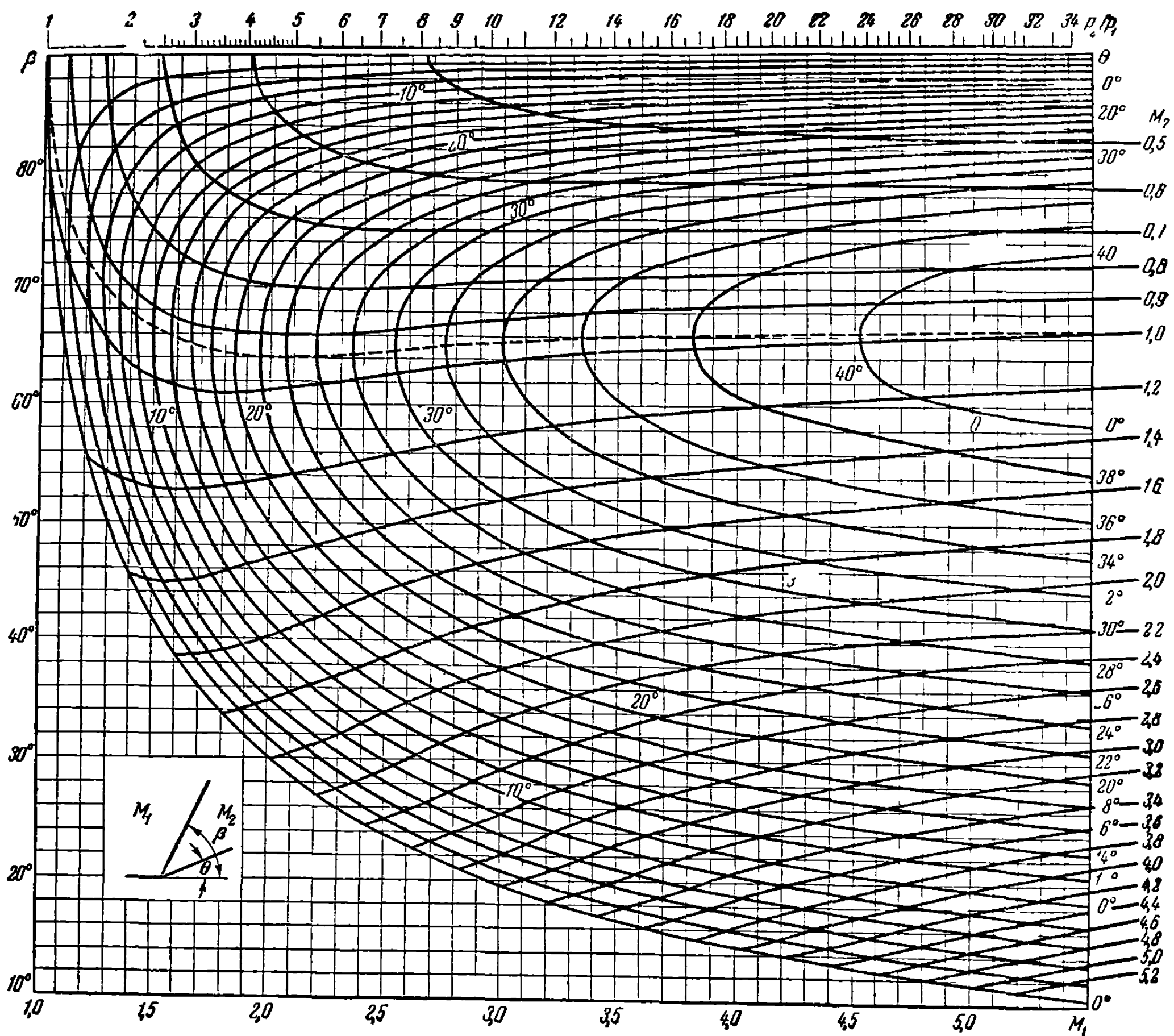


График 1 к стр. 113

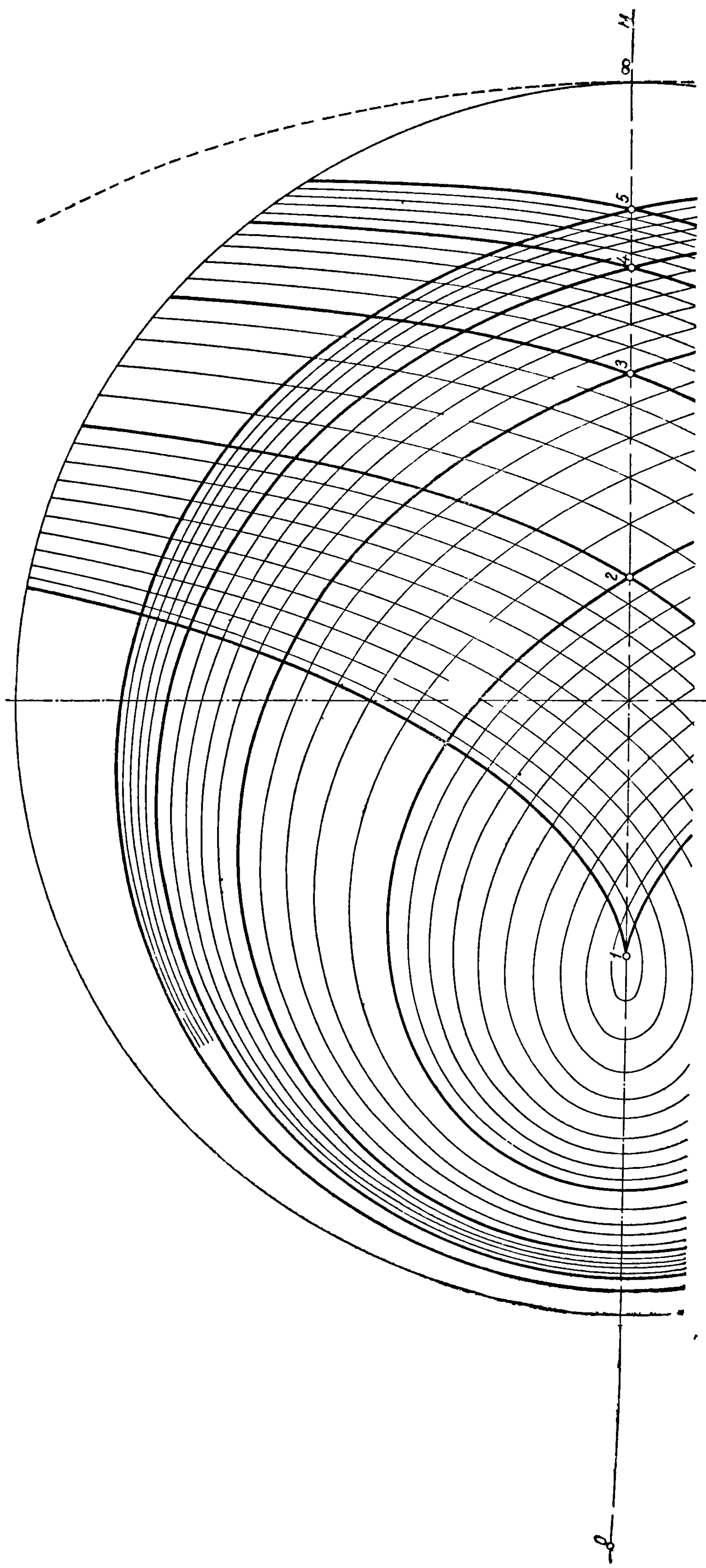


График 2 к стр. 125

волновое сопротивление, испытываемое телом, зависит от возрастания энтропии и, следовательно, от разности скоростей верхнего и нижнего течений при постоянном давлении.

Так как возрастание энтропии увеличивается вместе с  $\beta$ , то тела с тупым или округленным носом, которые создают ударные волны с большим наклоном, будут испытывать наибольшее сопротивление. При сверхзвуковых скоростях аэродинамические препятствия (крылья и фюзеляж самолета) должны поэтому иметь заостренную переднюю часть.

### 7.5. Графическое представление уравнений ударной волны

Из первого уравнения (7.35) и уравнения неразрывности (7.34) получим

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho_1 u_1^2 \sin^2 \beta - \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta)^2 = \\ &= p_1 + \rho_1 u_1 \sin \beta [(u_1 - u_2) \sin \beta + v_2 \cos \beta]; \end{aligned} \quad (7.77)$$

подставляя вместо  $v_2$  ее значение, найденное из уравнения (7.38б), будем иметь

$$p_2 = p_1 + \rho_1 u_1 (u_1 - u_2). \quad (7.78)$$

С другой стороны, исключая  $\beta$  из уравнений (7.34) и (7.38б), имеем

$$\rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_2 [u_2 (u_1 - u_2) - v_2^2]. \quad (7.79)$$

Вводя критическую скорость, можно записать уравнение (7.36) в форме

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} c^2 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} u_1^2, \quad (7.80a)$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} c^2 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} (u_2^2 + v_2^2). \quad (7.80б)$$

Из последних четырех уравнений легко выразить скорость  $v_2$  через  $u_1$ ,  $u_2$  и  $c$ :

$$v_2^2 = (u_1 - u_2)^2 \frac{u_1 u_2 - c^2}{\frac{2}{\kappa + 1} u_1^2 - u_1 u_2 + c^2}. \quad (7.81)$$

При заданных параметрах течения впереди ударной волны, т. е. при заданных  $u_1$  и  $c$ , написанные выше выражения приводят к соотношению между двумя компонентами скорости  $u_2$ ,  $v_2$  за ударной волной. В геометрической интерпретации на плоскости годографа  $u_2$ ,  $v_2$  уравнение (7.81) может быть представлено кривой, которая называется *полярной ударной волны*.

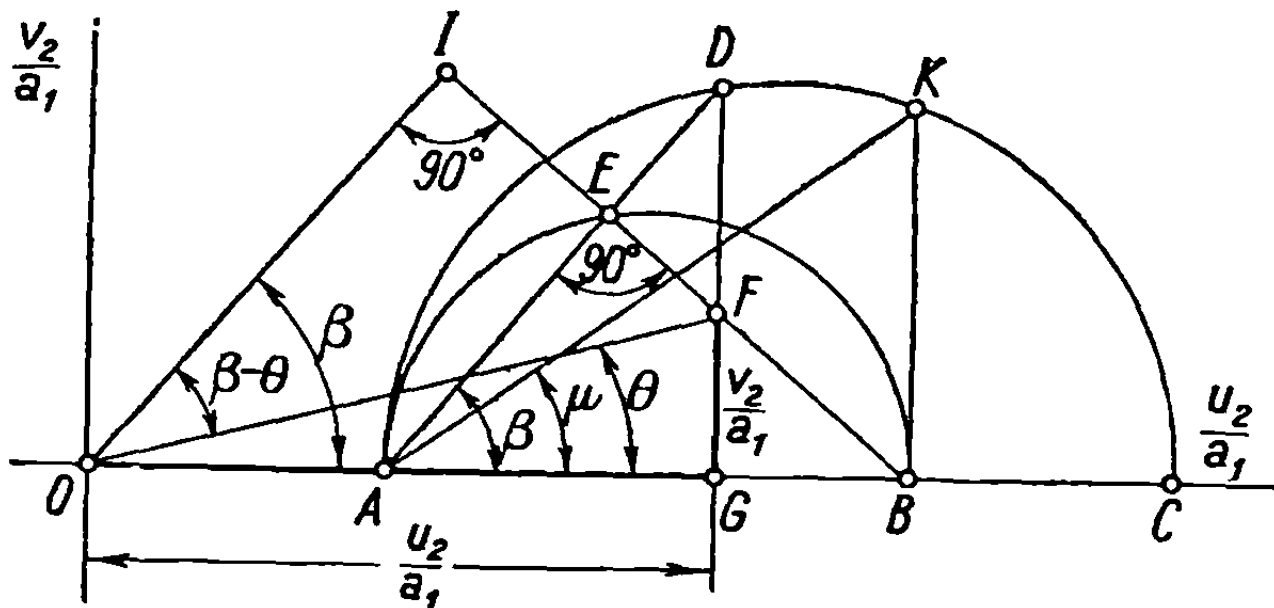
Чтобы получить безразмерные величины, разделим обе части равенства (7.81) на  $a_1^2$ , тогда

$$\left(\frac{v_2}{a_1}\right)^2 = \left(M_1 - \frac{u_2}{a_1}\right)^2 \frac{M_1 \frac{u_2}{a_1} - \frac{c^2}{a_1^2}}{\frac{2}{\kappa + 1} M_1^2 - M_1 \frac{u_2}{a_1} + \frac{c^2}{a_1^2}}. \quad (7.82)$$

Положим

$$\begin{aligned}\bar{OA} &= \frac{1}{M_1} \frac{c^2}{a_1^2}, \\ \bar{OB} &= M_1, \\ AC &= \frac{2}{z+1} M_1\end{aligned}\quad (7.83)$$

и проведем полуокружности  $AB$  и  $AC$  (фиг. 7.13). На расстоянии  $\frac{u_2}{a_1} = \bar{OG}$ , соответствующем горизонтальной компоненте за ударной волной, построим



Фиг. 7.13

точку  $D$  на большой полуокружности и на вертикали  $GD$ , а также точку  $E$  пересечения прямой  $AD$  с малой полуокружностью. Прямая  $BE$  пересекает вертикаль  $GD$  в точке  $F$ , дающей решение задачи:

$$\bar{GF} = \frac{v_2}{a_1}. \quad (7.84)$$

В самом деле, применительно к большей полуокружности хорошо известное геометрическое свойство дает

$$\bar{GD}^2 = GA \cdot GC; \quad (7.85)$$

с другой стороны, из подобия треугольников  $BFG$  и  $DAG$ , в силу равенства углов, следует

$$\left(\frac{GF}{GA}\right)^2 = \left(\frac{GB}{GD}\right)^2 = \frac{GB^2}{GA \cdot GC}, \quad (7.86)$$

что подтверждает соотношение (7.84):

$$\begin{aligned}\bar{GF}^2 &= \bar{GB}^2 \frac{\bar{GA}}{\bar{GC}} = (\bar{OB} - \bar{OG})^2 \frac{\bar{OG} - \bar{OA}}{\bar{OA} + \bar{AC} - \bar{OG}} = \\ &= \left(M_1 - \frac{u_2}{a_1}\right)^2 \frac{\frac{u_2}{a_1} - \frac{c^2}{a_1^2} \cdot \frac{1}{M_1}}{\frac{1}{M_1} \frac{c^2}{a_1^2} + \frac{2}{z+1} M_1 - \frac{u_2}{a_1}} = \left(\frac{v_2}{a_1}\right)^2.\end{aligned}\quad (7.87)$$

Далее  $\widehat{GAD} = \beta$ ; действительно,

$$\operatorname{tg} \widehat{GAD} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OG}}{\overline{GF}} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} = \operatorname{tg} \beta. \quad (7.88)$$

Отклонение  $\theta$  определяется углом, образуемым прямой  $OF$  с осью  $Ou_2$ , в согласии с равенством (7.32).

Отношение  $w_2/a_1$  определяется отрезком  $\overline{OF}$ .

Отношение плотностей находится путем использования соотношений

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_{1n}}{u_{2n}} = \frac{u_1 \sin \beta}{w_2 \sin(\beta - \theta)} = \frac{\overline{OB} \sin \beta}{\overline{OF} \sin(\beta - \theta)} = \frac{\overline{BI}}{\overline{FI}}. \quad (7.89)$$

С другой стороны, если равенство (7.39) записать в форме

$$u_{1n}^2 + \frac{2a_1^2}{x-1} = u_{2n}^2 + \frac{2a_2^2}{x-1}, \quad (7.90)$$

то после деления на  $a_1^2$  получим, в соответствии с уравнениями (7.33), соотношение

$$M_1^2 \sin^2 \beta + \frac{2}{x-1} = \frac{w_2^2}{a_1^2} \sin^2(\beta - \theta) + \frac{2}{x-1} \frac{a_2^2}{a_1^2}. \quad (7.91)$$

Так как

$$M_1 \sin \beta = \overline{BI},$$

$$\frac{w_2}{a_1} \sin(\beta - \theta) = \overline{FI}, \quad (7.92)$$

то

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{x-1}{2} (\overline{BI}^2 - \overline{FI}^2) + 1, \quad (7.93)$$

и конечный результат, в согласии с равенством (4.10), будет

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{\overline{BI}}{\overline{FI}} \left[ \frac{x-1}{2} (\overline{BI}^2 - \overline{FI}^2) + 1 \right] =$$

$$= \frac{\overline{BI}}{\overline{FI}} \left[ \frac{x-1}{2} \left( \frac{\overline{BI}^2}{\overline{OB}^2} - \frac{\overline{FI}^2}{\overline{OB}^2} \right) M_1^2 + 1 \right].$$

На диаграмме заданному значению  $\frac{u_2}{a_1} = OG$  соответствует вполне опре-

деленная величина  $\overline{GF} = \frac{u_2}{a_1}$ , и все характеристики течения за ударной вол-

ной —  $\beta$ ,  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $\frac{p_2}{p_1}$  и т. д. — могут быть легко найдены. Для любого значения

отношения  $u_2/a_1$  процедура остается той же, и геометрическое место точек

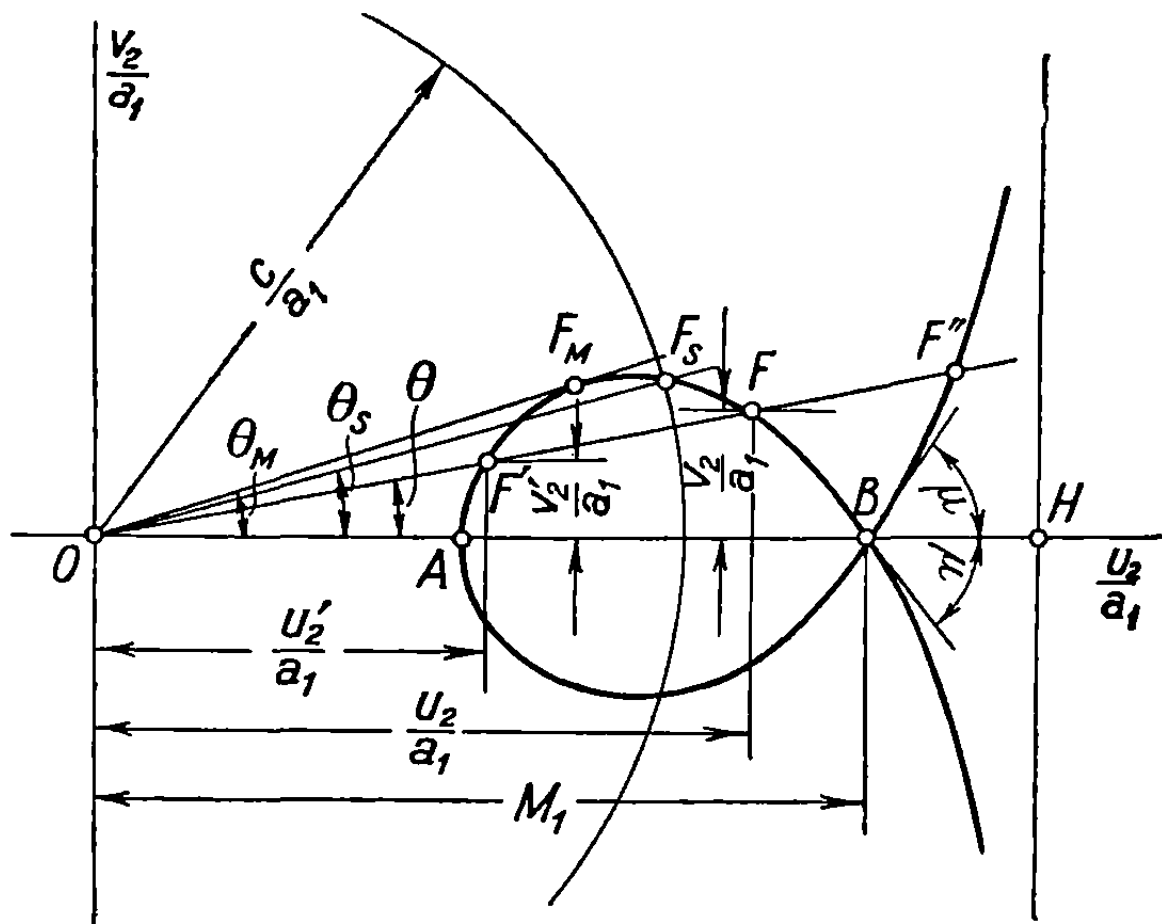
$F$  будет кривой, симметричной относительно оси  $Ou_2$ ; эта кривая, как уже отмечалось, называется полярой ударной волны, или просто ударной полярой.

Точка  $A$  соответствует нормальной ударной волне ( $v_2 = 0, \theta = 0$ ), а точка  $B$  — простой волне Маха.

В самом деле, полагая

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}}, \quad (7.95)$$

подставляя  $\sqrt{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}$  вместо  $\overline{BK}$  и применяя соотношение (7.38), легко выведем, что  $\beta = \mu$ . Поляра продолжается за точку  $B$  (фиг. 7.14)



Фиг. 7.14

и асимптотически приближается к прямой, параллельной  $Ou_2$ , с абсциссой  $u_2/a_1$ , получаемой приравниванием нулю знаменателя выражения (7.82):

$$\overline{OH} = \frac{u_2}{a_1} = \frac{1}{M_1} \frac{c^2}{a_1^2} + \frac{2}{\kappa + 1} M_1. \quad (7.96)$$

Исследование ударной волны значительно упрощается при использовании поляры. Для заданных значений  $u_1$  и  $c$  будет существовать единственная поляра (фиг. 7.14), из которой можно видеть, что существует три точки пересечения:  $F, F', F''$ , соответствующие заданному отклонению  $\theta$ . Последняя точка  $F''$  не имеет физического значения, так как приводит к неравенству  $u_2 > u_1$ , т. е. к расширению, которое, как было показано выше, физически невозможно. Применима только ветвь  $AFB$  поляры, точки  $F$  и  $F'$  представляют два решения задачи. Проводя касательную  $OF_M$ , получим максимальное отклонение  $\theta_M$ , за которым волна отделяется. Ниже этого значения существует всегда два решения: одно соответствует в общем случае дозвуковому режиму и другое — сверхзвуковому. Оба режима могут быть дозвуковыми при некотором отклонении  $\theta$ , заключенном между значе-

ниями  $\theta_M$  и  $\theta_s$ , причем последнее определяется следующим образом. Сначала находится значение числа Маха  $M_2$  за ударной волной

$$M_2 = \frac{w_2}{a_2} = \frac{w_2 a_1}{a_1 a_2} = \overline{OF} \cdot \frac{a_1}{a_2}. \quad (7.97)$$

Течение становится звуковым, если  $M_2 = 1$ ,  $a_2 = c$  и таким образом  $\overline{OF} = \frac{c}{a_1}$ . Если из центра  $O$  описать окружность радиусом  $\frac{c}{a_1}$ , то поляра будет ею пересекаться в точке  $F_s$ , которая соответствует отклонению  $\theta_s$ .

Для изучения ударных волн могут быть использованы диаграммы графика 2, на которых изображена ударная поляра при различных числах Маха.

## 7.6. Отклонение как функция давления

Для последующих вычислений необходимо установить соотношение между отклонением потока и разностью давлений при переходе через ударную волну. Будем исходить из уравнения для безразмерного коэффициента давления

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2}; \quad (7.98)$$

применив уравнение (7.78), получим соотношение

$$C_p = 2 \frac{u_1 - u_2}{u_1}, \quad (7.99)$$

определяющее разность между осевыми скоростями  $(u_1 - u_2)$ , которая в свою очередь может быть дана как функция отклонения  $\theta$ .

Уравнение (7.81)

$$u_2^2 = (u_1 - u_2)^2 \frac{u_1 u_2 - c^2}{\frac{2}{x+1} u_1^2 - u_1 u_2 + c^2}$$

может быть преобразовано следующим образом. В соответствии с выражениями (5.4) и (5.2а) знаменатель может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} u_1^2 - u_1 u_2 + c^2 &= \frac{2}{x+1} u_1^2 - u_1 [u_1 - (u_1 - u_2)] + \frac{2}{x+1} a_0^2 = \\ &= \frac{2}{x+1} a_1^2 + u_1 (u_1 - u_2) = \frac{2}{x+1} a_1^2 \left( 1 + \frac{x+1}{2} M_1^2 \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right); \quad (7.100) \end{aligned}$$

далее

$$\begin{aligned} u_1 u_2 - c^2 &= u_1^2 - u_1 (u_1 - u_2) - \frac{2}{x+1} \left( a_1^2 + \frac{x-1}{2} u_1^2 \right) = \\ &= \frac{2}{x+1} (u_1^2 - a_1^2) - u_1 (u_1 - u_2) = \frac{2}{x+1} a_1^2 \left[ M_1^2 - 1 - \frac{x+1}{2} M_1^2 \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right]. \quad (7.101) \end{aligned}$$

В этих условиях уравнение (7.81) примет вид

$$\begin{aligned} v_2 \left( 1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_1^2 \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right)^{1/2} &= \\ &= (u_1 - u_2) \sqrt{M_1^2 - 1} \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.102)$$

или, в силу уравнения (7.32) и полагая

$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} \operatorname{tg} \theta = \left( 1 - \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right) \operatorname{tg} \theta, \quad (7.103)$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta \left( 1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_1^2 \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right) &= \\ &= \frac{u_1 - u_2}{u_1} \sqrt{M_1^2 - 1} \left( 1 - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \frac{u_1 - u_2}{u_1} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (7.104)$$

конечный результат, в согласии с уравнением (7.99), будет

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{M_1^2 - 1} \frac{C_p}{2 - C_p} \left[ \frac{1 - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \frac{C_p}{2}}{1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_1^2 \frac{C_p}{2}} \right]^{1/2}. \quad (7.105)$$

Эту формулу применим позже, при изучении сверхзвуковых профилей.

## 8. РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ

### 8.1. Условия равновесия при течении через сопла

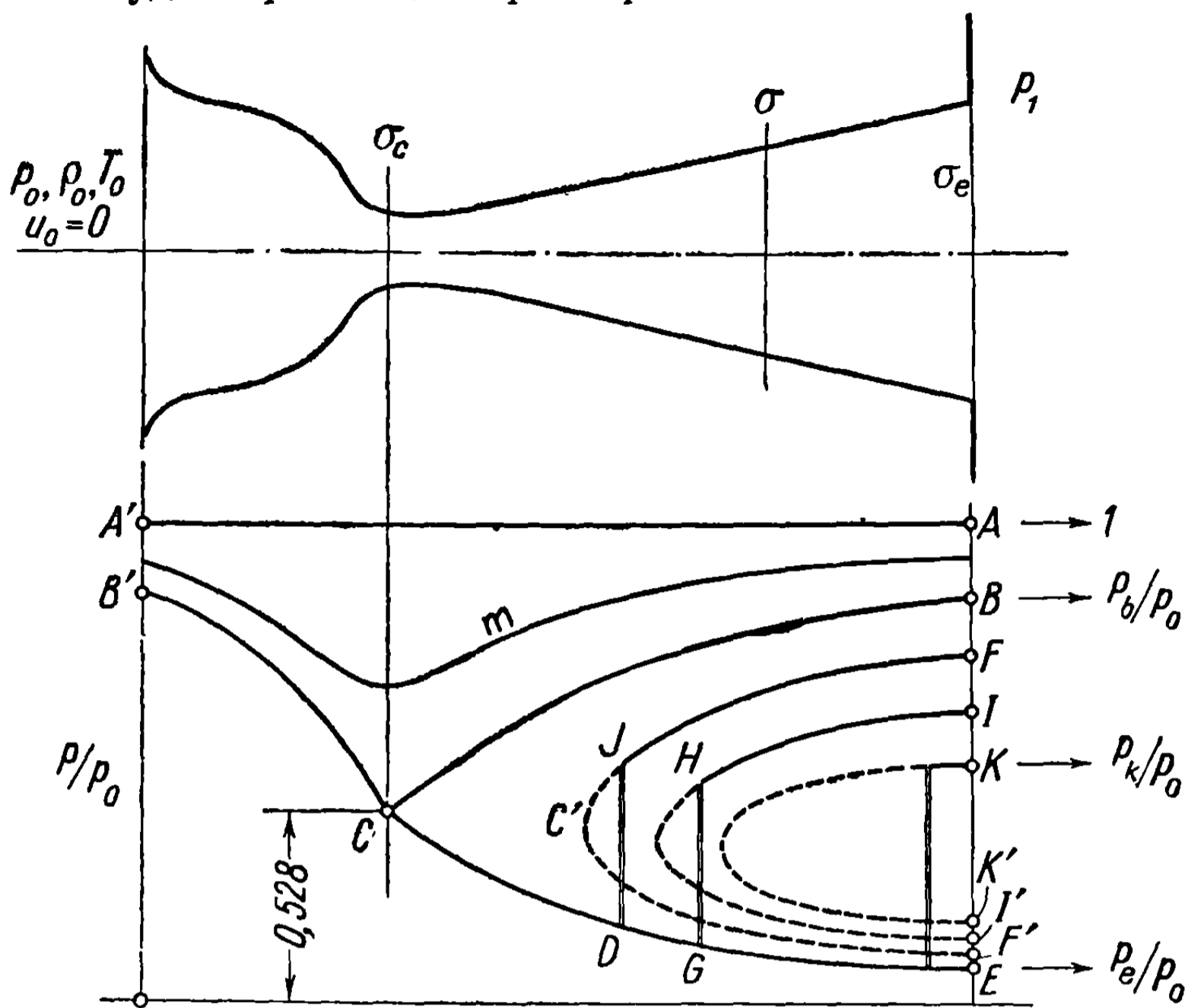
Условия течения в сопле Лавала были рассмотрены в предыдущем разделе. Напомним, что когда течение в сопле дозвуковое — давление изменяется в согласии с кривой  $m$ , расположенной между  $A'A$  ( $\frac{p}{p_0} = 1$ ), и кривой  $B'CB$ , соответствующей максимальному расходу (фиг. 8.1); при этом предполагается, что давление  $p_1$  в резервуаре на выходе из сопла больше, чем давление  $p_b$ , соответствующее выходному сечению  $\sigma_e$  и определяемое из уравнения (6.14). Как только достигается давление  $p_b$  и, следовательно, мы приходим в точку  $B$ , в суженном сечении получают критические значения  $c$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_c$ ,  $T_c$ ; число Маха в этом сечении становится равным единице и расход достигает максимума.

Если давление во втором резервуаре (на выходе) становится ниже  $p_b$ , достигая точки  $E$ , то отношение  $\frac{p_e}{p_0}$  принимает второе значение, удовлетворяющее уравнению (6.14); условия в суженном сечении остаются неизменными, расход попрежнему максимален, но течение в расходящейся части сопла становится сверхзвуковым — будет наблюдаться расширение.



Что произойдет, если давление во втором резервуаре будет определяться точками, лежащими между  $B$  и  $E$ ?

Расход останется неизменным, и вдоль некоторого участка за узким сечением сопла будет происходить расширение в соответствии с кривой  $CD$ .



Фиг. 8.1

Если обратить процесс, идя внутрь сопла от второго резервуара, и если давление  $p_1$  в последнем равно давлению в сечении  $\sigma_e$ , то путем применения уравнения (6.14) или в согласии с фигурой 6.6 будет получено другое значение для суженного сечения фиктивного сопла при тех же условиях течения. Давление будет изменяться иначе, в соответствии с кривой  $FC'F'$ , на которой верхняя ветвь  $C'F$  соответствует дозвуковому режиму, а нижняя сверхзвуковому.

Таким образом, если отправиться из точки  $C$ , т. е. от наиболее узкого сечения  $\sigma_c$ , вперед, то появится расширение, и, наоборот, если исходить из точки  $F$ , соответствующей выходному сечению, и продвигаться внутрь сопла, то происходит сжатие; при этом где-то внутри, например, в сечении  $DJ$ , неизбежно будет возникать внезапный скачок давления  $DJ$ , удовлетворяющий условиям равновесия.

При любом меньшем давлении во втором резервуаре, представленном, например, точкой  $I$ , будет также существовать скачок давления, или нормальная ударная волна  $GH$  внутри сопла; при дальнейшем понижении давления, вплоть до предельной точки  $K$ , ударная волна перемещается все ближе к выходному сечению, как показывают и экспериментальные диаграммы (фиг. 8.2). Ударная волна, появляющаяся в выходном сечении, соответствует скачку  $EK$ , давление внезапно изменяется от  $p_e$  до  $p_k$ . Эта последняя величина давления может быть определена следующим образом. Обозначая число Маха в выходном сечении в случае расширения через  $M_e$ , причем

это число может быть получено из соотношения (6.16), и применяя уравнение (7.15), имеем

$$\frac{p_k}{p_e} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_e^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad (8.1)$$

откуда получаем определяемое давление  $p_k$ .

Если внешнее давление падает еще дальше, ниже последнего значения, т. е. его величина определяется точками между  $K$  и  $E$ , то возникает косая ударная волна.

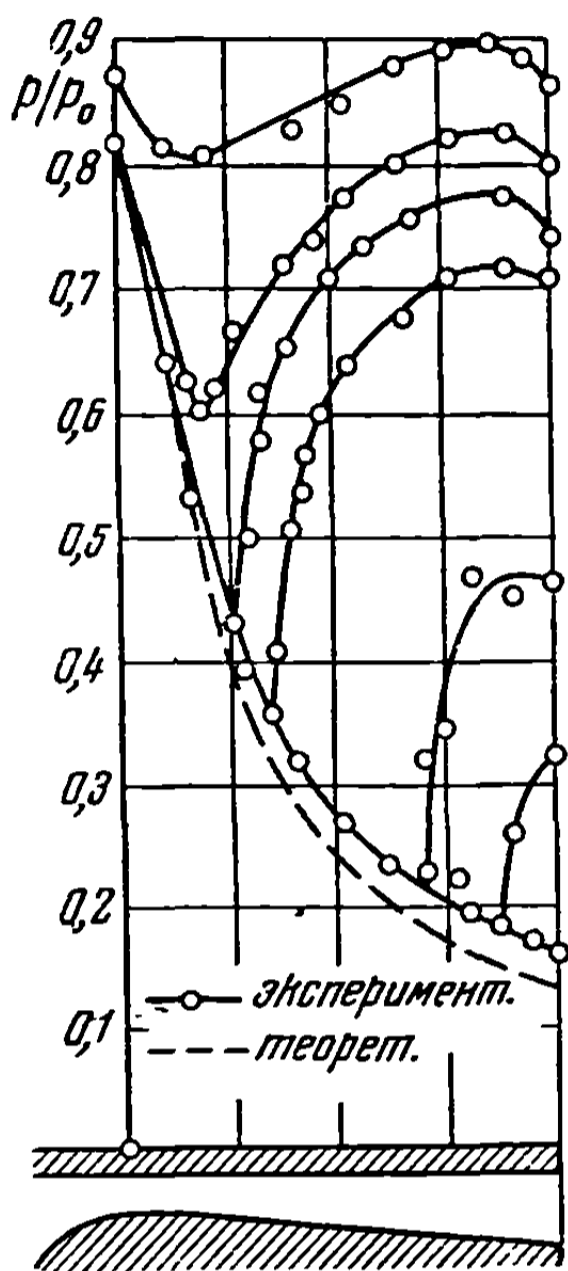
Чтобы проиллюстрировать это явление, удобно предположить, что сопло имеет прямоугольное поперечное сечение, причем сопло образуется двумя фиксированными параллельными плоскостями и двумя нормальными к этим плоскостям стенками, создающими изменение сечения. При этом предположении задача выигрывает в простоте без потери в общности.

Для того чтобы получить скачок давления от  $p_e$  в выходном сечении до  $p_1 < p_k$ , необходима косая ударная волна, удовлетворяющая ранее установленным условиям. Если принять во внимание также и отраженные волны, то конфигурация волн на выходе будет такой, как показано на фиг. 8.3 а.

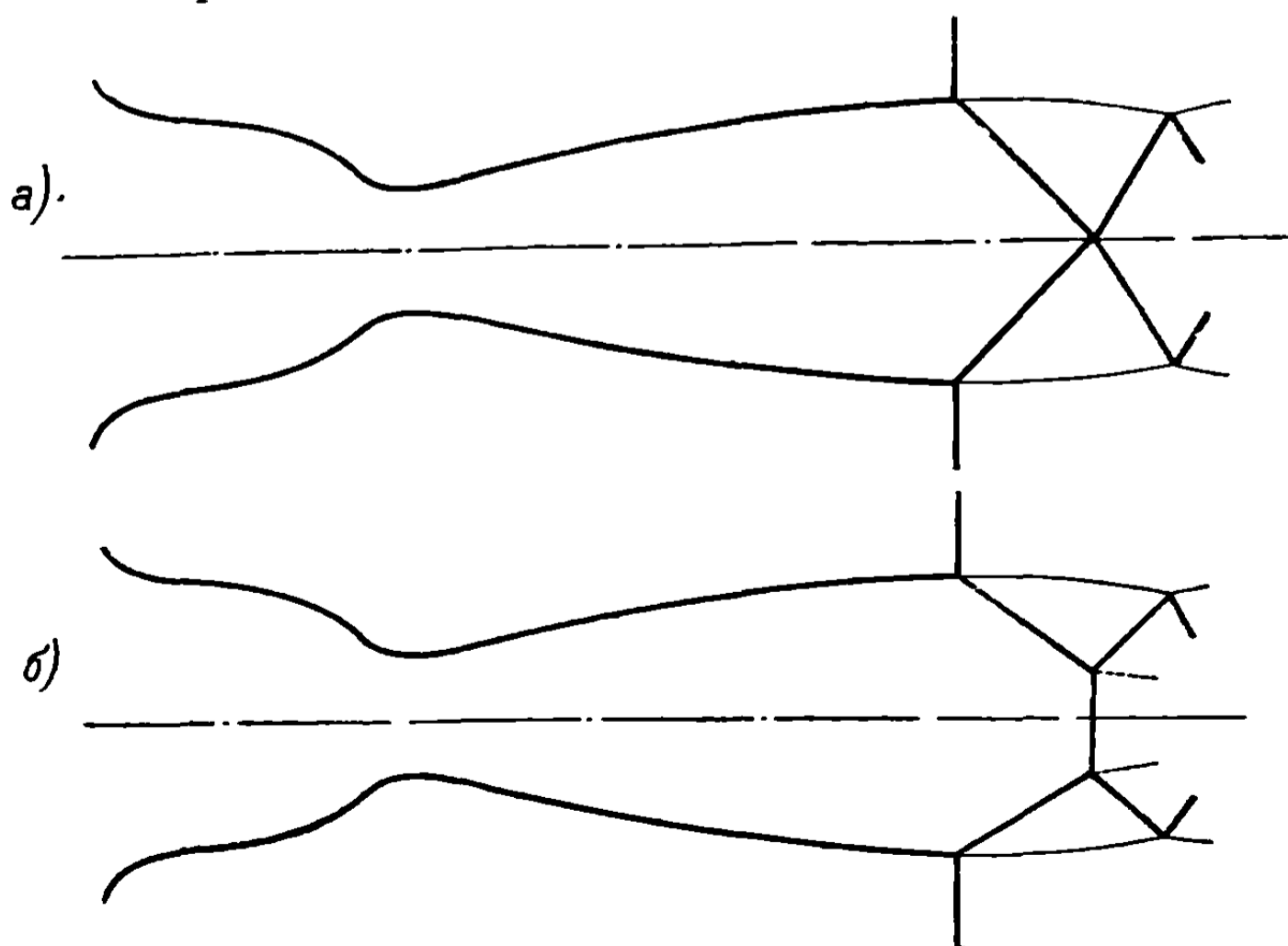
Если угол наклона ударной волны велик, то вместо простых отраженных волн могут появиться нормальные отраженные волны (фиг. 8.3, б).

Исследование этих волн аналитическими методами чрезвычайно затруднительно, и поэтому оно обычно выполняется путем использования экспериментальных средств (фиг. 8.4).

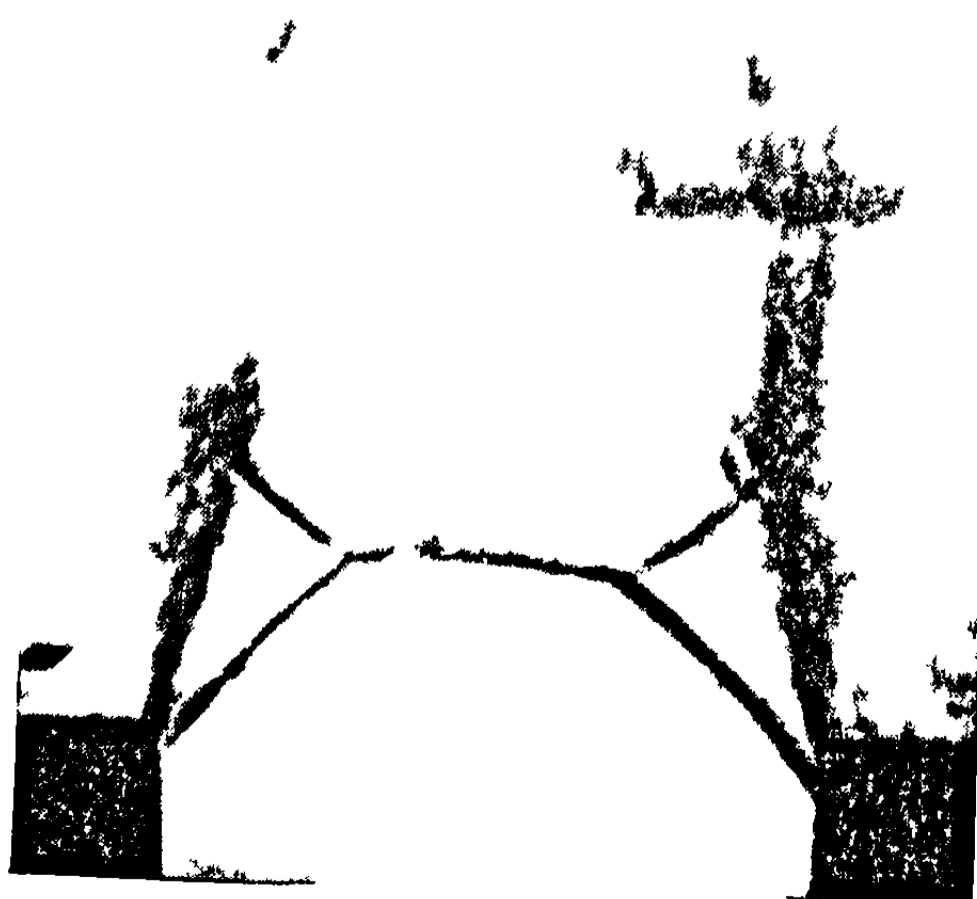
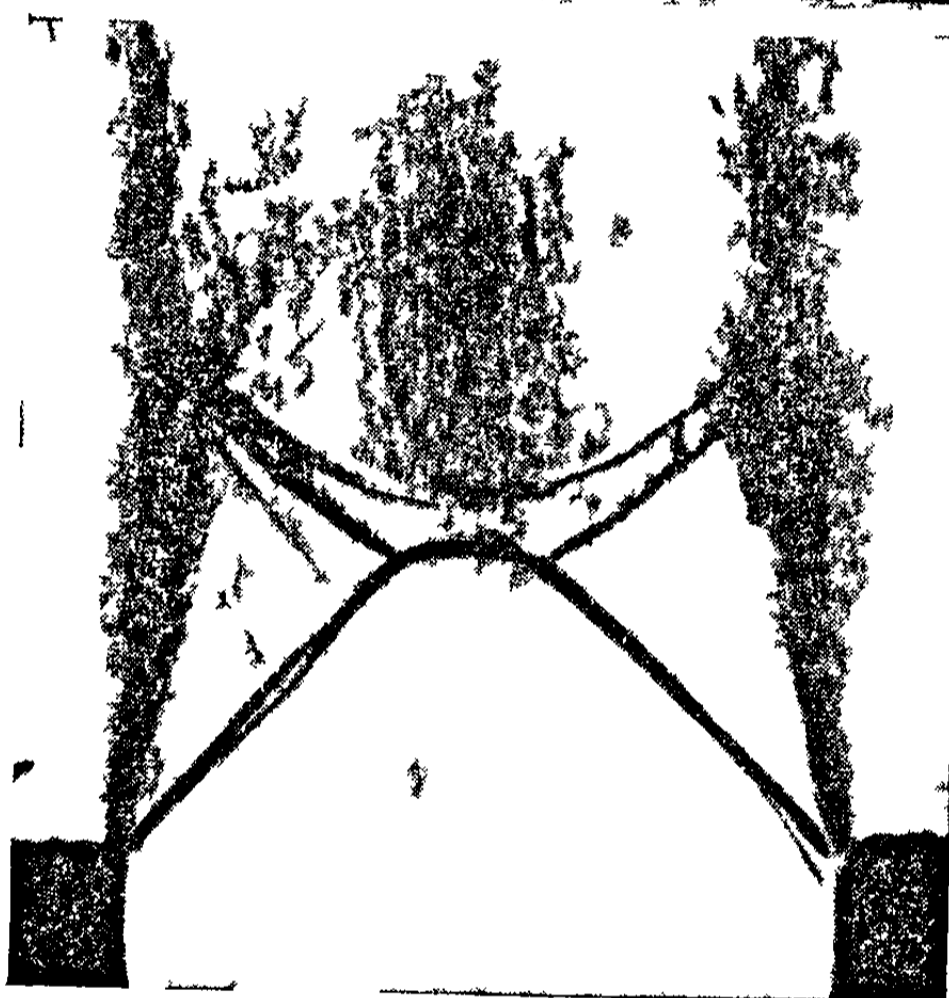
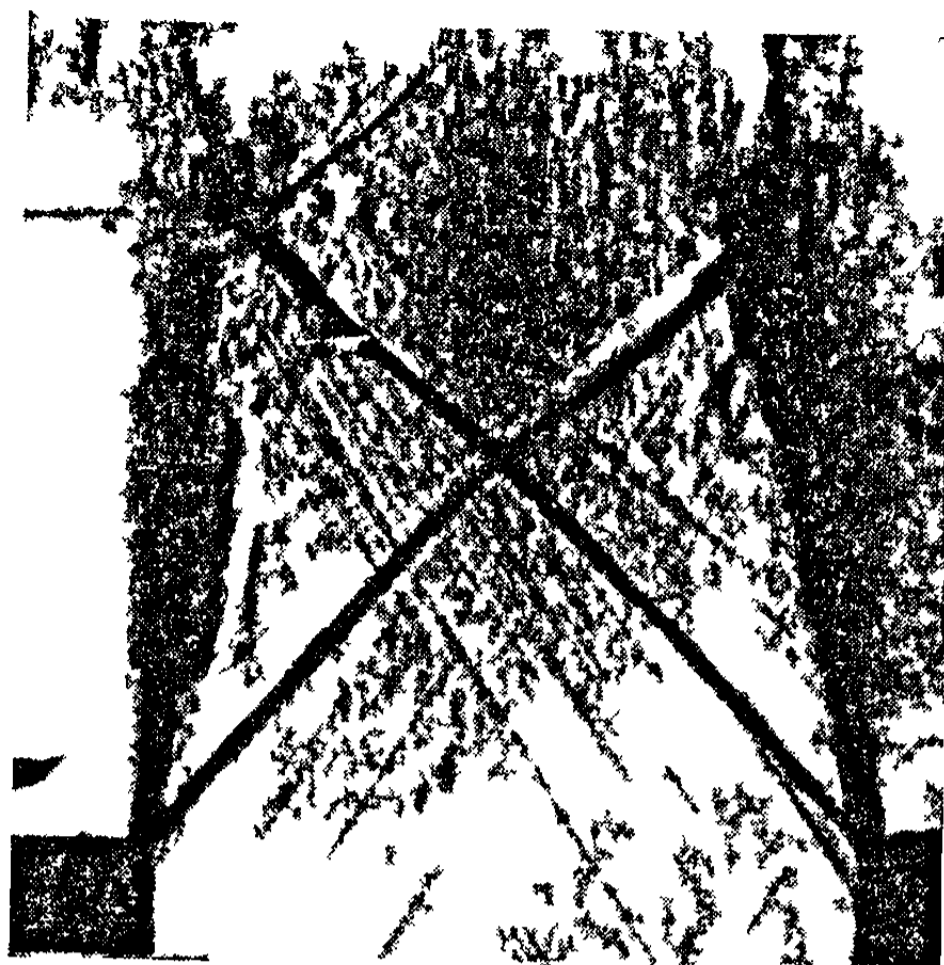
Если, однако, мы имеем дело с двумерной задачей, то расчет полной конфигурации струи может быть дан только в случае простых отраженных волн.



Фиг. 8.2

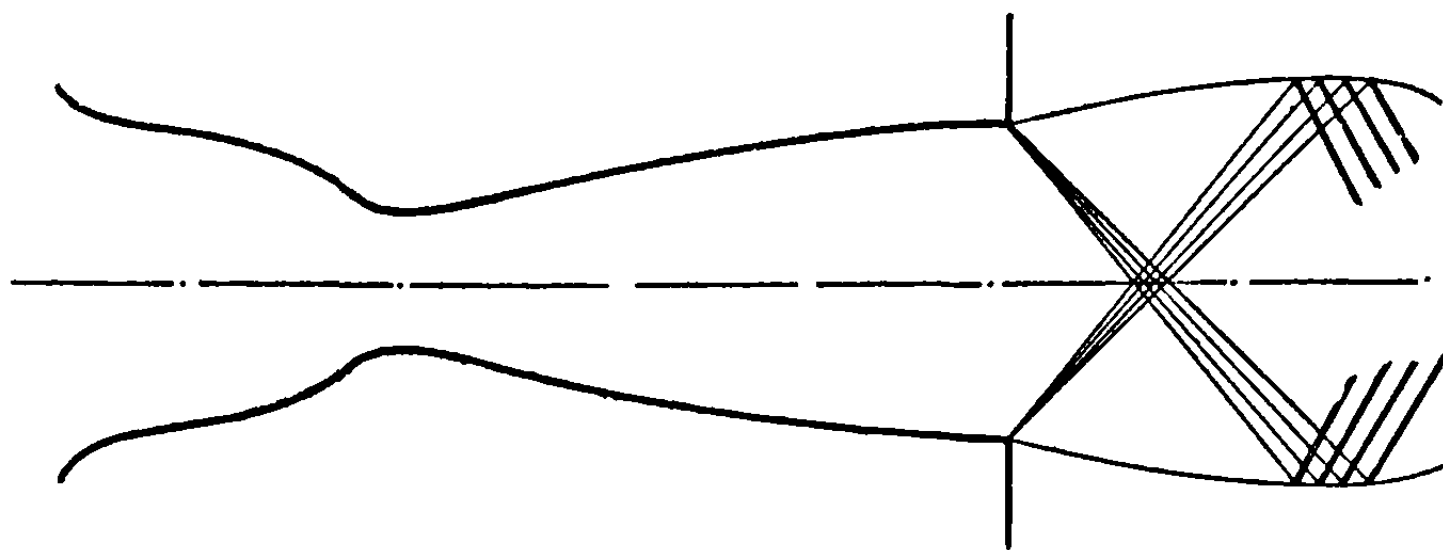


Фиг. 8.3



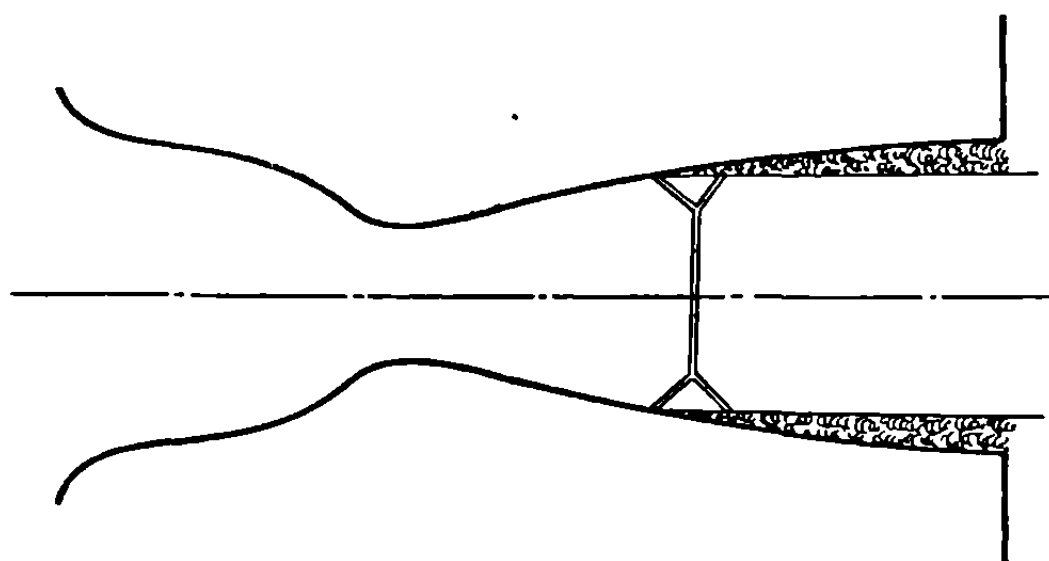
Фиг. 34

Наконец, если давление во втором резервуаре будет меньше, чем  $p_e$  ( $p_1 < p_e$ ), то вместо нормальной или косой ударных волн образуются волны разрежения, которые изучены более полно в следующей главе (фиг. 8.5).



Фиг. 8.5

**Влияние трения.** В приведенном выше рассуждении газ предполагается идеальным, невязким и закон преобразования изэнтропическим. Для реальных газов вследствие вязкости условия течения в непосредственной близости стенок существенно изменяются. Здесь возникает



Фиг. 8.6

*пограничный слой*, в котором течение подчиняется определенным граничным условиям, включающим условие, что скорость на стенке равна нулю. Более детальный анализ этого процесса лежит вне рамок настоящего исследования, однако необходимо указать, что этот пограничный слой может при определенных условиях при переходе от низких давлений к высоким отделиться от стенок, полностью изменяя форму течения вниз по потоку.

До тех пор, пока в сопле существует расширение, давление падает, и условия отрыва не осуществляются. Если, однако, возникает ударная волна, то внезапный скачок давления в сопле может привести к отрыву потока, изменяя форму течения, как изображено на фиг. 8.6. Вследствие сложных условий в таких точках отрыва ударная волна не является полностью нормальной, представляя различные виды волновых конфигураций с нормальной главной волной в центре и другими, косыми волнами, прямыми или отраженными, у стенок.

Все эти процессы не поддаются математическому анализу, но могут быть изучены экспериментально.

## 8.2. Распределение скоростей в сечениях аэродинамической трубы

Некоторые из результатов, полученных в предыдущей главе, имеют непосредственное приложение к проектированию аэродинамических труб больших скоростей, в которых условия течения должны быть установлены с определенной точностью, так, чтобы можно было найти распределение давлений и скоростей вдоль трубы, требуемую мощность и другие эксплуатационные характеристики.

Отметим с самого начала, что скорость не будет распределена строго равномерно поперек всего сечения, особенно если площадь его велика; она будет изменяться нерегулярным образом, в различных точках трубы и особенно после прохождения потоком областей, где наблюдаются внезапные изменения направления скорости. Отсюда следует, что давление точно так же не будет строго постоянным поперек всего сечения. В действительности даже в случае малых сечений пограничный слой, вызванный трением, исключает предположение о равномерной скорости по всему сечению, хотя бы давление и было постоянным.

Из этого факта вытекают два следствия:

1) в каждом сечении должны быть определены средние значения скорости, давления, плотности и температуры путем представления возможно более точно средних условий, для того чтобы сделать применимыми уравнения, относящиеся к одномерному течению;

2) благодаря потере напора вдоль аэродинамической трубы энтропия возрастает и, следовательно, давление торможения  $p_0$ , т. е. давление в идеальном резервуаре, где газ покоится и из которого он течет изэнтропически через канал рассматриваемой трубы, не будет постоянным, изменяясь в каждом сечении как функция потерь, наблюдаемых выше по потоку.

Чтобы определить средние величины, можно сделать предположение, что полная энергия массы, проходящей через каждое сечение, является постоянной, считая при этом стенки канала достаточно изолированными, так, чтобы можно было пренебречь потерями тепла через них. Обозначая поэтому средние значения скорости, давления, плотности и температуры через  $V_m$ ,  $p_m$ ,  $\rho_m$ ,  $T_m$ , определяемые интегралами

$$\begin{aligned} m &= \int_V \rho V d\sigma = \rho_m V_m \sigma, \\ \frac{1}{2} m V_m^2 &= \frac{1}{2} \int_V V^2 \rho V d\sigma, \\ m T_m &= \int_V T \rho V d\sigma, \end{aligned} \quad (8.2)$$

распространенными по всему сечению, причем  $m$  — поток массы, можно записать уравнение энергии (3.61) в форме

$$\frac{p_m}{\rho_m} + C_v T_m + \frac{1}{2} V_m^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_m}{\rho_m} + \frac{1}{2} V_m^2 = \text{const.} \quad (8.3)$$

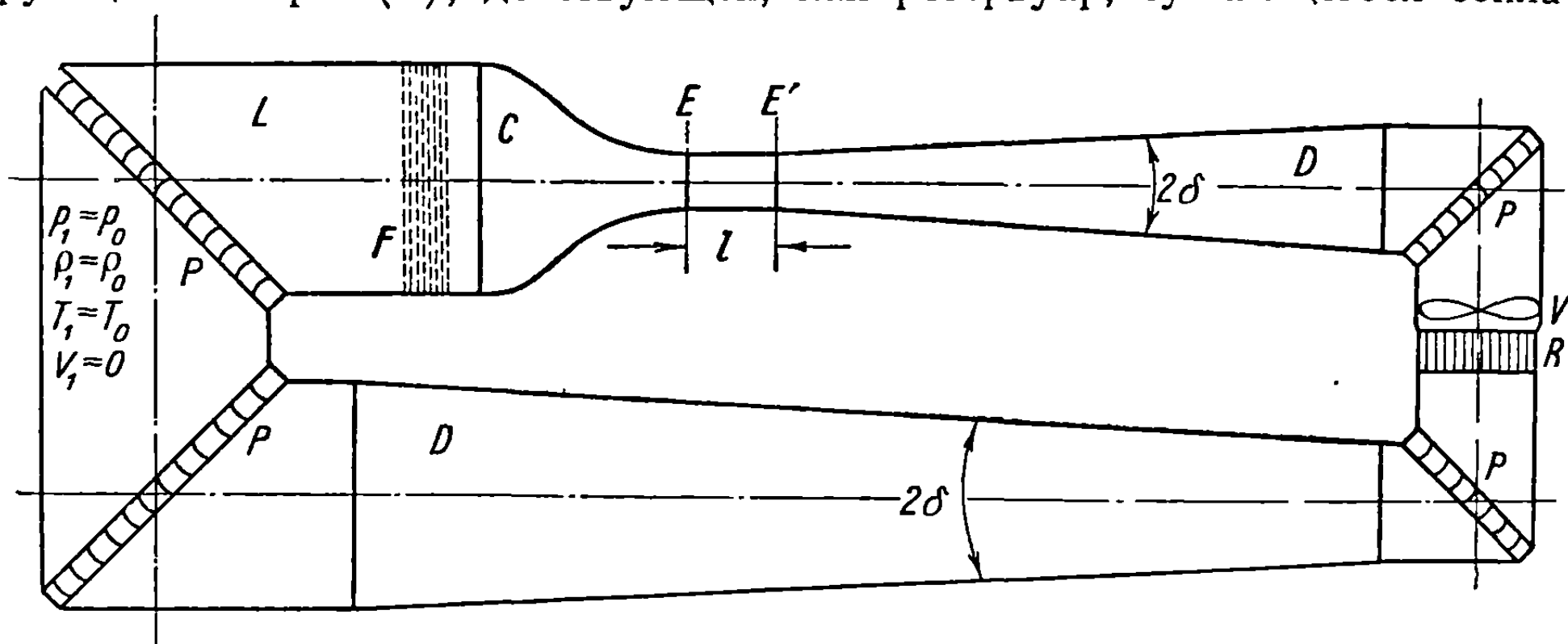
Хотя в последующих разделах мы пользуемся обычными обозначениями  $V$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , они должны рассматриваться как представляющие средние значения этих величин в соответствующих сечениях.

Теперь может быть приближенно описано действие аэродинамической трубы высоких скоростей. Хотя существует много типов аэродинамических труб, здесь будут рассматриваться обычные типы, наиболее часто употребляемые за последнее время.

Проблема является схематически одинаковой для всех типов труб, однако различие может быть в их геометрии и действии. Рассматривая поэтому нормальный тип замкнутого канала, включим изучение случаев дозвуковой и сверхзвуковой аэродинамических труб.

### 8.3. Условия течения в канале дозвуковой аэродинамической трубы

Дозвуковая аэродинамическая труба обычно состоит из стабилизирующей камеры ( $L$ ), действующей, как резервуар, сужающегося сопла



Фиг. 8.7

( $C$ ), рабочей части ( $E$ ,  $E'$ ), где проводятся эксперименты, и расширяющегося диффузора ( $D$ ), который является также обратным каналом, приводящим поток назад к стабилизирующей камере (фиг. 8.7).

В определенном месте канала устанавливается вентилятор ( $V$ ), приводимый в действие двигателем ( $M$ ).

Углы канала могут иметь закругленную форму, однако обычно делаются без закруглений. В этом случае около углов ( $P$ ), на соответствующих расстояниях, помещается система направляющих лопаток, отклоняющих поток на  $90^\circ$ , для того, чтобы получить равномерное распределение скоростей после поворота.

В стабилизирующую камеру обычно устанавливается регулирующая перегородка ( $F$ ), обеспечивающая регулярный и равномерный поток. Она состоит или из ячеек хонейкомба с плоскими стенками, параллельными направлению потока, или из системы проволочных сеток с мелкими отверстиями.

Для того чтобы изучить течение, нужно прежде всего рассмотреть условия в стабилизирующей камере, а именно давление  $p_1$ , плотность

$\rho_1$ , температуру  $T_1$  и скорость  $V_1$ . Так как скорость очень мала, ее квадратом в уравнении давления можно пренебречь:

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 \approx \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1}, \quad (8.4)$$

принимая, таким образом, приближенно, что в стабилизирующей камере существуют условия торможения:

$$\begin{aligned} \rho_1 &\approx \rho_0, \quad p_1 \approx p_0, \\ T_1 &\approx T_0, \quad V_1 \approx 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Масса воздуха, содержащегося в трубе, приводится в движение вентилятором, образующим поток, скорость которого в любой заданной точке трубы является функцией ее поперечного сечения в рассматриваемом месте. Наибольшая скорость получается в рабочей камере, где площадь сечения наименьшая (суженное сечение).

Однако в отдельных сечениях скорость также изменяется, в зависимости от мощности, производимой системой винт — двигатель. Для каждого значения этой мощности устанавливается совершенно определенное распределение скоростей вдоль трубы; так, при максимально создаваемой мощности получается максимальная скорость в канале трубы, остающаяся, однако, дозвуковой по предположению. Чтобы исследовать течение, необходимо изучить механизм различных преобразований движущейся массы газа.

Разность давлений, создаваемая винтом, компенсирует потери напора, вызванные процессами, связанными с диссипацией энергии (трение, турбулентность, вихри, сопротивление направляющих лопаток и других препятствий вдоль канала), а также потери, обусловленные охлаждением.

Если принять, что стенки трубы изолированы, то после достижения термического и динамического равновесия полная энергия, доставляемая двигателем, будет диссипироваться указанными выше необратимыми процессами, превращаясь в тепло, которое удаляется холодильником.

Масса газа поэтому приобретает механическую энергию от винта и возвращает ее окружающей среде в виде термической энергии. При этих условиях уравнение энергии не изменяется и энтальпия остается постоянной.

Задача состоит в определении скорости, давления, плотности и температуры в любой точке вдоль канала, а также мощности, которая требуется для достижения заданной скорости в рабочей камере.

Течение не является изэнтропическим благодаря необратимым процессам, происходящим в особенности между рабочей камерой ( $E$ ) и стабилизирующей камерой ( $L$ ). Часть кинетической энергии частиц газа диссипируется и только оставшаяся часть  $\eta$  превращается в потенциальную энергию (давление). Следовательно, в соответствии с утверждением Крокко [5], уравнение Бернулли в дифференциальной форме может быть заменено соотношением

$$\eta V dV + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (8.6)$$

Так как уравнение энергии (3.60б) остается неизменным благодаря тому, что канал предполагается изолированным, имеем

$$-VdV = C_p dT = \frac{\kappa}{\kappa - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad (8.7)$$

что приводит к новому уравнению состояния

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\eta\kappa}{\kappa - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right). \quad (8.8)$$

Хотя величина  $\eta$  меняется вдоль канала, для подсчетов качественного характера может быть взято ее среднее значение, и написанное выше уравнение может быть проинтегрировано. Тогда

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{p}{\rho_0}\right)^{1 - \frac{\kappa - 1}{\eta\kappa}}, \quad (8.9)$$

где  $\rho_0$ ,  $p_0$  — плотность и давление торможения. Это соотношение представляет политропический процесс общей формы

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const}, \quad (8.10)$$

при этом показатель  $n$  легко выводится из вышенаписанного соотношения и имеет величину, совпадающую с полученной ранее, при решении идентичной задачи (2.58):

$$\frac{1}{n} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\eta\kappa}. \quad (8.11)$$

Если  $\eta$  достаточно мало, то уравнение давления заметно изменяется. Действительно, в силу (8.10) и (8.11), уравнение (8.6) может быть проинтегрировано, после чего получается выражение, подобное тому, которое соответствовало изэнтропическому процессу (3.76):

$$V^2 = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0'}{\rho_0'} \left[ 1 - \left(\frac{p}{p_0'}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\eta\kappa}} \right]. \quad (8.12)$$

Поэтому, если потери значительны, т. е.  $\eta$  достаточно мало, изменения скорости и давления в диффузоре будут заметно отличаться от случая изэнтропического процесса.

Аналогичный закон может быть найден для температуры, если отправляться от уравнения состояния (2.4):

$$\frac{T}{T_0'} = \frac{p}{p_0'} \cdot \frac{\rho_0'}{\rho} = \left(\frac{p}{p_0'}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\eta\kappa}}. \quad (8.13)$$

Применяя уравнение (5.10), определяющее температуру в некотором сечении как функцию соответствующего числа Маха<sup>1</sup>, получим

$$\frac{p_0'}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\eta\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (8.14)$$

<sup>1</sup> Число Маха здесь по-прежнему определяется как  $M = \frac{V}{a}$ ,  $a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$ , т. е. как отношение скорости  $V$  к скорости звука при изэнтропическом процессе. (Прим. ред.)



Пусть  $p_e$ ,  $M_e$  обозначают давление и число Маха в выходном сечении рабочей камеры ( $E'$ ), тогда

$$\frac{p'_0}{p_e} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa - 1}}; \quad (8.15)$$

с другой стороны, если бы процесс в диффузоре был изэнтропическим, следовательно, без каких-либо потерь напора, то, обозначая через  $p_0$  соответствующее давление в воображаемом резервуаре, где скорость равна нулю, получим

$$\frac{p_0}{p_e} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (8.16)$$

Отсюда, замечая, что второе слагаемое в скобках мало, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p'_0}{p_e} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa - 1}} \approx \\ &\approx (1 - \eta) \left(1 + \frac{1}{4} (1 + \eta \kappa) M_e^2\right) \frac{\kappa}{2} M_e^2. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Потеря напора в диффузоре, вплоть до входа в сужающееся сопло, которую мы обозначим через  $\Delta p_d$ , будет определяться зависимостью

$$\begin{aligned} \Delta p_d = p_0 - p'_0 &= (1 - \eta) \left(1 + \frac{1}{4} (1 + \eta \kappa) M_e^2\right) \frac{\kappa}{2} p_e M_e^2 = \\ &= (1 - \eta) \left(1 + \frac{1}{4} (1 + \eta \kappa) M_e^2\right) \frac{1}{2} \rho_e V_e^2. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Это соотношение, если надлежащим образом уменьшить величину  $\eta$ , может в первом приближении включать также другие малые потери в канале, которые наблюдаются в сужающемся сопле, рабочей камере, углах и направляющих лопатках.

Потери в холодильнике должны, однако, рассматриваться отдельно, так как они представляют значительный процент общих потерь. Более детальный анализ этих потерь дан позже, для того чтобы определить с большей точностью величину потерь в каждом элементе аэродинамической трубы.

Возвращаясь к уравнению (8.18), нужно отметить, что оно основано на предположении о малой величине скорости в стабилизирующей камере.

Эта гипотеза включает неявно предположение, что площадь входного сечения сужающегося сопла значительно больше площади сечения рабочей камеры; это действительно верно в практических случаях, когда отношение сечений изменяется от 7 до 15 и очень редко оказывается меньше 4, что бывает только в случае сверхзвуковых аэродинамических труб.

Если величина  $p_1$  заметно отличается от давления торможения, и,

следовательно, скоростью  $V_1$  нельзя пренебречь, как в случае диффузоров некоторых аэродинамических труб, то написанное выше соотношение может быть исправлено следующим образом. Обозначая соответствующее число Маха через  $M_1$ , а давление в стабилизирующей камере через  $p_1$  и принимая во внимание потери, получим последовательно:

$$\frac{p_0'}{p_1'} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

$$\frac{p_1'}{p_e} = \frac{p_0'}{p_e} \cdot \frac{p_1'}{p_0'} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \approx \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} (M_e^2 - M_1^2)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (8.19)$$

В случае изэнтропического преобразования будем иметь

$$\frac{p_1}{p_e} = \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} (M_e^2 - M_1^2)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (8.20)$$

откуда после выполнения необходимых операций получается потеря напора:

$$p_1 - p_1' = \Delta p_d \approx (1 - \eta) \left[1 + \frac{1}{4} (1 + \eta\kappa) (M_e^2 - M_1^2)\right] \left(1 - \frac{M_1^2}{M_e^2}\right)^{\frac{\kappa}{2}} p_e M_e^2 =$$

$$= (1 - \eta) \left[1 + \frac{1}{4} (1 + \eta\kappa) \left(1 - \frac{M_1^2}{M_e^2}\right) M_e^2\right] \left(1 - \frac{M_1^2}{M_e^2}\right)^{\frac{1}{2}} p_e V_e^2, \quad (8.21)$$

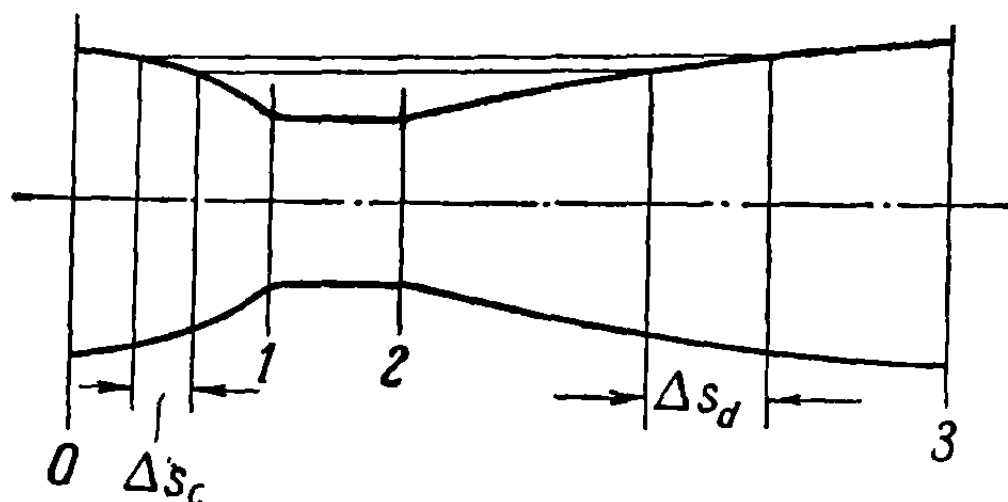
причем это выражение сводится к уравнению (8.18), если число  $M_1$  мало.

Очень трудно определить коэффициент  $\eta$ , особенно в случае неправильных каналов, с углами и направляющими лопатками, с цилиндрическими частями диффузора, со стенками его, наклоненными под углами переменной величины, и т. д.

Иногда, однако, значения  $\eta$  могут быть определены экспериментально, в функции от угла  $2\delta$  (фиг. 8.7) и числа Маха (эта последняя зависимость чрезвычайно слабая и ею можно пренебречь в первом приближении). Для этой цели можно дать соотношение, выражающее средние величины, выведенные из экспериментов. Например, предполагая, что экспериментальное число Маха больше 0,30 ( $M_e > 0,30$ ), ибо течение в канале с числом Маха ниже этого значения ведет себя так, как если бы жидкость была несжимаемой, и в этом случае вычисление скоростей и потерь напора становится элементарным, рассматривая плотность как постоянную (что справедливо в случае обычных труб малых скоростей) и имея в виду, что угол диффузора изменяется слабо вблизи оптимальной величины, соответствующей значению  $2\delta = 6^\circ$  (обычно от  $3$  до  $10^\circ$ ), можно использовать для значений  $M_e$ , изменяющихся между 0,3 и 0,85 включительно, следующую приближенную формулу:

$$\eta = 0,67 + 0,12\delta - 0,02\delta^2 \quad (8.22)$$

Эта формула представляет результаты экспериментов, проведенных с диффузорами, у которых отношение максимального поперечного сечения к минимальному больше 5. Она может быть поэтому применена к дозвуковым трубам, для которых предпочтительнее большая величина отношения поперечных сечений, что способствует созданию малой степени турбулентности. Если  $M_e$  больше 0,85 и приближается к единице, как в случае звуковой трубы, то начинает возрастать влияние трения, становясь значительным, если  $M_e$  близко к единице. Для  $M_e$  около 0,95 величина  $\eta$  заметно уменьшается; в этом случае может быть принято среднее значение  $\eta = 0,75$ .



Фиг. 8.8

**8.3.1. Потеря напора.** В предшествующих подсчет мы имели дело только с теми потерями напора, которые были обусловлены трением вдоль канала, от входа в диффузор до суживающегося сопла. Теперь добавим потери в суживающемся сопле и рабочей камере, а другие пассивные потери, как, например, потери в углах с установленными направляющими лопатками, в перегородках, холодильнике и т. д., рассмотрим позже. Все эти потери определяются экспериментально.

Нужно отметить с самого начала, что потери в суживающемся сопле пренебрежимо малы. Действительно, если рассмотреть часть суживающегося сопла длины  $\Delta S_c$ , то трение будет пропорционально поверхности усеченного конуса (фиг. 8.8). Трение пропорционально также поверхности усеченного конуса соответствующей длины и того же диаметра в канале диффузора, где можно приближенно принять, что скорость и плотность будут такими же, как в суживающемся сопле. Если и коэффициент трения будет тот же, то трение в суживающемся сопле можно приближенно принять находящимся в таком же отношении к трению в диффузоре, в каком находятся их длины, т. е. длина суживающегося конуса и длина диффузора вплоть до входного сечения суживающегося сопла. Это отношение обычно изменяется между 0,10 и 0,05, в зависимости от угла расширения  $2\delta$ , который может быть больше или меньше. Если иметь в виду, что величина коэффициента трения в суживающемся сопле, где течение вблизи стенок будет промежуточным между ламинарным и турбулентным, значительно меньше соответствующего коэффициента трения в диффузоре (который зависит от  $\delta$ ), где течение будет турбулентным около стенок, то можно заключить, что потери в суживающемся сопле представляют только незначительный процент  $\gamma_c$  от потерь в диффузоре:

$$\begin{aligned} \Delta p_c &= \gamma_c (1 - \eta) \left( 1 + \frac{1}{4} (1 + \eta \kappa) M_e^2 \right) \frac{\kappa}{2} \rho_e M_e^2 = \\ &= \gamma_c (1 - \eta) \left( 1 + \frac{1}{4} (1 + \eta \kappa) M_e^2 \right) \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = k_c \frac{1}{2} \rho_e V_e^2, \end{aligned} \quad (8.23)$$

причем коэффициент  $k_c$  дается формулой

$$k_c = \gamma_c (1 - \eta) \left( 1 + \frac{1}{4} (1 + \eta x) M_e^2 \right),$$

где  $\gamma_c$  заключается между 3 и 20%, в среднем равняясь 2,5%.

Потери в суживающемся сопле могут быть установлены прямым методом, путем подсчета соответствующих потерь в каждой элементарной части его, в согласии с обычной формулой, которая применена ниже, при вычислении потерь в рабочей камере. Приближение, данное выше, является, однако достаточным.

Потери в рабочей камере легко определяются через число  $M_e$ . Если  $\rho_e, p_e, V_e$  будут заданными условиями в выходном сечении рабочей камеры, то отсюда могут быть выведены температура  $T_e$  и соответствующая скорость звука  $a_e$ , а следовательно, и число  $M_e$ . Если, с другой стороны, известны условия на входе в суживающееся сопло ( $p_1, \rho_1, T_1, V \approx 0$ ), то, применяя изэнтропическое преобразование, что возможно, так как трением можно пренебречь, получим характеристики в рабочей камере, которые могут быть приняты за начальные данные для вычислений.

Чтобы обеспечить постоянную скорость в рабочей камере, ее стенки, нужно делать слегка расходящимися (с углом, меньшим одного градуса), компенсируя дросселирующий эффект, обусловленный пограничным слоем, который постепенно увеличивается по толщине вниз по потоку.

Обозначая через  $Re, \sigma_e, l_e, \omega_e$  соответственно число Рейнольдса<sup>1</sup>, поперечное сечение на выходном конце рабочей камеры, длину камеры и периметр сечения, можно вычислить потерю напора с помощью соотношения, аналогичного уравнению Блазиуса, но с более высоким коэффициентом трения  $C$ , учитывающим шероховатость поверхности:

$$\begin{aligned} \Delta p_e &= \frac{C}{Re^{1/4}} \frac{\omega_e l_e}{\sigma_e} \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = k_e \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = \\ &= k_e \frac{\gamma_c}{2} \rho_e M_e^2, \quad (C \approx 0,075 - 0,11), \end{aligned} \quad (8.24)$$

причем коэффициент  $k_e$  введен с целью упрощения.

Аналогичные рассуждения приводят к похожим соотношениям для углов и направляющих лопаток. Так, например, падение давления балансирует сопротивление направляющих лопаток для течения около углов. Если полная площадь поперечного сечения лопаток для какого-нибудь угла будет  $A_p$  и коэффициент сопротивления  $C_x$ , то

$$\Delta p_p = \sum \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{A_p}{A} C_x = \sum \frac{A_p}{A} C_x \frac{\gamma_c}{2} \rho M^2, \quad (8.25)$$

<sup>1</sup> В случае круглого сечения, обозначая диаметр сечения через  $d_e$  и коэффициент кинематической вязкости через  $\nu_e$ , определим число Рейнольдса формулой

$$Re = (d_e V_e) / \nu_e.$$

Для любого другого сечения эквивалентный диаметр подсчитывается по формуле

$$d_e = \frac{4\sigma_e}{\omega}.$$

где  $A$  — наклонное угловое сечение,  $\rho$ ,  $V$ ,  $p$ ,  $M$  — плотность, скорость, давление и число Маха в том же поперечном сечении; сумма относится ко всем углам и направляющим лопаткам, существующим вдоль канала. Выражая  $\rho$  и  $V$  через  $\rho_e$ ,  $V_e$  или  $p$  и  $M$  через  $p_e$ ,  $M_e$ , получим соотношение, аналогичное соотношению (8.24):

$$\Delta p_p = k_p \frac{\gamma}{2} p_e M_e^2 = k_p \frac{1}{2} \rho_e V_e^2. \quad (8.26)$$

Предполагается, что коэффициент  $k_p$  включает влияние проволочных перегородок в стабилизирующей камере.

При поворотах на  $90^\circ$  и для подходящего числа искривленных направляющих лопаток экспериментальные измерения дают следующее полное падение давления:

$$\Delta p_p = \sum \psi_p \frac{1}{2} \rho V^2 = \sum \psi_p \frac{\gamma}{2} p M^2, \quad (8.27)$$

где  $\psi_p \approx 0,08 - 0,12$ . Исходя из результатов вычислений для каждого отдельного угла и выражая их через  $p_e$ ,  $M_e$  или  $\rho_e$ ,  $V_e$ , получим этим путем после суммирования прежнее соотношение (8.26).

Потери, обусловленные холодильником, зависят от его типа, материала, из которого он построен, положения его в канале и т. д.; поэтому они не могут быть так легко подсчитаны, как в предыдущем случае.

Более рациональный метод состоит в рассмотрении баланса энергии. Тепло, выделенное массой воздуха в трубе, которое должно быть удалено через холодильник, эквивалентно механической энергии, требуемой для создания разности давлений, способной компенсировать потери вдоль канала, превращаемые в тепло диссипации. В этих условиях можно принять, что потеря напора через холодильник прямо пропорциональна количеству удаляемого тепла и, следовательно, полной мощности, поглощаемой вентилятором.

Приблизительно 8—12% полной наличной мощности представляют потери в холодильнике, или, приближенно, тот же процент полной потери напора между верхней и нижней сторонами вентилятора.

Если процесс охлаждения вызывается поступлением дополнительного холодного воздуха и выпуском равного количества горячего воздуха в атмосферу, то потери более велики и достигают 15 и даже 20%. В любом случае, обозначая эти потери через  $\epsilon$  процентов от полной потери напора  $\Delta p$ , определим потерю, обусловленную холодильником:

$$\Delta p_r = \epsilon \Delta p. \quad (8.28)$$

Суммируя все потери, имеем

$$\Delta p = \Delta p_c + \Delta p_e + \Delta p_p + \Delta p_d + \epsilon \Delta p, \quad (8.29)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta p = \frac{1}{1-\epsilon} \left[ (1 + \gamma_c) (1 - \eta) \left( 1 + \frac{1}{4} (1 + \eta\gamma) M_e^2 \right) + k_e + k_p \right] \times \\ \times \frac{1}{2} \gamma p_e M_e^2 = \frac{k}{1-\epsilon} \frac{1}{2} \gamma p_e M_e^2 = \frac{k}{1-\epsilon} \frac{1}{2} \rho_e V_e^2, \end{aligned} \quad (8.30)$$

причем выражение, содержащееся в скобках, заменено через  $k$ .

Если обозначить полезную мощность, производимую вентилятором, через  $P_u$  и объемный поток, проходящий сквозь вентилятор, через  $Q$ , то

$$P_u = Q \cdot \Delta p = Q \frac{k}{1-\varepsilon} \frac{1}{2} \kappa \rho_e M_e^2 = Q \frac{k}{1-\varepsilon} \frac{1}{2} \rho_e V_e^2. \quad (8.31)$$

Заменяя  $Q$  через поток массы  $m$ , который будет одинаков в любом сечении канала, и обозначая через  $\rho_v$  плотность впереди вентилятора, будем иметь

$$Q = \frac{m}{\rho_v} = \frac{\rho_e \sigma_e V_e}{\rho_v} \quad (8.32)$$

и, следовательно,

$$P_u = \frac{k}{1-\varepsilon} \sigma_e V_e \frac{\rho_e}{\rho_v} \frac{\kappa}{2} \rho_e M_e^2 = \frac{k}{1-\varepsilon} \sigma_e \frac{\rho_e}{\rho_v} \frac{1}{2} \rho_e V_e^3. \quad (8.33)$$

Обозначая коэффициент полезного действия вентилятора через  $\eta_v$ , получим требуемую мощность двигателя

$$P_m = \frac{1}{\eta_v} P_u. \quad (8.34)$$

**8.3.2. Коэффициент использования аэродинамической трубы.** Отношение между мощностью, передаваемой в рабочую камеру и обозначаемой через  $P_e$ , и полной мощностью  $P_u$ , доставляемой вентилятором, представляет коэффициент использования аэродинамической трубы, называемый также эффективностью использования.

Замечая, что

$$P_e = \frac{m}{2} V_e^2, \quad (8.35)$$

а также в силу соотношений (8.9) и (8.14), получим коэффициент использования, обозначаемый через  $q$ , в виде

$$q = \frac{P_e}{P_u} = \frac{1-\varepsilon}{k} \frac{\rho_v}{\rho_e} = \frac{1-\varepsilon}{k} \frac{\rho_v}{\rho'_0} \frac{\rho'_0}{\rho_e} = \\ = \frac{1-\varepsilon}{k} \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_v^2} \right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa-1} - 1} \approx \frac{1-\varepsilon}{k} \left[ 1 + \frac{1-\kappa(1-\eta)}{2} (M_e^2 - M_v^2) \right], \quad (8.36)$$

где  $M_v$  — число Маха впереди вентилятора, которое подсчитано ниже.

**8.3.3. Условия течения вдоль канала.** Чтобы определить изменения давления, плотности, скорости и температуры, примем изэнтропический закон для течения в суживающемся сопле, где потерями можно пренебречь, тогда как для диффузора будем использовать соотношения, выведенные из политропического закона (8.10). Для этой цели рассмотрим ту же рабочую камеру в ее выходном сечении, где приняты заданные условия  $V_e, \rho_e, \rho_e', T_e$ . При слабом расширении стенок для возмещения возрастания толщины погра-

ничного слоя скорость и, следовательно, также температура будут поддерживаться постоянными (стенки предполагаются непроницаемыми для тепла). При этих условиях энтальпия остается постоянной, так что плотность и давление на входе в рабочую камеру, соответственно  $\rho_e'$ ,  $p_e'$ , будут пропорциональны  $\rho_e$ ,  $p_e$ . Применяя уравнение (8.24), получим соотношение

$$\frac{\rho_e'}{\rho_e} = \frac{p_e'}{p_e} = \frac{p_e + k_e \frac{1}{2} \rho_e V_e^2}{p_e} = 1 + \frac{1}{2} k_e \frac{\rho_e}{p_e} V_e^2 = 1 + \frac{1}{2} k_e \gamma M_e^2, \quad (8.37)$$

из которого может быть определено  $\rho_e'$ .

Обозначая площадь входного сечения через  $\sigma_e'$ , выведем приближенное соотношение из уравнения неразрывности

$$\sigma_e' = \frac{\rho_e}{\rho_e'} \sigma_e = \left(1 - \frac{1}{2} k_e \gamma M_e^2\right) \sigma_e \quad (8.38)$$

Процесс может рассматриваться как изэнтропический от входного сечения суживающегося сопла вплоть до входного сечения  $\sigma_e'$  рабочей камеры. Пренебрегая скоростью в стабилизирующей камере, можно, как было сделано выше, принять, что  $\rho_1 \approx \rho_0$ ,  $p_1 \approx p_0$ ,  $T_1 \approx T_0$ ,  $V_1 \approx 0$ . При этих условиях, применяя уравнения (5.10), (5.14) и (5.15), получим последовательно:

$$T_1 \approx T_0 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right) T_e; \quad (8.39a)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \approx \rho_0 &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \rho_e' = \\ &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{1}{2} k_e \gamma M_e^2\right) \rho_e; \end{aligned} \quad (8.39b)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \approx \rho_0 &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_e' = \\ &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{1}{2} k_e \gamma M_e^2\right) \rho_e. \end{aligned} \quad (8.39b)$$

Для учета потерь в суживающемся сопле достаточно увеличить коэффициент  $k_e$  (8.24) в эквивалентном отношении, вводя, например, длину  $l_e' > l_e$ , которая включает эквивалентную длину суживающегося сопла, соответствующую потере напора.

От выходного сечения рабочей камеры вперед процесс в диффузоре будет политропическим. Поступая, как в случае изэнтропического преобразования, из уравнения неразрывности

$$m = \rho_e \sigma_e V_e = \rho \sigma V, \quad (8.40)$$

в соответствии с выражениями (8.10), (8.12), (8.14) и (8.15), получим соотношения

$$\left(\frac{\sigma_e}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{x-1}{\eta x}}}{1 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^{\eta x}} = \frac{2}{x-1} \frac{1}{M_e^2} \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{\frac{2}{n}} \left[1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 - \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{\frac{x-1}{2\eta}}\right], \quad (8.41)$$

где  $1/n$  определяется формулой (8.11). Эта формула дает возможность построить диаграмму для давления вдоль канала. Другие характеристики могут быть легко определены из политропических соотношений, через давление.

Применяя политропическое преобразование (8.10)

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \left(\frac{p}{p_e}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{p}{p_e}\right)^{1 - \frac{x-1}{\eta x}}, \quad (8.42)$$

подставляя результат в уравнение (8.41) и используя выражение (8.14), находим соотношение между плотностью и площадью сечения, а также между площадью сечения и числом Маха:

$$\left(\frac{\sigma_e}{\sigma}\right)^2 = \frac{M^2}{M_e^2} \left(\frac{1 + \frac{x-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{x-1}{2} M^2}\right)^{\frac{(2\eta-1)x+1}{x-1}}. \quad (8.43)$$

Это соотношение применяется вплоть до вентилятора. Обозначая через  $\rho_v$  и  $M_v$  давление и число Маха впереди вентилятора, получим, в согласии с уравнением (8.14),

$$\frac{\rho_v}{\rho_e} = \frac{\rho_v}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_e} = \left(\frac{1 + \frac{x-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{x-1}{2} M_v^2}\right)^{\frac{\eta x}{x-1}} \approx \left[1 + \frac{x-1}{2} (M_e^2 - M_v^2)\right]^{\frac{\eta x}{x-1}}, \quad (8.44)$$

где  $M_v$  определяется соотношением (8.43), если подставить  $M_v$  вместо  $M$  и  $\sigma_v$  вместо  $\sigma$ .

Допустим далее с целью упрощения, что холодильник расположен непосредственно за вентилятором. Полная мощность, передаваемая вентилятором, чтобы создать повышение давления, необходимое для компенсации потери напора, превращается в тепло диссипации, которое удаляется через холодильник.

Так как энергия, получаемая массой воздуха извне с помощью вентилятора, возвращается окружающей среде через холодильник, полная энергия воздуха, циркулирующего по трубе, остается постоянной; преобразование будет адиабатическим для канала в целом.



Если устанавливаются стационарные условия, то температура в любой точке канала остается неизменной. Для того чтобы восстановилось начальное значение температуры  $T_0$  в стабилизирующей камере, температура непосредственно за холодильником должна также возвратиться к ее значению впереди вентилятора, т. е. к  $T_v$ . Только таким путем уравнение энергии для адиабатического преобразования, которое не обязано быть изэнтропическим, так как может также происходить в соответствии с политропическим законом, удовлетворяется во всем канале. Как следствие этого уравнения — равным температурам соответствуют равные скорости, так что число Маха за холодильником будет таким же, как перед вентилятором, т. е. будет равно  $M_v$ .

Продвигаясь в противоположном направлении, от стабилизирующей камеры, где давление равно  $p_0$ , к холодильнику, где давление равно  $p_r$ , будем иметь соотношение

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa - 1}} \quad (8.45)$$

для любого сечения канала, причем число  $M$  будет определяться равенством, получающимся из уравнения (8.43), если  $\sigma_e$  заменить через  $\sigma_v$  и  $M_e$  через  $M_v$ ; соответственно получим

$$\frac{p_0}{p_r} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_v^2\right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa - 1}} \quad (8.46)$$

для сечения за холодильником. Применяя уравнение (8.39б), найдем соотношение

$$\frac{p_r}{p_e} = \frac{p_r}{p_0} \frac{p_0}{p_e} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left(1 + \frac{1}{2} k_e \kappa M_e^2\right)}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_v^2\right)^{\frac{\eta \kappa}{\kappa - 1}}}, \quad (8.47)$$

которое дает возможность определить полную потерю напора. Если обозначить через  $p'_v$  давление за вентилятором, то, так как потери в холодильнике предполагаются составляющими  $\epsilon$  процентов от полной потери напора ( $\Delta p = p'_v - p_v$ ), получим

$$p'_v = p_r + \epsilon (p'_v - p_v) = \frac{1}{1 - \epsilon} (p_r - \epsilon p_v); \quad (8.48)$$

следовательно, полная потеря напора определится формулой

$$\frac{p'_v - p_v}{p_e} = \frac{\Delta p}{p_e} = \frac{1}{1 - \epsilon} \left(\frac{p_r}{p_e} - \frac{p_v}{p_e}\right), \quad (8.49)$$

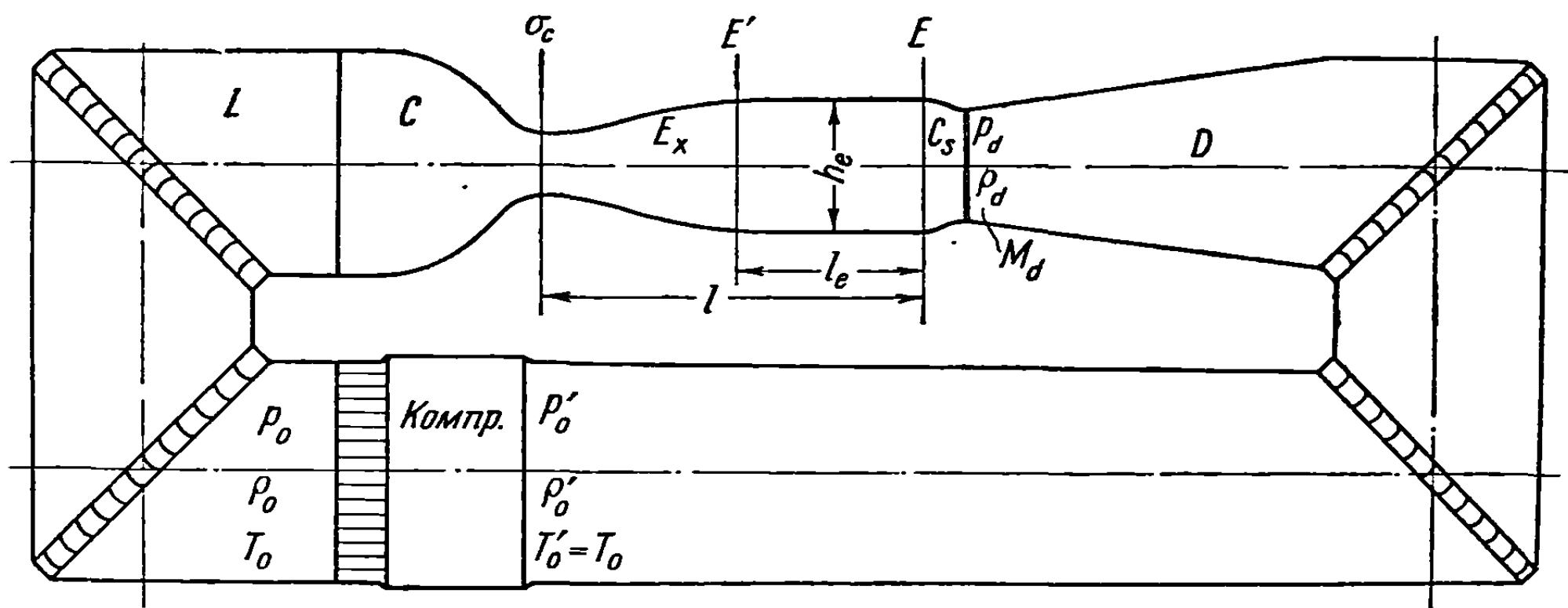
в которой члены в скобках могут быть заменены значениями, выведенными соответственно из уравнений (8.47) и (8.44).

Если принять во внимание потери при поворотах, то написанное выше соотношение будет эквивалентно равенству (8.30), которое было установлено ранее несколько иным путем.

**З а м е ч а н и е.** Предыдущие рассуждения были проведены для иллюстрации приложения одномерного течения в условиях общего политропического преобразования.

#### 8.4. Условия течения в сверхзвуковой аэродинамической трубе

Канал сверхзвуковой аэродинамической трубы состоит из стабилизирующей камеры ( $L$ ), которая действует как резервуар, суживающегося сопла



Фиг. 8.9

( $C$ ), горловины ( $\sigma_c$ ), зоны расширения ( $E_x$ ), рабочей камеры ( $E'E$ ), короткой суживающейся зоны ( $C_s$ ), за которой следует расходящийся диффузор ( $D$ ), образующий возвратный канал, приводящий снова к стабилизирующей камере. В некоторой точке этого канала помещается компрессор, а за ним — холодильник (фиг. 8.9).

За время, пока компрессор достигнет своей нормальной производительности, поток массы возрастает от нуля до максимума, соответствующего критическим условиям в горловине  $\sigma_c$ . Поток сначала будет дозвуковым по всему каналу, потом достигает значения  $M = 1$  в горловине и первоначально входит в расширяющуюся зону с дозвуковой скоростью. С этого момента поток массы изменяется очень слабо, только по мере того, как критические условия в горловине слегка изменяются в зависимости от возрастания давления в стабилизирующей камере. По мере возрастания мощности, отдаваемой компрессором, поток становится сверхзвуковым сразу после прохождения горловины и переходит в дозвуковой ниже по течению, проходя через систему нормальных и косых ударных волн. При дальнейшем возрастании разности давлений, создаваемой компрессором, сверхзвуковое течение устанавливается во всей рабочей камере, стремясь распространиться по другую сторону диффузора, состоящего из сходящейся и расходящейся частей. Потеря напора была бы малой, если бы скорость могла безударно превращаться в давление при переходе через сходящуюся часть диффузора, достигая значения критической скорости в горловине и становясь далее дозвуковой вдоль всей длины возвратного канала, вплоть до сужающегося сопла.

Так как описанное выше течение является неустойчивым и не может быть практически реализовано, диффузор, состоящий из сходящейся и расходящейся частей, должен быть подобран экспериментально. Переход от сверхзвукового к дозвуковому течению осуществляется в нем посредством системы ударных волн (ниже по потоку относительно рабочей камеры), структура которой должна быть такой, чтобы расход энергии сводился к минимуму. Установлено как теоретически, так и экспериментально, что потеря напора прежде всего вызывается нормальной ударной волной в суживающейся зоне, при скорости, близкой к той, которая получается в рабочей камере. Так как эта потеря значительна, то потеря в диффузоре оказывается пренебрежимо малой. Поэтому расчет сверхзвуковой аэродинамической трубы может быть выполнен более простым способом.

Предположим, как и в предыдущем случае, что скорость в стабилизирующей камере пренебрежимо мала и что давление, плотность и температура равны значениям  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  при условиях торможения.

Число Маха  $M_e$  в рабочей камере примем за переменный параметр. Чтобы обеспечить постоянную скорость  $V_e$  вдоль всей длины рабочей камеры, ее стенки должны слегка расширяться, чтобы возместить утолщение пограничного слоя, обусловленное трением. Отметим, что поток в рабочей камере заключен между двумя параллельными вертикальными стенками, и только другие стенки образуют профиль, обеспечивающий течение с постоянной скоростью через рабочую часть трубы. Построение такого профиля рассмотрено позже.

Обозначая через  $k_e$  числовой коэффициент, показывающий потери напора в суживающемся сопле и рабочей камере, которые отделены друг от друга горловиной, получим

$$\Delta p_e = k_e \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = k_e \frac{1}{2} \rho_e M_e^2. \quad (8.50)$$

Так как эти потери невелики, изменение состояния между суживающимся соплом и рабочей камерой может быть принято изэнтропическим. При этих условиях, применяя обычные соотношения, получим давление в стабилизирующей камере

$$p_0 = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_e + k_e \frac{\gamma}{2} \rho_e M_e^2. \quad (8.51)$$

Чтобы определить коэффициент  $k_e$ , нужно произвести трудоемкие вычисления, исходя из значения коэффициента трения, или же использовать экспериментальные данные для непосредственного определения этих коэффициентов.

Так как потери в суживающемся сопле очень малы, они могут быть включены в потери, существующие в рабочей камере. Учитывая, что трение очень велико вблизи критической скорости, можно установить, что потери напора в суживающейся и расширяющейся частях сопла и рабочей камере приблизительно эквивалентны потерям в канале длиной  $l$ , большей длины  $l_e$  рабочей камеры.

Хотя потери напора при высокой скорости, близкой к критической и превышающей ее, изменяются в зависимости от чисел Рейнольдса и Маха

очень сложным образом, тем не менее, экспериментальное наблюдение показывает, что изменение коэффициента трения  $C_f$  в трубах подобно его изменению в несжимаемом течении:

$$\frac{1}{\sqrt{4C_f}} = -0,8 + 2 \ln(\text{Re} \sqrt{4C_f}), \quad (8.52)$$

где  $\text{Re}$  представляет соответствующее число Рейнольдса.

В случае рабочей камеры, обозначая ее периметр через  $\omega_e$  и площадь поперечного сечения через  $\sigma_e$ , можно определить число Рейнольдса путем рассмотрения эквивалентного кругового поперечного сечения:

$$\text{Re} = \frac{d_e V_e}{\nu_e} = \frac{4\sigma_e V_e}{\omega_e \nu_e}. \quad (8.53)$$

Предполагая, что поперечное сечение не изменяется на длине  $l$ , можно приближенно определить потери напора в согласии с соотношением

$$\Delta p_e = C_f \frac{\omega_e l_e}{\sigma_e} \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = k_e \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = k_e \frac{1}{2} \gamma \rho_e M_e^2, \quad (8.54)$$

где коэффициент  $k_e$  введен с целью упрощения.

Потери в диффузоре зависят от числа Маха  $M_d$  непосредственно за ударной волной. Хотя не известны ни точное положение ударной волны, ни число Маха впереди нее, тем не менее, последнее можно без большой ошибки принять равным  $M_e$ , и в этом случае, применяя уравнение (7.13), получим выражение для  $M_d$

$$M_d^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2}{\gamma M_e^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}. \quad (8.55)$$

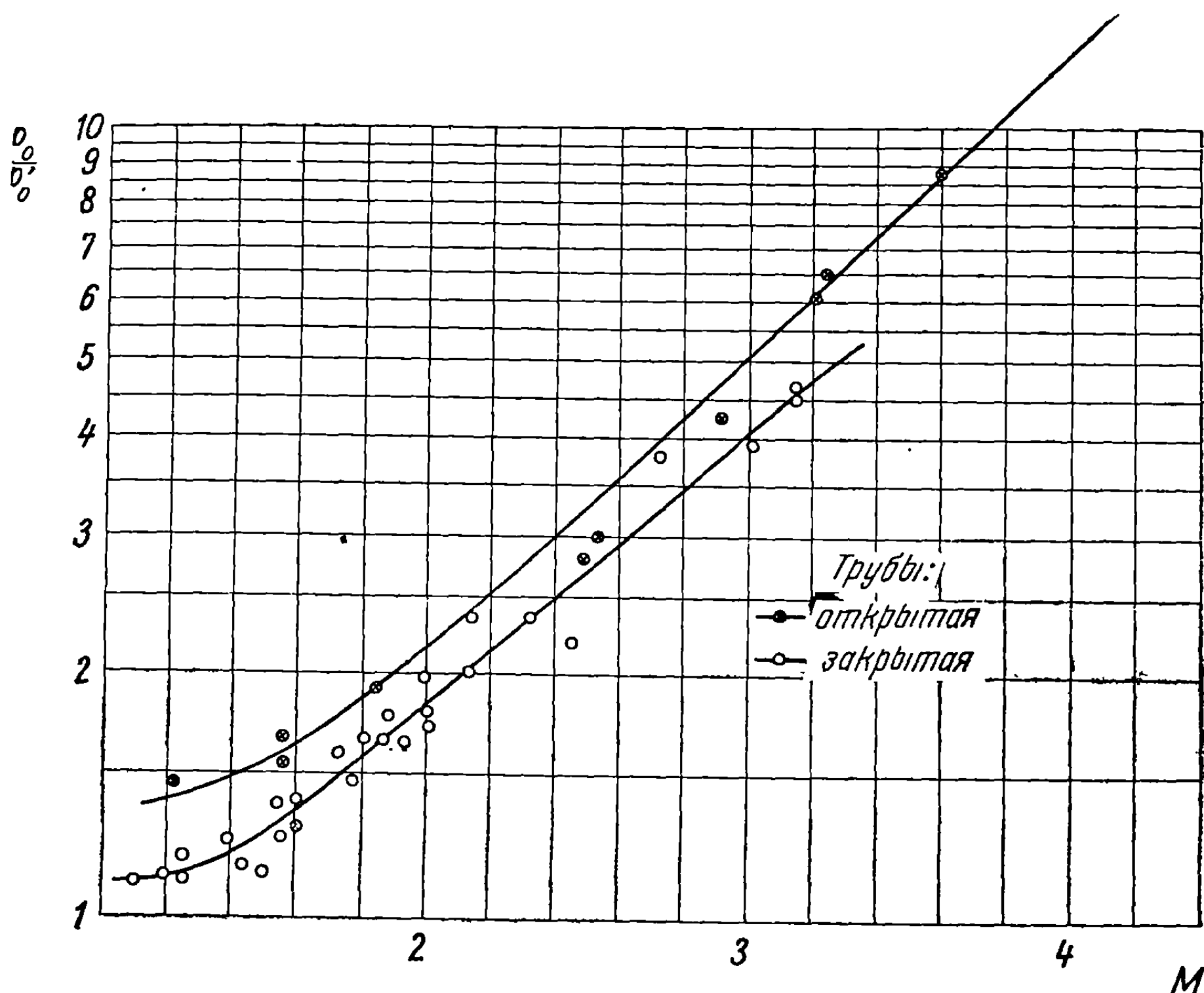
При известном  $M_d$  могут быть определены характеристики течения вверх от компрессора (фиг. 8.9). Обозначим их через  $p'_0$ ,  $\rho'_0$ ,  $T'_0 = T_0$ . Заметим, что температуры потока перед компрессором и за холодильником будут одинаковы, так как иначе не может поддерживаться термическое равновесие. В этом как раз и состоит роль холодильника: восстановить температуру газа после политропического сжатия, совершающегося в компрессоре. Для упрощения предполагается, что холодильник расположен непосредственно за компрессором.

Как и в предыдущем случае,

$$\frac{p'_0}{p_d} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_d^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (8.56)$$

Если пренебречь потерями при поворотах и в направляющих лопатках, предполагая, что холодильник поглощает благодаря трению  $\epsilon$  процентов от полной мощности компрессора, то останется еще определить потери при переходе через ударную волну, которые будут наиболее значительными. Путем экспериментальных наблюдений можно установить место, в котором возни-

кает ударная волна, и получить отсюда точное значение потерь. Опыты показывают, что ударная волна вначале появляется при числе Маха, значение которого очень близко к числу  $M_e$ , так что последнее может быть с уверенностью использовано. Напомним, что этот результат в определенной степени подтверждается теорией. В таком случае отношение давлений



Фиг. 8.10

при переходе через ударную волну дается, в соответствии с зависимостью (7.15), формулой

$$\frac{p_d}{p_e} = \frac{2x}{x+1} M_e^2 - \frac{x-1}{x+1} \quad (8.57)$$

Объединяя уравнения (8.51), (8.56) и (8.57), выводим соотношение

$$\frac{p_0}{p_0'} = \frac{p_0}{p_e} \frac{p_e}{p_d} \frac{p_d}{p_0'} = \frac{\left(1 + \frac{x-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{x}{x-1}} + k_e \frac{x}{2} M_e^2}{\left(\frac{2x}{x+1} M_e^2 - \frac{x-1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{x-1}{2} M_d^2\right)^{\frac{x}{x-1}}} \cdot \frac{\eta_x}{\eta_x} \quad (8.58)$$

Если компрессор совершенно не зависит от холодильника, то необходимо найти отношение сжатия в самом компрессоре, которое является одной из его основных характеристик. Предполагая, как и ранее, что  $\epsilon$  процентов от мощности компрессора расходуется для возмещения потерь в холодильнике, и замечая, что мощность пропорциональна разности давлений, можно

приближенно подсчитать потери в холодильнике в процентном отношении к полным потерям.

Обозначая через  $p_0^*$  давление за компрессором, запишем

$$\frac{p_0^*}{p_0'} = \frac{p_0 + \varepsilon (p_0^* - p_0')}{p_0'} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left( \frac{p_0}{p_0'} - \varepsilon \right). \quad (8.59)$$

Подставляя вместо  $\frac{p_0}{p_0'}$  его значение, полученное из уравнения (8.58), можно подсчитать отношение сжатия как функцию числа Маха в рабочей камере. Это отношение можно сравнить с экспериментальной диаграммой фигуры 8.10, представляющей результаты, полученные в различных действующих аэродинамических трубах [6]. С помощью этого отношения может быть выбран требуемый компрессор, при условии, что известна также потребная мощность, которая является функцией перепада давления в трубе.

Нужно отметить, что хотя процент  $\varepsilon$  изменяется с изменением типа употребляемых холодильника и компрессора, он может быть, однако, оценен как величина, заключенная в интервале от 8 до 15%.

Разность давлений при переходе через компрессор определится из соотношений (8.51) и (8.58):

$$\begin{aligned} \frac{p_0^* - p_0'}{p_e} &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \left( \frac{p_0}{p_e} - \frac{p_0'}{p_e} \right) = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left( \frac{p_0}{p_e} - \frac{p_0'}{p_0} \frac{p_0}{p_e} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{x}{x-1}} + k_e \frac{x}{2} M_e^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2x}{x+1} M_e^2 - \frac{x-1}{x+1} \right) \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\eta x}{x-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Для подсчета мощности нужно предварительно определить скорость течения, исходя из потока массы, который будет постоянным при прохождении всего канала. Таким образом,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{m}{p_0'} = \frac{\rho V \sigma}{p_0'} = \frac{\rho_c c \sigma_c}{p_0'} = \frac{\rho_c}{p_0} \frac{p_0}{p_0'} \sigma_c \sqrt{\frac{2x}{x+1} R T_0} = \\ &= \left( \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{p_0}{p_0'} \sigma_c \sqrt{\frac{2x}{x+1} R \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right) T_e}, \end{aligned} \quad (8.61)$$

где  $\frac{p_0}{p_0'}$  должно быть заменено его значением из уравнения (8.58).

Полная отдаваемая компрессором мощность будет

$$P_u = Q (p_0^* - p_0'), \quad (8.62)$$

и коэффициент использования определится формулой

$$q = \frac{P_e}{P_u} = \frac{\rho_0'}{2} \frac{V_e^2}{\rho_0'' - \rho_0'} = \frac{\rho_0'}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_e} \frac{P_e}{\rho_0'' - \rho_0'} \cdot \frac{x}{2} M_e^2 \approx$$

$$\approx \frac{\rho_0'}{\rho_0} \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\rho_e}{\rho_0'' - \rho_0'} \frac{x}{2} M_e^2, \quad (8.63)$$

где  $P_e$  — мощность, передаваемая в рабочую камеру (8.35), а отношения давлений могут быть заменены их значениями (8.58) и (8.60).

**З а м е ч а н и е.** Приведенные расчеты служат для иллюстрации приложения одномерного течения, не исчерпывая всей проблемы построения аэродинамических труб, аспекты которой различаются в соответствии с различными системами используемых труб. Эти формулы, однако, достаточны для аэродинамических расчетов труб тех типов, которые были схематически описаны.

### 8.5. Рассмотрение сверхзвуковых аэродинамических труб прерывистого действия

Чтобы избежать дорогостоящих установок, часто строятся сверхзвуковые *аэродинамические трубы прерывистого действия*. Они состоят из такого же канала, как на фиг. 8.9, но без компрессора и возвратного канала, которые заменяются резервуаром со сжатым воздухом  $R$ , и вакуум-резервуаром (фиг. 8.11), расположенными вверх и вниз по потоку. Верхний резервуар может быть заменен свободной атмосферой, тогда сохраняется только нижний резервуар, в котором существует пониженное давление  $p_1$ ; если сохраняется верхний резервуар с давлением  $p_0$ , то труба на выходе может сообщаться со свободной атмосферой.

Во всех случаях течение устанавливается благодаря разности давлений вверх и вниз по потоку относительно рабочей камеры и становится сверхзвуковым, если отношение давлений в резервуарах больше, чем  $\frac{p_0}{p_0'}$ , и компенсирует потери напора, связанные с ударной волной и трением.

Так как давления  $p_0$  и  $p_1$  в резервуарах быстро уравниваются после открытия пускового клапана, сверхзвуковое течение в рабочей камере сохраняется только очень короткое время. Такая прерывно действующая сверхзвуковая труба используется поэтому в случаях, когда для наблюдения процесса или измерения характеристических свойств течения либо препятствия, помещенного в поток, достаточно 10—20 сек.

Как только установится сверхзвуковое течение в рабочей камере, поток массы и число Маха будут постоянными.

В таких условиях, обозначая характеристики течения в рабочей камере индексом  $e$ , получим

$$m = \sigma_e \rho_e V_e = \sigma_e \rho_e a_e M_e = \sigma_e \rho_0 a_0 M_e \frac{\rho_e}{\rho_0} \frac{a_e}{a_0} =$$

$$= \sigma_e \rho_0 a_0 M_e \left( 1 + \frac{x-1}{2} M_e^2 \right)^{-\frac{x+1}{2(x-1)}}. \quad (8.64)$$





относительно простую установку в случае аэродинамических труб прерывного действия, в которых получается отлично выдерживаемый постоянный поток за подсчитанное выше время.

## 8.6. Измерение давления и температуры

Чтобы определить характеристики течения в отдельной точке, нужно знать статическое давление  $p$  в ней, а также давление торможения  $p_0$ . Предполагая, что эти величины известны, можно легко вывести остальные характеристики, применяя формулы, установленные в разделе 5.1.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{2}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right], \\ M_0^2 &= \frac{2}{\kappa - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] \end{aligned} \quad (8.68)$$

для чисел Маха, определяемых как функции местной скорости звука, или скорости звука в покоящемся газе ( $M = \frac{V}{a}$ ,  $M_0 = \frac{V}{a_0}$ ); далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \\ \frac{T}{T_0} &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}, \\ \frac{a}{a_0} &= \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}}, \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \kappa p M^2. \quad (8.70)$$

Предполагая, что температура торможения может быть измерена с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \kappa R T_0, \\ a^2 &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} a_0^2, \end{aligned} \quad (8.71)$$

определяем величину скорости

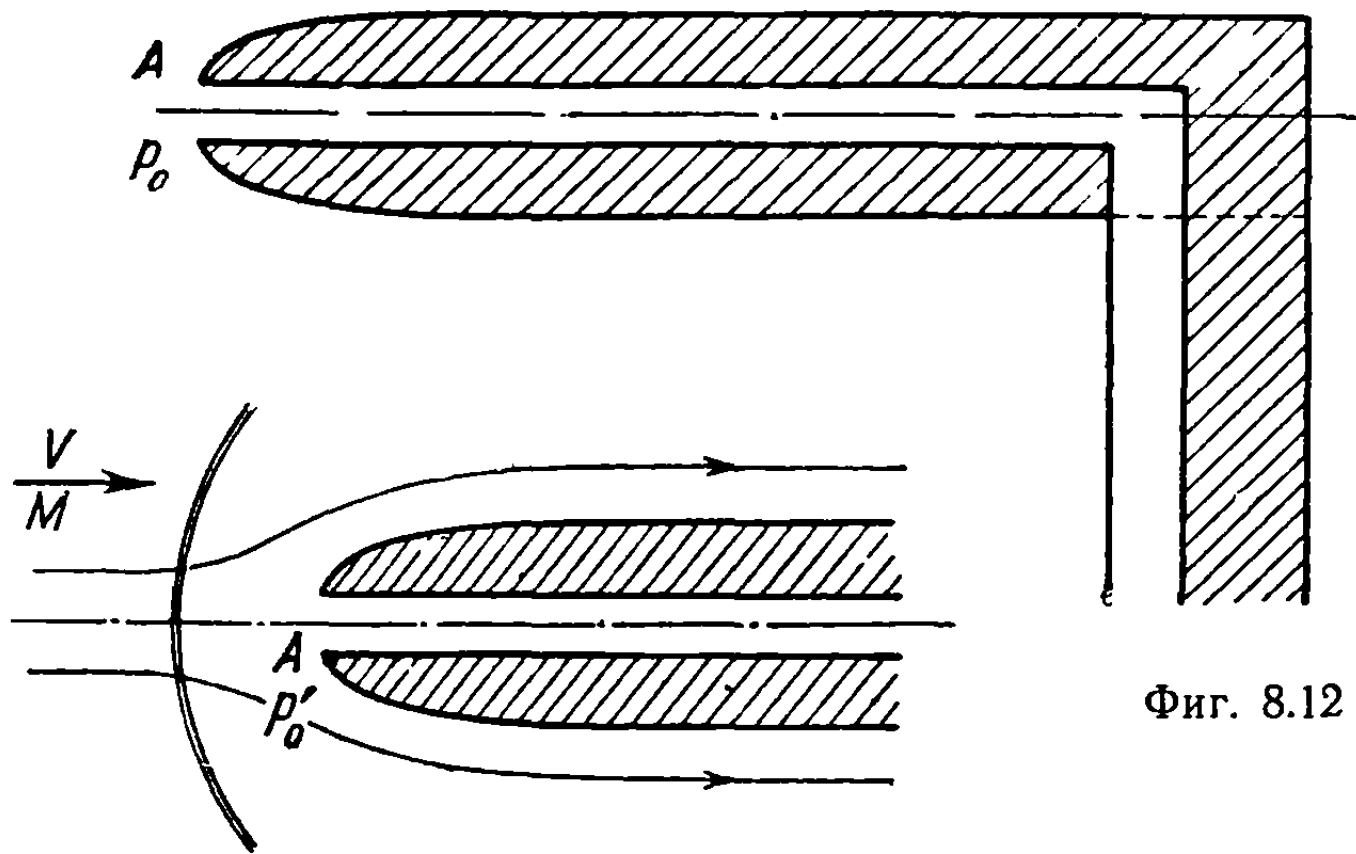
$$V = aM. \quad (8.72)$$

Рассмотрим методы, используемые для измерения значений давления и температуры.

**8.6.1. Измерение давления торможения.** Давление торможения  $p_0$  может быть хорошо измерено в дозвуковом потоке для чисел Маха вплоть до 0,99 с помощью *трубки Пито* даже в том случае, если направление потока в точности не известно. Опыты показывают, что влияние отклонения потока по отношению к оси трубки пренебрежимо вплоть до  $10^\circ$  и дает ошибку приблизительно в 1%, если отклонение достигает  $15^\circ$ . Поэтому трубка Пито является наиболее простым и эффективным приспособлением для измерения давления торможения в застойной точке  $A$ .

Трубка Пито может быть также использована в случае сверхзвукового течения, при условии, что будет принята во внимание отошедшая ударная волна, которая появляется впереди трубки и не может быть предотвращена (фиг. 8.13).

Ударная волна будет нормальна по отношению к очень тонкой трубке тока, ось которой является продолжением оси трубки Пито; в этом



Фиг. 8.12

Фиг. .13

случае формула (7.28) дает отношение давления торможения  $p_0$  впереди ударной волны к давлению  $p_0'$ , измеренному в застойной точке A:

$$\frac{p_0}{p_0'} = \left( \frac{2x}{x+1} M^2 - \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \left( \frac{2 + (x-1) M^2}{(x+1) M^2} \right)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (8.73)$$

Применяя уравнение (5.14), получим

$$\frac{p}{p_0'} = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{p_0'} = \left( \frac{2x}{x+1} M^2 - \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \left( \frac{x+1}{2} M^2 \right)^{-\frac{x}{x-1}}. \quad (8.74)$$

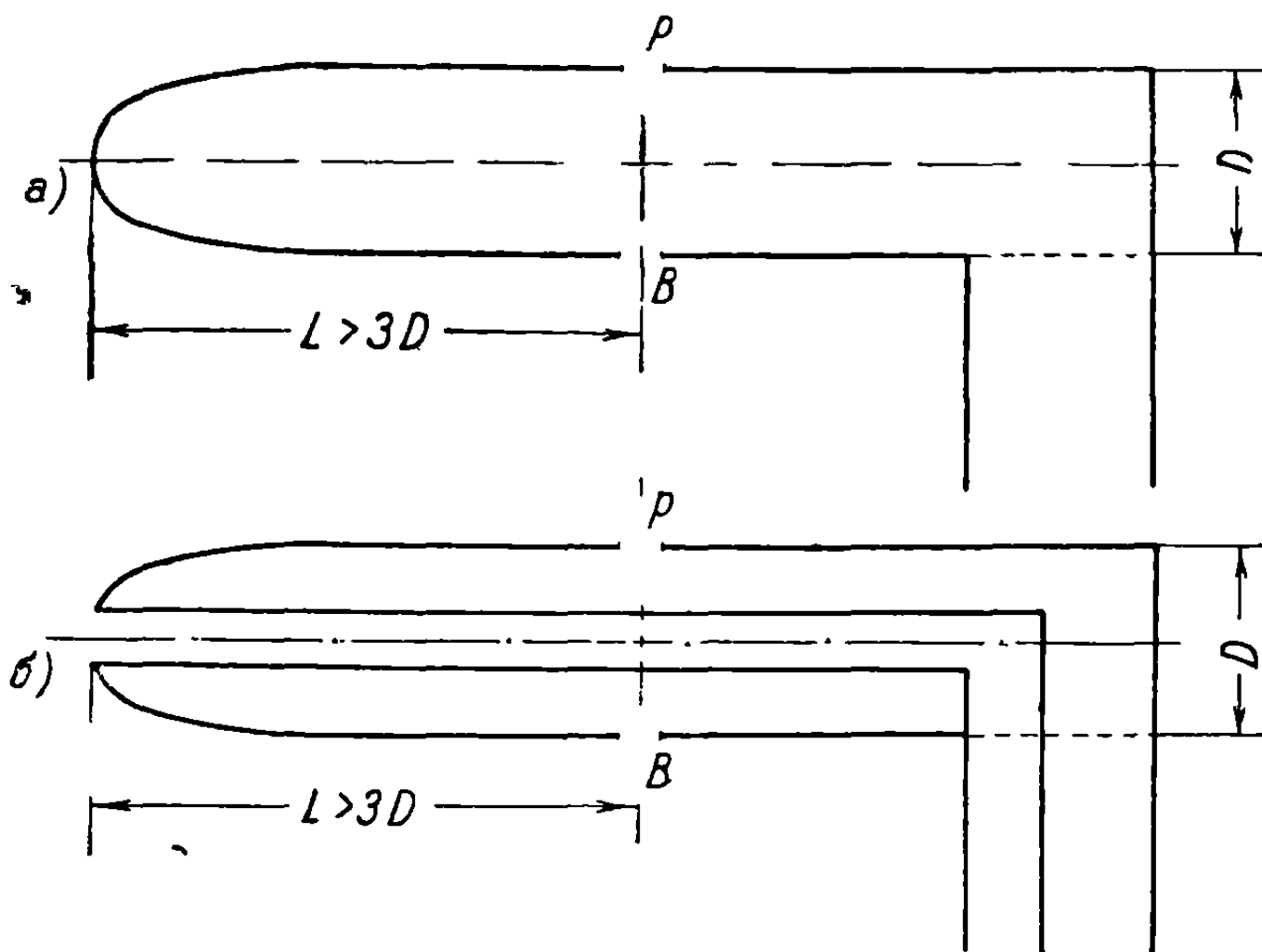
Если давление торможения  $p_0$  и статическое давление потока в той же точке, измеренное независимо от первого, известны, то число Маха может быть определено из установленной выше формулы и все характеристики течения подсчитаны путем применения соотношений (8.69) и (8.70).

**8.6.2. Измерение статического давления.** Для значений числа Маха, меньших 0,9, статическое давление может быть измерено той же трубкой, как и в случае несжимаемого течения (фиг. 8.14), в особенности, когда отклонение скорости от оси трубки не имеет заметного влияния, что наблюдается, если угол отклонения не превышает  $10^\circ$ . Отверстие для измерения статического давления должно находиться от носика трубки на достаточно большом расстоянии  $L$  для того, чтобы исключить влияние закругленного конца трубки.

Если скорость и давление изменяются мало вдоль отрезка длины  $L$ , то может быть использована *статическая трубка Пито* для определения

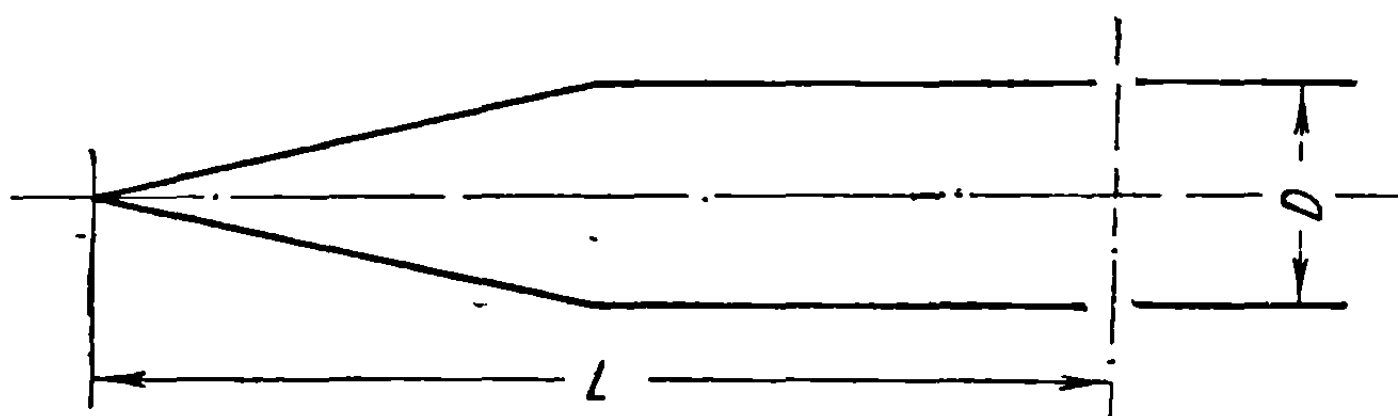
как статического давления, так и давления торможения (фиг. 8.14, б). Простая трубка статического давления широко используется, в особенности в случае больших скоростей (фиг. 8.14, а).

Для значений числа Маха, больших 0,9, течение будет звуковым на головном конце трубки и скорость его далеко превзойдет скорость звука



Фиг. 8.14, а,б

в определенных точках трубки, что будет приводить к возникновению ударных волн и изменению статического давления в отверстиях трубки. В этом случае, для того, чтобы задержать образование ударных волн и



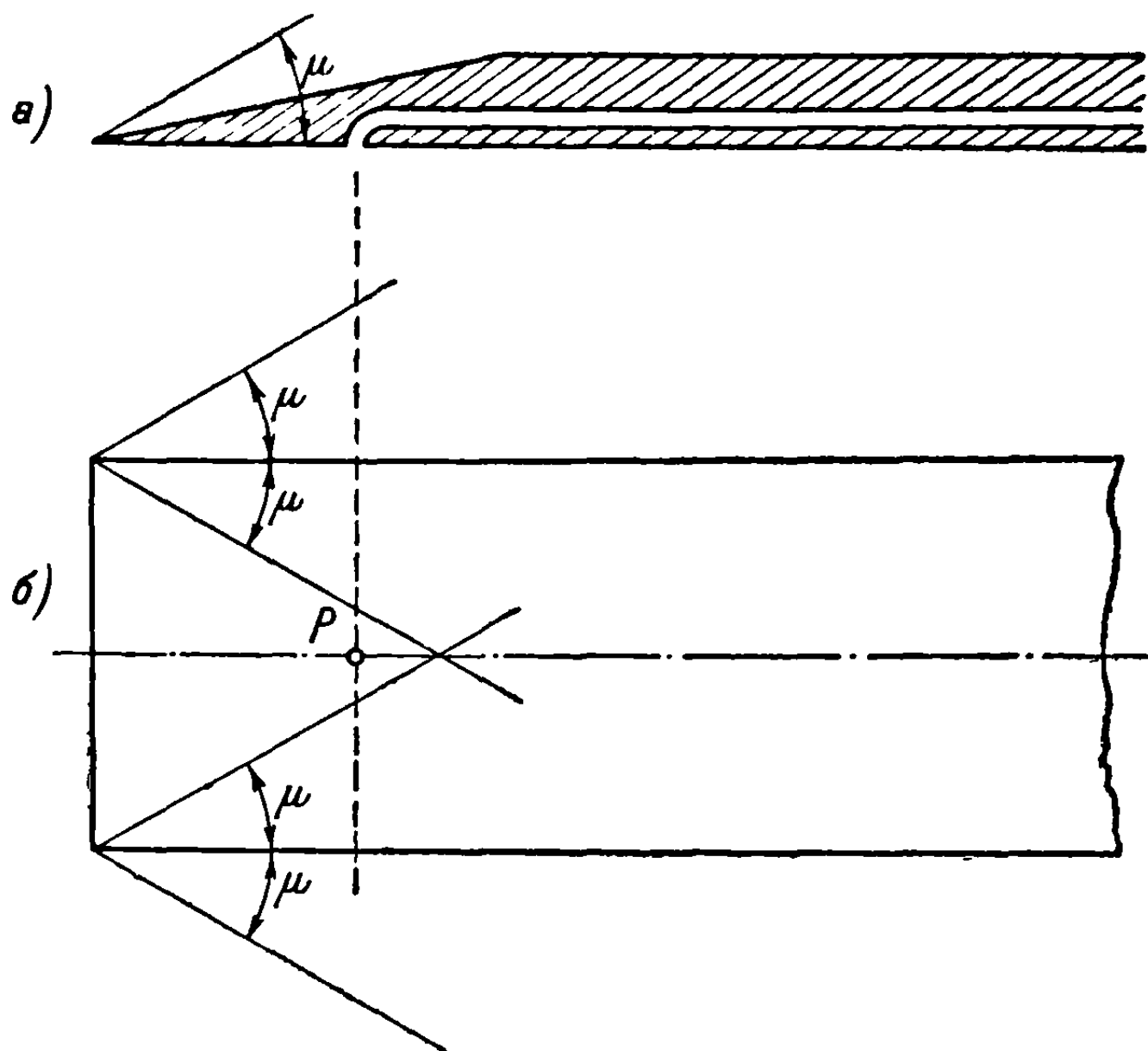
Фиг. 8.15

таким путем избежать изменения статического давления даже вплоть до значений  $M = 0,95—0,97$ , используется трубка с коническим наконечником, сходящимся к точке (фиг. 8.15). Эта трубка может быть также использована для измерения статического давления в сверхзвуковом потоке.

Расстояние  $L$  от кончика трубки до сечения, соответствующего отверстию, должно быть достаточно велико ( $6D < L < 12D$ ) для устранения возмущающего влияния наконечника. Позже, в связи с рассмотрением сверхзвукового течения вокруг конуса, показано, что это возможно в пределах общепринятых приближений.

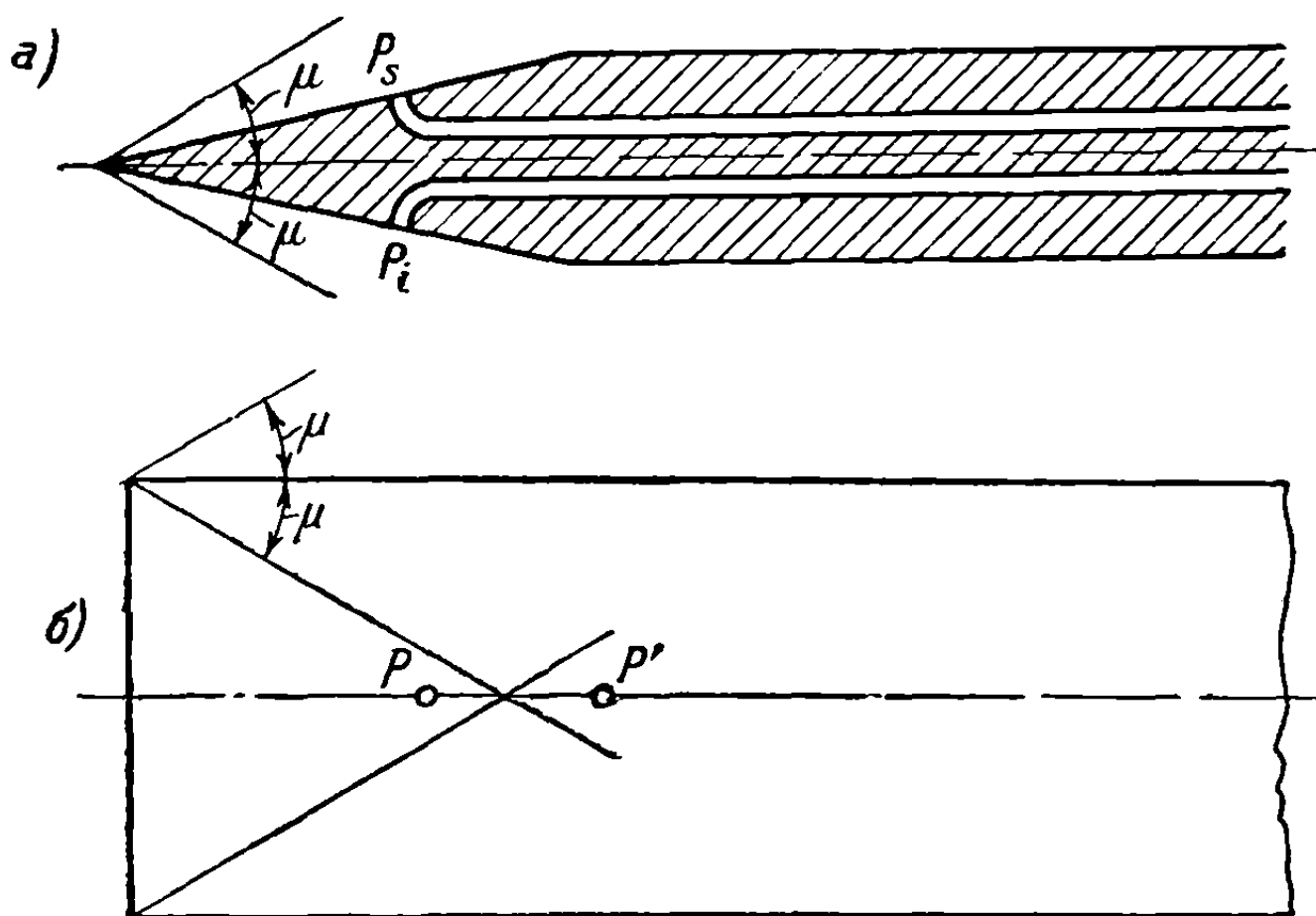
Трубка имеет то преимущество, что измеряет статическое давление почти точно, если отклонение потока от оси ее меньше  $10^\circ$  при угле конусности трубки, также не превышающем  $10^\circ$ .

Если направление скорости определено точно, то используется насадка клинообразной формы, нижняя часть которого располагается параллельно потоку (фиг. 8.16, а). Косая ударная волна, появляющаяся



Фиг. 8.16 а,б

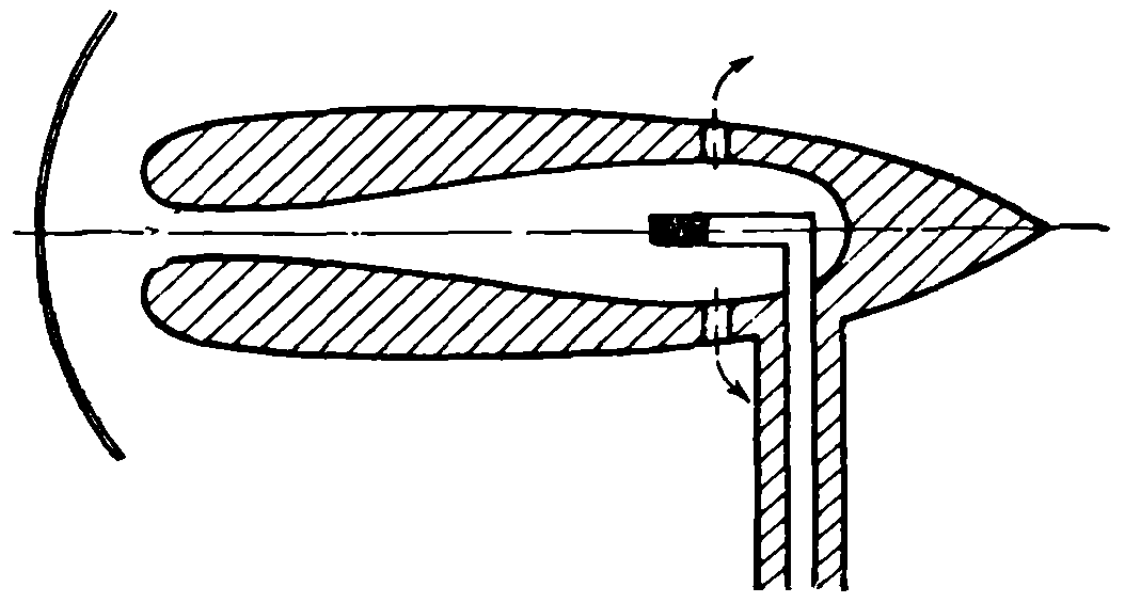
у верхней части, не оказывает никакого влияния на нижнюю поверхность, где течение сохраняет те же интенсивность и направление, что и выше по потоку. Однако, имея в виду ширину насадка, нужно поместить отверстие  $P$  (фиг. 8.16, б) вне углов Маха, имеющих вершины в концах насадка.



Фиг. 8.17, а,б

Этот инструмент, хотя и очень точный, не может быть использован, если направление скорости не известно, потому что на статическое давление в точке  $P$  будет влиять любое отклонение потока от нижней поверхности, как бы мало оно ни было.

**8.6.3. Определение направления скорости.** В случае дозвуковых течений может быть использован любой прибор с симметричными отверстиями. При сверхзвуковых течениях должны быть приняты специальные меры предосторожности. Используется, например, симметричный, клинообразной формы, заостренный к концу насадок (фиг. 8.17) с двумя отверстиями,  $P_s$  и  $P_i$ , помещенными точно на его оси.



Фиг. 8.18

Если ось параллельна скорости, то давления в точках  $P_s$  и  $P_i$  равны, несмотря на ударные волны, отходящие от носика. Вращением насадка добиваются равенства давлений в этих точках, определяя таким

образом направление скорости. Направление потока указывается даже в том случае, когда статическое отверстие находится в точке  $P'$ , расположенной внутри конусов Маха, выходящих из концов насадка.

**8.6.4. Измерение температуры торможения.** Температуру потока измерить очень трудно вследствие того, что скорость на поверхности шарика термометра из-за наличия пограничного слоя равна нулю; температура будет поэтому приближаться к значению температуры торможения  $T_0$ . Благодаря излучению, теплопроводности и конвекции достигаемая температура будет промежуточной между действительной и  $T_0$ . По этой причине обычно измеряется  $T_0$ , которая с помощью соответствующих приборов определяется с большой точностью. Инструмент такого типа (фиг. 8.18) может состоять из трубки Вентури [7], через которую циркулирует очень медленный поток. Вследствие того, что скорость как на входе, так и на выходе из диффузора будет пренебрежимо малой, можно считать температуру очень близкой к температуре торможения  $T_0$ . На выходе из диффузора нормально к потоку помещается термопара с низкой теплопроводностью, которая будет регистрировать точную температуру торможения, близкую к температуре потока на входе и выходе из диффузора. Поток производится с помощью выпускных отверстий, специально устраиваемых для этой цели. Таким образом, температуры потока и торможения, в соответствии с уравнением энергии, будут иметь значения, очень близкие между собой, поэтому ошибка будет незначительной. Отметим, что описанный прибор может быть использован для замеров как в дозвуковом, так и сверхзвуковом течениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Липман и А. Е. Пакет. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости (пер. с англ.). ИЛ, 1949.
2. J. V. Foa and E. Rudinger. On the Addition of Heat to Gas Flowing in a Pipe at Subsonic Speed. (Нагревание газа, текущего в трубе при дозвуковой скорости.) «J. Aeronaut. Sci.», 16, No. 2, 1949, p. 84—95.

3. M. R o y. Thermodynamique des systèmes propulsifs à réaction et de la turbine à gaz. (Термодинамика реактивных двигателей и газовых турбин.) Dunod, Paris, v. VIII, 1947, p. 160.
4. А. Ф е р р и. Аэродинамика сверхзвуковых течений (пер. с англ.). Гос. изд. техн.-теорет. лит., М., 1953.
5. L. С г о с с о. Gallerie aerodinamiche per alta velocita. (Аэродинамическая труба с переменной скоростью.) «Aerotecnica», 15, № 3, 7, 8, 1935, p. 735—738; № 3, p. 237—275.
6. Современное состояние аэродинамики больших скоростей (пер. с англ.), т. II, ИЛ, 1956.
7. А. F r a n z. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung. Berlin.

## Глава 4

### ОБЩЕЕ ДОЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ. РАССМОТРЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОГО РЕЖИМА

В этой главе разбирается влияние сжимаемости на аэродинамические характеристики крыльев конечного и бесконечного размахов при гипотезе малых возмущений. Общий случай двумерного дозвукового течения вокруг любого контура при наличии или отсутствии циркуляции будет затем исследован без помощи этого упрощающего предположения с особым применением к задаче обтекания крыльев.

Рассмотрены также условия течения при смешанных трансзвуковых режимах с целью подготовки изучения в последующих главах сверхзвуковых течений.

#### 9. ТЕОРИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ (ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ)

Рассмотрим любое течение, в котором скорости очень мало отличаются от скорости свободного потока. Пусть  $u, v, w$  компоненты скорости возмущения по отношению к координатной системе  $Oxyz$ , предполагаемые очень малыми; пусть  $U_\infty$  скорость свободного потока, имеющая направление положительной оси  $x$ ; тогда компонентами полной скорости будут

$$U = U_\infty + u, \quad v = v, \quad w = w. \quad (9.1)$$

Обозначая общий потенциал скорости через  $\Phi$  и потенциал скорости возмущений через  $\varphi$ , получим очевидные равенства:

$$\Phi = xU_\infty + \varphi; \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - U_\infty = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w. \quad (9.3)$$

Напомним, в соответствии с выражением (5.43), что если  $u, v, w$  очень малы, то потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (9.4)$$

где

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}. \quad (9.5)$$

К типам течений, удовлетворяющих поставленным выше условиям, будут принадлежать течения вокруг тонких тел, имеющих малые поперечные размеры, или около стенок, приблизительно параллельных общему направлению потока, которые могут иметь волнистость с малой поперечной амплитудой.

Эти течения могут изучаться прямым или косвенным способом, например, путем сравнения с аналогичными явлениями в несжимаемой жидкости.

Некоторые интересные случаи обычных применений в области аэродинамики рассмотрены ниже с использованием обоих методов подхода.

В силу уравнения (9.4) для потенциала и граничных условий, соответствующих каждому отдельному случаю, задача будет сводиться к нахождению потенциала возмущения  $\phi$  и, в частности, к определению скорости возмущения  $u$ , которая требуется, как показано ранее (см. раздел 5.1.3), для подсчета давления. В самом деле, ранее было указано, что в предположении малых возмущений коэффициент давления в любой точке определяется формулой (5.28)

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -2 \frac{u}{U_\infty},$$

где  $p$  — местное давление в рассматриваемой точке, а  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  — соответственно давление и плотность свободного потока.

### 9.1. Двумерное течение вдоль волнообразной стенки (прямой метод)

Рассмотрим сечение, проведенное поперек стенки, имеющей волнообразную форму, и пусть

$$y = h \sin \alpha x \quad (9.6)$$

будет уравнение контура, причем  $h$  — амплитуда, предполагаемая очень малой по сравнению с длиной волны  $l$ , которая связана с величиной  $\alpha$  соотношением

$$\alpha = \frac{2\pi}{l}. \quad (9.7)$$

С целью упрощения волна представляется простой синусоидой, как в случае, рассмотренном Аккеретом [1]. Так как скорости возмущения очень малы, то, снеся граничные условия в точке  $P$  контура на ось абсцисс, будем иметь

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = h\alpha \cos \alpha x = \left(\frac{v}{U_\infty + u}\right)_P \approx \left(\frac{v}{U_\infty}\right)_{y=0}, \quad (9.8)$$



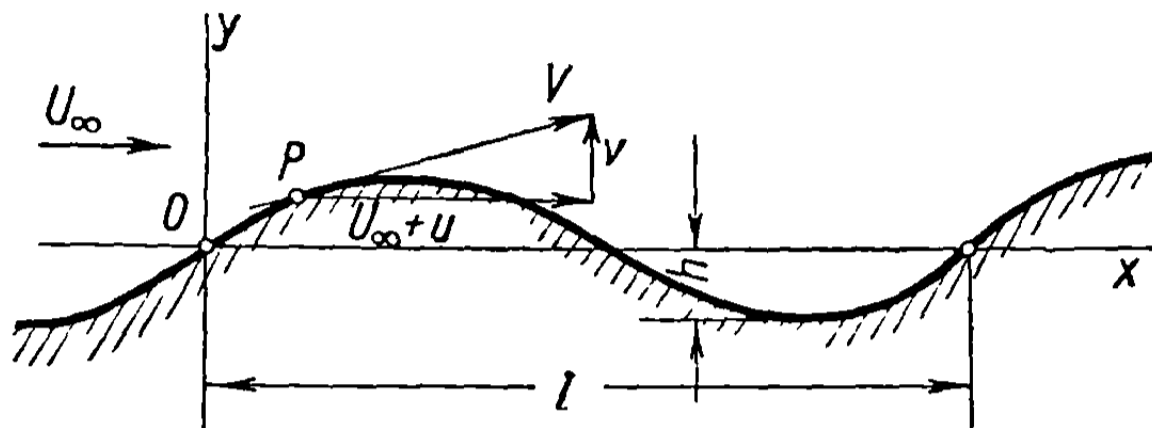
откуда получается граничное условие для потенциала  $\varphi$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = U_{\infty} h\alpha \cos \alpha x. \quad (9.9)$$

Из-за двумерности течения уравнение (9.4) примет вид

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (9.10)$$

и будет представлять уравнение эллиптического типа, так как коэффициент при первом члене положителен.



Фиг. 9.1

Основной задачей является — определить потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению (9.10) и условию (9.9).

Применим метод разделения переменных, полагая

$$\varphi = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y), \quad (9.11)$$

где  $\varphi_1$  — функция только от  $x$ , а  $\varphi_2$  — функция только от  $y$ .

Уравнение (9.10) принимает вид

$$(1 - M_{\infty}^2) \varphi_2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = -\varphi_1 \frac{d^2\varphi_2}{dy^2}, \quad (9.12)$$

или, после деления обеих его частей на  $\varphi_1\varphi_2$ ,

$$\frac{(1 - M_{\infty}^2)}{\varphi_1} \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi_2} \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} = k, \quad (9.13)$$

где  $k$  должно быть некоторой постоянной, так как первая часть равенства является функцией только от  $x$ , а вторая — функцией только от  $y$ .

Теперь нужно интегрировать два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \frac{k}{1 - M_{\infty}^2} \varphi_1 &= 0, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} + k\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

решения которых просты и зависят от знака  $k$ .

Применяя условие (9.9) и имея в виду (9.11), получим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \varphi_1 \left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right)_{y=0} = U_{\infty} h\alpha \cos \alpha x. \quad (9.15)$$

Так как последняя часть является функцией только от  $x$ , а  $\varphi_2$  есть функция только от  $y$ , то

$$\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right)_{y=0} = \text{const.} \quad (9.16)$$

Рассматривая выражение для  $\varphi_1(x)$ , определяемое равенством (9.15), и имея в виду первое уравнение (9.14), приходим к заключению, что постоянная  $k$  должна быть отрицательной, следовательно,

$$k = -\sigma^2. \quad (9.17)$$

Полагая, с другой стороны, с целью упрощения

$$(1 - M_\infty^2) = \frac{1}{\nu^2} \quad (9.18)$$

и подставляя введенную величину в первое уравнение (9.14), получим конечный результат в виде

$$\varphi_1(x) = A_1 \cos \nu \sigma x + B_1 \sin \nu \sigma x. \quad (9.19)$$

Точно также ясно, что второе уравнение (9.14) имеет простое экспоненциальное решение:

$$\varphi_2(y) = A_2 e^{-\sigma y} + B_2 e^{\sigma y}. \quad (9.20)$$

Из соотношений (9.15) и (9.16) следует, что  $B_1 = 0$ , а из того, что функция  $\varphi_2(y)$  будет конечной при  $y \rightarrow \infty$ , вытекает, что  $B_2 = 0$ ; в этих условиях полный потенциал принимает вид

$$\varphi = A_1 A_2 e^{-\sigma y} \cos \nu \sigma x = A e^{-\sigma y} \cos \nu \sigma x. \quad (9.21)$$

Дифференцируя по  $y$ , получим, в соответствии с уравнением (9.9), соотношения

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\sigma A e^{-\sigma y} \cos \nu \sigma x \Big|_{y=0} = -\sigma A \cos \nu \sigma x = U_\infty h \alpha \cos \alpha x, \quad (9.22)$$

из которых могут быть найдены постоянные  $\sigma$  и  $A$ :

$$\begin{aligned} \nu \sigma &= \frac{\sigma}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \alpha, \\ -A &= \frac{U_\infty h \alpha}{\sigma} = \frac{U_\infty h}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Подставляя эти значения в уравнение (9.21), находим выражение для потенциала

$$\varphi = -\frac{U_\infty h}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} e^{-\sigma y} \cos \alpha x, \quad (9.24)$$

причем  $\sigma$  определяется первым соотношением (9.23).

Чтобы применить зависимость (5.28), определяющую давление в любой точке, нужно вычислить компоненту скорости  $u$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{U_{\infty} h \alpha}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} e^{-\sigma y} \sin \alpha x, \quad (9.25)$$

откуда

$$C_p = - \frac{2h\alpha}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} e^{-\sigma y} \sin \alpha x. \quad (9.26)$$

На стенке, так как предполагается, что она совпадает с осью абсцисс,  $y$  рассматривается равным нулю, и потому

$$C_p = - \frac{2h\alpha}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \sin \alpha x. \quad (9.27)$$

При гипотезе несжимаемой жидкости, обозначая коэффициент давления через  $C_{pi}$ , получим

$$C_{pi} = - 2h\alpha \sin \alpha x, \quad (9.28)$$

отсюда выводится общий результат

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}. \quad (9.29)$$

Формула (9.29) употребляется во всех последующих рассуждениях, когда будет приниматься гипотеза малых возмущений. Из этой формулы следует, что разрежение стремится увеличиться сверх любого предела при возрастании  $M_{\infty}$ . Однако надо отметить, что указанная формула может быть применена только до определенного значения числа Маха, выше которого компонента  $u$  становится значительной по величине, и гипотеза малых возмущений не будет иметь смысла. Если скорость возмущения возрастает, то полная скорость будет также возрастать, до тех пор, пока не будет достигнута критическая скорость, что повлечет за собой изменение основ всего исследования и фундаментально изменит форму течения. Указанное явление большой практической важности для авиации рассмотрено позже.

## 9.2. Течение вокруг тонких профилей (крылья бесконечного размаха)

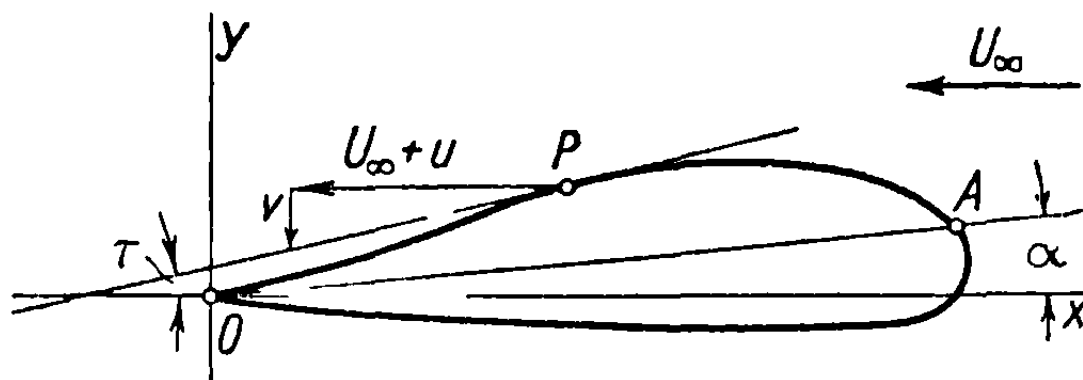
Теория малых возмущений имеет большое значение в связи с ее приложением к изучению течений вокруг профилей крыльев. Пусть  $OA$  будет таким профилем (фиг. 9.2) и

$$y = y(x) \quad (9.30)$$

уравнением его контура относительно координатной системы, ось абсцисс которой параллельна скорости свободного потока. Как толщина,

так и угол атаки  $\alpha$ , образуемый осью  $OA$  профиля с направлением потока, очень малы, так что ординаты контура могут также рассматриваться как крайне малые.

По этой причине в любой точке  $P$  профиля скорость отличается от скорости свободного потока только на величину чрезвычайно малых компонент  $u$  и  $v$  скорости возмущения.



Фиг. 9.2

Как и в предыдущем случае,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \frac{v}{U_\infty + u} \approx \frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{P_1} \approx \frac{1}{U_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad (9.31)$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости возмущения.

Так как ордината точки  $P$  чрезвычайно мала, можно предположить, что условие (9.31) удовлетворяется при  $y = 0$ , как и было записано выше. Присоединяя дифференциальное уравнение эллиптического типа (9.10), получим следующую систему уравнений:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.32)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = U_\infty \frac{dy}{dx},$$

которые приводят к решению задачи. Метод Прандтля—Глауэрта состоит в сравнении действительного течения сжимаемой жидкости с фиктивным течением несжимаемой жидкости вокруг соответствующего профиля, уравнение которого в плоскости  $\omega\xi\eta$  дается выражением

$$\eta = \eta(\xi). \quad (9.33)$$

Пусть  $\varphi_i$  будет потенциал скорости возмущения вокруг нового профиля, удовлетворяющий той же системе (9.32), которая в случае несжимаемой жидкости, когда  $M_\infty = 0$ , примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\eta^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = U_\infty \frac{d\eta}{d\xi}. \quad (9.34)$$

Предполагая, что профиль, заданный уравнением (9.33), известен, можно определить  $\varphi_i$  с помощью методов, используемых для течений несжимаемой жидкости. Выражая потенциал  $\varphi$  сжимаемого течения как функцию от  $\varphi_i$ , будем иметь

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \gamma\varphi(x, y), \quad (9.35)$$

где  $\gamma$  — коэффициент, который должен быть определен. Применяя аффинное преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = By, \quad (9.36)$$

где положено ради упрощения

$$B = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad (9.37)$$

и дифференцируя, получим последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} &= \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\gamma}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} &= \frac{\gamma}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

откуда, имея в виду уравнение (9.34), выводим соотношение

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} = \gamma \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (9.39)$$

Очевидно теперь, что выражение (9.35) есть решение уравнения (9.32) для потенциала.

Условия на поверхности тела будут также удовлетворены, если будет выполняться соотношение

$$U_\infty \frac{dy}{dx} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{B}{\gamma} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{B}{\gamma} U_\infty \frac{d\eta}{d\xi} \quad (9.40)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2}}{\gamma} \frac{d\eta}{d\xi}. \quad (9.41)$$

Это соотношение связывает реальный профиль, обтекаемый газом, и преобразованный профиль, расположенный в несжимаемом потоке. Так как коэффициент  $\gamma$  остается неопределенным, могут быть предложены два его значения, дающие простую интерпретацию написанного выше условия.

**9.2.1. Случай инвариантного профиля.** Если

$$\gamma = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad (9.42)$$

то условие (9.41) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad (9.43)$$

следовательно, касательная к профилю остается той же и, поскольку это справедливо также для хорды профиля, контур профиля остается неизменным (фиг. 9.3).

С другой стороны, из уравнения (9.35) выводим

$$\varphi = \frac{1}{\gamma} \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \varphi_i, \quad (9.44)$$

откуда, дифференцируя по  $x$ , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}. \quad (9.45 \text{ a})$$

Следовательно, обозначая через  $u$  и  $u_i$  компоненты скорости возмущений, параллельные осям абсцисс в двух плоскостях ( $Oxy$  и  $\omega \xi \eta$ ) в соответствующих точках, имеем соотношение

$$u = \frac{u_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad (9.45 \text{ б})$$

из которого, применяя формулу (5.28), получим аналогичное соотношение между коэффициентами давления  $C_p$  и  $C_{pi}$ , найденное также при рассмотрении предшествующей задачи (9.29):

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Теперь очевидно, что, интегрируя давление, можно найти подъемную силу, или коэффициент подъемной силы  $C_z$  как функцию от соответствующего коэффициента  $C_{zi}$  в случае несжимаемого течения:

$$C_z = \frac{C_{zi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (9.46)$$

Пусть  $C_m$  будет коэффициентом момента относительно какой-нибудь точки, в частности, относительно передней кромки, и  $C_{m0}$  — коэффициент момента при нулевой подъемной силе<sup>1</sup>; замечая, что давления отличаются друг от друга одним и тем же постоянным множителем, получим

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{C_{mi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \\ C_{m0} &= \frac{C_{m0i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

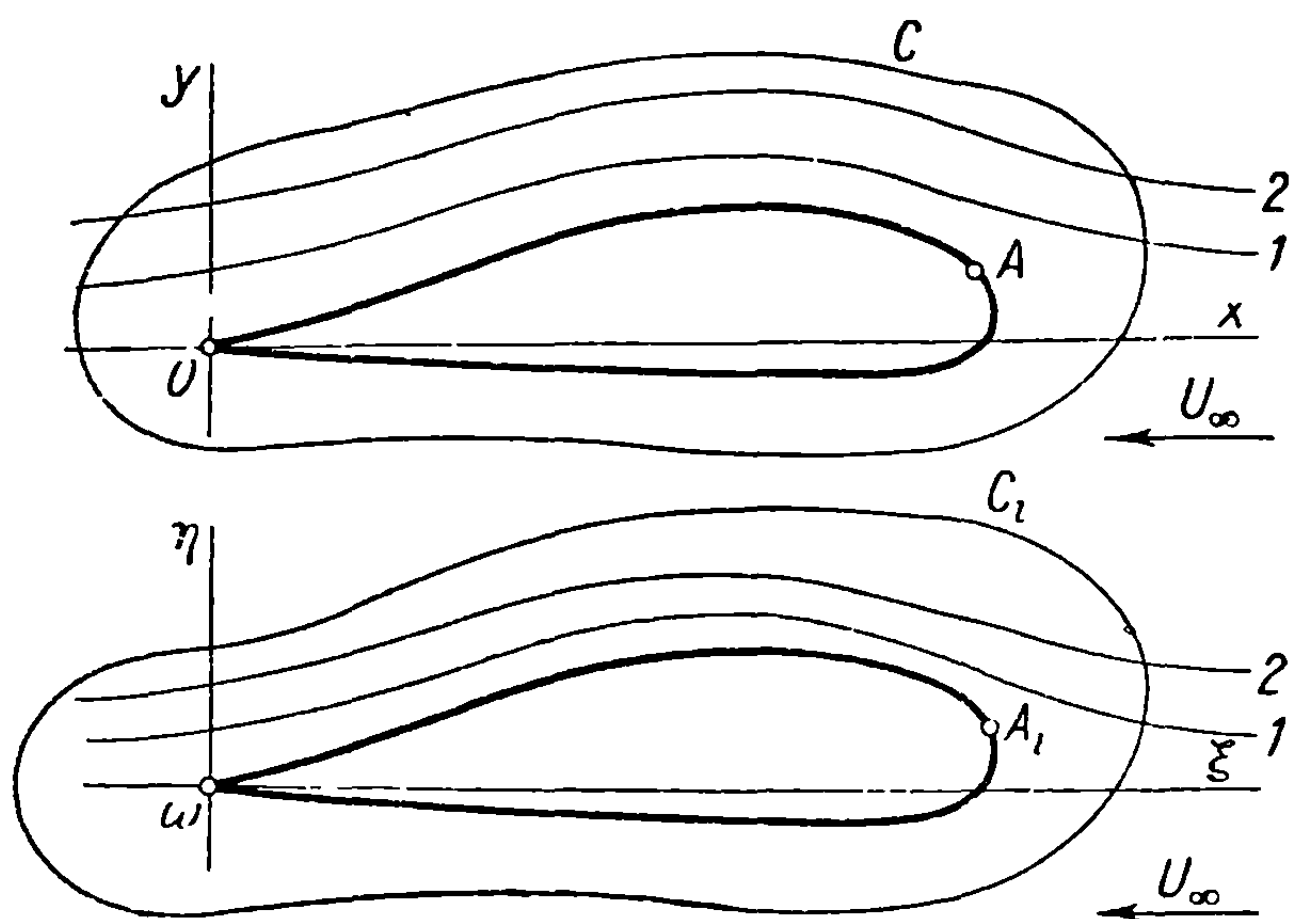
<sup>1</sup> Напомним, что коэффициенты  $C_z$ ,  $C_m$ ,  $C_{m0}$  выводятся из подъемной силы  $P$ , момента  $M$  относительно передней кромки или момента  $M_0$  при нулевой подъемной силе с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} C_z &= \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c}, \\ C_m &= \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c^2}, \\ C_{m0} &= \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c^2}, \end{aligned}$$

где  $c$  — хорда профиля, а  $\rho_\infty$  и  $U_\infty$  — плотность и скорость свободного потока.

Если рассматривать наклон кривой подъемной силы как функцию от угла атаки профиля, обозначаемого через  $\alpha$ , то

$$\frac{dC_z}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{dC_{zi}}{d\alpha}. \quad (9.48)$$



Фиг. 9.3

Циркуляция  $\Gamma$  вокруг профиля, расположенного в физической плоскости, может быть подобным же образом подсчитана как функция от соответствующей циркуляции  $\Gamma_i$  для несжимаемого течения: так, рассматривая какой-нибудь контур  $C$ , соответственно  $C_i$ , охватывающий профиль (фиг. 9.3), имеем

$$\Gamma = [\varphi(x, y)]_C = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} [\varphi_i(\xi, \eta)]_{C_i} = \frac{\Gamma_i}{\sqrt{1-M_\infty^2}}. \quad (9.49)$$

Полученные выше формулы, относящиеся к скорости возмущения ( $u$ ), коэффициенту давления ( $C_p$ ), коэффициенту подъемной силы ( $C_z$ ), коэффициентам моментов ( $C_m, C_{m0}$ ), как и для циркуляции ( $\Gamma$ ), выводятся по единому правилу, основанному на линейной теории Прандтля — Глауерта.

Отметим, что уравнение (9.43), показывающее, что профиль будет одинаковым в обеих плоскостях, находится в противоречии с условиями преобразования (9.36) этих двух плоскостей. Это связано с тем обстоятельством, что профиль предполагался чрезвычайно тонким и совпадающим с осью абсцисс, т. е. образующим подобие разреза, и отображалась только внешняя по отношению к профилю область (см. формулу 9.36:  $\eta = \sqrt{1-M_\infty^2} y$ ). Таким образом, если исследовать форму течения, то окажется, что линии тока в физической плоскости, например, линии 1 и 2 (см. фиг. 9.3), отстоят дальше друг от друга, чем соответствующие линии тока для несжимаемого течения.

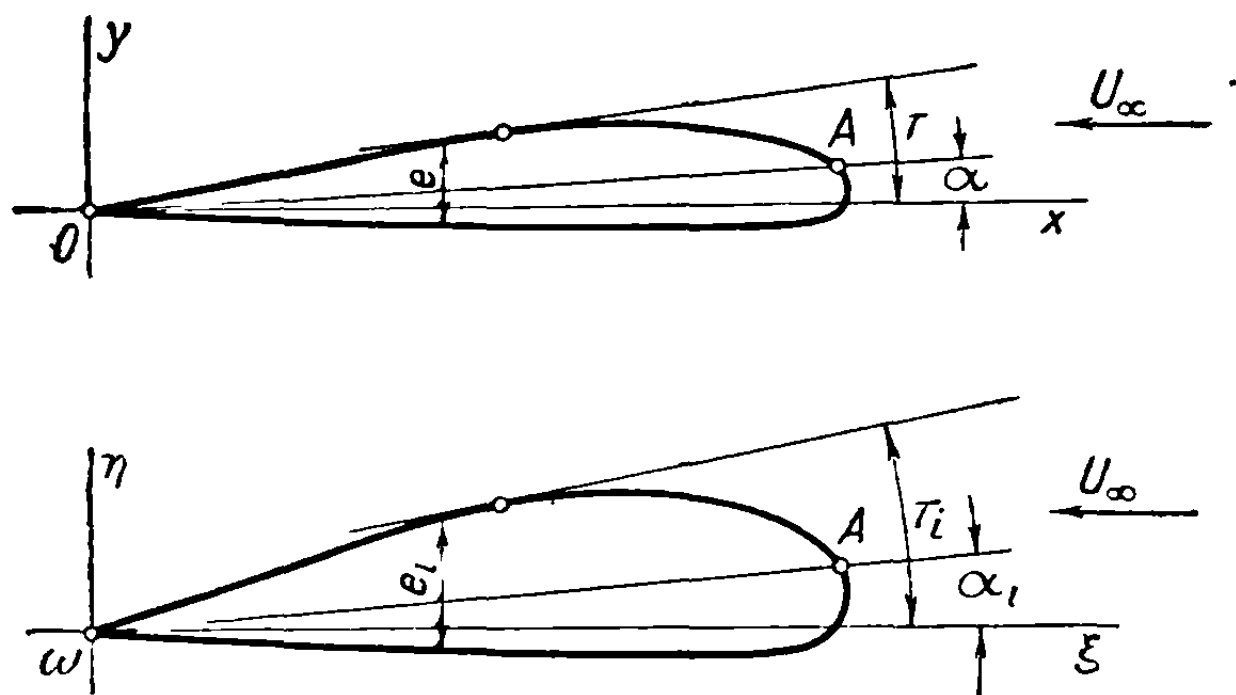
9.2.2. Случай равных потенциалов ( $\varphi = \varphi_i$ ). Если  $\gamma = 1$ , то, в согласии с соотношениями (9.35) и (9.41),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \text{ или } u = u_i \quad (9.50)$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{d\eta}{d\xi}. \quad (9.51)$$

Реальный профиль в области сжимаемого течения будет поэтому эквивалентен преобразованному профилю, обтекаемому несжимаемым потоком,



Фиг. 9.4

причем все его геометрические характеристики, получаемые поперечным сечением профиля, будут уменьшены в отношении  $(1 - M_\infty^2)^{1/2}$ . Так, например, тангенс угла наклона касательной ( $\tau = \sqrt{1 - M_\infty^2} \tau_i$ ), толщина ( $e = \sqrt{1 - M_\infty^2} e_i$ ), угол атаки ( $\alpha = \sqrt{1 - M_\infty^2} \alpha_i$ ) и т. д. будут все уменьшены в  $\sqrt{1 - M_\infty^2}$  раз (фиг. 9.4).

Коэффициент давления может быть определен с помощью равенства (9.50)

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = -2 \frac{u_i}{U_\infty}; \quad (9.52)$$

этот результат можно было ожидать, так как скорости возмущений в соответствующих точках будут одинаковыми в обеих плоскостях. Нужно еще подсчитать скорости, т. е. найти потенциал  $\varphi_i$  в области несжимаемого течения. Профиль поэтому будет опять предполагаться достаточно тонким, углы атаки малыми и кривизна также чрезвычайно малой. В таком случае среди других параметров, влияющих на величину потенциала  $\varphi_i$ , наиболее важными будут максимальная относительная толщина  $\epsilon_i$ , максимальная кривизна  $f_i$ , угол атаки относительно оси нулевой подъемной силы  $\alpha_i$  и т. д. Применяя разложение Тейлора и ограничиваясь первыми членами, получим

$$\varphi_i(\alpha_i, \epsilon_i, f_i, \dots) = \varphi_i(0, 0, 0, \dots) + \alpha_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} \right)_0 + \epsilon_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon_i} \right)_0 + f_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_i} \right)_0 + \dots \quad (9.53)$$



Отметим далее, что при  $\alpha_i = \varepsilon_i = f_i = \dots = 0$  мы получим потенциал для прямолинейного отрезка, расположенного параллельно потоку:

$$\varphi_i(0, \dots) = \text{const.} \quad (9.54)$$

Дифференцируя потенциал по  $\xi$ , имеем

$$\begin{aligned} u = u_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \alpha_i \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) \right]_0 + \varepsilon_i \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) \right]_0 + f_i \left[ \frac{\partial}{\partial f_i} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) \right]_0 + \dots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left[ \alpha \left( \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} \right)_0 + \varepsilon \left( \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon_i} \right)_0 + f \left( \frac{\partial u_i}{\partial f_i} \right)_0 + \dots \right] = \frac{u'_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \end{aligned} \quad (9.55)$$

где  $u'_i$  скорость возмущения в несжимаемом течении вокруг профиля, идентичного действительному, обтекаемому сжимаемым потоком.

Коэффициент давления  $C'_{pi}$  на контуре такого профиля, расположенного в несжимаемом потоке, определяется обычным соотношением

$$C'_{pi} = -2 \frac{u'_i}{U_\infty}. \quad (9.56)$$

Применяя формулу (9.55) для определения коэффициента давления на контуре профиля, обтекаемого сжимаемым потоком, придем к полученному ранее выражению

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = \frac{\bar{C}'_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}};$$

это дает идентичные соотношения для коэффициента подъемной силы (9.46) и коэффициентов момента (9.47).

**9.2.3. Прямой вывод формулы Прандтля—Глауерта.** В приведенном выше разделе были изучены условия течения вокруг тонких профилей при гипотезе малых возмущений; при этом постоянно встречался множитель пропорциональности в соотношениях между аэродинамическими характеристиками, определяемыми для случаев сжимаемого и несжимаемого потоков. Этот множитель, называемый множителем Прандтля—Глауерта, может быть также получен прямым путем из дифференциального уравнения для потенциала (9.10), выраженного в форме

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9.57)$$

Полагая, как и в предыдущем случае,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - M_\infty^2} \xi, & y &= y; \\ u_i &= \sqrt{1 - M_\infty^2} u, & v &= v, \end{aligned} \quad (9.58)$$

приведем написанное выше уравнение к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (9.59)$$

с другой стороны, должно быть удовлетворено условие отсутствия вихрей

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{du_z}{dy} = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{dv}{d\xi}. \quad (9.60)$$

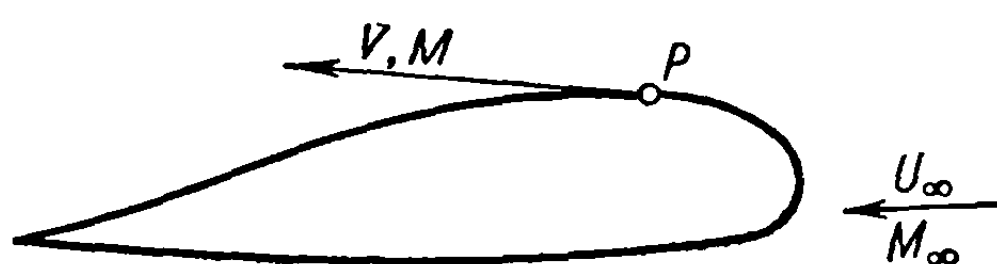
Эти два уравнения показывают, что условия действительного течения эквивалентны условиям несжимаемого безвихревого течения в плоскости  $O\xi y$ , где компонентами скорости будут  $u$ , и  $v$ . Так как вертикальные скорости одинаковы, из граничных условий (9.31) следует, что профили будут подобными и что геометрические размеры в плоскости несжимаемого потока, включая хорду профиля, будут увеличены в  $(1 - M_\infty^2)^{-\frac{1}{2}}$  раз; так как для несжимаемого течения подъемная сила пропорциональна хорде, то в случае сжимаемого потока она возрастет в том же отношении. Таким образом, правило Прандтля — Глауерта получается прямым путем; оно применимо до тех пор, пока течение будет дозвуковым, т. е. пока не появится критическая скорость в какой-нибудь точке.

### 9.3. Критическое число Маха при гипотезе малых возмущений

Формулы, установленные выше, относятся только к дозвуковому течению. Если скорость в любой точке плоскости течения достигает критических значений или более высоких, форма течения существенно меняется. Если исследовать изменение скорости вдоль контура, то заметим, что она превышает в некоторых точках скорость свободного потока  $U_\infty$  и достигает в какой-нибудь определенной точке  $P$  (фиг. 9.5) максимального значения, которое должно быть ниже скорости звука. Соответствующее число Маха меньше единицы. Если скорость свободного потока увеличивается, то максимальная скорость будет также увеличиваться вследствие возрастания скорости  $U_\infty$  и усиления влияния сжимаемости. От тех же причин скорость звука будет падать, так что в определенный момент скорость в точке  $P$  достигнет критического значения, и число Маха в той же точке станет равным единице. При дозвуковом полете появления критической скорости стараются избежать из-за ряда вредных явлений. В этом состоит причина крайней важности знания максимального значения скорости свободного потока или, еще предпочтительнее, соответствующего числа Маха ( $M_\infty$ ), ниже которого критическая скорость на профиле не появляется. Это число называется *критическим* числом Маха и обозначается через  $M_c$ . Профиль тем лучше, чем выше число  $M_c$ , т. е. чем ближе оно к единице. Крылья с малым изменением скорости вдоль контура в этом отношении представляют определенные преимущества. Изменение угла атаки меняет также и распределение скорости, вызывая в свою очередь изменение критического числа Маха.

Если крыло и его угол атаки относительно свободного потока известны, то распределение скорости в несжимаемом течении может быть определено, как и максимальная скорость на контуре, соответствующая максимальному разрежению. Последнее может быть подсчитано или измерено в аэродинамической лаборатории низких скоростей, при которых  $M_\infty \approx 0$ . Определим

теперь соотношение, связывающее  $M_c$  с максимальным разрежением в случае несжимаемого течения, для любого заданного крыла и любого его положения.



Фиг. 9.5

Пренебрегая членами второго порядка в выражении (9.1) для компонент скорости, имеем

$$V^2 = (U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2 \approx U_\infty^2 + 2uU_\infty; \quad (9.61)$$

принимая во внимание уравнения (5.2) и (5.40), получим скорость звука  $a$  как функцию соответствующей скорости на бесконечности  $a_\infty$  и величины  $u$ :

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (V^2 - U_\infty^2) \approx a_\infty^2 - (\kappa - 1)uU_\infty. \quad (9.62)$$

Местное число Маха в точке  $P$  будет

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{V^2}{a^2} \approx \frac{U_\infty^2 + 2uU_\infty}{a_\infty^2 - (\kappa - 1)uU_\infty} = \frac{U_\infty^2 \left(1 + 2\frac{u}{U_\infty}\right)}{a_\infty^2 \left[1 - (\kappa - 1)\frac{U_\infty^2}{a_\infty^2} \frac{u}{U_\infty}\right]} \approx \\ &\approx M_\infty^2 \left[1 + 2\frac{u}{U_\infty} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2\right)\right]. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Если  $M$  стремится к единице, то  $M_\infty$  стремится к  $M_c$ ; отсюда

$$1 = M_c^2 \left[1 + 2\frac{u}{U_\infty} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_c^2\right)\right]; \quad (9.64)$$

заменяя  $2\frac{u}{U_\infty}$  через  $-C_p$  и выражая этот коэффициент через  $C_{pl}$  (9.29), получим простую формулу

$$1 = M_c^2 \left[1 - \frac{C_{pl}}{\sqrt{1 - M_c^2}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_c^2\right)\right], \quad (9.65)$$

которая может быть записана в виде

$$\frac{(1 - M_c^2)^{3/2}}{M_c^2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_c^2\right)} = -C_{pl}. \quad (9.66)$$

Так как рассматриваемые крылья тонкие и имеют малые углы атаки, а следовательно, вызывают малые возмущения, в согласии со сделанными

допущениями, то отсюда следует, что  $M_c$  должно быть практически близко к единице. Обозначая малое число через  $\varepsilon > 0$ , будем иметь

$$M_c^2 = (1 - \varepsilon)^2 \approx 1 - 2\varepsilon, \quad (9.67)$$

откуда, подставив это значение в уравнение (9.66), получим

$$\begin{aligned} \frac{(2\varepsilon)^{3/2}}{(1 - 2\varepsilon) \left[ 1 + \frac{x-1}{2} (1 - 2\varepsilon) \right]} &\approx \frac{(2\varepsilon)^{3/2}}{\frac{x+1}{2} \left( 1 - \frac{2x}{x+1} 2\varepsilon \right)} \approx \\ &\approx \frac{2}{x+1} (2\varepsilon)^{3/2} \left( 1 + \frac{2x}{x+1} 2\varepsilon \right) = -C_{pi}. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Делая новые приближения и исключая  $\varepsilon$ , находим

$$M_c = 1 - \varepsilon \approx 1 - \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{x+1}{2} C_{pi} \right)^{2/3}}{1 + \frac{4}{3} \frac{x}{x+1} \left( -\frac{x+1}{2} C_{pi} \right)^{2/3}}. \quad (9.69)$$

Эта формула ясно показывает причину, по которой для практического использования предпочтительнее профили с очень малым изменением давления, т. е. с таким низким максимальным разрежением, какое только возможно. При таких условиях может быть получена наибольшая величина для  $M_c$ , с тем преимуществом, что течение вдоль большей части поверхности крыла будет *ламинарным*, вследствие чего уменьшится сопротивление, обусловленное трением.

Если число  $M_\infty$  будет больше  $M_c$ , то возникнут трудно исследуемые возмущения, коренным образом изменяющие характер течения вокруг крыла; приведенные выше соотношения перестают быть годными, что подтверждается также экспериментальными наблюдениями.

**9.3.1. Прямое и точное определение критического числа Маха.** При вычислении критического числа Маха, после обоснованных последовательных приближений, была использована формула (9.64).

Если требуется большая точность, то нужно записать уравнение давления для критической точки (5.22):

$$C_{pc} = \frac{p_c - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{x M_\infty^2} \left[ \left( \frac{2 + (x-1) M_\infty^2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} - 1 \right]; \quad (9.70)$$

отсюда [2], в силу уравнения (9.29), заменяя  $M_\infty$  через  $M_c$ , получим соотношение

$$C_{pi} = \frac{2(1 - M_c^2)^{1/2}}{x M_c^2} \left[ \left( \frac{2 + (x-1) M_c^2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} - 1 \right], \quad (9.71)$$

заменяющее уравнение (9.66). Последующие преобразования аналогичны приведенным выше.

## 9.4. Распределение давлений на тонких крыльях

Существует два вида этой задачи: или определить давление на заданном профиле, или построить крыло с заданным распределением давления.

9.4.1. Распределение давления на аэродинамическом профиле любой формы. Предполагая, что профиль будет одинаковым в обеих плоскостях (см. раздел 9.2.1), определим скорость в любой точке контура в случае несжимаемого течения, пользуясь обычными методами, применяемыми в гидродинамике; отсюда будет получен коэффициент давления  $C_{pi}$  и с помощью формулы (9.29) — коэффициент  $C_p$  для сжимаемого течения.

Задача будет простой, если профиль образуется путем конформного отображения с помощью известной простой функции. Если профиль будет эмпирическим, то решение становится несколько более трудным. Так как для практических целей крайне важно знать распределение давления, ниже будет дан довольно простой метод, основанный на исследовании Бреннана и Стивенсона [3]. Задача состоит в том, чтобы определить скорости возмущения  $u_1$ .

Рассмотрим тангенс угла наклона касательной к профилю  $BA$  (фиг. 9.6) в каждой его точке; после замены переменной

$$x = -\frac{1}{2}c \cos \theta, \quad (9.72)$$

где  $c$  — хорда профиля, запишем следующие разложения в ряды Фурье, ограничиваясь первыми  $n$  членами:

$$\frac{dy_s}{dx} = C_0 + \sum_1^n A_n \cos n\theta, \quad (9.73 \text{ а})$$

$$\frac{dy_e}{dx} = -\frac{1}{2}\sigma_a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i \sum_1^n B_n \sin n\theta, \quad (9.73 \text{ б})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_s}{dx} + \frac{dy_e}{dx}; \quad (9.73 \text{ в})$$

здесь индексы  $s$  и  $e$  соответствуют ординатам скелета профиля и закону изменения его толщины.

Интегрируя уравнение (9.73 б) и замечая, что  $y = 0$  при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \pi$ , получим значение для  $B_1$ :

$$\frac{4}{\pi c} \oint_B^A dy_e = B_1 - \sigma_a = 0. \quad (9.74)$$

Коэффициент  $\sigma_a$  определяется через радиус кривизны  $r_a$  ведущей кромки посредством соотношения

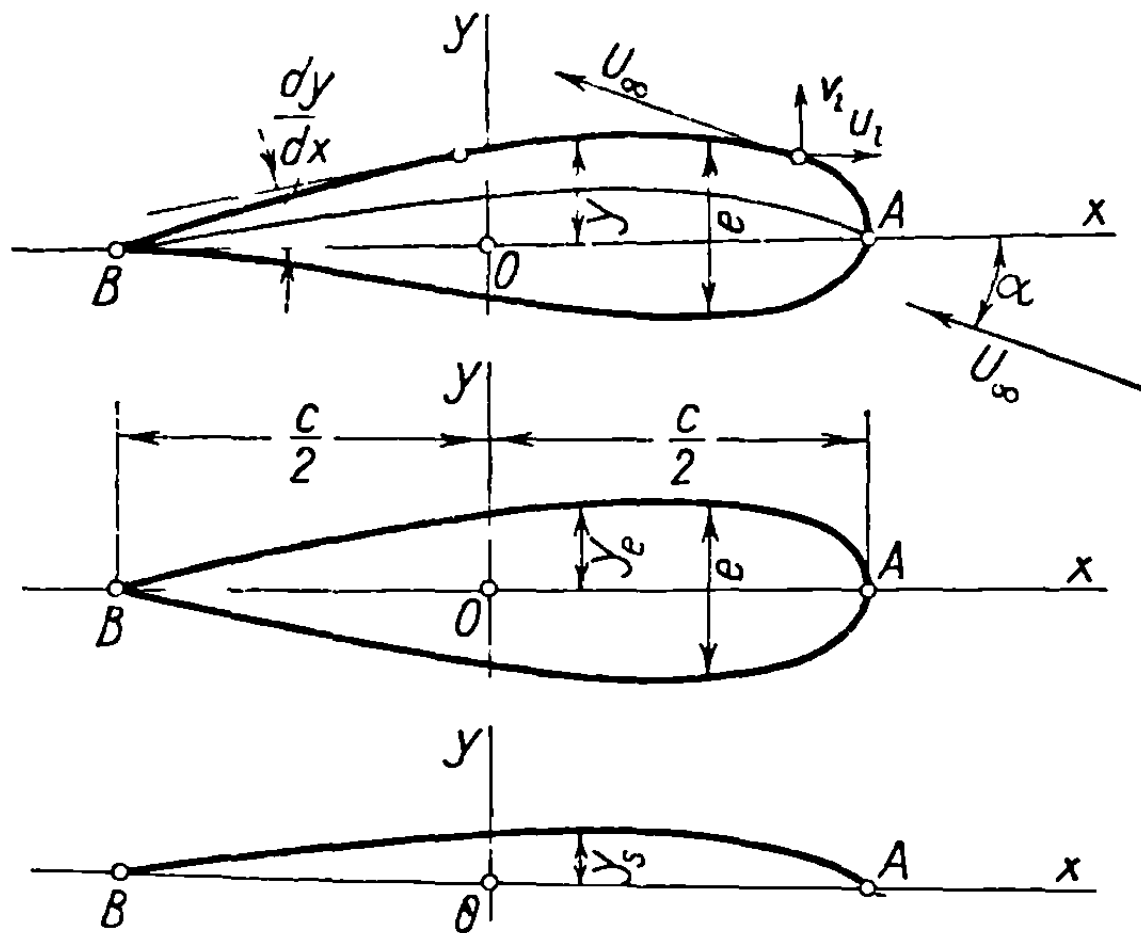
$$\sigma_a^2 = 2 \frac{r_a}{c}. \quad (9.75)$$

В соответствии с предшествующими приближениями, обозначая угол атаки потока относительно оси  $Ox$  через  $\alpha$  и компоненты полной скорости через  $V_i$  и  $U_i$ , будем иметь

$$\begin{aligned} U_i &= -U_\infty \cos \alpha + u_i \approx -U_\infty + u_i, \\ V_i &= U_\infty \sin \alpha + v_i \approx U_\infty \alpha + v_i; \end{aligned} \quad (9.76)$$

далее (см. фиг. 9.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_i}{U_i} \approx \frac{U_\infty \alpha + v_i}{-U_\infty + u_i} \approx -\alpha - \frac{v_i}{U_\infty}; \quad (9.77)$$



Фиг. 9.6

откуда, в силу уравнений (9.73),

$$\begin{aligned} \frac{v_i}{U_\infty} &= -\left(\frac{dy}{dx} + \alpha\right) = -C_0 + \frac{1}{2} \sigma_a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \\ &- \sum_1^n A_n \cos n\theta - \sum_1^n B_n \sin n\theta - \alpha. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Скорости возмущения  $u_i$ ,  $v_i$  выводятся из потенциала скорости  $\varphi_i$ , с которым связывается функция тока  $\psi_i$ , в результате чего образуется комплексный потенциал  $f_i(z)$ , зависящий от комплексного переменного  $z = x + iy$ ; производная комплексного потенциала дает комплексную скорость  $w_i(z)$ .

$$\begin{aligned} f_i(z) &= \varphi_i + i\psi_i, \\ w_i(z) &= \frac{df_i}{dz} = u_i - iv_i. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Уподобляя профиль тонкой пластинке и представляя течение около круга в плоскости  $\zeta$  с помощью преобразующей функции

$$z = \zeta + \frac{c^2}{16} \frac{1}{\zeta}, \quad (9.80)$$

видим, что точки круга будут иметь аффикс

$$-\zeta = \frac{c}{4} e^{i\theta}, \quad (9.81)$$

в соответствии с заменой переменных (9.72).

Приближение таким образом оправдано, так как распределение скоростей на квази-круглом контуре слабо отличается от распределения на круге. Обозначая комплексную скорость для течения около круга через  $W(\zeta)$ , получим выражение

$$w_i(\zeta) = W(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\zeta^2 W(\zeta)}{\zeta^2 - \frac{c^2}{16}}, \quad (9.82)$$

которое голоморфно во всей области вне круга, исчезает на бесконечности (где возмущения равны нулю) и становится бесконечным в точках  $\zeta = \pm \frac{c}{4}$ .

Но так как скорость в точке  $B$  предполагается конечной, то отсюда, в соответствии с гипотезой Жуковского, определяется циркуляция вокруг профиля; следовательно, выражение для комплексной скорости может быть дано в форме

$$w_i(\zeta) = \frac{c_a}{\zeta - \frac{c}{4}} + \sum_1^n \frac{Q_n}{\zeta^n}, \quad (9.83)$$

причем коэффициенты записываются в виде

$$c_a = a_a + ib_a,$$

$$Q_n = a_n + ib_n. \quad (9.84)$$

Подставляя значение  $\zeta = -\frac{c}{4} e^{i\theta}$  и разделив действительную и мнимую части, получим последовательно

$$\begin{aligned} w_i = u_i - iv_i &= -\frac{2(a_a + ib_a) e^{-i\frac{\theta}{2}}}{c \cos \frac{\theta}{2}} + \sum_1^n \frac{(a_n + ib_n) e^{-in\theta}}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} = \\ &= -2\frac{a_a}{c} - 2\frac{b_a}{c} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_1^n \left( \left(-\frac{c}{4}\right)^n \cos n\theta + \left(-\frac{c}{4}\right)^n \sin n\theta \right) - \\ &- i \frac{2b_a}{c} + i \frac{2a_a}{c} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i \sum_1^n \left( \frac{b_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \cos n\theta - \frac{a_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \sin n\theta \right). \quad (9.85) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты для  $v_i$  в этом выражении коэффициентам равенства (9.78), получим

$$\begin{aligned}
2 \frac{a_a}{c} &= - \frac{\sigma_a}{2} U_\infty, \\
2 \frac{b_a}{c} &= - (C_0 + \alpha) U_\infty, \\
a_n &= - \left( - \frac{c}{4} \right)^n B_n U_\infty, \\
b_n &= \left( - \frac{c}{4} \right)^n A_n U_\infty.
\end{aligned} \tag{9.86}$$

Так как скорость  $U_\infty$  направлена в отрицательную сторону оси абсцисс, а скорость  $u_t$  — в положительную, коэффициент давления  $C_{pi}$  определяется путем взятия действительной части выражения (9.85) в виде

$$C_{pi} = \frac{2u_t}{U_\infty} = \sigma_a + 2(C_0 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 2 \sum_1^n A_n \sin n\theta - 2 \sum_1^n B_n \cos n\theta. \tag{9.87}$$

Скорость становится бесконечной на ведущей кромке вследствие гипотезы (9.77), которая не действительна для точек передней кромки, где  $\frac{dy}{dx}$  стремится к бесконечности, а также в силу преобразования (9.80).

Исключая эту особую точку и замечая, что давления на передней кромке очень велики, можно применить написанную выше формулу и разрешить ряд очень интересных задач, имеющих практическое применение, как, например, об искажениях профиля, обусловленных колебаниями его подвижных частей и обледенением; эти задачи являются предметом аэродинамики несжимаемой жидкости.

Указанный метод определения скоростей возмущения рассматривался потому, что решения большинства задач дозвуковых течений основаны на знании скоростей возмущения в несжимаемом течении.

**9.4.2. Построение профилей с заданным распределением давления. Ламинарные профили.** Значение распределения давления на контуре крыла хорошо известно, особенно в случае больших скоростей. Характер ламинарного и турбулентного пограничных слоев и критическое число Маха зависят от распределения давления. Так как оно также имеет значительное влияние на сопротивление, то часто возникает необходимость рассмотреть сначала распределение давления на выбранном соответствующим образом крыле и после этого определить контур крыла.

Существуют различные методы, используемые для этой цели [4]. Здесь нет места для полного исследования этой проблемы; достаточно указать, что в случаях практического применения, при выборе высокоскоростных профилей, описанный метод может быть использован.

## 9.5. Течение вокруг тонкого тела вращения

Выполняя преобразование

$$\begin{aligned}
x &= B\xi, \\
(B &= \sqrt{1 - M_\infty^2}), \\
y &= y, \\
z &= z, \\
\varphi_i &= \gamma\varphi,
\end{aligned} \tag{9.88}$$



приведем общее дифференциальное уравнение (9.4) к виду

$$B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (9.89)$$

показывающему, что  $\varphi_i$ , являясь гармонической функцией, может представлять потенциал скорости в новой системе переменных  $\xi, y, z$ .

С другой стороны, скорости  $u, v, w$  заменятся в новой плоскости через

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \gamma B u, \\ v_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \gamma v, \\ w_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \gamma w; \end{aligned} \quad (9.90)$$

далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\gamma B} \left( \frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\gamma B} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.91)$$

Следовательно, течение в системе  $O\xi yz$  определяется скоростями  $u_i, v_i, w_i$ , которые выводятся из потенциала  $\varphi_i$ , относящегося к несжимаемой жидкости; последний может быть исследован, как в предшествующих случаях, известными методами. Вслед за тем может быть изучено действительное течение с помощью приведенных выше соотношений.

Переходим к рассмотрению практических случаев.

Так как задача о произвольном тонком теле трудна, она может быть упрощена, если ограничиться изучением течения вокруг очень тонких осесимметричных тел, имеющих особый интерес для практики.

**9.5.1. Тонкие тела с осями, параллельными общему направлению потока.** Рассмотрим тело, помещенное в поток, параллельный его оси, которое предполагается достаточно тонким, чтобы можно было применить метод малых возмущений. Пусть  $y$  и  $\eta$  — ординаты контура в двух меридиональных плоскостях; граничные условия в обеих областях на контурах  $C$  и  $K$  (фиг. 9.7) будут аналогичными:

$$\begin{aligned} v &\approx U_\infty \left( \frac{dy}{dx} \right)_C, \\ v_i &\approx U_\infty \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)_K. \end{aligned} \quad (9.92)$$

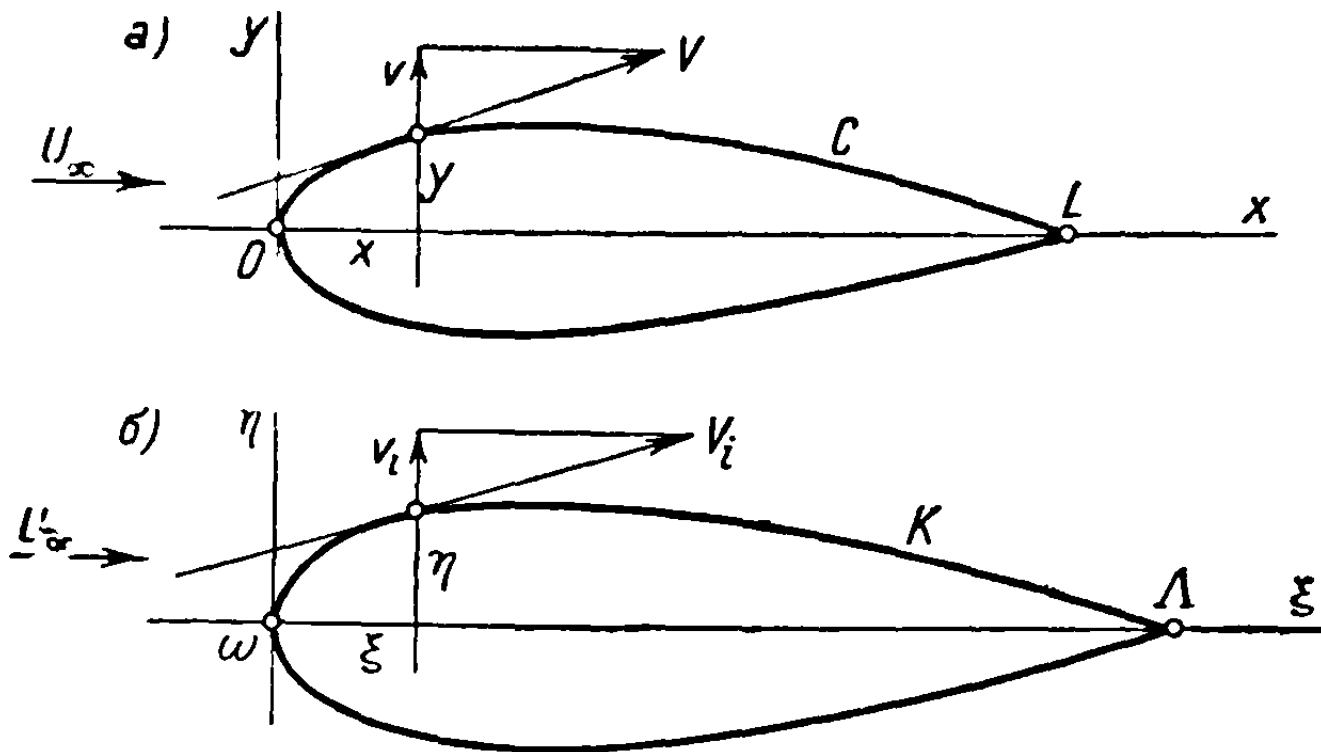
Применяя формулу (9.90), т. е. полагая  $v_i = \gamma v$ , получим соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\eta}{d\xi}. \quad (9.93)$$

Пусть  $\gamma = 1$ , тогда

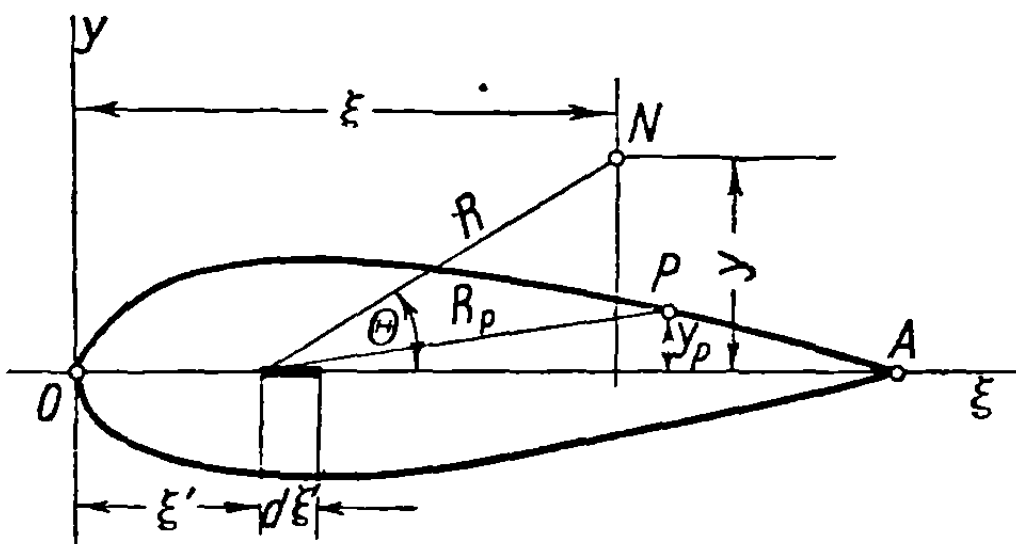
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad (9.94)$$

откуда следует, что  $C$  и  $K$  подобны и могут даже предполагаться идентичными в обеих меридиональных плоскостях.



Фиг. 9.7, а,б

Напомним, что это не противоречит аффинному преобразованию (9.88) вследствие того, что толщиной тела можно пренебречь.



Фиг. 9.8

Заметим, что в области не-сжимаемого течения тело может быть образовано посредством системы линейных источников, распределенных вдоль его оси между двумя крайними точками  $O$  и  $A$  (фиг. 9.8). Так как изменение поперечного сечения тела вдоль его оси мало, скорость внутри контура может рассматриваться как равномерно распределенная по всему сечению и равная скорости на контуре, которая в свою очередь приблизительно равна скорости свободного потока  $U_\infty$ .

В этом случае поток через любое сечение  $\sigma'$  определяется выражением

$$Q = U_\infty \sigma' = U_\infty \pi \eta^2, \quad (9.95)$$

а изменение потока по длине имеет значение

$$q = \frac{dQ}{d\xi} = U_\infty \frac{d\sigma'}{d\xi} = 2\pi U_\infty \left( \eta \frac{d\eta}{d\xi} \right)_K. \quad (9.96)$$

В силу уравнения (9.94) и рассматривая оба контура  $C$  и  $K$  как идентичные, получим последовательно

$$q = 2\pi U_\infty \left( \eta \frac{d\eta}{d\xi} \right)_K = 2\pi U_\infty \left( y \frac{dy}{dx} \right)_{C_1} = U_\infty \frac{d\sigma}{dx}. \quad (9.97)$$

Так как распределение источников известно, потенциал и скорости вокруг тела могут быть подсчитаны. Напомним, что элементарный источник  $qd\xi'$  создает в какой-нибудь точке  $N(\xi, y)$  потенциал [5]

$$\delta\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{qd\xi'}{R}, \quad (9.98)$$

из которого выводится полный потенциал линейного источника  $OA$ :

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{OA} \frac{qd\xi'}{R} = -\frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma' d\xi'}{d\xi' R} = -\frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma'}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + y^2}}. \quad (9.99)$$

Возвращаясь к координатам в области физического течения, получим, подставляя вместо  $\xi'$  его значение из уравнения (9.88) и применяя также выражение (9.97),

$$\varphi = -\frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma}{dx'} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + (1 - M_\infty^2)y^2}}. \quad (9.100)$$

Таков потенциал возмущения, к которому нужно прибавить величину  $U_\infty x$ , для того, чтобы найти полный потенциал  $\Phi$ :

$$\Phi = \varphi + U_\infty x. \quad (9.101)$$

Для определения скорости возмущения нужно продифференцировать выражение (9.99) по  $\xi$ , чтобы получить  $u_i$ , или выражение (9.100) по  $x$ , чтобы получить  $u$ . Таким образом, будем иметь

$$u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma'}{d\xi'} \frac{(\xi - \xi') d\xi'}{[(\xi - \xi')^2 + y^2]^{3/2}} \quad (9.102 a)$$

и

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{u_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma}{dx'} \frac{(x - x') dx'}{[(x - x')^2 + (1 - M_\infty^2)y^2]^{3/2}}. \quad (9.102 б)$$

Эти выражения принимают в точке  $P$  на контуре ( $y = y_P$ ) следующий вид:

$$u_i = \frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma'}{d\xi'} \frac{(\xi - \xi') d\xi'}{[(\xi - \xi')^2 + y_P^2]^{3/2}}, \quad (9.103 a)$$

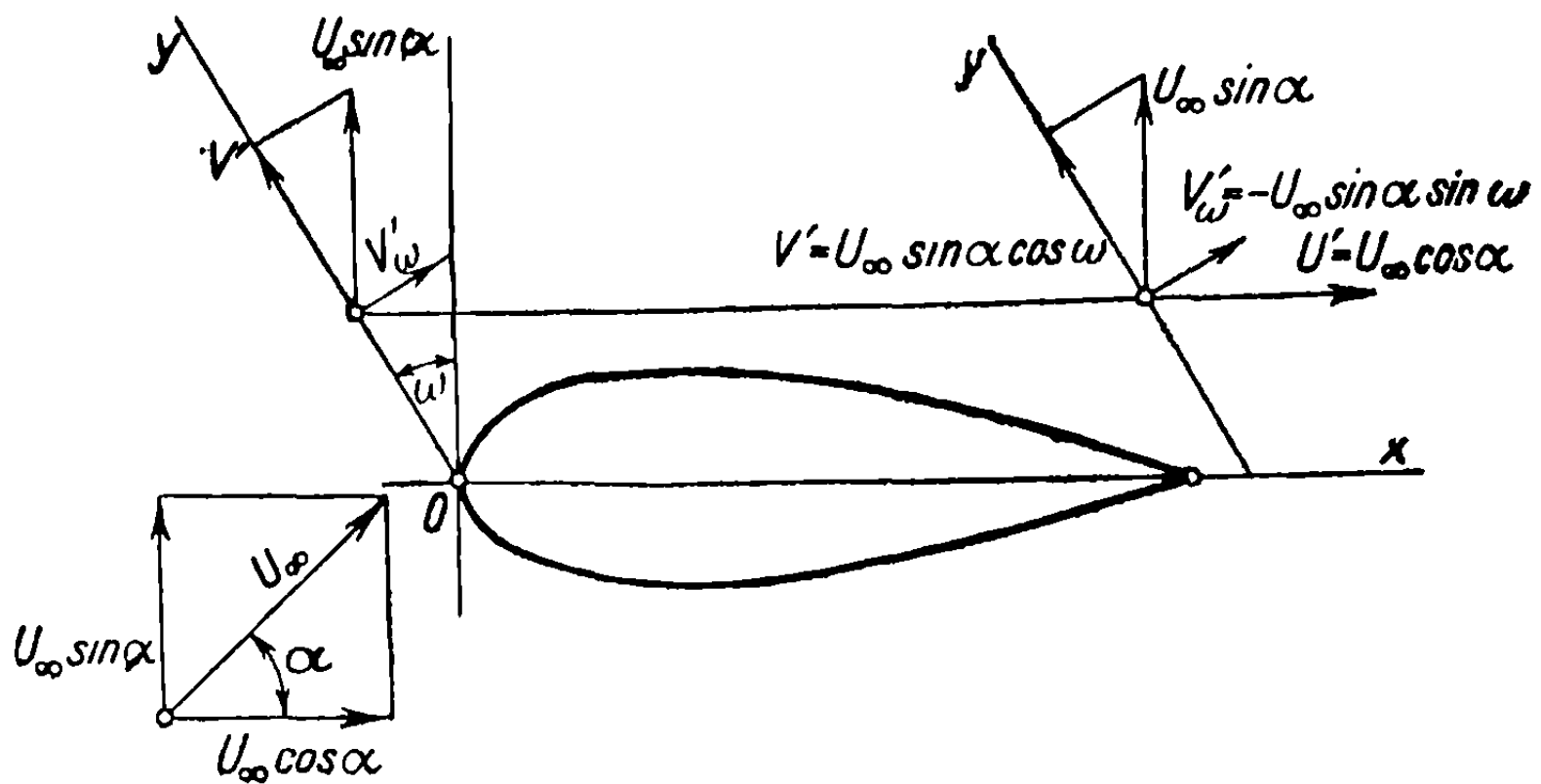
$$u = \frac{U_\infty}{4\pi} \int_{OA} \frac{d\sigma}{dx'} \frac{(x - x') dx'}{[(x - x')^2 + (1 - M_\infty^2)y_P^2]^{3/2}}. \quad (9.103 б)$$

Второе равенство выводится из первого путем подстановки вместо  $u_i$  и  $\xi$  их значений, определяемых преобразованиями (9.88) и (9.90):

$$\begin{aligned} u_i &= \sqrt{1 - M_\infty^2} u, \\ x &= \sqrt{1 - M_\infty^2} \xi. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Метод сводится поэтому к вычислению скоростей возмущения  $u_i$  для реального тела в несжимаемом течении и применению первого соотношения (9.104), для того, чтобы получить действительное распределение скоростей  $u$ .

9.5.2. Поперечное движение тела вращения. В предшествующем разделе был определен потенциал скорости возмущения вокруг тела, помещенного в поток, параллельный его оси.



Фиг. 9.9

Если предположить, что скорость течения образует очень малый угол атаки  $\alpha$  (фиг. 9.9) с осью тела, то получим компоненты скорости свободного потока в виде

$$\begin{aligned} U' &= U_{\infty} \cos \alpha, \\ V' &= U_{\infty} \sin \alpha \cos \omega, \\ V'_{\omega} &= -U_{\infty} \sin \alpha \sin \omega, \end{aligned} \quad (9.105)$$

и течение не будет более осесимметричным. Результирующий потенциал возмущения, обозначаемый через  $\Phi$ , должен удовлетворять уравнению (5.55 б)

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (9.106)$$

где  $\omega$  — угол между меридиональной плоскостью и вертикальной плоскостью отсчета (содержащей вектор скорости  $U_{\infty}$ );  $y$  заменяет  $r$  в уравнении (5.55 б).

Обозначая через  $\varphi_1$  потенциал возмущения, связанный с осевой скоростью  $U_{\infty} \cos \alpha$ , параллельной оси тела, и через  $\varphi_2$  — потенциал, соответствующий поперечной скорости  $U_{\infty} \sin \alpha$ , получим полный потенциал возмущения в виде

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9.107)$$

Чтобы получить полный потенциал, нужно прибавить к потенциалу возмущения  $\Phi$  член, соответствующий осевой скорости свободного потока:

$$\Phi' = x U_{\infty} \cos \alpha + \Phi = x U_{\infty} \cos \alpha + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9.108)$$

Для определения давлений требуется только осевая скорость возмущения  $u$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2. \quad (9.109)$$

Первый член  $u_1$  обусловлен осевой скоростью потока и получается по формуле (9.102 б); так как угол  $\alpha$  мал, осевая компонента скорости  $U_\infty \cos \alpha$  может быть заменена через  $U_\infty$ .

Для второго члена  $u_2$  приближенный метод дается ниже. Если скорости  $u_1$  и  $u_2$  известны, то может быть определено давление в каждой точке. Если проинтегрировать давление вдоль всего контура сечения, то найдем поперечную силу, отнесенную к единице длины тела; таким образом получим распределение поперечной нагрузки вдоль тела.

Так как скорость  $u_1$  одинакова вдоль кругового контура поперечного сечения и давление пропорционально осевой скорости возмущения, приходим к выводу, что результирующая давлений, обусловленная скоростью  $u_1$ , равна нулю. Обозначая через  $dP$  поперечную силу, приходящуюся на элемент длины  $dx$  тела, получим

$$\frac{dP}{dx} = 2 \int_0^\pi (p - p_\infty) \cos \omega r d\omega = - \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 4r \int_0^\pi \frac{u_2}{U_\infty} \cos \omega d\omega, \quad (9.110)$$

где  $r$  — радиус сечения тела в данном месте.

Это соотношение будет применено в дальнейшем.

**9.5.3. Приближенный подсчет поперечной нагрузки и скоростей.** Если тело предполагается чрезвычайно тонким, то можно приближенно считать, что оно ведет себя подобно цилиндру, движущемуся в поперечном направлении, по нормали к образующей. Обозначая при рассмотрении несжимаемого течения через  $r$  радиус круга в каждом сечении, будем иметь

$$\varphi_2 = U_\infty \sin \alpha \left( y + \frac{r^2}{y} \right) \cos \omega, \quad (9.111)$$

следовательно,

$$u_{2i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = 2U_\infty \sin \alpha \cos \omega \cdot \frac{r}{y} \frac{dr}{d\xi}, \quad (9.112)$$

откуда действительная скорость на цилиндре ( $y = r$ ), в соответствии с уравнением (9.94), будет

$$u_2 = \frac{u_{2i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{2U_\infty \sin \alpha \cos \omega}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{dr}{dx}. \quad (9.113)$$

Таким образом, получим распределение поперечной нагрузки

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 4r \frac{\pi \sin \alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{dr}{dx} = - \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{d\sigma}{dx}. \quad (9.114)$$

Интегрируя, находим, что  $P=0$ , так как  $\sigma=0$  на обоих концах тела. Если, однако, подсчитать момент относительно точки на оси тела, например, относительно носика тела, то этот момент будет отличен от нуля, что согласуется с физической реальностью.

## 10. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ ГИПОТЕЗЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В случае несжимаемой жидкости задача о крыле конечного размаха разрешается путем сведения явления к простой схематической форме, поддающейся вычислению. Крыло заменяется эквивалентной системой вихрей, параллельных размаху, называемых *присоединенными вихрями*, которые сопровождаются пеленой *свободных вихрей*, простирающихся параллельно потоку, от задней кромки крыла до бесконечности вниз по потоку. Это представление находится в согласии с основными уравнениями, определяющими течение жидкости.

В случае сжимаемой жидкости сохраняется то же простое представление, если ввести изменения, обусловленные сжимаемостью жидкой среды, в гипотезу малых возмущений с целью установления новых условий течения вокруг системы свободных и присоединенных вихрей.

### 10.1. Предварительные теоретические рассмотрения вихрей в дозвуковом течении

Рассмотрим течение в физическом пространстве, отнесенном к системе осей  $Oxyz$ , из которых  $Ox$  параллельна скорости свободного потока  $U_\infty$ ; пусть  $u, v, w$  — компоненты скорости возмущения. Рассмотрим другую аффинную область, отнесенную к системе  $O\xi yz$ , и пусть  $u_i, v, w$  будут соответствующими компонентами скорости возмущения. Применяя, как и в предыдущем случае, преобразование (9.88):

$$x = B\xi, \quad y = y, \quad z = z, \quad (B = \sqrt{1 - M_\infty^2}), \quad (10.1)$$

$$u_i = Bu, \quad v = v, \quad w = w,$$

получим уравнение неразрывности для обеих областей

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10.2)$$

Обозначая компоненты вихря в любой точке физического пространства через  $\lambda, \mu, \nu$  и в преобразованном пространстве через  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ , будем иметь

$$\lambda = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \lambda_i,$$

$$\mu = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{B} \left( \frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = \frac{\mu_i}{B},$$

$$\nu = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{B} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = \frac{\nu_i}{B}. \quad (10.3)$$

Течение в преобразованной области  $O\xi yz$  может рассматриваться подобным течению несжимаемой жидкости, определяемому скоростями возмущения  $u_i, v, w$  и компонентами вихря  $\lambda, \mu_i, \nu_i$ . Результаты теории вихрей в несжимаемом течении могут быть применены к настоящему случаю, а

отсюда могут быть выведены условия в физическом пространстве путем использования записанного выше аффинного преобразования.

10.1.1. Поле скоростей, индуцированное вихревой трубкой. Если вычислить циркуляцию вдоль контура  $S$  в физическом пространстве и вдоль соответствующего контура  $S_i$  в пространстве несжимаемого течения, то будем иметь равенство

$$\Gamma = \oint_S u dx + v dy + w dz = \oint_{S_i} u_i d\xi + v dy + w dz = \Gamma_i, \quad (10.4)$$

означающее, что циркуляция одинакова в обеих областях.

Отсюда следует, что интенсивность вихревой трубки будет одна и та же. Это можно вывести и прямым путем: действительно, если в обеих системах (фиг. 10.1) рассматривается одно и то же сечение  $\sigma = \sigma_i$  вихревой трубки плоскостью  $Oyz$ , то, отмечая, что нормаль к этому сечению направлена по  $Ox$ , соответственно по  $O\xi$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ), получим, в силу уравнения (10.3),

$$\Gamma = \int_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{i} d\sigma = \int_{\sigma} \lambda d\sigma = \int_{\sigma_i} \lambda_i d\sigma_i = \Gamma_i. \quad (10.5)$$

Напомним, что, согласно теории вихрей, область, которая содержит вихри, может быть разбита на систему колец, образуемых вихревыми трубками одинаковой интенсивности. Скорость, индуцированная такой системой, является суммой скоростей, индуцируемых каждым отдельным кольцом.

Предполагая, что кольцо  $S$  в физическом пространстве переходит в преобразованном пространстве в кольцо  $S_i$  (фиг. 10.2), и обозначая интенсивность одной из этих кольцеобразных трубок через  $\delta\Gamma$ , а через  $q_i$  — скорость, индуцируемую всей завихренной областью в системе  $O\xi yz$ , связанной с несжимаемым течением, можно записать для любой точки  $P$  известную формулу [6]

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{4\pi} \sum \delta\Gamma \int_{S_i} \frac{\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}, \quad (10.6)$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — вектор, определяющий положение элемента трубки относительно заданной точки  $P$ . Если рассматривается только одна бесконечно тонкая трубка интенсивности  $\Gamma$ , то

$$\mathbf{q}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{S_i} \frac{\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}. \quad (10.7)$$

Обозначая текущие координаты точки  $M$  на контуре  $S_i$  через  $\xi', y', z'$  и через  $\xi, y, z$  соответствующие координаты точки  $P$ , будем иметь

$$\rho^2 = (\xi - \xi')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2; \quad (10.8)$$

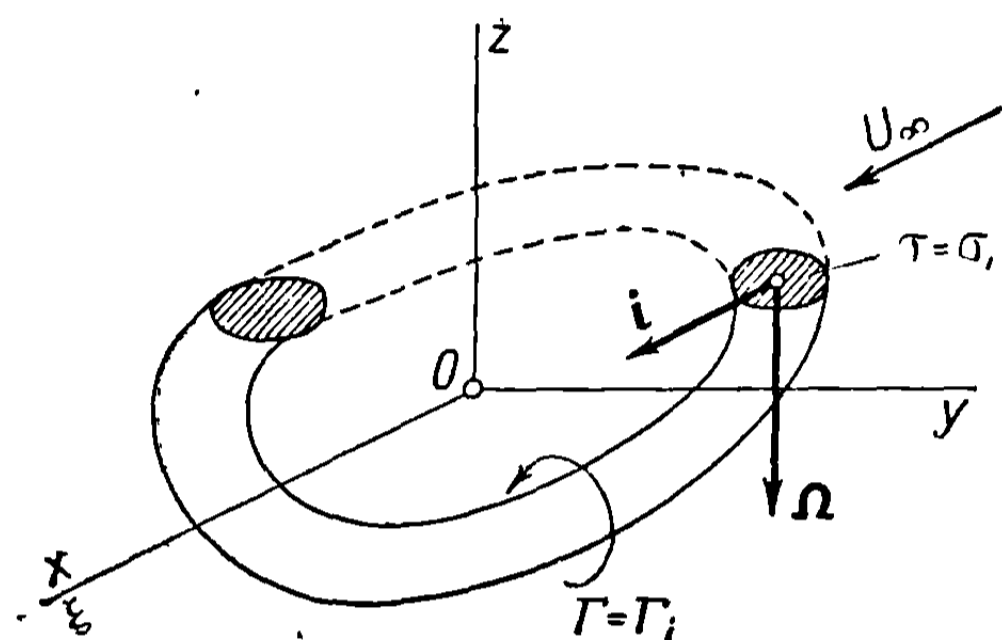
компоненты скорости, индуцированной в точке  $P$ , определяются формулами:

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{S_i} \frac{(y' - y) dz' - (z' - z) dy'}{[(\xi' - \xi)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}};$$

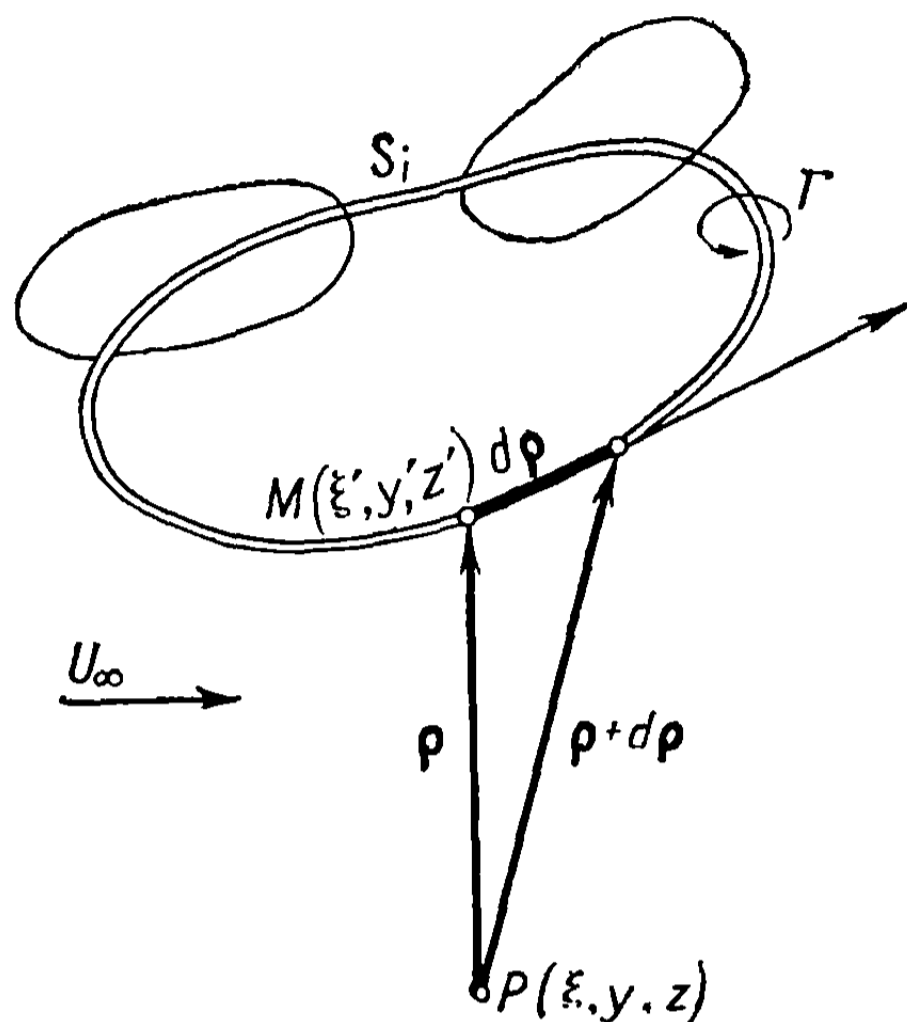
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{S_i} \frac{(z' - z) d\xi' - (\xi' - \xi) dz'}{[(\xi' - \xi)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}};$$

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{S_i} \frac{(\xi' - \xi) dy' - (y' - y) d\xi'}{[(\xi' - \xi)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}. \quad (10.9 \text{ a})$$

Применяя преобразование (10.1), получим соотношения, определяющие скорости в физическом пространстве:



Фиг. 10.1



Фиг. 10.2

$$u = \frac{u_i}{B} = \frac{\Gamma B^2}{4\pi} \int_S \frac{(y' - y) dz' - (z' - z) dy'}{[(x' - x)^2 + B^2 (y' - y)^2 + B^2 (z' - z)^2]^{3/2}};$$

$$v = \frac{\Gamma B^2}{4\pi} \int_S \frac{(z' - z) dx' - (x' - x) dz'}{[(x' - x)^2 + B^2 (y' - y)^2 + B^2 (z' - z)^2]^{3/2}};$$

$$\omega = \frac{\Gamma B^2}{4\pi} \int_S \frac{(x' - x) dy' - (y' - y) dx'}{[(x' - x)^2 + B^2 (y' - y)^2 + B^2 (z' - z)^2]^{3/2}}. \quad (10.9 \text{ б})$$

Эти формулы применялись некоторыми авторами [6,7], развивавшими теорию крыла конечного размаха, путем распространения теории Прандтля на сжимаемые течения.

Они использованы также в настоящей книге при изучении ряда практических примеров, имеющих отношение к проектированию крыльев конечного размаха.

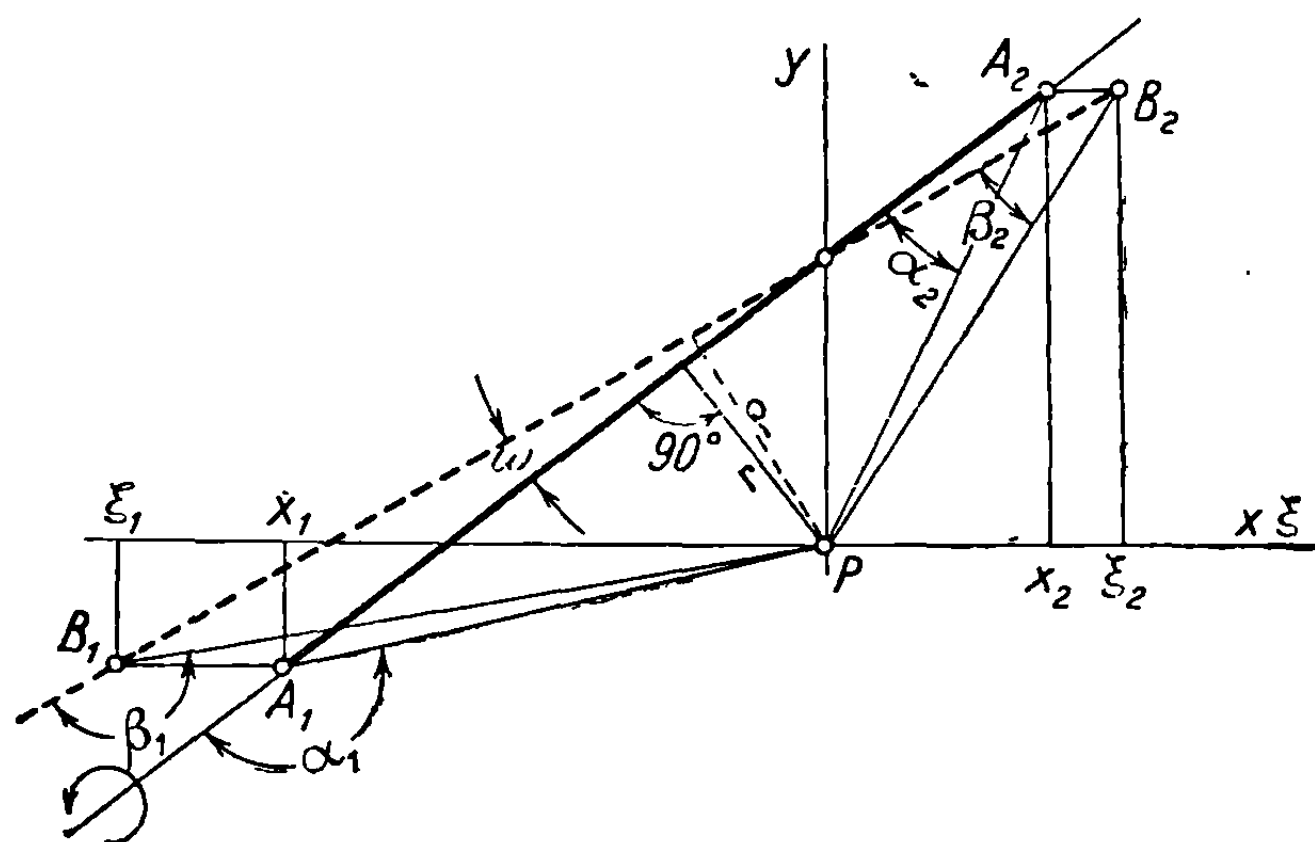
**10.1.2. Скорость, индуцируемая прямолинейным отрезком вихревой трубки.** С целью упрощения рассмотрим несколько простых случаев, имея в виду их практическое применение.

1) Предположим, что точка  $P$  содержится в плоскости, определяемой вихревой трубкой и направлением свободного потока. Если эту плоскость принять за плоскость  $Pxy$ , соответственно  $P\xi y$  (фиг. 10.3), то отрезок  $A_1A_2$  вихревой трубки в первой плоскости перейдет в отрезок  $B_1B_2$  во второй.



Скорость, индуцируемая отрезком трубки в плоскости  $P\xi y$ , нормальна к плоскости и равна

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1). \quad (10.10)$$



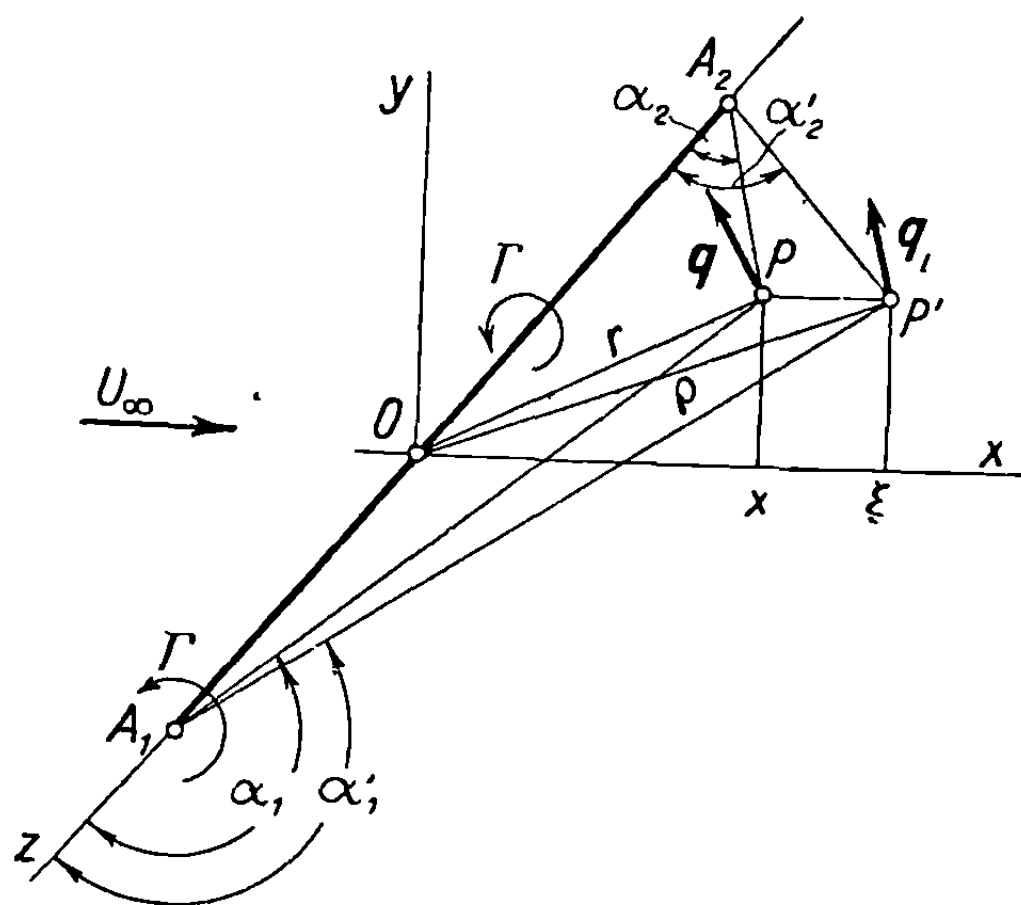
Фиг. 10.3

Чтобы перейти к физической плоскости, нужно выразить  $r$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  как функции геометрических параметров  $r$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

2) В случае отрезка вихря, нормального к направлению скорости, индуцируемая скорость  $q$  в точке  $P$  будет нормальна к плоскости  $PA_1A_2$ . В преобразованной области скорость  $q_i$  нормальна к плоскости  $P'A_1A_2$  (фиг. 10.4).

Отрезок  $A_1A_2$  остается неизменным, тогда как точка  $P(x, y, z)$  переходит в точку  $P'(\xi, y, z)$ , причем изменяется только  $x$ , переходящее в  $\xi$ . Абсолютная величина скорости

$$q_i = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha'_2 - \cos \alpha'_1). \quad (10.11)$$



Фиг. 10.4

Заметим, что при переходе к физической области компоненты скорости для несжимаемого течения  $u_i$  и  $v$  переходят соответственно в  $u = u_i/V$  и  $v$ .

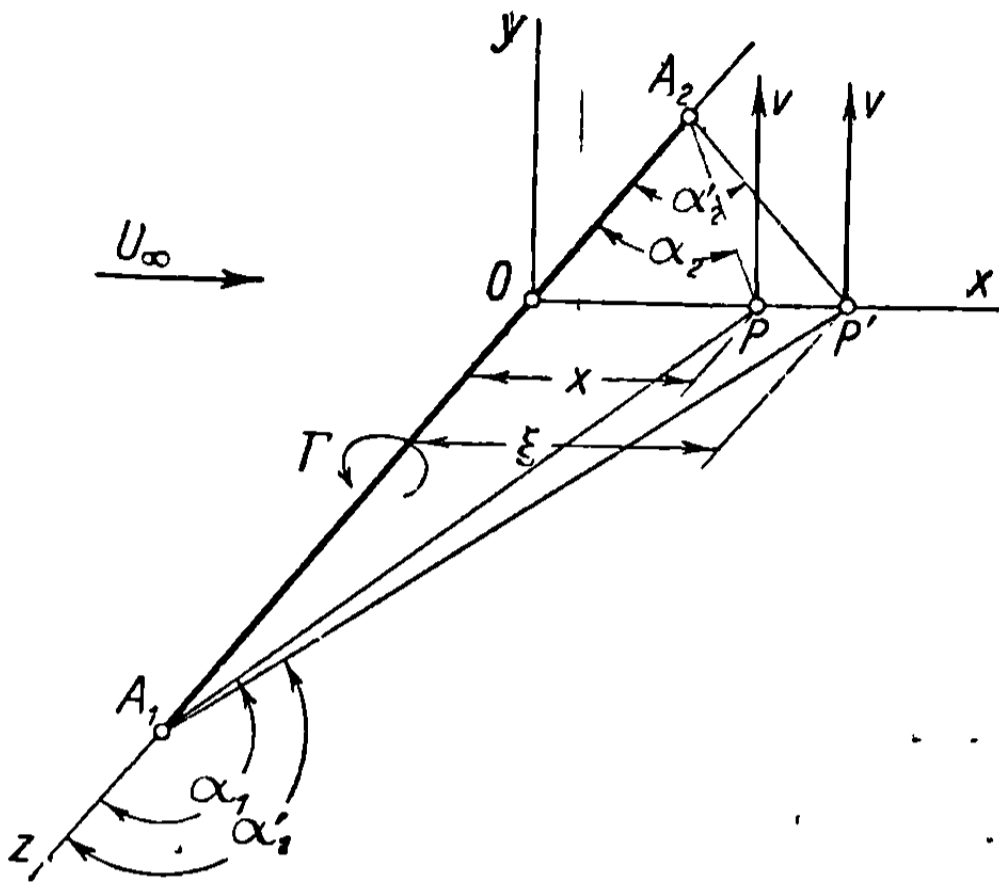
Если точка лежит в плоскости  $Oxz$ , т. е. в плоскости, определенной отрезком вихря и направлением скорости (фиг. 10.5), то индуцируемая скорость будет параллельна оси  $Oy$  и равна

$$q_i = v = \frac{\Gamma}{4\pi\xi} (\cos \alpha'_2 - \cos \alpha'_1) = \frac{(1 - M_\infty^2)\Gamma}{4\pi x} \left( \frac{\cos \alpha_2}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \alpha_2}} - \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \alpha_1}} \right). \quad (10.12)$$

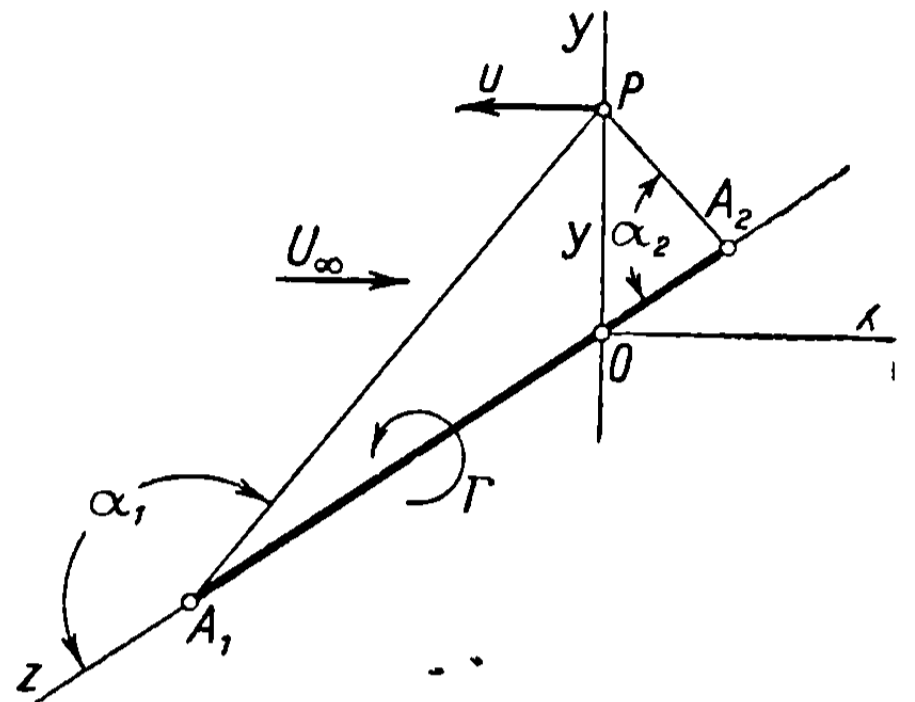
Если оба конца трубки находятся в бесконечности ( $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \pi$ ), то

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi x} \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (10.13)$$

Это значение уменьшается вдвое, если один конец трубки находится в бесконечности, а другой помещается в начале координат.



Фиг. 10.5



Фиг. 10.6

Если точка лежит в плоскости  $Oyz$  (фиг. 10.6), т. е. в плоскости, нормальной к скорости и проходящей через отрезок  $A_1A_2$ , то индуцируемая скорость будет параллельна оси  $Ox$  и равна в каждой области, соответственно, следующим значениям:

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi y} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1);$$

$$u = \frac{u_i}{B} = \frac{\Gamma}{4\pi y} \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (10.14)$$

Если оба конца трубки лежат в бесконечности, то будем иметь

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi y} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (10.15)$$

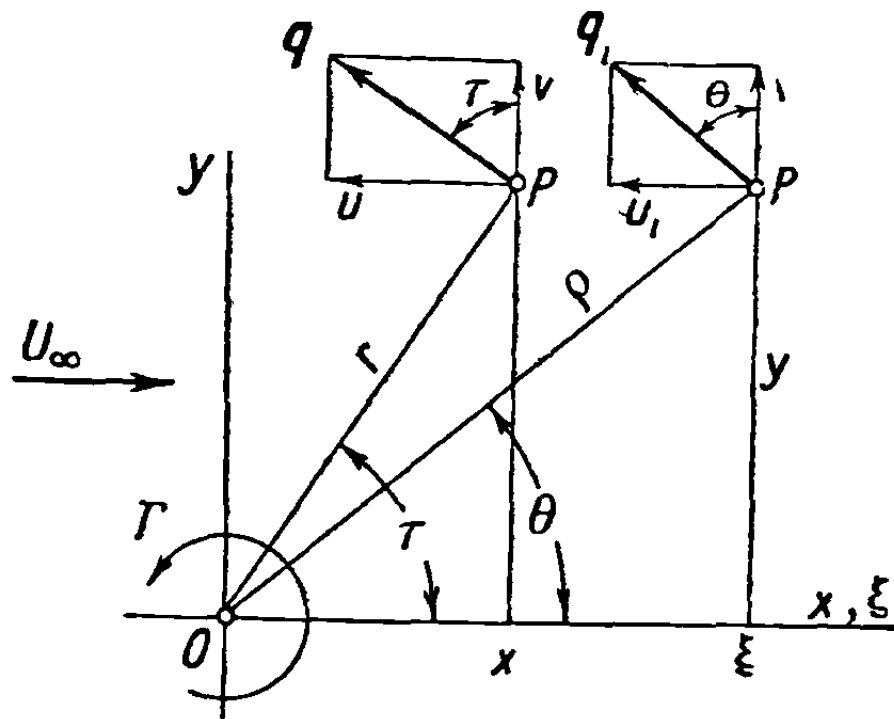
Отметим снова, что последняя величина уменьшается вдвое, если один из концов находится в бесконечности, а другой в начале координат.

3) Возвратимся к простейшему случаю бесконечного вихря и рассмотрим плоскость  $Oxy$ , нормальную к вихрю; этому случаю соответствует фиг. 10.7, где скорость  $q_i$ , перпендикулярная к радиусу-вектору  $\rho$ , определяется выражением

$$q_i = \frac{\Gamma}{2\pi\rho} = \sqrt{u_i^2 + v^2}. \quad (10.16)$$

В области сжимаемого течения соответствующая скорость, обозначаемая через  $q$ , перпендикулярна к радиусу-вектору  $r$ , и для ее вычисления могут быть применены соотношения:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \xi^2 + y^2 = \frac{x^2}{B^2} + y^2 = \frac{x^2 + y^2 - y^2 M_\infty^2}{B^2} = \\ &= \frac{r^2 \left(1 - \frac{y^2}{r^2} M_\infty^2\right)}{B^2} = \frac{r^2 (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)}{B^2}; \end{aligned} \quad (10.17 \text{ а})$$



Фиг. 10.7

$$\begin{aligned} v = q_i \cos \theta &= \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2} \rho \cos \theta = \frac{\Gamma\xi}{2\pi\rho^2} = \frac{B\Gamma x}{2\pi r^2 (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)} = \\ &= \frac{B\Gamma \cos \tau}{2\pi r (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)}; \end{aligned} \quad (10.17 \text{ б})$$

$$\begin{aligned} -u_i = q_i \sin \theta &= \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2} \rho \sin \theta = \frac{\Gamma y}{2\pi\rho^2} = \frac{B^2\Gamma y}{2\pi r^2 (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)} = \\ &= \frac{B^2\Gamma \sin \tau}{2\pi r (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)}; \end{aligned} \quad (10.17 \text{ в})$$

$$-u = \frac{-u_i}{B_1} = \frac{B\Gamma y}{2\pi r^2 (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)} = \frac{B\Gamma \sin \tau}{2\pi r (1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau)}. \quad (10.17 \text{ г})$$

Отсюда

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2}}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau}. \quad (10.18)$$

При  $\tau = 0$  или  $\tau = \pi$  и при  $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$  результат соответственно будет таким:

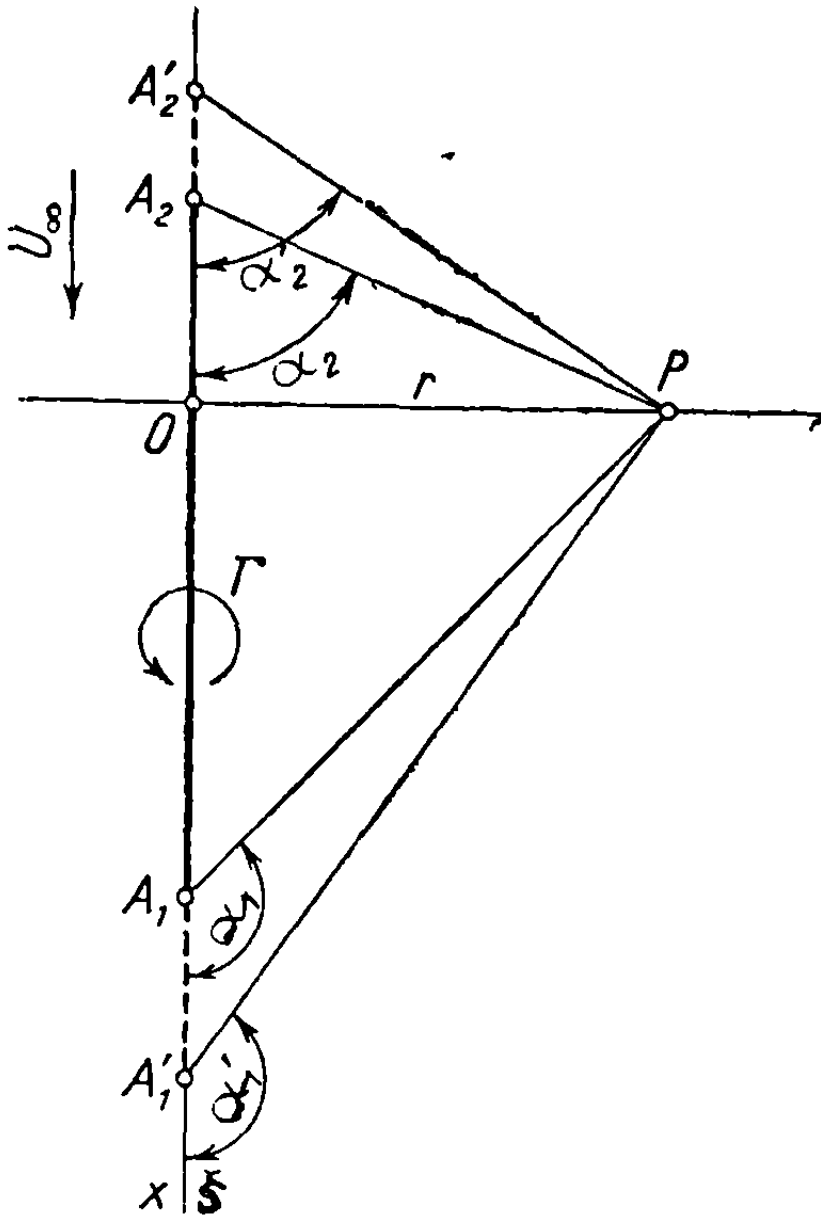
$$u = 0, v = \pm \frac{\Gamma \sqrt{1 - M_\infty^2}}{2\pi r}, \quad (10.19 \text{ а})$$

$$u = \mp \frac{\Gamma}{2\pi r \sqrt{1 - M_\infty^2}}, v = 0, \quad (10.19 \text{ б})$$

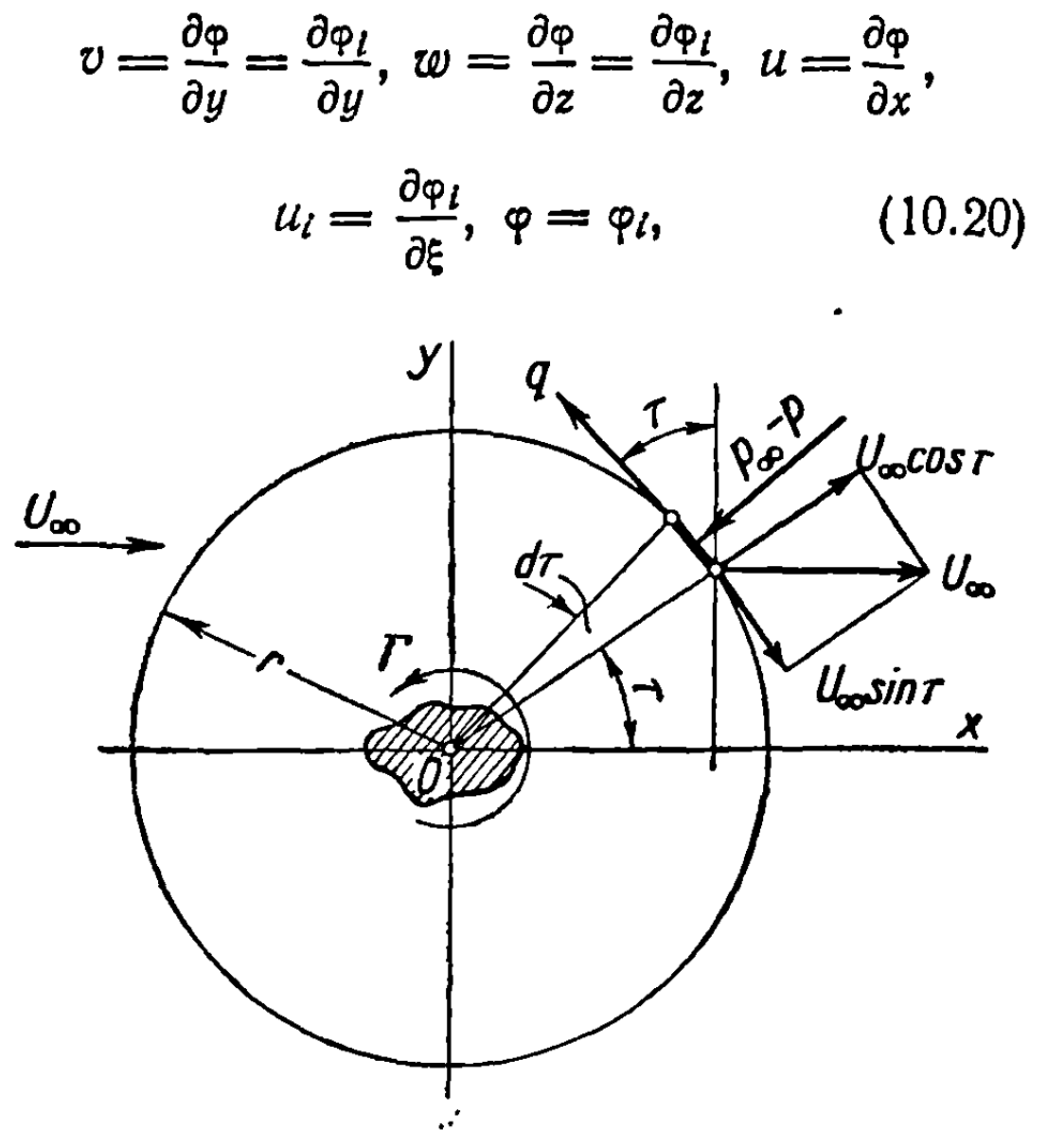
что возвращает нас к случаям (10.13) и (10.15).

Последнее общее выражение для скорости (10.18) может быть получено простым путем, использованным Пистолези [8], который исходил из многозначного потенциала в несжимаемой области, обусловленного циркуляцией  $\Gamma$ .

Таким образом, замечая, что  $\varphi$  в физической области равно  $\varphi_i$  в области несжимаемого течения, так как



Фиг. 10.8



Фиг. 10.9

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$u_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \quad \varphi = \varphi_i, \quad (10.20)$$

получим выражение для потенциала, возникающего только от наличия циркуляции, и для точки, достаточно удаленной от начала координат, так, что оказывается возможным применение гипотезы малых возмущений:

$$\varphi = \varphi_i = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{\xi} = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( B \frac{y}{x} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}(B \operatorname{tg} \tau), \quad (10.21a)$$

величина  $\varphi$  выражается здесь через полярную координату  $\tau$ . Дифференцируя по  $\tau$ , чтобы найти скорость, обозначаемую через  $q$ , получим снова выражение (10.18):

$$q = \frac{\partial \varphi}{r \partial \tau} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2}}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau}, \quad (10.21 б)$$

4) Рассмотрим бесконечно тонкую трубку, параллельную направлению скорости свободного потока (фиг. 10.8); индуцируемая скорость нормальна к плоскости  $PA_1A_2$  и равна скорости, соответствующей отрезку  $A_1'A_2'$  в несжимаемой области; после простых операций приходим к формуле

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha_2' - \cos \alpha_1') =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi r} \left( \frac{\cos \alpha_2}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \sin^2 \alpha_2}} - \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \sin^2 \alpha_1}} \right). \quad (10.22)$$

Если оба конца трубки лежат в бесконечности, получаем такую же формулу, как для несжимаемого течения

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi r}; \quad (10.23)$$

если же один конец будет лежать в бесконечности, а другой — на основании перпендикуляра, проведенного из точки  $P$ , то величина скорости будет вдвое меньше

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi r}. \quad (10.24)$$

Эти формулы применены в последующих главах.

**10.1.3. Теорема Кутта — Жуковского.** При изучении аэродинамических профилей коэффициент подъемной силы и полная подъемная сила определялись на основе подсчета давлений на крыле в зависимости от соответствующих давлений в области несжимаемого течения; при этом не отмечалась справедливость теоремы Кутта — Жуковского для сжимаемого течения.

Теперь этот вопрос будет разобран в общем виде. Рассмотрим вихревую трубку, расположенную нормально к скорости свободного потока  $U_\infty$ , центр сечения  $\sigma$  которой расположен в начале координат. Эта трубка может в конечном счете быть принята как представляющая эквивалентные вихри, которые заменяют профиль крыла.

Предполагая, что условия течения вокруг сечения трубки соответствуют гипотезе малых возмущений и что на достаточно большом расстоянии течение ведет себя так, как если бы бесконечно тонкая трубка располагалась в центре, можно считать, что распределение скоростей определяется формулой (10.18) или (10.21б), прибавляя при этом скорость свободного потока  $U_\infty$  (фиг. 10.9).

Применяя теорему о количестве движения к объему, содержащемуся в цилиндре радиуса  $r$  и длины, равной единице, положим, что  $P$  — сила, действующая со стороны потока на вихревую трубку ( $-P$  — сила, действующая на жидкость со стороны трубки) нормально к потоку, а  $R$  — сила, параллельная потоку.

Пренебрегая внешними силами, будем иметь:

$$-P = \int_0^{2\pi} [(p - p_\infty) \sin \tau + \rho U_\infty q \cos^2 \tau] r d\tau, \quad (10.25 \text{ а})$$

$$-R = \int_0^{2\pi} [(p - p_\infty) \cos \tau - \rho U_\infty q \cos \tau \sin \tau] r d\tau. \quad (10.25 \text{ б})$$

Применяя соотношения (5.28) и (10.17), получим

$$p - p_\infty \approx -\rho_\infty U_\infty u = \rho_\infty U_\infty \frac{B\Gamma}{2\pi r} \frac{\sin \tau}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau}. \quad (10.26)$$

Отправляясь от уравнения Бернулли в дифференциальной форме

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = VdV + a^2 \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (10.27)$$

где  $V$  — полная скорость, и заменяя собственно дифференциалы конечными малыми приращениями, получим

$$\delta p = -\rho \frac{V}{a^2} \delta V \approx -\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{a_\infty^2} \frac{u}{U_\infty} = -\rho_\infty M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty}. \quad (10.28)$$

Отсюда

$$\rho = \rho_\infty + \delta\rho = \rho_\infty \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} M_\infty^2 \right) \quad (10.29)$$

и окончательно

$$\rho U_\infty q = \rho_\infty U_\infty \frac{B\Gamma}{2\pi r} \frac{\left( 1 - \frac{u}{U_\infty} M_\infty^2 \right)}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau}. \quad (10.30)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (10.25), полагая  $r$  стремящимся к бесконечности и пренебрегая поэтому членами, содержащими множитель  $\frac{1}{r}$ , получим в качестве первого результата, что лобовое сопротивление равно нулю:

$$R = 0. \quad (10.31)$$

Такой вывод можно было предсказать заранее.

Далее имеем

$$-P = \rho_\infty U_\infty \frac{B\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau}. \quad (10.32)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{1 - M_\infty^2 \sin^2 \tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{2\pi}{B}; \quad (10.33)$$

отсюда, окончательно, получим равенство

$$P = -\rho_\infty U_\infty \Gamma, \quad (10.34)$$

подтверждающее утверждения, сделанные вначале.

## 10.2. Уравнение для циркуляции вокруг крыла конечного размаха

Предшествующие теоретические рассуждения, относящиеся к вихрям, оказываются полезными при решении задач о крыльях конечного размаха. Однако предварительно нужно определить циркуляцию вокруг сечения в случае крыла бесконечного размаха. Это было уже сделано в предыдущем разделе, при анализе течения вокруг аэродинамического профиля. Но так как при этом были применены различные методы и аффинные преобразования с различной интерпретацией, хотя и с одинаковым конечным результатом, предпочтительнее снова рассмотреть проведенные рассуждения, исходя из аффинного преобразования (10.1).

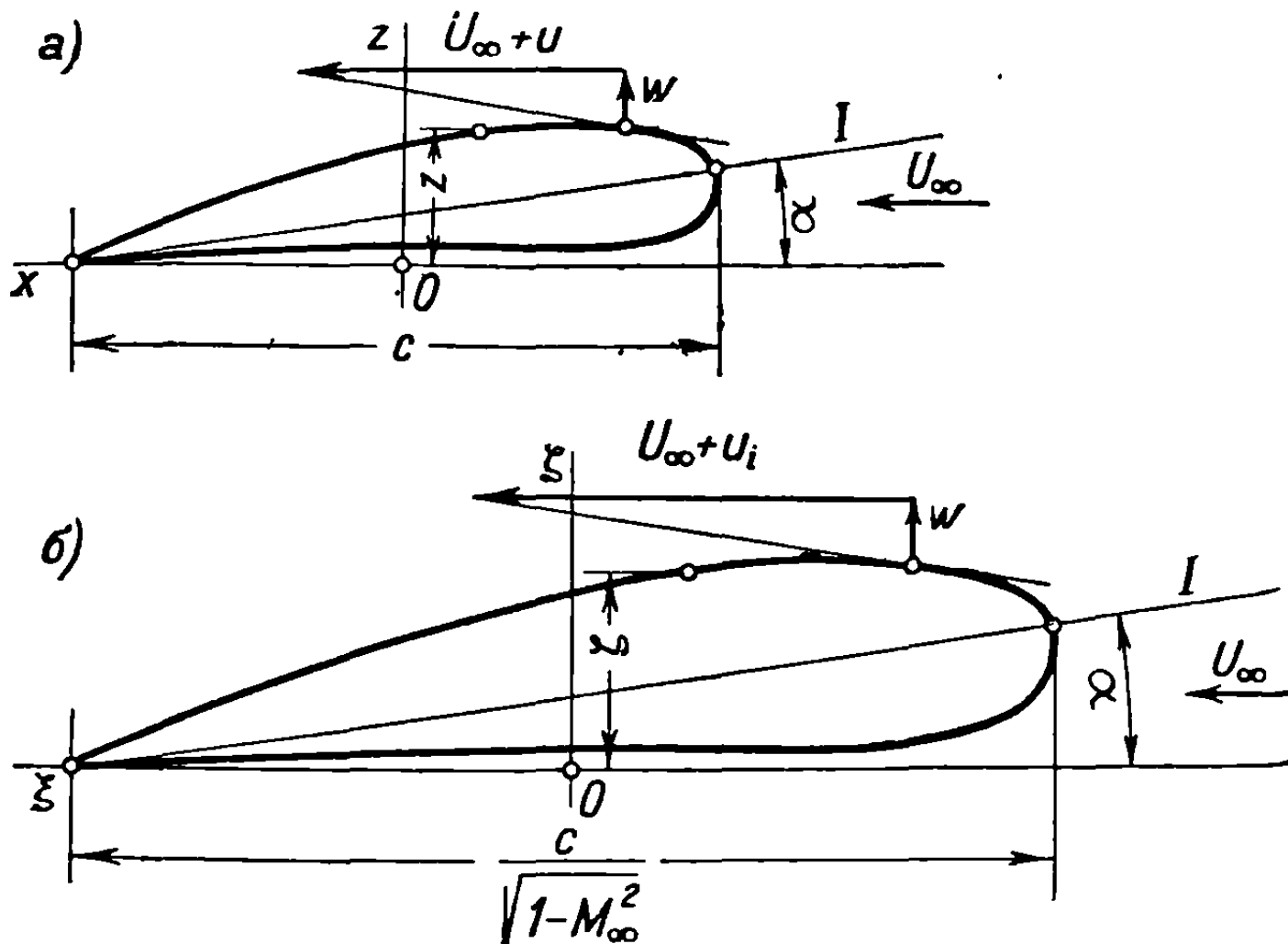
Отнесем профиль к системе осей, которая позже использована как система отсчета для крыла в целом при установлении условий течения вокруг него (см. фиг. 10.10). В преобразованной плоскости все абсциссы профиля возрастают в  $(1 - M_\infty^2)^{-1/2}$  раз.

Пусть  $z$  и  $\zeta$  — ординаты профиля в двух плоскостях. В согласии с прежними результатами (10.1), вертикальные скорости на профиле в со-

ответствующих точках равны между собой и связаны с тангенсами углов наклона касательной к профилю зависимостями

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{U_\infty + u} \approx \frac{w}{U_\infty + u_i} = \frac{d\xi}{d\xi} \quad (10.35)$$

Очевидно, что физический профиль эквивалентен подобному профилю в плоскости несжимаемого течения, увеличенному в  $(1 - M_\infty^2)^{-\frac{1}{2}}$  раз.



Фиг. 10.10 а,б

Циркуляция вокруг физического профиля будет равна циркуляции вокруг фиктивного профиля. Хорда последнего определяется равенством

$$c_i = \frac{c}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \quad (10.36)$$

поэтому, согласно уравнению Жуковского,

$$\Gamma = \Gamma_i = \pi \frac{c(1 + \epsilon)}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} U_\infty \alpha, \quad (10.37)$$

где  $\epsilon$  — очень малый коэффициент, наличие которого связано с тем, что толщина профиля не равна нулю. Так как эксперименты, проведенные при  $M_\infty = 0$ , дают меньшие значения рассматриваемых величин, по сравнению с их теоретическими значениями, можно заменить величину  $\pi(1 + \epsilon)$  через коэффициент  $k'$ , приближенно равный этой величине и полученный непосредственно экспериментальными методами; значение этого коэффициента определяется приближенным равенством

$$k' \approx 0,87 \pi (1 + \epsilon) \approx 0,90 \pi. \quad (10.38)$$

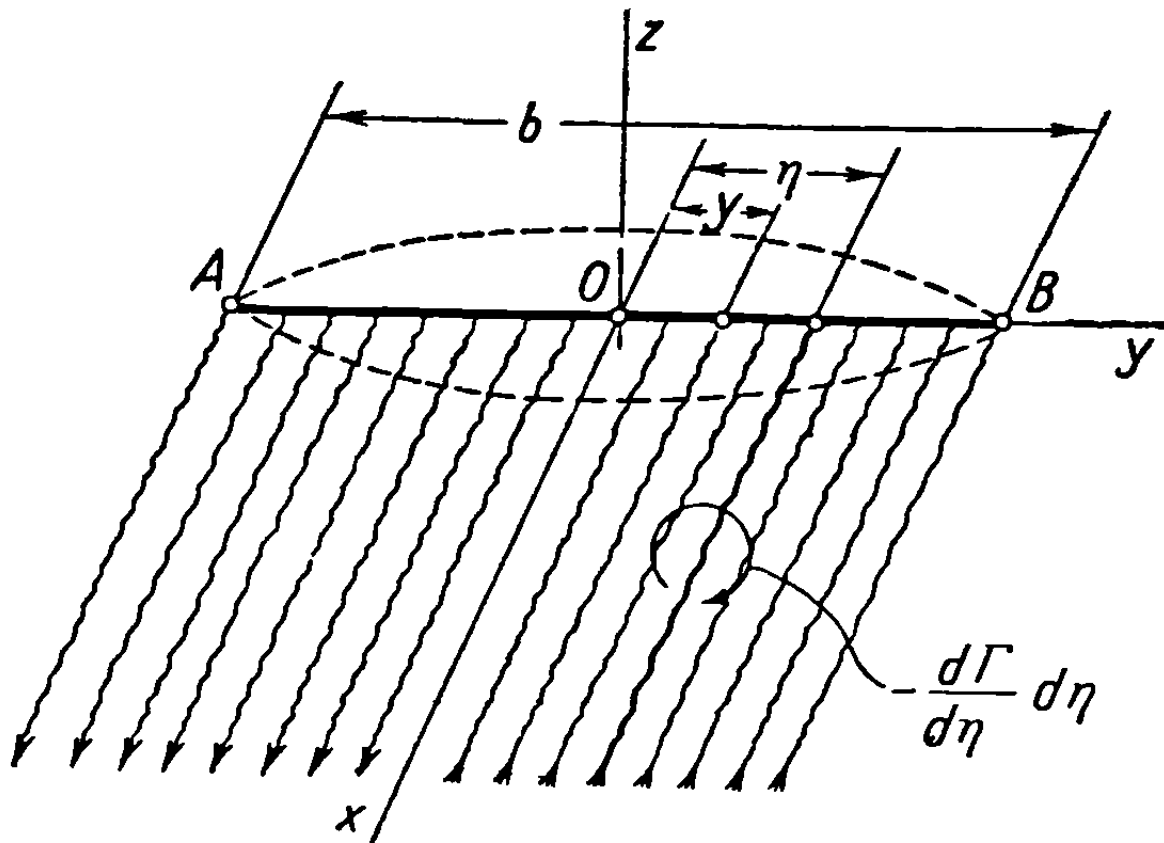
Обозначая через  $k$  подобный же коэффициент, соответствующий процессу, происходящему в сжимаемом течении, и определяемый формулой

$$k = \frac{k'}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad (10.39)$$

получим уравнение для циркуляции вокруг крыла бесконечного размаха:

$$\Gamma = k' c_i U_\infty a = kc U_\infty a. \quad (10.40)$$

Переходя к изучению крыла конечного размаха, представим его, в соответствии с линейной теорией Прандтля, как *несущую линию*, с которой



Фиг. 10.11

сходят свободные вихри, образующие пелену, простирающуюся до бесконечности вниз по потоку. Циркуляция изменяется вдоль размаха  $AB = b$ , согласно установленному ниже закону. В точке  $\eta$  размаха (фиг. 10.11) отделяется полоска из вихревых трубок с интенсивностью

$$-\frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta,$$

индуцирующая элементарную скорость в точке  $y$

$$d\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y}, \quad (10.41)$$

таким же образом, как в случае несжимаемого течения.

Полная индуцируемая скорость будет

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{AB} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y}, \quad (10.42)$$

и соответствующий индуцируемый угол атаки

$$i \approx \frac{\omega}{U_\infty} \quad (10.43)$$

будет влиять на циркуляцию в этой точке так, как если бы первоначальный угол атаки крыла  $\alpha$  возрос на величину  $i$ . Таким образом, мы снова получим интегро-дифференциальное уравнение Прандтля

$$\Gamma = k' c_i U_\infty \left( \alpha + \frac{\omega}{U_\infty} \right) = kc U_\infty \left( \alpha + \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{AB} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y} \right), \quad (10.44)$$

с той, однако, разницей, что коэффициент  $k$  будет большим, по сравнению с коэффициентом  $k'$  в случае несжимаемого течения. Если размах действи-



тельного крыла  $b$ , а его поверхность  $S$ , то фиктивное, поставленное ему в соответствие, крыло будет иметь прежний размах, но его поверхность возрастет в той же пропорции

$$S_i = \frac{S}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \quad (10.45)$$

следовательно, соответствующее удлинение изменится согласно равенству

$$\lambda_i = \frac{b^2}{S_i} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{b^2}{S} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \lambda. \quad (10.46)$$

Для практического решения задачи введем новые переменные  $\theta$  и  $\tau$ , так что

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b}{2} \cos \theta, \\ \eta &= -\frac{b}{2} \cos \tau; \end{aligned} \quad (10.47)$$

применяя разложение Фурье для циркуляции  $\Gamma$ , получим

$$\Gamma = 2bU_\infty \sum_1^n A_n \sin n\theta = 2bU_\infty \sum_1^n A_n \sin n\tau. \quad (10.48)$$

Индуктируемый угол атаки легко вычисляется:

$$i = \frac{\omega}{U_\infty} = \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{AB} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_1^n nA_n \cos n\tau}{\cos \tau - \cos \theta} d\tau = -\sum_1^n nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (10.49)$$

При подсчете мы воспользовались значением определенного интеграла, введенного Глауертом,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\tau}{\cos \tau - \cos \theta} d\tau = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (10.50)$$

Подставляя полученный результат в уравнение (10.44), получим окончательно, после некоторых простых преобразований, уравнение Глауерта:

$$\sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta = \frac{kc}{2b} \alpha \sin \theta - \frac{kc}{2b} \sum_1^n nA_n \sin n\theta. \quad (10.51)$$

Обозначая центральную хорду крыла через  $c_0$  и полагая

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{kc_0}{2b}, \\ \frac{kc}{2b} &= \frac{kc_0}{2b} \cdot \frac{c}{c_0} = \mu_0 \frac{c}{c_0}, \end{aligned} \quad (10.52)$$

можно выразить уравнение (10.51) в форме

$$\frac{c_0}{c} \sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta + \mu_0 \sum_1^n n A_n \sin n\theta = \mu_0 \alpha \sin \theta. \quad (10.53)$$

Обозначая через  $c_{0i}$  центральную хорду фиктивного крыла и имея в виду, что

$$\mu_0 = \frac{kc_0}{2b} = \frac{k'c_0}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \cdot \frac{1}{2b} = \frac{k'c_{0i}}{2b} = \mu_{0i}, \quad (10.54)$$

можно легко усмотреть, что циркуляция вокруг действительного крыла совпадает с циркуляцией вокруг фиктивного крыла, имеющего удлинение  $\lambda_i$ .

### 10.3. Распределение циркуляции вокруг эллиптических, прямоугольных и трапециевидальных крыльев

Вычисление циркуляции вокруг любого крыла в сжимаемом потоке сводится к обычному расчету для такого же крыла в случае несжимаемого течения, но с меньшим удлинением  $\lambda_i = \sqrt{1-M_\infty^2} \lambda$ . Для определения аэродинамических характеристик необходимо знать структуру формул, из которых выводятся коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в разложении циркуляции (10.48). Это позволяет через аэродинамические характеристики, полученные в условиях несжимаемого течения ( $M_\infty \approx 0$ ), определить характеристики для действительного течения. С этой целью требуемые формулы будут теперь установлены с помощью метода, указанного в более ранних работах [4,9].

Для обычных форм крыльев (эллиптических, прямоугольных, трапециевидальных) может быть записано соотношение, выраженное через ту же переменную  $\theta$ , определенную посредством уравнения (10.47), которое дает хорошую аппроксимацию:

$$\frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta; \quad (10.55)$$

здесь коэффициенты  $\beta_0, \beta_2, \beta_4$ , называемые *коэффициентами формы*, являются функциями геометрических характеристик крыла.

Обозначая хорду на конце крыла через  $c_e$  (фиг. 10.12) и полагая

$$q = 1 - \frac{c_e}{c_0}, \quad (10.56)$$

будем иметь [4]

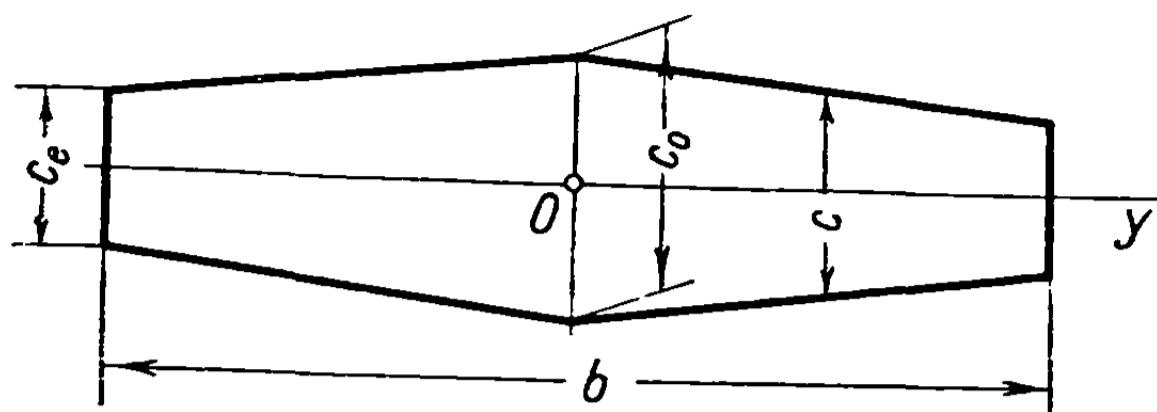
$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0,5 \left( \frac{0,38}{1-0,92q} + \frac{0,92}{1-0,38q} \right); \\ 2\beta_2 &= 0,707 \left( \frac{0,38}{1-0,92q} - \frac{0,92}{1-0,38q} \right); \\ 2\beta_4 &= 0,5 \left( \frac{0,38}{1-0,92q} + \frac{0,92}{1-0,38q} \right) - \frac{0,707}{1-0,707q}. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Для эллиптического крыла, очевидно,

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_2 = \beta_4 = 0, \quad (10.58)$$

а для квази-эллиптического крыла, обозначая через  $c_1, c_2, c_3$  хорды крыла в различных сечениях вдоль размаха, расположенных на расстояниях от оси его, определяемых значениями

$$2\frac{y}{b} = 0,38; 0,707; 0,92,$$



Фиг. 10.12

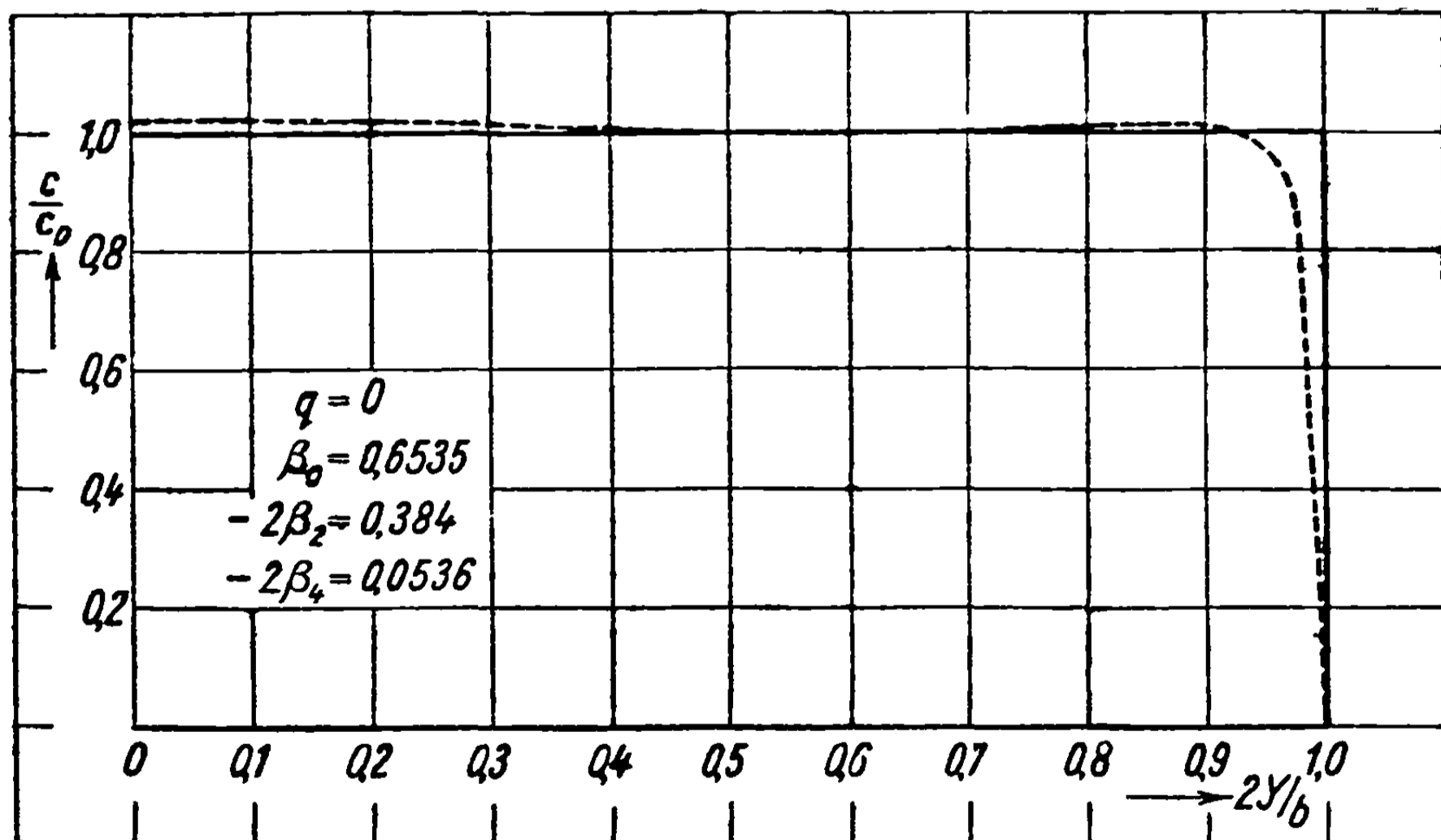
получим:

$$\beta_0 = 0,19 \frac{c_0}{c_3} + 0,46 \frac{c_0}{c_1};$$

$$2\beta_2 = \frac{1}{0,707} \left( \beta_0 - 0,92 \frac{c_0}{c_1} \right);$$

$$2\beta_4 = \beta_0 - 0,707 \frac{c_0}{c_2}. \quad (10.59)$$

Чтобы проверить точность, с которой представлены контуры крыльев этими формулами, на фигурах 10.13 и 10.14 изображены контуры,



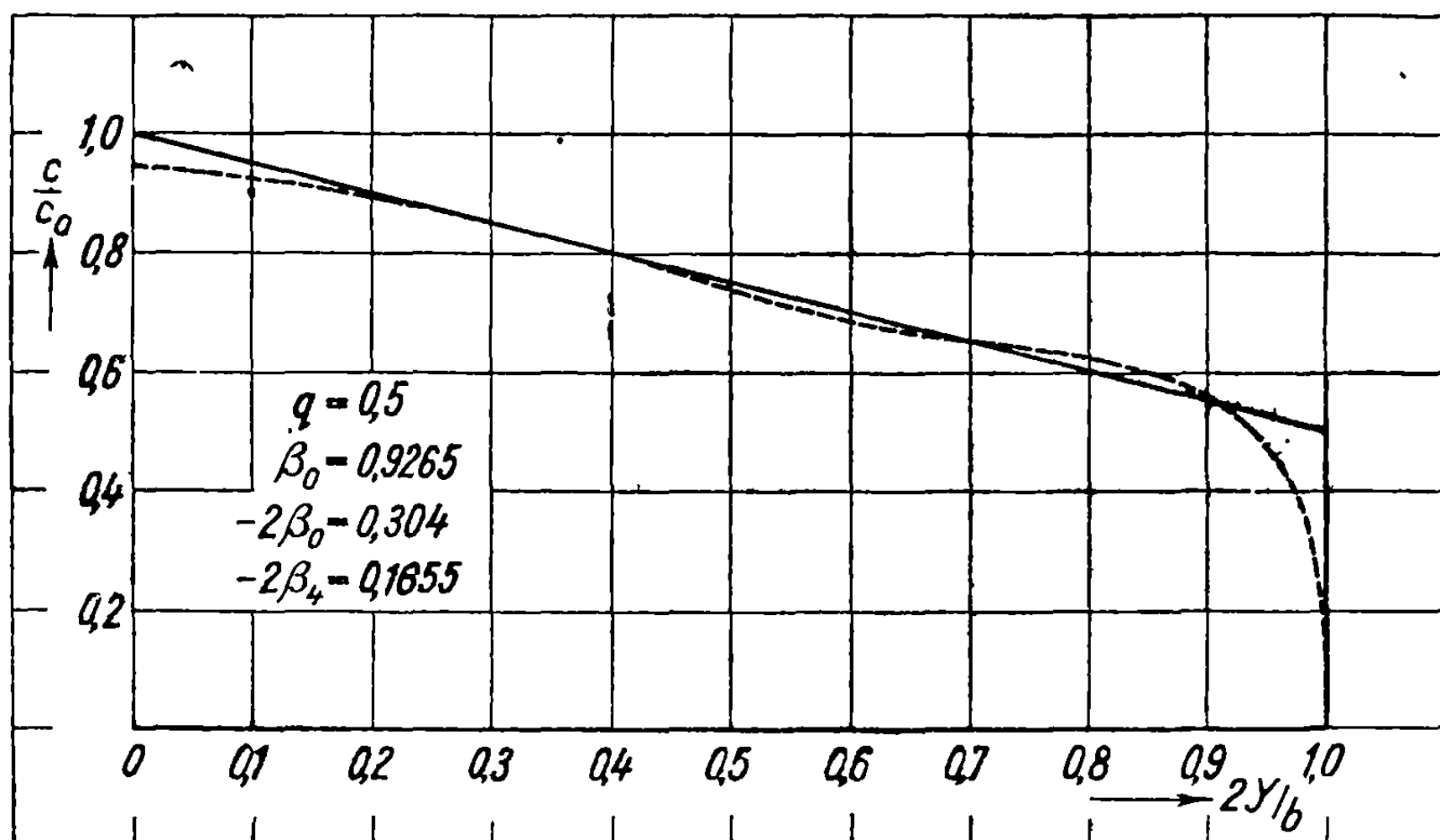
Фиг. 10.13

подсчитанные с помощью формулы (10.55), путем использования коэффициентов, определяемых формулами (10.57), а также изображены действительные контуры двух крыльев — прямоугольного и трапециoidalного. Кривые находятся в очень хорошем согласии, особенно если иметь в виду, что концы действительных крыльев всегда закруглены.

Определяя разложение Фурье для правой части уравнения (10.53) в предположении, что угол атаки изменяется вдоль размаха, получим

$$\alpha \sin \theta = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta; \quad (10.60)$$

подставляя результат в уравнение (10.53), принимая также во внимание выражение (10.55) и приравнивая коэффициенты в правой и левой



Фиг. 10.14

частях равенства, приписанные одинаковым членам вида  $\sin n\theta$  получим окончательно систему уравнений в конечных разностях, общая форма которых имеет вид

$$(n\mu_0 + \beta_0) A_n + \beta_2 (A_{n-2} + A_{n+2}) + \beta_4 (A_{n-4} + A_{n+4}) = \mu_0 \alpha_n. \quad (10.61)$$

Для первых уравнений, в которых коэффициенты имеют отрицательные индексы, необходимо положить

$$A_{-1} = -A_1, \quad A_{-2} = -A_2, \quad A_{-3} = -A_3. \quad (10.62)$$

Кроме того, нужно заметить, что система уравнений по самой ее структуре разделяется на две другие системы, в одной из которых встречаются только четные индексы, а в другой нечетные.

Не входя в подробности, укажем приближенный метод, который может быть использован для решения этой системы.

Если индекс превышает некоторое достаточно большое значение  $(n+2)$ , то величиной  $A_{n+4}$  можно пренебречь по сравнению с  $A_n$ , величиной  $A_{n+6}$  — по сравнению с  $A_{n-2}$  и  $A_{n+2}$ , величиной  $A_{n+8}$  — по сравнению с  $A_n$ ; таким образом, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} [(n+2)\mu_0 + \beta_0] A_{n+2} + \beta_2 (A_n + A_{n+4}) + \beta_4 (A_{n-2} + A_{n+6}) &\approx \\ &\approx [(n+2)\mu_0 + \beta_0] A_{n+2} + \beta_2 A_n + \beta_4 A_{n-2} = \mu_0 \alpha_{n+2}; \\ [(n+4)\mu_0 + \beta_0] A_{n+4} + \beta_2 (A_{n+2} + A_{n+6}) + \beta_4 (A_n + A_{n+8}) &\approx \\ &\approx [(n+4)\mu_0 + \beta_0] A_{n+4} + \beta_2 A_{n+2} + \beta_4 A_n = \mu_0 \alpha_{n+4}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

из которых могут быть выведены  $A_{n+2}$  и  $A_{n+4}$  и подставлены в равенство (10.61). Путем элементарных, но трудоемких операций получим окончательно систему рекуррентных формул, с помощью которой определяются требуемые коэффициенты:

$$\left(\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}\right) A_1 = \mu_0 \left(\omega_1 + \beta_4 \frac{\omega_3}{3\mu_0 + \beta_0}\right);$$

$$\left(2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0}\right) A_2 = \mu_0 \omega_2;$$

$$\left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0}\right) A_3 + \left(\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_4}{5\mu_0 + \beta_0}\right) A_1 = \mu_0 \omega_3; \quad (10.64)$$

$$\left(4\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{6\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{8\mu_0 + \beta_0}\right) A_4 + \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0}\right) A_2 = \mu_0 \omega_4;$$

.....

$$\left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}\right) A_n +$$

$$+ \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0}\right) A_{n-2} + \beta_4 A_{n-4} = \mu_0 \omega_n,$$

где

$$\omega_n = \alpha_n - \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0}\right) \frac{\alpha_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{\alpha_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}. \quad (10.65)$$

В случае эллиптических крыльев, когда  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_2 = \beta_4 = 0$ , имеем

$$(1 + \mu_0) A_1 = \mu_0 \alpha_1,$$

$$(1 + 2\mu_0) A_2 = \mu_0 \alpha_2,$$

.....

$$(1 + n\mu_0) A_n = \mu_0 \alpha_n. \quad (10.66)$$

Хотя приведенные формулы точно такие же, как полученные в случае несжимаемого течения для различных удлинений, они даны с целью сравнения результатов, полученных для заданного крыла в сжимаемой жидкости и для такого же крыла, расположенного в несжимаемом потоке, так как необходимо напомнить, что эксперименты обычно проводятся при малых скоростях ( $M_\infty \approx 0$ ).

Применим найденные результаты к прямоугольному крылу, для которого из формул (10.57) выводятся следующие значения коэффициентов формы:

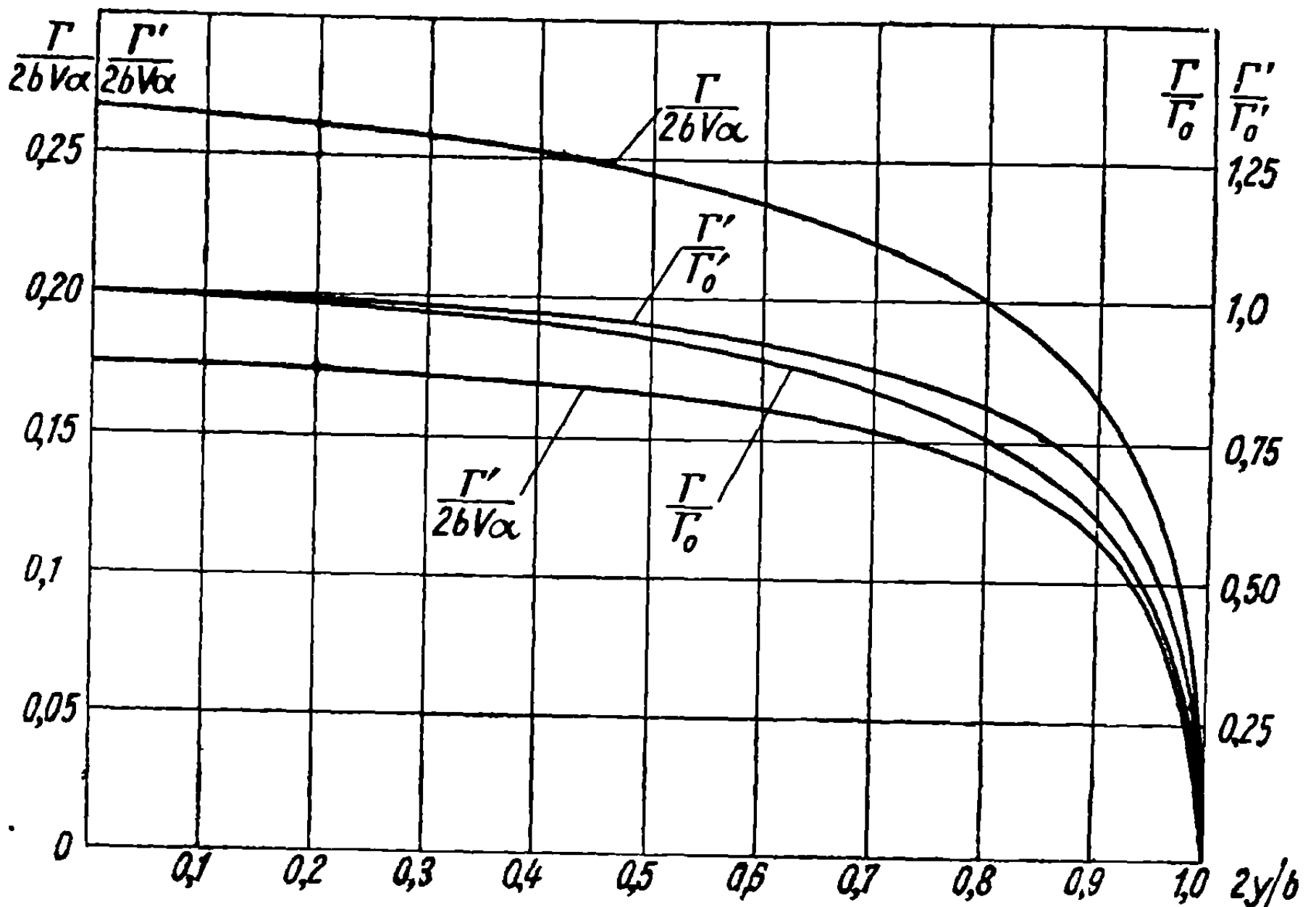
$$\beta_0 = 0,65; \quad 2\beta_2 = -0,38; \quad 2\beta_4 = -0,054. \quad (10.67)$$

Чтобы сделать сравнение более ясным, примем большое значение для удлинения  $\lambda = 2,5k' \approx 7$ ; тогда для  $M_\infty \approx 0$  (несжимаемое течение) получим

$$\mu'_0 = \frac{k'c}{2b} = \frac{k'}{2\lambda} = \frac{1}{5}, \quad (10.68)$$

и формулы (10.64) дают, в предположении, что угол атаки постоянен, и, следовательно,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ ;

$$\frac{A'_1}{\alpha} = 0,195; \quad \frac{A'_3}{\alpha} = 0,027; \quad \frac{A'_5}{\alpha} = 0,0065; \quad \frac{A'_7}{\alpha} = 0,001. \quad (10.69)$$



Фиг. 10.15

Для  $M_\infty = 0,8$  имеем:

$$\sqrt{1 - M_\infty^2} = 0,6; \quad \lambda_i = 0,6\lambda = 1,5k_i = 1,5k' \approx 4,2,$$

отсюда

$$\mu_0 = \frac{kc}{2b} = \frac{k_i c_i}{2b} = \frac{k'}{2\lambda_i} = \mu_{0i} = \frac{1}{3}. \quad (10.70)$$

Подобные же вычисления, как для крыла с удлинением  $\lambda_i$ , но при  $M_\infty = 0$ , приводят к коэффициентам для действительной циркуляции:

$$\frac{A_1}{\alpha} = 0,286; \quad \frac{A_3}{\alpha} = 0,029; \quad \frac{A_5}{\alpha} = 0,0059; \quad \frac{A_7}{\alpha} = 0,00066. \quad (10.71)$$

Фигура 10.15 изображает распределение вдоль размаха циркуляции  $\Gamma'$  для  $M_\infty = 0$  и циркуляции  $\Gamma$  для  $M_\infty = 0,8$ .

Замечание. Коэффициенты  $A_1, \dots, A_n$  могут быть также определены непосредственно из формул (10.64), без перехода к эквивалентному крылу с удлинением  $\lambda_i$ , обтекаемому потоком при  $M_\infty \approx 0$ ; это достигается путем вычисления для каждого  $M_\infty$  действительного коэффициента  $\mu_0$ . Целесообразно, однако, определить удлинение  $\lambda_i$ , потому что, во-первых, коэффициенты  $A_n$  обычно уже вычислены для  $M_\infty = 0$ , так что применение к случаю сжимаемого течения вытекает отсюда непосредственно, во-вторых, лабораторные опыты обыкновенно проводятся при  $M_\infty \approx 0$ , и путем

пересчета экспериментальных значений могут быть получены действительные значения для соответствующего  $M_\infty$ , если использовать отношение  $\Gamma/\Gamma'$  между циркуляцией  $\Gamma$  при числе  $M_\infty$  и циркуляцией  $\Gamma'$  при  $M_\infty = 0$ .

#### 10.4. Аэродинамические силы и моменты

Предполагая, что распределение циркуляции вдоль размаха известно можно с помощью простых вычислений найти подъемную силу, индуктивное сопротивление и моменты относительно соответствующих осей.

10.4.1. Подъемная сила. Применяя формулу Жуковского (10.34) к каждому элементу крыла

$$P = \rho_\infty U_\infty \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma dy = \rho_\infty b^2 U_\infty^2 \int_0^\pi \left( \sum_1^n A_n \sin n\theta \right) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^2 \pi A_1, \quad (10.72)$$

получим коэффициент подъемной силы

$$C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_\infty S U_\infty^2} = \pi \lambda A_1 = \pi \lambda \mu_0 \frac{A_1}{\mu_0 \alpha} = 2k_\lambda \alpha. \quad (10.73)$$

Пусть  $2k_\lambda$  будет наклон графика для  $C_z$  как функции угла атаки крыла с удлинением  $\lambda$ , по аналогии с наклоном, соответствующим крылу бесконечного размаха; предполагая угол атаки постоянным по всему размаху, можно вывести следующее соотношение из первого уравнения (10.64):

$$2k_\lambda = \pi \lambda \mu_0 \frac{A_1}{\mu_0 \alpha} = \frac{\pi \lambda \mu_0}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}}. \quad (10.74)$$

При  $M_\infty = 0$  то же крыло будет иметь соответствующий наклон  $k'_\lambda$ :

$$2k'_\lambda = \frac{\pi \lambda \mu'_0}{\mu'_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu'_0 + \beta_0}}. \quad (10.75)$$

Так как

$$\mu'_0 = \frac{k'c_0}{2b} = \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2} k c_0}{2b} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \mu_0, \quad (10.76)$$

то

$$\frac{k_\lambda}{k'_\lambda} = \frac{\mu'_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu'_0 + \beta_0}}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (10.77)$$

Если пренебречь величиной  $(\beta_2 - \beta_4)^2$  вследствие ее малости и слабого влияния на предшествующее отношение, то

$$\frac{k_\lambda}{k'_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\mu'_0 + \beta_0 - \beta_2}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2} = \frac{\mu'_0 + \beta_0 - \beta_2}{\mu'_0 + \sqrt{1 - M_\infty^2} (\beta_0 - \beta_2)}. \quad (10.78)$$

Подставляя вместо коэффициента  $\mu'_0$  его выражение в виде функции от  $k'_\lambda$ , выведенное из уравнения (10.75), получим формулу

$$2k_\lambda = \frac{2k'_\lambda}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}) \frac{2k'_\lambda}{\pi\lambda}}, \quad (10.79)$$

с помощью которой можно переходить от наклона  $C_z$  при  $M_\infty = 0$  к соответствующему наклону при любом  $M_\infty$ . При сделанном выше приближении формула пригодна для любой формы крыла, включая эллиптическое крыло, которое специально исследовалось многими авторами и для которого формула дает точный результат.

При более точном вычислении, рассматривая по-прежнему величину  $(\beta_2 - \beta_4)^2$  как очень малую, приходим к формуле

$$\frac{2k'_\lambda}{2k_\lambda} = \sqrt{1 - M_\infty^2} + (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}) \left[ 1 + 3 \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{(3\mu'_0 + \beta_0)^2} \right] \frac{2k'_\lambda}{\pi\lambda}, \quad (10.80)$$

которая сводится к предшествующему уравнению, если пренебречь вторым членом в квадратных скобках.

Индукцированный угол изменяется от одного сечения к другому; для эллиптического крыла он постоянен. По аналогии для получения эффективного угла  $\alpha_e$  нужно из геометрического угла  $\alpha$  вычесть средний индуцированный угол крыла, обозначаемый через  $i_m$ :

$$\alpha_e = \alpha - i_m. \quad (10.81)$$

Для коэффициента подъемной силы имеем

$$C_z = 2k_\lambda \alpha = 2k \alpha_e = 2k (\alpha - i_m), \quad (10.82)$$

откуда

$$i_m = \alpha - \alpha_e = \frac{C_z}{2k_\lambda} - \frac{C_z}{2k} = \frac{\pi\lambda}{2} \left( \frac{1}{k_\lambda} - \frac{1}{k} \right) \frac{C_z}{\pi\lambda} = (1 + \tau) \frac{C_z}{\pi\lambda}; \quad (10.83)$$

используя уравнение (10.74), можно определить величину:

$$\tau = \frac{\pi\lambda}{2} \left( \frac{1}{k_\lambda} - \frac{1}{k} \right) - 1 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\pi c_0 b}{4 S} \right]. \quad (10.84)$$

Если соответствующую величину для  $M_\infty = 0$  обозначить через  $\tau'$ , то получим такую же формулу с тем исключением, что  $\mu_0$  будет заменено на  $\mu'_0$ ; отсюда выводим, что  $\tau'$  связано с  $\tau$  с точностью до величины, которой можно пренебречь в первом приближении, соотношением

$$\tau = \tau' \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad (10.85)$$

следовательно, циркуляция при возрастании скорости стремится к эллиптическому распределению.



**10.4.2. Индуктивное сопротивление.** Обозначая через  $\omega$  индуцированную скорость, определяемую уравнениями (10.42) и (10.49), получим соотношение

$$R = -\rho_{\infty} \int_{-b/2}^{+b/2} \omega \Gamma dy = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b^2 \int_0^{\pi} \left( \sum_1^n n A_n \sin n\theta \right) \times \\ \times \left( \sum_1^n A_n \sin n\theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b^2 \pi \sum_1^n n A_n^2, \quad (10.86)$$

откуда можно вывести коэффициент индуктивного сопротивления

$$C_x = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \sum_1^n \frac{n A_n^2}{A_1^2} = (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda}. \quad (10.87)$$

Простое вычисление приводит к значению коэффициента  $\delta$

$$\delta = \sum_1^n n \frac{A_n^2}{A_1^2} - 1 = 3 \left( \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right)^2 + 5 \left( \frac{\beta_2(\beta_2 - \beta_4)}{(3\mu_0 + \beta_0)(5\mu_0 + \beta_0)} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right)^2, \quad (10.88)$$

который может быть представлен как функция от коэффициента  $\delta'$ , соответствующего условию  $M_{\infty} = 0$ . Действительно, если иметь в виду, что вторым членом можно пренебречь и заменить  $\mu_0$  через  $\mu'_0$  в первом члене, получим отношение

$$\frac{\delta}{\delta'} \approx \left( \frac{3\mu'_0 + \beta_0}{3\mu_0 + \beta_0} \right)^2 = \left( \frac{3\mu'_0 + \beta_0}{3\mu'_0 + \beta_0 \sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \right)^2 \cdot (1 - M_{\infty}^2). \quad (10.89)$$

Заметим, что как  $\delta$ , так и  $\delta'$  малы и не имеют заметного влияния на сопротивление.

**10.4.3. Аэродинамические моменты.** Отнеся крыло к той же системе координат, как на фиг. 10.11, можно определить компоненты  $L$ ,  $M$ ,  $N$  аэродинамического момента по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

1) Момент крена  $L$  определяется формулой

$$L = \rho_{\infty} U_{\infty} \int_{-b/2}^{+b/2} y \Gamma dy = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b^3 \int_0^{\pi} \left( \sum_1^n A_n \sin n\theta \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b^3 \frac{\pi}{4} A_2, \quad (10.90)$$

или, обозначая через  $C_l$  абсолютную величину коэффициента момента, будем иметь

$$C_l = \frac{|L|}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S c_0} = \frac{b^3}{c_0 S} \frac{\pi}{4} A_2 = \frac{b}{c_0} \frac{\pi \lambda}{4} A_2. \quad (10.91)$$

Коэффициент  $A_2$  дается второй формулой (10.64):

$$\begin{aligned} & \left( 2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0} \right) A_2 = \\ & = \mu_0 \left( \alpha_2 - \beta_2 \frac{\alpha_4}{4\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{\alpha_6}{6\mu_0 + \beta_0} \right). \end{aligned} \quad (10.92)$$

Эта же формула позволяет определить коэффициент  $A_2'$ , с помощью которого после замены  $\mu_0$  через  $\mu_0'$ , можно подсчитать коэффициент  $C_l'$ , соответствующий значению  $M_\infty = 0$ . Если пренебречь членами второго порядка  $\beta_2^2$  и  $\beta_4^2$ , то соотношения для двух случаев запишутся:

$$C_l = \frac{\pi\lambda}{4} \frac{b}{c_0} \frac{\mu_0(\alpha_2 - a)}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} = k_l(\alpha_2 - a), \quad (10.93a)$$

$$C_l' = \frac{\pi\lambda}{4} \frac{b}{c_0} \frac{\mu_0'(\alpha_2 - a)}{2\mu_0' + \beta_0 - \beta_4} = k_l'(\alpha_2 - a), \quad (10.93b)$$

где  $a$  — второстепенные члены в скобках правой части равенства (10.92), которые равны нулю для эллиптического крыла.

Далее

$$\begin{aligned} \frac{C_l'}{C_l} &= \frac{k_l'}{k_l} = \frac{A_2'}{A_2} \approx \frac{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}{2\mu_0' + \beta_0 - \beta_4} \sqrt{1 - M_\infty^2} = \\ &= \frac{2\mu_0' + (\beta_0 - \beta_4) \sqrt{1 - M_\infty^2}}{2\mu_0' + \beta_0 - \beta_4}, \end{aligned} \quad (10.94)$$

и, если заменить  $\mu_0'$  его значением, выведенным из формулы (10.93б), то получим формулу, аналогичную формуле (10.79) для подъемной силы:

$$\frac{C_l'}{C_l} = \frac{k_l'}{k_l} = \sqrt{1 - M_\infty^2} + (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}) \frac{8c_0}{b} \frac{k_l'}{\pi\lambda}. \quad (10.95)$$

Указанная формула дает возможность вывести величину момента крена, соответствующую любому значению числа  $M_\infty$ , через величину момента для  $M_\infty = 0$ . Так, например, если известно воздействие элеронов при низких скоростях ( $M_\infty \approx 0$ ), то легко вывести с помощью написанной выше формулы воздействие элеронов при высоких скоростях.

Коэффициент  $A_2$  может быть подсчитан методом, указанным выше (см. формулы 10.64 и 10.65).

2) Момент пикирования  $M$  не имеет особенностей, за исключением того, что его значение для любого заданного  $M_\infty$  возрастает в  $(1 - M_\infty^2)^{-1/2}$  раз, по сравнению с величиной  $M'$ , соответствующей условию  $M_\infty = 0$ ; последняя может быть подсчитана обычными методами.

3) Момент рыскания  $N$  определяется формулой

$$\begin{aligned} N &= \rho_\infty \int_{-b/2}^{+b/2} \omega \Gamma y dy = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^3 \int_0^\pi \left( \sum_1^n n A_n \sin n\theta \right) \times \\ &\times \left( \sum_1^n A_n \sin n\theta \right) \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^3 \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p \cdot A_{p+1}; \end{aligned} \quad (10.96)$$

вводя момент крена, получим

$$-\frac{N}{L} = \frac{1}{A_2} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1} = 3A_1 + 5A_3 + \frac{A_4}{A_2} (7A_3 + 9A_5) + \frac{A_5}{A_2} (11A_5 + 13A_7) + \dots \quad (10.97)$$

Обозначая коэффициент момента через  $C_n$  и применяя полученный выше результат с целью упрощения к эллиптическому крылу ( $\beta_0 = 1, \beta_2 = \beta_4 = 0$ ), получим, в согласии с формулами (10.66), значения коэффициента для любого  $M_\infty$  и для  $M_\infty = 0$ :

$$C_n = 3A_1 C_l = 3 \frac{\mu_0 \alpha_1}{1 + \mu_0} C_l, \quad C'_n = 3 \frac{\mu'_0 \alpha_1}{1 + \mu'_0} C'_l; \quad (10.98)$$

отсюда

$$\frac{C'_n}{C_n} = \frac{C'_l}{C_l} \frac{\mu'_0}{\mu_0} \frac{1 + \mu_0}{1 + \mu'_0} = \frac{1 + 2\mu_0}{1 + 2\mu'_0} \frac{1 + \mu_0}{1 + \mu'_0} \left( \frac{\mu'_0}{\mu_0} \right)^2 = \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2 + 2\mu'_0}}{1 + 2\mu'_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2 + \mu'_0}}{1 + \mu'_0}. \quad (10.99)$$

Формула (10.99) служит для перехода от  $M_\infty \approx 0$  к любому  $M_\infty$ .

### 10.5. Отклонение потока вниз по течению

Предположим с целью упрощения, что вихревая пелена за крылом разделяется по середине, и каждая половина свертывается и образует две краевые вихревые трубки с интенсивностью  $\Gamma_0$ , равной циркуляции в среднем сечении.

Расстояние между двумя вихрями будет  $b_0 = \kappa b$ , причем его величина, если предположить, что подъемная сила обусловлена частью крыла  $b_0$  с циркуляцией  $\Gamma_0$ , определяется соотношением

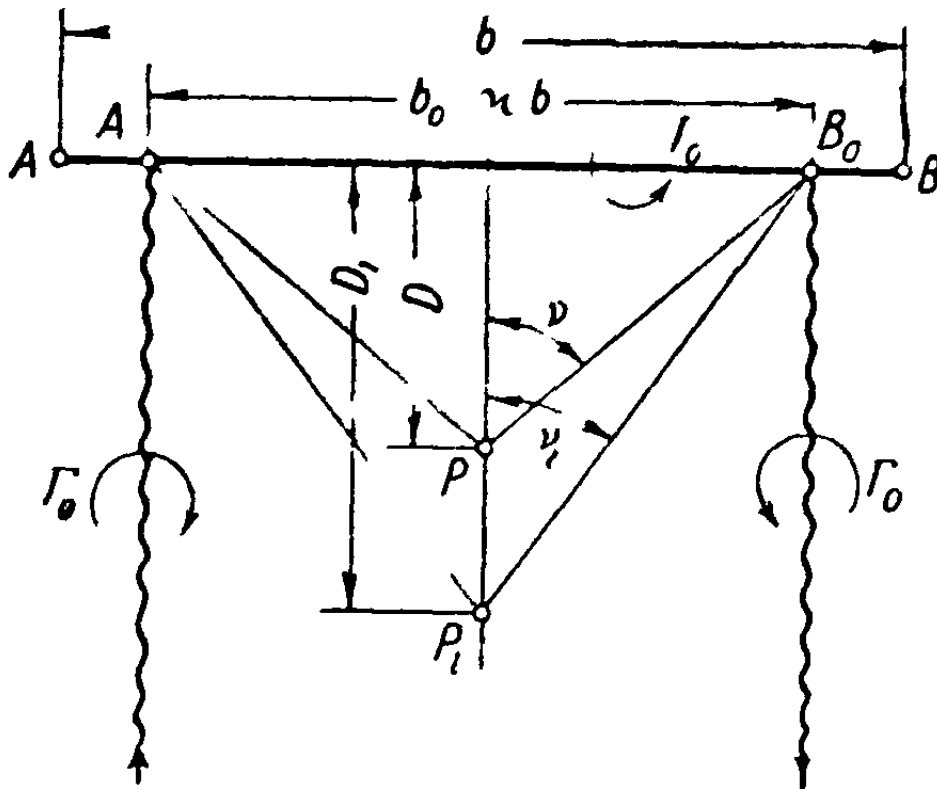
$$\frac{b_0}{b} = \kappa = \frac{\pi}{4} \frac{A_1}{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots} \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{3\mu_0} - \frac{2\beta_4}{4\mu_0} - \frac{\beta_6}{\beta_0}} \approx \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} + \frac{2\beta_4}{4\mu_0 \beta_0} \right). \quad (10.100)$$

Обозначая коэффициент, соответствующий  $M_\infty = 0$ , через  $\kappa'$ , получим с хорошим приближением зависимость

$$\frac{\kappa - \frac{\pi}{4}}{\kappa' - \frac{\pi}{4}} \approx \frac{3\mu'_0 + \beta_0}{3\mu_0 + \beta_0} = \frac{3\mu'_0 + \beta_0}{3\mu'_0 + \beta_0 \sqrt{1 - M_\infty^2}} \sqrt{1 - M_\infty^2}; \quad (10.101)$$

отсюда вытекает, что расстояние между вихрями уменьшается при возрастании  $M_\infty$ .

С другой стороны, из фиг. 10.16 очевидно, что индуцируемая скорость в точке  $P$ , взятой с целью упрощения на оси  $Ox$ , на расстоянии  $D$  от начала координат, равна соответствующей скорости в точке  $P_i$ , расположенной на расстоянии



Фиг. 10.16

$$D_i = \frac{D}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (10.102)$$

При этих условиях отклонение потока в точке  $P$  будет

$$\delta \frac{w}{U_\infty} = \frac{\Gamma_0}{\pi b_0 U_\infty} (1 + \cos \nu_i) + \frac{\Gamma_0}{2\pi D_i U_\infty} \sin \nu_i =$$

$$= \frac{\Gamma_0}{\pi b_0 U_\infty} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu_i}). \quad (10.103)$$

Подставляя  $\Gamma_0$  в функции от  $C_z$  и вводя параметр  $\varepsilon$ , связанный с расстоянием  $D$ :

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} C_z \frac{S}{b_0} U_\infty, \quad \varepsilon = \frac{2D}{b}, \quad \frac{2D_i}{\kappa b} = \frac{\varepsilon}{\kappa \sqrt{1 - M_\infty^2}} = \operatorname{ctg} \nu_i, \quad (10.104)$$

получим окончательно

$$\delta = \frac{C_z}{\pi \lambda} \frac{1}{2\kappa^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} (1 - M_\infty^2) + 1} \right). \quad (10.105)$$

Эта формула показывает, что отклонение потока при любом  $M_\infty$ , по сравнению с отклонением при  $M_\infty = 0$ , с одной стороны, возрастает вследствие уменьшения  $\kappa$ , а с другой — уменьшается благодаря наличию множителя  $(1 - M_\infty^2)$  в одном из членов подкоренного выражения.

## 10.6. Стреловидные и отклоненные (при ненулевом угле рыскания) крылья

Стреловидное крыло вследствие многочисленных его преимуществ, включающих возрастание величины критического числа Маха, используется для построения высокоскоростных самолетов. Ниже будет исследован важный вопрос о влиянии сжимаемости на стреловидное и отклоненное (скользящее) крыло при гипотезе малых возмущений.

**10.6.1. Предварительные замечания.** Рассмотрим трубку, вдоль которой интенсивность вихря изменяется линейно от точки  $O$  до точки  $C$ , в соответствии с формулой

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\gamma_0}{c} x, \\ d\gamma &= \frac{\gamma_0}{c} dx,\end{aligned}\tag{10.106}$$

а за точкой  $C$  (фиг. 10.17) остается постоянной и равной  $\gamma_0$ . Каждый элемент  $d\gamma$  индуцирует в точке  $P$  элементарную скорость, модуль которой будет

$$d\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma}{\eta - y} (1 + \cos \nu),\tag{10.107}$$

так что для всей трубки

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\eta - y} \int_0^{\gamma_0} (1 + \cos \nu) d\gamma = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\eta - y} \left( \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{c} \int_0^c \cos \nu dx \right).\end{aligned}\tag{10.108}$$

Далее

$$\begin{aligned}r \sin \nu &= \eta - y, \\ \sin \nu dx &= r d\nu = \frac{\eta - y}{\sin \nu} d\nu,\end{aligned}$$

$$\cos \nu dx = \frac{\cos \nu d\nu}{\sin^2 \nu} (\eta - y),\tag{10.109}$$

откуда

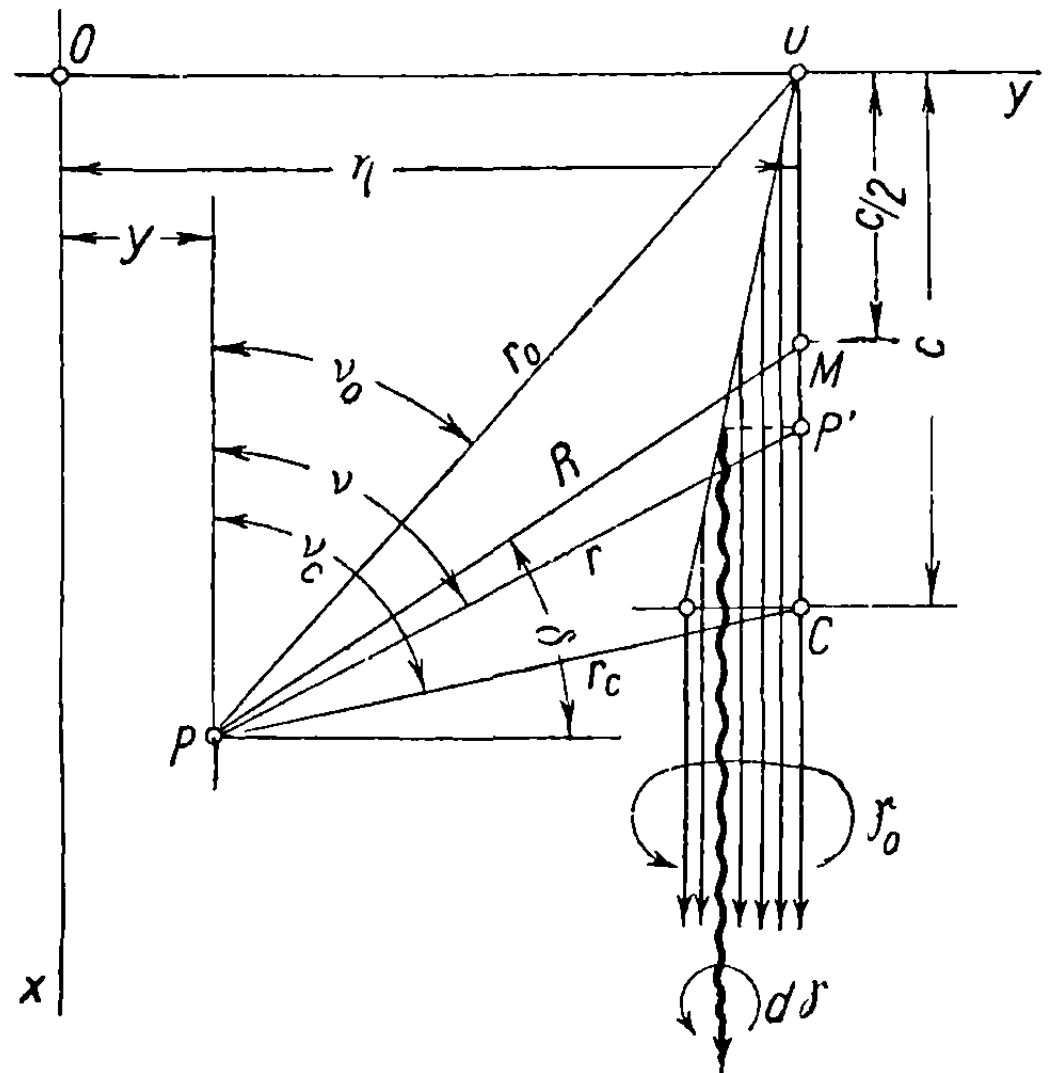
$$\frac{1}{c} \int_0^c \cos \nu dx = \frac{\eta - y}{c} \int_{\nu_0}^{\nu_c} \frac{\cos \nu d\nu}{\sin^2 \nu} = - \frac{\eta - y}{c} \frac{1}{\sin \nu} \Big|_{\nu_0}^{\nu_c} = \frac{r_0 - r_c}{c}.\tag{10.110}$$

Окончательно получим

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma_0}{\eta - y} \left( 1 + \frac{r_0 - r_c}{c} \right).\tag{10.111}$$

Обозначая через  $R$  расстояние от точки  $P$  до точки  $M$  с абсциссой  $c/2$  и через  $\delta$  угол, образуемый отрезком  $\overline{PM}$  с осью  $Oy$ , находим

$$\begin{aligned}r_0^2 &= R^2 + \frac{c^2}{4} + Rc \sin \delta = \left( R^2 + \frac{c^2}{4} \right) \left( 1 + \frac{cR}{R^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta \right), \\ r_c^2 &= R^2 + \frac{c^2}{4} - Rc \sin \delta = \left( R^2 + \frac{c^2}{4} \right) \left( 1 - \frac{cR}{R^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta \right),\end{aligned}\tag{10.112}$$



Фиг. 10.17

откуда

$$r_0 - r_c = \left(R^2 + \frac{c^2}{4}\right)^{1/2} \left\{ \left(1 + \frac{cR}{R^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta\right)^{1/2} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{cR}{R^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta\right)^{1/2} \right\} \approx \frac{cR \sin \delta}{\sqrt{R^2 + \frac{c^2}{4}}}. \quad (10.113)$$

Так как

$$R = \frac{\eta - y}{\cos \delta}, \quad (10.114)$$

написанное выше выражение приобретает вид

$$\frac{r_0 - r_c}{c} = \frac{(\eta - y) \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\left(\frac{\eta - y}{\cos \delta}\right)^2 + \frac{c^2}{4}}} = \frac{(\eta - y) \sin \delta}{\sqrt{(\eta - y)^2 + \frac{c^2}{4} \cos^2 \delta}}, \quad (10.115)$$

и индуцируемая скорость (см. уравнение 10.111) определится равенством

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma_0}{\eta - y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma_0 \sin \delta}{\sqrt{(\eta - y)^2 + \frac{c^2}{4} \cos^2 \delta}}; \quad (10.116)$$

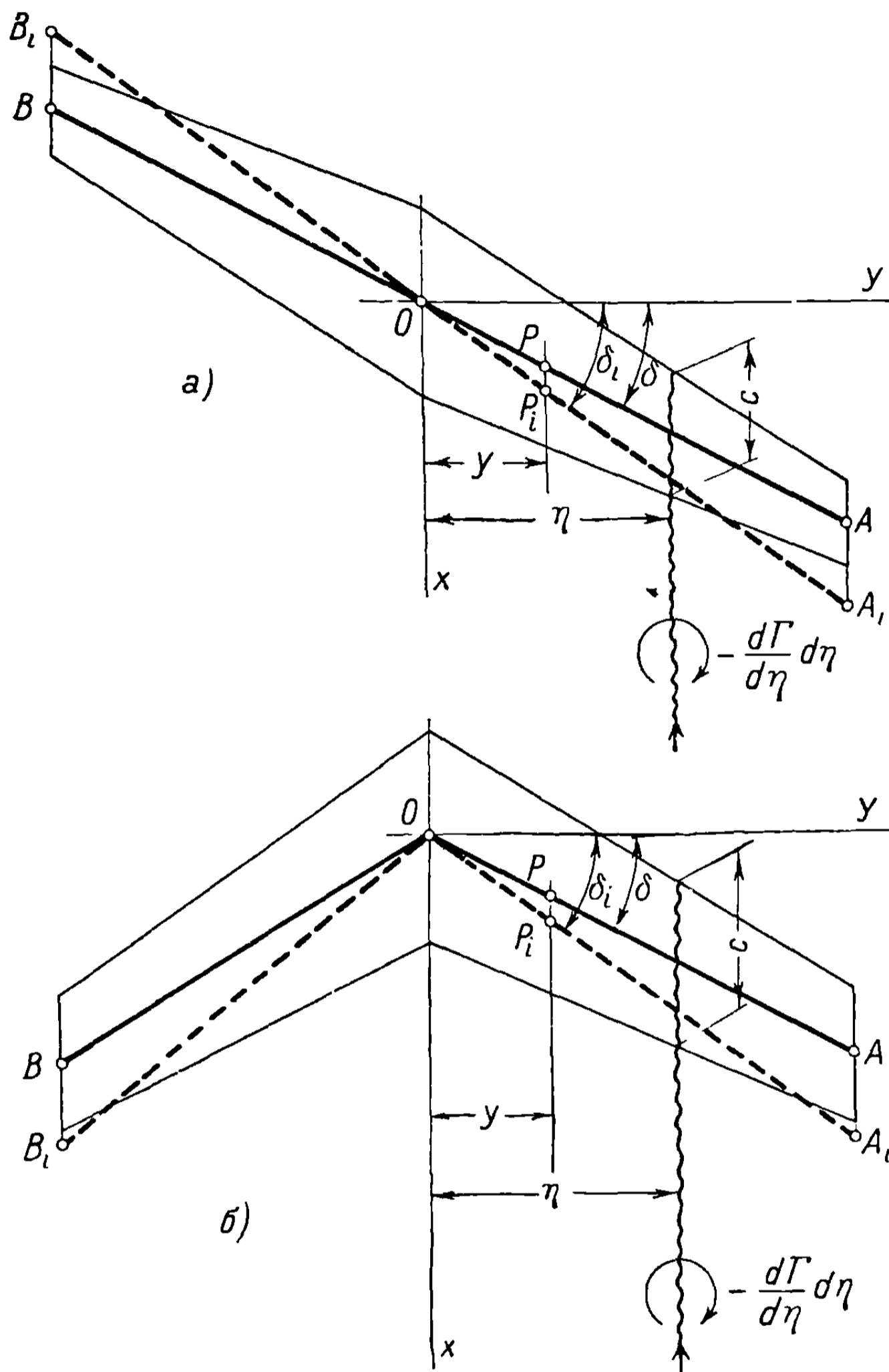
отсюда вытекает, что индуцируемая скорость имеет две компоненты: первая обусловлена вихревой трубкой с интенсивностью  $\gamma_0$ , один конец которой находится в бесконечности, а другой — в точке, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на линию вихревой трубки; вторая компонента скорости вызвана воздействием остальной части вихревой трубки.

**10.6.2. Действие свободных вихрей на стреловидное и скользящее крылья.** Пусть мы имеем крыло, средняя линия  $BOA$  которого составляет угол  $\delta$  с осью  $Oy$  (фиг. 10.18). При гипотезах линейной теории Прандтля эта средняя линия есть *несущая линия*, представляющая крыло. Чтобы избежать бесконечно большой индуцированной скорости в некоторой точке  $P$ , нужно распределить присоединенные вихри по всей поверхности крыла, как это и осуществляется на практике. Примем для упрощения вычислений, что распределение присоединенных вихрей вдоль хорды равномерное. Это предположение не наносит ущерба общности поставленной задачи, так как влияние изменения в распределении имеет меньшую важность; прежде всего существенно избежать бесконечной скорости.

В соответствии с предыдущими утверждениями рассматриваемое крыло, помещенное в сжимаемый поток, будет эквивалентно крылу  $B_iOA_i$ , помещенному в несжимаемый поток и образующему угол  $\delta_i$  с осью  $Oy$ . В любом сечении  $\eta$  вихревая полоса —  $\frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta$  сходит с задней кромки крыла и имеет интенсивность, изменяющуюся вдоль всей длины хорды по линейному зако-

ну; эта вихревая полоса будет индуцировать в точке  $P_i$  элементарную скорость, выражение которой аналогично выражению (10.116):

$$d\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y} - \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{\operatorname{tg} \delta_i d\eta}{\sqrt{\left(\frac{\eta - y}{\cos \delta_i}\right)^2 + \frac{c_i^2}{4}}}; \quad (10.117)$$



Фиг. 10. 18, а, б

отсюда выводится полная индуцируемая скорость

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{BA} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta - y} - \frac{1}{4\pi} \int_{BA} \frac{\operatorname{tg} \delta_i}{\sqrt{\left(\frac{\eta - y}{\cos \delta_i}\right)^2 + \frac{c_i^2}{4}}} \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta. \quad (10.118)$$

Первый интеграл во второй части равенства представляет индуцированную скорость прямого крыла ( $\delta = 0$ ) и будет обозначаться через  $\bar{\omega}$ ; второй интеграл представляет дополнительную индуцированную скорость, обусловленную влиянием стреловидности; обозначим его через  $\omega_s$ . Индуцированные

углы и скорости для прямого крыла будем отличать от дополнительных углов и скоростей, соответствующих влиянию угла  $\delta$ , полагая

$$\omega = \bar{\omega} + \omega_s, \quad \frac{\omega}{U_\infty} = \frac{\bar{\omega}}{U_\infty} + \frac{\omega_s}{U_\infty}, \quad i = \bar{i} + \sigma. \quad (10.119)$$

Для первых частей вычисление циркуляции одинаково с указанным ранее, в случае прямого крыла; уравнения, начиная с (10.64) и до (10.71), дают решение задачи, позволяя найти циркуляцию  $\bar{\Gamma}$  путем определения коэффициентов  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n$ . Влияние стреловидности будет получено путем уподобления прямому крылу, переменный угол атаки которого, обозначенный через  $\sigma$ , будет теперь вычислен. Применяя формулы

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - M_\infty^2} \operatorname{tg} \delta_i &= \operatorname{tg} \delta, \\ \cos \delta_i &= \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2}}{\sqrt{1 - M_\infty^2 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2} \cos \delta}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}}, \\ c &= \sqrt{1 - M_\infty^2} c_i \end{aligned} \quad (10.120)$$

и подставляя результаты во второй интеграл (10.118), будем иметь

$$\sigma = \frac{\omega_s}{U_\infty} = - \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{BA} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\left(\frac{\eta - y}{\cos \delta}\right)^2 (1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta) + \frac{c^2}{4}}} \frac{d\Gamma}{c^2} d\eta. \quad (10.121)$$

Здесь появляется, таким образом, член, обусловленный сжимаемостью.

Начиная с этой стадии, метод вычислений идентичен использованному в более ранних работах автора [10].

Результаты, сходные с приведенными выше выражениями, получены различными авторами путем несколько иного подхода [11].

**10.6.3. Приложение к стреловидным крыльям.** Так как интегрирование, к которому свелась задача, очень затруднительно, проблема может быть упрощена путем допущения, что циркуляция остается постоянной вдоль размаха и равной ее среднему значению  $\Gamma_m$ , хорда же имеет среднюю величину  $c_m$ .

При этих условиях, полагая, что циркуляция в точке  $A$  будет иметь значение  $+\Gamma_m$ , а в точке  $B$  — значение  $-\Gamma_m$  (фиг. 10.19), будем иметь

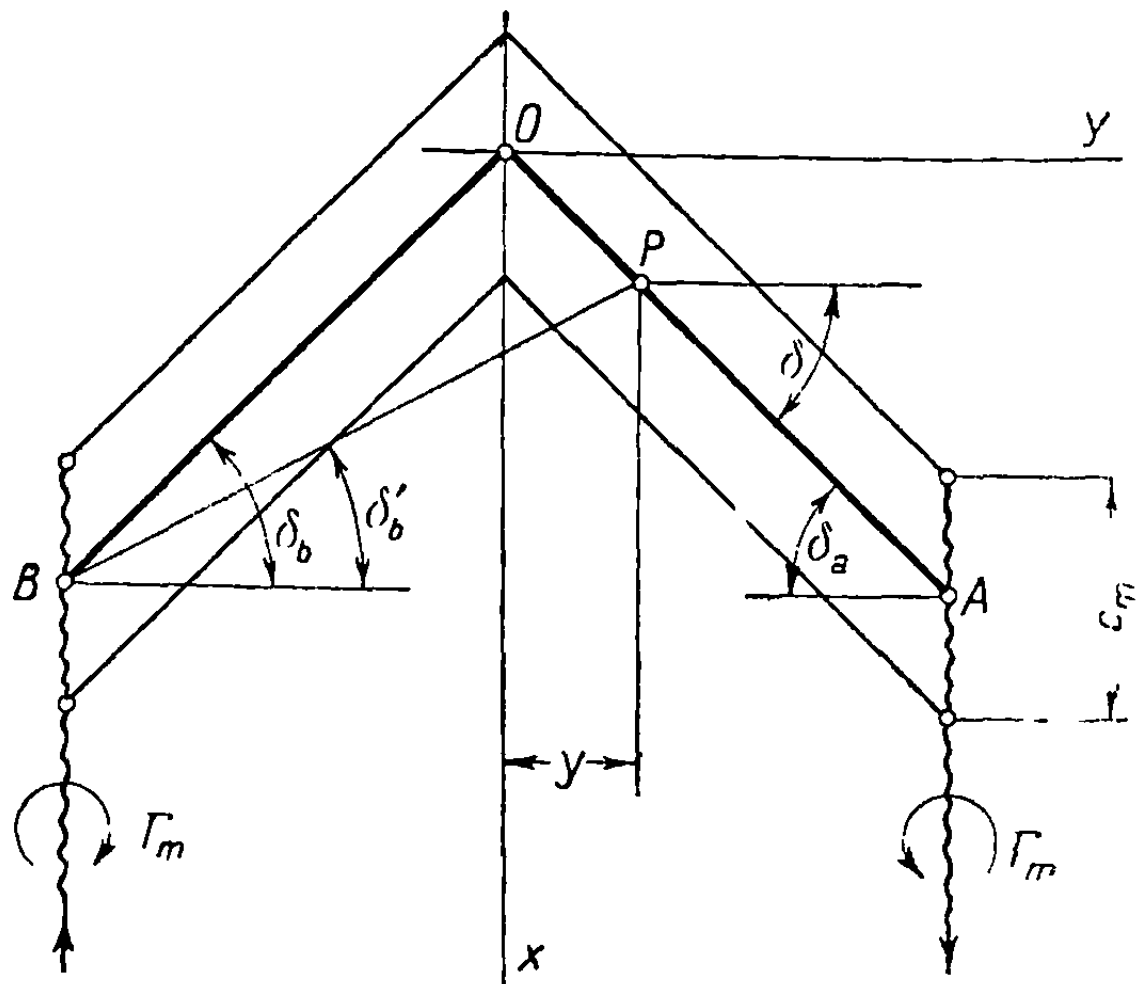
$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\omega_s}{U_\infty} = - \frac{\Gamma_m}{4\pi U_\infty} \left[ \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\left(\frac{\eta - y}{\cos \delta}\right)^2 (1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta) + \frac{c_m^2}{4}}} \right]_B^A = \\ &= - \frac{\Gamma_m}{4\pi U_\infty} \left[ \frac{\operatorname{tg} \delta_a}{\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2} - y}{\cos \delta_a}\right)^2 (1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta_a) + \frac{c_m^2}{4}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg} \delta'_b}{\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2} + y}{\cos \delta'_b}\right)^2 (1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta'_b) + \frac{c_m^2}{4}}} \right]. \end{aligned} \quad (10.122)$$



Обозначая удлинение крыла через  $\lambda$ , введем величины

$$\Lambda_a = \frac{\lambda}{\cos \delta_a} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta_a} \approx \frac{\lambda}{\cos \delta_a} \left( 1 - \frac{1}{2} M_\infty^2 \cos^2 \delta_a \right),$$

$$\Lambda_b = \frac{\lambda}{\cos \delta_b} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta_b} \approx \frac{\lambda}{\cos \delta_b} \left( 1 - \frac{1}{2} M_\infty^2 \cos^2 \delta_b \right); \quad (10.123)$$



Фиг. 10. 19

заменяя циркуляцию  $\Gamma_m$  ее выражением, выведенным из уравнения для подъемной силы:

$$P = \rho_\infty U_\infty \Gamma_m b = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^2 \pi A_1, \quad (10.124)$$

и подставляя вместо  $y$  его величину (10.47), получим выражение для дополнительного угла атаки в форме

$$\sigma = -\frac{1}{4} \lambda A_1 \left[ \frac{\operatorname{tg} \delta_a}{\sqrt{1 + \Lambda_a^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{\operatorname{tg} \delta_b'}{\sqrt{1 + \Lambda_b'^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right]. \quad (10.125)$$

Замечая, что

$$\operatorname{tg} \delta_b' = \frac{\frac{b}{2} - y}{\frac{b}{2} + y} \operatorname{tg} \delta = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \operatorname{tg} \delta,$$

$$\delta_a = \delta,$$

$$\Lambda_a = \Lambda = \frac{\lambda}{\cos \delta} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}, \quad (10.126)$$

получим

$$\sigma = -\frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}{\sqrt{1 + \Lambda_b'^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right]. \quad (10.127)$$

Аналогичные рассуждения приводят к подобному же выражению для части  $OB$  крыла:

$$\sigma = -\frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[ \frac{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}{\sqrt{1 + \Lambda_a'^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right], \quad (10.128)$$

причем

$$\begin{aligned} \delta_b &= \delta, \\ \Lambda_b &= \Lambda = \frac{\lambda}{\cos \delta} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}, \\ \Lambda_a' &= \frac{\lambda}{\cos \delta_a'} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta_a'}. \end{aligned} \quad (10.129)$$

Из написанных выше соотношений вытекает, что когда точка  $P$  приближается к концу  $A$ , угол  $\delta_b'$  стремится к нулю,  $\Lambda_b'$  в формуле (10.127) уменьшается, и весь второй член в скобках стремится к нулю, следовательно, им можно пренебречь. То же самое происходит с первым членом в скобках формулы (10.128), когда точка  $P$  приближается к концу  $B$ .

В этих случаях можно пренебречь получающейся ошибкой и заменить  $\Lambda_b'$  в формуле (10.127) и  $\Lambda_a'$  в формуле (10.128) через  $\Lambda$ . Легко заметить, что так как в первой формуле  $\cos \theta < 0$ , а во второй  $\cos \theta > 0$ , дополнительный угол атаки может быть представлен единой формулой [10]

$$\sigma = -\frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[ \frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right] \frac{1}{1 + |\cos \theta|}. \quad (10.130)$$

Путем элементарных, но трудоемких операций, которые мы опустим, можно разложить величину  $\sigma \sin \theta$  в ряд Фурье:

$$\sigma \sin \theta = \sigma_1 \sin \theta + \sigma_3 \sin 3\theta + \sigma_5 \sin 5\theta + \dots, \quad (10.131)$$

получая приближенно:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta [3,15 - 2\sqrt[3]{\Lambda} + 0,18 \Lambda - 0,003 \Lambda^2]; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta [-0,42 + 0,61\sqrt[3]{\Lambda} - 0,074 \Lambda + 0,0012 \Lambda^2]; \\ \sigma_5 &= \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta [-0,034\sqrt[3]{\Lambda} + 0,008 \Lambda - 0,00013 \Lambda^2]; \\ \sigma_7 &= \sigma_9 = \sigma_{11} = \dots \approx 0, \end{aligned} \quad (10.132)$$

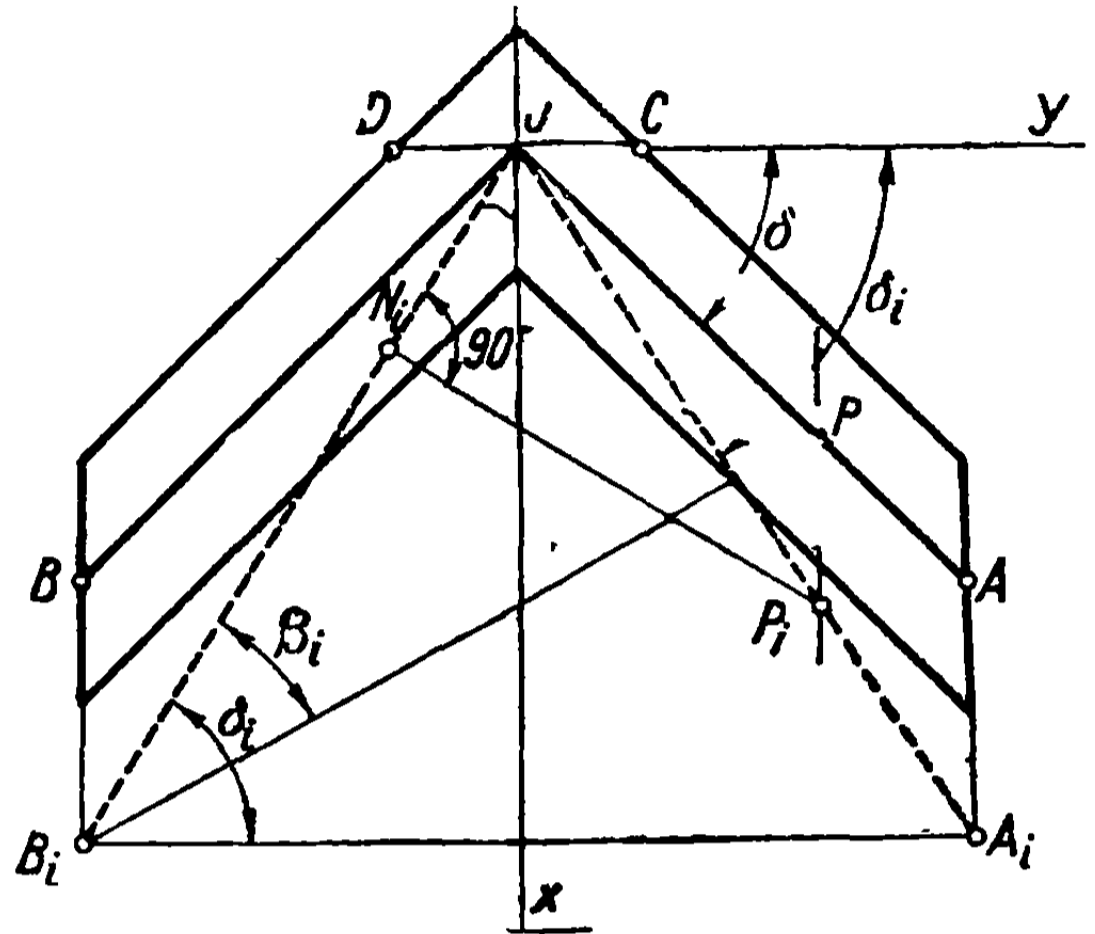
причем величину  $\Lambda$  нужно заменить ее выражением, определенным формулой (10.126) или (10.129):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\cos \delta} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}. \quad (10.133)$$

Применяя уравнения (10.64), найдем коэффициенты  $a_n$  для разложения в ряд Фурье дополнительной циркуляции  $\Gamma_s$

$$\Gamma_s = 2bU_\infty \sum_1^n a_n \sin n\theta. \quad (10.134)$$

Рассмотрим действие присоединенных вихрей в случае стреловидного крыла. Так как несущая линия, представляющая присоединенные вихри, не будет прямолинейной, то возникнет взаимное влияние двух частей крыла, связанное с взаимно индуцированными скоростями. Так, например, присоединенный вихрь на левой стороне индуцирует в точке правой стороны (фиг. 10.20) новую дополнительную скорость, которая легко выводится из предыдущих формул:



Фиг. 10.20

$$\overline{w}_s = - \frac{\Gamma_m}{4\pi P_i N_i} (\cos \beta_i - \cos 2\delta_i). \quad (10.135)$$

Полагая

$$\overline{P_i N_i} = OP_i \sin 2\delta_i = 2y \sin \delta_i = -b \sin \delta_i \cos \theta, \quad (10.136)$$

замечаем, что  $\cos \beta_i$  изменяется от 1 до  $\cos \delta_i$ , когда  $y$  изменяется от 0 до  $b/2$ , согласно соотношению

$$\cos \beta_i = \frac{1 + \frac{2y}{b} \cos 2\delta_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2 + 2\frac{2y}{b} \cos 2\delta_i}} \approx 1 + (0,6 - \cos \delta_i +$$

$$(10.137)$$

$$+ 0,36 \cos 2\delta_i) \frac{2y}{b} - (1,6 - 2 \cos \delta_i + 0,36 \cos 2\delta_i) \left(\frac{2y}{b}\right)^2 =$$

$$= 1 - (0,6 - \cos \delta_i + 0,36 \cos 2\delta_i) \cos \theta - (1,6 - 2 \cos \delta_i + 0,36 \cos 2\delta_i) \cos^2 \theta;$$

в этом случае, выполняя в уравнении (10.135) соответствующие подстановки, получим новый, дополнительный индуцированный угол атаки

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \frac{\bar{w}_s}{U_\infty} = & -\frac{1}{4} A_1 \sin \delta_i \left[ \frac{1}{|\cos \theta|} - \left( \frac{1}{1 + \cos \delta_i} - 0,4 \right) |\cos \theta| - \right. \\ & \left. - \left( \frac{0,5}{1 + \cos \delta_i} - 0,4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.138)$$

Благодаря симметрии крыла этот угол атаки будет распределен симметрично, так что может быть взята абсолютная величина  $\cos \theta$ , для того, чтобы значения  $\bar{\sigma}$  при  $\theta$  и  $\pi - \theta$  ( $y$  и  $-y$ ) были одинаковы.

Индуцируемая скорость, как и следовало ожидать, становится бесконечной при  $\theta = \pi/2$ ; в связи с этим сделаем упрощающее предположение, что индуцируемая скорость на центральной части *DOC* (см. фиг. 10.20) может рассматриваться как почти постоянная и равная скорости в точках *C* и *D*. Это предположение приходится сделать, так как явления, происходящие в этой центральной части, и распределение на ней присоединенных вихрей очень сложны.

Средняя величина индуцированной скорости в центре может быть таким образом определена с помощью приближенной формулы, учитывающей абсциссы точек *C* и *D*:

$$\overline{OC} = DO = \frac{c_m}{2} \operatorname{ctg} \delta = \frac{b}{2} |\cos \theta_c|, \quad (10.139)$$

где средняя хорда крыла обозначена через  $c_m$ . Вводя результат в уравнение (10.138), где первый член в скобках значительно больше остальных, которыми, следовательно, можно пренебречь, получим приближенное значение для индуцированной скорости в центре:

$$\bar{\sigma}_0 = -\frac{1}{4} A_1 \sin \delta_i \lambda \operatorname{tg} \delta. \quad (10.140)$$

Принимая во внимание эту величину в центре и приведенный выше довод о преобладании первого члена в скобках выражения (10.138), можно достаточно удовлетворительно выразить разложение Фурье тригонометрическим рядом:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \sin \theta = & \bar{\sigma}_1 \sin \theta + \bar{\sigma}_3 \sin 3\theta + \bar{\sigma}_5 \sin 5\theta + \dots \approx \\ \approx & -\frac{1}{8} A_1 \sin \delta_i \left[ (\lambda \operatorname{tg} \delta + 0,8) \sin \theta - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} (\lambda \operatorname{tg} \delta - 1) \sin 3\theta + \frac{1}{3} (\lambda \operatorname{tg} \delta - 2) \sin 5\theta \right]; \end{aligned} \quad (10.141)$$

очевидно, что  $\sin \delta_i$  может быть определен равенством

$$\sin \delta_i = \frac{\sin \delta}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}}. \quad (10.142)$$

С помощью соотношений (10.64) могут быть также определены коэффициенты  $\bar{a}_n$  разложения для дополнительной циркуляции  $\bar{\Gamma}_s$

$$\bar{\Gamma}_s = 2bU_\infty \sum_1^n \bar{a}_n \sin n\theta. \quad (10.143)$$

Полная циркуляция  $\Gamma$ , таким образом, примет вид

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \Gamma_s + \bar{\Gamma}_s = 2bU_\infty \sum_1^n A_n \sin n\theta, \quad (10.144)$$

где коэффициенты  $A_1, \dots, A_n$  будут, соответственно,

$$A_1 = \bar{A}_1 + a_1 + \bar{a}_1, \dots, A_n = \bar{A}_n + a_n + \bar{a}_n. \quad (10.145)$$

Конкретный пример был дан выше (фиг. 10.15), когда рассматривалось распределение циркуляции в сжимаемом течении и сравнивалось с распределением в случае несжимаемого потока, обтекающего прямое крыло.

Подобное же сравнение может быть теперь сделано по отношению к стреловидному крылу. С целью упрощения рассмотрим эллиптическое крыло и сравним дополнительную подъемную силу в случаях сжимаемого и несжимаемого течений. Обозначая соответствующие коэффициенты подъемной силы через  $C_{zs}$  и  $C'_{zs}$  и применяя выражения (10.66), получим соотношения:

$$C_{zs} = \pi\lambda (a_1 + \bar{a}_1) = \pi\lambda \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\sigma_1 + \bar{\sigma}_1) = \quad (10.146a)$$

$$= \pi\lambda \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \frac{\lambda}{4} A_1 \operatorname{tg} \delta \left[ q - \frac{1}{2} \frac{\left( \sin \delta + \frac{0,8 \cos \delta}{\lambda} \right)}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}} \right],$$

$$C'_{zs} = \pi\lambda (a'_1 + \bar{a}'_1) = \pi\lambda \frac{\mu'_0}{1 + \mu'_0} (\sigma'_1 + \bar{\sigma}'_1) = \quad (10.146b)$$

$$= \pi\lambda \frac{\mu'_0}{1 + \mu'_0} \frac{\lambda}{4} A'_1 \operatorname{tg} \delta \left[ q' - \frac{1}{2} \left( \sin \delta + \frac{0,8}{\lambda} \cos \delta \right) \right],$$

где  $q$  представляет члены, стоящие в скобках, выражения для  $\sigma_1$  (10.132) а штрих сверху относится к крылу в несжимаемом течении.

Принимая во внимание выражения для коэффициентов  $\sigma_1$  и  $\bar{\sigma}_1$  имеем:

$$A'_1 = \bar{A}'_1 + a'_1 + \bar{a}'_1 = \frac{\mu'_0}{1 + \mu'_0} (\alpha + \sigma'_1 + \bar{\sigma}'_1) = \quad (10.147a)$$

$$= \frac{\mu'_0 \alpha}{1 + \mu'_0 - 0,25 \mu'_0 \lambda \operatorname{tg} \delta \left[ q' - 0,5 \left( \sin \delta + \frac{0,8}{\lambda} \cos \delta \right) \right]},$$

$$A_1 = \bar{A}_1 + a_1 + \bar{a}_1 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\alpha + \sigma_1 + \bar{\sigma}_1) =$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0 - 0,25 \mu_0 \lambda \operatorname{tg} \delta \left( q - \frac{\sin \delta + \frac{0,8}{\lambda} \cos \delta}{2 \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}} \right)}; \quad (10.1476)$$

обозначая затем коэффициенты подъемной силы через  $C_z$  и  $C'_z$  в сжимаемом и несжимаемом течениях, получим

$$\frac{C_z}{C'_z} = \frac{\mu_0}{\mu'_0} \frac{1 + \mu'_0 - 0,25 \mu'_0 \lambda \operatorname{tg} \delta \left( q' - 0,5 \sin \delta - \frac{0,4}{\lambda} \cos \delta \right)}{1 + \mu_0 - 0,25 \mu_0 \lambda \operatorname{tg} \delta \left( q - \frac{\lambda \sin \delta + 0,8 \cos \delta}{2 \lambda \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}} \right)}. \quad (10.148)$$

Рассматривая эллиптическое крыло с удлинением  $\lambda = 4,9$ ,  $\delta = 45^\circ$ , помещенное в поток с  $M_\infty = 0,7$ , получим  $q \approx 0,51$ ,  $q' = 0,45$ ,  $\mu_0 = 0,52$ ,  $\mu'_0 = 0,365$ ; отсюда  $C_z/C'_z \approx 1,27$ .

Дополнительное воздействие свободных вихрей будет при обычных удлинениях и при угле  $\delta$  около  $45^\circ$  уравновешивать воздействие присоединенных вихрей; таким образом,

$$\frac{C_z}{C'_z} \approx \frac{\mu_0}{\mu'_0} \frac{1 + \mu'_0}{1 + \mu_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{1 + \mu_0 \sqrt{1 - M_\infty^2}}{1 + \mu_0}. \quad (10.149)$$

Так как в связи с этим можно пренебречь дополнительным воздействием, обусловленным стреловидностью, подъемные силы стреловидного крыла в случаях сжимаемого и несжимаемого течений приближенно находятся в том же отношении, как и подъемные силы прямого крыла при сопоставлении тех же течений.

**10.6.4. Применение к отклоненным (скользящим) крыльям.** Возвращаясь к интегралу (10.121), предполагая, как и выше, циркуляцию  $\Gamma_m$  постоянной вдоль размаха и замечая, что

$$\delta_a = \delta,$$

$$\delta_b = \pi + \delta,$$

$$\Lambda = \frac{b}{c_m} \frac{1}{\cos \delta} \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \delta}, \quad (10.150)$$

можно записать по аналогии с предыдущими рассуждениями:

$$\sigma = \frac{1}{4} A_1 \frac{b}{c_m} \operatorname{tg} \delta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{4} \frac{b}{c_m} A_1 \operatorname{tg} \delta \cdot 2 (0,156 \Lambda - 0,005 \Lambda^2 - 0,616 \sqrt{\Lambda}) \cos \theta;$$

отсюда получим единственный член в ряде Фурье

$$\sigma \sin \theta = \frac{1}{4} \frac{b}{c_m} A_1 \operatorname{tg} \delta (0,156 \Lambda - 0,005 \Lambda^2 - 0,616 \Lambda^{1/3}) \sin 2\theta = \sigma_2 \sin 2\theta. \quad (10.152)$$

Дополнительная циркуляция может быть определена обычным методом, что дает

$$\Gamma_s = 2bU_\infty \sum_1^n a_n \sin n\theta; \quad (10.153)$$

если рассматривается эллиптическое крыло, то находим один только член  $a_2$ , определяемый соотношением

$$a_2 = \frac{\mu_0 \sigma_2}{1 + 2\mu_0} = \frac{\mu_0}{1 + 2\mu_0} \cdot \frac{A_1}{4} \frac{[bq]}{c_m} \operatorname{tg} \delta, \quad (10.154)$$

где  $q$  — выражение в скобках, входящее в формулу (10.152).

Коэффициенты момента крена  $C_l$  для числа  $M_\infty$  и  $C_l'$  для  $M_\infty = 0$ , которые, в согласии с формулой (10.94), пропорциональны  $a_2$  и  $a_2'$ , будут определены отношением

$$\frac{C_l}{C_l'} = \frac{a_2}{a_2'} = \frac{A_1}{A_1'} \frac{\mu_0}{\mu} \frac{1 + 2\mu_0'}{1 + 2\mu_0} \frac{q}{q'} = \left( \frac{\mu_0}{\mu_0'} \right)^2 \frac{(1 + \mu_0')(1 + 2\mu_0')}{(1 + \mu_0)(1 + 2\mu_0)} \frac{q}{q'}. \quad (10.155)$$

Если  $b$  — кажущийся размах крыла,  $b_r$  и  $\lambda$  — действительные размах и удлинение, то

$$b_r = \frac{b}{\cos \delta}, \quad (10.156)$$

$$\lambda = \frac{b_r}{c_m} = \frac{b}{c_m} \frac{1}{\cos \delta}.$$

Рассматривая эллиптическое крыло с удлинением  $\lambda = 6$ ,  $\delta = 45^\circ$  при  $M_\infty = 0,7$ , имеем:

$$\frac{b}{c_m} = 4,2; \quad \mu_0' = 0,43; \quad \mu_0 = 0,61; \quad q' = -0,46; \quad q = -0,38;$$

следовательно,

$$\frac{C_l}{C_l'} = 1,2.$$

## 11. ДОЗВУКОВОЕ ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ ИЗМЕНЕНИЙ СКОРОСТИ

При гипотезе малых возмущений влияние сжимаемости на течение вокруг тонких тел представляется простыми формулами, позволяющими легко перейти от явлений, рассматриваемых в несжимаемом потоке, к соответствующим явлениям в потоке сжимаемом.

Если тела имеют большие поперечные размеры или существуют значительные изменения скорости, так что предположение о малых возмущениях не может быть применено, первоначальные уравнения движения должны быть взяты в их точной форме. Так как непосредственный анализ этих уравнений влечет за собой большие трудности, используются упрощающие методы, которые, однако, более точны по сравнению с методом малых возмущений. Эти методы обычно основываются на введении других независимых переменных, вместо  $x$  и  $y$ . Такими переменными являются либо компоненты скорости  $u$  и  $v$ , либо модуль скорости  $w$  и ее аргумент  $\theta$ . Указанный путь приводит к методу *годографа*, выдвинутому Моленброком (1898) и развитому Чаплыгиным (1902), уравнения которых составляют основу исследований различных авторов в области сжимаемых течений.

### 11.1. Уравнения Чаплыгина (метод годографа)

Рассмотрим двумерное течение, обозначая через  $\varphi$  потенциал скорости; в этом случае будут существовать компоненты скорости только вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ;

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (11.1)$$

и дифференциальное уравнение для потенциала примет вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (11.2)$$

Нелинейность этого уравнения подразумевает большие трудности, возникающие при его решении. Если переменные  $x$ ,  $y$  заменить другой парой переменных, выводимых из выражения для скорости, то могут быть получены *линейные уравнения*, которые легко проинтегрировать, если ввести некоторые упрощающие приближения. Переход от физической плоскости  $x$ ,  $y$  к скоростной (плоскости годографа) называется *годографическим преобразованием*.

Полезно ввести функцию тока  $\psi$ , получаемую из уравнения для линий тока, выраженного в форме

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad (11.3)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} u dy - \frac{\rho}{\rho_0} v dx = 0;$$

левая часть последнего равенства представляет точный полный дифференциал  $d\psi$ , так как условие, которое должно быть при этом удовлетворено

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{\rho_0} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( - \frac{\rho}{\rho_0} v \right) = 0, \quad (11.4)$$

совпадает с уравнением неразрывности.

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} = v. \end{aligned} \quad (11.5)$$



Введем теперь в качестве независимых переменных модуль скорости  $w$  и угол  $\theta$ , который она составляет с осью  $Ox$ ; тогда

$$\begin{aligned} u &= w \cos \theta, \\ v &= w \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Записав очевидные уравнения

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = w \cos \theta dx + w \sin \theta dy, \quad (11.7a)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\rho}{\rho_0} w \sin \theta dx + \frac{\rho}{\rho_0} w \cos \theta dy, \quad (11.7b)$$

введем комплексное переменное

$$z = x + iy \quad (11.8)$$

и комплексное выражение

$$\begin{aligned} d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi &= w \cos \theta dx + w \sin \theta dy + \\ &+ i (w \cos \theta dy - w \sin \theta dx) = w e^{-i\theta} dz; \end{aligned} \quad (11.9)$$

отсюда

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{w} (d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi). \quad (11.10)$$

Предполагая, что независимыми переменными являются  $\varphi$  и  $\psi$ , вместо  $x$ ,  $y$ , и, следовательно,  $z = x + iy$  становится также функцией от  $\varphi$  и  $\psi$ , так что выражение (11.10) представляет точный полный дифференциал, получим условие

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{e^{i\theta}}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{e^{i\theta}}{w} \right), \quad (11.11)$$

исключающее переменные  $x$ ,  $y$  [12].

Выполняя соответствующие операции, получим равенство

$$i \frac{e^{i\theta}}{w} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \frac{e^{i\theta}}{w^2} \frac{\partial w}{\partial \psi} = -\frac{e^{i\theta}}{w} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + i e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{w} \right), \quad (11.12)$$

откуда, после деления на  $e^{i\theta}$  и отделения действительной части от мнимой, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \psi}, \\ \frac{1}{w} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{w} \right) \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Замечая теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\rho_0}{\rho w} \right) = \frac{d}{dw} \left( \frac{\rho_0}{\rho w} \right) = -\frac{\rho_0}{\rho^2 w^2} \left( w \frac{d\rho}{dw} + \rho \right) = -\frac{\rho_0}{\rho w^2} \left( \frac{w}{\rho} \frac{d\rho}{dw} + 1 \right), \quad (11.14)$$

применяя уравнение Бернулли в дифференциальной форме (3.22)

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} - a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -w dw \quad (11.15)$$

и подставляя этот результат в выражение (11.14)

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{p_0}{\rho\omega} \right) = -\frac{p}{\rho\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{a^2} \right) = -\frac{p_0}{\rho\omega^2} (1 - M^2), \quad (11.16)$$

получим  $\theta$  и  $\omega$  как функции независимых переменных  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} &= \frac{p}{\rho_0\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\psi}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\psi} &= -\frac{p_0}{\rho\omega} (1 - M^2) \frac{\partial\omega}{\partial\psi}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Обращая переменные, т. е. беря  $\omega$  и  $\theta$  как независимые переменные вместо  $\varphi$  и  $\psi$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(\omega, \theta), \quad \psi = \psi(\omega, \theta), \\ d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} d\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta, \quad d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\omega} d\omega - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (11.18)$$

откуда, разрешая эти соотношения относительно  $d\omega$  и  $d\theta$ , будем иметь

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{D} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\psi \right), \\ d\theta &= \frac{1}{D} \left( -\frac{\partial\psi}{\partial\omega} d\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} d\psi \right), \end{aligned} \quad (11.19)$$

где  $D$  — якобиан

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} & \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\omega} & \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{vmatrix}. \quad (11.20)$$

С другой стороны, рассматривая в качестве независимых переменных  $\varphi$  и  $\psi$ , имеем

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} d\varphi - \frac{\partial\omega}{\partial\psi} d\psi, \\ d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} d\varphi - \frac{\partial\theta}{\partial\psi} d\psi, \end{aligned} \quad (11.21)$$

откуда, отождествляя результаты (11.19) и (11.21), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} &= D \frac{\partial\theta}{\partial\psi}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= -D \frac{\partial\omega}{\partial\psi}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\omega} &= -D \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} &= D \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Наконец, принимая во внимание (11.17), получим уравнения Чаплыгина:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0 \omega}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial w},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\frac{\rho_0}{\rho \omega} (1 - M^2) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (11.23)$$

Эти уравнения являются линейными, так как коэффициенты при производных представляют функции одной только независимой переменной  $w$ , что становится еще более очевидным, если записать систему в форме, данной Чаплыгиным. Применяя соотношение (5.2а), которое определяет скорость звука как функцию от скорости течения, а также соотношение (5.4), выражающее критическую скорость

$$c^2 = \frac{2}{\kappa + 1} a_0^2, \quad (11.24)$$

и вводя новую переменную  $\tau$ , определяемую соотношением

$$\tau = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{w^2}{c^2},$$

$$M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\tau}{1 - \tau}, \quad (11.25a)$$

имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\kappa - 1}} = (1 - \tau)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (11.25b)$$

Путем простых операций и соответствующих подстановок в уравнения (11.23), получим систему уравнений Чаплыгина:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\tau} \frac{1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \tau}{(1 - \tau)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1 - \tau)^{\frac{1}{\kappa - 1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}. \quad (11.26)$$

В последней форме или в предшествующей (11.23) указанные уравнения использовались как отправной пункт многочисленных исследований, посвященных в особенности изучению дозвуковых течений.

Так, кроме работ самого Чаплыгина, можно назвать работы Д. Рябушинского, Б. Демченко, Н. Слезкина, А. Буземана, Х. Тзяна, Ко Тамада, И. Имаи и других авторов, которые изучали в особенности проблемы Гельмгольца и Кирхгофа, а также задачи, касающиеся течения около круглых цилиндров и близких к ним по форме тел.

Особого упоминания заслуживает исследование К. Якоба [12] о коэффициентах сжатия газовых струй, которое привело к более точному определению значений этих коэффициентов.

**11.1.1. Симметризация уравнений Чаплыгина.** Возвращаясь к уравнениям (11.23) и вводя новое переменное  $\omega$ , определенное соотношениями

$$d\omega = \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w}, \quad \omega = \int \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w}, \quad (11.27)$$

приведем эти уравнения к простой симметричной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{1 - M^2} \frac{\partial \psi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -\frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{1 - M^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (11.28)$$

которая, как будет показано позже, легче поддается математическому анализу.

Путем несколько иного подхода Христианович [13] получил те же канонические уравнения, введя другие переменные. Так, полагая

$$\lambda - \frac{w}{c} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sqrt{\tau} \quad (11.29)$$

и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{x+1}{x-1} \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (11.30)$$

можно преобразовать уравнения Чаплыгина и получить следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &= -\frac{1 - \lambda^2}{\lambda \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{x}{x-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Введя другую переменную  $s$ , определенную соотношениями

$$ds = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad s = \int \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (11.32)$$

приходим к такой же симметричной системе, как и выше (11.28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \sqrt{K} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= -\sqrt{K} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (11.33)$$

где  $K$  — известная функция от  $\lambda$ :

$$K = \frac{1 - \lambda^2}{\left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{x+1}{x-1}}}. \quad (11.34)$$

Отправляясь от приведенной выше симметричной системы (11.33), Христианович разработал решение путем последовательных приближений, приводящих в конечном счете к практическим результатам; так как вычисления очень сложны и трудоемки, они здесь не воспроизводятся.

Примечательно, что в своих исследованиях Христианович занимается также проблемой соответствия между реальным сжимаемым течением и фиктивным несжимаемым; этот вопрос рассматривается ниже.

**11.1.2. Упрощение уравнений путем применения закона квази-изэнтропического преобразования.** Возвращаясь к симметричным уравнениям (11.28) и уравнению (5.15), получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{1 - M^2} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} (1 - M^2)^{1/2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} M^2 + \frac{2 - \kappa}{8} M^4 + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2} M^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} M^4 \dots\right) = 1 - \frac{\kappa + 1}{8} M^4 + \dots; \end{aligned} \quad (11.35)$$

для воздуха ( $\kappa = 1,4$ ) будем иметь

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{1 - M^2} = 1 - 0,3 M^4 + \dots \quad (11.36)$$

Этот множитель мало отличается от единицы даже при  $M = 0,7$ , так что приближение, сделанное Чаплыгиным, который принял

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{1 - M^2} \approx 1, \quad (11.37)$$

полностью оправдывается для значительного диапазона изменения числа Маха.

В этом случае канонические уравнения (11.28) сводятся к соотношениям Коши — Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} &= - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (11.38)$$

как для несжимаемой жидкости. Аналогичный результат получается в случае малых возмущений, при аффинном преобразовании физической плоскости сжимаемого течения во вспомогательную плоскость несжимаемого течения.

Применяя допущенные приближения ( $K \approx 1$ ), приходим к выводу, что в плоскости новых переменных  $\omega$  и  $\theta$  течение ведет себя подобно несжимаемому; отсюда возникает идея о переходе от физической плоскости к плоскости фиктивного несжимаемого течения и получении характеристик изучаемого течения с помощью соотношений соответствия между обеими плоскостями.

Условие (11.37) может быть точно выполнено только в случае газов, для которых, в соответствии с уравнением (11.35), будем иметь соотношение

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = -1, \quad (11.39)$$

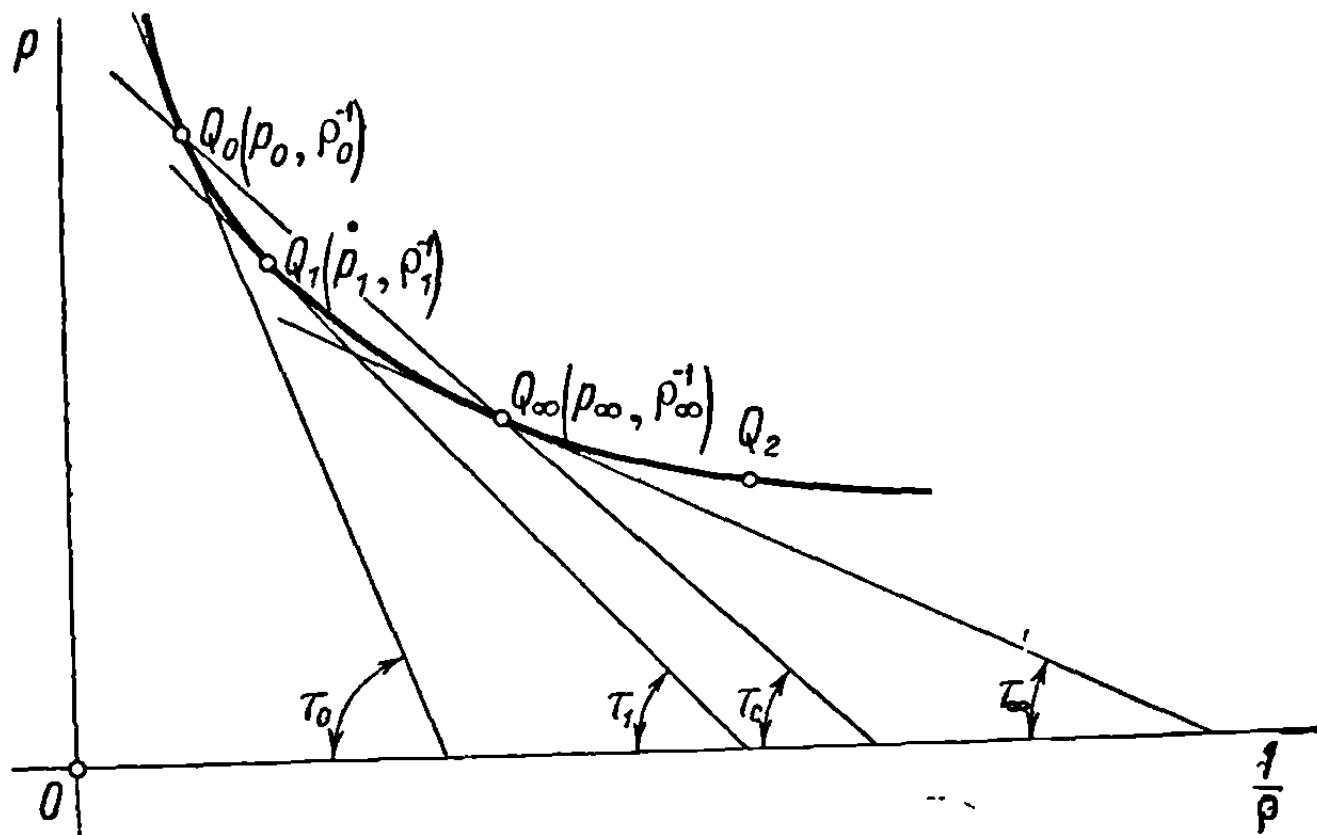
являющееся физически невозможным.

Это означает, что условие Чаплыгина не соответствует никакому реальному газу, подвергающемуся изэнтропическому изменению состояния. Однако можно показать, что оно соответствует преобразованию,

которое в определенном интервале изменения характеристик газа очень близко приближается к кривой изэнтропы, так что процесс может рассматриваться в первом приближении как изэнтропический.

Прежде всего условие

$$\frac{\rho_0^2}{\rho^2} (1 - M^2) = \frac{\rho_0}{\rho \omega^2} (1 - M^2) \frac{\rho_0}{\rho \omega} \omega^3 = 1 \quad (11.40)$$



Фиг. 11. 1

принимает, в согласии с уравнением (11.16), вид

$$\frac{\rho_0}{\rho \omega} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\rho_0}{\rho \omega} \right) = - \frac{1}{\omega^3}, \quad (11.41)$$

$$C\omega^2 + 1 = \frac{\rho_0^2}{\rho^2},$$

где  $C$  — постоянная.

Возвращаясь к уравнению Бернулли (11.15), чтобы исключить  $\omega$  и выразить, таким образом, изменение  $p$  через  $\rho$ , получим

$$dp = - \rho \omega d\omega = + \frac{1}{C} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} d\rho,$$

$$p = C_1 \frac{1}{\rho} + C_2. \quad (11.42)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются наложением поставленного выше условия, а именно, чтобы этот новый закон преобразования газа в определенном интервале был возможно более близок к изэнтропическому. Обращаясь к диаграмме, изображающей этот закон (фиг. 11.1), и предполагая, что условия течения соответствуют окрестности выбранной точки  $Q_1$  ( $\rho_1, 1/\rho_1$ ), получим, что прямая линия, соединяющая две точки изэнтропы, лежащие вблизи точки  $Q_1$ , справа и слева от нее, может представить в первом приближении изэнтропический процесс вблизи этой точки. Условимся говорить, что эта прямая линия представляет квази-изэнтропическое преобразование.

Чтобы исключить неопределенность в выборе двух точек и упростить вычисления, предпочтительнее взять касательную в точке  $Q_1$ . Тогда уравнение прямой линии (11.42) запишется в виде

$$p - p_1 = k \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (11.43)$$

где угловой коэффициент касательной

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \left[ \frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} \right]_{Q_1} = \left[ \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} \right]_{Q_1} = [-a^2 \rho^2]_{Q_1} = -a_1^2 \rho_1^2 = k: \quad (11.44)$$

отсюда окончательно

$$p - p_1 = a_1^2 \rho_1^2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = a_1^2 \rho_1 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right), \quad (11.45)$$

причем последнее соотношение может быть также выражено через скорость. В этом случае сначала должна быть подсчитана скорость звука; из уравнения состояния (11.45) получим

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = a_1^2 \frac{\rho_1^2}{\rho^2},$$

$$a^2 \rho^2 = a_1^2 \rho_1^2 = a_\infty^2 \rho_\infty^2 = \text{const}. \quad (11.46)$$

При этих условиях уравнение Бернулли приводит к результату

$$\begin{aligned} w^2 + 2 \int \frac{dp}{\rho} &= w^2 + 2 \int a^2 \frac{d\rho}{\rho} = w^2 + 2a^2 \rho^2 \int \frac{d\rho}{\rho^3} = \\ &= w^2 - a^2 = w_1^2 - a_1^2 = w_\infty^2 - a_\infty^2 = -a_0^2 = \text{const}; \end{aligned} \quad (11.47)$$

отсюда, соответственно, имеем

$$\frac{\rho_0^2}{\rho^2} = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{a_0^2 + w^2}{a_0^2} = \frac{a^2}{a^2 - w^2},$$

$$\frac{\rho_1^2}{\rho^2} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{a_0^2 + w^2}{a_0^2 + w_1^2}. \quad (11.48)$$

Уравнение для давления как функции от скорости запишется в форме

$$p - p_1 = a_1^2 \rho_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{a_0^2 + w^2}{a_0^2 + w_1^2}} \right) = a_1^2 \rho_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{a_0^2 + w^2}}{a_1} \right), \quad (11.49)$$

которая использована в следующей главе.

Точка  $Q_1$  на кривой изэнтропы должна теперь быть выбрана возможно более близко к действительным условиям течения, в соответствии с природой потока.

Чаплыгин выбирает точку торможения  $Q_0(\rho_0, 1/\rho_0)$ , где скорость равна нулю. Большое число цитированных авторов основывали свои исследования

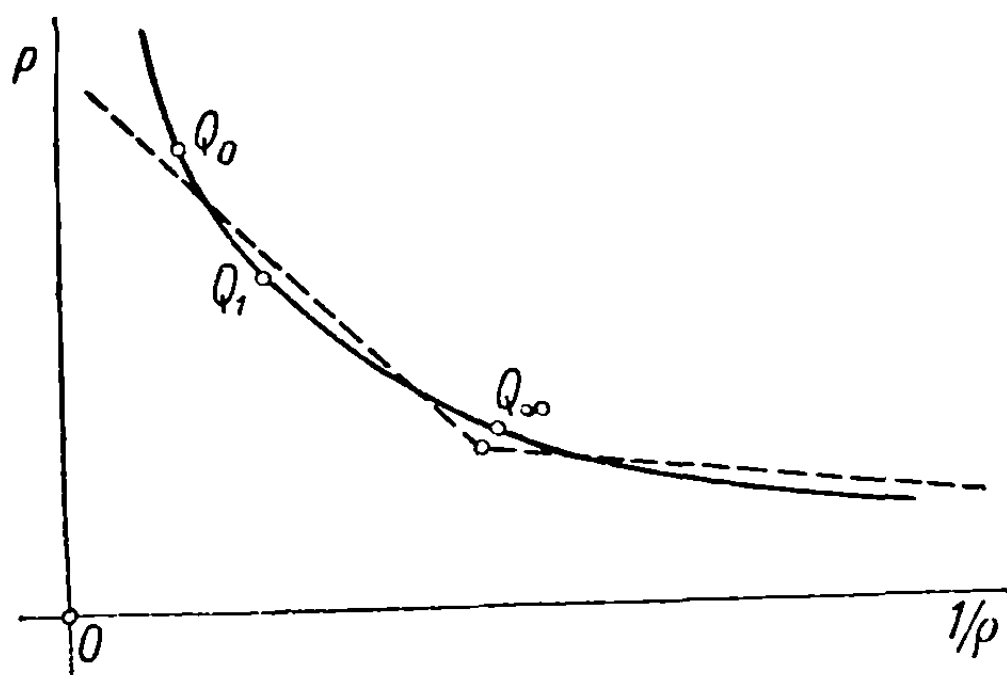
на угловом коэффициенте касательной в этой точке, уравнение которой может быть выражено в различных формах:

$$\rho - \rho_0 = a_0^2 \rho_0^2 \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) = a_0^2 \rho_0 \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = a_0^2 \rho_0 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{w^2}{a_0^2}} \right). \quad (11.50)$$

Для тонких крыльев, на контуре которых скорость мало изменяется по сравнению со скоростью свободного потока  $w_\infty$  ( $w = w_\infty \pm \Delta w$ ), естественно взять касательную в точке  $Q_\infty(\rho_\infty, 1/\rho_\infty)$ , для которой

$$\rho - \rho_\infty = a_\infty^2 \rho_\infty^2 \left( \frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = a_\infty^2 \rho_\infty \left( 1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right) = a_\infty^2 \rho_\infty \left( 1 - \frac{\sqrt{a_0^2 + w^2}}{a_\infty} \right), \quad (11.51)$$

или линию, ей параллельную, пересекающую кривую  $\rho = \rho \left( \frac{1}{\rho} \right)$  вблизи точки  $Q_\infty$ . По этой причине Карман и Тзян, метод которых описан ниже, выбирают эту касательную для решения уравнений (11.38).



Фиг. 11. 2

В случае тонких крыльев с более значительными поперечными размерами, пренебрегая частью крыла, близкой к передней кромке, получим, что скорость вдоль большей части контура будет превышать скорость свободного потока ( $w > w_\infty$ ) как на верхней, так и на нижней поверхностях крыла. Условия течения, следовательно, изменяются между точкой  $Q_\infty$  и некоторой точкой  $Q_2$  (фиг. 11.1). Если, однако, на передней части

скорость по предположению изменяется медленно — от 0 до  $w_\infty$  вблизи передней кромки и далее  $w > w_\infty$ , — то прямая линия, используемая Карманом — Тзяном, может рассматриваться как правильно представляющая явление в среднем.

Если изменение скорости очень велико, то можно взять два или более отрезка ломаной линии, приближенно представляющих изэнтропический процесс (фиг. 11.2), как было применено Седовым [14].

Наконец, в случае задачи Кирхгофа, нужно заметить, что скорость изменяется между  $w = 0$  и  $w = w_\infty$ ; следовательно, процесс протекает между точками  $Q_0(\rho_0, 1/\rho_0)$  и  $Q_\infty(\rho_\infty, 1/\rho_\infty)$ . Поэтому: или может быть выбрана хорда  $Q_0Q_\infty$ , определяемая уравнением

$$\rho - \rho_0 = - (\rho_0 - \rho_\infty) \frac{\frac{\rho_0}{\rho} - 1}{\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1},$$

принятая К. Якобом [15] в задаче о коэффициенте сжатия газовых струй, которая представляет прямую линию, проходящую на некотором расстоянии



от точек вблизи  $Q_1$ ; или может быть взята касательная, параллельная хорде  $Q_0Q_\infty$ , которая также отклоняется от точек  $Q_0$  и  $Q_\infty$ ; или, наконец, можно принять параллельную линию, расположенную между двумя указанными прямыми, которая может представить явление более точно в среднем. Что касается практических результатов указанных исследований, то разница между ними, получающаяся при использовании касательной Чаплыгина или касательной Кармана — Тзяна, очень незначительна.

## 11.2. Метод Кармана — Тзяна для подсчета давлений

Квази-изэнтропический закон, предполагаемый справедливым в определенном интервале вблизи точки  $Q_\infty$

$$p - p_\infty = a_\infty^2 \rho_\infty^2 \left( \frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = a_\infty^2 \rho_\infty \left( 1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right) = a_\infty^2 \rho_\infty \left( 1 - \frac{\sqrt{a_0^2 + w^2}}{a_\infty} \right),$$

и соответствующее уравнение Бернулли

$$w^2 - a^2 = w_\infty^2 - a_\infty^2 = -a_0^2 \quad (11.52)$$

используются как отправной пункт. В этих условиях уравнения (11.38) будут совершенно точными. Течение, представляемое функциями  $\varphi$  и  $\psi$  в пологографических координатах  $\omega$  и  $\theta$ , имеет те же свойства, что и для несжимаемой жидкости.

Рассмотрим подобное течение при действительных условиях несжимаемости жидкости: в то время как  $\theta$  сохраняет прежнее значение, переменная  $\omega$  и соответствующая ей в случае несжимаемого течения переменная  $\Omega$  будут иметь различные значения для сжимаемого и несжимаемого потоков. Обозначая скорость в несжимаемом течении через  $W$ , в соответствии с уравнением (11.27), получим

$$d\omega = \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w}, \quad (11.53)$$

$$d\Omega = \frac{dW}{W}.$$

Система уравнений (11.38) будет иметь одинаковую форму в обоих плоскостях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial \omega}; & \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial \Omega}; & \frac{\partial \varphi}{\partial \Omega} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Предполагая теперь, что существует *соответствие* между областями несжимаемого и сжимаемого течений, определяемое соотношением

$$\frac{dW}{W} = \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w}, \quad (11.55)$$

получим как следствие, что скорость в данной точке области сжимаемого течения может быть подсчитана как функция скорости в соответствующей точке несжимаемого течения. Позже показано, как эти две области, а также контуры  $s$  и  $S$ , вокруг которых происходит исследуемое течение, взаимно друг в друга преобразовываются. Из соотношений (11.47) получим

$$1 - M^2 = \frac{a^2 - w^2}{a^2} = \frac{a_0^2}{w^2 + a_0^2}; \quad (11.56)$$

подставляя этот результат в уравнение (11.55) и интегрируя, найдем

$$\Omega = \ln W = \int \frac{a_0 dw}{w \sqrt{a_0^2 + w^2}} = - \ln \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + w^2}}{w} + \ln A, \quad (11.57)$$

где  $A$  — постоянная;  
отсюда

$$W = \frac{Aw}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + w^2}}. \quad (11.58)$$

Если принять, что газ ведет себя как несжимаемая жидкость при низких скоростях ( $M_\infty \approx 0$ ,  $a_0^2 + w^2 \approx a_0^2$ ), следовательно,  $w \rightarrow W$ , то

$$A = 2a_0, \quad (11.59)$$

и таким образом, соотношение между скоростями принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{W}{2a_0} &= \frac{w}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + w^2}} = \frac{w}{\sqrt{a_\infty^2 - w_\infty^2} + \sqrt{a_\infty^2 - w_\infty^2 + w^2}} = \\ &= \frac{\frac{w}{w_\infty} M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \sqrt{1 - M_\infty^2 + \frac{w^2}{w_\infty^2} M_\infty^2}}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

На бесконечности  $W$  стремится к  $W_\infty$ ,  $w$  — к  $w_\infty$  и последнее соотношение при введении постоянного параметра  $\lambda$  получает форму

$$\frac{W_\infty}{2a_0} = \frac{M_\infty}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}}{M_\infty} = \sqrt{\lambda}. \quad (11.61)$$

Отсюда приходим к другой формуле, содержащей отношение между скоростью в любой заданной точке и скоростью свободного потока:

$$\frac{W}{W_\infty} = \frac{w}{w_\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \sqrt{1 - M_\infty^2 + \frac{w^2}{w_\infty^2} M_\infty^2}}. \quad (11.62)$$

Другие соотношения, которые будут нужны для последующих вычислений, даются ниже. Так, из (11.60) имеем

$$w = \frac{4a_0^2 W}{4a_0^2 - W^2} = \frac{W}{1 - \frac{W^2}{4a_0^2}} = \frac{W}{1 - \frac{W_\infty^2}{4a_0^2} \left(\frac{W}{W_\infty}\right)^2} = \frac{W}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}}; \quad (11.63)$$

отсюда для точек на бесконечности получим

$$w_\infty = \frac{W_\infty}{1 - \lambda}. \quad (11.64)$$

Из соотношений (11.60) и (11.63) следует

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_0^2 + w^2} = a_0 \left( \frac{2}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}} - 1 \right) = \\ &= a_0 \frac{1 + \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}} = a_0 \frac{1 + \frac{W^2}{4a_0^2}}{1 - \frac{W^2}{4a_0^2}}. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Для точек на бесконечности, используя формулу (11.61), имеем

$$a_\infty = \sqrt{a_0^2 + w_\infty^2} = a_0 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} = a_0 \frac{1 + \frac{W_\infty^2}{4a_0^2}}{1 - \frac{W_\infty^2}{4a_0^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (11.66)$$

Переходя теперь к подсчету давлений, будем исходить из формулы (11.51) и, применяя (11.46), получим

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty w_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^2} \left( 1 - \frac{p_\infty}{p} \right) = \frac{2}{M_\infty^2} \left( 1 - \frac{a}{a_\infty} \right). \quad (11.67)$$

Из уравнений (11.65) и (11.66), преобразуя член в скобках и заменяя параметр  $\lambda$  его выражением из уравнения (11.61), будем иметь

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{a_\infty} &= 1 - \frac{1 + \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}} \sqrt{1 - M_\infty^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - M_\infty^2} - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2} (1 + \sqrt{1 - M_\infty^2})}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}} = \\ &= M_\infty^2 \frac{1 - \frac{W^2}{W_\infty^2}}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2} - (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}) \frac{W^2}{W_\infty^2}} = \\ &= M_\infty^2 \frac{1 - \frac{W^2}{W_\infty^2}}{2 \sqrt{1 - M_\infty^2} + (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2}) \left( 1 - \frac{W^2}{W_\infty^2} \right)}; \end{aligned} \quad (11.68)$$

этот результат должен быть введен в уравнение (11.67).

Так как в несжимаемом течении коэффициент давления, в соответствии с уравнением Бернулли, может быть выражен соотношением

$$C_{pi} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty W_\infty^2} = 1 - \frac{W^2}{W_\infty^2}, \quad (11.69)$$

получим в окончательном результате формулу Кармана — Тзяна [16, 17]

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{1}{2} C_{pi} (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2})}. \quad (11.70)$$

В случае малых возмущений коэффициент  $C_{pi}$  будет также мал; вторым членом в знаменателе можно пренебречь, особенно если и число  $M_\infty$  мало, и приведенная выше формула сводится к формуле, установленной Прандтлем — Глауертом (9.29):

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Нужно, однако, заметить, что для вычисления  $C_p$  в любой заданной точке необходимо знать коэффициент  $C_{pi}$  в соответствующей точке несжимаемого течения.

Соответствие между обоими течениями определяется соотношением (11.63) и будет представлять предмет специального обсуждения в последующем разделе.

Если в качестве препятствия рассматривается тонкое тело, как в случае крыла, и если  $M_\infty$  достаточно мало, то контуры препятствия в обеих плоскостях будут отличаться весьма мало и могут быть приняты одинаковыми. В этом случае задача об определении коэффициента  $C_{pi}$  будет очень простой для крыльев, построенных в соответствии с известной преобразующей функцией; решение для эмпирических крыльев будет найдено путем

первоначального подсчета скоростей и давлений в несжимаемом течении с помощью приближенных методов, а затем путем применения формулы (11.70) к сжимаемому течению.

11.2.1. Критическое число Маха. Критическое число Маха определено в разделе 9.3, где была установлена формула, связывающая это число с максимальным разрежением в несжимаемом течении при гипотезе малых возмущений. Теперь рассматриваются течения в предположении значительных изменений скорости. Исходя из точной формулы, дающей критический коэффициент давления, в соответствии с уравнениями (5.22) и (9.70), будем иметь

$$C_{pc} = \frac{p_c - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty w_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_c^2} \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}, \quad (11.71)$$

где  $M_\infty$  заменено через  $M_c$ ; приравнявая результат тому значению коэффициента, которое определяется формулой (11.70), получим соотношение между критическим числом Маха  $M_c$  и максимальным разрежением в несжимаемом течении в точке на контуре рассматриваемого тела:

$$\frac{2}{\gamma M_c^2} \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_c^2} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - M_c^2}) C_{pi}}. \quad (11.72)$$

Эта формула довольно сложна, но нет более простой формулы, определяющей  $M_c$  как явную функцию от  $C_{pi}$ . Коэффициент  $C_{pi}$ , однако, легко вывести в зависимости от  $M_c$ :

$$\begin{aligned} C_{pi} &= \frac{2}{\gamma M_c^2} \frac{(1 - M_c^2)^{1/2} \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}}{1 - \frac{1}{2} [1 - (1 - M_c^2)^{1/2}] \frac{2}{\gamma M_c^2} \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}} \approx \\ &\approx \frac{2}{\gamma M_c^2} \cdot \frac{(1 - M_c^2)^{1/2} \cdot \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}}{1 - \frac{1}{2\gamma} \left( 1 + \frac{1}{4} M_c^2 \right) \left\{ \left( \frac{2 + (\gamma - 1) M_c^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}}, \quad (11.73) \end{aligned}$$

и построить диаграмму этой зависимости. Значения  $M_c$ , даваемые этой формулой, сравнимы со значениями, выводимыми из уравнений Прандтля — Глауэрта, Кармана — Тзяна и Христиановича. Действительно, можно показать, что все указанные формулы, даже в случае толстых крыльев, имеющих очень большое максимальное разрежение, дают значения критического числа Маха, мало отличающиеся между собой.

Остается определить, в согласии с формулой (11.69), максимальное разрежение  $C_{pi}$  на преобразованном профиле. Эта задача рассмотрена в следующем разделе. Однако нужно заметить, что, как и в предшествующем случае, для тонких профилей и малых значений  $M_\infty = M_c$  преобразованный контур

в плоскости несжимаемого течения не будет существенно отличаться от контура, расположенного в физической плоскости; следовательно, распределение давления в плоскости несжимаемого течения может быть определено непосредственно путем использования реального профиля.

В случае более толстого крыла и достаточно высокого числа  $M_\infty$  нужно принимать в расчет контур, расположенный на вспомогательной плоскости несжимаемого течения, получаемый посредством соотношений соответствия между двумя плоскостями.

### 11.3. Соответствие между плоскостью сжимаемого течения и вспомогательной плоскостью несжимаемого течения при отсутствии циркуляции

Использование приведенных формул, касающихся распределения давления и подсчета критического числа Маха, подразумевает предварительное определение контура в соответствующем несжимаемом течении, а также характеристик этого течения.

Напомним, что для тонких крыльев при малых значениях  $M_\infty$  контуры в плоскостях сжимаемого и несжимаемого течений остаются почти одинаковыми, вследствие чего задача существенно упрощается.

Но так как в общем случае контуры могут значительно отличаться один от другого, необходимо определить соответствие между потоками, а также течение вокруг контура в несжимаемом потоке, чтобы иметь возможность использовать приведенные выше формулы. Хотя может быть установлена единая формула соответствия, удобнее для применения рассматривать сначала случай, когда вокруг контура нет циркуляции, как это было сделано Слезкиным [18], а затем исследовать случай течения с циркуляцией.

**11.3.1. Основные формулы соответствия.** Пусть  $x$ ,  $y$  — текущие координаты в физической плоскости сжимаемого течения,  $z = x + iy$  — комплексное переменное (фиг. 11.3); тогда, исходя из выражения

$$dx + idy = dz = \frac{e^{i\theta}}{\omega} \left( d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right),$$

установленного выше, и применяя соотношения (11.48), (11.63) и (11.65)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\sqrt{a_0^2 + \omega^2}}{a_0} = \frac{1 + \frac{W^2}{4a_0^2}}{1 - \frac{W^2}{4a_0^2}}, \quad \omega = \frac{W}{1 - \frac{W^2}{4a_0^2}}, \quad (11.74)$$

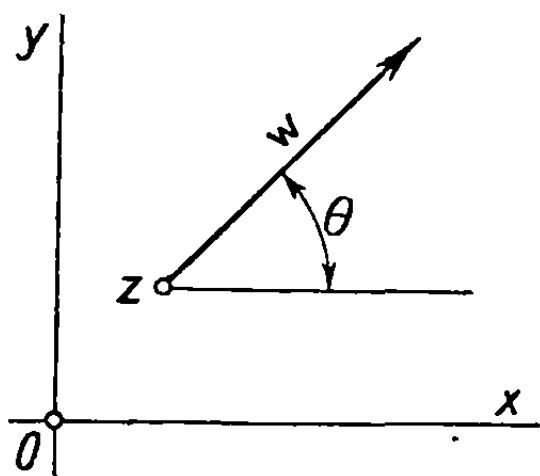
получим

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{\omega} \left( d\varphi + i \frac{1 + \frac{W^2}{4a_0^2}}{1 - \frac{W^2}{4a_0^2}} d\psi \right) = \frac{e^{i\theta}}{W} \left[ d\varphi + id\psi - \frac{W^2}{4a_0^2} (d\varphi - id\psi) \right], \quad (11.75)$$

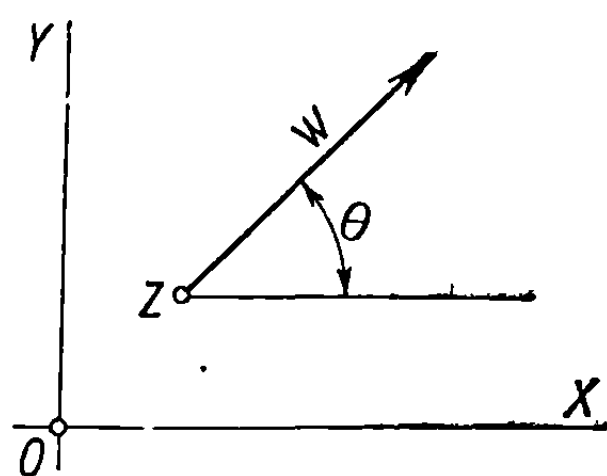
где  $W$  — полная скорость в соответствующей плоскости несжимаемого течения.

В плоскости годографа, где независимыми переменными являются  $\theta$  и  $\omega$ , функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют соотношениям Коши (11.38), так что

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \varphi(\theta, \omega) + i\psi(\theta, \omega), \\ \overline{f(\tau)} &= \varphi(\theta, \omega) - i\psi(\theta, \omega), \end{aligned} \quad (11.76)$$



Фиг. 11.3



Фиг. 11.4

причем  $f(\tau)$  является функцией комплексной переменной

$$\tau = \theta + i\omega.$$

Обозначая комплексную переменную в плоскости несжимаемого течения через

$$Z = X + iY \quad (11.77)$$

и через

$$Q = U - iV = W \cos \theta - iW \sin \theta = W e^{-i\theta},$$

$$\overline{Q} = U + iV = W e^{i\theta} \quad (11.78)$$

комплексную скорость и сопряженную ей величину для потенциального несжимаемого течения в плоскости  $Z$  (фиг. 11.4), можно записать вместо формулы (11.75) общее выражение, определяющее соответствие между двумя плоскостями:

$$dz = \frac{df}{Q} - \frac{\overline{Q}}{4a_0^2} \overline{d\overline{f}}. \quad (11.79)$$

Отметим теперь, что скорости в обеих плоскостях имеют одинаковое направление, так как угол  $\theta$  остается неизменным (фиг. 11.3 и 11.4); однако соответствующие величины скоростей связаны уравнением (11.74), которое не зависит от положения точки  $z$ , соответственно  $Z$ ; с другой стороны, соотношение между этими точками зависит от скорости.

Возвращаясь к соотношению соответствия и предполагая потенциал  $f(\tau) = f(\theta + i\omega)$  в годографической плоскости равным потенциалу  $F(\zeta)$ , соответствующему несжимаемому течению в такой же плоскости, получим

$$f(\tau) = F(\zeta),$$

$$\zeta = \theta + i\Omega = \theta + i \ln W, \quad (11.80)$$

где  $\zeta$  — соответствующая комплексная переменная.

Потенциал несжимаемого течения может быть, однако, представлен как аналитическая функция  $F(Z)$  от комплексной переменной  $Z$ , и так как комплексная скорость  $Q$  (11.78) выводится из этого потенциала, то

$$\begin{aligned} F(Z) &= W_{\infty} G(Z), \\ Q &= \frac{dF}{dZ} = W_{\infty} \frac{dG}{dZ}, \\ \bar{Q} &= \frac{\overline{dF}}{d\bar{Z}} = W_{\infty} \frac{\overline{dG}}{d\bar{Z}}, \end{aligned} \quad (11.81)$$

где  $W_{\infty}$  — скорость свободного потока в плоскости несжимаемого течения, определяемая уравнением (11.64), и  $G(Z)$  — потенциал течения в той же плоскости, обусловленный потоком со скоростью, равной единице.

Вводя полученные значения в выражение (11.79), интегрируя и применяя затем формулу (11.61), получим в окончательном результате соотношение Тзяна [19]:

$$z = Z - \frac{W_{\infty}^2}{4a_0^2} \int \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 dZ = Z - \lambda \int \left( \frac{\overline{dG}}{d\bar{Z}} \right)^2 d\bar{Z}. \quad (11.82)$$

Из этого соотношения очевидно, что если  $\lambda$  мало (следовательно, мало и  $M_{\infty}$ ) и если профиль достаточно тонок (следовательно, нет большого возрастания скорости, а поэтому и возрастания модуля комплексной величины под знаком интеграла), то вторым членом в правой части уравнения можно пренебречь и профили могут рассматриваться в первом приближении как идентичные в обеих плоскостях, что уже установлено в предыдущем разделе.

Действительно, если  $M_{\infty}$  достаточно мало, то уравнение (11.61) для  $\lambda$  может быть разложено в ряд и будут получены соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(1 - \sqrt{1 - M_{\infty}^2})^2}{M_{\infty}^2} \approx \frac{M_{\infty}^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{4} M_{\infty}^2 + \frac{1}{8} M_{\infty}^4 + \dots \right)^2 \approx \\ &\approx \frac{M_{\infty}^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} M_{\infty}^2 + \frac{5}{16} M_{\infty}^4 + \dots \right) \approx \frac{M_{\infty}^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} M_{\infty}^2 \right), \end{aligned} \quad (11.83)$$

из которых очевидно, что при малых значениях  $M_{\infty}$  величина  $\lambda$  очень мала.

Полученная приближенная формула применима при значениях  $M_{\infty} < 0,8$ .

Величина под знаком интеграла соотношения Тзяна (11.82) зависит от изменения скорости на контуре (см. 11.81), и если профиль тонкий, то указанная величина мала; следовательно, можно принять, что контуры в обеих плоскостях идентичны.

Возвращаясь к общему случаю, отметим, что в исследуемом течении циркуляция равна нулю. Иначе, в выражении под знаком интеграла появится член с множителем  $1/\bar{Z}$ , который после интегрирования даст слагаемое, содержащее  $\ln \bar{Z}$ , вследствие чего  $z$  становится многозначной функцией, и контур в физической плоскости сжимаемого течения остается незамкнутым. Позже показано, как можно устранить это затруднение. Сейчас переходим к различным случаям применения, касающимся бесциркуляционного течения вокруг простых контуров, приближающихся к эллипсу или окружности.



11.3.2. Применение к эллиптическому контуру. Применение формулы соответствия (11.82) к прямой задаче, состоящей в нахождении течения вокруг заданного контура в сжимаемом потоке, очень сложно; удобнее исследовать задачу окольным путем, определяя сжимаемое течение и реальный контур, исходя из несжимаемого течения вокруг известного контура.

Поступая таким образом с эллипсом, определяемым двумя полуосями  $A$  и  $B$  (фиг. 11.5), и полагая

$$\begin{aligned} r &= \frac{A+B}{2}, \\ \frac{A^2-B^2}{4} &= c^2, \\ \frac{c^2}{r^2} &= \frac{A-B}{A+B} = q^2, \end{aligned} \quad (11.84)$$

получим, что эллипс отображается на круг единичного радиуса с помощью соотношения

$$Z = r \left( \zeta + \frac{q^2}{\zeta} \right), \quad \frac{dZ}{d\zeta} = r \left( 1 - \frac{q^2}{\zeta^2} \right), \quad (11.85)$$

где  $\zeta$  — комплексная переменная в плоскости круга.

Потенциал течения  $F(\zeta)$ , соответственно  $G(\zeta)$ , дается выражением

$$G(\zeta) = r \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (11.86)$$

Отсюда

$$\frac{dG}{dZ} = \frac{dG}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - q^2} \quad (11.87)$$

соответственно

$$\left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{d\zeta} = r \frac{(\zeta^2 - 1)^2}{\zeta^2 (\zeta^2 - q^2)}. \quad (11.88)$$

Путем элементарных операций получим простой результат:

$$\begin{aligned} \int \overline{\left( \frac{dG}{dZ} \right)^2} dZ &= r \left( \bar{\zeta} + \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{\bar{\zeta}} + \frac{\left( \frac{1}{q^2} - 1 \right)^2 q}{2} \ln \frac{\bar{\zeta} - q}{\bar{\zeta} + q} \right) + \\ &+ C = r \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{q^2} + \frac{(1 - q^2)^2}{2q^3} \ln \frac{1 - \zeta q}{1 + \zeta q} \right) + C, \end{aligned} \quad (11.89)$$

из которого выводится окончательная формула соответствия с точностью до постоянной:

$$\begin{aligned} \frac{z}{r} &= \zeta + \frac{q^2}{\zeta} - \lambda \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{q^2} + \frac{(1 - q^2)^2}{2q^3} \ln \frac{1 - \zeta q}{1 + \zeta q} \right) = \\ &= \zeta \left( 1 - \frac{\lambda}{q^2} \right) + \frac{1}{\zeta} (q^2 - \lambda) - \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{2q^3} \ln \frac{1 - \zeta q}{1 + \zeta q}. \end{aligned} \quad (11.90)$$

Постоянная интегрирования может быть определена наложением дополнительного условия на преобразование.

Если  $q$  мало, т. е. отношение осей близко к единице,

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - q^2}{1 + q^2} \approx 1 - 2q^2, \quad (11.91)$$

то логарифм в предшествующей формуле может быть разложен в ряд, и получается еще более простое выражение

$$\frac{z}{r} = [1 - \lambda(2 - q^2)]\zeta + (q^2 - \lambda)\frac{1}{\zeta} + \lambda\frac{(1 - q^2)^2}{3}\zeta^3 + \dots, \quad (11.92)$$

из которого очевидно, что контур, расположенный в физической плоскости сжимаемого течения, очень близок к эллипсу; поэтому он может быть назван *квази-эллиптическим* контуром.

Полагая

$$\zeta = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (11.93)$$

и отделяя действительную часть от мнимой, получим координаты этого контура как функции от величины  $\theta$  (которая изменяется от 0 до  $\pi$  для положительных ординат):

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= [1 + q^2 - \lambda(3 - q^2)] \cos \theta + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3} \cos 3\theta, \\ \frac{y}{r} &= (1 - q^2)(1 - \lambda) \sin \theta + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3} \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Исходя из *основного эллипса* на вспомогательной плоскости несжимаемого течения, имеющего характеристики

$$\frac{B}{A} = \frac{3}{5}, \quad \frac{A - B}{A + B} = q^2 = 0,25, \quad (11.95)$$

можно получить реальные квази-эллиптические контуры для различных чисел Маха, показанные на фиг. 11.5, где для большей наглядности искажения одна из главных осей принята одинаковой для всех контуров. Эти контуры отличаются очень мало от контура эллипса и могут быть использованы для изучения действительного течения вокруг эллипса.

Поэтому, обозначая через  $a$  и  $b$  две оси указанного контура:

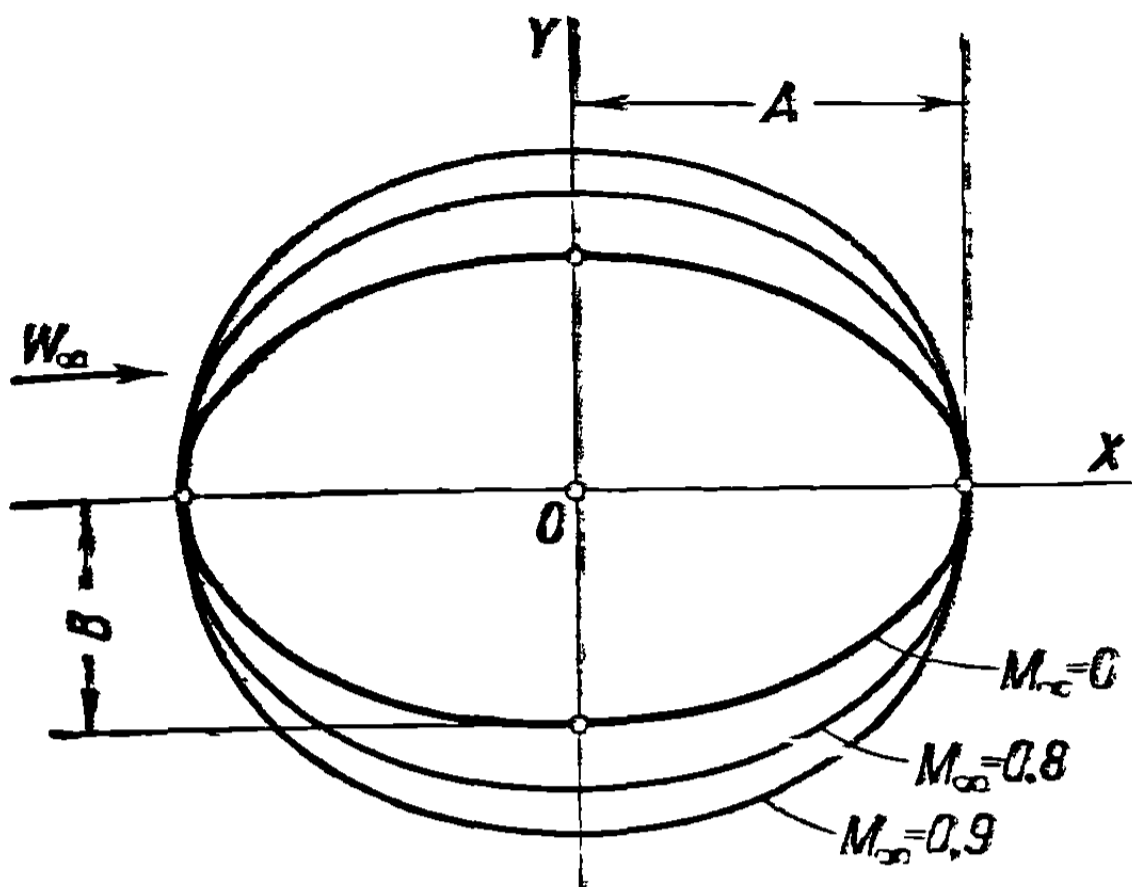
$$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= 1 + q^2 - \lambda(3 - q^2) + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3}, \\ \frac{b}{r} &= (1 - q^2)(1 - \lambda) - \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3}, \end{aligned} \quad (11.96)$$

можно составить отношение

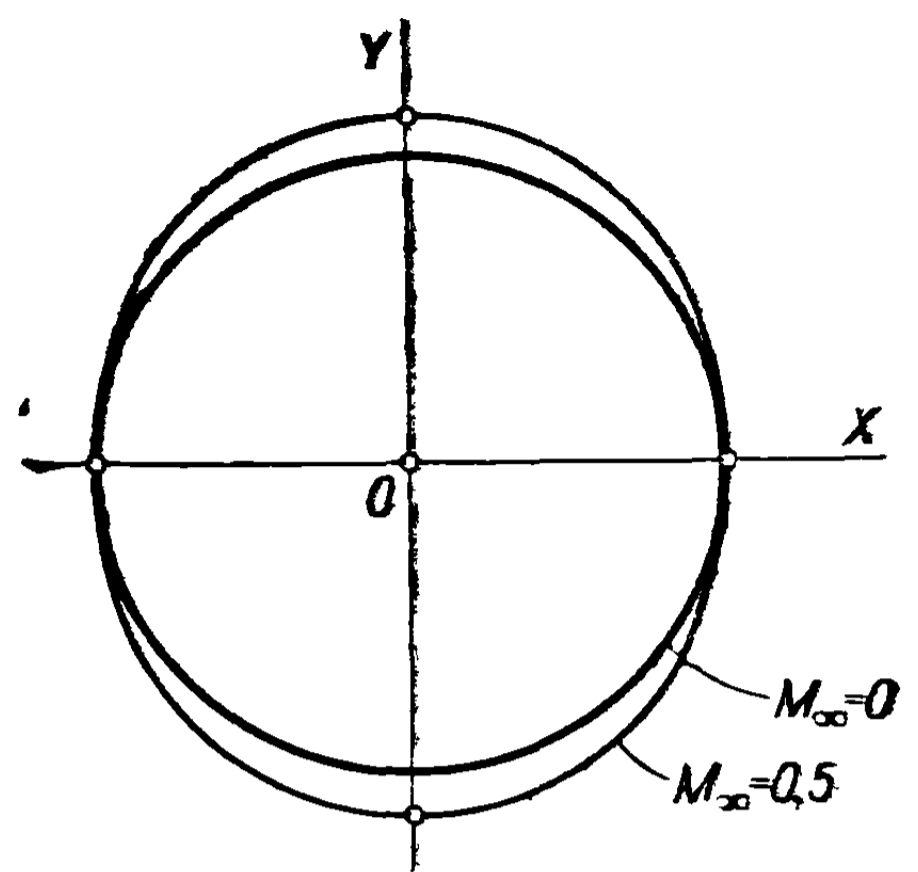
$$\frac{a}{b} = \frac{1 + q^2 - \lambda(3 - q^2) + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3}}{(1 - q^2)(1 - \lambda) - \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3}}, \quad (11.97)$$

позволяющее подсчитать величину  $q^2$ , а следовательно, и отношение между двумя осями  $A$  и  $B$  для соответствующего эллипса в плоскости несжимаемого течения.

Если приведенное выше отношение равно единице, то эллипсу в плоскости несжимаемого течения будет соответствовать течение вокруг квази-кругового контура. Некоторые результаты, касающиеся этой задачи, даны ниже.



Фиг. 11.5



Фиг. 11.6

Если берется основной эллипс, большая ось которого располагается по оси ординат, т. е. нормально к направлению потока, расчет должен быть сделан, исходя из новой функции преобразования

$$Z = r \left( \zeta - \frac{q^2}{\zeta} \right), \quad (11.98)$$

где  $q^2$  определяется теперь соотношением

$$q^2 = \frac{B - A}{B + A}. \quad (11.99)$$

Остальные вычисления такие же, как в предыдущем случае.

Случай, когда основной эллипс в несжимаемом течении является кругом радиуса  $r$ , представляет особый интерес. При этом  $q^2 = 0$ , и уравнения (11.92) и (11.94) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{z}{r} &= (1 - 2\lambda)\zeta - \frac{\lambda}{\zeta} + \frac{\lambda}{3}\zeta^3; \\ \frac{x}{r} &= (1 - 3\lambda)\cos\theta + \frac{\lambda}{3}\cos 3\theta; \\ \frac{y}{r} &= (1 - \lambda)\sin\theta + \frac{\lambda}{3}\sin 3\theta. \end{aligned} \quad (11.100)$$

Фигура 11.6 изображает квази-эллиптический контур в физической плоскости сжимаемого течения, соответствующий числу  $M_\infty = 0,5$ , для которого основным контуром в плоскости несжимаемого течения будет круг.

Отметим, что число  $M_\infty$  не может превышать критическое число Маха  $M_c$ , и, поскольку последнее очень мало для указанных контуров, наше упрощающее предположение подтверждается, так как при малых значениях  $M_\infty$  контуры очень близки к эллипсам.

**11.3.3. Течение без циркуляции около круга.** Имея в виду теоретическую важность течений около кругового и эллиптического контуров,

многочисленные авторы исследовали эти задачи, применяя различные, прямые или косвенные методы [12, 20—28]. Нет необходимости описывать все эти методы, поскольку они приводят почти к одинаковым результатам, и их изложение не представило бы особого практического интереса для применения в аэродинамике.

Настоящее исследование ограничивается изучением течения около квази-кругового контура, близко приближающегося к кругу, с помощью аппроксимирующего метода, описанного выше. В этом случае использование упрощенного соотношения соответствия (11.92) или (11.94) полностью обоснованно, так как величина  $q^2$  мала из-за близости к кругу основного контура в плоскости несжимаемого течения.

Приравнявая обе оси квази-эллиптического контура, чтобы получить квази-круговой контур, получим соотношение

$$1 + q^2 - 3\lambda + \lambda q^2 + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3} - \left[ (1 - q^2)(1 - \lambda) - \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3} \right] = 2 \left[ q^2 - \lambda + \lambda \frac{(1 - q^2)^2}{3} \right] = 0, \quad (11.101)$$

откуда

$$q^2 \approx \frac{2\lambda}{3 - 2\lambda} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{3 - 2\lambda} \right)^2 \right] \approx \frac{2\lambda}{3 - 2\lambda}. \quad (11.102)$$

Основной эллипс в плоскости несжимаемого течения имеет отношение осей, определяемое уравнением (11.91):

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - q^2}{1 + q^2} = 1 - \frac{4}{3} \lambda \approx 1 - \frac{M_\infty^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 + \dots \right). \quad (11.103)$$

Чтобы найти скорость на круге в плоскости действительного течения, нужно сначала с помощью обычных методов определить скорость вокруг эллипса в несжимаемом течении.

Известно, что

$$V = 2W_\infty \sin \theta \quad (11.104)$$

представляет выражение для скорости на круге, который преобразуется в основной эллипс при конформном отображении, причем  $\theta$  — угол, составляемый радиусом-вектором рассматриваемой точки с направлением скорости свободного потока; далее с помощью равенства

$$W = \frac{2W_\infty \sin \theta}{\left| 1 - \frac{q^2}{\zeta^2} \right|} = \frac{2W_\infty \sin \theta}{\sqrt{1 - 2q^2 \cos 2\theta + q^4}} \quad (11.105)$$

определяется скорость на эллипсе в соответствующих точках, поэтому, используя выражение (11.63), находим нужную нам скорость в плоскости сжимаемого течения:

$$\omega = \frac{W}{1 - \lambda \frac{W^2}{W_\infty^2}} = \frac{2W_\infty \sin \theta}{\sqrt{1 - 2q^2 \cos 2\theta + q^4}} \cdot \frac{1}{1 - \lambda \frac{4 \sin^2 \theta}{1 - 2q^2 \cos 2\theta + q^4}}. \quad (11.106)$$

Если ввести скорость свободного потока  $w_\infty$  в реальной плоскости сжимаемого течения, определяемую формулой (11.64), и произвести соответствующие упрощения, то получим последовательно

$$\begin{aligned} w &= \frac{2(1-\lambda)w_\infty \sin \theta}{\sqrt{1-2q^2 \cos 2\theta + q^4}} \approx \frac{4\lambda \sin^2 \theta}{\sqrt{1-2q^2 \cos 2\theta + q^4}} \approx \\ &\approx \frac{2(1-\lambda)w_\infty \sin \theta}{1-q^2 \cos 2\theta - 4\lambda \sin^2 \theta} \approx 2w_\infty \sin \theta \frac{1-\lambda}{1-2\lambda + \frac{4}{3}\lambda \cos 2\theta} \approx \\ &\approx 2w_\infty \sin \theta \left(1 + \lambda - \frac{4}{3}\lambda \cos 2\theta\right) = \\ &= 2w_\infty \sin \theta \left[1 + \frac{M_\infty^2}{12}(3 - 4 \cos 2\theta)\right]. \end{aligned} \quad (11.107)$$

Максимальная скорость получается при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; отсюда

$$w_{\max} = 2w_\infty \left(1 + \frac{7}{12} M_\infty^2\right). \quad (11.108)$$

Напомним, что выражения (11.94) представляют параметрические уравнения квази-кругового контура в физической плоскости. Подставляя вместо величины  $q^2$  ее значение из уравнения (11.102) и производя соответствующие упрощения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \left(1 - \frac{7}{3}\lambda\right) \cos \theta + \frac{\lambda}{3} \cos 3\theta = \cos \theta \left(1 - \frac{10}{3}\lambda + \frac{4}{3}\lambda \cos^2 \theta\right), \\ \frac{y}{r} &= \left(1 - \frac{5}{3}\lambda\right) \sin \theta + \frac{\lambda}{3} \sin 3\theta = \sin \theta \left(1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{3}\lambda \sin^2 \theta\right). \end{aligned} \quad (11.109)$$

Скорость в любой заданной точке круга в физической плоскости обычно определяется как функция угла  $\tau$ , образуемого радиусом-вектором рассматриваемой точки с направлением скорости свободного потока. Угол  $\theta$  в формуле (11.107) может быть поэтому легко заменен через угол  $\tau$ ; соотношение между углами выводится из уравнения (11.109):

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \theta \frac{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{3}\lambda \sin^2 \theta}{1 - \frac{10}{3}\lambda + \frac{4}{3}\lambda \cos^2 \theta} \approx \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - \frac{4}{3}\lambda} \approx \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - \frac{M_\infty^2}{3}}; \quad (11.110)$$

отсюда после упрощения получим:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\left(1 - \frac{M_\infty^2}{3}\right) \sin \tau}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} M_\infty^2 \sin^2 \tau}} \approx \left(1 - \frac{1}{3} M_\infty^2 \cos^2 \tau\right) \sin \tau = \\ &= \left(1 - \frac{1}{6} M_\infty^2 - \frac{1}{6} M_\infty^2 \cos 2\tau\right) \sin \tau, \end{aligned} \quad (11.111)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \approx 1 - 2 \sin^2 \tau \left(1 - \frac{2}{3} M_\infty^2 \cos^2 \tau\right) = \\ &= \cos 2\tau + \frac{1}{3} M_\infty^2 \sin^2 2\tau. \end{aligned} \quad (11.112)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (11.107), имеем

$$\omega \approx 2\omega_{\infty} \sin \tau \left[ 1 + \frac{M_{\infty}^2}{2} \left( \frac{1}{6} - \cos 2\tau \right) \right]. \quad (11.113)$$

Вследствие малой величины  $M_{\infty}$  распределение скоростей не отличается сильно от распределения в плоскости несжимаемого течения, как увидим ниже.

Чтобы подсчитать критическое число Маха, можно применить формулу (11.73). Это число мало, поэтому после соответствующих упрощений получим

$$C_{pi} \approx \frac{2}{\kappa M_c^2} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} M_c^2\right) \left[\left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left(1 + \frac{\kappa}{2} M_c^2\right) - 1\right]}{1 - \frac{1}{2\kappa} \left(1 + \frac{1}{4} M_c^2\right) \left[\left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left(1 + \frac{\kappa}{2} M_c^2\right) - 1\right]}; \quad (11.114)$$

для воздуха ( $\kappa = 1,4$ )

$$\begin{aligned} C_{pi} &\approx \frac{4}{M_c^2} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} M_c^2\right) (-0,47 + 0,37 M_c^2)}{2,8 - \left(1 + 0,25 M_c^2\right) (-0,47 + 0,37 M_c^2)} \approx \\ &\approx -\frac{0,575}{M_c^2} (1 - 1,22 M_c^2). \end{aligned} \quad (11.115)$$

Максимальная скорость в несжимаемом течении определяется из уравнения (11.105), если положить  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; итак

$$C_{pi} = 1 - \frac{W_{\max}^2}{W_{\infty}^2} = 1 - \frac{4}{(1 + q^2)^2} \approx 1 - 4 \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right)^2 \approx -3 + \frac{4}{3} M_c^2, \quad (11.116)$$

отсюда  $M_c = 0,408$ . (11.117)

**11.3.4. Альтернативный метод для определения течения около круга.** Чтобы расширить область применения изложенного выше метода и указать степень получаемого приближения, рассмотрим ту же задачу, причем исходный основной контур будет отличен от эллипса. Рассматривая овал, образуемый при суперпозиции потока  $W_{\infty}$  и двух равных и противоположных по знаку источников, с интенсивностью  $Q$  (фиг. 11.7), имеем

$$G(Z) = Z - \frac{Q}{2\pi W_{\infty}} \ln \frac{Z - a}{Z + a}; \quad (11.118)$$

замечая, что скорость равна нулю на концах главной оси, получим, что интенсивность  $Q$  будет функцией большой полуоси  $A$  и величины  $a$ :

$$\frac{Q}{2\pi W_{\infty}} = \frac{A^2 - a^2}{2a}. \quad (11.119)$$

Линии тока в общем случае и в частности овал определяются соответственно уравнениями

$$\Psi = Y - \frac{A^2 - a^2}{2a} \theta = k,$$

$$Y - \frac{A^2 - a^2}{2a} \theta = 0. \quad (11.120)$$

Обозначая малую полуось через  $B$  и предполагая, что овал по форме очень близок к кругу (фиг. 11.7), получим

$$B = \frac{A^2 - a^2}{2a} \theta_0 = \frac{A^2 - a^2}{2a} 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{B} \approx \frac{A^2 - a^2}{B}, \quad (11.121)$$

откуда

$$\begin{aligned} a^2 &= A^2 - B^2, \\ \frac{Q}{2\pi W_\infty} &= \frac{B^2}{2a}, \end{aligned} \quad (11.122)$$

Далее

$$\frac{dG}{dZ} = 1 - \frac{B^2}{Z^2 - a^2}, \quad (11.123)$$

и после некоторых элементарных операций имеем

$$\int \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 dZ = Z - \frac{B^2}{a} \left( 1 + \frac{B^2}{4a^2} \right) \ln \frac{Z-a}{Z+a} - \frac{B^4}{2a^3} \frac{Z}{Z^2 - a^2}. \quad (11.124)$$

Поскольку величина  $a$  мала, можно с целью упрощения произвести соответствующее разложение правой части уравнения (11.124); пренебрегая второстепенными членами, получим

$$\int \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 dZ \approx Z + \frac{2B^2}{Z} - \frac{B^4}{3Z^3}, \quad (11.125)$$

отсюда окончательно

$$z = Z - \lambda \left( \bar{Z} + \frac{2B^2}{\bar{Z}} - \frac{1}{3} \frac{B^4}{\bar{Z}^3} \right). \quad (11.126)$$

Оси  $\alpha$  и  $\beta$  овала, расположенного в реальной плоскости, определяются равенствами

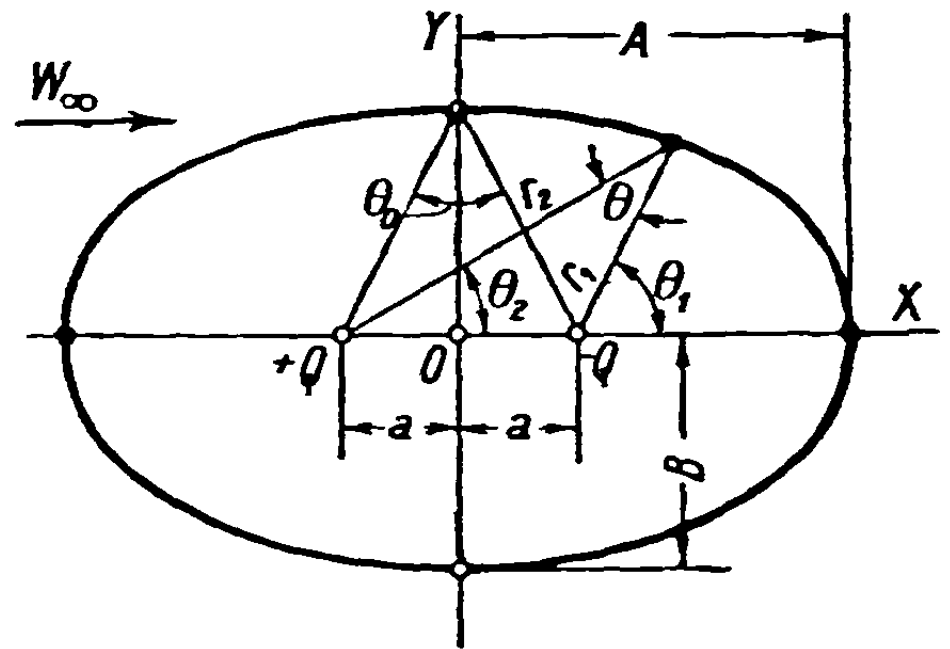
$$\begin{aligned} \alpha &= A \left[ 1 - \lambda \left( 1 + \frac{2B^2}{A^2} - \frac{1}{3} \frac{B^4}{A^4} \right) \right], \\ \beta &= B \left( 1 - \frac{4}{3} \lambda \right). \end{aligned} \quad (11.127)$$

Для получения квази-кругового овала приравняем  $\alpha$  и  $\beta$  и после простых, но трудоемких вычислений придем к формуле, подобной (11.103), которая была выведена в случае эллипса:

$$\frac{B}{A} = 1 - \frac{\frac{4}{3} \lambda}{1 + \frac{8}{3} \lambda} \approx 1 - \frac{M_\infty^2}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} M_\infty^2 \right). \quad (11.128)$$

Максимальная скорость в несжимаемом течении наблюдается на концах малой оси; отсюда, применяя выражение (11.123), получим

$$\begin{aligned} \frac{W_{\max}}{W_\infty} &= 1 + \frac{B^2}{B^2 + a^2} = 1 + \frac{B^2}{A^2} \approx \\ &\approx 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} M_\infty^2 \left( 1 - \frac{5}{6} M_\infty^2 \right) \right] \approx 2 \left( 1 - \frac{1}{3} M_\infty^2 \right). \end{aligned} \quad (11.129)$$



Фиг. 11.7

Это соотношение используем для подсчета максимальной скорости на круге. Формула (11.106) дает значение

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{W_{\max}}{1 - \lambda \frac{W_{\max}^2}{W_{\infty}^2}} \approx \frac{2W_{\infty} \left(1 - \frac{1}{3} M_{\infty}^2\right)}{1 - M_{\infty}^2} = \\ &= \frac{2w_{\infty} \left(1 - \frac{M_{\infty}^2}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{3} M_{\infty}^2\right)}{1 - M_{\infty}^2} \approx 2w_{\infty} \left(1 + \frac{5}{12} M_{\infty}^2\right), \end{aligned} \quad (11.130)$$

которое мало отличается от полученного предыдущим методом (11.108). Для определения критического числа Маха сначала подсчитаем коэффициент

$$\begin{aligned} C_{pi} &= 1 - \frac{W_{\max}^2}{W_{\infty}^2} \approx 1 - 4 \left(1 - \frac{2}{3} M_{\infty}^2\right) = -3 + \\ &+ \frac{8}{3} M_{\infty}^2 = -3 \left(1 - \frac{8}{9} M_{\infty}^2\right); \end{aligned} \quad (11.131)$$

вводя результат в уравнение (11.115), получим значение  $M_c$ , мало отличающееся от полученного ранее (11.117):

$$M_c \approx 0,42. \quad (11.132)$$

Таким образом, при двух различных подходах к решению задачи получены одинаковые результаты.

## 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛ СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

Рассмотрим крыло, вокруг которого в случае несжимаемого режима существует известное течение с циркуляцией. Если применить формулу (11.82), то в ней выражение под знаком интеграла, если написать его разложение для больших значений  $\bar{Z}$  ( $\bar{Z} \rightarrow \infty$ ), будет содержать член  $1/\bar{Z}$ ; поэтому в результате интегрирования получится многозначный член  $\ln \bar{Z}$ , наличие которого скажется в том, что реальный профиль в плоскости  $z$  останется незамкнутым. Поэтому формула (11.82) здесь не применима, и для решения задачи нужно ввести некоторые изменения в предыдущие рассуждения. Чаплыгин и другие авторы [14, 29—33], исследуя эту задачу, достигали сходных результатов несколькими различными путями. Основные результаты описаны ниже; при этом мы следуем выводам Лина, указавшего практический прием для построения профилей в физической плоскости, основанный на использовании подобного профиля в плоскости несжимаемого течения.

### 12.1. Основные формулы соответствия для течения с циркуляцией

Возвращаясь к основной формуле соответствия (11.79), рассмотрим некоторый заданный контур  $C$  на вспомогательной плоскости несжимае-



мого течения, соответствующий профилю  $c$  в реальном сжимаемом течении.

Обозначим опять через

$$Z = X + iY,$$

$$\zeta = \theta + i\Omega = \theta + i \ln W \quad (12.1)$$

комплексные переменные на вспомогательной плоскости несжимаемого течения и соответственно на плоскости годографа; если потенциал течения вокруг контура  $C$  будет

$$F(Z) \text{ или } F(\zeta), \quad (12.2)$$

то соответствующий потенциал в плоскости годографа сжимаемого течения, выражаемый через комплексную переменную

$$\tau = \theta + i\omega, \quad (12.3)$$

будет тот же, что и в случае несжимаемого течения:

$$f(\tau) = F(\zeta). \quad (12.4)$$

Пусть существует другое, безвихревое течение, совместимое с условиями вокруг контура  $C$  и на нем самом, определяемое потенциалом  $F'(Z)$ ; представим соответствующую комплексную скорость в виде

$$Q' = \frac{dF'}{dZ} = \frac{1}{h(Z)} \frac{dF}{dZ} = \frac{Q}{h(Z)},$$

$$\bar{Q}' = \frac{d\bar{F}'}{d\bar{Z}} = \frac{\overline{1}}{\overline{h(Z)}} \frac{\overline{dF}}{\overline{dZ}} = \frac{\bar{Q}}{\bar{h(Z)}}, \quad (12.5)$$

где  $h(Z)$  — регулярная функция во всей области вне контура  $C$ .

Условия, при которых было установлено уравнение (11.79), удовлетворяется, если  $Q$  и  $\bar{Q}$  заменить на  $Q'$  и  $\bar{Q}'$ .

Следовательно, применяя также уравнение (11.82), имеем

$$dz = \frac{df}{Q'} - \frac{\bar{Q}'}{4a_0^2} \bar{d}\bar{f} = h(Z) \frac{dF}{Q} - \frac{\bar{Q}}{4a_0^2 h(Z)} \bar{d}\bar{F} =$$

$$= h(Z) dZ - \lambda \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{h(Z)}. \quad (12.6)$$

Интегрируя, получим конечный результат

$$z = \int h(Z) dZ - \lambda \int \overline{\left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{h(Z)}}. \quad (12.7)$$

Это и есть формула соответствия в случае течения с циркуляцией; условия, которым должна удовлетворять функция  $h(Z)$  для взаимной однозначности соответствия, изучены позже. Заметим, что новая абсолютная скорость  $W'$

в соответствующем несжимаемом течении, как и реальная скорость  $w$ , определяется формулами

$$W' = |Q'| = \left| \frac{Q}{h(Z)} \right| = \frac{W}{|h(Z)|} = \frac{2a_0 w}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + w^2}}, \quad (12.8a)$$

$$Q' = \frac{W e^{i\theta}}{h(Z)} = W' e^{-i\theta'}. \quad (12.8b)$$

Очевидно, что угол  $\theta'$  скорости  $W'$  не равен, вообще говоря, углу  $\theta$  скорости  $W$ .

Если скорость  $W'_\infty$  равна  $W_\infty$ , т. е. если два течения, совместимые с контуром  $C$  (который остается линией тока для обоих течений, определяемых комплексными скоростями  $Q'$  и  $Q$  или потенциалами  $F'(Z)$  и  $F(Z)$ ), имеют одинаковые скорости свободного потока, то разложение  $h(Z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки будет

$$h(Z) = 1 + \frac{i\gamma}{Z} + \frac{A_2}{Z^2} + \dots + \frac{A_n}{Z^n} + \dots, \quad (12.9)$$

где, как увидим ниже, величина  $\gamma$  должна быть действительным числом. Это условие налагает ограничение на произвольную функцию  $h(Z)$ .

В рассматриваемом случае скорость  $w$  в физической плоскости сжимаемого течения получается заменой в равенстве (11.63) величины  $W$  на  $W'$ , а затем последней через ее выражение (12.8a):

$$w = \frac{W'}{1 - \lambda \left( \frac{W'}{W_\infty} \right)^2} = \frac{W}{|h(Z)| - \frac{\lambda}{|h(Z)|} \frac{W^2}{W_\infty^2}}. \quad (12.10)$$

Если контур  $c$  в физической плоскости  $z$  должен быть замкнутым, то для любого замкнутого контура в плоскости несжимаемого течения, внутри которого содержится контур  $C$ , должно выполняться соотношение

$$\oint h(Z) dZ = \lambda \oint \overline{\left( \frac{dG}{dZ} \right)^2} \frac{dZ}{h(Z)}. \quad (12.11)$$

Заметим, что при больших по модулю значениях  $Z$  и в случае, когда скорость свободного потока параллельна оси  $OX$  и направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси, производная  $\frac{dG}{dZ}$  может быть разложена следующим образом:

$$\frac{dG}{dZ}_{Z \rightarrow \infty} = - \left( 1 + \frac{i\Gamma}{2\pi W_\infty} \frac{1}{Z} + \frac{B_2}{Z^2} + \dots + \frac{B_n}{Z^n} + \dots \right), \quad (12.12)$$

где  $\Gamma$  — циркуляция в потоке вокруг контура  $C$ , определяемом потенциалом  $F(Z)$ ; при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(Z)} \left( \frac{dG}{dZ} \right)_{Z \rightarrow \infty}^2 &= \frac{\left( 1 + \frac{i\Gamma}{2\pi W_\infty} \frac{1}{Z} + \frac{B_2}{Z^2} + \dots \right)^2}{1 + \frac{i\gamma}{Z} + \dots + \frac{A_n}{Z^n} + \dots} = \\ &= 1 + i \left( \frac{\Gamma}{\pi W_\infty} - \gamma \right) \frac{1}{Z} + \frac{C_2}{Z^2} + \dots + \frac{C_n}{Z^n} + \dots ; \end{aligned} \quad (12.13)$$

после интегрирования уравнения (12.11) получим

$$-\gamma + \lambda \left( \frac{\Gamma}{\pi W_\infty} - \gamma \right) = 0, \quad (12.14)$$

или

$$\gamma = \frac{\lambda \Gamma}{(1 + \lambda) \pi W_\infty}. \quad (12.15)$$

Итак, из соотношения (12.11) следует, что величина  $\gamma$  должна быть действительной.

Интересно вычислить циркуляцию  $\Gamma'$  второго течения, определяемого комплексной скоростью  $Q'$ . Интегрируя по окружности очень большого радиуса, получим

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \oint \frac{dF'}{dZ} dZ = \oint \frac{dF}{h(Z)} = W_\infty \oint \frac{dG}{h(Z)} = \\ &= -i W_\infty \oint \left( \frac{\Gamma}{2\pi W_\infty} - \gamma \right) \frac{dZ}{Z} = \Gamma \left( 1 - \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \right) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \Gamma = \sqrt{1 - M_\infty^2} \Gamma. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Отметим теперь, что функция  $h(Z)$  должна удовлетворять дополнительному условию, которое обеспечивает взаимную однозначность отображения (12.6); для этого необходимо, чтобы детерминант Якоби, определяемый ниже, был отличен от нуля:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} = \text{Im} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y} \right) \neq 0, \quad (12.17)$$

символ  $\text{Im}$  обозначает мнимую часть рассматриваемого выражения.

Из формулы (12.6)

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial X} = \overline{h(Z)} - \lambda \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 \frac{1}{h(Z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial Y} = i \left[ h(Z) + \lambda \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 \frac{1}{h(Z)} \right]; \quad (12.18)$$

очевидно, что если ввести полученный результат в условие (12.17) и принять во внимание (12.10), то это условие может быть выражено следующим образом:

$$\text{Im} \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y} = |h(Z)|^2 \left\{ 1 - \lambda^2 \left| \frac{1}{h(Z)} \frac{dG}{dZ} \right|^4 \right\} \neq 0. \quad (12.19)$$

Формула соответствия (12.7) позволяет определить условия сжимаемого течения вокруг контура  $c$  в физической плоскости  $z$ , помещенного в поток, имеющий скорость  $w_\infty$ , исходя от известного несжимаемого течения вокруг контура  $C$  на вспомогательной плоскости  $Z$ ; при этом контур  $C$  должен быть помещен в поток, имеющий скорость  $W_\infty = (1 - \lambda) w_\infty$ .

12.1.1. Соответствие в случае круга. Предположим, что контур  $C$  выводится из контура круга  $K$  радиуса  $a$  при помощи аналитической функции

$$Z = Z(\zeta); \quad (12.20)$$

при этих условиях соотношение (12.7) принимает вид

$$z = \int h(\zeta) \frac{dZ}{d\zeta} d\zeta - \lambda \int \left( \frac{dG}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dZ} \frac{d\zeta}{h(\zeta)}. \quad (12.21)$$

Переходя к определению течения около круга (фиг. 12.1), предположим, что скорость свободного потока образует угол  $\alpha$  с осью нулевой подъемной силы, которую мы примем за ось  $OX'$ , соответственно за ось  $O\xi'$ . Тогда потенциал, соответствующий скорости, равной единице, будет

$$G(\zeta) = -\left( \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi W_\infty} \ln \zeta, \quad (12.22)$$

и конформное преобразование (12.20) может быть записано следующим образом:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \left( 1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\zeta} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\zeta} \right) \dots \left( 1 - \frac{\lambda_n}{\zeta} \right), \quad (12.23)$$

где, очевидно, член, содержащий множитель  $\frac{1}{\zeta}$  в первой степени, должен быть равен нулю, чтобы профиль был замкнутым; отсюда

$$\sum_1^n \lambda_n = ae^{i\alpha}. \quad (12.24)$$

Задний конец  $B'$  профиля должен соответствовать точке  $B$  круга, в которой скорость равна нулю, при данном угле  $\alpha$ , связанном с циркуляцией  $\Gamma$  формулой Жуковского

$$\Gamma = 4\pi a W_\infty \sin \alpha \approx 4\pi a W_\infty \alpha. \quad (12.25)$$

Так как осью нулевой подъемной силы, или первой осью крыла, будет прямая  $BOI$ , то угол атаки, образуемый скоростью с этой осью, обозначается также через  $\alpha$  (фиг. 12.1).

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\zeta} &= -\left( 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi W_\infty} \frac{1}{\zeta} = -\left( 1 + \frac{2ia \sin \alpha}{\zeta} - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) = \\ &= -\left( 1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta} \right) \left( 1 - \frac{ae^{-i\alpha}}{\zeta} \right) = -\frac{(\zeta + ae^{i\alpha})(\zeta - ae^{-i\alpha})}{\zeta^2}; \end{aligned} \quad (12.26)$$

в этом выражении точки нулевой скорости на круге, а именно  $B$  и  $A$ , представлены явно; отсюда вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{dZ} \frac{1}{h(\zeta)} &= \frac{\left(1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta}\right)^2 \left(1 - \frac{ae^{-i\alpha}}{\zeta}\right)^2}{\left(1 + \frac{i\gamma}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\zeta}\right)} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{ae^{-i\alpha}}{\zeta}\right)^2}{\left(1 + \frac{i\gamma}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\zeta}\right)} = \\ &= \frac{(\zeta + ae^{i\alpha})(\zeta - ae^{-i\alpha})^2}{\left(1 + \frac{i\gamma}{\zeta}\right) (\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3) \left(1 - \frac{\lambda_4}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\zeta}\right)}, \end{aligned} \quad (12.27)$$

где  $\gamma$  имеет то же значение, что и выше:

$$\gamma = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{\Gamma}{\pi W_\infty} = \frac{4\lambda a \sin \alpha}{1 + \lambda}, \quad (12.28)$$

и где для упрощения вычислений взяты только два члена из разложения функции  $h(\zeta)$ ,

$$h(\zeta) = 1 + \frac{i\gamma}{\zeta}. \quad (12.29)$$

Форма, в которой выражено соотношение (12.27), может быть использована для эффективного решения задач при рассмотрении конкретных случаев, встречающихся в практике.

Очевидно, что если  $\zeta$  будет стремиться к бесконечности, то соотношение (12.11) автоматически удовлетворяется.

С целью упрощения, но без ущерба для общности задачи рассмотрим только три корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  уравнения (12.23); беря сопряженную величину для выражения (12.27), запишем формулу соответствия (12.21) в дифференциальной форме:

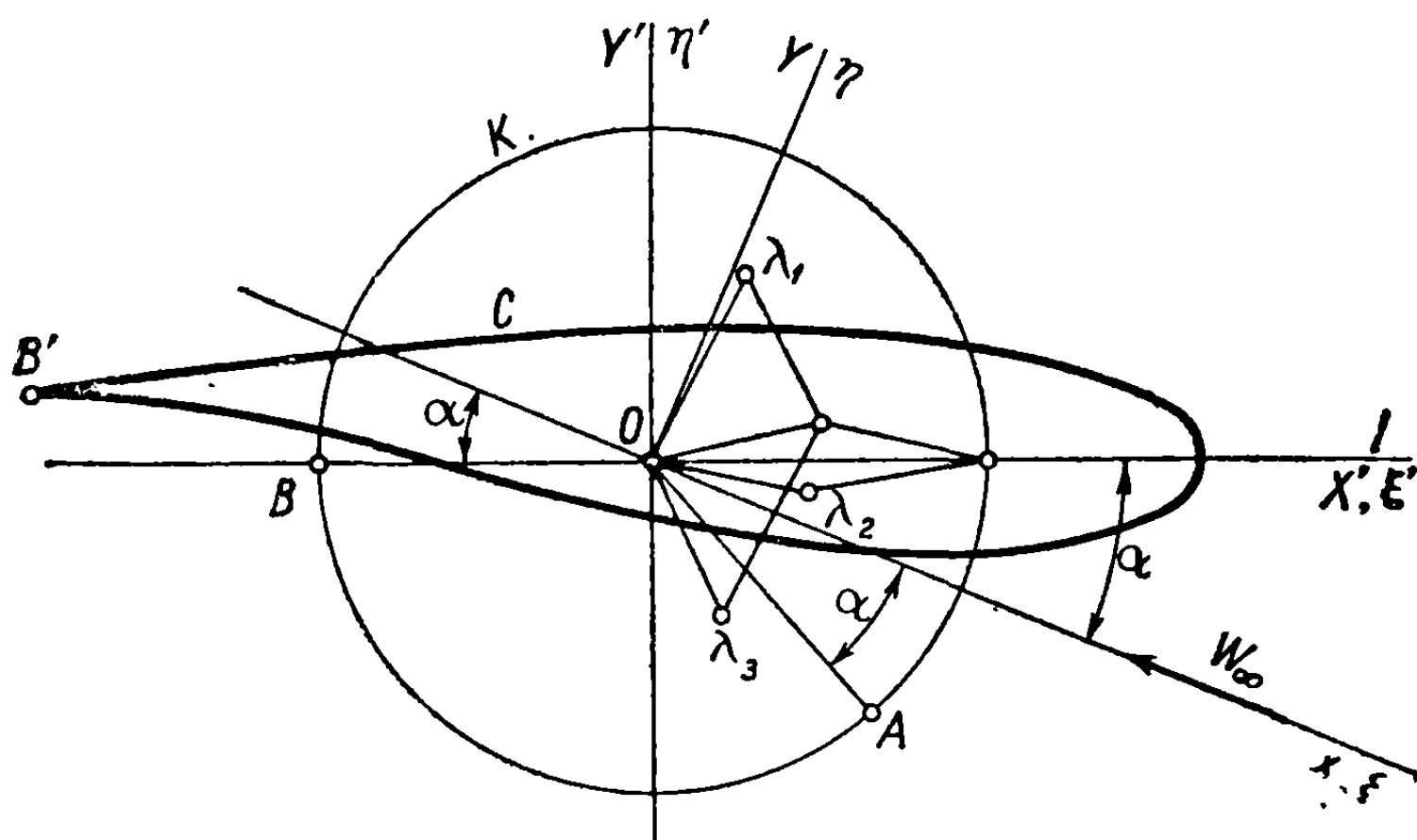
$$dz = dZ + \frac{i\gamma}{\zeta} dZ - \lambda \frac{(\bar{\zeta} + ae^{-i\alpha})(\bar{\zeta} - ae^{i\alpha})^2 d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_1)(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_2)(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_3) \left(1 - \frac{i\gamma}{\bar{\zeta}}\right)}. \quad (12.30)$$

Так как значение  $\gamma$  очень мало и пропорционально  $\lambda \sin \alpha \approx \frac{1}{4} M_\infty^2 \alpha$ , то в разложении последнего члена правой части уравнения (12.30) слагаемые, содержащие множитель  $\gamma$ , будут иметь порядок  $\lambda^2 \sin \alpha \approx \frac{1}{16} M_\infty^4 \alpha$ ; ими можно пренебречь, так как  $\alpha$  очень мало, и члены, содержащие  $M_\infty^4$ , будут более высокими по порядку, чем члены, содержащие  $M_\infty^2$ . Поэтому вместо

уравнения (12.28) с целью упрощения может быть принято соотношение, определяющее  $\gamma$ :

$$\gamma = 4\lambda a \sin \alpha; \quad (12.21)$$

при этом условие (12.11) будет удовлетворено.



Фиг. 12. 1

Наконец, применяя указанные упрощения и интегрируя соотношение (12.30), получим формулу соответствия

$$z = Z + i\gamma \int \frac{dZ}{\zeta} - \lambda \int \frac{(\bar{\zeta} + ae^{-i\alpha})(\bar{\zeta} - ae^{i\alpha})^2 d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_1)(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_2)(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_3)}, \quad (12.32)$$

которая полезна для практического решения задачи о течении с циркуляцией.

## 12.2. Построение профилей в физической плоскости, соответствующих данному профилю на вспомогательной плоскости

Для иллюстрации применения установленной выше формулы соответствия дадим несколько примеров построения аэродинамических профилей в физической плоскости сжимаемого течения, исходя от известных профилей в соответствующей плоскости несжимаемого течения.

Без потери общности и с целью упрощения рассмотрим обычный профиль, определяемый выражением (12.23), причем ограничимся четырьмя множителями; отсюда выводим

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \left(1 + \frac{ae^{i\alpha}}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\zeta} + \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1}{\zeta^2} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\zeta^3}\right), \quad (12.33)$$

$$Z = \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \frac{q_3}{\zeta^3},$$

где коэффициенты даются соотношениями:

$$\begin{aligned} q_1 &= a^2 e^{2i\alpha} - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1); \\ q_2 &= -\frac{1}{2} [a e^{i\alpha} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]; \\ q_3 &= \frac{1}{3} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Приведем разложение на элементарные дроби

$$\frac{(\zeta + a e^{i\alpha})(\zeta - a e^{-i\alpha})^2}{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3)} \equiv 1 + \frac{A_1}{\zeta - \lambda_1} + \frac{A_2}{\zeta - \lambda_2} + \frac{A_3}{\zeta - \lambda_3}, \quad (12.35)$$

где коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  находятся из уравнений, получаемых элементарными операциями:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 4ia \sin \alpha, \\ A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + A_3 \lambda_3 &= -a^2 (4 - 2e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}) - \\ &- (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \approx -a^2 e^{-2i\alpha} - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1), \\ A_1 \lambda_2 \lambda_3 + A_2 \lambda_3 \lambda_1 + A_3 \lambda_1 \lambda_2 &= a^3 e^{-i\alpha} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \quad (12.36)$$

При этих условиях формула соответствия примет вид

$$\begin{aligned} z &= Z + i\gamma \ln \zeta + i\gamma \left( \frac{q_1}{2\zeta^2} + \frac{2}{3} \frac{q_2}{\zeta^3} + \frac{3}{4} \frac{q_3}{\zeta^4} \right) - \\ &- \lambda [\bar{\zeta} + \bar{A}_1 \ln(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_1) + \bar{A}_2 \ln(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_2) + \bar{A}_3 \ln(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_3)]. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Так как на круге

$$\bar{\zeta} = \frac{a^2}{\zeta}, \quad (12.38)$$

то

$$\ln(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_n) = \ln \bar{\zeta} \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}_n}{\bar{\zeta}} \right) = \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}_n \zeta}{a^2} \right) - \ln \zeta + \ln a^2; \quad (12.39)$$

подставляя этот результат в уравнение (12.37) и замечая, что многозначные члены погашают друг друга, получим формулу соответствия между двумя профилями с точностью до постоянной:

$$\begin{aligned} z &= Z + i\gamma \left( \frac{q_1}{2\zeta^2} + \frac{2}{3} \frac{q_2}{\zeta^3} + \frac{3}{4} \frac{q_3}{\zeta^4} \right) - \lambda \left[ \frac{a^2}{\zeta} + \right. \\ &\left. + \bar{A}_1 \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{a^2} \zeta \right) + \bar{A}_2 \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}_2}{a^2} \zeta \right) + \bar{A}_3 \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}_3}{a^2} \zeta \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Если циркуляция равна нулю, то  $\alpha = 0$  и, следовательно,  $\gamma = 0$ , что приводит к течению без циркуляции, которое было рассмотрено ранее

в более простом случае двоякосимметричных препятствий (эллипс и т. п.). Задача для симметричных профилей также не сложна, и хотя вычисления будут более трудоемкими, они не представят особых затруднений.

В случае течения с циркуляцией, который является наиболее интересным, величина  $\gamma$  играет особую роль.

Если разложить логарифмические члены, то формула соответствия может быть записана в виде

$$z = Z + i\gamma \left( \frac{q_1}{2\zeta^2} + \frac{2}{3} \frac{q_2}{\zeta^3} + \frac{3}{4} \frac{q_3}{\zeta^4} \right) - \lambda \left[ \frac{a^2}{\zeta} - \sum_1^n \frac{\overline{A_1 \lambda_1^n} + \overline{A_2 \lambda_2^n} + \overline{A_3 \lambda_3^n}}{na^n} \cdot \frac{\zeta^n}{a^n} \right], \quad (12.41)$$

причем число  $n$  подбирается таким образом, чтобы членом

$$\frac{\overline{A_1 \lambda_1^n} + \overline{A_2 \lambda_2^n} + \overline{A_3 \lambda_3^n}}{na^n}$$

можно было пренебречь. Для некоторых случаев применения, как будет видно, удобнее перейти к плоскости  $\zeta'$ , соответственно  $Z'$  (фиг. 12.1). Заменяя  $\zeta$ ,  $Z$  и  $z$  соответственно на

$$\zeta = \zeta' e^{i\alpha}, \quad Z = Z' e^{i\alpha}, \quad z = z' e^{i\alpha}, \quad (12.42)$$

будем иметь

$$Z' = \zeta' + \frac{q'_1}{\zeta'} + \frac{q'_2}{\zeta'^2} + \frac{q'_3}{\zeta'^3}, \quad (12.43)$$

причем должны учитываться соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda'_1 e^{i\alpha}, & \lambda_2 &= \lambda'_2 e^{i\alpha}, & \lambda_3 &= \lambda'_3 e^{i\alpha}; \\ q_1 &= q'_1 e^{2i\alpha}, & q_2 &= q'_2 e^{3i\alpha}, & q_3 &= q'_3 e^{4i\alpha}; \\ A_1 &= A'_1 e^{i\alpha}, & A_2 &= A'_2 e^{i\alpha}, & A_3 &= A'_3 e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (12.44)$$

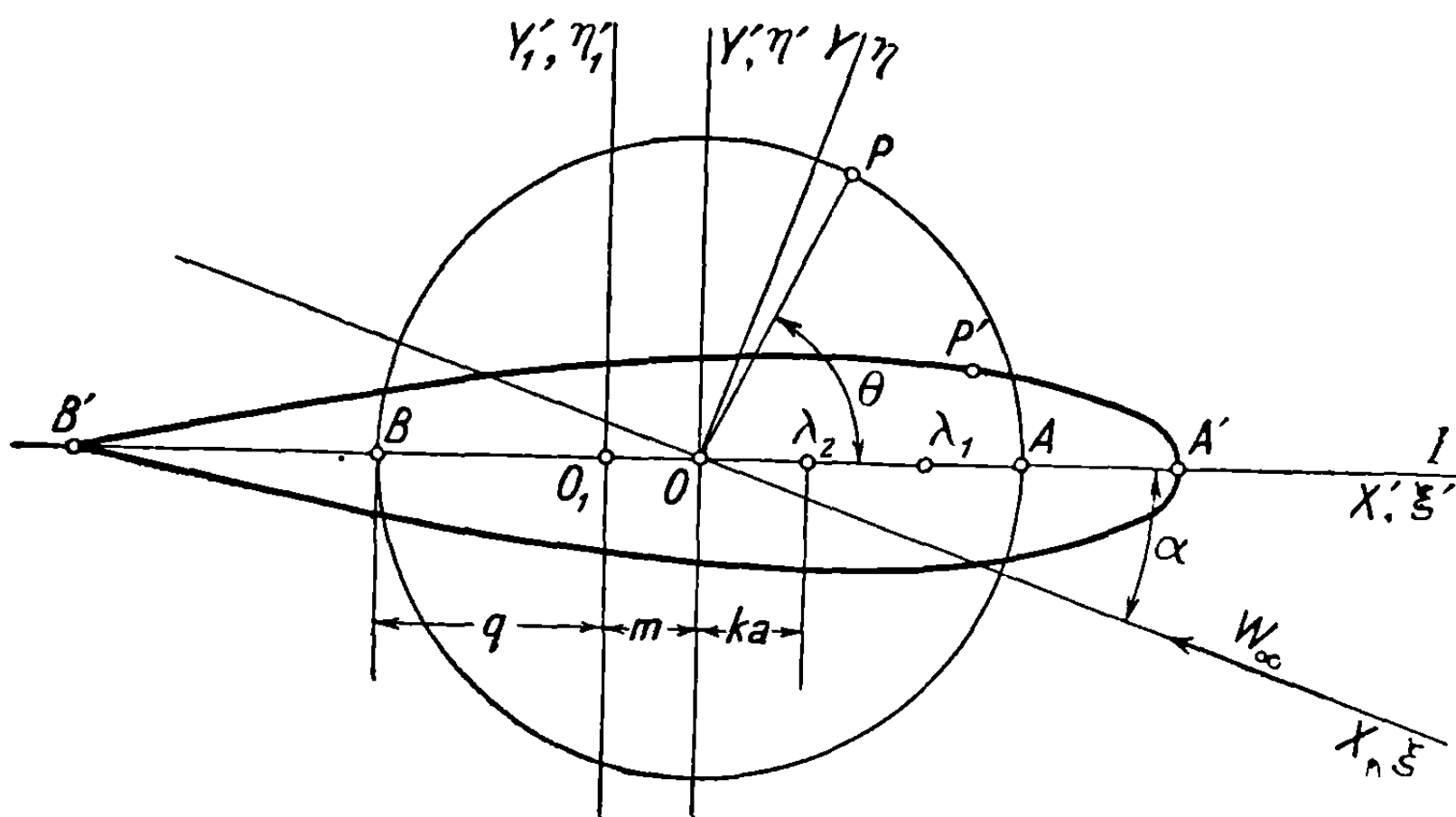
При этих условиях получим на круге

$$\begin{aligned} z' &= Z' + i\gamma e^{-i\alpha} \left( \frac{q'_1}{2\zeta'^2} + \frac{2}{3} \frac{q'_2}{\zeta'^3} + \frac{3}{4} \frac{q'_3}{\zeta'^4} \right) - \\ &\quad - \lambda e^{-2i\alpha} \frac{a^2}{\zeta'} - \lambda \sum_1^3 \overline{A_n e^{i\alpha}} \ln \left( 1 - \frac{\overline{\lambda'_n} \zeta'}{a^2} \right) \approx \\ &\quad \approx Z' + i\gamma \left( \frac{a}{2\zeta'} + \frac{q'_1}{2\zeta'^2} + \frac{2}{3} \frac{q'_2}{\zeta'^3} + \frac{3}{4} \frac{q'_3}{\zeta'^4} \right) - \\ &\quad - \lambda \left[ \frac{a^2}{\zeta'} + \sum_1^3 \overline{A_n e^{2i\alpha}} \ln \left( 1 - \frac{\overline{\lambda'_n} \zeta'}{a^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.45)$$



12.2.1. Приложения к двояковыпуклым симметричным профилям Жуковского. Принимая коэффициент к изменяющимся между 0,075 и 0,30 для практических случаев, можно определить характеристики двояковыпуклого симметричного профиля следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 - k)ae^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = kae^{i\alpha}, \quad \lambda_3 = 0 : \\ q_1 &= a^2e^{2i\alpha} - k(1 - k)a^2e^{2i\alpha} = (1 - k + k^2)a^2e^{2i\alpha}; \\ q_2 &= -\frac{1}{2}a^3k(1 - k)e^{3i\alpha}; \\ Z &= \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2}. \end{aligned} \quad (12.46)$$



Фиг. 12. 2

Применяя уравнения (12.36), получим

$$\begin{aligned} \frac{A_1 + A_2 + A_3}{a} &= 4i\alpha, \\ \frac{A_3}{a} &= \frac{e^{-3i\alpha}}{k(1 - k)}, \\ \frac{A_1 + A_2}{a} &= 4i\alpha - \frac{e^{-3i\alpha}}{k(1 - k)}, \\ \frac{A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2}{a^2} &\approx -e^{2i\alpha} - k(1 - k)e^{2i\alpha}; \end{aligned} \quad (12.47)$$

после простых операций, пренебрегая членами второго порядка, имеем

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{a} &= \frac{2k^2}{1 - 2k} - i \frac{8k\alpha}{1 - 2k}, \\ \frac{A_2}{a} &= -\frac{1}{k(1 - k)} + i \frac{3\alpha}{k(1 - k)}. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Отсюда

$$\frac{A_1 e^{i\alpha}}{a} = \frac{A'_1 e^{2i\alpha}}{a} = \frac{2k^2}{1-2k} e^{i\alpha} - i \frac{8ka}{1-2k} e^{i\alpha},$$

$$\frac{\overline{V_1 e^{i\alpha}}}{a} \approx i \frac{8ka}{1-2k} + \frac{2k^2}{1-2k} = \frac{\overline{A'_1 e^{2i\alpha}}}{a},$$

$$\frac{\overline{A_2 e^{i\alpha}}}{a} = \frac{A'_2 e^{2i\alpha}}{a} = -\frac{e^{i\alpha}}{k(1-k)} + i \frac{3ae^{i\alpha}}{k(1-k)} \approx -\frac{1}{k(1-k)} + i \frac{2a}{k(1-k)},$$
(12.49)

$$\frac{\overline{A_2 e^{i\alpha}}}{a} = \frac{\overline{A'_2 e^{2i\alpha}}}{a} = -\frac{1}{k(1-k)} - i \frac{2a}{k(1-k)} = -\frac{1}{k(1-k)} (1 + 2ia).$$

Так же имеем (полагая  $\zeta' = ae^{i\theta'}$ )

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda'_1 \zeta'}{a^2}\right) = \frac{1}{2} \ln[1 - 2(1-k)\cos\theta' + (1-k)^2] - i \operatorname{arctg} \left[ \frac{(1-k)\sin\theta'}{1 - (1-k)\cos\theta'} \right],$$
(12.50)

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda'_2 \zeta'}{a^2}\right) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2k\cos\theta' + k^2) - i \operatorname{arctg} \left[ \frac{k\sin\theta'}{1 - k\cos\theta'} \right].$$

Подставляя результат в выражение (12.45) и полагая

$$\zeta' = ae^{i\theta'},$$
(12.51)

устанавливаем зависимость координат  $z'$  реального профиля от параметра  $\theta'$ .

Коэффициент  $k$  есть функция максимальной относительной толщины профиля.

Для профиля Жуковского, представляемого на плоскости  $Z'_1$  (или  $Z'$ , см. фиг. 12.2) формулами

$$Z'_1 = \zeta'_1 + \frac{q^2}{\zeta'_1},$$

$$Z' = \zeta' + \frac{q^2}{\zeta' + m} \approx \zeta' + \frac{q^2}{\zeta'} - \frac{q^2 m}{\zeta'^2}$$
(12.52)

(причем  $\zeta' = (q + m)e^{i\theta}$ ,  $\zeta'_1 = \zeta' + m$ ), максимальная относительная толщина  $\varepsilon_m$  определяется соотношениями [4]

$$\frac{m}{q} = \frac{0,77\varepsilon_m}{1 - 0,6\varepsilon_m},$$

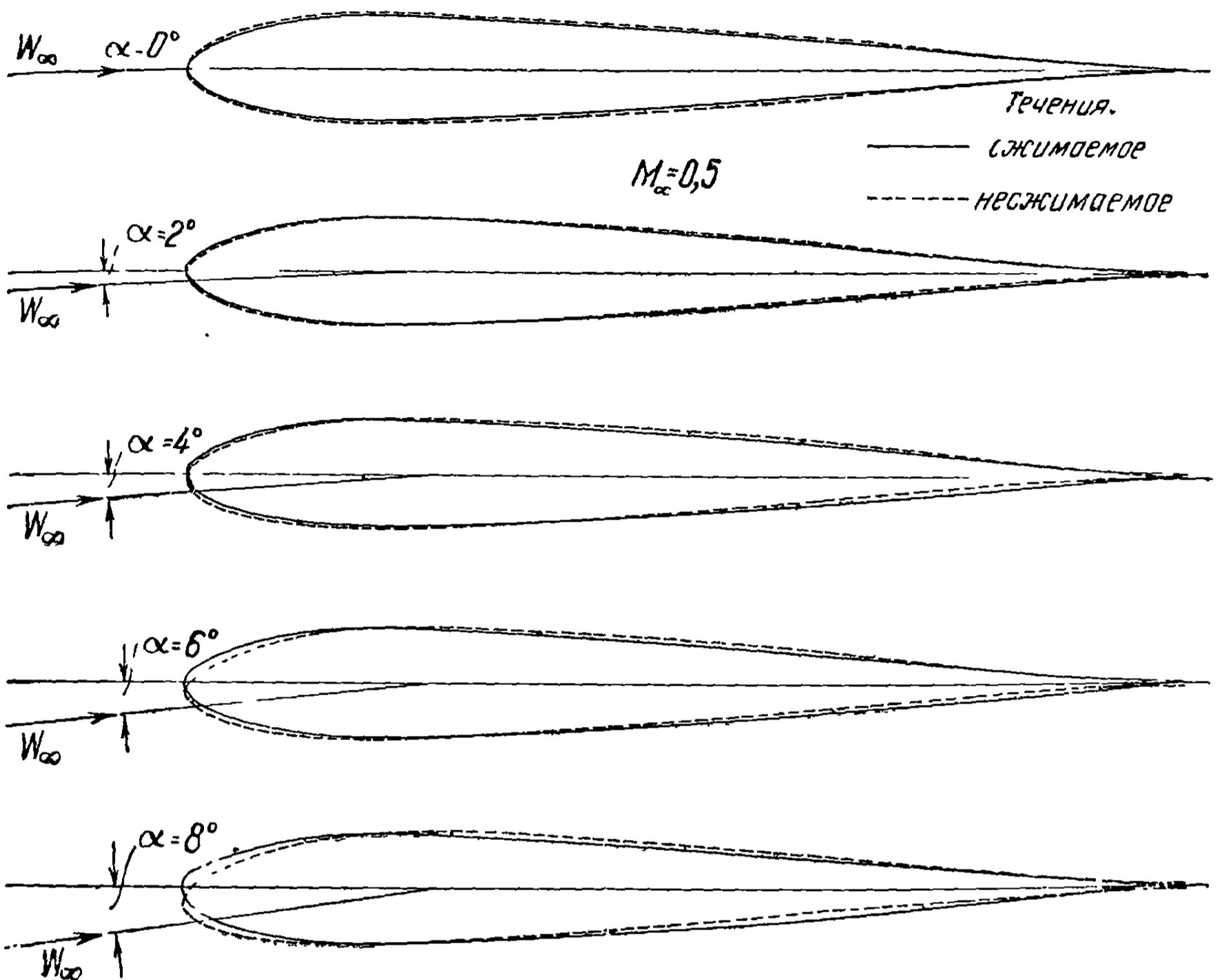
$$\varepsilon_m = 1,3 \frac{m}{q} \left(1 - 0,75 \frac{m}{q}\right).$$
(12.53)

Сравнивая вторую формулу (12.52) с уравнением (12.43), выводим

$$q^2 = a^2(1 - k + k^2),$$

$$q^2 m = \frac{1}{2} a^3 k (1 - k),$$

$$\frac{m}{q} \approx \frac{k}{2 - k}, \quad (12.54)$$



Фиг. 12. 3 а

что дает в конечном итоге соответствующие зависимости между коэффициентом  $k$  и максимальной относительной толщиной:

$$\frac{k}{2 - k} = \frac{0,77 \epsilon_m}{1 - 0,6 \epsilon_m},$$

(12.55)

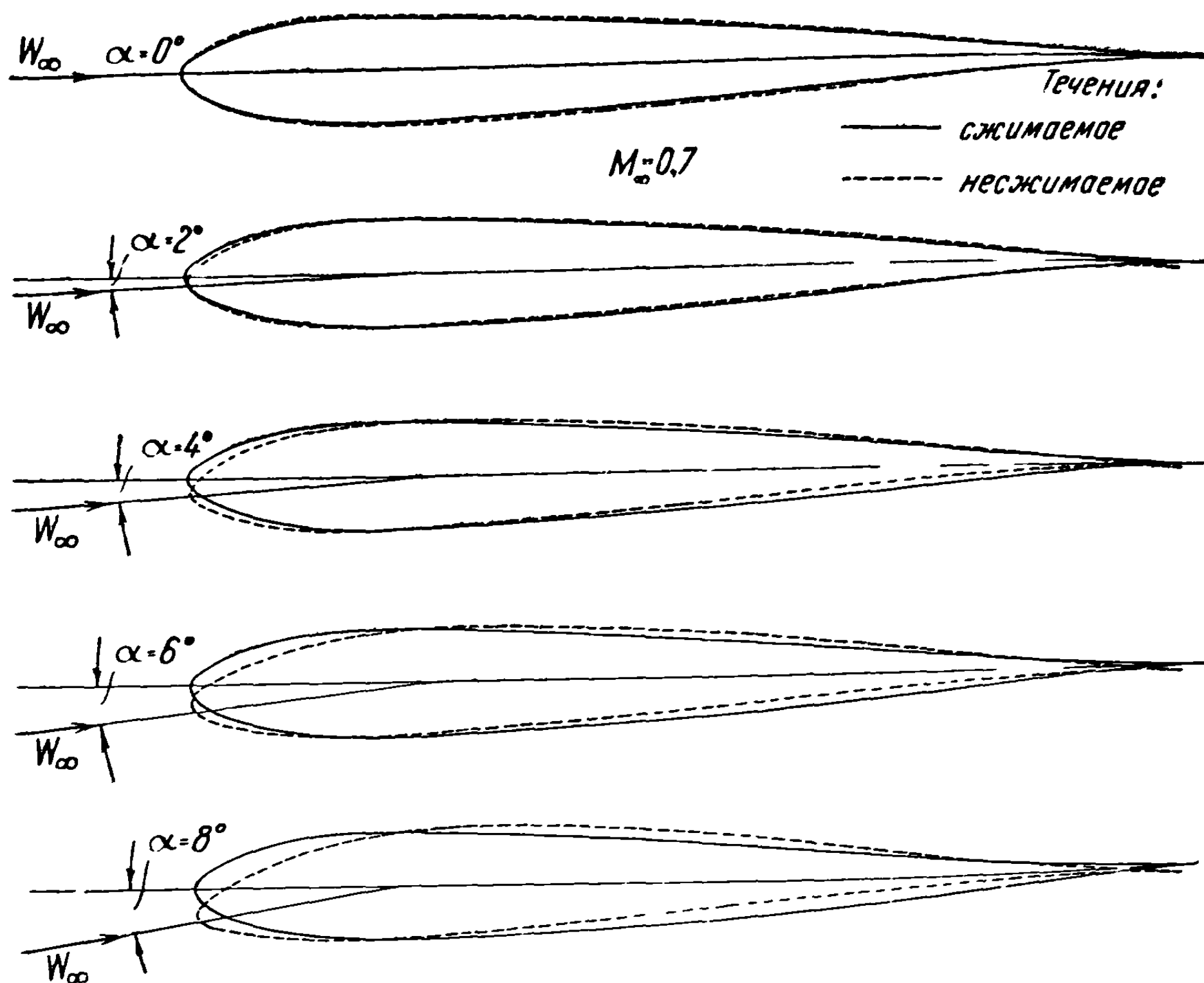
$$\epsilon_m = 1,3 \frac{k}{2 - k} \left( 1 - 0,75 \frac{k}{2 - k} \right).$$

Примеры построения профилей. Ниже приведены некоторые виды профилей, полученных для различных значений  $M_\infty$ , толщины и угла атаки; они дают возможность обнаружить изменение формы реального профиля по сравнению с двояковыпуклым симметричным профилем соответствия<sup>1</sup>.

Так, рассматривая заданный двояковыпуклый симметричный профиль в плоскости несжимаемого течения, с максимальной относительной толщиной  $\epsilon_m = 0,135$ , соответ-

<sup>1</sup> Эти профили вычислены и построены в соответствии с изложенными выше методами V. Мапеа.

ствующей значению  $k=0,2$ , получим различные серии реальных профилей, изменение которых в зависимости от угла атаки представлено для двух значений числа Маха.  $M_\infty=0,5$  (фиг. 12.3а) и  $0,7$  (фиг. 12.3б). Для большей ясности профили в физической и вспомогательной плоскостях отнесены к одной и той же хорде.



Фиг. 12. 3 б

Нет необходимости вычерчивать другие профили при  $M_\infty > 0,7$ , так как для форм профилей, получающихся в физической плоскости, критическое число Маха будет, несомненно, превзойдено. Рассматривая соответствующие точки в двух плоскостях, можно построить диаграмму для скоростей в физической плоскости.

### 12. 3. Построение профиля соответствия для заданного профиля в плоскости реального сжимаемого течения

Прямую задачу в общем случае трудно решить, поэтому будем искать приближенные методы для ее решения. Заметим, что ординаты реального профиля в плоскости сжимаемого течения можно получить, исходя из заданного профиля соответствия путем малых изменений того же порядка, как величины  $\gamma$  и  $\lambda$ . Если, возвращаясь к плоскости несжимаемого течения, применить к этому новому профилю тот же метод, то изменения первого порядка будут равны указанным выше, к которым должны быть добавлены дополнительные изменения, соответствующие предыдущим искажениям профиля. Этими приращениями порядка  $\gamma^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\gamma\lambda$  можно в первом приближении пренебречь, так как они будут второго порядка.

В этом случае, исходя из заданного профиля в физической плоскости, можно вычислить рассмотренные изменения, идя обратным путем и полу-

чая таким образом соответствующий профиль в плоскости несжимаемого течения.

Если соотношение соответствия (12.45) применить к этому новому профилю, то будет найден действительный профиль в плоскости сжимаемого течения, с точностью до указанных выше членов второго порядка.

Пусть рассматривается заданный профиль в физической плоскости  $z'$ , определяемый преобразующей функцией (12.43)

$$z' = \zeta' + \frac{q'_1}{\zeta'} + \frac{q'_2}{\zeta'^2} + \frac{q'_3}{\zeta'^3};$$

на основе описанного выше приближения для соответствующего профиля в плоскости несжимаемого течения  $Z'$  можно записать, в согласии с уравнением (12.45):

$$\begin{aligned} Z' - z' = & -i\gamma \left( \frac{a}{2\zeta'} + \frac{q'_1}{2\zeta'^2} + \frac{2q'_2}{3\zeta'^3} + \frac{3q'_3}{4\zeta'^4} \right) + \\ & + \lambda \frac{a^2}{\zeta'} + \lambda \sum_1^3 \overline{A_n e^{2ia}} \ln \left( 1 - \frac{\overline{\lambda_n \zeta'}}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (12.56)$$

Задача, однако, не решается этим способом; но если можно найти конформное отображение области  $Z'$ , внешней к профилю соответствия, на область  $\zeta'$ , внешнюю по отношению к кругу, то течение вокруг профиля соответствия может быть определено, а вслед за этим найдено и действительное течение.

Так как преобразующая функция голоморфна вне круга, то, предполагая, что бесконечно удаленные точки обеих плоскостей совпадают, можно записать разложение

$$\frac{Z' - z'}{a} = \sum_1^m \frac{Q_m}{\zeta'^m} - i\gamma \left( \frac{a}{2\zeta'} + \frac{q'_1}{2\zeta'^2} + \frac{2q'_2}{3\zeta'^3} + \frac{3}{4} \frac{q'_3}{\zeta'^4} \right) + \lambda \frac{a^2}{\zeta'}, \quad (12.57)$$

где

$$Q_m = a^m (a_m + ib_m). \quad (12.58)$$

Это разложение будет совместимо с уравнением (12.56), если найти соответствующие коэффициенты  $Q_m$  для последнего логарифмического члена. Поэтому, заменяя  $\zeta'$  через  $\zeta' = ae^{i\theta'}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_1^m \frac{Q_m}{\zeta'^m} = & \sum_1^m (a_m \cos m\theta' + b_m \sin m\theta') + \\ & + i \sum_1^m (b_m \cos m\theta' - a_m \sin m\theta'). \end{aligned} \quad (12.59)$$

Полагая

$$\overline{C}_n = \lambda \overline{A_n e^{2ia}} \quad (12.60)$$

и применяя уравнение (12.38), получим разложение

$$\bar{C}_n \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}'_n \zeta'}{a^2} \right) = \bar{C}_n \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}'_n}{\zeta'} \right) = -\bar{C}_n \sum_1^m \left( \frac{\bar{\lambda}'_n}{\zeta'} \right)^m \frac{1}{m}; \quad (12.61)$$

любой член в этом выражении может быть записан в виде

$$\begin{aligned} -\bar{C}_n \frac{\bar{\lambda}'_n{}^m}{m} \frac{1}{\zeta'^m} &= -\bar{C}_n \frac{\bar{\lambda}'_n{}^m}{m a^m} e^{im\theta'} = -(q_{mn} - ih_{mn}) \times \\ &\times (\cos m\theta' + i \sin m\theta') = -(q_{mn} \cos m\theta' + h_{mn} \sin m\theta') + \\ &+ i (h_{mn} \cos m\theta' - q_{mn} \sin m\theta'). \end{aligned} \quad (12.62)$$

Действительная часть соответствует изменению абсцисс профиля, мнимая — изменению ординат. Имея в виду, что ординаты профиля изменяются очень постепенно вдоль хорды, не будет существенной ошибки, если пренебречь малыми приращениями абсцисс, определяемыми последним членом в разложении (12.56), и принимать во внимание только возрастание ординат. Тогда мнимые члены в разложении (12.59) можно приравнять соответствующим членам в мнимой части разложения для логарифмических слагаемых.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} a a_m &= \sum_{n=1}^3 q_{mn}, \\ a b_m &= \sum_{n=1}^3 h_{mn}, \\ Q_m &= a^{m-1} \sum_{n=1}^3 (q_{mn} + i h_{mn}), \end{aligned} \quad (12.63)$$

отсюда, в согласии с уравнением (12.61), имеем

$$\begin{aligned} a \sum_1^m \frac{Q_m}{\zeta'^m} &\approx \sum_{n=1}^3 \sum_1^m \frac{C_n \bar{\lambda}'_n{}^m}{m} \frac{1}{\zeta'^m} = -\sum_{n=1}^3 C_n \ln \left( 1 - \frac{\bar{\lambda}'_n}{\zeta'} \right) = \\ &= -\lambda \left[ A'_1 e^{2i\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\lambda'_1}{\zeta'} \right) + A'_2 e^{2i\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\lambda'_2}{\zeta'} \right) + A'_3 e^{2i\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\lambda'_3}{\zeta'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Действительной частью выражения (12.62) пренебрегаем и ошибку в ординатах профиля рассматриваем как очень малую. Полная длина профиля должна оставаться равной действительной длине, как это вытекает из (12.56). На передней и задней кромках ( $\theta' = 0$  и  $\theta' = \pi$ ) должны быть соответственно добавлены члены

$$2 \sum_{n=1}^3 \sum_1^m q_{mn},$$

$$2 \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^m (-1)^m q_{mn}.$$

Чтобы восстановить хорду профиля, нужно, следовательно, прибавить величину

$$\Delta c = 2 \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^m (q_{mn} - (-1)^m q_{mn}) = 2 \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^m (1 + (-1)^{m-1}) q_{mn} = 4\delta a. \quad (12.65)$$

Очевидно, что в первом приближении преобразующая функция будет также включать выражение

$$\Delta Z' = \delta \left( \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \right), \quad (12.66)$$

которое в точках на круге принимает вид

$$\Delta X' = 2\delta a \cos \theta'. \quad (12.67)$$

Ординаты профиля не изменяются, а абсциссы исправляются так, что полная длина профиля остается такой же, как это вытекает из соотношения соответствия.

Отображение профиля соответствия, расположенного в плоскости несжимаемого течения, на контур круга радиуса  $a$  будет выполняться с помощью функции

$$Z' = z' - 2i\lambda\alpha \left( \frac{a}{\zeta'} + \frac{q'_1}{\zeta'^2} + \frac{4q'_2}{3\zeta'^3} + \frac{3q'_3}{2\zeta'^4} \right) + \lambda \left[ \frac{a^2}{\zeta'} - \sum_{n=1}^3 A'_n e^{2i\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\lambda'_n}{\zeta'} \right) \right] + \delta \left( \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \right), \quad (12.68)$$

где  $z'$  определяется соотношением (12.43). Нужно заметить, что скорость свободного потока в плоскости  $\zeta'$  отличается от  $W'_\infty$  в плоскости  $Z'$  и равна величине

$$W'_\infty \left| \frac{dZ'}{d\zeta'} \right|_{\zeta' \rightarrow \infty} = W'_\infty (1 + \delta). \quad (12.69)$$

Несжимаемое течение вокруг профиля соответствия теперь полностью определено; скорость на контуре, а отсюда и давление легко подсчитать. С помощью ранее установленных формул можно вывести соответствующие скорость и давление в физической плоскости сжимаемого течения.

**12.3.1. Приложение к двояковыпуклым симметричным профилям.** Если рассматривается двояковыпуклый симметричный профиль, характеристики

которого исследованы выше (см. раздел 12.1.1), то преобразующая функция после применения равенств (12.49) получает вид

$$Z' = \zeta' + \frac{(1-k+k^2)a^2}{\zeta'} - \frac{k(1-k)a^3}{2\zeta'^2} - 2ia\lambda\alpha \left[ \frac{a}{\zeta'} + \frac{(1-k+k^2)a^2}{\zeta'^2} - \frac{2}{3} \frac{k(1-k)a^3}{\zeta'^3} \right] + \lambda a \left[ \frac{a}{\zeta'} - \frac{2k(k-4i\alpha)}{1-2k} \ln \left( 1 - \frac{(1-k)a}{\zeta'} \right) + \right. \quad (12.70)$$

$$\left. + \frac{1-2i\alpha}{k(1-k)} \ln \left( 1 - \frac{ka}{\zeta'} \right) \right] + \delta \left( \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \right);$$

величина  $\delta$  вычислена ниже.

Разумеется, если угол атаки  $\alpha$  отличен от нуля, то профиль перестает быть двояковыпуклым симметричным и становится изогнутым. Если  $\alpha = 0$ , то снова получается случай течения без циркуляции, рассмотренный выше, для которого в качестве примеров служили течения вокруг эллипса или круга.

Используем прямой подход для вычисления величины  $\delta$ . Имеем последовательно

$$4\delta = \frac{\Delta c}{a} = 2\lambda \left\{ \frac{2k^2}{1-2k} [\ln(1-(1-k)) - \ln(1+(1-k))] - \frac{1}{k(1-k)} [\ln(1-k) - \ln(1+k)] \right\} = 2\lambda \left[ \frac{2k^2}{1-2k} \ln \frac{k}{2-k} - \frac{1}{k(1-k)} \ln \frac{1-k}{1+k} \right] \approx 4\lambda \left[ \frac{1}{1-k} + \frac{k^2}{1-2k} \ln \frac{k}{2} \right]; \quad (12.71)$$

отсюда вытекает, что

$$\delta = \lambda \left( \frac{1}{1-k} + \frac{k^2}{1-2k} \ln \frac{k}{2} \right). \quad (12.72)$$

Получающийся в результате профиль имеет свойства, отличающиеся от свойств начального профиля, расположенного в физической плоскости сжимаемого течения, который в рассматриваемом случае является двояковыпуклым симметричным. Действительно, ось нулевой подъемной силы изменяет свою ориентацию, и момент при нулевой подъемной силе будет отличен от нуля.

Чтобы определить угол  $\sigma$ , образуемый осью нулевой подъемной силы с начальным направлением  $O\zeta'$ , которое принимается горизонтальным (как на фиг. 12.2), применим формулы, относящиеся к измененному профилю [4]. С этой целью заметим, что ординаты профиля определяются только мнимыми членами и что из последних только члены, содержащие  $\cos m\theta'$ , имеют влияние на кривизну. Члены, содержащие  $\sin m\theta'$ , определяют толщину профиля и поэтому не принимаются во внимание при вычислении угла атаки, соответствующего нулевой подъемной силе.

Таким образом, разлагая выражение (12.70) в ряд вида

$$\operatorname{Im} \frac{Z' - \zeta'}{a} = \sum_1^m (B_m \cos m\theta' + A_m \sin m\theta') \quad (12.73)$$



и принимая во внимание в мнимой части члены  $B_m \cos m\theta'$ , которые влияют на кривизну и, следовательно, также на ось нулевой подъемной силы, получим

$$2\sigma \cos \theta' + \sum_1^m B_m \cos m\theta' = -2\lambda\alpha \left[ \cos \theta' + (1 - k + k^2) \cos 2\theta' - \frac{2}{3} k(1 - k) \cos 3\theta' \right] - \\ - 2\lambda\alpha \frac{4k}{1 - 2k} \sum_1^m \frac{(1 - k)^m}{m} \cos m\theta' + 2\lambda\alpha \frac{1}{k(1 - k)} \sum_1^m \frac{k^m}{m} \cos m\theta'. \quad (12.74)$$

Производя отождествления соответствующих коэффициентов в обеих частях равенства, определяющие значения  $B_m$ , и применяя формулу для угла при нулевой подъемной силе, установленную в цитированной работе, получим приближенно

$$2\sigma + B_1 = -2\lambda\alpha \left[ 1 + \frac{4k(1 - k)}{1 - 2k} - \frac{1}{1 - k} \right], \quad (12.75)$$

$$B_1 - 2B_2 + 3B_3 \dots - 2\rho B_{2\rho} + (2\rho + 1)B_{2\rho+1} + \dots = 0;$$

отсюда после некоторых элементарных операций имеем

$$2\sigma = 2\lambda\alpha \left[ -1 + 2(1 - k + k^2) + 2k(1 - k) + \frac{4k(k - 1)}{(1 - 2k)(2 - k)} + \frac{1}{1 - k^2} \right] \approx 2\lambda\alpha 2(1 - k + 2k^2). \quad (12.76)$$

Следовательно, наклон оси нулевой подъемной силы заметно возрастает, так что новый полный угол атаки будет

$$\alpha' = \alpha + \sigma \approx [1 + 2\lambda(1 - k + 2k^2)]\alpha. \quad (12.77)$$

Для вычисления момента при нулевой подъемной силе обозначим коэффициент при члене, содержащем  $1/\zeta'$ , через  $q^2 e^{2i\gamma}$ , после чего последовательно получим

$$q^2 e^{2i\gamma} = (1 - k + k^2 + \lambda) a^2 - 2ia^2\lambda + \delta a^2 - \lambda \frac{(1 - 2ia)ka^2}{k(1 - k)} + \\ + \lambda \frac{2k(k - 4ia)(1 - k)a^2}{1 - 2k} = \left( 1 - k + k^2 + \lambda + \delta - \frac{\lambda}{1 - k} + \frac{2\lambda k^2(1 - k)}{1 - 2k} \right) a^2 - \\ - i \left( 2\lambda\alpha - \frac{2\lambda\alpha}{1 - k} + \frac{8\lambda k\alpha(1 - k)}{1 - 2k} \right) a^2 \approx \\ \approx [(1 - k) + i 10\lambda k\alpha] a^2 = (1 - k) a^2 \left( 1 + i \frac{10\lambda k\alpha}{1 - k} \right); \quad (12.78)$$

отсюда

$$q^2 = (1 - k) a^2, \quad (12.79)$$

$$2\gamma \approx \frac{10 \lambda k \alpha}{1 - k}.$$

Повернув систему  $O\xi'\eta'$  (см. фиг. 12.2) на угол  $\gamma$ , увидим, что коэффициент при члене, содержащем  $1/\zeta'_1$  (где  $\zeta'_1$  — комплексная переменная, соответствующая новой плоскости), будет по отношению к новой системе действительным и равным  $q^2$ . Новая ось абсцисс называется второй осью профиля и образует с осью нулевой подъемной силы (или первой осью профиля) угол  $\tau$ , равный разности между  $\sigma$  (см. уравнение 12.76) и  $\gamma$ :

$$\tau = \sigma - \gamma = 2\lambda\alpha \left[ 1 - k + 2k^2 - \frac{2,5k}{1 - k} \right] \approx 2\lambda\alpha(1 - 1,5k). \quad (12.80)$$

Напомним, что коэффициент момента при нулевой подъемной силе  $C_{m0}$  определяется [4] через этот угол:

$$C_{m0} = -4\pi \frac{q^2}{c^2} \sin 2\tau. \quad (12.81)$$

После определения  $q^2$  может быть подсчитана хорда профиля; исходя из уравнения (12.70) и заменяя  $\zeta$  сначала на  $a$ , а затем на  $-a$ , будем иметь

$$\begin{aligned} c = a \left[ 1 + (1 - k + k^2) - \frac{k(1 - k)}{2} + \lambda - \lambda \frac{2k^2}{1 - 2k} \ln k + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{k(1 - k)} \ln(1 - k) + 2\delta \right] - a \left[ 1 + (1 - k + k^2) + \right. \\ \left. + \frac{k(1 - k)}{2} + \lambda + \lambda \frac{2k^2}{1 - 2k} \ln(2 - k) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{k(1 - k)} \ln(1 + k) + 2\delta \right] \approx 4a \left( 1 - \frac{k}{2} + \frac{\lambda}{2} \right); \end{aligned} \quad (12.82)$$

отсюда, производя замену в формуле (12.81), получим

$$C_{m0} \approx -\frac{\pi}{2} \frac{\tau}{1 + \lambda} = -\pi\lambda \frac{1 - 1,5k}{1 + \lambda} \alpha \approx -\pi\lambda(1 - 1,5k - \lambda)\alpha. \quad (12.83)$$

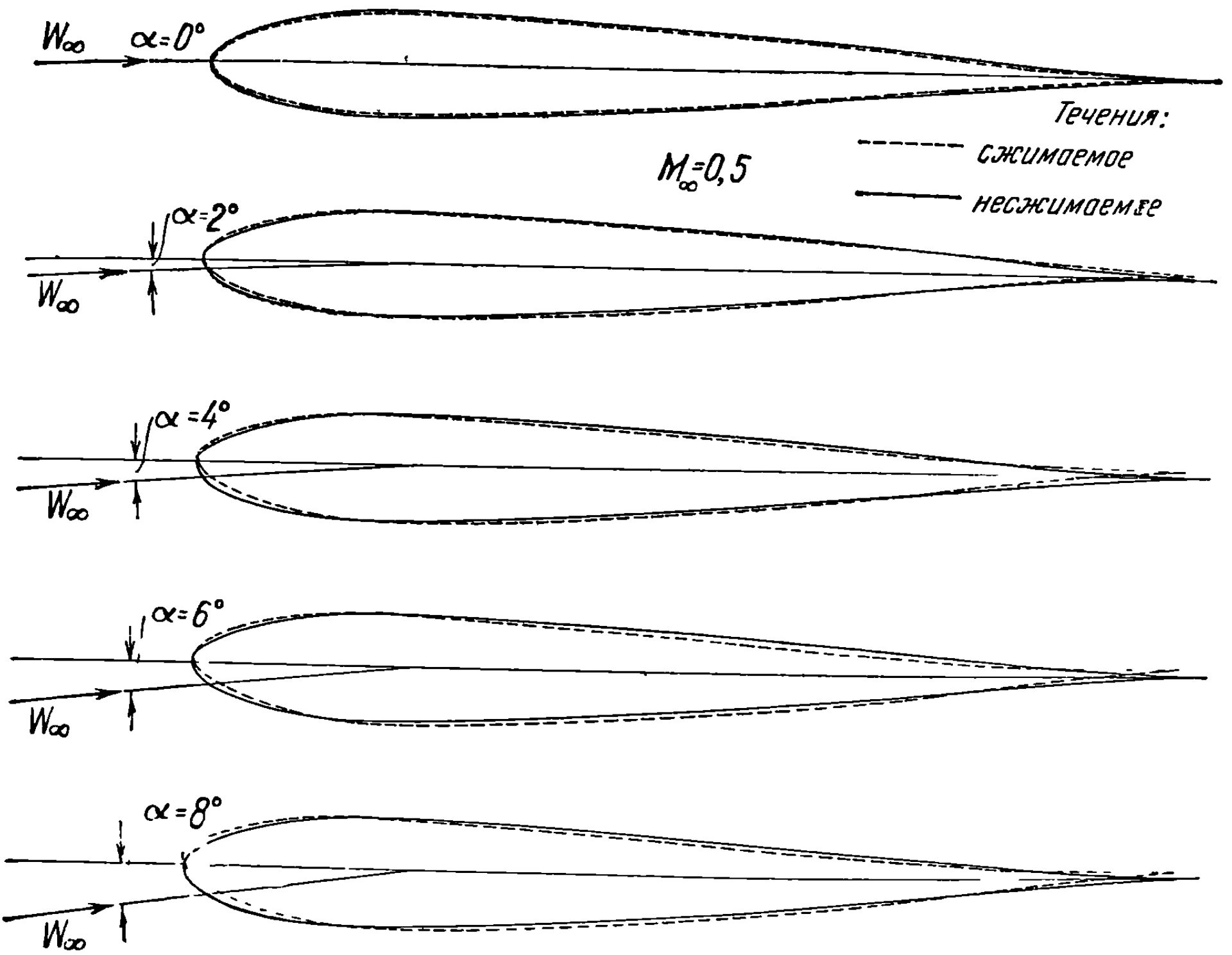
Заметим, что круг радиуса  $a$  в плоскости  $\zeta'$  может быть отображен на круг в плоскости  $\zeta'_1$  с радиусом  $a_1$ :

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= (1 + \delta)\zeta', \\ a_1 &= (1 + \delta)a; \end{aligned} \quad (12.84)$$

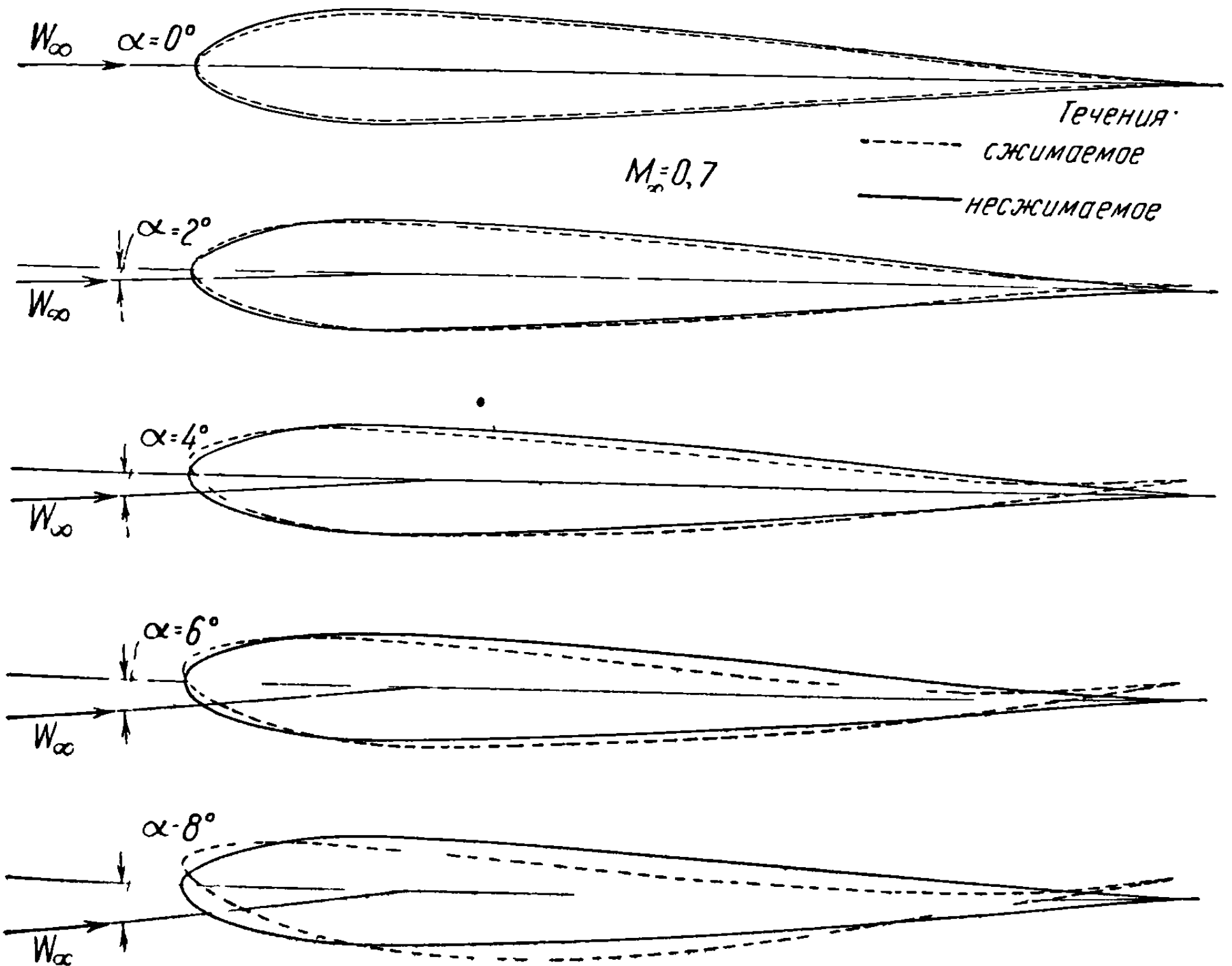
коэффициент при члене, содержащем  $1/\zeta'_1$ , остается неизменным (см. уравнение 12.78), и бесконечно удаленные точки плоскостей  $Z$  и  $\zeta'_1$  совпадают.

В результате полностью определены как аэродинамические характеристики профиля соответствия, так и свойства сжимаемого течения вокруг действительного профиля.

Примеры построения профилей. Исходя из того же двояковыпуклого симметричного профиля ( $k = 0,2$ ,  $\epsilon_m = 0,135$ ), рассматриваемого в физической плоскости,



Фиг. 12. 4 а



Фиг. 12. 4 б

и обращая процесс, получим различные профили соответствия на вспомогательной плоскости несжимаемого течения, в зависимости от угла атаки, для  $M_\infty = 0,5$  (фиг. 12.4 а) и  $0,7$  (фиг. 12.4 б)<sup>1</sup>.

Для вычисления скоростей нужно построить их диаграмму на профилях во вспомогательной плоскости несжимаемого течения. Хотя это довольно трудоемкая работа вследствие сложности преобразующей функции для профиля, необходимо ее выполнить, прежде чем перейти к определению значения реальных скоростей.

### 13. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ. ТРАНСЗВУКОВОЙ РЕЖИМ

Теория дозвуковых течений, изложенная в предыдущих разделах, развивалась постепенно: сначала в рамках линеаризованных уравнений, выведенных на основе предположения о малых возмущениях, а затем путем использования уравнений Чаплыгина для больших изменений скорости и более сложных контуров. Результаты в широких границах подтверждаются экспериментом, вплоть до режима, отвечающего появлению критической скорости в некоторой точке рассматриваемого контура. С появлением этой критической скорости связано понятие *критического* числа Маха  $M_c$  (см. разделы 9.3 и 11.2.1), представляющего число Маха свободного потока, при котором впервые возникает критическая скорость в точке на профиле, где  $M = 1$ .

Ниже сравниваются теоретические результаты с экспериментальными данными в интервале между  $M_\infty = 0$  и  $M'_\infty = M_c$  и показано развитие отмеченного явления при числах  $M_\infty$ , превышающих  $M_c$ .

#### 13.1. Предварительные замечания

В предшествующем анализе дозвукового течения особое внимание было обращено на критическое число Маха  $M_c$  вследствие важной роли, которую оно играет в характеристике потока, отделяя одну форму течения от другой. Так, если скорость потока превышает критическое число Маха, то аэродинамические свойства крыльев совершенно изменяются, переходя от дозвуковых аэродинамических характеристик, при  $M_\infty < M_c$ , к сверхзвуковым, когда все течение вокруг крыла будет сверхзвуковым и  $M_\infty > M'_c$ , где  $M'_c$  соответствует новому критическому числу Маха ( $M'_c > 1$ ), выше которого ни в одной точке крыла скорость не будет ниже скорости звука.

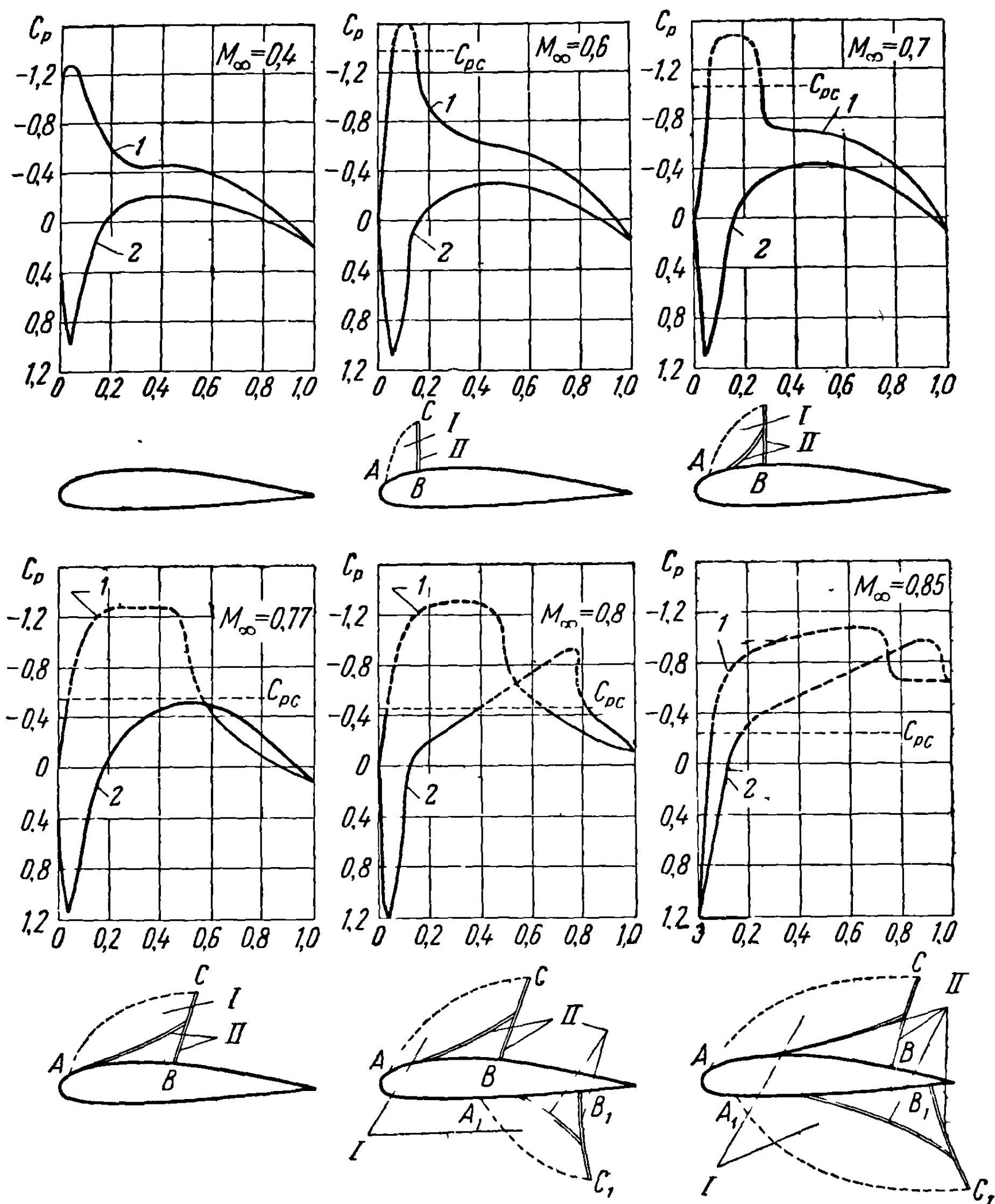
Во всем этом интервале, от  $M_c < 1$  до  $M'_c > 1$ , оба течения — дозвуковое и сверхзвуковое — существуют одновременно внутри областей, определяемых некоторыми разделяющими линиями, переход через которые будет либо непрерывным, и в этом случае линии называются *предельными* линиями, либо скачкообразным, причем тогда они называются *нормальными* или *косыми ударными волнами*.

Этот переходный режим называется *трансзвуковым*, или *звуковым*. Усилия сформулировать теоретически явления в этой трансзвуковой области еще

<sup>1</sup> Эти профили построены V. Мапеа.

не привели к положительным результатам вследствие как математических трудностей, так и сложности физических явлений.

Однако определенные практические замечания, дающие некоторое качественное описание этих явлений, здесь сделаны.



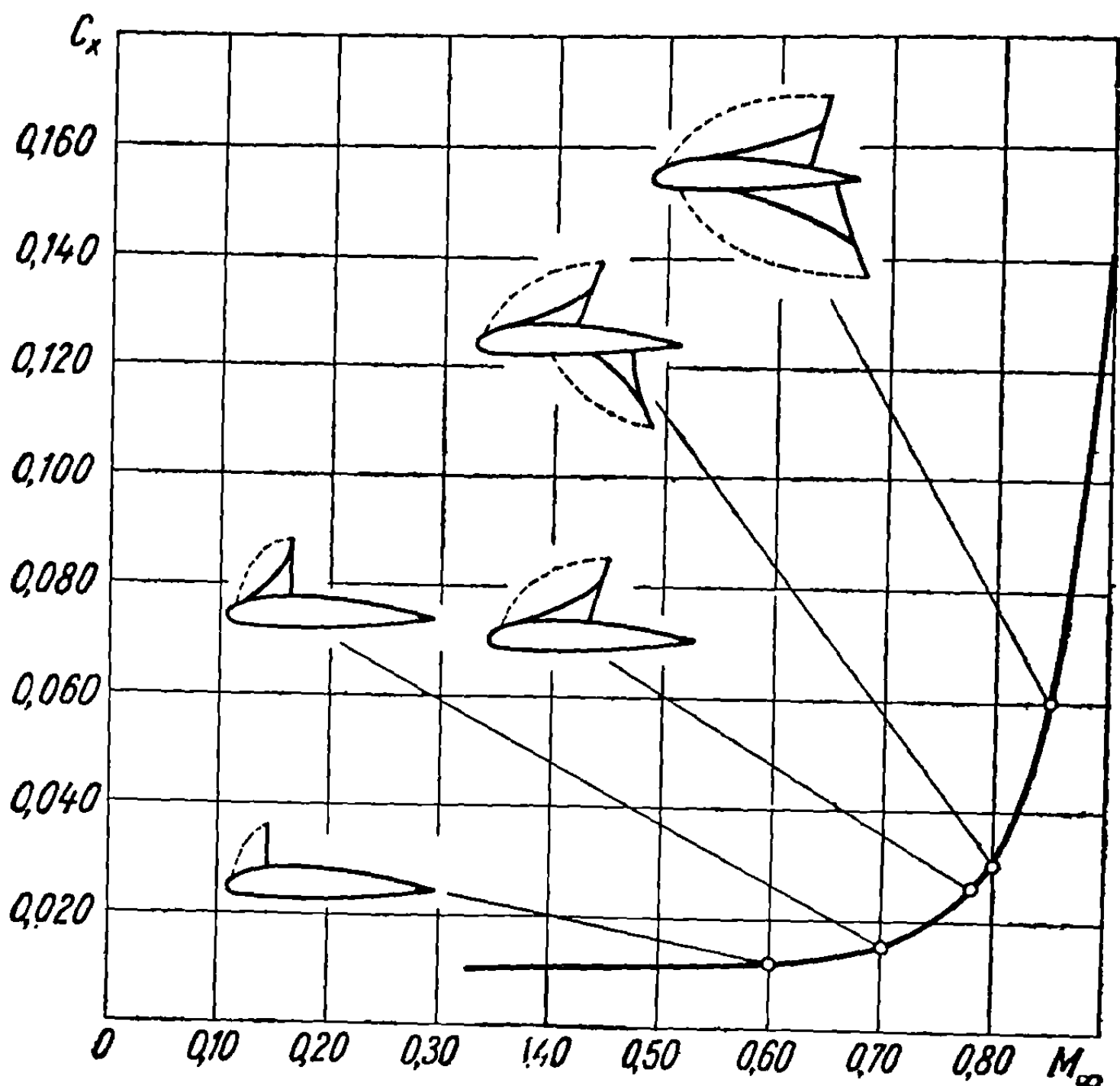
Фиг. 13. 1

Поверхности: 1 — верхняя; 2 — нижняя I — сверхзвуковая, II — ударная волна

Рассмотрим диаграмму распределения давлений на верхней и нижней поверхностях какого-нибудь профиля, соответствующую данному углу атаки (фиг. 13.1)<sup>1</sup>. Первоначально, при  $M_\infty < M_c$ , изменение давления вдоль профиля идет нормально; на профиле не будет точек, где достигалась бы критическая скорость, соответствующая значению  $M = 1$ . При возрастании

<sup>1</sup> Диаграмма воспроизводится из книги [37].

скорости свободного потока скорость на верхней поверхности будет также возрастать вследствие возрастания скорости потока или соответствующего числа  $M_\infty$  и эффекта сжимаемости. При  $M_\infty = M_c$  в точке  $A$  скорость частиц достигнет местной скорости звука, а давление — критического значения.



Фиг. 13. 2

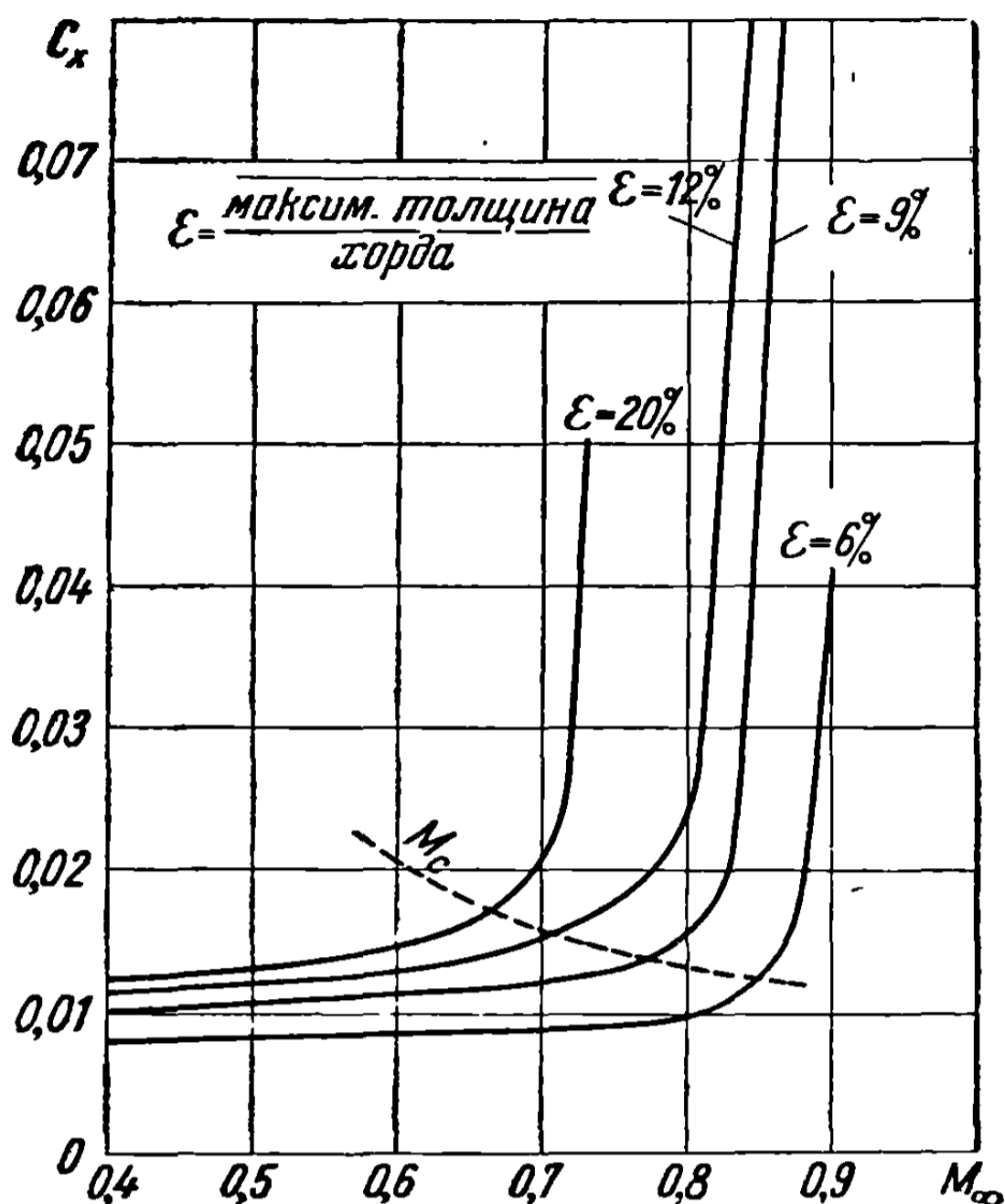
Начиная с этого момента, возникает сверхзвуковое течение в точке  $A$  и распространяется, если  $M_\infty$  возрастает, превышая  $M_c$ , на область  $ABC$ , ограниченную предельной линией  $AC$ , ударной волной  $BC$  и контуром  $AB$  профиля. Таким образом, режим течения будет смешанным. Если  $M_\infty$  возрастет еще больше, то на нижней поверхности также появляется сверхзвуковая область  $A_1B_1C_1$  при тех же условиях, что и на верхней. Таким образом, сверхзвуковое течение имеет тенденцию постепенно полностью охватить контур, если передняя кромка крыла имеет определенную, характерную для этого режима течения форму.

При трансзвуковом режиме обычно появляется сложная система ударных волн довольно определенной  $\lambda$ -образной формы, составленная из косо́й волны и нормальной.

За счет этих разнообразных явлений сопротивление и подъемная сила подвергаются совершенно особым по характеру изменениям. Так, коэффициент сопротивления  $C_x$  значительно возрастает при возрастании  $M_\infty$ , достигая больших величин (фиг. 13.2).

Указанное явление, которое препятствует полету с высокими скоростями, зависит от формы крыла, его толщины, угла атаки и т. д. Так, для симметричных крыльев с различной относительной толщиной число  $M_c$  и полное сопротивление изменяются в зависимости от относительной толщины (фиг. 13.3),

причем очевидно, что тонкие профили наиболее предпочтительны. То же влияние оказывает изменение угла атаки, возрастание которого приводит к соответствующему возрастанию сопротивления и уменьшению числа  $M_c$ .



Фиг. 13. 3

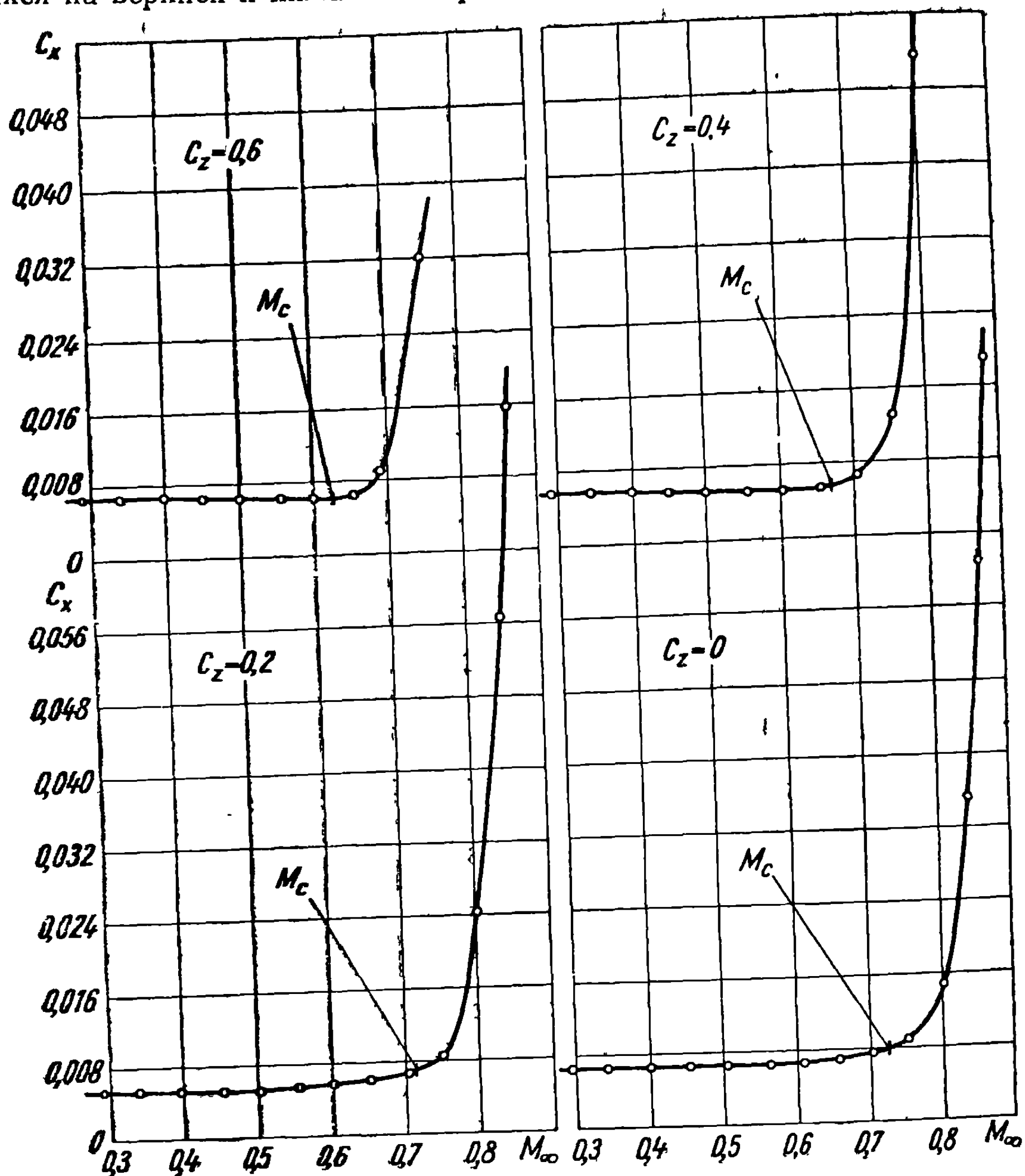
$$\epsilon = \frac{\text{макс. толщина}}{\text{хорда}} \%$$

Как можно объяснить это изменение сопротивления? Напомним, что сопротивление состоит из силы, возникающей вследствие трения газа о поверхность крыла, и силы, обусловленной давлением; последняя носит название *сопротивления формы*. Для малых чисел Маха и малых углов атаки сопротивление формы весьма мало, а сопротивление трения является доминирующим.

Как только появляются ударные волны, они приводят к возрастанию энтропии и, следовательно, к дополнительной затрате энергии, которая эквивалентна энергии, расходуемой в единицу времени на соответствующее дополнительное сопротивление, называемое *волновым*, обусловленное ударными волнами.

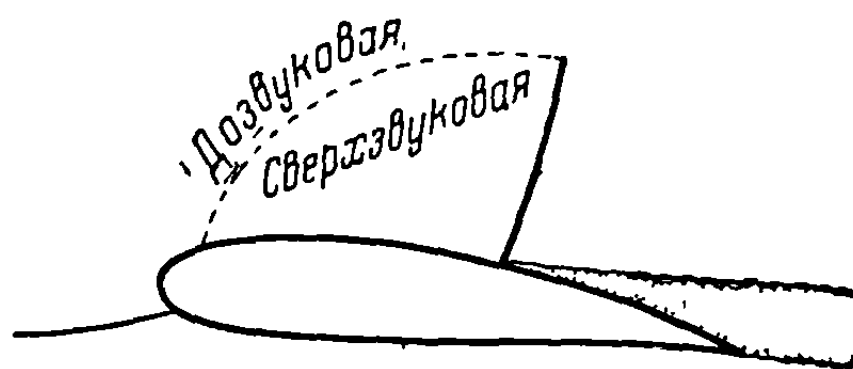
Дальнейшим следствием действия ударных волн является, с одной стороны, отделение пограничного слоя от профиля, обнажающее часть верхней поверхности крыла, на которой возникает значительное разрежение, с другой — образование вихрей, что влечет за собой дополнительное возрастание сопротивления (фиг. 13.5). Хотя указанное увеличение сопротивления имеет совершенно другую природу по сравнению с волновым, однако оно есть следствие последнего; под термином волновое сопротивление подразумевают весь комплекс, составляющий сопротивление формы.

Определение форм ударных волн, сверхзвуковых режимов, образовавшихся на верхней и нижней поверхностях крыла, точки отделения волн



Фиг. 13. 4

и механизма их возникновения представляет такие трудности, что точное вычисление потери давления при переходе через ударные волны и волнового сопротивления оказывается невозможным.

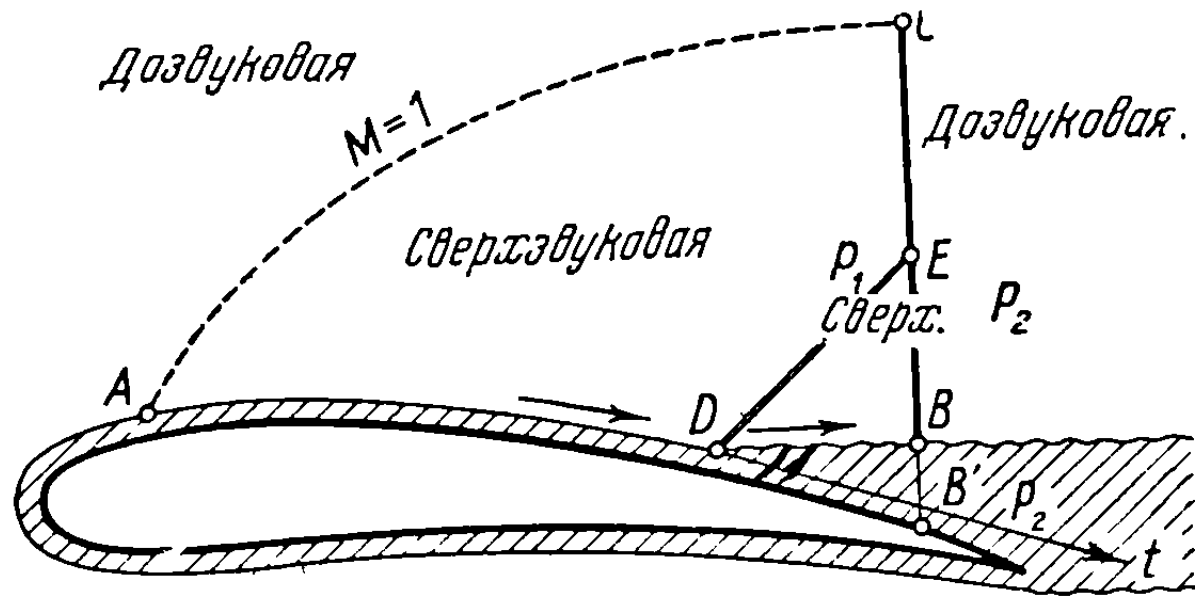


Фиг. 13. 5

Можно, однако, дать качественное описание возникновения  $\lambda$ -образных ударных волн. Предположим, что сверхзвуковое течение занимает

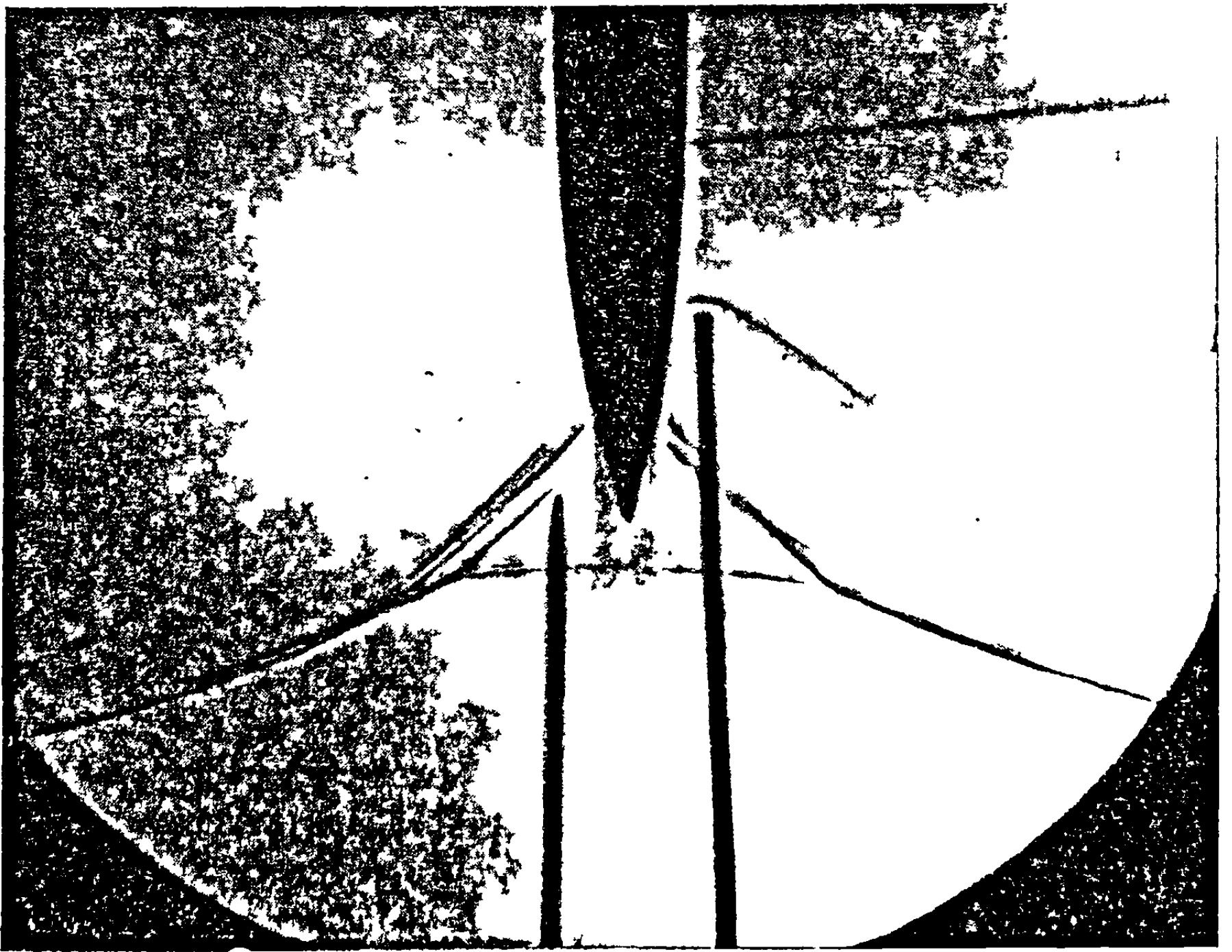


область  $ABC$ , примыкающую к верхней поверхности крыла (фиг. 13.6). Течение, вплоть до первой ветви ударной волны, непрерывно; на поверхности тела образуется ламинарный пограничный слой. За нормальной



Фиг. 13. 6

ударной волной  $CB$  течение будет дозвуковым и давление  $p_2$ , образовавшееся за скачком, при условиях дозвукового течения продолжается ниже



Фиг. 13. 7

точки  $B$ , вплоть до поверхности профиля в точке  $B'$ . В дозвуковом течении не может быть внезапных изменений давления, следовательно, то же давление  $p_2$  (но пониженное из-за существования некоторых беспорядочных движений) распространяется в пограничном слое до места вблизи точки  $D$ , где получают условия отделения пограничного слоя, вызывающие отклонение потока на поверхности слоя от касательной  $Dt$  в точке  $D$ . Такое отклонение сверхзвукового потока вблизи поверхности

крыла может осуществиться только благодаря косой ударной волне  $DE$ .

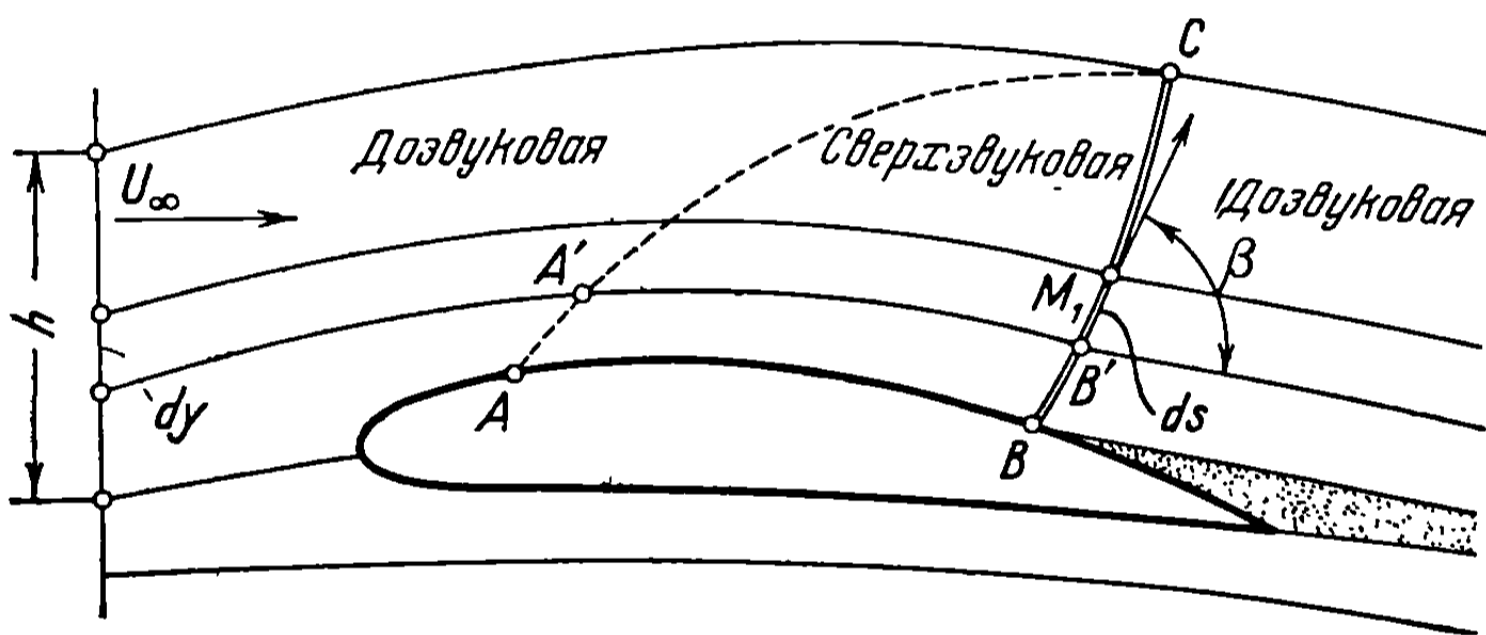
Явление, конечно, гораздо сложнее, однако это качественное описание подтверждается экспериментальными данными. Фотография [36], воспроизводимая на фиг. 13.7, дает ясную картину этого явления.

Таким образом, трансзвуковое течение вокруг профиля при изменении числа Маха свободного потока в интервале от  $M_c$  до  $M_c'$  приводит к ряду явлений, обуславливающих значительные изменения аэродинамических характеристик крыла.

В предшествующих разделах разбирались влияния на сопротивление, которое рассматривалось как критерий изменения характера потока; ниже сделаны подобные же замечания относительно подъемной силы и момента.

### 13.2. Качественная оценка волнового сопротивления для значений $M_\infty$ , заключенных между $M_c$ и единицей

Теоретически почти невозможно определить форму течения в сверхзвуковой области при наличии системы  $\lambda$ -образных ударных волн. Для упрощения задачи представим поэтому явление схематически как про-



Фиг. 13. 8

стую ударную волну  $BC$ , предполагаемую совместимой со смешанным до- и сверхзвуковым течением (фиг. 13.8). Трубка тока, в которой скорость на бесконечности вверх по течению будет  $U_\infty$ , пересекает элемент  $ds$  волны; скорость возрастает и становится сверхзвуковой в точке  $A'$ , а затем, при переходе через ударную волну в точке  $B'$ , снова становится дозвуковой; можно допустить, что на бесконечности вниз по потоку давление снова принимает свое первоначальное значение, причем кинетическая энергия уменьшается, так как скорость становится меньше  $U_\infty$  пусть  $M_1$  будет числом Маха впереди ударной волны,  $\beta$  — углом, образованным последней со сверхзвуковым потоком впереди волны. Предполагая, что  $M_1 \sin \beta$  мало отличается от единицы, а это действительно наблюдается в случае дозвукового полета, при котором  $1 > M_\infty > M_2$ , определим потерю напора формулой, выведенной из уравнения (7.71):

$$\frac{p_0 - p_0'}{p_0} \approx \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3}, \quad (13.1)$$

где  $p_0$  — давление торможения на бесконечности вверх по потоку, а  $p_0'$  — соответствующее давление на бесконечности в нижнем течении. С другой стороны, обозначая возрастание энтропии через  $\Delta S$  и применяя формулу (7.25), получим соотношение

$$\begin{aligned} \Delta S &= -R \ln \frac{p_0'}{p_0} = -R \ln \frac{p_0 - (p_0 - p_0')}{p_0} \approx \\ &\approx R \frac{p_0 - p_0'}{p_0} = \frac{2\kappa R}{(\kappa + 1)^2} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Возрастание энтропии соответствует энергии, израсходованной крылом за время его перемещения, которая равна работе, затрачиваемой для преодоления волнового сопротивления.

Обозначая через  $\Delta Q$  энергию, соответствующую этому возрастанию энтропии, и предполагая температуру  $T_1$  впереди волны равной приближенно критической температуре  $T_c$ , так как  $M_1$  очень близко к единице, получим, имея также в виду уравнение (5.7):

$$\begin{aligned} \Delta Q &= T_c \Delta S = \frac{2T_0}{\kappa + 1} \Delta S = \frac{4\kappa R T_0}{(\kappa + 1)^3} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3} = \\ &= \frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^3} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3}{3}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Эта потеря энергии относится к единице массы; для всей текущей массы, которая подвергается политропическому преобразованию при переходе через ударную волну, потеря мощности будет равна произведению волнового сопротивления  $R_u$  на скорость свободного потока  $U_\infty$ .

В сечении далеко вверх по потоку высота  $h$ , определяющая проходящую через сечение преобразуемую массу, почти равна высоте ударной волны. Для каждой полоски, расположенной на высоте  $y$  (фиг. 13.8), член  $M_1^2 \sin^2 \beta - 1$  будет различным и будет изменяться вместе с  $y$ ; однако закон изменения очень сложен, во всяком случае его трудно представить в простой аналитической форме.

Поэтому указанный член будет рассматриваться постоянным и соответствующим средней высоте  $h_m$ , причем баланс мощности будет записываться, как установлено выше:

$$U_\infty R_u = \rho_\infty U_\infty h_m \Delta Q = \rho_\infty U_\infty h_m \frac{4\kappa}{3(\kappa + 1)^3} \frac{p_0}{\rho_0} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3; \quad (13.4)$$

отсюда, обозначая хорду крыла через  $c$ , можно вывести коэффициент сопротивления, обозначаемый через  $C_{xu}$ :

$$C_{xu} = \frac{R_u}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c} = \frac{h_m}{c} \frac{8}{3(\kappa + 1)^3} \frac{\kappa}{U_\infty^2} \frac{p_0}{\rho_0} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^3. \quad (13.5)$$

Из уравнения давления (3.76), применяя также выражение (5.14), получим

$$U_{\infty}^2 = \frac{2x}{x-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_{\infty}}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right] = x \frac{p_0}{\rho_0} \frac{M_{\infty}^2}{1 + \frac{x-1}{2} M_{\infty}^2}. \quad (13.6)$$

Коэффициент сопротивления может быть выражен в этом случае следующим образом:

$$C_{xu} = \frac{h_m}{c} \frac{8}{3(x-1)^2} \frac{1 + \frac{x-1}{2} M_{\infty}^2}{M_{\infty}^2} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)^2. \quad (13.7)$$

Полагая

$$\begin{aligned} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) &= (M_1 \sin \beta - 1 + 2)(M_1 \sin \beta - 1) = \\ &= 2 \left( 1 + \frac{M_1 \sin \beta - 1}{2} \right) (M_1 \sin \beta - 1) \end{aligned} \quad (13.8)$$

и замечая, что  $\sin \beta \approx 1$ , в то время как  $M_1$  мало отличается от единицы по первоначальному предположению, принимая, с другой стороны, что член  $(M_1 \sin \beta - 1)$  возрастает в той же пропорции, как  $(M_{\infty} - M_c)$ , получим

$$\frac{(M_1 \sin \beta - 1)}{1} = \frac{M_{\infty} - M_c}{M_c} (1 + \varepsilon), \quad (13.9)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент, который меньше единицы и зависит от формы крыла, угла атаки, числа  $M_c$  и т. д.

Замечая, что  $h_m$  является функцией от  $(M_{\infty} - M_c)$ , можно записать в первом приближении линейное соотношение

$$\frac{h_m}{c} = k (M_{\infty} - M_c). \quad (13.10)$$

При этих условиях, вводя значения (13.9) и (13.10) в формулу (13.7) для сопротивления, получим окончательно:

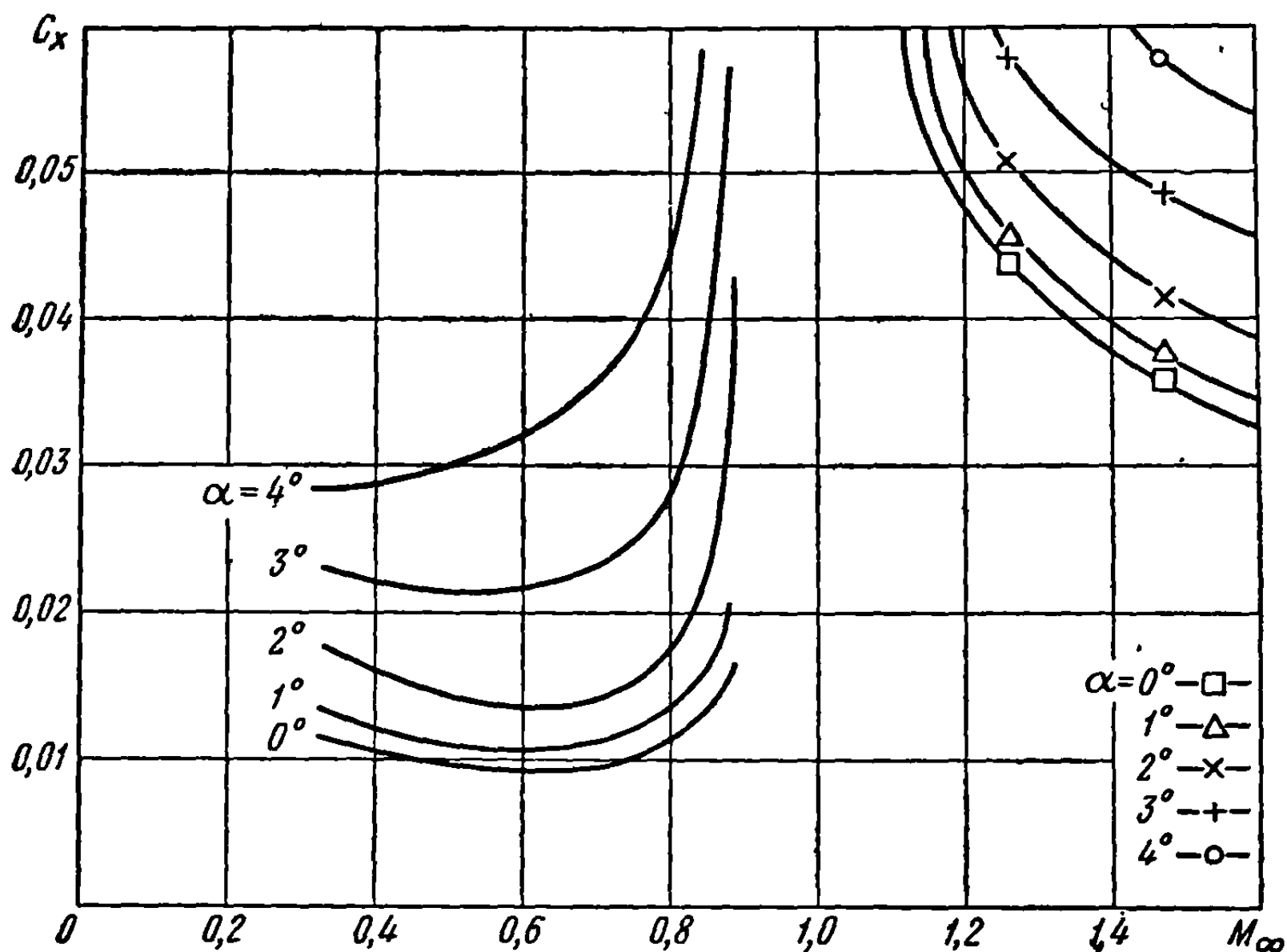
$$\begin{aligned} C_{xu} &\approx 1,54 k (1 + \varepsilon)^2 \frac{1 - 0,2 M_{\infty}^2}{M_c^3 M_{\infty}^2} \left( 1 + \frac{3}{2} (M_{\infty} - M_c) \right) (M_{\infty} - M_c)^4 \approx \\ &\approx \frac{K}{M_c^5} (M_{\infty} - M_c)^4, \end{aligned} \quad (13.11)$$

где с целью упрощения введен коэффициент пропорциональности  $K$ .

Если иметь в виду, что волновое сопротивление возрастает вследствие дополнительного сопротивления, обусловленного отделением пограничного слоя от верхней поверхности, то в написанное выражение нужно

ввести дополнительный коэффициент. Это может быть выполнено путем увеличения коэффициента  $K$ , в конечном счете определяемого из экспериментальных данных.

Хотя приведенные вычисления нельзя рассматривать как строгие, особенно в отношении коэффициентов  $\epsilon$ ,  $k$  и гипотетической формулы



Фиг. 13. 9

(13.10), указанный метод, тем не менее, устанавливает изменение коэффициента сопротивления в зависимости от  $(M_\infty - M_c)^4$ , которое качественно находится в согласии с экспериментальными данными. Усилия, прилагаемые для выполнения более точных вычислений, встречают почти непреодолимые трудности из-за невозможности строго определить как сверхзвуковое течение перед волной, так и дозвуковое течение за ней.

Для определения порядка величины коэффициента  $K$  рассмотрим диаграмму на фиг. 13.2, соответствующую двояковыпуклому симметричному профилю с 12%-ной толщиной при  $M_c = 0,7$ . Если принять величину  $K$  равной 2,5, то приблизительно

$$C_{xi} \approx 14 (M_\infty - M_c)^4, \quad (13.12)$$

что соответствует довольно точно экспериментальной кривой.

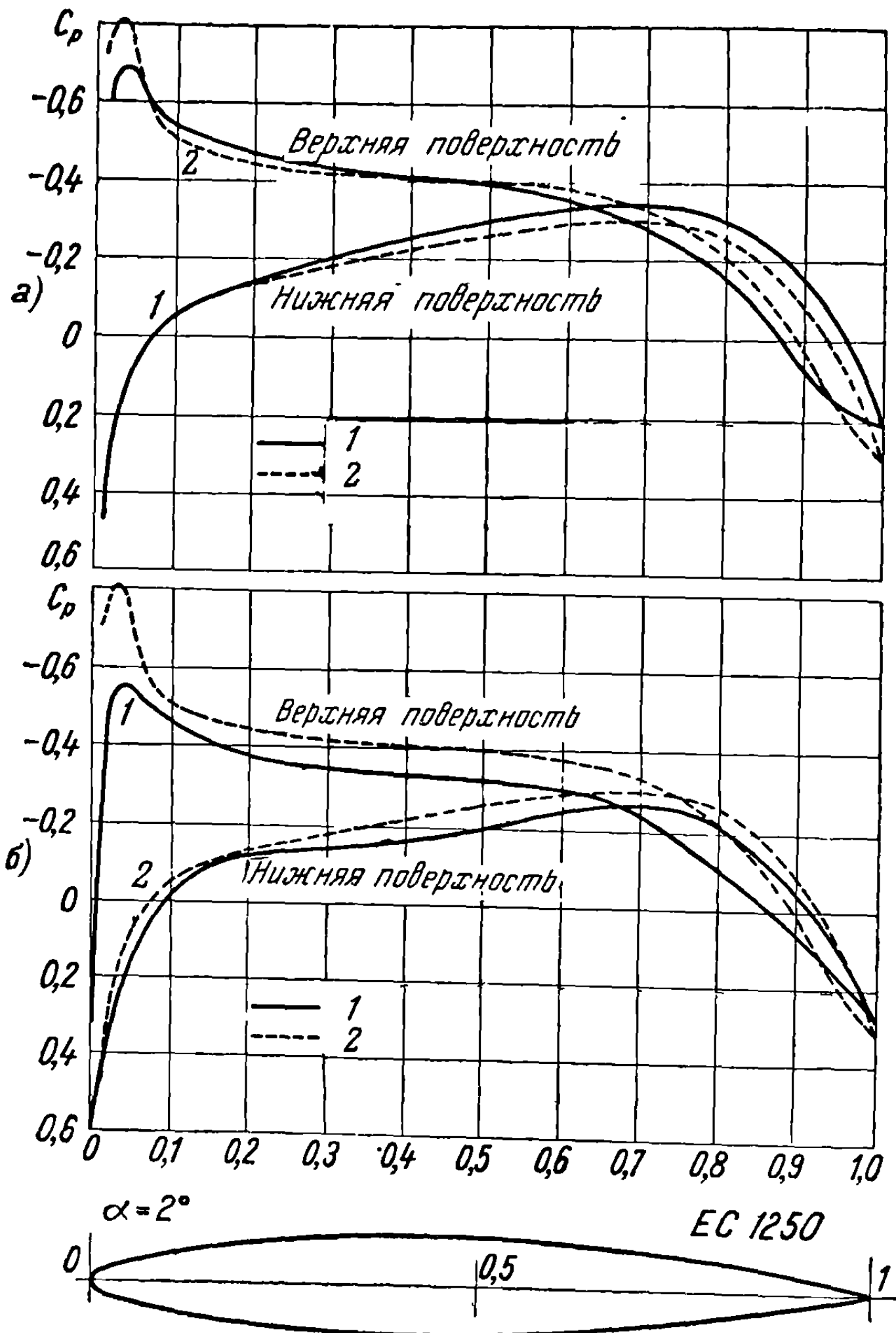
Нужно снова указать, что приведенная формула имеет качественный характер и что для трансзвукового течения невозможно установить абсолютно строгие формулы из-за возникающих в этом случае сложных явлений.

Нужно также упомянуть, что вплоть до критического числа Маха сопротивление изменяется пропорционально числу Рейнольдса, в соответствии с известными законами, и обусловлено главным образом поверхностным трением. Изменение полного сопротивления в зависимости от числа Маха и угла атаки представлено для трансзвукового интервала на диаграммах фигуры 13.9,

соответствующих специальному крылу, используемому при высоких скоростях полета. Сопротивление при  $M_\infty = 1$  не может быть измерено вследствие трудностей, встречающихся при испытаниях.

### 13. 3. Изменение давления и подъемной силы

Вычисление давления и подъемной силы можно выполнить для двух случаев: во-первых, при незначительных изменениях скорости, с помощью



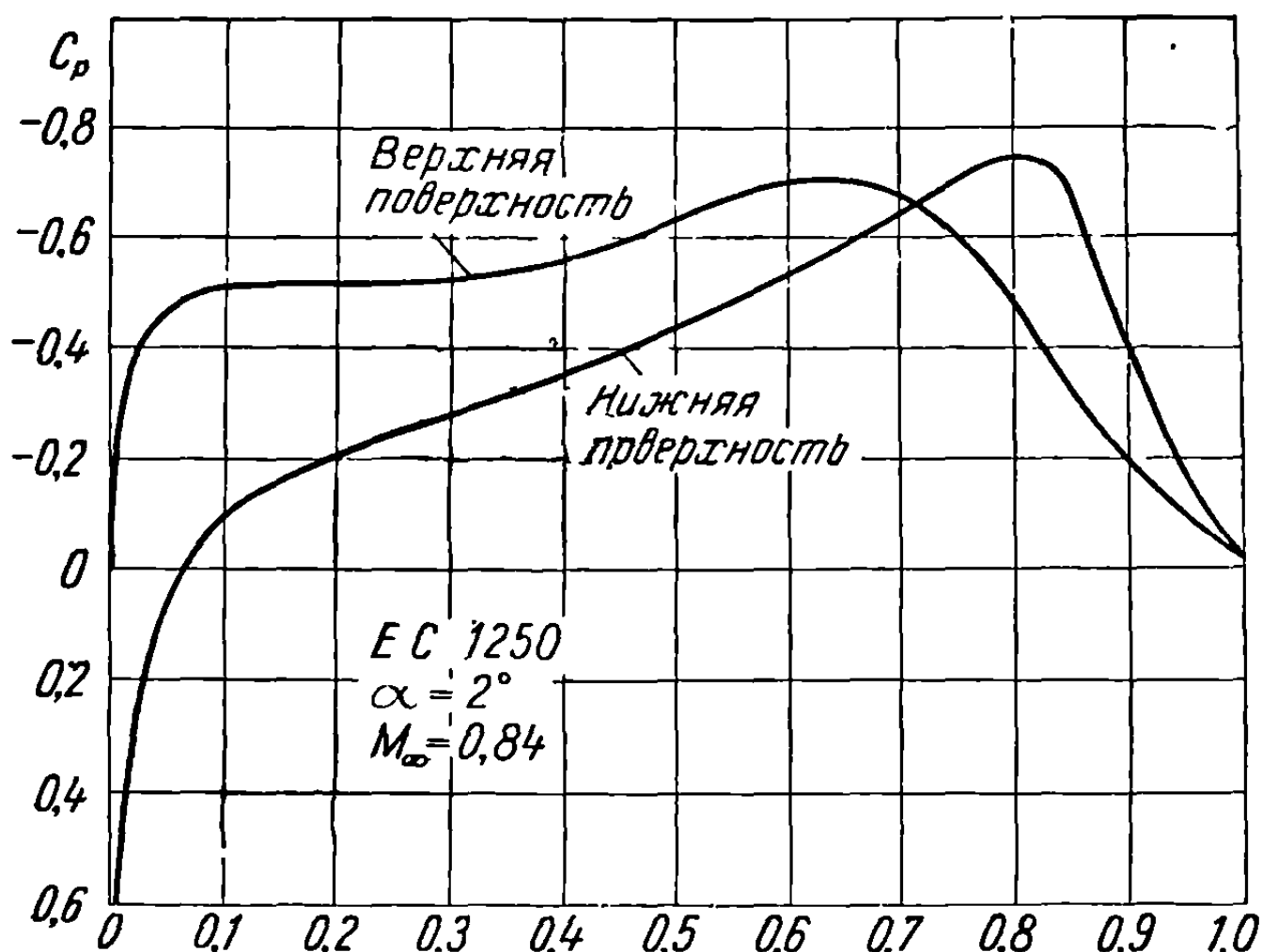
Фиг. 13. 10, а, б

Кривые: 1 — экспериментальные для  $M_\infty = 0,68$  (а) и  $0,46$  (б); 2 — расчетные для  $M_\infty = 0,68$ , выведенные из данных для  $M_\infty = 0,46$

метода малых возмущений, путем установления формул Прандтля — Глауерта для давления (9.29) и для подъемной силы (9.46); во-вторых, при общих условиях, путем применения уравнений Чаплыгина, приводящих к преобразованию Кармана — Тзяна (11.70).

Эти методы имеют широкое поле применения и находятся в согласии с экспериментальными данными даже за критическим числом Маха. Однако

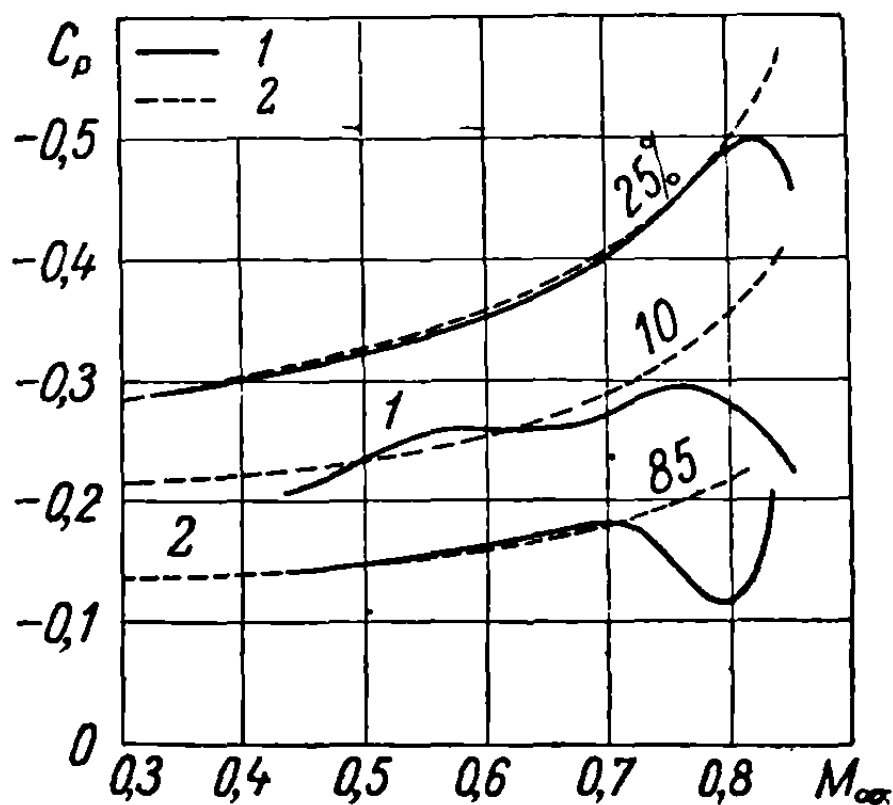
при трансзвуковом течении явления становятся настолько сложными, что ни давление, ни подъемная сила не могут определяться точным теоретическим законом.



Фиг. 13. 11

Рассматривая диаграмму на фигуре 13.10, представляющую распределение давления на двояковыпуклом симметричном профиле при  $M_\infty = 0,68$  и  $0,46$ , причем давления измерялись при  $M_\infty = 0,46$  и преобразовывались с помощью метода Кармана — Тзяна (см. уравнение 11.70) к значению  $M_\infty = 0,68$  (фиг. 13.10б), можно видеть весьма хорошее совпадение результатов подсчета с кривыми, полученными непосредственным измерением при том же числе Маха (фиг. 13.10а). Максимальная относительная толщина этого профиля равна 12% и располагается точно в средней точке хорды (ЕС 1250) [37].

Для того же профиля и при том же угле атаки  $\alpha = 2^\circ$  распределение давления в трансзвуковом потоке при  $M_\infty = 0,84$  не подчиняется больше приведенному выше закону, и диаграмма показывает другую картину (фиг. 13.11).

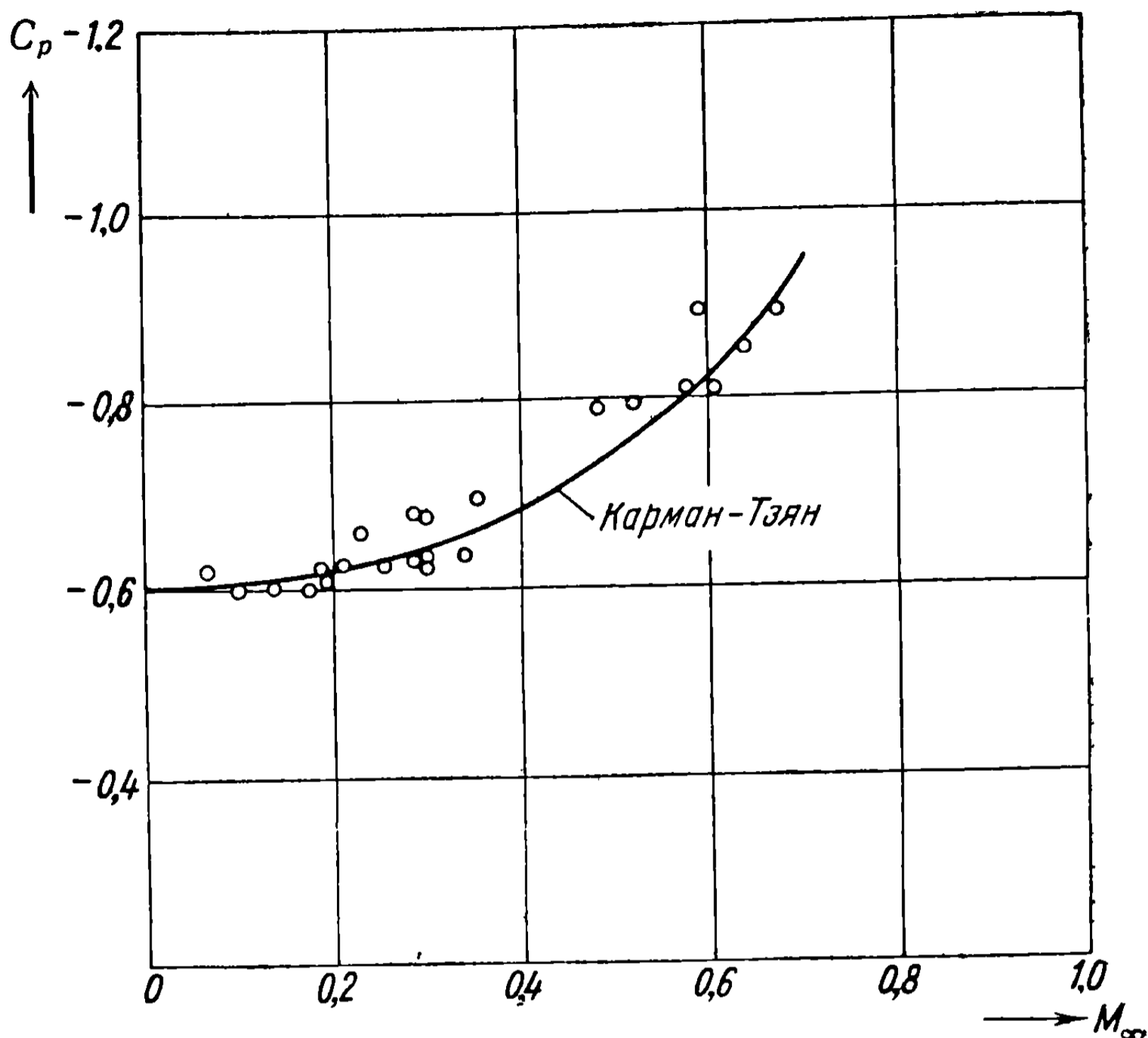


Фиг. 13. 12

Данные: 1 — эксперимент.; 2 — Карман — Тзян

Если сравнить изменение давления в нескольких точках одного и того же профиля, например, расположенных на расстояниях от передней кромки в 10, 25 и 85% хорды (фиг. 13.12), то хорошее совпадение с теорией наблюдается вплоть до числа Маха более высокого, чем  $M_c$ , после чего изменение становится неправильным. При сравнении теоретических методов можно сказать, что преобразование Кармана — Тзяна дает более близкое

совпадение с экспериментальными данными. Это особенно очевидно из фигуры 13.13, где экспериментальные точки располагаются очень близко к теоретической кривой.



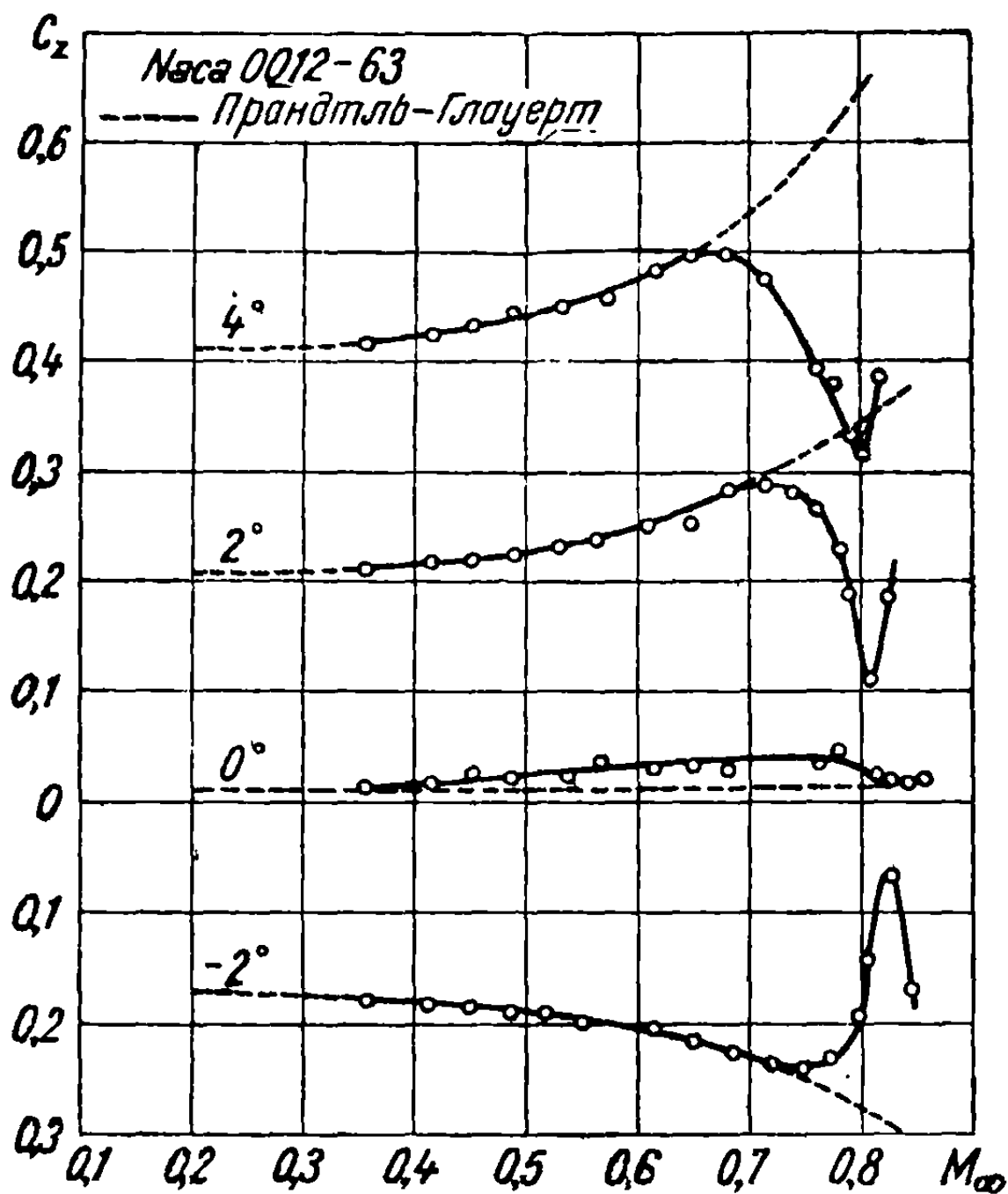
Фиг. 13. 13

Можно считать, что коэффициент подъемной силы  $C_z$  подчиняется приблизительно закону Прандтля — Глауерта, как показано на фигуре 13.14, где изображены диаграммы зависимости  $C_z$  от изменяющегося угла атаки, соответствующей двояковыпуклому симметричному профилю с 12%-ной максимальной относительной толщиной, расположенной на расстоянии 30% хорды от передней кромки профиля [38].

Другие симметричные профили, с максимальной толщиной, расположенной ближе к задней кромке, например, на расстоянии 50% хорды от последней, а также толстые профили, очевидно, не подчиняются закону Прандтля — Глауерта, за исключением малого интервала изменения числа Маха перед значением  $M_c$ . Так, на фигуре 13.15, где воспроизведены результаты испытаний симметричного крыла ЕС 1250, можно отметить аномальное изменение подъемной силы для малых значений  $M_\infty$ , после чего мы возвращаемся к нормальному изменению ее для значений, приближающихся к  $M_c$ . В меньшей степени эта аномалия проявляется также в наклоне кривой для подъемной силы в зависимости от угла атаки. В самом деле, если рассматривать крыло 12%-ной максимальной относительной толщины и положение максимальной толщины, соответствующее расстоянию в 30, 40 и 50% хорды от передней кромки (типы N 1230, ЕС 1240, ЕС 1250), то изменение наклона в точке вблизи нулевой подъемной силы только приблизительно подчиняется теорети-

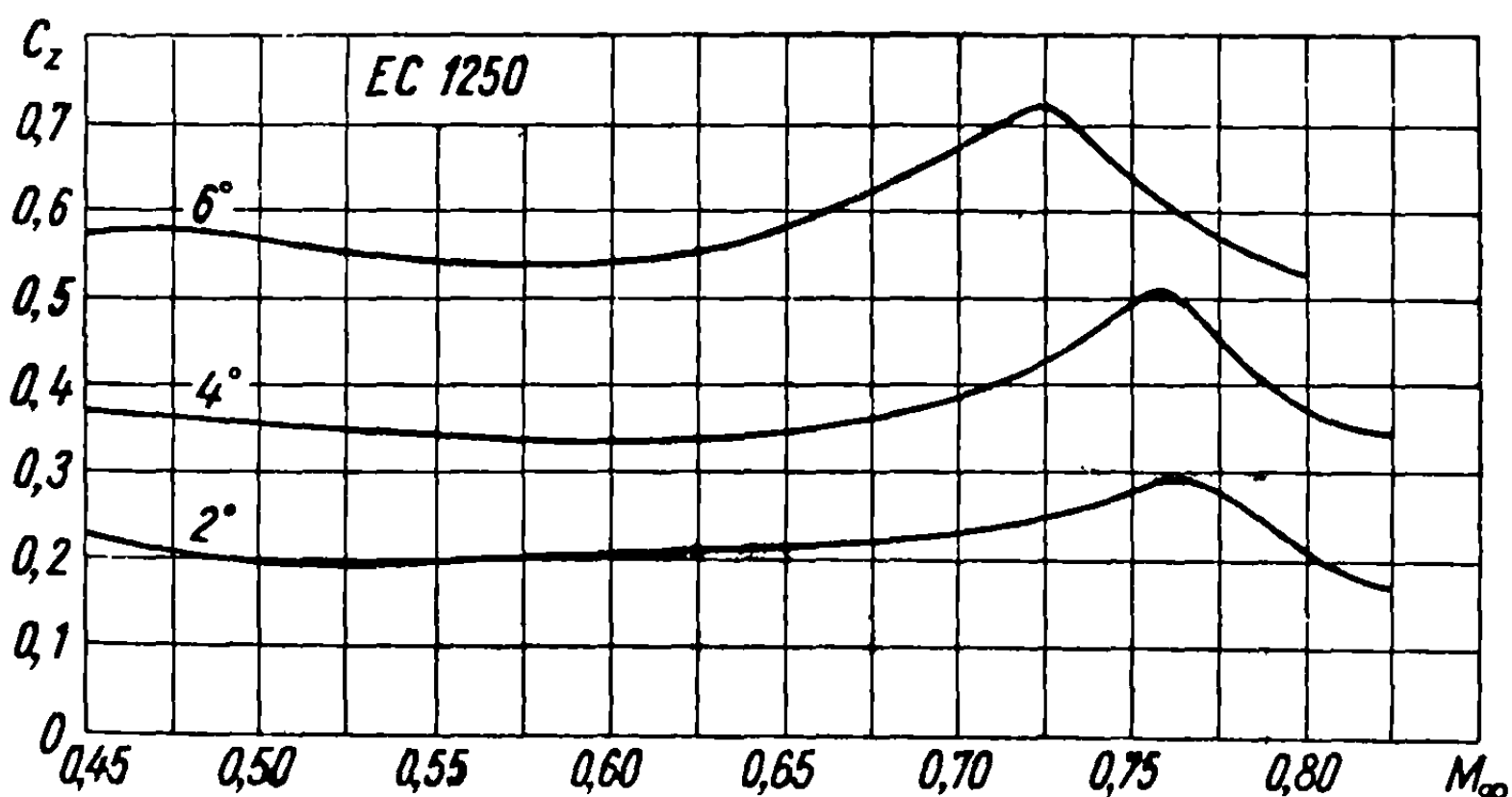


ческому закону (фиг. 13.16). На том же графике нанесены диаграммы для двух других профилей — тонкого с 6%-ной максимальной относительной толщиной и толстого с 20%-ной. Указанные профили подчиняются теоретическому закону очень слабо, и можно вывести заключение, что в то время как



Фиг. 13. 14

закон Христиановича — Кармана — Тзяна удовлетворительно подтверждается для некоторых точек таких толстых профилей, в других точках, особенно

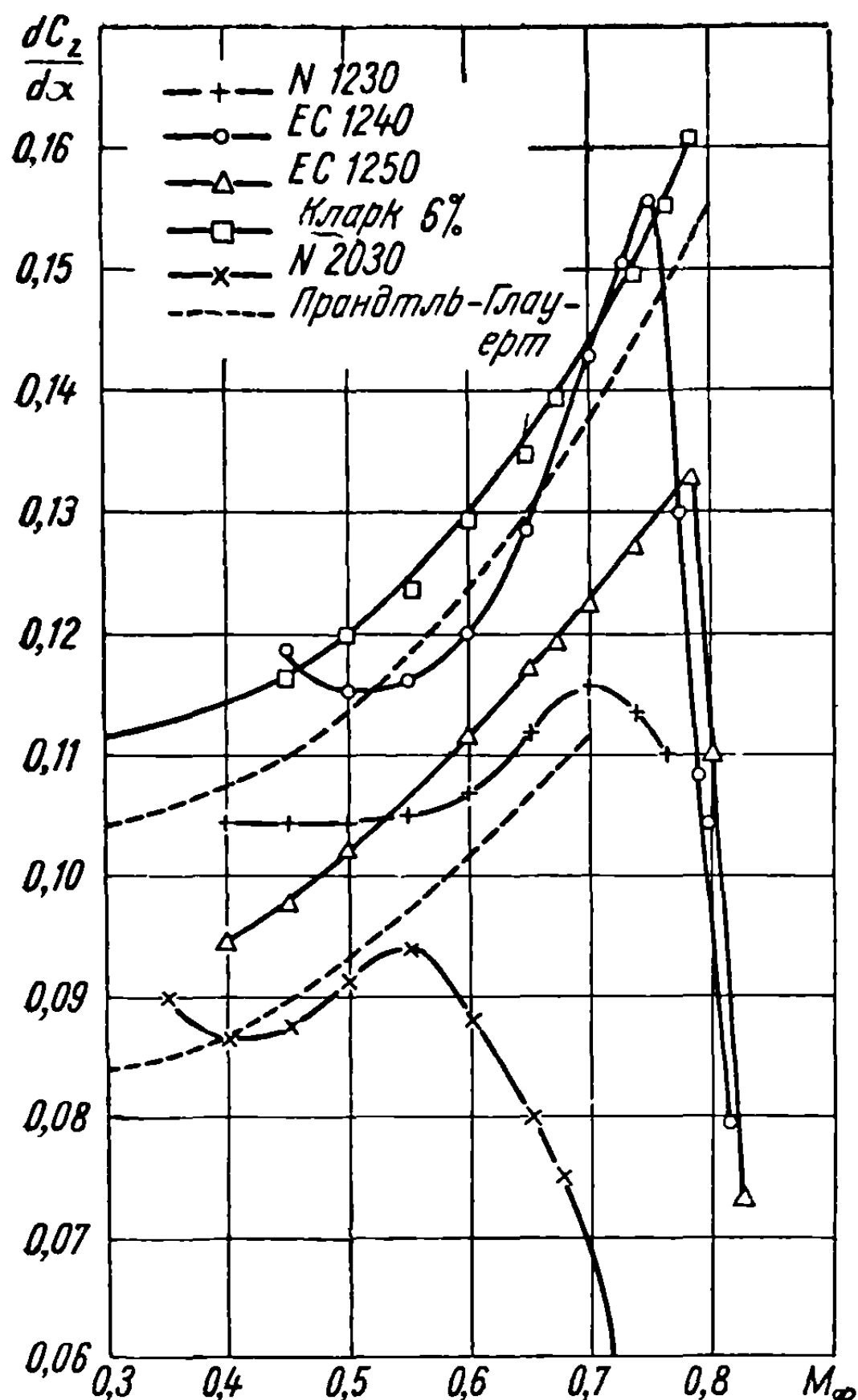


Фиг. 13. 15

расположенных ближе к задней кромке, давления, напротив, оказываются значительно измененными по сравнению с подсчитанными теоретически.

Если иметь в виду, что при сравнении экспериментальных и теоретических результатов берется обычно один и тот же профиль, а не профиль,

преобразованный в согласии с законом соответствия, установленным выше, то можно усмотреть существование дальнейшего расхождения между теорией и экспериментом.

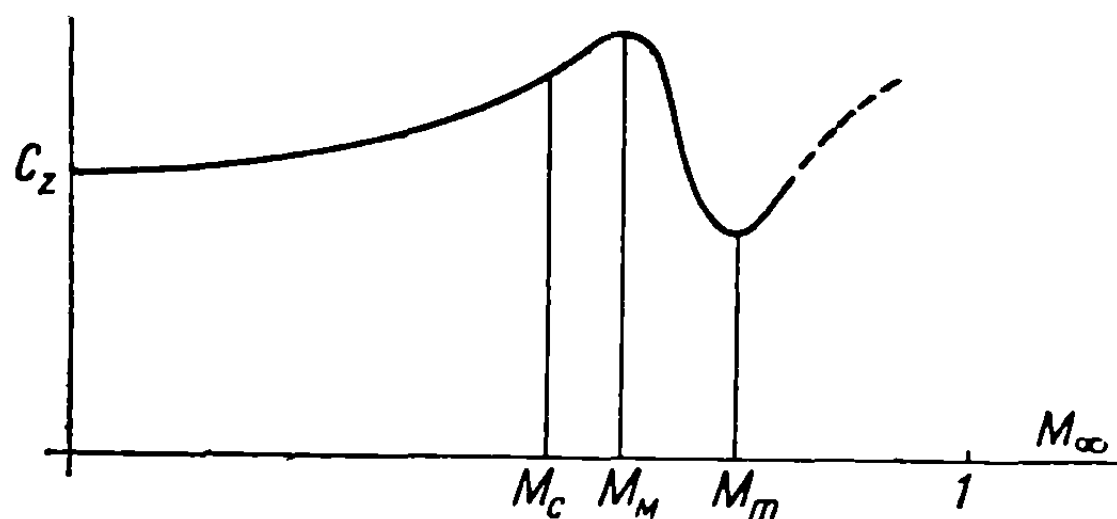


Фиг. 13. 16

В заключение нужно заметить, что теоретические диаграммы на приведенных выше фигурах построены путем использования некоторого среднего значения в качестве исходного. Это позволяет исследователю проверить более точно, находится ли изменение аэродинамических характеристик, по сравнению с соответствующими средними значениями, в согласии с теоретическими вычислениями.

**13.3.1. Влияние кривизны профиля.** При изучении изменения подъемной силы (фиг. 13.17) можно заметить, что максимальная подъемная сила будет возникать тотчас при переходе за значение  $M_c$ , после чего она внезапно падает, а затем снова постепенно возрастает; это явление имеет серьезное значение для полета, так как оно может привести к внезапному капотированию самолета.

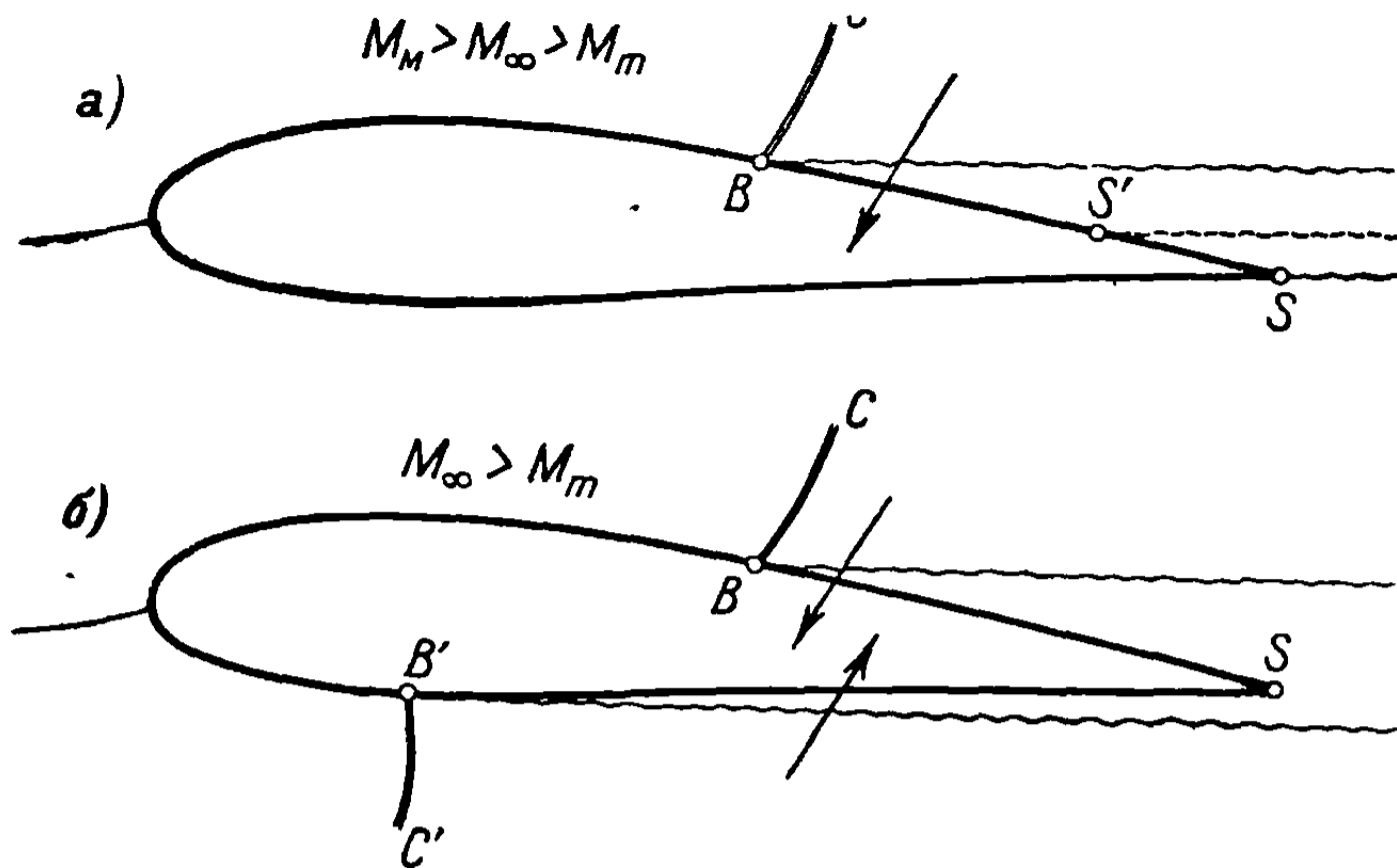
Сразу после появления ударной волны внезапное изменение давления за ней приводит к воздействию, направленному вниз (фиг. 13.18,а);



Фиг. 13. 17

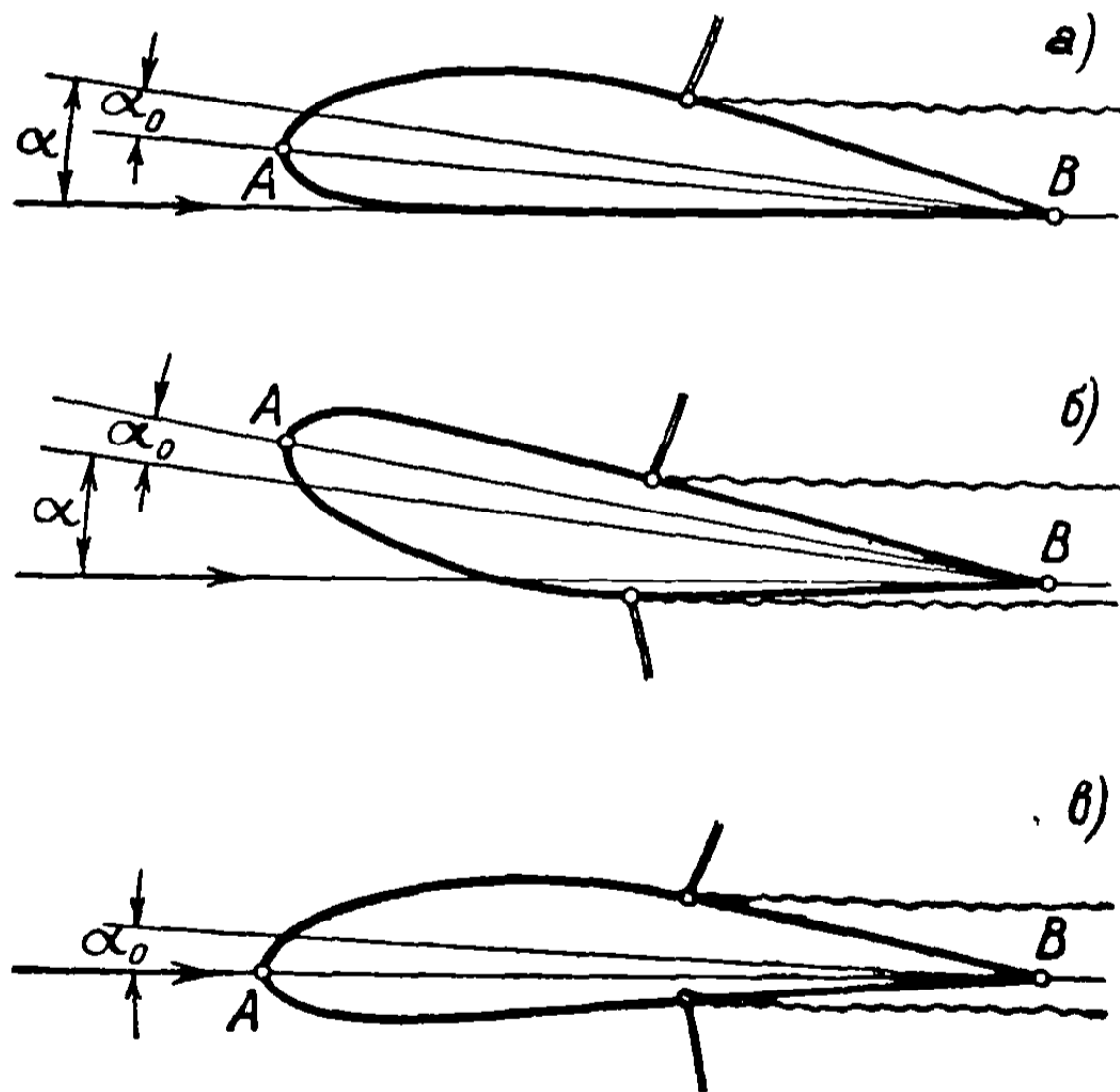
кроме того, это же внезапное изменение давления является причиной отделения потока от верхней поверхности, следствием чего является уменьшение циркуляции вокруг профиля, так что в результате точка отделения потока с конца профиля  $S$  перемещается в среднюю точку  $S'$

или даже в точку  $B$ . Если  $M_\infty$  превышает значение  $M_m$  (см. фиг. 13.17), то ударная волна образуется также на нижней поверхности, производя тот же эффект и, следовательно, создавая возрастание подъемной силы (фиг. 13.18,б).



Фиг. 13. 18, а, б

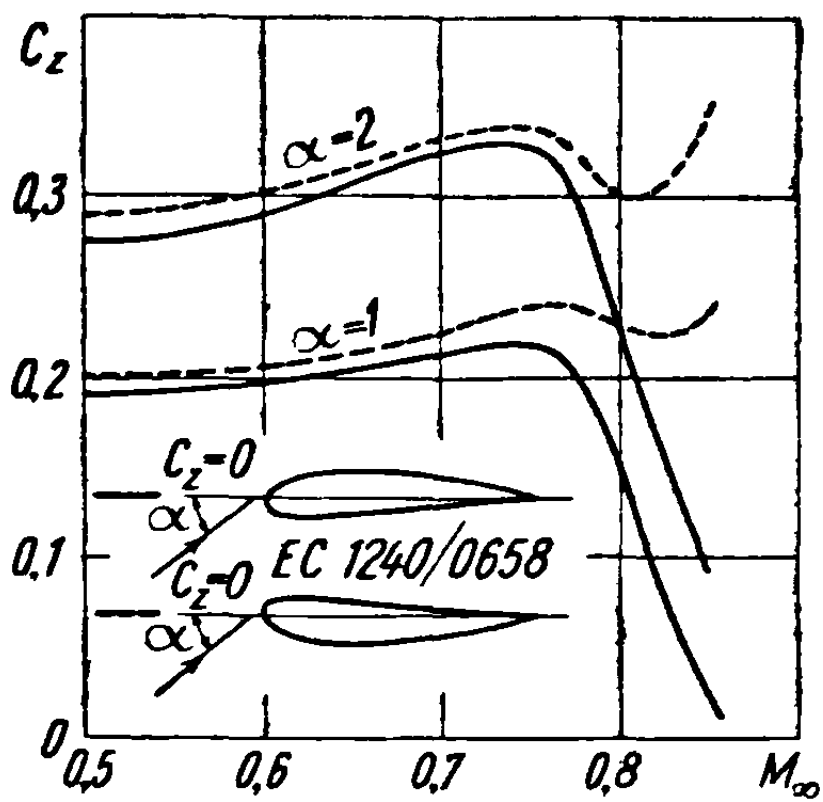
Этим объясняется разница между положительной и отрицательной подъемными силами для одинаковых по величине, но противоположных по знаку углов атаки относительно оси нулевой подъемной силы в случае искривленного профиля (фиг. 13.19).



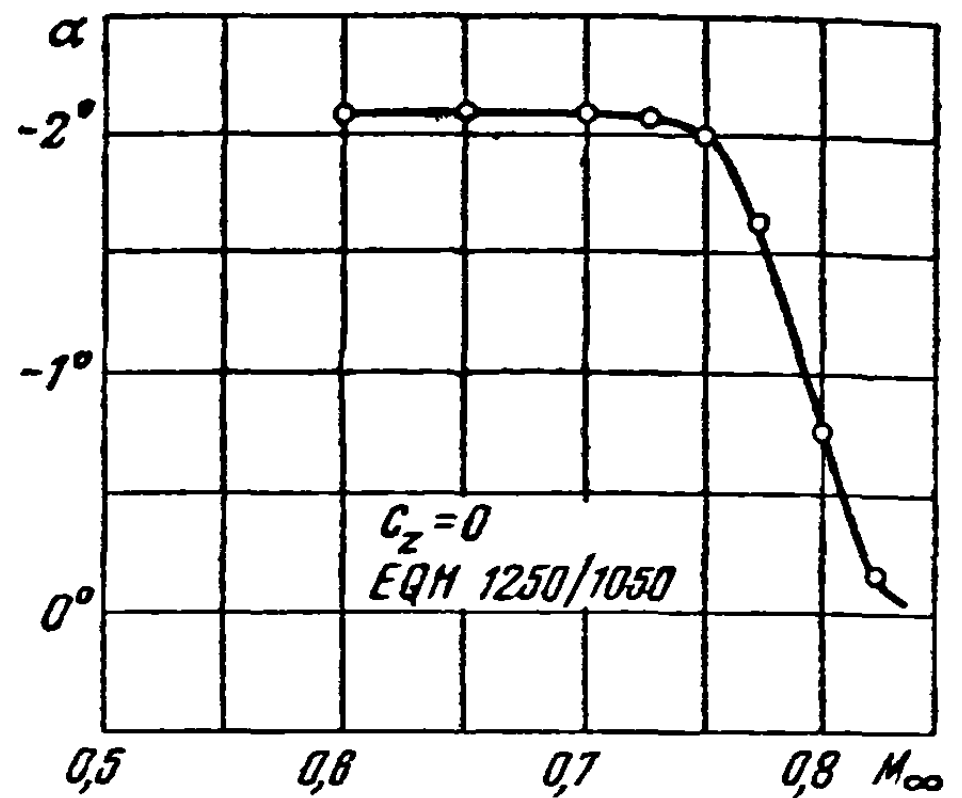
Фиг. 13. 19, а, б, в

Можно рассматривать потоки, соответствующие только положительным подъемным силам, что равносильно наличию двух профилей - одного с положительной кривизной (фиг. 13.19а), а другого с отрицательной (фиг. 13.19б). Если при определенной скорости потока критическое число будет превзойдено на первом профиле и подъемная сила внезапно упадет, то условия течения на втором будут таковы, что минимальное

давление еще не достигнет своего критического значения, и поэтому подъемная сила будет продолжать возрастать. При дальнейшем увеличении числа  $M_\infty$  критическая скорость в определенный момент может быть достигнута также на втором профиле. Контур профиля, однако, благоприятствует почти одновременному появлению критических условий на



Фиг. 13.20



Фиг. 13.21

обеих поверхностях — нижней и верхней, — и подъемная сила начинает возрастать без предварительного заметного уменьшения, как в случае первого профиля.

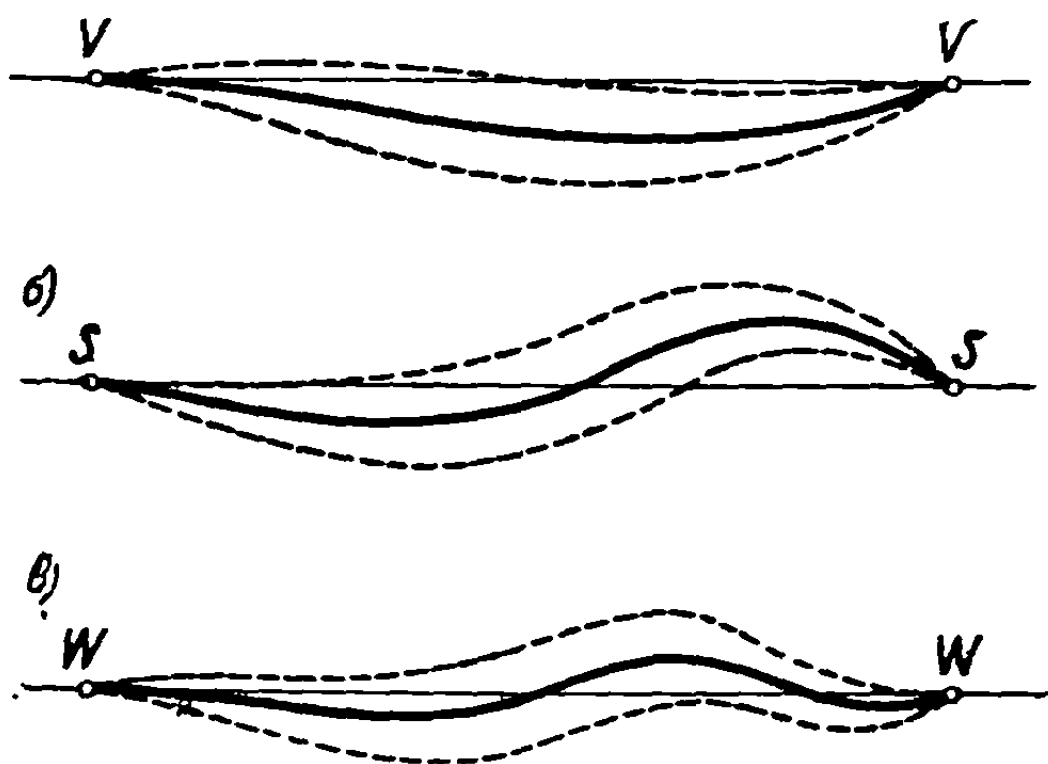
При этих условиях можно заключить, что профиль с отрицательной кривизной будет повышать критическое число Маха, создавая непрерывное возрастание подъемной силы даже за этим числом, если предположить, что как кривизна, так и положение максимальной толщины выбраны подходящим образом.

Испытания приводят к удивительному подтверждению изложенного. Так, для профиля с 12%-ной относительной максимальной толщиной, расположенной на расстоянии 40% хорды от передней кромки (тип ЕС 1240), и соответствующей кривизной экспериментальные результаты, изображенные на диаграммах фигуры 13.20, очень хорошо подтверждают приведенные выше соображения [39].

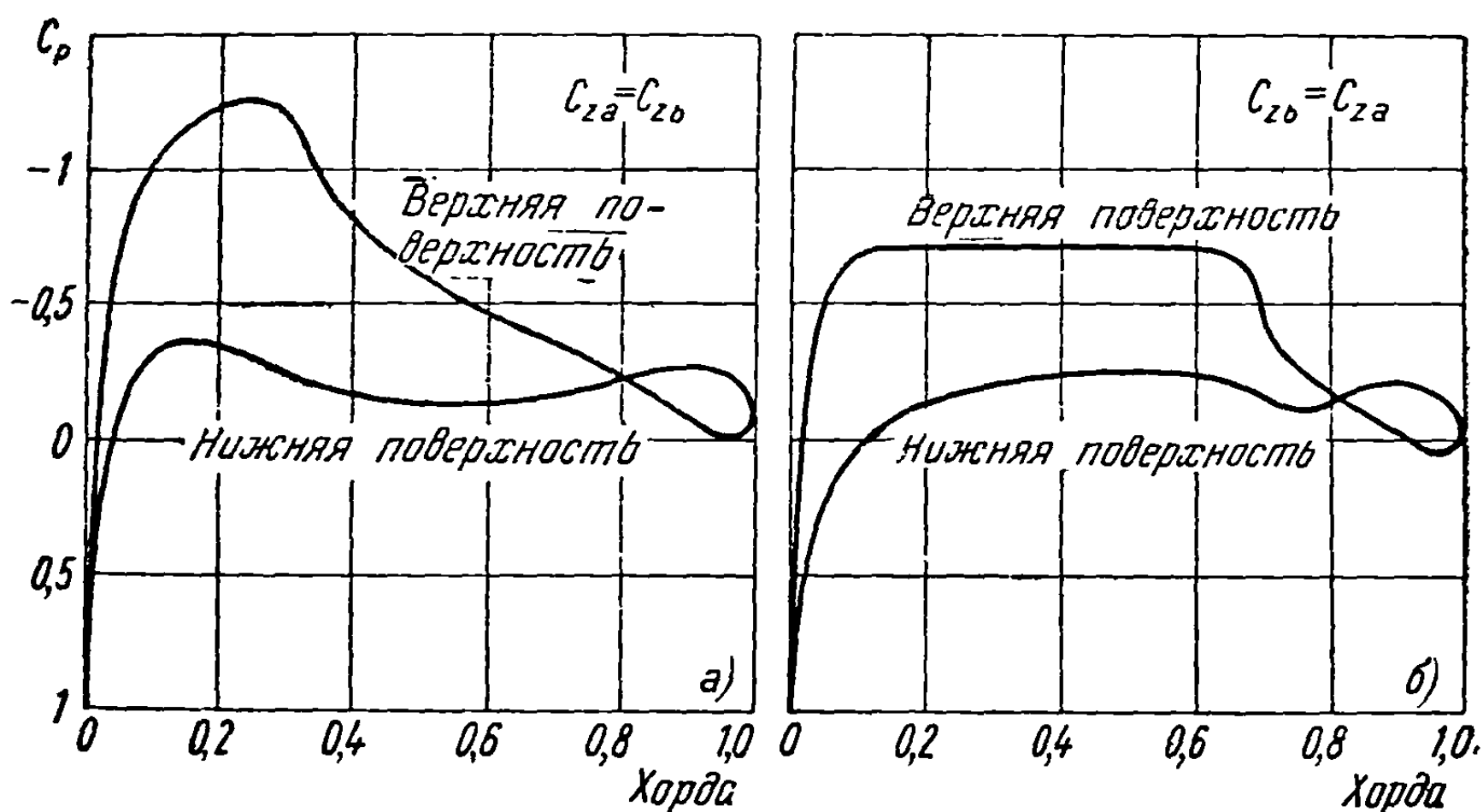
Дальнейшим следствием указанных явлений оказывается перемещение оси нулевой подъемной силы при изменении  $M_\infty$ . Вплоть до значения  $M_\infty = M_c$  ось нулевой подъемной силы остается той же, что и в случае несжимаемого течения. За этой точкой возникают описанные выше явления (фиг. 13.19), и в определенный момент ось внезапно изменяет свое положение. Пусть профиль расположен так, что ось  $AB$  направлена по потоку, и пусть  $\alpha_0$  — угол, образуемый осью нулевой подъемной силы с этим направлением. Вначале подъемная сила положительна; как только будет  $M_\infty > M_c$ , подъемная сила уменьшится и в определенный момент станет равной нулю (фиг. 13.19с). Угол, образуемый осью нулевой подъемной силы с направлением потока, становится равным нулю. Экспериментальная диаграмма на фигуре 13.21 показывает, что ось нулевой подъемной силы стремится совпасть с осью  $AB$  профиля при приближении числа  $M_\infty$  к единице. Это в значительной степени объ-

ясняет поддержание на одном уровне величины подъемной силы в случае профиля с отрицательной кривизной, так как в рассматриваемом интервале изменения числа Маха угол атаки и подъемная сила возрастают при смещении оси нулевой подъемной силы, в то время как подъемная сила падает при возрастании числа Маха (см. фиг. 13.19б).

Профили с отрицательной кривизной имеют различные недостатки при низких посадочных скоростях вследствие низкой максимальной подъемной силы, отрицательного момента при нулевой подъемной силе и других невыгодных особенностей. Поэтому форма перевернутых нормальных профилей (фиг. 13.22а) не используется при конструировании самолетов. Указанные выше преимущества, без соответствующих недостатков, достигаются в стреловидных крыльях, чем и объясняется их широкое использование в самолетостроении.



Фиг. 13.22, а,б,в



Фиг. 13.23, а,б

Исследования показывают, что профили S-образной формы (фиг. 13.22б) с двойкой кривизной — положительной и отрицательной — устраняют некоторые из указанных недостатков; однако при этом требуется резкое обратное искривление около задней кромки, что создает очень большой момент при нулевой подъемной силе.

Для устранения этого последнего недостатка наиболее подходящими свойствами в случае полета с большими дозвуковыми скоростями обладают профили W-образной формы (фиг. 13.22в).

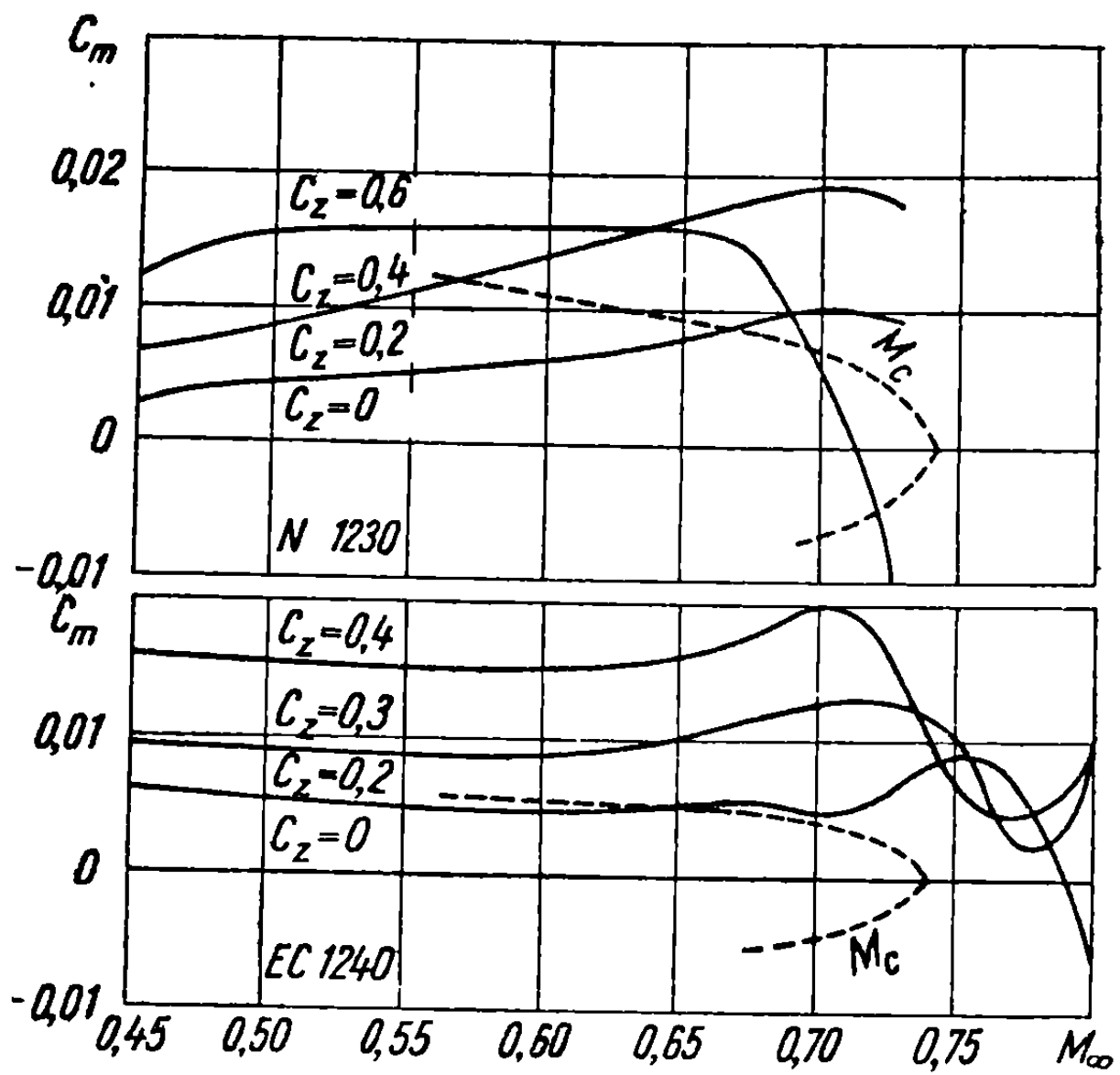
**13.3.2. Ламинарные профили.** Напомним, что распределение давления на профиле играет весьма важную роль при определении критического числа Маха. Появление критической скорости на профиле связано с максимальным разрежением, существующим в некоторой точке профиля. При одной и той же заданной полной подъемной силе, которую требуют полетные условия, распределение давления различно для различных профилей. Профили с очень высокой степенью разрежения (фиг. 13.23а) мало полезны, потому что для них критическое число Маха оказывается низким. Таким образом, желательно найти профили, для которых при той же подъемной силе давление будет иметь очень слабое и постепенное изменение вдоль хорды, и, следовательно, критическое число Маха может быть высоким (фиг. 13.23б). Профили, показывающие такое распределение давления, при заданной подъемной силе (или заданном угле атаки) могут быть легко построены различными методами. Эти профили обладают и другим важным качеством — течение около них вследствие слабого изменения давления остается ламинарным вдоль значительной части контура, и переход от ламинарного к турбулентному течению наблюдается только около задней кромки. Благодаря этому трение сильно уменьшается, а качество профилей становится более высоким. По указанной причине такие профили называются ламинарными.

#### 13.4. Изменение аэродинамических моментов

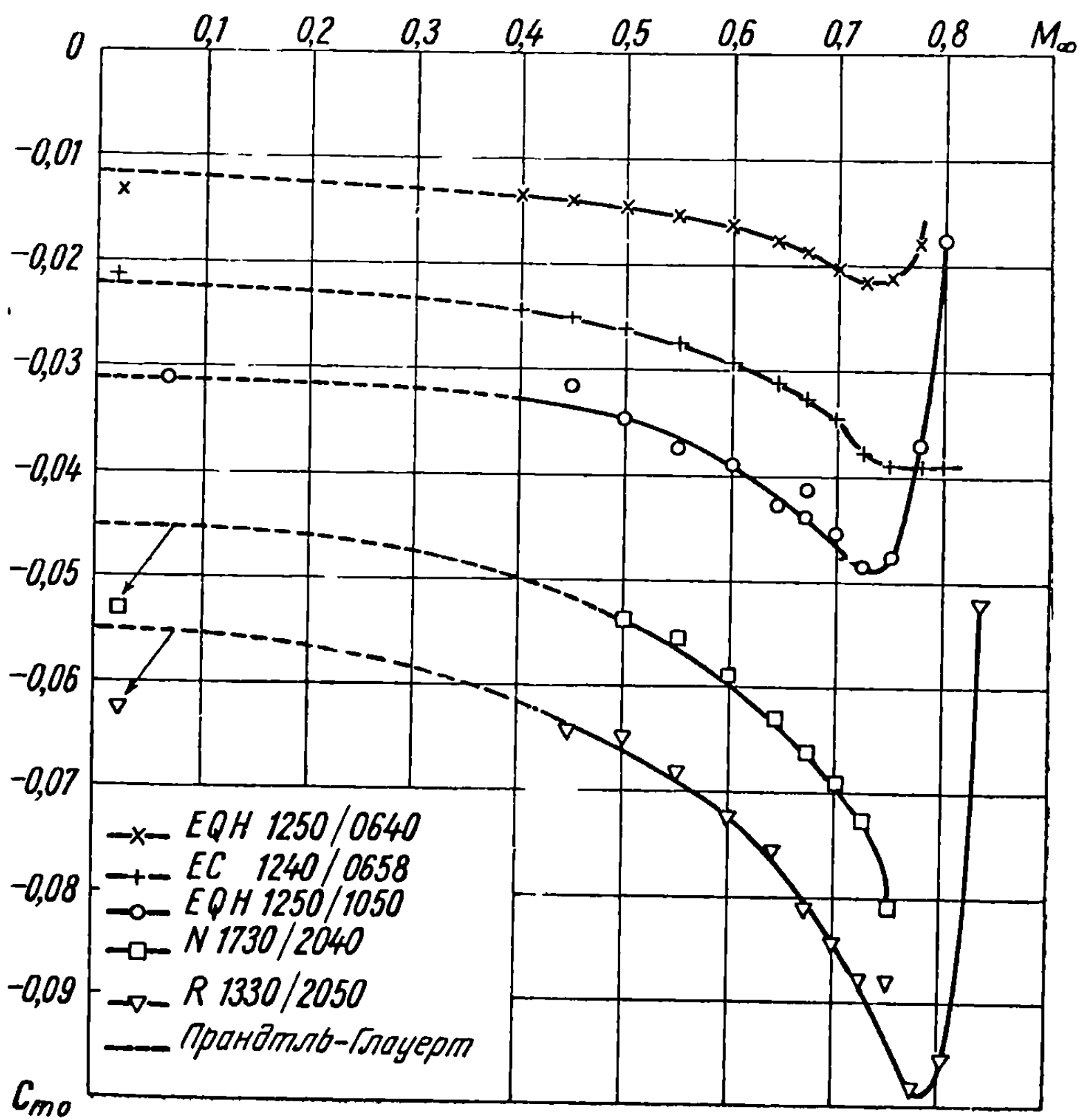
Явления, рассмотренные выше, имеют также влияние на моменты. С самого начала нужно сделать различие между симметричными профилями, для которых момент при нулевой подъемной силе равен нулю ( $C_{m0} = 0$ ), и изогнутыми, для которых момент отличен от нуля.

**13.4.1. Коэффициент момента для симметричных профилей.** Если рассматривается изменение аэродинамического момента в зависимости от подъемной силы, то влияние числа Маха на последнюю будет отражаться и на моменте. С другой стороны, центр результирующего давления не остается на том же месте, как в случае несжимаемого течения, а перемещается в направлении к центру профиля. Поэтому момент как функция от подъемной силы слабо изменяется. Фигура 13.24 воспроизводит диаграммы для изменения коэффициента момента  $C_m$  (по отношению к точке, расположенной на расстоянии 25% хорды от передней кромки) для двух близких профилей с 12%-ной относительной максимальной толщиной, расположенной на расстоянии 30% (N 1230) и соответственно 40% (ЕС 1240) хорды от передней кромки.

**13.4.2. Коэффициент момента при нулевой подъемной силе.** Момент при нулевой подъемной силе, подобно давлению, подчиняется теоретическому закону до тех пор, пока ось нулевой подъемной силы сохраняет свою ориентацию, что наблюдается на практике даже при значениях  $M_\infty$ , больших  $M_c$ . Если рассматриваются профили с изменяющейся кривизной, с различными коэффициентами  $C_{m0}$  в случае несжимаемого течения, то изменение  $C_{m0}$  в зависимости от  $M_\infty$  представляется на диаграммах фигуры 13.25. Хотя профили имеют различную толщину и их



Фиг. 13.24



Фиг. 13.25

максимальная кривизна располагается на расстоянии от передней кромки, изменяющемся между 30 и 60% длины хорды, изменение коэффициента  $C_{m0}$  следует очень близко теоретическим кривым. Внезапное падение в точке за значением  $M_c$  обусловлено действием ударных волн как на верхней, так и на нижней поверхностях, а также внезапным изменением положения оси нулевой подъемной силы (фиг. 3.19в и 13.20). Эта согласованность экспериментальных и теоретических данных, наблюдаемая при больших значениях  $M_\infty$ , не является удовлетворительной при в случае очень изогнутых профилей.

малых скоростях ( $M_\infty \approx 0$ ), как это вытекает из диаграммы, особенно

Если смещение центра давления в зависимости от числа Маха приближенно вычислено и эта функция принята как почти параболическая, то изменение полного момента относительно передней кромки в интервале  $0 < M_\infty \leq M_c$  определяется формулой

$$C_m = C_{m0} + (0,25 + kM_\infty) C_z = \frac{C'_{m0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} + (0,25 + kM_\infty) \frac{C'_z}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad (13.13)$$

где  $C'_{m0}$  и  $C'_z$  — соответствующие величины в случае несжимаемого течения, а  $k$  — очень малый коэффициент, зависящий от  $M_\infty$  и формы профиля.

Обозначая через  $C'_m$  коэффициент момента для несжимаемого течения по отношению к передней кромке, имеем

$$C'_m = C'_{m0} + 0,25C'_z, \quad (13.14)$$

следовательно,

$$\frac{C_m}{C'_m} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left( 1 + \frac{kM_\infty C'_z}{C'_m + 0,25C'_z} \right). \quad (13.15)$$

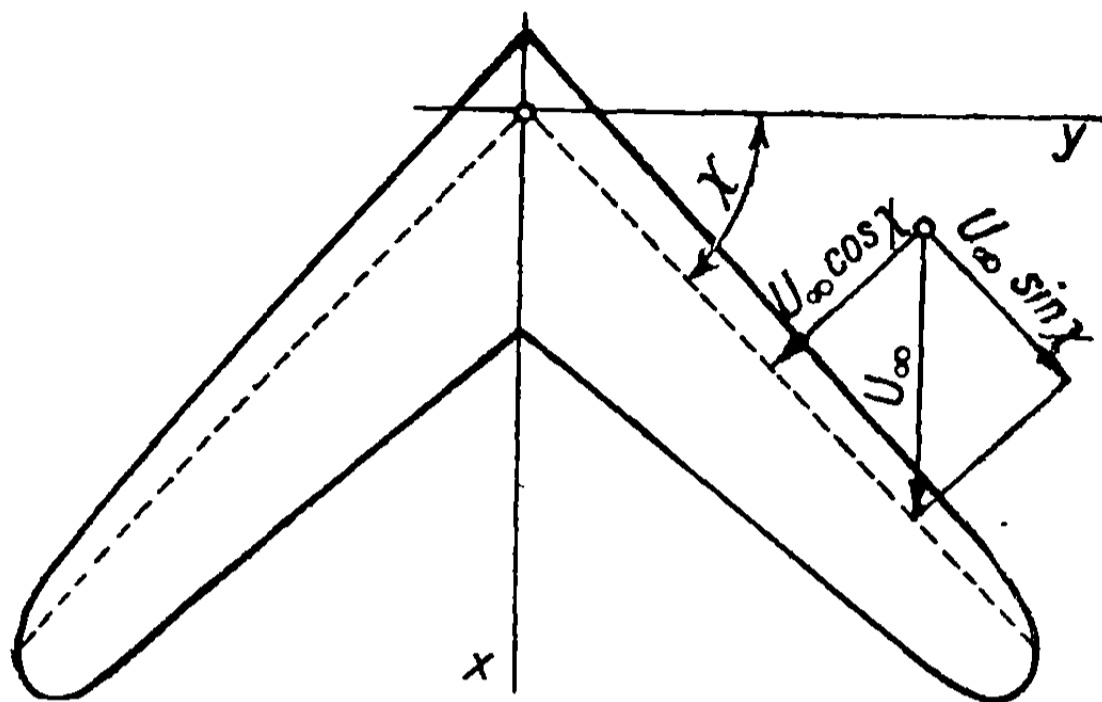
### 13.5. Рассмотрение стреловидных крыльев при большой дозвуковой скорости полета

Стремление избежать вредных явлений, возникающих за критическим числом Маха ( $M_\infty = M_c$ ), привело к построению специальных профилей ламинарного типа; при этом ставилась цель обеспечить для частного угла атаки распределение давления с очень слабым его изменением так, чтобы сделать число  $M_c$  возможно более высоким, не достижимым для самолета, снабженного крыльями с таким профилем. Напомним, что профили с отрицательной кривизной обладают указанным качеством, но из-за многих недостатков не подходят для практического использования. Возможно, что профили с W-образной кривизной, которые устраняют часть этих недостатков, в близком будущем найдут широкое применение.

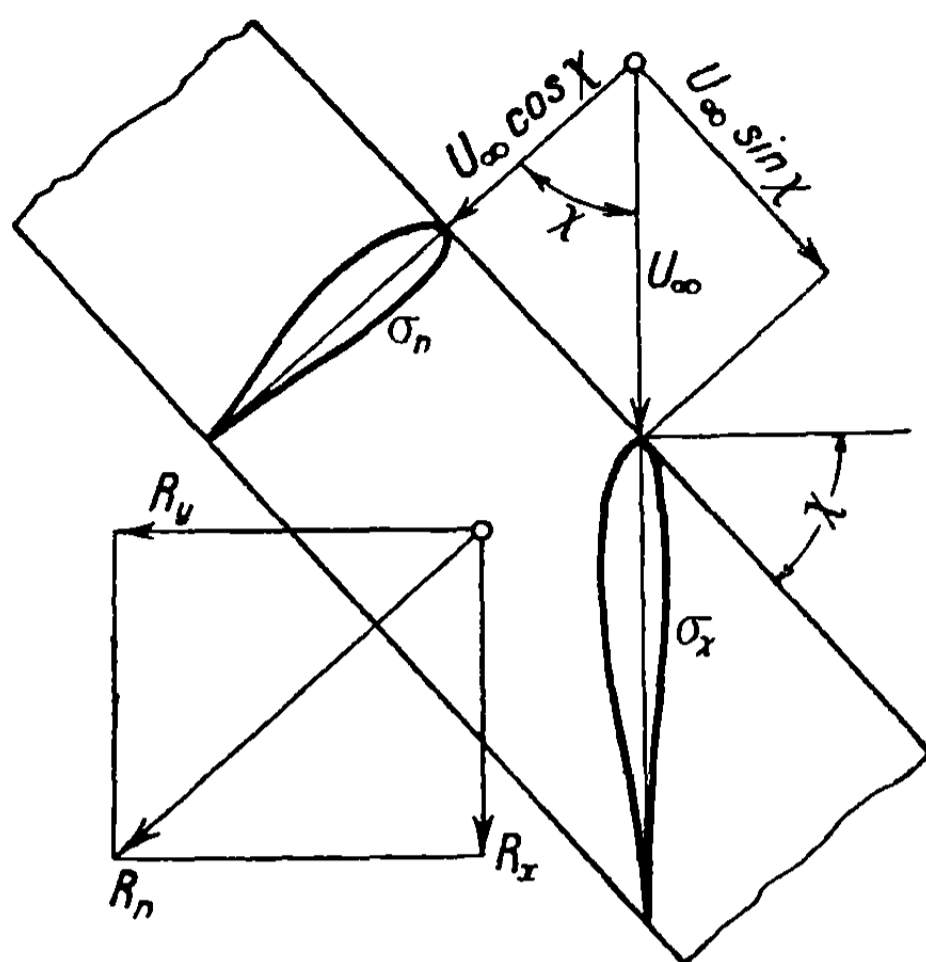
Кроме возможности подходящего выбора профиля, существует другой надежный и эффективный метод увеличения  $M_c$  и введения других улучшений, а именно — использование стреловидных крыльев (фиг. 13.26). Рассмотрим такое крыло в отношении сопротивления, обусловленного давлением, и влияния стреловидности на число  $M_c$ . Возьмем часть крыла бесконечного размаха, образующего угол  $\gamma$  с нормалью к направлению потока. Скорость  $U$



свободного потока разлагается на две компоненты:  $U_\infty \cos \chi$  вдоль нормали к крылу,  $U_\infty \sin \chi$  вдоль размаха крыла (фиг. 13.27). Последняя создает только трение и не влияет на распределение давления. Нормальная компонента влияет непосредственно на распределение давления по профилю, обуславливая три действия: трение на профиле, сопротивление, связанное с давлением, и отсрочку возникновения критического течения, т. е. повышение числа  $M_c$ .



Фиг. 13.26



Фиг. 13.27

Если пренебречь работой трения, то влияние скорости  $U_\infty \sin \chi$ , параллельной размаху, сведется к нулю. Это легко видеть, если предположить, что крыло подвергается воздействию нормального потока  $U_\infty \cos \chi$ , и заменить параллельную скорость перемещением крыла параллельно самому себе со скоростью, равной  $-U_\infty \sin \chi$ . Последнее не вызывает никаких изменений формы течения вокруг крыла, создаваемой одной только нормальной компонентой потока. Если  $R_n$  — сопротивление на единицу поверхности, обусловленное давлением,  $C_{np}$  — соответствующий коэффициент сопротивления, зависящий от скорости, нормальной к крылу и равной  $U_\infty \cos \chi$ , то

$$R_n = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \cos^2 \chi C_{np}; \quad (13.16)$$

отсюда

$$R_x = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \cos^3 \chi C_{np}, \quad (13.17)$$

и коэффициент сопротивления  $C_{xp}$ , соответствующий действительной скорости полета, будет

$$C_{xp} = C_{np} \cos^3 \chi. \quad (13.18)$$

Этот коэффициент относится только к части сопротивления, обусловленной давлением, без включения другой части, связанной с трением, которая представляет в случае тонких профилей и малых углов атаки значительную долю полного сопротивления; кроме того, не принималось во внимание индуктивное сопротивление. Сопротивление трения остается неизменным, независимо от стреловидности крыла.

Так как сопротивление давления особенно велико в случае толстых профилей и больших углов атаки, преимущества стреловидных крыльев в этих условиях очевидны.

Полное сопротивление крыла  $C_x$  складывается из сопротивлений давления  $C_{xp}$ , трения  $C_{xf}$  и индуктивного  $C_{xi}$ :

$$C_x = C_{xp} + C_{xf} + C_{xi}, \quad (13.19)$$

уменьшение за счет стреловидности получается только для  $C_{xp}$  (13.18).

Отметим, что при оценке действительных преимуществ нужно также принять в расчет подъемную силу крыла, которая уменьшается подобным же образом; обозначая через  $P$  подъемную силу на единицу площади и связывая ее с нормальной скоростью  $U_\infty \cos \chi$ , получим

$$P = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \cos^2 \chi C_{nz}, \quad (13.20)$$

где коэффициент  $C_{nz}$  относится к нормальному сечению  $\sigma_n$  и к соответствующему углу атаки, образуемому сечением с нормальной компонентой скорости; если ввести действительную скорость  $U_\infty$ , то коэффициент подъемной силы  $C_z$  будет

$$C_z = C_{nz} \cos^2 \chi. \quad (13.21)$$

Преимущество, состоящее в том, что сопротивление давления уменьшается пропорционально  $\cos^3 \chi$ , а подъемная сила — пропорционально  $\cos^2 \chi$ , является, следовательно, определенным аргументом в пользу стреловидного крыла. Но это преимущество мало по сравнению с тем, что достигается благодаря задержке появления критического числа Маха. Напомним, что давления обуславливаются только нормальной скоростью  $U_\infty \cos \chi$ ; следовательно, нормальный профиль действует так, как если бы число Маха потока было  $M_n$ , определяемое равенством

$$M_n = \frac{U_\infty}{a_\infty} \cos \chi = M_\infty \cos \chi, \quad (13.22)$$

и более низкое, чем число Маха свободного потока. Если обозначить через  $M_{nc}$  критическое число Маха, соответствующее нормальному потоку, которое является характеристикой профиля и, по определению, равно  $M_c$ , и через  $M_{c\chi}$  — критическое число, относящееся к действительному потоку  $M_\infty$ , т. е. течению, набегающему на крыло под углом и соответствующему точно появлению критической скорости на профиле, то

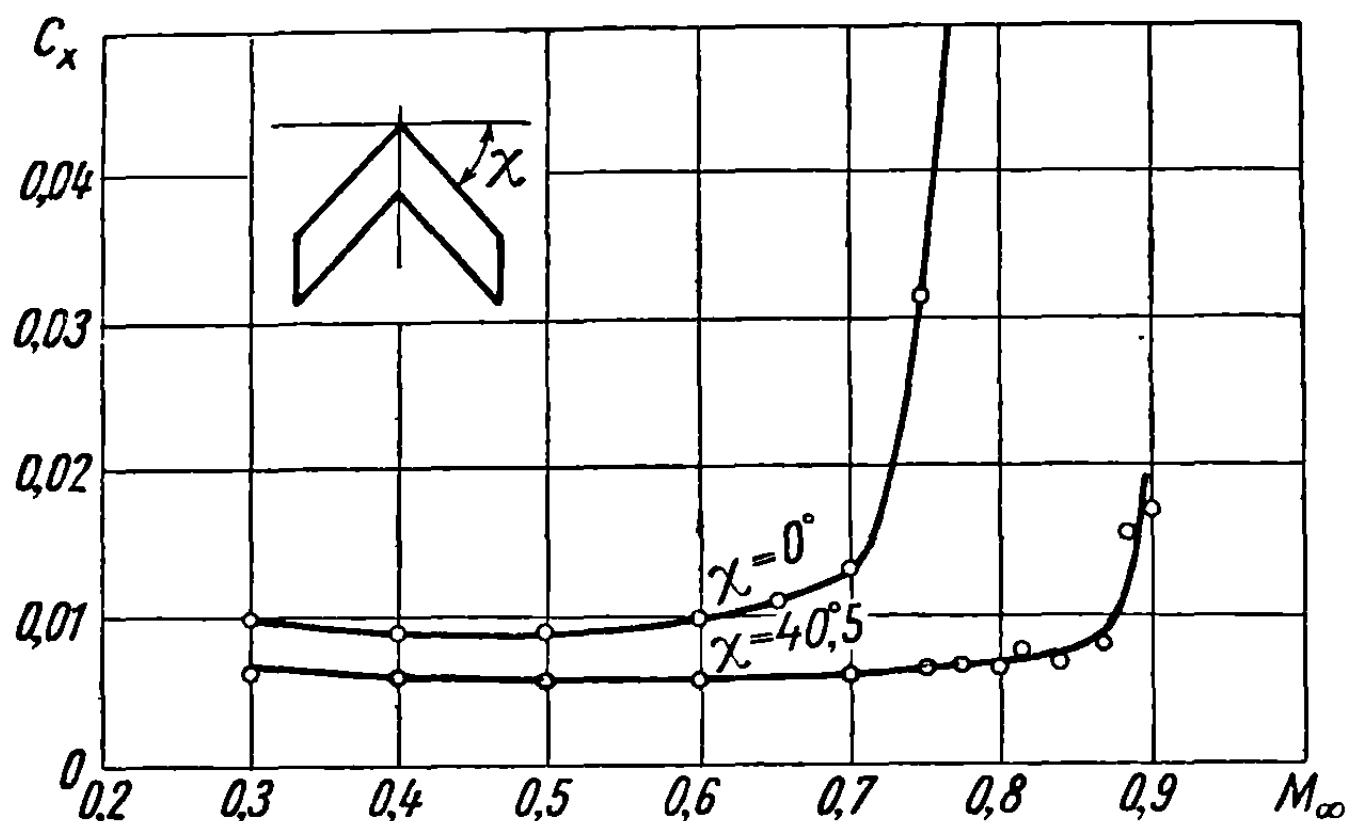
$$M_{nc} = M_c = M_{c\chi} \cos \chi; \quad (13.23)$$

из этой формулы очевидно, что реальное критическое число Маха  $M_{c\chi}$  выше нормального числа Маха профиля. Сказанное представляет существенное преимущество стреловидного крыла, которое привело к его использованию при полете с большими дозвуковыми скоростями.

Но нужно иметь в виду, что приведенные рассуждения относятся к крылу бесконечного размаха и могут быть применены для большей части действительного крыла, но не применимы к его центральной части, где явления очень сложны. Поэтому формула (13.23) может служить скорее

как предварительное указание; реальное критическое число  $M_{cr}$  несколько ниже значения, даваемого этой формулой, и заключается между  $M_c$  и  $M_{c\chi}$ :

$$M_c < M_{cr} < M_{c\chi}. \quad (13.24)$$



Фиг. 13.28

Испытания, производимые со стреловидным крылом при угле  $\chi = 40,5^\circ$ , подтверждают теоретические предсказания; это видно из диаграммы на фигуре 13.28, где характеристическое число  $M_c$  для профиля 20%-ной относительной толщины было равно 0,70. При сравнении экспериментальных и теоретических результатов предполагается, что только половина сопротивления обусловлена давлением; в указанном случае теоретическая кривая при  $\chi = 40,5^\circ$  очень близка к экспериментальной; но такого совпадения нет для величин  $M_{c\chi}$ . Подсчитанное значение  $M_{c\chi} \approx 0,91$ , тогда как действительная величина оказывается равной 0,83. С целью учета экспериментальных результатов обычно предлагается эмпирическая формула для  $M_{c\chi}$ , а именно

$$M_{c\chi} = M_c \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \right) < \frac{M_c}{\cos \chi}, \quad (13.25)$$

которая дает результаты, более близкие к полученным на практике.

### 13.6. Выводы

Множество проблем, возникающих при полете в воздухе, могут быть разрешены с помощью аэродинамики несжимаемой жидкости, и получающиеся результаты подтверждаются экспериментом. В аэродинамике сжимаемой жидкости некоторые, проблемы большой важности также решены, вплоть до определенного числа Маха, и полученные результаты в значительной степени подтверждены экспериментом. Однако многое еще предстоит завершить, но это упирается в математические трудности, возникающие из-за учета сжимаемости в уравнениях движения. Если оказываются превзойденными определенные значения числа Маха, выше которых появляется сверхзвуковое течение в некоторых областях движущейся жидкости, отделенных от остальной определенными граничными линиями, то возникающие при этом сложные явления не могут быть легко представлены схематически или в упрощенной математической форме. По той же причине теория в указанной области исследований недостаточно кристаллизована и результаты опытов

недостаточно систематизированы, чтобы сформулировать правила общей применимости.

Автор сделал попытку дать общий обзор этих сложных явлений и объяснить их физическую сущность, представив, где это доступно, теоретические соображения, указывающие пути научных исследований.

Теперь легче перейти к изучению сверхзвукового потока; это изучение можно произвести более эффективными методами, причем возникающие проблемы решаются с большой точностью и получаются результаты, подтверждаемые экспериментальными наблюдениями.

Мы считали полезным после исследования дозвукового течения представить изложенные выше соображения о трансзвуковых явлениях, предпосылая их изучению сверхзвуковых течений и наиболее важных случаев применения этих течений к крыльям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ackeret. «Helv. phys. acta», № 1, 1928, p. 301—322.
2. J. N. Jacobs. Volta Congress 1935, Rome.
3. M. J. Brennan a. A. C. Stevenson. Simplified Two-Dimensional Aerofoil Theory. (Упрощенная теория двухразмерного профиля.) «Aircraft Eng.», 18, London, 1946, p. 182.
4. E. Carafoli. Tragflügeltheorie. (Теория несущих крыльев.) Berlin, Verlag Technik, 1954, S. 167. (Е. Карафали. Аэродинамика крыла самолета. Перевод с франц. Изд. АН СССР, М. 1956)..
5. E. Carafoli, T. Oroveanu. Mecanica fluidelor. (Механика жидкости.) București, Editura Academiei RPR, 1952, p. 179.
6. Л. А. Симонов, С. А. Христианович. ПИММ, 8, вып. 2, 1944, стр. 89—98.
7. H. S. Tsien, L. Lees. «J. Aeronaut. Sci.», 12, № 2, 1945, p. 173—187.
8. E. Pistolesi. Convegno di scienze fisiche, matematiche e naturale. Roma, 1935.
9. E. Carafoli. Sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes trapézoïdales et rectangulaires. (Аэродинамические характеристики трапециевидных и прямоугольных крыльев.) Comunicările Academiei de științe din România, 19 Martie 1943.
10. E. Carafoli, N. Tîrpeî. Asupra teoriei aripilor în sageata seue în deriva. (О теории стреловидных крыльев.) «Bul. științ. Acad. RPR», 4, 1948.
11. M. Marini. La distribuzione de la portanza sulle ali a freccia. «Aerotecnica». 28, fasc. 4, 1948.
12. C. Jacob. Introducere matematică în mecanica fluidelor. (Математическое введение в механику жидкости.) București, Ed. Academiei RPR, 1952.
13. С. А. Христианович. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. ЦАГИ, № 481, М., 1940.
14. Л. И. Седов. Плоские задачи гидро- и аэродинамики, Гос. тех.-теорет. изд., М., 1950.
15. C. Jacob. «C. r. Acad. Sci.», 223, № 19, 1946, p. 714—716.
16. H. S. Tsien. «J. Aeronaut. Sci.», 6, № 10, 1939, p. 399—407.
17. Th. Karman a. H. S. Tsien. «J. Aeronaut. Sci.», 6, № 12, 1939; 8, № 9, 1941, p. 337—356.
18. Н. А. Слезкин. К вопросу о плоском движении газа. ДАН СССР, 3 (12), № 9 (104), 1936, стр. 419—421.
19. H. S. Tsien. «J. Aeronaut. Sci.», 6, № 10, 1939, p. 399—407.
20. O. Janzen. «Phys. Zschr.», 4, № 14, 1913, S. 639.
21. L. Rayleigh. «Phil. Mag.», 32, 1916, p. 1.
22. H. Lamb. «Aeronaut. Res. Council Rep. a. Mem.», № 1156, London, 1928.
23. L. Poggi. «Aerotecnica», 12, 1932, p. 1579; 14, 1934, p. 532.
24. E. Pistolesi. Volta Congress, Rome, 1935, p. 296—302.  
(Течение с циркуляцией).

25. I. Imai. «Proc. Phys. Soc. Japan», 20, 1938, p. 636—645; 23, 1941, p. 180.
26. С. Каплан. «NACA Techn. Rep.», № 621, 624, 1938.
27. E. Lamla. «Luftfahrtforschung», 17, 1940, S. 329—331; 19, 1942, S. 358—362.
28. Z. Hasimoto. «Proc. Phys. Soc. Japan», 25, 1943, p. 563—574.
29. G. C. Lin. «Quart. Appl. Math.», 4, № 3, 1946, p. 291—297.
30. С. А. Христианович и И. М. Юрьев. ПММ, 11, вып. 1, 1947, стр. 105—108.
31. J. Leray. Mécanique des fluides compressible. (Механика сжимаемой жидкости). Paris, 1946, p. 87—94.
32. P. Germain. «C. r. Acad. Sci.», 223, № 14, 1946, p. 532—534.
33. С. Jacob. «Bul. științ. Acad. RPR», 1, № 8, 1951, p. 741.
34. W. F. Hilton. High-Speed Aerodynamics. (Аэродинамика больших скоростей.) London, Longmans, Green & Co. 1951, p. 109.
35. J. A. Beavan & G. A. M. Hyde. «Rep. & Mem.», № 2055, London, 1942.
36. J. Stack & A. E. Doenhoff. «NACA Techn. Rep.», № 492, 1934.
37. Н. С. Аржанников, В. Н. Мальцев. Аэродинамика, М., 1952.

## Глава 5

### СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Если скорости во всей области, занятой потоком, превышают в некоторых моментах местную скорость звука, то течение становится полностью сверхзвуковым, и уравнения, рассматриваемые ниже, применимы в пределах границ, допускаемых гипотезой малых возмущений. В этой главе рассматриваются результаты теории сверхзвукового течения в предположении малых возмущений применительно к задачам воздушного полета. Обсуждаются вопросы теории тонких профилей и течения вокруг тел вращения с помощью различных методов, имеющих либо общее применение, либо специально пригодных для определенной отдельной задачи.

#### 14. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУМЕРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Гипотеза малых возмущений включает, как и в случае дозвукового потока (см. раздел 9), предположение, что скорости рассматриваемого течения отличаются очень незначительно по направлению и величине от однородной скорости свободного потока, обозначаемой через  $U_\infty$ . Дополнительная скорость по сравнению с этим потоком, т. е. *скорость возмущения*, с ее компонентами —  $u$  вдоль оси  $Ox$  (параллельной направлению свободного потока) и  $v$  вдоль оси  $Oy$  — чрезвычайно мала. Компоненты полной скорости будут соответственно  $U_\infty + u$  и  $v$ .

Так как течение завихренное, скорость возмущения определяется потенциалом  $\varphi$ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (14.1)$$

Ранее было установлено, что этот потенциал удовлетворяет в предположении малых возмущений линейному уравнению (5.43), которое сводится в случае двумерного движения и для сверхзвукового течения ( $M_\infty > 1$ ) к уравнению гиперболического типа

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (14.2)$$

Число Маха свободного потока обозначено через  $M_\infty$ ; положим

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} = B; \quad (14.3)$$

общее решение уравнения (14.2) будет

$$\varphi = \varphi_1(x - By) + \varphi_2(x + By), \quad (14.4)$$

откуда очевидно, что вдоль прямых линий

$$\begin{aligned} z_1 &= x - By = \text{const}, \\ z_2 &= x + By = \text{const}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

имеем соответственно  $\varphi_1 = \text{const}$  и  $\varphi_2 = \text{const}$ . Эти линии являются простыми линиями Маха, так как их угловые коэффициенты, согласно уравнению (4.48), будут

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= \frac{1}{B} = \text{tg } \mu, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 &= -\frac{1}{B} = -\text{tg } \mu, \end{aligned} \quad (14.6)$$

а углы с направлением потока будут точно углами Маха.

В соответствии с типом течения, указанные две категории линий могут либо существовать одновременно, либо сводиться только к одной. Для того чтобы решить полностью задачу, необходимо определить граничные условия для каждого отдельного случая.

Компоненты скорости возмущения будут

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi_1}{dz_1} + \frac{d\varphi_2}{dz_2}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -B \frac{d\varphi_1}{dz_1} + B \frac{d\varphi_2}{dz_2}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

#### 14.1. Сверхзвуковое течение вдоль стенки волнообразной формы

Возвращаясь к задаче Аккерета, рассмотренной в случае дозвукового течения (см. раздел 9.1), исследуем ее аспекты для сверхзвукового течения.

Рассмотрим, как и выше, уравнение волнообразного контура, расположенного вдоль оси  $x$  (фиг. 14.1)

$$\eta = h \sin \alpha x, \quad \alpha = \frac{2\pi}{l}, \quad (14.8)$$

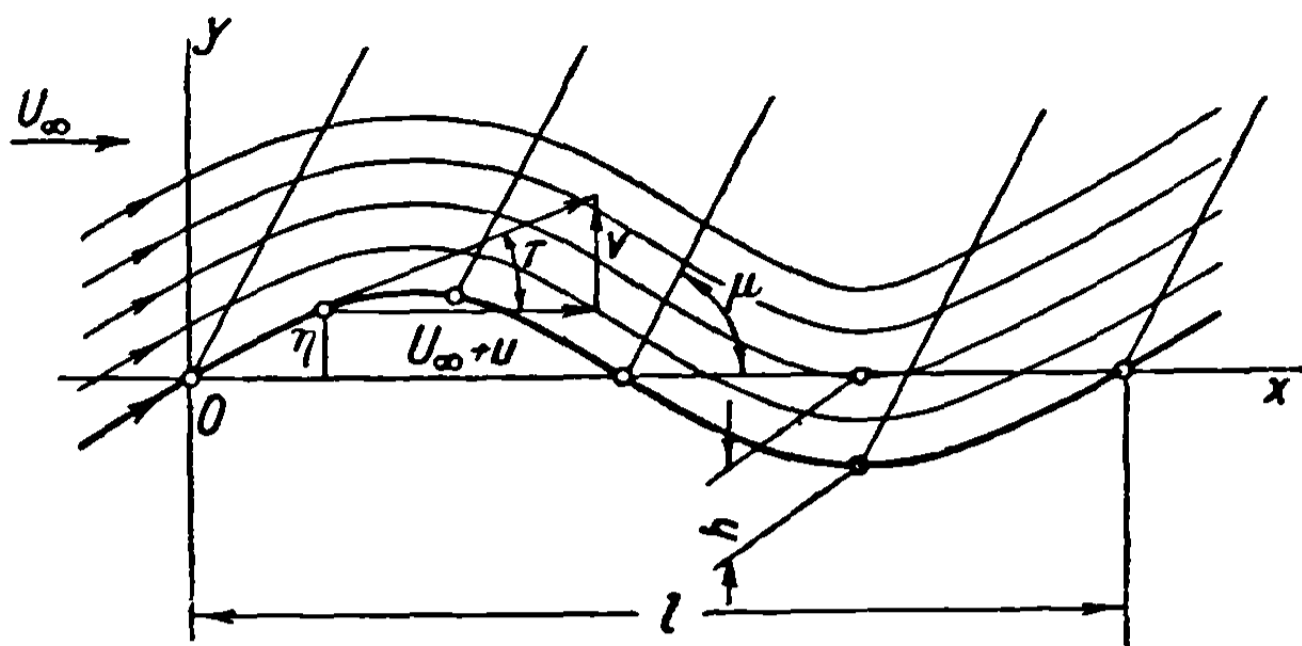
где  $l$  — длина волны рассматриваемой волнистости и  $h$  — ее максимальная амплитуда. Из полученных результатов очевидно, что линии, образующие угол  $+ \mu$  с горизонталью, являются линиями равного потенциала; другие линии несовместимы с рассматриваемым движением, так что выражение (14.4) сводится к простому виду

$$\varphi = \varphi_1(x - By), \quad (14.9)$$

из которого определяются компоненты возмущенной скорости:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi_1}{dz_1},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -B \frac{d\varphi_1}{dz_1}; \quad (14.10)$$



Фиг. 14.1

отсюда в силу предположения (вытекающего из гипотезы малых возмущений), что волнистость имеет малую амплитуду, получим на контуре

$$u = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=\eta} \approx \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0} = \left( \frac{d\varphi}{dz_1} \right)_{y=0}, \quad (14.11)$$

$$v = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=\eta} \approx \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = -B \left( \frac{d\varphi}{dz_1} \right)_{y=0}.$$

Вертикальная скорость на контуре (фиг. 14.1) определяется, как было ранее установлено для дозвукового течения посредством зависимости

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = h\alpha \cos \alpha x = \frac{v}{U_\infty + u} \approx \frac{v}{U_\infty}; \quad (14.12)$$

отсюда

$$v = -B \left( \frac{d\varphi}{dz_1} \right)_{y=0} = U_\infty h\alpha \cos \alpha x = U_\infty h\alpha \cos [\alpha(x - By)]_{y=0} =$$

$$= U_\infty h\alpha (\cos \alpha z_1)_{y=0}. \quad (14.13)$$

Решением последнего уравнения будет

$$\varphi = -\frac{U_\infty h}{B} \sin [\alpha(x - By)]. \quad (14.14)$$

Далее

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{U_\infty h\alpha}{B} \cos \alpha(x - By),$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_\infty h\alpha \cos \alpha(x - By). \quad (14.15)$$



откуда выводится формула для коэффициента давления (5.28)

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = \frac{2h\alpha}{B} \cos \alpha (x - By). \quad (14.16)$$

На контуре ( $y = \eta \approx 0$ )

$$\begin{aligned} u &= -\frac{U_\infty h \alpha}{B} \cos \alpha x, \\ v &= U_\infty h \alpha \cos \alpha x, \\ C_p &= \frac{2h\alpha}{B} \cos \alpha x. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Отметим существенный факт, характеризующий случай малых возмущений. Следует помнить, что в предположении малых возмущений угол  $\tau$ , образуемый касательной к контуру с осью абсцисс, будет очень малым, так что, согласно уравнению (14.12), получим

$$u = -\frac{U_\infty h \alpha}{B} \cos \alpha x = -\frac{U_\infty}{B} \frac{d\eta}{dx} \approx -\frac{U_\infty \tau}{B}. \quad (14.18)$$

Это соотношение часто используется в дальнейшем.

При сравнении сверхзвукового течения с подобным дозвуковым основные отличия очевидны. В дозвуковом потоке движение далеко от стенки угасает и волнообразный контур не вызывает возмущений на бесконечности, тогда как в сверхзвуковом гидродинамическая форма течения полностью изменяется и возмущение распространяется до бесконечности. Характеристики обоих течений совершенно различны. Давление, например, которое для дозвукового потока определяется уравнением (9.27)

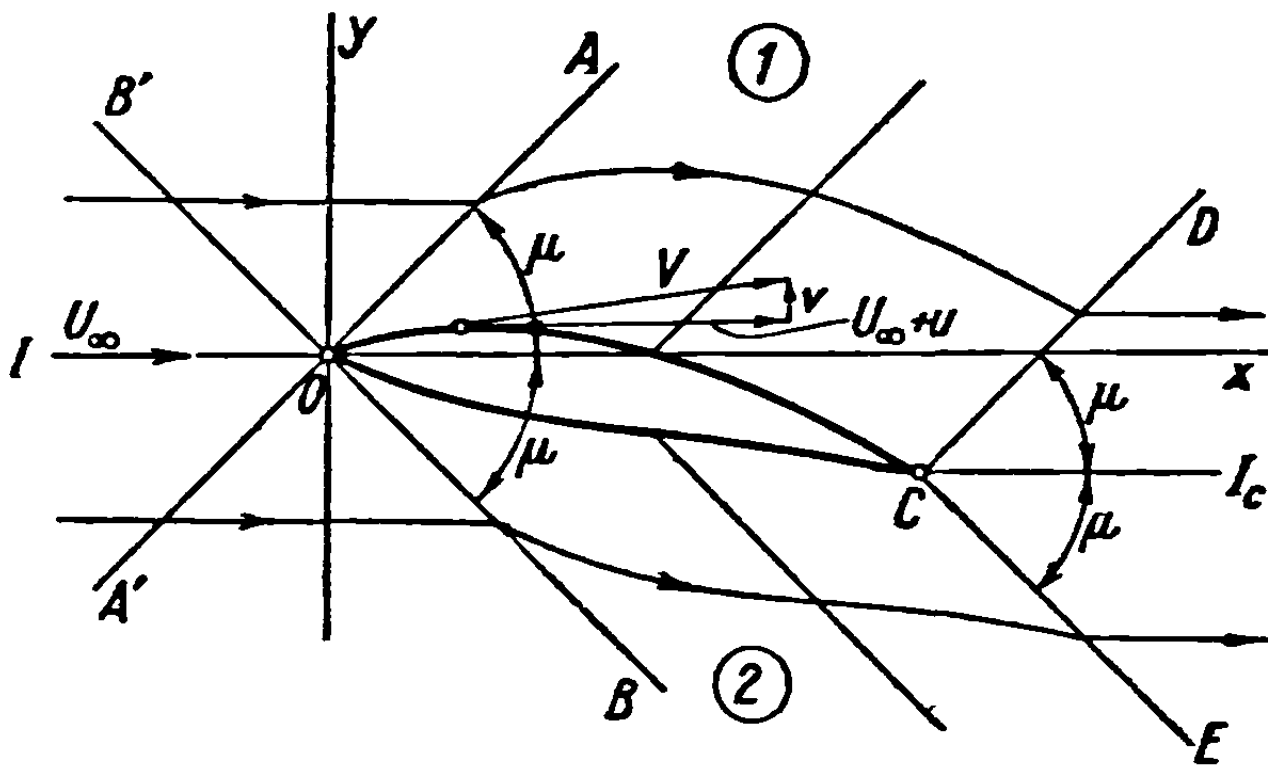
$$C_p' = \frac{-2h\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \sin \alpha x, \quad (14.19)$$

а для сверхзвукового уравнением (14.17), имеет разные значения. В то время как максимальные давления и разрежения в дозвуковом потоке соответствуют точкам максимальной и минимальной амплитуд, в сверхзвуковом потоке они соответствуют точкам нулевой амплитуды.

## 14.2. Теория тонкого профиля (линейная теория Аккерета)

Если толщина профиля, как и угол атаки, предполагаются малыми, то может быть применен метод малых возмущений. В этом случае решение дается общим выражением (14.4), в котором два члена потенциала хотя и существуют совместно, но относятся к различным областям; действительно, возмущения возникают между прямыми  $OA$  и  $CD$  в верхней области (1) и между прямыми  $OB$  и  $CE$  в нижней области (2). Эти линии образуют с направлением потока угол Маха  $\mu$  в верхней области и  $-\mu$  в нижней (фиг. 14.2) при предположении, что острый угол между касательными к профилю в точке  $O$  взят достаточно малым, чтобы предотвратить образование

отошедшей ударной волны. Прямая  $OB$  не может быть продолжена в верхнюю область, вдоль  $OB'$ , так как это означало бы, что возмущение может существовать также впереди угла Маха  $AOx$ . То же самое относится к прямой  $OA$ , которая не может быть продолжена в нижнюю область. Все пространство следовательно, делится на две части двумя прямыми  $IO$  и  $CI_c$ , параллельными оси абсцисс, и контуром верхней и нижней поверхностей профиля.



Фиг. 14.2

При гипотезе малых возмущений контур профиля совпадает с осью абсцисс, но касательная к профилю и вертикальные скорости изменяются вдоль хорды  $OC$ .

Поступая, как в предшествующем случае, из уравнения контура

$$\eta = \eta(x) \quad (14.20)$$

и из граничного условия на контуре

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_c \approx \left(\frac{dr}{dx}\right)_{y=0} = \frac{v}{U_\infty + u} \approx \frac{v}{U_\infty}, \quad (14.21)$$

а также замечая, что на верхней и нижней поверхностях мы будем иметь соответственно значения

$$\begin{aligned} v_1 &\approx \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = -B \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right)_{y=0}, \\ v_2 &\approx \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = B \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right)_{y=0}, \end{aligned} \quad (14.22)$$

получим соотношения

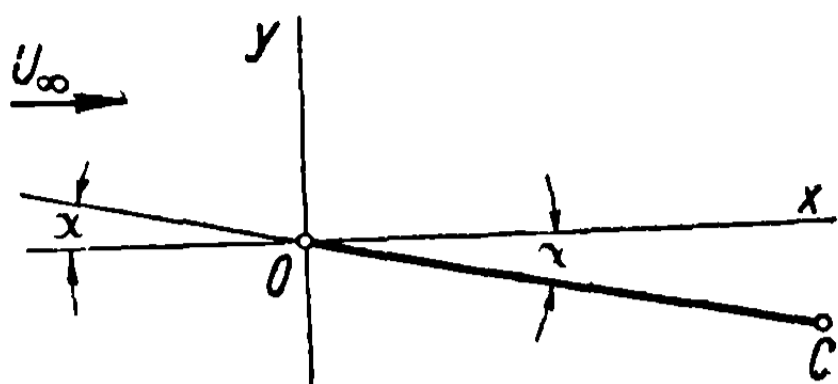
$$u_1 \approx \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right)_{y=0} = -\frac{v_1}{B} = -\frac{U_\infty}{B} \frac{d\eta_1}{dx}, \quad (14.23)$$

$$u_2 \approx \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\right)_{y=0} = \frac{v_2}{B} = \frac{U_\infty}{B} \frac{d\eta_2}{dx},$$

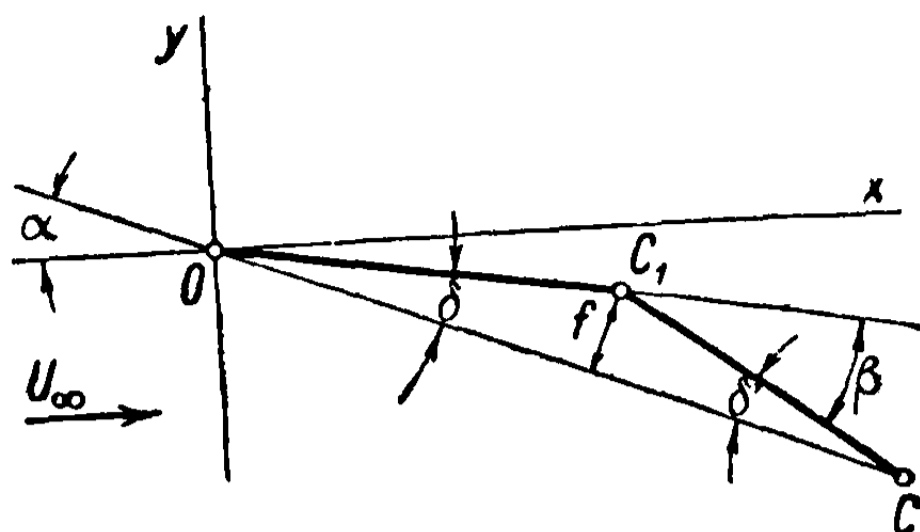
где  $\tau_{11}$  — верхняя и  $\tau_{12}$  — нижняя поверхности.



Подъемная сила не зависит от геометрии профиля; этот результат отчетливо оттеняет явление, описанное в предыдущем разделе (фиг. 13.20), состоящее в изменении положения оси нулевой подъемной силы.



Фиг. 14.4



Фиг. 14.5

14.2.2. Определение коэффициента лобового сопротивления<sup>1</sup>. Из фиг. 14.3 очевидно, что коэффициент лобового сопротивления может быть легко определен. Действительно, принимая во внимание, что

$$\sin \tau \approx \frac{d\eta}{dx}, \quad (14.28)$$

получим

$$C_x = \frac{1}{c} \int_0^c C_{p1} \sin \tau_1 dx - \frac{1}{c} \int_0^c C_{p2} \sin \tau_2 dx \approx \frac{2}{Bc} \int_0^c \left( \frac{d\eta_1}{dx} \right)^2 dx + \frac{2}{Bc} \int_0^c \left( \frac{d\eta_2}{dx} \right)^2 dx. \quad (14.29)$$

Применим эту формулу к некоторым распространенным профилям. Для *плоского профиля* (фиг. 14.4) соответственно

$$\frac{d\eta_1}{dx} = \frac{d\eta_2}{dx} = -\alpha, \quad C_x = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad \frac{C_x}{C_z} = \alpha; \quad (14.30)$$

Профиль с изломом (фиг. 14.5) определяется углом  $\delta$ , образуемым хордой и отрезком  $OC_1$ , при длине  $\overline{OC_1} = c_1$ , и наклоном  $\beta$  задней части  $C_1C$

$$\beta = \frac{c}{c - c_1} \delta, \quad (14.31)$$

или углом  $\delta'$  той же части профиля относительно хорды

$$\delta' = \frac{c_1}{c - c_1} \delta, \quad (14.32)$$

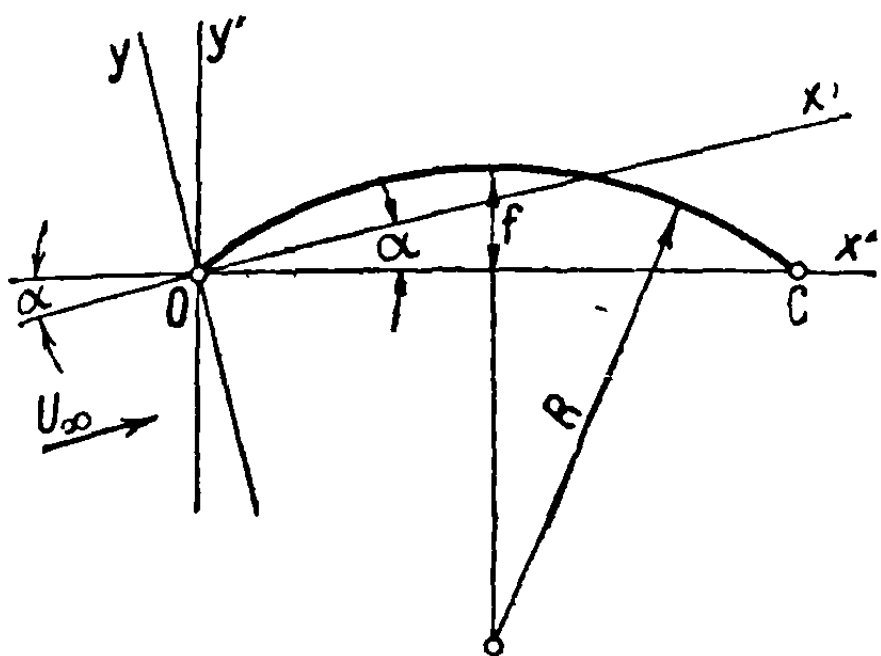
<sup>1</sup> Силы трения не включены в расчет.

или высотой  $f$

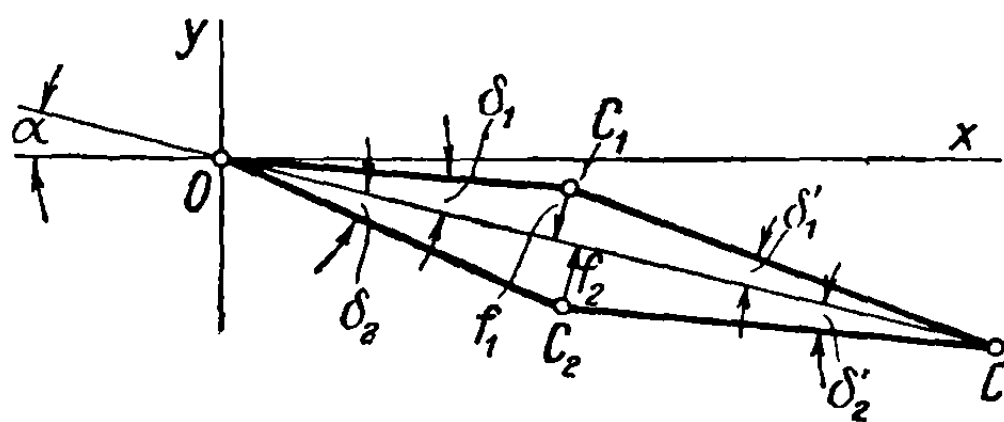
$$f \approx c_1 \delta. \quad (14.33)$$

Подставляя эти значения в соотношение (14.29), выразим коэффициент лобового сопротивления формулами различного вида:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{c_1}{c - c_1} \delta^2 \right) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + \delta \delta') = \\ &= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{c^2}{c_1 (c - c_1)} \frac{f^2}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (14.34)$$



Фиг. 14.6



Фиг. 14.7

Профиль в форме дуги окружности (фиг. 14.6) определяется прогибом  $f$  и уравнением его контура

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{4f}{c^2} (cx' - x'^2), \\ \frac{d\eta'}{dx'} &= \frac{4f}{c^2} (c - 2x') \end{aligned} \quad (14.35)$$

относительно системы  $Ox'y'$ , с осью абсцисс, параллельной хорде. Относительно системы  $Oxy$ , это уравнение запишется в виде

$$\frac{d\eta}{dx} \approx \frac{d\eta'}{dx'} - \alpha; \quad (14.36)$$

отсюда, применяя формулу (14.29), получим

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{c^2} \right). \quad (14.37)$$

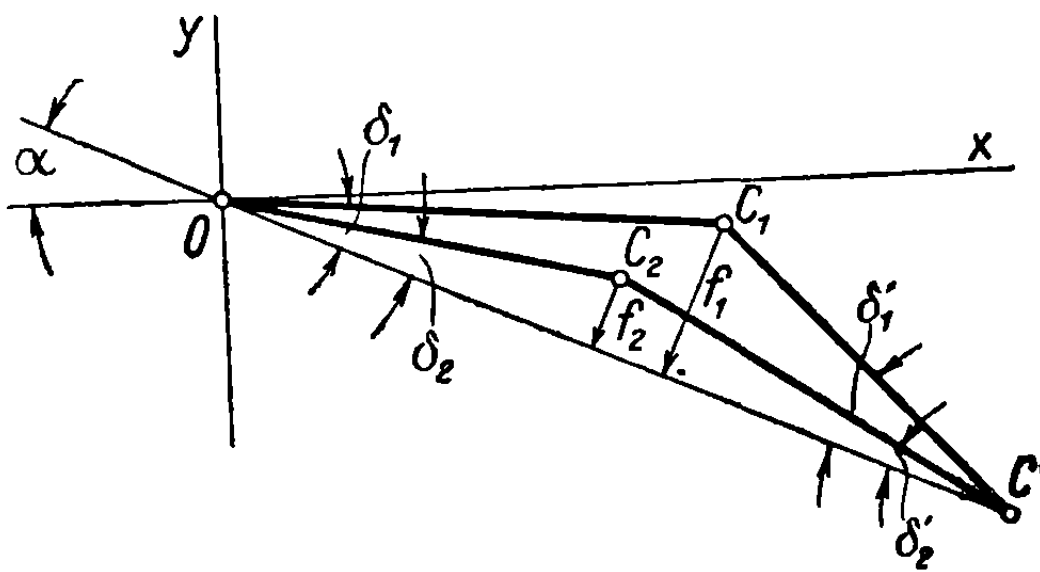
Приступая к рассмотрению толстых профилей, заметим, что верхняя поверхность отличается от нижней, так что, как видно из формулы (14.29), необходимо выполнить два интегрирования вместо одного, как требуется для профилей нулевой толщины. Волновое сопротивление профилей, обычно используемых при сверхзвуковом полете, определено ниже.

Ромбовидный профиль (фиг. 14.7) определяется углами  $\delta_1, \delta_2$ , соответственно  $\delta'_1, \delta'_2$ , толщинами  $f_1, f_2$  и длиной отрезков  $\overline{OC_1} = c_1, \overline{OC_2} = c_2$ . Интегрируя, как и в случае профиля с изломом, но отдельно для верхней и нижней поверхностей, получим

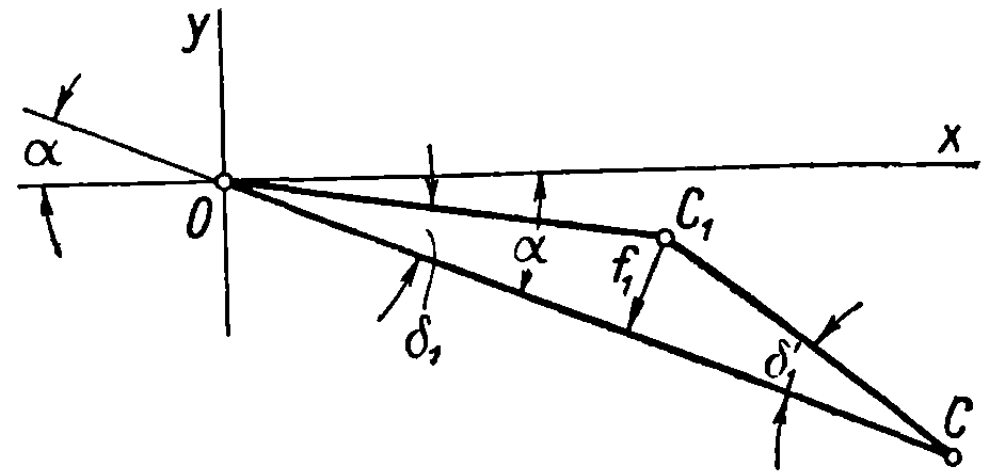
$$C_x = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( 2\alpha^2 + \frac{c_1}{c - c_1} \delta_1^2 + \frac{c_2}{c - c_2} \delta_2^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (2\alpha^2 + \delta_1 \delta'_1 + \delta_2 \delta'_2) = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ 2\alpha^2 + \right. \quad (14.38)$$

$$\left. + \frac{c^2}{c_1(c - c_1)} \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 + \frac{c^2}{c_2(c - c_2)} \left( \frac{f_2}{c} \right)^2 \right].$$



Фиг. 14.8



Фиг. 14.9

Эта формула действительна также для вогнуто-выпуклой формы (фиг. 14.8).

Если нижняя поверхность профиля образуется его собственной хордой (фиг. 14.9), то

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{c_1}{c - c_1} \delta_1^2 \right) = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{1}{2} \delta_1 \delta'_1 \right) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{c_1(c - c_1)} \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 \right]. \quad (14.3)$$

В случае симметричного профиля ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta, \delta'_1 = \delta'_2 = \delta', f_1 = f_2 = \frac{e}{2}, c_1 = c_2$ ) уравнение (14.38) упрощается:

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{c_1}{c - c_1} \delta^2 \right) = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + \delta \delta') =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \frac{c^2}{c_1(c - c_1)} \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 \right] = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \frac{c^2}{4c_1(c - c_1)} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \right], \quad (14.40)$$

где  $e = 2f_1$  — максимальная толщина.

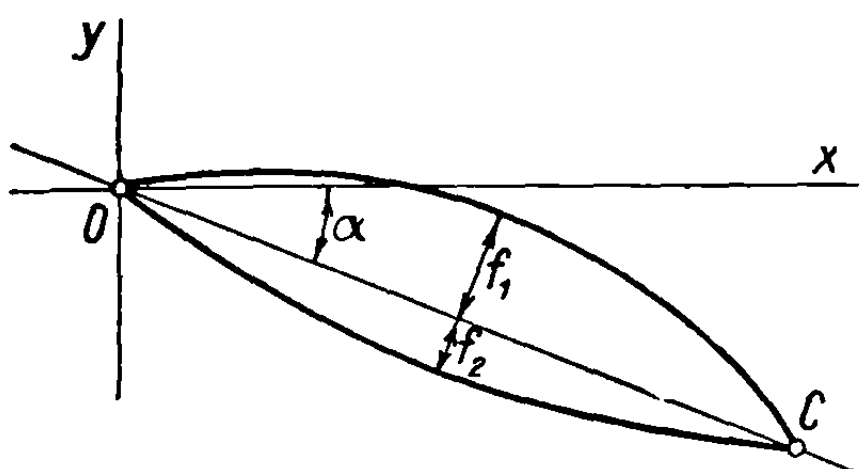
Если профиль имеет форму ромба ( $c = 2c_1$ ), то

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \left( \frac{e}{c} \right)^2 \right] = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + \varepsilon^2), \quad (14.41)$$

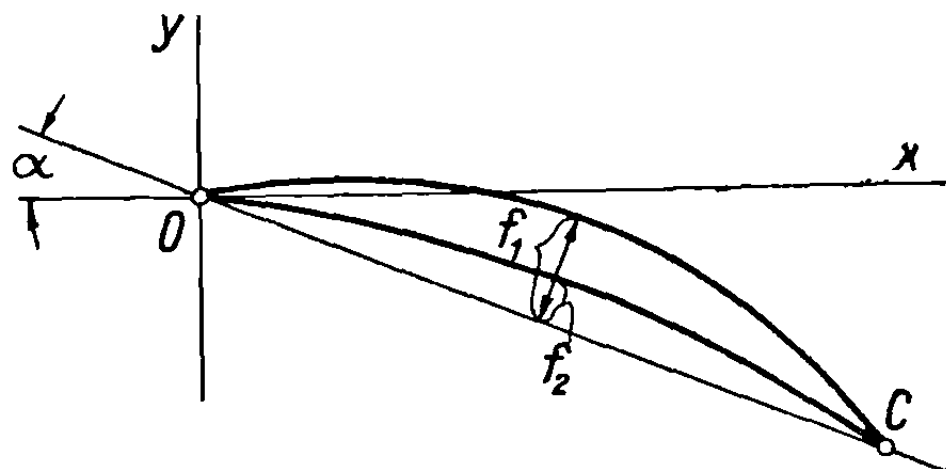
где максимальная относительная толщина обозначается через  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (14.42)$$

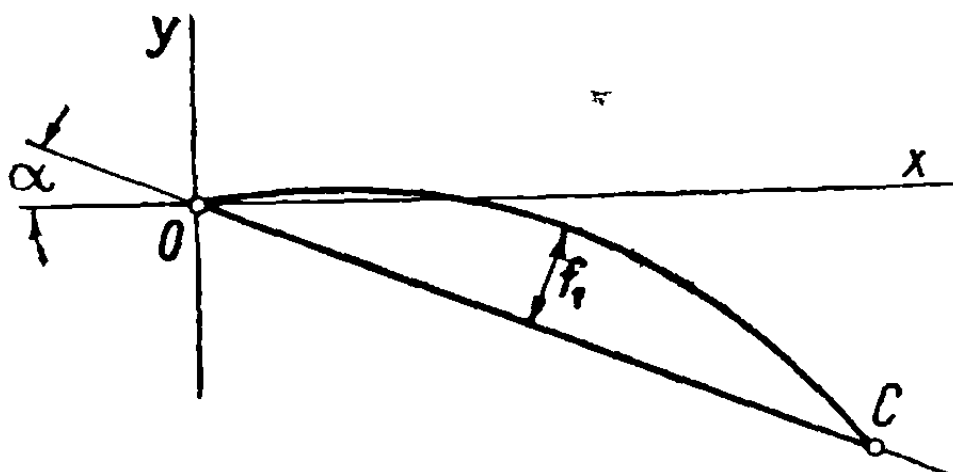
Дуговой профиль определяется высотами дуг  $f_1$  и  $f_2$  и может быть двояковыпуклым, выпукло-вогнутым или плосковыпуклым (фиг. 14.10,



Фиг. 14.10



Фиг. 14.11



Фиг. 14.12

14.11, 14.12). Применяя тот же метод, что и для тонкого дугового профиля, вначале для верхней, а затем для нижней поверхности получим

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \frac{8}{3} \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 + \frac{8}{3} \left( \frac{f_2}{c} \right)^2 \right]. \quad (14.43)$$

Для двояковыпуклого симметричного профиля  $f_1 = f_2$  получим

$$\varepsilon = \frac{e}{c} = \frac{2f_1}{c}; \quad (14.44)$$

тогда

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{4}{3} \varepsilon^2 \right); \quad (14.45)$$

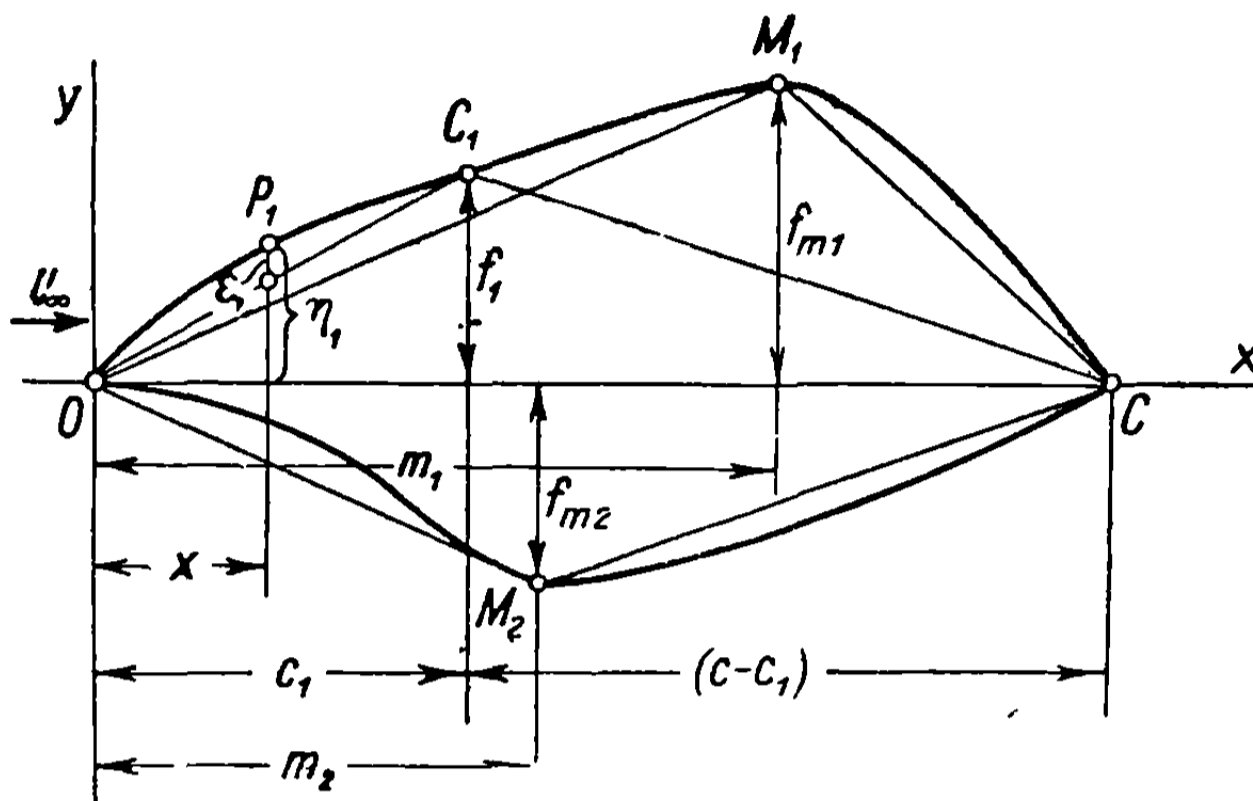
если нижняя поверхность профиля образуется его собственной хордой (фиг. 14.12) ( $f_1 = e$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{c}$ ,  $f_2 = 0$ ), то

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \alpha^2 + \frac{8}{3} \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 \right] = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \alpha^2 + \frac{8}{3} \varepsilon^2 \right). \quad (14.46)$$

14.2.3. Коэффициенты моментов. Из фиг. 14.13 можно легко определить коэффициент момента относительно начала координат. Рассматривая момент относительно передней кромки, после интегрирования по верхней (1) и нижней (2) поверхностям, получим

$$C_m = \frac{1}{c^2} \int_0^c C_{p2} \cos^2 \tau_2 x dx - \frac{1}{c^2} \int_0^c C_{p1} \cos^2 \tau_1 x dx = -\frac{2}{Bc^2} \int_0^{\eta_c} x (d\eta_1 + d\eta_2), \quad (14.47)$$

где знак момента соответствует правосторонней системе отсчета. Обычное условие состоит в том, что знак принимается положительным, когда момент



Фиг. 14.13

стремится поднять носик профиля и отрицательным, когда момент стремится опустить носик.

Если контур профиля отнесен к осям  $Ox'y'$ , причем ось  $Ox'$  параллельна хорде, то, замечая, что угол  $\alpha$  мал, имеем

$$\eta = \eta' - \alpha x,$$

$$d\eta = d\eta' - \alpha dx; \quad (14.48)$$

подставляя эти значения в уравнение (14.47), получим

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{B} - \frac{2}{Bc^2} \int_0^{\eta_c} x (d\eta'_1 + d\eta'_2) = \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{B} + \frac{2}{B} \frac{S_1 - S_2}{c^2}, \quad (14.49)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — площади верхней и нижней частей профиля (фиг. 14.3).

Если профиль двояковыпуклый и симметричный, то  $S_1 = S_2$  и коэффициент момента сводится к первому члену

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{B}. \quad (14.50)$$

Если толщина профиля равна нулю, то  $S_1 = -S_2 = S$  и коэффициент момента будет

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{B} + \frac{4}{B} \frac{S}{c^2}. \quad (14.51)$$



Правую часть соотношения (14.49) можно выразить через коэффициент подъемной силы

$$C_m = \frac{1}{2} C_z + \frac{2}{B} \frac{S_1 - S_2}{c^2}; \quad (14.52)$$

отсюда следует, что фокус находится в средней точке и коэффициент момента при нулевой подъемной силе

$$C_{m0} = \frac{2}{B} \left( \frac{S_1 - S_2}{c^2} \right), \quad (14.53)$$

Профили в сверхзвуковом потоке имеют фокус, расположенный в средней точке профиля; коэффициент момента относительно такой точки при нулевой подъемной силе зависит от формы профиля. В случае тонких профилей будем иметь:

для профилей с изломом (фиг. 14.5)

$$C_{m0} = \frac{2}{B} \frac{f}{c}; \quad (14.54)$$

для дуговых профилей (фиг. 14.6)

$$C_{m0} = \frac{2}{B} \frac{4}{3} \frac{f}{c}; \quad (14.55)$$

в случае толстых профилей получим: для ромбовидных профилей (фиг. 14.7, 14.8, 14.9)

$$C_{m0} = \frac{1}{B} \frac{f_1 - f_2}{c}; \quad (14.56)$$

для дуговых профилей (фиг. 14.10, 14.11, 14.12).

$$C_{m0} = \frac{2}{B} \frac{2}{3} \frac{f_1 - f_2}{c}. \quad (14.57)$$

### 14.3. Лобовое сопротивление профилей

Установленные результаты действительны для малых величин углов атаки, кривизны и толщины и находятся в полном согласии с экспериментальными данными.

Такие же задачи рассмотрены позже путем введения более точных уравнений; при этом учтены члены второго порядка, которыми пренебрегалось в первом приближении. Полученные ранее формулы используются в практике и распространяются на теорию крыла конечного размаха. Рассмотрим, исходя из этих же формул, некоторые задачи, касающиеся изменения полного лобового сопротивления профилей.

**14.3.1. Максимальное аэродинамическое качество.** К вычисленному выше лобовому сопротивлению должно быть прибавлено сопротивление трения  $C_f$ . Оно имеет приблизительно такое же изменение, в зависимости от числа Рейнольдса, как в случае дозвукового течения. Полное лобовое сопротивление любого двояковыпуклого симметричного профиля с максимальной

относительной толщиной  $\epsilon$  получит, если применить уравнение (14.27), выражение

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + k\epsilon^2) + C_f = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{4} C_z^2 + \frac{4k\epsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + C_f, \quad (14.58)$$

где  $C_f$  относится к поверхности, спроектированной на плоскость крыла, и  $k$  — коэффициент, зависящий от контура профиля.

Максимальное аэродинамическое качество получается приравниванием нулю производной по отношению к  $C_z$  величины

$$\frac{C_x}{C_z} = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{4} C_z + \left( \frac{4k\epsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + C_f \right) \frac{1}{C_z}, \quad (14.59)$$

что приводит к оптимальной величине  $C_z$

$$(C_z)_{\text{опт}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \sqrt{k\epsilon^2 + \frac{1}{4} C_f \sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (14.60)$$

В этом случае уравнение (14.59) примет вид

$$\left( \frac{C_x}{C_z} \right)_{\text{min}} = 2 \sqrt{k\epsilon^2 + \frac{1}{4} C_f \sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (14.61)$$

Хотя аэродинамическое качество не имеет особенного значения, оно служит средством для определения достоинств профиля. Качество зависит не только от максимальной толщины, но также и от коэффициентов  $k$  и  $C_f$ , причем трение почти не зависит от формы профиля.

**14.3.2. Профили с минимальным лобовым сопротивлением.** Пусть  $C_{x0}$  — коэффициент, соответствующий той части полного лобового сопротивления, которая не зависит от подъемной силы и трения. Заменяя  $\alpha$  через 0 в предшествующих формулах лобового сопротивления (см. раздел 14.22), определим величину  $C_{x0}$  для каждого рассмотренного профиля. Для других профилей произвольной формы  $C_{x0}$  определяется также вычислением лобового сопротивления при нулевом угле атаки, т. е. в случае, когда хорда параллельна потоку.

Так как в таком случае при вычислении лобового сопротивления верхняя и нижняя поверхности могут учитываться отдельно, то рассматривается только верхняя поверхность, после чего результаты распространяются и на нижнюю.

Пусть ось абсцисс параллельна хорде профиля и пусть  $C_1$  — точка на профиле, тогда для любой кривой  $OP_1C_1$  соответствующее лобовое сопротивление будет больше, чем сопротивление прямолинейного контура  $OC_1$ . Наклон касательной в любой точке  $P_1$  с текущей ординатой  $\eta_1$  выражается соотношением

$$\frac{d\eta_1}{dx} = \frac{f_1}{c_1} + \frac{d\epsilon_1}{dx}, \quad (14.62)$$

где  $\varepsilon_1$  — разность между ординатой  $\eta_1$  и ординатой соответствующей точки, расположенной на прямолинейном отрезке  $OC_1$ . Так как лобовое сопротивление пропорционально квадрату вышеприведенного выражения, то

$$\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)^2 = \left(\frac{f_1}{c_1}\right)^2 + 2\frac{f_1}{c_1}\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)^2; \quad (14.63)$$

интегрируя по длине хорды  $\overline{OC_1} = c_1$ , получим соотношение

$$\int_0^{c_1} \left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)^2 dx = \left(\frac{f_1}{c_1}\right)^2 c_1 + 2\frac{f_1}{c_1} \int_0^{c_1} \frac{d\varepsilon_1}{dx} dx + \int_0^{c_1} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)^2 dx. \quad (14.64)$$

Замечая, что второй интеграл во второй части формулы равняется нулю, так как  $\varepsilon_1$  равно нулю при  $x = 0$  и  $x = c_1$ :

$$\int_0^{c_1} \frac{d\varepsilon_1}{dx} dx = \varepsilon_1 \Big|_0^{c_1} = 0, \quad (14.65)$$

видим, что любая кривая, отличающаяся от прямой линии  $OC_1$ , будет создавать большее лобовое сопротивление.

Точно так же любая другая кривая, проходящая через точки  $C_1$  и  $C$ , будет создавать большее сопротивление, чем то, которое соответствует прямой линии  $C_1C$ .

Отсюда следует, что ломаный контур  $OC_1C$  с точкой излома  $C_1$  является контуром минимального лобового сопротивления, по сравнению со всеми другими, проходящими через точку  $C_1$ .

Если рассматривается точка  $M_1$ , соответствующая максимальной ординате  $f_{m1}$ , то минимальное сопротивление будет иметь ломаный контур  $OM_1C$ , по сравнению с любым контуром, имеющим максимальную толщину в точке  $M_1$ .

Приведенные утверждения справедливы также для нижней поверхности. Можно поэтому утверждать, что из всех профилей с заданными максимальными отклонениями  $f_{m1}$  и  $f_{m2}$  верхней и нижней поверхностей от хорды профиля и заданными абсциссами  $m_1$  и  $m_2$  точек  $M_1$  и  $M_2$  ромбовидный профиль  $OM_1M_2C$  будет профилем минимального лобового сопротивления.

Рассмотрим теперь оптимальное положение для максимального отклонения. Полагая  $\alpha = 0$  в выражении для полного сопротивления (14.38), получим

$$C_{x0} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \frac{c^2}{c_1(c - c_1)} \left(\frac{f_1}{c}\right)^2 + \frac{c^2}{c_2(c - c_2)} \left(\frac{f_2}{c}\right)^2 \right], \quad (14.66)$$

откуда очевидно, что каждый член будет минимальным при условии

$$c_1 = c_2 = \frac{c}{2}, \quad (14.67)$$

т. е. если контур будет симметричен относительно оси, перпендикулярной хорде и проведенной через ее середину (фиг. 14.14).

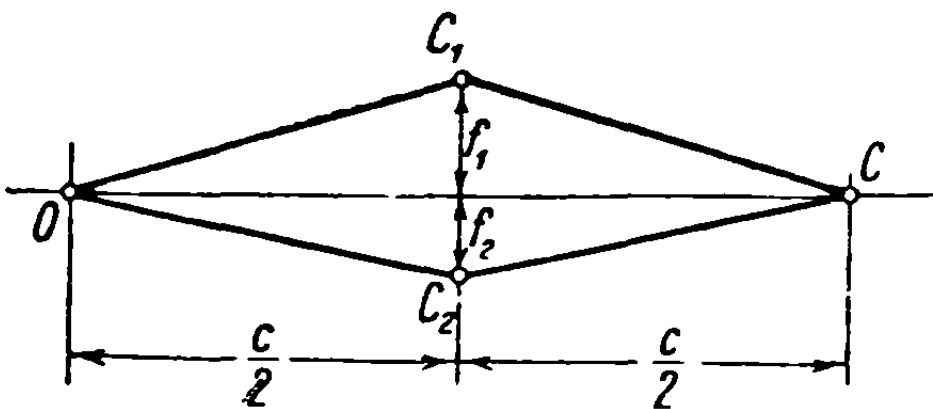
Рассмотрим теперь верхнюю поверхность профиля  $OC_1C$  для того, чтобы найти эквивалентный ломаный контур с тем же лобовым сопротивлением,

но с максимальной толщиной, расположенной на расстоянии  $c'_1$  от передней кромки (фиг. 14.15); лобовые сопротивления  $C_{x0}$  в обоих случаях приравниваются

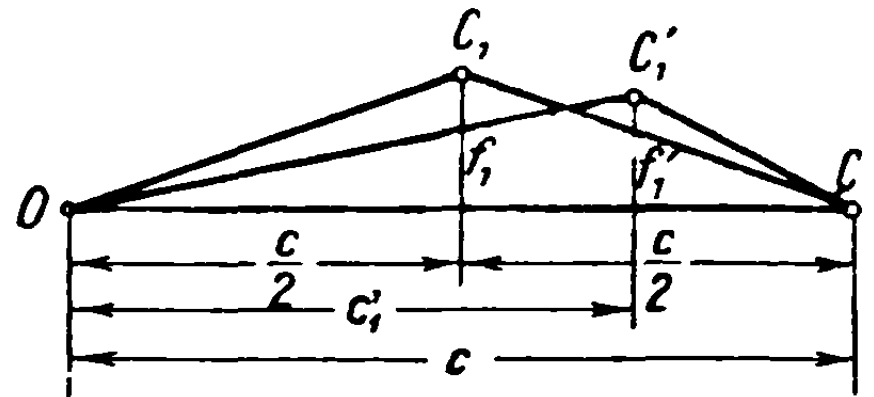
$$\frac{f_1'^2}{c'_1(c-c'_1)} = 4 \frac{f_1^2}{c^2}, \quad (14.68)$$

откуда следует, что  $f_1'$  будет меньше  $f_1$ .

Приведенная формула справедлива только для малых углов наклона  $\delta_1$  и  $\delta'_1$  (фиг. 14.16), потому что для больших углов линейная теория перестает

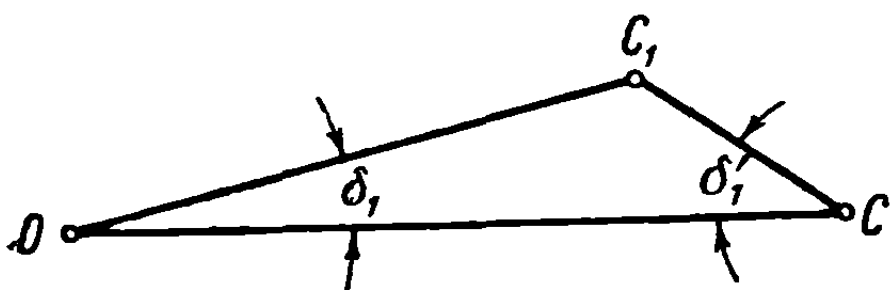


Фиг. 14.14

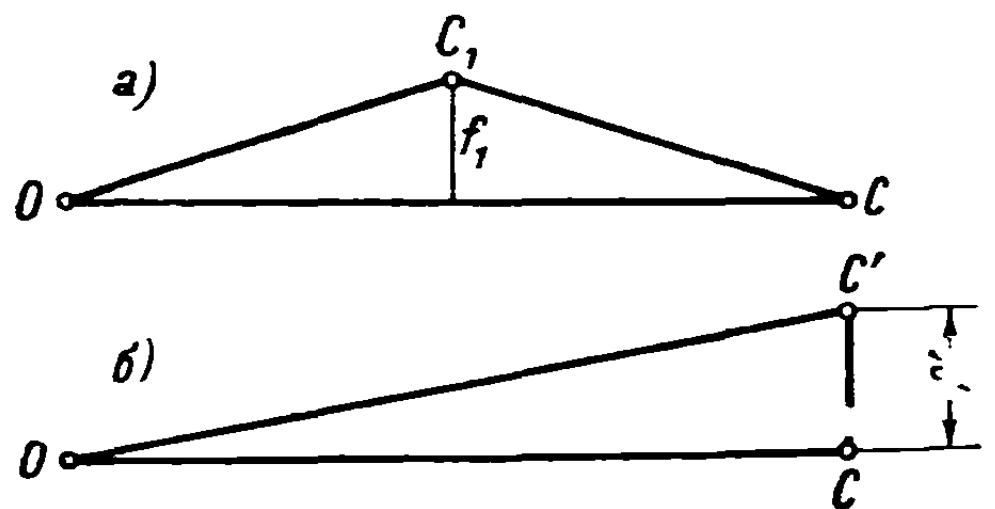


Фиг. 14.15

быть пригодной, и для вычисления лобового сопротивления таких профилей должны применяться более точные формулы, или, когда возможно, вводятся действительные давления, измеренные на контуре. Так, например, давление существующее за простым клиновидным профилем (фиг. 14.17, б), будет



Фиг. 14.16



Фиг. 14.17, а, б

$k\rho_\infty$  ( $k \approx 0,3$ ), где  $\rho_\infty$  — давление свободного потока, потому что при обтекании такого профиля происходят очень сложные явления расширения и отрыва, которые не поддаются строгим математическим расчетам.

Вычисляя коэффициент  $C_{x0}$  (пренебрегая трением), получим для симметричного контура (фиг. 14.17, а)

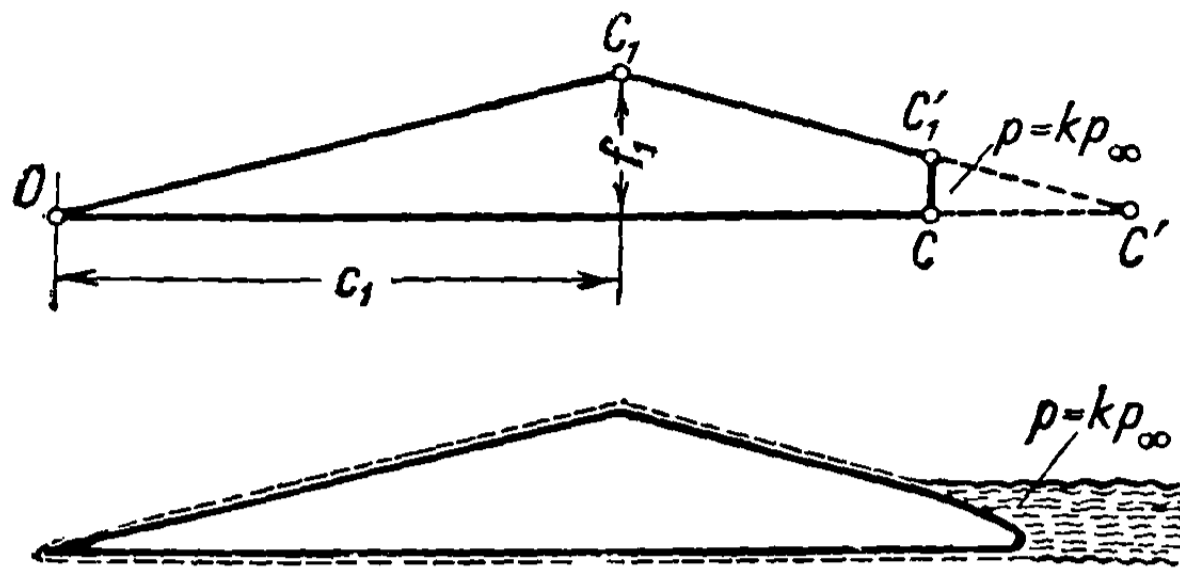
$$C_{x0} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} 4 \left( \frac{f_1}{c} \right)^2; \quad (14.69)$$

лобовое сопротивление клинообразного профиля, обуславливается давлением на наклонных его сторонах, которому соответствует коэффициент, легко подсчитываемый по формуле

$$C'_{x0} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \frac{f'_1}{c} \right)^2, \quad (14.70)$$

и разрежением вниз по течению, с соответствующим коэффициентом

$$C_{x0}'' \approx \frac{(p_\infty - kp_\infty)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \frac{f'}{c} = \frac{2(1-k)f'}{\alpha M_\infty^2 c}. \quad (14.71)$$



Фиг. 14.18

Два профиля будут эквивалентны, если

$$4 \left( \frac{f_1}{c} \right)^2 = \left( \frac{f'}{c} \right)^2 + \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\alpha M_\infty^2} (1-k) \frac{f'}{c}, \quad (14.72)$$

откуда выводится  $f'$ , если известно  $f_1$ , или соотношение

$$\frac{f_1}{c} = \frac{f'}{c} = \frac{(1-k)\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{3\alpha M_\infty^2} \quad (14.73)$$

в том случае, когда профили должны иметь одинаковую толщину.

Такие же рассуждения можно применить и к задаче об оптимальном положении максимальной толщины при срезанной задней кромке (фиг. 14.18). Это находится в согласии с физической сущностью, так как благодаря трению поток отрывается в точке на верхней поверхности, оставляя часть задней кромки в зоне значительного разрежения, которое можно принять как часть от давления свободного потока  $p = kp_\infty$ , как уже предполагалось в предыдущем примере.

Волновое сопротивление и сопротивление, обусловленное разрежением, можно подсчитать в соответствии с написанными выше формулами и затем сложить. Дифференцируя полученное выражение по  $c_1$  и приравнивая производную нулю, получим оптимальную величину  $c_1$ . Эти вычисления очень просты.

Замечание. Перечисленные задачи и вычисления, касающиеся подъемной силы, лобового сопротивления и моментов, рассмотрены снова в следующей главе, где использовано более точное приближение и введены члены более высокого порядка в разложение для скорости как функции отклонения потока.

**14.3.3. Ламинарные профили в сверхзвуковом потоке.** Из приведенных выше разделов о ламинарных профилях в дозвуковом потоке (см. раздел 9.4.2) видно, что увеличение лобового сопротивления, обусловленное преждевременным переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный, зависит от

увеличения давления вдоль профиля, т. е. от положительной производной  $\frac{dp}{dx}$ . Если эта производная будет оставаться ниже определенной величины, то переход от одного режима к другому и даже полный отрыв потока могут быть осуществлены так близко к задней кромке, как только возможно.

Явления, происходящие в ламинарном или турбулентном пограничном слое, существуют и при сверхзвуковом режиме и также зависят от положительной величины производной  $\frac{dp}{dx}$  или от отрицательной величины  $\frac{du}{dx}$ , так как  $p$  и  $u$  связаны линейной зависимостью (5.28). Исходя из соотношения

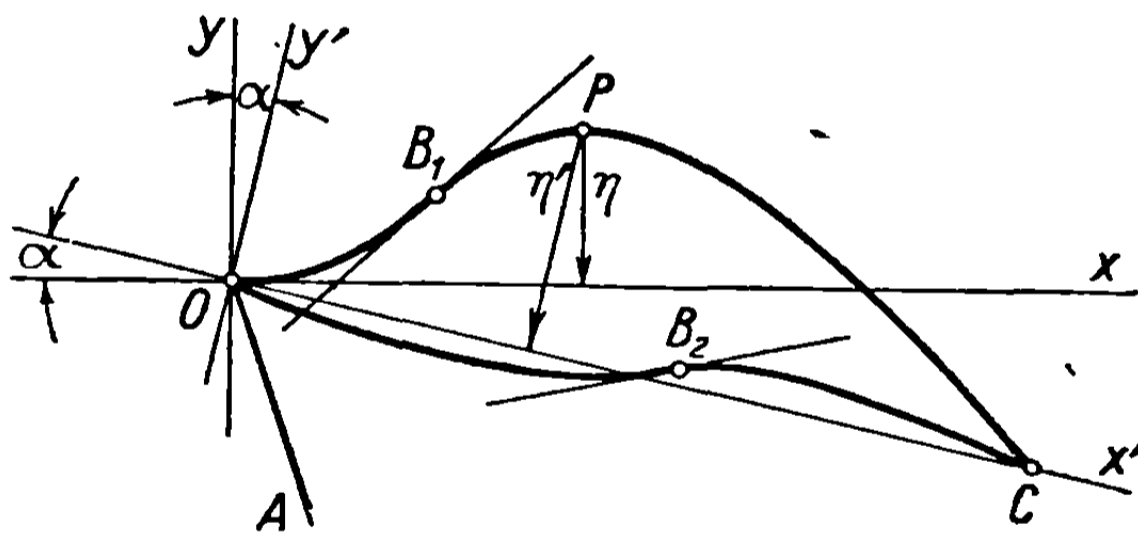
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -2 \frac{u}{U_\infty} = \pm \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{d\eta}{dx}. \quad (14.74)$$

с положительным знаком для верхней и отрицательным для нижней поверхностей профиля (14.24), получим

$$-\frac{1}{U_\infty} \frac{du}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{d^2\eta'}{dx'^2}, \quad (14.75)$$

где  $\eta'$  — ордината профиля относительно хорды, рассматриваемой как ось абсцисс (фиг. 14.19):

$$\begin{aligned} \eta' &\approx \eta + \alpha x, \\ x' &\approx x. \end{aligned} \quad (14.76)$$



Фиг. 14.19

Последняя часть равенства (14.75) не зависит от угла атаки. Если, как обычно, величина тангенса угла наклона  $\frac{d\eta'}{dx}$  уменьшается на верхней поверхности, то поток будет долго поддерживаться ламинарным.

Величина этого тангенса в области  $OB_1$ , где угол наклона увеличивается, не должна превышать определенный предел, выраженный соотношением

$$\left| \frac{du}{dx} \right| \leq 0,20 \frac{U_\infty}{c}, \quad (14.77)$$

приводимым некоторыми авторами.

Эти же утверждения справедливы для нижней поверхности, где знак тангенса угла наклона противоположен. Областью исследования будет  $B_2C$ .

Приведенные условия могут быть легко удовлетворены на профиле. Пограничный слой, наоборот, не может быть легко регулируем даже посредством внешних средств (отсасывания и т. п.) из-за наличия ударных волн, например, волны  $OA$ , неизбежно возникающих на нижней поверхности профиля.

Для того чтобы получилось постоянное изменение скорости, профиль должен быть образован круговыми дугами, согласно соотношениям (14.75).

**14.3.4. Изменение подъемной силы и полного лобового сопротивления в зависимости от числа Маха.** Используя полученные без учета трения результаты для коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы, можно записать следующие соотношения для сил, отнесенных к единице площади крыла:

$$P = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 C_z = \frac{1}{2} \kappa \rho_{\infty} M_{\infty}^2 C_z = 2 \kappa \rho_{\infty} \alpha \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}, \quad (14.78)$$

$$R = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 C_x = \frac{1}{2} \kappa \rho_{\infty} M_{\infty}^2 C_x = 2 \kappa \rho_{\infty} (\alpha^2 + k \epsilon^2) \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}.$$

Для одного и того же угла атаки  $\alpha$  эти выражения достигают минимума при

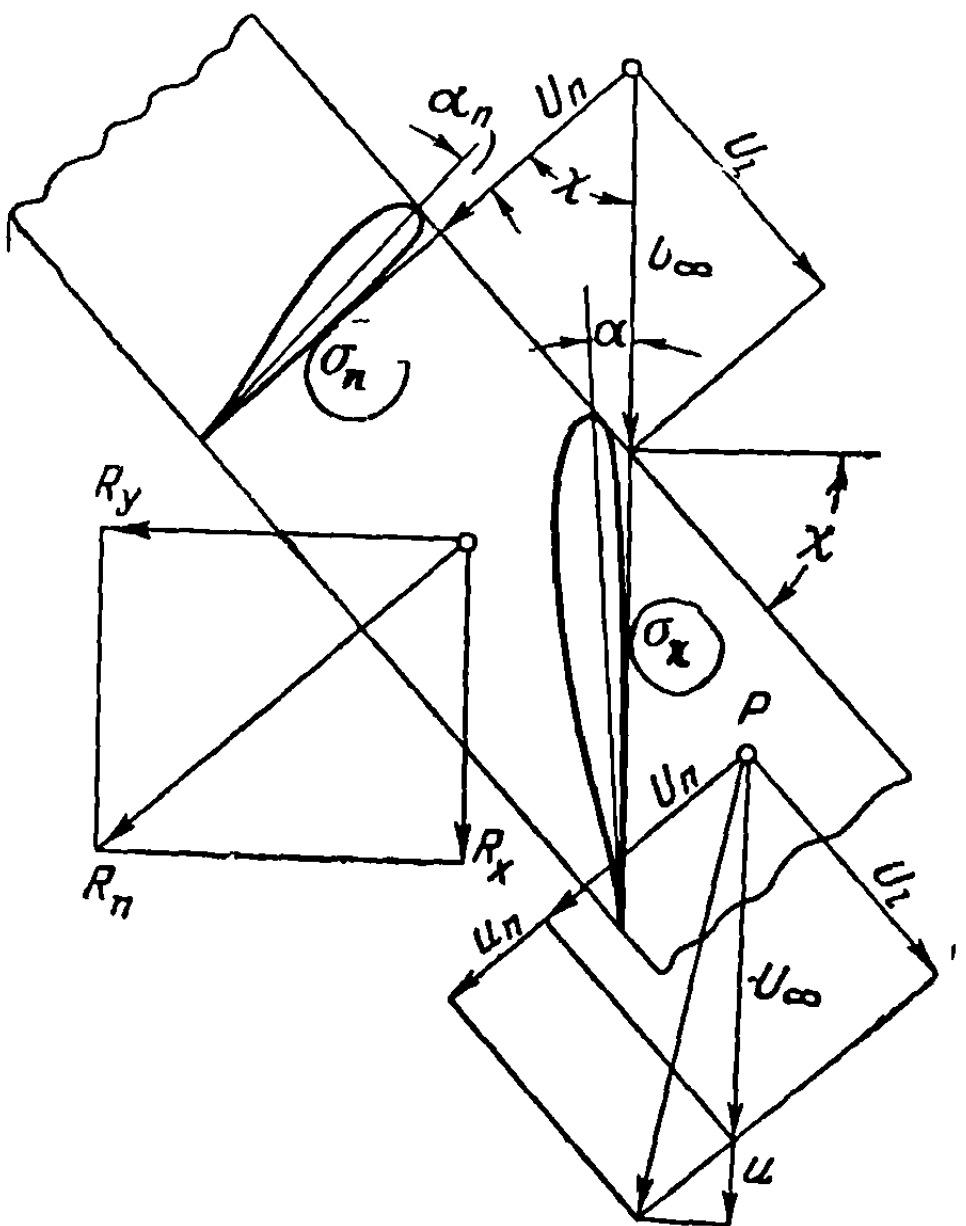
$$M_{\infty} = \sqrt{2} = 1,41. \quad (14.79)$$

Для более высоких значений числа Маха, например, при  $M_{\infty} > 3$ , изменение подъемной силы и лобового сопротивления можно рассматривать как линейное относительно  $M_{\infty}$ .

#### 14.4. Обтекание крыла бесконечного размаха при наличии скольжения.

Если поток при обтекании крыла направлен не по нормали к размаху, то говорят, что крыло имеет скольжение. Условия течения в каждом сечении подобны, и аэродинамические характеристики профиля могут быть легко определены с помощью тех же формул, какие используются в случае двумерного течения. Пусть рассматривается какое-нибудь бесконечное крыло; угол  $\chi$  между нормалью и скоростью свободного потока называется углом скольжения (фиг. 14.20). Компоненты скорости соответственно вдоль нормали и параллельно размаху будут

$$\begin{aligned} U_n &= U_{\infty} \cos \chi, \\ U_l &= U_{\infty} \sin \chi. \end{aligned} \quad (14.80)$$



Фиг. 14.20

Следует напомнить, что если мы пренебрегаем трением, то поперечная компонента  $U_l$  не влияет на распределение давления, как если бы крыло бесконечного размаха находилось в потоке, имеющем скорость  $U_n$ , нормальную к

размаху. Таким образом, как уже было показано в разделе 13.5, может быть воспроизведена аналогичная картина течения, если предположить, что, кроме нормального потока  $U_n$ , существует поперечное движение крыла со скоростью  $-U_l$ , не вызывающее изменений течения газа, так как при таком поперечном перемещении крыло непрерывно сохраняет свое положение относительно нормального потока.

Поперечная скорость влияет на пограничный слой, поэтому, если принимается во внимание работа трения, то поперечная скорость должна быть введена в расчеты. Но так как указанное влияние очень незначительно и имеет второй порядок малости, то им можно пренебречь.

Явления происходят так, как если бы крыло было расположено в потоке  $U_n$  с числом Маха

$$M_n = \frac{U_n}{a_\infty} = \frac{U_\infty}{a_\infty} \cos \chi = M_\infty \cos \chi, \quad (14.81)$$

как уже было установлено ранее (см. формулу 13.22); если  $B$  имеет такое же значение, как в формуле (14.3), то, обозначая через  $B_n$  аналогичный коэффициент, соответствующий числу Маха  $M_n$ , и через  $\mu$  и  $\mu_n$  углы Маха, соответствующие скоростям  $U_\infty$  и  $U_n$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \mu_n &= B_n = \sqrt{M_n^2 - 1} = \sqrt{M_\infty^2 \cos^2 \chi - 1} = \\ &= \cos \chi \sqrt{M_\infty^2 - 1 - \operatorname{tg}^2 \chi} = \cos \chi \sqrt{M_\infty^2 - 1} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \chi}{M_\infty^2 - 1}} = \\ &= \cos \chi \operatorname{ctg} \mu \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}. \end{aligned} \quad (14.82)$$

При  $M_n > 1$  течение сверхзвуковое и в этом случае передняя кромка также называется сверхзвуковой. Если  $M_n < 1$ , то течение дозвуковое и кромка называется дозвуковой; все результаты, полученные в главе IV, применимы. Этот случай уже упоминался в разделе (13.5).

Полагая, что течение будет сверхзвуковым, и применяя метод малых возмущений, определим коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления по отношению к нормальной скорости  $U_n$  и соответствующему углу атаки  $\alpha_n$  равенствами

$$\begin{aligned} C_{nz} &= \frac{4a_n}{B_n} = \frac{4a_n}{\sqrt{M_n^2 - 1}}, \\ C_{nx} &= \frac{4}{\sqrt{M_n^2 - 1}} \left[ \alpha_n^2 + \frac{1}{2} (\beta_{n1} + \beta_{n2}) \right], \end{aligned} \quad (14.83)$$

где (см. фиг. 14.20)

$$\begin{aligned} \beta_{n1} &= \frac{1}{c_n} \int_0^{c_n} \left( \frac{d\eta_1'}{dx'} \right)^2 dx, \\ \beta_{n2} &= \frac{1}{c_n} \int_0^{c_n} \left( \frac{d\eta_2'}{dx'} \right)^2 dx'. \end{aligned} \quad (14.84)$$



Если коэффициенты относятся к действительной скорости  $U_\infty$ , то, отмечая, что угол атаки  $\alpha$  относительно направления этой скорости и коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  выражаются равенствами

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_n \cos \chi, \\ \beta_1 &= \beta_{n1} \cos^2 \chi, \\ \beta_2 &= \beta_{n2} \cos^2 \chi,\end{aligned}\tag{14.85}$$

и применяя также уравнение (14.82), будем иметь: для коэффициента подъемной силы,

$$C_z = C_{nz} \frac{U_n^2}{U_\infty^2} = C_{nz} \cos^2 \chi = \frac{4\alpha}{B \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}};\tag{14.86}$$

для коэффициента лобового сопротивления вдоль направления действительного течения  $U_\infty$

$$C_x = C_{nx} \frac{U_n^2}{U_\infty^2} \cos \chi = C_{nx} \cos^3 \chi = \frac{4}{B \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} \left[ \alpha^2 + \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \right],\tag{14.87}$$

причем к последнему должен быть прибавлен коэффициент сопротивления трения  $C_f$ .

В сечениях, параллельных скорости свободного потока  $U_\infty$ , явления происходят при тех же условиях, что и в случае нормального крыла конечного размаха, если величину  $B$  заменить величиной  $B'$ , равной

$$B' = B \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}.\tag{14.88}$$

Приведенные в разделе §14.3 рассуждения относительно минимального лобового сопротивления можно повторить при новых коэффициентах, и таким образом задача легко решается.

Полученные результаты представляют интерес в отношении их применения к теории крыльев конечного размаха в сверхзвуковом потоке, где часто встречается случай, когда передняя кромка составляет угол  $\chi$  с нормалью к направлению потока. Точно так же можно установить характеристическую формулу для скорости возмущения или для давления. Пусть  $u_n$  будет скоростью возмущения в точке на профиле, расположенном в потоке, совпадающей по направлению с нормальной скоростью  $U_n$ ; известная формула (14.18), в которую вводится индекс  $n$ , принимает вид

$$\frac{u_n}{U_n} = \frac{\tau_n}{B_n},\tag{14.89}$$

где  $\tau_n$  — угол наклона касательной к профилю в рассматриваемой точке. Величина скорости возмущения  $u$ , т. е. компоненты в направлении действительного течения, должна быть определена в первую очередь.

Из фигуры 14.20 видно, что полная скорость в рассматриваемой точке будет  $V$  и что компонента в направлении скорости свободного потока

$$U = U_\infty + u = U_\infty + u_n \cos \chi; \quad (14.90)$$

отсюда легко выводим

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{u_n}{U_n} \cos^2 \chi = -\frac{\tau_n}{B_n} \cos^2 \chi.$$

Замечая, что наклон касательной  $\tau$  в сечении, параллельном потоку определяется уравнением

$$\tau = \tau_n \cos \chi, \quad (14.91)$$

а также в силу уравнения (14.82) получим окончательно формулу

$$\frac{u}{U_\infty} = -\frac{\tau}{B\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} = -\frac{\tau}{B'}, \quad (14.92)$$

идентичную формуле (14.18), но где  $B'$  заменяет величину  $B$ . Обозначая через  $p$  давление в рассматриваемой точке на верхней поверхности, определим коэффициент давления

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -\frac{2u}{U_\infty} = 2 \frac{\tau}{B\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} = 2 \frac{\tau}{B'}. \quad (14.93)$$

В случае плоской пластинки угол  $\tau$  постоянен вдоль всей ширины и равен углу атаки пластинки  $\alpha$ , который считается отрицательным, когда крыло наклоняется вниз; отсюда

$$\frac{u}{U_\infty} = -\frac{\alpha}{B\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} = -\frac{\alpha}{B'}. \quad (14.94)$$

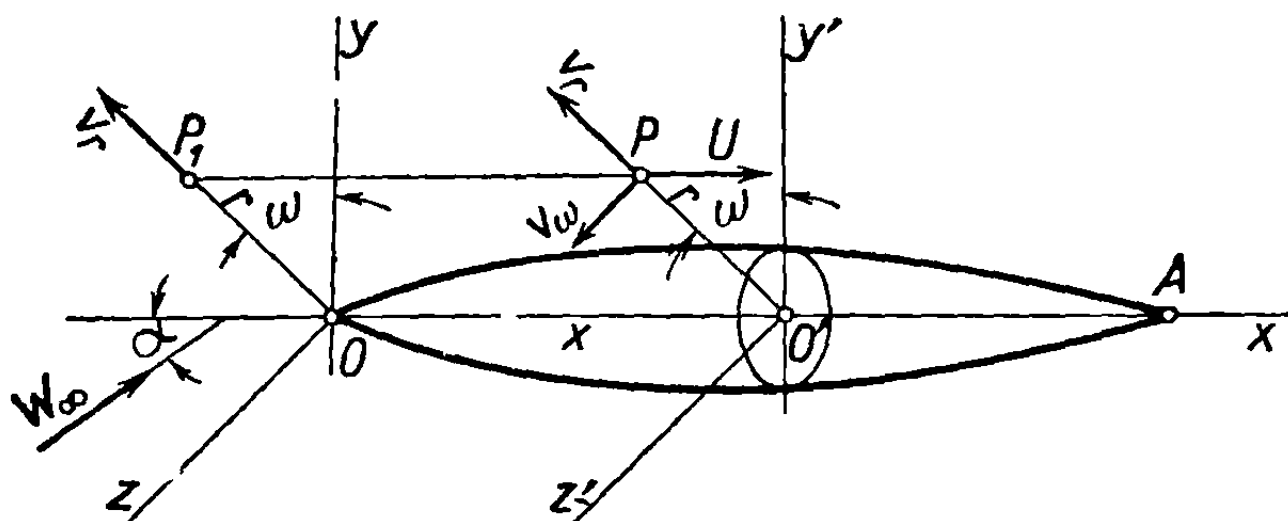
Эта формула будет применена при рассмотрении треугольных крыльев со сверхзвуковыми передними кромками.

## 15. ТЕЧЕНИЕ ВОКРУГ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

### 15.1. Рассмотрение дифференциального уравнения для потенциала скорости

Пусть  $OA$  — тело вращения, расположенное в потоке со скоростью  $W_\infty$ , составляющей малый угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  тела (фиг. 15.1). Если размеры поперечного сечения тела по сравнению с его длиной также малы, то скорость вокруг осесимметричного тела будет отличаться очень мало от скорости свободного потока; поэтому, чтобы установить потенциал скорости  $\Phi$ , можно использовать метод малых возмущений. Предполагается при этом, что движение незавихренное.

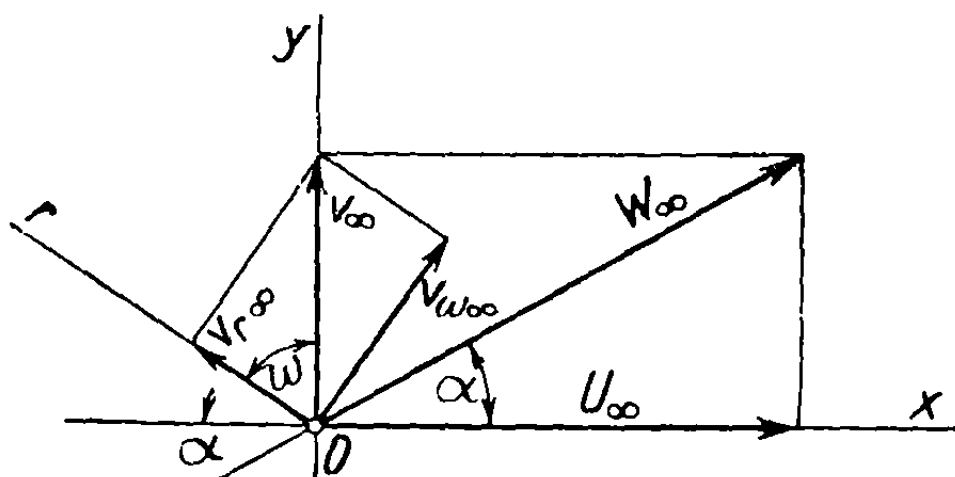
Рассмотрим точку  $P$ , отнесенную к системе цилиндрических координат  $x, r, \omega$ . Пусть  $U, v_r, v_\omega$  — компоненты скорости в этой точке в направлениях оси  $x$ , радиуса  $r$  и нормали к меридиональной плоскости  $OP_1P$ .



Фиг. 15.1

Проектируя скорость свободного потока на оси  $x$  и  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} U_\infty &= W_\infty \cos \alpha, \\ v_\infty &= W_\infty \sin \alpha. \end{aligned} \quad (15.1)$$



Фиг. 15.2

Компонентами той же скорости в системе цилиндрических координат будут (фиг. 15.2)

$$\begin{aligned} U_\infty &= W_\infty \cos \alpha, \\ v_{r\infty} &= v_\infty \cos \omega = W_\infty \sin \alpha \cos \omega, \\ v_{\omega\infty} &= -v_\infty \sin \omega = -W_\infty \sin \alpha \sin \omega. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Пусть  $\varphi$  — потенциал скорости возмущения, обусловленной [присутствием тела, которая прибавляется к скорости свободного потока; компоненты полной скорости в точке  $P$  по трем направлениям будут:

$$\begin{aligned} U &= W_\infty \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v_r &= W_\infty \sin \alpha \cos \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ v_\omega &= -W_\infty \sin \alpha \sin \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Сумма потенциала течения на бесконечности

$$\Phi_{\infty} = xU_{\infty} + rv_{r\infty} = xW_{\infty} \cos \alpha + rW_{\infty} \sin \alpha \cos \omega \quad (15.4)$$

и потенциала скорости возмущения даст полный потенциал  $\Phi$

$$\Phi = \Phi_{\infty} + \varphi. \quad (15.5)$$

Он должен удовлетворять ранее установленному уравнению (5.47); замечая, однако, что за исключением осевой скорости  $U$  компоненты  $v_r$  и  $v_{\omega}$  будут, по предположению, очень малы, и пренебрегая всеми членами второго порядка, получим линейное уравнение гиперболического типа

$$\left(1 - \frac{U_{\infty}^2}{a_{\infty}^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (15.6)$$

Ясно, что член  $\Phi_{\infty}$  из уравнения (15.5) удовлетворяет тождественно уравнению (15.6), которое, учитывая, что

$$\frac{U_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} = \frac{W_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} \cos^2 \alpha = M_{\infty}^2 \cos^2 \alpha \approx M_{\infty}^2, \quad (15.7)$$

сводится к ранее установленному уравнению для потенциала возмущений (5.556)

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (15.8)$$

Чтобы решить это уравнение, разложим течение на две компоненты: одна — обусловленная осевым потоком  $U_{\infty} = W_{\infty} \cos \alpha$ , определяется осесимметричным потенциалом  $\varphi_1$ , и другая — обусловленная поперечным потоком  $v_{\infty} = W_{\infty} \sin \alpha$ , направленным вдоль оси  $y$ , определяется потенциалом  $\varphi_2$ , так что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (15.9)$$

Для поперечного течения остается в силе уравнение (15.8), а для осесимметричного, так как процесс не зависит от  $\omega$ , будем иметь

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0. \quad (15.10)$$

Если известное решение  $\chi_1$  для осесимметричного потенциала удовлетворяет уравнению (15.10), то функция  $\varphi_2$  в виде [2]

$$\varphi_2(x, r, \omega) = \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \cos \omega \quad (15.11)$$

удовлетворяет уравнению (15.8), так как имеем тождественно

$$\begin{aligned} (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Таким образом, полный потенциал скорости

$$\Phi = xW_{\infty} \cos \alpha + \varphi_1 + \left( rW_{\infty} \sin \alpha + \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) \cos \omega \quad (15.13)$$

может быть разложен на потенциал осесимметричного течения

$$\Phi_1 = xW_{\infty} \cos \alpha + \varphi_1 = xU_{\infty} + \varphi_1 \quad (15.14a)$$

и потенциал поперечного течения

$$\Phi_2 = \left( rW_{\infty} \sin \alpha + \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) \cos \omega = \left( rv_{\infty} + \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) \cos \omega. \quad (15.14b)$$

Для решения задачи осесимметричного и поперечного течения рассмотрены отдельно.

## 15.2. Осесимметричное течение

Рассмотрим произвольное тело вращения, расположенное в потоке, имеющем скорость  $U_{\infty}$ , параллельную оси  $Ox$ . Течение будет, по соображениям симметрии, одинаковым в любой меридиональной плоскости и поэтому будет зависеть только от  $x$  и  $r$ . Потенциал  $\varphi_1$  скорости возмущения удовлетворяет уравнению (15.10).

Пусть  $B$ , как обычно, обозначает выражение

$$B = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}; \quad (15.15)$$

заменяя переменную посредством подстановки

$$x = iBX, \quad (15.16)$$

приведем уравнение (15.10) к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \Delta \varphi_1 = 0; \quad (15.17)$$

следовательно, в новой системе переменных  $X, r$  потенциал  $\varphi_1$  будет гармонической функцией, поэтому может быть применен метод, используемый в гидродинамике несжимаемой жидкости.

Предположим, что в такой системе существует источник с интенсивностью  $q d\varepsilon$ , расположенный в точке на оси  $Ox$  с координатой  $\varepsilon$ . Соответствующий элементарный потенциал в любой точке  $P$  (фиг. 15.3) будет

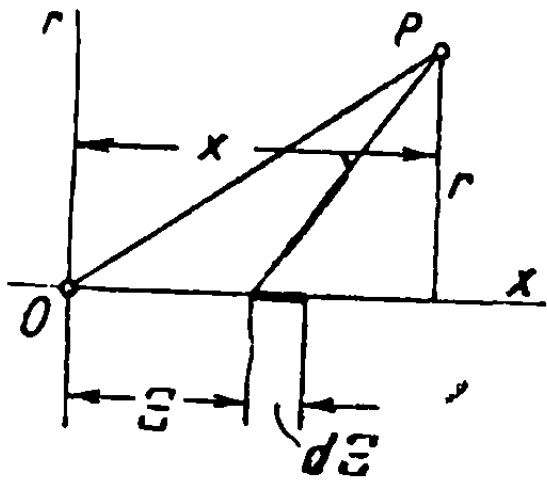
$$\delta \varphi_1 = \frac{-q(\varepsilon) d\varepsilon}{4\pi \sqrt{(X - \varepsilon)^2 + r^2}}. \quad (15.18)$$

Возвращаясь к первоначальным координатам (15.16) и полагая

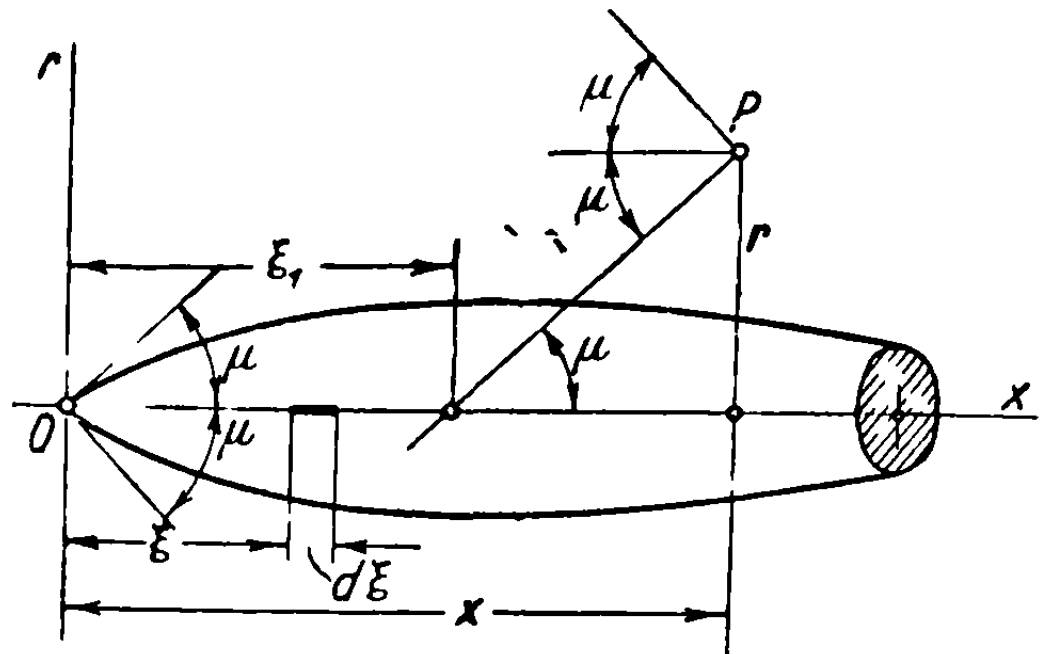
$$\xi = iB\varepsilon, \quad (15.19)$$

получим похожее выражение с точностью до коэффициента пропорциональности, который включает знак

$$\delta\varphi_1 = \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}}; \quad (15.20)$$



Фиг. 15.3



Фиг. 15.4

это выражение является решением уравнения (15.10) и представляет элементарный потенциал, вызываемый источником в физической области, с интенсивностью, пропорциональной  $f(\xi)d\xi$ , расположенным в точке  $\xi$ .

Для всей системы линейных источников вдоль оси  $Ox$  будем иметь

$$\varphi_1 = \int_0^{\xi_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}}, \quad (15.21)$$

где предел  $\xi_1$  должен быть выбран так, чтобы интеграл мог быть действительным.

Таким образом, по аналогии с методом, применяемым в случае несжимаемого течения для определения потенциала скорости, обусловленного системой линейных источников, расположенных на оси, параллельной скорости свободного потока, может быть использован похожий метод для сверхзвукового течения путем применения вышеприведенной формулы. Поступая таким образом, Карман и Мур [3] получили интересные результаты, которые описаны ниже.

Заметим, что верхний предел интеграла не может превышать величину  $\xi_1$ , так как иначе выражение (15.20) станет мнимым; поэтому величина  $\xi$  должна всегда удовлетворять неравенству

$$(x - \xi)^2 - B^2 r^2 \geq 0,$$

отсюда

$$\xi_1 = x - Br. \quad (15.22)$$

Это выражение имеет физический смысл, так как  $\xi_1$  является абсциссой точки пересечения конуса Маха, направленного в отрицательную сторону из точки  $P$ , с осью  $Ox$  (см. фиг. 15.4).

Путем замены переменных, полагая

$$\begin{aligned} \xi &= x - Br \operatorname{ch} z, \\ d\xi &= -Br \operatorname{sh} z dz \end{aligned} \quad (15.23)$$

в уравнений (15.21) и замечая, что

$$z = \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} \quad \text{при } \xi = 0,$$

$$\text{и } z = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_1,$$

не заботясь о знаке, получим

$$\varphi_1 = \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 f(x - Br \operatorname{ch} z) dz. \quad (15.24)$$

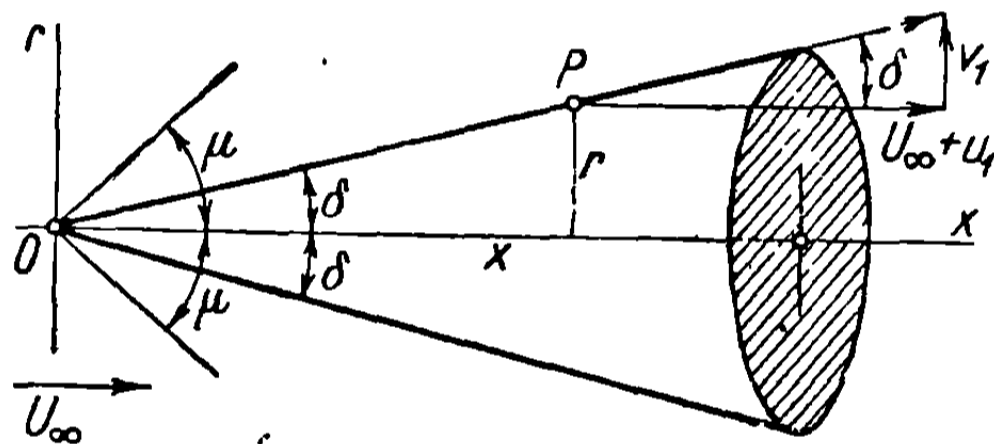
Можно также определить компоненты скорости возмущения

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 f'(x - Br \operatorname{ch} z) dz \quad (15.25a)$$

и

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = - \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 f'(x - Br \operatorname{ch} z) B \operatorname{ch} z dz, \quad (15.25b)$$

причем  $f'_1(x - Br \operatorname{ch} z) = f'(\xi)$  обозначает производную относительно аргумента  $\xi = x - Br \operatorname{ch} z$  для функции  $f(x - Br \operatorname{ch} z) = f(\xi)$ .



Фиг. 15.5

Эта формула дает решение задачи об осесимметричном течении вокруг тела вращения, максимальные поперечные размеры которого, по сравнению с его длиной, достаточно малы; последнее условие позволяет применить теорию малых возмущений.

Путем подходящего выбора функции  $f(x - Br \operatorname{ch} z)$  можно построить для практических целей обтекание различных тел сверхзвуковым потоком.

**15.2.1. Применение к простому круговому конусу.** Если функция, стоящая под знаком интеграла, сводится к простому линейному выражению, то уравнение (15.24) принимает вид

$$\varphi_1 = C_1 \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 (x - Br \operatorname{ch} z) dz = C_1 \left[ x \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} + \sqrt{x^2 - B^2 r^2} \right], \quad (15.26)$$

где  $C_1$  — постоянная, которая будет определена позже. В этом случае мы имеем течение около конуса вращения, ось которого параллельна основному потоку (фиг. 15.5).

Применяя формулы (15.25), можно получить компоненты скорости возмущения путем дифференцирования

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = C_1 \int_{\text{Arch } \frac{x}{Br}}^0 dz = -C_1 \text{Arch } \frac{x}{Br}, \quad (15.27a)$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -C_1 \int_{\text{Arch } \frac{x}{Br}}^0 B \text{ch } z dz = C_1 B \text{sh } z \Big|_0^{\text{Arch } \frac{x}{Br}} = C_1 B \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}. \quad (15.27b)$$

Чтобы определить постоянную  $C_1$ , отметим, что угол  $\delta$  должен удовлетворять следующему соотношению в любой точке  $P$ , расположенной на конусе (фиг. 15.5):

$$\text{tg } \delta = \frac{r}{x} = \frac{v_1}{U_\infty + u_1} = \frac{C_1 B \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}}{U_\infty - C_1 \text{Arch } \frac{x}{Br}} = \frac{C_1 \sqrt{\text{ctg}^2 \delta - B^2}}{U_\infty - C_1 \text{Arch } \left( \frac{\text{ctg } \delta}{B} \right)}; \quad (15.28)$$

отсюда

$$C_1 = \frac{U_\infty \text{tg } \delta}{\sqrt{\text{ctg}^2 \delta - B^2} + \text{tg } \delta \text{Arch } \frac{\text{ctg } \delta}{B}} \approx \frac{U_\infty \text{tg } \delta}{\sqrt{\text{ctg}^2 \delta - B^2}}; \quad (15.29)$$

упрощенная форма последнего выражения будет справедлива, если угол  $\delta$  мал.

Из этого выражения, а также из фигуры 15.5 ясно, что получить действительную величину для  $C_1$  можно при условии

$$\delta < \mu, \quad (\text{ctg } \delta > B = \text{ctg } \mu).$$

Возвращаясь снова к выражениям компонент скорости (15.27 а, б), заметим, что скорость не изменяется вдоль радиуса вектора, выходящего из начала координат. Это свойство определяет конические течения, которые будут рассматриваться отдельно.

Скорости на конусе будут

$$\frac{u_1}{U_\infty} = -\frac{C_1}{U_\infty} \text{Arch } \frac{\text{ctg } \delta}{B},$$

$$\frac{v_1}{U_\infty} = \frac{C_1}{U_\infty} \sqrt{\text{ctg}^2 \delta - B^2} \approx \text{tg } \delta; \quad (15.30)$$

коэффициент давления на поверхности конуса получается из уравнения (5.30б), в котором можно пренебречь последним слагаемым правой части

$$C_p = -2 \left( \frac{u_1}{U_\infty} + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{U_\infty^2} \right) \approx 2 \left[ \frac{C_1}{U_\infty} \text{Arch } \frac{\text{ctg } \delta}{B} - \frac{1}{2} \text{tg}^2 \delta \right]; \quad (15.31)$$

лобовое сопротивление некоторой отсеченной части конуса может быть определено интегрированием. Последний вопрос снова рассматривается в следующей главе.

**15.2.2 Вычисление скоростей и давлений на теле вращения.** Метод Кармана и Мура [3] можно распространить на случай вычисления скоростей и давлений на тонком теле вращения путем применения соотношений (15.25).

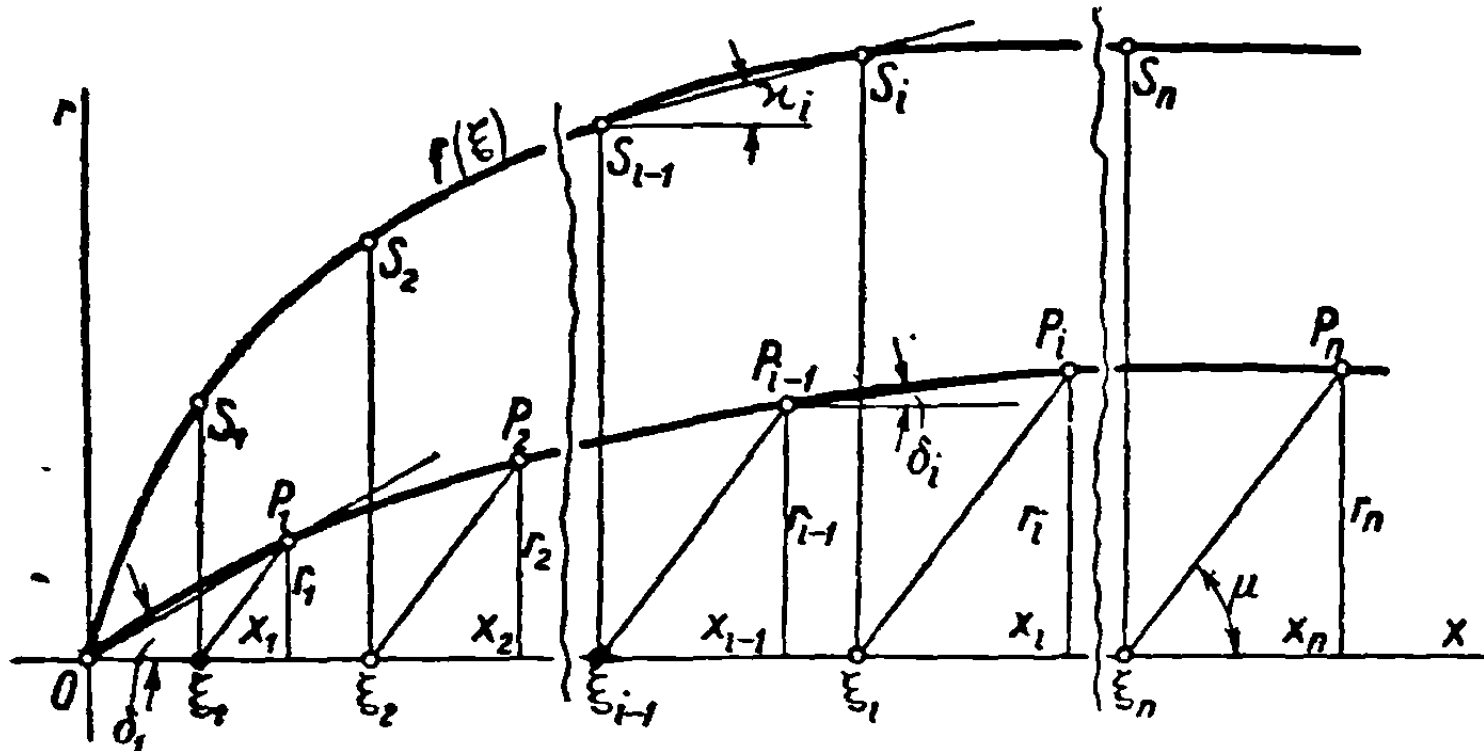


Для этой цели рассмотрим подходящее число выбранных точек  $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n, \dots$  (фиг. 15.6) на меридиане осесимметричного тела; через каждую из этих точек проведем параллельные линии под углом  $\mu$  к оси  $Ox$ , которую они будут пересекать в точках с абсциссами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \dots, \xi_n$ , определяемыми выражением

$$\xi_i = x_i - Br_i \quad (15.32)$$

( $x_i, r_i$  — координаты точки  $P_i$ ).

Пусть интенсивность линейного источника предполагается линейной функцией вдоль интервала  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$ . Это значит, что между точками



Фиг. 15.6

$S_{i-1}$  и  $S_i$ , имеющими абсциссы  $\xi_{i-1}$  и  $\xi_i$ , кривая  $f(\xi)$  заменяется прямой линией  $S_{i-1}S_i$ ; при этом производная  $f'(\xi)$  будет в данном интервале постоянна и равна  $C_i$ .

Рассмотрим коническое тело, ограниченное в меридиональной плоскости линиями  $x = \xi_{i-1}$ ,  $x = \xi_i$ ; источник с интенсивностью  $C_i$  будет создавать в любой точке  $P_n$  тела осевую скорость, определяемую формулой

$$\Delta u_{1n} = \int_{\text{Arch} \frac{x_n - \xi_{i-1}}{Br_n}}^{\text{Arch} \frac{x_n - \xi_i}{Br_n}} f'(x - Br \operatorname{ch} z) dz = C_i \left( \text{Arch} \frac{x_n - \xi_i}{Br_n} - \text{Arch} \frac{x_n - \xi_{i-1}}{Br_n} \right). \quad (15.33)$$

Аналогично получим радиальную скорость

$$\Delta v_{1n} = -\frac{C_i}{r_n} \left( \sqrt{(x_n - \xi_i)^2 - B^2 r_n^2} - \sqrt{(x_n - \xi_{i-1})^2 - B^2 r_n^2} \right). \quad (15.34)$$

Поступая подобным образом для каждого интервала, получим после суммирования компоненты полной скорости:

$$u_{1n} = \sum_{i=1}^n C_i \left( \text{Arch} \frac{x_n - \xi_i}{Br_n} - \text{Arch} \frac{x_n - \xi_{i-1}}{Br_n} \right), \quad (15.35a)$$

$$v_{1n} = -\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{r_n} \left( \sqrt{(x_n - \xi_i)^2 - B^2 r_n^2} - \sqrt{(x_n - \xi_{i-1})^2 - B^2 r_n^2} \right). \quad (15.35b)$$

Постоянные  $C_i$ , [представляющие наклоны кривой  $f(\xi)$  на различных интервалах  $S_{i-1}$ ,  $S$ , должны еще быть определены

$$\operatorname{tg} \alpha_i = C_i \approx f'(\xi_i). \quad (15.36)$$

Для определения постоянной  $C_1$ , которая появляется при вычислении компонент  $u_{11}$ ,  $v_{11}$  в точке  $P_1$ , действительное тело, имеющее вершину в точке  $O$ , будет уподобляться конусу, проходящему через  $P_1$  и имеющему при вершине угол  $2\delta_1$  (фиг. 15.6). Величина  $C_1$  определится соотношением (15.29).

$$\frac{C_1}{U_\infty} = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta_1 - B^2} + \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ctg} \delta_1}{B}} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta_1 - B^2}}. \quad (15.37)$$

Чтобы определить  $C_2$ , заметим, что скорости  $u_{12}$  и  $v_{12}$  в точке  $P_2$  должны удовлетворять зависимости

$$\frac{v_{12}}{U_\infty + u_{12}} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1}, \quad (15.38)$$

где  $2\delta_2$  — угол конуса, проходящего через  $P_1$  и  $P_2$ . Уравнения для скоростей  $u_{12}$  и  $v_{12}$  будут содержать  $C_1$  и  $C_2$ , как видно из предшествующих формул (15.35); так как постоянная  $C_1$  уже вычислена из уравнения (15.37), можно вывести значение  $C_2$  из соотношения (15.38).

Тот же метод можно последовательно применить для определения  $C_3$ ,  $C_4$ , ...,  $C_i$ , ...,  $C_n$ ; так, например, для точки  $P_i$  соотношение

$$\frac{v_{1i}}{U_\infty + u_{1i}} = \operatorname{tg} \delta_i = \frac{r_i - r_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (15.39)$$

определит постоянную  $C_i$ , если другие постоянные  $C_1, \dots, C_{i-1}$  уже были вычислены с помощью предшествующих операций.

С целью упрощения, так как осевая скорость  $u_{1i}$  мала по сравнению с  $U_\infty$ , может быть записано соотношение

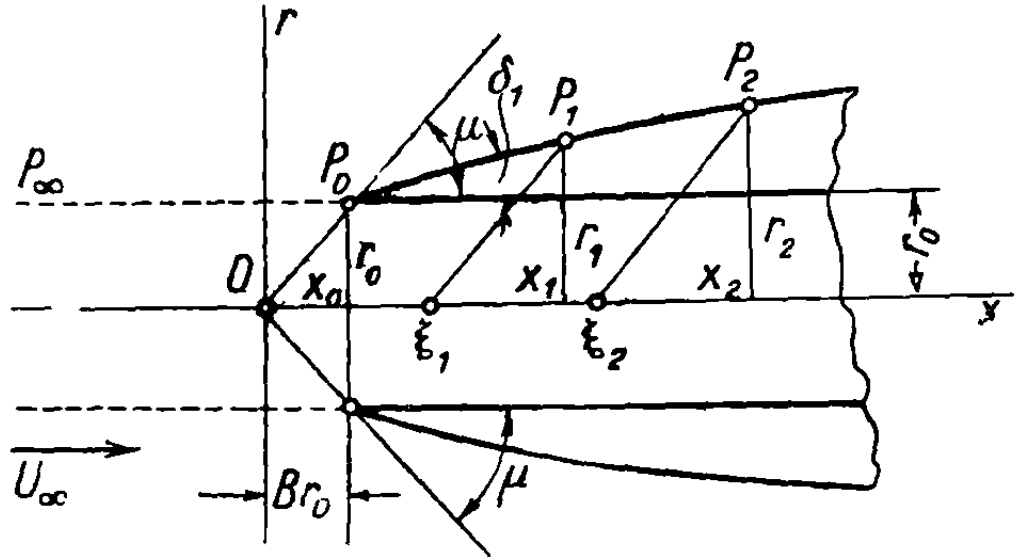
$$\operatorname{tg} \delta_i = \frac{v_{1i}}{U_\infty + u_{1i}} \approx \frac{v_{1i}}{U_\infty}, \quad (15.40)$$

так что нет надобности знать осевую скорость возмущения  $u_{1i}$  для того, чтобы определить постоянную  $C_i$ . Для вычисления коэффициента давления должны быть известны осевые скорости возмущения. Коэффициент давления в точке  $P_n$  определяется зависимостью

$$C_{pn} = -2 \left( \frac{u_{1n}}{U_\infty} + \frac{1}{2} \frac{v_{1n}^2}{U_\infty^2} \right), \quad (15.41)$$

выведенной из уравнения (5.306).

15.2.3. Тонкое тело вращения с протоком [4]. Такие тела ведут себя подобно обычному тонкому телу (без протока), если поток не возмущается у входного отверстия и остается сверхзвуковым. Это условие осуществляется в случае гондолы реактивного двигателя, где внутренние условия процесса таковы, что поток остается невозмущенным у входного отверстия (фиг. 15.7). Течение можно легко определить методом, подобным уже использованному. Деля меридиональный контур на прямолинейные отрезки  $P_0P_1, P_1P_2, \dots$  и замечая, что прямая  $P_\infty P_0$  может рассматриваться как линия тока, примыкающая к передней точке контура, причем вдоль нее скорость не меняется и постоянно равна  $U_\infty$ , можно предположить, что радиальная скорость по всей части  $P_0P_1$  контура равна радиальной скорости в точке  $P_1$ , обозначаемой через  $v_1$  и обусловленной конусом с углом  $\delta_1$ :



Фиг. 15.7

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{r_1 - r_0}{x_1 - x_0}. \quad (15.42)$$

Таким образом, применяя уравнения (15.276) и (15.29), получим

$$v_1 = BC_1 \sqrt{\frac{x_1^2}{B^2 r_1^2} - 1},$$

$$C_1 = \frac{U_\infty \operatorname{tg} \delta_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta_1 - B^2} + \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ctg} \delta_1}{B}}. \quad (15.43)$$

Поступая точно так же, как в случае, описанном в разделе 15.22, для всех точек  $P_2P_3, \dots, P_n$  на меридиональном контуре, устанавливаем, что задача не представляет дальнейших трудностей, но вычисление скоростей и в особенности волнового сопротивления будет очень трудоемким. Подобная задача была изучена Пистолези [5].

15.2.4. Тонкие заостренные тела вращения. Если размеры поперечного сечения некоторого тела вращения с заостренной передней частью по сравнению с его длиной очень малы, то тело будет называться тонким заостренным телом. Так как радиус кругового поперечного сечения тела очень мал, вычисление скоростей и давлений может быть значительно упрощено. Таким образом, рассматривая величину  $r$  как очень малую для точек, расположенных на теле, выводим из выражений (15.23):

$$\operatorname{ch} z = \frac{x - \xi}{Br},$$

$$\operatorname{sh} z = \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{B^2 r^2} - 1} \approx \frac{x - \xi}{Br} = \operatorname{ch} z, \quad (15.44)$$

$$dz = - \frac{d\xi}{Br \operatorname{sh} z} = - \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}},$$

$$\operatorname{ch} z dz \approx \operatorname{sh} z dz = - \frac{d\xi}{Br};$$

подставляя полученные результаты в уравнения (15.25 а, б), в согласии с выражением (15.23), имеем

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= - \int_0^{x-Br} \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \approx - \int_0^{x-Br} \frac{f'(\xi) d\xi}{x-\xi} = \\ &= [f'(x) \ln(x-\xi)]_0^{x-Br} + \int_0^{x-Br} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-\xi} d\xi \approx \end{aligned} \quad (15.45a)$$

$$\approx -f'(x) \ln \frac{x}{Br} + \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \int_0^{x-Br} \frac{f'(\xi)}{r} \frac{(x-\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \approx \int_0^{x-Br} \frac{f'(\xi) d\xi}{r} = \\ &= \frac{f(x-Br) - f(0)}{r} \approx \frac{f(x)}{r}, \end{aligned} \quad (15.45b)$$

так как для  $x=0$  интенсивность линейного источника также равна нулю ( $f(0)=0$ ).

Если  $\sigma$  представляет сечение в точке  $x$ , то

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d(\pi r^2)}{dx} = 2\pi r \frac{dr}{dx}, \quad (15.46)$$

а так как скорость направлена по касательной к меридиональной кривой  $r=r(x)$ , то, применяя соотношение (15.45б), получим

$$\frac{dr}{dx} = \frac{v_1}{U_\infty + u_1} \approx \frac{v_1}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \frac{f(x)}{r}, \quad (15.47)$$

откуда окончательно

$$f(x) = U_\infty r \frac{dr}{dx} = \frac{U_\infty d\sigma}{2\pi dx}, \quad (15.48)$$

идентично уравнению (9.97), полученному другими методами в подобной же задаче для дозвукового потока.

Подставляя записанное выше выражение для  $f(x)$  в уравнения (15.45а) и (15.45б), получим

$$\frac{u_1}{U_\infty} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{d^2\sigma}{d\xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \approx \quad (15.49a)$$

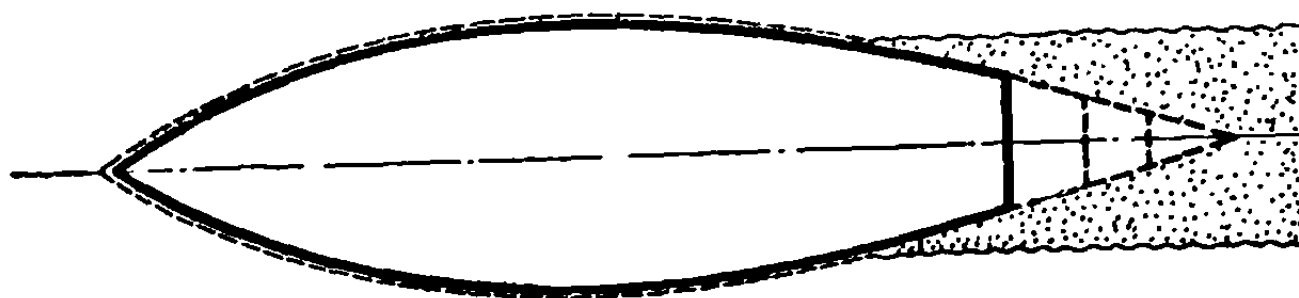
$$\approx - \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma}{dx^2} \ln \frac{x}{Br} + \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left( \frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{d^2\sigma}{d\xi^2} \right) \frac{d\xi}{x-\xi},$$

$$\frac{v_1}{U_\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{d^2\sigma}{d\xi^2} \frac{(x-\xi) d\xi}{r\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2r^2}} \approx \frac{1}{2\pi r} \frac{d\sigma}{dx}. \quad (15.49б)$$

Формула (5.30б) используется для подсчета давления. В случае осесимметричного потока она сводится, как показывают соотношения (15.31) и (15.41), к выражению

$$C_p = -2 \left( \frac{u_1}{U_\infty} + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{U_\infty^2} \right). \quad (15.50)$$

Из формулы (15.49а) видно, что величина  $u_1$  становится бесконечной для задней точки заострения тела, когда телесный угол, соответствующий этой точке, будет конечным. Если  $u_1$  превышает определенный предел, то уже нельзя применять теорию малых возмущений. Однако ход



Фиг. 15.8

изменения величины  $u_1$  будет вполне определенным и указывает на сжатие при приближении к задней точке заострения, потому что отрицательный первый член в правой части формулы будет доминирующим в нижнем течении, начиная от некоторой точки на теле.

По той же причине толщина пограничного слоя также увеличивается, турбулентность возрастает, и поток в конце концов отделяется от тела, как показано на фигуре 15.8.

Лобовое сопротивление поэтому не зависит от формы задней, заостренной части, которая может быть срезана, так как поток на нее не воздействует. Процесс подобен описанному в случае двумерного течения (см. фиг. 14.18).

На этом основании обтекатели реактивных двигателей срезаются у выходного отверстия. Наличие реактивной струи не создает каких-либо неудобств; в самом деле, турбулентный слой подсасывается на большом протяжении и, в соответствии с теоретическим предвидением, поток подводится ближе к поверхности тела, вследствие чего устраняется вредное влияние отрыва, возникающего на конце фюзеляжа.

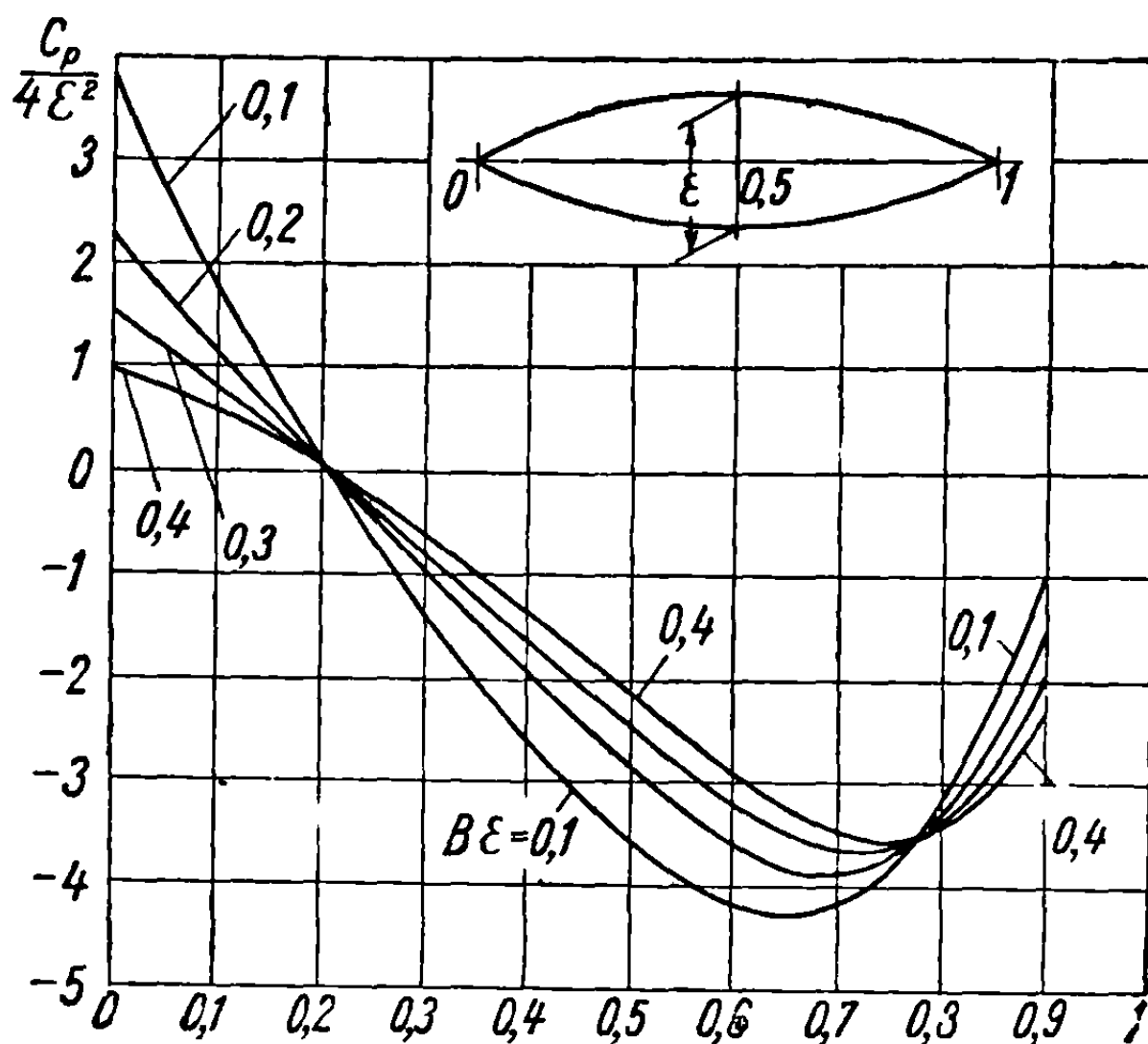
Теоретически явление поясняется с помощью фигуры 15.9, изображающей диаграммы распределения давлений на теле параболического профиля, задаваемого уравнением

$$r = 2\epsilon x(1 - x), \quad (15.51)$$

где  $\epsilon$  — относительная максимальная толщина, причем длина тела предполагается равной единице. Вычисления, которыми мы обязаны Лайтхиллу [6], выполняются путем подсчета интегралов во второй части равенств (15.49а, б), без каких-либо дальнейших упрощающих аппроксимаций, так как последние не дают удовлетворительных результатов в отношении

распределения давлений; однако они могут быть применены для подсчета полного лобового сопротивления, как показано позже.

При рассмотрении диаграммы мы видим, что давление возрастает от точки, расположенной за максимальной толщиной; это и приводит к отрыву потока.



Фиг. 15.9

Указанное явление не возникает в случае двумерного течения. Точка максимального разрежения передвигается вниз по течению при возрастании числа Маха.

### 15. 3. Лобовое сопротивление тонких заостренных тел в случае осесимметричного течения

В любой точке  $P$  тела (фиг. 15.10), где давление равно  $p$ , волновое сопротивление, обусловленное кольцевым элементом  $ds$ , определяется формулой

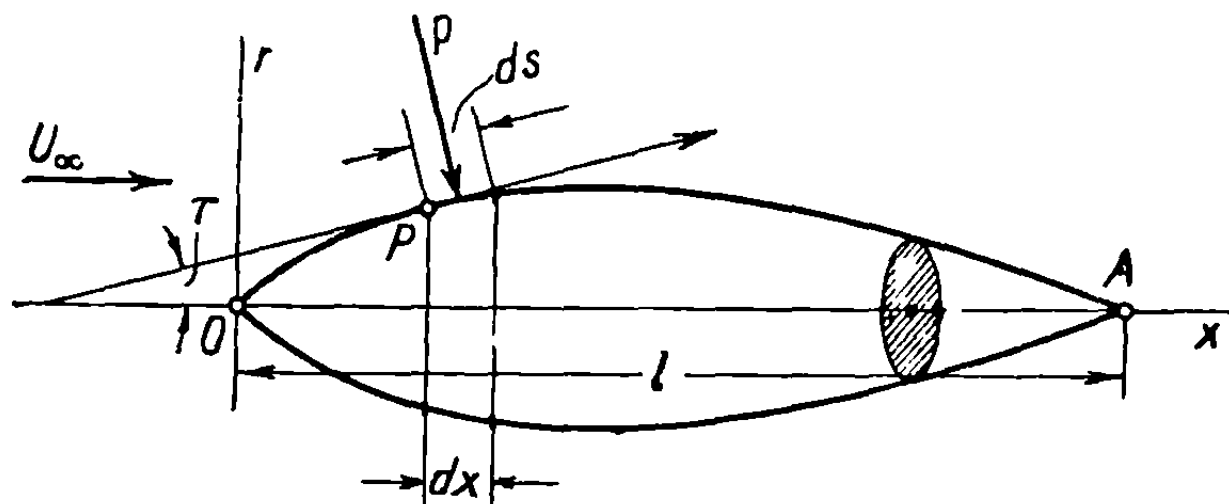
$$\begin{aligned}
 dR_u &= 2\pi r (p - p_\infty) \sin \tau ds = 2\pi r (p - p_\infty) \left(\frac{dr}{dx}\right) dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 2\pi r 2 \left( \frac{u_1}{U_\infty} + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{U_\infty^2} \right) \frac{dr}{dx} dx = \\
 &= -2\pi \rho_\infty r \left( u_1 + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{U_\infty^2} \right) v_1 dx. \tag{15.52}
 \end{aligned}$$

Подставляя вместо  $u_1$  и  $v_1$  приближенные величины, полученные из уравнений (15.45а) и (15.45б), находим

$$dR_u = -2\pi \rho_\infty f(x) \left\{ \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi - f(x) \ln \frac{x}{Br} + \frac{[f(x)]^2}{2U_\infty^2 r^2} \right\} dx; \tag{15.53}$$

интегрируя это выражение по всей длине тела, получим полное лобовое сопротивление

$$R_u = -2\pi\rho_\infty \left\{ \int_0^l f(x) dx \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi - \int_0^l \ln \frac{x}{Br} f(x) f'(x) dx + \frac{1}{2U_\infty} \int_0^l \frac{[f(x)]^3}{r^2} dx \right\}. \quad (15.54)$$



Фиг. 15.10

Заметим, что существуют равенства

$$\int_0^l \ln x \cdot f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} [\ln x (f(x))^2]_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l [f(x)]^2 \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int_0^l [f(x)]^2 \frac{dx}{x}, \quad (15.55)$$

так как первый член во второй их части равняется нулю при  $x=0$  и  $x=l$ , что можно видеть из соотношений (15.46) и (15.48); подобным же образом, используя уравнение (15.47), получим

$$\int_0^l \ln Br f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} [\ln Br (f(x))^2]_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{[f(x)]^2}{r} \frac{dr}{dx} dx = -\frac{1}{2U_\infty} \int_0^l \frac{[f(x)]^3}{r^2} dx. \quad (15.56)$$

Далее, дифференцируя интеграл, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi &= \left[ \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right]_{\xi=x}^x + \int_0^x \frac{(x - \xi) f'(x) - f(x) + f(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi = \\ &= f'(x) + \left[ \frac{(x - \xi) f'(x) - f(x) + f(\xi)}{x - \xi} \right]_0^x + \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi = \\ &= \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{f(x)}{x}, \end{aligned} \quad (15.57)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) dx \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi &= \int_0^l f(x) dx \left( \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi - \frac{f(x)}{x} \right) = \\ &= \int_0^l f(x) d \left( \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi \right) - \int_0^l \frac{[f(x)]^2}{x} dx. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Интегрируя первый интеграл последней части равенств, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) d \left( \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi \right) &= \left[ f(x) \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi \right]_0^l - \\ - \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi &= - \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi, \end{aligned} \quad (15.59)$$

так как первый член во второй части равенств (15.59) равен нулю.

В уравнении (15.48)  $f(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$ ; обозначая через  $F(x, \xi)$  конечный полином, состоящий из положительных и целых степеней  $x$  и  $\xi$ , получим

$$f(x) - f(\xi) \equiv (x - \xi) F(x, \xi); \quad (15.60)$$

следовательно, интеграл

$$\int_0^l \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi = \int_0^l F(x, \xi) d\xi \quad (15.61)$$

будет конечным.

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} d\xi &= - \left\{ \ln(x - \xi) [f(x) - f(\xi)] \right\}_0^x - \\ - \int_0^x \ln(x - \xi) f'(\xi) d\xi &= \ln x f(x) - \int_0^x \ln(x - \xi) f'(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (15.62)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) dx \int_0^x \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} d\xi &= - \int_0^l \frac{[f(x)]^2}{x} dx - \\ - \int_0^l \ln x f(x) f'(x) dx + \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \ln(x - \xi) f'(\xi) d\xi &= \\ = - \frac{1}{2} \int_0^l [f(x)]^2 \frac{dx}{x} + \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \ln(x - \xi) f'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15.63)$$



Подставляя в уравнение (15.54) полученные результаты, имеем

$$R_u = -2\pi\rho_\infty \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \ln(x-\xi) f'(\xi) d\xi. \quad (15.64)$$

Замечая что  $x$  и  $\xi$  могут быть взаимно заменяемы, приведенное выражение представим в симметричной форме

$$R_u = -\pi\rho_\infty \left\{ \int_0^l f'(x) dx \int_0^x \ln|x-\xi| f'(\xi) d\xi + \int_0^l f'(\xi) d\xi \int_0^\xi \ln|\xi-x| f'(x) dx \right\} = -\pi\rho_\infty \int_0^l \int_0^l f'(x) f'(\xi) \ln|x-\xi| dx d\xi. \quad (15.65)$$

Подставляя вместо  $f'(x)$  и  $f'(\xi)$  их значения, полученные из уравнения (15.48), окончательно выводим формулу для коэффициента волнового сопротивления, установленную Лайтхиллом [6]:

$$C_{xu} = \frac{R_u}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \sigma_M} = -\frac{1}{2\pi\sigma_M} \int_0^l \int_0^l \ln|x-\xi| \frac{d^2\sigma}{dx^2} \frac{d^2\sigma}{d\xi^2} dx d\xi, \quad (15.66)$$

где  $\sigma_M$  — максимальное поперечное сечение тела, которое может быть выражено через максимальную относительную толщину  $\epsilon$ :

$$\sigma_M = \pi \frac{\epsilon^2 l^2}{4}. \quad (15.67)$$

Длина тела обычно предполагается равной единице; в этом случае, обозначая через  $\sigma''$  вторую производную  $\sigma$  относительно  $x$  или  $\xi$ , получим коэффициент лобового сопротивления в виде

$$C_{xu} = -\frac{2}{(\pi\epsilon)^2} \int_0^1 \int_0^1 \ln|x-\xi| \sigma''(x) \sigma''(\xi) dx d\xi. \quad (15.68)$$

Так как величина  $\sigma_M$  пропорциональна  $\epsilon^2$ , то лобовое сопротивление пропорционально квадрату максимальной толщины, как в случае крыловых профилей. Можно было бы заключить, что в сверхзвуковом полете должны использоваться очень тонкие фюзеляжи; однако их применение ограничивается вследствие поверхностного трения. Пусть  $R_f$  — лобовое сопротивление, обусловленное трением:

$$R_f = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 C_f 2\pi \int_0^l r dx = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \pi S C_f, \quad (15.69)$$

где  $S$  — площадь продольного сечения тела, зависящая от формы меридиональной кривой и максимальной относительной толщины. Коэффициент трения получается из отношения между лобовым сопротивлением и максимальным поперечным сечением

$$C_{xf} = \frac{R_f}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \sigma_M} = \pi \frac{S}{\sigma_M} C_f. \quad (15.70)$$

Коэффициент полного лобового сопротивления можно выразить через максимальную относительную толщину

$$C_x = C_{xu} + C_{xf} = A_u \varepsilon^2 + C_f A_f \frac{1}{\varepsilon}, \quad (15.71)$$

где  $A_u$  и  $A_f$  — коэффициенты, зависящие от вида меридиональной кривой  $\{r = r(x)\}$ . Дифференцируя по максимальной относительной толщине, получим наиболее благоприятную максимальную относительную толщину для данной формы меридиональной кривой

$$\varepsilon_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{A_f C_f}{2 A_u}}. \quad (15.72)$$

Применение [7]. Для приведенного выше случая тела с параболическим профилем, определяемым уравнением (15.51), применяя формулы (15.68) и (15.70), получим

$$\varepsilon_{\text{опт}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{C_f}. \quad (15.73)$$

Так как практически  $C_f$  может изменяться между 0,02 и 0,04, то наиболее благоприятное отношение получается между 6,5 и 8%, следовательно, оно соответствует очень тонким заостренным телам. Для таких тел оптимальной формы, используя формулы (15.68) и (15.70), получим

$$C_{xu} = \frac{32}{3} \varepsilon_{\text{опт}}^2, \\ C_{xf} = \pi \frac{S}{\sigma_M} C_f = \frac{8}{3} \frac{C_f}{\varepsilon_{\text{опт}}} = \frac{64}{3} \varepsilon_{\text{опт}}^2; \quad (15.74)$$

отсюда

$$C_x = C_{xu} + C_{xf} = 32 \varepsilon_{\text{опт}}^2. \quad (15.75)$$

Заметим, что для тел оптимальной формы только  $1/3$  полного лобового сопротивления является волновым сопротивлением, обусловленным давлением.

**З а м е ч а н и е.** В приведенных вычислениях не принимались в расчет все возмущающие явления, возникающие вниз по течению благодаря ламинарному и турбулентному пограничным слоям и вследствие отрыва потока на конце тела. В результате этих явлений конец тела не влияет на течение, независимо от того, распространяется ли тело до бесконечности, или за ним возникает вихревой след вследствие отрыва потока в точке  $D$  около заднего конца тела, или, наконец, тело обрезается на конце и ограничивается поперечным сечением  $A'A''$  (фиг. 15.11).

Вычисление лобового сопротивления может быть выполнено в любом из этих случаев путем применения формулы (15.68) и с помощью практического метода интегрирования, описанного ниже.

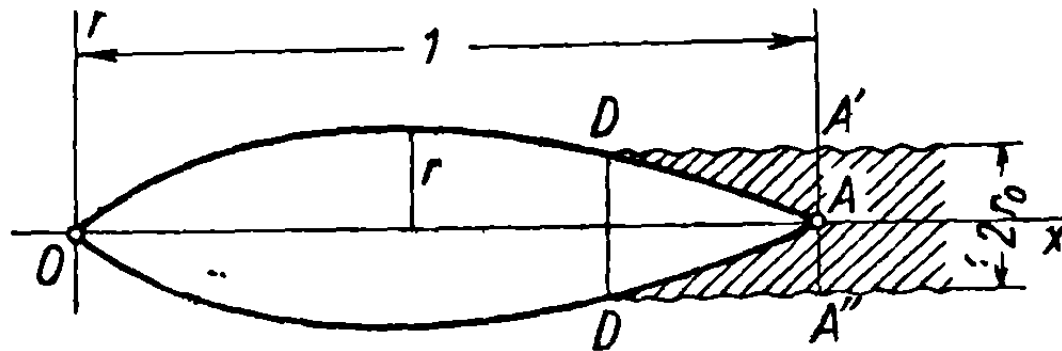
**15.3.1. Практический метод вычисления лобового сопротивления для тел вращения [8].** Волновое сопротивление определяется в первом приближении по формуле (15.68), которая может быть записана в виде

$$C_{xu} = -\frac{2}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^1 d[\sigma'(x)] \int_0^1 \ln|x - \xi| d[\sigma'(\xi)] = \\ = -\frac{2}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^1 d[\sigma'(x)] \left\{ (\sigma'(\xi) \ln|x - \xi|)_0^1 + \int_0^1 \sigma'(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} \right\} = \\ = -\frac{2}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^1 d[\sigma'(x)] \int_0^1 \sigma'(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi}, \quad (15.76)$$

так как

$$\begin{aligned}\sigma'(0) &= 2\pi r_0 \frac{dr_0}{d\xi} = 0, \\ \sigma'(1) &= 2\pi r_1 \frac{dr_1}{d\xi} = 0\end{aligned}\quad (15.77)$$

вследствие того, что  $r_0 = 0$ , соответственно  $r_1 = 0$ , если концы тела имеют заострение, или вследствие того, что  $\frac{dr}{d\xi} = 0$ , если предположить, что касательная параллельна оси  $Ox$  на срезанном конце тела или на линии



Фиг. 15.11

раздела в точках  $A'$  и  $A''$  (фиг. 15.11). Для вычисления приведенного интеграла производится замена переменных

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \\ x &= \frac{1}{2}(1 - \cos \psi)\end{aligned}\quad (15.78)$$

и используются разложения в ряды Фурье

$$\begin{aligned}\sigma'(\xi) &= \pi\epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \\ \sigma'(x) &= \pi\epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\psi,\end{aligned}\quad (15.79)$$

где  $\epsilon$  — максимальная относительная толщина. В этом случае второй интеграл в последнем члене уравнения (15.76) будет включать члены вида

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \psi} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]}{\cos \theta - \cos \psi} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\sin(n-1)\psi - \sin(n+1)\psi}{\sin \psi} = -\pi \cos n\psi;\end{aligned}\quad (15.80)$$

подставляя их в уравнение (15.76) и выполняя вычисления, получим уравнение

$$C_{xu} = \pi^2 \epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2, \quad (15.81)$$

которое по форме подобно уравнению для лобового сопротивления крыла конечного размаха.

Коэффициенты  $A_n$  выражаются в виде интегралов

$$A_n = \frac{2}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^\pi \sigma'(\xi) \sin n\theta d\theta, \quad (15.82)$$

тогда как первый коэффициент может быть легко определен:

$$A_1 = \frac{2}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^\pi \sigma'(\xi) \sin \theta d\theta = \frac{4}{(\pi\varepsilon)^2} \int_0^1 \sigma'(\xi) d\xi = \frac{4}{(\pi\varepsilon)^2} (\sigma_1 - \sigma_0), \quad (15.83)$$

где  $\sigma_1 = \pi r_1^2$  и  $\sigma_0 = \pi r_0^2$  — поперечные сечения на заднем и переднем концах тела; последнее практически можно принять равным нулю ( $\sigma_0 \approx 0$ ).

Таким образом, подсчет волнового сопротивления сводится к вычислению коэффициентов  $A_n$ , которое может быть выполнено путем применения различных методов, один из которых описан в работах цитированных выше авторов.

Если тело отсекается, оканчиваясь плоским дном, с площадью  $\sigma_1$ , или если отрывающийся поток образует след такого же сечения, то должен прибавляться эффект разрежения вблизи хвостовой части. Давление на хвостовой части можно оценивать в процентах  $k$  от давления на бесконечности ( $p = kp_\infty$ ) в первом случае или от давления в точке отрыва — во втором.

#### 15.4. Обтекание тел вращения, наклоненных под углом атаки к потоку

Пусть тело вращения расположено в потоке под углом атаки  $\alpha$  относительно его оси. Поперечная скорость  $W_\infty \sin \alpha = v_\infty$  нормальна к оси тела и направлена вдоль фиксированной оси  $Oy$  (фиг. 15.2).

Выражение для потенциала скорости возмущения было дано уравнением (15.12); следовательно, если  $\chi_1$  — потенциал возмущения осесимметричного течения и  $h(\xi) = h(x - Br \operatorname{ch} z)$  — соответствующее распределение источников, то, согласно формуле (15.24)

$$\chi_1 = \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 h(x - Br \operatorname{ch} z) dz, \quad (15.84)$$

в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \cos \omega = -B \cos \omega \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 h'(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz = \\ &= -B \cos \omega \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 g(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz, \end{aligned} \quad (15.85)$$

где  $h'(\xi) = g(\xi)$  — производная функция  $h(\xi)$ , взятая по  $\xi$ . Потенциал течения  $\Phi_2$  вокруг тел вращения может быть определен путем рассмотрения различных функций  $g(\xi) = g(x - Br \operatorname{ch} z)$ , согласно методу, принятому Феррари [9] и Тзяном [10].

Полный потенциал, определяемый вторым уравнением (15.146), может быть легко получен:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= rW_\infty \sin \alpha \cos \omega + \varphi_2 = \left( rW_\infty \sin \alpha + \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right) \cos \omega = \\ &= \left( rW_\infty \sin \alpha - B \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 g(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz \right) \cos \omega. \end{aligned} \quad (15.86)$$

Применение указанных результатов к наиболее распространенным телам вращения рассмотрено ниже.

**15.4.1. Применение к конусу вращения, наклоненному под углом атаки к потоку.** Если принять наиболее простое выражение для  $g(x - Br \operatorname{ch} z)$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -C_2 B \cos \omega \int_{\operatorname{Arch} \frac{x}{Br}}^0 (x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz = \\ &= -C_2 B \cos \omega \left[ \frac{Br}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} - \frac{x}{2} \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1} \right]; \end{aligned} \quad (15.87)$$

отсюда компоненты скорости поперечного течения определяются в виде

$$u_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = C_2 B \cos \omega \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}, \quad (15.88a)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = W_\infty \sin \alpha \cos \omega + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \\ &= W_\infty \sin \alpha \cos \omega - C_2 B \cos \omega \left[ \frac{B}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} + \frac{x}{2r} \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (15.88b)$$

Из приведенных равенств ясно, что скорости будут одинаковыми вдоль любого радиуса-вектора, выходящего из начала; течение, следовательно, будет *коническим*.

Результирующая этих скоростей должна быть касательной к конусу; следовательно,

$$\frac{v_2}{u_2} = \frac{W_\infty \sin \alpha - C_2 B \left[ \frac{B}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} + \frac{x}{2r} \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1} \right]}{C_2 B \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1}} = \operatorname{tg} \delta; \quad (15.89)$$

отсюда

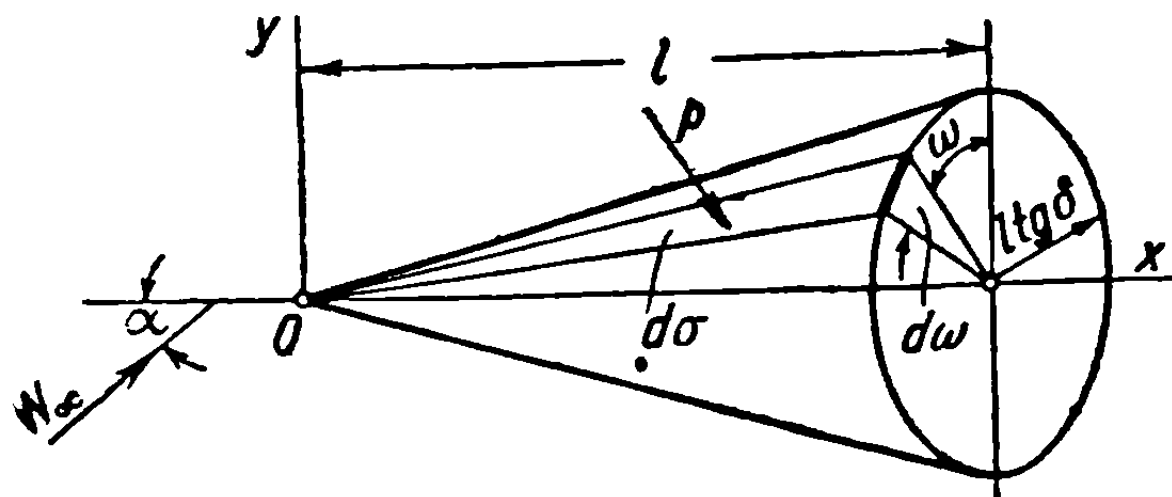
$$C_2 = \frac{W_\infty \sin \alpha}{\frac{B^2}{2} \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ctg} \delta}{B} + \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \delta \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{B^2} - 1} + \sqrt{1 - B^2 \operatorname{tg}^2 \delta}}. \quad (15.90)$$

Заметим, что  $C_2$  пропорциональна  $\sin \alpha$ ; вводя коэффициент  $K_2$ , можно записать (так как величина  $\alpha$  очень мала)

$$C_2 = K_2 \sin \alpha \approx K_2 \alpha, \quad (15.91)$$

причем  $K_2$  выводится непосредственно из уравнения (15.90).

Из исследования аэродинамических характеристик вытекает, что скорости, вызванные поперечным течением, вводят члены второго порядка в уравнение



Фиг. 15.12

волнового сопротивления и создают подъемную силу, которая вычислена ниже.

Чтобы в этом убедиться, нужно сначала определить полную осевую скорость возмущения; применяя уравнения (15.27а, б) и (15.88а, б), получим

$$u = u_1 + u_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -C_1 \operatorname{Arch} \frac{x}{Br} + C_2 B \cos \omega \sqrt{\frac{x^2}{B^2 r^2} - 1} \quad (15.92)$$

на конусе

$$u_0 = -C_1 \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ctg} \delta}{B} + C_2 B \cos \omega \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{B^2} - 1}. \quad (15.93)$$

На элементе поверхности  $d\sigma$  (фиг. 15.12), пренебрегая членами второго порядка, будем иметь

$$-C_p \frac{1}{2} l^2 \operatorname{tg} \delta \cos \omega d\omega = \frac{l^2 \operatorname{tg} \delta}{W_\infty} u_0 \cos \omega d\omega; \quad (15.94)$$

подставляя для  $u_0$  значение, полученное выше, и относя коэффициент к площади основания конуса, получим коэффициент подъемной силы для полного конуса длиной  $l$  в виде

$$\begin{aligned} C_z &= \frac{2l^2 \operatorname{tg} \delta}{W_\infty \pi l^2 \operatorname{tg}^2 \delta} C_2 B \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{B^2} - 1} \int_0^{\pi} \cos^2 \omega d\omega = \frac{C_2 B \operatorname{ctg} \delta}{W_\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{B^2} - 1} \approx \\ &\approx \frac{K_2 \alpha B \operatorname{ctg} \delta}{W_\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{B^2} - 1}, \end{aligned} \quad (15.95)$$

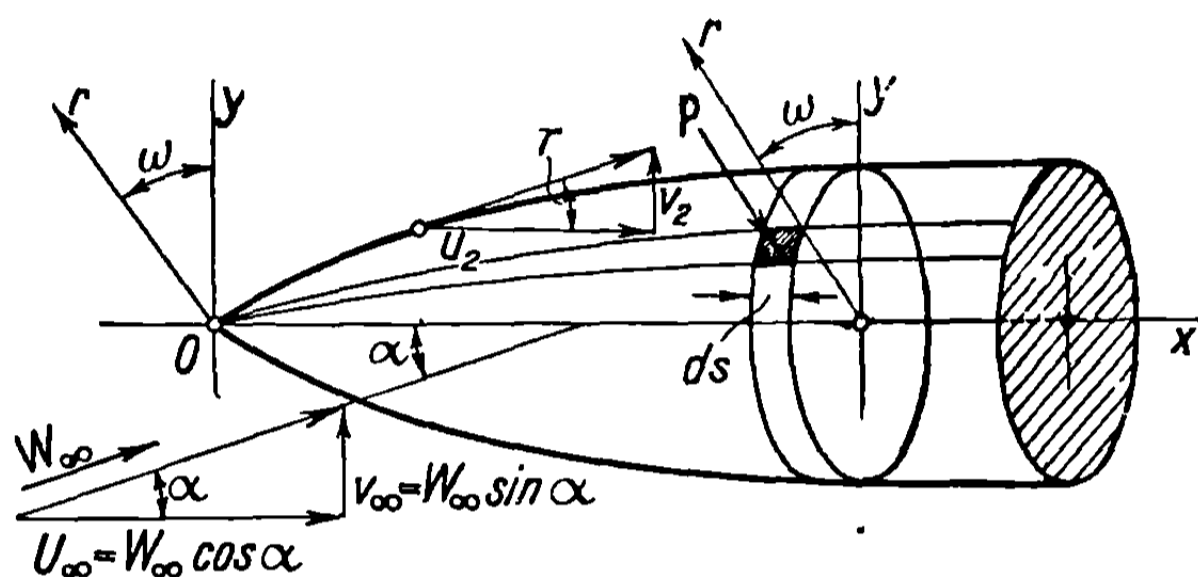
где  $C_2$  и  $K_2$  должны быть заменены их значениями, выведенными из уравнения (15.90) или (15.91). Следовательно, коэффициент подъемной силы зависит от угла при вершине конуса и является линейной функцией от  $\alpha$ . Для больших значений углов  $\delta$ , как увидим ниже, этот коэффициент заметно отличается от коэффициента, полученного путем точных вычислений.

15.4.2. Тонкие заостренные тела, наклоненные под углом атаки к потоку. Пусть  $u_2$  и  $v_2$  — компоненты скорости поперечного потока; используя выражение (15.86), получим

$$u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -B \cos \omega \int_{\text{Arch} \frac{x}{Br}}^0 g'(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz, \quad (15.96a)$$

$$v_2 = W_\infty \sin \alpha \cos \omega + B^2 \cos \omega \int_{\text{Arch} \frac{x}{Br}}^0 g'(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z dz, \quad (15.96b)$$

где  $g'(\xi) = g'(x - Br \operatorname{ch} z)$  — производная функции  $g(\xi)$  по аргументу  $\xi = x - Br \operatorname{ch} z$ .



Фиг. 15.13

Граничное условие, которому должны удовлетворять эти скорости в каждой точке на поверхности тела (фиг. 15.13), выражается соотношением

$$\frac{v_2}{u_2} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dr}{dx}. \quad (15.97)$$

Из рассмотрения уравнений (15.96a и б) вытекает, что это отношение не зависит от  $\omega$ .

Для тонких заостренных тел угол  $\tau$  очень мал; следовательно,  $\frac{dr}{dx}$  также очень мало; с другой стороны, при этом поперечном движении, нормальном к оси тела, скорость свободного потока  $v_\infty = W_\infty \sin \alpha$  очень мала, так как угол  $\alpha$  предполагается очень малым; получающаяся в результате скорость  $u_2$  также очень мала.

Так как отношение (15.97) чрезвычайно мало и скорость  $u_2$  тоже мала, то отсюда следует, что числитель левой части уравнения (15.97) будет малой величиной более высокого порядка, чем знаменатель. Условие, приведенное выше, можно поэтому рассматривать как эквивалентное равенству

$$\frac{v_2}{\cos \omega} = W_\infty \sin \alpha + B^2 \int_{\text{Arch} \frac{x}{Br}}^0 g'(x - Br \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z dz = 0. \quad (15.98)$$

Возвращаясь к переменной  $\xi$ , определяемой равенством 15 23 и применяя соотношения 15 44, запишем приведенное условие в виде

$$W_{\infty} \sin \alpha = \frac{1}{r^2} \int_0^{-Br} \frac{g(\xi) \chi(\xi)}{\sqrt{-\xi^2 - Br^2}} d\xi. \quad (15.99)$$

Предполагая, что  $r$  очень мало, получим

$$\begin{aligned} W_{\infty} \sin \alpha &= \frac{1}{r^2} \int_0^{-Br} g(\xi) \chi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \chi(\xi) g(\xi) \Big|_0^{-Br} + \int_0^{-Br} \chi'(\xi) g(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (15.100)$$

Член в квадратных скобках будет близок к нулю, так как  $r$  приближенно равно нулю и  $g(\xi)$  равняется нулю, когда  $\xi = 0$ . Замечая снова, что  $r \approx 0$ , будем иметь

$$r^2 W_{\infty} \sin \alpha \approx \int_0^{\frac{x}{Br}} g(\xi) d\xi, \quad (15.101)$$

отсюда, дифференцируя обе части равенства, находим

$$g(x) = 2W_{\infty} \sin \alpha r \frac{dr}{dx} = \frac{W_{\infty}}{x} \sin \alpha \frac{dx}{dr}. \quad (15.102)$$

Для того чтобы вычислить скорость  $u_2$ , которая входит в уравнение давления, исходим из соотношения 15 96а и, переходя к переменной  $\xi$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} u_2 &= -B \cos \alpha \int_0^{\operatorname{Arctg} \frac{x}{Br}} g(\xi) \chi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\cos \alpha}{r} \int_0^{-Br} \frac{g(\xi) \chi(\xi)}{\sqrt{-\xi^2 - Br^2}} d\xi, \end{aligned} \quad (15.103)$$

предполагая, что  $r \approx 0$  и применяя выражение 15 102), имеем

$$u_2 \approx \frac{\cos \alpha}{r} \int_0^{\frac{x}{Br}} g(\xi) d\xi = \frac{\cos \alpha}{r} g(x) = \frac{W_{\infty} \sin \alpha \cos \alpha}{xr} \frac{dx}{dr}. \quad (15.104)$$

При вычислении подъемной силы и момента относительно носика тела можно ограничиться определением осевой скорости, пренебрегая членом с  $u_1^2$  и принимая во внимание только простое выражение

$$C_p \approx -\frac{u}{W_{\infty}} = -2 \frac{u}{W_{\infty}} = -\frac{2}{W_{\infty}} \frac{dx}{dr}, \quad (15.105)$$

где, как выше,  $u_1$  — скорость, обусловленная осесимметричным течением, а  $u_2$  — скорость, вызываемая поперечным потоком. Так как первая скорость



будет неизменной на любой меридиональной кривой, то она не влияет на подъемную силу; следовательно, рассматривая кольцеобразный элемент поверхности (фиг. 15.13) и интегрируя давление от 0 до  $x$ , применяя выражение (15.104), получим уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_M C_z &= -2 \int_0^x \int_0^\pi C_p \cos \omega \cos \tau \, ds \, r \, d\omega = \frac{4}{W_\infty} \int_0^x \int_0^\pi u_2 \cos \omega \, r \, d\omega \, dx = \\ &= \frac{4 \sin \alpha}{\pi} \int_0^\sigma d\sigma \int_0^\pi \cos^2 \omega \, d\omega \approx 2\sigma\alpha, \end{aligned} \quad (15.106)$$

где  $\sigma_M$  — максимальное сечение,  $\sigma$  — сечение в точке отрыва потока  $\sigma = \sigma_s$ , или сечение на выходном срезе обтекателя, в случае реактивной струи  $\sigma = \sigma_j$ .

Следовательно,

$$C_z \approx 2 \frac{\sigma}{\sigma_M} \alpha, \quad (15.107)$$

причем эта величина будет максимальной, если предположить, что отрыв для тел с максимальной толщиной, расположенной ближе к их хвостовой части, будет происходить в поперечном сечении, соответствующем максимальной толщине; в этом случае имеем

$$C_z = 2\alpha. \quad (15.108)$$

Если поток обтекает тело плавно, как предусматривается теорией малых возмущений, и тело имеет острую точку на нижнем (по течению) конце, то в этой точке  $\sigma = 0$ , и подъемная сила равна нулю.

Для того чтобы вычислить момент относительно передней точки, в формулу (15.106) нужно ввести величину плеча прикладываемых сил; беря прежние пределы интегрирования, получим формулу

$$l\sigma_M C_m = \frac{4 \sin \alpha}{\pi} \int_0^\sigma x \, d\sigma \int_0^\pi \cos^2 \omega \, d\omega \approx 2(l\sigma - V)\alpha, \quad (15.109)$$

где  $\sigma$  и  $V$  — сечение и объем, соответствующие длине  $l$ , которая определяет конец тела или место, где происходит отрыв потока. Пусть  $V$  — полный объем тела, в предположении, что длина тела, остающаяся за точкой отрыва потока, очень мала; в этом случае концевое сечение будем рассматривать равным нулю.

При этих условиях, обозначая через  $\sigma_m$  среднее поперечное сечение тела, можно записать уравнение

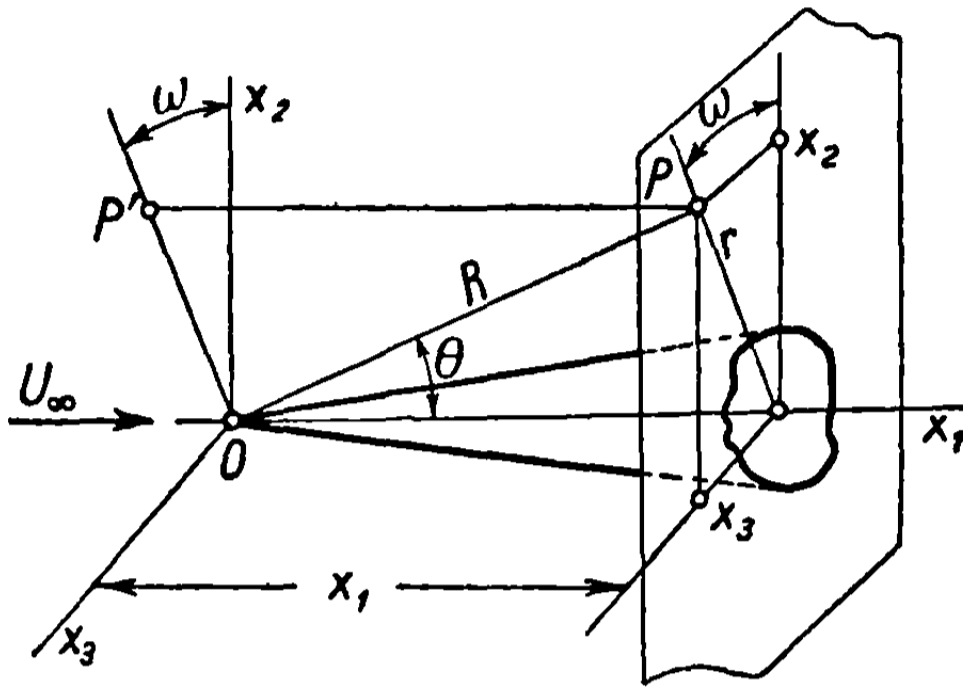
$$C_m = - \frac{2l\sigma_m}{l\sigma_M} \sin \alpha \approx -2 \frac{\sigma_m}{\sigma_M} \alpha. \quad (15.110)$$

Заметим, что момент отрицателен; тела вращения в сверхзвуковом потоке, как и в дозвуковом, не имеют устойчивости вдоль своей траектории и для обеспечения устойчивости должны снабжаться вертикальным стабилизатором.

**З а м е ч а н и е.** Приведенное рассуждение относится к телам с круглым поперечным сечением. Изучение тонких тел любого поперечного сечения было произведено Уордом [11] с помощью метода комплексных переменных; получены очень интересные результаты

## 16. ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Если для какого-нибудь течения все его параметры — скорости, давление, плотность и т. д. — будут постоянны вдоль радиуса-вектора, исходящего из начала координат, то течение называется *коническим*.



Фиг. 16.1

Это осуществляется в случае, когда поток обтекает конус вращения даже без предположения о малости возмущений, если угол при вершине конуса не превышает определенный предел. Течение не будет коническим для конуса любого поперечного сечения с большим углом при вершине вследствие происходящих вокруг него сложных явлений, таких, как отошед-

шие (отделившиеся от конуса) ударные волны.

Если все поперечные размеры или часть их для конуса с вершиной в начале координат будут достаточно малы, чтобы оправдать гипотезу малых возмущений, то течение в этом случае всегда будет коническим.

Пусть рассматривается конус с вершиной, расположенной в начале координат; покажем, что относительно декартовой системы  $Ox_1x_2x_3$  или системы полярных координат  $R, \theta, \omega$  (фиг. 16.1) коническое течение около этого конуса определяется потенциалом вида:

$$\Phi = x_1 \cdot \varphi \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right), \quad (16.1)$$

в декартовой системе или

$$\Phi = R \cdot \varphi (\theta, \omega), \quad (16.2)$$

в системе полярных координат, связанных с декартовыми посредством известных соотношений

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \theta, \\ x_2 &= R \sin \theta \cos \omega, \\ x_3 &= R \sin \theta \sin \omega. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Таким образом, полагая

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1} &= y, \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -\frac{y}{x_1}, \end{aligned}$$

$$\frac{x_3}{x_1} = z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{z}{x_1}, \quad (16.4)$$

получим потенциал в форме

$$\Phi = x_1 \cdot \varphi(y, z), \quad (16.5)$$

причем скорости определяются равенствами

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \varphi(y, z) - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (16.6)$$

из которых очевидно, что скорости будут одинаковыми вдоль исходящего из начала радиуса-вектора, так как  $y$  и  $z$  вдоль него будут одинаковыми.

Подобно этому в полярных координатах имеем

$$v_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \varphi(\theta, \omega),$$

$$v_\theta = \frac{\partial \Phi}{R \partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta},$$

$$v_\omega = \frac{\partial \Phi}{R \sin \theta \partial \omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}, \quad (16.7)$$

откуда также видно, что скорости не меняются вдоль любого радиуса-вектора. Уравнения (16.1) и (16.2) представляют, таким образом, потенциал конического течения.

### 16.1. Упрощение уравнения для потенциала скорости в случае обтекания тонких конических тел

В предположении малых возмущений уравнение для потенциала является линейным уравнением гиперболического типа (см. уравнение 5.43):

$$-(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0. \quad (16.8)$$

Исходя из выражений (16.6), находим последовательно

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{1}{x_1} \left( y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2yz \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (16.9)$$

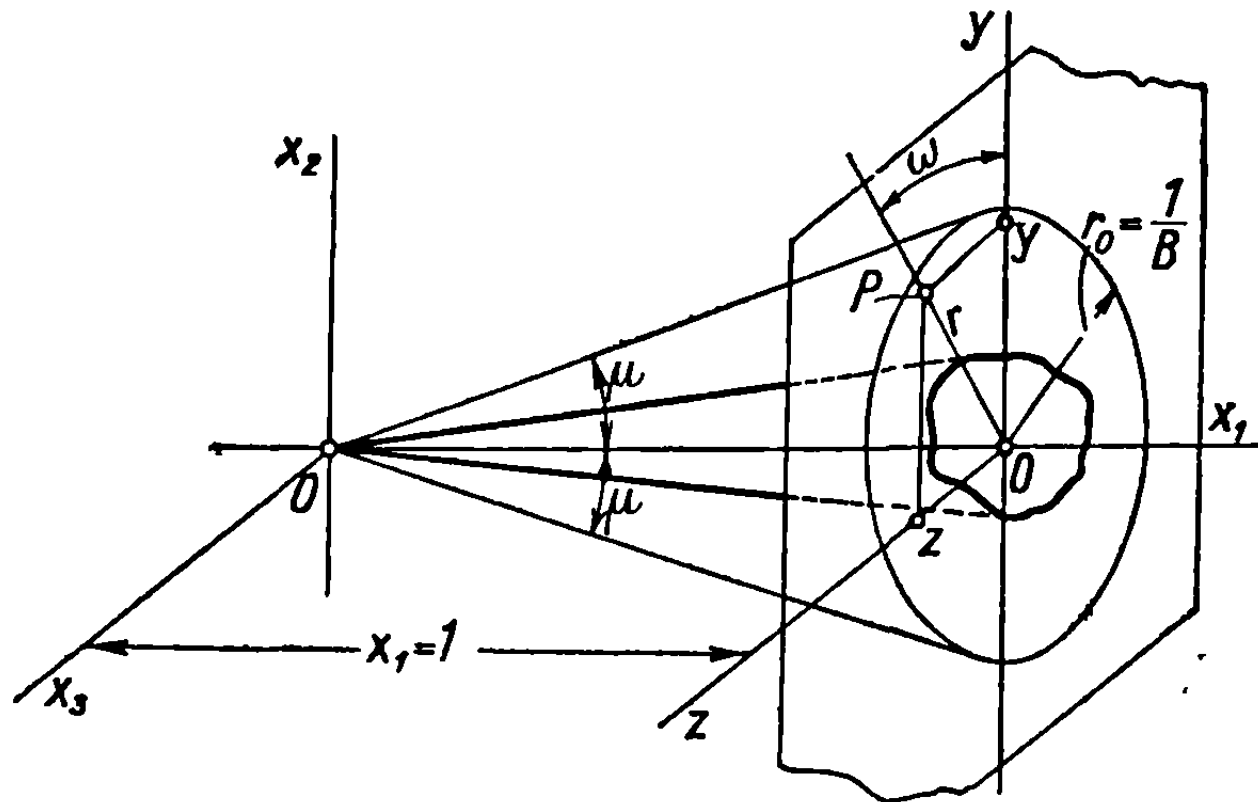
откуда, подставляя результаты в уравнение (16.8), получим уравнение Буземана [12]

$$(1 - B^2 y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - B^2 z^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2B^2 yz \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0, \quad (16.10)$$

$$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \operatorname{ctg} \mu \quad (16.11)$$

( $\mu$  — угол Маха).

Так как  $y$  и  $z$  одинаковы вдоль любого радиуса-вектора  $OP$ , рассмотрим плоскость  $x_1=1$  и заметим, что точка пересечения радиуса-вектора



Фиг. 16.2

с этой плоскостью имеет координаты, равные  $y, z$  (фиг. 16.2). Поэтому исследование может быть ограничено точками этой плоскости.

Из уравнения (16.10) видно, что решение задачи в указанной форме будет трудным даже для простых случаев.

Уравнение (16.10) надо преобразовать с целью получения упрощенного уравнения. При решении некоторых задач уравнение (16.10) можно упростить непосредственно.

Так, рассматривая пересечение конуса Маха с плоскостью  $Oyz$  ( $x_1=1$ , фиг. 16.2), находим, что радиус окружности, являющейся линией пересечения, будет

$$r_0 = \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{B}. \quad (16.12)$$

Если размеры кривой, представляющей контур сечения тела этой плоскостью, малы, то членами

$$B^2 y^2 \approx 0, \quad B^2 z^2 \approx 0, \quad B^2 yz \approx 0 \quad (16.13)$$

можно пренебречь; тогда уравнение (16.10) сводится к двумерному уравнению Лапласа:

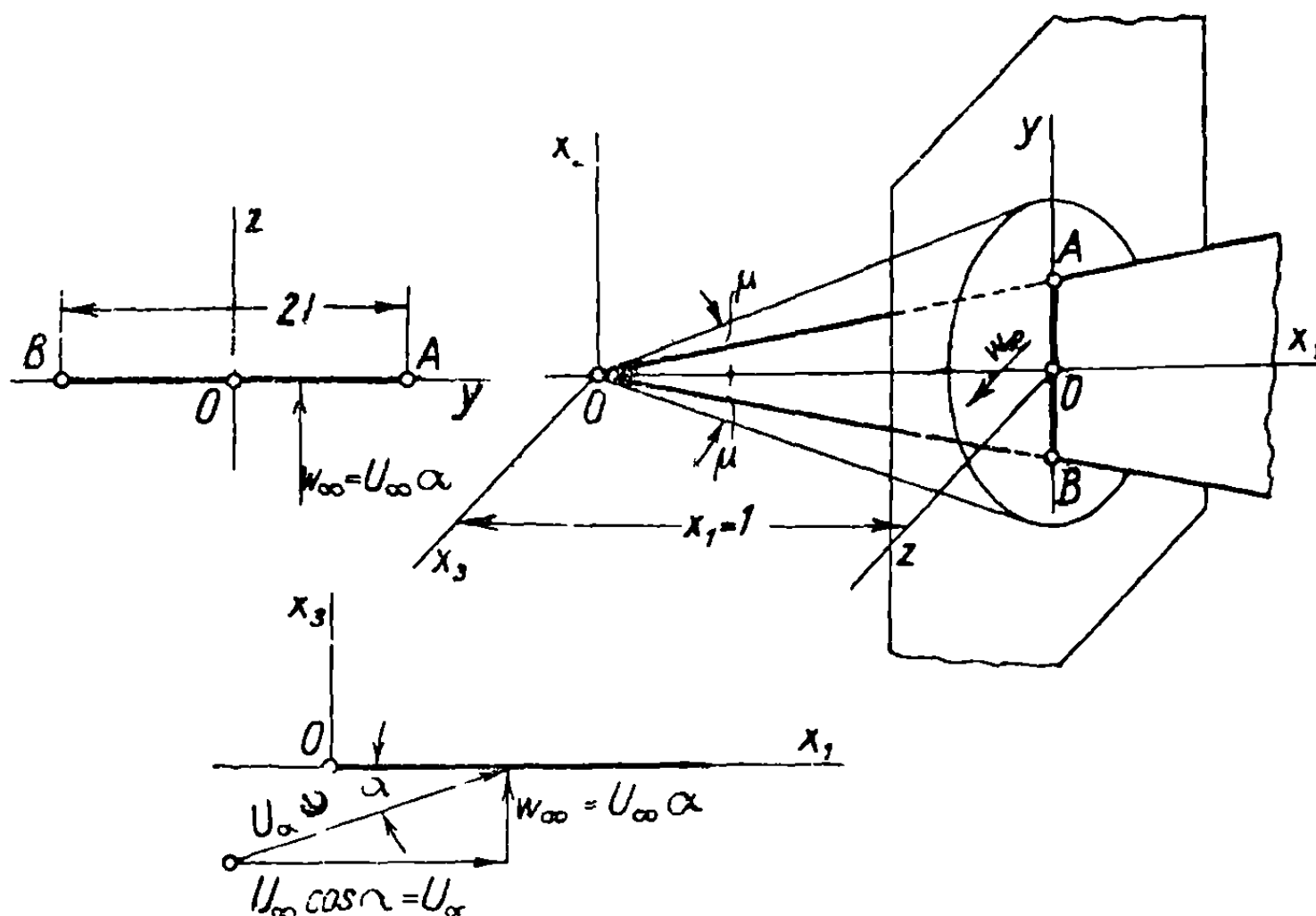
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (16.14)$$

Процесс сводится к двумерному течению вокруг контура сечения тела в плоскости  $Oyz$ . Если известны граничные условия, то задача может быть решена с помощью обычных методов гидродинамики несжимаемой жидкости. Однако наибольшая трудность, с которой мы сталкиваемся, состоит именно в определении граничных условий. В простых случаях, когда существует определенная симметрия, они получаются легко. Некоторые из таких случаев рассмотрены ниже.

**16. 1.1. Тонкая треугольная пластинка.** Рассмотрим тонкую пластинку, расположенную под углом атаки  $\alpha$  относительно свободного потока. и пусть  $BA$  — линия ее пересечения с плоскостью  $Oyz$  (фиг. 16.3).

Вертикальная скорость будет

$$\omega_{\infty} = \alpha U_{\infty}, \quad (16.15)$$



Фиг. 16.3

причем в этом случае горизонтальный отрезок в плоскости  $Oyz$  располагается нормально к потоку, имеющему скорость  $w_{\infty}$ . Обозначая комплексную переменную через

$$x = y + iz, \quad (16.16)$$

получим, очевидно, следующее выражение для комплексного потенциала течения:

$$f(x) = \varphi(y, z) + i\psi(y, z) = -iU_{\infty}\alpha\sqrt{x^2 - l^2}, \quad (16.17)$$

где  $2l$  — след  $BA$  пластинки. Действительная часть  $\varphi(y, z)$  представляет точно требуемое решение, мнимая часть  $\psi(y, z)$  не имеет особого значения. Дифференцируя, получим скорости  $v$  и  $w$ :

$$\frac{df}{dx} = v - iw = \frac{-iU_{\infty}\alpha x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (16.18)$$

которые на верхней стороне пластинки ( $z = 0$ ) принимают значения

$$v = -\frac{\alpha U_{\infty} y}{\sqrt{l^2 - y^2}},$$

$$w = 0. \quad (16.19)$$

Осевая скорость  $u$  легко выводится путем применения первого уравнения (16.6); замечая, что  $f(x)$  действительна и равна  $\varphi$  на верхней поверхности пластинки, получим

$$u = \varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha U_{\infty} \left[ \sqrt{l^2 - y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right] = \frac{\alpha l^2 U_{\infty}}{\sqrt{l^2 - y^2}}. \quad (16.20)$$

Для верхней поверхности пластинки коэффициент давления будет

$$C_p = -2 \frac{u}{U_{\infty}} = -\frac{2\alpha l^2}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad (16.21)$$

для нижней получается то же значение, но с обратным знаком.

Для того чтобы найти коэффициент подъемной силы для треугольного крыла, можно разделить крыло на элементарные треугольные полосы с основанием  $dy$  и единичной высотой; таким образом получим формулу Джонса [13]:

$$C_z = -\frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} 2C_p \frac{1}{2} dy = 2\pi\lambda\alpha. \quad (16.22)$$

Чтобы сравнить эти результаты с получаемым в случае несжимаемой жидкости, введем величину удлинения; так как размах крыла будет  $2l$ , а поверхность равна  $l$ , то удлинение будет

$$\lambda = \frac{4l^2}{l} = 4l, \quad (16.23)$$

а  $C_z$  и  $C_x$  выразятся через удлинение следующим образом:

$$C_z = \frac{\pi}{2} \lambda \alpha, \quad (16.24)$$

$$C_x = \frac{\pi}{2} \lambda \alpha^2 - C_{xs},$$

где  $C_{xs}$  — коэффициент, соответствующий подсосу на передних кромках, который рассмотрен в следующей главе.

**16.1.2. Лобовое сопротивление клиновидного треугольного крыла.** Если крыло имеет форму клина, симметричного относительно направления течения, с которым обе поверхности составляют угол  $\gamma$ , то их след в плоскости  $Oyz$  будет  $BA$  и граничные условия меняются; скорость, нормальная к поверхностям, будет

$$\omega_0 = \pm \gamma U_{\infty}, \quad (16.25)$$

причем положительный знак соответствует верхней поверхности, а отрицательный — нижней (фиг. 16.4).

Очевидно, что  $BA$  представляет линейный источник, интенсивность которого постоянна:

$$q = 2\omega_0 = 2\gamma U_{\infty}. \quad (16.26)$$

Потенциал, определяющий это движение, выражается формулой

$$f(x) = \frac{\gamma U_\infty}{\pi} \int_{-l}^{+l} \ln(x - y') dy' = \frac{\gamma U_\infty}{\pi} \left[ x \ln \frac{x+l}{x-l} + l \ln(x^2 - l^2) + C \right], \quad (16.27)$$

из которой выводится комплексная скорость

$$\frac{df}{dx} = v - i\omega = \frac{i\gamma U_\infty}{\pi} \ln \frac{x+l}{x-l}. \quad (16.28)$$

Заметим, что осевая скорость  $u$  определится равенством

$$\begin{aligned} u = \varphi - yv - z\omega &= \operatorname{Re} \left( f(x) - x \frac{df}{dx} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \frac{\gamma U_\infty}{\pi} [l \ln(x^2 - l^2) + C], \end{aligned} \quad (16.29)$$

которое для больших значений  $x$  ( $x = re^{i\omega}$ ) принимает вид

$$\frac{\pi}{\gamma U_\infty} u \approx \operatorname{Re} (2l \ln x + C) = 2l \ln r + C, \quad (16.30)$$

где  $r$  — радиус очень удаленной точки.

Как и следовало ожидать, для точек, далеких от начала, *линейный источник эквивалентен сосредоточенному источнику*, который можно поставить в соответствие конусу; осевая скорость, создаваемая сосредоточенным источником, определяется уравнением (15.27а). Принимая во внимание, что  $x$  в этом уравнении соответствует  $x_1 = 1$  в обозначениях, которыми мы теперь пользуемся, получим для конуса с круглым поперечным сечением

$$\operatorname{Arch} \frac{1}{Br} \approx - \ln \frac{B}{2} r = - \left( \ln r + \ln \frac{B}{2} \right); \quad (16.31)$$

следовательно, постоянная  $C$  может быть выведена путем сравнения с уравнением (16.30):

$$C = 2l \ln \frac{B}{2}. \quad (16.32)$$

Подставляя в уравнение (16.29), получим

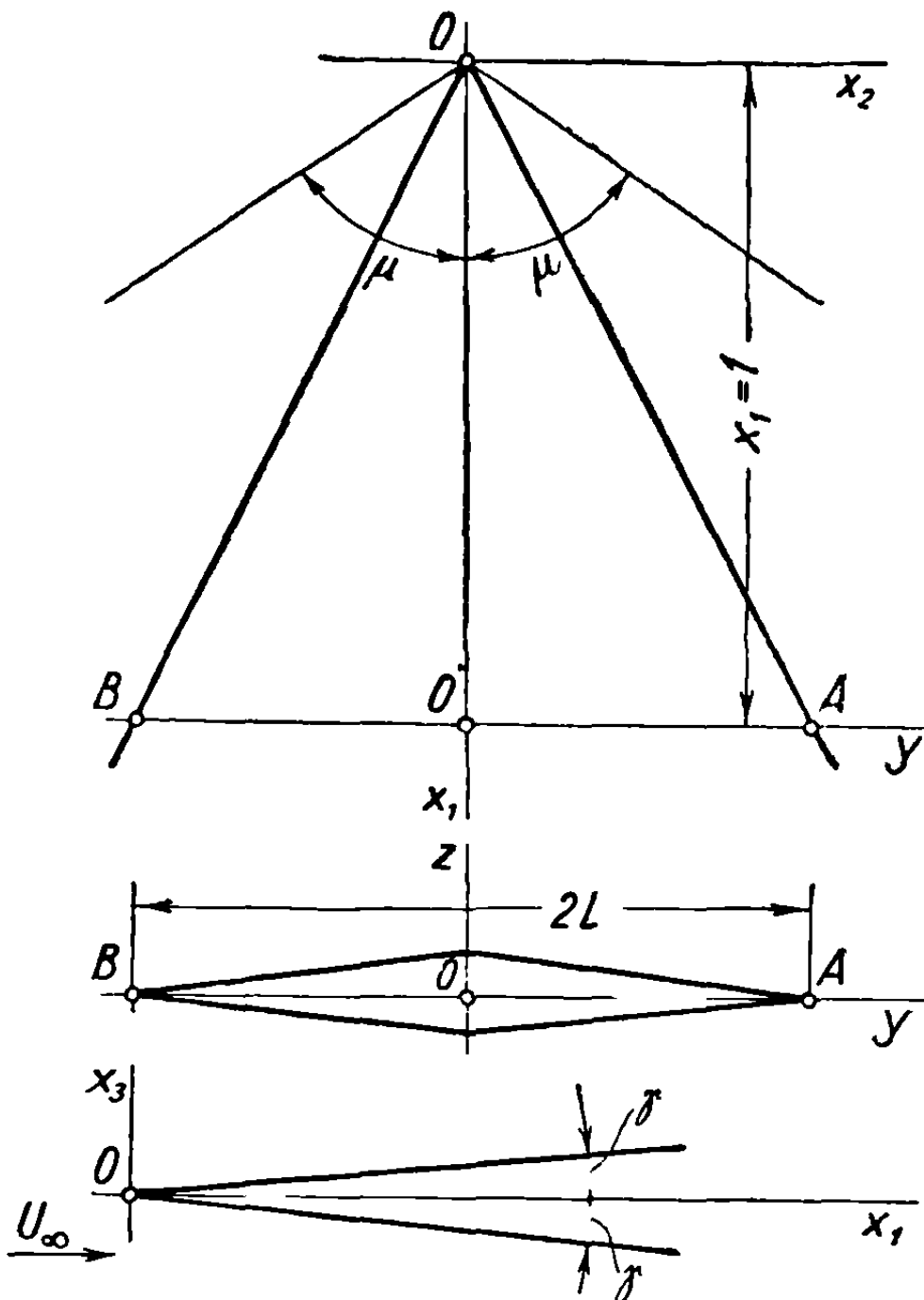
$$u = \operatorname{Re} \frac{\gamma U_\infty}{\pi} [l \ln(y^2 - l^2) + C] = \frac{\gamma U_\infty l}{\pi} \ln \frac{B^2}{4} (l^2 - y^2). \quad (16.33)$$

Отсюда можно вывести коэффициент давления  $C_p$  и путем интегрирования волновое сопротивление

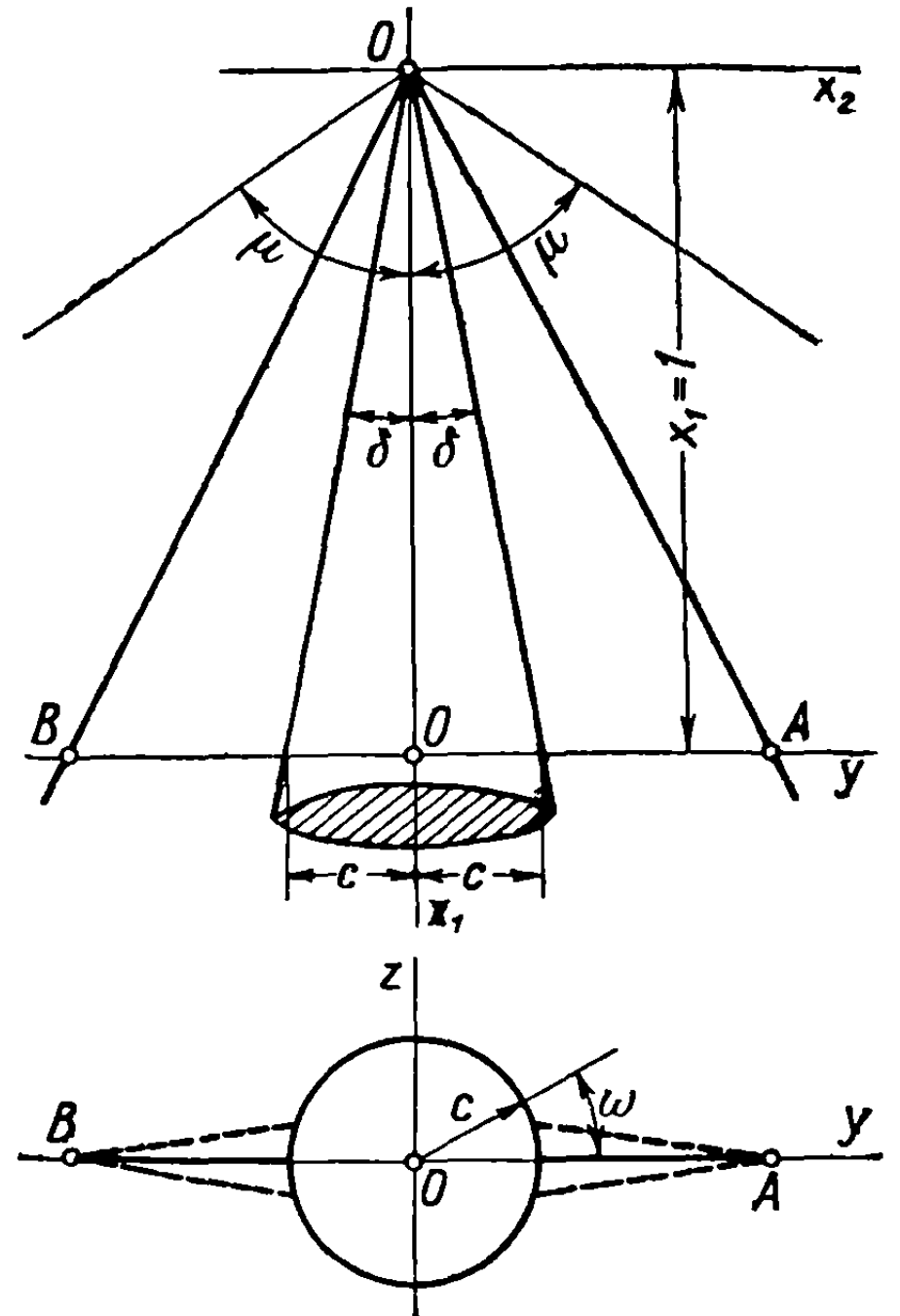
$$C_{xu} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} 2C_p \gamma \frac{dy}{2} = \frac{8\gamma^2 l}{\pi} (1 - \ln Bl). \quad (16.34)$$

Так как предполагается, что крыло резко обрывается на конце, то должен быть добавлен эффект разрежения на задней кромке, где давление равно  $kp_\infty$ . В нормальном поперечном сечении вниз по потоку

$$C_{xp} = \frac{\rho_\infty k p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \cdot \frac{2l\gamma}{l \cdot 1} = \frac{2(1-k)}{\alpha M_\infty^2} 2\gamma = \frac{4(1-k)\gamma}{\alpha M_\infty^2}. \quad (16.35)$$



Фиг. 16.4



Фиг. 16.5

## 16.2. Влияние фюзеляжа

Если крыло рассматривается совместно с коническим фюзеляжем<sup>1</sup> (фиг. 16.5), след которого в плоскости  $Oyz$  представляет круг радиуса

$$c = \operatorname{tg} \delta \approx \delta, \quad (16.36)$$

то, применяя те же приближения, что и выше, определим комплексный потенциал скорости в указанной плоскости при следующих условиях.

1. Когда крыло расположено под нулевым углом атаки, то на круге

$$v_r = \delta U_\infty, \quad (16.37)$$

и величина потенциала скорости будет соответствовать величине потенциала для источника с интенсивностью

$$Q = 2\pi c \delta U_\infty = 2\pi \delta^2 U_\infty; \quad (16.38)$$

поэтому в плоскости  $Oyz$  имеем

$$f_1(x) = \delta^2 U_\infty \left( \ln \frac{B}{2} x + 1 \right), \quad (16.39)$$

<sup>1</sup> Эта задача была исследована другими авторами [14—17].



отсюда

$$u_1 = \mathbf{Re} \left( f_1(x) - x \frac{df_1}{dx} \right) = \delta^2 U_\infty \ln \frac{Br}{2}, \quad (16.40)$$

что представляет собой результат, полученный ранее (см. соотношение 16.31). Тот же результат может быть выведен путем разложения первого соотношения (15.27а) по членам, содержащим величину  $Br$ , если ограничиться в этом разложении только главным членом.

2. Когда крыло имеет угол атаки  $\alpha$ , вертикальная скорость на бесконечности будет  $w_\infty = \alpha U_\infty$  (см. уравнение 16.15). Чтобы найти соответствующее течение, положим, что  $2l'$  будет шириной пластинки, для которой во вспомогательной плоскости  $O'y'z'$ , где  $x'$  — комплексная переменная

$$x' = y' + iz', \quad (16.41)$$

потенциал течения определится выражением, идентичным предшествующему

$$f_2(x') = -i\alpha U_\infty \sqrt{x'^2 - l'^2}. \quad (16.42)$$

Путем конформного отображения

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{c^2}{x}, \\ l' &= l - \frac{c^2}{i}, \end{aligned} \quad (16.43)$$

для которого  $c \approx \delta$  будет радиусом круга, получим потенциал и скорость в физической плоскости  $x$ :

$$f_2(x) = -i\alpha U_\infty \sqrt{\left(x - \frac{c^2}{x}\right)^2 - \left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2}, \quad (16.44a)$$

$$\frac{df_2}{dx} = v_2 - iw_2 = -i\alpha U_\infty \frac{\left(x - \frac{c^2}{x}\right)\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{c^2}{x}\right)^2 - \left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2}}. \quad (16.44b)$$

Далее

$$u_2 = \mathbf{Re} \left( f_2(x) - x \frac{df_2}{dx} \right) = \mathbf{Re} i\alpha U_\infty \left\{ \frac{\left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2 + 2c^2 \left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{c^2}{x}\right)^2 - \left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2}} \right\}; \quad (16.45)$$

в результате на верхней поверхности крыла ( $x = y$ )

$$u_{2a} = \alpha U_\infty \frac{\left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2 + 2c^2 \left(1 - \frac{c^2}{y^2}\right)}{\sqrt{\left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2 - \left(y - \frac{c^2}{y}\right)^2}}, \quad (16.46)$$

а на коническом фюзеляже ( $x = ce^{i\omega}$ ) (см. фиг. 16.5)

$$u_{2f} = \alpha U_{\infty} \sqrt{\left(l - \frac{c^2}{l}\right)^2 + 4c^2 \sin^2 \omega}. \quad (16.47)$$

Теперь может быть проведен подсчет давления и подъемной силы.

3. Если крыло по толщине будет также клинообразным (см. фиг. 16.5), то, исходя из той же ширины  $2l'$  в плоскости  $x'$ , получим

$$f_3(x') = \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left[ x' \ln \frac{x' + l'}{x' - l'} + l' \ln (x'^2 - l'^2) + l' \ln \frac{B^2}{4} \right]; \quad (16.48)$$

отсюда

$$\begin{aligned} u_3 = \operatorname{Re} \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left( f_3(x') - x \frac{df_3}{dx'} \frac{dx'}{dx} \right) &= \operatorname{Re} \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left( f_3(x') - \right. \\ &- \left. \left( x + \frac{c^2}{x} \right) \frac{df_3}{dx'} \right) = \operatorname{Re} \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left\{ \left( l - \frac{c^2}{l} \right) \ln \frac{B^2}{4} \left[ \left( x - \frac{c^2}{x} \right)^2 - \left( l - \frac{c^2}{l} \right)^2 \right] - \right. \\ &\left. - 2 \frac{c^2}{x} \ln \frac{\left( x - \frac{c^2}{x} \right) + \left( l - \frac{c^2}{l} \right)}{\left( x - \frac{c^2}{x} \right) - \left( l - \frac{c^2}{l} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (16.49)$$

На крыле ( $x = y$ )

$$\begin{aligned} u_{3a} = \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left\{ \left( l - \frac{c^2}{l} \right) \ln \frac{B^2}{4} \left[ \left( l - \frac{c^2}{l} \right)^2 - \left( y - \frac{c^2}{y} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2 \frac{c^2}{y} \ln \frac{\left( l - \frac{c^2}{l} \right) + \left( y - \frac{c^2}{y} \right)}{\left( l - \frac{c^2}{l} \right) - \left( y - \frac{c^2}{y} \right)} \right\}, \end{aligned} \quad (16.50)$$

а на коническом фюзеляже ( $x = ce^{i\omega}$ )

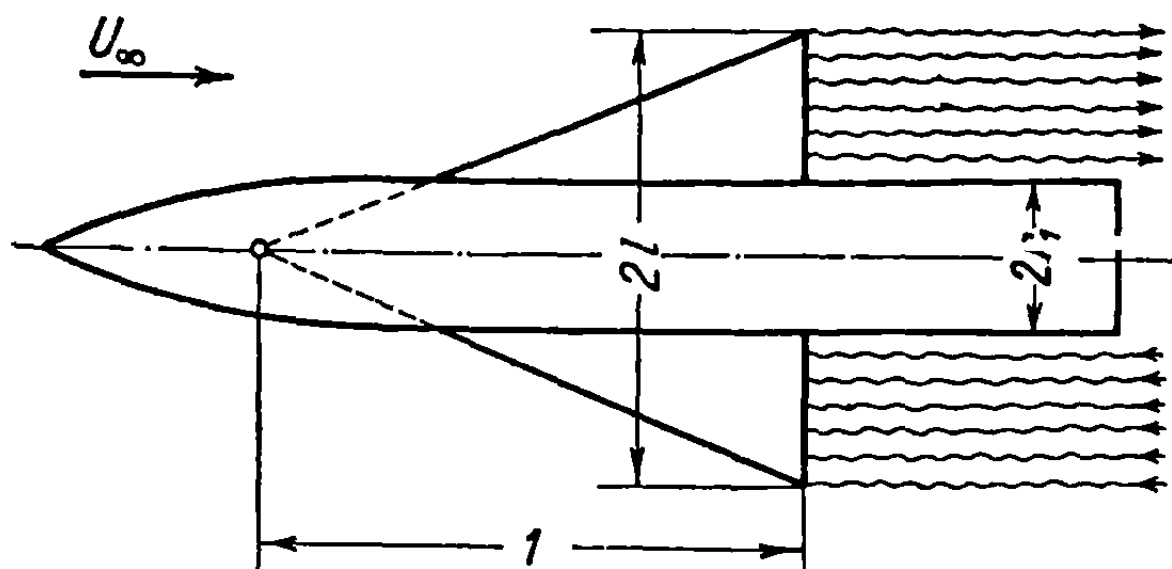
$$u_{3f} = \frac{\gamma U_{\infty}}{\pi} \left\{ \left( l - \frac{c^2}{l} \right) \ln \frac{B^2}{4} \left[ \left( l - \frac{c^2}{l} \right)^2 + 4c^2 \sin^2 \omega \right] + 4c \beta \sin \omega \right\}, \quad (16.51)$$

где угол  $\beta$  определяется зависимостью

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{2c \sin \omega}{l - \frac{c^2}{l}} = \frac{2lc \sin \omega}{l^2 - c^2} \approx 0, \quad \beta \approx \frac{\pi}{2}. \quad (16.52)$$

Во всех приведенных выше формулах  $c$  можно заменить через  $\delta$  (см. уравнение 16.36). Вычисление давления и лобового сопротивления не представляет дальнейших трудностей.

16.2.1. Распространение метода на тонкий фюзеляж, снабженный тонкими крыльями. Нет необходимости приводить здесь другие примеры применения приближенного метода, описанного выше, так как задачи этого типа рассматриваются снова в главе, посвященной теории крыльев



Фиг. 16.6

конечного размаха в сверхзвуковом потоке, где изучение конического течения произведено без упрощающего приближения (см. раздел 16.13).

Однако в некоторых случаях, как, например, при расчете интерференции между крылом и фюзеляжем, когда размеры их поперечного сечения малы по сравнению с радиусом сечения конуса Маха, возникают значительные трудности для применения более точных методов, в то время как упрощенный метод приводит к конкретным результатам.

Изучение движения тонкого заостренного тела, снабженного крыльями (фиг. 16.6), можно легко произвести упрощенным методом, приведенным выше. В самом деле, в каждом нормальном сечении радиус  $r_1$  фюзеляжа и размах  $l$  крыла будут различны, но выражения для потенциала и скорости могут быть теми же, что и выше.

В первом приближении подъемная сила может быть вычислена следующим образом.

Изменение циркуляции вокруг треугольного крыла, отделенного от фюзеляжа, происходит таким образом, что, как можно предполагать, сбегаящие с задней кромки вихри образуют вместе с фюзеляжем систему, вокруг которой течение в плоскости, нормальной к оси фюзеляжа, определяется далеко вниз по потоку потенциалом, аналогичным потенциалу для несжимаемого течения [18].

Рассмотрим ради упрощения такое распределение циркуляции, чтобы индуцированная скорость на вихревой линии и на круге соответствовала минимальному сопротивлению.

При этих условиях уравнение для потенциала принимает форму (16.44а), и подъемная сила системы крыло — фюзеляж уменьшается по сравнению с подъемной силой изолированного крыла согласно соотношению [18]

$$\begin{aligned} \frac{P_{af}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} &= \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{l^2}\right)^2 = l \cdot 2\pi\alpha \left(1 - \frac{r_1^2}{l^2}\right)^2 = \\ &= 2\pi\alpha (l - r_1)^2 \left(1 + \frac{r_1}{l}\right)^2. \end{aligned} \quad (16.53)$$

Прибавляя подъемную силу фюзеляжа  $P_f$ , выведенную из уравнения (15.108),

$$\frac{P_f}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = 2\alpha\sigma_1 = 2\alpha\pi r_1^2, \quad (16.54)$$

получим полную подъемную силу  $P_t$ :

$$P_t = P_f + \left(1 + \frac{r_1}{l}\right)^2 P_a, \quad (16.55)$$

где  $P_a$  — подъемная сила изолированного крыла с малым удлинением  $4(l - r_1)$ . Это снова приводит к формуле Уорда [11], применение которой рекомендуется автором для любой системы, образованной телом вращения и крыльями малого удлинения.

Стокер [19], рассматривая систему крыло — фюзеляж, получил интересные результаты, применяя некоторые упрощения.

### 16.3. Преобразование Буземана для приведения уравнения потенциала к двумерному уравнению Лапласа

Пусть  $q$  — скорость вдоль некоторого направления  $l$  и

$$q = \frac{\partial\Phi}{\partial l};$$

замечая, что эта скорость, которая имеет свойства конического течения, удовлетворяет уравнению потенциала, получим, в силу уравнения (16.8),

$$-B^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left( -B^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right) = 0, \quad (16.56)$$

Посмотрим, можно ли заменить переменные таким образом, чтобы скорость  $q$  стала гармонической функцией относительно новых переменных.

Пусть  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  — декартовы координаты, связанные с прежними координатами  $x_1, x_2, x_3$  уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1, \\ \bar{x}_2 &= \alpha x_2, \\ \bar{x}_3 &= \alpha x_3; \end{aligned} \quad (16.57)$$

полярные координаты  $\bar{R}, \bar{\theta}, \omega$ , связанные с декартовыми координатами обычными уравнениями (фиг. 16.7), могут быть определены через переменные новой системы:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{R} \cos \bar{\theta}, \\ \bar{x}_2 &= \bar{R} \sin \bar{\theta} \cos \omega, \\ \bar{x}_3 &= \bar{R} \sin \bar{\theta} \sin \omega. \end{aligned} \quad (16.58)$$

Координаты  $R$  и  $\theta$  в соотношениях (16.3) должны быть заменены через  $\bar{R}$  и  $\bar{\theta}$ ;  $\omega$  остается неизменной.

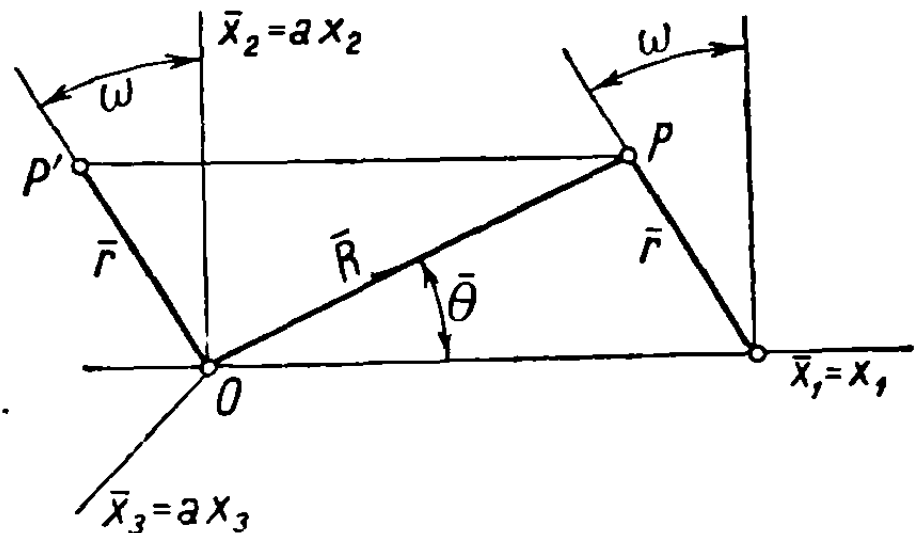
Выражая скорость  $q$  через новые переменные

$$q = q(\bar{R}, \bar{\theta}, \omega) \quad (16.59)$$

и предполагая, что она является гармонической функцией в системе  $\bar{R}, \bar{\theta}, \omega$  (или  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ), получим, что оператор Лапласа от этой функции равен нулю и может быть применена общая формула (1.60a):

$$\nabla^2 q = \frac{1}{\bar{R}^2 \sin \bar{\theta}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left( \bar{R}^2 \sin \bar{\theta} \frac{\partial q}{\partial \bar{R}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left( \sin \bar{\theta} \frac{\partial q}{\partial \bar{\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{\sin \bar{\theta}} \frac{\partial q}{\partial \omega} \right) \right] = 0.$$

(16.60)



Фиг. 16.7

Напомним, что  $q(\bar{R}, \bar{\theta}, \omega)$  представляет коническое поле и поэтому не зависит от  $\bar{R}$  ( $\frac{\partial q}{\partial \bar{R}} = 0$ ); в этом случае написанное выражение приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left( \sin \bar{\theta} \frac{\partial q}{\partial \bar{\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{\sin \bar{\theta}} \frac{\partial q}{\partial \omega} \right) = 0. \quad (16.61)$$

Применяя метод Гуревича [20], введем новую переменную  $\rho$  вместо  $\bar{\theta}$ , причем эти переменные связаны между собой уравнениями

$$\bar{\theta} = i\Theta,$$

$$\frac{d\Theta}{\text{sh } \Theta} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad (16.62)$$

или, в конечной форме,

$$\text{th } \frac{\Theta}{2} = \rho, \quad \text{th } \Theta = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}. \quad (16.63)$$

Вводя в уравнение (16.61)  $\rho$  вместо  $\bar{\theta}$ , получим

$$\frac{\rho}{i \text{sh } \Theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sin \bar{\theta} \frac{\rho}{i \text{sh } \Theta} \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \bar{\theta}} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\sin \bar{\theta}} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} \right] = 0; \quad (16.64)$$

отсюда

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} = 0. \quad (16.65)$$

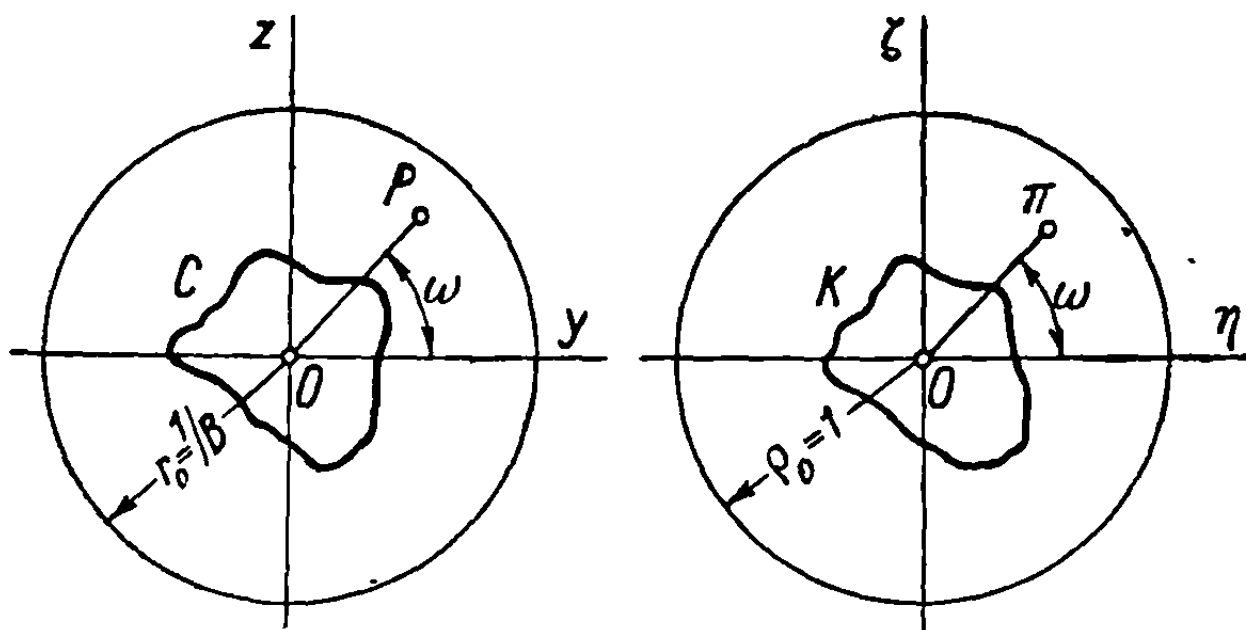
В плоскости полярных координат  $\rho, \omega$  левая часть уравнения (16.65) представляет оператор Лапласа от функции  $q(\rho, \omega)$ ; это показывает, что

преобразование (16.63) сводит задачу о коническом течении к нахождению гармонической функции.

Возвращаясь к плоскости  $Oyz$  ( $x_1 = 1$ ; фиг. 16.2), рассматривая точку  $P$  с координатами  $y, z$  и обозначая через  $r$  радиус-вектор  $OP$  в этой плоскости, применяя затем уравнения (16.62) и (16.63), можно записать соотношения:

$$\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{x}_1^2} = a^2 \left( \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \right) = a^2 (y^2 + z^2) = a^2 r^2, \quad (16.66a)$$

$$\frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{x}_1^2} = \operatorname{tg}^2 \bar{\theta} = -\operatorname{th}^2 \Theta = - \left( \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \right)^2 = a^2 r^2. \quad (16.66b)$$



Фиг. 16.8

Так как скорость  $q$  удовлетворяет уравнению (16.56) и, по предположению, является гармонической функцией переменных  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , имеем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{x}_3^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q}{a^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q}{a^2 \partial x_3^2} = 0; \quad (16.67)$$

отсюда следует, что эти соотношения могут быть удовлетворены при

$$a = iB. \quad (16.68)$$

Подставляя выражение (16.68) в уравнение (16.66б), получим геометрическое преобразование Буземана [21].

$$Br = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}, \quad (16.69)$$

которое производит точечное преобразование всей физической плоскости  $x_1 = 1$ , представленной через полярные координаты  $r, \omega$  (или декартовы координаты  $y, z$ ) на вспомогательную плоскость, представленную координатами  $\rho, \omega$  (соответственно декартовыми координатами  $\eta, \zeta$ , фиг. 16.8). В обеих плоскостях координата  $\omega$  остается одинаковой. Обратное,

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 r^2}}{Br}. \quad (16.70)$$

Из последних двух формул ясно, что когда  $r$  изменяется от 0 до  $1/B$ , то  $\rho$  изменяется от 0 до 1.

16.3.1. Свойства преобразования Буземана. Ранее уже было установлено, что функция  $q$  представляет скорость вдоль какого-нибудь направления, и, в частности, она может представлять компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  скорости возмущения в любой точке  $P(y, z)$  плоскости  $Oyz$  ( $x_1 = 1$ ). Так как эти скорости будут одинаковы вдоль всего радиуса вектора  $OP$ , то их определение в точке  $P$  плоскости  $Oyz$  дает известное поле скоростей во всем пространстве.

Применяя геометрическое преобразование Буземана (16.69), отображим  $Oyz$  взаимно-однозначно на плоскость  $O\eta\zeta$ ; точка  $\pi$  во второй плоскости (см. фиг. 16.8) соответствует точке  $P$  в первой плоскости, контур  $K$  соответствует контуру  $C$  и круг радиуса  $\rho_0 = 1$  в плоскости  $O\eta\zeta$  соответствует кругу Маха с радиусом  $r_0 = \frac{1}{B_1}$ , как это следует из уравнения (16.69), при замене  $\rho$  через 1.

В плоскости  $O\eta\zeta$  компоненты скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  являются функциями  $\rho$ ,  $\omega$  или  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$u = u(\eta, \zeta), \quad v = v(\eta, \zeta), \quad w = w(\eta, \zeta); \quad (16.71)$$

будучи гармоническими функциями в этой плоскости, они удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta w = 0. \quad (16.72)$$

Связывая с каждой из указанных функций их соответствующие сопряженные функции  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  и обозначая через  $\xi$  комплексную переменную

$$\xi = \eta + i\zeta = \rho e^{i\omega}, \quad (16.73)$$

находим, что получающиеся в результате комплексные комбинации функций являются аналитическими функциями этой комплексной переменной:

$$\begin{aligned} u + iu' &= f(\xi), \\ v + iv' &= g(\xi), \\ w + iw' &= h(\xi). \end{aligned} \quad (16.74)$$

Функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будут связаны друг с другом соотношениями безвихренности, именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} &= \frac{\partial w}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (16.75)$$

Предполагая, что функция  $u + iu' = f(\xi)$  известна, можно легко вывести из приведенных зависимостей два других компонента  $v$  и  $w$  или, в более общей форме,  $v + iv' = g(\xi)$ ,  $w + iw' = h(\xi)$ .

В самом деле, имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1} \left( \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial z} z \right), \quad (16.76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x_1} \left( \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial z} z \right);$$

отсюда

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (16.77)$$

Применяя полярные координаты  $r$  и  $\omega$  в плоскости  $Oyz$ , имеем

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \cos \omega,$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \sin \omega, \quad (16.78)$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{z}{y},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{z}{r^2} = -\frac{\sin \omega}{r},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\cos \omega}{r};$$

используя уравнение (16.69)

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{2}{B} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2)^2}, \quad (16.79)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} \cos \omega - \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\sin \omega}{r} = \\ &= \frac{B}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{(1 + \rho^2)^2}{1 - \rho^2} \cos \omega - \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{1 + \rho^2}{\rho} \sin \omega \right) \end{aligned} \quad (16.80)$$

и

$$\begin{aligned} y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} &= y \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \omega - \frac{\partial v}{\partial \omega} \frac{z}{r^2} \right) + z \left( \frac{\partial v}{\partial r} \sin \omega + \frac{\partial v}{\partial \omega} \frac{y}{r^2} \right) = \\ &= r \frac{\partial v}{\partial r} = r \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho (1 + \rho^2)}{1 - \rho^2} \frac{\partial v}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (16.81)$$

Отсюда можно вывести зависимость

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{B}{2} \left[ \frac{1 + \rho^2}{\rho} \cos \omega \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1 - \rho^2}{\rho} \sin \omega \frac{\partial u}{\rho \partial \omega} \right], \quad (16.82)$$



которая может быть далее преобразована, если принять во внимание, что две сопряженные функции  $u$  и  $u'$  удовлетворяют соотношениям Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u'}{\rho \partial \omega}, \\ \frac{\partial u}{\rho \partial \omega} &= -\frac{\partial u'}{\partial \rho};\end{aligned}\tag{16.83}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \rho} &= -\frac{B}{2} \left[ \frac{1+\rho^2}{\rho} \cos \omega \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1-\rho^2}{\rho} \sin \omega \frac{\partial u'}{\partial \rho} \right] = \\ &= -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-i\omega}}{\rho} \frac{\partial (u + iu')}{\partial \rho} + \rho e^{i\omega} \frac{\partial (u + iu')}{\partial \rho} \right) = \\ &= -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\xi} + \xi \right) \frac{\partial f}{\partial \rho}.\end{aligned}\tag{16.84}$$

С помощью соотношений

$$\begin{aligned}\xi &= \rho e^{i\omega}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \frac{d}{d\xi} = e^{i\omega} \frac{d}{d\xi}\end{aligned}\tag{16.85}$$

получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \operatorname{Re} e^{i\omega} \frac{d(v + iv')}{d\xi} = -\frac{B}{2} \operatorname{Re} e^{i\omega} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \frac{df}{d\xi};\tag{16.86}$$

в результате имеем

$$v + iv' = g(\xi) = -\frac{B}{2} \int \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) df.\tag{16.87}$$

Применяя тот же метод, найдем аналогичное выражение для  $w + iw'$ :

$$w + iw' = h(\xi) = \frac{iB}{2} \int \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df.\tag{16.88}$$

В некоторых задачах более удобно определять скорости  $v$  и  $w$  в плоскости  $O\eta\zeta$  с помощью только одного уравнения; обозначая через  $\bar{f}$  функцию, сопряженную функции  $f$ , получим:

$$\begin{aligned}v - iv' &= -\frac{B}{2} \int \left( \bar{\xi} + \frac{1}{\bar{\xi}} \right) d\bar{f}, \\ iw - w' &= -\frac{B}{2} \int \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df, \\ iw + w' &= \frac{B}{2} \int \left( \bar{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right) d\bar{f}.\end{aligned}\tag{16.89}$$

Складывая левые и правые части равенств (16.89) с соответствующими частями равенства (16.87), получим

$$v + i\omega = -\frac{B}{2} \left( \int \xi df + \int \frac{1}{\xi} d\bar{f} \right). \quad (16.90)$$

16.3.2. Применение к потоку, обтекающему конус вращения. Несмотря на то, что этот вопрос уже обсуждался, снова рассмотрим указанную задачу, чтобы показать преимущество изложенного метода. Отметим, что при определении функции  $f(\xi)$  надо принять ее действительную часть  $u$  постоянной на окружности  $K$  в плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$  и равной нулю на окружности единичного радиуса. Функция, удовлетворяющая этим условиям, будет

$$u + iu' = f(\xi) = C \ln \xi = C \ln \rho + Ci\omega; \quad (16.91)$$

отсюда

$$u = C \ln \rho. \quad (16.92)$$

Применяя формулу (16.90) и обозначая через  $v_r$  радиальную скорость, можно записать соотношения

$$\begin{aligned} v + i\omega = v_r e^{i\omega} &= -\frac{B}{2} \int \left( \xi df + \frac{1}{\xi} d\bar{f} \right) = \\ &= -\frac{BC}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) = -\frac{BC}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) e^{i\omega}; \end{aligned} \quad (16.93)$$

отсюда

$$v_r = -C \frac{B}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right). \quad (16.94)$$

Подставляя вместо  $\rho$  его значение из уравнения (16.70), получим результаты, найденные ранее другим методом (см. уравнения 15.27а, б):

$$u = C \ln \left( \frac{1}{Br} - \sqrt{\frac{1}{B^2 r^2} - 1} \right) = -C \operatorname{Arch} \frac{1}{Br}, \quad (16.95a)$$

$$v_r = CB \sqrt{\frac{1}{B^2 r^2} - 1}. \quad (16.95b)$$

Чтобы определить постоянную  $C$ , используем тот же прием, приравнивая тангенс угла при вершине конуса отношению между радиальной скоростью  $v_r$  и осевой скоростью  $U_\infty + u$ ; замечая, что радиус круга равен тангенсу угла при вершине ( $r = c = \operatorname{tg} \delta$ ), получим формулу, которую нашли ранее (см. 15.29).

16.3.3. Применение к крыльям конечного размаха. Наиболее важными случаями применения теории конического течения являются, несомненно, вопросы, связанные с изучением крыльев конечного размаха в сверхзвуковом потоке.

Рассмотрим плоское крыло, расположенное под углом атаки  $\alpha$  в потоке, имеющем скорость  $U_\infty$  на бесконечности. След этого крыла в плоскости  $x_1 = 1$  представляет отрезок прямой линии. Если передняя точка заострения



## Глава 6

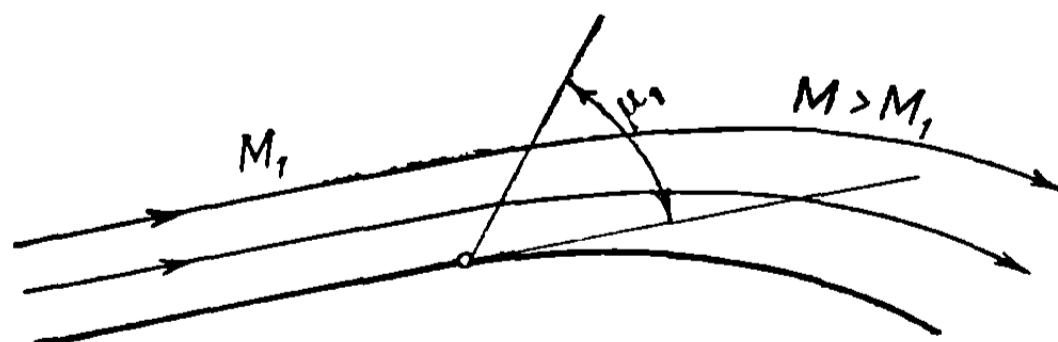
### ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУМЕРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

В предыдущей главе рассматривались некоторые задачи, к которым мог быть применен метод малых возмущений; результаты получаются полезные и вполне обоснованные при условии, что предположение о малости возмущений будет удовлетворяться.

Как только эти гипотезы становятся более недействительными, требуются точные методы вычисления, чтобы получить теоретические результаты, согласующиеся с экспериментальными данными. В этой главе рассмотрен ряд новых задач и снова обсуждены некоторые из ранее изученных с целью получения их решения с точностью, требуемой для некоторых важных случаев применения. Обсуждение охватывает случай расширения двумерного потока вдоль криволинейной стенки, приводящий к изучению действительного движения около аэродинамического профиля, течения в двумерных соплах, диффузорах и струях.

#### 17. РАСШИРЕНИЕ ДВУМЕРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

Ускорение сверхзвукового потока в направлении его движения связано с процессом расширения газа. Это происходит, например, когда



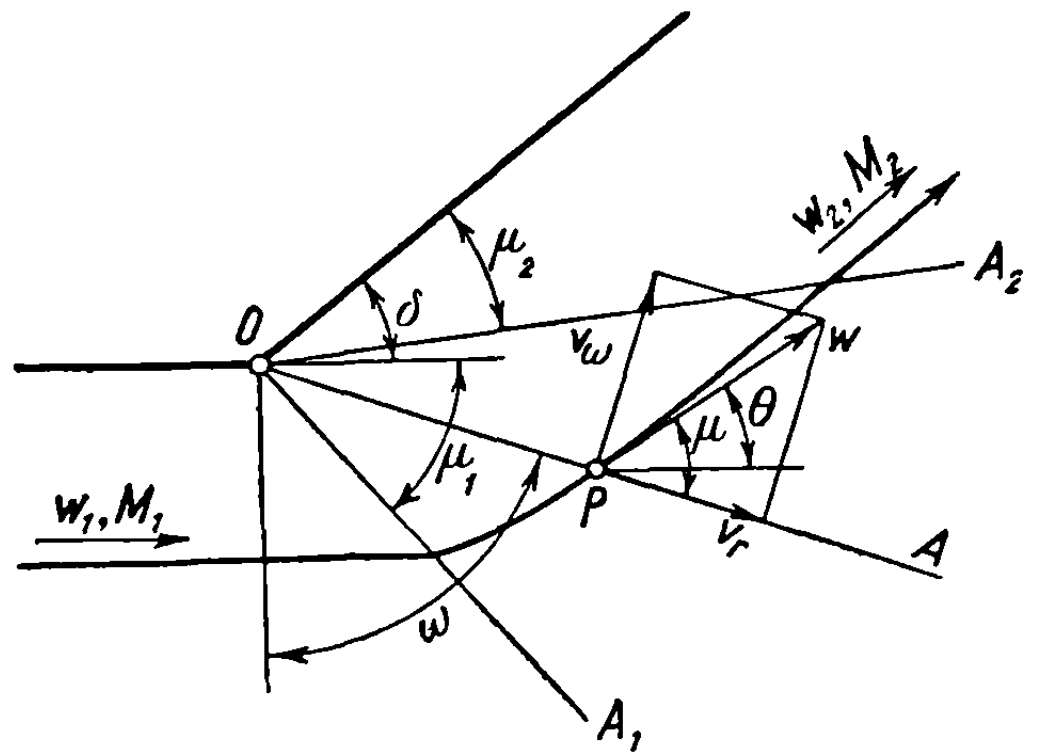
Фиг. 17.1

стенка, вдоль которой течет газ, в определенном месте отклоняется наружу (по отношению к потоку), что приводит к возникновению расширения газа и увеличению скорости его частиц (фиг. 17.1).

Изучение явления двумерного расширения несложно: оно заключается в установлении того, что изменение скорости вдоль стенки непосредственно зависит от угла отклонения стенки от начального направления потока, и в определении зависимости между скоростью и отклоне-

нием. В противоположность течениям, обладающим указанными характеристическими свойствами, будут также рассмотрены некоторые типы течений, не зависящих от отклонения, характеристики которых зависят только от расстояния до определенной точки.

Основная задача, относящаяся к течениям первого типа, есть задача о расширении плоского течения около какого-нибудь угла, который отклоняет поток на угол  $\delta$ , с изменением скорости и числа Маха от значений  $w_1$  и  $M_1$  до значений  $w_2$  и  $M_2$  (фиг. 17.2). Возмущение появляется в угловой точке  $O$ ; его влияние распространяется за простую волну  $OA_1$ , образующую угол  $\mu_1$  с первоначальным направлением потока, определяемый известным соотношением



Фиг. 17.2

$$\sin \mu_1 = \frac{a_1}{w_1} = \frac{1}{M_1}, \quad (17.1)$$

где  $a_1$  — скорость звука в невозмущенной области.

После расширения течение становится параллельным направлению отклоненной стенки, а скорость — постоянной вдоль нее и во всей области вниз по потоку за простой волной  $OA_2$ , которая составляет угол  $\mu_2$  с новым отклоненным направлением потока, определяемый зависимостью

$$\sin \mu_2 = \frac{a_2}{w_2} = \frac{1}{M_2}, \quad (17.2)$$

где  $a_2$  — скорость звука при новых условиях течения, характеризуемых значениями  $w_2$ ,  $M_2$ .

Во всем секторе  $A_1OA_2$  величина скорости течения и его направление изменяются, в результате чего вдоль радиуса-вектора  $OA$  в точке  $P$  скорость становится равной  $w$  и отклоняется на угол  $\theta$ , который должен быть определен. Из дальнейшего увидим, что  $w$  и  $\theta$  сохраняются постоянными вдоль радиуса  $OA$ . Если расширение происходит между значением  $M_1 = 1$ , когда начальная скорость  $w_1$  равна критической скорости  $c$ , и значением  $M_2 = \infty$ , когда конечная скорость равна максимальной скорости  $W$ , то в этом случае наблюдается *полное расширение*, которому соответствует интервал изменения характеристик течения, включающий все другие возможные расширения (см. фиг. 17.2.). Решение задачи о таком полном расширении было дано Прандтлем [1] и Майером [2].

### 17.1. Определение основных уравнений для расширения вокруг угла.

Обозначая в рассматриваемом течении через  $v_r$  и  $v_w$  компоненты скорости вдоль радиуса вектора  $OA$  и вдоль нормали к радиусу-вектору, получим уравнение неразрывности в виде (см. формулу 5.49а)

$$\left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} - \frac{v_r v_\omega}{a^2} \left(\frac{\partial v_\omega}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \omega}\right) + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (17.3)$$

Предположим, что существует решение задачи, при котором скорости не будут изменяться вдоль радиуса-вектора; тогда записанное выше уравнение приводится к виду

$$(a^2 - v_\omega^2) \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega} + v_r \left(a^2 - v_\omega \frac{\partial v_r}{\partial \omega}\right) = 0. \quad (17.4)$$

Так как рассматривается безвихревое течение, то скорости выводятся из потенциала скорости  $\Phi$ , так что

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ v_\omega &= \frac{\partial \Phi}{r \partial \omega}; \end{aligned} \quad (17.5)$$

поэтому

$$\frac{\partial v_r}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial r} (r v_\omega) = v_\omega + r \frac{\partial v_\omega}{\partial r}. \quad (17.6)$$

Вспоминая, что явление не зависит от координаты  $r$  ( $\frac{\partial v_\omega}{\partial r} = 0$ ), будем иметь

$$\frac{\partial v_r}{\partial \omega} = \frac{d v_r}{d \omega} = v_\omega; \quad (17.7)$$

отсюда, подставляя результат в уравнение (17.4), получим окончательно соотношение

$$(a^2 - v_\omega^2) \left(v_r + \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega}\right) = 0. \quad (17.8)$$

Замечая, что второй множитель отличен от нуля для сжимаемых жидкостей (см. формулу 3.40а), находим

$$v_\omega = a; \quad (17.9)$$

следовательно, полная скорость  $w$  образует угол  $\mu$  с радиусом-вектором  $OA$ :

$$\frac{v_\omega}{w} = \frac{a}{w} = \sin \mu = \frac{1}{M}. \quad (17.10)$$

Из уравнения Бернулли (5.2а), обозначая через  $W$  максимальную скорость, получим

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} &= \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_\omega^2}{2} + \frac{v_\omega^2}{\kappa - 1} = \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} v_\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ v_r^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left(\frac{d v_r}{d \omega}\right)^2 \right] = \frac{W^2}{2}; \end{aligned} \quad (17.11)$$

отсюда следует, что

$$\frac{dv_r}{\sqrt{W^2 - v_r^2}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} d\omega, \quad (17.12)$$

поэтому

$$v_r = W \sin \left[ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (\omega + \omega_0) \right], \quad (17.13)$$

где  $\omega_0$  — постоянная, которая будет определена позже.

Далее

$$v_\omega = \frac{dv_r}{d\omega} = W \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cos \left[ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (\omega + \omega_0) \right] \quad (17.14)$$

и для полной скорости  $\omega$ , составляющей угол  $\theta$  с начальным направлением, имеем

$$\omega^2 = v_r^2 + v_\omega^2 = \frac{W^2}{x+1} \left\{ x - \cos \left[ 2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (\omega + \omega_0) \right] \right\}. \quad (17.15)$$

Потенциал течения можно определить из второго уравнения (17.5) путем применения выражения (17.14), если заметить, что явление зависит только от координаты  $\omega$ :

$$\Phi = \int v_\omega r d\omega = W r \sin \left[ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (\omega + \omega_0) \right]. \quad (17.16)$$

## 17.2. Полное расширение Прандтля — Майера

Предполагая, что  $M_1 = 1$ , т. е. что начальная скорость равна критической ( $\omega_1 = a_1 = c$ ) и что конечная скорость равна максимальной ( $\omega_2 = W$ ,  $M_2 = \infty$ ), получим  $v_r = 0$  вдоль линии  $\omega = 0$ , и из уравнения (17.13) будем иметь

$$\omega_0 = 0. \quad (17.17)$$

Таким образом, величина  $\omega$  определяется равенством

$$\omega^2 = \frac{W^2}{x+1} \left[ x - \cos \left( 2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega \right) \right]. \quad (17.18)$$

и принимает максимальное значение при

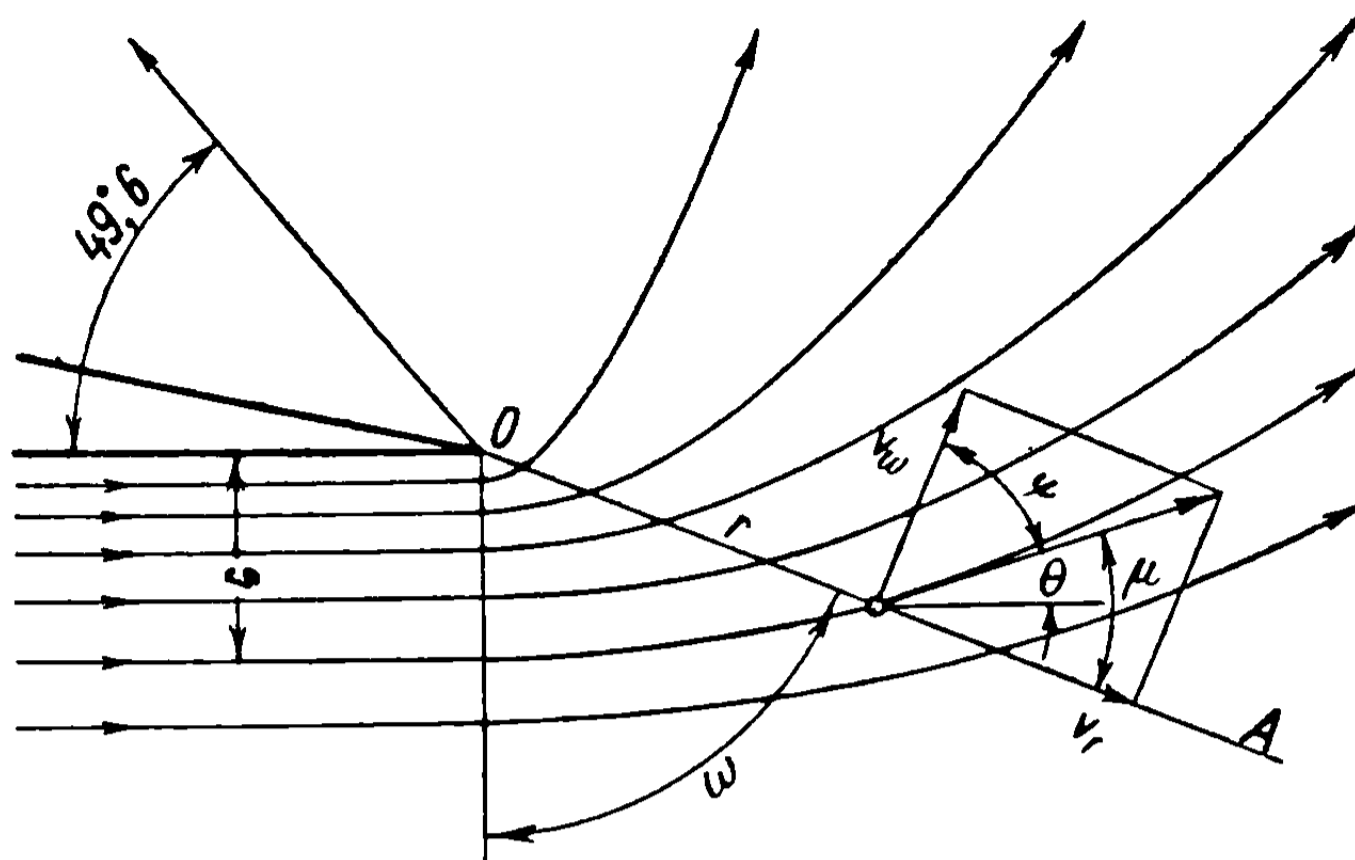
$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega_m &= \pi, \\ \omega_m^\circ &= 90^\circ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Для воздуха ( $x = 1,405$ , соответственно  $x \approx 1,40$ ), получим

$$\omega_m^\circ = 219,32, \quad (17.20)$$

соответственно

$$\omega_m^\circ = 220,4.$$



Фиг. 17.3

Средняя величина может быть взята равной  $\omega_m^\circ = 220^\circ$ .

С целью упрощения положим

$$\lambda = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \quad (17.21)$$

тогда скорости определяются равенствами:

$$v_r = W \sin \lambda \omega;$$

$$v_w = W \lambda \cos \lambda \omega;$$

$$\omega^2 = \frac{W^2}{x+1} (x - \cos 2\lambda \omega) = \frac{2}{x+1} W^2 \left( \frac{x+1}{2} - \cos^2 \lambda \omega \right). \quad (17.22)$$

Изменение угла Маха легко выводим, составляя отношение

$$\frac{v_w}{v_r} = \lambda \operatorname{ctg} \lambda \omega = \operatorname{tg} \mu = \operatorname{ctg} \psi = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad (17.23)$$

из которого также получается соответствующее число Маха:

$$\sqrt{M^2 - 1} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda \omega = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega \right). \quad (17.24)$$

Чтобы определить изменение давления, используем уравнение Бернулли (3.78):

$$\frac{\omega^2}{W^2} = 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}}; \quad (17.25)$$



отсюда, используя также формулу (17.22), имеем

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \frac{2}{x+1} \cos^2 \lambda \omega = (1 - \lambda^2) \cos^2 \lambda \omega. \quad (17.26)$$

Из дифференциального уравнения для линии тока

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\omega}{v_\omega}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{\sin \lambda \omega d(\lambda \omega)}{\lambda^2 \cos \lambda \omega} \quad (17.27)$$

можно легко получить зависимость

$$\ln \frac{r}{r_0} = -\frac{1}{\lambda^2} \ln(\cos \lambda \omega), \quad (17.28)$$

где постоянная  $r_0$  есть радиус-вектор рассматриваемой линии тока для  $\omega = 0$  (см. фиг. 17.3). Приведенное уравнение можно также записать в виде

$$\frac{r}{r_0} = (\cos \lambda \omega)^{-1/\lambda^2} = \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega \right) \right]^{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (17.29)$$

**17.2.1. Вычисление отклонения потока.** Отклонение потока относительно начального направления представляет важный параметр течения. Обозначая это отклонение через  $\theta$ , можно, применяя уравнение (17.24), вывести из фиг. 17.3 соотношение

$$\theta = \omega - \left( \frac{\pi}{2} - \mu \right) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg}(\lambda \sqrt{M^2 - 1}) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}, \quad (17.30)$$

где параметр  $\lambda$  можно заменить его выражением (17.21). Отсюда немедленно получается максимальное отклонение

$$\theta_m = \left( \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}; \quad (17.31)$$

для воздуха  $x = 1,40$ ,  $\theta_m = 130^\circ,4$ .

Имея в виду различные случаи применения, можно определить отклонение  $\theta$  как функцию от скорости и давления. Величина  $M$  может быть определена из уравнения (5.2б):

$$M^2 = \frac{2}{x-1} \frac{w^2}{W^2 - w^2}; \quad (17.32)$$

подставляя результат в выражение (17.30), получим соотношение между отклонением и скоростью

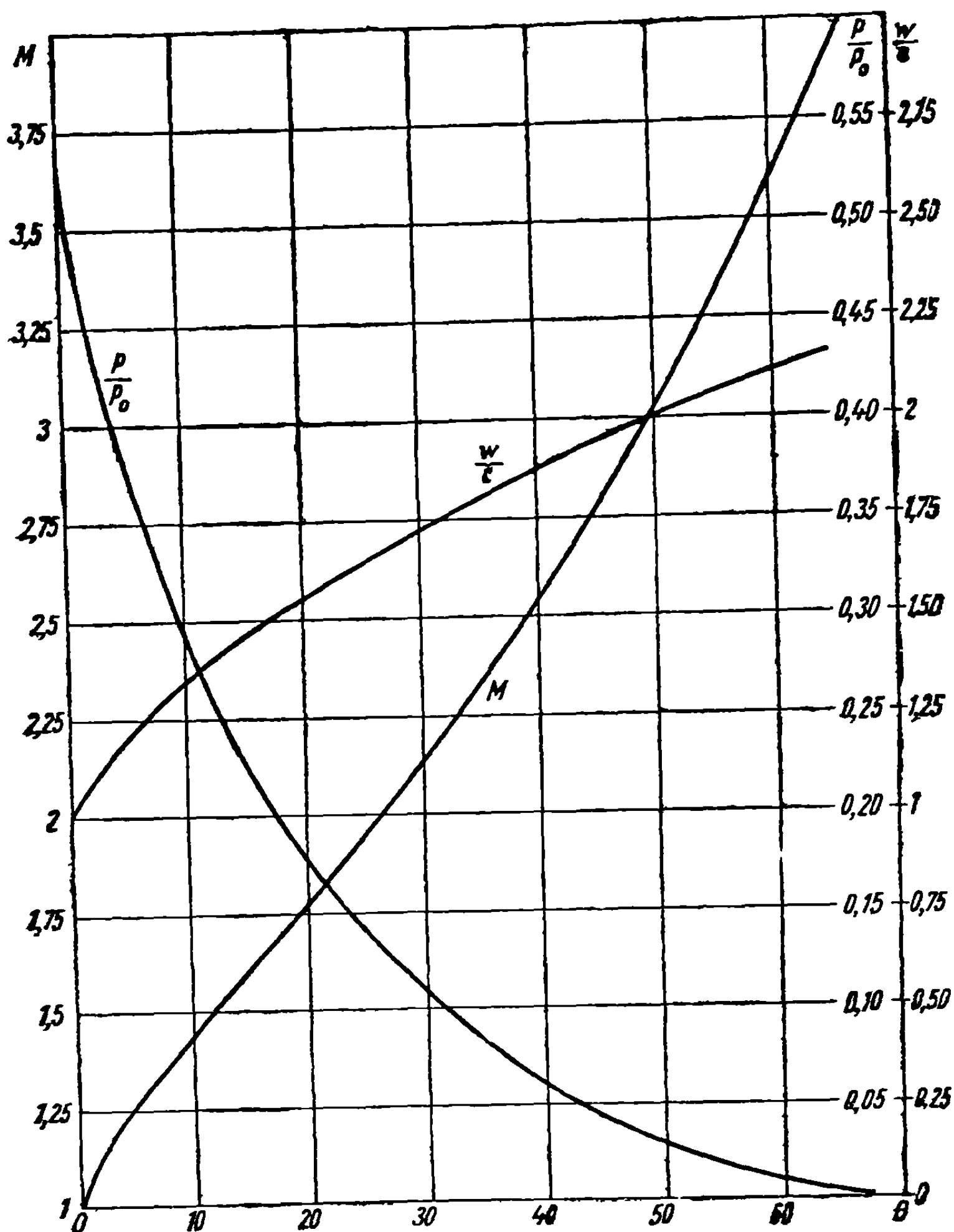
$$\theta = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{w^2 - \lambda^2 W^2}{W^2 w^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{w^2 - \lambda^2 W^2}{W^2 - w^2}} \right). \quad (17.33)$$

Подобным же образом из формулы (5.14) находим

$$M^2 = \frac{2}{x-1} \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right], \quad (17.34)$$

откуда, после подстановки в уравнение (17.30), получим соотношение между отклонением и давлением

$$\theta = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{x+1} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}} - 1} - \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{x+1} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}} - 1} \right]. \quad (17.35)$$



Фиг.17.4

Диаграммы (фиг. 17.4) показывают изменение отклонения  $\theta$  в зависимости от  $M$ ,  $\frac{p}{p_0}$  и  $\frac{w}{c}$ , где  $c$  — критическая скорость, определяемая уравнением (5.4). Следовательно,

$$c^2 = \frac{2}{x+1} a_0^2 = \frac{x-1}{x+1} W^2 = \lambda^2 W^2. \quad (17.36)$$

Подставляя  $W$  как функцию от  $c$  в уравнение (17.33), получим

$$\theta = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \left[ \lambda \sqrt{\frac{w^2 - c^2}{c^2 - \lambda^2 w^2}} \right] - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{w^2 - c^2}{c^2 - \lambda^2 w^2}}. \quad (17.37)$$

Таблица 17.1

$M$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{\omega}{W}$	$\mu$	$\theta$
1,00	0,528	0,833	0,634	0,408	90,00	0,00
1,05	0,498	0,819	0,608	0,425	72,25	0,49
1,10	0,468	0,805	0,582	0,441	65,38	1,34
1,15	0,440	0,791	0,556	0,457	60,41	2,38
1,20	0,412	0,776	0,531	0,473	56,44	3,56
1,25	0,386	0,762	0,507	0,488	53,13	4,83
1,30	0,361	0,747	0,483	0,503	50,28	6,16
1,35	0,337	0,733	0,460	0,517	47,79	7,56
1,40	0,314	0,718	0,437	0,531	45,58	8,99
1,45	0,293	0,704	0,416	0,544	43,60	10,44
1,50	0,272	0,690	0,395	0,557	41,81	11,91
1,55	0,253	0,675	0,375	0,570	40,18	13,39
1,60	0,235	0,661	0,356	0,582	38,68	14,86
1,65	0,218	0,647	0,337	0,594	37,31	16,33
1,70	0,203	0,634	0,320	0,605	36,03	17,81
1,75	0,188	0,620	0,303	0,616	34,85	19,27
1,80	0,174	0,607	0,287	0,627	33,75	20,72
1,85	0,161	0,594	0,271	0,637	32,72	22,16
1,90	0,149	0,581	0,257	0,647	31,76	23,59
1,95	0,138	0,568	0,243	0,657	30,85	24,99
2,00	0,128	0,556	0,230	0,667	30,00	26,38
2,05	0,118	0,543	0,218	0,676	29,20	27,75
2,10	0,109	0,531	0,206	0,685	28,44	29,10
2,15	0,101	0,520	0,195	0,693	27,72	30,43
2,20	0,0935	0,508	0,184	0,701	27,04	31,73
2,25	0,0865	0,497	0,174	0,709	26,39	33,02
2,30	0,0800	0,486	0,165	0,717	25,77	34,28
2,35	0,0740	0,475	0,156	0,724	25,18	35,53
2,40	0,0684	0,465	0,147	0,732	24,62	36,75
2,45	0,0633	0,454	0,139	0,739	24,09	37,95
2,50	0,0585	0,444	0,132	0,745	23,58	39,12
2,55	0,0542	0,435	0,125	0,752	23,09	40,28
2,60	0,0501	0,425	0,118	0,758	22,62	41,41
2,65	0,0464	0,416	0,111	0,764	22,17	42,52
2,70	0,0430	0,407	0,106	0,770	21,74	43,62
2,75	0,0398	0,398	0,0999	0,776	21,32	44,69
2,80	0,0368	0,389	0,0946	0,781	20,92	45,74
2,85	0,0341	0,381	0,0896	0,787	20,54	46,79
2,90	0,0317	0,373	0,0849	0,792	20,17	47,79
2,95	0,0293	0,365	0,0804	0,797	19,82	48,78
3,00	0,0272	0,357	0,0762	0,802	19,47	49,75
3,05	0,0252	0,349	0,0722	0,806	19,14	50,71
3,10	0,0234	0,342	0,0685	0,811	18,82	51,65
3,15	0,0217	0,335	0,0649	0,815	18,51	52,57
3,20	0,0202	0,328	0,0616	0,820	18,21	53,47
3,25	0,0188	0,321	0,0585	0,824	17,92	54,35
3,30	0,0175	0,315	0,0555	0,828	17,64	55,22
3,35	0,0162	0,308	0,0527	0,832	17,37	56,07
3,40	0,0151	0,302	0,0501	0,835	17,10	56,91
3,45	0,0141	0,296	0,0476	0,839	16,85	57,73

Таблица 17,1 (продолжение)

$M$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{w}{W}$	$\mu$	$\theta$
3,50	0,0131	0,290	0,0452	0,843	16,60	58,53
3,55	0,0122	0,284	0,0430	0,846	16,36	59,32
3,60	0,0114	0,278	0,0409	0,849	16,13	60,09
3,65	0,0106	0,273	0,0389	0,853	15,90	60,85
3,70	0,00990	0,267	0,0370	0,856	15,68	61,60
3,75	0,00924	0,262	0,0352	0,859	15,47	62,33
3,80	0,00863	0,257	0,0335	0,862	15,26	63,04
3,85	0,00806	0,252	0,0319	0,865	15,05	63,75
3,90	0,00753	0,247	0,0304	0,868	14,86	64,44
3,95	0,00704	0,243	0,0290	0,870	14,66	65,12
4,00	0,00659	0,238	0,0277	0,873	14,48	65,78

Все результаты расчетов включены в табл. 17.1, которая может быть использована для проведения быстрых вычислений.

Принимая во внимание важность приведенных формул для различных случаев применения и, в частности, для точного определения течения вокруг сверхзвуковых профилей, дадим ниже другие виды этих формул.

Так, если исходить из соотношений

$$\sin \mu = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \mu \right) = \frac{1}{M}, \quad \frac{\pi}{2} - \mu = \arccos \frac{1}{M}, \quad (17.38a)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos (2 \cos^2 \alpha - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right], \end{aligned} \quad (17.38b)$$

то можно записать предшествующие формулы в виде

$$\theta = \frac{1}{2\lambda} \arccos \left( \frac{x - \frac{x-1}{2} M^2}{1 + \frac{x-1}{2} M^2} \right) - \arccos \frac{1}{M}, \quad (17.39a)$$

$$\theta = \frac{1}{2\lambda} \arccos \left[ x - (x-1) \frac{w^2}{c^2} \right] - \frac{1}{2} \arccos \left[ (x+1) \frac{c^2}{w^2} - x \right], \quad (17.39b)$$

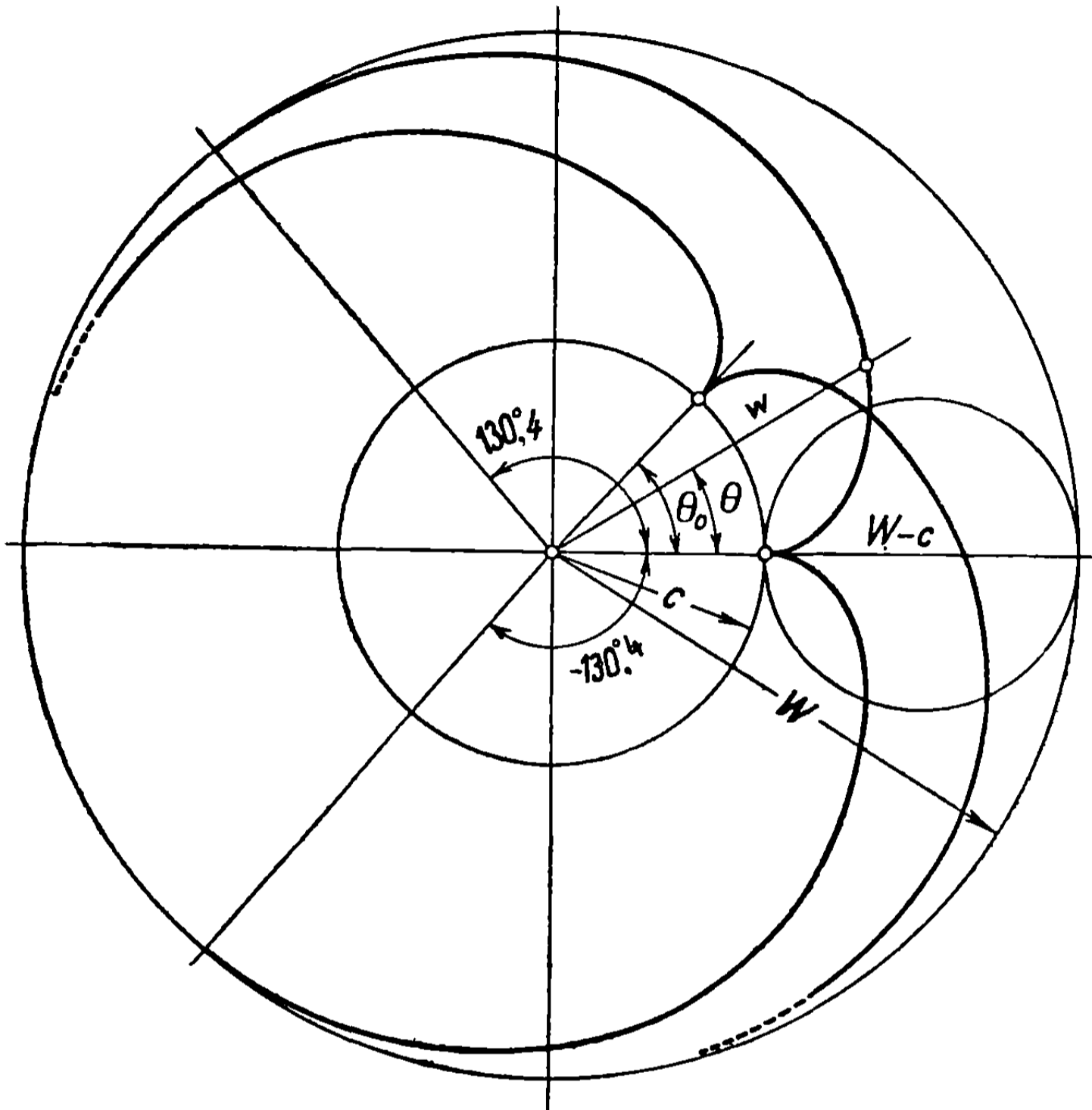
$$\theta = \frac{1}{2\lambda} \arccos \left[ (x+1) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right] - \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x-1} \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right]}}. \quad (17.39b)$$

Замечая, что

$$\arccos \frac{1}{M} = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{2}{M^2} - 1 \right), \quad (17.40)$$

и применяя выражение (17.34), можно также записать последнее уравнение следующим образом:

$$\theta = \frac{1}{2\lambda} \arccos \left[ (x+1) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right] - \frac{1}{2} \arccos \frac{x \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1}{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}}}. \quad (17.41)$$



Фиг. 17.5

17.2.2. Эпициклоидная кривая. Рассмотрим уравнение (17.396), заменив арккосинусы через арксинусы соответствующих аргументов; имеем

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \arcsin \left[ (x-1) \frac{w^2}{c^2} - x \right] + \quad (17.42)$$

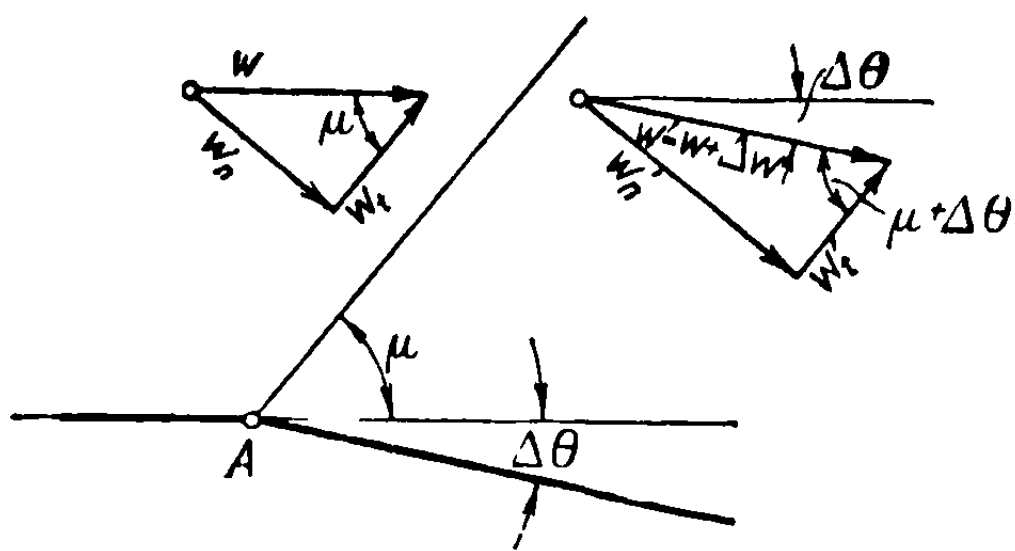
$$+ \frac{1}{2} \arcsin \left[ (x+1) \frac{c^2}{w^2} - x \right] + \frac{\pi}{4} \left( \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right).$$

В плоскости полярных координат  $w, \theta$ , т. е. в плоскости годографа, скорости течения могут быть выражены с помощью написанного выше уравнения. Легко видеть, что оно представляет *эпициклоиду*.

По причинам, которые установлены позже, эта эпициклоида называется *характеристической кривой*, или просто *характеристикой*. Она описывается точкой окружности с диаметром  $W-c$ , катящейся по внутренней окружности с радиусом  $c$  (фиг. 17.5). Эпициклоидная кривая заключается между внутренней окружностью, с радиусом, равным критиче-

ской скорости ( $w=c$ ), и внешней окружностью, имеющей радиус, равный максимальной скорости ( $w=W$ ).

Если круг диаметром  $W-c$  катится в противоположном направлении, то получается вторая ветвь эпициклоиды, симметричная относительно первой. Эпициклоида касается большого круга при движении в обоих направлениях, когда  $\theta = \pm 130,4^\circ$ .



Фиг. 17.6

Изменяя направление полярной оси, например, на угол  $\theta_0$ , получаем такую же эпициклоиду, повернутую относительно первой на угол  $\theta_0$ . Получается сетка, образованная диаграммами эпициклоид, которая

позже непосредственно применена для графического определения физических характеристик двумерных течений [3].

Теперь покажем важное свойство эпициклоиды.

Дифференцируя уравнение (17.30) по параметру  $M$ , имеем

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{x-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}; \quad (17.43)$$

из выражения (17.32) находим

$$1 + \frac{x-1}{2} M^2 = \left(1 - \frac{w^2}{W^2}\right)^{-1},$$

$$\frac{dM}{M} = \left(1 - \frac{w^2}{W^2}\right)^{-1} \frac{dw}{w}; \quad (17.44)$$

отсюда получим соотношение

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \operatorname{tg} \mu, \quad (17.45)$$

которое может быть установлено прямым путем. Так, используя соображения, примененные к случаю ударных волн (см. раздел 7.3), рассмотрим чрезвычайно малое отрицательное отклонение  $-\Delta\theta$ ; простая волна разрежения составит угол  $\mu$  с горизонталью (фиг. 17.6).

Из соотношения (7.38a) легко вывести, что компоненты скорости, параллельные волне, будут равны, т. е.  $w_t = w'_t$ :

$$w \cos \mu = (w + \Delta w) \cos (\mu + \Delta \theta) \approx w \cos \mu - \\ - w \Delta \theta \sin \mu + \Delta w \cos \mu - \Delta w \Delta \theta \sin \mu;$$

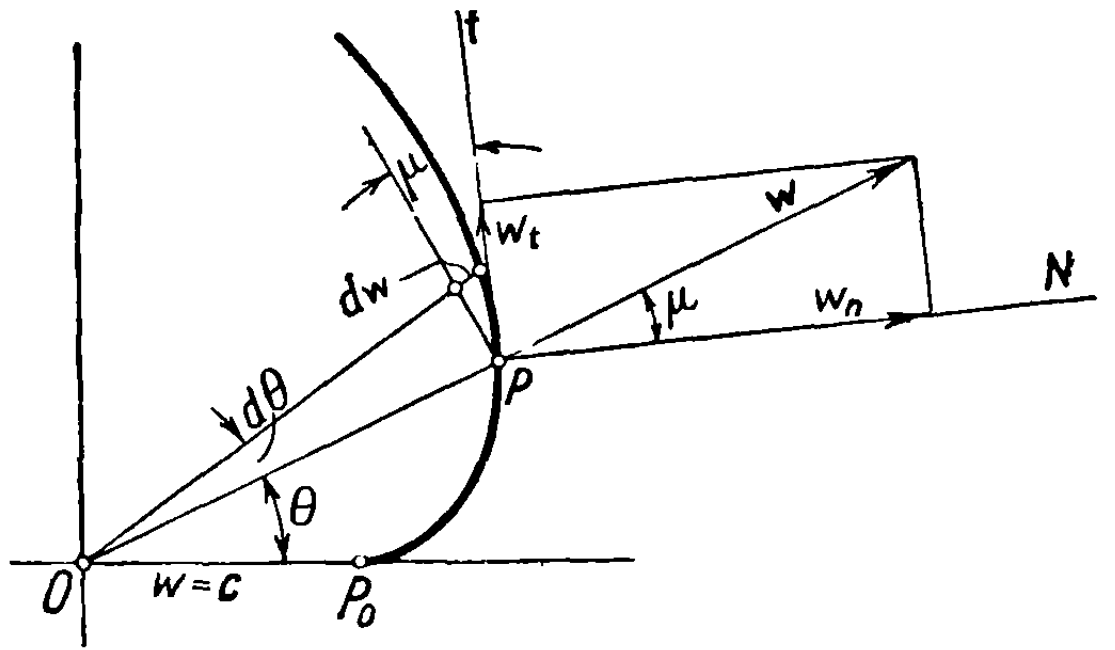
отсюда, пренебрегая членами второго порядка, имеем

$$\frac{1}{w} \frac{\Delta w}{\Delta \theta} = \operatorname{tg} \mu. \quad (17.46)$$

Переходя к пределу, получим снова уравнение (17.45).

При рассмотрении эпициклоиды приведенное соотношение показывает, что угол между касательной к эпициклоиде и нормалью к скорости или между нормалью к эпициклоиде  $PN$  и направлением скорости  $OP$  будет равен углу Маха (фиг. 17.7).

Это свойство используется для определения течения вдоль стенки или течения вокруг аэродинамического профиля, когда отклонения потока малы. В этом случае, как установлено выше (см. формулу 17.46), уравнение (17.45) может быть применено для малых, но конечных приращений величин  $w$  и  $\theta$ .



Фиг. 17.7

Пусть рассматривается течение, имеющее скорость свободного потока  $w_1$ ; приращение скорости  $\Delta w$  уподобляется малому возмущению, обусловленному отклонением потока  $\tau$ ; полагая

$$w_1 = U_\infty,$$

$$\Delta w \approx u,$$

$$\Delta \theta = \tau,$$

запишем уравнение (17.46) следующим образом:

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\tau}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad (17.47)$$

т. е. в виде соотношения, идентичного получаемому при гипотезе малых возмущений.

**17.2.3. Графическое построение нормалей к эпициклоиде.** В силу выражения (17.10) уравнение (17.32) может быть записано в виде

$$\frac{w^2}{M^2} = w^2 \sin^2 \mu = \frac{\alpha - 1}{2} (W^2 - w^2). \quad (17.48)$$

Разлагая скорость вдоль касательной и вдоль нормали к эпициклоиде (см. фиг. 17.7), получим

$$w_t = w \sin \mu,$$

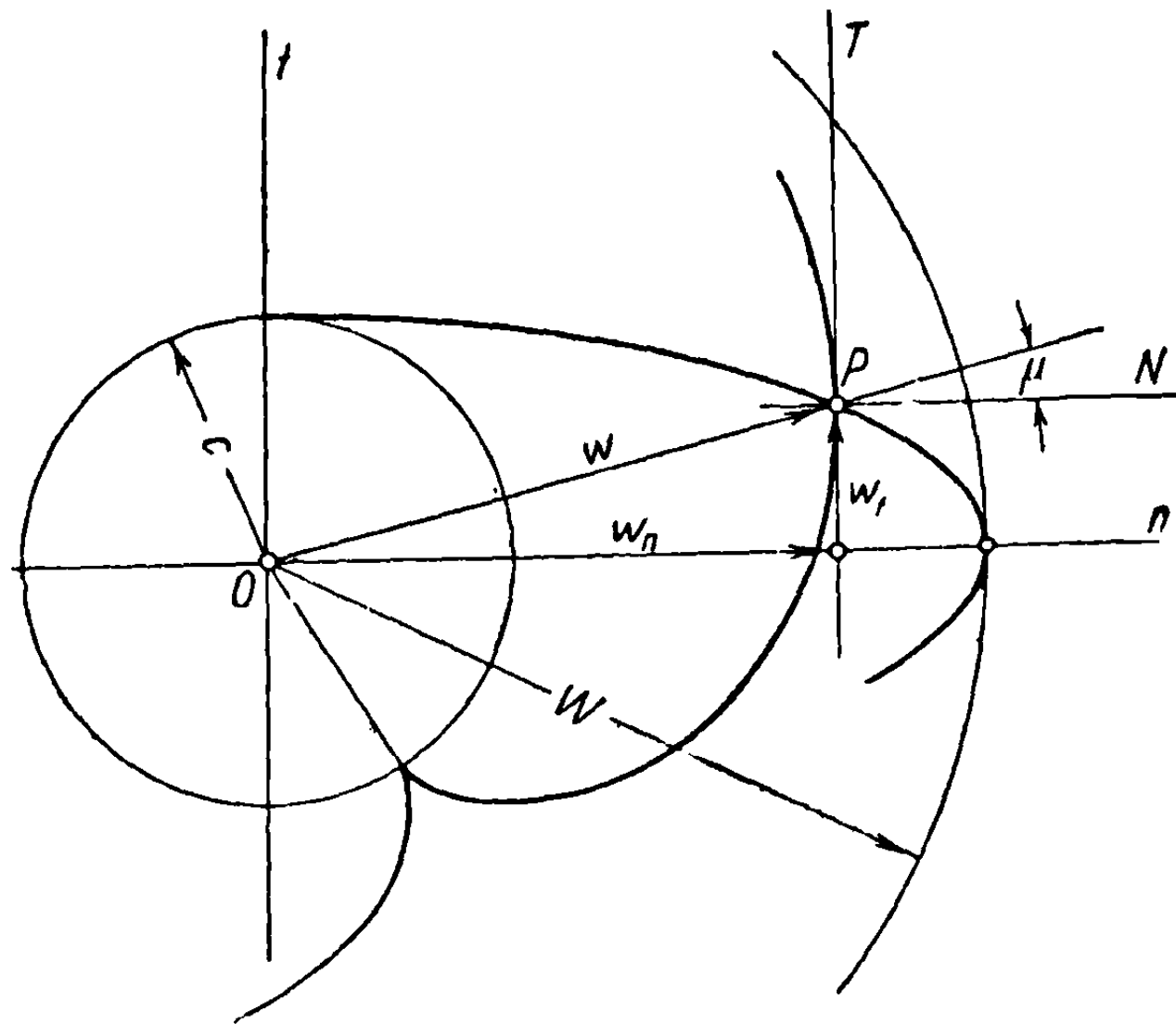
$$w_n = w \cos \mu,$$

$$w^2 = w_t^2 + w_n^2; \quad (17.49)$$

подставляя результат в уравнение (17.48) и применяя формулу (17.36), будем иметь

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{w_t^2}{W^2} + \frac{w_n^2}{W^2} = \frac{w_t^2}{c^2} + \frac{w_n^2}{W^2} = 1, \quad (17.50)$$

откуда очевидно, что  $w_t$  и  $w_n$  являются координатами точек эллипса (эллипса Буземана), имеющего полуоси  $W$  и  $c$  (фиг. 17.8). В любой точке  $P$  прямая  $PN$ , параллельная оси  $On$ , составляет угол  $\mu$  с направлением скорости и является поэтому линией Маха.



Фиг. 17.8

Прямая  $PT$ , параллельная малой оси должна быть касательной к эпициклоиде.

Благодаря этому свойству может быть построена нормаль, соответствующая любой точке  $P$  характеристической кривой (эпициклоиды). Для этой цели будем поворачивать эпициклоиду (или эллипс) вокруг начала до тех пор, пока точка  $P$  не совпадет с точкой эллипса. Проведя прямую  $PN$ , параллельную большой оси эллипса, найдем, что эта прямая будет нормалью к эпициклоиде. Таким путем могут быть построены точные нормали в различных точках характеристической кривой; в этом состоит действительное преимущество построения, использующего эллипс Буземана.

### 17.3. Ограниченное (частное) расширение

Расширение обычно осуществляется вокруг одного или более углов, ограничивающих определенные секторы, или вдоль криволинейной стенки, когда течение непрерывно отклоняется от своего начального направления. Так как явление происходит одинаково вокруг любого угла, то исследование можно ограничить изучением течения вокруг одиночного угла, переходя затем к изучению расширения вдоль искривленной стенки.

**17.3.1. Расширение вокруг угла.** Пусть  $w_1$ ,  $M_1$ ,  $p_1$  — значения скорости, числа Маха и давления вдоль одной стороны угла; в секторе  $A_1OA_2$  линии тока расширяются и рассматриваемые величины приобретают за

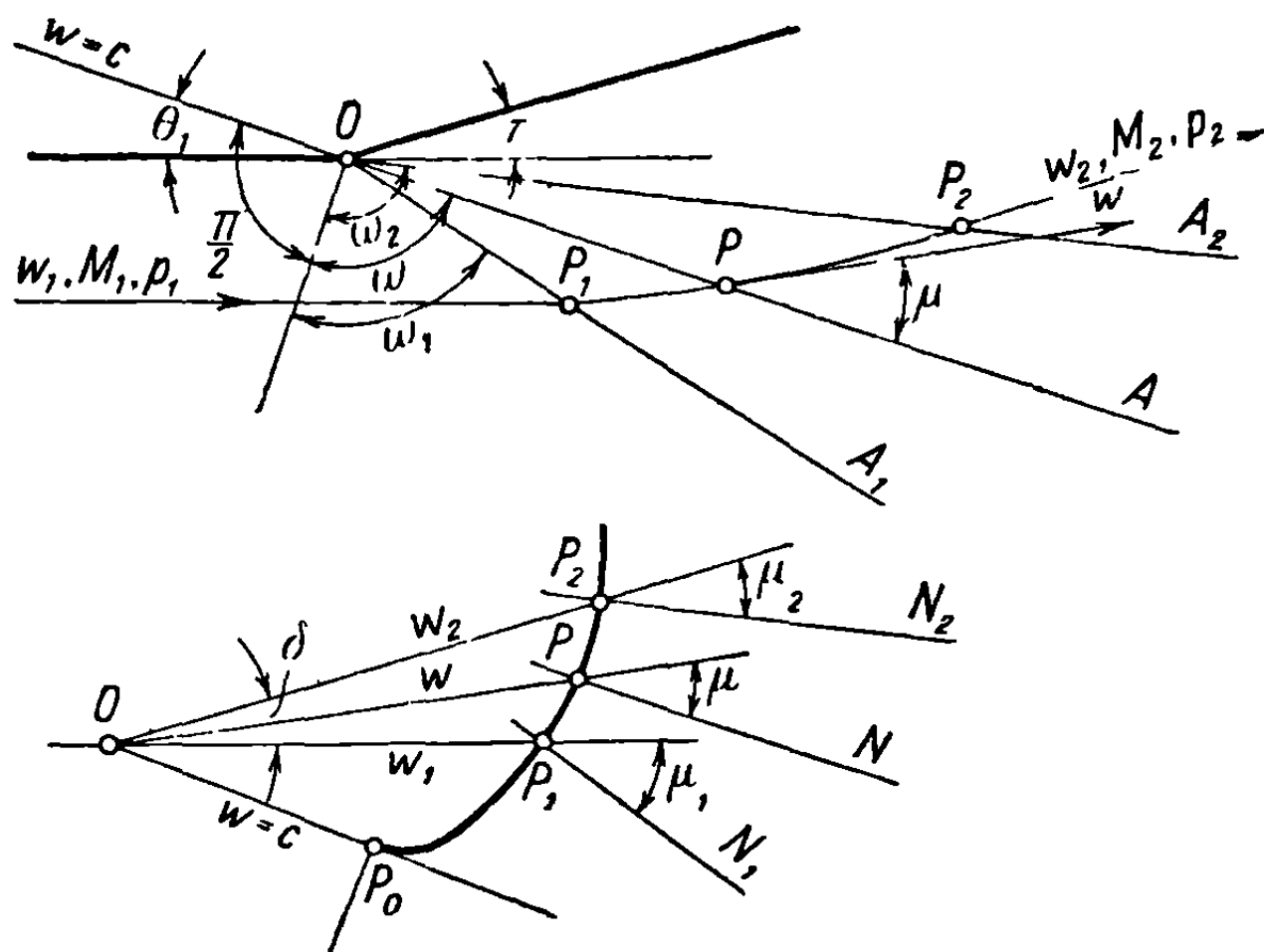


углом значения  $\omega_2, M_2, p_2$  (фиг. 17.9). Применяя уравнение (17.30), получим соотношение для угла отклонения потока

$$\tau = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{\lambda} \left[ \operatorname{arctg} (\lambda \sqrt{M_2^2 - 1}) - \operatorname{arctg} (\lambda \sqrt{M_1^2 - 1}) \right] -$$

$$- (\operatorname{arctg} \sqrt{M_2^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_1^2 - 1}). \quad (17.51)$$

В случаях практического применения, однако, величины  $\omega_1, M_1, p_1$ , как и угол отклонения  $\tau$ , заданы, а  $\omega_2, M_2$  и давление  $p_2$  должны быть



Фиг. 17.9

определены. Так как применение приведенной формулы затруднительно, рекомендуется использовать табл. 17.1, или диаграммы на фиг. 17.4, или, наконец, определить характеристики потока графически, с помощью диаграммы эпициклоиды.

В последнем случае, располагая диаграмму вдоль направления скорости  $\omega_1$ , параллельной первой стороне угла, и проведя радиус-вектор  $OP_2$  из точки  $O$  параллельно другой стороне угла, получим скорость  $\omega_2$ . Число  $M_2$  может быть определено с помощью уравнения (17.32). Это число может быть также получено графически, посредством измерения угла  $\mu_2$  на характеристике ( $M_2 = \frac{1}{\sin \mu_2}$ ). Для определения давления  $p_2$  можно применить известную формулу (5.14); этим путем получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} = \left[ \frac{1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M_2^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (17.52)$$

Построив серию нормалей  $PN$  к характеристической кривой, проведя из точки  $O$  параллели  $OA$  к этим нормалям, получим скорость  $\omega$  в точке  $P$  на радиусе-векторе  $OA$  в виде отрезка  $OP$ , определяющего положение

точки  $P$  на эпициклоиде. Угол  $\mu$  между  $PN$  и радиусом-вектором  $OP$  будет определять число  $M$  (см. формулу 17.10):

$$M = \frac{1}{\sin \mu}.$$

Следует иметь в виду, что число  $M$  может быть вычислено путем применения формулы (17.32).

Таким образом, можно рассчитать все поле скоростей в секторе  $A_1OA_2$ , как и соответствующие числа  $M$ .

Чтобы решить эту задачу аналитически, нужно найти предположительное направление течения, для которого  $M=1$  ( $w=c$ ). Это направление составляет угол  $\theta_1$  с рассматриваемым направлением для  $w_1, M_1$  (см. фиг. 17.9):

$$\theta_1 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} (\lambda \sqrt{M_1^2 - 1}) - \operatorname{arctg} \sqrt{M_1^2 - 1}, \quad (17.53)$$

и нормаль к нему будет осью системы полярных координат в случае полного расширения, которое также будет включать рассмотренное выше частичное расширение.

Угол  $\omega_1$ , образуемый волной Маха  $OA_1$ , выражается соотношением

$$\omega_1 = \left( \frac{\pi}{2} - \mu_1 \right) + \theta_1 \quad (17.54)$$

или

$$\omega_1 = \psi_1 + \theta_1, \quad (17.55)$$

где  $\psi_1$  имеет то же значение, что и на фиг. 17.3.

В этом случае скорость вдоль радиуса-вектора  $OP$ , составляющего угол  $\omega$  с новой полярной осью, определяется уравнением (17.22):

$$w^2 = \frac{2W^2}{x+1} \left( \frac{x+1}{2} - \cos^2 \lambda \omega \right), \quad (17.56)$$

из которого, применяя формулу (17.32), выводим число  $M$ , или, применяя уравнение Бернулли (3.78), получим  $p/p_0$ .

Заметим, что направление  $OA_2$  нужно определять с помощью указанного выше метода.

Радиус-вектор  $r$  линий тока получается путем применения формулы (17.29):

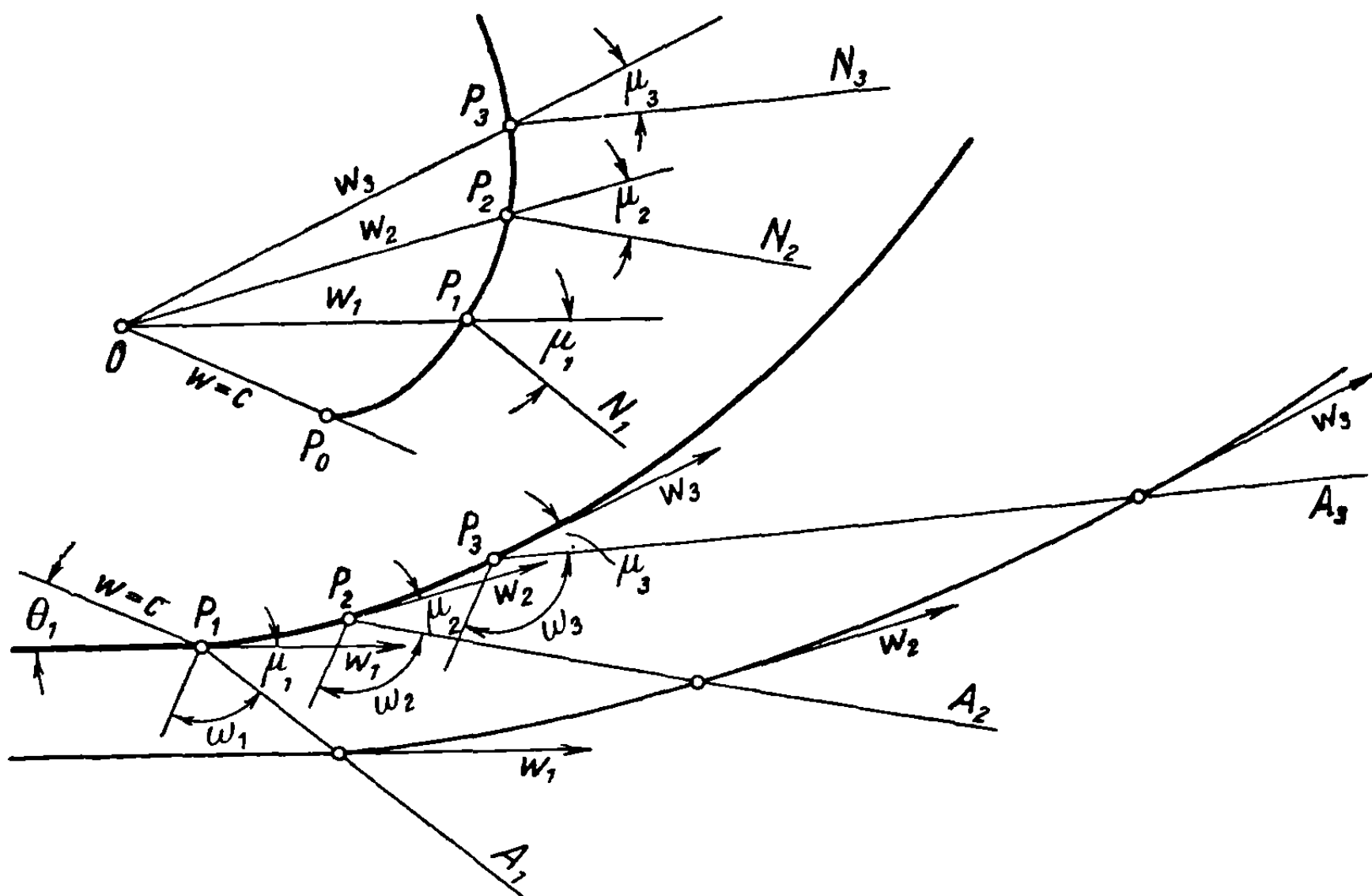
$$\frac{r}{r_0} = \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega \right) \right]^{\frac{1+x}{1-x}}; \quad (17.57)$$

отсюда

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_0} \frac{r_0}{r_1} = \left[ \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega \right)}{\cos \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \omega_1 \right)} \right]^{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (17.58)$$

Задача, таким образом, полностью решена аналитически, если не считать что угол  $\omega_2$  должен быть подсчитан другим методом.

17.3.2. Расширение вдоль искривленной стенки. Если вместо стенки, составленной из ряда прямых линий, рассматривать стенку, образованную непрерывной искривленной линией, то метод, применяемый для определения свойств течения, подобен описанному в предшествующем



Фиг. 17.10

случае. Диаграмму эпициклоиды располагаем так, чтобы скорость  $\omega_1$  была параллельна начальному прямолинейному участку стенки, где скорость также равна  $\omega_1$  (фиг. 17.10). В любой точке криволинейной стенки, например, в точке  $P_2$ , скорость  $\omega_2$  направлена по касательной к стенке и равна соответствующей скорости на диаграмме эпициклоиды, которую можно найти, проведя из точки  $O$  параллель к касательной к стенке в точке  $P_2$ . Линия Маха  $P_2A_2$  параллельна линии  $P_2N_2$ , являющейся нормалью к эпициклоиде в точке  $P_2$ .

Путем вычисления радиусов  $r_1, r_2, r_3$  можно также определить линии тока. С этой целью нужно подсчитать угол  $\theta_1$  для предположительного начального направления, вдоль которого скорость была бы равна критической скорости.

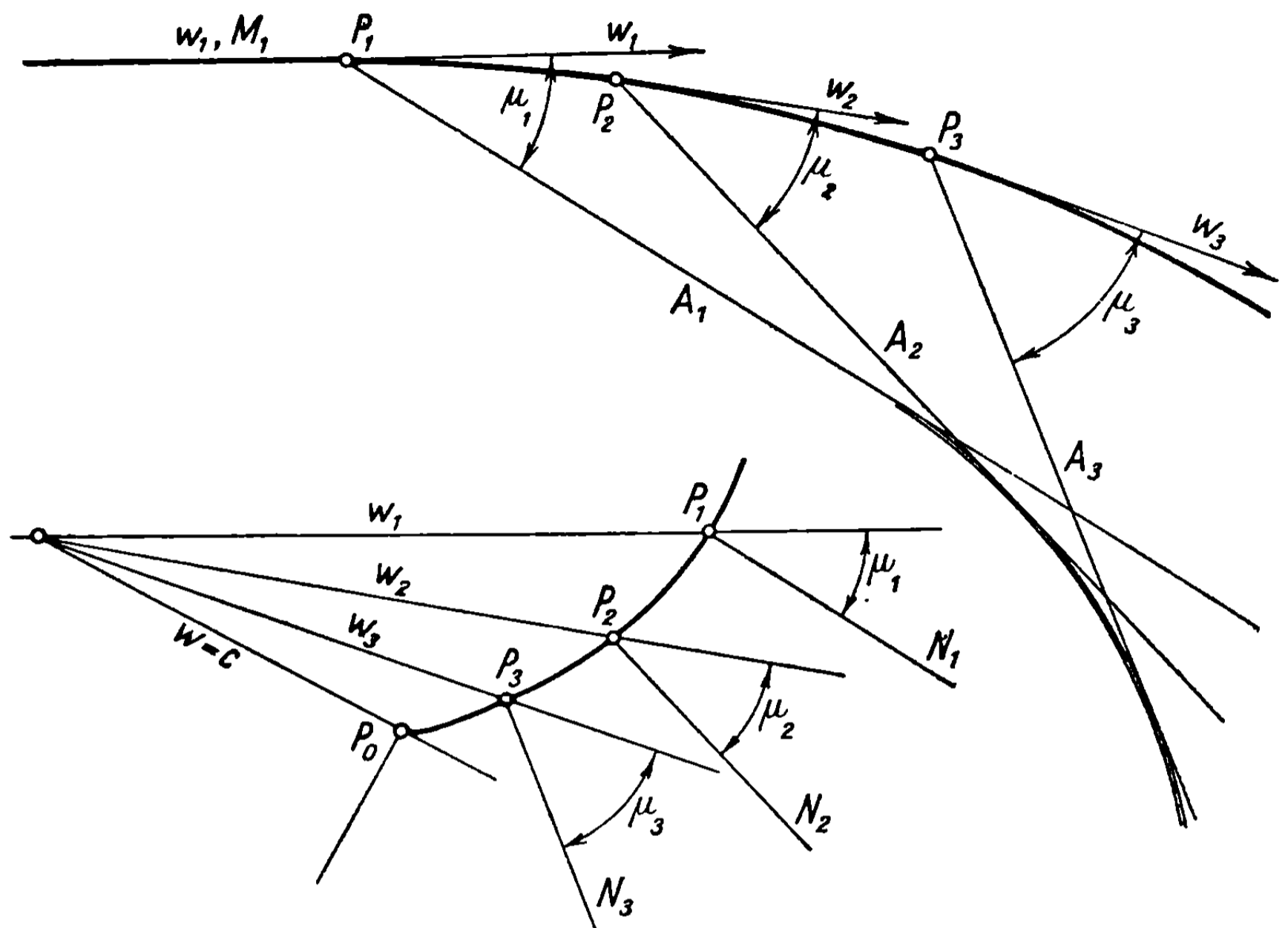
Отсюда, определяя  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  и применяя формулу (17.58), получим

$$\frac{r_n}{r_1} = \left[ \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \omega_n \right)}{\cos \left( \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \omega_1 \right)} \right]^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}, \quad (17.59)$$

где  $n$  принимает значения  $2, 3, \dots$

17.3.3. Применение формулы для расширения к волнам сжатия в случае малых отклонений. Если криволинейная стенка вогнутая и откло-

нения малы, то процесс остается изэнтропическим, как было показано при изучении ударных волн. Изменение скорости будет обратным, скорость уменьшается с увеличением отклонения (фиг. 17.11).



Фиг. 17.11

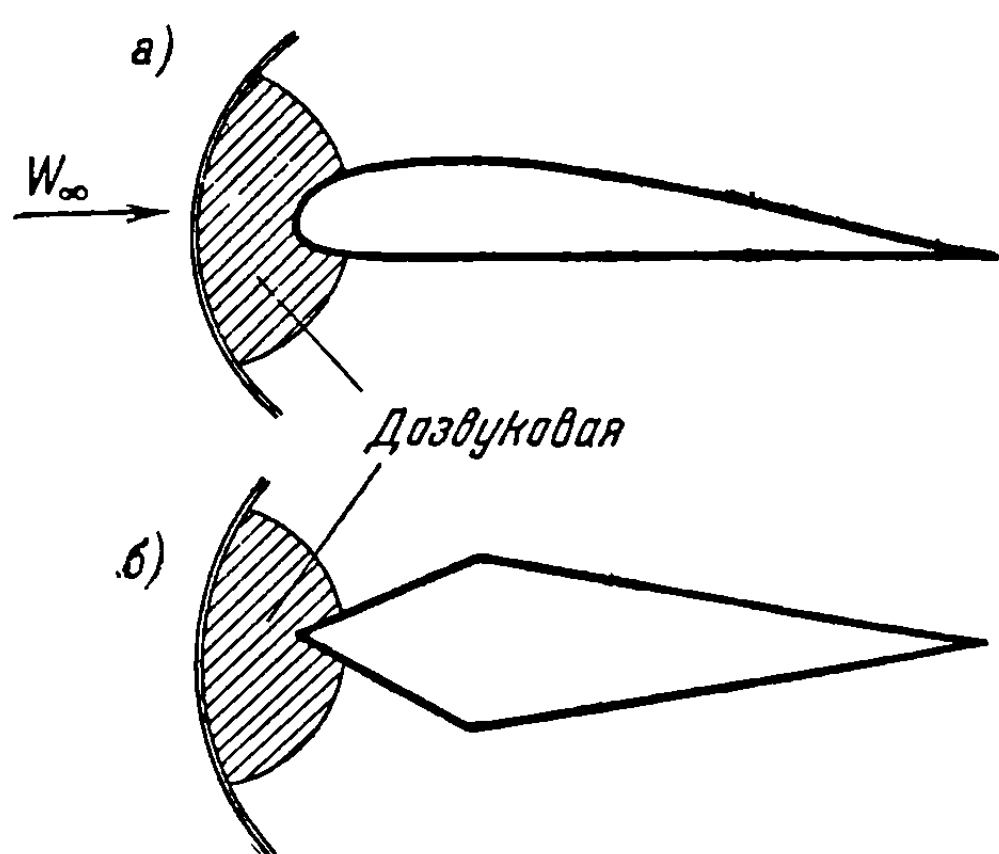
Простые волны сжатия могут быть построены идентично, путем проведения через точки  $P_1, P_2, P_3$ , расположенные на стенке, параллелей  $P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3\dots$  к нормалям  $P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3\dots$  к эллипсоиду. Эти линии, однако, не располагаются веерообразно, как это наблюдается в случае расширения, но пересекаются, образуя *огibaющую*, которая представляет искривленную *ударную волну*. Если волна находится достаточно далеко от стенки, то процесс вблизи стенки можно рассматривать как изэнтропический, что будет соответствовать действительности, когда отклонения постепенны, а полное отклонение мало. Это обусловлено тем, что энтропия возрастает как третья степень отклонения, чем можно пренебречь, когда последнее мало.

#### 17.4. Применение к точной теории сверхзвуковых профилей

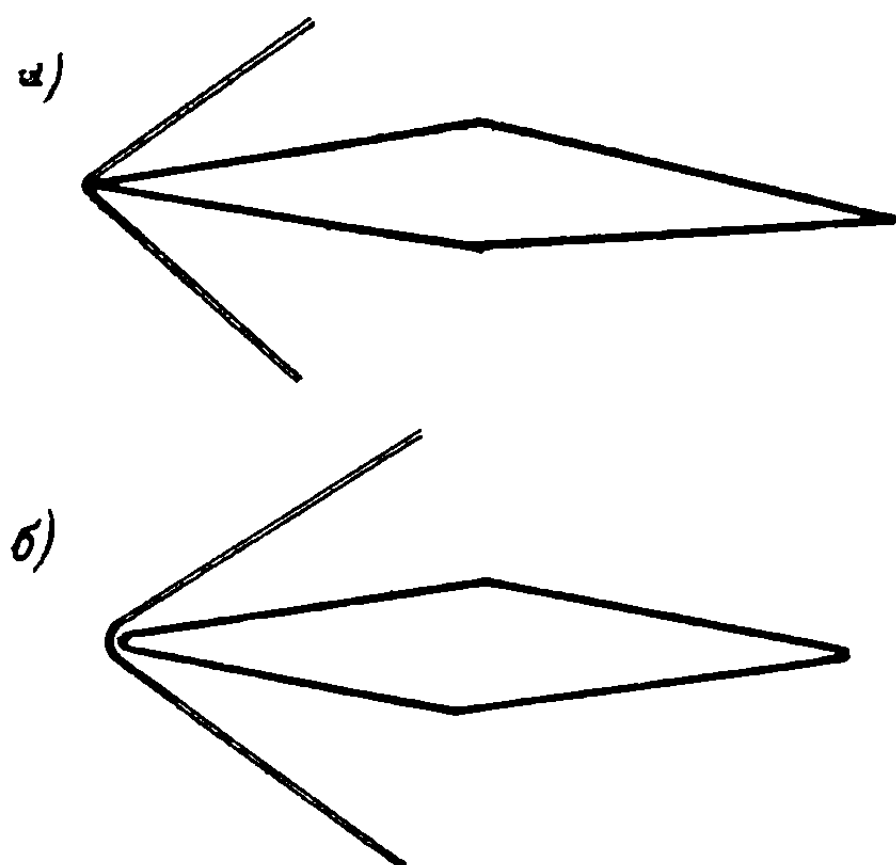
Предшествующие результаты могут служить для точного определения аэродинамических характеристик *сверхзвуковых профилей*. Заметим сначала, что аэродинамические профили, предназначенные для высоких сверхзвуковых скоростей, должны удовлетворять определенным условиям, обеспечивающим наиболее благоприятные характеристики лобового сопротивления.

Так, если профиль имеет закругленную переднюю кромку (фиг. 17.12 а), то ударная волна, возникающая впереди крыла, будет *отошедшей* даже при малых углах атаки. Стенка у передней кромки

создает значительное отклонение потока на угол около  $90^\circ$ , превышающий, следовательно, максимальный угол, за которым ударная волна, *присоединенная* к носику тела, более не образуется. На протяжении значительной части своей длины ударная волна почти нормальна и обладает большой интенсивностью, что приводит к значительному возрастанию энтропии и, следовательно, к проявлению *волнового сопротивления*. За волной, в определенной области впереди передней кромки,



Фиг. 17.12



Фиг. 17.13

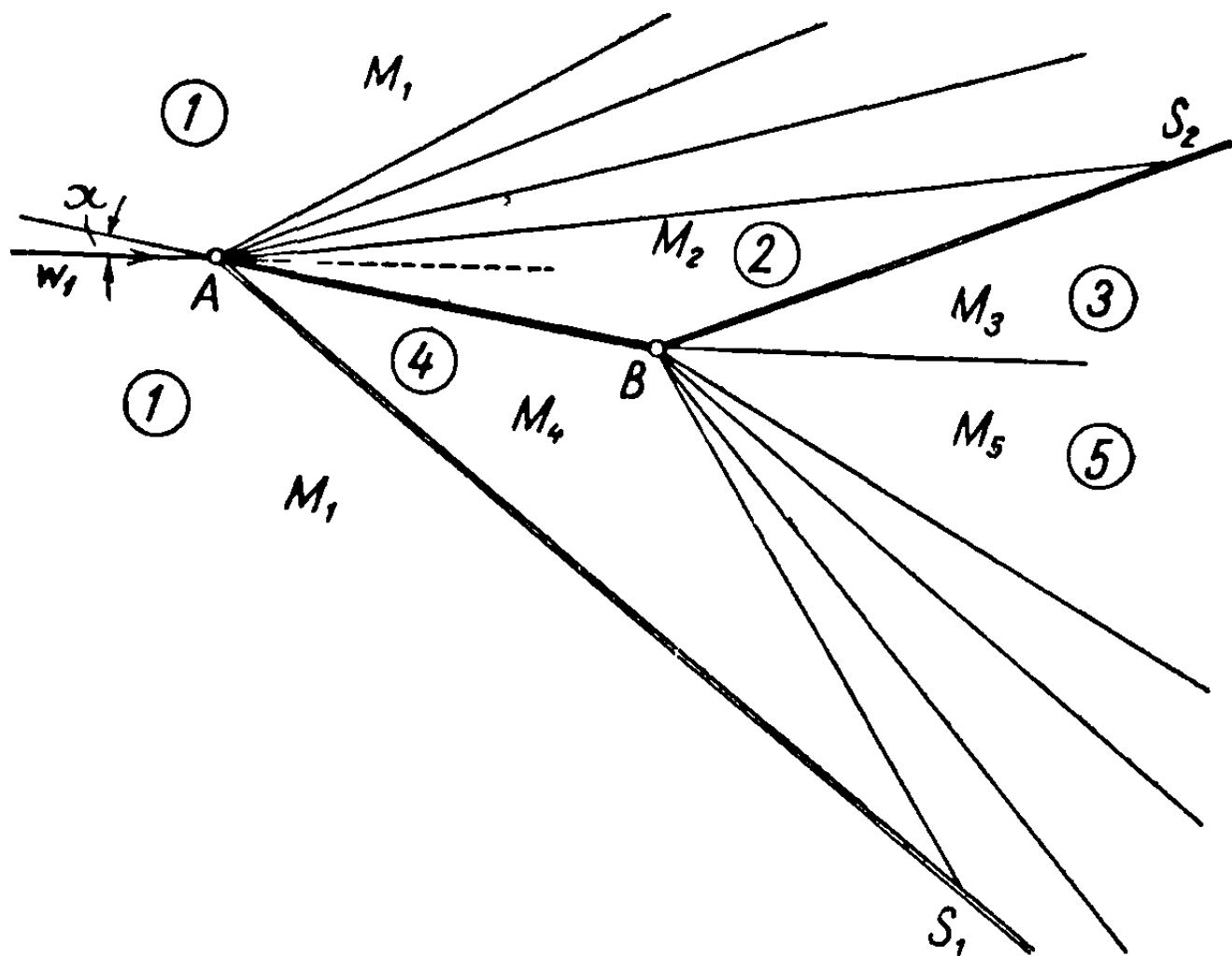
образуется дозвуковая зона, которая является следствием интенсивной нормальной ударной волны. Те же явления наблюдаются даже в случае острой передней кромки, если двугранный угол превышает наибольший возможный угол, при котором волна еще остается присоединенной к передней кромке (фиг. 17.12 б).

Для того чтобы ослабить, насколько возможно более, действие ударной волны, переднюю кромку нужно делать острой или в крайнем случае закругленной, но имеющей очень малый радиус кривизны (фиг. 17.13 а, б); в этом случае ударные волны будут косыми с малой интенсивностью, так что течение за волнами останется сверхзвуковым. Условия, при которых образуются косые волны, изменяются в зависимости от угла атаки; но при обычном для полета геометрическом угле атаки профиль должен сохранять свои свойства в отношении формы ударных волн так, чтобы волновое сопротивление могло постоянно поддерживаться близким к его наиболее благоприятному значению.

Таким, непрямым путем определяется сверхзвуковой профиль. Теперь изучим некоторые из наиболее характерных профилей, чтобы показать метод вычисления.

**17.4.1. Плоская пластинка в сверхзвуковом потоке.** Рассмотрим плоскую пластинку, составляющую угол  $\alpha$  со сверхзвуковым потоком, определяемым скоростью  $w_1$  и числом Маха  $M_1$ . На передней кромке, в точке А, течение делится на два потока, один из которых обтекает верхнюю поверхность пластинки, а другой — нижнюю; они снова соединяются в точке В, отделяясь друг от друга линией, параллельной начальному направлению течения (фиг. 17.14).

Течение вдоль верхней поверхности подвергается в точке  $A$  расширению, при котором поток переходит от значения числа Маха  $M_1$  (область 2) к значению  $M_2$  (область 1). Вычисление может быть проведено при помощи табл. 17.1 или путем использования диаграммы эпициклоиды, которую с целью упрощения следует построить в зависимости от



Фиг. 17.14

числа Маха, а не от скорости, как это делалось до сих пор. За точкой  $B$  течение снова становится горизонтальным и, таким образом, отклоняется от направления пластинки; следовательно, в точке  $B$  возникает ударная волна  $BS_2$ , за которой число Маха становится равным значению  $M_3$ ; последнее может быть выведено из табл. 17.1, или определено из ударной поляры, или, наконец, может быть вычислено по уравнению (7.44).

Рассматривая течение вдоль нижней поверхности, можно отметить возникновение ударной волны  $AS_1$  в точке  $A$ , за которой вниз по потоку число Маха будет иметь значение  $M_4$ , вычисляемое, как и выше, путем использования табл. 17.1, ударной поляры или уравнения (7.44). За точкой  $B$  течение, после того как испытает расширение, становится горизонтальным и переходит от значения числа Маха  $M_4$  к значению  $M_5$ .

Это расширение может быть вычислено по табл. 17.1 или при помощи диаграммы эпициклоиды.

Давления  $p_2$  и  $p_4$  в областях 2 и 4, соответственно, определяются одинаковым методом как функции давления  $p_1$  свободного потока.

Подъемная сила нормальна к пластинке и равна

$$P = c(p_4 - p_2) \cos \alpha \approx c p_1 \left( \frac{p_4}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right), \quad (17.60)$$

где  $c$  — хорда пластинки. Волновое сопротивление имеет выражение

$$R = c p_1 \left( \frac{p_4}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \sin \alpha \approx c p_1 \left( \frac{p_4}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \alpha. \quad (17.61)$$

Вычисление выполняется элементарно, и поэтому не требует дальнейших разъяснений. Заметим, однако, что так как давления одинаковы по

всей длине хорды, то равнодействующая проходит через среднюю точку хорды; следовательно, момент относительно этой точки равен нулю, а относительно передней кромки будет

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} c^2 \rho_1 \left( \frac{p_4}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} \right). \quad (17.62)$$

Соответствующие коэффициенты выражаются равенствами:

$$\begin{aligned} C_z &= \frac{P}{\frac{1}{2} c \rho_1 \omega_1^2} = \frac{2}{\kappa M_1^2} \left( \frac{p_4}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} \right), \\ C_x &= \frac{2\alpha}{\kappa M_1^2} \left( \frac{p_4}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} \right) = \alpha C_z, \\ C_m &= \frac{1}{\kappa M_1^2} \left( \frac{p_4}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} \right). \end{aligned} \quad (17.63)$$

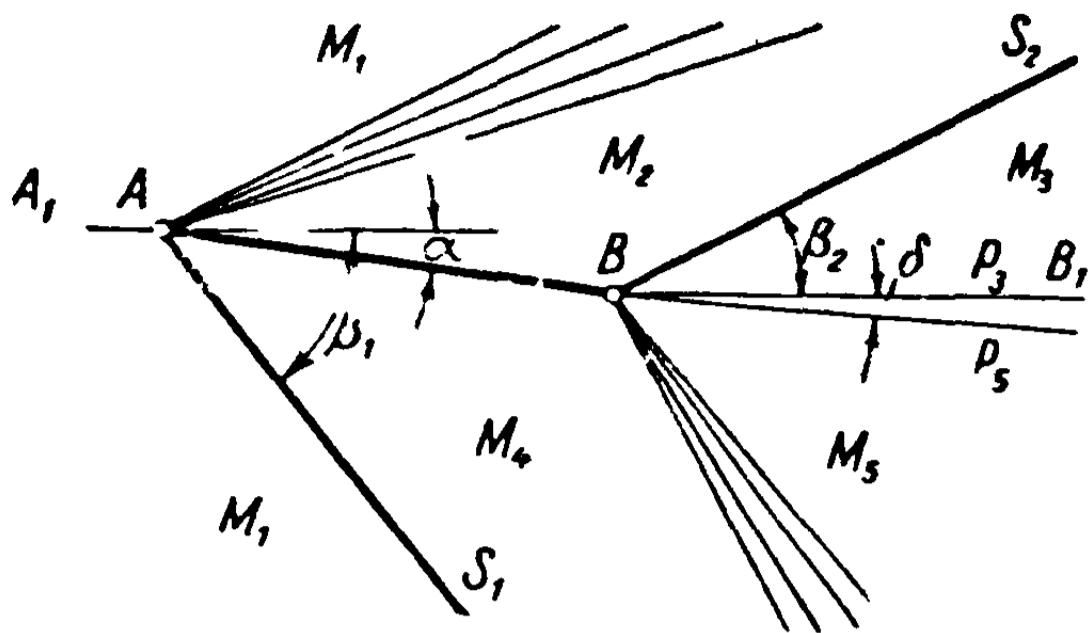
**З а м е ч а н и е.** Следует напомнить, что волновое сопротивление вызывается ударными волнами. Энтропия массы газа, подвергающейся неизэнтропическому преобразованию при переходе через эти волны, увеличивается и становится бесконечной вместе с волновым сопротивлением, если ударные волны распространяются до бесконечности. Этого, однако, не происходит (см. фиг. 17.14), так как волны разрежения встречаются с ударными волнами и постепенно уменьшают их интенсивность до нуля, когда поток восстанавливает свое начальное направление. Диссипация энергии наблюдается в ограниченной области, поэтому возрастание энтропии конечно, лобовое сопротивление поэтому также конечно и имеет определенную величину.

**Отклонение потока в нижнем течении.** Выше предполагалось, что скорость потока за точкой  $B$  получает снова свое первоначальное направление, которое она имеет на бесконечности в верхнем течении, хотя, строго говоря, поток испытывает некоторое отклонение  $\delta$ , которое будет очень мало.

На самом деле в результате преобразования, происходящего на верхней поверхности после расширения, поток переходит от значения числа Маха  $M_2$  к значению  $M_3$  в области 3, пересекая ударную волну  $BS_2$ , создающую приближенное восстановление его начального направления; в то же время поток на нижней поверхности сначала пересекает ударную волну  $AS_1$ , переходя от значения числа Маха  $M_1$  к значению  $M_4$  и затем в результате расширения к значению  $M_5$  в области 5. При протекании этих процессов энтропия возрастает различно вдоль верхней и нижней поверхностей; потеря напора также различна, поэтому и конечные давления  $p_3$  и  $p_5$  будут различаться, что физически невозможно. Оба давления должны быть равны, поэтому поток испытывает отклонение  $\delta$  в нижнем течении, которое их уравнивает (фиг. 17.15). Если бы процесс был изэнтропическим в обоих случаях, различия в давлениях не существовало бы; различие обусловлено неравными потерями напора. Указанное отклонение очень мало, поэтому им можно пренебречь, полагая, что скорость течения точно восстанавливает свое начальное направление. В соответствии с формулой, полученной Лайтхиллом, отклонение пропорционально  $\alpha^3$

$$\delta \approx (\kappa + 1) \frac{(2 - M_1^2)}{(M_1^2 - 1)^3} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right) \alpha^3. \quad (17.64)$$

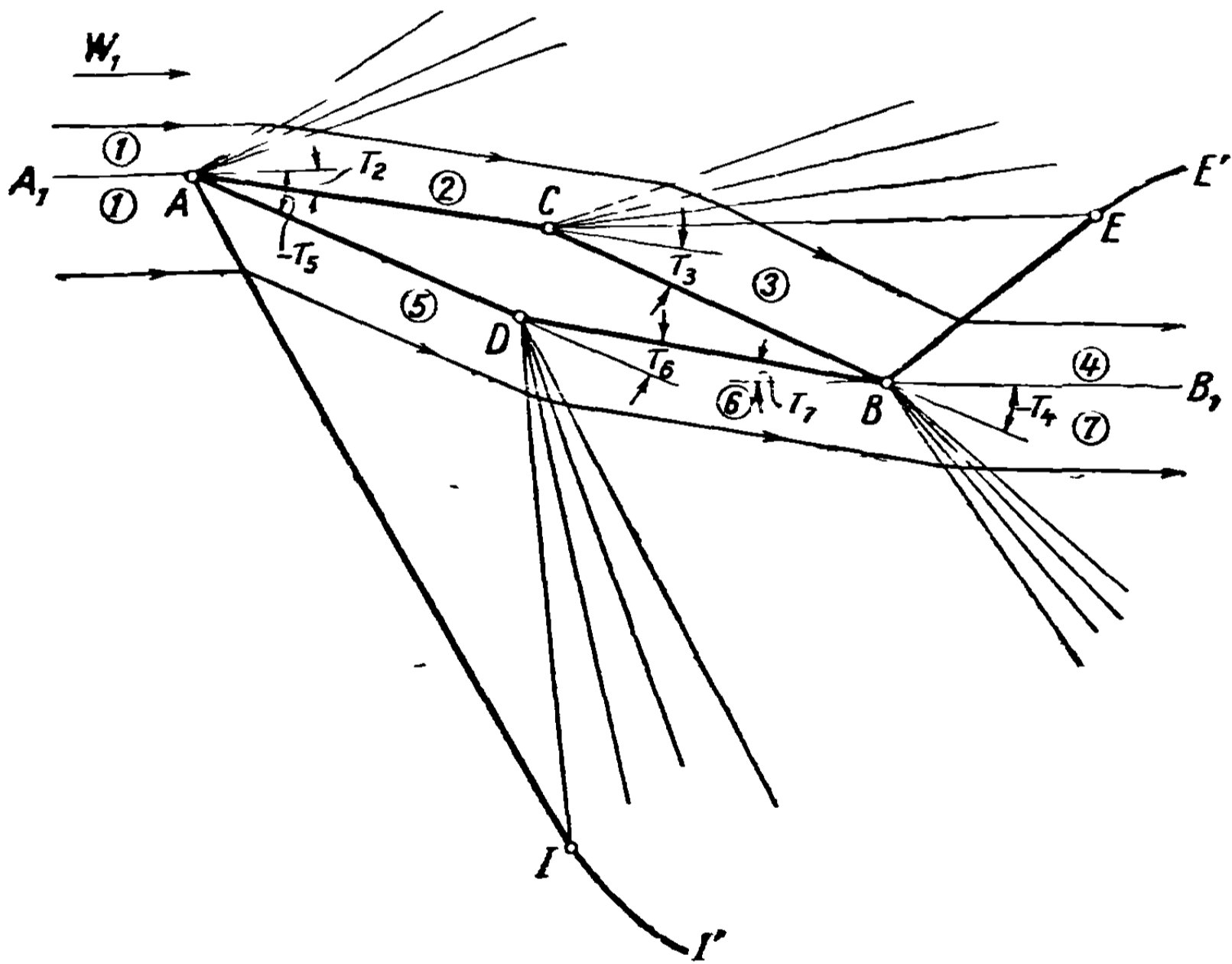
17.4.2. Ромбовидный профиль. Линии  $A_1ACBB_1$  и  $A_1ADB_1$  разделяют потоки, обтекающие верхнюю и нижнюю поверхности профиля (фиг. 17.16). В обеих областях процесс подобен происходящему вдоль



Фиг. 17.15

изогнутых стенок. На верхней поверхности в точках  $A$  и  $C$  происходит расширение при совершенно определенных геометрических условиях; в точке  $B$  появляется ударная волна, также вполне определенная, если только направление течения  $BB_1$  будет горизонтальным, что практически и осуществляется, как показано выше.

Вдоль нижней поверхности при рассматриваемых условиях возникает ударная волна в точке  $A$ , сопровождаемая расширением в точке  $D$  и последующим расширением в точке  $B$ . Падение давления после расширения около угла выводится из табл. 17.1, а потери напора, вызываемые ударными волнами,



Фиг. 17.16

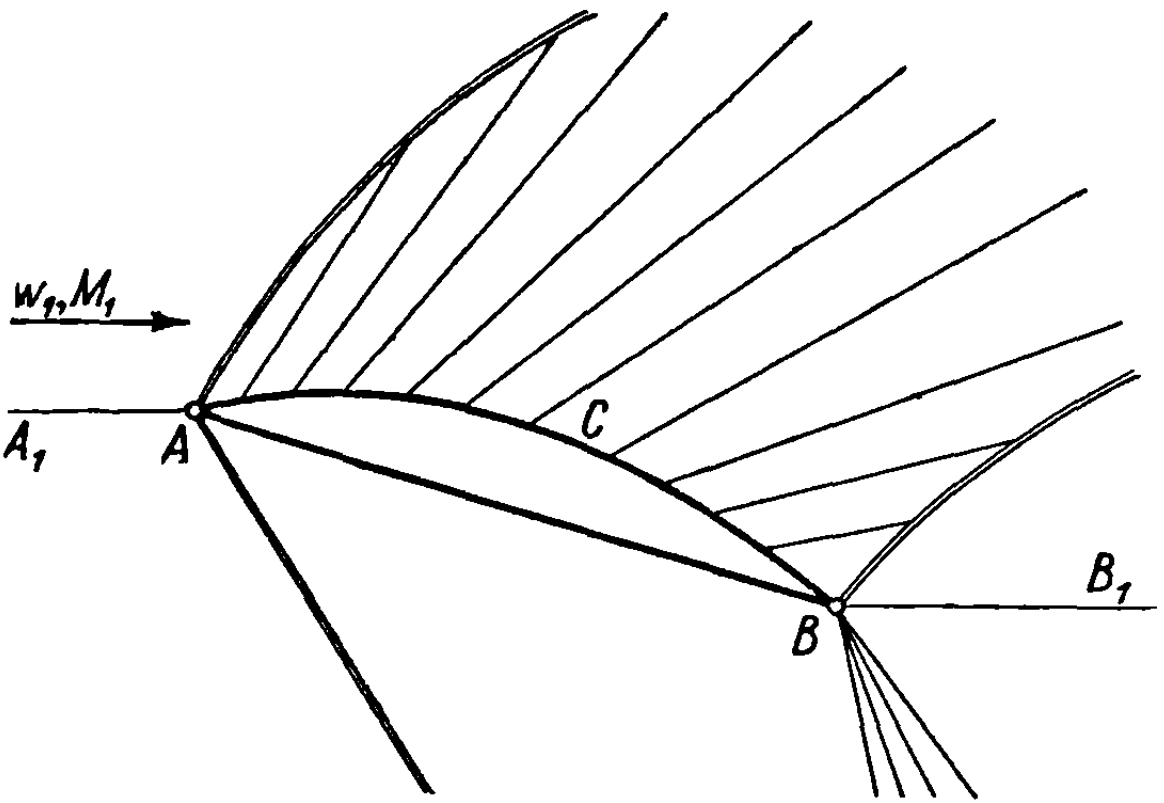
получаются из ударной поляры; после этого путем элементарных вычислений могут быть определены подъемная сила, волновое сопротивление и момент относительно средней точки или относительно передней кромки.

Заметим, что, как и в случае плоской пластинки, точки пересечения  $I$  и  $E$  ударных волн с волнами разрежения будут точками, в которых интенсивность ударных волн начинает уменьшаться и за которыми ударные волны искривляются вплоть до полного исчезновения. Ниже искривленных волн



$II'$ ,  $EE'$  течение становится вихревым, так как условия, требуемые для этого, удовлетворяются (см. уравнения 3.70 и 7.67); но эта завихренность возникает на значительном расстоянии от течения вблизи профиля, вокруг которого поток остается потенциальным, и, следовательно, не влияет на профиль в отношении давления, силы, момента.

**17.4.3. Искривленный профиль.** При некоторых углах атаки на верхней и нижней поверхностях профиля образуются ударные волны (фиг. 17.17), отходящие от точки  $A$ . Если контур искривлен, как это наблюдается в настоящем случае для верхней поверхности, то и ударная волна будет искривлена. Наклон касательной в точке  $A$  к этой волне зависит от наклона касательной к профилю в той же точке.

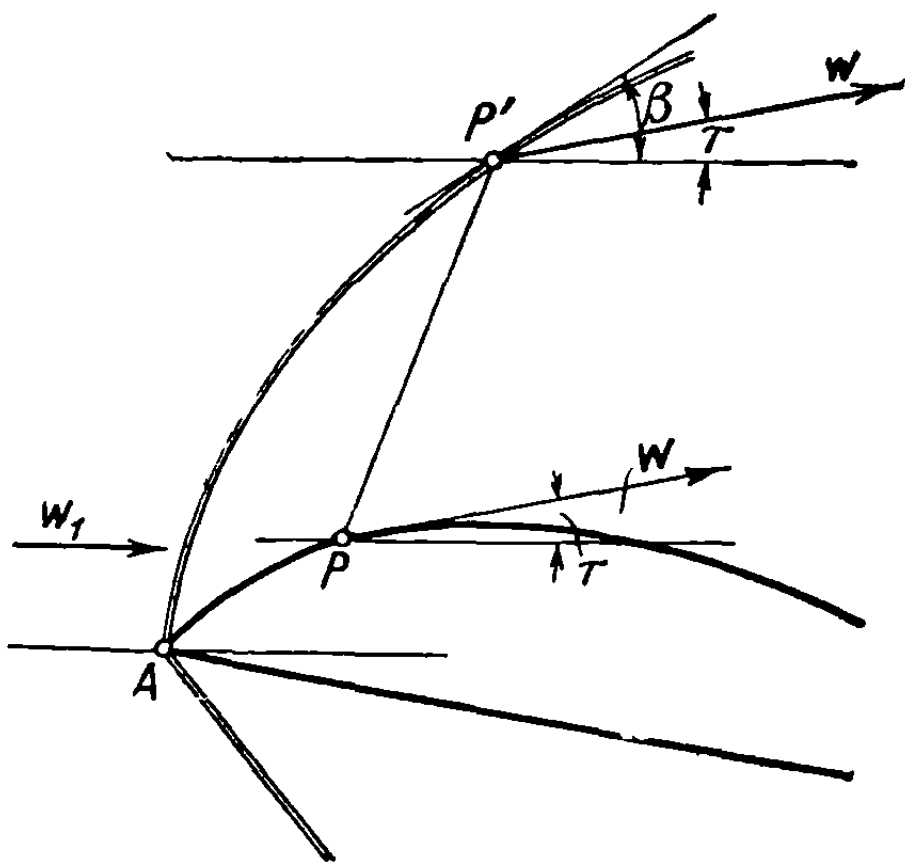


Фиг. 17.17

За точкой  $A$  течение испытывает последовательное расширение вплоть до точки  $B$ , где формируется новая ударная волна, интенсивность которой и наклон определяются углом, образуемым касательной к профилю в точке  $B$  и горизонтальной линией.

Горизонтальные линии  $A_1A$ ,  $BB_1$  и контур профиля разделяют оба потока. Поток над верхней поверхностью не зависит от потока под нижней, поэтому с целью упрощения нижняя поверхность рассматривается как плоская и изучается только влияние кривизны верхней поверхности.

Линии разрежения Маха (характеристические линии) можно построить на искривленной части контура при помощи табл. 17.1 или диаграммы эпициклоиды. Эти



Фиг. 17.18

линии пересекают ударные волны, возникающие в точках  $A$  и  $B$ ; за точками пересечения волны искривляются и их интенсивность уменьшается.

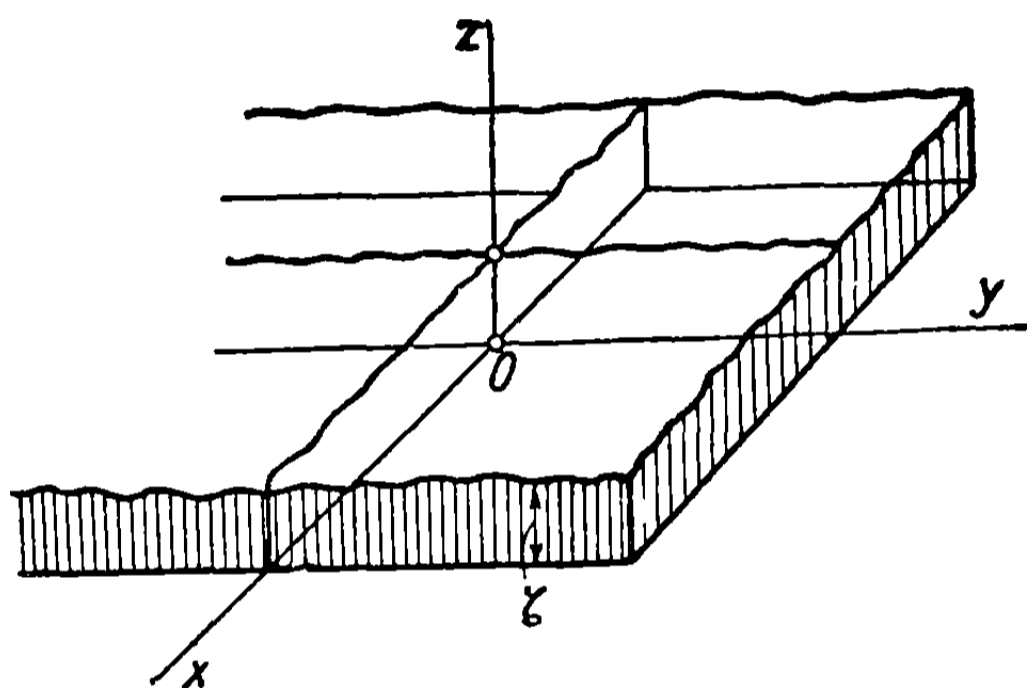
Возрастание энтропии происходит вдоль нормали к течению; в соответствии с уравнениями (3.70) и (7.67), течение становится завихренным. Следовательно, оно не будет потенциальным над всей верхней поверхностью. Для слабо искривленного контура изменение скорости вдоль различных характеристических линий будет малым, поэтому изменение энтропии вдоль ударной волны также мало; возникающие вихри имеют малую интенсивность и влиянием завихренности можно пренебречь.

Скорость и давление поэтому можно вычислить с помощью уравнений для потенциального течения.

Чтобы определить условия, при которых наклон ударной волны изменяется, рассмотрим линию разреза  $PP'$ , выходящую из точки  $P$  на контуре и встречающую ударную волну в точке  $P'$  (фиг. 17.18). Величина и направление скорости постоянны вдоль этой линии, поэтому отклонение скорости  $\omega$  по отношению к  $\omega_1$  в точке  $P'$  будет  $\tau$ , т. е. такое же, как на профиле. Отсюда следует, что касательная к волне в точке  $P'$  образует со скоростью угол  $\beta$ , определяемый по ударной поляре. Так как отклонение  $\tau$  изменяется вдоль профиля, то угол  $\beta$  вдоль волны также изменяется.

### 17.5. Гидродинамическая аналогия для волновой системы

В сверхзвуковом течении вокруг профилей появляются простые волны разреза и ударные волны. Они образуют *волновую систему* (см. фиг. 17.14, 17.16, 17.17).



Фиг. 17.19

Полезно дать здесь описание гидродинамической аналогии для этой системы, изученной несколькими авторами, в частности, Рябушинским [4].

Рассмотрим с этой целью движение тонкого слоя жидкости, горизонтальное основание которого примем за плоскость  $Oxy$ ; ось  $Oz$  направим вдоль восходящей вертикали (фиг. 17.19).

Обозначая через  $u$ ,  $v$  и  $w$  компоненты скорости и через  $p$ ,  $\rho$ ,  $g$  плотность, давление и ускорение силы тяжести, соответственно, получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (17.65)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (17.66)$$

Обозначая через  $\zeta$  уровень свободной поверхности, отметим, что он будет функцией  $x$ ,  $y$  и  $t$

$$\zeta = \zeta(x, y, t). \quad (17.67)$$

Граничные условия указанного движения будут:  $p = p_0$  на свободной поверхности ( $z = \zeta$ );  $w = 0$  на поверхности дна ( $z = 0$ ).

Вертикальную скорость на свободной поверхности ( $z = \zeta$ ) представляет

$$w_{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v. \quad (17.68)$$

В соответствии с последними двумя условиями, можно проинтегрировать уравнение неразрывности (17.66) от 0 до  $\zeta$ , в результате чего получим

$$w_{\zeta} + \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = 0. \quad (17.69)$$

Заметим, что для тонких слоев изменение давления вдоль вертикали подобно гидростатическому изменению [5]

$$p = g\rho(\zeta - z) + p_0, \quad (17.70)$$

где  $p_0$  — атмосферное давление на свободной поверхности; таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned} \quad (17.71)$$

Вводя эти зависимости в уравнения движения (17.65), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\ \frac{dw}{dt} &= 0; \end{aligned} \quad (17.72)$$

следовательно, горизонтальное ускорение не зависит от  $z$ , а вертикальная скорость не изменяется со временем.

Поэтому

$$\int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \zeta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (17.73)$$

подставляя результат в уравнение (17.69), получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta v) = 0. \quad (17.74)$$

Нужно, однако, заметить, что уравнения движения (17.72) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} g \zeta^2 \right), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} g \zeta^2 \right). \end{aligned} \quad (17.75)$$

Движение на свободной поверхности, рассматриваемое отдельно, подобно двумерному движению газа, плотность и давление которого определяются равенствами

$$\begin{aligned} \rho^* &= \zeta, \\ p^* &= \frac{1}{2} g \zeta^2 \end{aligned} \quad (17.76)$$

и связаны между собой политропическим законом

$$\frac{p^*}{\rho^{*n}} = \frac{p^*}{\rho^{*2}} = \frac{1}{2} g, \quad (17.77)$$

где  $n = 2$ .

Следовательно, можно записать уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^* u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^* v)}{\partial y} = 0 \quad (17.78)$$

и уравнения движения на свободной поверхности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y}. \end{aligned} \quad (17.79)$$

В случае установившегося движения, соответственно,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho^* u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho^* v) = 0, \quad (17.80 \text{ а})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x},$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y}. \quad (17.80 \text{ б})$$

Таким образом, получаются уравнения для сжимаемой жидкости; следовательно, существует аналогия между течением на поверхности жидкости и течением газа, подчиняющегося закону преобразования (17.77).

В соответствии с теорией волн на свободной поверхности тонкого слоя жидкости [6] скорость распространения волн определяется равенством

$$a^2 = g \zeta = \frac{dp^*}{d\zeta} = \frac{dp^*}{d\rho^*} \quad (17.81)$$

и удовлетворяет в то же время аналогичному уравнению для распространения возмущений в сжимаемой жидкости. Следовательно, как и в случае сжимаемой жидкости, будут существовать два типа течений на свободной поверхности: дозвуковое и сверхзвуковое, в соответствии с тем, будет ли скорость течения меньше или больше  $a$ .

Характеристические волны в сверхзвуковом течении, в частности, идентичны волнам на свободной поверхности; таким образом, система

поверхностных волн совершенно аналогична системе характеристических волн для двумерного сверхзвукового течения.

Нужно также заметить, что легко воспроизвести экспериментально условия сверхзвукового течения. Для слоя в 1 мм высоты скорость распространения волн будет

$$a = \sqrt{g\zeta} = \sqrt{0,00981} \approx 0,10 \text{ м/сек}, \quad (17.82)$$

что позволяет получить значения

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a} > 1$$

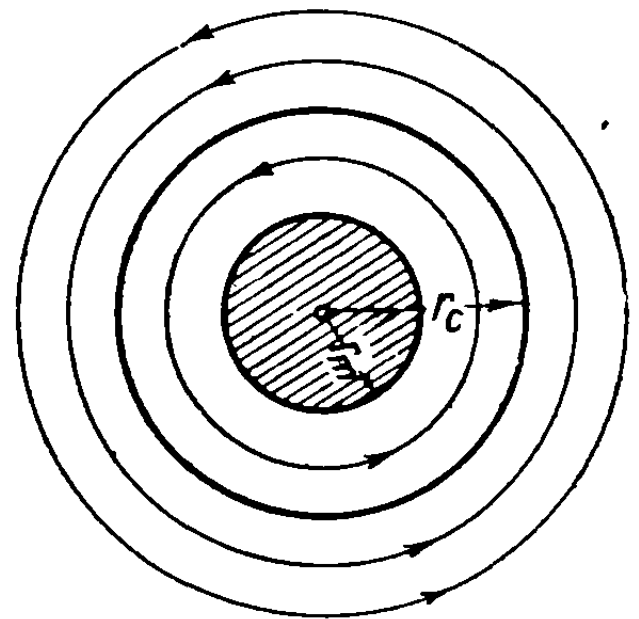
при  $U_\infty \geq 0,10$  м/сек; более высокие скорости могут быть легко получены экспериментально при соответствующем оборудовании.

## 17. 6. Течения, не зависящие от отклонения потока

Во всех разобранных задачах рассматривался поток, основные характеристики которого зависели только от отклонения. Представляет интерес исследовать совершенно другие виды течений, для которых скорость зависит исключительно от расстояния до точки и не зависит от отклонения, как это наблюдается в случаях вихря, источника и течения, получающегося при объединении вихря и источника.

**17.6.1. Течение вокруг вихря.** Предположим, что скорость течения направлена по касательной к окружности радиуса  $r$  и одинакова во всех точках этой окружности; обозначая через  $\Gamma$  циркуляцию, предполагаемую постоянной, получим течение вокруг вихря:

$$2\pi r w = \Gamma, \\ w = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{r d\theta}. \quad (17.83)$$



Фиг. 17.20

В определенной точке скорость достигает своего критического значения ( $w=c$ ). Радиус соответствующей окружности, который мы обозначим через  $r_c$ , определяется формулой

$$r_c = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{c} = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} \frac{1}{a_0} = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa+1}{2\kappa}} \frac{\rho_0}{\rho_0}, \quad (17.84)$$

причем уравнение (5.3) было использовано для того, чтобы выразить  $r_c$  как функцию скорости звука в покоящемся газе и, соответственно, как функцию его физических характеристик.

Скорость достигнет максимальной величины на окружности минимального радиуса  $r_m$ , определяемого соотношением

$$r_m = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{W} = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{\rho_0}{\rho_0} = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa-1}{2}} \frac{1}{a_0} = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} r_c. \quad (17.85)$$

Пространство, таким образом, разделяется на две области: в одной ( $r > r_c$ ) существуют дозвуковые условия течения, а в другой ( $r_m < r < r_c$ ) — сверхзвуковые. В центре можно себе представить твердое цилиндрическое ядро (фиг. 17,20). Очевидно, что, как и в случае течения несжимаемой жидкости, потенциал определяется с точностью до постоянной выражением

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (17.86)$$

а функция тока получается из основных соотношений (11.23)

$$\psi = \int \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi} \int \frac{\rho}{\rho_0} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (17.87)$$

**17.6.2. Источник с постоянным расходом.** Пусть  $m$  — массовый поток газа, текущего при постоянном расходе вдоль радиальных траекторий, пересекающих любую окружность радиуса  $r$ :

$$\begin{aligned} 2\pi r \rho \omega &= m, \\ \rho \omega &= \frac{m}{2\pi} \frac{1}{r}; \end{aligned} \quad (17.88)$$

отсюда следует, что радиус, соответствующий критической скорости, будет

$$r_c = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\rho_c c}. \quad (17.89)$$

Применяя соотношения (5.4) и (5.7), получим уравнение

$$\rho_c c = a_0 \rho_0 \frac{\rho_c}{\rho_0} \frac{c}{a_0} = \sqrt{x \rho_0 \rho_0} \left( \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2(x-1)}}, \quad (17.90)$$

которое может быть использовано для вычисления  $r_c$  при условии, что физические свойства покоящегося газа известны.

Ниже приводятся изменения числа Маха в зависимости от  $r$ , так как имеются в виду некоторые последующие случаи применения к сверхзвуковым аэродинамическим трубам. Исходя из уравнения Бернулли (3.76) и применяя выражения (5.4) и (5.15), можно записать соотношение

$$\omega^2 = \frac{2x}{x-1} \frac{\rho_0}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right] = \frac{x+1}{2} \frac{M^2 c^2}{1 + \frac{x-1}{2} M^2}, \quad (17.91)$$

из которого выводим

$$\frac{r}{r_c} = \frac{\rho_c c}{\rho \omega} = \frac{\rho_c \rho_0 c}{\rho_0 \rho \omega} = \frac{1}{M} \left( \frac{x-1}{x+1} M^2 + \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2(x-1)}}. \quad (17.92)$$

Очевидно, что отношение  $\frac{r}{r_c}$  минимально при  $M = 1$  ( $r = r_c$ ) и больше единицы ( $r > r_c$ ) при всяком другом значении числа  $M$ . Отсюда следует, что движение существует только в зоне  $r > r_c$ ; оно будет либо полностью дозвуковым ( $M < 1$ ), либо полностью сверхзвуковым ( $M > 1$ ).

Функция тока с точностью до постоянной получается в виде

$$\psi = \frac{m}{2\pi\rho_0} \theta; \quad (17.93)$$

потенциал выводится из тех же соотношений (11.23)

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \int \frac{1}{\rho} (M^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (17.94)$$

**17.6.3. Наложение источника и вихря.** Радиальные и тангенциальные скорости выражаются соответственно в виде

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\rho r} = \frac{\mu}{\rho r}, \\ w_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{r}; \end{aligned} \quad (17.95)$$

полная скорость  $w$  определяется равенством

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\theta^2} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu^2}{\rho^2} + \gamma^2}; \quad (17.96)$$

отсюда получим выражение для радиуса, в зависимости от скорости,

$$r = \frac{\sqrt{\mu^2 + \gamma^2 \rho^2}}{\rho w}, \quad (17.97)$$

из которого видно, что существует минимальный радиус  $r_m$ .

Окружность, соответствующая критической скорости, имеет радиус, определяемый уравнением

$$r_c = \frac{\sqrt{\mu^2 + \gamma^2 \rho_c^2}}{\rho_c c}; \quad (17.98)$$

отсюда

$$\frac{r}{r_c} = \frac{c}{w} \frac{\sqrt{\frac{\mu^2}{\rho^2} + \gamma^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\rho_c^2} + \gamma^2}}. \quad (17.99)$$

Это соотношение может быть рассмотрено таким же образом, как (17.92).

## 18. ТЕОРИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПРОФИЛЕЙ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Применение метода малых возмущений (см. раздел 14) привело к линейной теории сверхзвуковых профилей, которая может рассматриваться как результат анализа явлений в *первом приближении*.

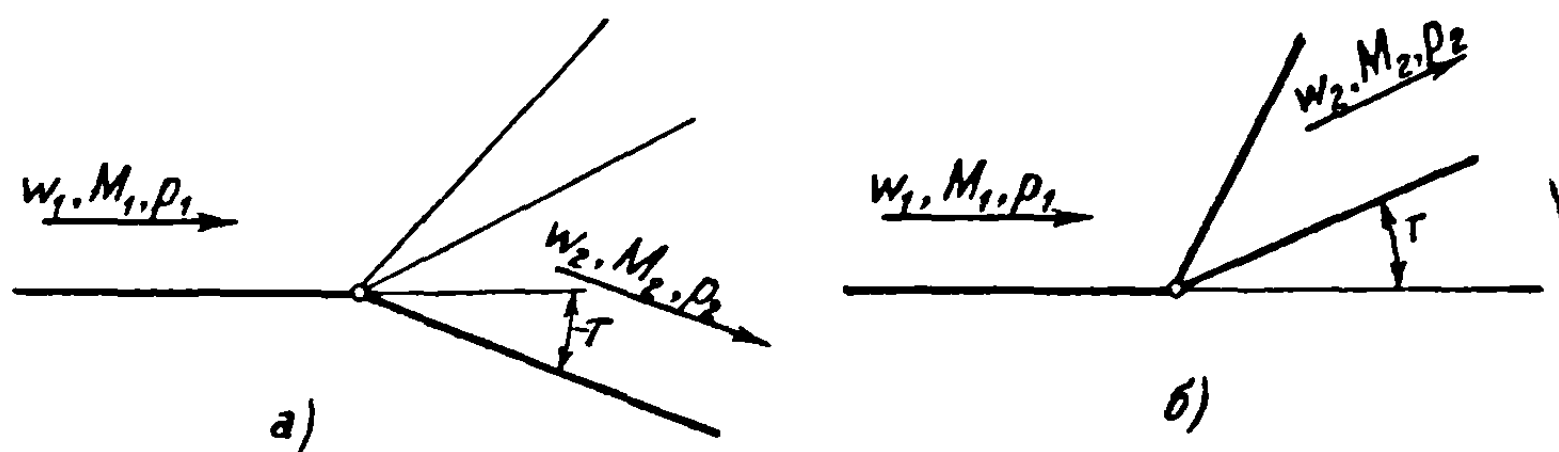
Применяя теорию ударных волн и волн разрежения, можно было бы точно подсчитать давления на сверхзвуковых профилях, а затем подъемную силу, волновое сопротивление и аэродинамические моменты. Этот строгий метод вычислений определяет *точную теорию* сверхзвуковых профилей. Она применяется в каждом отдельном случае на основе таблиц и графических построений, не давая возможности представить аэродинами-

ческие характеристики профилей с помощью простых и явных аналитических формул.

В последующих разделах описан простой аналитический метод определения со значительной точностью распределения давлений на контуре профиля. Такое построение образует *теорию профилей во втором приближении*.

### 18. 1. Разложение коэффициента давления в ряд по степеням отклонения

Если сверхзвуковой поток испытывает отклонение  $\tau$ , которое расширяет его протяженность, то это отклонение производит разрежение; при этих условиях отклонение  $\tau$  будет рассматриваться как отрицательное (фиг. 18.1,а).



Фиг. 18.1

Если отклонение сужает протяженность потока, то появляется ударная волна, и течение подвергается сжатию; при этих условиях знак отклонения будет положительным (фиг. 18,1,б).

Расширение в первом случае и сжатие во втором являются функциями отклонения. Пусть  $p_1$  — давление,  $w_1$  — скорость невозмущенного потока и  $p_2$  — давление после отклонения; коэффициент для разности давлений  $(p_2 - p_1)$  будет

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 w_1^2} = f(\tau), \quad (18.1)$$

где знак  $\tau$ , как указано выше, отрицателен для расширения и положителен для сжатия. Течение будет изэнтропическим в случае разрежения и неизэнтропическим в случае сжатия; функция  $f(\tau)$  поэтому различна для обоих случаев. Однако в разложениях этих функций по степеням  $\tau$  коэффициенты при первых двух членах будут одинаковы и только начиная с третьего различаются (см. формулу 7.23).

Чтобы определить указанные коэффициенты, осуществим разложение в обоих случаях как для сжатия, так и для расширения.

18.1.1. Разложение коэффициента давления в случае ударных волн. Исходя из формулы (7.105), дающей абсолютную величину отклонения  $\tau$  как функцию от коэффициента давления  $C_p$ , можно представить эту формулу в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} M_1^2 \frac{C_p}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{C_p}{2}\right) \operatorname{tg} \tau = \\ & = \sqrt{M_1^2 - 1} \frac{C_p}{2} \left(1 - \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \frac{C_p}{2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (18.2)$$



Заметим, что в упомянутой выше формуле отклонение обозначено буквой  $\theta$ , имеющей в разных формулах различный смысл.

Разлагая коэффициент  $C_p$  в ряд по степеням  $\tau$

$$C_p = K_1\tau + K_2\tau^2 + K_3\tau^3 + \dots, \quad (18.3)$$

получим

$$\left(1 + \frac{x+1}{2} M_1^2 \frac{C_p}{2}\right)^{1/2} \approx 1 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots,$$

$$\left(1 - \frac{x+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2-1} \frac{C_p}{2}\right)^{1/2} \approx 1 + B_1\tau + B_2\tau^2 + \dots, \quad (18.4)$$

причем коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$  определяются уравнениями

$$A_1 = \frac{x+1}{4} M_1^2 \frac{K_1}{2},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{2} M_1^2 \frac{K_2}{2} - \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 M_1^4 \left(\frac{K_1}{2}\right)^2 \right],$$

$$B_1 = -\frac{x+1}{4} \frac{M_1^2}{M_1^2-1} \frac{K_1}{2}, \quad (18.5)$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2-1} \frac{K_2}{2} + \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 \frac{M_1^4}{(M_1^2-1)^2} \left(\frac{K_1}{2}\right)^2 \right].$$

Разлагая теперь  $\operatorname{tg} \tau$

$$\operatorname{tg} \tau = \tau + \frac{1}{3} \tau^3 + \dots, \quad (18.6)$$

и подставляя результат в уравнение (18.2), получим соотношение

$$\begin{aligned} & (1 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots) \left[ 1 - \frac{1}{2} (K_1\tau + K_2\tau^2 + K_3\tau^3 + \dots) \right] \left( \tau + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \tau^3 + \dots \right) = \frac{1}{2} \sqrt{M_1^2 - 1} (K_1\tau + K_2\tau^2 + K_3\tau^3 + \dots) \times \\ & \times (1 + B_1\tau + B_2\tau^2 + \dots), \end{aligned} \quad (18.7)$$

которое должно удовлетворяться при любом значении  $\tau$ .

Разлагая обе части уравнения (18.7) в ряды по возрастающим степеням  $\tau$  и пренебрегая членами более высокого порядка, чем  $\tau^3$ , получим выражения

$$K_1 = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}},$$

$$K_2 = \frac{2}{M_1^2 - 1} \left( \frac{x+1}{4} \frac{M_1^4}{M_1^2 - 1} - 1 \right) = \frac{xM_1^4 + (M_1^2 - 2)^2}{2(M_1^2 - 1)^2},$$

$$\begin{aligned} K_3 = \frac{1}{3(M_1^2 - 1)^{3/2}} & \left[ 3 \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 M_1^8 + \frac{3x^2 - 12x - 7}{4} M_1^6 + \right. \\ & \left. + \frac{9(x+1)}{2} M_1^4 - 6M_1^2 + 4 \right]. \end{aligned} \quad (18.8)$$

18.1.2. Разложение коэффициента давления в случае волн разрежения Исходя из уравнения давления (17.26), соответствующего полному расширению Прандтля — Майера, можно записать соотношение

$$f = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} (\cos^2 \lambda \omega)^{\frac{x}{x-1}}, \quad (18.9)$$

где, как было установлено ранее [см. формулы (17.24) и (17.30)],

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda \omega &= \lambda \sqrt{M^2 - 1}, \\ \omega &= \theta + \frac{\pi}{2} - \mu. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Вводя новую переменную

$$m = \sqrt{M^2 - 1} \quad (18.11)$$

и записывая с ее помощью предыдущие зависимости

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda \omega &= \lambda m, \\ \cos^2 \lambda \omega &= \frac{1}{1 + m^2 \lambda^2}, \end{aligned} \quad (18.12)$$

$$\operatorname{ctg} \mu = m,$$

получим

$$f = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} (1 + m^2 \lambda^2)^{-\frac{x}{x-1}}. \quad (18.13)$$

Дифференцируя по параметру  $m$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dm} \cos^2 \lambda \omega &= \frac{1}{1 + \lambda^2 m^2}, \\ \frac{d\mu}{dm} &= -\sin^2 \mu = -\frac{1}{1 + m^2}, \end{aligned} \quad (18.14)$$

$$\frac{df}{dm} = -\frac{2x}{x-1} \frac{\lambda^2 m f}{1 + \lambda^2 m^2} = -\frac{2x}{x+1} \frac{mf}{1 + \lambda^2 m^2},$$

$$\frac{d\theta}{dm} = \frac{d\omega}{dm} + \frac{d\mu}{dm} = \frac{m^2(1 - \lambda^2)}{(1 + m^2)(1 + \lambda^2 m^2)}.$$

Разлагая коэффициент давления  $C_p$  по степеням отклонения  $\tau$ , представляющего разность между двумя значениями  $\theta_2$  и  $\theta_1$  при полном расширении Прандтля — Майера, и принимая во внимание знак определяемой величины, имеем

$$-\tau = \theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta; \quad (18.15)$$

при этих условиях получим соотношения

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2} = \frac{p_2 - p_1}{p_0} \frac{p_0}{p_1} \frac{1}{\frac{1}{2} x M_1^2} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \frac{2}{x M_1^2} = C_1 \tau + C_2 \tau^2 + C_3 \tau^3 + \dots \quad (18.16)$$

Чтобы определить коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$ , применим разложение Тейлора, используя аргументацию Локка [7]:

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 &= \left(\frac{df}{d\theta}\right)_1 (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{d\theta^2}\right)_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3f}{d\theta^3}\right)_1 (\theta_2 - \theta_1)^3 + \dots = \\ &= - \left(\frac{df}{d\theta}\right)_1 \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{d\theta^2}\right)_1 \tau^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3f}{d\theta^3}\right)_1 \tau^3 + \dots, \end{aligned} \quad (18.17)$$

где индекс единица обозначает начальные величины  $\theta_1, M_1$  и т. д.

Заметим, что могут быть записаны следующие соотношения, в согласии с уравнениями (18.13) и (18.14):

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} &= \frac{df}{dm} \frac{dm}{d\theta} = - \frac{\kappa f (1 + m^2)}{m}, \\ \frac{d^2f}{d\theta^2} &= \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} f \frac{(1 + m^2)(1 + 2\lambda^2 m^2 + m^4)}{m^4}, \end{aligned} \quad (18.18)$$

$$\frac{d^3f}{d\theta^3} = - \frac{\kappa(\kappa + 1)^2}{4} f \frac{(1 + m^2)[4 + 3m^2 + 4m^4 - m^6 + m^8 + (9 + 5m^2 + 3m^4 - m^6)m^2\lambda^2 + 2(3 + m^2)m^4\lambda^4]}{m^7}$$

Подставляя значение  $m$  из равенства (18.11), в котором величине  $M$  должен быть присвоен индекс единица, получим, используя выражения (18.16) и (18.17):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \\ C_2 &= \frac{\kappa M_1^4 + (M_1^2 - 2)^2}{2(M_1^2 - 1)^2}, \end{aligned} \quad (18.19)$$

$$C_3 = \frac{1}{6(M_1^2 - 1)^{3,5}} [(\kappa + 1)M_1^8 + (2\kappa^2 - 7\kappa - 5)M_1^6 + 10(\kappa + 1)M_1^4 - 12M_1^2 + 8].$$

При сравнении этих равенств с формулами (18.8) очевидно, что первые, два коэффициента для уравнений расширения и сжатия идентичны ( $C_1 = K_1, C_2 = K_2$ ); третий коэффициент для расширения ( $C_3$ ) отличается от коэффициента для сжатия ( $K_3$ ). Разница между ними, однако, очень мала.

**18.1.3. Выбор формулы второго приближения для подсчета давлений.** Для определения коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, K_3$  рассмотрим диаграммы их изменений в зависимости от числа Маха (фиг. 18.2).

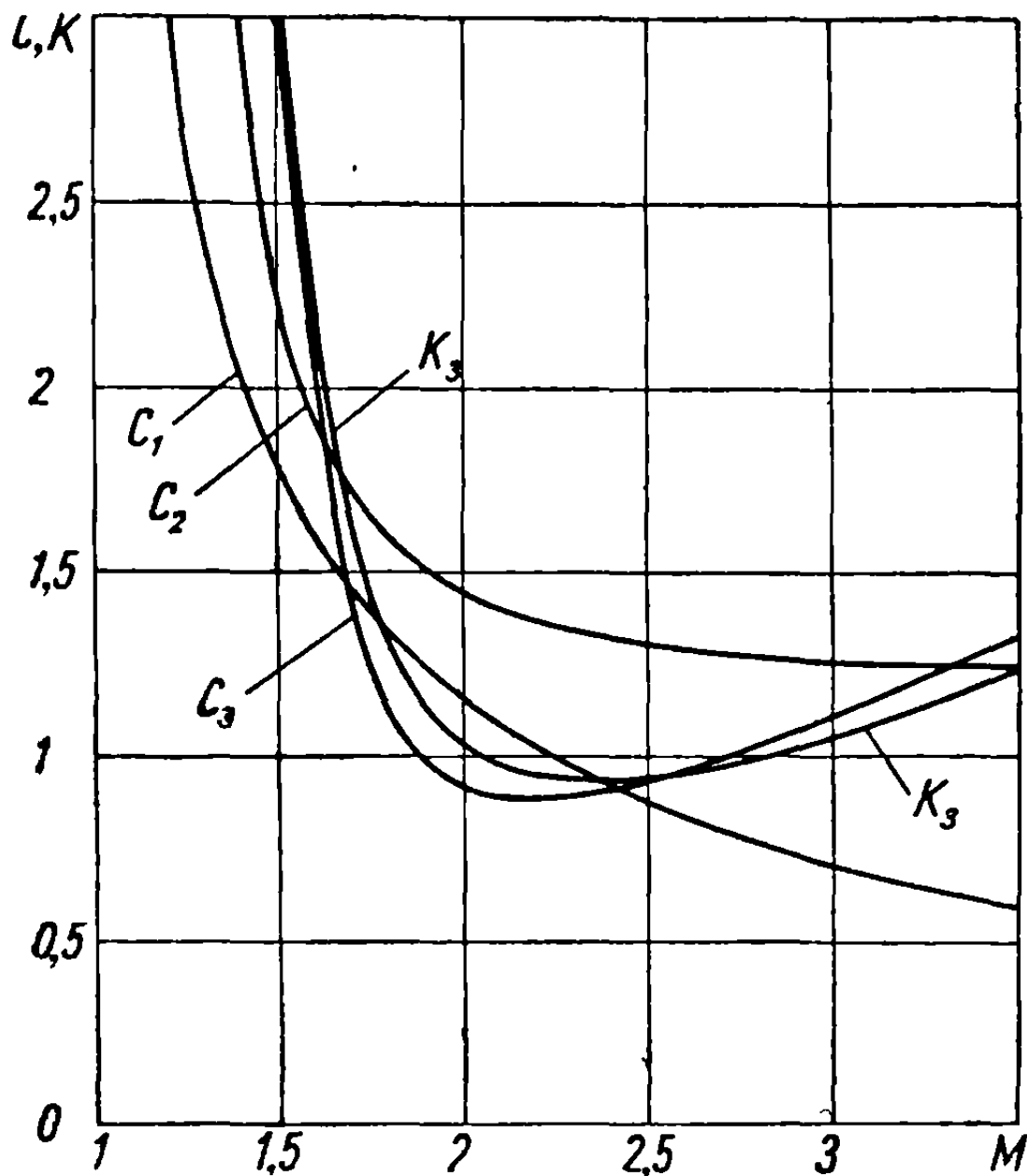
Коэффициент  $K_3$  незначительно отличается от  $C_3$ . Для воздуха ( $\kappa = 1,4$ ) эти коэффициенты фактически равны при  $M_1 = 1,24$  и  $2,54$ . Разность между ними, обозначаемая через  $D$ , определяется уравнением

$$D = C_3 - K_3 = \frac{\kappa + 1}{48} \frac{M_1^4}{(M_1^2 - 1)^{3,5}} [(5 - 3\kappa)M_1^4 + 4(\kappa - 3)M_1^2 + 8]. \quad (18.20)$$

Это выражение содержится в разложении для коэффициента давления по степеням отклонения. Для воздуха коэффициент  $D$  отрицателен в интервале  $1,24 < M_1 < 2,54$  и положителен вне этого интервала. В данном интервале поэтому давление возрастает при наличии ударной волны быстрее, чем в случае изэнтропического процесса.

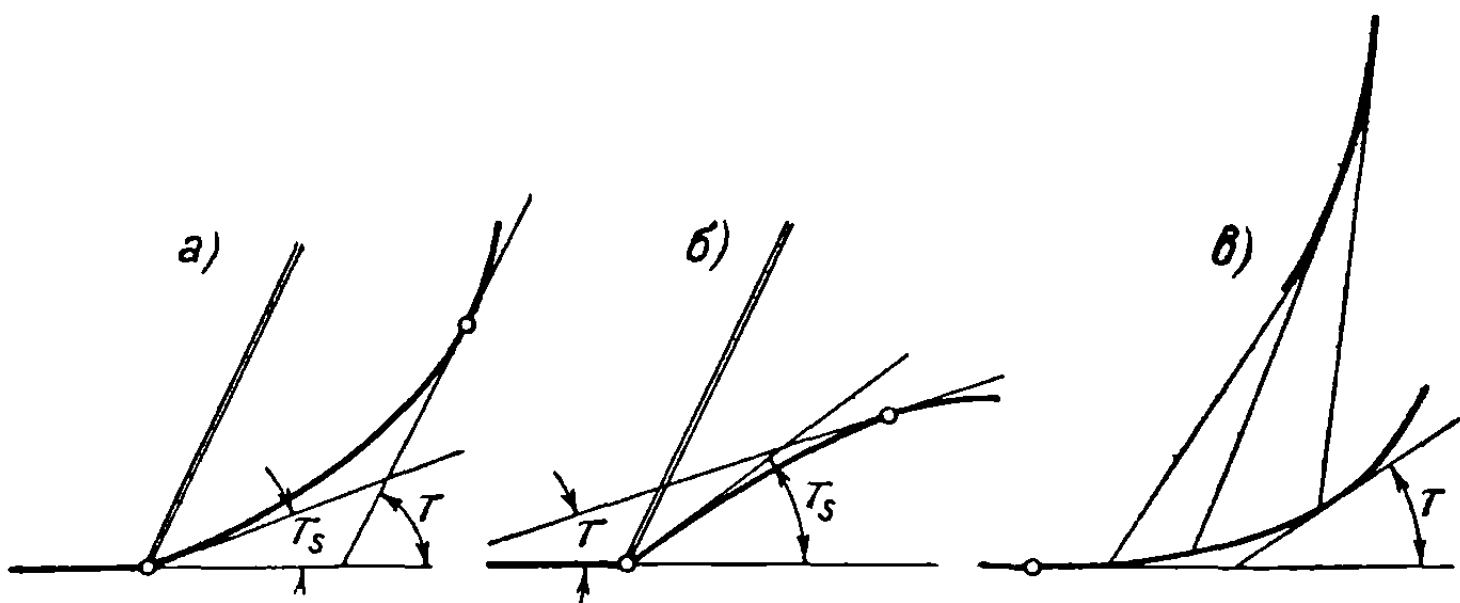
Вспоминая соглашение, принятое для знака отклонения, можно использовать единообразную формулу

$$C_p = C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3 + \dots - D\tau_s^3, \quad (18.21)$$



Фиг. 18.2

где  $\tau_s$  представляет внезапное отклонение, ведущее к возникновению ударной волны (фиг. 18.3, а, б). Если изменение  $\tau$  будет непрерывным и медленным, (фиг. 18.3, в), то процесс сжатия может рассматриваться как изэнтропический; в этом случае  $D \approx 0$ , и уравнение (18.21) становится полностью обратимым.



Фиг. 18.3

Ударные волны возникают вдоль передней кромки обычных сверхзвуковых профилей либо на обеих поверхностях, либо только на нижней (фиг. 18.4, а, б). Вычитание члена  $D\tau_s^3$  действительно при условии, что  $\tau_s$  не превышает величины, выше которой волна отделяется от передней кромки, значительно усложняя течение вокруг профиля.

С точки зрения приведенных выше аргументов, необратимый член  $D\tau^3$  принимается в расчет или полностью пренебрегается, в соответствии с рассматриваемым случаем, так как величина  $D$  очень мала, а  $\tau$ , предполагается в практических случаях также малой величиной. Следовательно, можно применять одну и ту же обратимую формулу

$$C_p = C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3,$$

с помощью которой вычисляются аэродинамические характеристики сверхзвуковых профилей.

Если  $\tau$  мало, то достаточно рассматривать только первый член, возвращаясь к *линейной теории Аккерета*. Когда  $\tau$  предполагается величиной значительной, необходимо рассматривать все три члена. В этом случае вычисление аэродинамических моментов и сил также трудно, как в случае операций, требуемых для применения точной теории; следовательно, использование трехчленной формулы не будет оправданным. Поэтому Буземан [8] и многие другие авторы [9] ограничивались при вычислениях двумя членами, рассматривая процесс как безусловно изэнтропический и устанавливая таким путем *теорию сверхзвуковых профилей во втором приближении*, основанную на укороченном уравнении, в котором, следует напомнить, отклонение  $\tau$  считается отрицательным при расширении и положительным при сжатии

$$C_p = C_1\tau + C_2\tau^2. \quad (18.22)$$

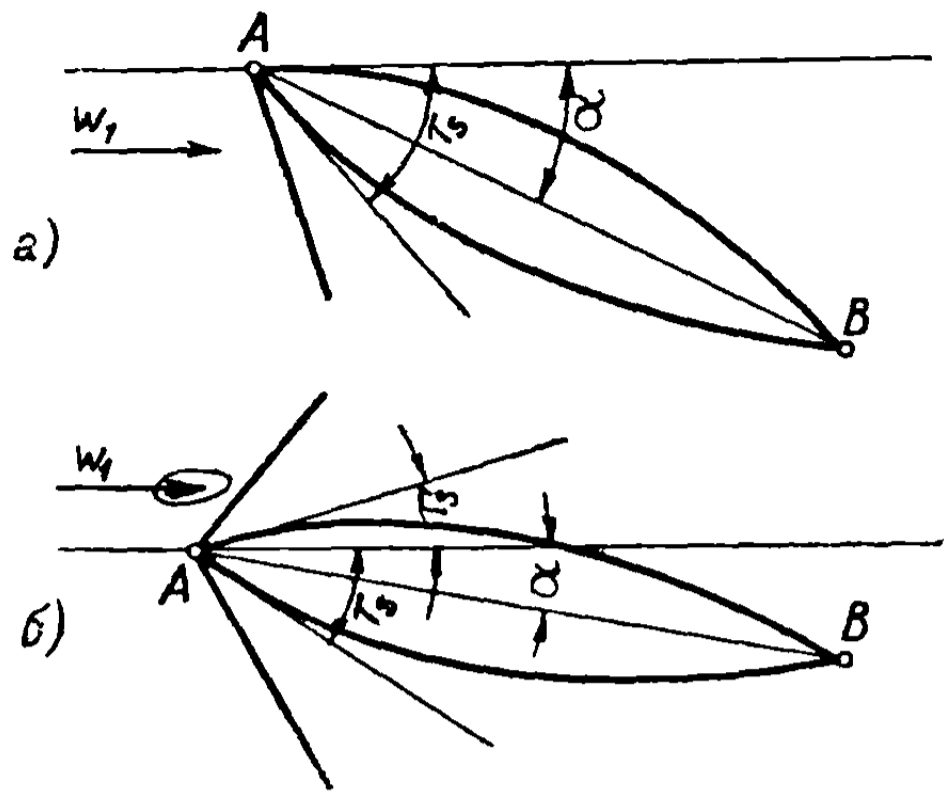
Отметим, что положительное (соответствующее сжатию) отклонение не должно превышать предела, за которым ударная волна отделяется от препятствия. Возникающее в результате этого течение является смешанным с наличием дозвуковых областей, и существенно отлично от полностью сверхзвукового течения, рассматриваемого выше.

Расширение должно быть ограничено также углом определенной величины, выше которой уравнение (18.22) недействительно. Так, при расширении вдоль любой криволинейной стенки, возникающем при отклонении  $\tau_1$ , определяемом из условия

$$\frac{dC_p}{d\tau} = C_1 + 2C_2\tau_1 = 0, \quad (18.23)$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{C_2},$$

коэффициент  $C_p$  достигает своего минимального значения, за которым появляется снова сжатие; это не согласуется с физической реальностью, так как газ продолжает расширяться до максимально возможного отклонения, определяемого согласно уравнению (17.31).



Фиг. 18.4

Пусть рассматривается поток при  $M_1^2 = 2$ ; отсюда выводим  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 2\alpha = 2,8$ , и отклонение, соответствующее максимальному разрежению, будет  $\tau \approx -20^\circ$ . Применяя формулу к точке, где  $\tau = -40^\circ$ , получим  $C_p = 0$ ; это означает, что  $p_2$  восстанавливается до начальной величины  $p_1$ , тогда как в действительности  $p_2$  составляет около  $0,05p_1$ . Поэтому для больших углов расширения приведенное уравнение непригодно, и требуется применение точного метода (см. раздел 17.4). Следовательно, нужно ограничить применение двухчленной формулы Буземана (18.22) и использовать ее только для углов, не превышающих по величине  $10 - 12^\circ$ , если ставить себе целью, чтобы получающаяся ошибка оставалась в приемлемых границах (приблизительно 1,5%).

При этих условиях можно теперь подсчитать подъемную силу, волновое сопротивление и аэродинамические моменты для обычных сверхзвуковых профилей.

## 18.2. Общие формулы для вычисления подъемной силы, волнового сопротивления и результирующих моментов сверхзвуковых профилей

Рассмотрим какой-нибудь профиль, расположенный под углом атаки  $\alpha$  к потоку, имеющему скорость  $w_1$  на бесконечности (фиг. 18.5). Линия  $A_1ABV_1$  разделяет течение на две независимые области, соответствующие верхней и нижней поверхностям. Относя профиль к системе осей  $Axy$ , примем, что хорда  $AB$  совпадает с осью абсцисс. Пусть для обеих поверхностей  $\eta_s$  и  $\eta_i$  будут ординатами профиля, рассматриваемыми как положительные; другими словами, оси ординат направляем вверх для верхней поверхности ( $y_s$ ) и вниз для нижней ( $y_i$ ).

Принимая во внимание соглашение, принятое для знаков, определим отклонение  $\tau$  выражениями:

для верхней поверхности

$$\tau = -\alpha + \tau_s \approx -\alpha + \frac{d\eta_s}{dx}; \quad (18.24)$$

для нижней поверхности

$$\tau = \alpha + \tau_i \approx \alpha + \frac{d\eta_i}{dx}. \quad (18.25)$$

Легко выводим далее коэффициенты давления:

для верхней поверхности

$$C_{ps} = C_1 \left( -\alpha + \frac{d\eta_s}{dx} \right) + C_2 \left( -\alpha + \frac{d\eta_s}{dx} \right)^2 = -C_1\alpha + C_1 \frac{d\eta_s}{dx} + C_2\alpha^2 + C_2 \left( \frac{d\eta_s}{dx} \right)^2 - 2C_2\alpha \frac{d\eta_s}{dx}; \quad (18.26)$$

для нижней поверхности

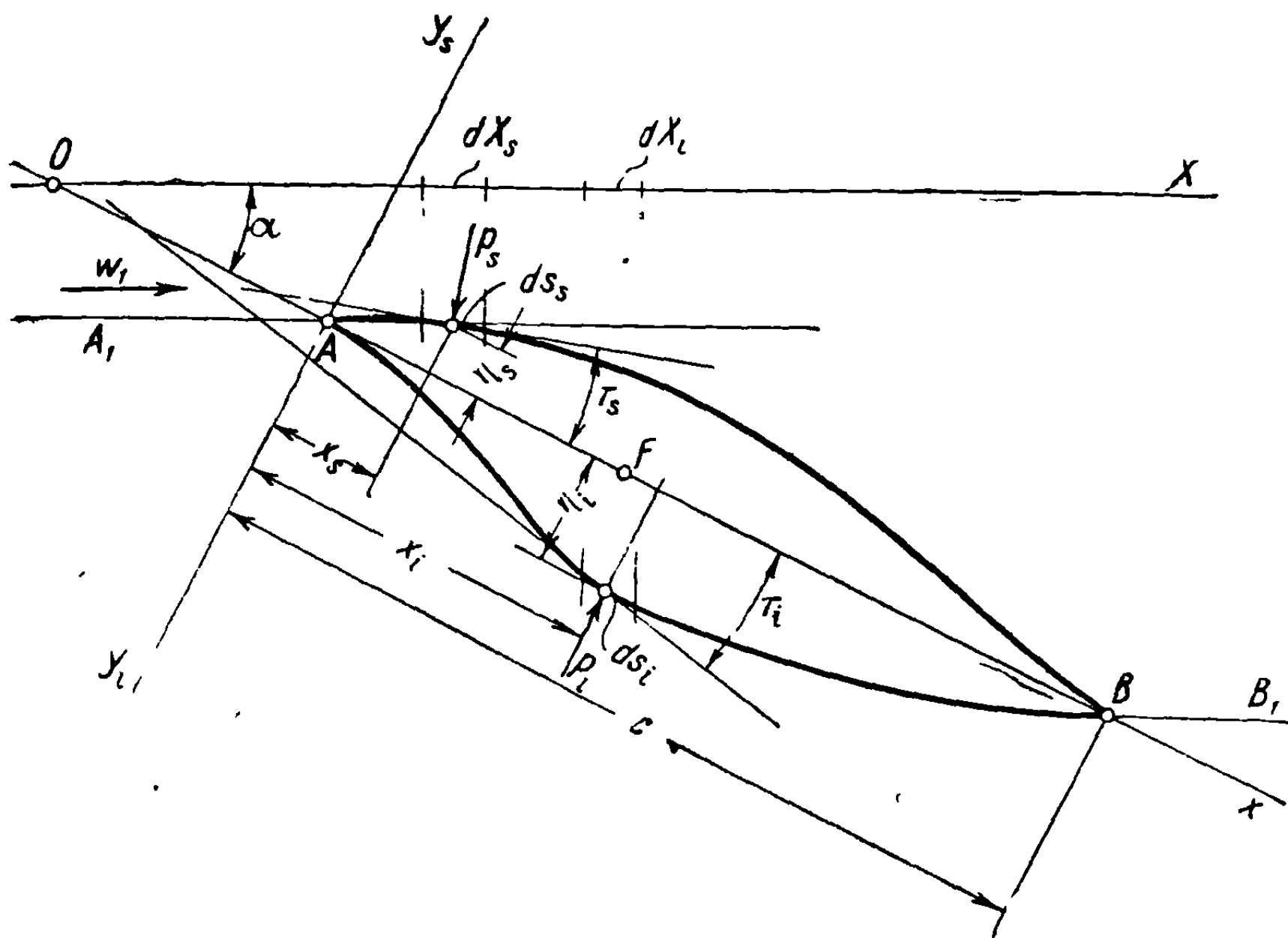
$$C_{pi} = C_1\alpha + C_1 \frac{d\eta_i}{dx} + C_2\alpha^2 + C_2 \left( \frac{d\eta_i}{dx} \right)^2 + 2C_2\alpha \frac{d\eta_i}{dx}, \quad (18.27)$$

Элемент поверхности ( $ds_s$ , соответственно  $ds_i$ ) будет создавать элементарную силу на верхней и нижней поверхностях:

для подъемной силы, направленной вдоль нормали к направлению скорости

$$dP_s = -\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} ds_s \cos \alpha_s = -\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} dX_s, \quad (18.28)$$

$$dP_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} ds_i \cos \alpha_i = +\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} dX_i;$$



Фиг. 18.5

для волнового сопротивления, совпадающего по направлению со скоростью свободного потока, имеем

$$dR_s = -\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} ds_s \cos \alpha_s \operatorname{tg} \alpha_s \approx -\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} \left( \alpha - \frac{d\eta_s}{dx} \right) dX_s, \quad (18.29)$$

$$dR_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} ds_i \cos \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_i \approx \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} \left( \alpha + \frac{d\eta_i}{dx} \right) dX_i;$$

при этом, как можно видеть из фигуры 18.5,

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha - \tau_s \approx \alpha - \frac{d\eta_s}{dx}, \\ \alpha_i &= \alpha + \tau_i \approx \alpha + \frac{d\eta_i}{dx}. \end{aligned} \quad (18.30)$$

Подобным же образом для элементарного момента относительно передней кромки получим выражения

$$dM_s \approx \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} ds_s \cos \tau_s x_s = \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{ps} x_s dx_s; \quad (18.31)$$

$$dM_i \approx \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} ds_i \cos \tau_i x_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 C_{pi} x_i dx_i.$$

Так как величина  $\alpha$  мала, то

$$dX \approx dx; \quad (18.32)$$

следовательно, коэффициент подъемной силы определяется формулой

$$C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c} = \frac{P_s + P_i}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c} = \frac{1}{c} \int_0^c (C_{pi} - C_{ps}) dx. \quad (18.33)$$

Замечая, что

$$\int_0^c \frac{d\eta_s}{dx} dx = \int_0^c \frac{d\eta_l}{dx} dx = 0, \quad (18.34)$$

полагая затем

$$\beta_s = \frac{1}{c} \int_0^c \left( \frac{d\eta_s}{dx} \right)^2 dx,$$

$$\beta_i = \frac{1}{c} \int_0^c \left( \frac{d\eta_i}{dx} \right)^2 dx \quad (18.35)$$

и применяя выражения (18.26) и (18.27), приведем интеграл (18.33) к виду

$$C_z = 2C_1 \alpha + C_2 (\beta_i - \beta_s) = 2C_1 \left[ \alpha + \frac{C_2}{2C_1} (\beta_i - \beta_s) \right]. \quad (18.36)$$

Отсюда видно, что угол для нулевой подъемной силы определяется соотношением

$$\alpha_0 = - \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s). \quad (18.37)$$

В противоположность дозвуковым явлениям, угол для нулевой подъемной силы при сверхзвуковом течении будет положительным, когда верхняя поверхность более искривлена по сравнению с нижней.

Аналогично находим коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c} = \frac{R_s + R_i}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c} = \frac{1}{c} \int_0^c \left[ C_{pi} \left( \alpha + \frac{d\eta_i}{dx} \right) - C_{ps} \left( \alpha - \frac{d\eta_s}{dx} \right) \right] dx. \quad (18.38)$$

Полагая

$$\gamma_s = \frac{1}{c} \int_0^c \left( \frac{d\eta_s}{dx} \right)^3 dx,$$

$$\gamma_i = \frac{1}{c} \int_0^c \left( \frac{d\eta_i}{dx} \right)^3 dx \quad (18.39)$$



и вычисляя интеграл (18.38), получим окончательно выражение для коэффициента лобового сопротивления

$$C_x = 2C_1\alpha^2 + C_1(\beta_i + \beta_s) + 3C_2\alpha(\beta_i - \beta_s) + C_2(\gamma_i + \gamma_s). \quad (18.40)$$

Применяя равенство (18.36), можно записать коэффициент сопротивления в обычной форме, используемой в случае дозвукового течения:

$$C_x = \frac{C_z^2}{2C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s) C_z + C_1(\beta_i + \beta_s) + \quad (18.41a)$$

$$+ C_2(\gamma_i + \gamma_s) - \frac{C_2^2}{C_1} (\beta_i - \beta_s)^2,$$

где члены, не зависящие от  $C_z$ , представляют лобовое сопротивление при нулевой подъемной силе:

$$C_{x0} = C_1(\beta_i + \beta_s) + C_2(\gamma_i + \gamma_s) - \frac{C_2^2}{C_1} (\beta_i - \beta_s)^2 \approx \quad (18.41b)$$

$$\approx C_1(\beta_i + \beta_s) + C_2(\gamma_i + \gamma_s).$$

Прибавляя коэффициент трения  $C_f$ , получим полное лобовое сопротивление при нулевой подъемной силе

$$K_{x0} = C_{x0} + C_f. \quad (18.42)$$

Подобным же образом получим коэффициент момента

$$C_m = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c^2} = \frac{\mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_i}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2 c^2} = \frac{1}{c^2} \int_0^c (C_{pi} - C_{ps}) x dx. \quad (18.43)$$

Полагая

$$\int_0^c \frac{d\eta_s}{dx} x dx = (x\eta_s)_0^c - \int_0^c \eta_s dx = -c^2 \sigma_s, \quad (18.44)$$

$$\int_0^c \frac{d\eta_i}{dx} x dx = (x\eta_i)_0^c - \int_0^c \eta_i dx = -c^2 \sigma_i,$$

где  $\sigma_s$  и  $\sigma_i$  — площади верхней и нижней частей профиля (разделяемого хордой  $AB$ ), размеры которого уменьшены в отношении  $1/c$ ; далее, полагая

$$\nu_s = \frac{1}{c^2} \int_0^c \left( \frac{d\eta_s}{dx} \right)^2 x dx, \quad (18.45)$$

$$\nu_i = \frac{1}{c^2} \int_0^c \left( \frac{d\eta_i}{dx} \right)^2 x dx,$$

и вычисляя интеграл (18.43), получим соотношение

$$C_m = C_1 \alpha + C_1 (\sigma_s - \sigma_i) - 2C_2 \alpha (\sigma_i + \sigma_s) + C_2 (v_i - v_s). \quad (18.46)$$

В согласии с обычным условием, знак момента относительно передней кромки считается положительным, когда момент стремится поднять носик профиля, и отрицательным, когда он имеет тенденцию опустить носик. Чтобы выполнить это условие, нужно заменить  $C_m$  на  $-C_m$  в предшествующей формуле.

Обычно  $C_m$  представляется как функция от  $C_z$ ; применяя формулу (18.36), запишем уравнение

$$C_m = \frac{1}{2} \left[ 1 - 2 \frac{C_2}{C_1} (\sigma_i + \sigma_s) \right] C_z - \frac{1}{2} C_2 (\beta_i - \beta_s) \left[ 1 - 2 \frac{C_2}{C_1} (\sigma_i + \sigma_s) \right] - \\ - C_1 (\sigma_i - \sigma_s) + C_2 (v_i - v_s); \quad (18.47)$$

полагая

$$k = \frac{1}{2} \left[ 1 - 2 \frac{C_2}{C_1} (\sigma_i + \sigma_s) \right], \\ C_{m0} = - \frac{1}{2} C_2 \left[ 1 - 2 \frac{C_2}{C_1} (\sigma_i + \sigma_s) \right] (\beta_i - \beta_s) - \\ - C_1 (\sigma_i - \sigma_s) + C_2 (v_i - v_s) \approx - \frac{1}{2} C_2 (\beta_i - \beta_s) - \\ - C_1 (\sigma_i - \sigma_s) + C_2 (v_i - v_s), \quad (18.48)$$

выразим  $C_m$  в форме

$$C_m = C_{m0} + kC_z, \quad (18.49)$$

обычной для дозвукового течения.

На хорде профиля есть точка  $F$ , относительно которой момент постоянен, как в случае дозвукового течения. Эта точка называется *фокусом профиля* и находится на расстоянии  $d$  от передней кромки:

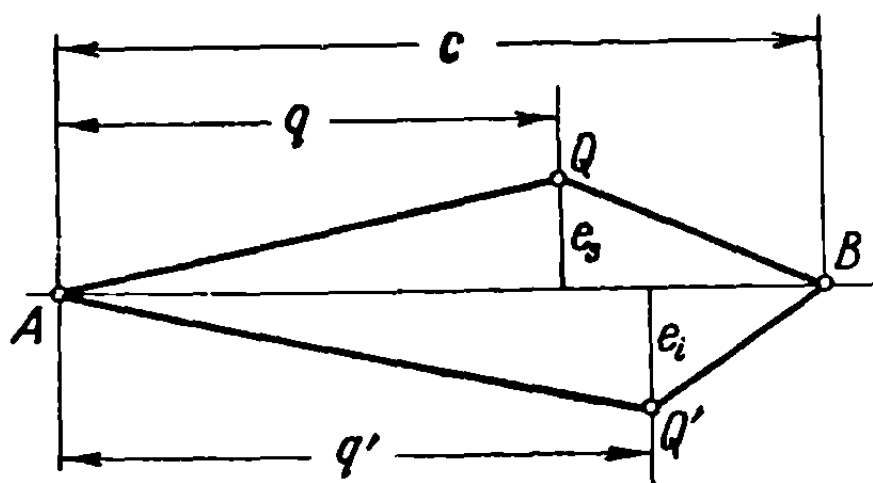
$$d = \overline{AF} = kc. \quad (18.50)$$

Аэродинамические характеристики основных сверхзвуковых профилей даны ниже. Заметим, однако, что для симметричных профилей приведенные формулы, определяющие подъемную силу, лобовое сопротивление и результирующие моменты, значительно упрощаются, приобретая, соответственно, вид:

$$C_z = 2C_1 \alpha, \\ C_{x0} = 2C_1 \beta + 2C_2 \gamma, \quad C_x = \frac{1}{2C_1} C_z^2 + 2C_1 \beta + 2C_2 \gamma, \\ C_{m0} = 0, \quad C_m = \frac{1}{2} \left( 1 - 4 \frac{C_2}{C_1} \sigma \right) C_z, \quad (18.51)$$

$$\beta_i = \beta_s = \beta, \quad \gamma_i = \gamma_s = \gamma, \quad \sigma_i = \sigma_s = \sigma.$$

18.2.1. Профили с минимальным лобовым сопротивлением при нулевой подъемной силе ( $C_{x0}$  минимум). Ранее было показано (см. раздел 14.3.2), что профиль, составленный из прямолинейных отрезков, имеет минимальное лобовое сопротивление. Это доказательство относилось к первому члену уравнения (18,41б), который соответствует линейной теории и значительно важнее второго члена. Такое доказательство, примененное к последнему члену, дает аналогичные результаты.



Фиг. 18.6

Для вычисления положения точки  $Q$  (для определенной относительной толщины), расположенной на расстоянии от передней кромки, для которого лобовое сопротивление будет *минимум-минимумом*, предположим, что минимальное лобовое сопротивление соответствует профилю  $ABQQ'$  (фиг. 18.6), приблизительно двоякоклиновидной формы, ограничивая обсуждение только профилем, образованным верхней поверхностью и хордой. Вычислим значения  $\beta_s$  и  $\gamma_s$  в соответствии с формулами (18.35) и (18.39):

$$\beta_s = \frac{q}{c} \left( \frac{e}{q} \right)^2 + \frac{c-q}{c} \left( \frac{e}{c-q} \right)^2 = \frac{e^2}{q(c-q)}, \quad (18.52a)$$

$$\gamma_s = \frac{q}{c} \left( \frac{e}{q} \right)^3 - \frac{c-q}{c} \left( \frac{e}{c-q} \right)^3 = \frac{e^3(c-2q)}{q^2(c-q)^2}; \quad (18.52б)$$

отсюда для лобового сопротивления профиля  $ABQ$  при нулевой подъемной силе получим

$$C_{x0} = C_1 \frac{e^2}{q(c-q)} + C_2 \frac{e^3(c-2q)}{q^2(c-q)^2}. \quad (18.53)$$

Второй член очень мал; для первого члена минимальная величина соответствует значению  $q = \frac{c}{2}$ ; этот результат был также получен путем применения линейной теории [см. формулу (14.67)].

В настоящем случае минимум получается при значении, отличающемся от указанного очень незначительно, следовательно,

$$q = \frac{c}{2} (1 + \varepsilon), \quad (18.54)$$

где  $\varepsilon$  мало.

При этих условиях

$$C_{x0} = \frac{4C_1 e^2}{c^2} \left[ \frac{1}{1-\varepsilon^2} - \frac{4C_2 e}{cC_1} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] = 4C_1 \frac{e^2}{c^2} \frac{1-\varepsilon^2 - \frac{4C_2 e}{cC_1} \varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad (18.55)$$

откуда, приравнявая производную этого выражения нулю, выведем величину  $\varepsilon$  для минимального значения  $C_{x0}$ :

$$\varepsilon \approx 2 \frac{C_2 e}{C_1 c} \left[ 1 + 16 \left( \frac{C_2 e}{C_1 c} \right)^2 \right]. \quad (18.56)$$

Таким образом, идеальное положение, определяемое формулой

$$q = \frac{c}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \left[ 1 + 16 \left( \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right)^2 \right] \right\}, \quad (18.57)$$

отодвигается далеко от средней точки профиля. Рассмотрим, например, профиль с относительной толщиной  $\frac{e}{c} = 0,10$  и примем приближенно  $\frac{C_2}{C_1} = 1,4$ ; тогда

$$q = 1,37 \frac{c}{2}. \quad (18.58)$$

Рассмотрим теперь ромбовидный профиль (см. фиг. 18.6) такой же полной толщины  $e$ , вершины которого  $Q$  и  $Q'$  имеют одинаковые проекции на хорду. Из уравнения (18.53) для лобового сопротивления очевидно, что минимальное сопротивление соответствует симметричному профилю. Обозначая через  $e_s$  и  $e_i$  максимальные толщины для верхней и нижней поверхностей, приведем последовательно уравнение лобового сопротивления к виду

$$\begin{aligned} C_{x0} &= C_1 \frac{e_s^2 + e_i^2}{q(c-q)} + C_2 \frac{(e_s^3 + e_i^3)(c-2q)}{q^2(c-q)^2} = \\ &= A [e_s^2 + (e - e_s)^2] + B [e_s^3 + (e - e_s)^3]; \end{aligned} \quad (18.59)$$

отсюда, дифференцируя по параметру  $e_s$  и приравнявая производную нулю, получим

$$e_s = e_i = \frac{e}{2}. \quad (18.60)$$

Чтобы сравнить симметричный профиль максимальной относительной толщины  $e/c$  с профилем той же толщины, но имеющем плоскую нижнюю поверхность, запишем для симметричного профиля коэффициент лобового сопротивления при нулевой подъемной силе в виде

$$C_{x0} = 2C_1 \left( \frac{e}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{q(c-q)} + \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{2} \frac{c-2q}{q^2(c-q)^2} \right]. \quad (18.61)$$

Оптимальное расстояние  $q$  имеет теперь такое же значение, как для профиля с плоской нижней поверхностью, но с толщиной в два раза меньшей; следовательно,

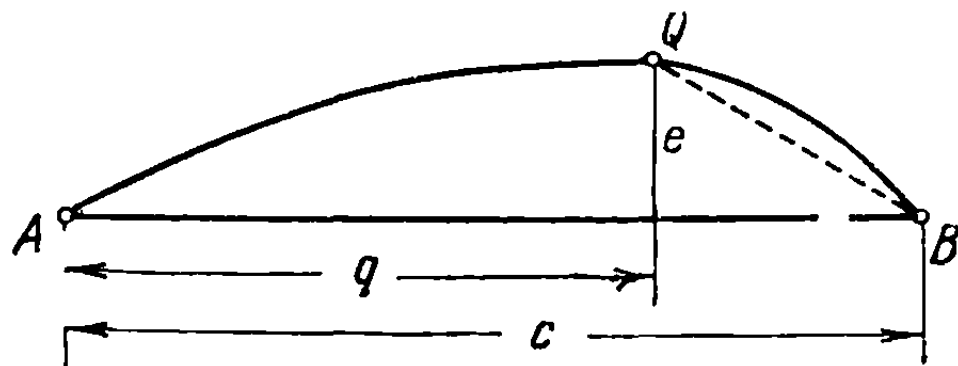
$$q = \frac{c}{2} \left\{ 1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \left[ 1 + 4 \left( \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right)^2 \right] \right\} \approx \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right). \quad (18.62)$$

Подставляя результат в уравнение (18.61), получим соотношение

$$\begin{aligned} (C_{x0})_{\min} &= 2C_1 \left( \frac{e}{c} \right)^2 \left\{ \frac{1}{1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right)^2} - \frac{2 \left( \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right)^2}{\left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right)^2 \right]^2} \right\} \approx \\ &\approx 2C_1 \left( \frac{e}{c} \right)^2 \left[ 1 - \frac{C_2^2 e^2}{C_1^2 c^2} \right]. \end{aligned} \quad (18.63)$$

В общем случае, когда профиль несимметричен, но имеет одинаковое положение максимальной толщины для верхней и нижней поверхностей, используя уравнение лобового сопротивления (18.59) в форме (18.55), получим равенство

$$C_{x0} = 4C_1 \frac{e_s^2 + e_i^2}{c^2} \left[ \frac{1}{1 - \epsilon^2} - 4 \frac{C_2 e}{C_1 c} \frac{e_s^2 - e_s e_i + e_i^2}{e_s^2 + e_i^2} \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^2} \right], \quad (18.64)$$



Фиг. 18.7

из которого, как и выше, может быть выведена величина  $\epsilon$ , соответствующая минимуму  $C_{x0}$

$$\epsilon \approx 2k \frac{C_2 e}{C_1 c} \left[ 1 + 16 \left( k \frac{C_2 e}{C_1 c} \right)^2 \right], \quad (18.65)$$

где коэффициент  $k$  определяется формулой

$$k = \frac{e_s^2 - e_s e_i + e_i^2}{e_s^2 + e_i^2}. \quad (18.66)$$

При  $e_s = e_i = \frac{e}{2}$  воспроизводится случай ромбовидного симметричного профиля.

Задача об идеальном положении максимальной толщины или максимальной кривизны возникает также для профилей с любыми заданными контурами верхней и нижней поверхностей, представляющими, например, две дуги окружностей различных радиусов или дугу окружности и прямолинейный отрезок и т. п. (фиг. 18.7). Идеальное положение зависит от кривизны контура; вычисление элементарно и подобно предшествующему случаю.

Заметим, что если  $C_2 = 0$ , т. е. вычисление ведется с приближением, соответствующим линейной теории, то получаются предшествующие результаты (см. раздел 14,3.2).

**18.2.2. Профили максимального аэродинамического качества.** Аэродинамическое качество определяется, как отношение  $C_x/C_z$ ; применяя уравнение (18.41a), получим

$$\frac{C_x}{C_z} = \frac{C_z}{2C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s) + \frac{C_{x0}}{C_z}. \quad (18.67)$$

Как и в случае дозвукового течения, из приведенного уравнения, определяющего аэродинамическое качество крыла бесконечного размаха, можно усмотреть, что указанное качество будет минимальным для

$$C_z = \sqrt{2C_1 C_{x0}}; \quad (18.68)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_x}{C_z}\right)_{\min} &= \sqrt{\frac{2C_{x0}}{C_1}} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s) = \\ &= \sqrt{2(\beta_i + \beta_s) + 2\frac{C_2}{C_1}(\gamma_i + \gamma_s)} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s), \end{aligned} \quad (18.69)$$

причем вторыми членами можно пренебречь.

Подобные же рассуждения приводят к заключению, что двоякоклиновидные профили также имеют минимальное аэродинамическое качество; идеальное положение максимальной толщины для них можно найти тем же методом, какой был применен в предыдущем случае, при условии, что принимается во внимание лобовое сопротивление, отвечающее верхней и нижней поверхностям, и, следовательно, вычисление должно начинаться с использования уравнения лобового сопротивления в форме (18.59). Если профиль симметричен или нижняя его поверхность плоская, то результаты оказываются подобными полученным выше в отношении минимального лобового сопротивления и оптимального положения максимальной толщины.

Из уравнений (18.68) и (18.69) очевидно, что чем меньше аэродинамическое качество, тем ниже будет величина  $C_z$ .

Если рассматривать коэффициент трения  $C_f$ , то в формуле (18.68)  $C_{x0}$  нужно заменить через  $K_{x0} = C_{x0} + C_f$  (18.42), и мы получим соотношение

$$\begin{aligned} C_z &= \sqrt{2C_1(C_{x0} + C_f)}, \\ \left(\frac{C_x}{C_z}\right)_{\min} &= \sqrt{\frac{2(C_{x0} + C_f)}{C_1}} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} (\beta_i - \beta_s), \end{aligned} \quad (18.70)$$

которое отличается от уравнений (14.60) и (14.61) только членом второго порядка.

### 18.3. Аэродинамические характеристики обычных сверхзвуковых профилей

Характеристики основных сверхзвуковых профилей были установлены с помощью линейной теории (см. раздел 14). Рассмотрим теперь влияние коэффициента  $C_2$ .

Плоская пластинка имеет те же характеристики, что и получаемые по первому приближению в результате применения линеаризирующих гипотез:

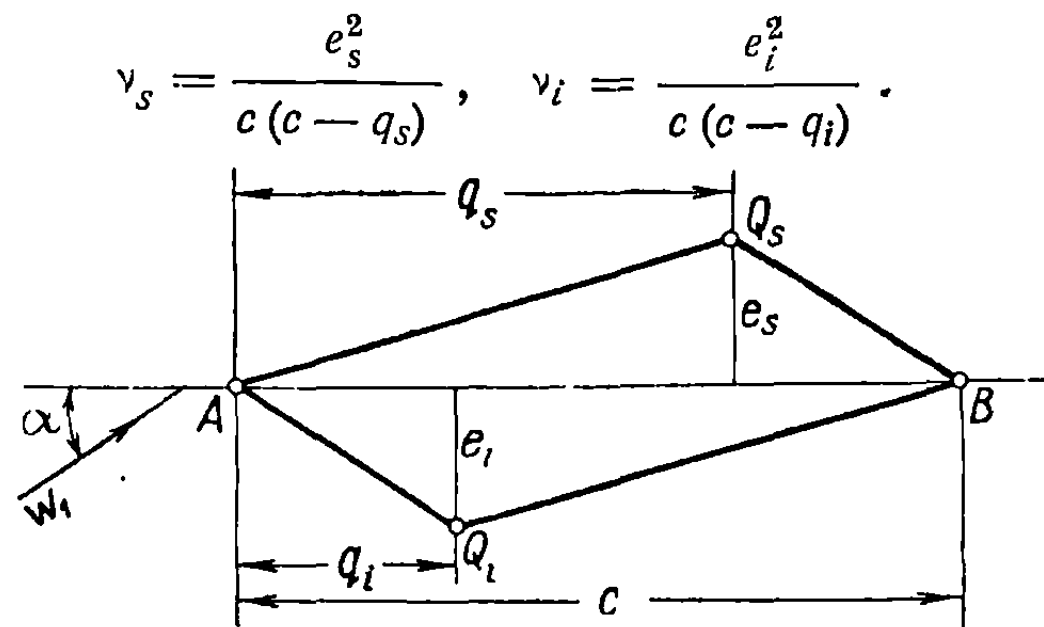
$$C_z = 2C_1\alpha, \quad C_x = 2C_1\alpha^2, \quad C_m = \frac{1}{2} C_z, \quad C_{x0} = C_{m0} = 0. \quad (18.71)$$

Для профилей двоякоклиновидных, составленных из дуг окружностей, или двоякотрапецеидальных, соответствующие вычисления даны ниже. Эти профили полностью изучены Ферри [10].

**18.3.1. Ромбовидные профили.** Поскольку верхняя и нижняя поверхности, вообще говоря, различны, то, используя обозначения фиг. 18.8 и принимая во внимание уравнения (18.36), (18.39) и (18.45), получим:

$$\beta_s = \frac{e_s^2}{q_s(c - q_s)}, \quad \beta_i = \frac{e_i^2}{q_i(c - q_i)};$$

$$\gamma_s = \frac{e_s^3(c - 2q_s)}{q_s^2(c - q_s)^2}, \quad \gamma_i = \frac{e_i^3(c - 2q_i)}{q_i^2(c - q_i)^2}; \quad (18.72)$$



Фиг. 188

Отсюда, применяя формулу (18.36), найдем коэффициент подъемной силы

$$C_z = 2C_1 \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{e_i^2}{q_i(c - q_i)} - \frac{e_s^2}{q_s(c - q_s)} \right) \right] = 2C_1(\alpha - \alpha_0); \quad (18.73)$$

угол атаки, соответствующий нулевой подъемной силе, будет

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{e_i^2}{q_i(c - q_i)} - \frac{e_s^2}{q_s(c - q_s)} \right). \quad (18.74)$$

Аналогично, применяя уравнения (18.41а) и (18.41б), получим коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{C_z^2}{2C_1} - \alpha_0 C_z + C_{x0}, \quad (18.75)$$

где

$$C_{x0} = C_1 \left( \frac{e_i^2}{q_i(c - q_i)} + \frac{e_s^2}{q_s(c - q_s)} \right) + C_2 \left[ \frac{e_i^3(c - 2q_i)}{q_i^2(c - q_i)^2} + \frac{e_s^3(c - 2q_s)}{q_s^2(c - q_s)^2} \right]. \quad (18.76)$$

Подобно этому уравнения (18.48) примут вид:

$$C_m = kC_z + C_{m0},$$

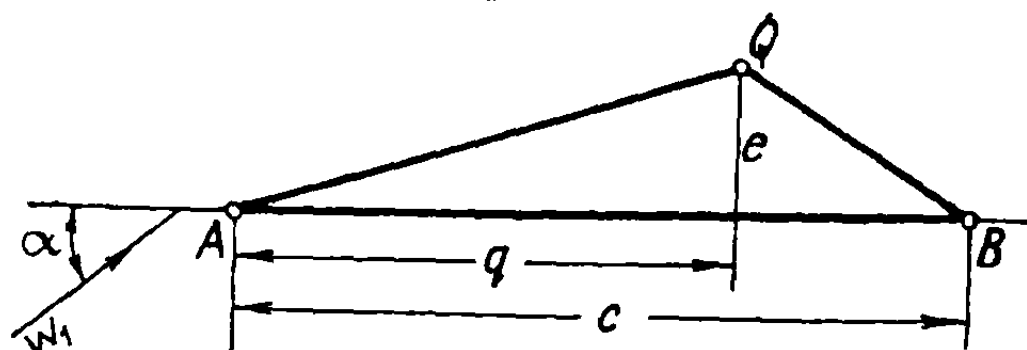
$$k = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{e_i + e_s}{c} \right) \right], \quad (18.77)$$

$$C_{m0} = -\frac{1}{2} C_2 \left[ \frac{e_i^2}{q_i(c - q_i)} - \frac{e_s^2}{q_s(c - q_s)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{e_s}{c} - \frac{e_i}{c} \right) + C_2 \left( \frac{e_i^2}{c(c - q_i)} - \frac{e_s^2}{c(c - q_s)} \right).$$

Для симметричного профиля ( $e_s = e_l = \frac{e}{2}$ ,  $q_l = q_s = q$ ), соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ C_{x0} &= \frac{C_1}{2} \frac{e^2}{q(c-q)} + \frac{C_2 e^3 (c-2q)}{4 q^2 (c-q)^2}, \\ l &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{C_2 e}{C_1 c} \right), \\ C_{m0} &= 0. \end{aligned} \tag{18.78}$$



Фиг. 18.9

В случае двойной симметрии ( $q = \frac{c}{2}$ ) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ C_{x0} &= 2C_1 \left( \frac{e}{c} \right)^2, \\ k &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{C_2 e}{C_1 c} \right), \\ C_{m0} &= 0. \end{aligned} \tag{18.79}$$

Наконец, для профилей с плоской нижней поверхностью (фиг. 18.9):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} \frac{e^2}{q(c-q)}; \\ C_{x0} &= C_1 \frac{e^2}{q(c-q)} + C_2 \frac{e^3 (c-2q)}{q^2 (c-q)^2}; \quad k = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{C_2 e}{C_1 c} \right); \\ C_{m0} &= \frac{C_2}{2} \frac{e^2}{q(c-q)} + \frac{C_1 e}{2c} - C_2 \frac{e^2}{c(c-q)} = \frac{C_2 e^2 c - 2q}{2cq(c-q)} + \frac{C_1 e}{2c}. \end{aligned} \tag{18.80}$$

18.3.2. Профили, образованные из дуг окружностей. Если профиль образуется дугами окружности от передней кромки (A) до задней (B), то он имеет продольную симметрию (фиг. 18.10). В этом случае:

$$\begin{aligned} \beta_s &= \frac{16}{3} \left( \frac{e_s}{c} \right)^2, \quad \beta_l = \frac{16}{3} \left( \frac{e_l}{c} \right)^2; \\ \gamma_s &= \gamma_l = 0; \\ \nu_s &= \frac{8}{3} \left( \frac{e_s}{c} \right)^2, \quad \nu_l = \frac{8}{3} \left( \frac{e_l}{c} \right)^2; \\ \sigma_s &= \frac{2}{3} \frac{e_s}{c}, \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \frac{e_l}{c}. \end{aligned} \tag{18.81}$$



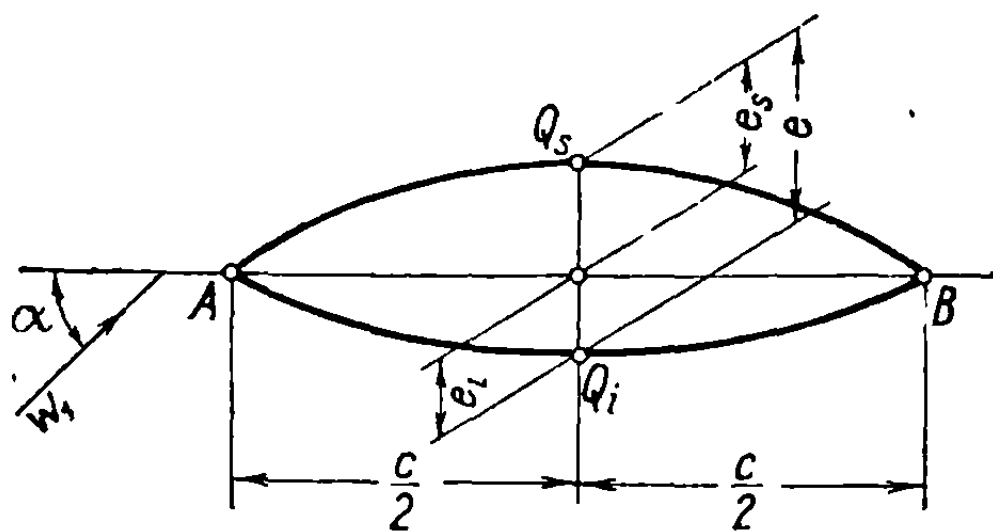
Обозначая максимальную толщину через  $e = e_i + e_s$ , легко получим следующие результаты:

$$\alpha_0 = \frac{8}{3} \frac{C_2}{C_1} \frac{e_s^2 - e_i^2}{c^2}; \quad (18.82a)$$

$$C_{x0} = \frac{16}{3} C_1 \frac{e_s^2 + e_i^2}{c^2}; \quad (18.82б)$$

$$k = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right); \quad (18.82в)$$

$$C_{m0} = \frac{2}{3} C_1 \left( \frac{e_i - e_s}{c} \right); \quad (18.82г)$$



Фиг. 18.10

отсюда

$$C_z = 2C_1 (\alpha - \alpha_0), \quad (18.83)$$

$$C_x = \frac{C_z^2}{2C_1} - \alpha_0 C_z + C_{x0},$$

$$C_m = kC_z + C_{m0}.$$

Если профиль симметричен относительно хорды, то соответственно

$$\alpha_0 = 0,$$

$$C_{x0} = \frac{8}{3} C_1 \left( \frac{e}{c} \right)^2,$$

$$k = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right),$$

$$C_{m0} = 0. \quad (18.84)$$

Для профилей с плоской нижней поверхностью, обозначая через  $e$  максимальную толщину (фиг. 18.11), получим

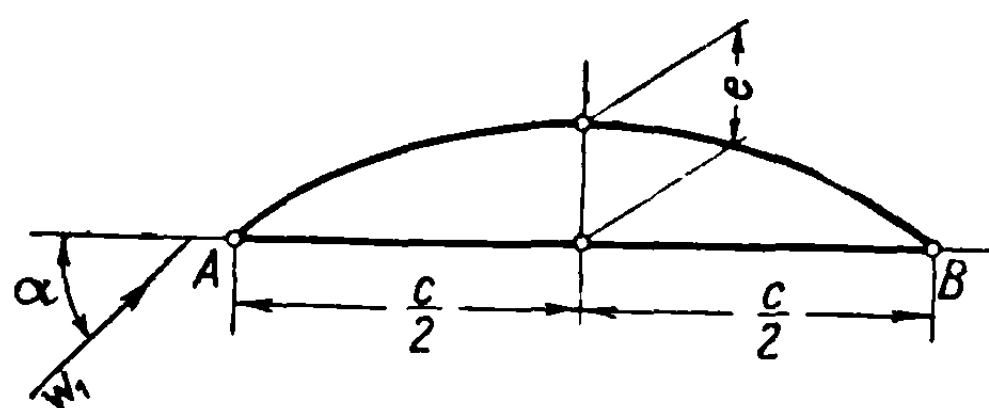
$$\alpha_0 = \frac{8}{3} \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{e}{c} \right)^2,$$

$$C_{x0} = \frac{16}{3} C_1 \left( \frac{e}{c} \right)^2,$$

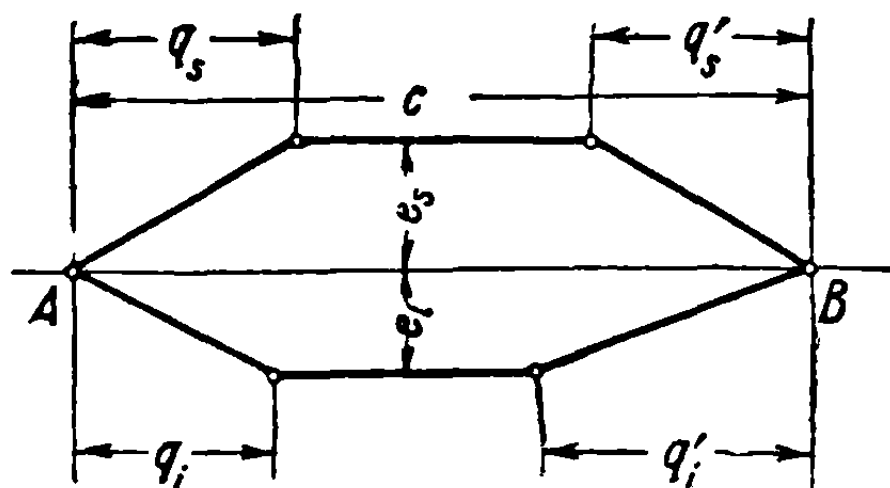
$$k = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{C_2}{C_1} \frac{e}{c} \right),$$

$$C_{m0} = -\frac{2}{3} C_1 \frac{e}{c}. \quad (18.85)$$

18.3.3. Двоякотрапециодальные профили. Применяя те же обозначения для толщин, отвечающих верхней и нижней поверхностям, обозначая через



Фиг. 18.11



Фиг. 18.12

$q_s$ ,  $q'_s$ , соответственно  $q_i$ ,  $q'_i$  длины клинообразных частей (18.12), получим:

$$\beta_s = \frac{e_s^2}{c} \left( \frac{1}{q_s} + \frac{1}{q'_s} \right), \quad \beta_i = \frac{e_i^2}{c} \left( \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q'_i} \right);$$

$$\gamma_s = \frac{e_s^3}{c} \left( \frac{1}{q_s} - \frac{1}{q'_s} \right) \left( \frac{1}{q_s} + \frac{1}{q'_s} \right), \quad \gamma_i = \frac{e_i^3}{c} \left( \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q'_i} \right) \left( \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q'_i} \right); \quad (18.86)$$

$$\nu_s = \frac{e_s^2}{c^2} \left( 1 - \frac{c}{q_s^2} \right), \quad \nu_i = \frac{e_i^2}{c^2} \left( 1 - \frac{c}{q_i^2} \right);$$

$$\sigma_s = \frac{e_s}{2c^2} (2c - q_s - q'_s), \quad \sigma_i = \frac{e_i}{2c^2} (2c - q_i - q'_i).$$

С помощью приведенных соотношений можно вычислить все характеристики профиля:  $\alpha_0$ ,  $C_{x0}$ ,  $k$ ,  $C_{m0}$  и др.; так как формулы, определяющие эти характеристики, очень длинные, не будем записывать их в явной форме.

Тем не менее, для симметричных профилей задача о минимальном лобовом сопротивлении рассматривается тем же путем, как в случае симметричного ромбовидного профиля.

Для таких профилей  $\left( q_s = q_i = q, q'_s = q'_i = q', e_s = e_i = \frac{e}{2} \right)$

$$C_{x0} = \frac{1}{2} C_1 \frac{e^2}{c} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} e \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} \right) \right]. \quad (18.87)$$

Предполагая, что сумма  $q + q'$  задана, нужно найти величину  $q$ , отвечающую минимальному  $C_{x0}$ . Полагая

$$q + q' = a, \quad q' = a - q, \quad (18.88)$$

получим

$$C_{x0} = C_1 \frac{ae^2}{2c} \left[ \frac{1}{q(a-q)} + \frac{C_2 e}{C_1 2} \frac{a-2q}{q^2(a-q)^2} \right], \quad (18.89)$$

аналогично выражению (18.61); минимальное значение определяется формулой, идентичной (18.62):

$$q \approx \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{C_2 e}{C_1 a} \right) = \frac{q+q'}{2} \left( 1 + \frac{C_2 e}{C_1 (q+q')} \right); \quad (18.90)$$

отсюда

$$(C_{x0})_{\min} \approx 2C_1 \frac{e^2}{c(q+q')} \left[ 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{e^2}{(q+q')^2} \right]. \quad (18.91)$$

Минимальное лобовое сопротивление можно рассматривать также с других точек зрения; так, вместо постоянной толщины можно рассматривать постоянный момент инерции профиля относительно хорды, определяя этим путем  $q+q'$  при минимальном сопротивлении [10].

Последний критерий применяется в целях проектирования, так как профили для сверхзвуковых скоростей не являются пустотелыми.

#### 18. 4. Экспериментальное подтверждение

Аэродинамические характеристики, полученные при помощи линейной теории, теории приближений второго порядка или точной теории, удовлетворительно подтверждаются экспериментальными данными.

Незначительные отличия, в частности, относящиеся к течению газа около задней кромки, обусловлены главным образом трением и ламинарным или турбулентным пограничным слоем, которые вызывают значительные возмущения в этом течении.

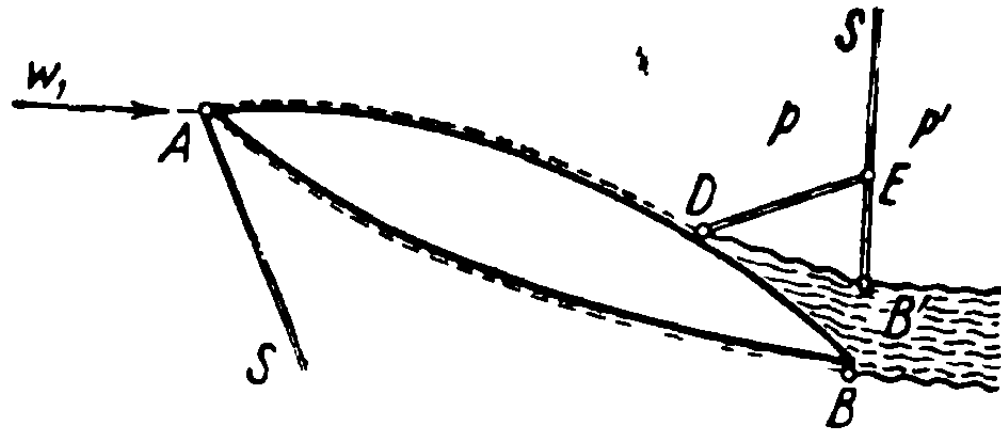
В теориях, описанных выше, жидкость предполагалась идеальной, и вязкостью, которая создает трение и вызывает возникновение пограничного слоя, считалось возможным пренебречь. Эти гипотезы пригодны для установления распределения давления по профилю и для определения подъемной силы и волнового сопротивления. Путем анализа явлений в пограничном слое можно подсчитать сопротивление трения; последнее нужно прибавить к волновому сопротивлению, чтобы получить полное сопротивление.

Развитие пограничного слоя по направлению к задней кромке вызывает изменение потенциального течения в этой области и создает упомянутые выше возмущения.

Ударная волна  $B'S$  развивается в точке  $B'$  (фиг. 18.13), как установлено ранее; давление  $p'$  ниже волны больше давления  $p$  ( $p' > p$ ) в верхнем течении.

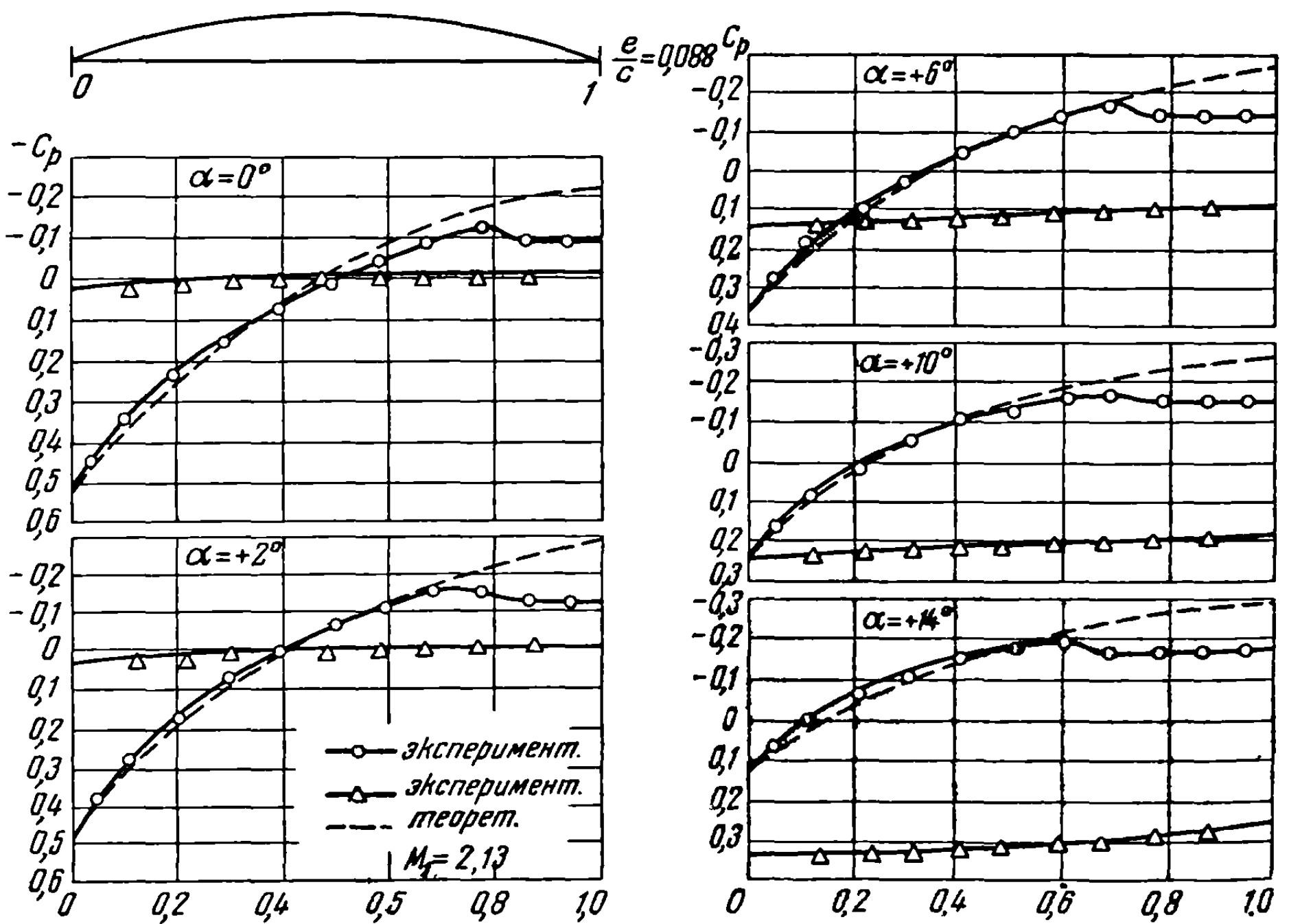
Давление  $p'$ , уменьшенное из-за наличия некоторых нерегулярных движений, передается через пограничный слой на контур, где скорости низкие (дозвуковые), и отсюда распространяется по пограничному слою в направлении к точке  $D$ . По соображениям равновесия на верхней

линии тока пограничного слоя давление должно быть таким же, и, следовательно, в области  $DB'E$  существует давление, индуцированное нижним потоком, более высокое, чем давление, соответствующее нормальному расширению, которое наблюдалось бы на этой части верхней поверх-



Фиг. 18.13

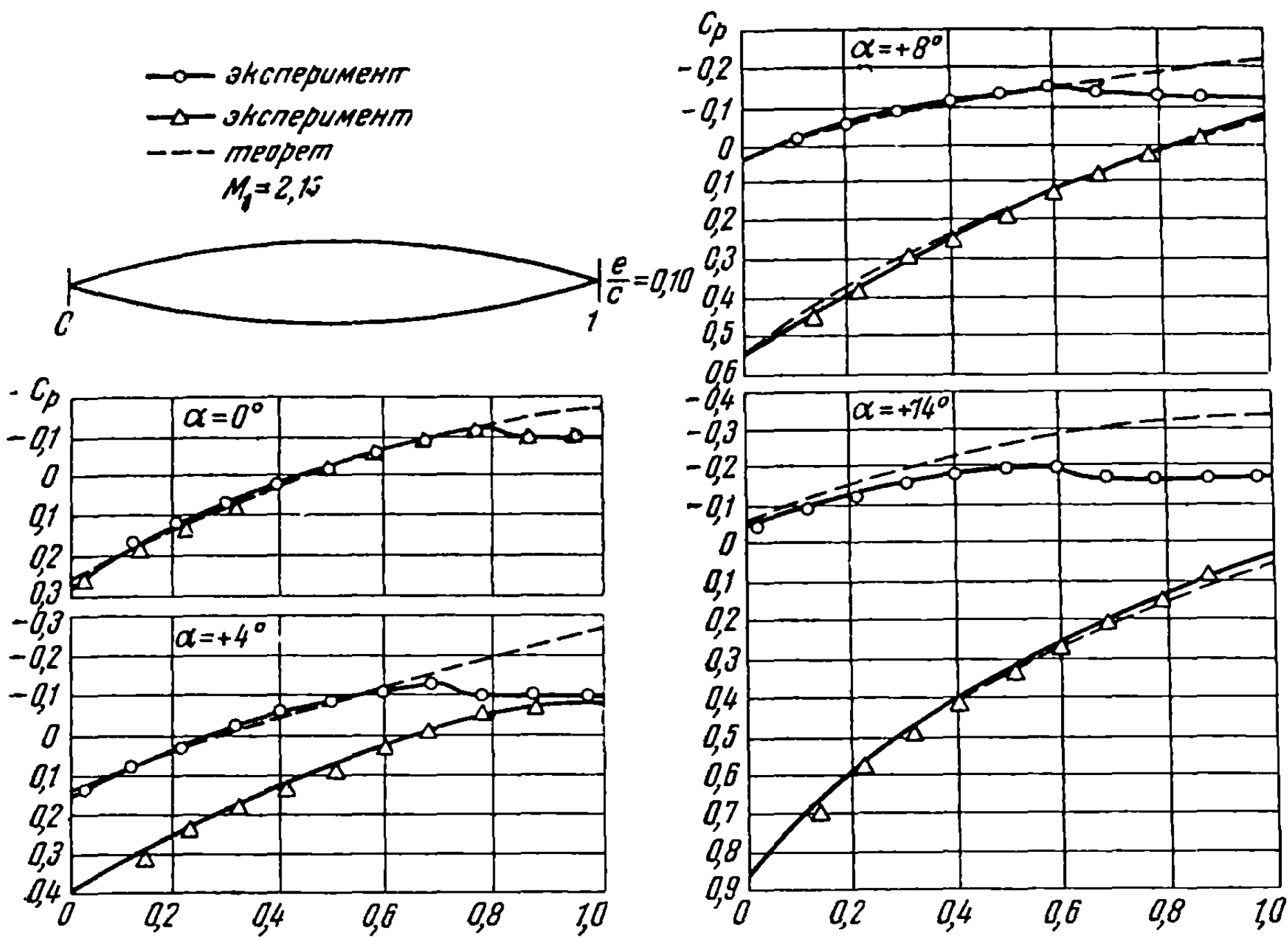
ности при отсутствии трения. Изменение давления вызывается косой ударной волной  $DE$ . В точке  $D$  пограничного слоя, где происходит внезапное изменение давления, поток отрывается и устанавливается постоянное давление, такое же как в точке  $D$  на всей этой части контура.



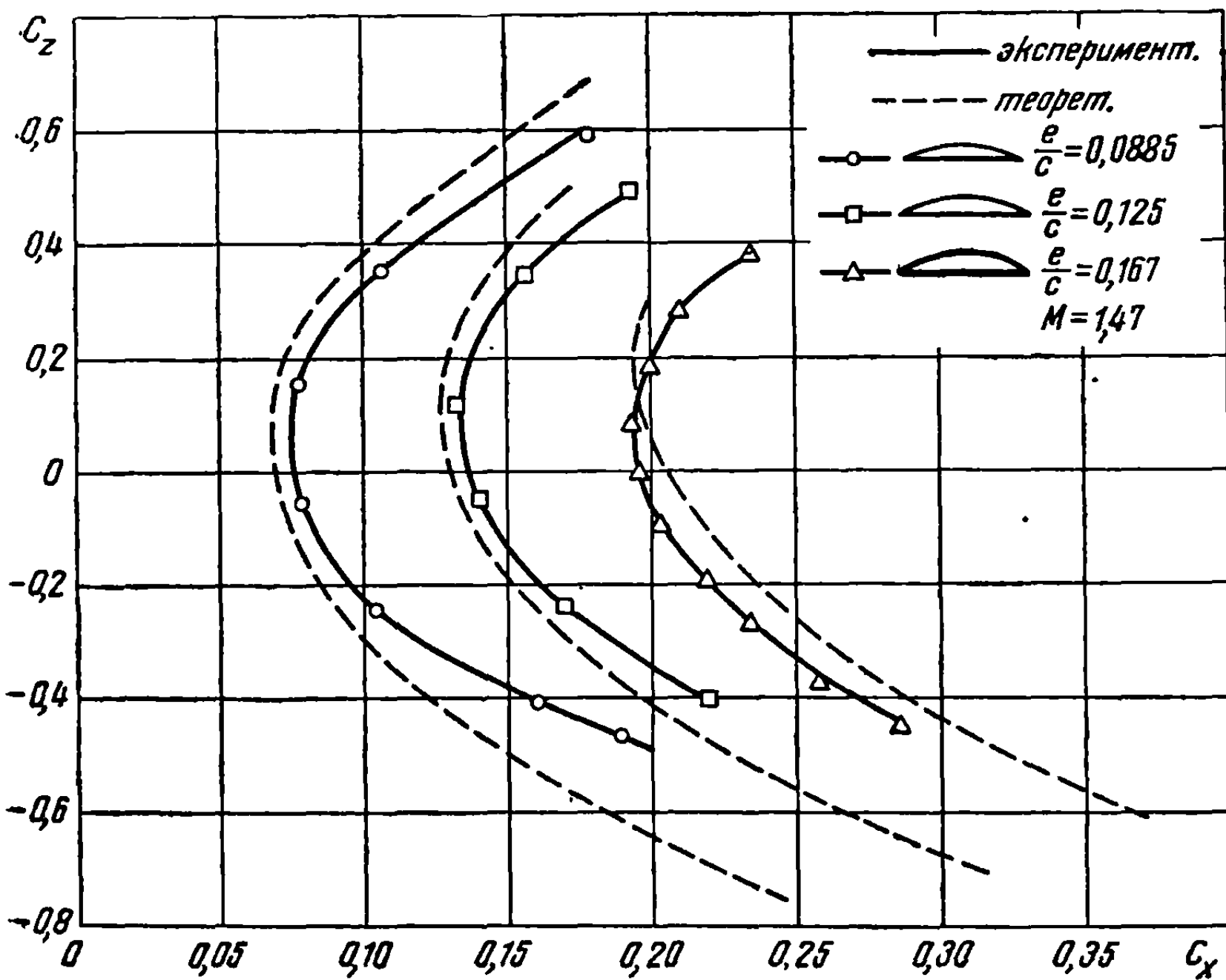
Фиг. 18.14

Хотя эти рассуждения, приведенные также при изучении околозвукового режима (см. фиг. 13.6), имеют главным образом качественный характер, тем не менее, они подтверждаются экспериментальными наблюдениями.

Это показывают кривые распределения давлений по профилям, составленным из двух дуг окружностей, полученные Ферри [11], показанные на фиг. 18.14 (плосковыпуклый профиль:  $M_1=2,13$ ;  $R=710\ 000$ ;  $\frac{e}{c}=0,088$ ) и 18.15 (симметричный двояковыпуклый профиль:  $M_1=2,13$ ;  $R=640\ 000$ ;

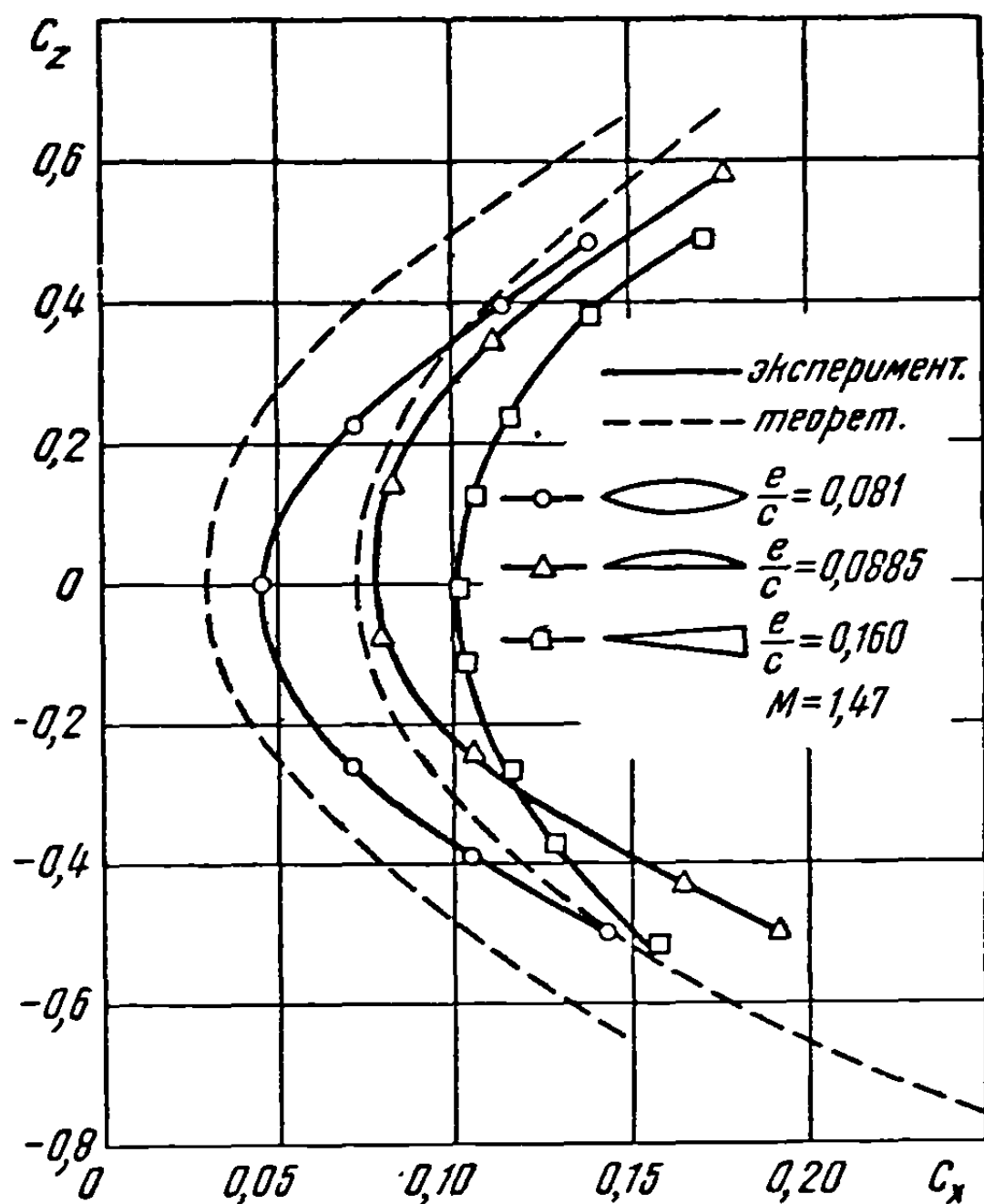


Фиг. 18.15



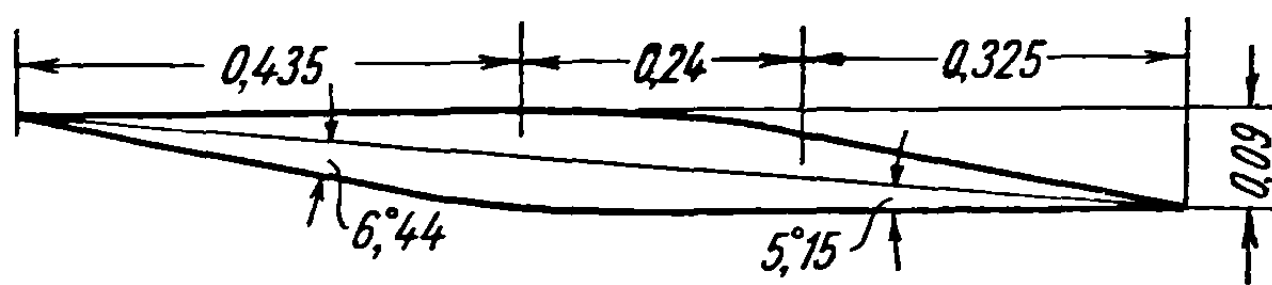
Фиг. 18.16

$\frac{e}{c} = 0,10$ ). Путем изучения теоретических и экспериментальных диаграмм распределения давления можно вывести заключение, что теория находится в согласии с экспериментальными данными, за исключением области, примыкающей к верхней поверхности вблизи задней кромки, где процесс отрыва потока создает возмущения, влияние которых обсуждалось выше.



Фиг. 18.17

Примем также во внимание поляры, полученные Буземаном [12] в Геттингене для нескольких профилей, составленных из дуг окружностей, испытанных при  $M_1 = 1,47$  (см. фиг. 18.16 и 18.17). Для этих профилей



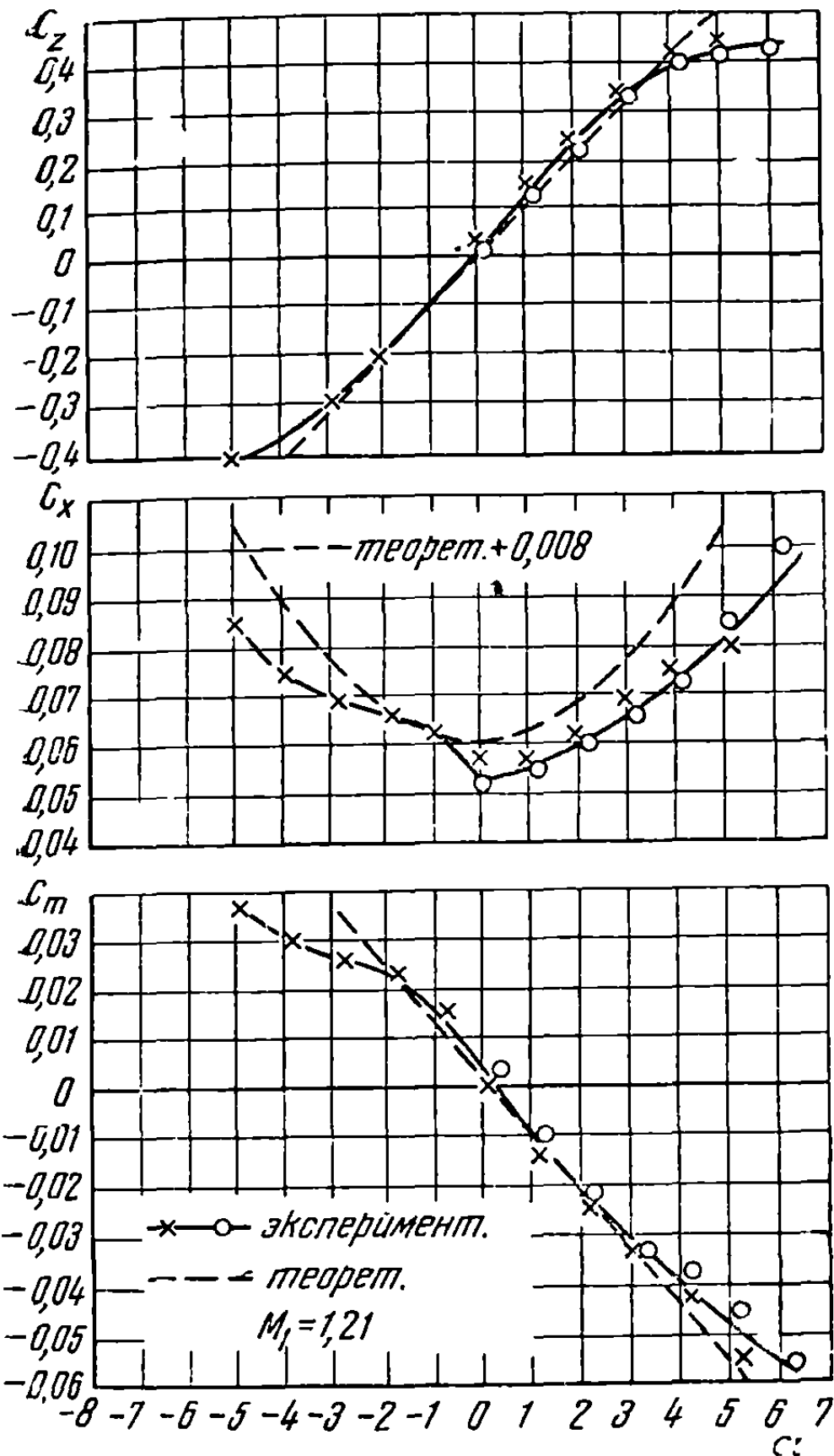
Фиг. 18.18

теоретические и экспериментальные поляры находятся в согласии, особенно если учесть, что теоретические диаграммы не включают сопротивление трения, которое должно быть прибавлено для того, чтобы получить возможность правильного сравнения теоретических и экспериментальных данных.

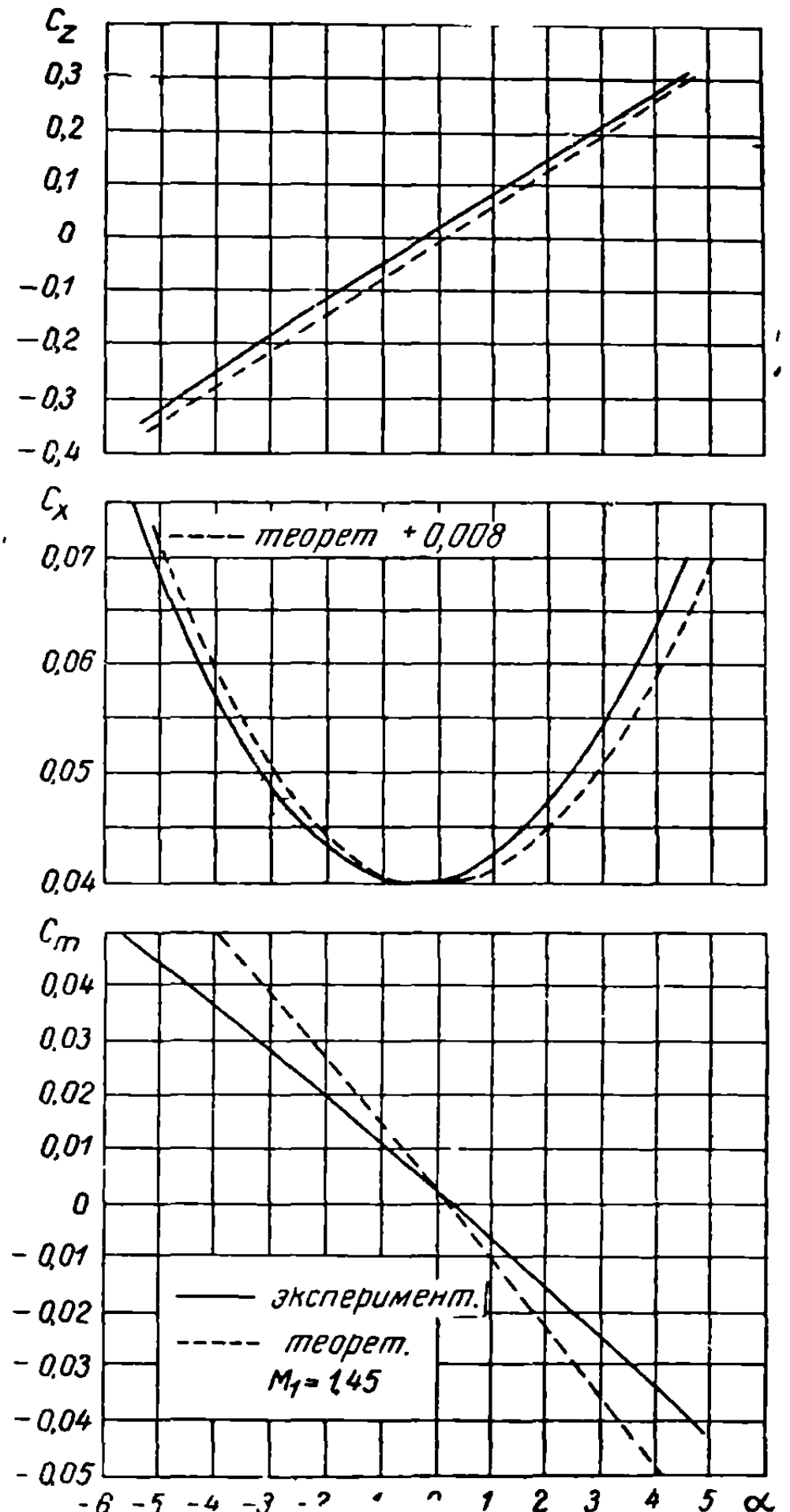
Для толстых профилей экспериментальные результаты отличаются от теоретических, особенно в отношении изменений коэффициента подъемной силы в зависимости от угла атаки.

Тем не менее, для распространенных ромбовидных профилей экспериментальные результаты, по-видимому, подтверждают во всех пунктах

теоретические предвидения, как показано опытами, проведенными Хилтоном и Пруденом [13] с двоякоклиновидным антисимметричным профилем (фиг. 18.18). Диаграммы на фиг. 18.19 относятся к значению  $M_1=1,21$ , а на фиг. 18.20 соответствуют  $M_1=1,45$ .



Фиг. 18.19



Фиг. 18.20

Последние диаграммы показывают, что экспериментальные и теоретические данные не находятся в точном согласии в отношении диаграммы моментов относительно точки, расположенной на расстоянии в одну четверть хорды от передней кромки; вероятно, это обусловлено отрывом потока.

Опыты с ромбовидными профилями, проведенные цитированными выше авторами, рассмотрены с целью дать пример перехода от дозвукового режима к сверхзвуковому. Можно утверждать, что теоретические данные правильны до появления трансзвуковых областей, при наличии которых явление расходится с принятыми гипотезами и вычисления не могут быть выполнены. С такими режимами мы уже имели дело ранее (см. раздел 13).

## 19. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК, ПРИМЕНЯЕМЫЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУМЕРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Для различных задач аэродинамики больших скоростей дифференциальные уравнения с частными производными типа (5.35а) были решены в координатах декартовых, цилиндрических (см. уравнение 5.47) или полярных (см. уравнение 5.58). При рассмотрении явлений сверхзвукового течения приближенные или точные решения уравнений приводят к особым линиям, как линии Маха или эпициклоидные кривые; эти линии обладают замечательными свойствами и называются обычно характеристиками. Наименование обусловлено аналогией с характеристическими линиями в теории уравнений с частными производными второго порядка.

В предыдущих главах мы избегали пользоваться этим выражением, чтобы не вносить путаницы между физическим значением характеристических линий, которое может быть выведено непосредственно, путем применения обычных методов, без необходимости введения математических определений, и аналитическим значением характеристических линий вообще, свойства которых играют существенную роль при интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка.

Поэтому последнюю точку зрения на характеристики считаем необходимым рассмотреть в отдельном разделе и вывести все возможные заключения, касающиеся их применения к различным исследуемым сверхзвуковым течениям. Для получения дальнейших сведений и возможности распространения метода характеристик на неустановившиеся течения отсылаем читателя к работе Куранта и Фридрикса [14].

### 19.1. Предварительные теоретические соображения

Так как двумерные безвихревые и осесимметричные течения представляют особый интерес, то будем исходить из соответствующих уравнений движения в формах (5.33б) и (5.51а) и из уравнений безвихренности:

для двумерного плоскопараллельного течения

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (19.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (19.1б)$$

для осесимметричного потока

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (19.2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (19.2б)$$

где с целью упрощения для поперечной скорости введено обозначение  $v$  (вместо обычного обозначения  $v_r$ ). Символ  $r$  сохранен для обозначения оси,



нормальной к оси симметрии, так что не будет возможности смешения со случаем плоскопараллельного течения.

Второе уравнение в каждой группе представляет условие безвихренности.

Вводя потенциал скорости  $\Phi$ , удовлетворяем уравнениям безвихренности, а два других уравнения приводятся к уравнению Монжа-Ампера (см. формулы (5.35б) и (5.51б)): для двумерного плоскопараллельного потока

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad (19.3)$$

для осесимметричного потока

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (19.4)$$

Возвращаясь к формам (19.1а, б) и (19.2а,б) этих уравнений, в которые входят частные производные компонент скорости возмущения, видим, что каждое из них может быть представлено в следующем общем виде:

$$E_1 = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial y} + C_1 = 0, \quad (19.5а)$$

$$E_2 = a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_2 = 0, \quad (19.5б)$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, C_1, C_2$  — непрерывные функции от  $x, y, u, v$  (соответственно от  $x, r, u, v$ ), как и их первых производных.

Предполагается, что приведенная выше система не сводится к одному и тому же дифференциальному уравнению и является совместной, т. е. что не выполняются одновременно равенства

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (19.6)$$

Если коэффициенты  $a_1, \dots, C_2$  являются функциями только от  $x, y$ , то уравнения будут *линейными*.

Если  $C_1$  и  $C_2$  равны нулю, то система будет *однородной*. Это условие выполняется в случае системы, представленной уравнениями (19.1а,б), коэффициенты которой являются функциями от  $u, v$ ; поэтому уравнения не будут линейными, но соответствующими преобразованиями их можно сделать линейными, так как указанные коэффициенты являются функциями только от  $u, v$ .

**19.1.1. Линеаризированные уравнения для двумерного течения.** Предположим, что решениями уравнений (19.1а, б) будут  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ ; в этом случае рассмотрим  $x$  и  $y$  как функции от  $u$  и  $v$ , применяя, следовательно, преобразование годографа; частные производные от  $u$  и  $v$  по переменным  $x$  и  $y$  преобразуем в частные производные от  $x$  и  $y$  относительно  $u$  и  $v$ . Для этой цели запишем соотношения

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \end{aligned} \quad (19.7)$$

из которых выводим  $dx$  и  $dy$ :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left( \frac{\partial v}{\partial y} du + \frac{\partial u}{\partial y} dv \right), \\ dy &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} du + \frac{\partial u}{\partial x} dv \right), \end{aligned} \quad (19.8)$$

причем через  $\mathcal{J}$  обозначается якобиан

$$\mathcal{J} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0, \quad (19.9)$$

который предполагается отличным от нуля.

Рассматривая  $x$  и  $y$  как функции от  $u$  и  $v$ , получим аналогично

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \end{aligned} \quad (19.10)$$

сравнивая с уравнениями (19.8), легко выводим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mathcal{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathcal{J} \frac{\partial x}{\partial v}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\mathcal{J} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathcal{J} \frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Записывая однородное уравнение типа (19.1а, б), коэффициенты которого будут функциями только от  $u$ ,  $v$ , в общем виде

$$E = a(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u, v) \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta(u, v) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (19.12)$$

и применяя зависимости (19.11), получим однородное линейное уравнение

$$\frac{1}{\mathcal{J}} E = a(u, v) \frac{\partial y}{\partial v} - b(u, v) \frac{\partial x}{\partial v} - \alpha(u, v) \frac{\partial y}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial x}{\partial u} = 0. \quad (19.13)$$

При таком преобразовании уравнения плоскопараллельного течения принимают вид

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\right) + \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad (19.14a)$$

Линеаризацию уравнений для плоскопараллельного течения можно также получить, применяя преобразование Лежандра, или *контактное преобразование*. Полагая

$$\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad (19.14б)$$

находим

$$F(u, v) = ux + vy - \Phi, \quad (19.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}; \quad (19.16)$$

в этом виде  $x$  и  $y$  могут заменить скорости  $u, v$  в качестве зависимых переменных, а функция  $F$  — потенциал.

Далее

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right), \quad (19.17)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right),$$

откуда

$$du = d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{1}{G} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dx - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} dy \right), \quad (19.18)$$

$$dv = d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \frac{1}{G} \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} dy \right);$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \\ & & & \\ &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \end{aligned} \quad (19.19)$$

причем через  $G$  обозначается якобиан

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right)^2. \quad (19.20)$$

Заменяя в уравнениях (19.1а, б) частные производные от  $u$  и  $v$  или в (19.3) вторые производные от  $\Phi$  их соответствующими выражениями, выведенными из формул (19.19), и применяя зависимости (19.16), получим линеаризированные уравнения (19.14).

## 19.2. Характеристические линии

Пусть  $u(x, y)$ , соответственно  $v(x, y)$ , образуют решение системы уравнений общего вида (19.5а, б); в любой точке  $P$  производная одной из этих функций в направлении элементарной дуги  $ds$ , имеющей проекции  $dx$  и  $dy$  будет

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha, \quad (19.21)$$

где  $\alpha$  — угол, образуемый дугой  $ds$  с осью абсцисс; в этом случае говорят, что функция  $u(x, y)$  продифференцирована вдоль направления, определяемого условием

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (19.22)$$

Рассмотрим линейную комбинацию вида

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (19.23)$$

ей соответствует представление о том, что функция  $u(x, y)$  продифференцирована вдоль направления

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}. \quad (19.24)$$

Рассмотрим любую кривую  $C$ , удовлетворяющую в каждой точке написанному соотношению (19.24), где  $a$  и  $b$  — переменные; тогда линейная комбинация (19.23) представляет производную функции  $u(x, y)$  вдоль кривой  $C$ .

Приведенные вычисления могут быть аналогично повторены для функции  $v(x, y)$ .

Возвратимся снова к уравнениям (19.5а, б), где коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, \beta_1, \beta_2$  переменные; замечаем, что в первом уравнении функция  $u(x, y)$  дифференцируется вдоль направления  $b_1/a_1$ , во втором — вдоль направления  $b_2/a_2$ , тогда как  $v(x, y)$  дифференцируется вдоль направления  $\beta_1/\alpha_1$  в первом уравнении и вдоль направления  $\beta_2/\alpha_2$  во втором. Все эти направления, вообще говоря, отличаются один от другого, и вопрос состоит в том, можно ли найти такую линейную комбинацию левых частей уравнений, чтобы обе функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  будут дифференцироваться вдоль одного и того же направления или, в более общем смысле, вдоль одной и той же кривой  $C$ .

Для этого каждое из записанных уравнений умножается, соответственно, на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , после чего получается новое соотношение

$$E = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \frac{\partial u}{\partial y} + (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad (19.25)$$

в котором функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  неявно дифференцируются вдоль одного и того же направления или вдоль одной и той же кривой  $C$ . Чтобы это показать, запишем равенства

$$\frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} = \frac{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2} = \frac{dy}{dx}; \quad (19.26)$$

в результате имеем систему двух уравнений,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( b_1 - a_1 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda_2 \left( b_2 - a_2 \frac{dy}{dx} \right) &= 0, \\ \lambda_1 \left( \beta_1 - \alpha_1 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda_2 \left( \beta_2 - \alpha_2 \frac{dy}{dx} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (19.27)$$

из которой должны быть определены множители  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Чтобы система (19.27) имела решения, отличные от нуля, необходимо приравнять нулю детерминант, составленный из коэффициентов при  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 \frac{dy}{dx} - b_1 & a_2 \frac{dy}{dx} - b_2 \\ a_1 \frac{dy}{dx} - \beta_1 & a_2 \frac{dy}{dx} - \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (19.28)$$

Получается уравнение второй степени относительно  $\frac{dy}{dx}$

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0, \quad (19.29)$$

где

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 - a_2 a_1, \\ 2B &= a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 + b_1 a_2 - b_2 a_1, \\ C &= b_1 \beta_2 - b_2 \beta_1. \end{aligned} \quad (19.30)$$

Решение этого уравнения будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (19.31)$$

так что существует три случая:

а) если

$$B^2 - AC < 0, \quad (19.32)$$

то корни мнимые, и, следовательно, не существует общего направления дифференцирования; в этом случае уравнения (19.5а, б) будут *эллиптического типа*:

б) если

$$B^2 - AC = 0, \quad (19.33)$$

то существует единственное направление; соответствующие уравнения будут *параболического типа*;

с) если

$$B^2 - AC > 0, \quad (19.34)$$

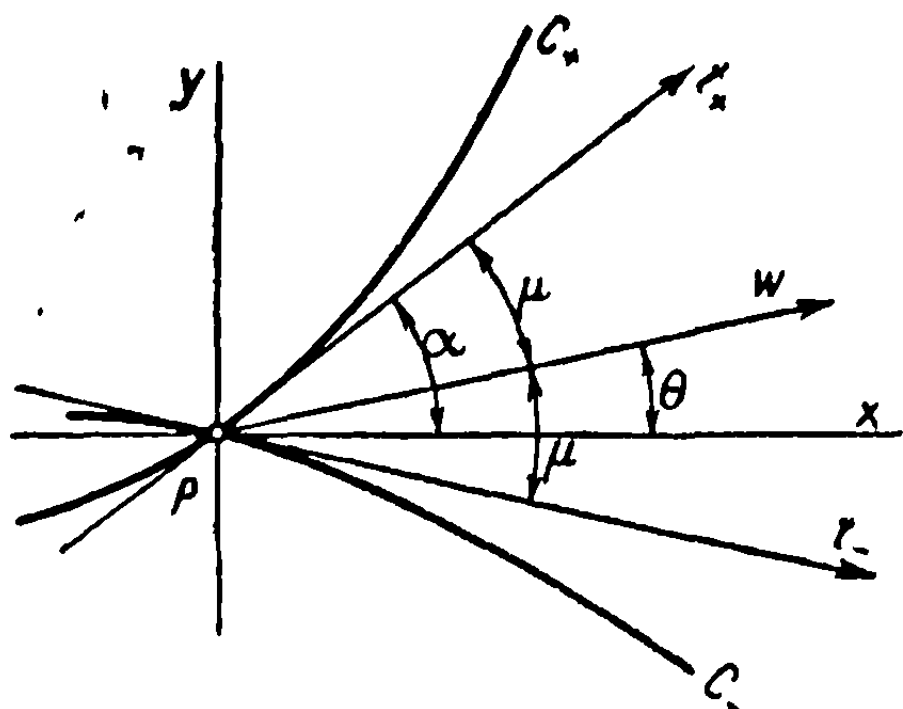
то есть два различных направления:

$$\begin{aligned} m_+ &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_+ = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \\ m_- &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_- = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \end{aligned} \quad (19.35)$$

Интегрируя последние уравнения, получим линии  $C_+$  и  $C_-$ . Они называются *характеристическими линиями*, или *характеристиками*. В этом случае

уравнения (19.5 а,б) будут *гиперболического типа* и соответствующие интегралы обладают всеми свойствами этих характеристических линий.

Следовательно, указанные линии будут замечательными при интегрировании уравнений с частными производными гиперболического типа; поэтому они



Фиг. 19.1

наносятся на плоскостях физической ( $Oxy$ ) и годографической ( $Ouv$ ). Заметим, что если разрешить уравнения (19.35), то окажется, что через каждую точку  $P$  (фиг. 19.1) проходит две характеристики; следовательно, в пространстве будет существовать два семейства характеристических кривых ( $C_+$  и  $C_-$ ).

С помощью годографического преобразования (см. формулы 19.8 и 19.11) характеристики  $C_+$ ,  $C_-$  физической плоскости отображаются на соответствующие характеристические линии  $K$  и  $K_-$  в плоскости годографа (фиг. 19.2).

Поскольку уравнения гиперболического типа относятся к сверхзвуковому течению, которое и рассматривается в этой главе, посмотрим, как вводится математическим путем понятие о характеристиках при изучении сверхзвукового потока. Эти характеристики имеют также физическое значение, которое будет рассмотрено ниже.

Рассматривая уравнения двумерного течения (19.1 а,б), отождествляя их коэффициенты с коэффициентами уравнений общего вида (15.5 а,б) и применяя затем формулы (19.30), получим

$$A = 1 - \frac{u^2}{a^2}, \quad 2B = -\frac{2uv}{a^2}, \quad C = 1 - \frac{v^2}{a^2}; \quad (19.36)$$

следовательно, дифференциальное уравнение характеристик принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-uv \pm \sqrt{u^2v^2 - (a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}{a^2 - u^2} = \frac{uv \pm a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}. \quad (19.37)$$

Обозначая через  $w$  полную скорость, видим, что условие (19.34), определяющее гиперболический характер уравнений, удовлетворяется в случае, когда

$$B^2 - AC = \frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{w^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1 > 0, \quad (19.38)$$

что можно также вывести непосредственно из подкоренного выражения в уравнении (19.37). Этот результат показывает, что соответствующие течения сверхзвуковые.

Заметим, что уравнение (19.37) не может быть проинтегрировано, так как не известна зависимость  $u$  и  $v$  от  $x$  и  $y$ .

Найдем физическое значение наклона касательной, определяемого величиной  $\frac{dy}{dx}$ , в любой точке  $P$ . При рассмотрении течения предположим, что элементарное возмущение возникает в точке  $P$ . В окрестности этой точки скорость изменяется внутри угла, образованного двумя линиями Маха,

наклоненными под углом  $\mu$  к скорости  $\omega$  в точке  $P$  с обеих сторон» (см. фиг. 19.1). Эти разделяющие направления являются линиями, вдоль которых скорость не изменяется; следовательно, они представляют характеристические линии, идентичные в точке  $P$  линиям Маха. По этой причине рассматриваемые линии называются обычно характеристиками и имеют физический смысл для сверхзвукового течения.

Значения тангенсов углов наклона касательных к обеим характеристическим кривым  $C_+$  и  $C_-$  получим из соотношений:

$$m_+ = \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \frac{uv + a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2} = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \quad (19.39)$$

$$m_- = \left(\frac{dy}{dx}\right)_- = \frac{uv - a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2} = \operatorname{tg}(\theta - \mu).$$

Рассмотрим теперь плоскость годографа, в которой переменные  $u$  и  $v$  заменяют  $x$  и  $y$  в физической плоскости. Все предыдущие соображения применимы теперь к линейным уравнениям (19.14а, б), где  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$  являются функциями от  $u$  и  $v$ . Заменяя переменные и применяя идентичным образом предшествующие рассуждения, получим, соответственно, уравнения:

$$A' \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2B' \frac{dv}{du} + C' = 0, \quad (19.40)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{B' \pm \sqrt{B'^2 - A'C'}}{A'},$$

где

$$A = -\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right), \quad 2B' = -2\frac{uv}{a^2}, \quad C' = -\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right); \quad (19.41)$$

отсюда

$$\frac{dv}{du} = \frac{-uv \pm a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{v^2 - a^2} = \frac{-(u^2 - a^2)}{uv \pm a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}. \quad (19.42)$$

Мы получили дифференциальное уравнение для характеристик  $K_+$  и  $K_-$  в плоскости годографа, представляющих преобразования соответствующих характеристик  $C_+$  и  $C_-$  в физической плоскости.

Заметим, что, в согласии с уравнением (19.37),

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_+ = \frac{-(u^2 - a^2)}{uv - a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_-} = -\frac{1}{m_-}, \quad (19.43)$$

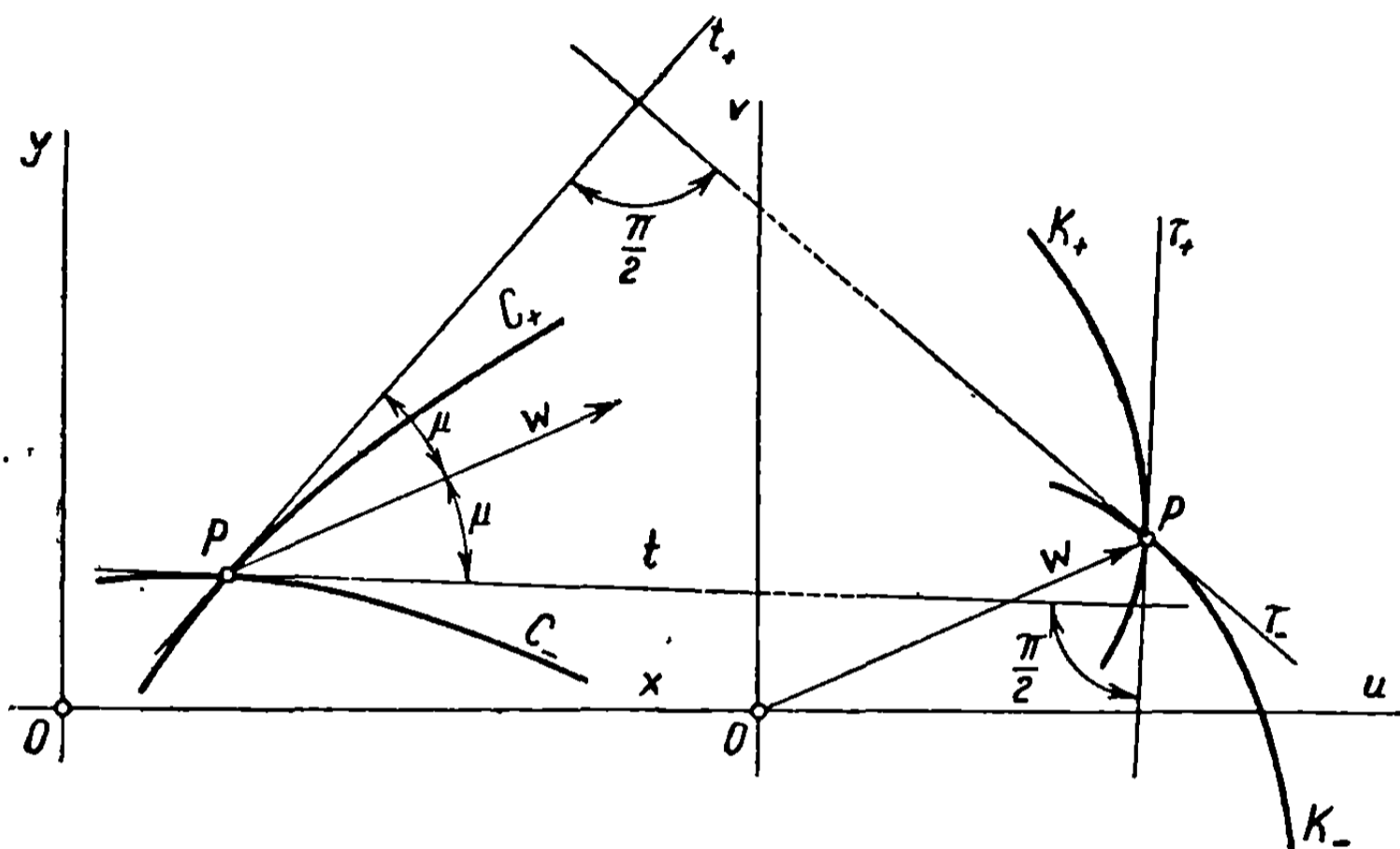
$$\left(\frac{dv}{du}\right)_- = -\frac{(u^2 - a^2)}{uv + a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_+} = -\frac{1}{m_+};$$

отсюда

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -1,$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_- \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -1. \quad (19.44)$$

Если две системы осей ( $Oxy$  в физической плоскости и  $Ouv$  в плоскости годографа) параллельны, то написанные соотношения показывают, что в точке



Фиг. 19.2

$P$  касательные к характеристикам  $C_+$  и  $C_-$  в физической плоскости соответственно нормальны к касательным к характеристикам  $K_-$  и  $K_+$  в плоскости годографа (фиг. 19.2).

**19.2.1. Интегрирование уравнения характеристик в плоскости годографа.** Дифференциальное уравнение характеристик (19.42) не зависит от  $x$  и  $y$  и может быть проинтегрировано. Заметим, что

$$u = w \cos \theta,$$

$$du = \cos \theta dw - w \sin \theta d\theta,$$

(19.45)

$$v = w \sin \theta,$$

$$dv = \sin \theta dw + w \cos \theta d\theta$$

и, в согласии с уравнениями (19.42) и (19.39),

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sin \theta dw + w \cos \theta d\theta}{\cos \theta dw - w \sin \theta d\theta} = -\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu); \quad (19.46)$$

отсюда

$$d\theta = \frac{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)}{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)} \frac{dw}{w} = \pm \operatorname{ctg} \mu \frac{dw}{w} = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dw}{w}, \quad (19.47)$$

что было установлено ранее (см. формулу 17.45).



Интегрирование этого уравнения дает кривые  $K_+$  и  $K_-$ , которые, как установлено выше (см. раздел 17.2.2.), представляют эпициклоиды; одна из кривых соответствует положительной ветви эпициклоиды, а другая — отрицательной (см. фиг. 17.5). Заметим, что рассматривается изэнтропический процесс по отношению к расширению и сжатию.

Уравнения этих эпициклоид запишем в форме, установленной ранее (см. раздел 17.2), пользуясь величинами  $M$ ,  $w$  или  $p/p_c$ ; одно из обычных выражений получается в виде уравнения (17.42)

$$\mp \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \arcsin \left[ (x-1) \frac{w^2}{c^2} - x \right] + \frac{1}{2} \arcsin \left[ (x+1) \frac{c^2}{w^2} - x \right] - K, \quad (19.48)$$

где знак минус берется для одной ветви, а плюс для другой; постоянная  $K$  зависит от начальных значений скорости и угла  $\theta$ .

Подводя итоги, можно сказать, что метод характеристик приводит к тем же результатам, которые были получены прямым путем.

**19.2.2. Практическое применение диаграммы характеристик.** Для решения некоторых задач, особенно требующих графического решения, вычертим сетку положительных и отрицательных эпициклоид при постоянных интервалах, принимая равные приращения для постоянной  $K$  и обозначая через  $K_+$  положительные ветви, а через  $K_-$  отрицательные (фиг. 19.3).

Обозначая через  $q(w)$  переменную величину, стоящую в правой части уравнения (19.48), получим:

для положительных эпициклоид

$$-\theta = q(w) - K_+, \quad (19.49)$$

для отрицательных эпициклоид

$$+\theta = q(w) - K_-; \quad (19.50)$$

отсюда имеем равенства

$$\theta = \frac{K_+ - K_-}{2},$$

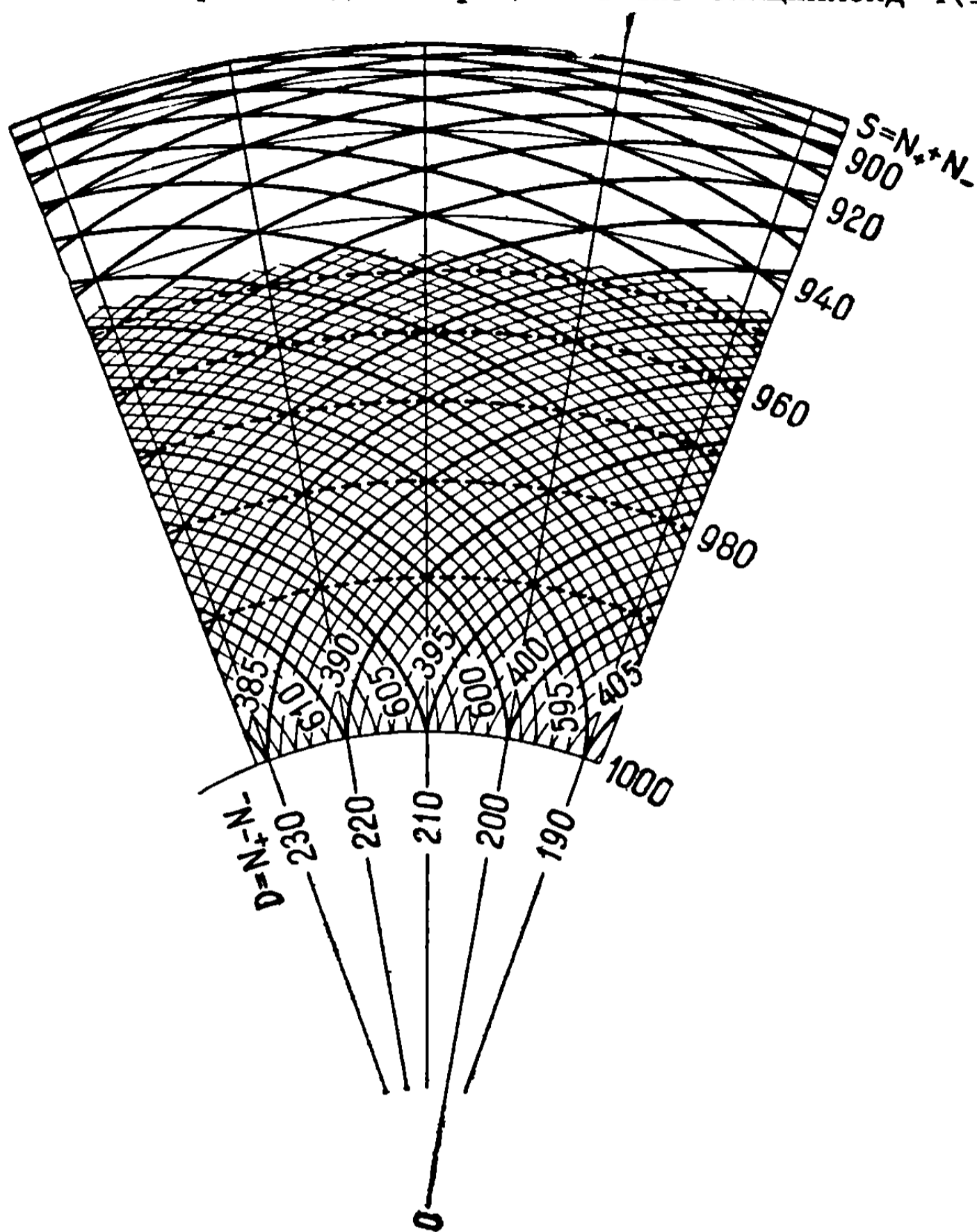
$$q(w) = \frac{K_+ + K_-}{2}, \quad (19.51)$$

которые будут служить для нахождения графического решения различных практических задач в случае двумерного течения.

Вычертим положительные и отрицательные эпициклоиды, отвечающие интервалу между ними в два градуса (или даже в один градус) (фиг. 19.3), и сопоставим каждой из них характеристические числа таким образом, чтобы разность  $D$  между числами, соответствующими положительной и отрицательной эпициклоидам, была равна отклонению скорости.

Принимая практическую систему построений Ферри [10], обозначим одну из двух эпициклоид числом  $N_+$ , другую числом  $N_-$ , начиная со значений

$N_+ = 600$  и  $N_- = 400$  при  $\theta = 0$ ; затем прибавляем или вычитаем единицу при движении вверх или вниз для положительных эпициклоид  $K_+$  и производим противоположную операцию для отрицательных эпициклоид  $K_-$ . Разность



Фиг. 19.3

между  $N_+$  и  $N_-$  при  $\theta = 0$  не обязательно должна быть равна 200, однако такое построение оказывается практически полезным при графических подсчетах, так как посредством этого исключается смещение двух сеток характеристик  $K_+$  и  $K_-$ .

На любой окружности сумма  $S$  чисел  $N_+$  и  $N_-$  постоянна и соответствует, в согласии со второй формулой (19.51), одной и той же скорости  $w$ ; поэтому на этой окружности

$$S = N_+ + N_- = \text{const},$$

$$w = \text{const}. \quad (19.52)$$

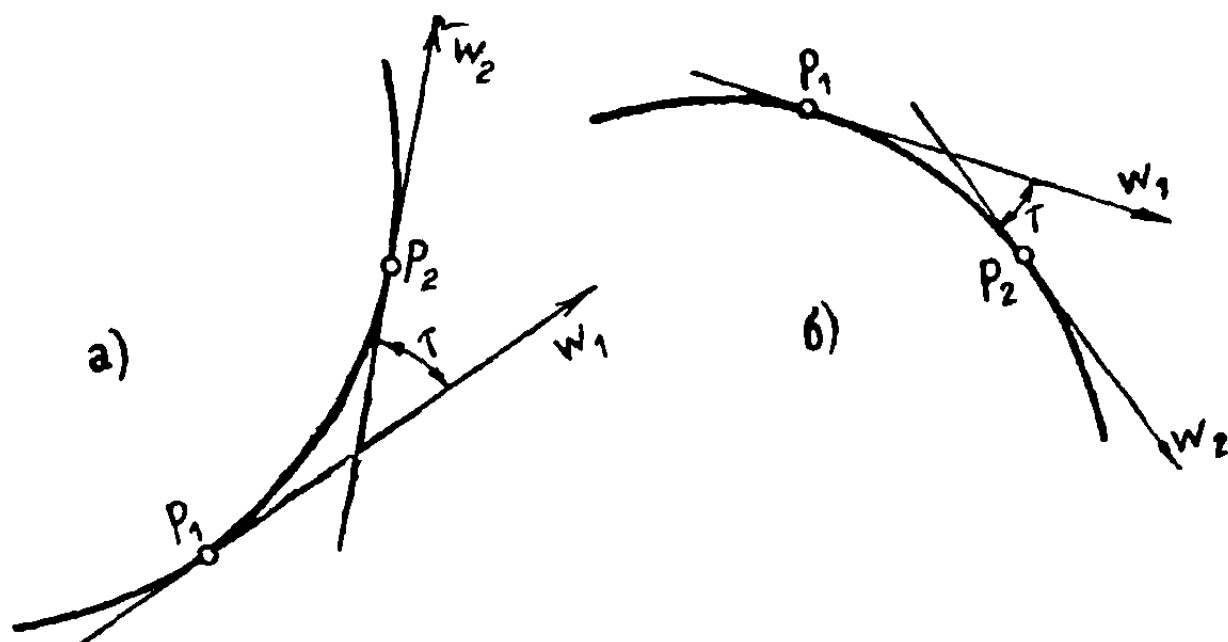
Но так как заданной скорости соответствует вполне определенный угол  $\theta$ , то на одном и том же радиусе-векторе

$$\theta = \text{const},$$

$$D = N_+ - N_- = 200 + \theta = \text{const}. \quad (19.53)$$

Значения  $S$  и  $D = 200$ , так же как  $M$ ,  $p/p_c$ ,  $\mu$ , необходимые для различных вычислений, включены в табл. 19.1. Скорость можно подсчитать по формулам, установленным выше, как функцию от  $p/p_c$ , либо как функцию  $M$ .

Дадим теперь пример применения диаграммы 19.3 и табл. 19.1. Если в некоторой точке  $P_1$  физической плоскости считать скорость  $w_1$  известной



Фиг. 19.4

то будет также известно и число  $M_1$ . Следовательно, из таблицы можно вывести значения  $S_1$ ,  $\theta_1 = D_1 - 200$ ; таким образом, найдем точку  $P_1$  в плоскости годографа как пересечение окружности  $S_1$  с радиусом-вектором  $D_1$ . Характеристические числа эпициклоид, проходящих через указанную точку, будут  $N_+ = 600$  и  $N_- = 400 - \theta_1$ . Если принять, что скорость горизонтальна, и взять горизонталь в качестве оси отсчета, то при  $D = 200$  ( $\theta = 0$ ) для той же суммы  $S_1$  через определенную таким образом точку пройдут две эпициклоиды:  $N_+ = 600 - \frac{\theta_1}{2}$  и  $N_- = 400 - \frac{\theta_1}{2}$ .

Рассмотрим другую точку  $P_2$ , где скорость  $w_2$  имеет отклонение  $\tau$  относительно  $w_1$  (фиг. 19.4,а). Это отклонение может быть обусловлено расширением, тогда  $S_2 = S_1 - \tau$  определится из таблицы, или оно может вызываться изэнтропическим сжатием, в этом случае  $S'_2 = S_1 + \tau$ .

Окружности  $S_2$  и  $S'_2$  пересекают радиус-вектор, который составляет угол  $\tau$  с горизонтальным направлением ( $D = 200 + \tau$ ). Две эпициклоиды будут характеризоваться числами  $N_+ = 600 - \frac{\theta_1}{2}$ ,  $N_- = 400 - \frac{\theta_1}{2} - \tau$  в случае разрежения и  $N_+ = 600 - \frac{\theta_1}{2} + \tau$ ,  $N_- = 400 - \frac{\theta_1}{2}$  в случае сжатия.

При расширении скорость возрастает вдоль положительной характеристики, число  $N_+$  которой остается поэтому постоянным, тогда как число  $N_-$  отрицательной характеристики уменьшается на величину  $\tau$ ; при сжатии отклонение  $\tau$  происходит в том же направлении, только если мы идем вдоль отрицательной характеристики; следовательно, число  $N_-$  остается постоянным, а  $N_+$  увеличивается на  $\tau$ .

Предполагая, что скорость  $w_2$  имеет противоположное направление и что знак отклонения будет поэтому отрицательным (фиг. 19.4,б), получим, что окружности  $S_2$  и  $S'_2$  пересекают радиус-вектор, составляющий угол  $-\tau$  с горизонтальной линией ( $D = 200 - \tau$ ). Расширение происходит только вдоль отрицательной эпициклоиды, число  $N_-$  которой остается поэтому постоянным,

Таблица 19.11

S	$\theta$	M	$\frac{p}{p_c}$	$\mu$	S	$\theta$	M	$\frac{p}{p_c}$	$\mu$
1000	0°	1,0000	1,00000	90°	946	54°	3,2263	0,03669	18° 3'
999	1	1,0813	1,90724	67°37'	945	55	3,2866	0,03375	17 43
998	2	1,1327	1,85100	61 59	944	56	3,3455	0,03103	17 24
997	3	1,1764	1,80486	58 13	943	57	3,4065	0,02843	17 4
996	4	1,2185	1,76192	55 9	942	58	3,4682	0,02605	16 45
995	5	1,2577	1,72329	52 39	941	59	3,5300	0,02382	16 27
994	6	1,2938	1,68896	50 37	940	60	3,5945	0,02175	16 9
993	7	1,3298	1,65588	48 45	939	61	3,6605	0,01984	15 51
992	8	1,3648	1,62488	47 6	938	62	3,7283	0,01838	15 33
991	9	1,4000	1,59484	45 35	937	63	3,7975	0,01643	15 16
990	10	1,4350	1,56608	44 10	936	64	3,8699	0,01489	14 58
989	11	1,4690	1,53921	42 54	935	65	3,9425	0,01350	14 42
988	12	1,5032	1,51325	41 42	934	66	4,0175	0,01223	14 25
987	13	1,5368	1,48875	40 36	933	67	4,0950	0,01103	14 8
986	14	1,5706	1,46512	39 33	932	68	4,175	0,00990	13 56
985	15	1,6046	1,44233	38 33	931	69	4,256	0,00889	13 35
984	16	1,6382	1,42075	37 37	930	70	4,340	0,00800	13 19
983	17	1,6721	1,39995	36 44	929	71	4,427	0,00720	13 3
982	18	1,7064	1,37981	35 53	928	72	4,517	0,00646	12 47
981	19	1,7408	1,36053	35 4	927	73	4,610	0,00577	12 32
980	20	1,7753	1,34210	34 16	926	74	4,704	0,00510	12 16
979	21	1,8098	1,32454	33 32	925	75	4,802	0,00450	12 1
978	22	1,8446	1,30768	32 49	924	76	4,905	0,00400	11 46
977	23	1,8796	1,29152	32 8	923	77	5,010	0,00354	11 31
976	24	1,9148	1,27610	31 29	922	78	5,119	0,00313	11 16
975	25	1,9503	1,26136	30 50	921	79	5,231	0,00277	11 1
974	26	1,9860	1,24727	30 14	920	80	5,348	0,002413	10 47
973	27	2,0235	1,23324	29 37	919	81	5,472	0,002106	10 32
972	28	2,0600	1,22034	29 2	918	82	5,599	0,001835	10 17
971	29	2,0968	1,20805	28 29	917	83	5,730	0,001598	10 3
970	30	2,1320	1,19690	27 58	916	84	5,865	0,001383	9 41
969	31	2,1726	1,18483	27 24	915	85	6,007	0,001193	9 27
968	32	2,2105	1,17430	26 54	914	86	6,152	0,001023	9 14
967	33	2,2485	1,16400	26 24	913	87	6,307	0,000879	9 1
966	34	2,2879	1,15406	25 55	912	88	6,472	0,000751	8 47
965	35	2,3290	1,14480	25 25	911	89	6,642	0,000638	8 34
964	36	2,3693	1,13582	24 58	910	90	6,821	0,000540	8 20
963	37	2,4107	1,12735	24 30	909	91	7,008	0,000455	8 7
962	38	2,4525	1,11970	24 4	908	92	7,202	0,000381	7 54
961	39	2,4946	1,11177	23 37	907	93	7,407	0,000318	7 41
960	40	2,5373	1,10454	23 12	906	94	7,622	0,000265	7 28
959	41	2,5812	1,09770	22 48	905	95	7,853	0,000220	7 15
958	42	2,6256	1,09117	22 23	904	96	8,092	0,000182	7 3
957	43	2,6712	1,08500	21 59	903	97	8,343	0,000149	6 50
956	44	2,7175	1,07917	21 36	902	98	8,616	0,0001194	6 37
955	45	2,7650	1,07359	21 13	901	99	8,902	0,0000965	6 25
954	46	2,8118	1,06848	20 50	900	100	9,210	0,0000770	6 12
953	47	2,8601	1,06363	20 28	899	101	9,535	0,0000614	5 59
952	48	2,9112	1,05895	20 5	898	102	9,881	0,0000481	5 47
951	49	2,9613	1,05466	19 44	897	103	10,260	0,0000377	5 34

$S$	$\theta$	$M$	$\frac{p}{p_c}$	$\mu$	$S$	$\theta$	$M$	$\frac{p}{p_c}$	$\mu$
950	50	3,0122	1,05065	19°23'	896	104	10,665	0,0000294	5 21
949	51	3,0650	1,04660	19 2	895	105	11,088	0,0000224	5 9
948	52	3,1188	1,04310	18 42	894	106	11,552	0,0000168	4 57
947	53	3,1735	1,03985	18 22					

<sup>1</sup>А. Ферри. Указ. соч., стр. 424.

ным, а  $N_+$  уменьшается на величину  $\tau$ ; в случае сжатия  $N_+$  остается постоянным, а  $N_-$  возрастает на  $\tau$ .

Это правило применено при решении сложных задач о двумерных течениях; некоторые из них, представляющие наибольший интерес, рассмотрены ниже.

Прежде всего нужно сделать важное замечание относительно ориентации расширения и сжатия.

Если расширение осуществляется в положительном направлении, т. е. отклонения  $\delta$  положительны, то соответствующие волны будут принадлежать к *положительному* семейству волн разрежения; если расширение происходит в противоположном направлении, т. е. отклонение  $\delta$  отрицательно, то соответствующие волны будут принадлежать к *отрицательному* семейству волн разрежения.

При сжатии явление аналогично. Ниже мы увидим, что волны разрежения и сжатия обоих семейств могут осуществляться в одно и то же время.

Сделанные замечания приведены с целью облегчить решение последующих задач.

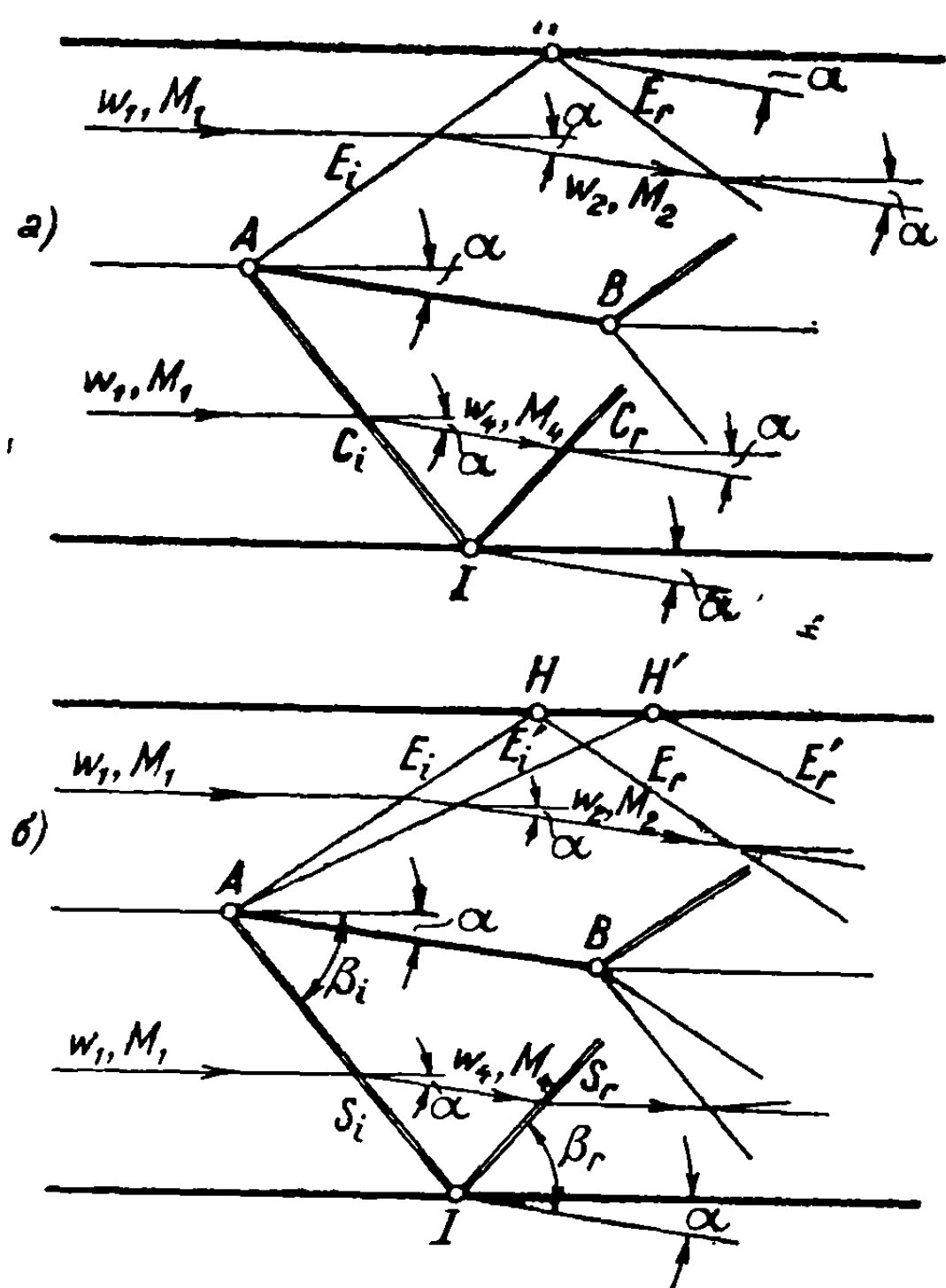
Нужно заметить, что метод характеристик не отличается существенно от прямого метода, который использует свойства эпициклоид, не прибегая к теоретическому анализу характеристик. Например, [в предшествующих разделах рассматривалась точная теория сверхзвуковых профилей, которые изучались прямым путем, что не требовало теоретического и практического рассмотрения характеристик.

Однако всякий раз, когда вычисления становятся сложными и трудоемкими, необходимо вводить систематизацию, которая может быть достигнута посредством диаграмм характеристик или при помощи табл. 19.1. Так будет в случае двумерного течения между жесткими стенками или свободными поверхностями, производящими отражение и интерференцию волн, что значительно усложняет анализ явления.]

Одной из наиболее важных задач двумерного течения будет анализ газового потока, пересекающего сетку отраженных волн и волн, возникающих в результате интерференции. Так как явления отражения и интерференции весьма сложны, то будут применяться упрощенные геометрические построения, которые позволят с помощью диаграмм характеристик или соответствующих таблиц легче подойти к изучению течений, возмущенных указанными явлениями.

### 19. 3. Волны, отраженные твердыми стенками или свободными поверхностями

Рассмотрим общий случай двумерного крыла, помещенного в двумерную сверхзвуковую аэродинамическую трубу, ограниченную двумя твердыми стенками.



Фиг. 19.5

Волны разрежения  $E_r$  (соответственно  $E'_r$ ) на верхней стороне и ударная волна  $S_r$  (соответственно  $C_r$ ) на нижней стороне, исходящие от передней кромки, пересекают соответствующие стенки в точках  $H$  (соответственно  $H'$ ) и  $I$  (фиг. 19.5). Эти волны называются *падающими волнами*. Если угол атаки крыла  $\alpha$  будет мал, то процесс может рассматриваться как изэнтропический, и ударная волна становится простой волной сжатия  $C_i$ ; с другой стороны, волна разрежения может также предполагаться сконцентрированной в простой волне Маха, так что структура явления соответствует фигуре 19.5а.

За падающими волнами поток изменяет направление и величину скорости, в согласии с формулой эпициклоиды или с приближенной формулой вида (19.47), применяемой к малым, но конечным приращениям:

для верхней области

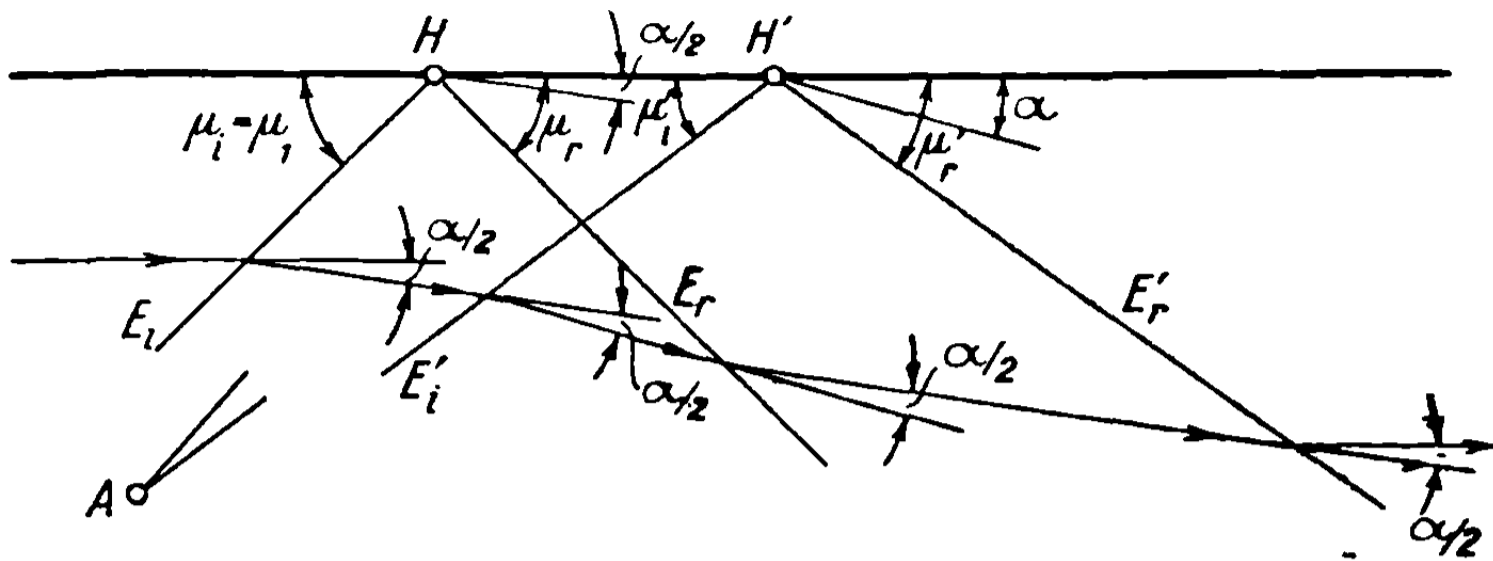
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad (19.54)$$

для нижней

$$\frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_1} = - \frac{\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \quad (19.55)$$

В точках падения  $H$  и  $I$  поток, получивший новое направление, встречает прямолинейные стенки аэродинамической трубы под углом  $\alpha$ ; для того чтобы течение продолжалось *невозмущенным*, необходимо, чтобы стенки поворачивались на такой же угол, но этого не происходит. Поэтому в точке  $H$  на верхней стороне появляется новое расширение, с тем же углом  $\alpha$ , но принадлежащее к *противоположному* семейству относительно первого семейства волн разрежения, а в точке  $I$  — эквивалентное сжатие, принадлежащее к *противоположному* семейству относительно первого семейства сжатия. Эти волны  $E_r$  и  $C_r$  являются соответственно *отраженными волнами разрежения и сжатия*.

Если угол  $\alpha$  велик, то волны разрежения распространяются веерообразно, пересечение с твердой стенкой будет происходить вдоль всей ее части  $NN'$ , и отраженные волны также покрывают площадь, содержащуюся между прямыми линиями  $E_r$  и  $E'_r$  (фиг. 19.5,б). Падающая ударная волна  $S_i$  подчиняется закону Гюгонио — Ренкина и пересекает нижнюю стенку в точке  $I$ ,



Фиг. 19.6

после которой появляется отраженная ударная волна  $S_r$  противоположного семейства, подчиняющаяся тому же закону. Угол  $\beta_i$ , образованный волной  $S_i$  с начальным направлением, может быть получен из таблиц, из ударной поляры или из формулы (7.50), которая в этом случае имеет вид

$$\operatorname{ctg} \alpha = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta_i - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta_i. \quad (19.56)$$

Для отраженной волны  $S_r$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_4^2}{M_4^2 \sin^2 \beta_r - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta_r, \quad (19.57)$$

причем, применяя формулу (7.44) можно вывести зависимость между  $M_4$  и  $M_1$ :

$$\left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta_i} \right) \left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_4^2 \sin^2 (\beta_i - \alpha)} \right) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2. \quad (19.58)$$

Условия на отраженной волне, таким образом, полностью определены, и изменение потока во всей нижней части течения может быть получено путем применения обычных формул, ударных поляр или соответствующих таблиц.

Волны разрежения непрерывны в секторе  $ANN'$ , а также внутри площади, между  $E_r$ ,  $E'_r$ , покрываемой отраженными волнами. Чтобы упростить вычисление, предположим, что угол  $\alpha$  разделен на несколько равных частей и что расширение происходит в каждом из этих отдельных секторов, имеющих волны, сконцентрированные в единственной волне Маха.

Применяя указанный процесс к случаю, представленному на фиг. 19.5б, предположим, что отклонение потока при прохождении волны  $E_i$  будет равно  $\frac{\alpha}{2}$  и что при переходе через  $E'_i$  расширение завершается путем прибавления нового отклонения на угол  $\frac{\alpha}{2}$  (фиг. 19.6). Отраженные волны  $E_r$  и  $E'_r$

восстанавливают первоначальное направление потока, создавая новое расширение с отклонениями в противоположную сторону, равными  $\frac{\alpha}{2}$ . Закон, управляющий изменением скоростей, как и углами Маха, определяется с помощью диаграмм характеристик, что в особенности имеет значение, когда рассматриваемые волны интерферируют, и вычисления могут иначе стать очень сложными.

Рассмотрим теперь случай свободных границ (фиг. 19.7). Предположим, что поток  $w_1$ , протекающий между двумя параллельными стенками, встречает в точке  $A$  газ, находящийся в состоянии покоя, при давлении  $p_a \neq p_1$ . Поверхность раздела может существовать только в случае, если давление будет одинаковым на обеих сторонах, т. е. если  $p_2 = p_a$ , что обуславливает возникновение скорости  $w_2$ , соответствующей внешнему давлению.

Отсюда легко вытекают следующие явления. Если  $p_a > p_1$ ,  $w_2 < w_1$ , то появляется ударная волна  $AB$ , отражающаяся в точке  $B$  вследствие существования твердой стенки, как в предшествующем случае, и встречающаяся снова свободную границу в точке  $C$  (см. фиг. 19.7,а). В то время, как за отраженной волной  $BC$   $w_3 < w_2$ , в области  $CE$  будет  $w_4 > w_3$ ; если пренебречь потерей напора, то  $w_2 \approx w_4$ . Таким образом, появляется расширение в точке  $C$ , причем волны  $CD$  и  $CD'$  будут принадлежать тому же семейству, что и волна сжатия  $BC$ . Далее появляются отраженные волны разрежения  $DE$  и  $D'E'$  противоположного семейства, после чего возникают волны сжатия в точках  $E$  и  $E'$ , и т. д.

Для определения условий течения можно применить таблицы, ударную поляру или обычные формулы. Так, для вычисления  $M_2$  за ударной волной  $AB$  применяем последовательно формулы (7.43), (7.50) и (7.44); из первого уравнения

$$\frac{p_a - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (19.59)$$

получаем  $\beta$ , из второго

$$\operatorname{ctg} \tau = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta \quad (19.60)$$

получаем  $\tau$  и из последнего

$$\left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right) \left( \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{1}{M_2^2 \sin^2 (\beta - \tau)} \right) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2 \quad (19.61)$$

получаем  $M_2$ .

Вычисление продолжается обычным путем вплоть до появления волн интерференции, которые будут изучены позже.

Если  $p_a < p_1$ , скорость  $w_2$  будет больше  $w_1$  ( $w_2 > w_1$ ); в точке  $A$  возникнет разрежение и волны  $AB$  и  $AB'$  отразятся в точках  $B$  и  $B'$ . Отраженные волны разрежения встретят свободную границу в  $C$  и  $C'$ . В этих точках появятся отраженные волны сжатия, так как  $w_4 = w_2 < w_3$ . Волны  $CD$  и  $C'D'$  отразятся снова, и новые отраженные волны сжатия  $DE$  и  $D'E'$ , противоположного семейства по отношению к первому, встретятся на сво-



бодной границе в точке  $E$ ; далее процесс продолжается в согласии с тем же правилом.

Для определения условий течения могут быть использованы табл. 19.1, или диаграмма характеристик, или применена формула (17.41), приводящая к следующему результату:

$$\begin{aligned} \tau = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \left\{ \arccos \left[ \left( x+1 \right) \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right] - \right. \\ & \left. - \arccos \left[ \left( x+1 \right) \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \arccos \frac{x \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1}{1 - \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}}} + \frac{1}{2} \arccos \frac{x \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} - 1}{1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}}} . \end{aligned} \quad (19.62)$$

Дальнейшие вычисления легко выполняются путем использования таблицы характеристик или применением уравнения Бернулли (5.1) для определения скорости  $\omega_2$  и формулы (5.14) для определения  $M_2$ .

В связи с вопросом о волнах, отраженных от жидких стенок, отметим, что если волна разрежения или сжатия пересекает ударную волну, то в точке пересечения появляется отраженная волна очень малой интенсивности, обусловленная тем, что явление не будет изэнтропическим. Так как указанный эффект чрезвычайно мал, то этими отраженными волнами можно пренебречь.

#### 19.4. Волны интерференции

Когда две волны — разрежения и сжатия — пересекаются, они оказывают взаимное влияние друг на друга и их взаимодействие видоизменяет течение газа. В таком случае говорят, что волны интерферируют, и образующиеся за точкой пересечения волны называются *волнами интерференции*.

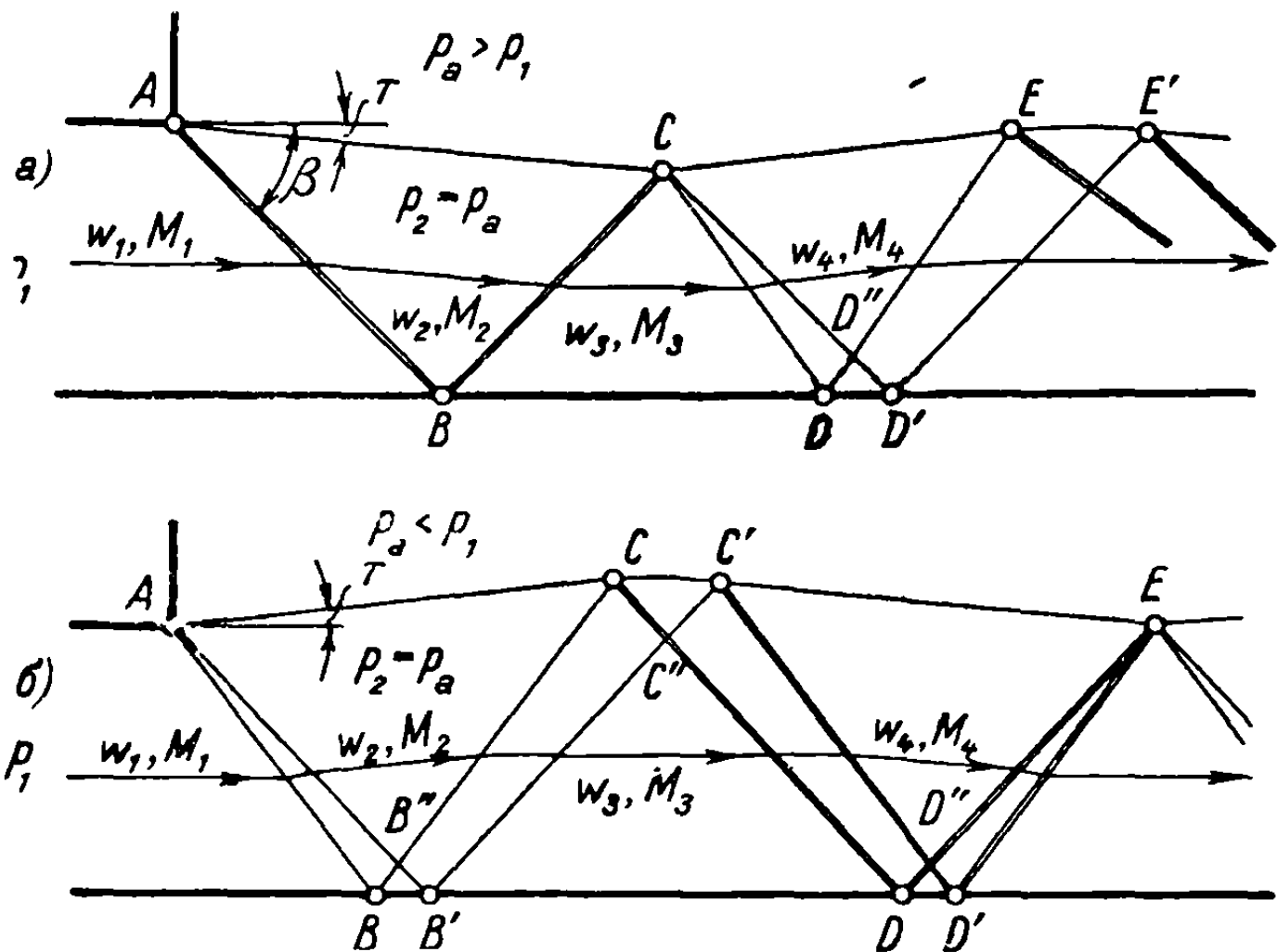
Примеры волн интерференции уже даны в схематических представлениях, относящихся к отраженным волнам. Так, на фиг. 19.5 и 19.6 можно видеть волны разрежения, интерферирующие друг с другом или с волнами сжатия.

Вообразим, кроме того, двумерную *струи*, проникающую в камеру, где давление  $p_a$  отличается от давления в струе ( $p_a \neq p_1$ ); тогда возникает такой процесс, как если бы к картине течения, изображенной на фиг. 19.7, были добавлены линии, симметричные относительно горизонтальной оси. Концентрируя веероподобные волны разрежения на единственной линии, получим систему фиг. 19.8, где интерферируют волны разрежения и сжатия, причем точки пересечения их лежат на оси струи. Хотя можно привести много таких примеров, рассмотрим только наиболее специфические случаи, встречающиеся наиболее часто.

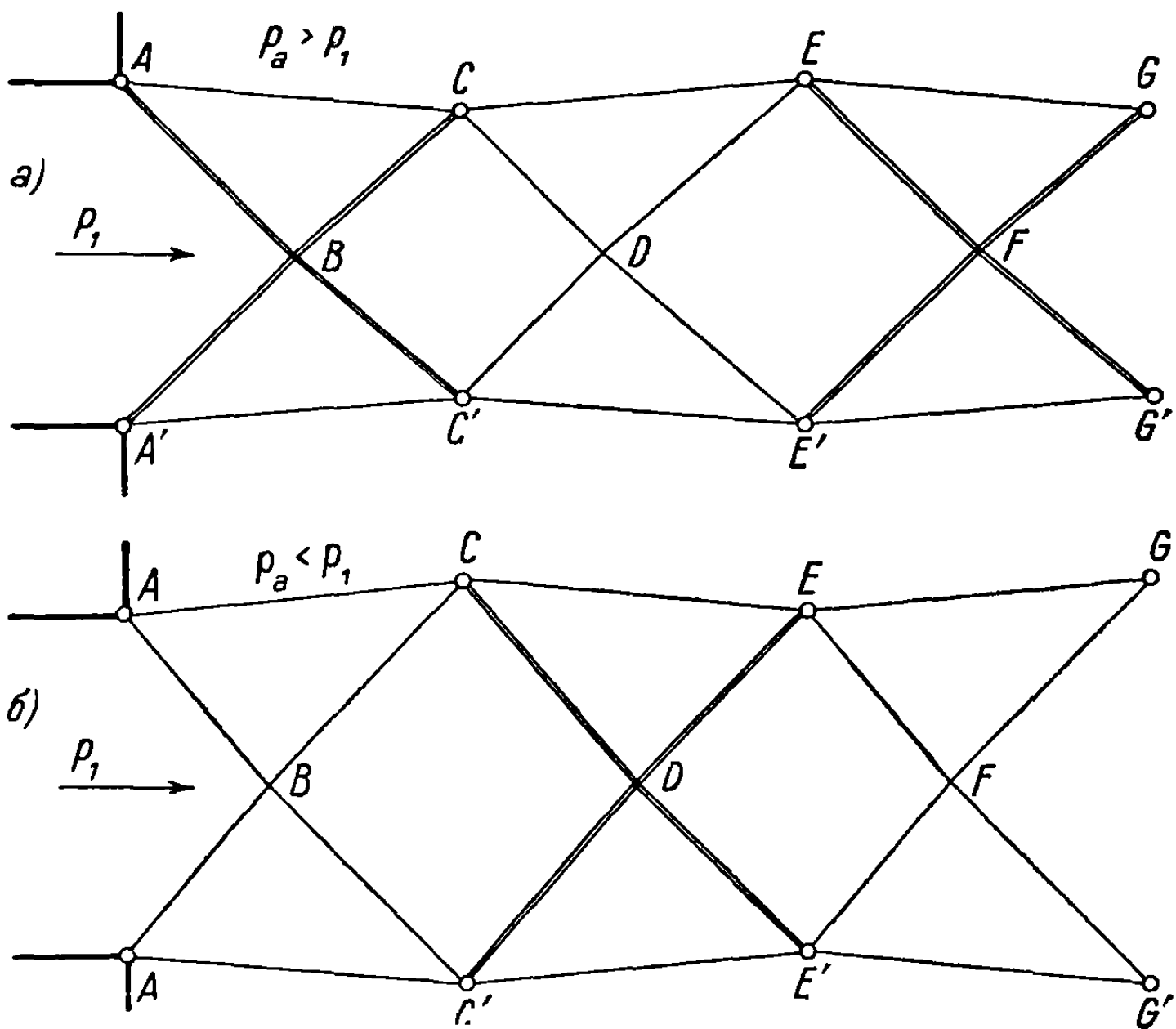
Нужно отметить, что если волны разрежения принадлежат к одному и тому же семейству, то они не интерферируют, так как распространяются

веерообразно. Чтобы интерферировать, волны разрежения должны принадлежать к противоположным семействам (фиг. 19.6 и 19.8).

Изучим некоторые частные случаи, когда отклонения при расширении и сжатии будут, по предположению, настолько малы, чтобы можно было,



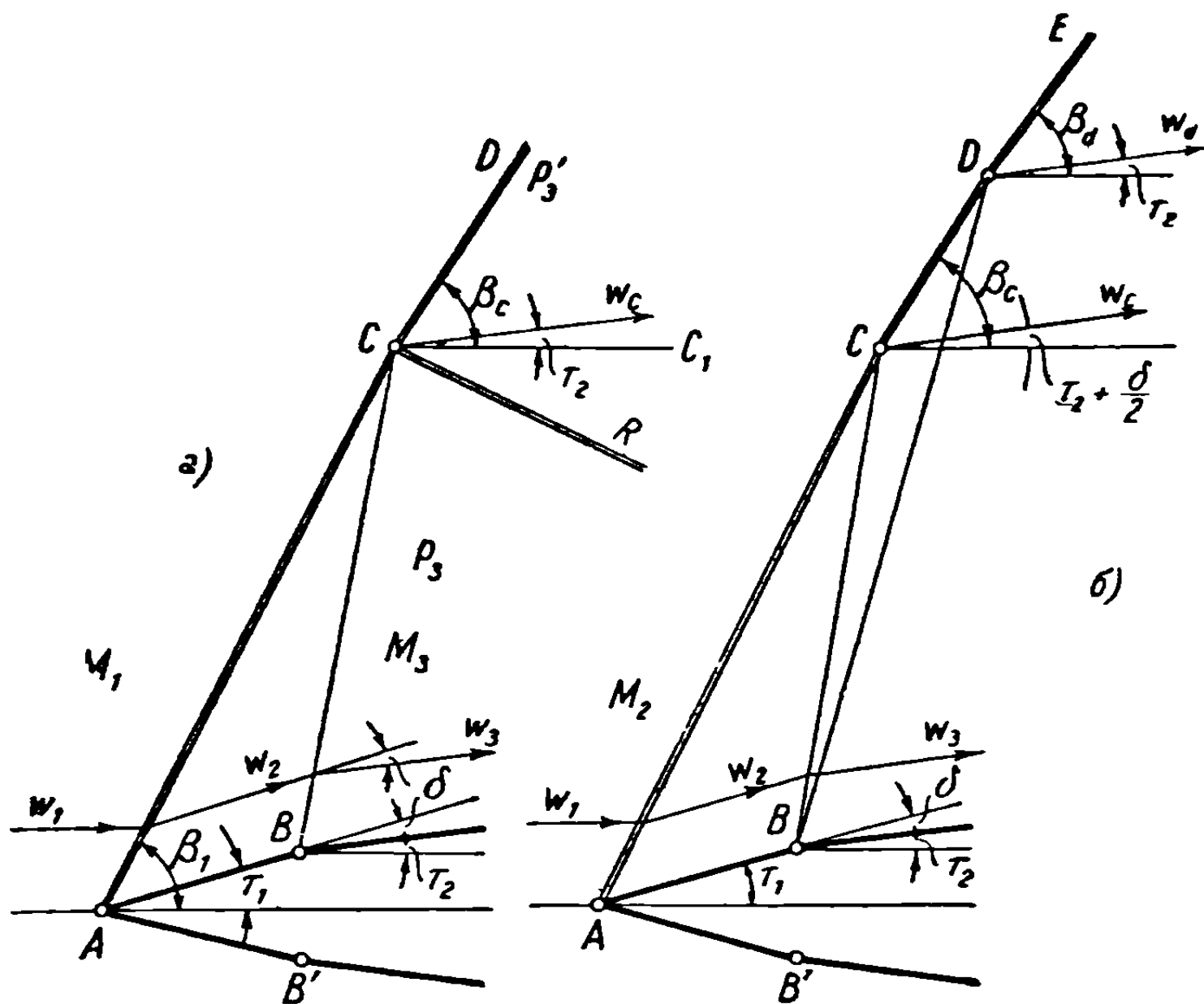
Фиг. 19.7



Фиг. 19.8

с одной стороны, представить волны разрежения посредством единственной средней линии и с другой — рассматривать процесс сжатия как изэнтропический, следовательно, допустить применение теории характеристик. Отклонения можно также разделить на достаточно малые части, что сделает допустимыми рассмотрение, подобные приведенным выше, если их применять к каждой из этих частей.

19. 4.1. Интерференция ударных волн и волн разрежения. Предположим, что ударная волна  $AC$  отходит от точки заострения двумерного препятствия (фиг. 19.9). Волна полностью определяется через угол  $\tau_1$  при вершине, предполагаемый постоянным вдоль всей длины  $AB$  контура. В точке  $B$  линия



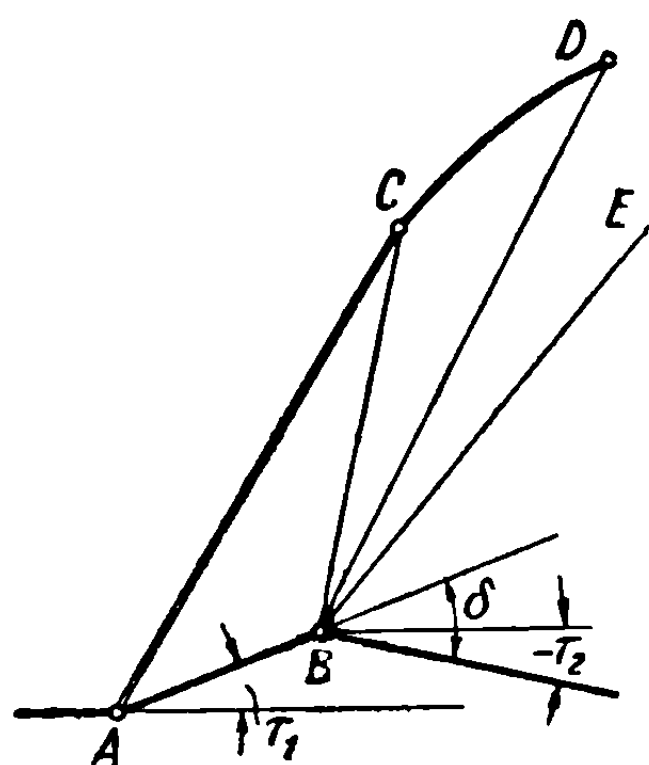
Фиг. 19.9

контура образует угол  $\tau_2$  с горизонталью; таким образом, она отклоняется на угол  $\tau_2 - \tau_1' = -\delta$  относительно  $AB$ , что приводит к возникновению волны разрежения  $BC$ . Если угол  $\delta$  мал, то можно рассматривать единственную линию разрежения (см. фиг. 19.9, а) в согласии с предшествующими утверждениями. Если угол  $\delta$  велик, то он может быть разделен на несколько равных частей, например, на две части, производящие две волны, каждая из которых создает отклонение, равное  $\delta/2$  (см. фиг. 19.9, б).

С целью упрощения рассмотрим единственную линию  $BC$ , так как можно применять те же рассуждения для любой другой линии  $BD$ .

В треугольнике  $ABC$  скорость  $w_2$  постоянна, параллельна линии  $AB$  и может быть легко выведена из формул для косых ударных волн. После разрежения за линией  $BC$  скорость  $w_3$  отклоняется на угол  $-\delta$  относительно  $w_2$  и ее величина получается из формулы для характеристик. Скорость  $w_C$  в точке  $C$  параллельна  $w_3$ , которая отклонена на угол  $\tau_2 < \tau_1$  относительно  $w_1$ . Следовательно, ударная волна  $CD$  будет меньшей интенсивности, чем  $AC$ , и ее наклон  $\beta_C$ , который легко подсчитать, если известен угол  $\tau_2$ , будет также меньше. Вследствие потери напора при переходе через ударные волны  $AC$  и  $CD$ , имеющие различную интенсивность, давление  $p'_3$  будет отличаться от  $p_3$ , что вызовет образование отраженной волны  $CR$  в точке  $C$ , осуществляющей переход от  $p_3$  к  $p'_3$ . Различие между указанными давлениями

будет очень мало, так как каждое из них мало отличается от соответствующего давления при изэнтропическом процессе; следовательно, отраженная волна будет также очень малой интенсивности, и поэтому ею можно пренебречь, предполагая с самого начала, что скорость  $w_c$  параллельна  $w_3$ .



Фиг. 19.10

Заметим, однако, что  $w_c \neq w_3$ , так как первая скорость устанавливается, по сравнению со второй скоростью, после более слабой ударной волны, и вследствие этого неравенства возникает разрыв скоростей вдоль линии тока, проходящей через точку  $C$ , вызывающий появление вихревой пелены, параллельной этой линии. Увеличение энтропии будет также различным по обеим сторонам линии разрыва, следовательно, эти рассуждения показывают, что один и тот же потенциал скорости не может существовать за линией  $ACD$ . Сделанное заключение находится в согласии с общей зависимостью (3.70).

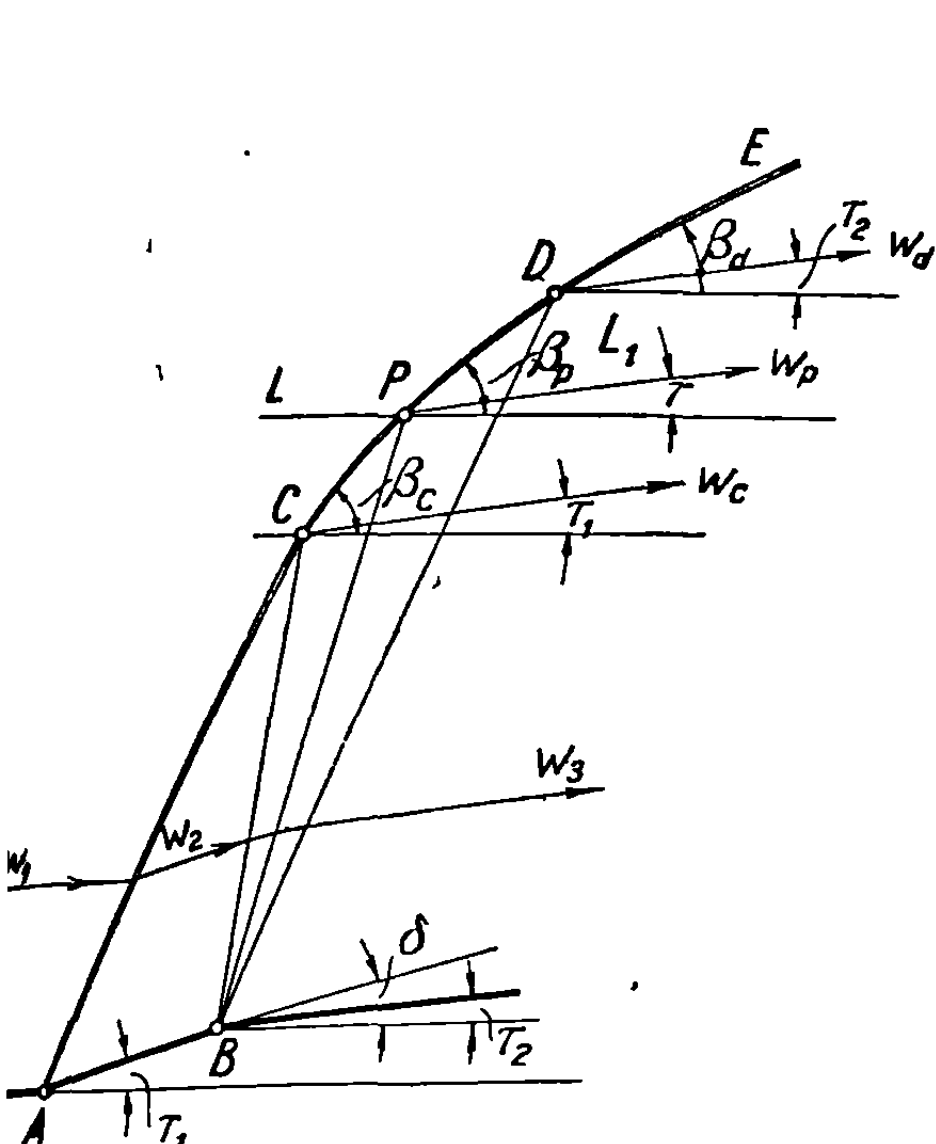
Поток восстанавливает свое начальное направление непосредственно за волной разрежения  $BC$ , когда  $\tau_2 = 0$  ( $\delta = -\tau_1$ ). Если пренебрегать потерей напора при переходе через ударную волну  $AC$  и пренебрегать также отраженной волной  $CR$  малой интенсивности, то ударная волна  $CD$  исчезнет, и скорость возвратится к своему начальному значению  $w_1$  и начальному направлению. Вихревая пелена, параллельная этому направлению, предполагаемому горизонтальным, производит переход от области за волной разрежения  $BC$ , где энтропия возросла благодаря ударной волне  $AC$ , к области выше горизонтали  $CC_1$ , где энтропия осталась постоянной. Вследствие потери напора при переходе через ударную волну необходимо иметь отклонение  $|\delta| > \tau_1$  для того, чтобы погасить ударную волну  $CD$ ; тогда течение восстанавливает свое начальное направление за отраженной волной  $CR$ , которой ради упрощения часто пренебрегают.

Когда  $|\delta| > \tau_1$ , за характеристикой  $BD$ , которая гасит интенсивность ударной волны, процесс принимает нормальный характер свободного расширения (фиг. 19.10).

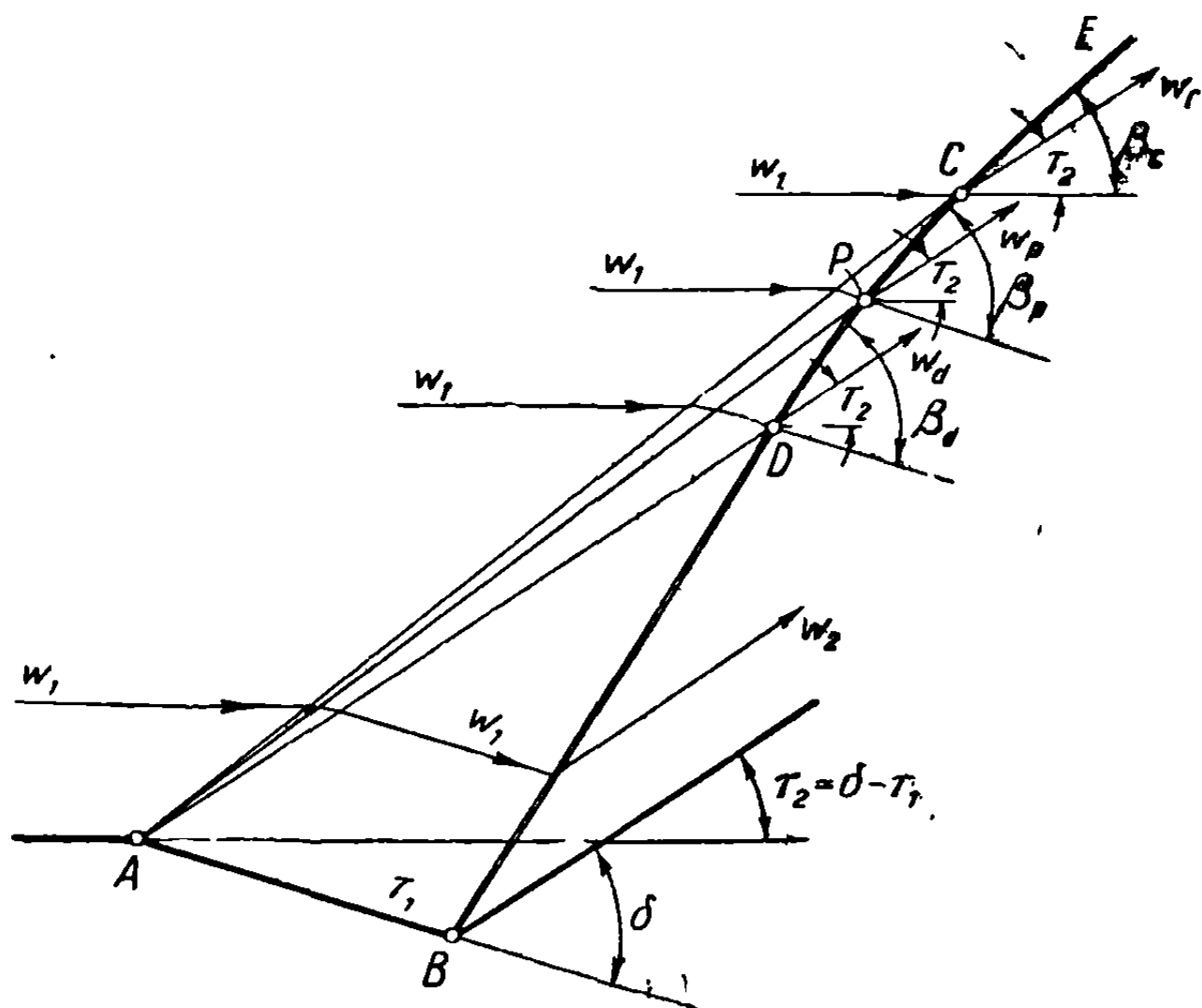
Если предположить, что отклонение  $\delta$  будет достаточно большим, то волны разрежения распространятся по значительному сектору. Расширение можно разделить тогда на несколько частей, например, на две, первая из которых представлена линией  $BC$ , соответствующей отклонению  $1/2\delta$ , а вторая линией  $BD$ , с тем же отклонением, выводимым из теории характеристик (см. фиг. 19.9б). При помощи аналогичных рассуждений получаем скорости  $w_c$  и  $w_d$ , составляющие соответственно углы  $\tau_2 + \frac{1}{2}\delta$  и  $\tau_2$  с горизонталью. В точках  $C$  и  $D$  также появляются вихревые пелены, имеющие те же направления.

Если, однако, рассматривается непрерывное расширение с бесконечно малыми изменениями по всему сектору  $CBD$  (фиг. 19.11), то в любой точке  $P$  величина и направление соответствующей скорости  $w_p$ , которая одинакова

вдоль радиуса  $BP$  и может быть определена из теории характеристик, изменяются непрерывно, и, следовательно, ударная волна между  $C$  и  $D$  становится искривленной. Для каждой линии тока  $LP$  энтропия возрастает различно, так что, в согласии с зависимостью (3.70), поток за кривой  $CD$  будет завихренным.



Фиг. 19.11



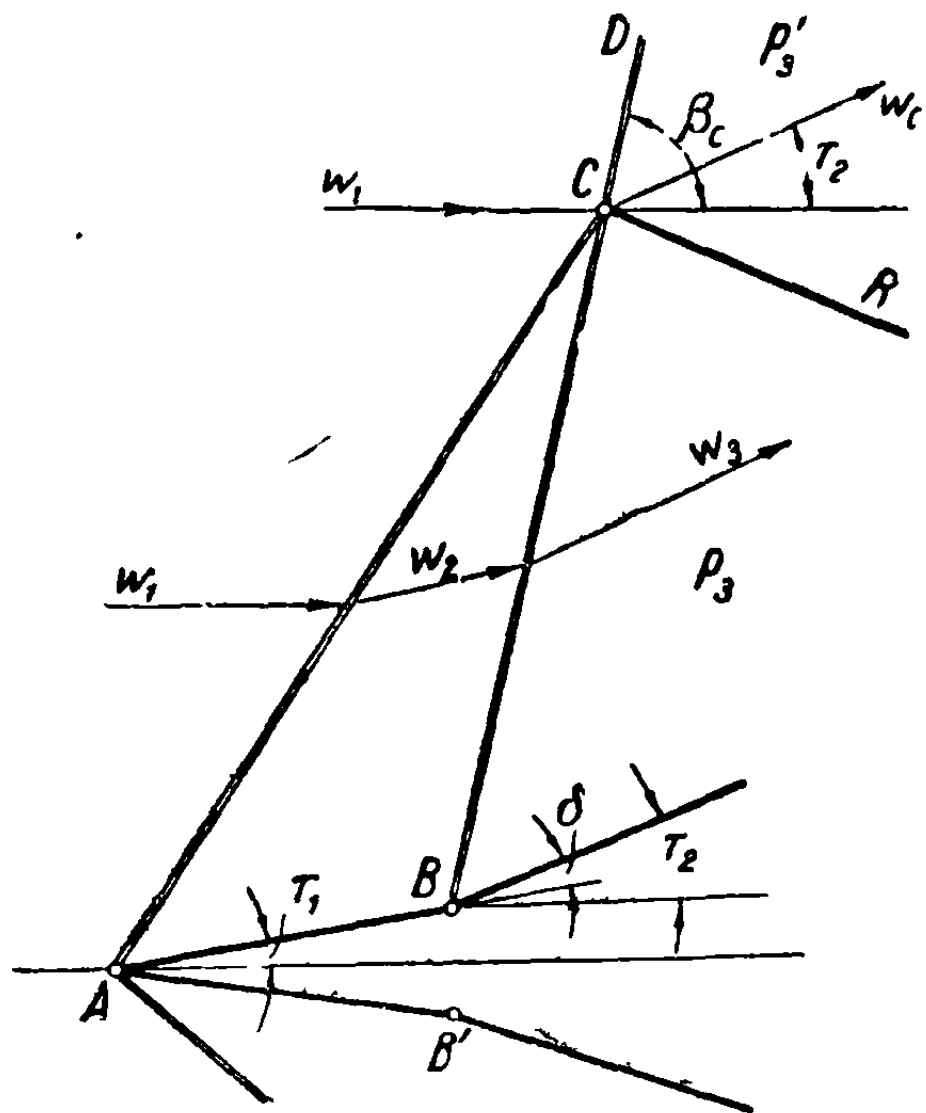
Фиг. 19.12

Если волна разрежения появляется впереди ударной волны (фиг. 19.12), то, рассматривая скорость вдоль линии  $AP$ , определяемую с помощью теории характеристик, легко, как и в предшествующем случае, изобразить картину течения. Так как интенсивность ударной волны изменяется вдоль линии  $CD$ , то возрастание энтропии будет также переменным, и течение, в согласии с уравнением (3.70), завихренным.

Рассмотрим интерференцию между ударными волнами, образованными, например, у точек заострения и излома профиля препятствия, расположенного в потоке, имеющем скорость  $w_1$  (фиг. 19.13). В первом приближении можно предполагать, что скорость  $w_c$  в точке пересечения  $C$  будет параллельна  $w_3$ . Но так как давление  $p'_3$  за линией  $CD$  будет отличаться от давления  $p_3$  за линией  $BC$ , то появится отраженная волна  $CR$ , осуществляющая переход от  $p_3$  к  $p'_3$ . Из того, что разность между  $p_3$  и  $p'_3$  будет очень мала, следует, что интенсивность отраженной волны будет также очень мала и поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, предполагая, что  $w_c$  параллельна  $w_3$ , будем иметь отклонение потока в точке  $C$ , равное  $\tau_2$ , и таким образом волна  $CD$  будет полностью определена. Но хотя величина скорости  $w_c$  очень близка к величине  $w_3$ , она, тем не менее, будет отличаться от последней вследствие того, что возрастание энтропии и, следовательно, потери при переходе через  $CD$  будут больше, чем соответствующие величины при переходе через  $AC$  и  $BC$ . Вдоль линии тока, проходящей через

точку  $C$ , будет существовать разрыв скорости, вызывающий, как и в предыдущем случае, появление вихревой пелены.

Если последовательные отклонения будут малы, либо вдоль ломаной линии (фиг. 19.14,  $a$ ), либо вдоль кривой с непрерывным изменением касательной (фиг. 19.14,  $b$ ), то соответствующие ударные волны можно рассмат-



Фиг. 19.13

ривать как простые волны сжатия при изэнтропическом процессе; их огибающая, однако, будет ударной волной со все возрастающей интенсивностью. Следовательно, давление  $p_2'$ , получающееся вместо  $p_1$  после пересечения ударной волны, отличается от  $p_2$ , которое также возникает из  $p_1$  в результате изэнтропического превращения, следовательно, без потерь. Чтобы перейти от  $p_2$  к  $p_2'$ , нужно пересечь отраженную волну  $ER$ ; эту волну можно приближенно определить следующим образом. Предполагая, во-первых, что скорость  $w_e$  приближенно параллельна  $w_2$ , можно вычислить  $p_2'$  из уравнения ударной волны и  $p_2$  из формул,

таблиц или диаграммы характеристик. Когда известны эти два давления, можно вычислить отклонение  $\delta$  скорости  $w$  относительно  $w_2$ , саму скорость  $w_e$  и угол  $\beta_r$ .

Итак, применяя уравнение (7.43), будем иметь

$$\frac{p_2' - p_2}{p_2} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_2^2 \sin^2 \beta_r - 1); \quad (19.63)$$

определив  $\beta_r$  и выражение в скобках и используя уравнение (7.50), получим

$$\operatorname{ctg} \delta \approx \frac{1}{\delta} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_2^2}{M_2^2 \sin^2 \beta_r - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta_r. \quad (19.64)$$

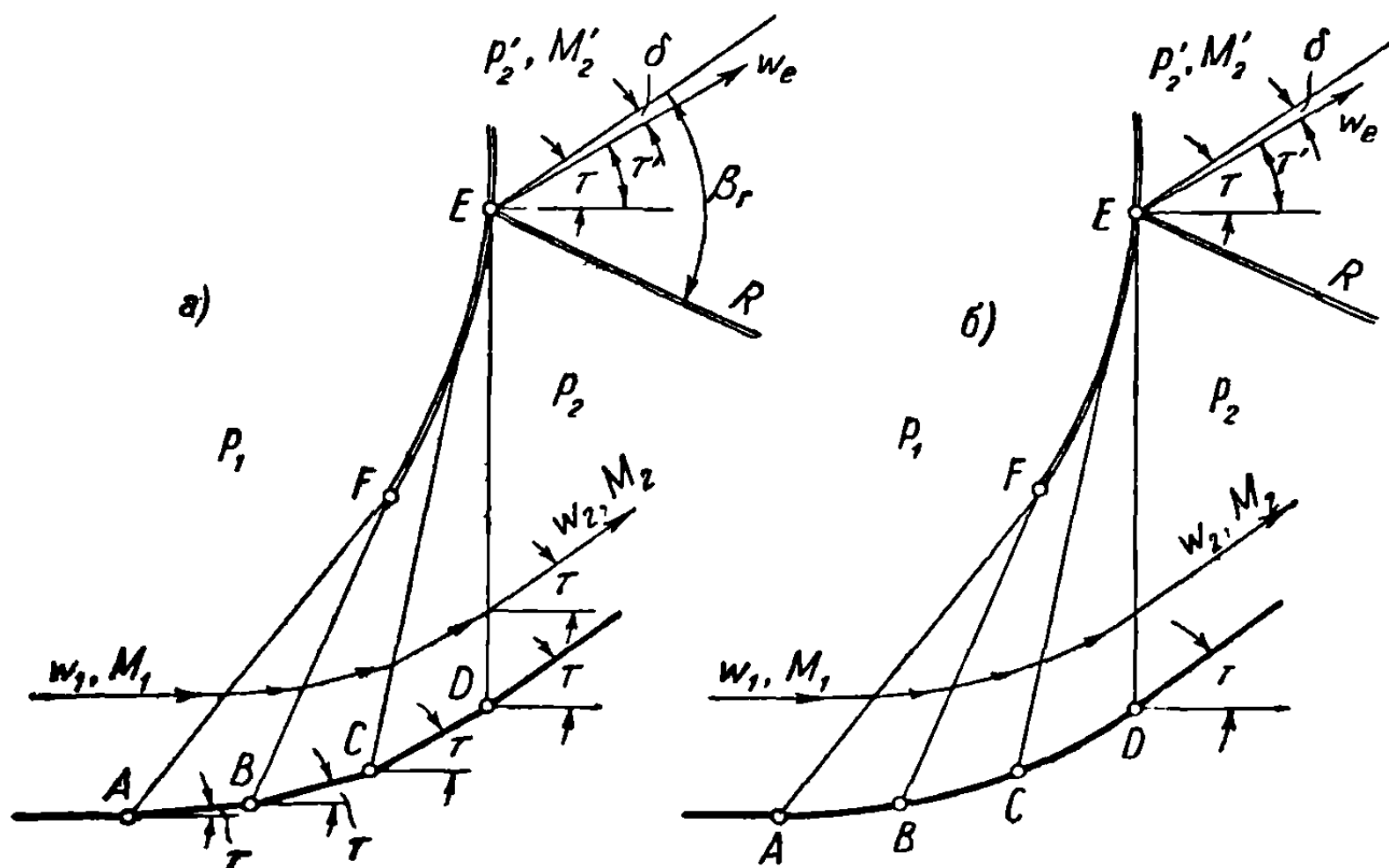
Формула (7.44) может служить для определения скорости или  $M_2'$ , что завершает решение задачи.

Однако этих трудоемких вычислений можно избежать, так как интенсивность отраженной ударной волны в действительности будет очень мала и поэтому скорость  $w_e$  можно рассматривать в первом приближении как параллельную  $w_2$  ( $\tau' \approx \tau$ ).

Подобные же рассуждения могут быть применены к любой точке между  $E$  и  $F$ . Заметим, что если даже пренебречь последовательными отраженными волнами, исходящими из этих точек, то энтропия будет увеличиваться от одной линии тока к другой при переходе от  $F$  к  $E$ , так что поток за линией  $FE$  будет завихренным.

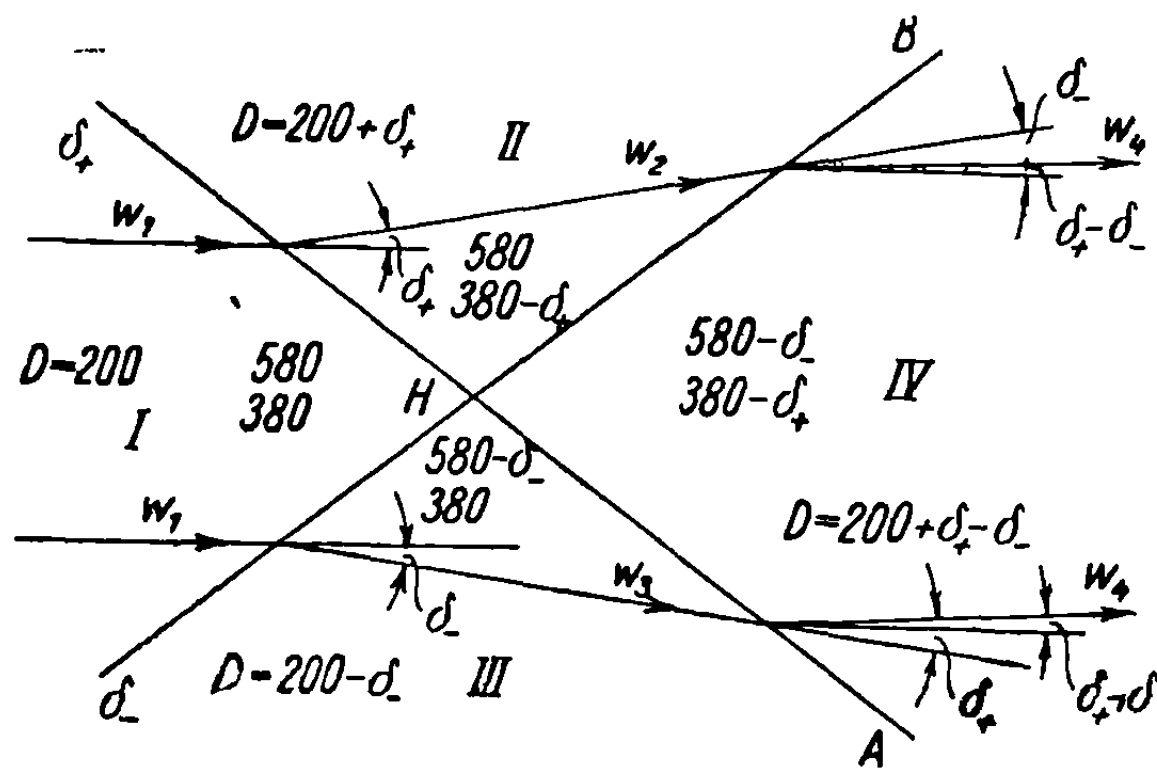
**19.4.2. Пересечение волн интерференции.** Нужно отметить, что в рассмотренных примерах волны не пересекали одна другую, так как поток впереди

не мог быть возмущен. Это обуславливалось тем, что рассматриваемые возмущения возникали от одной и той же линии тока, т. е. от контура препятствия или от окружающих стенок.



Фиг. 19.14

Если рассматривать возмущения, появляющиеся из различных точек, не лежащих на одной и той же линии тока, то увидим, что они пересекаются друг с другом, и, чтобы различать их от прежних волн, будем называть их *пересекающимися волнами интерференции* (см. фиг. 19.6, 19.7 и 19.8).



Фиг. 19.15

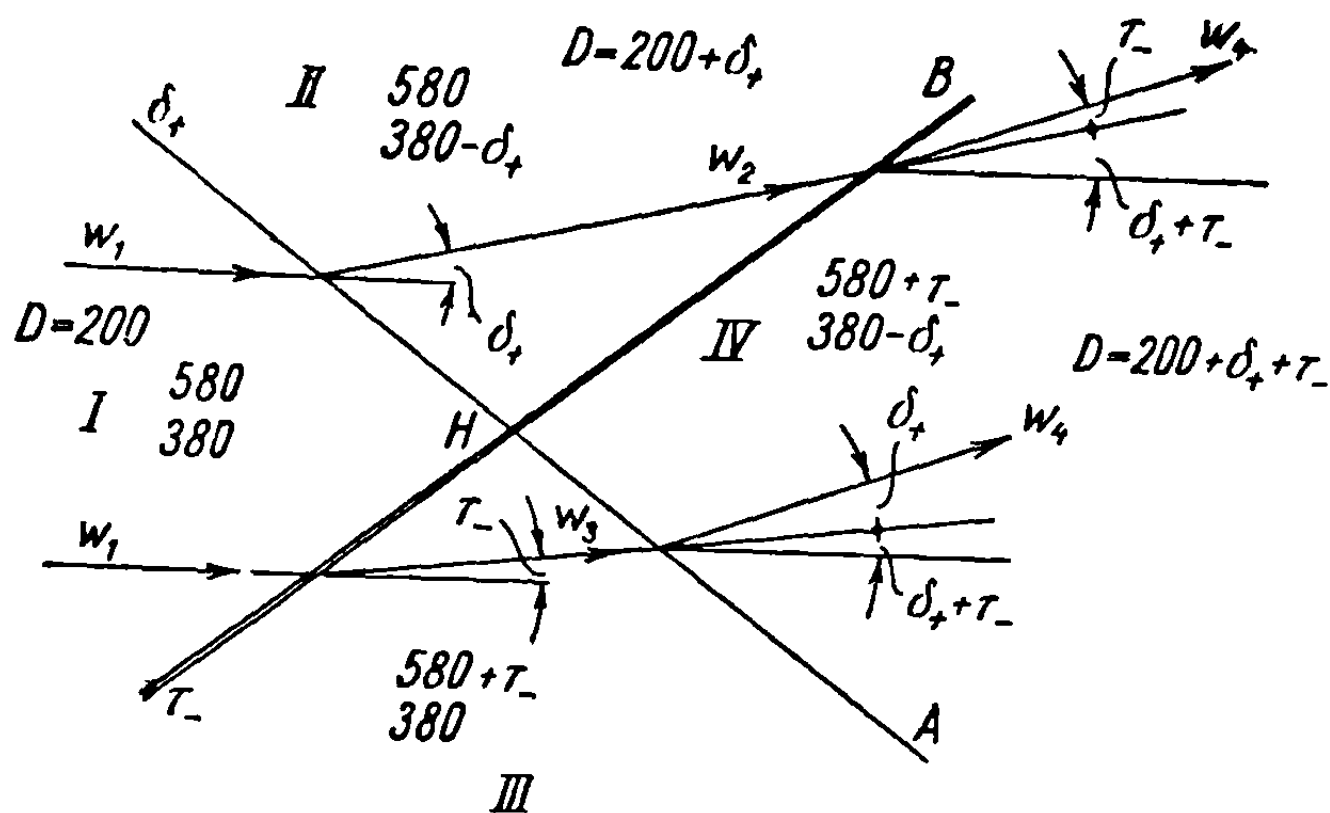
Исследование указанных волн представляет большой интерес, так как изучение явлений интерференции помогает рассчитывать более сложные течения.

Поток, протекающий через сетку пересекающихся волн интерференции, испытывает изменения как скорости, так и направления.

Решим несколько простых случаев с помощью диаграммы характеристик

Рассмотрим сначала две волны разрежения, интенсивность которых определяется отклонением  $\delta$ , выраженным в градусах; они принадлежат противоположным семействам, так как иначе не могли бы пересекаться. Итак,  $\delta_+$  будет соответствовать волне разрежения первого семейства, а  $\delta_-$  — второго (фиг. 19.15). Рассмотрим горизонтальное течение в области I, характеризу-

мое значением  $D = 200$ . Предполагая скорость  $w_1$  соответствующей, в согласии с принятой нумерацией [10], значению  $S_1 = 960$ , получим  $N_+ = 580$ ,  $N_- = 380$ , причем эти числа будут служить отметкой области  $I$ . Переходя к области  $II$ , видим, что отклонение  $\delta_+$ , связанное с расширением, появляется



Фиг. 19.16

вдоль эпициклоиды положительного семейства, следовательно, число  $N_+ = 580$  остается постоянным; так как, однако,  $S_1$  уменьшится на величину  $\delta_+$ , т. е.  $S_2 = 960 - \delta_+$ , то числовая отметка эпициклоиды отрицательного семейства станет равной  $N_- = 380 - \delta_+$ .

Переходя в область  $III$ , мы пересекаем волну отрицательного семейства, поэтому расширение осуществляется вдоль отрицательной эпициклоиды, следовательно, число  $N_- = 380$  остается постоянным; полная отметка уменьшается, однако, на величину  $\delta_-$ ,  $S_3 = 960 - \delta_-$ , и отсюда  $N_+ = 580 - \delta_-$ .

В область  $IV$  можно перейти из области  $II$ , и в этом случае расширение происходит вдоль отрицательной эпициклоиды, или из области  $III$ , и тогда расширение осуществляется вдоль положительной ветви. В обоих случаях  $S_4 = 960 - \beta_+ - \delta_-$ ,  $N_+ = 580 - \delta_-$ ,  $N_- = 380 - \delta_+$ , и отклонение течения в четырех областях, соответственно, будет  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \delta_+$ ,  $\delta_3 = -\delta_-$ ,  $\delta_4 = \delta_+ - \delta_-$ .

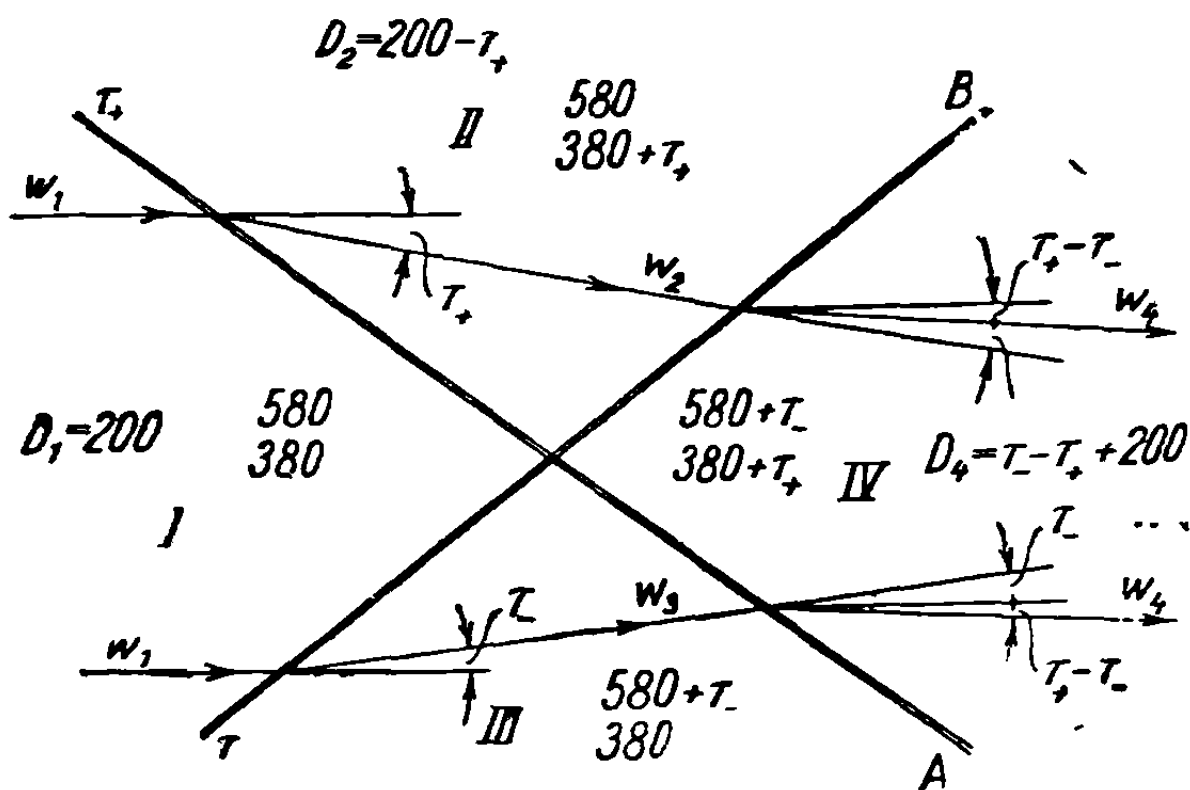
Таким образом, течение определяется в каждой области, скорости  $w_1, \dots, w_4$  выводятся из табл. 19.1, согласно отметочным числам  $S_1, \dots, S_4$ , и из табл. 17.1. Заметим, что волны  $\delta_+$  и  $\delta_-$  не являются прямыми линиями, так как они отклоняются в точке пересечения. Течение  $S_2 = 960 - \delta_+$  в области  $II$  подвергается расширению, причем отклонение  $\delta_- < \delta_+$ ; таким образом, определяется направление  $HB$ . Одновременно течение  $S_3 = 960 - \delta_-$  в области  $III$  испытывает расширение  $\delta_+$ , что определяет направление  $HA$ . В большинстве случаев эти отклонения волн от прямой линии чрезвычайно малы и, следовательно, ими можно пренебречь.

Рассмотрим другой пример — расширение  $\delta_+$  положительного семейства и сжатие  $\tau_-$  отрицательного семейства (фиг. 19.16).

Течение предполагается горизонтальным в области  $I$  и распространяется в область  $II$  после расширения  $\delta_+$  вдоль одной и той же положительной эпициклоиды  $N_+ = 580$ ; в то же время отрицательная эпициклоида получит



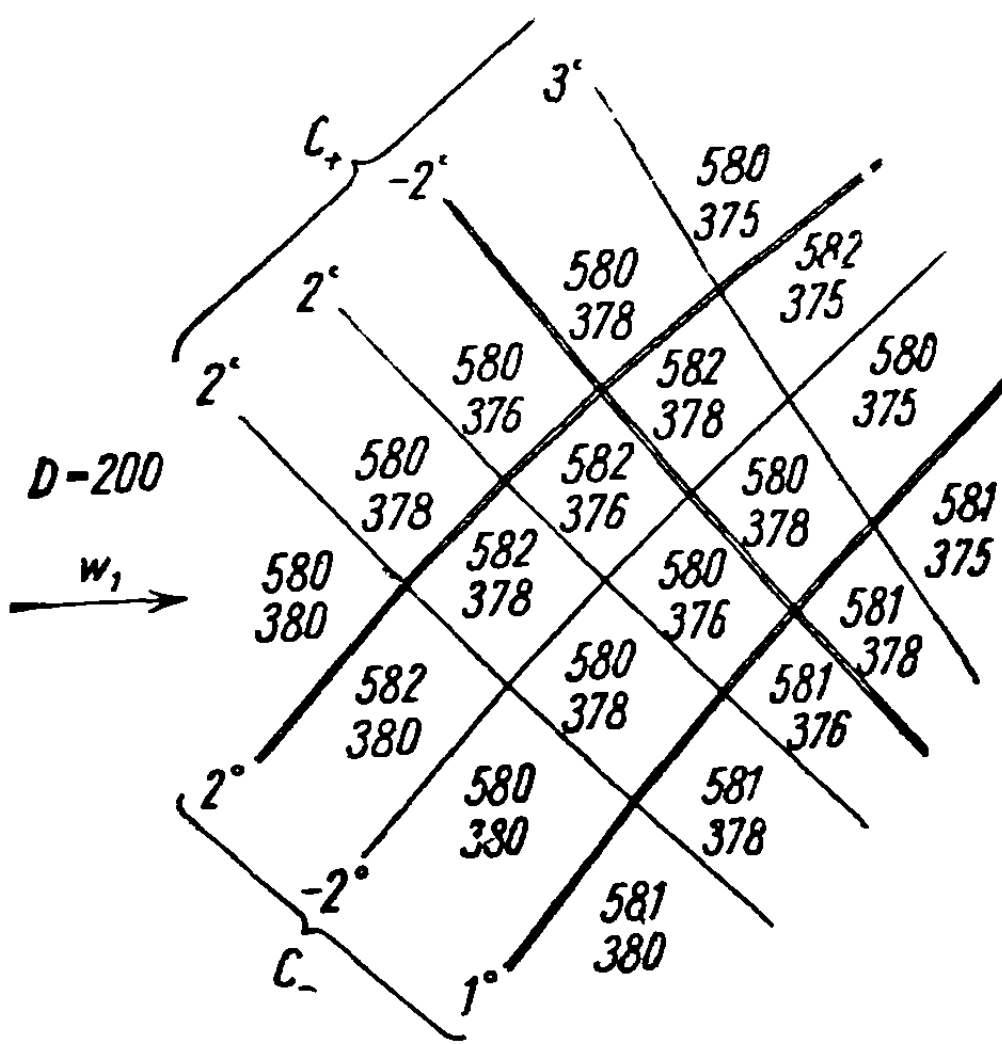
отметку  $N_- = 380 - \delta_+$  и  $S_2 = 960 - \delta_+$ . В область III поток переходит вдоль одной и той же отрицательной эпициклоиды  $N_- = 380$ , тогда как  $N_+ = 580 + \tau_-$  и  $S_3 = 960 + \tau_-$ . Переходя из области II в область IV, получим  $N_+ = 580 + \tau_-$ ,  $N_- = 380 - \delta_-$ ,  $S_4 = 960 + \tau_- - \delta_-$ . Замечание,



Фиг. 19.17

аналогичное приведенному ранее, можно сделать относительно ориентации характеристик за точкой пересечения (НА и НВ); здесь, как и в предшествующем случае, отклонениями от прямой линии можно в большинстве случаев пренебречь.

Наконец, рассмотрим случай двух волн сжатия  $\tau_+$  и  $\tau_-$  противоположных семейств (19.17). В области II  $N_+ = 580$ ,  $N_- = 380 + \tau_+$ ,  $S_2 = 960 + \tau_+$ ; в области III  $N_+ = 580 + \tau_-$ ,  $N_- = 380$ ,  $S_3 = 960 + \tau_-$ ; в области IV  $N_+ = 580 + \tau_-$ ,  $N_- = 380 + \tau_+$ ,  $S_4 = 960 + \tau_+ + \tau_-$ .



Фиг. 19.18

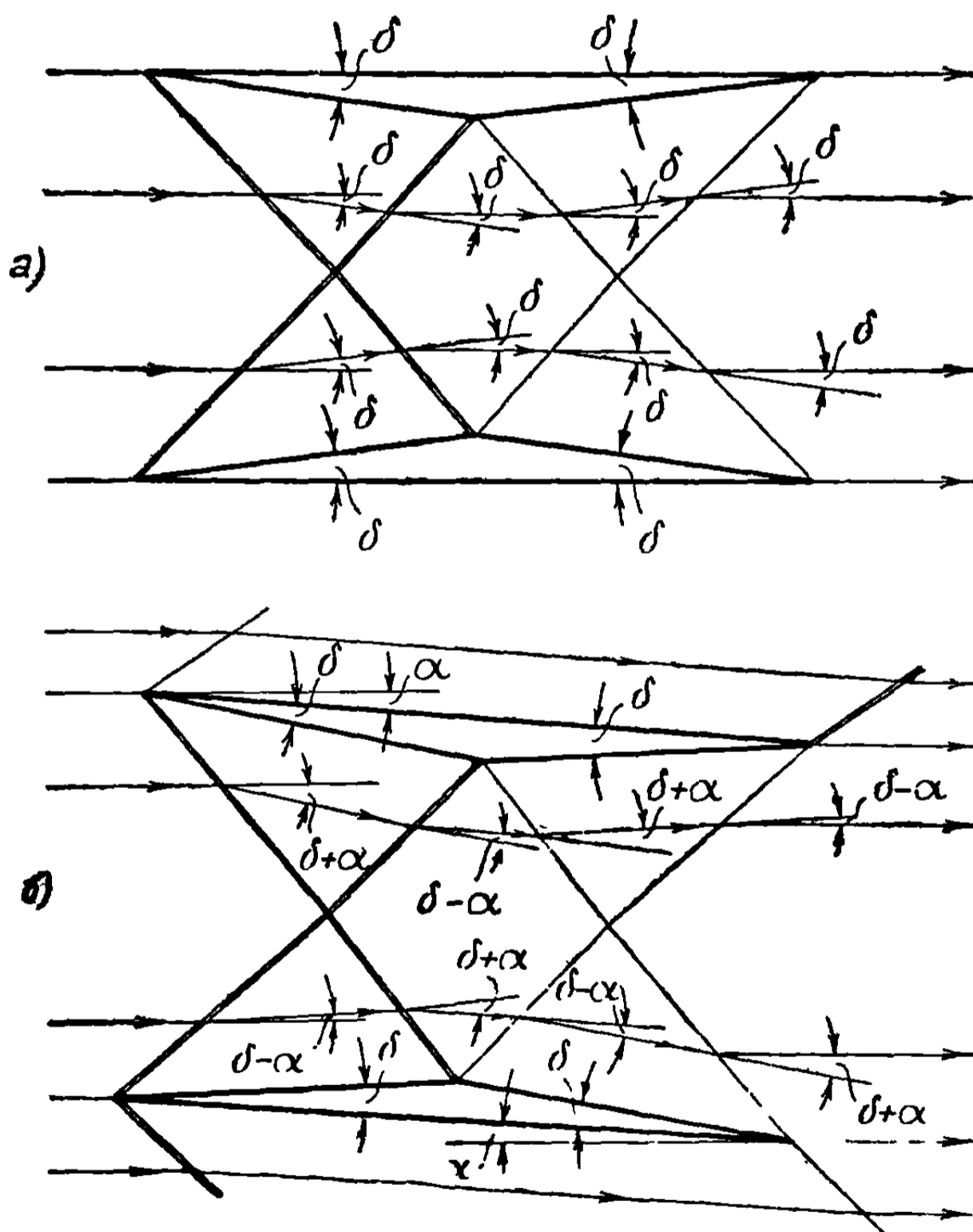
19. 4. 3. Применение диаграммы характеристик к сетке волн интерференции. Для графического решения некоторых практических задач, таких, как случай суживающейся части сверхзвуковой аэродинамической трубы, волны разрежения и волны сжатия рассматриваются как группы отдельных волн, каждая из которых создает отклонение в один градус или более. Физическая картина течения образуется сеткой пересекающихся волн интерференции, а поле скоростей, как и другие характеристики течения, должны быть определены.

С этой целью на фиг. 19.18 представлена подобная сетка с характеристиками положительного семейства  $C_+$ , пересекающимися характеристиками отрицательного семейства  $C_-$ . В силу установленного правила, пока линии первого семейства не пересекут какую-нибудь линию второго, изменение скоростей

и отклонений происходит вдоль положительной эпициклоиды с отметкой  $N_+ = 580$ , которая пересекает отрицательные эпициклоиды, отвечающие последовательной нумерации  $N_- = 380, 378, 376, 378, 375$ . Точно так же для волн семейства  $C$  : пока они не пересекут какую-нибудь волну семейства  $C_+$ , изменение происходит вдоль отрицательной эпициклоиды, отвечающей значению  $N_- = 380$ , которая пересекает положительные эпициклоиды с номерами  $N_+ = 580, 582, 580, 581$ . Этим путем числа  $N_+$  и  $N_-$  устанавливаются для каждого прямоугольника сетки волн, и таким образом течение определяется, так как скорость отмечается числом  $S = N_+ + N_-$ , а отклонение — числом  $D = N_+ - N_-$ .

### 19. 5. Влияние отраженных волн и волн интерференции на лобовое сопротивление сверхзвукового биплана при нулевой подъемной силе

Исходя из свойств тонкого плоского крыла, имеющего нулевое лобовое сопротивление при нулевой подъемной силе, Буземан [8] построил биплан с толстыми крыльями, имеющий такое же свойство. Рассмотрим



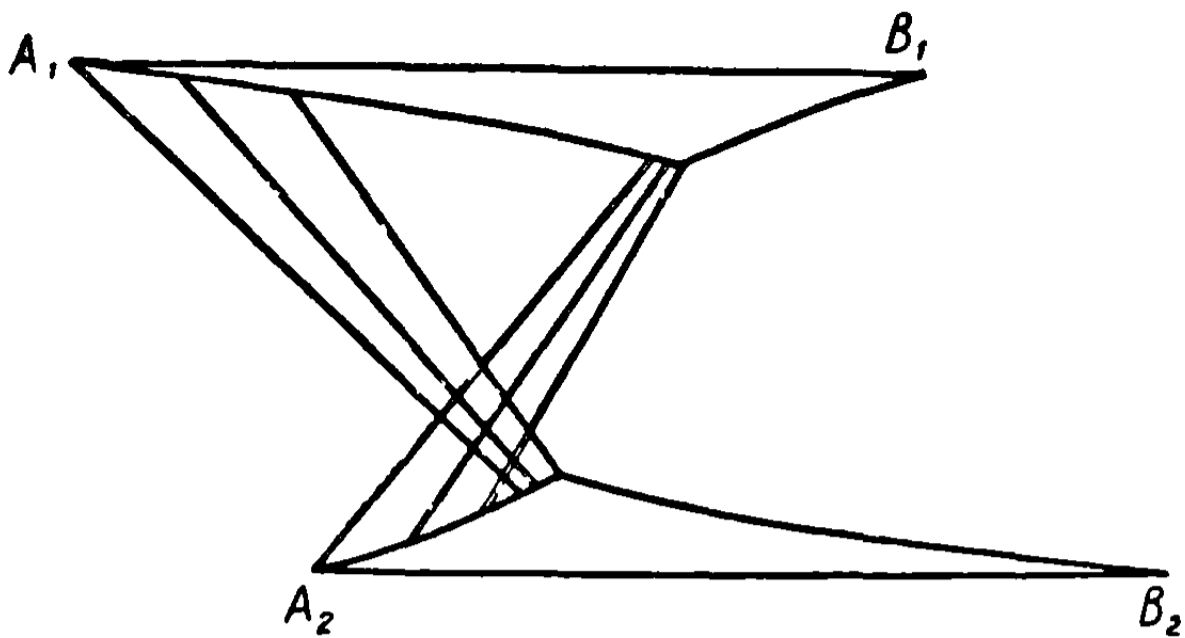
Фиг. 19.19

с этой целью два профиля, образующих крылья биплана, внешняя часть контура которых представляет прямую линию, а внутренняя составлена из двух прямых линий (фиг. 19.19, а, б; 19.20, а, б.).

Течение между двумя крыльями будет рассмотрено схематически в свете результатов, полученных в предшествующих задачах. Это исследо-



$(\delta_2 - \alpha)$  положительного семейства, а поток из области *III*, пересекающий волну сжатия  $HC_2$ , будет иметь отклонение  $-(\delta_1 + \alpha)$  отрицательного семейства. Отклонение течения относительно горизонтальной линии



Фиг. 19.21

в области *IV* будет, следовательно, одним и тем же, независимо от того, переходит ли течение из области *II* или из области *III*:

$$v_4 = -(\delta_1 + \alpha) + (\delta_2 - \alpha) = \delta_2 - \delta_1 - 2\alpha. \quad (19.65)$$

Предполагаем, что биплан антисимметричен, т. е. что  $A_2C_2 \parallel C_1B_1$  и  $C_2B_2 \parallel A_1C_1$ ; в этом случае течение в области *V* параллельно  $A_2C_2$ , а в области *VI* параллельно  $A_1C_1$ ; соответствующие отклонения будут

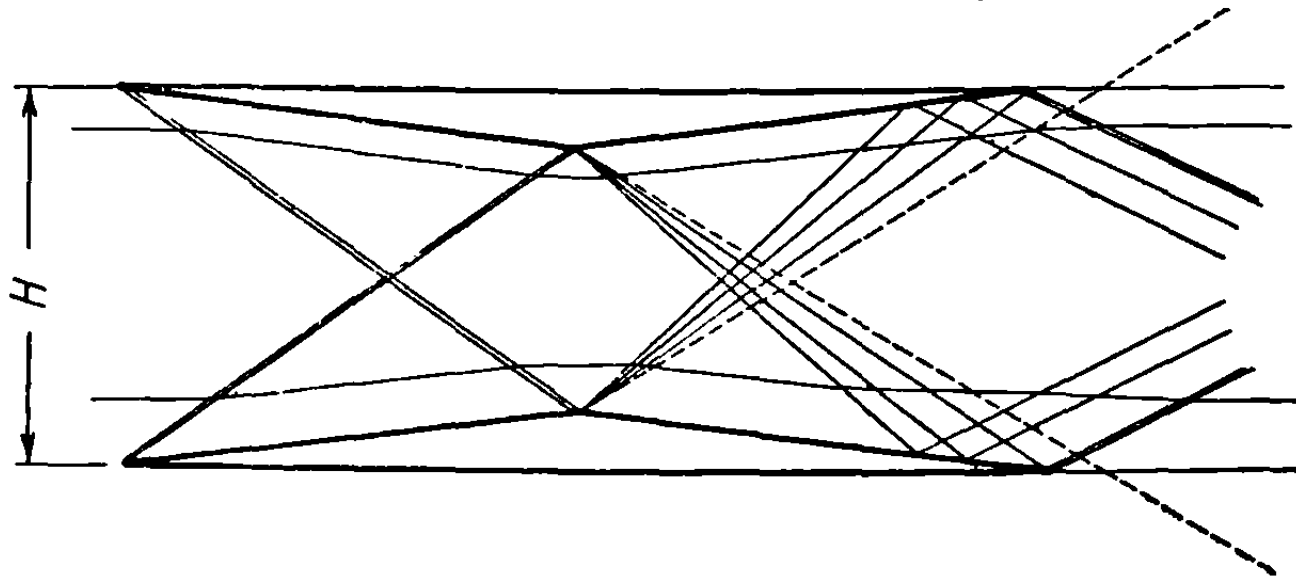
$$v_5 = \delta_2 - \alpha, \quad v_6 = -(\delta_1 + \alpha). \quad (19.66)$$

В точке  $C_1$  возникает разрежение  $(\delta_1 + \alpha)$ , а в точке  $C_2$  — разрежение противоположного семейства  $(\delta_2 - \alpha)$ ; соответствующие волны  $C_1IB_2$  и  $C_2IB_1$  встречаются в точке *I*. Далее течение в области *V* проходит через волну  $IB_1$ , испытывая разрежение  $(\delta_2 - \alpha)$ , и возвращается к начальному направлению. Течение в области *VI* проходит через волну  $IB_2$ , подвергаясь разрежению  $(\delta_1 + \alpha)$ , и также возвращается к начальному направлению.

Этот анализ можно повторить с таким же результатом для бипланов любого другого типа, представленных на фиг. 19.19 и 19.20: течение вне биплана оказывается идентичным течению вокруг тонкой плоской пластинки, а течение внутри испытывает изэнтропическое преобразование и возвращается к начальному направлению и начальной величине скорости, не оказывая влияния на биплан, рассматриваемый как целое.

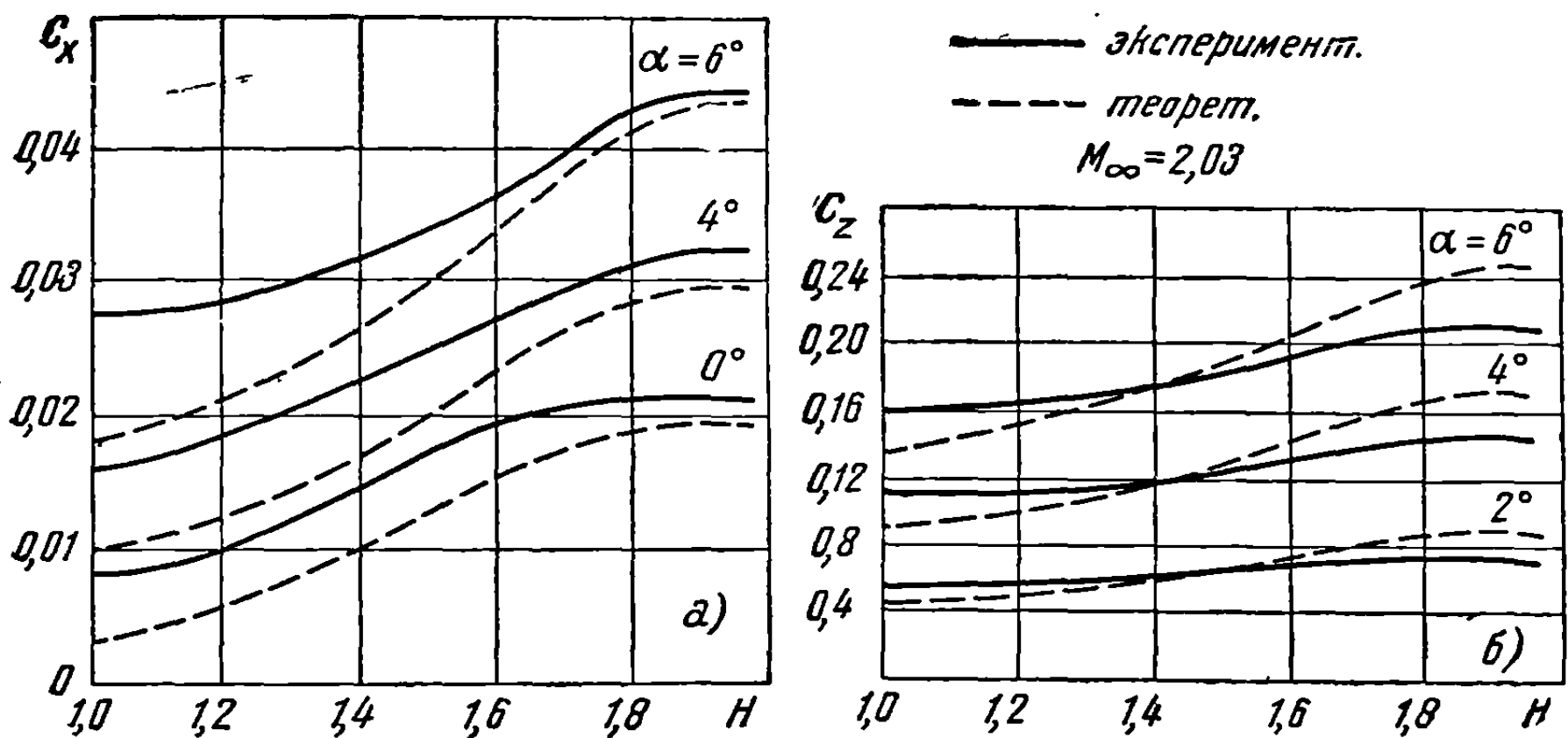
Отсюда следует, что взаимодействия внутренних поверхностей равны и противоположны и поэтому взаимно погашаются, что легко видеть при изучении давлений и скоростей возмущения на этих поверхностях. Пренебрегая в первом приближении потерей напора при переходе через ударные волны, получим, что скорость в области *III* идентична скорости в области *V*; следовательно, соответствующие подъемная сила и лобовое сопротивление будут равны и противоположны по знаку, за исключением той их части, которая обусловлена общим углом атаки  $\alpha$ . То же самое можно показать и для других областей.

Приведенное рассмотрение было основано на изэнтропическом преобразовании, т. е. возрастанием энтропии при переходе через ударные волны мы пренебрегали. Ошибка при этом получается небольшая и ее



Фиг. 19.22

можно не принимать в расчет. Нужно заметить, что даже при таком предположении волны разрежения распространяются вниз по потоку и некоторое расширение наблюдается за задней кромкой (фиг. 19.22).



Фиг. 19.23

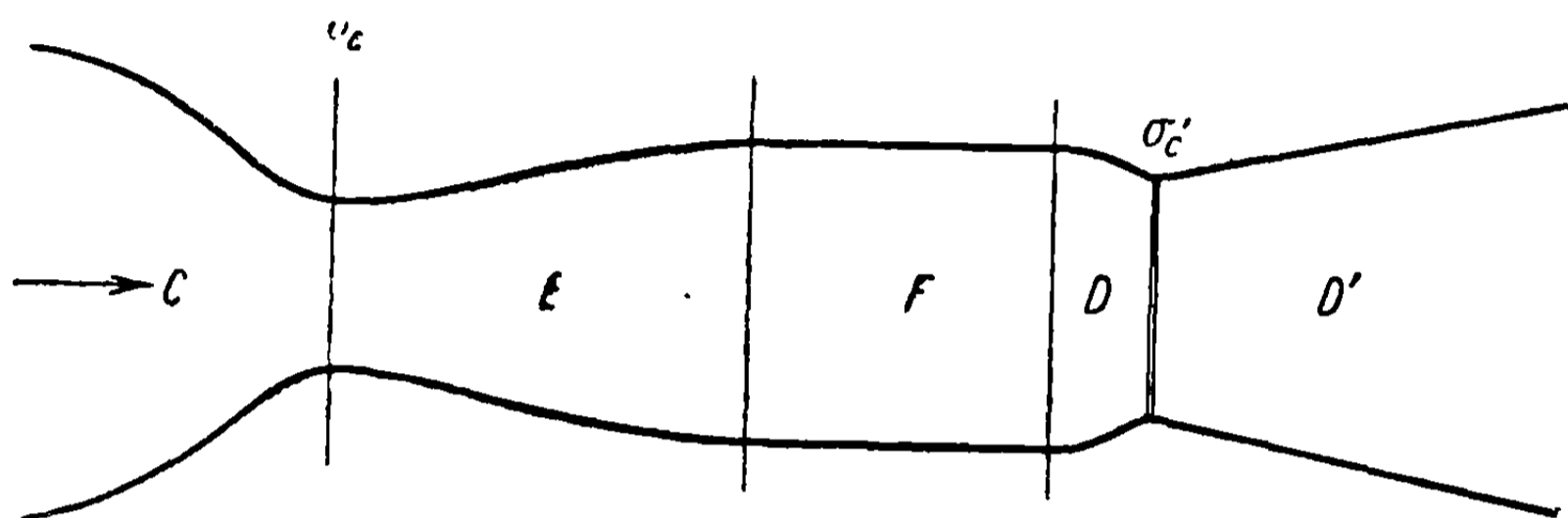
В этом случае течение восстанавливает свое начальное состояние гораздо дальше вниз по потоку и будет искривлено между задней кромкой и последней волной разрежения; следовательно, концевые ударные волны на верхних поверхностях обоих крыльев будут искривлены, и поэтому течение за ними будет завихренным. Таким образом, условия для тонкой пластинки не могут быть полностью удовлетворены. Кроме того, испытания биплана, подобно представленному на фиг. 19.22, произведенные Ферри [15], не находятся в полном согласии с теорией, как это очевидно из диаграмм на фиг. 19.23, а, б.

Биплан, описанный выше, представляет теоретический интерес; практически, оставляя в стороне конструктивные соображения, заключаем, что уменьшение лобового сопротивления при нулевой подъемной силе не реально из-за трения на внутренних поверхностях и отрыва пограничного слоя в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Этот отрыв, в конечном счете, будет происхо-

дить более активно в случае двух крыльев, по сравнению со случаем одного крыла. Добавим, что правильный биплан можно сконструировать только для одного числа Маха и одного угла атаки. Как только эти параметры изменятся, что и происходит в полете, условия течения будут все более отличаться от рассмотренных, и преимущества в той же мере будут исчезать.

## 20. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ ЭФФУЗОРОВ, ДИФФУЗОРОВ И ТЕЧЕНИЙ В СТРУЯХ

Сверхзвуковые аэродинамические трубы в общих чертах уже рассмотрены (см. раздел 8.4), но без детального исследования потока от звуковой горловины к звуковому диффузору и без описания метода, которым



Фиг. 20.1

обеспечивается однородный поток в рабочей камере. Предпримем обсуждение этих вопросов, используя метод характеристик. Необходимо при этом дать несколько определений.

Часть аэродинамической трубы, в которой происходит ускорение потока от критической скорости ( $M=1$ ), возникающей в звуковой горловине, до сверхзвуковой скорости ( $M>1$ ), которая требуется в рабочей камере, т. е. сопло, соединяющее звуковую горловину с рабочей камерой, называется обычно эффузором.

Часть трубы за рабочей камерой, где поток замедляется от скорости в рабочей камере до критической скорости или до скорости впереди нормальной ударной волны, носит название *сверхзвукового диффузора*. Любое устройство, создающее уменьшение скорости, называется диффузором. Таков, например, случай *дозвукового диффузора* в аэродинамической трубе; последний производит тот же эффект замедления и уменьшает скорость, начиная от ее критического значения. Этот раздел посвящен только *сверхзвуковому диффузору*, так как предполагается, что диффузор дозвуковой известен; по крайней мере, известны принципы его построения.

Здесь также мы ограничиваемся изучением *сверхзвуковых* газовых струй, так как изучение дозвуковых струй не представляет особенных теоретических трудностей. При этом рассмотрены только плоскопараллельные течения в струях, эффузорах и диффузорах.

На фиг. 20.1 показаны характерные особенности любой сверхзвуковой трубы, состоящей из суживающегося сопла  $C$ , узкого сечения  $\sigma_c$ .

называемого звуковой горловиной, эффузора  $E$ , рабочей камеры  $F$ , сверхзвукового диффузора  $D$ , второго узкого сечения  $\sigma_c'$  и дозвукового диффузора  $D'$ .

Два контура меняющейся формы образуют горизонтальные стенки аэродинамической трубы, ограниченной двумя параллельными вертикальными стенками, которые обеспечивают двумерное течение. Течение от суживающего сопла до звуковой горловины будет дозвуковым и, следовательно, стоит вне рамок настоящего исследования. Эта глава касается только части трубы, расположенной за звуковой горловиной.

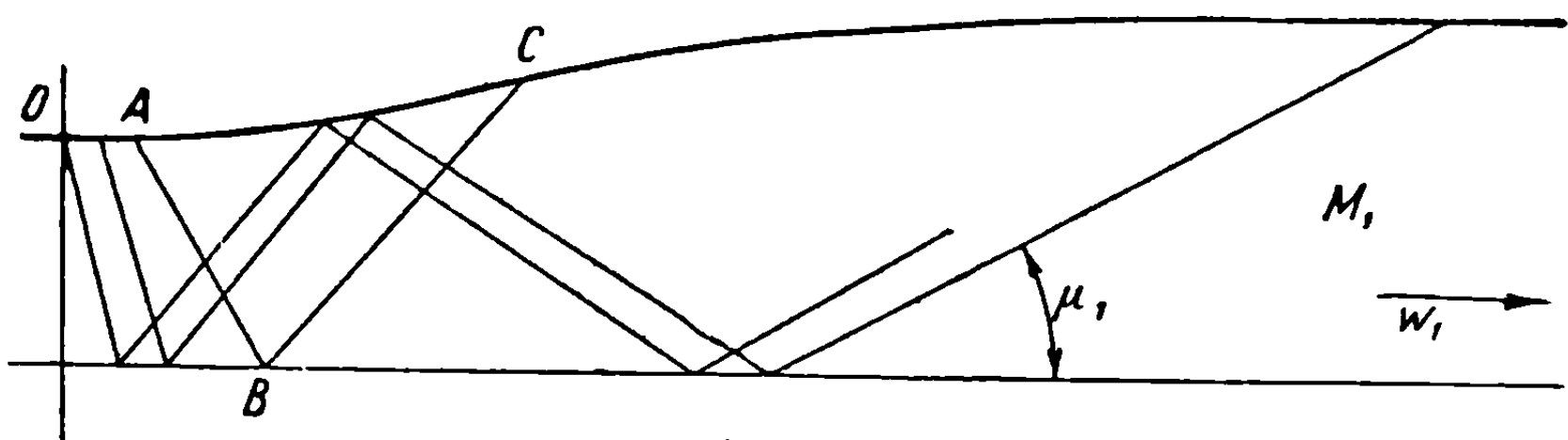
## 20. 1. Расчет плоского сверхзвукового эффузора

Предположим, что при соответствующей конструкции суживающегося сопла поток в узком сечении будет однородным. При постепенном возрастании скорости течения в том же сечении в определенный момент достигается критическая скорость ( $M=1$ ). С этого времени расход массы остается постоянным, и поток в нижнем течении будет сверхзвуковым. Напомним, что вследствие отклонения стенок появляются волны разрежения и сжатия и при их интерференции образуется сетка волн интерференции, значительно усложняющая картину течения. Скорость в любом частном сечении такого потока неоднородна, так что экспериментальные результаты не могут быть определенными и их нельзя сравнить с теоретическими данными. Необходимо направить эти волны таким образом, чтобы получить равномерный поток, по крайней мере, в той части трубы, которая называется рабочей камерой. Этого можно достичь подбором соответствующего профиля для эффузора, расчет которого мы и произведем. Предположим, что эффузор симметричен и позволяет построить диаграмму течения только для половины продольного сечения трубы, содержащейся между контуром стенки и осью симметрии.

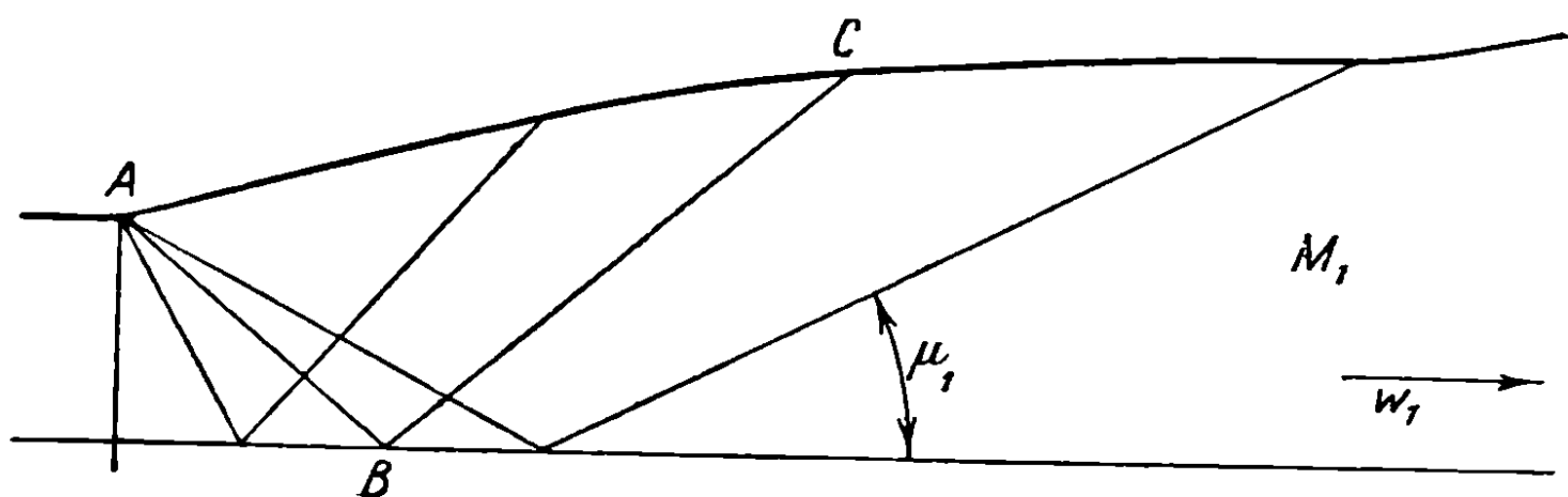
Для решения применим метод характеристик. Определим параметры задачи. Наиболее важным параметром является число Маха в рабочей камере  $M_1$ . Отклонение  $\delta$ , соответствующее расширению, может быть определено с помощью таблицы характеристик 19.1. Так как указанное расширение осуществляется посредством двух стенок, расширение, соответствующее одной стенке, будет вдвое меньше, т. е. будет равно  $1/2\delta$ . Если рассматривать только часть трубы между стенкой и осью симметрии и отмечать, что волны отражаются от этой оси, вызывая полное расширение той же интенсивности, как в случае падающей волны, то получим такой же результат, а именно, что расширение, относящееся к одной стенке, равняется  $1/2\delta$ ; остающаяся часть расширения, дополняющая его до значения  $\delta$ , производится волнами, отраженными от оси симметрии. Таким образом, получается важный вывод: так как для получения числа Маха  $M_1$  в рабочей камере необходимо полное расширение  $\delta$ , в согласии с формулой характеристик, то расширение  $1/2\delta$  получается путем отклонения стенки на угол такой же величины.

Все отраженные волны, которые завершают расширение, необходимое для получения числа  $M_1$  в рабочей камере, дополняя расширение на величину  $1/2\delta$ , будут также способствовать восстановлению начального направ-

ления потока; это следует из того, что отраженные волны расширения будут противоположны падающим волнам из-за принадлежности отраженных волн ко второму семейству (фиг. 20.2 и 20.3).



Фиг. 20.2



Фиг. 20.3

Чтобы получить еще более ясную картину исследуемого процесса, рассмотрим волну  $AB$ , изображенную на фиг. 20.2. Эта волна, связанная с отклонением потока на два градуса, соответствует расширению, практически представленному с помощью одной средней линии. Разберем метод, используемый для определения этой величины.

Волна отражается в точке  $B$  и встречает стенку в точке  $C$ . Независимо от числа и типа падающих волн, пересекающих при своем распространении и отраженную волну  $BC$ , поток неизменно отклоняется на два градуса в противоположном направлении. Если для течения выше точки  $C$  приняты, по предположению, все необходимые меры, чтобы обеспечить поток, текущий параллельно стенкам, без возникновения какой-нибудь новой отраженной волны, то в точке  $C$  поток получает отклонение на два градуса при прохождении через отраженную волну разрежения  $BC$ . Чтобы избежать появления отраженной волны, стенка ниже точки  $C$  должна быть наклонена в направлении движения потока; следовательно, стенка должна быть повернута на два градуса относительно направления потока выше точки  $C$ . Это надо последовательно выполнять для всех волн, встречающихся выше или ниже по течению, до тех пор, пока поток и стенка не восстановят горизонтальное направление.

Для практического построения эффузоров необходимо проделать некоторые предварительные операции; нужно определить средние линии разрежения, заменяющие группы распространяющихся волн, а также изменение направления этих линий после взаимного пересечения.

Рассмотрим некоторое расширение, соответствующее отклонению потока  $\delta$  (фиг. 20.4,а). Первая волна составляет угол  $\mu$  с горизонталью,



вторая — угол  $\mu'$  с новым отклоненным направлением  $AB$ , определяемым по известной формуле или по таблице характеристик. Поток полностью определен как в верхнем, так и в нижнем течении и подвергается последовательным преобразованиям в секторе  $ACD$ .

Угол этого сектора, обозначенный через  $\varepsilon$ , дается соотношением

$$\varepsilon = \mu - \mu' + \delta = -\Delta\mu + \delta. \quad (20.1)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\cos^2 \mu} &= -\frac{M^2}{(M^2 - 1)^{3/2}} \frac{dM}{M} = \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \mu} \frac{dM}{M \sqrt{M^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

то, применяя уравнение (17.43), получим

$$-d\mu = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \operatorname{tg}^2 \mu d\theta. \quad (20.3)$$

Применяя далее записанное выше соотношение к малым, но конечным приращениям в предположении, что отклонение  $\delta$  мало, заменим  $d\mu$  через  $\Delta\mu$  и  $d\theta$  через  $\delta$ ; в результате будем иметь

$$\varepsilon = \delta + \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \operatorname{tg}^2 \mu \delta = \delta \left[1 + \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \operatorname{tg}^2 \mu\right]. \quad (20.4)$$

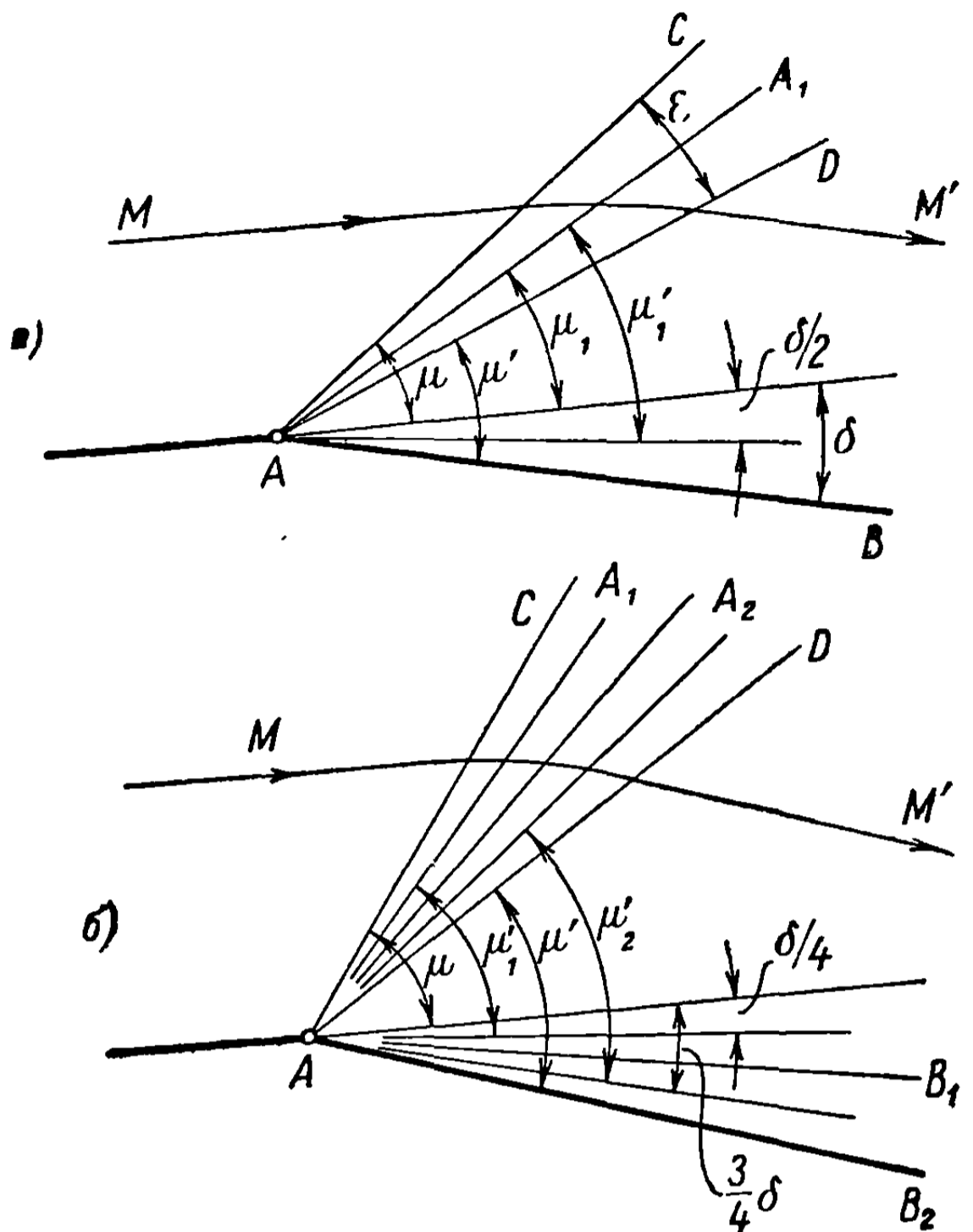
Фактически  $\Delta\mu$  можно взять непосредственно из таблицы характеристик для каждого рассматриваемого отклонения.

Чтобы определить расширение, соответствующее отклонению  $\delta$ , посредством единственной линии, средней линией может быть взята биссектриса  $AA_1$  (фиг. 20.4, а). Тогда средний угол Маха  $\mu_1$  относительно направления начального потока будет

$$\mu_1 = \mu - \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (20.5)$$

Этот угол соответствует приблизительно потоку, отклоненному на  $\frac{1}{2}\delta$ , так как при принятых выше приближениях это отклонение выражается следующим образом:

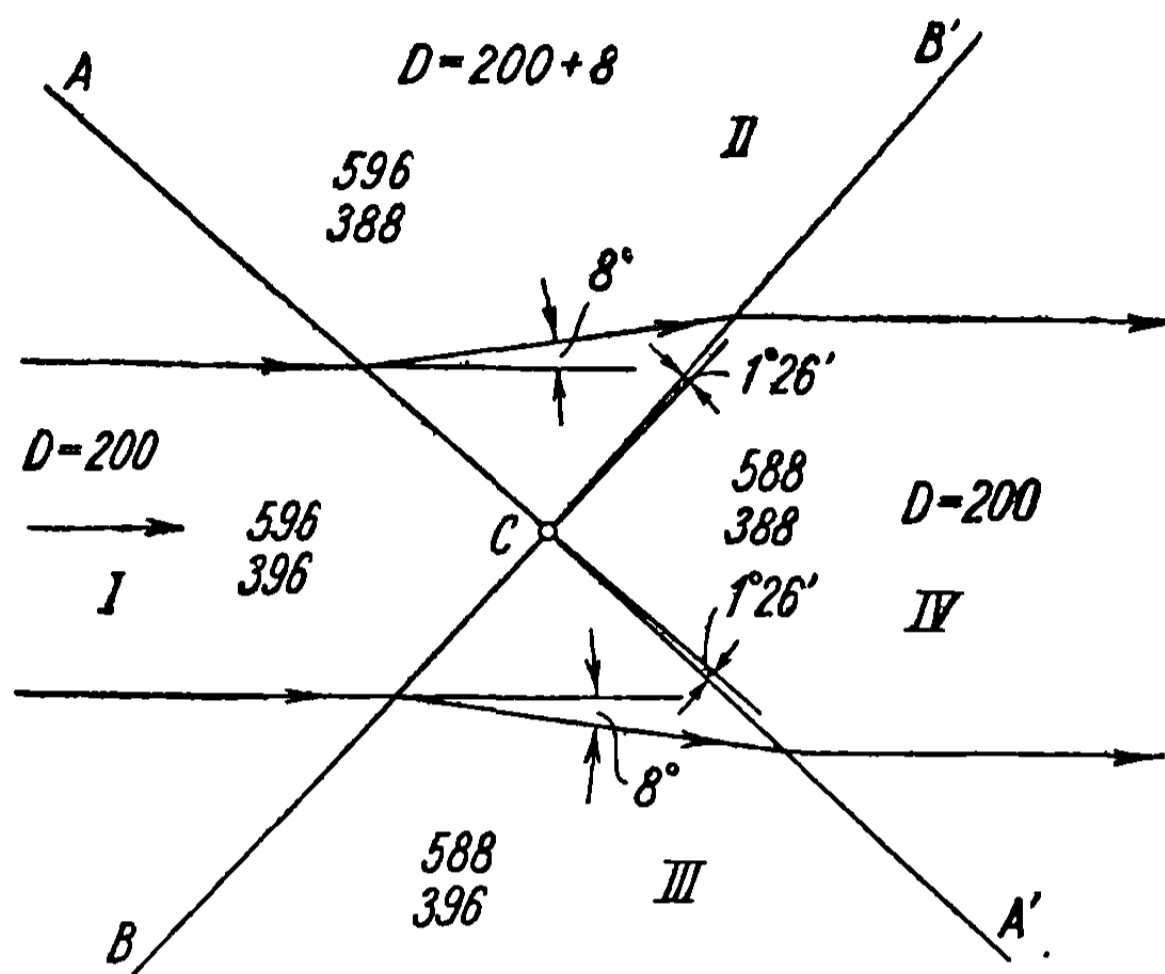
$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) \operatorname{tg}^2 \mu\right] = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (20.6)$$



Фиг. 20.4

Средний угол  $\mu_1$  будет, следовательно, соответствовать потоку, отклоненному на половинный угол. По отношению к этому новому направлению угол  $\mu'_1 = \mu_1 + \frac{\delta}{2}$  может быть непосредственно выведен из таблицы характеристик.

Хотя изложенное выше можно было предположить с самого начала, не делая предшествующего анализа, мы считали необходимым привести



Фиг. 20.5

некоторые обоснования, чтобы яснее представлять себе принятое приближение. Линия  $AA_1$  соответствует углу  $\mu_1$  относительно нового направления потока, отклоненного на  $\frac{1}{2}\delta$ . Вычитая угол  $\frac{1}{2}\delta$ , получим относительно начального направления  $\mu_1 = \mu'_1 - \frac{\delta}{2}$ .

Если отклонение так велико, что приближение влечет за собой слишком большую ошибку, то отклонение надо разделить на несколько частей, применяя к каждой из них приведенную процедуру. Так, на фиг. 20.4,б отклонение разделено на две части ( $AB_1$  и  $AB_2$ ) и для каждой волны взяты определенные углы  $\mu'_1$  и  $\mu'_2$ , соответствующие скоростям с отклонениями  $\frac{1}{4}\delta$  и  $\frac{3}{4}\delta$ .

При встрече со стенкой эти волны отражаются таким же образом, подчиняясь тому же правилу, что и для падающих волн, которые их породили.

Отметим, что приведенные утверждения относятся только к построению системы волн разрежения и не применимы к условиям течения и отклонению потока при переходе через сетку волн интерференции; последние подчиняются правилу характеристик, установленному ранее, которое теперь применяется для расчета эффузора.

Определим наклон волн после их пересечения. Это имеет первостепенную важность при графическом расчете эффузора, потому что малые ошибки в ориентации волн после их пересечения вследствие последовательного прохождения через сетку волн интерференции могут привести к большим ошибкам на контуре стенок. С целью упрощения будем рас-

смаатривать две волны разрежения одинаковой интенсивности, обозначаемые соответствующим символом отклонения  $\delta$  (на фиг. 20.5  $\delta=8^\circ$ ) и принадлежащие к двум противоположным семействам.

Волна  $BC$ , которая изменяет величину  $S$ , определяющую скорость потока, от значения  $S_1=992$  до  $S_3=984$ , одновременно отклоняет поток на угол  $\delta=-8^\circ$ . Углы Маха будут соответственно  $\mu_1=47^\circ 6'$ ,  $\mu_3=37^\circ 37'$ . В согласии с результатами предыдущего анализа, средний угол соответствует  $\frac{1}{2}\delta=4^\circ$  и  $S_{13}=988$ , следовательно,  $\mu_{13}'=41^\circ 42'$ , или относительно начального направления  $\mu_{13}=37^\circ 42'$ .

Подобным же образом для волны  $AC$ , имеющей противоположный наклон,  $\mu_{12}'=-41^\circ 42'$ , соответственно  $\mu_{12}=-37^\circ 42'$ .

При переходе из области  $II$  в область  $IV$  поток отклоняется на угол  $\delta=-8^\circ$ , возвращаясь к начальному, горизонтальному направлению, и скорость переходит от значения  $S_2=984$  при  $\mu_2=37^\circ 37'$  к значению  $S_4=976$  при  $\mu_4=31^\circ 29'$ .

Средний угол соответствует, однако, отклонению только на  $\frac{1}{2}\delta=4^\circ$ , т. е.  $S_{24}=980$ ; при этом  $\mu_{24}'=34^\circ 16'$ , т. е.  $\mu_{24}=30^\circ 16'$  по отношению к начальному отклонению, или  $38^\circ 16'$  относительно горизонтали. Волна  $CB'$ , следовательно, наклонена на  $1^\circ 26'$  круче по отношению к горизонтали. Хотя этот угол мал, он может стать существенным, если последовательные волны подвергаются действию все увеличивающегося ускорения потока в случае сверхзвукового эффузора. В качестве первого приближения, дающего предварительные указания, линию  $BCB'$  можно рассматривать как прямую. Нужно отметить, что потеря напора, обусловленная трением, вызывает большие изменения, которые исключают всякую строгость при изэнтропическом расчете эффузора; поэтому приходится прибегать к приспособлениям физического плана, чтобы компенсировать отклонения и получить однородный поток.

## 20. 2. Графическое построение эффузора

Напомним, что выбор числа Маха в рабочей камере определяет также максимальное отклонение  $\delta$ , которое требуется для последовательного расширения потока при переходе от звуковой горловины к рабочей камере. Соответствующее максимальное отклонение контура будет  $\frac{1}{2}\delta$ ; для очень точных подсчетов его нужно разделить на части величиной в  $1^\circ$ , а для обычных — на части величиной в  $2^\circ$ .

Например, в последнем случае после прохождения каждой волны поток отклоняется на два градуса, что соответствует числу 2 в принятой системе счета.

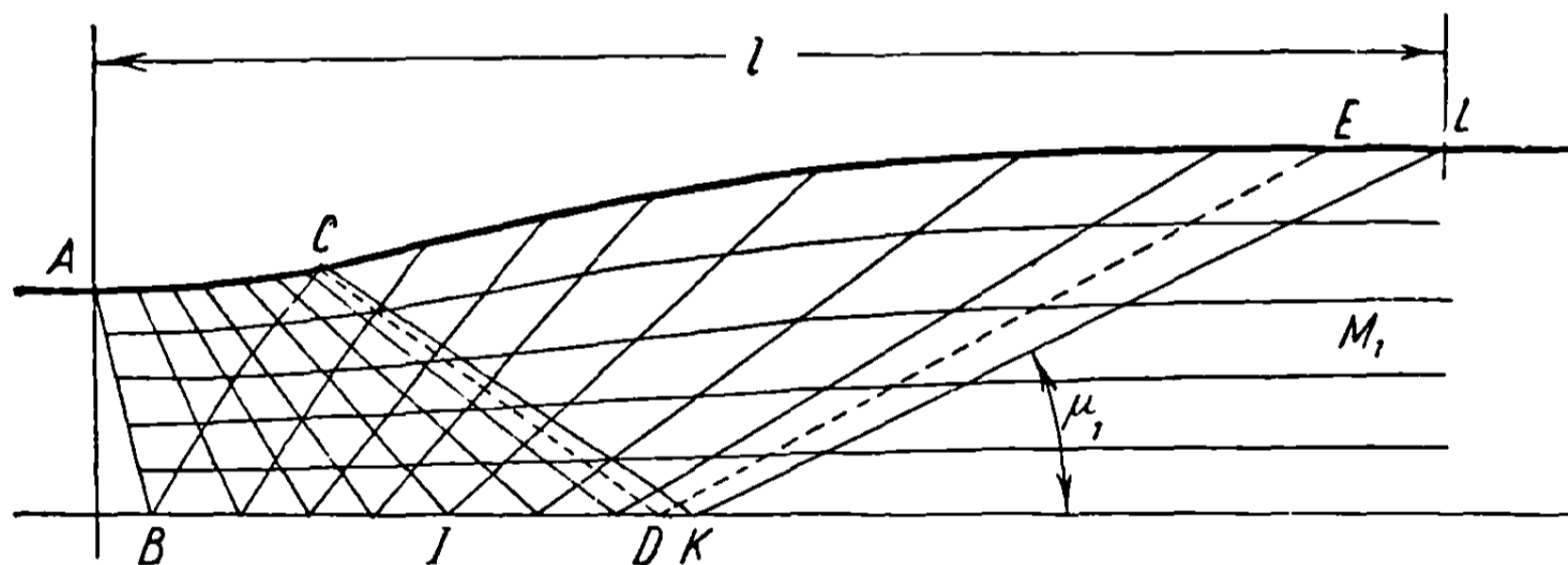
Существует два метода построения эффузора, так как максимальное отклонение контура может быть осуществлено либо резким отклонением стенки эффузора в месте его сочленения с горловиной, либо путем постепенного отклонения стенки.

**20. 2. 1. Эффузор с резким отклонением стенки.** В этом случае расширение происходит вокруг единственного угла, который делится на определенное число выбранных частей. На фиг. 20.3 показано внезапное

угловое отклонение, поэтому рассматривается несколько ступеней расширения. При вычислении средних линий волн нужно провести сетку падающих волн, перемежающихся с отраженными, принимая в расчет их наклоны после каждого пересечения только в том случае, если отклонение от прямой линии будет значительным. Построение выполняется, как показано выше.

Этот эффузор практически очень удобен и может быть легко построен; его преимущество состоит в том, что он имеет наикратчайшую длину, так как часть контура, на которой наклон возрастает и от которой зависит длина диффузора, будет самой короткой при внезапном, единственном отклонении стенки, а возможные невыгоды полного расширения, связанного с наличием единственного угла, не будут иметь существенного значения вследствие изменений течения, обусловленных трением.

**20.2.2. Эффузор с постепенным изменением наклона стенки.** На фиг. 20.6 изображен профиль такого эффузора, причем последовательные отклонения потока осуществляются для интервалов в  $2^\circ$ . Нужно заметить, что если отраженная волна достигает стенки в точке  $C$ , где еще продолжается непрерывное возрастание наклона, то возникают встречные отраженные волны  $CD$  и  $DE$  той же интенсивности. Остальная часть построения выполняется, как и выше.



Фиг. 20.6

Для эффузоров длина берется произвольно, как функция положения точек, в которых происходит возрастание наклона стенки. Чтобы определить длину эффузора вплоть до рабочей камеры, причем длина эта будет неизбежно больше минимальной длины, получающейся в предшествующем примере, отметим точку  $L$ , соответствующую последней отраженной волне  $KL$ , вычисление которой легко выполняется. Так как число  $M_1$  в рабочей камере известно, то соответствующий угол Маха  $\mu_1$  также известен, а раз направление  $KL$  известно, то и точка  $K$  может быть определена. Точка  $B$  на первой волне разрежения, выходящей из точки  $A$ , также известна. Все точки пересечения падающих волн расположатся между  $B$  и  $K$ , причем произойдет возрастание скорости на интервалах, определяемых этими точками. Таким образом, здесь окажется столько же точек  $B, \dots, I, \dots, K$ , сколько будет существовать волн разрежения, и в соответствующих интервалах поток последовательно ускорится от значения  $M=1$  до  $M=M_1$  в рабочей камере.

Точки  $B, \dots, I, \dots, K$  могут быть выбраны произвольно, с тем ограничением, что каждый интервал должен быть больше, чем соответствующий интервал для эффузора минимальной длины.

**З а м е ч а н и е.** Выше были охарактеризованы два типовых метода построения эффузора. Для части с восходящим наклоном может быть предложено бесчисленное множество методов, в соответствии с изменением контура стенки на входе. Таким образом, эта часть может быть также кривой с непрерывным изменением наклона.

Геометрическое построение, проведенное Прандтлем — Буземаном [16] в основном такое же и отличается только деталями операций.

Если к построенным выше профилям присоединяется также симметричная часть, то получается симметричный эффузор с рабочей камерой двойного размера. Для практических целей удобнее использовать эффузоры с одной изменяемой стенкой (другая стенка будет прямая), так как регулирование потока требует корректировки положения стенки. Если рабочая камера имеет тот же размер, то такой эффузор обладает тем недостатком, что будет вдвое длиннее; однако это компенсируется преимуществами.

### 20. 3. Аналитическое определение контура эффузора

Хотя графическое построение эффузора достаточно просто, оно влечет за собой трудоемкие вычисления и дает только приближенные результаты. Поэтому представляет большой интерес метод расчета эффузора, указанный Эткином [17], для случая, когда контур может быть определен с помощью аналитической кривой, имеющей параметрическое представление. Основная идея этого метода состоит в преобразовании радиального сверхзвукового потока, обусловленного источником, в однородный параллельный поток. Для этой цели продолжается линия наклона, соответствующего внезапному расширению, и точка пересечения ее с осью принимается за центр источника и начало полярной системы координат  $r, \theta$  (фиг. 20. 7). Напомним, что такое течение может существовать только вне дуги окружности радиуса  $r_c$ , для которой  $M=1$ , находящейся, следовательно, в непосредственной близости к звуковой горловине.

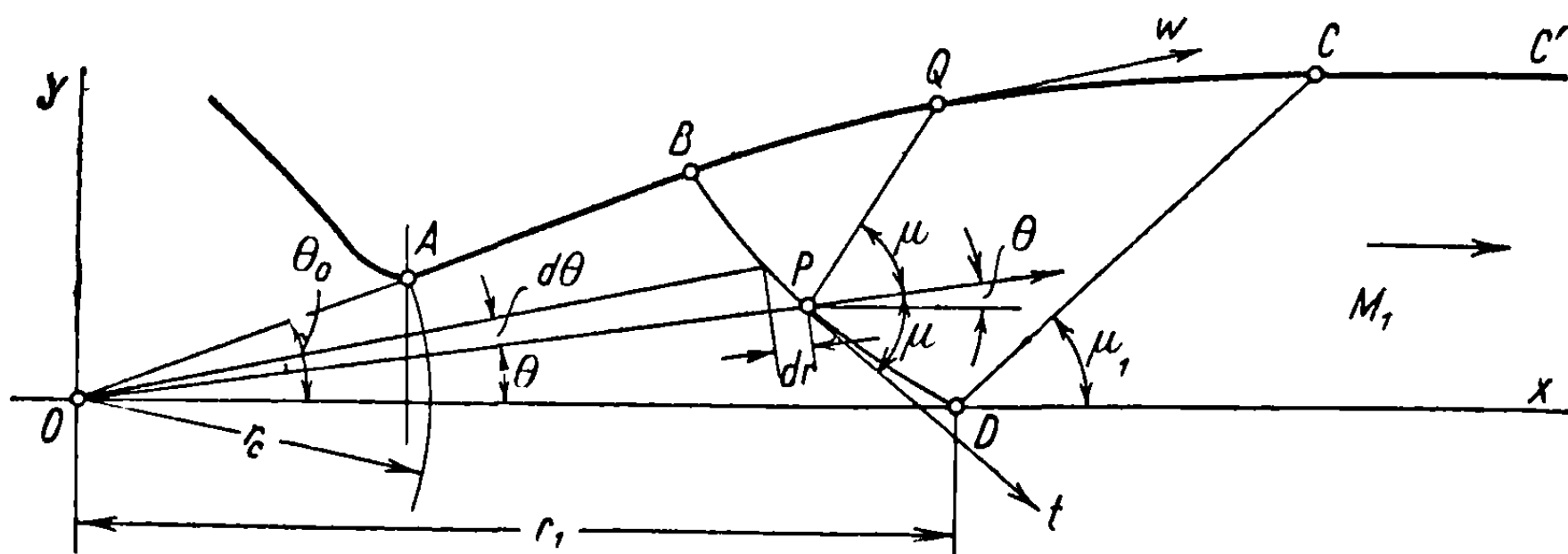
Число Маха изменяется вдоль радиуса-вектора в согласии с формулой (17. 92):

$$\frac{r}{r_c} = \frac{1}{M} \left( \frac{x-1}{x+1} M^2 + \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2(x-1)}}. \quad (20.7)$$

Если в рабочей камере устанавливается число Маха  $M_1$ , то соответствующий радиус  $r_1$  может быть получен из формулы (20.7), при  $M = M_1$ . Пусть  $r_1 = \overline{OD}$ , тогда за волной  $DC$ , составляющей угол  $\mu_1$  с горизонталью ( $M_1 \sin \mu_1 = 1$ ), поток будет однородным, и стенка  $CC'$  будет параллельна оси, так что область за волной образует рабочую камеру.

Наклон начинает уменьшаться в точке  $B$ , которую определим позже; кривая  $BQC$  обеспечивает переход от радиального течения  $AB$  к параллельному течению  $CC'$ . В каждой точке  $Q$  на этой кривой возникает волна  $QP$ , вдоль которой скорость будет параллельна касательной к стенке и радиальной скорости в точке  $P$ . Через эту последнюю точку проходят две характеристики: одна представляет волну  $PQ$ , образующую угол  $\mu$

с направлением скорости и принадлежащую к семейству  $C_+$ , другая  $Pt$  составляет с направлением скорости угол  $-\mu$  и принадлежит к семейству  $C_-$ .



Фиг. 20.7

Геометрическое место точек  $P$  представляет характеристическую кривую, определяемую, согласно выражениям (19.44) и (19.46), уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \mp \mu). \quad (20.8)$$

Если ввести полярные координаты, то уравнение примет простой вид

$$r \frac{d\theta}{dr} = \pm \operatorname{tg} \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (20.9)$$

и интегрируется путем использования выражения (20.7), с помощью которого можно представить  $r$  и  $dr$  в зависимости от  $M$ . Таким образом, будем иметь

$$\frac{dr}{r} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{x-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}, \quad (20.10)$$

откуда, подставляя результат в уравнение (20.9), получим соотношение

$$\pm d\theta = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{x-1}{2} M^2} \frac{dM}{M \sqrt{M^2 - 1}}, \quad (20.11)$$

идентичное уравнению (17.43), которое легко интегрируется с помощью подстановки

$$\sqrt{M^2 - 1} = y, \quad \frac{MdM}{\sqrt{M^2 - 1}} = dy, \quad (20.12)$$

приводящей к равенству

$$\pm d\theta = \frac{dy}{1 + \frac{x-1}{x+1} y^2} - \frac{dy}{1 + y^2}. \quad (20.13)$$

Уравнение (17.30), установленное ранее, может быть, следовательно, получено также этим методом:

$$\pm \theta = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right] - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1} + C, \quad (20.14)$$

причем постоянная  $C$  определится, если положить  $\theta = 0$  для  $M = M_1$ :

$$C = \arctg \sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \arctg \left[ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sqrt{M_1^2 - 1} \right]. \quad (20.15)$$

Координаты точек кривой  $BQC$ , которую надо построить, будут соответственно

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta + \overline{PQ} \cos (\mu + \theta), \\ y &= r \sin \theta + \overline{PQ} \sin (\mu + \theta). \end{aligned} \quad (20.16)$$

Из уравнения неразрывности

$$\overline{PQ} \cdot \rho \omega \sin \mu = \frac{2\pi r \rho \omega}{2\pi} (\theta_0 - \theta) \quad (20.17)$$

выводится соотношение

$$\overline{PQ} = \frac{(\theta_0 - \theta)r}{\sin \mu}; \quad (20.18)$$

подставляя найденное значение в уравнение (20.16), получим параметрические уравнения кривой  $BQC$ :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta + r (\theta_0 - \theta) \frac{\cos (\mu + \theta)}{\sin \mu}, \\ y &= r \sin \theta + r (\theta_0 - \theta) \frac{\sin (\mu + \theta)}{\sin \mu}. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Для практического построения этой кривой нужно сначала определить углы  $\theta$  и  $\mu$  из формулы (20.14) или из таблицы характеристик, как функции числа  $M$ , которое убывает, начиная от значения  $M_1$ . Следовательно, параметром изменения будет  $M$ , и график кривой будет тем точнее, чем больше значений  $M$  вводится в расчет.

Можно рекомендовать этот метод, легкий для применения и дающий достаточно точные результаты, как имеющий преимущество по сравнению с трудоемкими графическими методами, особенно, если иметь в виду погрешности, сопровождающие обычно геометрические построения.

**20.3.1. Приближенное определение течения вблизи звуковой горловины.** В предшествующем разделе предполагалось, что скорость достигает критической величины в звуковой горловине вдоль окружности радиуса  $r_c$  с началом в точке  $O$  (см. фиг. 20.7). Чтобы дать этой гипотезе качественное физическое истолкование, определим приближенно течение в ближайшей окрестности звуковой горловины. Применяя для этой цели аргументацию Зауэра [18], берем в качестве отправной точки общее уравнение (5.33б)

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (20.20)$$

где  $u$  и  $v$  — компоненты полной скорости; обозначая критическую скорость через  $c$ , имеем

$$u = (1 + \alpha)c, \quad v = \beta c. \quad (20.21)$$

Величина скорости вблизи звуковой горловины очень близка к скорости звука, поэтому  $\alpha$  и  $\beta$  будут чрезвычайно малы, так что их квадратами и произведениями можно пренебречь.

Заметим также, что скорость звука очень близка к критической скорости; действительно, из уравнения Бернулли (5.2) следует

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (u^2 + v^2) \approx [1 - (\kappa - 1)\alpha]c^2. \quad (20.22)$$

Подставляя результат в уравнение (20.20) и пренебрегая членами второго порядка, получим

$$(\kappa + 1)\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \quad (20.23)$$

Предполагается, что  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$  будет иметь тот же порядок величины, что и  $\alpha$ , тогда как  $\beta$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial y}$  будут величинами более высокого порядка. Если обозначить потенциал скорости через  $\Phi$  и положить

$$\Phi = c(x + \varphi), \quad (20.24)$$

то

$$\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (20.25)$$

Разлагая  $\varphi$  в ряд вида

$$\varphi = \varphi_0(x) + y^2 \varphi_2(x) + y^4 \varphi_4(x) + \dots, \quad (20.26)$$

производя соответствующие подстановки в уравнение (20.23) и приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = \frac{\kappa + 1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varphi_4 = \frac{\kappa + 1}{12} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{(\kappa + 1)}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \dots \end{aligned} \quad (20.27)$$

Рассматривая точку  $O$  (фиг. 20.8), в которой скорость достигает критического значения ( $u = c$ ,  $v = 0$ ), как начало системы координат, предполагая, что скорость вблизи точки  $O$  изменяется линейно вдоль оси  $x$  ( $y = 0$ ), как это и наблюдается в действительности, и обозначая некоторый заданный коэффициент через  $m$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = mx, \\ \varphi_0 &= \frac{1}{2} mx^2; \end{aligned} \quad (20.28)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\kappa + 1}{2} m^2 x, \\ \varphi_4 &= \frac{(\kappa + 1)^2}{24} m^3, \dots \end{aligned} \quad (20.29)$$

При этих условиях получим

$$\alpha = mx + \frac{\kappa + 1}{2} m^2 y^2 + \dots, \quad (20.30a)$$

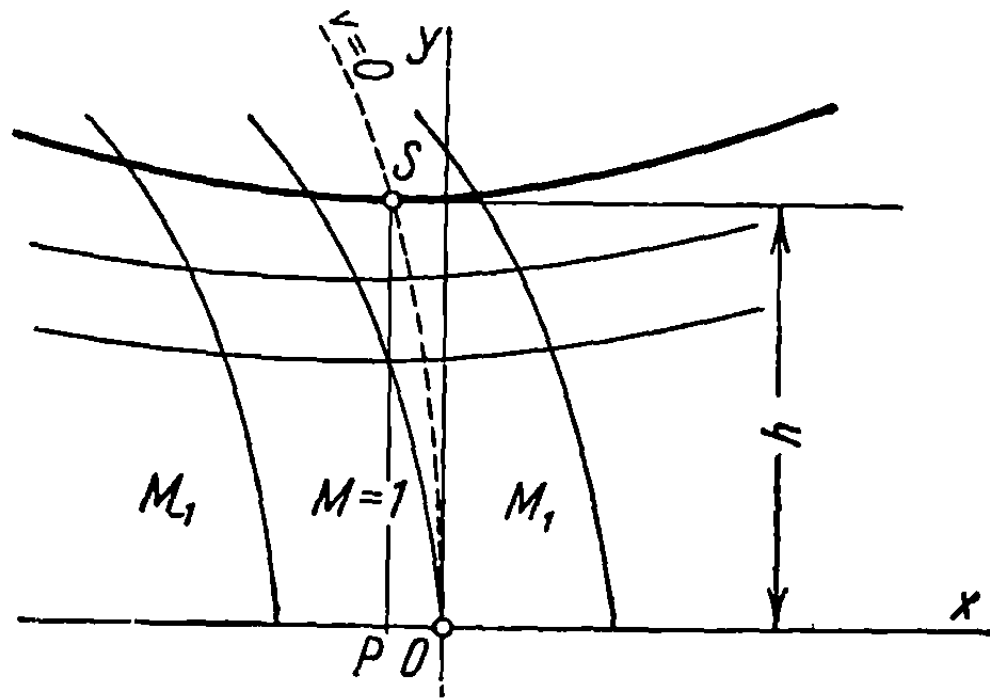
$$\beta = (\kappa + 1) m^2 xy + \frac{(\kappa + 1)^2}{6} m^3 y^3 + \dots \quad (20.30b)$$



Точки, в которых скорость горизонтальна, лежат на параболе, определяемой уравнением

$$x = -\frac{x+1}{6} m y^2, \quad (20.31)$$

которая проходит также через точку  $S$  узкого сечения, расположенную на некоторой линии тока, которая может быть в конечном счете внешней стенкой (фиг. 20.8).



Фиг. 20.8

Если  $h$  — высота этого сечения, то расстояние  $x_p$ , на котором оно находится от начала координат, определяется зависимостью

$$x_p = -\frac{x+1}{6} m h^2. \quad (20.32)$$

Возвращаясь к уравнению Бернулли (20.22), представленному в двух формах

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{x+1}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \frac{x-1}{2} M^2, \quad (20.33a)$$

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{x+1}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \frac{x-1}{2} \frac{c^2}{a^2} [(1+\alpha)^2 + \beta^2], \quad (20.33b)$$

и пренебрегая членами  $m^3 y^3$  и членами, содержащими более высокие степени  $y$ , легко выводим соотношение

$$K = \frac{(x+1) M^2}{2 + (x-1) M^2} = (1+\alpha)^2 + \beta^2 \approx 1 + 2mx + m^2 x^2 + \\ + (x+1) m^2 y^2 [1 + mx + (x+1) m^2 x^2] + \dots \quad (20.34)$$

Это уравнение дает возможность вычертить все кривые  $M = \text{const}$  ( $K = \text{const}$ ):

$$y^2 = \frac{K - 1 - 2mx - m^2 x^2}{(x+1) m^2 [1 + mx + (x+1) m^2 x^2]}. \quad (20.35)$$

Точки, соответствующие критической скорости ( $M = 1$ ,  $K = 1$ ), лежат приближенно на параболе

$$y^2 = -\frac{x(2+mx)}{(x+1) m [1 + mx + (x+1) m^2 x^2]} \approx -\frac{2x}{(x+1) m}. \quad (20.36)$$

Величина  $m$  мала и может предполагаться изменяющейся между 0,05 и 0,15. Если принято определенное значение для  $m$ , то линии тока вблизи звуковой горловины могут быть вычерчены. С этой целью исходим из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\beta}{1 + \alpha} = \frac{(x + 1) m^2 x y + \frac{1}{6} (x + 1)^2 m^3 y^3}{1 + m x + \frac{1}{2} (x + 1) m^2 y^2} \quad (20.37)$$

и наносим линии тока шаг за шагом.

Для внешней стенки построение начинается от точки  $S$  и вычисляется  $\Delta y$  для малых приращений абсциссы  $\Delta x$  путем применения записанного выше уравнения.

**З а м е ч а н и е.** Более точные результаты можно получить посредством введения дополнительных членов в уравнение (20.23). Так, полагая, что изменения  $\alpha$  в зависимости от высоты или  $\beta$  в зависимости от  $x$  будут того же порядка, как  $\alpha$  и  $\beta$ , получим выражение для второго члена уравнения (20.20)

$$\frac{uv}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx c\beta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (20.38)$$

и вместо уравнения (20.23) будем иметь соотношение

$$(x + 1) \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + \beta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = 0. \quad (20.39)$$

Исходя из этого уравнения и представляя функцию  $\varphi$  в форме

$$\varphi = \frac{1}{2} m x^2 + x \varphi_1(y) + \varphi_2(y), \quad (20.40)$$

И. М. Юрьев [19] получил более хорошее приближение при вычислении скоростей.

#### 20. 4. Рассмотрение сверхзвукового диффузора

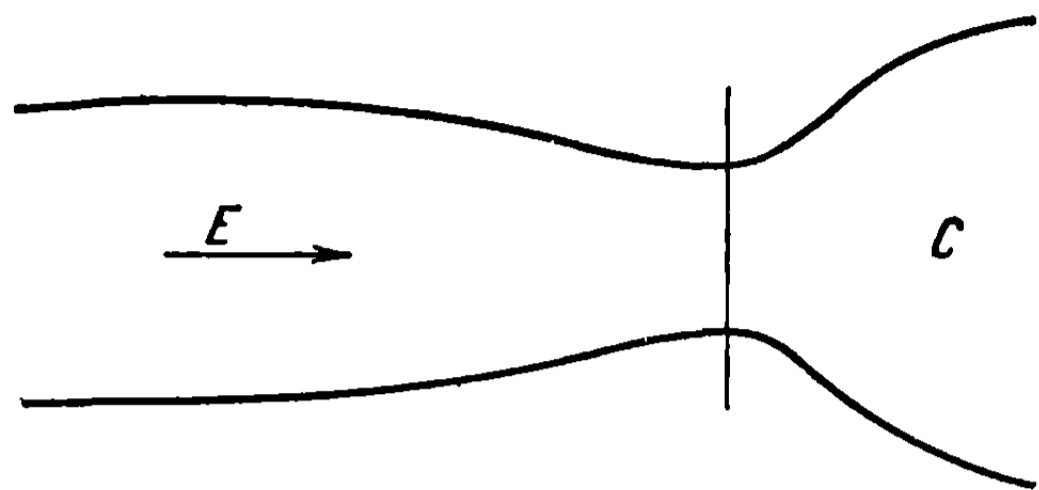
В настоящем разделе рассматривается сверхзвуковой диффузор аэродинамической трубы (см. фиг. 20. 1), расположенный между рабочей камерой и частью трубы, где течение становится дозвуковым. Проблема диффузора особенно сложна и поэтому должна рассматриваться с различных точек зрения; необходимо изучить условия равновесия, потери, обусловленные трением и отрывом потока, баланс энергии, начальные и текущие условия и т. д.

Так как с некоторыми из аспектов этой задачи мы уже имели дело (см. раздел 8), то нет необходимости восстанавливать приведенные ранее соображения. Теоретически с помощью сверхзвукового диффузора мы превращаем сверхзвуковой поток в дозвуковой, избегая, насколько это возможно, ударных волн или уменьшая их интенсивность, чтобы свести к минимуму потерю напора. Если исключить трение, то получится идеальный диффузор, приводящий поток к числу  $M=1$ , после чего он замедляется посредством дозвукового диффузора.

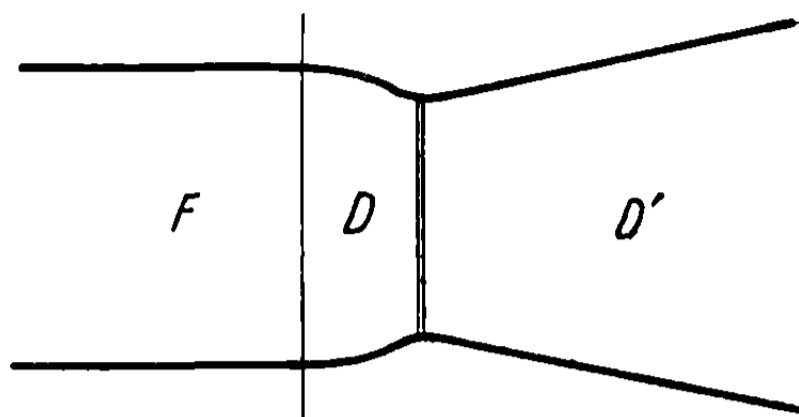
В этом случае идеальный диффузор является просто эффузором, в котором поток движется в обратном направлении (фиг. 20. 9).

Если трение также принимается в расчет, то отличие течения через диффузор становится тотчас же очевидным благодаря утолщению пограничного слоя и тому, что этот слой становится более турбулентным при возрастании давления вдоль стенки. Кроме того, может произойти отрыв потока, что существенно изменит течение.

Из-за этих явлений преимущества слабого постепенного замедления потока в диффузоре значительно уменьшаются.



Фиг. 20.9



Фиг. 20.10

При отсутствии сверхзвукового диффузора переход осуществляется вследствие возникновения нормальной ударной волны, которая превращает сверхзвуковой поток в рабочей камере в дозвуковой поток в дозвуковом диффузоре (фиг. 20. 10). Напомним, что при этом будут большие потери, которые возрастают при увеличении числа Маха в рабочей камере. Для малых чисел Маха, заключенных между  $M=1,4$  и  $1,6$ , потери, обусловленные трением в диффузоре, эквивалентны потерям, вызванным нормальными ударными волнами, поэтому бесполезно строить диффузор при таких числах Маха.

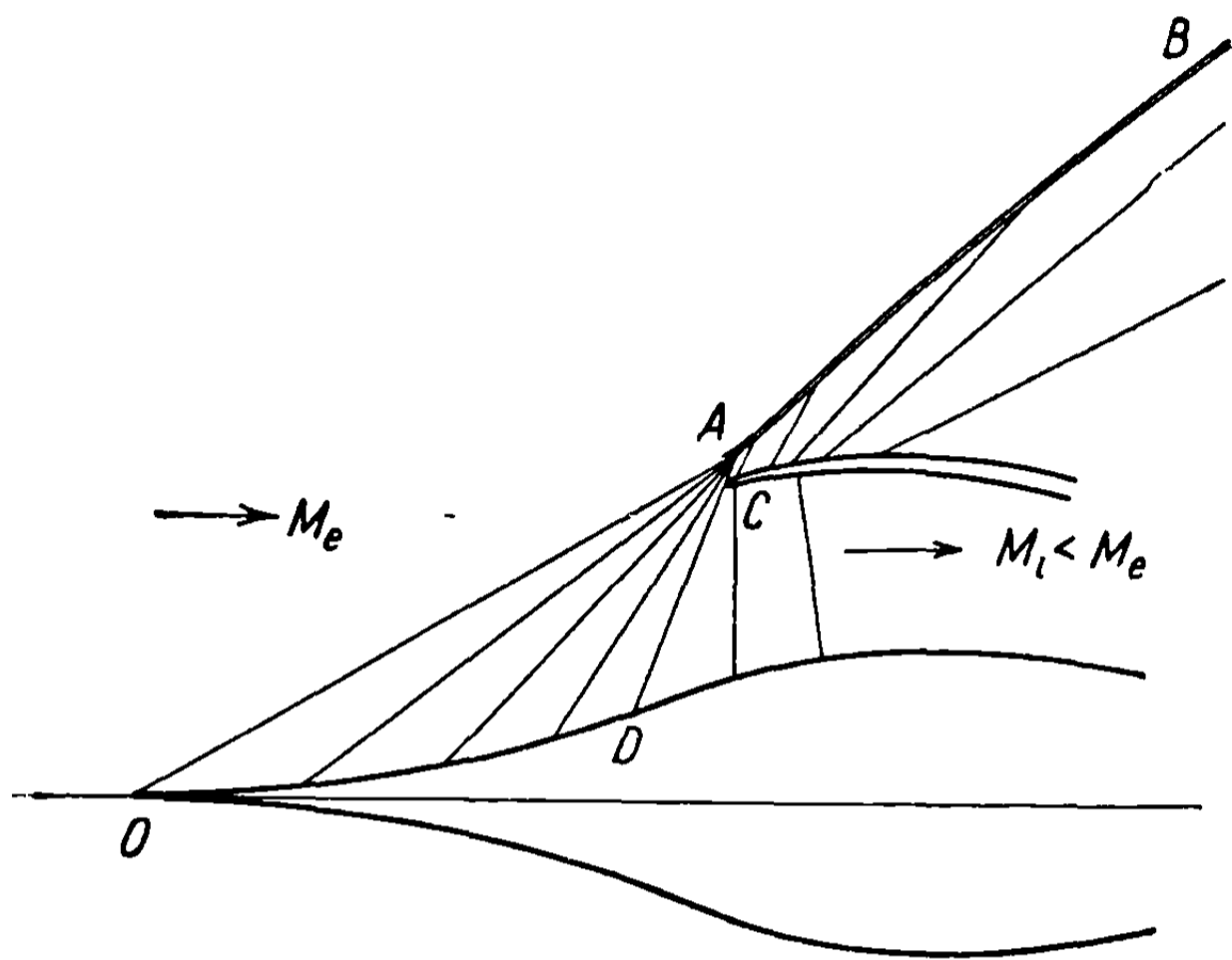
Сверхзвуковой диффузор необходим для значений числа  $M$ , больших  $1,7$ ; однако, в соответствии с начальными условиями, он может достигать только определенных размеров, так как узкое сечение будет значительно больше звуковой горловины диффузора. Эффективность диффузора при его нормальном действии можно повысить путем уменьшения узкого сечения, при условии соответствующего регулирования, когда поток пропускается через начальное узкое сечение. Последнее не должно заметно отличаться от сечения звуковой горловины в собственном смысле слова.

Суммируя, можно констатировать, что проектирование сверхзвукового диффузора фактически включает в себя только определение узкого сечения, которое очень близко к сечению звуковой горловины и построению соответствующего эффузора. Интенсивность ударной волны в минимальном сечении будет показывать порядок величины потерь в диффузоре.

Таким образом, ясно, что для диффузора требуются специальные расчеты; достаточны практические рассмотрения, которые обсуждались в главе о сверхзвуковых аэродинамических трубах.

Другой род диффузора, преобразующий внешнее сжатие, применяется на входе реактивного двигателя при сверхзвуковом полете. Хотя это явление трехмерное, дадим, в порядке иллюстрации действия такого

диффузора, схематическое представление двумерного течения (фиг. 20.11). Центральное тело имеет возрастающий наклон, дающий возможность волнам сжатия перейти от внешнего потока с числом  $M_e$  к потоку с числом  $M_i$  внутри трубы посредством изэнтропического преобразования. Эти прогрессивные волны, однако, встречаются, что приводит к возникновению ударной волны, вызывающей увеличение волнового сопротивления. Указанный эффект можно ослабить при помощи соответствующей ориентации внешней стенки, в результате чего волны разреже-



Фиг. 20.11

ния постепенно будут уменьшать интенсивность ударной волны, погашая ее в некоторой точке  $B$  и сокращая ее длину. Переход потока от  $M_e$  к  $M_i$  совершается изэнтропически и, следовательно, может быть легко рассчитан. При этом нет ограничений, касающихся начальных условий, и могут быть получены числа Маха  $M_i$ , очень близкие к единице, что является значительным преимуществом такого диффузора. В самом деле, он

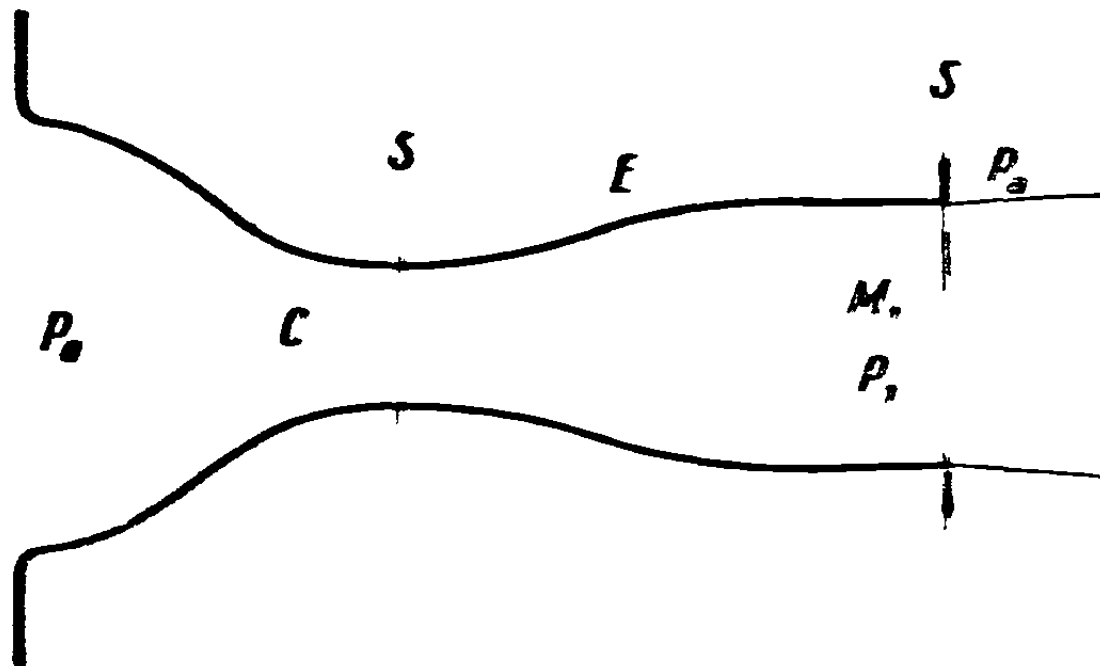
действует как компрессор, так как потерями напора, вызываемыми ударной волной, появляющейся в конечном счете при числе  $M_i$ , чтобы обеспечить равновесие, можно пренебречь. Следовательно, сжатие газа, происходящее в трубе вплоть до выходного сечения и изменяющее начальное состояние газа, определяемое наружными условиями, можно рассматривать как полностью изэнтропическое.

## 20.5. Определение условий течения в плоских сверхзвуковых струях

Пусть воздух в некотором заданном резервуаре сжат до давления  $p_0$  и предположим, что он вытекает в атмосферу или в другой резервуар, где существует давление  $p_a$ . Предположим, что сопло, через которое вытекает масса газа, образовано сужающейся частью  $C$ , имеющей подходящий контур, чтобы обеспечить однородность потока в узком сечении  $S$  (звуковой горловине), и идеальным эффузором  $E$ , регулирующим однородность течения через выходное сечение в атмосферу или в другой резервуар (фиг. 20.12). Давление в выходном сечении  $S_1$  обозначим через  $p_1$  и число Маха через  $M_1$ . Так как рассматриваются плоские струи, сопло также будет рассматриваться как плоское.

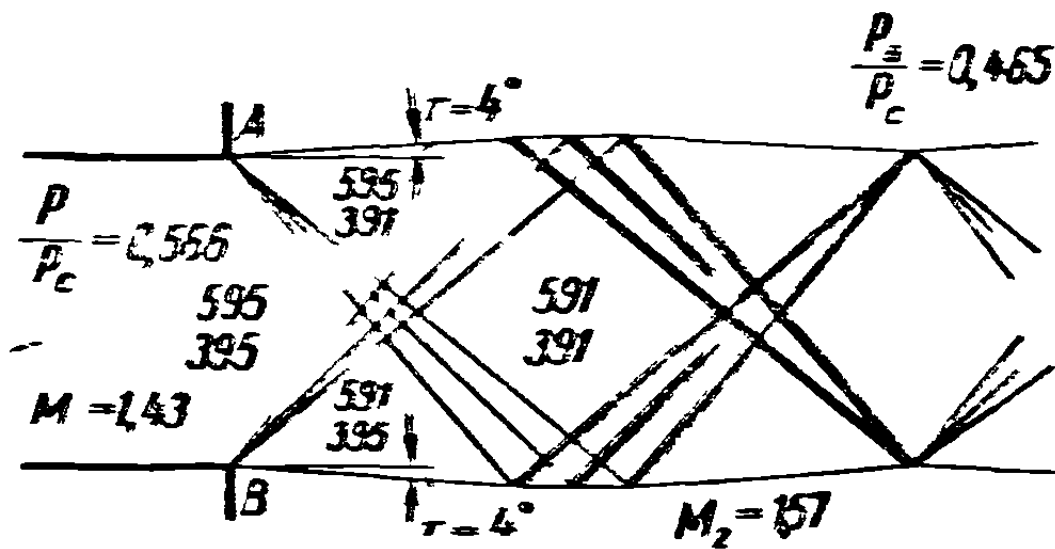
Посредством увеличения потока массы, протекающей через сопло, что достигается либо повышением давления  $p_0$  в первом резервуаре, либо понижением давления  $p_a$  во втором, получается в определенный момент скорость

звука в критическом сечении, за которым следует расширение потока в эффузоре. Далее нужно определить условия течения сверхзвуковой струи при ее выходе из сопла. Указанные вопросы в общем виде уже рассматривались в главе об одномерном течении, но там не было дано полного исследования поведения потока.



Фиг 20 12

Законы, относящиеся к отражению и интерференции волн, в общих чертах были уже описаны см. разделы 19.3 и 19.4; вместе с тем были описаны изменения в потоке при его прохождении через сетку волн интерференции. В настоящем разделе добавлены некоторые специфические детали, поскольку они могут быть полезны для практических применений



Фиг 20 13

Рассмотрим два случая: 1  $P_1 > P_a$  и 2  $P_1 < P_a$

1 В случае  $P_1 > P_a$  происходит расширение.

Применяя формулу 19.62 или таблицу характеристик 19.1, определяем отклонение потока, а также и число Маха  $M_2$  после расширения, и т.д. Если отклонение будет значительным, то можно его разделить на интервалы в  $1^\circ$  или  $2^\circ$  и применить графическое построение, описанное в одном из разделов. Изучение фиг. 20 13, изображающей конкретный случай, делает дальнейшее обсуждение излишним.

Обозначая критическое давление через  $P_c$ , имеем в рассматриваемом случае

$$\frac{P_1}{P_c} = ,566,$$

$$M_1 = 1,435,$$

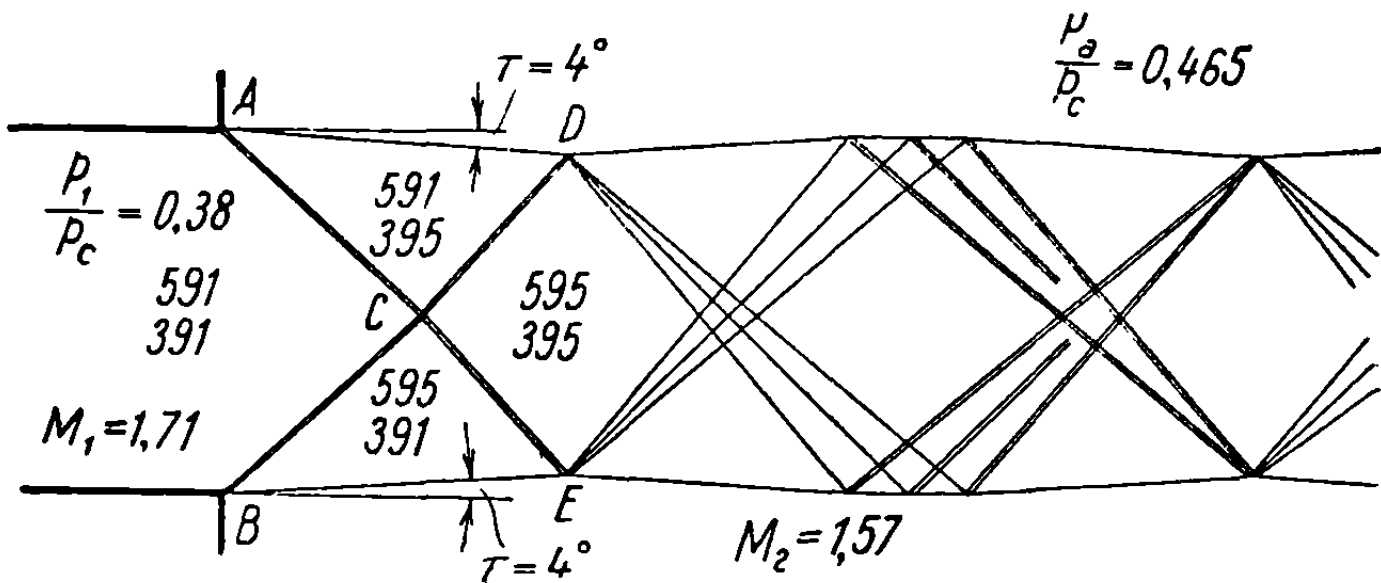
$$\frac{P_a}{P_c} = ,465$$

отсюда

$$M_2 = 1,571,$$

$$\tau = 4^\circ.$$

Построение завершается применением метода характеристик. Очевидно, что явление повторяется неограниченное число раз через правильные интервалы. Однако благодаря вязкости вихревая пелена на свободных границах постепенно утолщается, перемешивание частиц газа из зоны, находящейся в покое, и зоны, в которой происходит движение, становится более интенсивным до тех пор, пока явление не исчезает на определенном расстоянии от выходного отверстия.



Фиг. 20.14

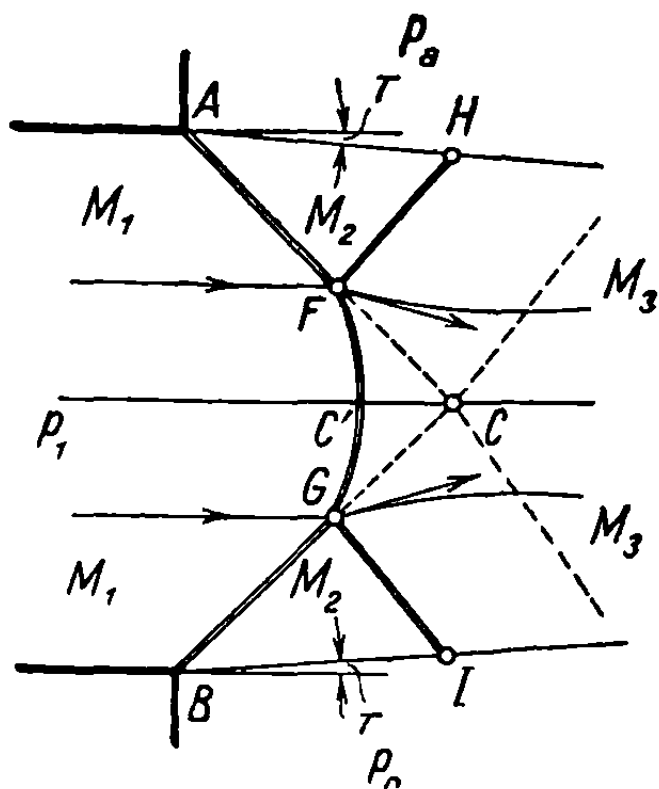
2) Случай  $p_1 < p_a$  отличается от первого наличием ударных волн, выходящих из точек  $A$  и  $B$ ; они пересекаются в точке  $C$  и достигают свободных границ в точках  $D$  и  $E$ , после которых начинается расширение (фиг. 20.14). Путем использования ударных поляр или применения формул

(19.59), (19.60), (19.61) можно определить отклонение  $\tau$ ,  $M_2$ ,  $\beta$  и т. д. Для иллюстрации положим

$$\frac{p_1}{p_c} = 0,38, \quad M_1 = 1,706, \quad \frac{p_a}{p_c} = 0,465;$$

в результате будем иметь

$$M_2 = 1,571, \quad \tau = 4^\circ.$$

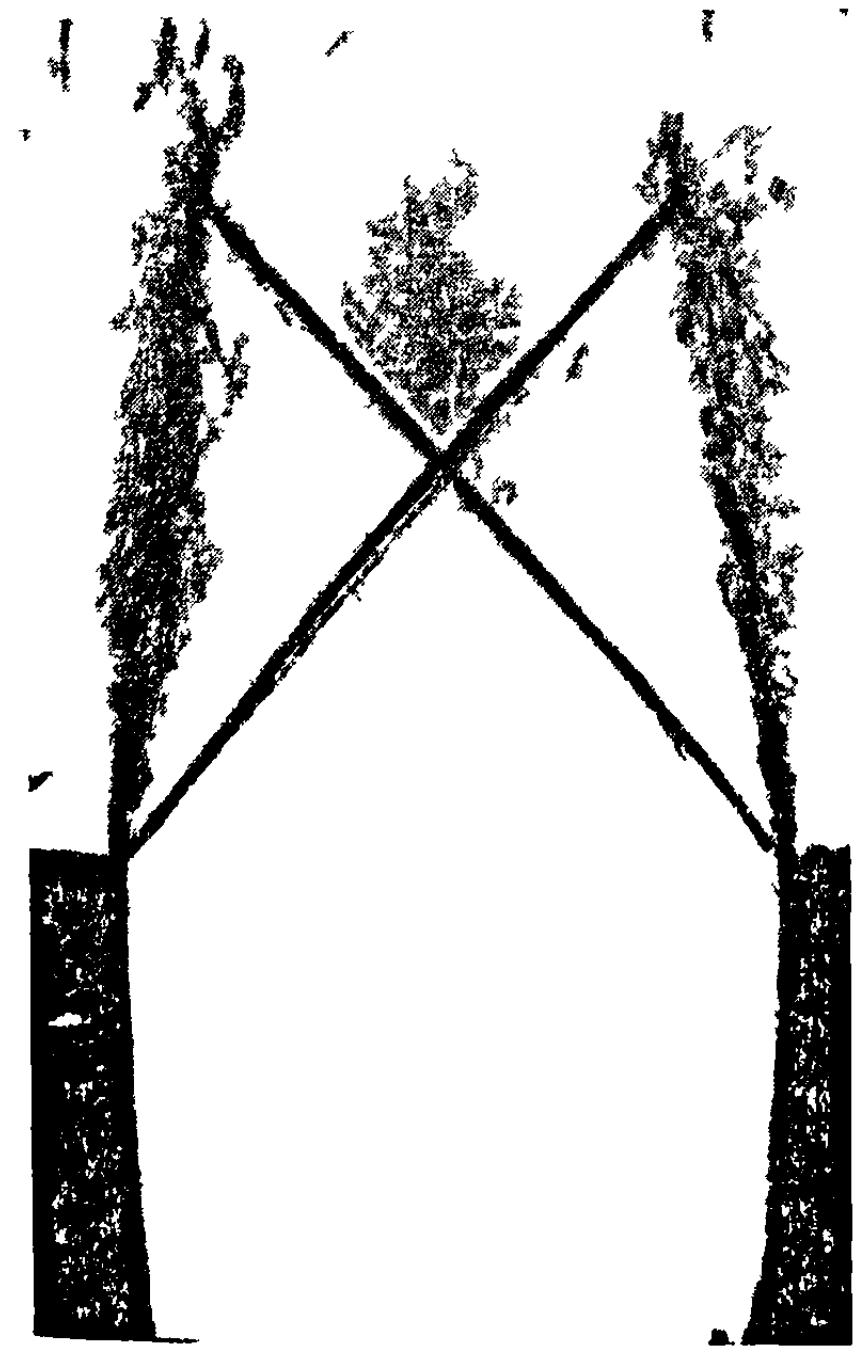


Фиг. 20.15

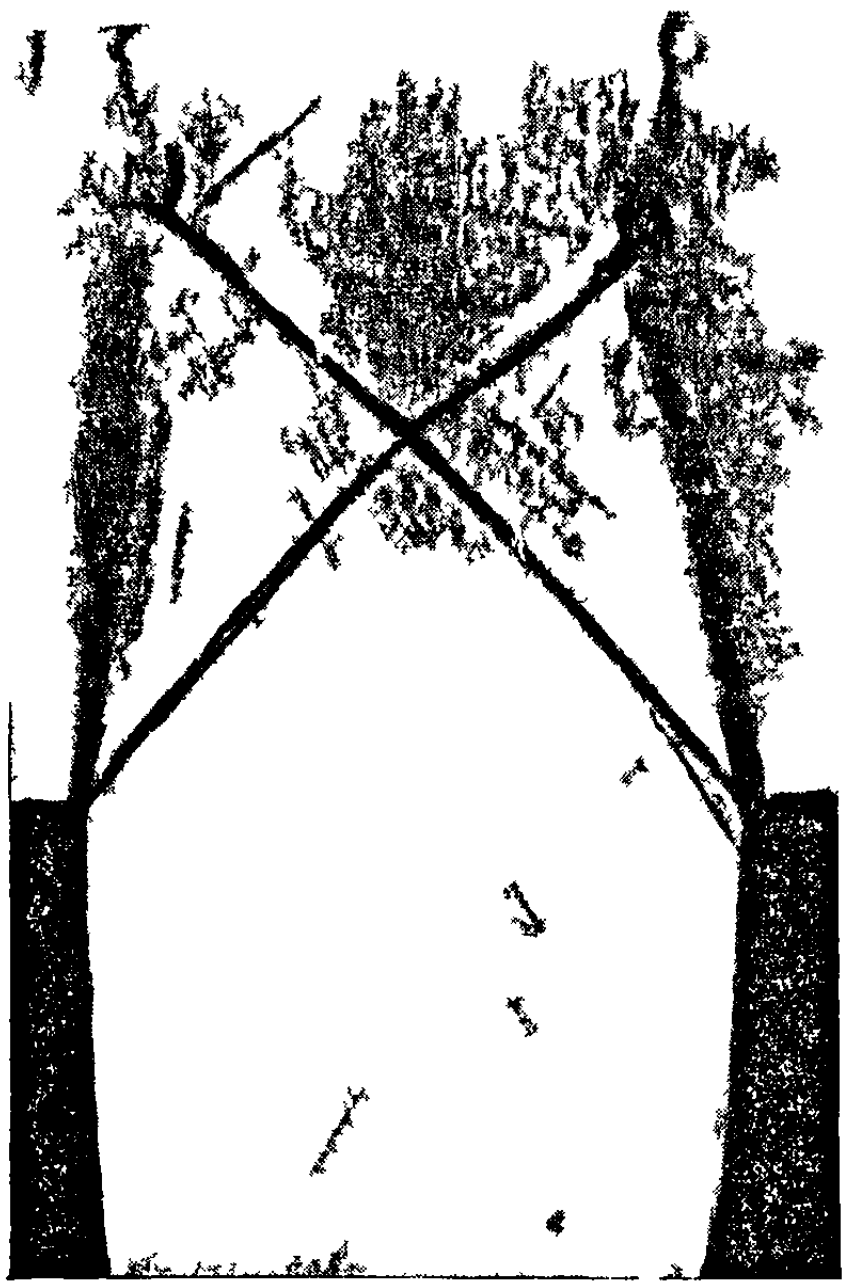
После того, как мы проследим за положением ударных волн  $AC$ ,  $CE$ ,  $BC$ ,  $CD$ , можно закончить построение, как в предыдущем случае.

К этому схематическому представлению условий течения в струе нужно добавить такое же, как и выше, замечание, что, благодаря вязкости явление исчезает на некотором расстоянии от выходного сечения.

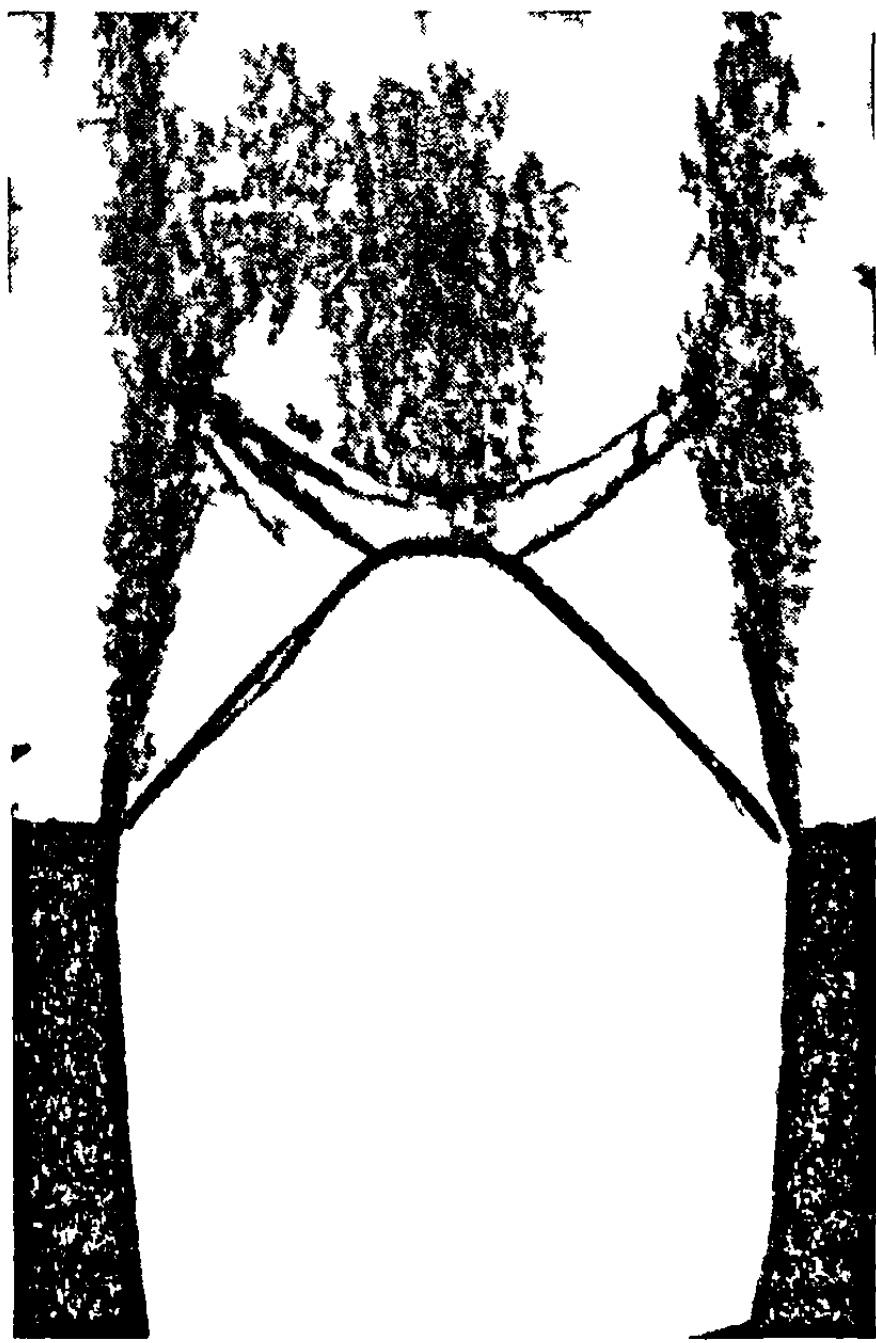
Если разность между  $p_a$  и  $p_1$  возрастает, то возникает новое явление, полностью изменяющее описанную картину течения. Так, если разность  $p_a - p_1$  увеличивается, то отклонение  $\tau$  возрастает,  $M_2$  умень-



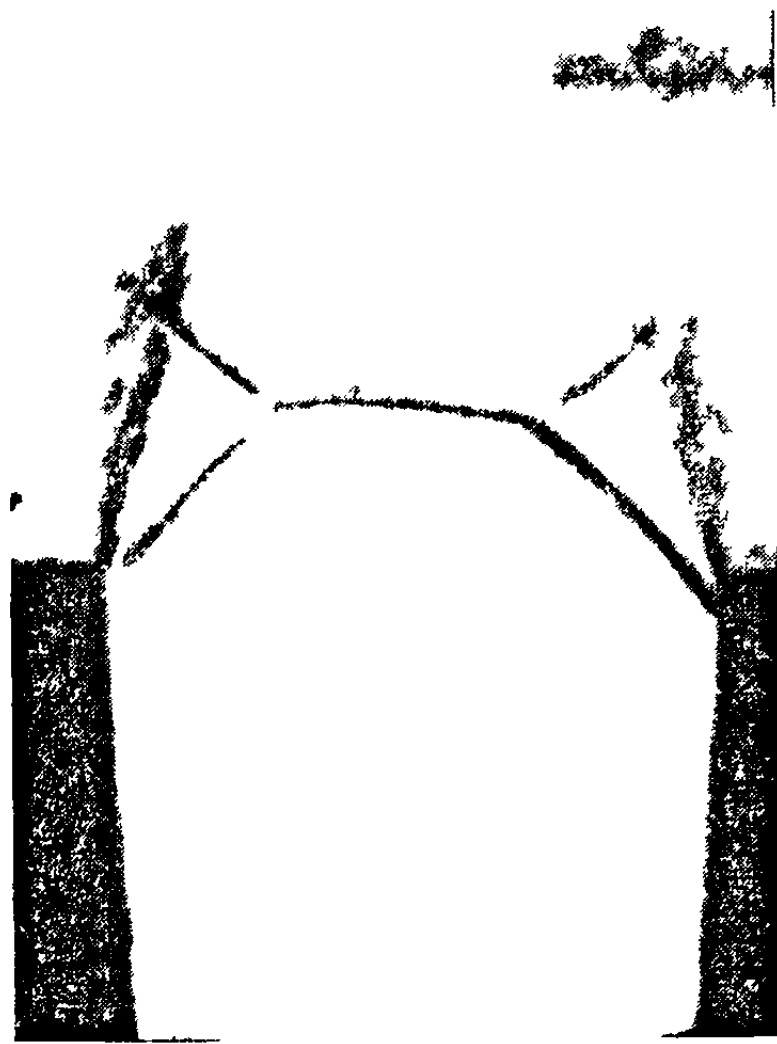
Фиг. 20. 16



Фиг. 20. 17



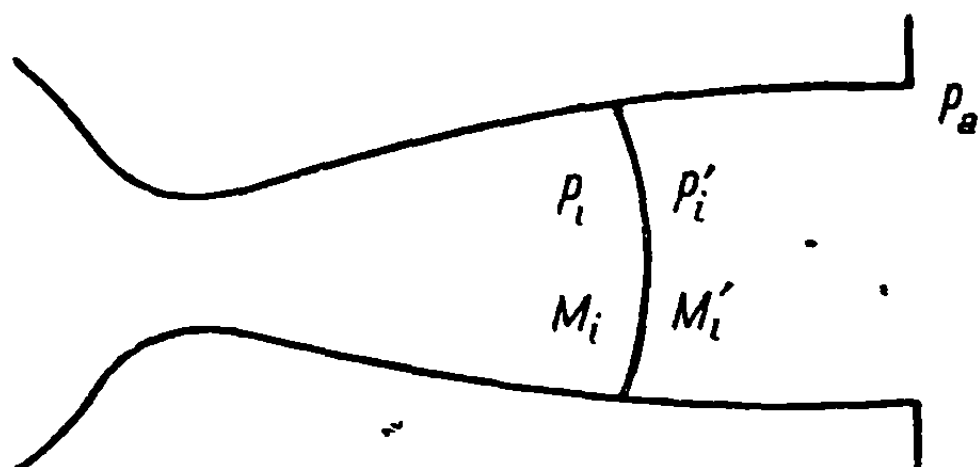
Фиг. 20 18



Фиг. 20. 19

шается, хотя поток остается сверхзвуковым ( $M_2 > 1$ ). Но в определенный момент условия течения в потоке  $M_2$  не будут более совместимы со столь большим отклонением, и волна отделяется от точки  $C$ , образуя отраженную волну Маха  $FC'G$ , нормальную к оси потока, которая встречает начальные ударные волны  $AF$  и  $BG$  в точках  $F$  и  $G$  (фиг. 20.15).

За линией  $FC'G$  поток будет дозвуковым, в то время как поток  $M_2$  остается сверхзвуковым; по условиям равновесия в точках  $F$  и  $G$  появляются ударные волны  $FH$  и  $GI$ . Чтобы обеспечить равновесие, поток в точках  $F$  и  $G$  не должен быть параллелен оси, чтобы не повторялся процесс в точке  $C$ .



Фиг. 20.20

Поэтому поток будет иметь такое направление, что новое его отклонение допустит существование волн  $FH$  и  $GI$ . Наклон потока в точках  $F$  и  $G$  вызывает также отклонение ударных волн  $FC'$  и  $GC'$ , так что волна  $FC'G$  будет криволинейной и дозвуковое течение вниз по потоку станет завихренным.

Если разность  $p_a - p_1$  увеличивается еще больше, то точки  $F$  и  $G$  приближаются к точкам  $A$  и  $B$  и отклонение  $\tau$  не может возрасти сверх определенного предела; в этом случае равновесие не может поддерживаться без появления ударной волны, нормальной к потоку, в выходном сечении.

Чтобы иллюстрировать эти явления, воспроизводим ниже серию фотографий из книги Ферри [15], показывающих развитие ударных волн в зависимости от разности  $p_a - p_1$ , или, как еще удобнее, в зависимости от отношений  $p_0/p_a$ , где  $p_0$  — давление в резервуаре (давление торможения).

Отношение  $\frac{p_0}{p_a}$  равно 4,18 (фиг. 20.16), 3,84 (фиг. 20.17), 3,67 (фиг. 20.18), 3,54 (фиг. 20.19). При дальнейшем возрастании  $p_a$  равновесие восстанавливается при помощи нормальной ударной волны, возникающей в некотором месте внутри эффузора (фиг. 20.20).

В каждой точке сопла величины  $p_i$  и  $M_i$  известны. Из диаграммы для давления в зависимости от числа Маха соответствующие условия  $p_i'$  и  $M_i'$  за ударной волной могут быть легко выведены. В дозвуковом потоке изменение давления  $p_i'$  вдоль сопла от рассматриваемой точки вплоть до выхода, где господствует давление  $p_a$ , также известно.

Поэтому можно изобразить диаграмму зависимости  $\frac{p_a}{p_0}$  от отношения  $\frac{p_i}{p_0}$ , изменяющегося вдоль эффузора, что снова приводит к определению положения ударной волны. Предельным положением будет звуковая горловина, где



интенсивность волны становится равной нулю; при этом поток во всем сопле становится дозвуковым.

**З а м е ч а н и е.** В приведенных рассмотренных не принимались в расчет трение и отделение пограничного слоя от стенок сопла; процесс рассматривался как вполне изэнтропический. В действительности процесс будет сложнее, так как значительное возрастание давления  $p_1'$  относительно  $p_1$  за ударной волной (см. фиг. 20.20) вызывает обычно также отрыв потока от стенок, который происходит либо постепенно, через посредство серии сложных волн, либо внезапно, когда поток сохраняет приблизительно одинаковое поперечное сечение вплоть до выхода из резервуара, а давление остается постоянным и равным  $p_a$ . Так как математический анализ не в состоянии объяснить весь процесс, необходимо проведение экспериментальных исследований

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. Prandtl. Phys. Zschr., 8, 1907, S. 23.
2. Th. Meyer. Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. (О двумерном сверхзвуковом течении газа.) Diss., Göttingen, 1908.
3. A. Busemann. Handbuch der experimental-Physik. Leipzig, Verlags-Gesellschaft, Bd. 4, T. 1, Gasdynamik, 1931, S. 443.
4. D. Riabouchinsky. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, Paris, № 108, 1937, 131 p.
5. J. J. Stoker. The Formation of Breakers and Bores. (Образование и разрушение приливных волн.) «Comm. Pure a. Appl. Math.», 50, № 1, 1948, p. 1—88.
6. E. Saiafoli, T. Oroveanu. Mecanica fluidelor. (Механика жидкости.) București, Ed. Academiei RPR, 1955.
7. W. F. Hilton. High-Speed Aerodynamics. (Аэродинамика больших скоростей) London, Longmans, Green a. Co., 1951, p. 200.
8. A. Busemann. Atti del V convegno «Volta», Roma, 1935.
9. C. Ferrarì. Aerodinamica. Arti Grafiche Viretto, Torino, 1939.
10. А. Ферри. Аэродинамика сверхзвуковых течений (пер. с англ.). Гос. изд техн-теорет. лит., М., 1953.
11. A. Ferrarì. «Atti Guidonia», № 17, Roma, 1939.
12. A. Busemann u. O. Walchner. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, Bd. 4, 1933
13. W. F. Hilton a. F. W. Pruden. Subsonic and Supersonic High Speed Tunnel Tests of a Facied Double-Wedge Aerofoil. Aeronaut. Res. Council «Rep. a. Mem № 2057, 1943.
14. Р. Курант и К. Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны (пер с англ.). ИЛ, М., 1950.
15. A. Ferrarì. «Atti Gudonia», № 37—38, 1940.
16. L. Prandtl u. A. Busemann. Stodola Festschrift. Zürich, 1929, p. 499.
17. A. O. Atkin. Two-Dimensional Supersonic Channel. (Двумерный сверхзвуков канал) Р. 1. «Aeronaut Res. Council Rep. a. Mem», № 2174.
18. R. Saueg. General Characteristics of Flow through Nozzles in the Neighbourhood of the Critical Velocity. (Общие характеристики течения через сопла вблизи критической скорости.) «Rep. Aeronaut. Res. Council», № 9, 1947, p. 499
19. И. М. Юрьев. К расчету сопел. ПММ, 19, вып. 1, 1955, стр. 103—105.

## Глава 7

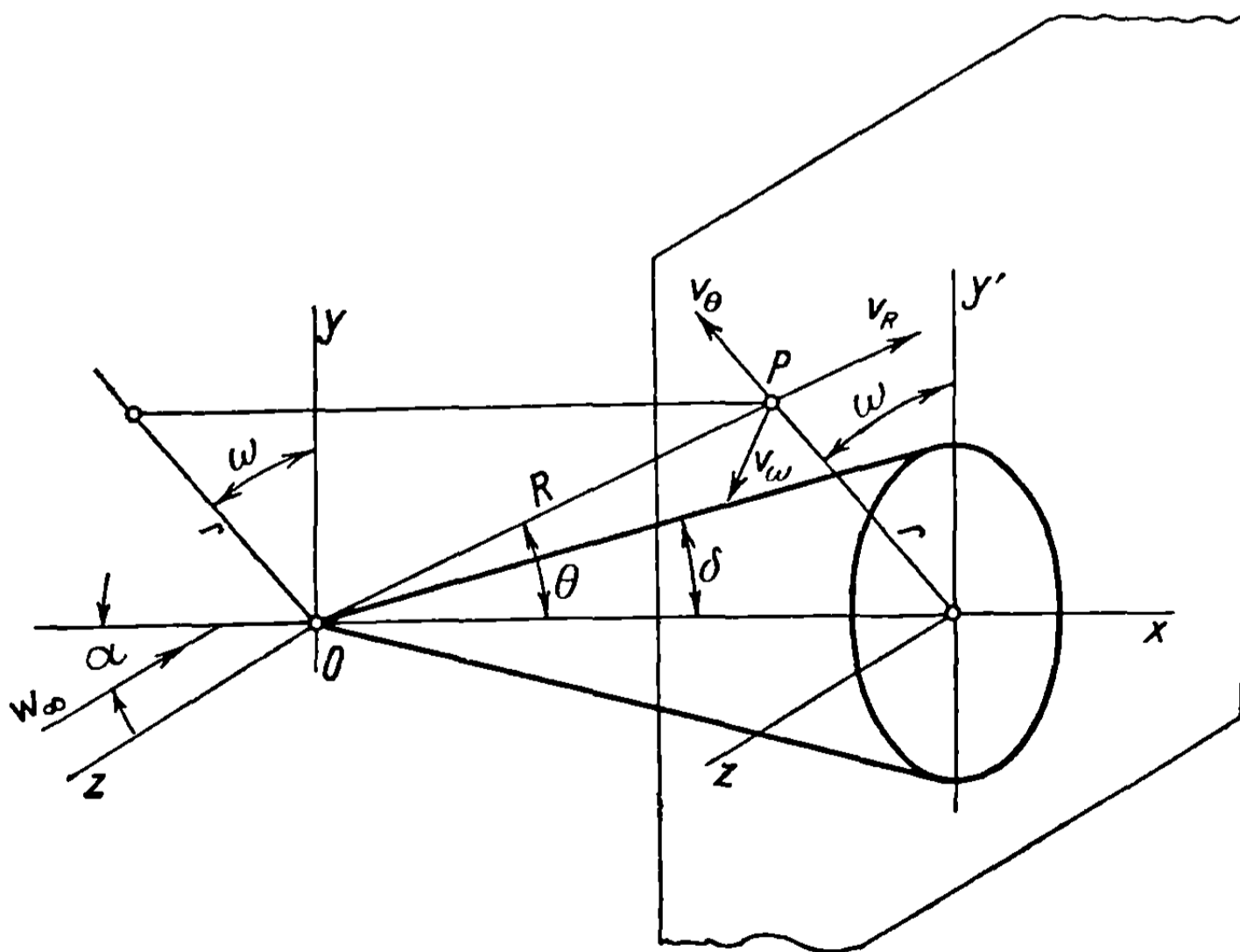
### ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ВОКРУГ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Результаты, полученные при решении задач о течениях вокруг тел вращения при гипотезе малых возмущений, становятся недействительными, если размеры поперечных сечений этих тел превышают предел, за которым возмущениями потока на бесконечности уже нельзя более пренебрегать.

Рассмотрим обтекание тела вращения, исходя из установленных общих уравнений движения, и исследуем некоторые задачи, представляющие большой практический интерес.

#### 21. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО КОНУСА

Рассмотрим неограниченный круглый конус, расположенный в потоке, имеющем скорость  $w_\infty$ , направленную под углом  $\alpha$  к оси симметрии



Фиг. 21.1

конуса. Рассматривая систему полярных координат  $R, \theta, \omega$  (фиг. 21.1), определенную согласно установленным правилам, заметим прежде всего, что характеристики движения, т. е. скорость, давление, плотность

и т. д., будут одинаковы вдоль любого радиуса-вектора  $R$ , и поэтому течение будет *коническим*. В любых двух поперечных сечениях, нормальных к оси конуса, точки пересечения с радиусом-вектором имеют подобное расположение относительно круговых контуров сечений; течение будет геометрически подобным во всех сечениях, поэтому свойства движения в этих точках пересечения и, следовательно, вдоль всего радиуса-вектора будут одинаковыми. При этих условиях общие уравнения движения (5.60) значительно упрощаются, как показано ниже.

### 21.1. Общие уравнения конического течения

Обозначим через  $v_R$ ,  $v_\theta$ ,  $v_\omega$  компоненты скорости в любой точке  $P$ , соответственно вдоль радиуса-вектора, нормали к этому радиусу в меридиональной плоскости и нормали к меридиональной плоскости, и через

$$\Phi = R \cdot V(\theta, \omega) \quad (21.1)$$

потенциал конического течения: последнее обозначение отличается от предшествующего (см. формулу 16.2), так как  $\varphi(\theta, \omega)$  заменено через  $V(\theta, \omega)$ ; таким образом, имеем

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} = V, \\ v_\theta &= \frac{\partial \Phi}{R \partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ v_\omega &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Замечая, что указанные компоненты скорости не изменяются с изменением  $R$ , и подставляя их выражения в общее уравнение движения (5.60 а), записанное в полярных координатах, получим

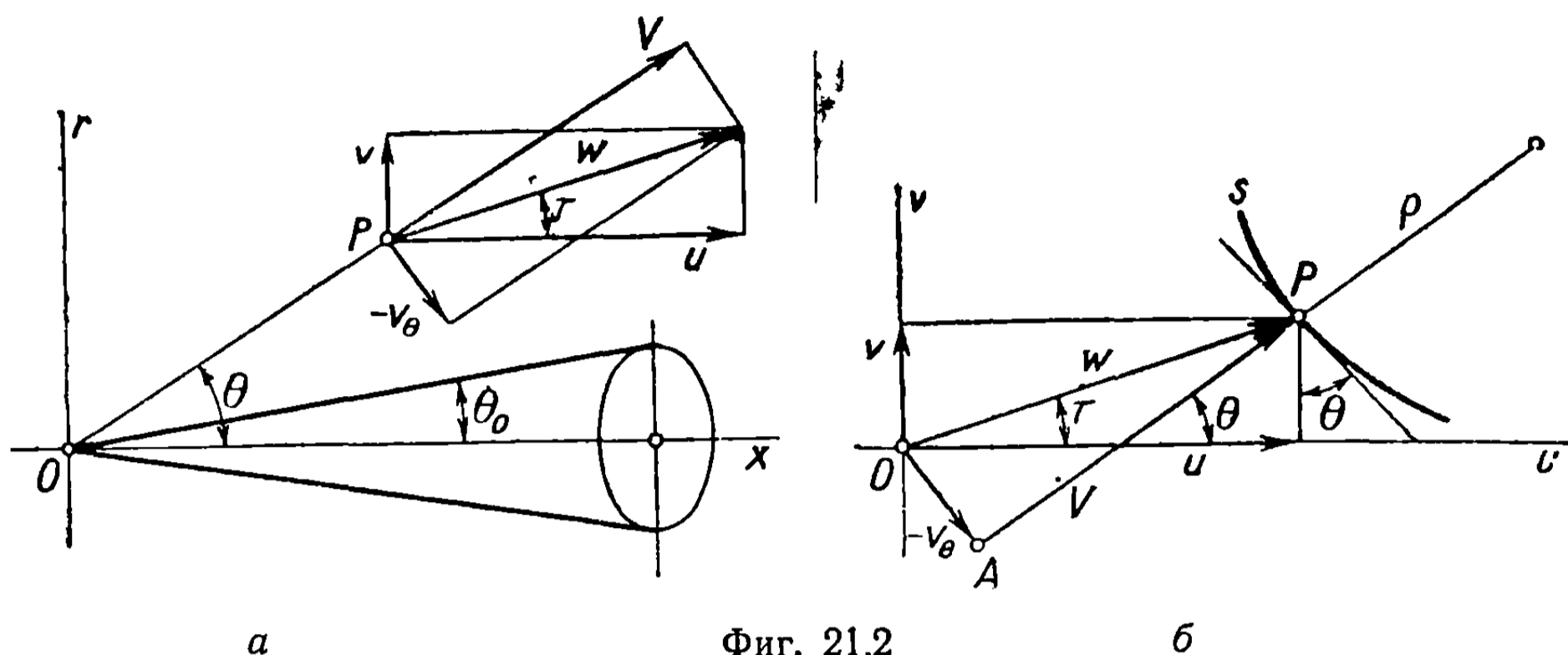
$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\omega}{\sin \theta \partial \omega} + v_R \left(2 - \frac{v_\omega^2 + v_\theta^2}{a^2}\right) - \\ &- \frac{2v_\theta v_\omega}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \omega} + \operatorname{ctg} \theta \left(1 + \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) v_\theta = \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \\ &+ \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 V}{\sin^2 \theta \partial \omega^2} + \left(2 - \frac{v_\omega^2 + v_\theta^2}{a^2}\right) V - \\ &- \frac{2v_\omega v_\theta}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \omega} + \operatorname{ctg} \theta \left(1 + \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Следовательно, задача сводится к определению функции  $V(\theta, \omega)$ , зависящей от переменных  $\theta$  и  $\omega$ .

Для этого, согласно Буземану [1], рассмотрим *годографическое представление* движения в меридиональной плоскости с осями  $Ox$  и  $Or$  и соответствующими компонентами скорости  $u$  и  $v$  (фиг. 21.2 а).

Легко могут быть написаны уравнения

$$\begin{aligned} u &= v_R \cos \theta - v_\theta \sin \theta = V \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta, \\ v &= v_R \sin \theta + v_\theta \cos \theta = V \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos \theta; \end{aligned} \quad (21.4)$$



Фиг. 21.2

следовательно, в меридиональной плоскости, дифференцируя по переменной  $\theta$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\left(v_R + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \sin \theta = -\left(V + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right) \sin \theta, \\ \frac{dv}{d\theta} &= \left(v_R + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \cos \theta = \left(V + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right) \cos \theta, \quad \frac{dv}{du} = -\operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Представим полную скорость в меридиональной плоскости, т. е. вектор с величиной

$$w = \sqrt{v_R^2 + v_\theta^2} = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (21.6)$$

на плоскости годографа  $Ouv$ , причем оси  $Ou$  и  $Ov$  будут соответственно параллельны осям  $Ox$  и  $Or$  (фиг. 21.2 б); тогда конец вектора  $w$  при изменении угла  $\theta$  опишет кривую  $S$ , элементарная дуга  $ds$  которой определится выражением

$$ds^2 = du^2 + dv^2 = \left(v_R + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)^2 d\theta^2. \quad (21.7)$$

Последнее можно также записать в виде

$$\frac{ds}{d\theta} = v_R + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = V + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \rho, \quad (21.8)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны линии  $S$  с центром кривизны на прямой  $AP$ , совпадающей по направлению с вектором  $v_R = V$ .

Эта формула будет использована для графического построения скоростей.

## 21.2. Круглый конус с осью, параллельной потоку

Когда ось конуса параллельна потоку, течение будет осесимметричным; все явления не изменяются с изменением угла  $\omega$ , компонента скорости  $v_\omega = 0$  и течение одинаково в каждой меридиональной плоскости. Единственной независимой переменной будет угол  $\theta$ .

Применяя выражение (21.8), приведем уравнение (21.3) к виду

$$\left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{d^2V}{d\theta^2} + \left(2 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) V + \operatorname{ctg} \theta \frac{dV}{d\theta} = \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \rho + V + \operatorname{ctg} \theta \frac{dV}{d\theta} = 0; \quad (21.9)$$

отсюда получается величина радиуса кривизны

$$\rho = - \frac{v_R + v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}} = - \frac{V + \frac{dV}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta}{1 - \left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{a^2}}. \quad (21.10)$$

Обозначая через  $W$  максимальную скорость и через  $w$  полную скорость (см. формулу 21.6), получим следующее соотношение из уравнения Бернулли (5.2a):

$$a^2 = \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - w^2); \quad (21.11)$$

отсюда

$$\frac{v_\theta^2}{a^2} = \frac{2}{\kappa - 1} \frac{v_\theta^2}{W^2 - w^2}. \quad (21.12)$$

Подставляя результат в уравнение (21.9), получим

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - w^2) - v_\theta^2 \right] \frac{d^2V}{d\theta^2} + [(\kappa - 1)(W^2 - w^2) - v_\theta^2] V + \\ & + \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - w^2) \operatorname{ctg} \theta \frac{dV}{d\theta} = \left[ - \frac{\kappa + 1}{2} \left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - V^2) \right] \frac{d^2V}{d\theta^2} + \\ & + (\kappa - 1) V (W^2 - V^2) + \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - V^2) \operatorname{ctg} \theta \frac{dV}{d\theta} - \\ & - \kappa V \left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{dV}{d\theta}\right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Это уравнение позже применено к расчету скоростей и давлений в любой точке пространства, заключенного между конусом ударной волны и обтекаемым конусом.

Из уравнения (21.10) определяется радиус кривизны

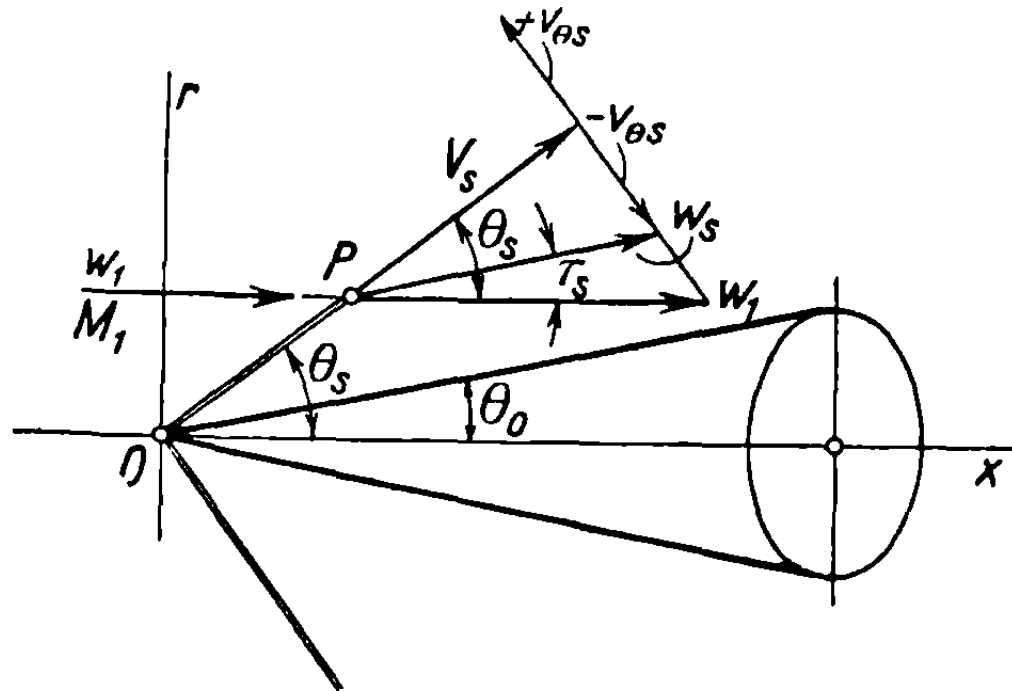
$$\frac{\rho}{W} = - \frac{\frac{v_\theta}{W} \operatorname{ctg} \theta + \frac{V}{W}}{1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}} = - \frac{\left(1 - \frac{v_\theta^2}{W^2} - \frac{V^2}{W^2}\right) \left(\frac{V}{W} + \frac{v_\theta}{W} \operatorname{ctg} \theta\right)}{1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{v_\theta^2}{W^2} - \frac{V^2}{W^2}}; \quad (21.14)$$

это соотношение может быть использовано для построения кривой  $S$ .

**21.2.1. Определение конической ударной волны.** Прежде всего заметим, что уравнения плоских ударных волн (см. раздел 7.3) применяются идентично к случаю ударных волн конической формы, которые называются поэтому *коническими ударными волнами* и имеют те же вершину и ось, как и конус, около которого изучается течение. Чтобы сохранить предшествующие обозначения, положим, что  $\theta_s$  — полуугол конуса ударной волны и  $\tau_s$  — угол, который образует полная скорость  $w_s$  за ударной волной

с первоначальным направлением потока (фиг. 21.3). Заметим, что радиальная скорость  $v_R = V_s = \omega_1 \cos \theta_s$  будет одинаковой на обеих сторонах ударной волны (7.38a), тогда как скорость  $\omega_s$ , составляющая угол  $\tau_s$  с осью конуса, отличается от скорости потока  $\omega_1$ . Применяя соотношение (7.52a) получим

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(\theta_s - \tau_s)}{\operatorname{tg} \theta_s} &= - \frac{v_{\theta s} \operatorname{ctg} \theta_s}{V_s} = - \frac{v_{\theta s}}{W} \frac{W}{\omega_1 \sin \theta_s} = \\ &= \frac{2}{\kappa + 1} \left( \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \theta_s} + \frac{\kappa - 1}{2} \right); \end{aligned} \quad (21.15)$$



Фиг. 21.3

подставляя вместо  $M_1$  его выражение из уравнения (5.2б), в котором также  $V$  заменяется через  $\omega$  и  $V_m$  через  $W$ , в согласии с новыми обозначениями, будем иметь

$$- \frac{v_{\theta s}}{W} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{V_s}{W} \left( \frac{W^2}{V_s^2} - 1 \right) \operatorname{ctg} \theta_s, \quad (21.16)$$

так что скорость  $v_{\theta s}$  может быть подсчитана как функция от  $V_s$ , если полуугол конуса ударной волны  $\theta_s$  известен. Заметим, что максимальная скорость  $W$  имеет одинаковую величину впереди и позади волны, так как энтальпия, соответствующая условиям торможения, остается постоянной ( $\frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}$ ).

### 21.3. Вычисление скоростей и давления при осесимметричном обтекании круглого конуса

Уравнение движения (21.13) для случая круглого конуса, расположенного в потоке, параллельном его оси, было установлено выше; для уравнение на  $W^3$ , чтобы получить безразмерное уравнение, получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\kappa + 1}{2W^3} \left( \frac{dV}{d\theta} \right)^2 - \frac{\kappa - 1}{2W} \left( 1 - \frac{V^2}{W^2} \right) \right] \frac{d^2V}{d\theta^2} &= (\kappa - 1) \frac{V}{W} \left( 1 - \frac{V^2}{W^2} \right) + \\ + \frac{\kappa - 1}{2W} \left( 1 - \frac{V^2}{W^2} \right) \operatorname{ctg} \theta \frac{dV}{d\theta} &- \kappa \frac{V}{W^3} \left( \frac{dV}{d\theta} \right)^2 - \frac{\kappa - 1}{2W^3} \operatorname{ctg} \theta \left( \frac{dV}{d\theta} \right)^3. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Пользуясь этой формой, предложенной Тейлором и Макколом [2,3], можно выполнить подсчет скоростей и давлений посредством последовательных приближений. Замечая, что только радиальная скорость  $V_R = V_0$

существует на поверхности конуса и в его непосредственной близости, следовательно, в уравнении (21.17)  $v_\theta = \frac{dV}{d\theta} = 0$  и

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -2V_0, \quad (21.18)$$

интегрируя вдоль малой дуги  $\delta_1\theta$ , найдем тангенциальную скорость  $v_{\theta_1}$ , соответствующую радиусу, определяемому полярным углом  $\theta_1 = \theta_0 + \delta_1\theta$

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_1 = v_{\theta_1} = -2V_0\delta_1\theta. \quad (21.19)$$

Интегрируя снова по той же дуге  $\delta_1\theta$ , получим радиальную скорость  $v_R = V_1$  вдоль того же радиуса-вектора:

$$\frac{V_1}{W} = \frac{V_0}{W} - \frac{V_0}{W}(\delta_1\theta)^2 = \frac{V_0}{W}[1 - (\delta_1\theta)^2]. \quad (21.20)$$

Чтобы найти  $v_\theta$  и  $V$  на соседнем радиусе, составляющем угол  $\delta_2\theta$  с предыдущим, получим для величин, соответствующих радиусу-вектору  $\theta_1 = \theta_0 + \delta_1\theta$ :

$$\left[\frac{x+1}{2W^3}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_1^2 - \frac{x-1}{2W}\left(1 - \frac{V_1^2}{W^2}\right)\right]\frac{d^2V}{d\theta^2} = (x-1)\frac{V_1}{W}\left(1 - \frac{V_1^2}{W^2}\right) + \frac{x-1}{2W}\left(1 - \frac{V_1^2}{W^2}\right)\text{ctg}\theta_1\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_1 - x\frac{V_1}{W^3}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_1^2 - \frac{x-1}{2W^3}\text{ctg}\theta_1\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_1^3; \quad (21.21)$$

отсюда находим новые величины, соответствующие радиусу-вектору, определяемому полярным углом  $\theta_2 = \theta_1 + \delta_2\theta$ , беря значение  $\frac{d^2V}{d\theta^2}$  из приведенного выше уравнения и полагая для симметрии

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -2A_1. \quad (21.22)$$

Таким образом, получим соответственно:

для тангенциальной скорости

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_2 = v_{\theta_2} = v_{\theta_1} - 2A_1\delta_2\theta, \quad (21.23)$$

для радиальной скорости

$$\frac{V_2}{W} = \frac{V_1}{W} + \frac{v_{\theta_1}}{W}\delta_2\theta - \frac{A_1}{W}(\delta_2\theta)^2. \quad (21.24)$$

Вводя последние величины в уравнение (21.17), находим  $v_\theta$  и  $V$  для радиуса-вектора, определяемого полярным углом  $\theta_3 = \theta_2 + \delta_3\theta$ . Вычисления продолжают дальше, шаг за шагом, до конической ударной волны, где  $\theta = \theta_s$ . Вблизи этого значения угла операции будут более трудоемкими, так как нужно удовлетворить уравнению (21.16), в предположении, что величина  $V_0$  известна.

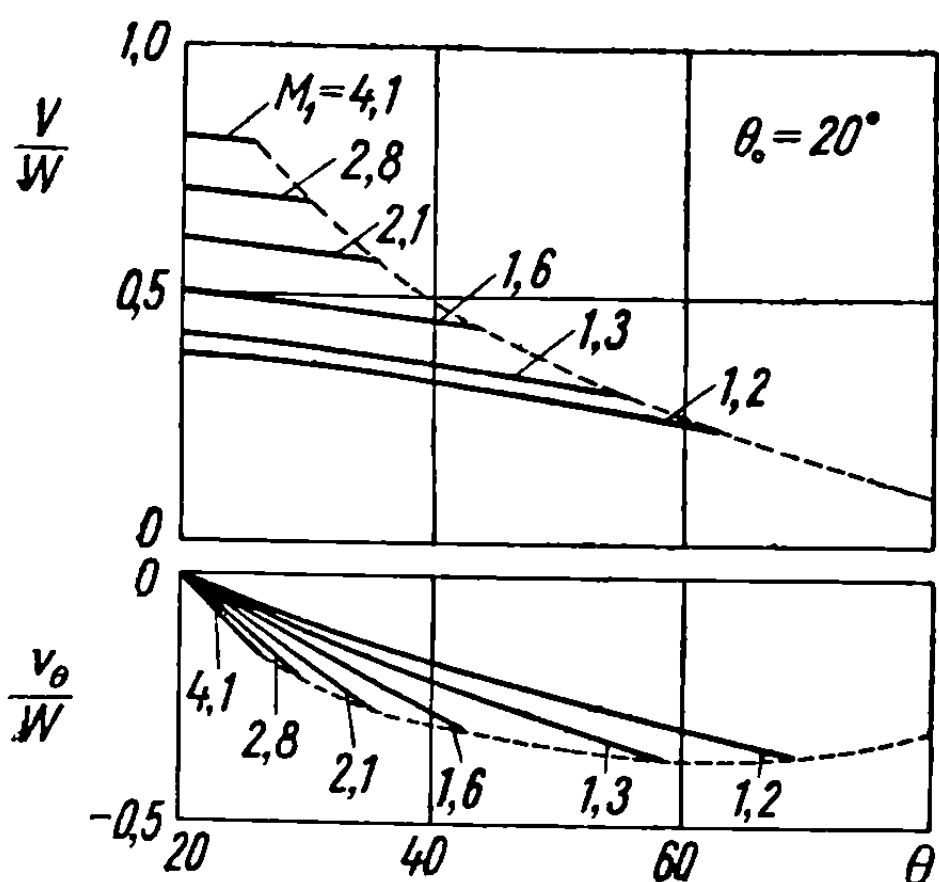
Построим с этой целью две кривые. Одна из них определяется уравнением

$$y' = -\frac{v'_\theta}{W} = \frac{x-1}{x+1}\frac{V}{W}\left(\frac{W^2}{V^2} - 1\right)\text{ctg}\theta, \quad (21.25)$$

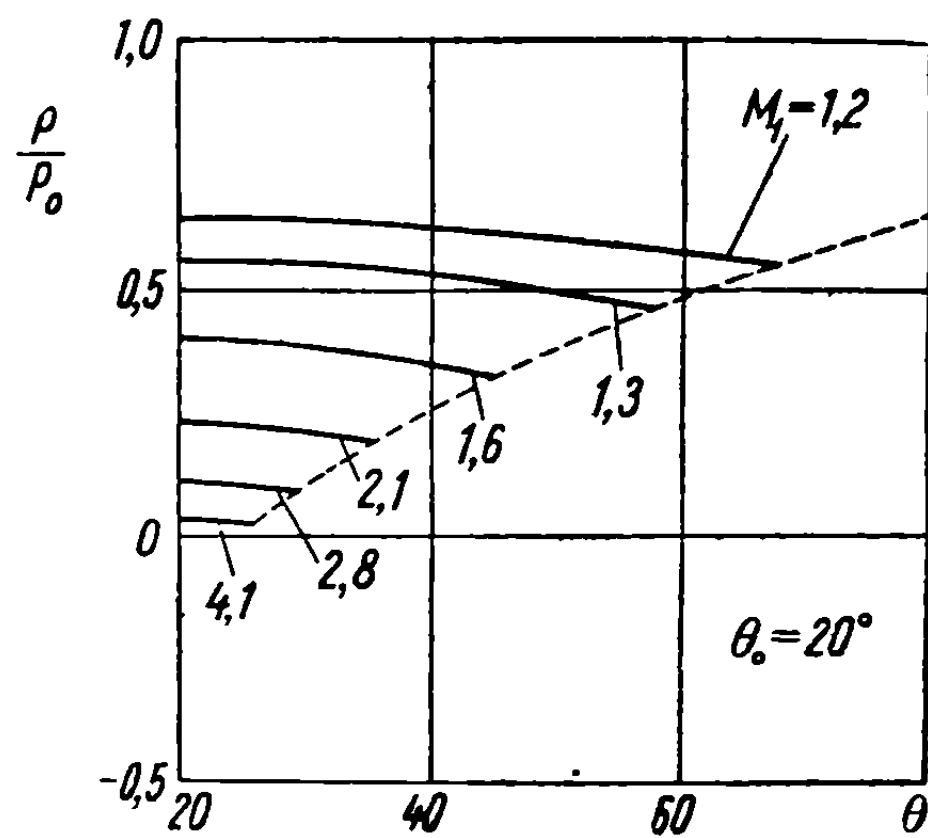
аналогичным по форме уравнению (21.16). Величины  $\frac{V}{W}$ , полученные из предыдущих вычислений, вводятся для каждого значения  $\theta$  в уравнение (21.25). Другая кривая, представляющая непосредственные результаты этих вычислений, является решением уравнения (21.17):

$$y = -\frac{v_\theta}{W} = f(\theta). \quad (21.26)$$

Точка пересечения указанных кривых дает значение  $\theta_s$ , так как оно удовлетворяет как уравнению (21.17), так и уравнению (21.16). Величина  $V_s$



Фиг. 21.4



Фиг. 21.5

легко выводится при помощи вычислений, аналогичных предшествующим (см. формулы 21.20, 21.24); приращение  $\delta\theta$  представляет разность между  $\theta_s$  и последней, наиболее близкой к этому значению величиной  $\theta$ , полученной путем расчета.

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{V_s}{\cos \theta_s}, \quad (21.27)$$

и уравнение (21.15) дает значение  $M_1$

$$-\frac{2}{M_1^2} = \left[ (\kappa + 1) \frac{v_{\theta_s}}{V_s} \operatorname{ctg} \theta_s + (\kappa - 1) \right] \sin^2 \theta_s. \quad (21.28)$$

Таким образом, задача решается полностью. В практическом применении последовательные приращения угла равны между собой:  $\delta_1\theta = \delta_2\theta = \dots = \delta\theta$ .

Получаемые результаты вполне удовлетворительны, когда интервал равен  $3^\circ$  ( $\delta\theta = 3 \frac{\pi}{180}$  рад); если требуется бóльшая точность, то интервал можно взять равным  $2^\circ$  или даже  $1^\circ$ .

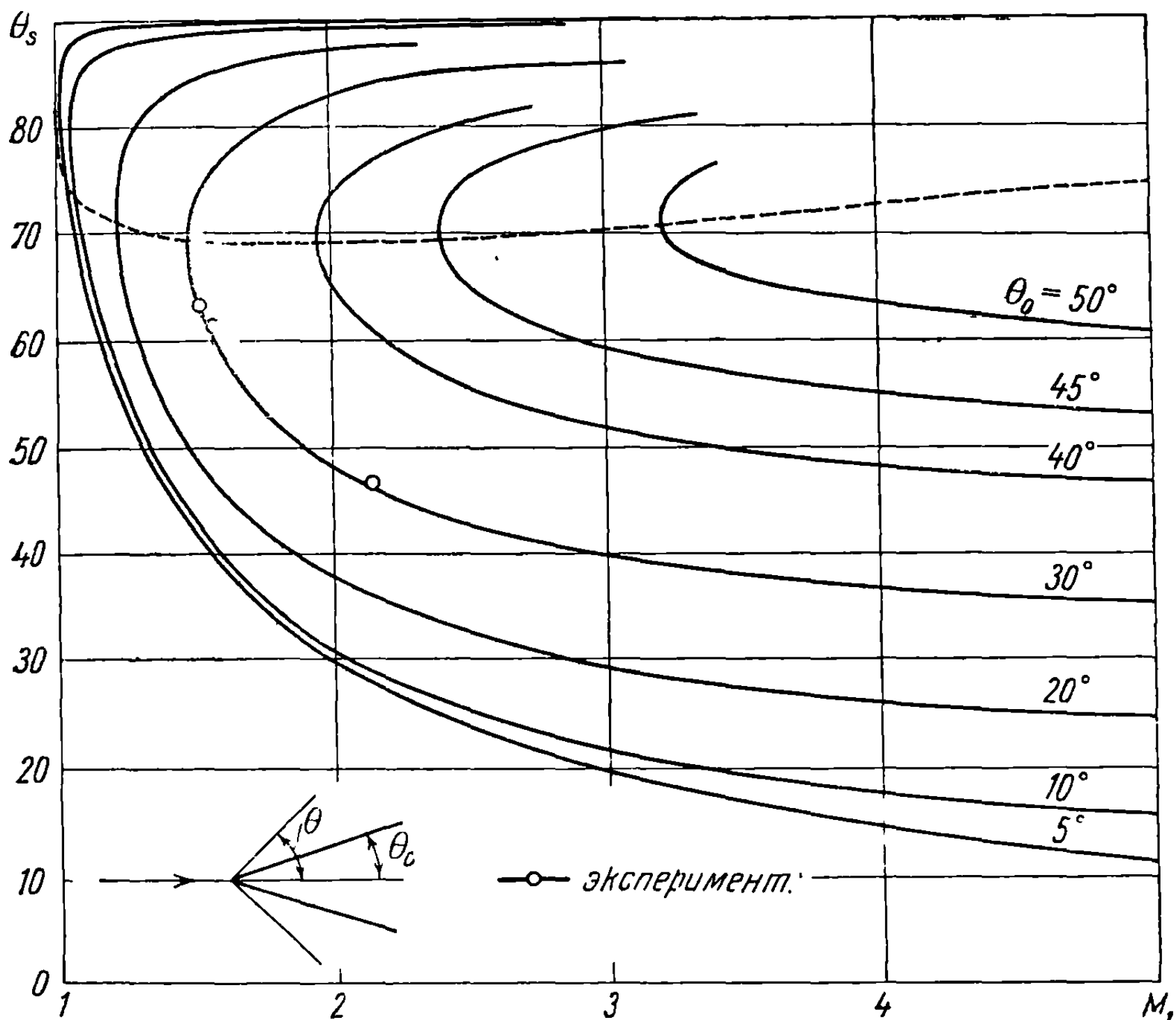
Диаграммы, иллюстрирующие такие расчеты в случае конуса с углом при вершине  $\theta_0 = 20^\circ$ , представлены на фиг. 21.4 для различных чисел Маха. Пунктирные кривые показывают полуугол конуса ударной волны, определяя таким образом коническую ударную волну.



Применяя уравнение Бернулли в форме (3.78), получим соотношение

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{w^2}{W^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 - \frac{v_\theta^2 + V^2}{W^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad (21.29)$$

вводя величины  $v_\theta$  и  $V$ , полученные из предшествующих вычислений, находим изменение давления в зависимости от угла  $\theta$ . Диаграммы для давления



Фиг. 21.6

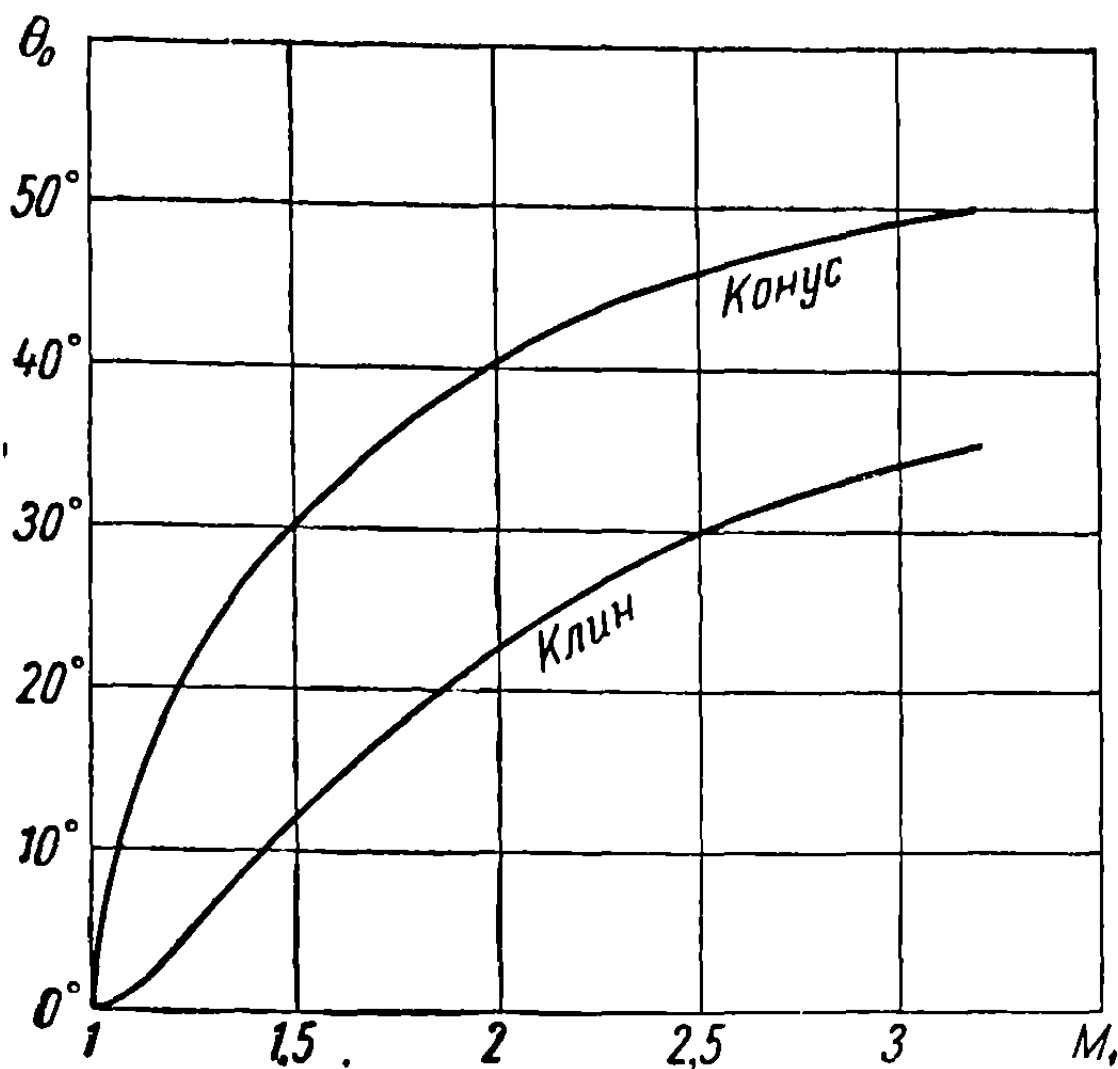
при различных числах Маха изображены на фиг. 21.5 в случае конуса с полууглом при вершине  $\theta_0 = 20^\circ$ .

Между конусом ударной волны ( $\theta = \theta_s$ ) и обтекаемым конусом ( $\theta = \theta_0$ ) происходит изэнтропическое сжатие, которое отсутствует при плоскопараллельном течении.

Как и в случае плоской ударной волны, при вычислениях часто встречается полуугол конической ударной волны. На фиг. 21.6 представлены результаты, полученные Тейлором и Макколом; они хорошо согласуются с экспериментальными наблюдениями. Из этих диаграмм видно, что для каждой пары значений  $M_1$  и  $\theta_0$  получаются две величины  $\theta_s$ , одна из которых соответствует волне большой интенсивности, а другая — малой.

Для каждой величины полуугла конуса  $\theta_0$  угол конуса ударной волны изменяется в зависимости от числа Маха  $M_1$  невозмущенного течения. Ниже некоторого критического числа коническая ударная волна больше не возникает при вершине; волна отделяется от нее, как и при плоскопараллельном течении. Диаграмма для числа Маха в зависимости от полуугла  $\theta_0$  обтекае-

мого конуса, при котором волна отделяется, представлена на фиг. 21.7. Этот угол значительно больше соответствующего угла в случае плоскопараллельного течения вследствие природы осесимметричного потока, который за-



Фиг. 21.7

полняет все пространство вокруг тела вращения.

**З а м е ч а н и е.** Решение уравнения (21.17) за ударной волной соответствует либо полностью сверхзвуковому течению, либо полностью дозвуковому, или, наконец, непрерывному объединению обоих (трансзвуковому течению), начинающемуся со сверхзвукового непосредственно за конической ударной волной ( $\theta = \theta_s$ ); вслед за этим скорость достигает своего критического значения ( $w = c$ ) при  $\theta = \theta_c$ . При значениях  $\theta$ , меньших указанного угла, течение будет дозвуковым вплоть до поверхности конуса ( $\theta = \theta_0$ ). Последний случай — один из необычных случаев непрерывного трансзвукового течения. Следующие значения полууглов ко-

нуса ударной волны и конуса граничной поверхности, на которой скорость равна скорости звука, выведены из вычислений авторов, цитированных выше:

$$\begin{aligned} \theta_0 = 10^\circ, \quad \theta_c = 32^\circ,5, \quad \theta_s = 70^\circ,3, \quad M_1 = 1,07; \\ \theta_0 = 20^\circ, \quad \theta_c = 32^\circ,7, \quad \theta_s = 58^\circ, \quad M_1 = 1,30; \\ \theta_0 = 30^\circ, \quad \theta_c = 41^\circ, \quad \theta_s = 56^\circ,6, \quad M_1 = 1,63. \end{aligned}$$

Конус предполагается бесконечным, так как только в этом случае дозвуковое движение может быть коническим. Для конечного конуса течение остается коническим только до тех пор, пока оно будет сверхзвуковым, и перестает быть коническим, когда оно становится дозвуковым или трансзвуковым.

**21.3.1. Определение твердого конуса, когда полуугол конуса ударной волны известен.** Если обратить порядок действий, то, начиная с ударной волны, полуугол которой  $\theta_s$  предполагается известным, можно определить с помощью последовательных приближений полуугол  $\theta_0$  соответствующего обтекаемого твердого конуса.

Рассмотрим какой-нибудь угол  $\theta_s$ , больший угла Маха  $\mu_1$  исследуемого течения; после получения  $V_s$  из уравнения (21.27) будем иметь, согласно формуле (21.15),

$$\frac{v_{\theta_s}}{W} = \frac{1}{W} \left( \frac{dV}{d\theta} \right)_s = - \frac{w_1}{W} \frac{2 \sin \theta_s}{x+1} \left( \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \theta_s} + \frac{x-1}{2} \right); \quad (21.30)$$

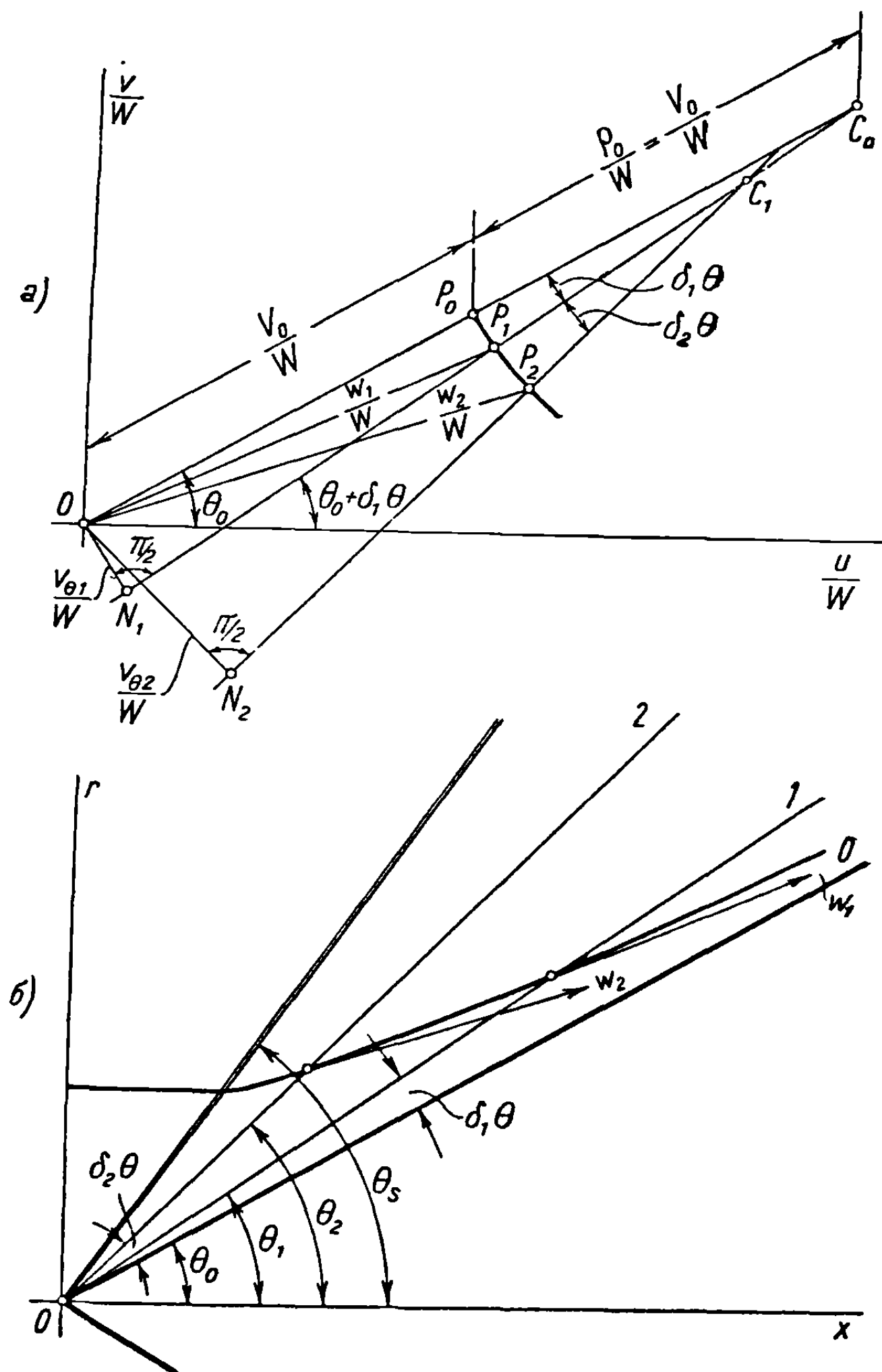
подставив выведенный результат в уравнение (21.17), получим значение  $\frac{d^2V}{d\theta^2}$  в непосредственной близости волны, определяемой углом  $\theta_s$ . Возьмем равные интервалы ( $-\delta\theta$ ) и применим процедуру, подобную использованной ранее, для определения величин  $v_\theta = \frac{dV}{d\theta}$  и  $V$ , соответствующих радиусам с последовательными полярными углами  $\theta_s, \theta_1 = \theta_s - \delta\theta, \theta_2 = \theta_s - 2\delta\theta, \dots, \theta_n =$

$= \theta_s - n\delta\theta, \dots$ , вплоть до  $\theta = \theta_0$ . Последнее значение может быть легко найдено путем вычерчивания кривой  $v_\theta = f(\theta)$  и определения угла  $\theta$ , для которого  $v_\theta$  равняется нулю.

Повторяя процедуру, приведенную выше, для различных величин  $\theta_s$ , получим соответствующие значения  $\theta_0$  при таком же числе Маха  $M_1$ . Таким путем можно составить таблицы, имея в виду практические применения [4].

#### 21.4. Метод Буземана для графического определения осесимметричного течения вокруг конуса вращения

Радиус кривизны [кривой  $S$  в плоскости годографа] (фиг. 21.2, б) был определен выше. Чтобы построить эту кривую для любого конуса, имеющего

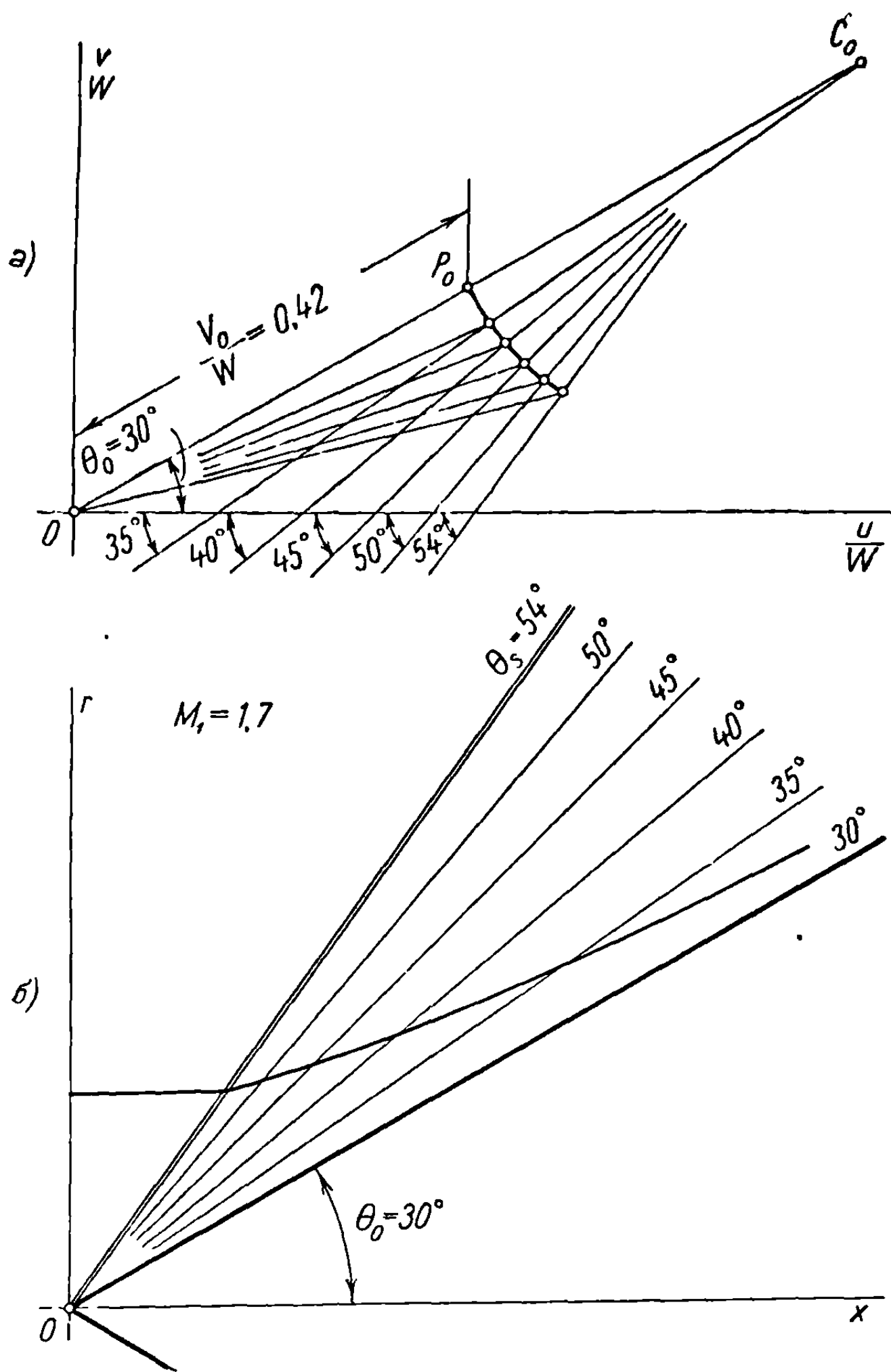


Фиг. 21.8

при вершине полуугол  $\theta_0$ , можно использовать, как в предыдущем методе, заданную радиальную скорость  $V_0$ . Вычисляемое отношение  $V_0/W$  изображается

на диаграмме годографа (фиг. 21.8, а). Вводя ту же величину в формулу (21.14), определим начальный радиус кривизны из соотношения

$$\frac{r_0}{W} = \frac{V_0}{W} \cdot \quad (21.31)$$



Фиг. 21.9

Беря малый угол  $\delta_1\theta$  и проводя дугу  $P_0P_1$  радиусом  $r_0$  из центра  $C_0$ , получим величины

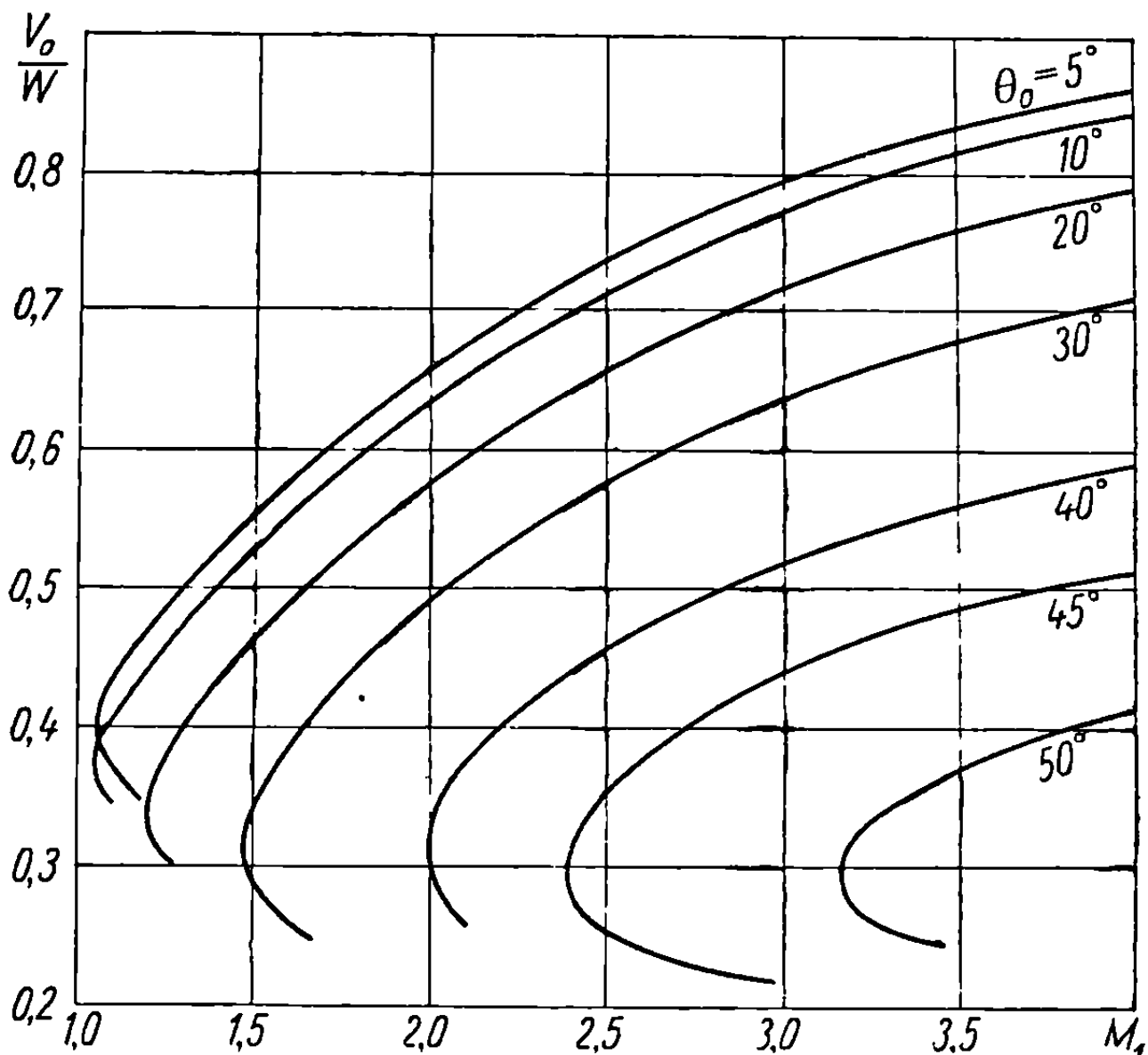
$$\begin{aligned} \frac{V_1}{W} &= \overline{N_1P_1}, \\ \frac{v_{\theta 1}}{W} &= \overline{ON_1} \end{aligned} \quad (21.32 \text{ а})$$

соответствующие радиусу-вектору, определяемому углом  $\theta_1 = \theta_0 + \delta_1\theta$ ; угол  $\theta_1$  подставляется в формулу для радиуса кривизны для получения  $r_1/W$ . Радиусом  $r_1$  из точки  $C_1$ , взятой в качестве центра на линии  $N_1P_1$ , описываем дугу  $P_1P_2$ , получая равенства

$$\frac{V_2}{W} = \overline{N_2 P_2},$$

$$\frac{v_{\theta 2}}{W} = \overline{ON_2} \quad (21.32 \text{ б})$$

для величин, соответствующих углу  $\theta_2 = \theta_1 + \delta_2 \theta$ ; подставляя последний в формулу (21.14), найдем новый радиус кривизны  $\rho_2/W$ ; таким образом



Фиг. 21.10

действуем вплоть до угла  $\theta_s$ , который вычисляется точно так же, как в предыдущем случае.

Радиусы-векторы, определяемые углами  $\theta_0, \theta_1 = \theta_0 + \delta_1 \theta, \theta_2 = \theta_1 + \delta_2 \theta, \dots$  (из которых первый представляет линию обтекаемого твердого конуса), проводятся на физической плоскости (фиг. 21.8, б), и касательная к линии тока  $\omega_2$  будет параллельна полной скорости  $OP_2$ , соответствующей радиусу-вектору  $O2 \parallel N_2 P_2$ . Таким образом могут быть построены линии тока. Фигуры 21.9, а и 21.9, б представляют диаграмму годографа и линии тока для конкретного случая конуса с углом  $\theta_0 = 30^\circ$ ; исходя от начального значения  $\frac{V_0}{W} = 0,42$ , продолжаем вычисления до  $\theta_s \approx 54^\circ, M_1 = 1,7$ .

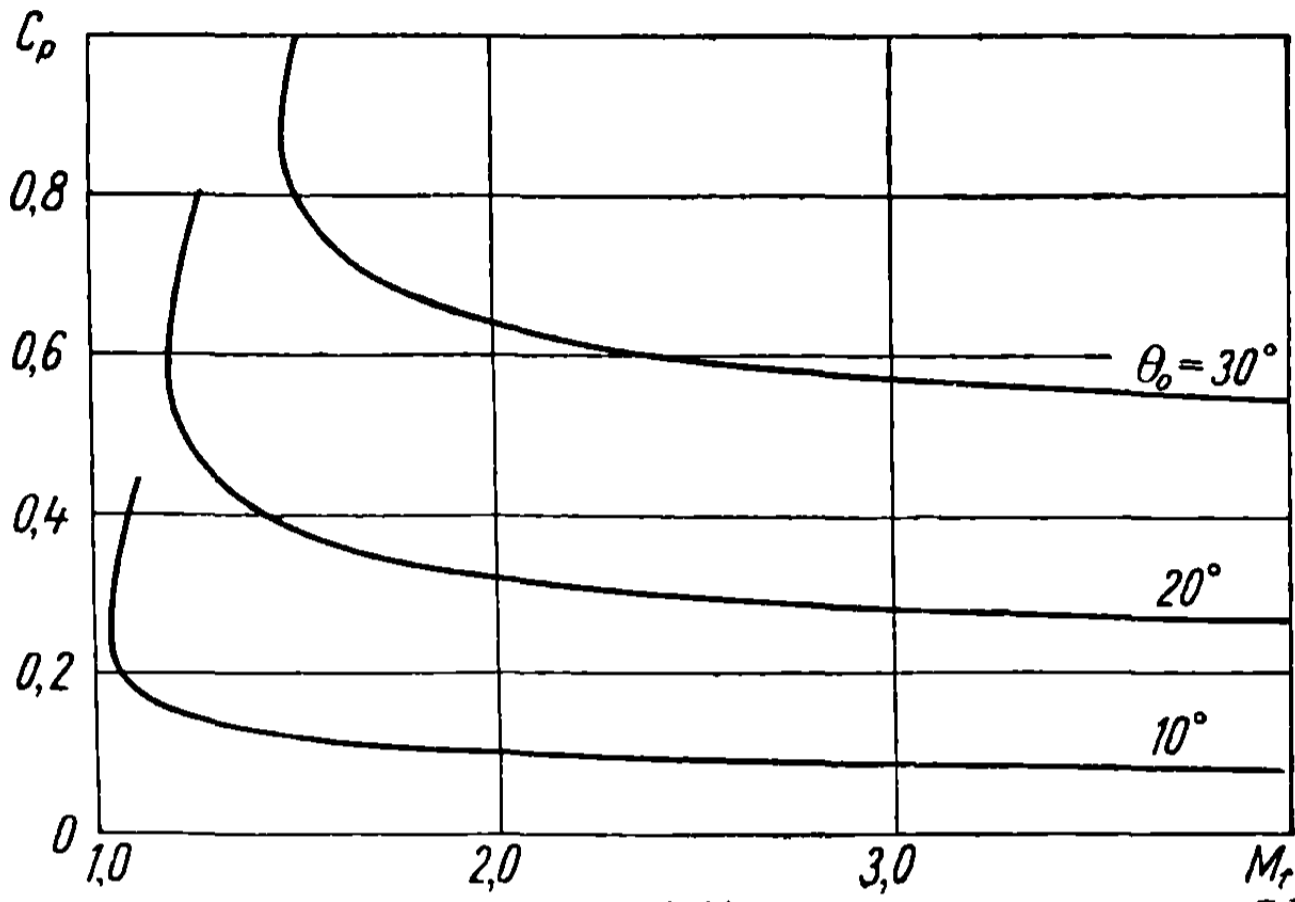
Как начальная скорость  $V_0$ , с которой начинаются вычисления, так и конечное число маха  $M_1$  имеют особое значение; диаграмма изменения отношения  $V_0/W$  в зависимости от  $M_1$  для различных полууглов  $\theta_0$ , при вершине твердого конуса показана на фиг. 21.10.

Коэффициент давления на поверхности конуса представляет особенный интерес для практических целей. Кроме авторов, упомянутых выше, Хэнч и Вендт [5] рассматривали разнообразные случаи применения конусов с различными полууглами  $\theta_0$  при вершине. Диаграммы изменения коэффициента давления как функции числа  $M_1$  для  $\theta_0 = 10, 20, 30$  даны на фиг. 21.11,

Следует иметь в виду, что коэффициент давления определяется обычной формулой

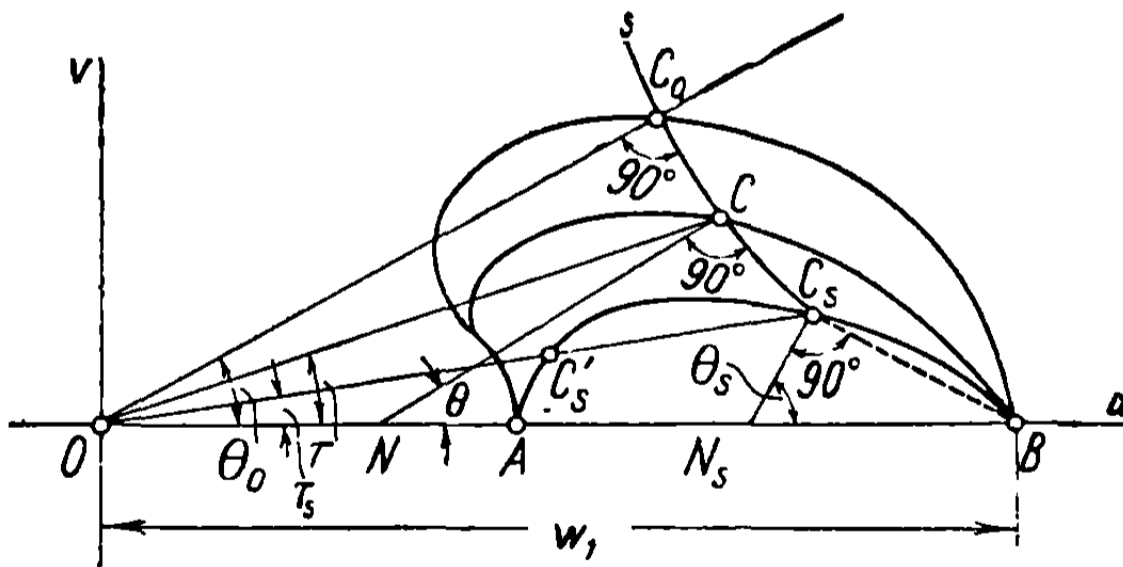
$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega_1^2},$$

где  $p$  — давление в рассматриваемой точке,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\omega_1$  — давление, плотность и скорость невозмущенного однородного течения.



Фиг. 21.11

**21.4.1. Яблоковидная диаграмма.** Если вычисления начинаются при заданном угле ударной волны  $\theta_s$ , то отклонение течения за волной выводится из ударной поляры, рассмотренной в разделе 7.5. Рассмотрим поляру, соответствующую числу Маха  $M_1$  (фиг. 21.12), и пусть отклонение за волной будет  $\tau_s$ .

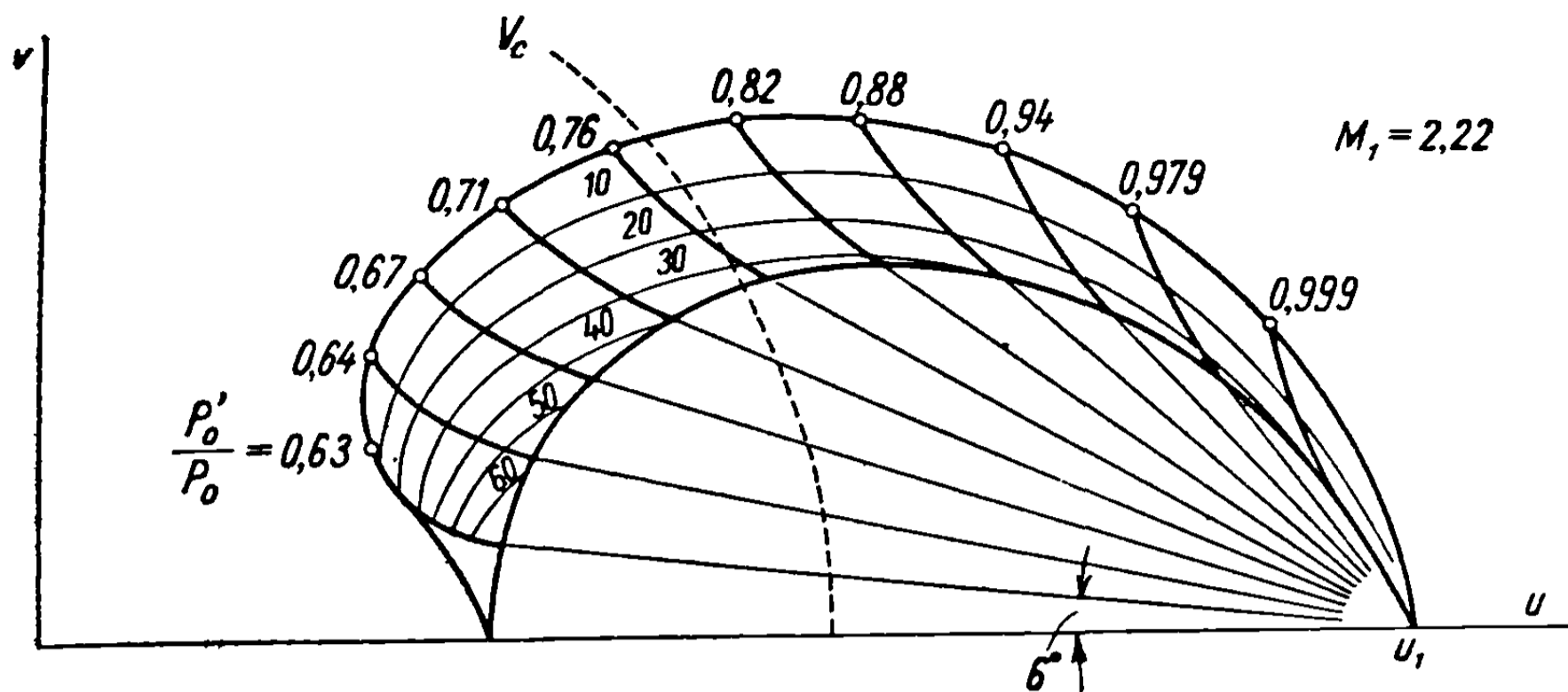


Фиг. 21.12

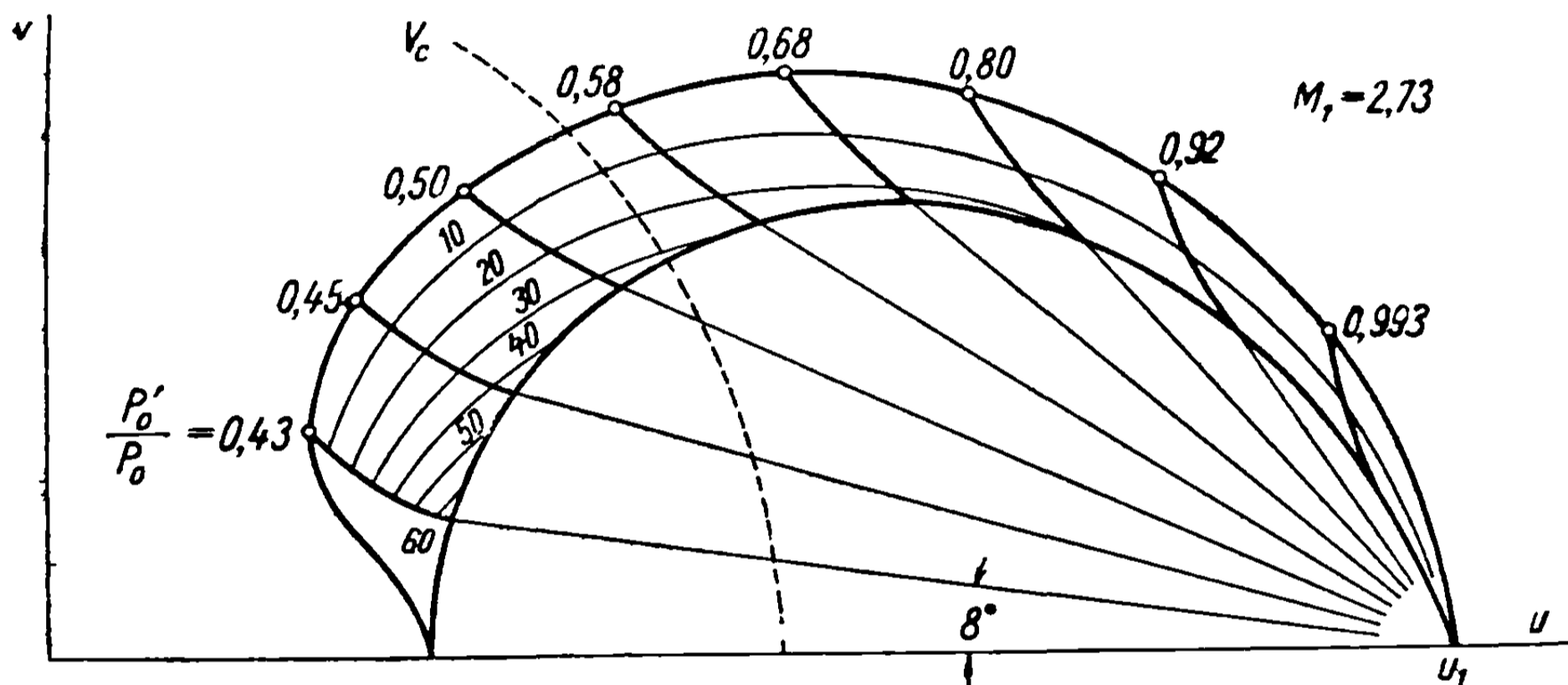
Отрезки  $\overline{OC_s}$  и  $\overline{OC'}$  представляют полные скорости за ударной волной в сверхзвуковом и дозвуковом течениях. Ввиду того, что последний случай не имеет физического значения, так как волна большой интенсивности (дозвуковое течение) не может в действительности возникнуть, будет рассмотрена только точка  $C_s$ . Отметим, что прямая  $C_s N_s$ , нормальная к прямой  $BC_s$ , составляет угол  $\theta_s$  с осью  $Ou$ .

Если задаются значения  $M_1$  и  $\theta_s$ , то легко выводится отклонение  $\tau$  и находится точка  $C_s$  на ударной поляре. Применяя предшествующий метод,

можно вычертить кривую  $S$  на плоскости годографа для области изменения угла  $\theta$  от  $\theta_s$  до  $\theta_0$ ; в результате получается кривая  $C_0CC_sB$ . Точка  $C$  на этой кривой определяет полярный угол  $\theta$  и отклонение скорости  $\tau$ . Если



Фиг. 21.13



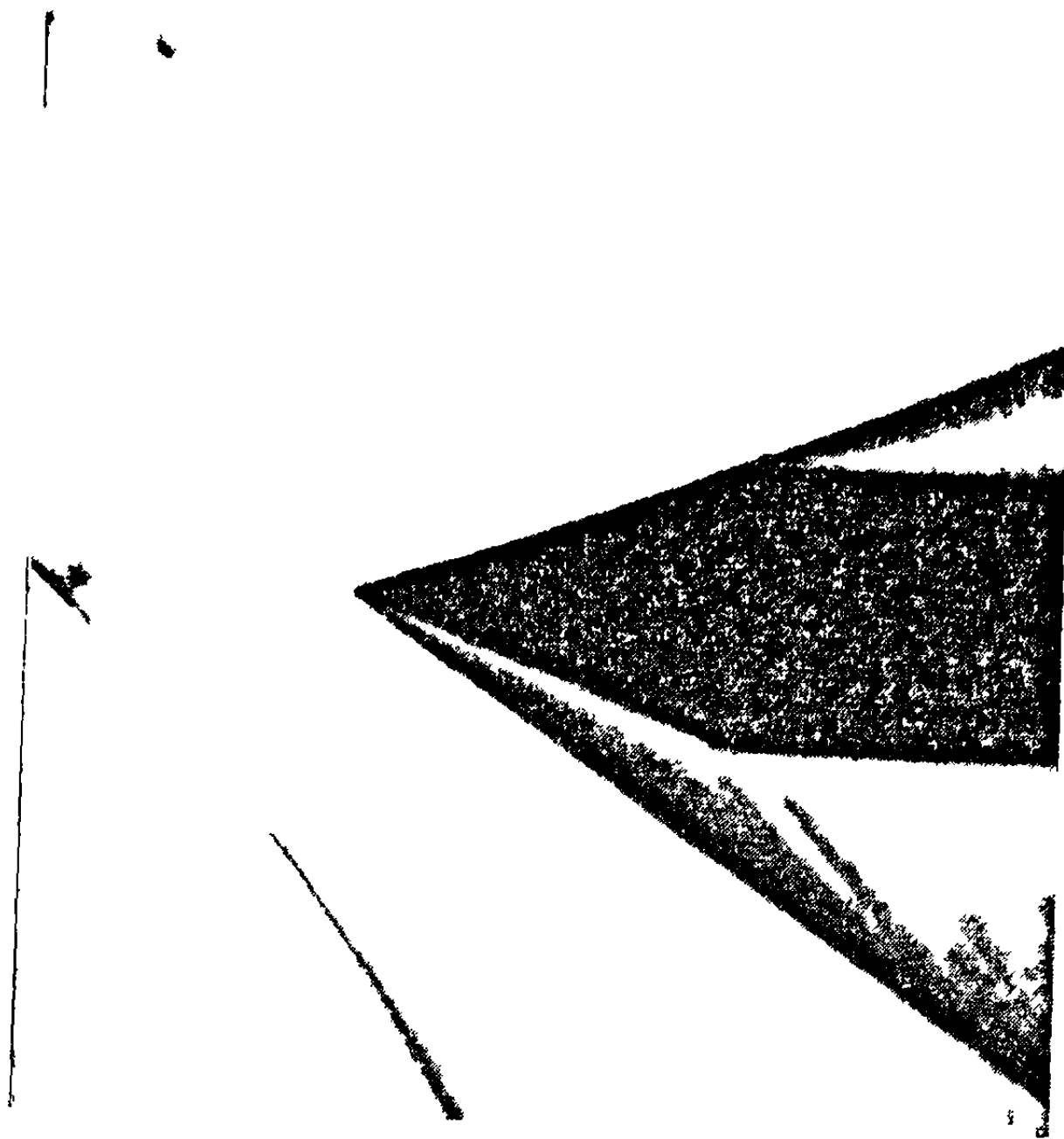
Фиг. 21.14

эта процедура применяется для каждой точки  $C_s$  на ударной поляре (т. е. для различных углов  $\theta_s$ ), то получают соответствующие точки  $C_0$ , образующие яблокообразную кривую.

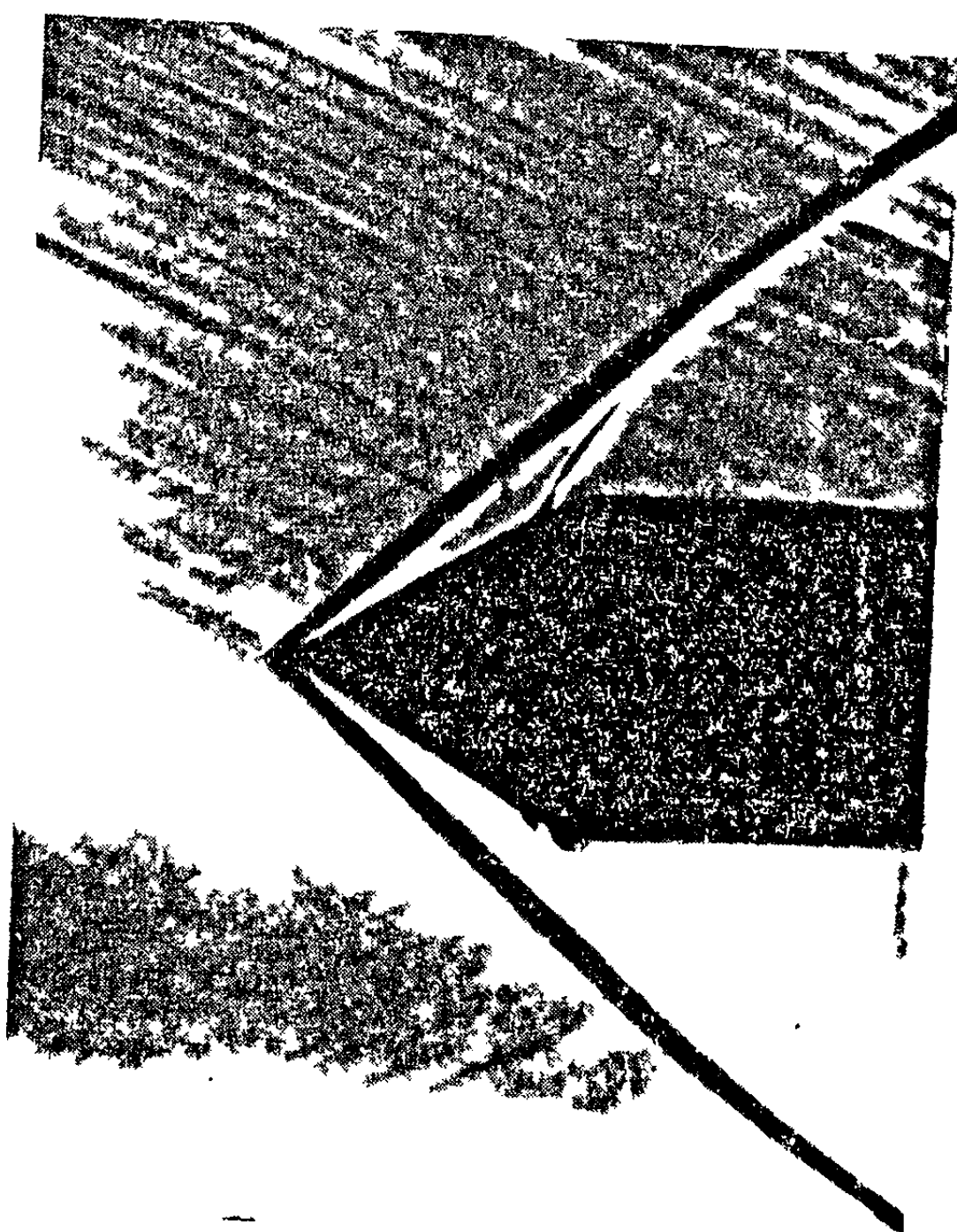
Коническое течение между  $\theta_s$  и  $\theta_0$  полностью определяется в пространстве, заключенном между этой кривой и ударной полярой.

Действительно, если задан полуугол  $\theta_0$  обтекаемого твердого конуса, то можно вычертить диаграмму годографа  $C_0CC_s$ ; нормаль к прямой  $BC_s$  определяет угол  $\theta_s$ , тогда как нормаль  $CN$  в плоскости годографа дает полярный угол  $\theta$ . Полная скорость определяется отрезком  $\overline{OC}$  ( $V_0 = \overline{OC_0}$ ,  $V = \overline{OC}$ ,  $V_s = \overline{OC_s}$ ).

Уравнение Бернулли применяется для вычисления давления. Чтобы сравнить это давление с давлением  $p_1$  в невозмущенном течении, нужно принять в расчет потерю напора при переходе через ударную волну. Для упрощения изучения осесимметричного течения вокруг конуса вращения строятся полные диаграммы для каждого значения  $M_1$ , как показано на фиг. 21.13 и 21.14 [5].



Фиг. 21.15



Фиг. 21.16



Экспериментальное подтверждение. Полученные теоретические результаты почти точно подтверждаются экспериментальными наблюдениями. Воспроизводим фотографии обтекания конусов с полууглами  $\theta_0 = 20, 30^\circ$  при вершине (фиг. 21.15. и 21.16). Измерения показали, что полуугол  $\theta_s$  при вершине конуса ударной волны точно соответствует вычисленному значению угла. Существует много методов оптического наблюдения, основанных на изменении плотности поперек ударной волны.

## 22. ИЗУЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ И ВНУТРИ ЭФФУЗОРОВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим применение общего уравнения движения к случаям тел вращения и эффузоров с круглым поперечным сечением. Настоящее исследование будет ограничено только этими задачами, благодаря их практической важности и вследствие непреодолимых трудностей, встречающихся при исследовании общего случая движения прямым путем.

### 22.1. Общие уравнения движения

Запишем общее уравнение движения (5.45) в цилиндрических координатах

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\omega}{r \partial \omega} - \frac{uv_r}{a^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{v_r v_\omega}{a^2} \left(\frac{\partial v_\omega}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \omega}\right) - \frac{v_\omega u}{a^2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \omega} + \frac{\partial v_\omega}{\partial x}\right) + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (22.1)$$

где  $u, v_r, v_\omega$  — компоненты скорости в цилиндрических координатах.

Условия незавихренности, вытекающие из уравнения (1.69), должны быть добавлены к приведенному уравнению; используя обозначения  $u, v_r, v_\omega$  (вместо  $u_x, u_r, u_\omega$ ), получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v_\omega r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \omega} &= 0, \\ \frac{\partial(v_\omega r)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Вводя потенциал скорости  $\Phi$ , существование которого является следствием этих соотношений, получим единственное общее уравнение

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \omega^2} - 2 \frac{uv_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} - \\ - 2 \frac{v_r v_\omega}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \omega \partial r} - 2 \frac{v_\omega u}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \omega \partial x} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{v_\omega^2}{a^2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (22.3)$$

Приведенные уравнения не могут быть решены в такой распространенной форме, которая позволила бы применить их к общей задаче. Они применяются к более простым случаям, часто встречающимся на

практике; при этом уравнения упрощаются и приводятся к поддающейся анализу форме. Объектом последующих рассуждений будет поэтому осесимметричное течение вокруг тел вращения и внутри сопел круглого поперечного сечения.

## 22. 2. Метод характеристик при осесимметричном течении

Так как течение будет индентичным в каждой меридиональной плоскости и векторы скоростей будут содержаться в этих плоскостях, то уравнения движения для осесимметричного потока не будут зависеть от координаты  $\omega$ ; поэтому уравнение (22.1) упрощается и принимает вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{v}{r} = 0, \quad (22.4)$$

а уравнение (22.3) приводится к форме

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0; \quad (22.5)$$

в обоих уравнениях с целью упрощения обозначений вместо  $v_r$  подставлено  $v$ . Подобным же образом соотношения (22.2) сводятся к единственному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (22.6)$$

Приведенные уравнения были уже упомянуты при изучении характеристик (см. раздел 19.1) и отличаются от уравнений для плоскопараллельного течения только последним слагаемым  $\left(\frac{v}{r}, \text{соответственно } \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)$  в силу чего не являются больше однородными и поэтому не приводятся к линейным уравнениям, как было в случае плоскопараллельного течения (см. формулу 19.13).

Для изучения характеристических линий применен тот же метод, что и в случае плоскопараллельного течения, так как коэффициенты при частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

одинаковы в обоих случаях. Предшествующие рассмотрения характеристических линий, приведшие к их применению для изучения плоскопараллельного течения (см. разделы 19 и 20), дают возможность использовать характеристические линии также в случае осесимметричного течения, как показано Франклем [6] и Феррари [7], которые дали решение этих задач.

**22.2.1. Дифференциальные уравнения характеристик.** Полагая, как и ранее (равенства 19.36),

$$A = 1 - \frac{u^2}{a^2},$$

$$2B = -\frac{2uv}{a^2},$$

$$C = 1 - \frac{v^2}{a^2}, \quad (22.7)$$

определим характеристики уравнением (19.29)

$$A \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dr}{dx} + C = 0. \quad (22.8)$$

Оба корня будут соответственно равны

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{dx} \right)_+ &= m_+ = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \\ \left( \frac{dr}{dx} \right)_- &= m_- = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \end{aligned} \quad (22.9)$$

они действительны при условии (через  $\omega$  обозначена полная скорость)

$$B^2 - AC = \frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{\omega^2}{a^2} - 1 > 0, \quad (22.10)$$

т. е. при условии, что течение сверхзвуковое; в этом случае написанные выше уравнения будут гиперболического типа.

Два значения тангенса угла наклона характеристических кривых, т. е.  $m_+$  и  $m_-$  (22.9), будут

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{dx} \right)_+ &= m_+ = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \\ \left( \frac{dr}{dx} \right)_- &= m_- = \operatorname{tg}(\theta - \mu); \end{aligned} \quad (22.11)$$

однако уравнения характеристик, выраженные через  $u$  и  $v$ , будут отличаться от соответствующих уравнений для плоскопараллельного течения из-за присутствия члена  $\frac{v}{r}$  в уравнении (22.4).

Дифференцируя вдоль характеристики и применяя соотношение (22.6), получим

$$\begin{aligned} du &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dx} \right) dx = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial r} \right) dx, \\ dv &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{dx} \right) dx = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial r} \right) dx; \end{aligned} \quad (22.12)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{dv}{dx} - m \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dx} - m \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{du}{dx} - m \frac{dv}{dx} + m^2 \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Подставляя эти значения производных в уравнение (22.4) и используя обозначения (22.7), получим

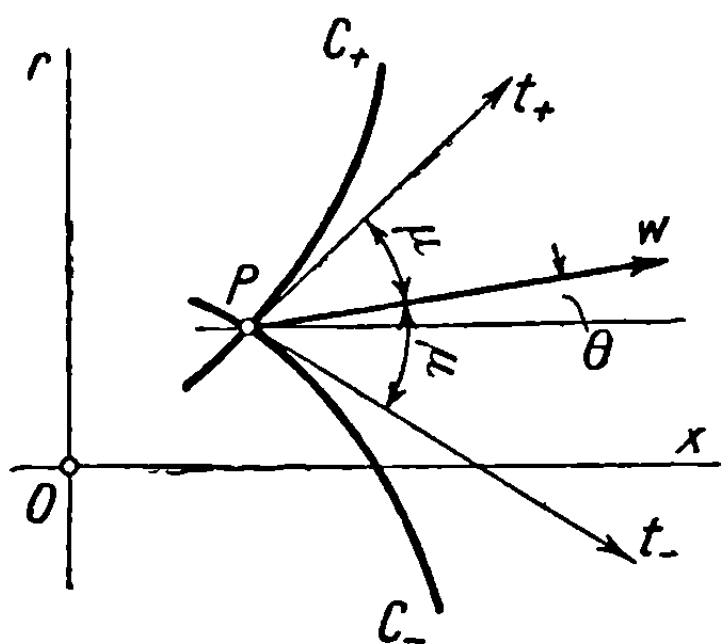
$$\begin{aligned} A \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial r} + 2B \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{r} &= A \frac{du}{dx} + (2B - mA) \frac{dv}{dx} + \\ &+ (Am^2 - 2Bm + C) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0; \end{aligned} \quad (22.14)$$

отсюда, применяя также уравнение (22.8), находим

$$\frac{du}{dx} + \frac{C}{A} \frac{1}{m} \frac{dv}{dx} + \frac{v}{Ar} = 0. \quad (22.15)$$

Из уравнений (22.9) и (22.11) получаются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_+} &= \frac{A}{B - \sqrt{B^2 - AC}} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} = \frac{A}{C} m_- = \frac{A}{C} \operatorname{tg}(\theta - \mu), \\ \frac{1}{m_-} &= \frac{A}{B + \sqrt{B^2 - AC}} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{C} = \frac{A}{C} m_+ = \frac{A}{C} \operatorname{tg}(\theta + \mu), \end{aligned} \quad (22.16)$$



Фиг. 22.1

так что уравнение (22.15) приводит к двум системам уравнений, определяющим два семейства характеристик:

для кривых положительного семейства, которые будут обозначаться через  $C_+$ ,

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu),$$

$$du + \operatorname{tg}(\theta - \mu) dv + \frac{v}{Ar} dx = 0, \quad (22.17)$$

для кривых отрицательного семейства, которые будут обозначаться через  $C_-$  (фиг. 22.1),

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \quad du + \operatorname{tg}(\theta + \mu) dv + \frac{v}{Ar} dx = 0. \quad (22.18)$$

Вторые уравнения (22.17) и (22.18) могут быть преобразованы с помощью соотношений (19.45); в результате получим

$$\begin{aligned} du + \operatorname{tg}(\theta \mp \mu) dv + \frac{dx}{r} \frac{v}{A} &= \cos \theta [1 + \operatorname{tg}(\theta \mp \mu) \operatorname{tg} \theta] dw - \\ &- w \cos \theta [\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)] d\theta + \frac{dx}{r} w \frac{\sin \theta}{A} = 0. \end{aligned} \quad (22.19)$$

Замечая, что

$$A = 1 - \frac{u^2}{a^2} = 1 - M^2 \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \mu - \cos^2 \theta}{\sin^2 \mu} = - \frac{\cos(\theta + \mu) \cos(\theta - \mu)}{\sin^2 \mu}, \quad (22.20)$$

приведем последовательно уравнение (22.19) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dw}{w} - \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)} d\theta + \frac{dx}{r} \frac{\sin^2 \mu}{\sin^2 \mu - \cos^2 \theta} \frac{\operatorname{tg} \theta}{[1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)]} &= \\ = \frac{dw}{w} \mp \operatorname{tg} \mu d\theta - \frac{\sin \theta \sin \mu \operatorname{tg} \mu}{\cos(\theta \pm \mu)} \frac{dx}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (22.21)$$

окончательно дифференциальные уравнения характеристических линий будут: для характеристик  $C_+$  положительного семейства

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \quad \frac{dw}{w} - \operatorname{tg} \mu d\theta - \frac{\sin \theta \sin \mu \operatorname{tg} \mu}{\cos(\theta + \mu)} \frac{dx}{r} = 0, \quad (22.22)$$

для характеристик  $C_-$  отрицательного семейства

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \quad \frac{d\omega}{\omega} + \operatorname{tg} \mu d\theta - \frac{\sin \theta \sin \mu \operatorname{tg} \mu}{\cos(\theta - \mu)} \frac{dx}{r} = 0. \quad (22.23)$$

Заметим, что уравнения характеристических линий для осесимметричного течения отличаются от соответствующих уравнений для плоскопараллельного течения благодаря наличию в уравнениях (22.22) и (22.23) последнего члена, содержащего множитель  $dx$ ; поэтому они не могут быть проинтегрированы, как в случае плоскопараллельного течения. Уравнения (22.22) и (22.23) могут быть однако успешно использованы для практических целей в приведенной выше форме, путем применения метода последовательных графических или численных операций.

Примером такого подхода служит метод Ферри [8], применяемый ко многим распространенным случаям течений газа, которые изучались ранее посредством метода малых возмущений.

### 22.3. Использование характеристик при последовательных операциях

Исходя из систем уравнений (22.22) и (22.23), соответствующих двум различным семействам характеристик, и подставляя вместо бесконечно малых приращений  $d\omega$ ,  $d\theta$ ,  $dx$  конечные малые приращения  $\delta\omega$ ,  $\delta\theta$ ,  $\delta x$ , можно выполнить следующие элементарные операции.

1) Если параметры течения в двух соседних точках  $P_1$  и  $P_2$  известны, то могут быть определены параметры, соответствующие другой соседней точке  $P_a$ , расположенной на пересечении двух характеристик противоположных семейств, исходящих соответственно из  $P_1$  и  $P_2$ . Так как точка  $P_1$  очень близка к  $P_2$ , характеристику  $C_{+1}$  в  $P_1$  можно заменить ее касательной  $m_{+1} = \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu_1)$ , составляющей угол  $\theta_1 + \mu_1$  с направлением оси  $Ox$ .

Характеристику  $C_{-2}$  в точке  $P_2$  можно заменить ее касательной  $m_{-2} = \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu_2)$ , направленной, следовательно, под углом  $\theta_2 - \mu_2$ . Таким образом определяется точка пересечения  $P_a$  (фиг. 22.2), что позволяет вычислить  $\omega_a$ ,  $\theta_a$  и  $\mu_a$ .

Значения скоростей будут последовательно

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1a} &= \omega_a - \omega_1, \\ \delta\omega_{2a} &= \omega_a - \omega_2 = \omega_a - \omega_1 + \omega_1 - \omega_2 = \delta\omega_{1a} + \omega_1 - \omega_2, \end{aligned} \quad (22.24)$$

и также

$$\begin{aligned} \delta\theta_{1a} &= \theta_a - \theta_1, \\ \delta\theta_{2a} &= \theta_a - \theta_2 = \theta_a - \theta_1 + \theta_1 - \theta_2 = \delta\theta_{1a} + \theta_1 - \theta_2. \end{aligned} \quad (22.25)$$

Приращения в точке  $P_a$  определяются теперь путем применения уравнений характеристик. Сначала находим координаты  $x_a$ ,  $r_a$  точки  $P_a$ , представляющей пересечение двух прямых, направленных под углами  $\theta_1 + \mu_1$  и  $\theta_2 - \mu_2$ , значения которых предполагаются известными. После этого из уравнения (22.22) получим

$$\frac{\delta\omega_{1a}}{\omega_1} = \operatorname{tg} \mu_1 \delta\theta_{1a} + \frac{\sin \theta_1 \sin \mu_1 \operatorname{tg} \mu_1}{\cos(\theta_1 + \mu_1)} \frac{x_a - x_1}{r_1}, \quad (22.26a)$$

точно так же из уравнения (22.23) будем иметь

$$\frac{\delta w_{2a}}{w_2} = -\operatorname{tg} \mu_2 \delta \theta_{2a} + \frac{\sin \theta_2 \sin \mu_2 \operatorname{tg} \mu_2}{\cos (\theta_2 - \mu_2)} \frac{x_a - x_2}{r_2}. \quad (22.266)$$

Заменяя в последнем уравнении  $\delta w_{2a}$  и  $\delta \theta_{2a}$  их значениями, полученными из выражений (22.24) и (22.25), получим уравнение, выраженное только через  $\delta w_{1a}$  и  $\delta \theta_{1a}$ , подобно уравнению (22.26a):

$$\frac{\delta w_{1a} + w_1 - w_2}{w_2} = -\operatorname{tg} \mu_2 (\delta \theta_{1a} + \theta_1 - \theta_2) + \frac{\sin \theta_2 \sin \mu_2 \operatorname{tg} \mu_2}{\cos (\theta_2 - \mu_2)} \frac{x_a - x_2}{r_2}. \quad (22.27)$$

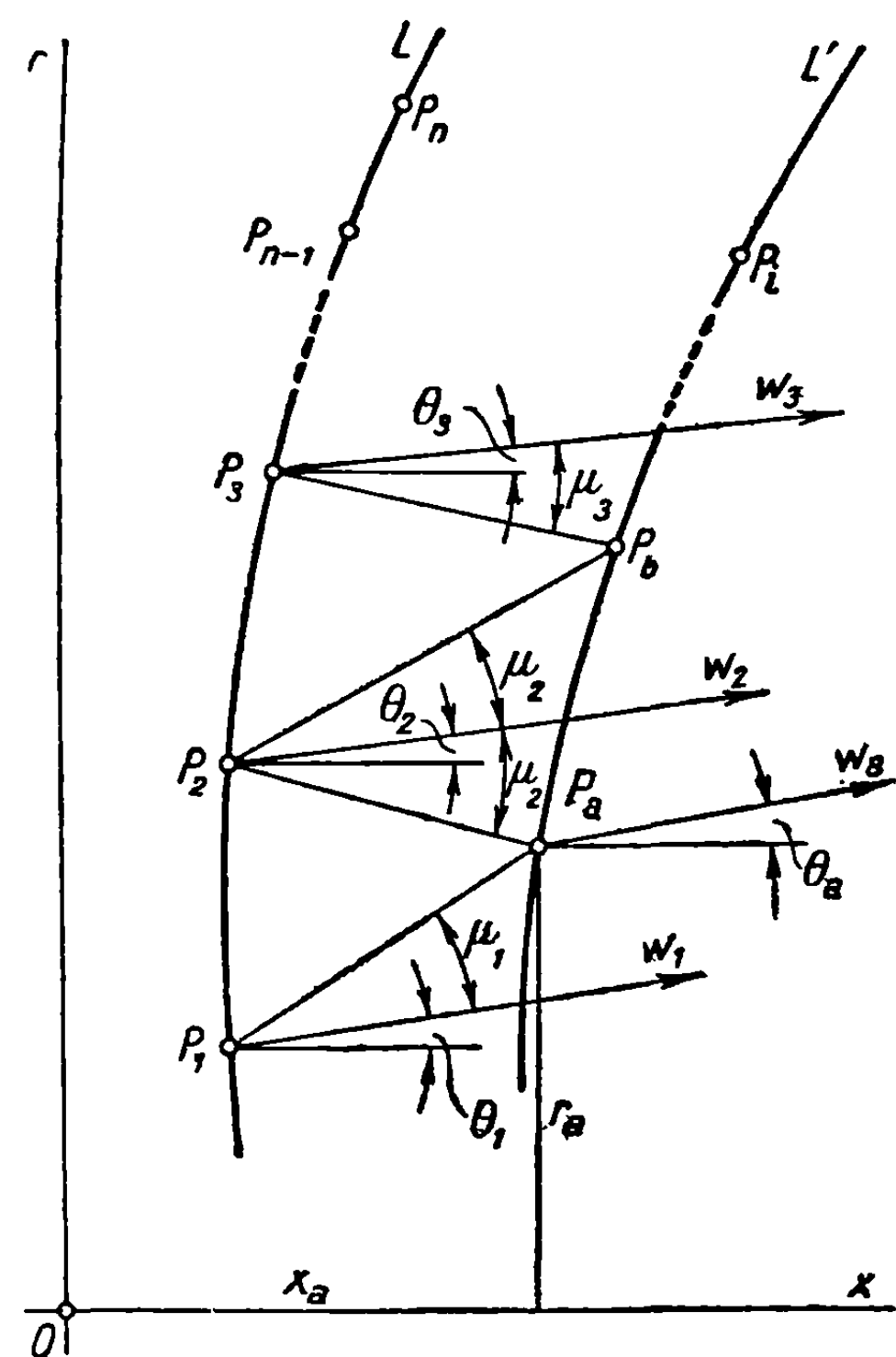
Из этих двух уравнений могут быть определены  $\delta w_{1a}$  и  $\delta \theta_{1a}$ , а следовательно, скорость  $w_a$  и угол  $\theta_a$  в точке  $P_a$ . Задача может быть несколько упрощена, если поделить скорости на максимальную скорость  $W$ , в результате чего получаются безразмерные величины.

Далее, меняя обозначения ( $V_m$  на  $W$  и  $V$  на  $w$ ) в формуле (5.26), получим последовательно

$$\frac{1}{M_a^2} = \sin^2 \mu_a = \frac{x - 1}{2} \left( \frac{W^2}{w_a^2} - 1 \right); \quad (22.28)$$

отсюда может быть выведен угол  $\mu_a$ , и таким образом задача будет полностью решена для соседней точки  $P_a$ .

Если параметры течения известны вдоль какой-нибудь линии  $L$ , то эту линию можно разделить на малые отрезки  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$



Фиг. 22.2

и применить ту же процедуру, что и выше, для того чтобы найти параметры потока в соседних точках  $P_a, P_b, \dots, P_i$ , образующих таким образом линию  $L'$ , близкую к линии  $L$ . Начиная с этой новой линии и продвигаясь шаг за шагом, можно изучить соответствующее пространство, определяя поле скоростей, а следовательно, и течение в этом пространстве.

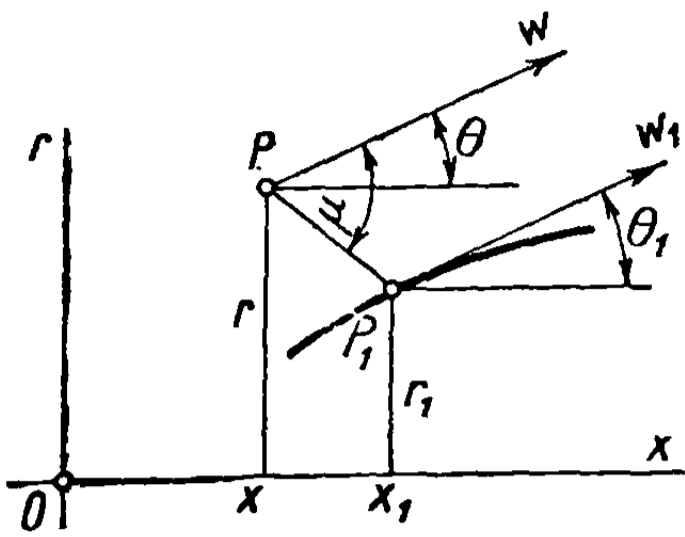
2) Если известны значения  $w, \theta$  и  $\mu$  в точке  $P$ , вблизи стенки препятствия (фиг. 22.3), то могут быть определены параметры течения в точке  $P_1$ , которая является пересечением касательной к отрицательной характеристике, проведенной через  $P$ , и поверхности тела.

Прямая, проведенная из точки  $P$  под углом  $\theta - \mu$  к оси  $Ox$ , определяет, таким образом, точку пересечения  $P_1$  с координатами  $x_1, r_1$ , а также угол  $\theta_1$ , образуемый скоростью  $w_1$  с осью  $Ox$ . Применяя уравнение (22.23), получим

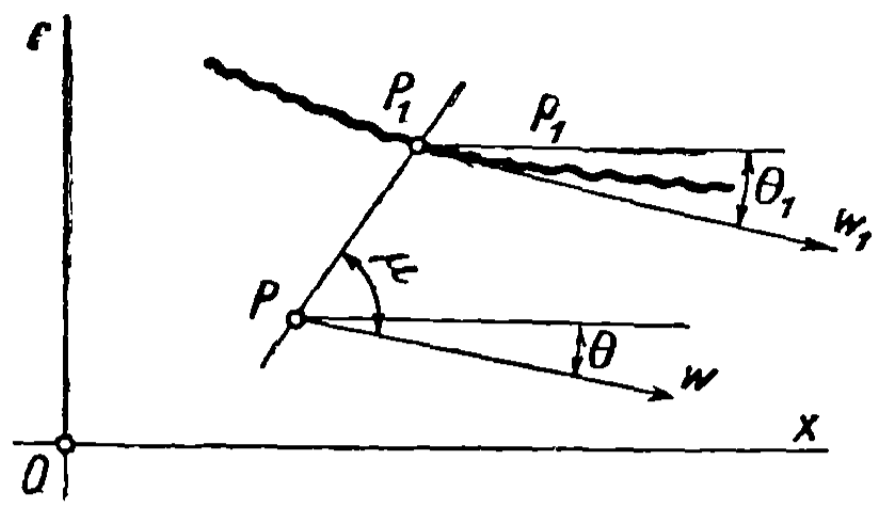
$$\frac{\delta w}{w} = -(\theta_1 - \theta) \operatorname{tg} \mu + \frac{\sin \theta \sin \mu \operatorname{tg} \mu}{\cos (\theta - \mu)} \frac{x_1 - x}{r}; \quad (22.29)$$

таким путем может быть определена скорость  $w_1 = w + \delta w$  в точке  $P_1$ .

Применяя формулу (22.28), в которой  $\omega_a$  и  $\mu_a$  следует заменить соответственно на  $\omega_1$  и  $\mu_1$ , можно также вычислить величину последнего угла. Если известны свойства течения в ряде точек  $P$  вдоль твердой границы, то, поступая, как указано ранее, можно определить скорости на контуре.



Фиг. 22.3



Фиг. 22.4

3) Если существует свободная поверхность (фиг. 22.4), отделяющая рассматриваемый поток от покоящегося газа с давлением  $p_1$ , то величина  $\omega_1$  может быть выведена из уравнения Бернулли, и угол  $\theta_1$  может быть вычислен с помощью уравнения (22.22):

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega} - \frac{\sin \theta \sin \mu \operatorname{tg} \mu}{\cos(\theta + \mu)} \frac{x_1 - x}{r} = (\theta_1 - \theta) \operatorname{tg} \mu. \quad (22.30)$$

Чтобы найти точку пересечения  $P_1$  касательной к характеристике положительного семейства, проведенной через точку  $P$ , со свободной поверхностью, рассматриваем сначала приближенную ориентацию свободной поверхности, следуя которой можно произвести вычисления в первом и втором приближениях для определения точной касательной к свободной поверхности.

Задача о течении с наличием свободной границы является, однако, более сложной. Если точка на этой границе, как и свойства течения в ряде точек вдоль нее, будут известны, то форма границы может быть также определена путем применения процедуры вычислений последовательными шагами.

4) Если известна одна характеристика вблизи тела вращения, то может быть определена следующая, соседняя характеристика. Пусть  $C_+$  будет заданной характеристикой положительного семейства, начинающейся в некоторой точке  $A'$  на теле вращения, вокруг которого исследуется течение. Чтобы найти характеристику  $C_+$  того же семейства, исходящую из соседней точки (фиг. 22.5), проведем прямую  $B'B$  из точки  $B'$ , касательную к отрицательной характеристике, проходящей через  $B'$  под углом  $\theta'_b - \mu'_b$ . Таким образом определяются точка  $B$  и угол  $\theta_b$ , образуемый касательной к контуру тела в этой точке с горизонтальной линией, а также координаты  $x_b$  и  $r_b$  точки  $B$ . Так как свойства течения в точке  $B'$ , т. е.  $\omega'_b$ ,  $\theta'_b$ ,  $\mu'_b$ , известны, как и соответствующие координаты  $x'_b$ ,  $r'_b$ , то, применяя уравнение (22.23), получим

$$\frac{\delta \omega}{\omega'_b} = -(\theta_b - \theta'_b) \operatorname{tg} \mu'_b + \frac{\sin \theta'_b \sin \mu'_b \operatorname{tg} \mu'_b}{\cos(\theta'_b - \mu'_b)} \frac{x_b - x'_b}{r'_b}; \quad (22.31)$$

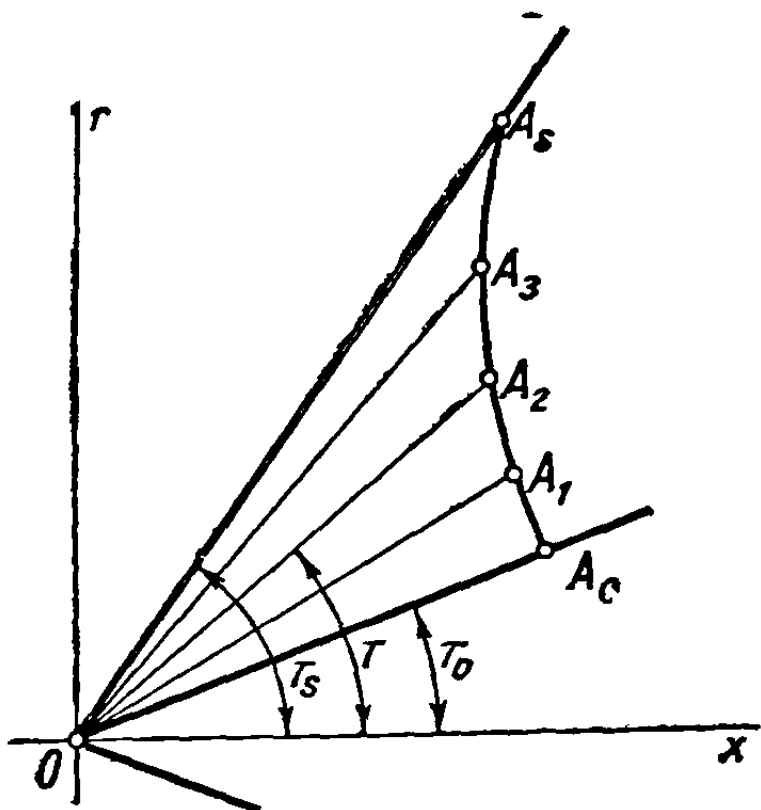




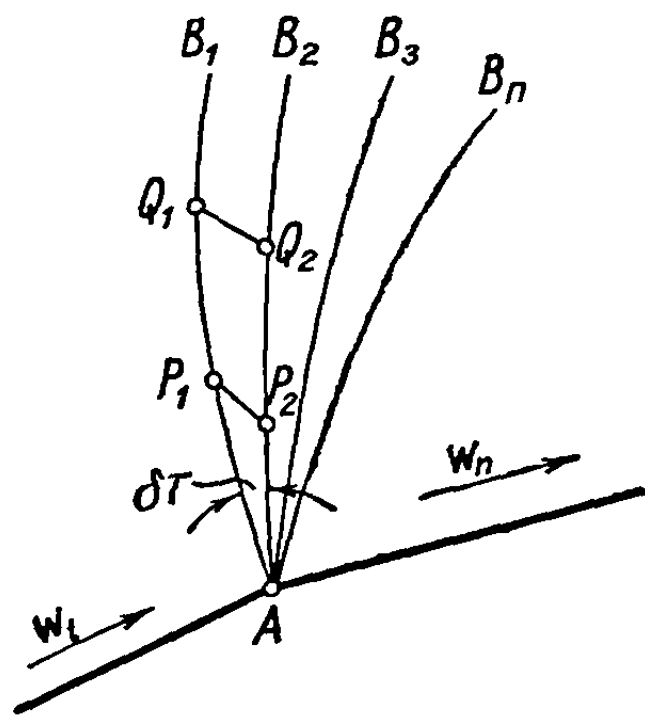
ющую угол  $\theta_1 + \mu_1$  с осью, определяем точку  $A_2$  и, поступая так вплоть до точки  $A_s$ , получаем положительную характеристику  $A_0A_1A_2 \dots A_s$ .

Так как  $\theta$  и  $\mu$  известны для каждого радиуса, следует взять средние наклоны между двумя точками, чтобы получить более точные результаты. Так, средний наклон для участка  $A_0A_1$  будет

$$\theta_{01} + \mu_{01} = \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_1) + \frac{1}{2} (\mu_0 + \mu_1), \quad (22.33)$$



Фиг. 22.6



Фиг. 22.7

и после определения точки  $A_1$  средний угол для  $A_1A_2$  будет

$$\theta_{12} + \mu_{12} = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2), \quad (22.34)$$

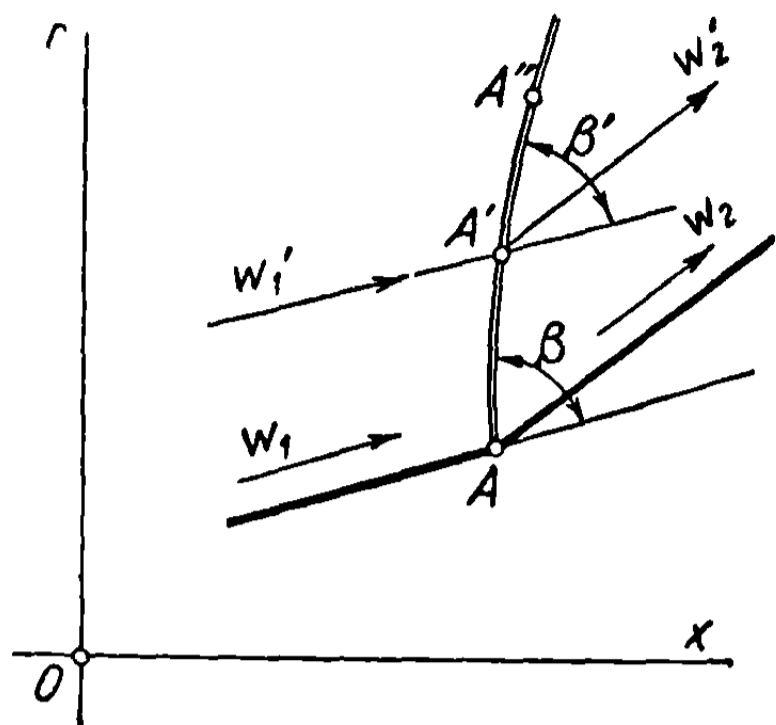
и так пока не будет построена вся характеристика. Точки  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$  можно также определить аналитическими методами, так как наклоны радиусов-векторов и угол  $\theta + \mu$ , соответствующий каждой точке  $A$ , известны.

б) Та же процедура может быть применена для построения характеристик вокруг угла  $A$  (фиг. 22.7). Если в точке  $A$  наклон меридиональной кривой тела вращения резко изменяется, переходя от угла  $\theta_1$  к углу  $\theta_n$ , то скорость  $w$  и отклонение  $\theta$  также внезапно изменяются вблизи вершины угла, в непосредственном соседстве с точкой  $A$ , тогда как абсцисса остается постоянной ( $dx = 0$ ). Поэтому уравнения (22.22) и (22.23) сводятся вблизи точки  $A$  к соответствующим уравнениям для плоскопараллельного течения (см. раздел 19.2.1)

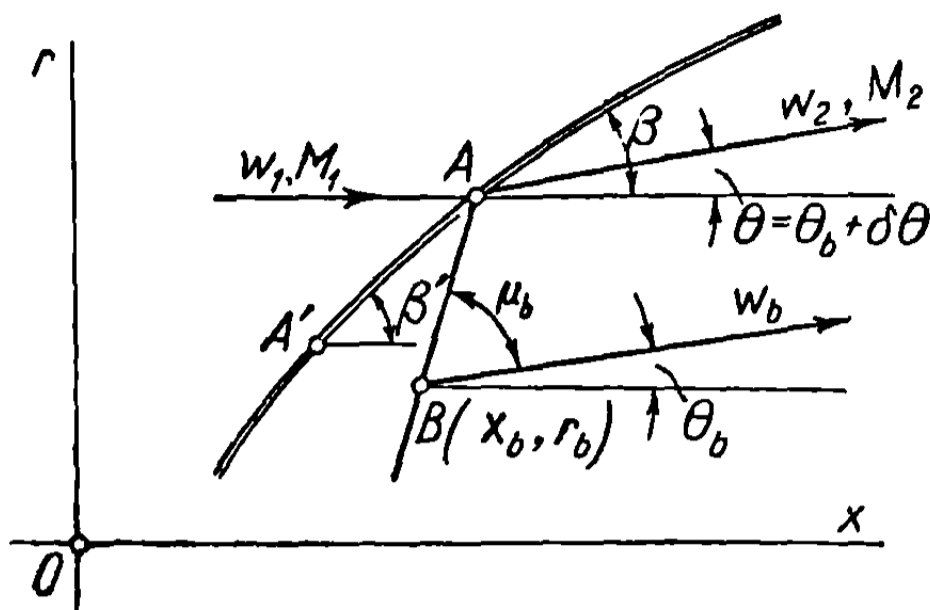
$$\frac{dw}{w} = \pm \operatorname{tg} \mu d\theta, \quad (22.35)$$

и расширение в ближайшей окрестности точки  $A$  идентично расширению вокруг угла, обтекаемого плоскопараллельным потоком. В этом случае, если скорость  $w_1$  перед угловой точкой известна, то может быть выведена скорость  $w_n$  в нижнем течении либо с помощью эпициклоиды, либо из таблиц, соответствующих плоскопараллельному течению. Характеристики, однако, перестают быть прямолинейными, как в случае двумерного течения; как только они отходят от точки  $A$ , их наклон определяется соотношениями

(22.22) и (22.23). Поэтому операции должны производиться последовательно. Для этого угол между передней и задней характеристиками, выходящими из точки  $A$ , делится на малые углы  $\delta\tau$ ; для каждого [радиуса-вектора, исходящего из точки  $A$  внутри указанного угла,  $\omega$ ,  $\theta$  и  $\mu$  являются известными величинами,



Фиг. 22.8



Фиг. 22.9

выводимыми из таблиц или по эпициклоиде. Предположим, что передняя характеристика  $AB_1$ , которая не подвергается влиянию процесса расширения, начинающегося от точки  $A$ , построена согласно предшествующему методу. На этой характеристике, вблизи точки  $A$ , берется точка  $P_1$  и проводится прямая  $P_1P_2$ , касательная к отрицательной характеристике, проходящей через точку  $P_1$ , и составляющая поэтому угол  $\theta_{1p} - \mu_{1p}$  с осью тела. В точке пересечения  $P_2$  с радиусом-вектором, выходящим из точки  $A$  и составляющим угол  $\delta\tau$  с  $AP_1$ , свойства течения могут быть определены, так как соответствующие свойства в точках  $P_1$  и  $A$  известны. Из точки  $P_2$  проводится прямая  $P_2Q_2$  под углом  $\theta_{2p} + \mu_{2p}$ ; затем из точки  $Q_1$ , расположенной на первой характеристике  $AB_1$ , проводится прямая  $Q_1Q_2$ , составляющая с направлением потока угол  $\theta_{1q} - \mu_{1q}$ , и таким образом определяется точка  $Q_2$ . Продолжая этот процесс, можно определить характеристику  $AB_2$  и, проделывая шаг за шагом операции для каждого радиуса-вектора, выходящего из точки  $A$ , можно построить характеристики  $AB_3, \dots$  вплоть до последней характеристики  $AB_n$ .

7) Если в точке  $A$  вместо волны разрежения образуется ударная волна, то в ближайшей окрестности этой точки угол  $\beta$  и скорость  $w_2$  определяются по законам, управляющим косыми ударными волнами (фиг. 22.8). В точке  $A'$ , близкой к точке  $A$ , может быть вычислен наклон  $\beta'$ , так как обе скорости  $w'_1$  и  $w'_2$  и их направления известны; то же самое может быть сделано для следующих точек  $A'', \dots$  ударной волны.

8) Если характеристика встречает осесимметричную ударную волну, то может быть определен наклон этой волны в точке пересечения. Рассмотрим осесимметричную ударную волну, пересекающую соответствующую характеристику  $AB$  в точке  $A$  (фиг. 22.9). В точке  $B$ , расположенной вблизи точки  $A$ , как и во всех точках этой характеристики, будем предполагать величины  $w_b$ ,  $\theta_b$ ,  $\mu_b$  известными с целью определения свойств течения около точки  $A$ . Течение впереди ударной волны определяется величинами  $w_1$  и  $M_1$ , а за ударной волной значениями  $w_2$ ,  $M_2$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  и т. д.

Скорость  $w_2$  подчиняется закону скоростей вдоль характеристики  $AB$ , но она подчиняется также закону ударной волны. Вычертив диаграмму для скорости  $w_2$  в зависимости от  $\theta$  и обозначив через  $w_{2b}$  скорость за ударной волной, соответствующую отклонению  $\theta_b$ , получим величину скорости  $w_2$ , соответствующую неизвестному действительному отклонению  $\theta = \theta_b + \delta\theta$

$$w_2 = w_{2b} + \left(\frac{dw_2}{d\theta}\right)_b \delta\theta, \quad (22.36)$$

где производная  $\frac{dw_2}{d\theta}$  берется равной тангенсу угла наклона касательной в точке  $\theta = \theta_b$  к кривой  $w_2 = w_2(\theta)$ , которая, как указывалось, предполагается построенной.

Скорость  $w_2$  также должна удовлетворять уравнению характеристик; следовательно, применяя уравнение (22.22), получим

$$\begin{aligned} \frac{w_2 - w_b}{w_b} - \operatorname{tg} \mu_b \delta\theta &= \frac{w_{2b}}{w_b} - 1 + \left[ \frac{1}{w_b} \left(\frac{dw_2}{d\theta}\right)_b - \operatorname{tg} \mu_b \right] \delta\theta = \\ &= \frac{\sin \theta_b \sin \mu_b \operatorname{tg} \mu_b}{\cos(\theta_b + \mu_b)} \frac{x - x_b}{r_b}. \end{aligned} \quad (22.37)$$

Предположим, что в соседней точке  $A'$ , где осесимметричная ударная волна полностью определена, угол  $\beta'$  известен. Тогда точка  $A$  в первом приближении будет пересечением прямой  $A'A$ , проведенной под углом  $\beta$  к оси  $Ox$ , с прямой  $BA$ , образующей угол  $\theta_b + \mu_b$  с той же осью. Величина  $x$ , которая встречается в предшествующей формуле, таким образом, определяется; следовательно, из этой формулы может быть получена величина  $\delta\theta$ ; отсюда

$$\theta = \theta_b + \delta\theta. \quad (22.38)$$

С помощью диаграммы  $\beta = \beta(\theta)$ , построенной согласно уравнению ударной волны, выводится в заключение угол  $\beta$ . Применяя тот же метод, можно построить шаг за шагом всю меридиональную кривую для осесимметричной ударной волны.

Чтобы построить диаграмму  $\beta = \beta(\theta)$ , нужно использовать формулу (7.50)

$$\operatorname{ctg} \theta = \left( \frac{x+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta,$$

а затем из уравнения (7.52б)

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)} = \frac{2}{x+1} \left[ \frac{1}{M_2^2 \sin^2(\beta - \theta)} + \frac{x-1}{2} \right],$$

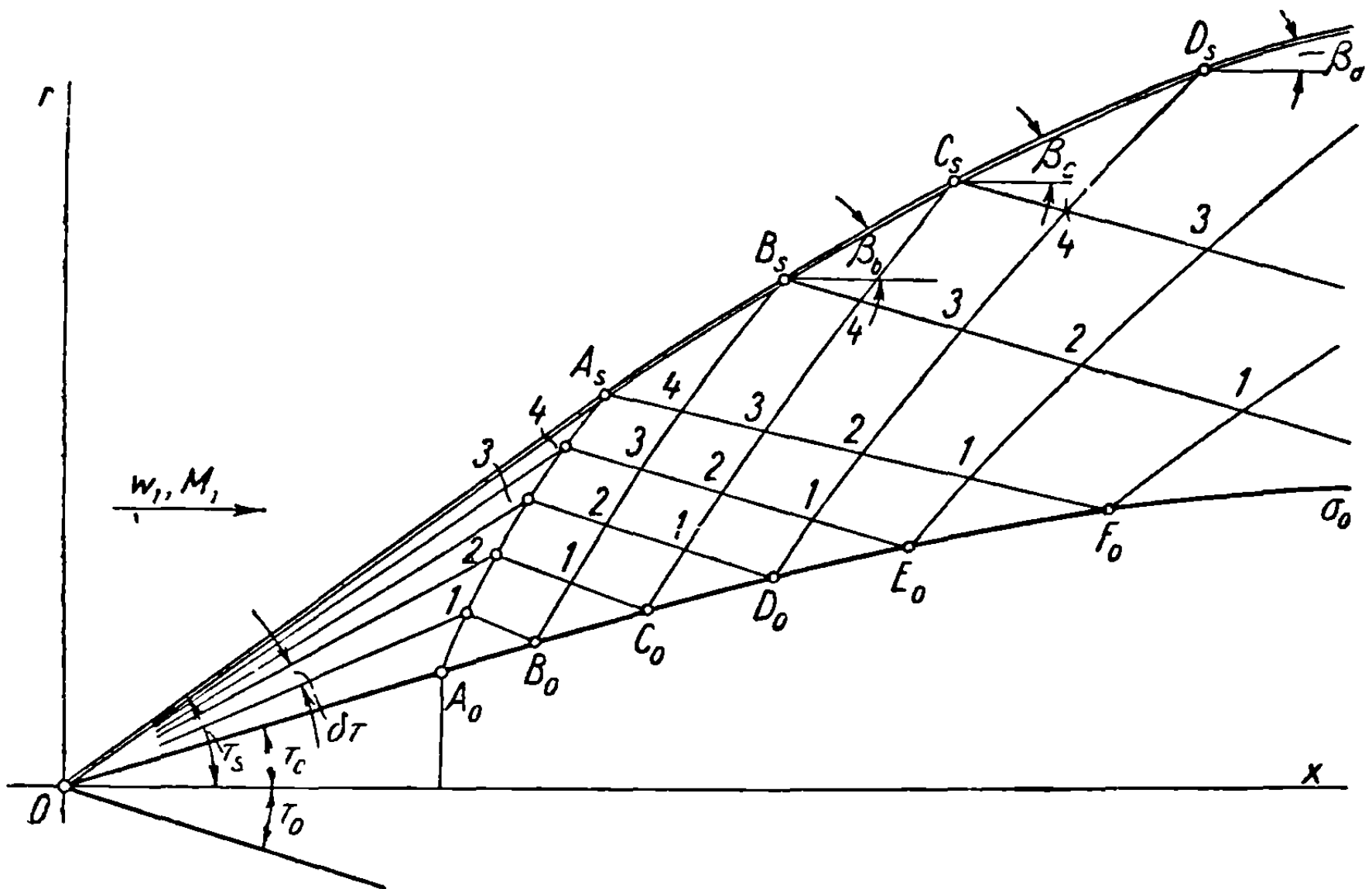
если известно  $\beta$  и  $\theta$ , можно получить  $M_2$  и определить  $w_2$  путем применения формулы (5.2б)

$$\frac{w_2}{w_2^*} = \frac{2}{(x-1)M_2^2} + 1. \quad (22.39)$$

Так как  $M_2$  зависит от  $\theta$ , то может быть построен график зависимости  $w_2 = w_2(\theta)$ .

## 22.4. Определение потока, обтекающего заостренное тело вращения, путем применения метода характеристик

Рассмотрим тело вращения, например, ракету или снаряд, расположенное в потоке, параллельном оси симметрии тела. Предположим, что его го-



Фиг. 22.10

ловная часть  $OA_0$  образована круговым конусом с полууглом  $\tau_0$  при вершине. За точкой  $A_0$  меридиональные линии искривлены, в соответствии с формой обтекаемого тела (фиг. 22.10).

Так как хвостовая часть тела не влияет на поток вверх по течению ударная волна будет конической вплоть до точки  $A_s$ , которая является пересечением этой волны с характеристикой, соответствующей точке  $A_0$ , построенной путем последовательных элементарных операций, как указано выше (см. фиг. 22.6).

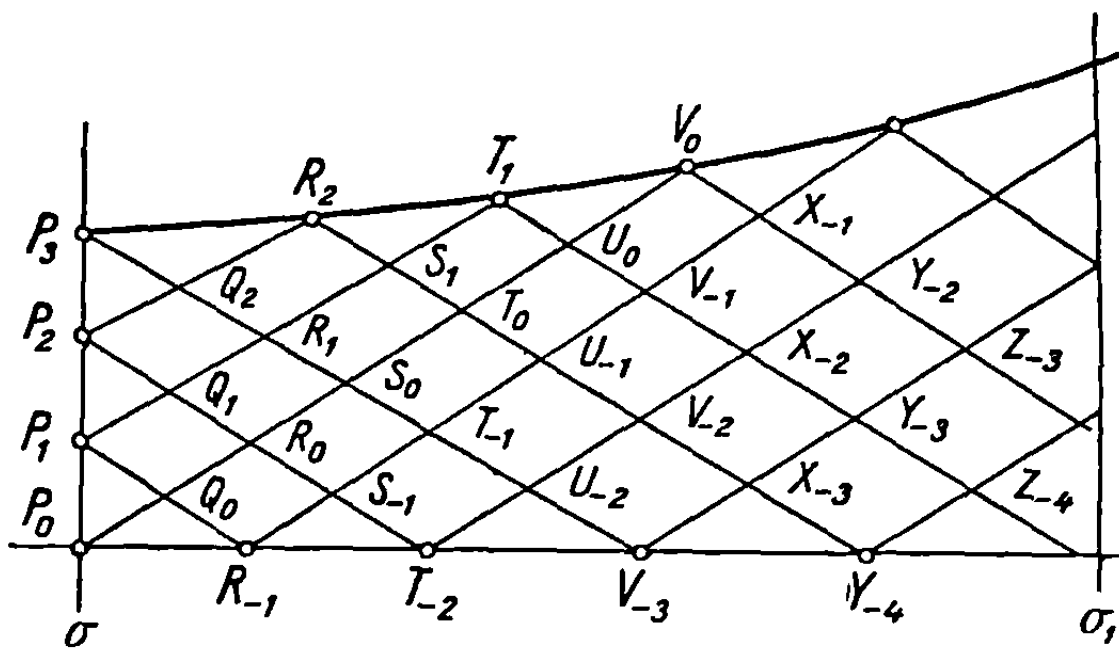
Предпочтительнее разделить угол между образующими конической ударной волны и обтекаемого конуса на равные, малые конечные части  $\delta\tau$ , получая точки  $A_0, 1, 2, 3, 4, A_s$ , определяющие первую характеристику. Как только первая характеристика будет известна, соседняя характеристика  $B_0, 1, 2, 3, 4, B_s$  может быть построена тем же методом (фиг. 22.5). В точке  $B_s$  ударная волна имеет наклон  $\beta_b$ , который определяется согласно правилу в примере 8. Продолжая описанную процедуру, можно построить характеристики  $C_0, 1, 2, 3, 4, C_s, D_0, 1, 2, 3, 4, D_s, \dots$  и получить наклоны  $\beta_c, \beta_d, \dots$ , что позволяет провести меридиональную линию ударной волны  $OA_s B_s C_s D_s \dots$

Скорость постоянна вдоль участка  $OA_0$  и может быть определена по таблицам или непосредственно вычислением, в соответствии с методами, указанными в разделе 21. В последующих точках  $B_0, C_0, D_0$  на поверхности тела скорость вычисляется путем применения такой же процедуры, что и в примере 4 (см. раздел 22.3, формулы 22.31 и 22.32). Применяя урав-

нение Бернулли, можно найти распределение давления по всему телу. Предварительно, однако, нужно определить давление торможения  $p'_0$  за ударной волной по формуле (7.68).

## 22.5. Приложение метода характеристик к расчету круглых эффузоров

Рассмотрим меридиональную линию некоторого осесимметричного эффузора и предположим, что течение внутри него будет незавихренным, а скорости в некотором сечении  $\sigma$  известны и совместимы с течением, предполагаемым потенциальным (фиг. 22.11). Теперь может быть определено поле скоростей вдоль эффузора. Так как свойства течения  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\mu$  в любой точке  $P$  известны, можно построить характеристики двух семейств, исходящие из этой точки.



Фиг. 22.11

Начиная, например, от точки  $P_2$ , проведем касательную к положительной характеристике под углом  $\theta_2 + \mu_2$  к оси; проведем также касательную к отрицательной характеристике в точке  $P_3$  под углом  $(\theta_3 - \mu_3)$  к оси, определяя таким образом точку пересечения  $Q_2$ . Точки  $Q_1, Q_0 \dots$  определяются аналогичным образом. Во всех этих точках могут быть вычислены  $\omega$ ,  $\theta$  и  $\mu$ , согласно правилам, указанным в разделе 22.3 (пример 1). Проводя из точки  $Q_2$  касательную к положительной характеристике, получим точку  $R_2$  на меридиональной линии эффузора, что дает возможность определить  $\theta$  и вычислить  $\omega$ ,  $\mu$ , как показано в примере 2. Точки  $R_1, R_0, R_{-1}, \dots, S_1, S_0, S_{-1}, \dots, T_1, T_0, T_{-1}, T_{-2}$  и т. д. могут быть вычислены последовательно, пока не определится вся сетка характеристических линий внутри эффузора, а следовательно, и поле скоростей.

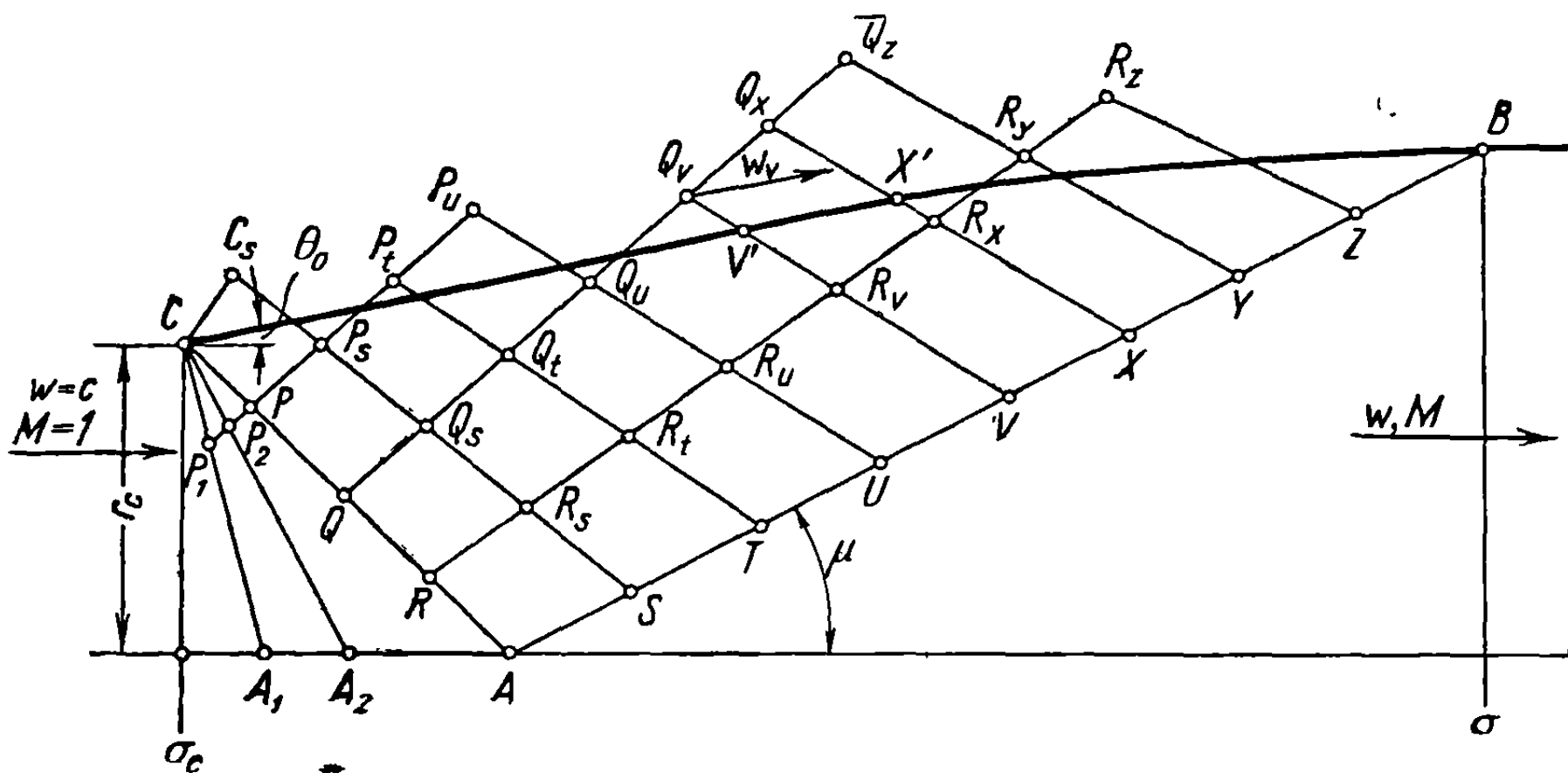
Незначительные трудности возникают в связи с точками, лежащими на оси, благодаря появляющейся при расчетах неопределенности. Рассмотрим четырехугольник  $Q_0 R_0 R_{-1} S_{-1}$ , для которого свойства течения в точках  $Q_0$  (через посредство  $P_0$  и  $P_1$ ) и  $R_0$  (через посредство  $Q_0$  и  $Q_1$ ) известны. Так как точка  $Q_0$  близка к оси, которая является линией тока, а следовательно, границей, можно вычислить  $\omega_r, \mu_r$  в точке  $R_{-1}$  (фиг. 22.12) методом, примененным в примере 2. Но чтобы определить точку  $S_{-1}$ , вычисление должно начинаться от  $R_0$  и  $R_{-1}$  путем применения уравнений (22.23) для  $R_0$  и (22.22) для  $R_{-1}$ .

Обозначая через  $\omega'_r, \theta'_r, \mu'_r$  характеристики течения в точке  $R_0$  и замечая, что уравнение (22.23) приводит к равенству (22.27), получим, в согласии с принятыми обозначениями,

$$\frac{\delta\omega + \omega_r - \omega'_r}{\omega'_r} + \operatorname{tg}\mu'_r (\delta\theta + \theta_r - \theta'_r) - \frac{\sin\theta'_r \sin\mu'_r \operatorname{tg}\mu'_r}{\cos(\theta'_r - \mu'_r)} \frac{x_s - x'_r}{r'_r} = 0, \quad (22.40)$$

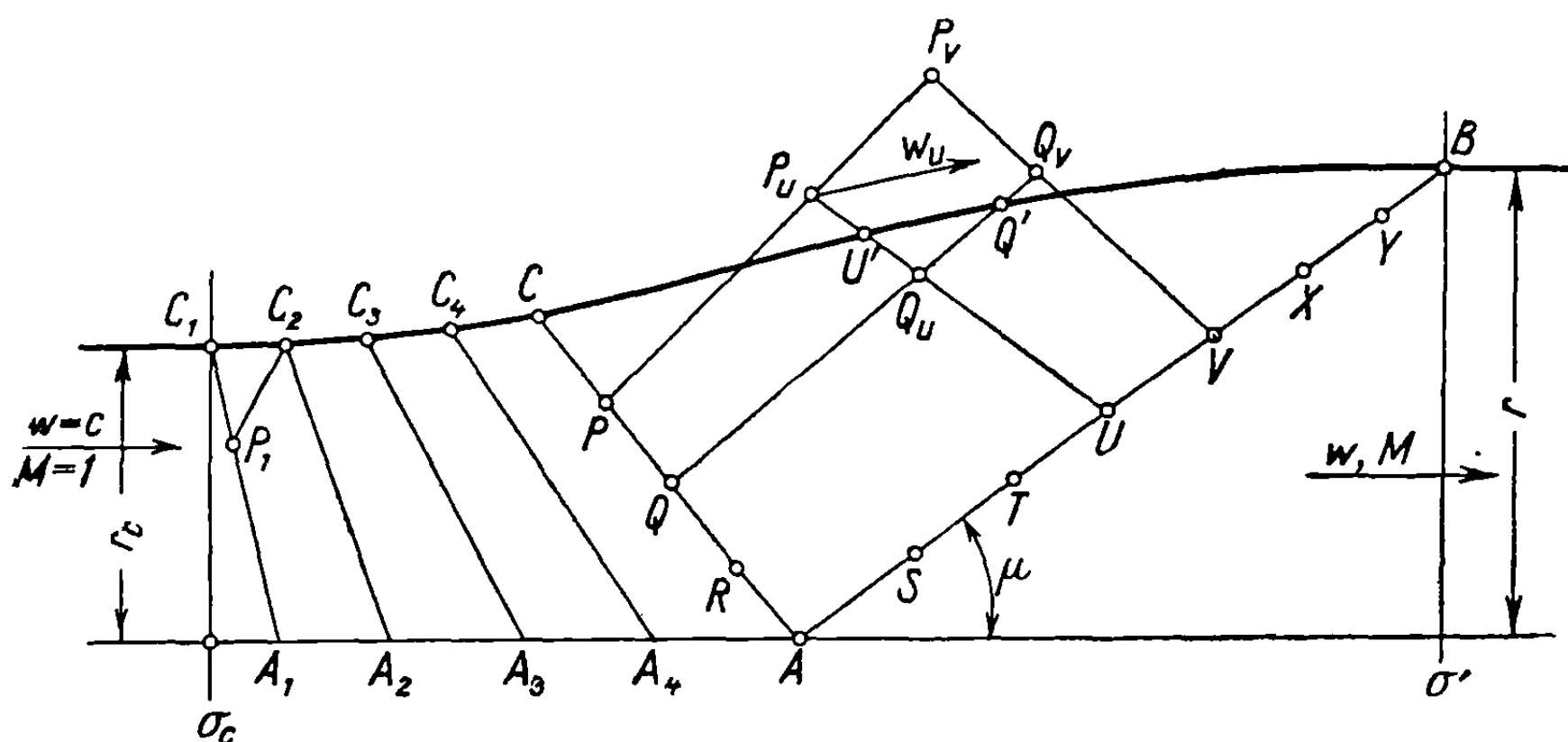


а) В первом случае, поскольку расширение вблизи стенки идентично двумерному расширению, рассмотрим малые интервалы  $\delta\theta$  и проведем средние направления волн разрежения от точки  $C$  для каждого последовательного отклонения  $\delta\theta$  в согласии с правилами, описанными в разделе 20.1



Фиг. 22.13

(см. фиг. 20.3). Первая средняя волна  $CA_1$  прямолинейна, так как поток вверх по течению однороден. Для других волн  $CA_2, \dots, CA$  известно только



Фиг. 22.14

направление в исходной точке  $C$ , но они могут быть построены шаг за шагом. В точке  $C$  для каждого направления характеристических линий, соответствующих последовательным отклонениям  $\delta\theta$ , известны значения  $w$ ,  $\theta$  и  $\mu$ ; поэтому может быть проведена касательная к соответствующей характеристике, образующая с горизонтальной осевой линией угол  $\theta - \mu$ .

Таким образом, зная свойства течения в точках  $C$  (относительно направления  $CP_2A_2$ ) и  $P_1$ , на первой волне разрежения, вдоль которой величины  $w$ ,  $\theta$  и  $\mu$  постоянны, можно вычислить значения  $w_2$ ,  $\theta_2$  и  $\mu_2$  в точке  $P_2$  путем применения точно такого же метода, как и выше (см. раздел 22.3, пример 1). Все характеристики, выходящие из точки  $C$ , могут быть построены последовательно от  $CA_1$  до  $CA$ ; вдоль последней в точке  $A$

определяется однородная скорость  $\omega$  в конечном сечении  $\sigma$ . Характеристическая линия  $CA$ , представляющая последнюю волну разрежения, позволяет определить соответствующий угол  $\theta_0$ .

Так как поток за точкой  $A$  постепенно становится однородным по всему сечению эффузора, то характеристика  $AB$  будет прямой линией, составляющей угол  $\mu$  с осью; только в этом случае может быть получена постоянная скорость вдоль оси. Таким образом, на меридиональной линии определяются точка  $B$  и отклонение  $\theta_0$ ; остается провести профиль  $CB$ .

С помощью точек  $C, P, Q, R, A$  на последней характеристике  $CA$  и точек  $A, S, T, U, V, X, Y, Z, B$  на линии  $AB$  можно построить полную сетку характеристических линий, разделяющих пространство, заключенное между линиями  $CA$  и  $AB$ , на малые четырехугольники; внутри таких четырехугольников свойства течения постоянны и совпадают со свойствами, соответствующими вершинам каждого четырехугольника, расположенным выше по течению. В точках  $C_s, P_t, P_u, Q_v, Q_x, R_y, R_z$  определяются значения  $\omega$  и  $\theta$ , так что можно будет построить сегмент  $V'X'$  контура, поскольку он будет параллелен скорости  $\omega_v$  в точке  $Q_v$ . Следовательно, начиная от точки  $C$ , меридиональная линия эффузора будет параллельна скорости, определяемой в первой вершине соответствующего четырехугольника.

б) Во втором случае, когда линия  $C_1C$  эффузора задана, могут быть построены, начиная от прямолинейной характеристики  $C_1A_1$ , все другие характеристики  $C_2A_2, C_3A_3$ , вплоть до характеристики  $CA$ , в точке  $A$  которой получается скорость  $\omega$  для конечного сечения  $\sigma$ . От  $C_1$  до  $C$  меридиональная линия задается, за точкой  $C$  она вычисляется, как в предшествующем случае. Следовательно, через каждую из точек  $P, Q, R, \dots$  на линии  $CA$  и точек  $U, V, \dots$  на прямой  $AB$  проводятся характеристики  $PP_uP_v \dots$  первого семейства и характеристики  $UQ_uP_u \dots$  второго, разделяющие, как и выше, все пространство между  $CA$  и  $AB$  на малые четырехугольники, в которых  $\omega, \theta$  и  $\mu$  постоянны и равны значениям этих величин в верхних (относительно течения) вершинах каждого четырехугольника.

Касательная к меридиональной линии в точке  $U'$  будет параллельна скорости  $\omega_u$  в вершине  $P_u$  четырехугольника  $P_uQ_uP_vQ_v$  (см. фиг. 22.14).

Начиная от точки  $C$ , может быть построена меридиональная линия  $CB$ , дающая, таким образом, решение задачи.

**22.5.2. Аналитическое определение условий течения вблизи звуковой горловины.** Из уравнения для осесимметричного течения (22.4)

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0,$$

вводя подстановки

$$u = (1 + \alpha)c, \quad v = \beta c, \quad \Phi = (x + \varphi)c, \quad \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (22.44)$$

и предполагая, что  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$  будет величина такого же порядка как  $\alpha$ , и что  $\beta$ ,

$\frac{\partial \beta}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$  будут более высокого порядка, получим

$$(x + 1)\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\beta)}{\partial r} = 0. \quad (22.45)$$



Полагая, как в случае двумерного течения (см. формулу 20.16),

$$\varphi = \frac{1}{2} mx^2 + r^2 \varphi_2(x) + r^4 \varphi_4(x) + \dots, \quad (22.46)$$

находим путем аналогичных операций

$$\varphi_2 = \frac{x+1}{4} m^2 x, \quad \varphi_4 = \left(\frac{x+1}{8}\right)^2 m^3 \dots; \quad (22.47)$$

отсюда для скорости получим

$$\begin{aligned} \alpha &= mx + \frac{x+1}{4} m^2 r^2 + \dots, \\ \beta &= \frac{x+1}{2} m^2 xr + \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 m^3 r^3 + \dots, \end{aligned} \quad (22.48)$$

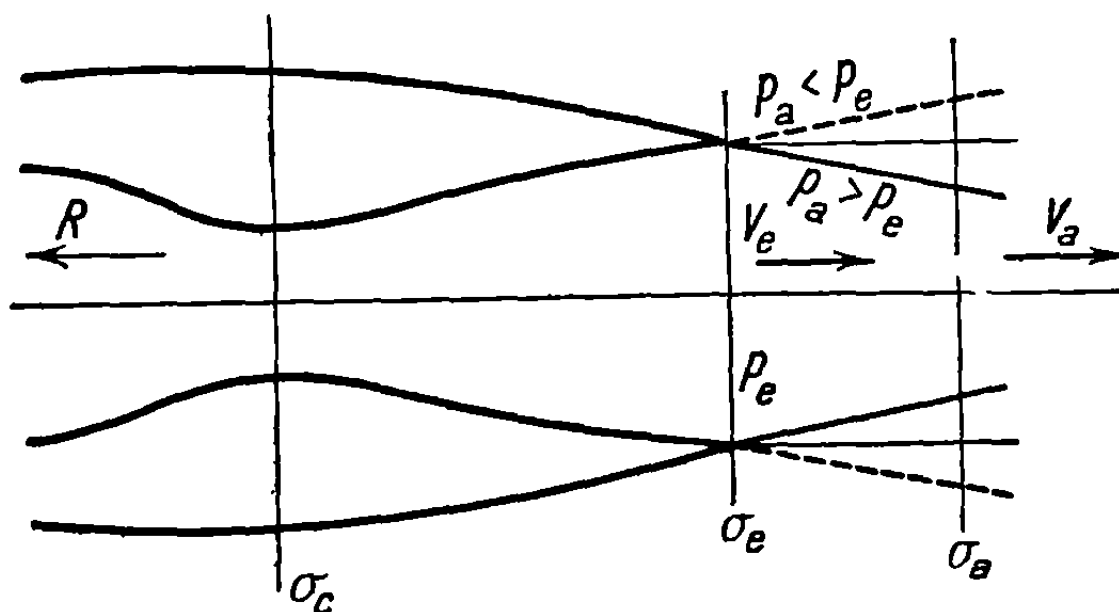
что представляет тот же тип зависимости, как и в случае плоского течения за исключением изменения числовых коэффициентов.

Все остальные рассуждения аналогичны произведенным в случае плоского течения и поэтому мы не будем их повторять.

Юрьев [9] дал более точное решение, вводя некоторые члены второго порядка в предположении, что иногда они будут сравнимы с величинами первого порядка.

## 22.6. Тяга, создаваемая сверхзвуковой струей

При изучении реактивных двигателей значительный интерес представляет тяга, создаваемая струей, выходящей из эжектора. Внутри эжектора тече-



Фиг. 22.15

ние становится сверхзвуковым непосредственно за звуковой горловиной, и сопло, начиная с этого сечения вплоть до выхода, работает как эффузор (фиг. 22.15).

Пусть  $\sigma_e$  — выходное сечение и  $V_e$ ,  $\rho_e$ ,  $p_e$  — соответственно скорость, давление и плотность в этом сечении; поток массы постоянен и равен

$$m = \rho_e V_e \sigma_e. \quad (22.49)$$

Предположим, что давление струи  $p_e$  при выходе из эжектора будет отличаться от внешнего давления  $p_a$ . Вследствие этого различия течение испытывает некоторые преобразования, проходя через волны разрежения или сжатия и достигая скорости  $V_a$  и давления  $p_a$  в некотором сечении  $\sigma_a$  ( $\sigma_a <$

$< \sigma_e$ , когда  $p_a > p_e$ ;  $\sigma_a > \sigma_e$ ,<sup>2</sup> когда  $p_a < p_e$ ). Рассматривая сначала объем газа, проходящий сечение  $\sigma_e$ , и затем объем, проходящий сечение  $\sigma_a$ , обозначая через  $R$  реакцию газа, действующую на тело, получим, в согласии с теоремой о количестве движения,

$$R = mV_e + p_e \sigma_e = mV_a + p_a \sigma_a; \quad (22.50)$$

отсюда, подставляя вместо  $m$  его выражение, данное выше, получим

$$p_e - p_a = \rho_e V_e (V_a - V_e). \quad (22.51)$$

Из этого выражения может быть получена скорость  $V_a$ , если известны  $V_e$ ,  $p_e$ ,  $p_a$ . Изменение состояния газа в сечениях  $\sigma_e$  и  $\sigma_a$  не является изэнтропическим, энтропия возрастает в результате происходящего процесса. Отсюда следует, что  $V_a$  меньше значения скорости, соответствующего изэнтропическому преобразованию, при котором давление изменяется от  $p_e$  до  $p_a$ . Чем больше разница между этими давлениями, тем больше будут потери; они исчезают, когда процесс остается изэнтропическим, что будет только в случае, если

$$p_e = p_a,$$

$$V_e = V_a. \quad (22.52)$$

Следовательно, для получения максимальной эффективности эжектора требуется, чтобы выходное сечение эффузора соответствовало давлению  $p_e$ , равному внешнему давлению  $p_a$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Busemann. «Luftfahrtforschung», 19, № 4, 1942, S. 137—144.
2. G. I. Taylor a. J. W. Masscoll. «Proc. Roy. Soc.», A139, 1932, p. 278—311.
3. J. W. Masscoll. «Proc. Roy. Soc.», A159, 1937, p. 459—472.
4. Z. Korál. Tables of Supersonic Flow Around Cones. (Таблицы для сверхзвукового течения около конусов.) Т. I. Massachusetts, 1947.
5. W. Hantzsch u. H. Wendt. Deutsche Luftfahrtforschung, Jahrbuch 1942, H. 7, 1942.
6. Ф. И. Франкль. Осесимметричные сверхзвуковые течения. Изв. Арт. акад., № 35, 1934.
7. С. Ферри. Atti del V convegno «Volta». Roma, 1935; «Aerotecnica», 16, № 2, 1936, p. 121—130.
8. А. Ферри. Аэродинамика сверхзвуковых течений (пер. с англ.). Гос. изд. техн.-теорет. лит., М., 1953.
9. И. М. Юрьев. К расчету сопел. ПММ, 19, вып. 1, 1955, стр. 103—105.

## Глава 8

### ТЕОРИЯ КРЫЛЬЕВ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТОДЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предшествующих главах мы рассматривали теорию крыльев бесконечного размаха в сверхзвуковом потоке, включая различные виды плоских течений вокруг сверхзвуковых аэродинамических профилей, посредством как приближенных методов, в особенности метода малых возмущений, так и более строгих, точных решений.

Явления в потоке, обтекающем крыло конечного размаха, и их зависимость от всех геометрических характеристик крыла значительно сложнее. До сих пор еще невозможно установить здесь точную теорию, которая учитывала бы все факторы, имеющие значение. Однако, если крыло достаточно тонкое и форма его в плане достаточно правильная, то можно применить гипотезу малых возмущений, развивая таким образом приближенную теорию для крыльев конечного размаха. Эта глава посвящена обсуждению этой теории и применению ее к случаям, встречающимся на практике.

#### 23. МЕТОДЫ РАСЧЕТА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРИИ КРЫЛЬЕВ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Следующие разделы посвящены некоторым методам, применяемым при подсчете давлений на крыле конечного размаха; зная распределение давлений, можно легко вывести путем интегрирования подъемную силу и лобовое сопротивление крыла.

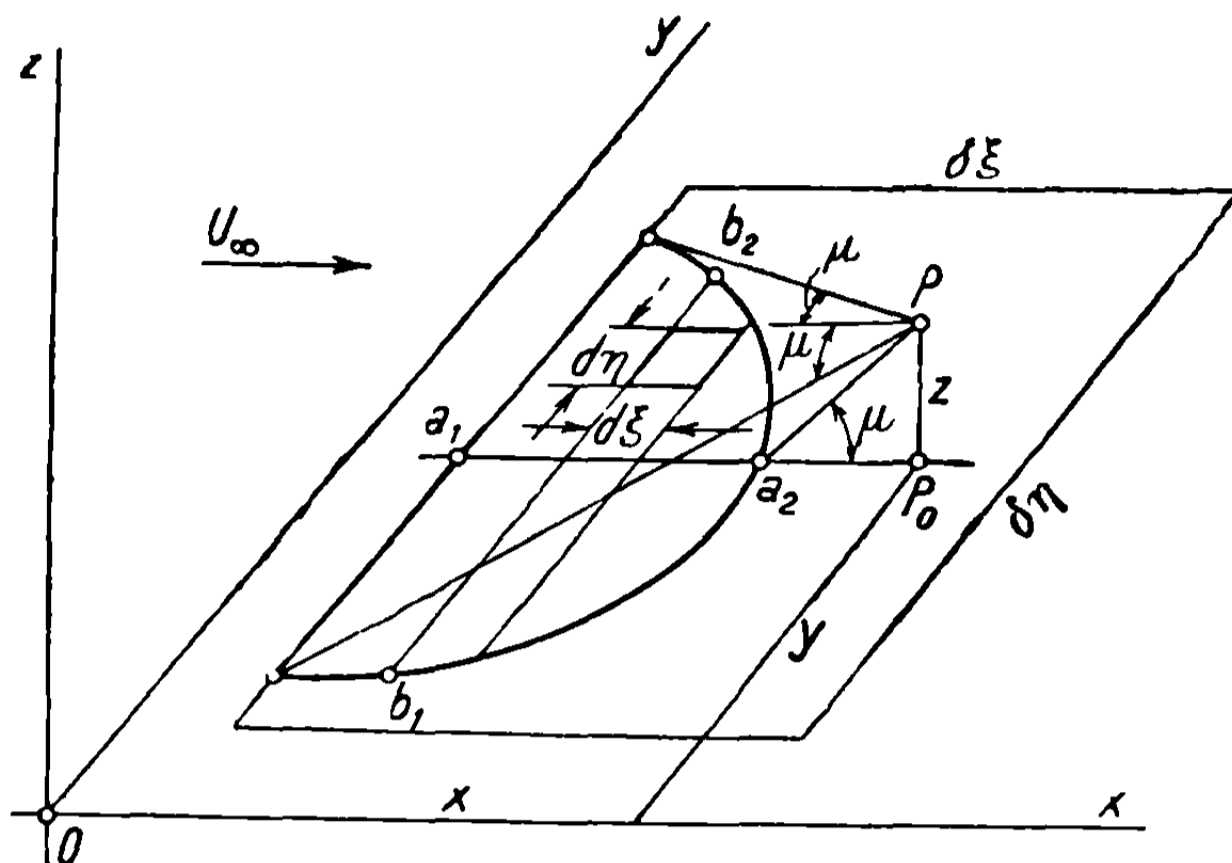
##### 23.1. Метод источников, примененный к расчету крыльев с симметричным профилем и нулевым углом атаки

Рассмотрим на какой-нибудь поверхности, содержащейся в плоскости  $Oxy$ , распределение источников, интенсивность которых в каждой точке  $\xi, \eta$  поверхности пропорциональна  $f(\xi, \eta)$  (фиг. 23. 1.) Предполагая, что вся поверхность расположена в потоке  $U_\infty$  и что скорость возмущения (с компонентами  $u, v, w$ ), вызванная системой источников, мала, примем гипотезу малых возмущений; тогда потенциал, соответствующий этим

скоростям, в некоторой точке  $P(x, y, z)$  должен удовлетворять уравнению (5.39)

$$-B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (23.1)$$

где  $B$  имеет обычное значение.



Фиг 23.1

Заменяя переменную, согласно подстановке (15.16)

$$x = iBX, \quad (23.2)$$

примененной при изучении сходной задачи для осесимметричного сверхзвукового течения (см. раздел 15.2), получим, что уравнение (23.1) сводится к уравнению Лапласа, как в случае несжимаемого течения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (23.3)$$

Если в пространстве переменных  $X, y, z$  в точке  $\Xi, \eta, 0$  существует элементарный источник интенсивности  $q(\Xi, \eta)$  на единицу поверхности, то соответствующий элементарный потенциал в некоторой точке  $P(X, y, z)$  определяется выражением

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{q(\Xi, \eta) d\Xi d\eta}{\sqrt{(X - \Xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}. \quad (23.4)$$

Возвращаясь к начальным переменным, по аналогии с этим выражением можно получить решение для потенциала, обусловленного элементарным источником  $f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ ,

$$d\varphi = \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2[(y - \eta)^2 + z^2]}}, \quad (23.5)$$

подобное решению, полученному ранее с помощью такого же метода аналогии в случае сверхзвукового осесимметричного течения (15.20). Приведенное выражение не имеет физического смысла, если знаменатель не будет действительным; поэтому

$$(x - \xi)^2 - B^2[(y - \eta)^2 + z^2] \geq 0, \quad (23.6)$$

т. е. источник содержится внутри конуса с вершиной в точке  $P$  и полууглом  $\mu$ , раскрытым в сторону набегающего потока.

Чтобы найти соотношение, определяющее  $f(\xi, \eta)$  в зависимости от физических условий на поверхности, покрытой источниками, как, например, в зависимости от компоненты скорости  $\omega$  вдоль оси  $Oz$ , рассмотрим очень малый прямоугольник со сторонами  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ .

Предполагая, что интенсивность источников в этом прямоугольнике постоянна и равна в первом приближении средней величине, получим соответствующий потенциал в виде

$$\delta\varphi = f(\xi, \eta) \int_{a_1}^{a_2} d\xi \int_{b_1}^{b_2} \frac{d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2[(y - \eta)^2 + z^2]}}, \quad (23.7)$$

где пределы интегрирования, вытекающие из неравенства (23.6), определяются точками на гиперболе, получающейся от пересечения конуса Маха, имеющего вершину в точке  $P$ , с плоскостью  $Oxy$  (фиг. 23.1); эта гипербола, координаты точек которой обозначены через  $a$  и  $b$ , определяется уравнением

$$(x - a)^2 - B^2z^2 = B^2(y - b)^2. \quad (23.8)$$

Так как

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2z^2 - B^2(y - \eta)^2}} = -\frac{1}{B} \arcsin \frac{B(y - \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2z^2}} \Big|_{b_1}^{b_2} \quad (23.9)$$

и, согласно уравнению (23.8),

$$\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2z^2} = B\varepsilon, \quad (23.10)$$

причем

$$b_1 = y - \varepsilon, \quad b_2 = y + \varepsilon,$$

то выражение (23.9) дает значение  $\frac{\pi}{2} \frac{1}{B}$  для верхнего предела ( $\eta = b_2$ ) и  $-\frac{\pi}{2} \frac{1}{B}$  для нижнего ( $\eta = b_1$ ); следовательно, в совокупности мы получим величину  $\frac{\pi}{B}$ .

При этих условиях, замечая, что

$$a_2 = x - z \operatorname{ctg} \mu = x - Bz, \quad (23.11)$$

получим последовательно для потенциала выражения

$$\delta\varphi = \frac{f(\xi, \eta)}{B} \int_{a_1}^{a_2} \pi d\xi = \frac{\pi}{B} (a_2 - a_1) f(\xi, \eta) = \frac{\pi}{B} (x - a_1 - Bz) f(\xi, \eta); \quad (23.12)$$

отсюда компонента скорости вдоль  $Oz$  получается в виде

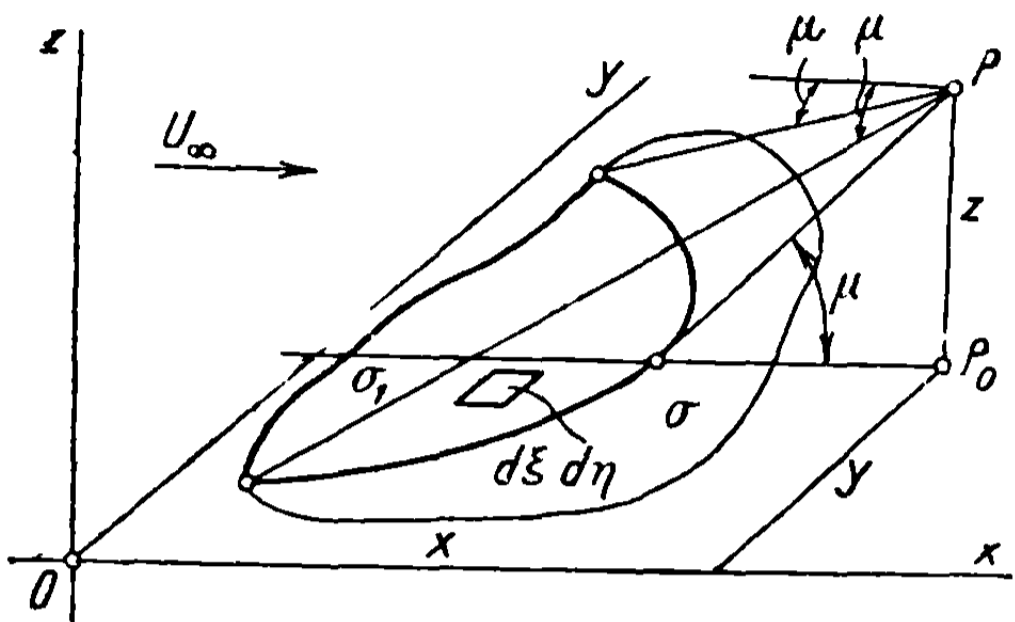
$$\omega = \frac{\partial}{\partial z} (\delta\varphi) = -\pi f(\xi, \eta), \quad (23.13a)$$

или, если выразить через текущие переменные,

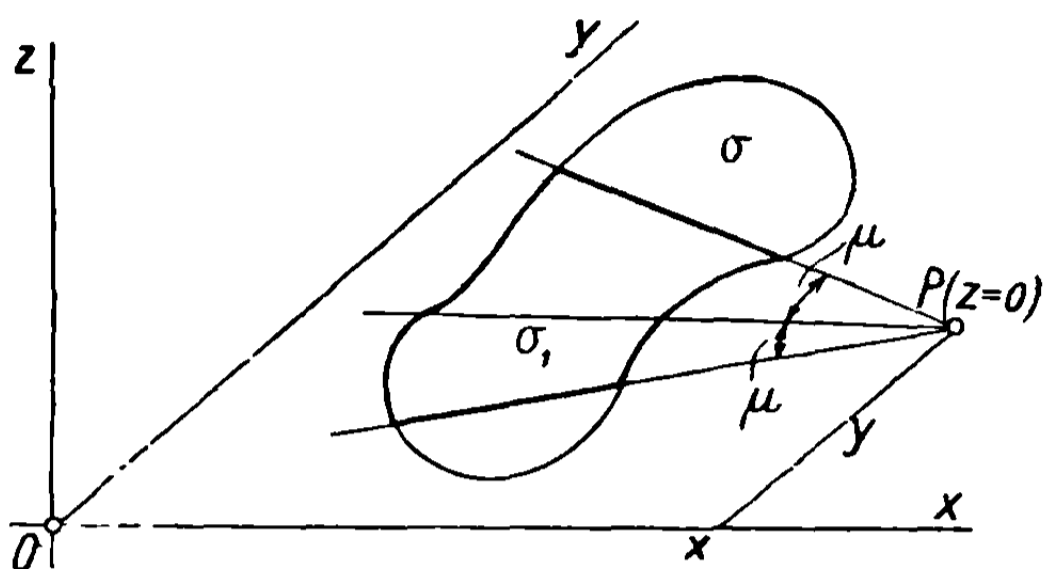
$$\omega = -\pi f(x, y), \quad (23.136)$$

т. е. эта компонента будет зависеть только от интенсивности источника.

Если рассматривается точка  $P$  ниже плоскости  $Oxy$ , то в приведенные формулы нужно, очевидно, подставить  $-z$  вместо  $z$ , в результате чего



Фиг. 23.2



Фиг. 23.3

для скорости получается значение, равное по величине, но противоположное по знаку значению, определяемому по формуле (23.13а). Следует заметить, что в точках, в которых нет источников [ $f(\xi, \eta) = 0$ ], скорость  $\omega$  также равна нулю, согласно предшествующей формуле, так что явление, очевидно, будет симметричным относительно плоскости  $Oxy$ .

Предположим, что распределение скорости  $\omega$  по всей поверхности, занятой источниками и обозначенной через  $\sigma$  (фиг. 23.2), известно; тогда, подставляя вместо функции  $f(\xi, \eta)$  ее выражение через  $\omega$  [см. формулу (23.13а)], получим полный потенциал, обусловленный системой источников на  $\sigma$ , в виде

$$\varphi = -\frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \frac{\omega d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[(y-\eta)^2 + z^2]}}, \quad (23.14)$$

где  $d\xi d\eta$  — элемент поверхности, на которой распределены источники, и  $\sigma_1$  — поверхность интегрирования, содержащаяся внутри полной поверхности  $\sigma$ , ограниченная гиперболой, получающейся в результате пересечения конуса Маха, выходящего из вершины  $P$  против течения, с плоскостью  $Oxy$ . Если точка  $P$  лежит на плоскости  $Oxy$ , то поверхность  $\sigma_1$  содержится между двумя прямыми, выходящими из  $P$ , каждая из которых составляет угол  $\mu$  с линией, параллельной оси  $Ox$  (фиг. 23.3). Этот случай будет часто встречаться в различных задачах, поскольку обычно надо определить давление на некоторой поверхности, которое является линейной функцией скорости возмущения  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Следовательно, если функция  $\varphi$  известна в любой точке  $P(x, y, 0)$  на поверхности, то коэффициент давления, согласно установленной ранее формуле (5.28), дается выражением

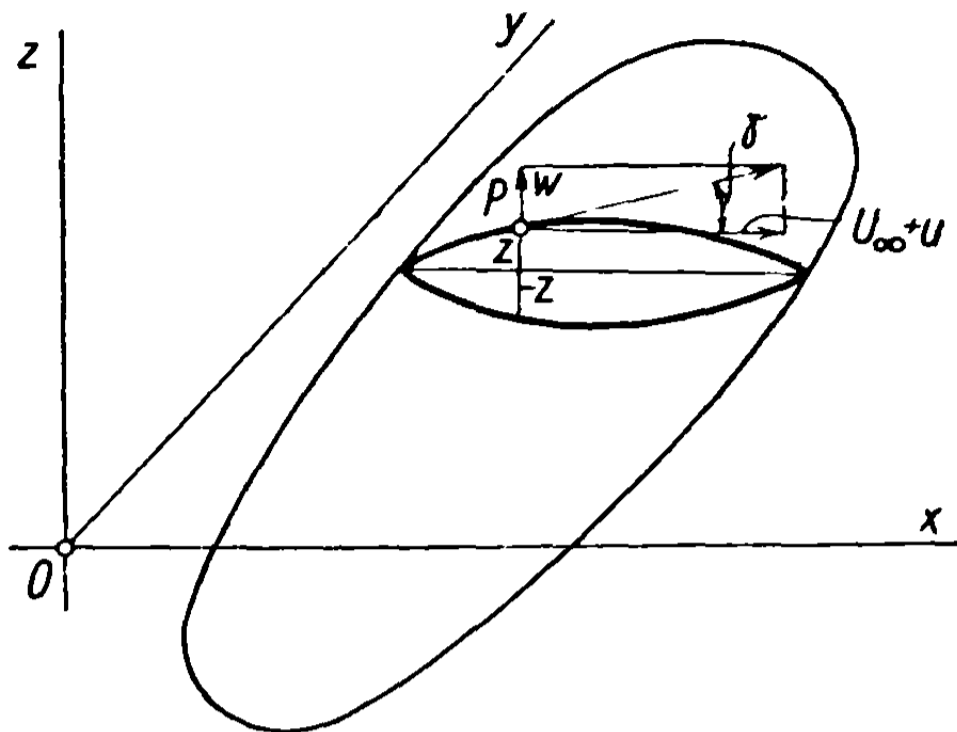
$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (23.15)$$

Полный потенциал течения легко получается добавлением члена, соответствующего потенциалу свободного потока:

$$\Phi = U_{\infty}x + \varphi. \quad (23.16)$$

Приведенные результаты будут теперь применены к двумерному крылу с симметричным распределением толщины по обеим сторонам его срединной плоскости.

Рассмотрим произвольное крыло, расположенное в плоскости  $Oxy$ , и его сечение, образованное плоскостью, нормальной к  $Oy$  (фиг. 23.4). Так как крыло имеет симметричную толщину, то получающийся профиль будет также симметричным. Пусть  $z$  будет ордината какой-нибудь точки  $P$  профиля и  $\gamma$  — угол, образуемый касательной к профилю в этой точке с прямой, параллельной  $Ox$ ; обозначая через  $u$  и  $w$  компоненты местной скорости возмущения вдоль  $Ox$  и  $Oz$ , имеем



Фиг. 23.4

$$\frac{w}{U_{\infty} + u} = \left( \frac{dz}{dx} \right)_P = \operatorname{tg} \gamma. \quad (23.17)$$

Поскольку угол  $\gamma$  мал, как и  $u$ , по сравнению с  $U_{\infty}$ , то записанное выражение можно упростить, представив его в виде

$$w = \pm \gamma U_{\infty}, \quad (23.18)$$

где положительный знак относится к верхней поверхности и отрицательный — к нижней.

Так как для достаточно тонких крыльев ордината  $z$  очень мала, то полученное соотношение, выражающее условия на поверхности крыла, может рассматриваться как граничное условие, которое должно выполняться на плоскости  $Oxy$ . В этом случае влияние крыла можно считать эквивалентным влиянию распределения источников, интенсивность которых, в согласии с уравнением (23.13), дается выражением

$$f(\xi, \eta) = -\frac{w}{\pi} = -\frac{\gamma}{\pi} U_{\infty}. \quad (23.19)$$

Таким путем можно установить распределение скоростей для любого симметричного крыла и применить формулу (23.14) для потенциала [1].

Позже увидим, что при определенных условиях течения на верхней и нижней поверхностях не испытывают взаимного влияния; в этом случае можно распространить тот же метод на несимметричные крылья, повторяя операцию дважды — один раз для верхней поверхности, где рассматривается распределение соответствующих скоростей  $w_s$ , и затем, отдельно, для нижней поверхности с соответствующими скоростями  $w_i$ . Формула

(23.14) пригодна для общего использования и применима ко всем обычным задачам сверхзвукового полета. Некоторые авторы использовали эту формулу в практических случаях [2].

По мнению автора, метод, основанный на теории конического течения, более практичен и теснее связан с различными видами применений. Но, чтобы проиллюстрировать применение метода источников, рассмотрим следующий пример.

### 23. 2. Применение к крылу угловидной формы с постоянным наклоном

Рассмотрим угловидное крыло  $AOB$  с дозвуковой передней кромкой, лежащее в плоскости  $Oxy$  (фиг. 23.5). Все сечения, параллельные плоскости  $Oxz$ , как, например,  $CD$ ,

имеют точку заострения с углом  $2\gamma$  при ней, причем стороны угла расположены симметрично относительно оси  $Ox$ . Можно сказать, что крыло имеет постоянный наклон, равный  $\gamma$ . Скорость на поверхности крыла также постоянна и равна

$$\omega = \pm \gamma U_\infty,$$

причем положительный знак берется для верхней поверхности и отрицательный — для нижней.

Так как требуется определить осевую скорость возмущения на поверхности крыла, то достаточно вычислить потенциал возмущения в некоторой точке  $P(x, y, 0)$  плоскости  $Oxy$ ; в этом случае выражение для потенциала (23.14) может быть разложено на составные части и представлено в виде

$$\varphi = -\frac{\omega}{\pi} \int_0^y d\eta \int_{\xi_Q}^{\xi_R} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2(y-\eta)^2}} - \frac{\omega}{\pi} \int_y^{y_N} d\eta \int_{\xi_S}^{\xi_T} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2(y-\eta)^2}}. \quad (23.20)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \xi_Q &= \eta \operatorname{tg} \chi, & \xi_R &= x - B(y - \eta), \\ \xi_S &= \eta \operatorname{tg} \chi, & \xi_T &= x + B(y - \eta); \end{aligned} \quad (23.21)$$

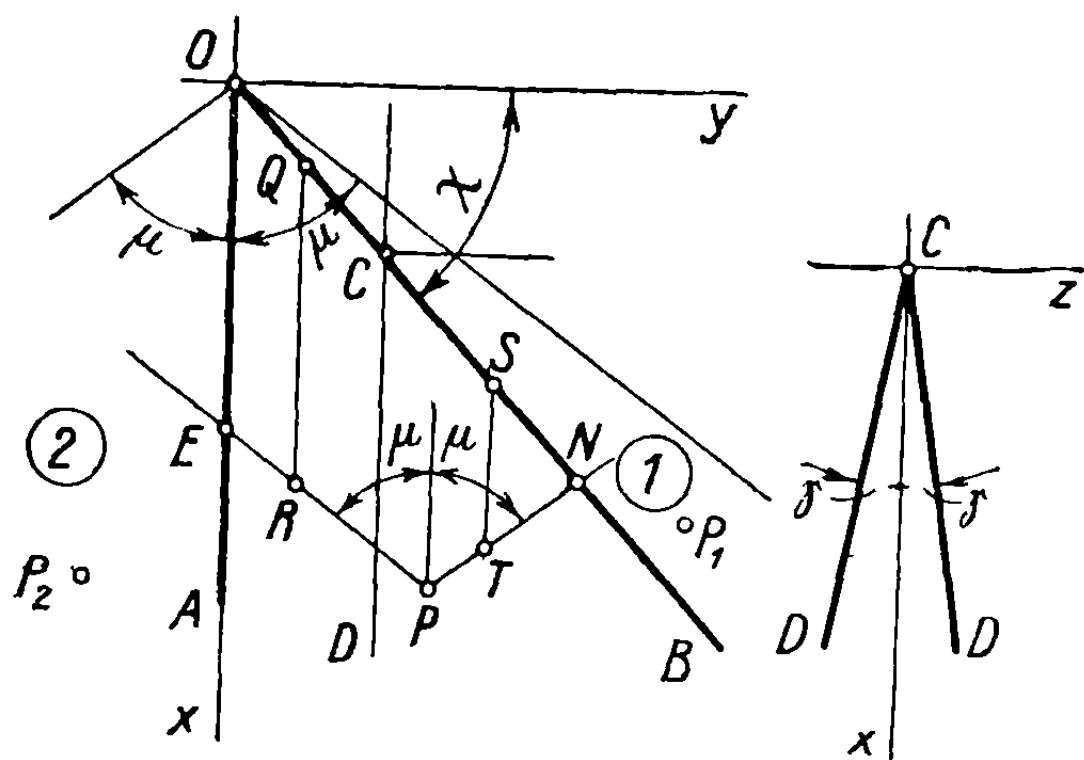
если точка  $N$  будет пересечением прямых  $OB$  и  $PN$ , то, обозначая через  $x_N$  и  $y_N$  координаты точки  $N$ , получим

$$x_N = y_N \operatorname{tg} \chi,$$

$$x - x_N = (y_N - y) \operatorname{ctg} \mu = B(y_N - y); \quad (23.22)$$

отсюда, исключая  $x_N$ , имеем

$$y_N = \frac{x + By}{\operatorname{tg} \chi + B}. \quad (23.23)$$



Фиг. 23.5



Далее

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2(y-\eta)^2}} = - \int \frac{d(x-\xi)}{B(y-\eta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{B^2(y-\eta)^2} - 1}} =$$

$$= - \operatorname{Arch} \frac{x-\xi}{B|y-\eta|} + \text{const}, \quad (23.24)$$

$$\operatorname{Arch} \frac{x-\xi}{B|y-\eta|} \Big|_{\xi_Q}^{\xi_R} = \operatorname{Arch} \frac{x-\xi}{B|y-\eta|} \Big|_{\xi_S}^{\xi_T} = - \operatorname{Arch} \frac{x-\eta \operatorname{tg} \chi}{B|y-\eta|}; \quad (23.25)$$

следовательно, интеграл (23.20) принимает вид.

$$\varphi = - \frac{\omega}{\pi} \int_0^{y_N} \operatorname{Arch} \frac{x-\eta \operatorname{tg} \chi}{B|y-\eta|} d\eta. \quad (23.26)$$

Интегрирование не обязательно производить в такой форме; соотношение можно сначала продифференцировать, получая осевую скорость возмущения, и затем проинтегрировать. После некоторых элементарных операций получим соотношения

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\omega}{\pi} \int_0^{y_N} \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\eta \operatorname{tg} \chi)^2 - B^2(y-\eta)^2}} = - \frac{\omega}{\pi \sqrt{\operatorname{tg}^2 \chi - B^2}} \operatorname{Arch} \frac{x \operatorname{tg} \chi - B^2 y}{B|x - y \operatorname{tg} \chi|} =$$

$$= - \frac{\gamma U_\infty}{\pi B \sqrt{\operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu - 1}} \operatorname{Arch} \frac{x \operatorname{tg} \chi - B^2 y}{B|x - y \operatorname{tg} \chi|}. \quad (23.27)$$

Следует заметить, что гиперболический косинус должен быть всегда положительным, что и осуществляется, когда точка  $P$  расположена на крыле, так как тогда

$$x - y \operatorname{tg} \chi > 0,$$

$$x \operatorname{tg} \chi - B^2 y > y \operatorname{tg}^2 \chi - y B^2 > 0;$$

если точка  $P$  расположена между  $OB$  и линией Маха (см. точку  $P_1$  в области 1), то

$$x - y \operatorname{tg} \chi < 0,$$

что приводит к необходимости рассматривать абсолютную величину.

Если точка  $P$  лежит в левой области [ $(y < 0)$ ; см. точку  $P_2$  в области 2], то числитель и знаменатель положительны и формула справедлива. Рассматривая абсолютную величину выражения  $(x - y \operatorname{tg} \chi)$ , можно применить эту формулу к вычислению осевой скорости  $u$  для любой точки, лежащей внутри конуса Маха.

Кроме того, заметим, что приведенный результат зависит только от отношения  $y/x$ ; другими словами, значения  $u$  будут одинаковыми вдоль радиуса-вектора, и течение будет коническим. В самом деле, уравнение (23.27) принимает вид

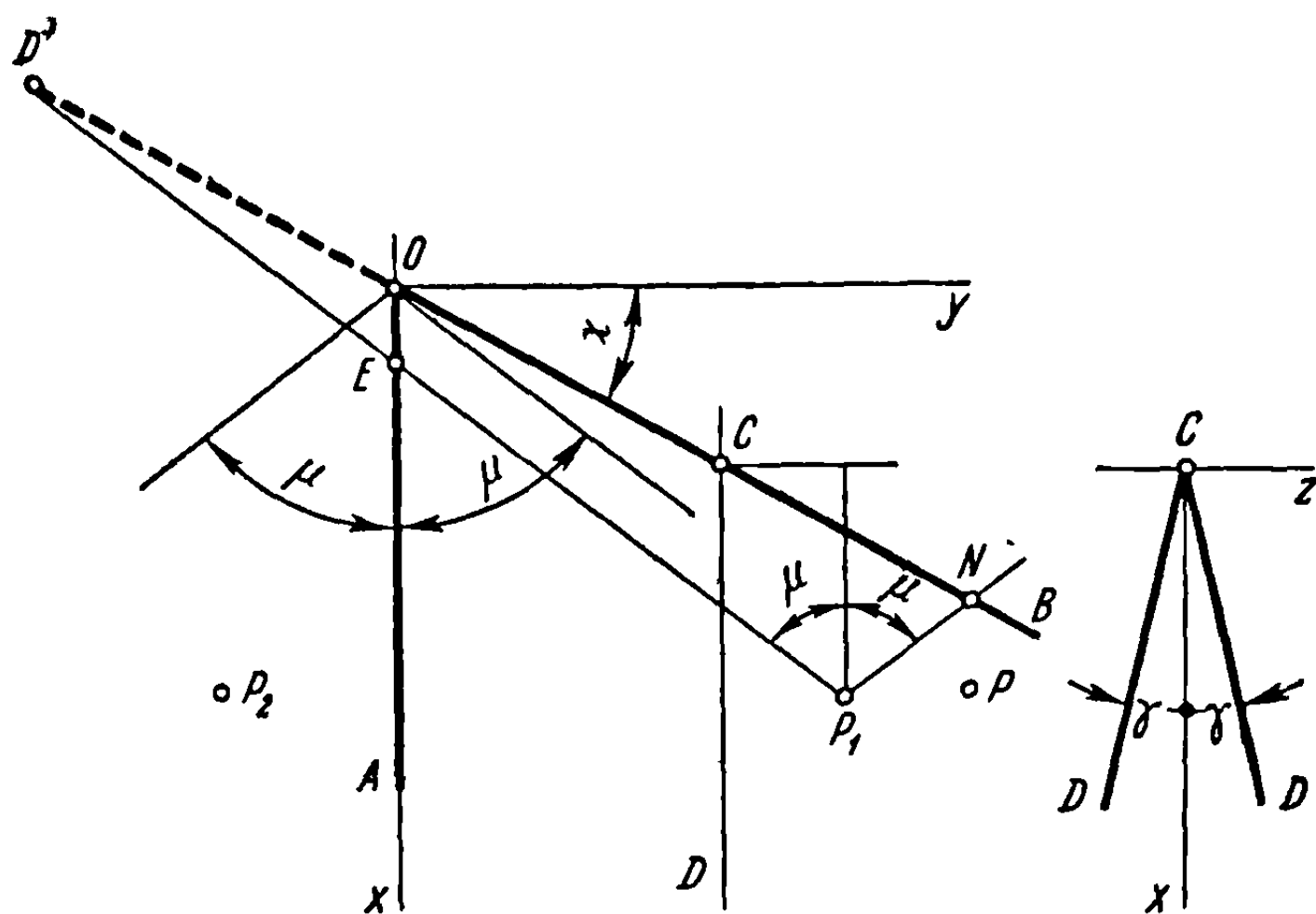
$$u = - \frac{\gamma U_\infty}{\pi B \sqrt{\operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu - 1}} \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{tg} \chi - B^2 \frac{y}{x}}{B \left| 1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \chi \right|}, \quad (23.28)$$

откуда очевидно, что  $u$  является функцией только от  $y/x$ .

Если крыло распространяется за конус Маха, т. е. если передняя кромка сверхзвуковая (фиг. 23.6), то скорость  $u$  будет постоянной во всей области, заключенной между конусом Маха и кромкой  $OB$ . Скорость

определяется по формуле (14.92), соответствующей крылу бесконечного размаха, с углом рыскания  $\chi$ . Заменяя в этой формуле  $\tau$  через  $\gamma$ , получим в точках  $P$  области, определенной выше, осевую скорость возмущения в виде

$$u = - \frac{\gamma U_\infty}{B \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}}. \quad (23.29)$$



Фиг. 23.6

Если точка  $P$  лежит внутри конуса Маха (фиг. 23.6, точка  $P_1$ ), то соответствующую осевую скорость  $u$  можно рассматривать как обусловленную крылом с вершиной в точке  $D'$  и с тем же углом рыскания  $\chi$ ; следовательно, можно ее выразить формулой (23.29). Влияние части  $OD'E$  нужно исключить. Имея в виду сделанные замечания, можно выразить скорость в точке  $P_1$  формулой

$$\begin{aligned} u &= - \frac{\gamma U_\infty}{B - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-\operatorname{tg} \chi + B^2 \frac{y}{x}}{B \left( 1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \chi \right)} \right) = \\ &= - \frac{\gamma U_\infty}{\pi B \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \chi \operatorname{tg}^2 \mu}} \arccos \frac{\operatorname{tg} \chi - B^2 \frac{y}{x}}{B \left( 1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \chi \right)}. \end{aligned} \quad (23.30)$$

Если точка  $P$  не лежит на крыле (см. точку  $P_2$ ), то можно применить ту же формулу (23.30).

Приведенные формулы содержат функции только от  $y/x$ ; очевидно, что течение является коническим.

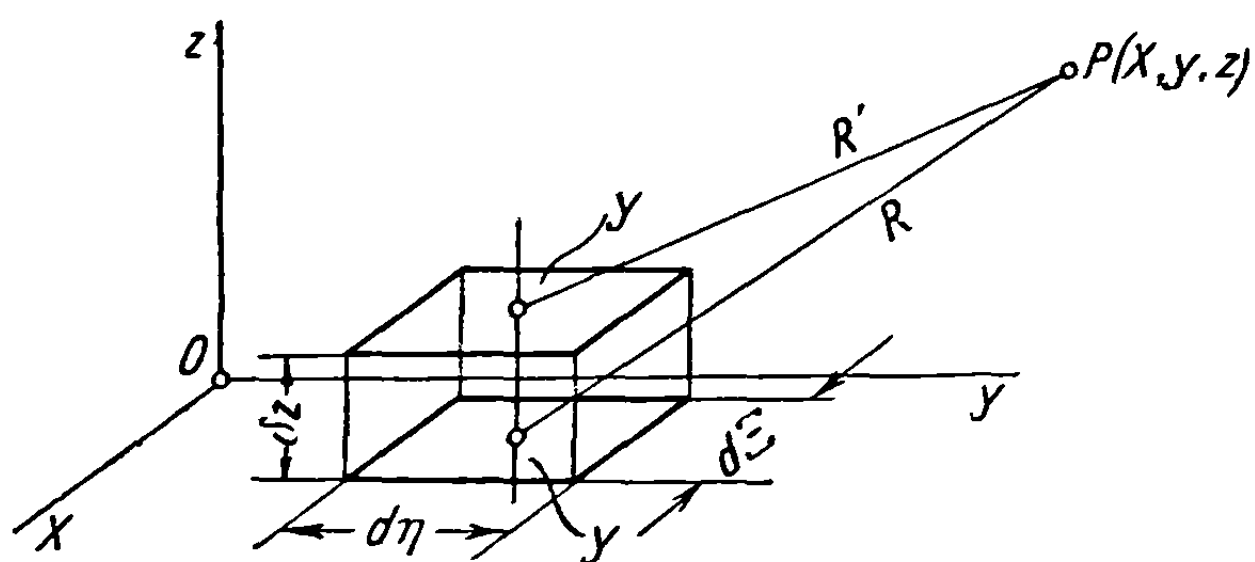
Если величина  $u$  известна, то коэффициент давления  $C_p$  можно легко вывести путем применения уравнения (23.15).

Что касается вычислений, то мы увидим, что сходные операции дают решения всех задач, относящихся к угловидным крыльям постоянного наклона [3].

Эти задачи рассмотрены ниже более общим и последовательным способом путем применения теории конического течения.

### 23.3. Теория тонких крыльев, основанная на методе диполей

Возвращаясь к преобразованному уравнению (23.3), которое представляет уравнение Лапласа, определяющее потенциал для несжимаемого течения,



Фиг. 23.7

нужно иметь в виду, что в системе  $Oxyz$  — элементарный источник интенсивности  $q(\Xi, \eta)$  на единицу поверхности, расположенный в точке  $\Xi, \eta$  в плоскости  $Oxy$ , — создает в точке  $P(X, y, z)$  элементарный потенциал

$$d\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{q(\Xi, \eta) d\Xi d\eta}{\sqrt{(X - \Xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{q d\Xi d\eta}{R}, \quad (23.31)$$

где  $R$  — расстояние от точки  $P$  до элементарного источника в плоскости  $Oxy$  (фиг. 23.7):

$$R = \sqrt{(X - \Xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}.$$

Предполагая, что другой источник, равной интенсивности, но противоположного знака (сток), расположен на малом расстоянии  $\delta z$  от источника  $q d\Xi d\eta$ , получим соответствующий потенциал в виде

$$\delta\varphi = -\frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) d\Xi d\eta \approx -\frac{q\delta z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) d\Xi d\eta. \quad (23.32)$$

Пусть  $\delta z$  стремится к нулю, однако в том предположении, что произведение  $q\delta z$ , называемое *моментом*, получает в пределе конечную величину

$$m = q \cdot \delta z;$$

тогда пара источников называется *диполем*, интенсивность которого на единицу поверхности будет  $m = m(\Xi, \eta)$ .

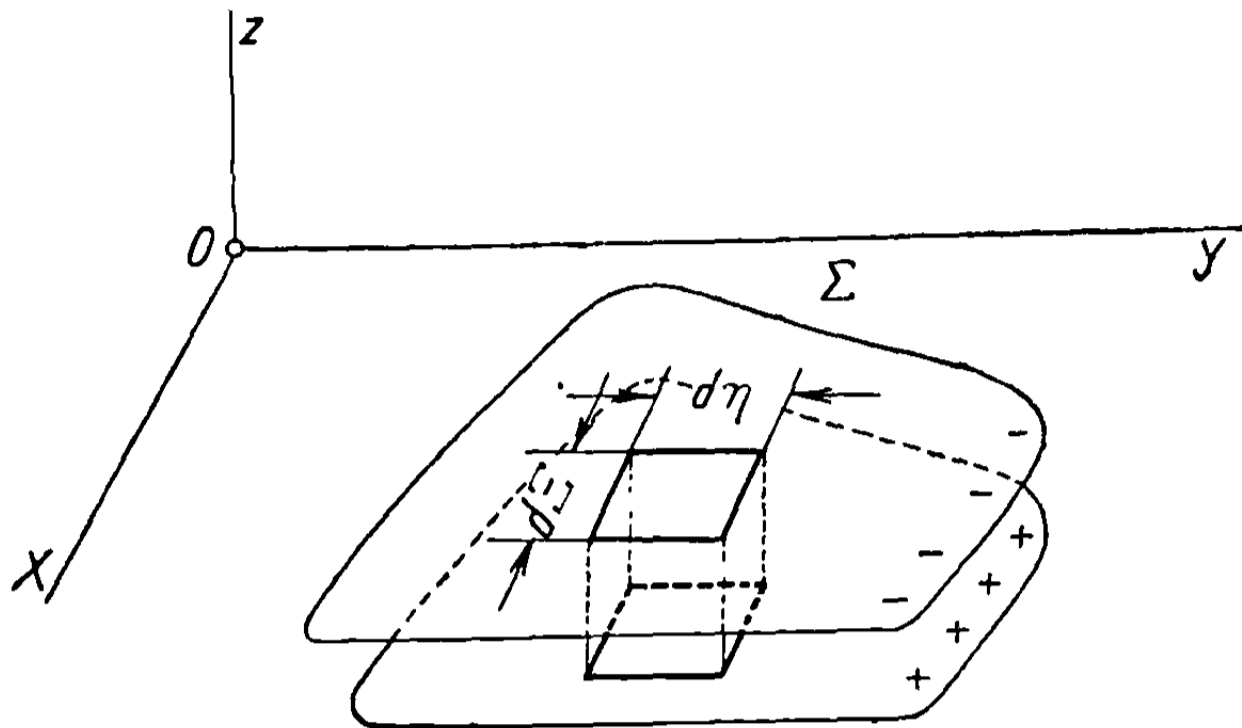
Если элементарный диполь будет иметь интенсивность  $m d\Xi d\eta$ , его потенциал определится выражением

$$d\varphi = -\frac{m(\Xi, \eta)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) d\Xi d\eta, \quad (23.33)$$

и полный потенциал, обусловленный распределением диполей на поверхности  $\Sigma$  в плоскости  $Oxy$  (фиг. 23.8), будет

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} m(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) d\xi d\eta = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \frac{m(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (23.34)$$

Это выражение можно записать в другой форме, используя значения потенциала  $\varphi_s$  и  $\varphi_i$  для верхней и нижней поверхностей. Применяя теорию потенциала, создаваемого двойным слоем, можно заменить интенсивность диполя



Фиг. 23.8

$m(\xi, \eta)$  разностью значений потенциала на обеих поверхностях ( $\varphi_s - \varphi_i$ ); тогда приведенное выше выражение примет вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \frac{(\varphi_s - \varphi_i) d\xi d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (23.35)$$

Возвращаясь к действительной системе координат, получим решение для потенциала, вызванного слоем диполей в сжимаемом течении, с помощью соотношения, аналогичного выражению (23.34) для потенциала несжимаемого течения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \iint_{\sigma_1} h(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[(y-\eta)^2 + z^2]}} \right) d\xi d\eta = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\sigma_1} \frac{h(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[(y-\eta)^2 + z^2]}}, \end{aligned} \quad (23.36)$$

где величина  $h(\xi, \eta)$  пропорциональна интенсивности диполей на единицу поверхности,  $d\xi d\eta$  — элемент поверхности и  $\sigma_1$  — поверхность интегрирования, для которой знаменатель выражения под знаком интеграла будет действительным.

Отсюда следует, что область  $\sigma_1$ , которая содержится внутри полной поверхности крыла  $\sigma$ , ограничена гиперболой, являющейся пересечением конуса Маха, выходящего из вершины  $P$  в сторону против течения, и плоскости  $Oxy$  (см. также фиг. 23.2). Если точка  $P(x, y, z)$  лежит в плоскости  $Oxy$  ( $z=0$ ), то этот случай в отношении поверхности интегрирования  $\sigma_1$  аналогичен приведенному на фиг. 23.3; при этом поверхность  $\sigma_1$  заключена между двумя прямыми, исходящими из точки  $P$  против течения и составляющими между собой угол  $2\mu$ .

Как и в случае несжимаемого течения, полученное выражение можно записать в другой форме, как функцию от значений потенциала на верхней и нижней поверхностях  $\varphi_s$  и  $\varphi_l$ ; следовательно,

$$\varphi = k \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\sigma_1} \frac{(\varphi_s - \varphi_l) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2 [(y - \eta)^2 + z^2]}}, \quad (23.37)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим тонкое крыло, имеющее очень малый угол атаки относительно потока, так что его можно рассматривать как содержащееся в плоскости  $Oxy$ . Течение вокруг крыла, предполагаемое незавихренным, определяется потенциалом  $\varphi$ , создаваемым слоем диполей в несжимаемом потоке. Было показано [4], что тонкое крыло можно уподобить слою диполей переменной интенсивности, являющейся функцией местного наклона поверхности относительно направления течения. Аналогично тому, как потенциал (23.36) для сверхзвукового режима рассматривался вместо потенциала (23.34) для несжимаемого течения, тонкое крыло, расположенное в сверхзвуковом потоке, можно уподобить слою диполей, потенциал которых, определяемый формулой (23.36), должен удовлетворять граничным условиям. Применение метода диполей имеет свои особенности, в соответствии с формой крыла или методами расчетов, принятыми различными авторами [5—9].

Так как указанные задачи рассматриваются в следующей главе, согласно методу конического течения, для иллюстрации применения метода диполей ниже дан только один пример.

#### 23.4. Применение к угловидной пластинке с дозвуковыми ведущими кромками

Рассмотрим симметричное угловидное крыло с вершиной в начале координат, причем его ведущие кромки составляют угол  $\chi$  с  $Oy$  и содержатся полностью внутри конуса Маха (фиг. 23. 9). Течение будет коническим (см. раздел 16), т. е. одинаковым вдоль каждого радиуса-вектора; следовательно, оно зависит только от  $y/x$  и  $z/x$ .

Полагая

$$\frac{\eta}{\xi} = \tau, \quad (23.38)$$

определяем интенсивность диполя зависимостью

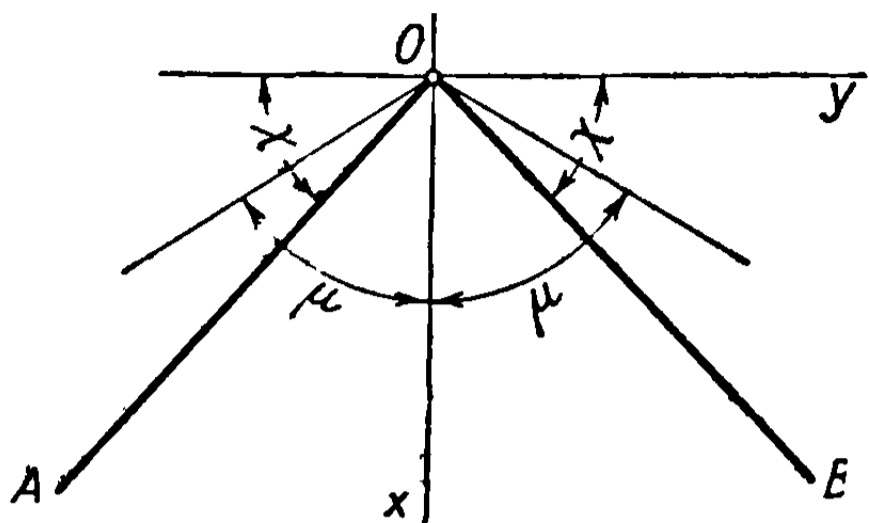
$$h(\xi, \eta) = \xi k(\tau), \quad (23.39)$$

$$h(\xi, \eta) d\xi d\eta = k(\tau) d\tau \xi^2 d\zeta,$$

где  $k(\tau)$  — функция распределения диполей. При этих условиях выражение для потенциала может быть представлено в форме

$$\varphi = \int_{-\text{ctg } \chi}^{\text{ctg } \chi} k(\tau) d\tau \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2 (y - \tau\xi)^2 - B^2 z^2}}, \quad (23.40)$$

где предел интегрирования  $\xi_1$  обращает в нуль знаменатель во втором интеграле (при фиксированном  $\tau$ ), являясь предельной величиной, для которой знаменатель будет действителен, и где  $\text{ctg } \chi$ , который определяет положение ведущей кромки, будет пределом для  $\tau$ .



Фиг. 23.9

Полагая с целью упрощения

$$\begin{aligned}
 a &= x^2 - B^2(y^2 + z^2) = x^2 \left[ 1 - B^2 \left( \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) \right], \\
 b &= 2(B^2 y \tau - x) = 2x \left( B^2 \frac{y}{x} \tau - 1 \right), \\
 c &= 1 - B^2 \tau^2,
 \end{aligned} \tag{23.41}$$

приведем второй интеграл во второй части предыдущего равенства последовательно к виду [3]

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2(y - \tau\xi)^2 - B^2 z^2}} &= \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{c\xi^2 + b\xi + a}} = \\
 &= \frac{3b\sqrt{a}}{4c^2} - \frac{3b^2 - 4ac}{8c^2\sqrt{c}} \text{Arcth} \frac{b}{2\sqrt{ac}},
 \end{aligned} \tag{23.42}$$

где предел интегрирования  $\xi_1$  заменен значением, обращающим в нуль знаменатель

$$c\xi_1^2 + b\xi_1 + a = 0. \tag{23.43}$$

Замечая, что вышеприведенный интеграл является функцией  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , полагая

$$v = \frac{-b}{2\sqrt{ac}} = - \frac{B^2 \frac{y}{x} \tau - 1}{\sqrt{(1 - B^2 \tau^2) \left[ 1 - B^2 \left( \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) \right]}} \tag{23.44}$$

и дифференцируя по  $z$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{c\xi^2 + b\xi + a}} = \frac{B^2 z}{(1 - B^2 \tau^2)^{3/2}} \left[ \frac{v}{1 - v^2} + \text{Arcth } v \right]; \tag{23.45}$$

отсюда имеем выражение для потенциала

$$\varphi = B^2 \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \frac{z}{(1 - B^2 \tau^2)^{3/2}} \left[ \frac{v}{1 - v^2} + \operatorname{Arcth} v \right] k(\tau) d\tau. \quad (23.46)$$

На поверхности крыла ( $z = 0$ ) вертикальная скорость будет

$$\omega_0 = \alpha U_\infty = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (23.47)$$

Принимая во внимание, что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ z \left( \frac{v}{1 - v^2} + \operatorname{Arcth} v \right) \right] \right\}_{z=0} = \left( \frac{v}{1 - v^2} + \operatorname{Arcth} v \right)_{z=0}, \quad (23.48)$$

можно записать следующее уравнение для вертикальной скорости:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = B^2 \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \left( \frac{v}{1 - v^2} + \operatorname{Arcth} v \right)_{z=0} \frac{k(\tau) d\tau}{(1 - B^2 \tau^2)^{3/2}} = \alpha U_\infty. \quad (23.49)$$

В этом интеграле величина  $k(\tau)$  неизвестна, но эта функция точно определена с помощью уравнения (23.49), в котором последняя часть постоянна. Полагая

$$\frac{y}{x} = t \quad (23.50)$$

и беря производную по  $t$ , получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = -2 \sqrt{1 - B^2 t^2} \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \frac{k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^3} = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha U_\infty) = 0. \quad (23.51)$$

Это соотношение идентично полученному для плоскопараллельного течения вокруг пластинки, расположенной в вертикальном потоке  $\omega_0 = \alpha U_\infty$  (фиг. 23.10). Обозначая координаты какой-нибудь точки через  $t$  и  $s$  и комплексную переменную через

$$q = t + is, \quad (23.52)$$

представим комплексный потенциал такого течения в виде

$$f'(q) = \varphi' + i\psi' = -i\alpha U_\infty \sqrt{q^2 - \operatorname{ctg}^2 \chi}; \quad (23.53)$$

из этого выражения выводим потенциал на самой пластинке, взяв его действительную часть при  $q = t$  ( $s = 0$ ),

$$\varphi' = \alpha U_\infty \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - t^2}. \quad (23.54)$$

В некоторой точке  $t = \tau$  на пластинке разность потенциалов на верхней и нижней поверхностях, которая представляет также распределение диполей, будет

$$\Delta \varphi' = \varphi'_s - \varphi'_i = 2\varphi' = 2\alpha U_\infty \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - \tau^2}.$$

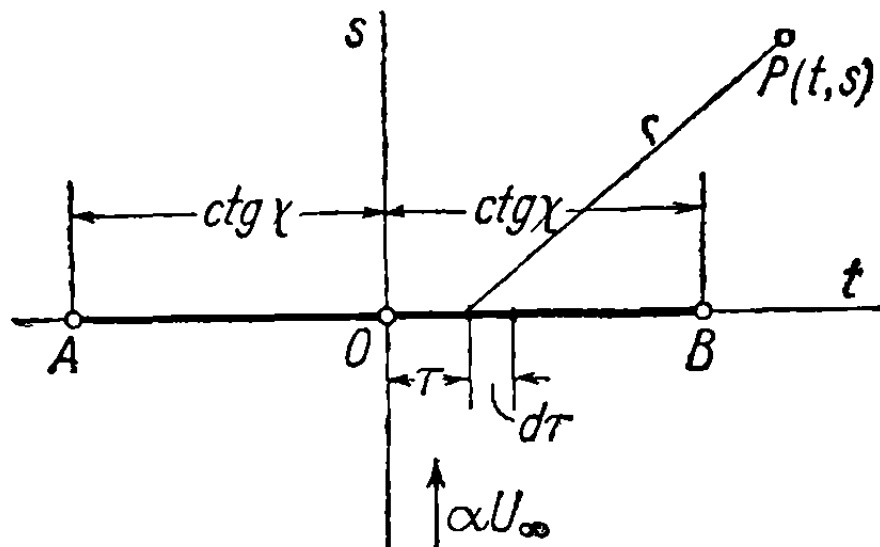
Выражение для потенциала плоскопараллельного течения через распределение диполей получится путем выполнения однократного интегрирования

в двойном интеграле соотношения (23.35). После прибавления потенциала, соответствующего поступательному потоку на бесконечности, имеем

$$\varphi' = \frac{2\alpha U_\infty}{2\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \frac{s \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - \tau^2}}{(t - \tau)^2 + s^2} d\tau + \alpha U_\infty s. \quad (23.55)$$

Вертикальная скорость на пластинке должна быть равна нулю

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial s}\right)_{s=0} = \alpha U_\infty + \frac{2\alpha U_\infty}{2\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - \tau^2}}{(t - \tau)^2} d\tau = 0. \quad (23.56)$$



Фиг. 23.10

Беря производную по  $t$ , находим соотношение

$$\int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - \tau^2}}{(t - \tau)^3} d\tau = 0, \quad (23.57)$$

идентичное условию (23.51); следовательно, обозначая некоторую постоянную через  $C$ , получим

$$k(\tau) = C \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - \tau^2}. \quad (23.58)$$

Распределение диполей, таким образом, определено с точностью до постоянной  $C$ , которая может быть найдена путем применения соотношения (23.49). Заметим, что указанное соотношение справедливо для любой точки или радиуса-вектора на крыле; поэтому, рассматривая с целью упрощения ось  $Ox$  ( $x = x, y = 0, z = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{1 - B^2 \tau^2}}, \\ \frac{v}{1 - v^2} &= -\frac{\sqrt{1 - B^2 \tau^2}}{B^2 \tau^2}, \\ \operatorname{Arcth} v &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - B^2 \tau^2}}; \end{aligned} \quad (23.59)$$

отсюда, подставляя результат в уравнение (23.49) и интегрируя, получим

$$\alpha U_\infty = \pi C E (\sqrt{1 - B^2 \operatorname{ctg}^2 \chi}). \quad (23.60)$$



Величина  $E(\sqrt{1 - B^2 \operatorname{ctg}^2 \chi})$  представляет эллиптический интеграл второго рода, модуль которого

$$k = \sqrt{1 - B^2 \operatorname{ctg}^2 \chi} = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \mu \operatorname{ctg}^2 \chi}. \quad (23.61)$$

Вычисление давлений и подъемной силы. Напомним, что для точки  $P(x, y, 0)$  на крыле, в согласии с уравнением (23.13), мы имеем

$$\varphi_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\sigma_1} \frac{h(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[(y-\eta)^2 + z^2]_{z=0}}} = -\pi h(x, y); \quad (23.62)$$

далее, используя выражения (23.39), (23.50), (23.58), (23.60) и обозначая через  $E$  эллиптический интеграл, определенный выше, можно записать соотношение

$$h(x, y) = xk(t) = \frac{\alpha U_\infty}{\pi E} x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - t^2} = \frac{\alpha U_\infty}{\pi E} \sqrt{x^2 \operatorname{ctg}^2 \chi - y^2}; \quad (23.63)$$

отсюда, беря производную от  $\varphi_{z=0}$  по  $x$ , получим осевую скорость возмущения в точке  $z=0$  на поверхности крыла

$$u = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_{z=0}) = -\pi \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\alpha U_\infty}{E} \frac{x \operatorname{ctg}^2 \chi}{\sqrt{x^2 \operatorname{ctg}^2 \chi - y^2}} = \frac{-\alpha U_\infty \operatorname{ctg}^2 \chi}{E \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - t^2}}. \quad (23.64)$$

Коэффициент давления получим путем применения обычной формулы

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty} = \frac{2\alpha \operatorname{ctg}^2 \chi}{E \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \chi - t^2}}, \quad (23.65)$$

причем он будет положительным на верхней поверхности и отрицательным на нижней, так как предполагалось, что передняя часть крыла опущена; отсюда вытекает, что вертикальная скорость  $\omega_0 = \alpha U_\infty$  направлена вверх (23.47).

Коэффициент подъемной силы треугольного крыла с высотой  $x$  и основанием  $2x \operatorname{ctg} \chi$  будет

$$C_z = \frac{1}{2x^2 \operatorname{ctg} \chi} \int_{-x \operatorname{ctg} \chi}^{+x \operatorname{ctg} \chi} 2C_p x dy = \frac{1}{\operatorname{ctg} \chi} \int_{-\operatorname{ctg} \chi}^{\operatorname{ctg} \chi} C_p dt = \frac{2\pi \alpha \operatorname{ctg} \chi}{E}; \quad (23.66)$$

результат не отличается от формулы (16.22), за исключением того, что полученная величина меньше прежней в отношении  $E$ ; последнее в практических случаях близко к единице.

Предшествующая формула была установлена в предположении, что угол Маха  $\mu$  очень велик по сравнению с углом крыла  $(\frac{\pi}{2} - \chi)$ , следовательно,  $E \approx 1$ ; величина  $l$  в формуле (16.23) равняется  $\operatorname{ctg} \chi$  в приведенной формуле, поэтому обе формулы совпадают в пределе. Коэффициент лобового сопротивления получается из соотношения

$$C_x = \alpha C_z = \frac{2\pi \operatorname{ctg} \chi}{E} \alpha^2. \quad (23.67)$$

Заметим, что давление будет бесконечным на ведущей кромке, как это очевидно из формулы (23.65). Благодаря этому возникает эффект

подсасывания, уменьшающий лобовое сопротивление, который будет вычислен позже, в связи с более общим случаем.

Обозначая через  $C_s$  коэффициент, соответствующий этой подсасывающей силе, получим коэффициент полного лобового сопротивления в виде

$$C'_x = C_x - C_s. \quad (23.68)$$

Другие подобные случаи могут трактоваться таким же образом.

Сошлемся на метод Фальковича [8], основанный на аналогичных рассуждениях, посредством которых могут быть вычислены подъемная сила и лобовое сопротивление тонкого крыла. Более общее исследование опубликовано Красилицкой [10], которая дала решение для тонкого крыла произвольной формы в плане.

### 23. 5. Метод потенциалов ускорения

Рассмотрим уравнение движения (3.15), представленное в форме

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (23.69)$$

где  $\mathbf{a}$  — ускорение какой-нибудь частицы. Если движение завихренное и скорости выводятся из потенциала  $\Phi$ , то сила  $\mathbf{f}$  также определяется силовой функцией  $U$  и, согласно уравнению (3.63),

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right) = \nabla (U - P), \quad (23.70)$$

откуда следует, что ускорение определяется потенциалом ускорения  $(U - P)$ .

Пренебрегая внешними силами в случае газа и рассматривая установившееся движение, получим последовательно при гипотезе малых возмущений

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla V^2 = \frac{1}{2} \nabla [(U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2] \approx U_\infty \nabla u \approx -\frac{1}{\rho_\infty} \nabla p, \quad (23.71)$$

откуда следует, что давление  $p$  пропорционально [потенциалу ускорения.

Обозначая через  $\varphi$  потенциал скорости возмущения и интегрируя уравнение (23.71), выводим следующее соотношение с точностью до постоянной, включенной в величину  $p$ :

$$p = -\rho_\infty U_\infty u = -\rho_\infty U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (23.72)$$

Если движение сверхзвуковое, то как  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , так и  $\varphi$  удовлетворяют уравнению (23.1); следовательно,  $p$  также удовлетворяет этому уравнению.

Интегрируя выражение (23.72), получим

$$\varphi = -\frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \int_{-\infty}^x p dx, \quad (23.73)$$

далее

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \int_{-\infty}^x \frac{\partial p}{\partial y} dx, \quad (23.74)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \int_{-\infty}^x \frac{\partial p}{\partial z} dx.$$

Метод Прандтля для расчета тонких крыльев в сверхзвуковом потоке основан на этих результатах.

Рассмотрим несжимаемое течение вокруг тонкого крыла, отнесенное к системе  $Oxyz$ , и предположим, что крыло, как и выше, содержится в плоскости  $Oxy$ . Пусть в некоторой точке крыла, определяемой координатами  $\xi, \eta$ , величина давления будет на верхней поверхности  $p_s$  и на нижней  $p_i$ ; внезапный скачок  $p_s - p_i$  происходит при пересечении крыла. Согласно теории потенциала, значение функции  $p(X, y, z)$  в некоторой точке  $P(X, y, z)$  будет определяться двойным слоем; поэтому получим уравнение аналогично тому, как это делалось выше,

$$p = -\frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \frac{p_s - p_i}{4\pi} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(X - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}, \quad (23.75)$$

где  $\Sigma$  — площадь, занимаемая крылом.

Разность давлений ( $p_s - p_i$ ) можно также выразить через *интенсивность вихрей* на единицу поверхности. Если взять только компоненту вихря вдоль  $Oy$  и обозначить соответствующую интенсивность в точке  $\xi, \eta$  через  $\gamma(\xi, \eta)$ , то, применяя теорему Кутта — Жуковского, получим соотношение

$$p_i - p_s = \rho_{\infty} U_{\infty} \gamma(\xi, \eta), \quad (23.76)$$

которое позволяет заменить разность ( $p_s - p_i$ ) в приведенном интеграле ее величиной, выраженной через интенсивность вихрей.

По аналогии с результатами, полученными выше, Прандтль предлагает находить решение для реального сверхзвукового течения в форме, аналогичной уравнению (23.75), выраженное через координаты действительной плоскости  $Oxyz$ :

$$p = k \rho_{\infty} U_{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\sigma_1} \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - B^2 [(y - \eta)^2 + z^2]}}, \quad (23.77)$$

где функция  $g(\xi, \eta)$ , пропорциональная интенсивности вихрей, должна быть определена с помощью граничных условий,  $k$  — коэффициент пропорциональности и  $\sigma_1$  имеет то же значение, что и в предшествующих случаях.

Теперь можно рассмотреть ряд задач, относящихся к плоским крыльям, для которых вертикальная скорость направленного вниз индуцированного потока постоянна на всей плоскости. Вычисляя  $p$  из уравнения (23.77), можно вывести  $u, v, w$  из выражений (23.72) и (23.74).

Этот метод не разбирается детально; как указывалось, все задачи прикладной аэродинамики будут изучены посредством метода конического течения. Для получения более подробных сведений читатель должен обратиться к книге Кочина, Кибеля и Розе [9], где рассматривается применение описанного метода к некоторым практическим примерам.

#### 24. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ УГЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЕВ, ОСНОВАННОЙ НА МЕТОДЕ КОНИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются конические течения при гипотезе малых возмущений (см. раздел 16). Полученные результаты представляют особенный интерес в применении к теории бесконечных конических крыльев.

Рассматривая систему  $Ox_1x_2x_3$  и предполагая, что ось  $Ox_1$  параллельна скорости свободного потока на бесконечности ( $U_\infty$ ) и что крыло приближенно содержится в плоскости  $Ox_1x_2$ , найдем, что крыло образует конус с вершиной в  $O$ , имеющий в некотором сечении  $x_1$  очень близкую к прямой направляющую кривую, проекция которой на плоскость  $Ox_2x_3$  может рассматриваться как совпадающая с осью  $Ox_2$  (фиг. 24.1). Крыло является бесконечным или предполагается таким, что конус Маха, выходящий из любой точки замыкающей линии  $CDFG$ , не будет пересекаться с поверхностью крыла. Следовательно, крыло подвергается только влиянию конуса, образующегося в точке  $O$ . При этих условиях могут быть определены характеристики течения вокруг крыльев этого типа, а из них выведены давление, подъемная сила, лобовое сопротивление и аэродинамические моменты.

### 24.1. Геометрические характеристики конического крыла

Рассмотрим коническое крыло с вершиной в точке  $O$  и проведем сечение, нормальное к оси  $Ox_1$ , на расстоянии  $x_1=1$ ; беря в этой плоскости за начало точку ее пересечения с осью  $Ox_1$ , определим другую, новую систему  $Oyz$ , относительно которой уравнение направляющей будет определяться функцией от  $y$ :

$$Z = Z(y), \quad (24.1)$$

обычно различной для верхней и нижней поверхностей (фиг. 24.1). Так как ординаты направляющей малы, то ее дуги совпадают с соответствующими проекциями на ось  $Oy$ . Можно предположить, что все крыло содержится в плоскости  $Ox_1x_2$  и его след в сечении  $x_1=1$  совпадает с осью  $Oy$ . Стреловидность крыла определится углами  $\chi_1$  и  $\chi_2$  (соответственно  $\chi_2'$ ), образуемыми передними кромками крыла с осью  $Ox_2$ .

Если провести плоскость  $NP$ , нормальную к  $Ox_2$ , то ее пересечение  $NSI$  с крылом определяет профиль крыла в соответствующем сечении. Согласно предположениям, сделанным выше, точка  $P$  на плоскости  $Ox_1x_2$  (соответствующая точке  $S$  на верхней поверхности и точке  $I$  на нижней) может рассматриваться как принадлежащая крылу. Отклонение элемента контура в точке  $P$  относительно общего направления потока, обозначаемое через  $\tau$  ( $\tau_s$  для верхней поверхности и  $\tau_i$  для нижней), постоянно вдоль радиуса вектора  $OP$ , зависит от уравнения направляющей и определяется формулой

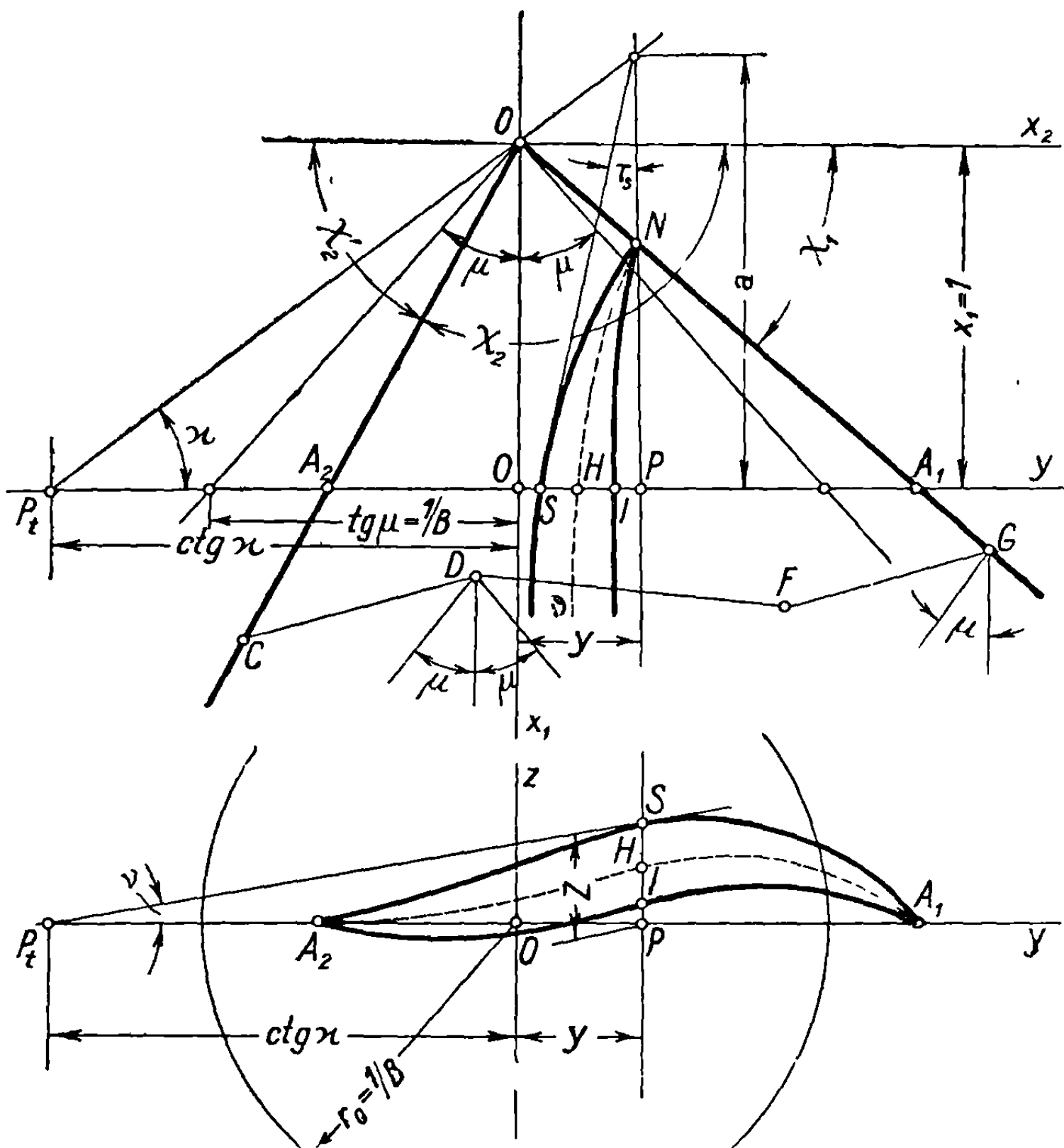
$$\tau = Z - y \frac{dZ}{dy}. \quad (24.2)$$

Плоскость, касательная к поверхности крыла в точке  $P$ , пересекает плоскость  $Ox_1x_2$  вдоль прямой  $OP_t$ . Наклон этой плоскости относительно направления потока, т. е. угол  $\tau$ , легко выводится из соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \nu &= \frac{dZ}{dy} = \frac{Z}{\operatorname{ctg} \alpha + y}, \\ \operatorname{tg} \tau &= \frac{Z}{a} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + y} Z; \end{aligned} \quad (24.3)$$

отсюда, исключая  $\operatorname{ctg} \alpha$ , получим

$$\operatorname{tg} \tau = Z - y \frac{dZ}{dy}. \quad (24.4)$$



Фиг. 24.1

Из того, что поверхность рассматриваемого крыла только незначительно отклонена от плоскости  $Ox_1x_2$  и что его толщина также очень мала, следует малость угла  $\tau$ ; поэтому

$$\operatorname{tg} \tau \approx \tau, \quad (24.5)$$

откуда, подставляя результат в уравнение (24.4), получим формулу (24.2).

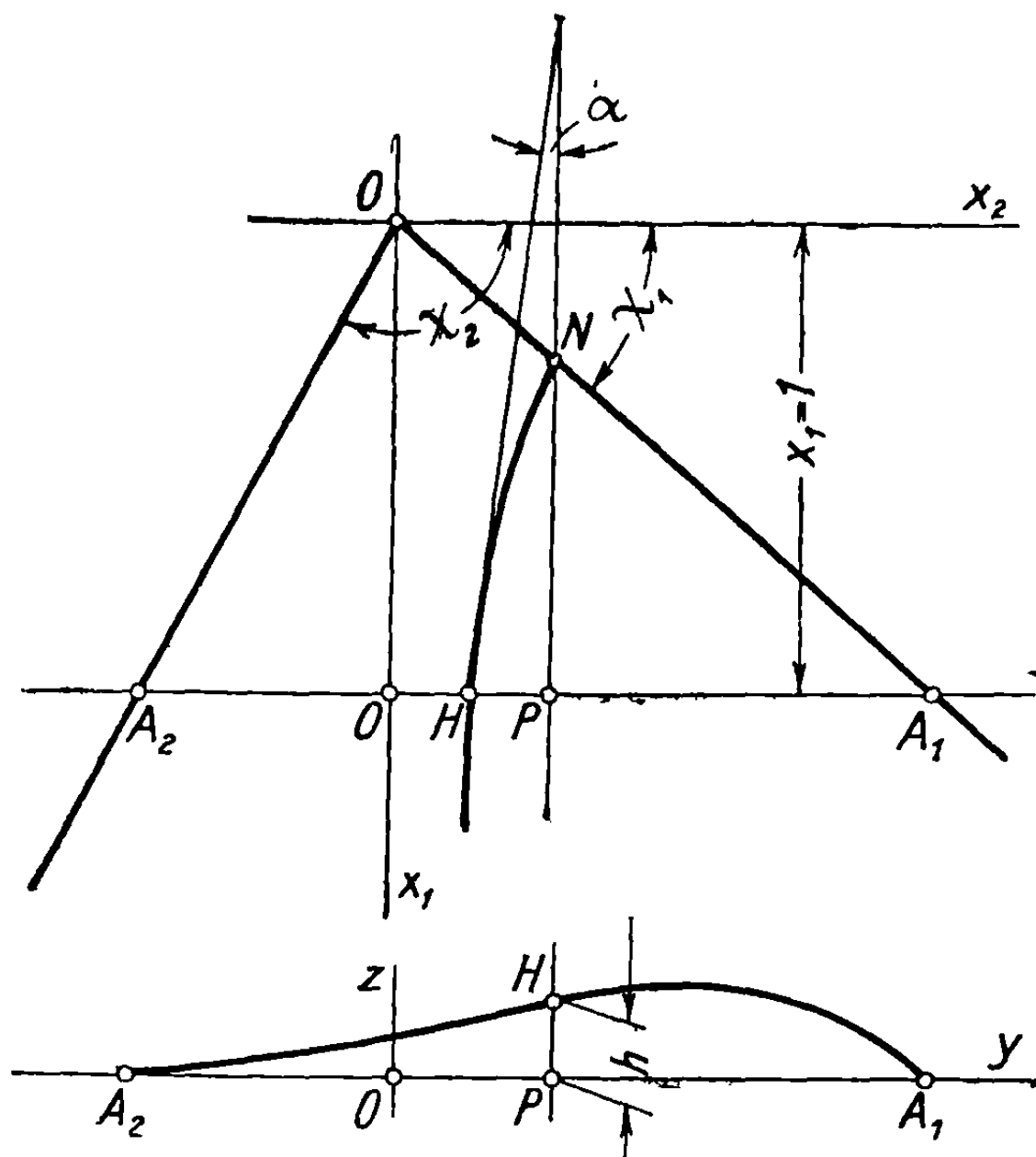
Пусть рассматриваемое крыло заменено системой двух крыльев идентичной формы в плане:

Первое крыло, направляющая которого является средней линией  $A_2NA_1$  направляющего сечения первоначального крыла (фиг. 24.2), имеет профиль, получающийся от пересечения с плоскостью, нормальной к  $Ox_2$ , поверхности крыла, имеющего указанную направляющую; этот тонкий профиль  $NH$  идентичен скелету первоначального профиля  $NSI$ . В точке  $H$  на направляющей, соответствующей точке  $P(y)$  с абсциссой  $y$ , отклонение  $\alpha$  элемента профиля, уподобляемое углу атаки, определяется таким же выражением, как (24.2):

$$\alpha = h - y \frac{dh}{dy}, \quad (24.6)$$

где  $h$  — ордината точек средней линии  $A_2NA_1$ .

Второе крыло, направляющая которого является кривой, изображающей толщину начального крыла, будет симметрично относительно плоскости  $Ox_1x_2$  (фиг. 24.3). Получающийся в результате профиль также будет симметричным, и в точке  $S$  (соответствующей точке  $P$  по абсциссе)



Фиг. 24.2

наклон элемента контура, обозначаемый через  $\gamma$ , равный по величине и противоположный по знаку наклону в точке  $I$ , выражается соотношением, идентичным (24.2):

$$2\gamma = e - y \frac{de}{dy}, \quad (24.7)$$

где  $e$  — толщина симметричного направляющего профиля.

Замена действительного крыла (см. фиг. 24.1) системой двух крыльев, из которых тонкое (фиг. 24.2) представляет скелет действительного, а толщину последнего представляет симметричное крыло (фиг. 24.3), имеет геометрический характер. Ее можно, однако, использовать при изучении течения вокруг действительного крыла путем суммирования двух различных течений — одного вокруг скелета крыла и другого вокруг симметричного крыла.

В самом деле, это коническое течение зависит от граничных условий, т. е. от вертикальных скоростей на крыле в плоскости  $Oyz$ ; следовательно, в согласии с соотношением

$$\tau = \alpha \pm \gamma, \quad (24.8)$$

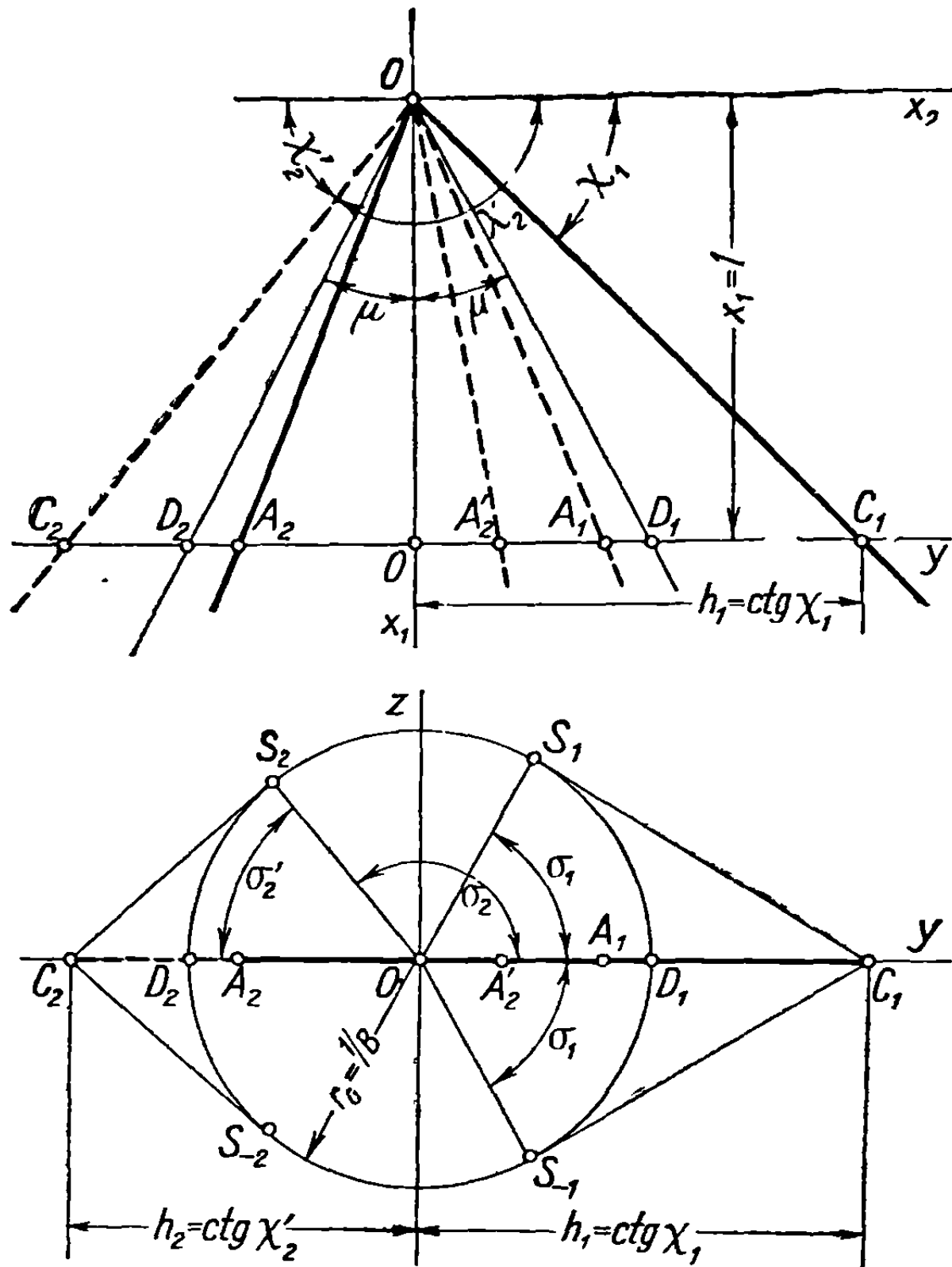
связывающим отклонение, угол атаки и наклон, вертикальная скорость в точке  $P$  будет



$h_1 = OC_1 = z \operatorname{tg} \chi_1$  представляет абсциссу следа крыла в этой плоскости, то

$$\cos \sigma_1 = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OC_1}} = \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \chi_1 = \frac{1}{Bh_1}; \quad (24.11)$$

это соотношение будет использовано в последующих вычислениях.



Фиг. 24.4

Если кромка  $OA_2$  также лежит вне конуса Маха и совпадает, например, с  $OC_2$ , то, обозначая через  $h_2 = C_2O = \operatorname{ctg} \chi_2' = -\operatorname{ctg} \chi_2$  величину отрицательной абсциссы, получим

$$\cos \sigma_2' \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OC_2}} = \frac{1}{Bh_2} = -\cos \sigma_2. \quad (24.12)$$

Так как след крыла  $C_1A_2$  неявно предполагался совпадающим с осью  $Oy$ , то вариация контура направляющей (для скелета или для толщины) находит свое отражение только в граничных условиях, определяемых соотношением (24.9).

Если какая-нибудь кромка  $OC_1$  (соответственно  $OC_2$ ) лежит вне конуса Маха, то она называется *сверхзвуковой ведущей кромкой*, по соображениям, упомянутым в разделе 14.4; ее след  $C_1$  (соответственно  $C_2$ ) лежит вне круга радиуса  $r_0$ . Если кромка лежит внутри конуса Маха, как, например,  $OA_2$ , то по тем же соображениям она называется *дозвуковой ведущей кромкой*, и ее след попадает внутрь круга радиуса  $r_0$ . Когда кром-



ка  $OC_1$  также расположена внутри конуса Маха и совпадает, например, с  $OA_1$ , обе кромки являются дозвуковыми и крыло полностью содержится внутри конуса Маха. Если дозвуковая кромка, скажем,  $OA_2$ , переходит на другую сторону оси  $Ox_1$  в  $OA'_2$ , то она становится дозвуковой задней кромкой.

## 24.2 Применение основных формул конического течения к коническим угловидным крыльям

Возмущенное движение вокруг крыла возникает только внутри конуса Маха с вершиной в точке  $O$  и внутри двугранного угла с ребром  $OC_1$  (соответственно  $OC_2$ , если эта кромка лежит также вне конуса Маха). В разделе 16 было показано, что это движение полностью определяется, если величины скоростей в плоскости  $Oyz$ , внутри круга радиуса  $r_0 = \frac{1}{B}$  и внутри угла  $S_1C_1S_{-1}$  (соответственно  $S_2C_2S_{-2}$ ) известны.

Чтобы определить это движение, применяется геометрическое преобразование Буземана, характеризуемое соотношением, упомянутым в разделе 16 (см. формулу 16.69):

$$\frac{2}{Br} = \rho + \frac{1}{\rho}, \quad (24.13)$$

где  $r$  — полярное расстояние точки  $G$  в физической плоскости  $Oyz$ , а  $\rho$  — полярное расстояние соответствующей точки  $\Gamma$  во вспомогательной плоскости  $\omega, \eta, \zeta$ ; полярный угол  $\theta$  (фиг. 24.5) сохраняется одинаковым в обеих плоскостях. Внутренность круга радиуса  $r_0 = \frac{1}{B}$  однозначно преобразуется во внутренность круга радиуса  $\rho_0 = 1$ .

Предполагая, что физическая плоскость  $Oyz$  преобразуется во вспомогательную плоскость  $\omega\eta\zeta$ , где след крыла будет также лежать на оси  $\omega\eta$ , можно действительное течение в физической плоскости представить на вспомогательной плоскости, где оно обладает важным свойством (см. раздел 16.3).

Пусть  $u, v, w$  обозначают компоненты скорости возмущения; они являются гармоническими функциями  $\eta$  и  $\zeta$  и удовлетворяют, следовательно, уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta w = 0. \quad (24.14)$$

Если сопряженные гармонические функции  $u', v'$  и  $w'$  присоединить к соответствующим функциям  $u, v$  и  $w$ , то получим аналитические функции комплексной переменной

$$\xi = \eta + i\zeta, \quad (24.15)$$

которые уже обозначались (см. формулы 16.74) следующим образом:

$$u + iu' = f(\xi),$$

$$v + iv' = g(\xi),$$

$$w + iw' = h(\xi).$$

Было установлено (см. раздел 16.31), что эти функции связаны соотношениями *незавихренности*, приводящими к формулам (16.87 и 16.88):

$$v + iv' = -\frac{B}{2} \int \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) df \quad (24.16)$$

и

$$w + iw' = \frac{iB}{2} \int \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df, \quad (24.17)$$

или в более сжатой форме (см. уравнение 16.90)

$$v + iw = -\frac{B}{2} \int \left( \xi df + \frac{1}{\xi} d\bar{f} \right), \quad (24.18)$$

где  $\bar{f}$  — функция, сопряженная  $f(\xi)$ .

Из написанной формулы очевидно, что задача полностью решена, если известна функция  $f(\xi)$  в плоскости  $\omega\eta\zeta$ , так как  $v$  и  $w$  будут получены с помощью простых квадратур из соотношений (24.16) и (24.17). Осевая скорость возмущения  $u$  представляет большой интерес, особенно на поверхности крыла, так как при подсчете давления или коэффициента давления оказывается, что эти величины зависят от  $u$ , действительной части функции  $f(\xi)$ :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -2 \frac{u}{U_\infty}. \quad (24.19)$$

Поэтому на функцию  $f(\xi) = u + iu'$  нужно обратить особое внимание и очень важно определить ее в некоторых общераспространенных случаях, имеющих практический интерес.

Для этого примем метод, который уже был описан автором в более ранних работах [11, 12], основанный на замечании, что аналитическая функция  $f(\xi)$  имеет гидродинамические свойства. Поэтому может быть установлена гидродинамическая аналогия между этой аналитической функцией и потенциалом фиктивного течения при режиме несжимаемости, удовлетворяющим тем же граничным условиям.

Имея в виду упрощение операций для отыскания потенциала  $f(\xi)$ , дадим более распространенное определение преобразования Буземана. Возвращаясь к выражению (24.13), заметим, что определенной точке  $G$  физической плоскости  $Oyz$ , определяемой полярным расстоянием  $r$  и углом  $\theta$ , соответствуют две точки на вспомогательной плоскости  $\omega\eta\zeta$ , точка  $\Gamma$  внутри круга  $\rho_0 = 1$  и точка  $\Gamma'$  вне круга (фиг. 24.5), имеющие соответственно полярные расстояния

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 r^2}}{Br}, \quad (24.20)$$

$$\rho' = \frac{1 + \sqrt{1 - B^2 r^2}}{Br} = \frac{1}{\rho},$$

и один и тот же угол  $\theta$ .

Очевидно, что точка  $\Gamma'$  является инверсной точке  $\Gamma$  относительно единичного круга  $\rho_0 = 1$ . Рассматривая только значения  $\rho < 1$ , мы видим, что внутренность этого круга во вспомогательной плоскости  $\omega\eta\zeta$  представляет

точно внутренность круга радиуса  $r_0 = \frac{1}{B}$  в физической плоскости, тогда как если рассматривать только значения  $\rho' > 1$ , то та же область физической плоскости преобразуется в область вне круга  $\rho_0 = 1$  на вспомогательной плоскости. Все соображения, применимые к внутренней области этого круга, справедливы и для внешней области. Последующие рассуждения ограничены представлением физической плоскости с помощью области, расположенной внутри круга  $\rho_0 = 1$  вспомогательной плоскости.

Рассмотрим точку  $A$  с абсциссой  $l$ . На плоскости  $\omega\eta\zeta$  соответствующая точка  $A$  будет иметь абсциссу

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}}{Bl}. \quad (24.21)$$

Для точек с отрицательной абсциссой заменой  $l$  на  $-l$  получим также точки с отрицательной абсциссой  $-\lambda$ .

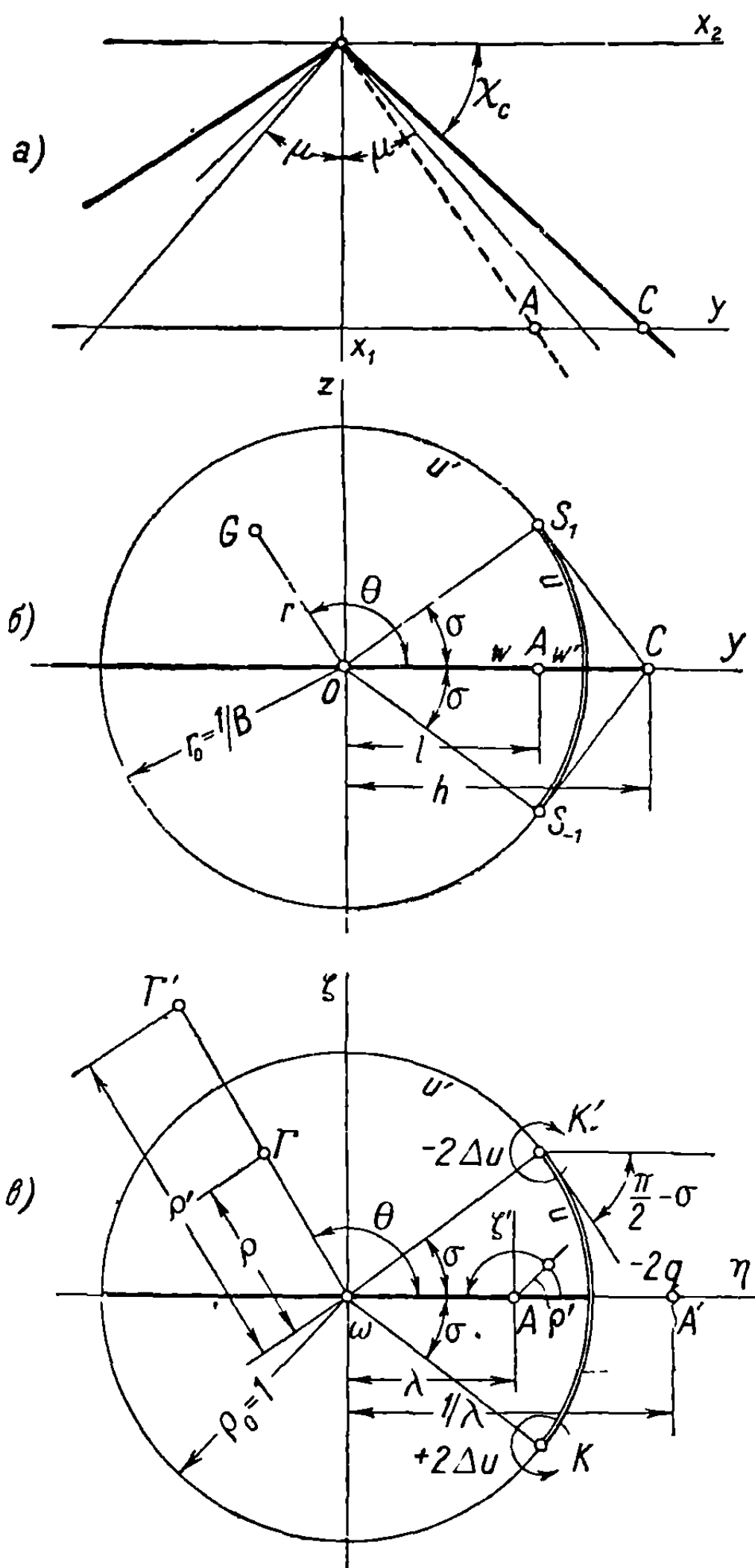
Предположим, что точка в плоскости  $Oyz$  лежит на оси  $Oy$  вне круга Маха, совпадая, например, с точкой  $C$ , имеющей абсциссу  $h > \frac{1}{B}$ ; подставляя эти данные в уравнение (24.20), получим точку  $K$  в плоскости  $\omega\eta\zeta$ , аффикс которой

$$x = \frac{1 - i \sqrt{B^2 h^2 - 1}}{Bh} = e^{i\sigma}, \quad (24.22)$$

где  $\sigma$  определяется по формуле, идентичной выражению (24.11):

$$\cos \sigma = \frac{1}{Bh}. \quad (24.23)$$

Если точка  $C$  движется вдоль оси  $Oy$  от  $y = 1/B$  до  $y = \infty$ , то точка  $K$  будет двигаться вдоль окружности, причем угол  $\sigma$  изменяется соответственно от  $0$  до  $-\frac{\pi}{2}$ . Если  $C$  лежит в отрицательной части  $Oy$  и  $y$  изменяется от  $-\infty$  до  $1/B$ , то  $\sigma$  изменяется от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $-\pi$ . Таким образом,



Фиг. 24.5

часть оси  $Oy$ , лежащая вне круга  $r_0 = 1/B$ , преобразуется в половину окружности единичного круга  $\rho_0 = 1$  в нижней полуплоскости  $\omega\eta\zeta$ .

Эти рассуждения, расширяющие определение преобразующих функций, будут способствовать получению простых и обозримых решений задач, относящихся к бесконечным коническим крыльям.

**24.2.1. Граничные условия.** Изучим условия, которым должно удовлетворять возмущенное течение на границах — на круге Маха и на поверхности крыла.

1) Если рассматривается полное отклонение  $\tau$ , соответствующее углу атаки  $\alpha$  элемента тонкого профиля (см. формулу 24.6) или наклону  $\gamma$  контура симметричного профиля (см. формулу 24.7), то вертикальная скорость в некоторой точке  $y$  следа действительного крыла, соответствующая точке  $\eta$  следа крыла во вспомогательной плоскости, дается соотношениями:

для общего случая

$$\omega = \tau U_\infty, \quad (24.24a)$$

для тонкого или симметричного крыла

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \alpha U_\infty, \\ \omega_\gamma &= \pm \gamma U_\infty, \end{aligned} \quad (24.24b)$$

причем положительный знак соответствует верхней поверхности и отрицательный — нижней.

2) В точках на концах крыла условия течения для тонкого крыла и симметричного крыла будут различны; они отличаются как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых передних кромках. Условия, которым должны удовлетворять скорости на концах крыльев, определены позже для каждого случая.

3) Для дозвуковых задних кромок, как в случае кромки  $OA'_2$  на фиг. 24.4, явления, возникающие в обтекающей кромку потоке, будут также дозвуковыми, включая бесконечные скорости. Чтобы избежать появления последних, надо ввести условие существования конечной скорости в этих точках, как в случае несжимаемой жидкости, где, при тех же рассуждениях, теория Жуковского позволяет определить циркуляцию вокруг аэродинамических профилей.

4) В начале координат ( $\xi = 0$ ), т.е. в определенной точке на крыле, бесконечные скорости возникают, согласно уравнениям (24.16) и (24.17), если в ней  $df \neq 0$ . Так как для реального крыла это физически невозможно, то функция  $f(\xi)$  должна подчиняться условию

$$df_{\xi=0} \equiv 0. \quad (24.25)$$

5) На единичном круге во вспомогательной плоскости, соответствующем кругу Маха в действительной плоскости, скорость  $u$  равна нулю на дугах, соответствующих  $S_2S_1$  и  $S_{-2}S_{-1}$ , и может иметь другое, переменное или постоянное, значение на дугах (см. фиг. 24.4), соответствующих  $S_1D_1S_{-1}$  и  $S_2D_2S_{-2}$ .

В точках  $S$  внезапного изменения скорости  $u$  функция  $f(\xi)$  имеет некоторые особенности, которые легко определяются через угол атаки или наклон сверхзвуковых ведущих кромок.

Для некоторых вполне определенных случаев получены явные выражения отмеченных условий, которые будут использованы для решения задачи.

### 24.3. Общее выражение функции $f = u + iu'$ .

#### Гидродинамическая аналогия

Предположим, что ось  $Oy$  в плоскости  $Oyz$  частично представляет след крыла и что за точкой  $A$  на крыле (см. фиг. 24.5) на некотором, вполне определенном интервале отклонение  $\tau$  профиля постоянно, что будет в случае, если направляющая прямая; тогда на том же интервале вертикальная скорость также постоянна, согласно уравнению (24.24а):

$$\omega = \tau U_{\infty} = \text{const.}$$

Применяя уравнение (24.17) в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} d\omega + id\omega' &= \frac{iB}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) (du + idu') = \\ &= -\frac{B}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) du' + \frac{iB}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) du \end{aligned} \quad (24.26)$$

и замечая, что действительная часть на левой стороне равна нулю, так как  $\omega$  постоянна, получим важное соотношение

$$du' = 0. \quad (24.27)$$

Если по аналогии рассматривать  $u$  как потенциал, а  $u'$  как функцию тока несжимаемого течения, то решение задачи будет найдено в виде аналитической функции  $f(\xi)$ , представляющей комплексный потенциал фиктивного течения, в котором ось абсцисс за точкой  $A$  является линией тока.

Предполагая, что в точке  $A$  отклонение  $\tau$  изменяется внезапно, переходя от значения  $\tau$  к значению  $\tau'$  (от  $\alpha$  к  $\alpha'$ , соответственно от  $\gamma$  к  $\gamma'$ ), отметим также появление внезапного скачка скорости

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = (\tau' - \tau) U_{\infty} = U_{\infty} \Delta\tau. \quad (24.28)$$

С обеих сторон от точки  $A$   $\omega$  и  $\omega'$  постоянны вдоль определенных интервалов, поэтому  $du' = 0$ , и, следовательно, линии крыла продолжают быть линиями тока; однако постоянное значение функции тока будет различным на обеих сторонах.

Аналитическое представление этого внезапного скачка скорости в выражении функции  $f(\xi)$  осуществляется при помощи логарифмической особенности или, в гидродинамическом смысле, посредством источника.

Рассматривая начало осей в точке  $A$ , допуская, что функция  $f(\xi)$  содержит член, соответствующий источнику с интенсивностью  $2q$ , лежащему в новом начале, и разлагая  $f(\xi)$  в окрестности этой точки как функцию переменной

$$\xi' = \xi - \lambda, \quad (24.29)$$

получим

$$f(\xi') = \frac{q}{\pi} \ln \xi' + C_1 \xi' + C_2 \xi'^2 + \dots \quad (24.30)$$

Разложение справедливо для обеих поверхностей в случае толстого симметричного крыла (симметричная направляющая) и только для одной стороны поверхности крыла в случае тонких профилей (стянутая в одну линию тонкая направляющая).

Проведя вокруг точки  $A$  (см. фиг. 24.5,  $b$ ) полуокружность очень малого радиуса  $\rho'$  и полагая

$$\xi' = \rho' e^{i\theta'}, \quad (24.31)$$

затем вычисляя интеграл (24.17) по этой полуокружности от  $\theta' = 0$  до  $\theta' = \pi$ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} w' - w = \Delta w = \operatorname{Re} \frac{iB}{2} \int_{(\xi - \lambda) \rightarrow 0} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df = \operatorname{Re} \frac{iB}{2} \int_{\xi' \rightarrow 0} \left( \xi' + \lambda - \frac{1}{\xi' + \lambda} \right) \times \\ \times \left( \frac{q}{\pi} \frac{1}{\xi'} + C_1 + \dots \right) d\xi' = q \frac{B}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (24.32)$$

Из выражений (24.21) легко вытекает соотношение

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = - \frac{2 \sqrt{1 - B^2 l^2}}{Bl}, \quad (24.33)$$

и, следовательно, интенсивность источника получается как функция скачка скорости  $\Delta w$ , соответствующего скачку  $\Delta \tau$  угла отклонения контура профиля:

$$q = - \frac{\Delta w}{B} \frac{Bl}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} = - \frac{U_\infty \Delta \tau}{B} \frac{Bl}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}. \quad (24.34)$$

Поэтому скачок отклонения контура вводит в выражение функции  $f(\xi)$  источник интенсивности  $2q$ , расположенный в месте скачка, на линии крыла во вспомогательной плоскости.

Если точка  $A$  лежит вне круга Маха, скажем, в точке  $C$  с абсциссой  $h$  (см. фиг. 24.5,  $a, b$ ), причем  $h > \frac{1}{B}$ , то, обозначая через  $\Delta \tau$  скачок отклонения контура, получим мнимое значение  $ik$  для величины  $q$ :

$$ik = - \frac{U_\infty \Delta \tau}{B} \frac{Bh}{i \sqrt{B^2 h^2 - 1}} = \frac{i U_\infty \Delta \tau}{B} \frac{Bh}{\sqrt{B^2 h^2 - 1}}, \quad (24.35)$$

так что вместо источника получим сосредоточенный вихрь с интенсивностью  $2k$ , расположенный в точке с аффиксом

$$x = e^{-i\sigma},$$

определяемым соотношением (24.22).

Обсудим полученный результат, сравнивая его с реальными явлениями в потоке.

Для этого рассмотрим случай симметричного толстого крыла отдельно от случая тонкого крыла с одной или двумя дозвуковыми ведущими кромками.

23.3.1. Симметричное толстое крыло. Здесь ось абсцисс является осью симметрии, и скачок  $\Delta\tau$  в точке  $A$  не влияет на круг Маха в физической плоскости или на единичный круг во вспомогательной плоскости; поэтому  $u = 0$  и, следовательно, окружность  $\rho_0 = 1$  будет эквипотенциальной линией. Для получения такого результата необходимо прибавить к источнику в точке  $A$  другой источник, равный по величине и противоположный по знаку, расположенный в точке  $A'$ , с абсциссой  $\frac{1}{\lambda}$  (см. фиг. 24.5, в). Тогда потенциал фиктивного течения определится выражением

$$f(\xi) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{\xi - \lambda}{\xi - \frac{1}{\lambda}} = - \frac{\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}} \ln \frac{\xi - \lambda}{\xi - \frac{1}{\lambda}}. \quad (24.36)$$

Действительная часть этого выражения дает осевую скорость возмущения  $u$ . В случае тонких крыльев со сверхзвуковыми ведущими кромками верхняя и нижняя поверхности действуют отдельно и аналогично случаю крыльев с симметричной толщиной; поэтому осевая скорость возмущения определяется той же формулой.

Если скачок возникает в точке  $C$ , вне конуса Маха, то в точке  $K$  появляется вихрь, а в точке  $K'$  — другой, равный по величине и противоположный по знаку; существование последнего вытекает из соображений симметрии относительно оси  $\omega\eta$ . Функция  $f(\xi)$  принимает вид

$$f(\xi) = i \frac{\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bh}{\sqrt{B^2h^2-1}} \ln \frac{\xi - e^{-i\sigma}}{\xi - e^{i\sigma}} + u_0, \quad (24.37)$$

где  $u_0$  — действительная постоянная, требуемая граничными условиями, которая определена позже. Приведенное выражение выводится непосредственно из предшествующего заменой  $l$  на  $h$ ,  $\lambda$  и  $\frac{1}{\lambda}$  на  $e^{i\sigma}$  и  $e^{-i\sigma}$ , в соответствии с более широким определением преобразования (24.13).

Заметим, что полученный результат относительно скачка скорости вне круга Маха может быть выведен прямым путем. На сверхзвуковой кромке  $OC$  (24.5, а), где предполагается приращение  $\Delta\tau$  угла отклонения контура, возникнет также соответствующее увеличение  $\Delta u$  осевой скорости, выводимое из формул (14.92) и (24.11):

$$\Delta u = - \frac{\Delta\tau U_\infty}{B} \frac{1}{\sqrt{1-\text{tg}^2\mu\text{tg}^2\chi_c}} = - \frac{\Delta\tau U_\infty}{B} \frac{Bh}{\sqrt{B^2h^2-1}}. \quad (24.38)$$

Оно будет существовать на всей сверхзвуковой части крыла и на дуге  $S_1 S_{-1}$  при условии, что крыло симметрично. В точке  $C$  скорость переходит от значения  $u$  к  $u'$ ; в точке  $S_1$  на окружности Маха, соответственно  $K'$  на единичной окружности вспомогательной плоскости, скорость  $u$  также переходит от значения  $u$  к значению  $u'$ , осуществляя скачок

$$\Delta u = u' - u.$$

Замечая, что  $u$  является действительной частью функции  $f(\xi)$ , можно представить этот скачок аналитически посредством вихря с интенсивностью  $-2\Delta u$ , расположенного в точке  $K'$ . Чтобы ось  $\omega\eta$  была осью симметрии

потока, нужно ввести другой вихрь с интенсивностью  $+2\Delta u$  в точке  $K$ , подтверждая результат, полученный выше (см. формулу 24.37). Чтобы показать, что введение вихрей вызывает скачок скорости, разложим функцию  $f(\xi)$  в окрестности точки  $K'$  (см. фиг. 24.5,в); полагая

$$\xi' = \xi - e^{i\sigma} = \rho' e^{i\theta'}, \quad (24.39)$$

получим

$$\begin{aligned} f(\xi') &= \frac{i\Delta u}{\pi} \ln \xi' + K_1 \xi' + K_2 \xi'^2 + \dots = \\ &= \frac{i\Delta u}{\pi} \ln \rho' - \frac{\Delta u}{\pi} \theta' + K_1 \rho' e^{i\theta'} + \dots \end{aligned} \quad (24.40)$$

Когда  $\theta'$  изменяется от  $-\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)$  до  $-\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \sigma\right)$ , действительная часть испытывает скачок  $\Delta u$ .

Суммируя, можно вывести следующие заключения относительно определения функции  $f(\xi)$  в случае крыльев симметричной толщины или тонких крыльев со сверхзвуковыми кромками: эта функция определяется как потенциал фиктивного несжимаемого течения, в котором след крыла будет линией тока, а любое внезапное изменение отклонения контура в какой-нибудь точке этой линии выражается аналитически, путем введения источника в рассматриваемой точке и другого источника, равного по величине и противоположного по знаку, расположенного в точке, получающейся посредством инверсии первоначальной точки относительно окружности  $\rho_0 = 1$ . Устанавливаемое выражение потенциала справедливо также при изменении наклона вне конуса Маха, так как форма (24.36) этого выражения автоматически преобразуется в (24.37), как показано выше.

Отметим, что может быть введена вторая вспомогательная плоскость, полученная путем конформного преобразования плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$ .

Так, с целью упрощения может быть выполнено преобразование

$$\begin{aligned} X &= \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, \\ \xi &= \frac{X - 1}{X + 1}, \end{aligned} \quad (24.41)$$

осуществляющее переход верхнего полукруга плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$  в первый квадрант плоскости  $X = Y + iZ$  (фиг. 24.6). Ось  $OY$  от точки 0 до  $\infty$  представляет отрезок оси абсцисс плоскости  $\xi$ , между точками  $\eta = -1$  и  $\eta = 1$ ; последняя точка соответствует бесконечно удаленной точке плоскости  $X$ . Ось ординат от точки  $Z = 0$  до  $Z = \infty$  представляет верхнюю половину окружности единичного круга. Полагая

$$\xi = e^{i\sigma},$$

получим для любой точки на единичной окружности

$$\begin{aligned} X = Y + iZ &= \frac{1 + e^{i\sigma}}{1 - e^{i\sigma}} = i \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2}, \\ Z &= \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (24.42)$$



Точка  $Y$  в новой плоскости (лежащая на оси  $OY$ ) соответствует точке  $\eta$  (соответственно  $y$  в физической плоскости); она может быть выведена из соотношения (24.41):

$$Y^2 = \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^2 = \frac{\eta + \frac{1}{\eta} + 2}{\eta + \frac{1}{\eta} - 2} = \frac{1+By}{1-By}. \quad (24.43)$$

Поэтому точка  $A$  с абсциссой  $l$  в физической плоскости будет соответствовать точке  $A$  с абсциссой  $L$  в новой вспомогательной плоскости  $X$ ; величина  $L$  определяется формулой

$$L = \sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}}, \quad (24.44)$$

причем рассматривается только положительное значение корня. При этих условиях внезапный скачок  $\Delta\omega$  вертикальной скорости, соответствующий внезапному скачку  $\Delta\tau$  отклонения контура, выражается комплексным потенциалом движения, который в силу того, что  $OY$  является осью симметрии, а  $OZ$  (соответствующая окружности  $\rho_0=1$ ) — эквипотенциальной линией ( $u=\text{const}$ ), определится единообразной общей функцией

$$f(X) = -\frac{\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}} \left[ \ln \frac{X-L}{X+L} + iC \right]. \quad (24.45)$$

Постоянная  $iC$ , которая имеет чисто мнимую величину, не имеет значения до тех пор, пока изменение наклона происходит внутри конуса Маха. Однако она имеет существенное значение, когда скачок происходит вне конуса; в этом случае она легко может быть определена путем применения граничных условий рассматриваемой задачи.

Чтобы сделать более очевидным преобразование уравнения (24.45), когда скачок происходит вне конуса Маха, полагая  $l = h > \frac{1}{B}$ , находим выражение, идентичное (24.37) для плоскости  $\xi$ :

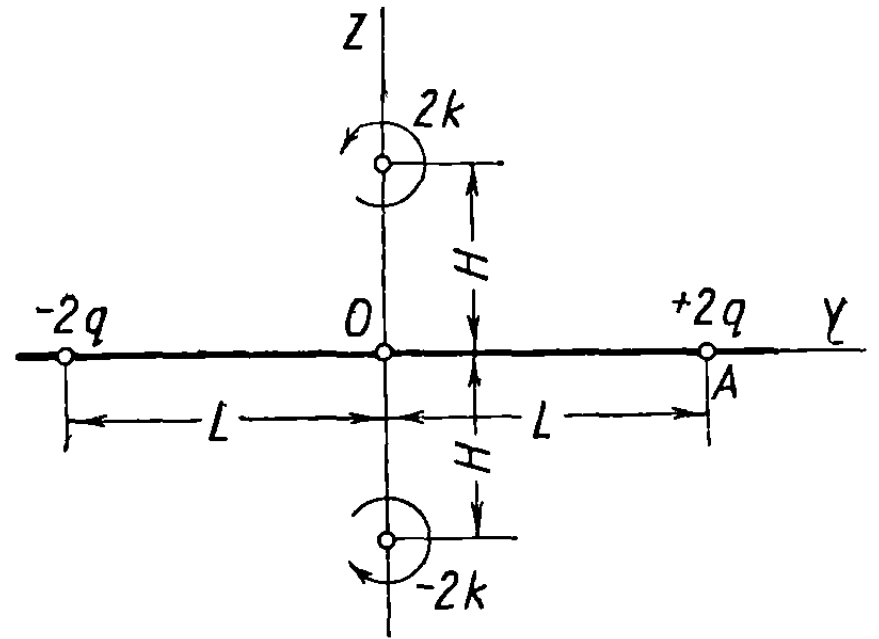
$$f(X) = \frac{i\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bh}{\sqrt{B^2h^2-1}} \left[ \ln \frac{X+iH}{X-iH} + iC \right], \quad (24.46)$$

где  $H$  получается последовательным преобразованием выражения (24.44):

$$\sqrt{\frac{1+Bh}{1-Bh}} = -i \sqrt{\frac{Bh+1}{Bh-1}} = -iH. \quad (24.47)$$

Аддитивная постоянная в формуле (24.46) будет теперь действительной и определена позже.

Как только  $l$  станет больше  $1/B$ ,  $L$  автоматически преобразуется в  $-iH$ , и источники в точках  $\pm L$  преобразуются в вихри, расположенные в точках



Фиг. 24.6

$\pm iH$ . Постоянные принимают теперь действительные значения, которые рассмотрены ниже. Поэтому при внезапном изменении угла отклонения контура функция  $f(X)$  полностью определяется уравнением (24.45), которое одинаково для всех случаев, как показано в более ранней работе [13]; задача, таким образом, сводится к простым операциям<sup>1</sup>. Формула (24.45) применима также без ограничений, когда особенности существуют на отрицательной стороне оси абсцисс.

Чтобы определить влияние непрерывного изменения контура, выразим величину элементарного источника  $dq$  в некоторой точке  $Y_i$  на оси абсцисс плоскости  $X$ , соответствующей точке  $y_i$  в физической плоскости, в виде

$$dq = -\frac{U_\infty d\tau}{B} \frac{By_i dy_i}{\sqrt{1-B^2y_i^2}} = \frac{U_\infty d\tau}{B^2} d(\sqrt{1-B^2y_i^2}) \quad (24.48)$$

и с точностью до чисто мнимой постоянной представим соответствующий элементарный потенциал выражением

$$\begin{aligned} \delta f &= -\frac{U_\infty d\tau}{\pi B} \frac{By_i dy_i}{\sqrt{1-B^2y_i^2}} \ln \frac{X-Y_i}{X+Y_i} = \\ &= \frac{U_\infty d\tau}{\pi B^2} d(\sqrt{1-B^2y_i^2}) \ln \frac{X-Y_i}{X+Y_i}, \end{aligned} \quad (24.49)$$

где приращение потенциала за счет элементарного отклонения  $d\tau$  обозначено через  $\delta f$ , чтобы избежать смешения с величиной  $df$ , которая представляет дифференциал комплексного потенциала.

Метод определения полного потенциала в некоторых конкретных случаях рассмотрен в следующем разделе.

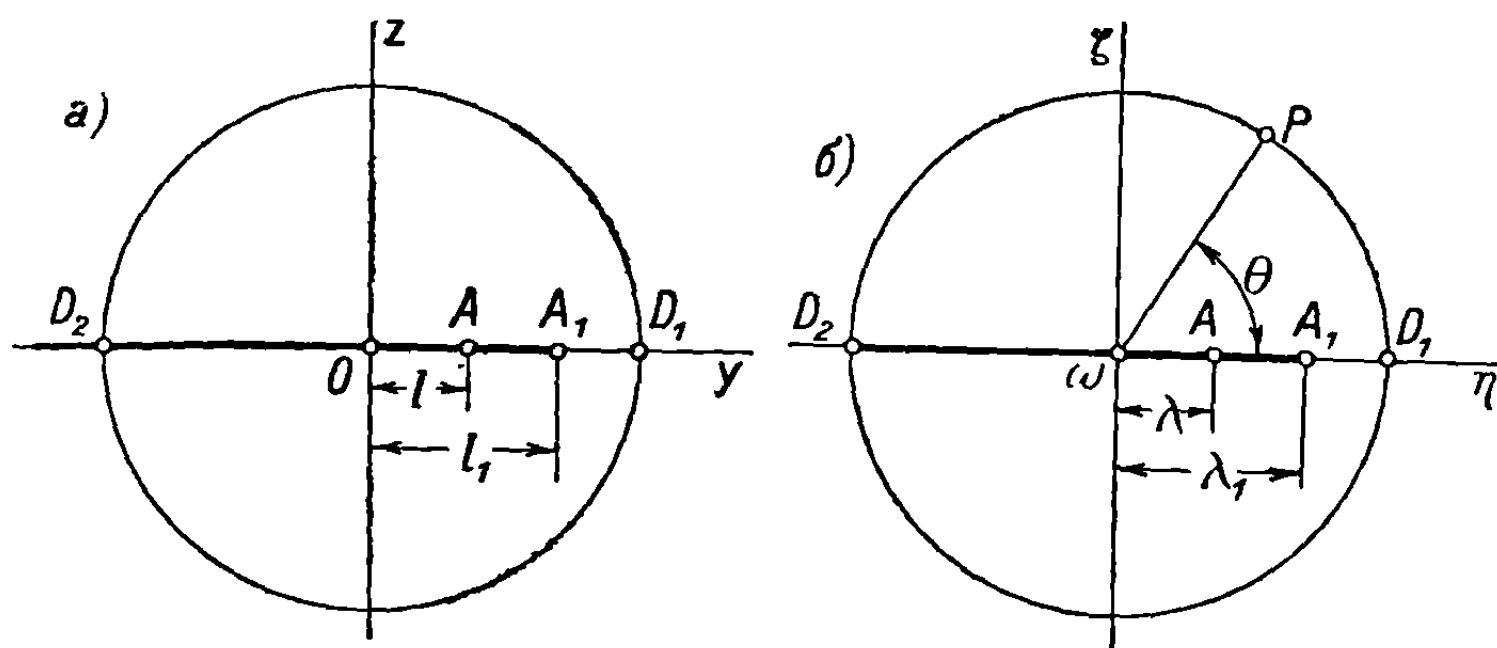
**24.3.2 Тонкое угловидное крыло с дозвуковыми ведущими кромками.** Если обе кромки тонкого угловидного крыла сверхзвуковые, то интерференция между верхней и нижней поверхностями возникать не будет, и каждую поверхность можно рассматривать отдельно, как в случае симметричных крыльев. Но если одна из ведущих кромок (или, может быть, задняя кромка) дозвуковая (фиг. 24.7, а), то интерференция между верхней и нижней поверхностями возникнет, и ось абсцисс в физической и вспомогательной плоскостях не будет больше осью симметрии. В точке  $A$  вспомогательной плоскости  $\xi$  (фиг. 24.7, б) интенсивность источника, в соответствии с уравнением (24.34), будет иметь прежнюю величину

$$q = \mp \frac{\Delta\tau U_\infty}{B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}},$$

где отрицательный знак соответствует источнику на верхней поверхности и положительный — источнику на нижней. Чтобы применить результаты,

<sup>1</sup> В связи с рассматриваемой задачей М. Ионеску отметил аналогичное обстоятельство при подсчете сил и моментов, вводя в соответствующие формулы мнимые члены, которые становятся действительными при определенном расположении конуса Маха.

полученные на основе гидродинамической аналогии, необходимо выполнить соответствующее преобразование, позволяющее сделать ось абсцисс осью симметрии.

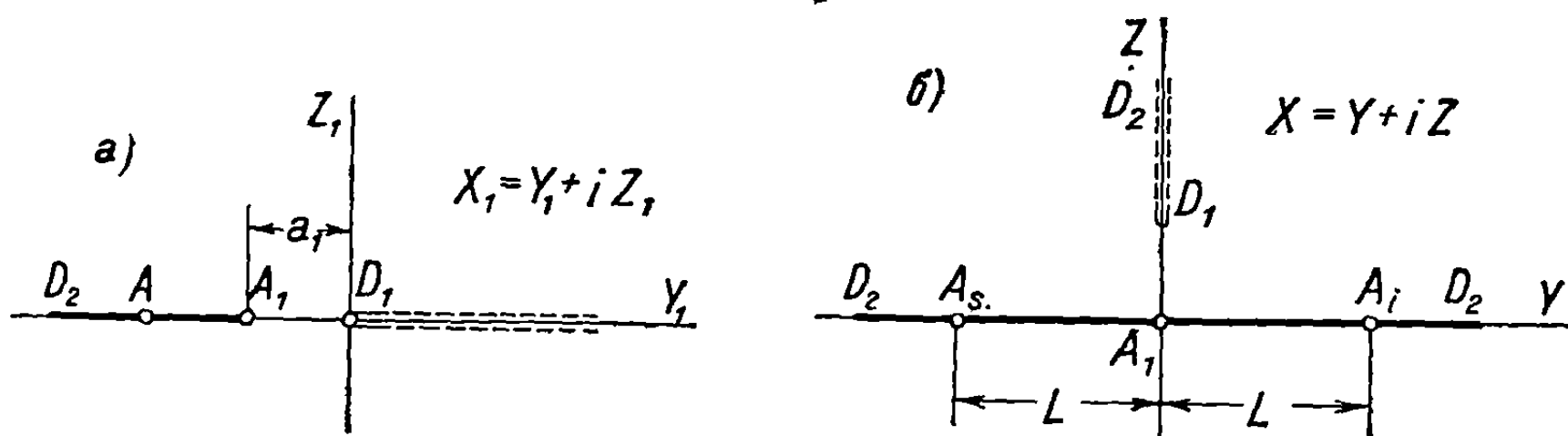


Фиг. 24.7

Для этого применим преобразование

$$X_1 = - \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^2, \quad (24.50)$$

посредством которого внутренность единичного круга в плоскости  $\xi$  преобразуется в плоскость  $X_1$ , причем след крыла представляется разрезом  $A_1 D_2$ ,



Фиг. 24.8

а единичная окружность — обеими сторонами положительной части оси абсцисс (фиг. 24.8, а).

Точка  $A_1$  располагается на расстоянии, от начала координат

$$-a_1 = - \left( \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \right)^2 = - \frac{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} - 2}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + 2} = - \frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1}. \quad (24.51)$$

С помощью нового конформного преобразования вся плоскость  $X_1$  отображается на верхнюю полуплоскость новой вспомогательной плоскости  $X$ , в которой разрез  $A_1 D_2$  изображается теперь всей осью абсцисс  $D_2 A_1 D_2$  (фиг. 24.8, б). Очевидно, что это преобразование осуществляется следующей функцией, выраженной в различных формах:

$$X^2 = - \frac{1 + Bl_1}{2} (X_1 + a_1) = \frac{Bl_1 (\xi - \lambda_1) \left( \xi - \frac{1}{\lambda_1} \right)}{(1 + \xi)^2} = \frac{Bl_1 \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) - 2}{\xi + \frac{1}{\xi} + 2}, \quad (24.52)$$

при этом единичная окружность в плоскости  $\xi$  (см. фиг. 24.7, б) представляется обеими сторонами положительной оси ординат, начиная от точки  $D_1$ . Для некоторой точки  $\xi = e^{i\theta}$  на окружности путем использования уравнения (24.52) получается соотношение

$$(Y + iZ)^2 = - \frac{1 - Bl_1 \cos \theta}{1 + \cos \theta} = - Z^2. \quad (24.53)$$

Согласно уравнению (24.52), точки в новой, преобразованной плоскости (лежащие на оси  $OY$ )

$$Y^2 = \frac{Bl_1 \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) - 2}{\eta + \frac{1}{\eta} + 2} = \frac{B(l_1 - y)}{1 + By},$$

$$L = \pm \sqrt{\frac{B(l_1 - l)}{1 + Bl}} \quad (24.54)$$

отвечают точкам  $y$ , соответственно  $l$ , на крыле в физической плоскости ( $\eta$  соответственно  $\lambda$  во вспомогательной плоскости  $\xi$ ). Сохраняя тот же смысл для следа крыла в физической и вспомогательной плоскостях, предположим, что точка  $A$  на верхней стороне соответствует точке  $A_s$  с отрицательной абсциссой; этим мы показываем, что отрицательный знак корня в записанном выше выражении выбран, чтобы отметить точки на верхней поверхности крыла. В этом случае отрицательный источник лежит в  $A_s$  и положительный в  $A_i$ . Следовательно, для соответствующего потенциала фиктивного течения получим выражение

$$f(X) = - \frac{\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \ln \frac{X + L}{X - L} + iC, \quad (24.55)$$

где  $C$  — действительная постоянная, значение которой указано позже. Все фиктивное течение в верхнем полукруге плоскости  $\xi$  представляется во втором квадранте плоскости  $X$ .

Очевидно, что если величина  $l$  станет отрицательной и точка  $A$  выйдет из круга Маха, то система источников преобразуется в систему двух вихрей, лежащих на оси ординат; и так как автоматический процесс преобразования формулы (24.54) идентичен процессу в предшествующих случаях, то нет нужды повторять прежние рассуждения. Отсюда следует, что единообразное выражение потенциала  $f(X)$  дает общее решение задачи.

Если наклон профиля изменяется непрерывно, то в точке  $y_i$  физической плоскости (соответственно  $Y_i$  во вспомогательной) получим

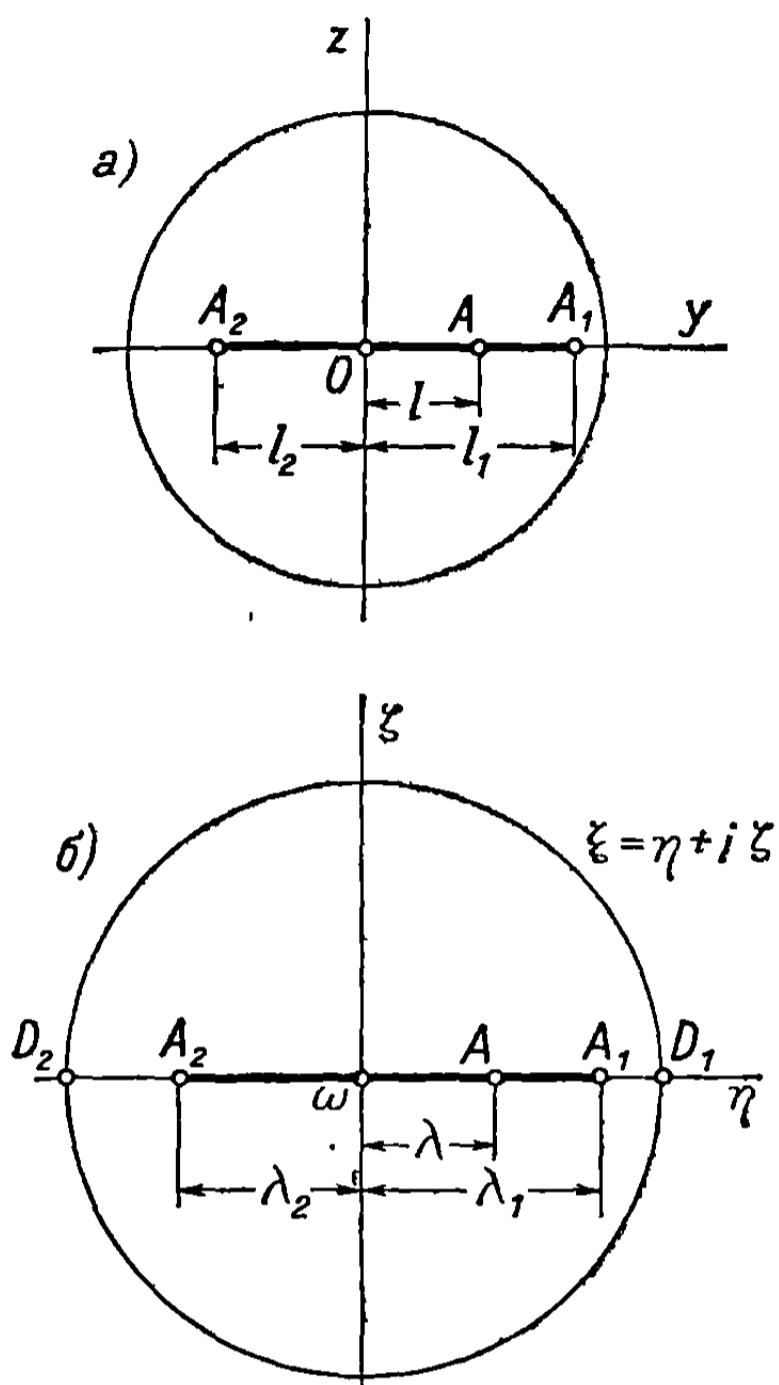
$$\delta f = - \frac{U_\infty}{\pi B} \frac{d\tau}{dy_i} \frac{By_i dy_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}} \ln \frac{X + Y_i}{X - Y_i} = \frac{U_\infty}{\pi B^2} \frac{d\tau}{dy_i} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}) \ln \frac{X + Y_i}{X - Y_i}, \quad (24.56)$$

с точностью до постоянной.

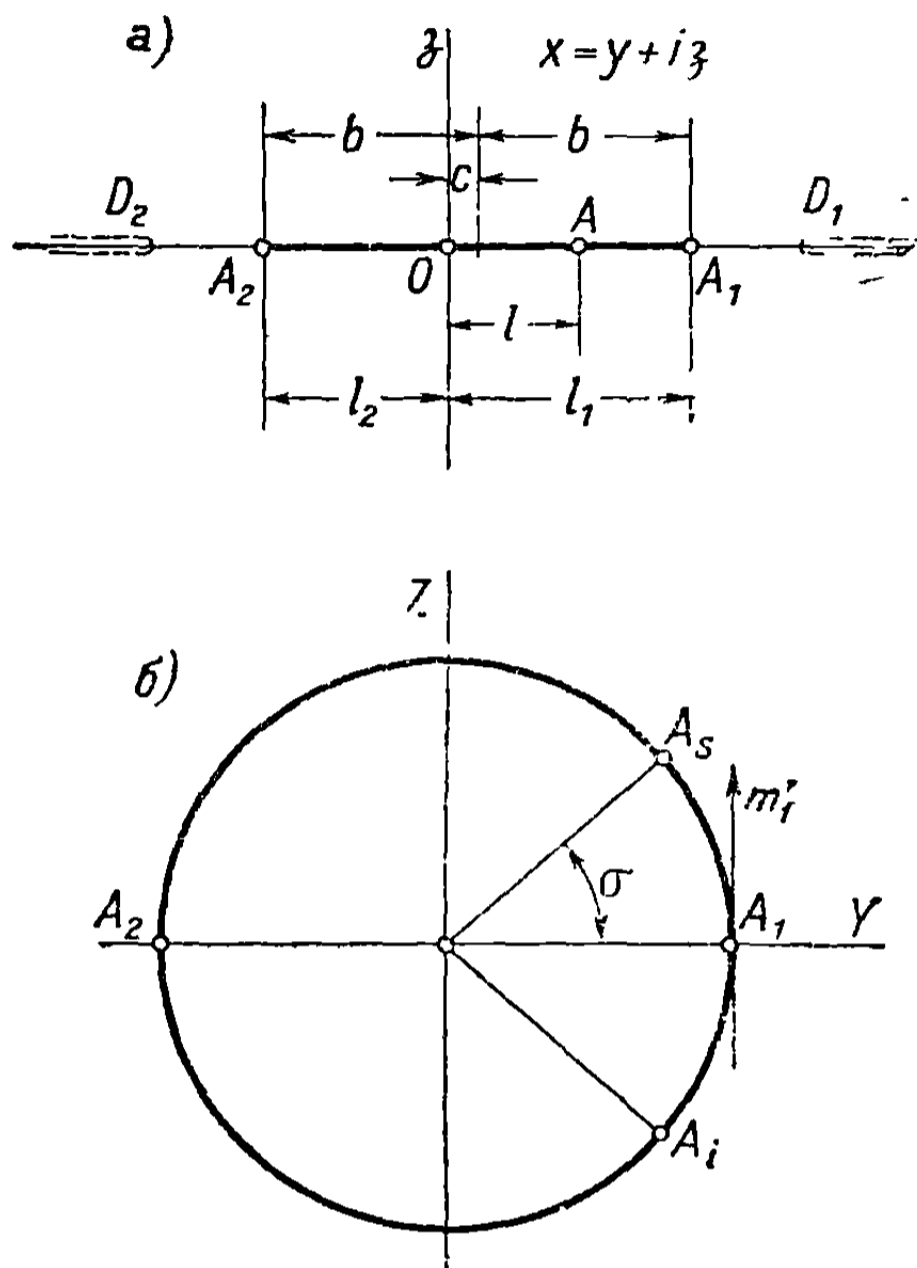
**24.3.3 Тонкое крыло в случае, когда обе ведущие кромки дозвуковые.** В физической плоскости  $Ouz$  след крыла полностью содержится в круге Маха; следовательно, он будет также содержаться в единичном кру-

ге на вспомогательной плоскости  $\omega\eta\zeta$  (фиг. 24.9). В точке  $A$ , как в предшествующем случае, будут существовать два источника равной интенсивности и противоположного знака

$$q = \mp \frac{\Delta\tau U_\infty}{B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}},$$



Фиг. 24.9



Фиг. 24.10

где аналогично отрицательный знак соответствует верхней поверхности и положительный — нижней. Чтобы найти фиктивный потенциал, нужно преобразовать вспомогательную плоскость  $\xi$  в плоскость  $x = y + iz$  с помощью соотношения

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2},$$

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2x^2}}{Bx}, \quad (24.57)$$

которое имеет свойство точного воспроизведения следа крыла на оси абсцисс в его действительных размерах, так как преобразования в соответствующей точке аналогичны преобразованию Буземана (24.13) и, следовательно, воспроизводят точно ось абсцисс в физической плоскости (фиг. 24.10, а).

Это преобразование, применявшееся к различным задачам П. Жерменом [14], другими авторами и автором настоящей книги [11], имеет большую практическую ценность, особенно в случае переменного наклона. Вся область внутри единичного круга в плоскости  $\xi$  преобразуется в область

вне разреза  $A_1A_2$  плоскости  $x$ . Окружность  $|\xi| = 1$  переходит в ось абсцисс от  $-\infty$  до  $D_2$  и от  $D_1$  до  $+\infty$ . Так как  $u = 0$  на этой окружности, то в настоящей задаче эти части оси абсцисс не имеют разрезов. При этих условиях источник на верхней поверхности перетекает в источник (сток) на нижней поверхности в результате реализации течения вокруг отрезка  $A_1A_2$ . Чтобы найти потенциал, выполним следующее преобразование, полагая

$$x - c = \frac{b}{2} \left( X + \frac{1}{X} \right),$$

$$X = \frac{x - c}{b} + \sqrt{\left( \frac{x - c}{b} \right)^2 - 1}, \quad (24.58)$$

где

$$2c = l_1 - l_2, \quad 2b = l_1 + l_2, \quad (24.59)$$

которое отображает внешность разреза  $A_1A_2$  на внешность круга единичного радиуса новой плоскости  $X = Y + iZ$  (фиг. 24.10, б). Точки  $A$  на верхней и нижней частях разреза  $A_2A_1$  переходят соответственно в точки  $A_s$  и  $A_i$  с аффиксами:

$$X_s = \frac{l - c}{b} + \sqrt{\left( \frac{l - c}{b} \right)^2 - 1}, \quad X_i = \frac{l - c}{b} - \sqrt{\left( \frac{l - c}{b} \right)^2 - 1} = \frac{1}{X_s}; \quad (24.60)$$

или, полагая

$$\frac{l - c}{b} = \cos \sigma, \quad (24.61)$$

получим более простые выражения

$$X_s = e^{i\sigma}, \quad X_i = e^{-i\sigma}. \quad (24.62)$$

Потенциал фиктивного течения будет

$$f(X) = -\frac{\Delta\tau U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \ln \frac{X - e^{i\sigma}}{X - e^{-i\sigma}}. \quad (24.63)$$

В случае непрерывного изменения отклонения подобным же образом получим

$$\begin{aligned} \delta f &= -\frac{U_\infty}{\pi B} \frac{d\tau}{dy_i} \frac{By_i dy_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}} \ln \frac{X - e^{i\theta}}{X - e^{-i\theta}} = \\ &= \frac{U_\infty}{\pi B^2} \frac{d\tau}{dy_i} d \left( \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right) \ln \frac{X - e^{i\theta}}{X - e^{-i\theta}}, \end{aligned} \quad (24.64)$$

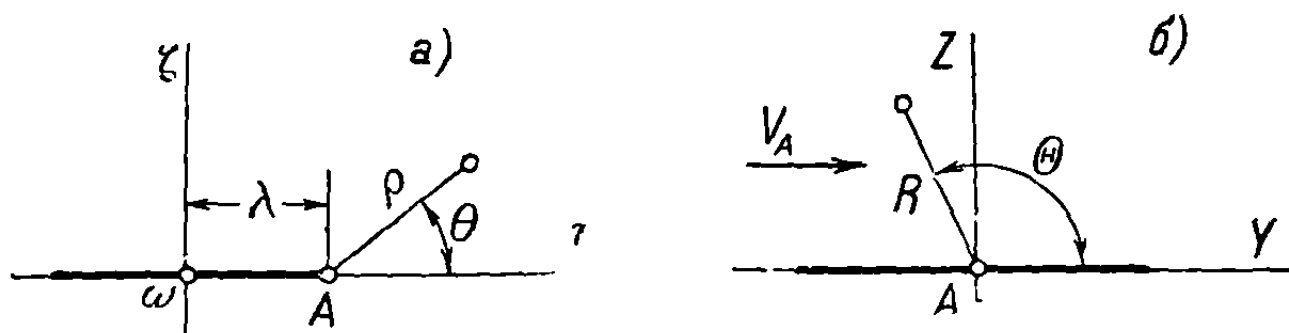
где  $\theta$  определяется теперь соотношением

$$\frac{y_i - c}{b} = \cos \theta. \quad (24.65)$$

В случае дозвуковых ведущих кромок имеем  $l < \frac{1}{B}$ , поэтому источники не преобразуются в вихри.

#### 24.4. Условия течения около дозвуковых ведущих кромок тонких крыльев

При рассмотрении (см. раздел 14.4) стреловидных крыльев бесконечного размаха было показано, что когда поток, нормальный к кромке крыла, будет дозвуковым, то течение около кромки также будет дозвуковым. В случае тонких угловидных крыльев течение не будет двумерным, и явления



Фиг. 24.11

становятся очень сложными. Однако течение может рассматриваться как двумерное в непосредственной близости к кромке и нормально к ней, и получающиеся скорости могут рассматриваться как имеющие, приближенно, тот же характер изменений, что и реальные скорости возмущения  $u, v, w$ . Условия течения в непосредственной близости дозвуковых кромок угловидных крыльев можно поэтому уподобить условиям двумерного течения около точек заострения. Допустим, что отмеченное выше течение отображено на вспомогательную плоскость  $\omega\eta\zeta$  и точка заострения, обозначенная через  $A$  (фиг. 24.11, а), соответствует действительной точке заострения в физической плоскости, при подходе к которой скорость стремится к бесконечности. Чтобы определить порядок стремления скорости к бесконечности, рассмотрим течение вокруг точки  $A$ . Для этого выполним преобразование области вокруг точки  $A$  в плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $X = Y + iZ$  (фиг. 24.11, б) с помощью функции

$$X^2 = -(\xi - \lambda). \quad (24.66)$$

В непосредственной близости точки  $A$  плоскости  $X$  скорость может рассматриваться как постоянная и равная  $V_A$ . Соответствующая скорость вокруг той же точки в плоскости  $\xi$  будет

$$f(X) = V_A \frac{dX}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{V_A}{X} = \frac{i}{2} \frac{V_A}{(\xi - \lambda)^{1/2}} = f(\xi); \quad (24.67)$$

поэтому она стремится к бесконечности, так же, как  $(\xi - \lambda)^{-1/2}$  в плоскости  $\xi$ , или как  $\frac{1}{X}$  в плоскости, полученной преобразованиями с помощью функций (24.52) и (24.58). Те же условия можно наложить на скорости  $u, v, w$ , определяемые действительными частями функций  $f(\xi), g(\xi)$  и  $h(\xi)$  комплексной переменной  $\xi$ , или  $f(X), \dots$  и т. д. комплексной переменной  $X$ . Так как нам нужно определить функцию  $f(X) = u + iu'$ , то приведенное условие будет применено к этой функции. Это эквивалентно, по гидродинамической аналогии, диполю, расположенному в точке  $A$ .

Таким образом, например, в случаях, рассмотренных в разделах 24.3.2 (фиг. 24.8,б) и 24.3.3 (фиг. 24.10,б), нужно прибавить соответствующий член, обусловленный дозвуковой кромкой, определяемый потенциалом диполя: в первом случае

$$f_1(X) = \frac{m_1}{X}, \quad (24.68)$$

во втором

$$f'_1(X) = \frac{im'_1}{X-1}, \quad (24.69)$$

где  $m$  и  $m'_1$  — постоянные. Эти результаты использованы позже.

## 25. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСЕВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЗМУЩЕНИЯ И ДАВЛЕНИЙ ДЛЯ УГЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЕВ СИММЕТРИЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Напомним (см. раздел 24.1), что действие сверхзвукового потока на коническое крыло можно разложить на эффект, который обусловлен скелетом крыла, и эффект крыла, толщина которого симметрично распределяется относительно плоскости, образованной двумя его кромками.

В следующих разделах рассматривается распределение давлений на симметричном крыле. Так как эти давления пропорциональны осевой скорости возмущения  $u$  (см. формулу 24.19), то задача сводится к вычислению функции  $f(\xi)$  или  $f(X)$ , действительная часть которой точно представляет эту скорость.

Имея в виду гидродинамический характер функции  $f(X)$ , свойства которой были определены выше, можно легко изучить рассматриваемые обычно задачи путем применения метода гидродинамической аналогии.

Задачи представлены последовательно, начиная с наиболее простых, чтобы облегчить понимание метода.

Они рассмотрены в следующем порядке: коническое крыло с постоянным наклоном, крыло со многими кромками, крыло с переменным симметричным профилем, наконец, несколько особых случаев.

Решение этих задач связано с простым применением тех же основных формул, которые были приведены в предшествующих разделах.

### 25.1. Угловидное крыло с постоянным наклоном

Рассмотрим заостренное симметричное крыло с наклоном  $\gamma$ , постоянным на обеих поверхностях (фиг. 25.1). Наклоны подвергаются внезапному изменению на ведущих кромках в точках  $A_1$  и  $A_2$ : в точке  $A_1$  наклон переходит от значения  $\gamma$  до 0, поэтому  $\Delta\tau_1 = -\gamma$ ; в точке  $A_2$  он переходит от 0 до  $\gamma$ , поэтому  $\Delta\tau_2 = \gamma$ .

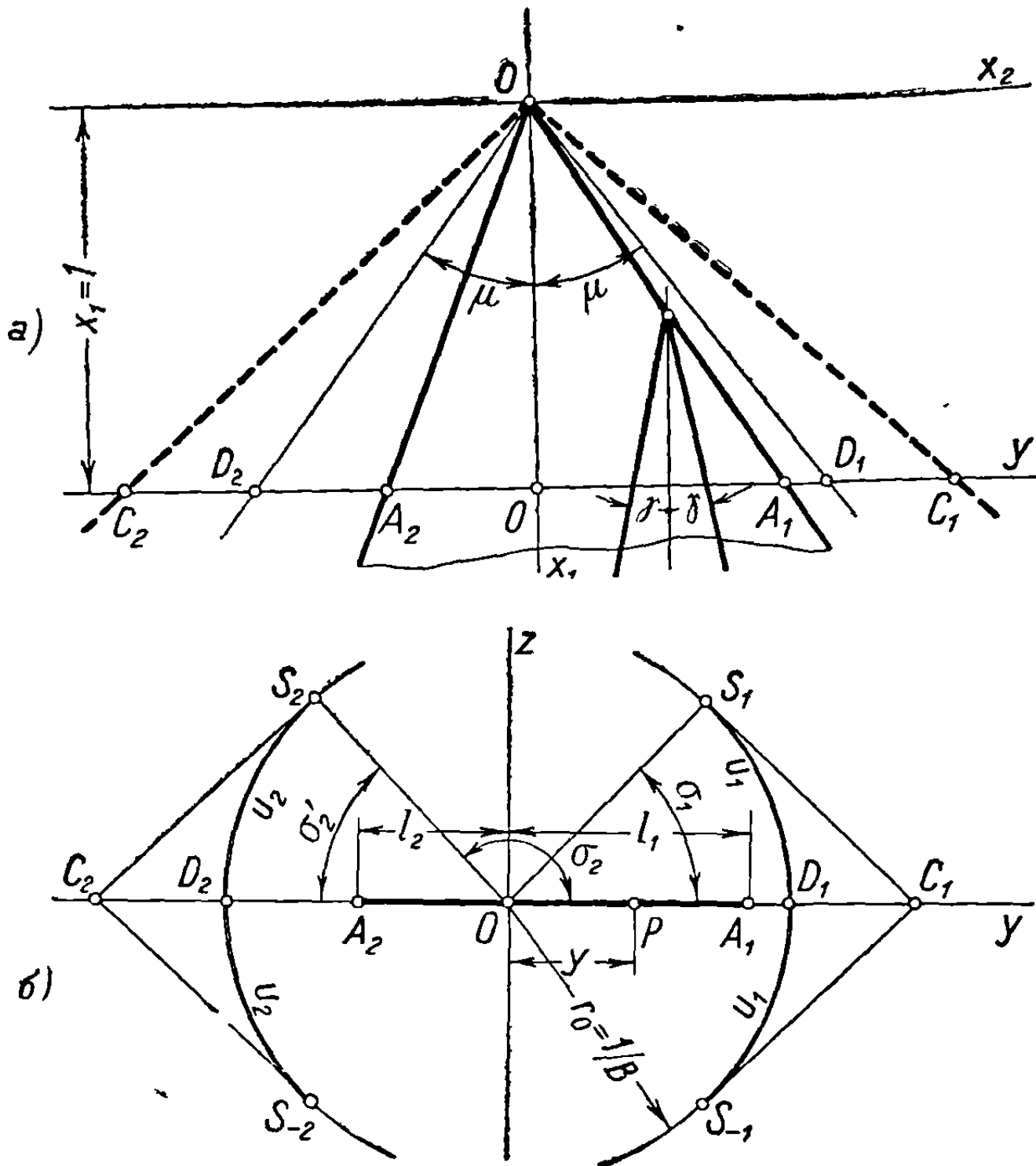
В согласии с уравнением (24.34), интенсивность источников  $q_1$  и  $q_2$  будет



$$q_1 = \frac{\gamma U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}},$$

$$q_2 = \frac{\gamma U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}. \quad (25.1)$$

Эти источники расположены в соответствующих точках определенных ранее вспомогательных плоскостей  $\xi$  и  $X$  (см. формулу 24.41). Обычно



Фиг. 25.1

рассматривается последняя плоскость, так как тогда вычисления, требуемые для практических целей, становятся особенно простыми.

Принимая значения  $L_1$  и  $L_2$ , в согласии с уравнением (24.44),

$$L_1 = \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{1 - Bl_1}},$$

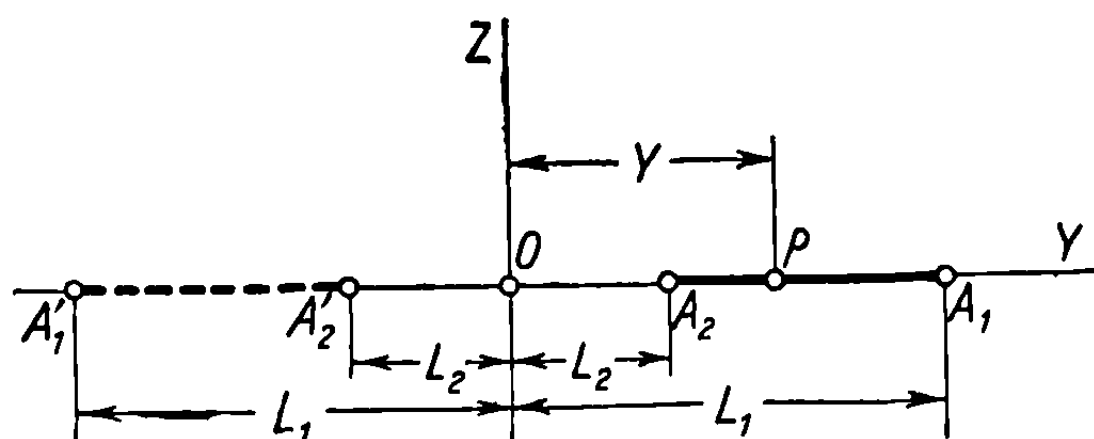
$$L_2 = \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{1 + Bl_2}}, \quad (25.2)$$

получим в плоскости  $X$  конфигурацию, изображенную на фиг. 25.2, где ось ординат является эквипотенциальной линией ( $u=0$ ).

Потенциал фиктивного течения, который дает осевую скорость возмущения, может быть легко получен:

$$u + iu' = f(X) = \frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \left( \ln \frac{X - L_1}{X + L_1} - i\pi \right) + \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \ln \frac{X - L_2}{X + L_2} \right]. \quad (25.3)$$

Очевидно, что все граничные условия удовлетворяются. Чисто мнимая постоянная не играет роли при вычислениях, но если кромки крыла выступают за конус Маха, то постоянная становится действительной, как это и требуется, чтобы удовлетворить граничным условиям. Все возможные случаи, относящиеся к ведущим кромкам, дозвуковым или сверхзвуковым, охватываются приведенным выше выражением для потенциала,



Фиг. 25.2

и преобразования легко выводятся из предшествующих рассуждений (см. раздел 24); тем не менее, дальше следует изучение крыльев в различных положениях ввиду большой важности этой классической задачи.

**25.1.1. Дозвуковые ведущие кромки.** Функция скорости, определяемая приведенным выше выражением, дает решение для случая дозвуковых ведущих кромок. Скорость на крыле в точке  $y$  физической плоскости, соответствующей точке  $Y$  на вспомогательной плоскости, устанавливается формулой

$$u = \operatorname{Re} \frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{1-B^2l_1^2}} \left( \ln \frac{Y-L_1}{Y+L_1} - i\pi \right) + \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2l_2^2}} \ln \frac{Y-L_2}{Y+L_2} \right], \quad (25.4)$$

где введен символ  $\operatorname{Re}$ , чтобы отмечать только действительную часть каждого члена для каждой точки оси абсцисс.

Эта формула может быть выражена в других, используемых в практике видах. Полагая

$$n_i = \frac{1}{Bl_i}, \quad k_i = \frac{y}{l_i} \quad (i = 1, 2) \quad (25.5)$$

и применяя известное соотношение

$$\ln \frac{Y-L}{Y+L} = -2\operatorname{Arth} \frac{L}{Y} = -\operatorname{Arch} \frac{Y^2+L^2}{Y^2-L^2}, \quad (25.6)$$

где  $L$  нужно заменить через  $L_1$  и  $L_2$  (см. формулу 25.2) и величину  $Y$  через ее значение в зависимости от  $y$  (24.43), получим после некоторых элементарных операций следующее соотношение

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{1-B^2l_1^2}} \operatorname{Arch} \frac{1-B^2l_1y}{B(l_1-y)} + \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2l_2^2}} \operatorname{Arch} \frac{1+B^2l_2y}{B(l_2+y)} \right] = \\ &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}} \operatorname{Arch} \frac{n_1^2-k_1}{n_1(1-k_1)} + \frac{1}{\sqrt{n_2^2-1}} \operatorname{Arch} \frac{n_2^2+k_2}{n_2(1+k_2)} \right]. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Если крыло симметричное ( $l_1 = l_2 = l, n_1 = n_2 = n = \frac{1}{Bl}, k_1 = k_2 = k$ ), то

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}} \left[ \text{Arch} \frac{1-B^2ly}{B(l-y)} + \text{Arch} \frac{1+B^2ly}{B(l+y)} \right] = \\ &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2-1}} \left( \text{Arch} \frac{n^2-k}{n(1-k)} + \text{Arch} \frac{n^2+k}{n(1+k)} \right). \end{aligned} \quad (25.8)$$

Применяя соотношение

$$\text{Arch} \alpha + \text{Arch} \beta = \text{Arch} (\alpha\beta + \sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}), \quad (25.9)$$

приведем выражение для  $u$  к виду

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}} \text{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2y^2}{B^2(l^2-y^2)}} = \\ &= -\frac{2\gamma U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2-1}} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Эта формула применяется вместе с уравнением (24.19) для вычисления давлений на симметричном крыле.

**З а м е ч а н и е.** Приведенные формулы справедливы для любой точки крыла, расположенной на линии абсцисс, внутри или вне конуса Маха. Так, например, если  $|y| \geq \frac{1}{B}$ , то, очевидно, что члены уравнения (25.8) становятся мнимыми, поэтому  $u=0$ , что находится в полном согласии с граничными условиями, поставленными в начале. Это замечание принято во внимание позже.

**25.1.2. Крыло с одной дозвуковой и одной сверхзвуковой ведущими кромками.** Если одна из ведущих кромок выступает за конус Маха, например,  $OC_1$  или  $OC_2$  (фиг. 25.1), то, обозначая абсциссы ведущих кромок теми же символами  $l_1$  и  $l_2$  для того, чтобы обеспечить во всех случаях одинаковые обозначения, получим:

в первом случае (кромка  $OC_1$  сверхзвуковая)

$$f'(X) = \frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{-iBl_1}{\sqrt{B^2l_1^2-1}} \left( \ln \frac{X+iH_1}{X-iH_1} - i\pi \right) + \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2l_2^2}} \ln \frac{X-L_2}{X+L_2} \right], \quad (25.11)$$

во втором случае (кромка  $OC_2$  сверхзвуковая)

$$f''(X) = \frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{1-B^2l_1^2}} \left( \ln \frac{X-L_1}{X+L_1} - i\pi \right) - \frac{iBl_2}{\sqrt{B^2l_2^2-1}} \ln \frac{X-iH_2}{X+iH_2} \right], \quad (25.12)$$

где, согласно уравнению (24.47):

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\frac{Bl_1+1}{Bl_1-1}}, \\ H_2 &= \sqrt{\frac{Bl_2-1}{Bl_2+1}}. \end{aligned} \quad (25.13)$$

В первом случае граничные условия удовлетворяются, так как  $u = u_1$  вдоль дуги  $D_1S_1$  и  $u = 0$  вдоль остальной части окружности; этот результат может быть также получен из уравнения (25.11), если сначала устремить  $X$  к бесконечности, а затем к нулю. Во втором случае  $u = u_2$  вдоль дуги  $D_2S_2$

и  $u = 0$  на остальной части окружности, что может быть также подтверждено выполнением операции перехода к пределу, как указывалось выше.

Значения скоростей  $u_1$  и  $u_2$  могут быть выведены из уравнения (24.38)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\gamma U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} = -\frac{\gamma U_\infty}{B \sqrt{n_1^2 - 1}}, \\ u_2 &= -\frac{\gamma U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} = -\frac{\gamma U_\infty}{B \sqrt{n_2^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Для точек на крыле ( $X=Y$ ) можно использовать метод, аналогичный предыдущему, однако проще исходить непосредственно из формулы (25.7), применяя круговые функции вместо гиперболических. Таким образом, получим:

в первом случае

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \operatorname{arccos} \frac{1 - B^2 l_1 y}{B(l_1 - y)} + \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \operatorname{Arch} \frac{1 + B^2 l_2 y}{B(l_2 + y)} \right] = \\ &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}} \operatorname{arccos} \frac{n_1^2 - k_1}{n_1(1 - k_1)} + \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - 1}} \operatorname{Arch} \frac{n_2^2 + k_2}{n_2(1 + k_2)} \right], \end{aligned} \quad (25.15)$$

во втором случае

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{Arch} \frac{1 - B^2 l_1 y}{B(l_1 - y)} + \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \operatorname{arccos} \frac{1 + B^2 l_2 y}{B(l_2 + y)} \right] = \\ &= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{Arch} \frac{n_1^2 - k_1}{n_1(1 - k_1)} + \frac{1}{\sqrt{1 - n_2^2}} \operatorname{arccos} \frac{n_2^2 + k_2}{n_2(1 + k_2)} \right]. \end{aligned} \quad (25.16)$$

**25.1.3. Крыло со сверхзвуковыми ведущими кромками.** Функция осевой скорости возмущения выводится из уравнения (25.3) посредством преобразований, упомянутых выше; так, рассматривая первый квадрант плоскости  $X$  (см. формулу 24.41), получим

$$\begin{aligned} f(X) &= -i \frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \left( \ln \frac{X + iH_1}{X - iH_1} + i\pi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} \right], \end{aligned} \quad (25.17)$$

что удовлетворяет граничным условиям. Когда  $X$  стремится к бесконечности, то получается значение  $u_1$ , а когда  $X$  стремится к нулю, получается значение  $u_2$ , что находится в согласии с физическим процессом. Заметим, что при  $X \rightarrow 0$  должно уделяться особое внимание значению логарифмических членов

$$\begin{aligned} \ln \frac{X + iH_1}{X - iH_1} &= \lim_{X \rightarrow 0} \ln \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = i\pi, \\ \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} &= \lim_{X \rightarrow 0} \ln \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -i\pi; \end{aligned} \quad (25.18)$$

значения (25.18) использовались при проведении вычислений.

Исходя из уравнения (25.7), вычислим скорость на крыле ( $X = Y$ ), заменяя гиперболические функции круговыми:

$$u = -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \arccos \frac{1 - B^2 l_1 y}{B(l_1 - y)} + \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \arccos \frac{1 + B^2 l_2 y}{B(l_2 + y)} \right] =$$

$$= -\frac{\gamma U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}} \arccos \frac{n_1^2 - k_1}{n_1(1 - k_1)} + \frac{1}{\sqrt{1 - n_2^2}} \arccos \frac{n_2^2 + k_2}{n_2(1 + k_2)} \right]. \quad (25.19)$$

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2 = l$ ,  $n_1 = n_2 = n = \frac{1}{Bl}$ ,  $k_1 = k_2 = k$ ), то, исходя из выражения (25,10) и выполняя необходимые преобразования, получим

$$u = -\frac{2\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \arccos \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2(l^2 - y^2)}} =$$

$$= -\frac{2\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} \arccos \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} = \quad (25.20)$$

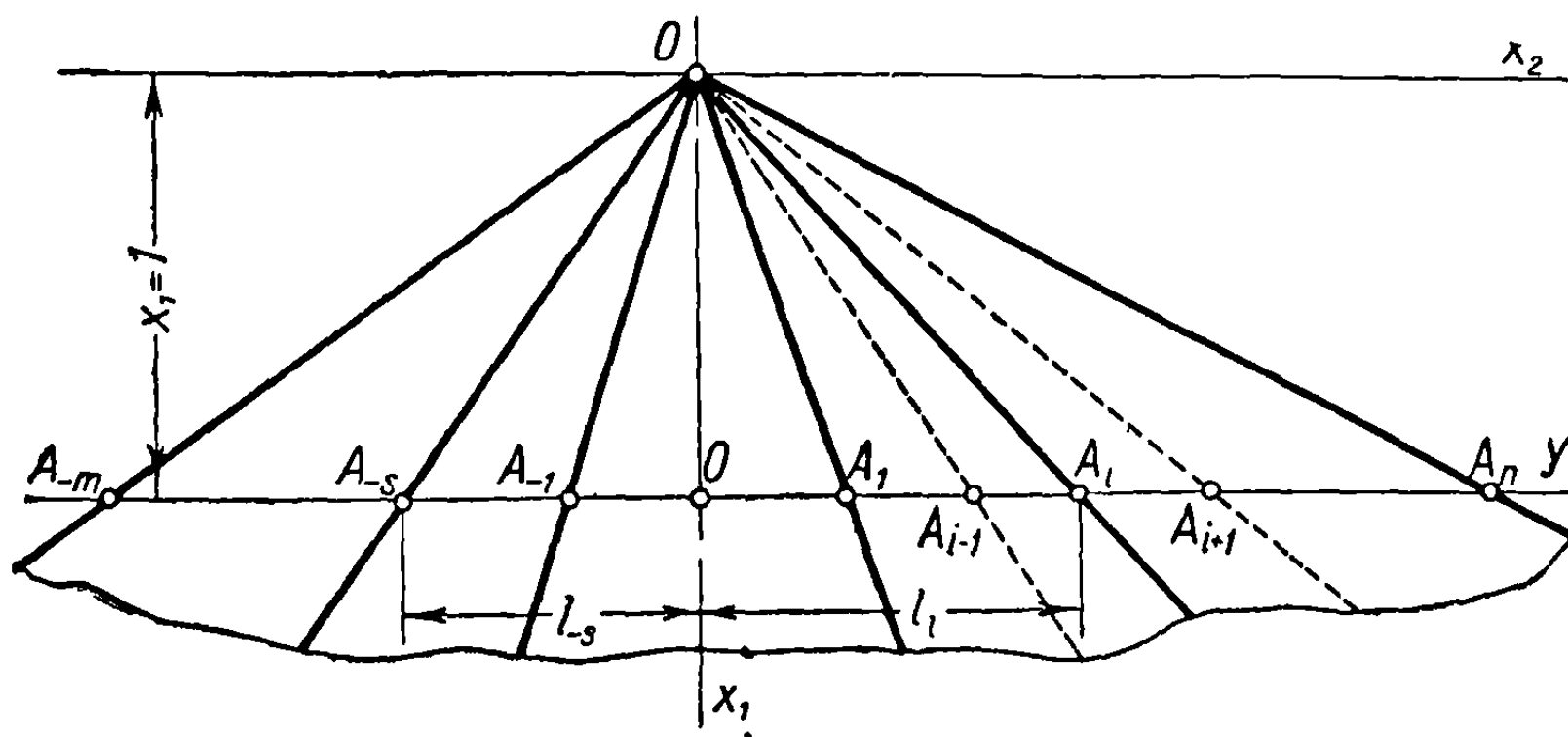
$$= -\frac{2\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} \right).$$

Эта формула также справедлива для тонкого угловидного крыла со сверхзвуковыми ведущими кромками; она будет рассмотрена еще раз при новом исследовании общей задачи тонкого крыла.

**З а м е ч а н и е .** Приведенные формулы, как и в предшествующих случаях, справедливы также вне круга Маха, в интервале  $\frac{1}{B} \leq y \leq l$  и для  $y > l_1$ . При помощи элементарных расчетов находим, что  $\pi$  и 0 будут действительными значениями первого и второго арккосинусов в формуле (25.19), в интервале  $\frac{1}{B} \leq y \leq l_1$ ; для  $y > l_1$  действительные значения указанных членов равны нулю. Это замечание принято во внимание в следующей главе.

## 25.2. Угловидное симметричное крыло со многими гранями

Рассмотрим коническое угловидное крыло со многими гранями и предположим, что переход от одной грани к другой будет резким (фиг. 25.3).



Фиг. 25.3

Пусть  $OA_i$  будет прямой линией пересечения двух последовательных граней  $A_{i-1}OA_i$  и  $A_iOA_{i+1}$  и пусть  $\Delta\gamma_i$  будет внезапным изменением наклона в точке

$A_i$ . Пусть  $\Delta\gamma_{-s}$  будет приращение наклона в направлении положительных абсцисс для точки  $A_{-s}$  с отрицательной абсциссой.

Согласно результатам, полученным в разделе 24, осевая скорость возмущения будет определена в плоскости  $X$  посредством функции

$$u + iu' = f(X) = -\frac{U_\infty}{\pi B} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\gamma_i B l_i}{\sqrt{1-B^2 l_i^2}} \left( \ln \frac{X-L_i}{X+L_i} - i\pi \right) + \frac{U_\infty}{\pi B} \sum_{s=1}^m \frac{\Delta\gamma_{-s} B l_{-s}}{\sqrt{1-B^2 l_{-s}^2}} \ln \frac{X-L_{-s}}{X+L_{-s}}, \quad (25.21)$$

которая дает решение задачи для всех положений конуса Маха. Вычисляя скорости на крыле ( $X=Y$ ) и выполняя операции, как в предшествующем случае, получим следующие соотношения:

$$u = \frac{U_\infty}{\pi B} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\gamma_i B l_i}{\sqrt{1-B^2 l_i^2}} \text{Arch} \frac{1-B^2 l_i y}{B(l_i-y)} - \frac{U_\infty}{\pi B} \sum_{s=1}^m \frac{\Delta\gamma_{-s} B l_{-s}}{\sqrt{1-B^2 l_{-s}^2}} \text{Arch} \frac{1+B^2 l_{-s} y}{B(l_{-s}+y)}. \quad (25.22)$$

Если крыло симметрично ( $l_i = l_{-s}$ ,  $\Delta\gamma_i = -\Delta\gamma_{-s}$ ), то аналогично выражению (25.10) получим

$$u = \frac{2U_\infty}{\pi B} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\gamma_i B l_i}{\sqrt{1-B^2 l_i^2}} \text{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2 (l_i^2 - y^2)}}. \quad (25.23)$$

Если линия пересечения  $OA_i$  выходит за конус Маха, то произойдут следующие изменения в структуре потенциала вследствие особенности в точке  $A_i$ :

для точек с положительной абсциссой

$$f_i(X) = \frac{i U_\infty}{\pi B} \frac{\Delta\gamma_i B l_i}{\sqrt{B^2 l_i^2 - 1}} \left( \ln \frac{X+iH_i}{X-iH_i} - i\pi \right), \quad (25.24)$$

для точек с отрицательной абсциссой

$$f_{-s}(X) = -\frac{i U_\infty}{\pi B} \frac{\Delta\gamma_{-s} B l_{-s}}{\sqrt{B^2 l_{-s}^2 - 1}} \ln \frac{X-iH_{-s}}{X+iH_{-s}}, \quad (25.25)$$

где

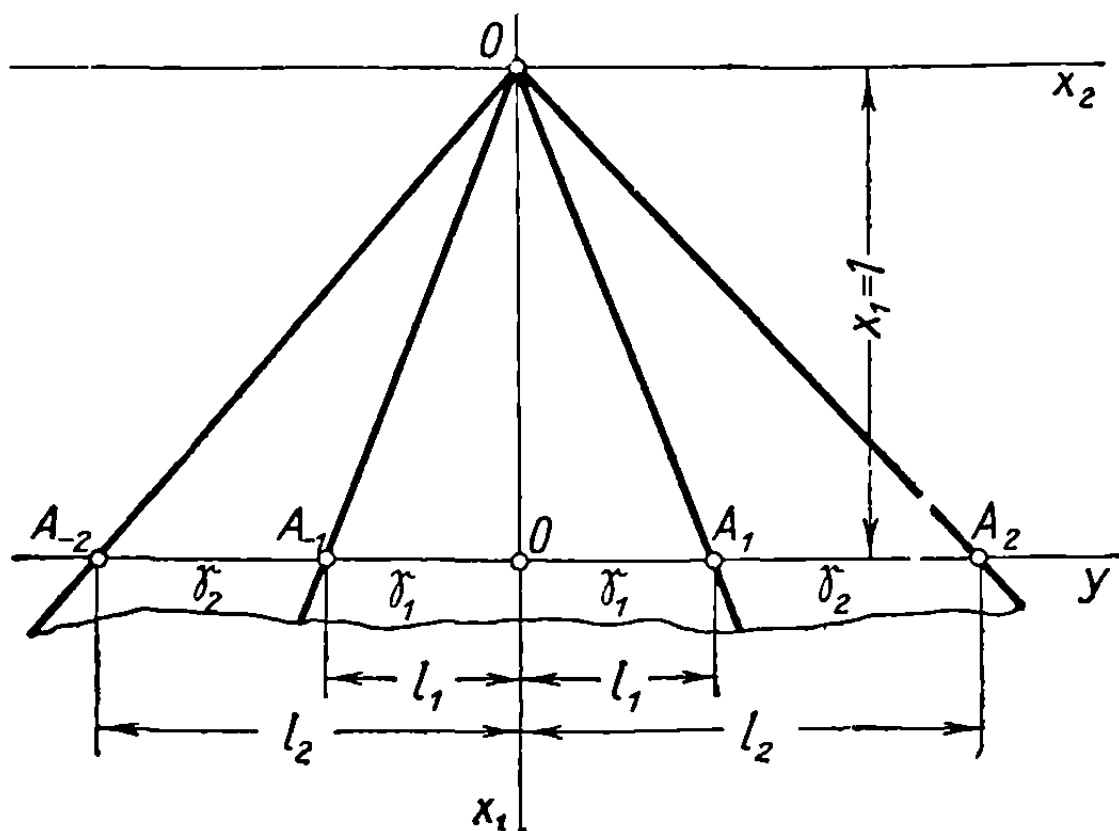
$$H_i = \sqrt{\frac{B l_i + 1}{B l_i - 1}}, \quad H_{-s} = \sqrt{\frac{B l_{-s} - 1}{B l_{-s} + 1}}. \quad (25.26)$$

Заметим, что постоянная  $i\pi$  в скобках выражений (25.24) и (25.21) введена для того, чтобы удовлетворить граничным условиям в случае сверхзвуковых линий пересечения.

При вычислении скоростей вдоль крыла использовано соотношение

$$\frac{B l_i}{\sqrt{1-B^2 l_i^2}} \text{Arch} \frac{1 \mp B^2 l_i y}{B(l_i \mp y)} = \frac{B l_i}{\sqrt{B^2 l_i^2 - 1}} \arccos \frac{1 \mp B^2 l_i y}{B(l_i \mp y)}. \quad (25.27)$$

25.2.1. Приложение к симметричному крылу с двойным наклоном. Имея в виду практические цели, применим приведенные результаты к симметричному крылу с двойным наклоном. Для этого рассмотрим крыло с линиями пересечения  $OA_1$ ,  $OA_{-1}$  и ведущими кромками  $OA_2$  и  $OA_{-2}$



Фиг. 25.4

(фиг. 25.4). Пусть  $\gamma_1$  — наклон на интервале  $OA_1$  и  $\gamma_2$  — наклон на интервале  $A_1A_2$ . Так как крыло симметрично, то

$$\Delta\gamma_{-2} = \gamma_2, \quad \Delta\gamma_{-1} = \gamma_1 - \gamma_2, \quad \Delta\gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \Delta\gamma_2 = -\gamma_2;$$

следовательно, применяя уравнение (25.21), получим

$$u + iu' = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \left[ \left( \ln \frac{X - L_1}{X + L_1} - i\pi \right) + \ln \frac{X - L_{-1}}{X + L_{-1}} \right] + \frac{\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \left[ \left( \ln \frac{X - L_2}{X + L_2} - i\pi \right) + \ln \frac{X - L_{-2}}{X + L_{-2}} \right], \quad (25.28)$$

где введены обозначения

$$L_i = \sqrt{\frac{1 + Bl_i}{1 - Bl_i}}, \quad L_{-s} = \sqrt{\frac{1 - Bl_{-s}}{1 + Bl_{-s}}} \quad (i = 1, 2; \quad s = 1, 2). \quad (25.29)$$

Аналогично соотношению (25.10) и применяя выражение (25.23), получим для скоростей

$$u = -\frac{2(\gamma_1 - \gamma_2) U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l_1^2 - y^2)}} - \frac{2\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l_2^2 - y^2)}}. \quad (25.30)$$

Если ведущие кромки  $OA_2$  и  $OA_{-2}$  сверхзвуковые, то последний член второй части равенства должен быть преобразован, в результате чего

получим

$$u = -\frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2(l_1^2 - y^2)}} - \frac{2\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2(l_2^2 - y^2)}}; \quad (25.31)$$

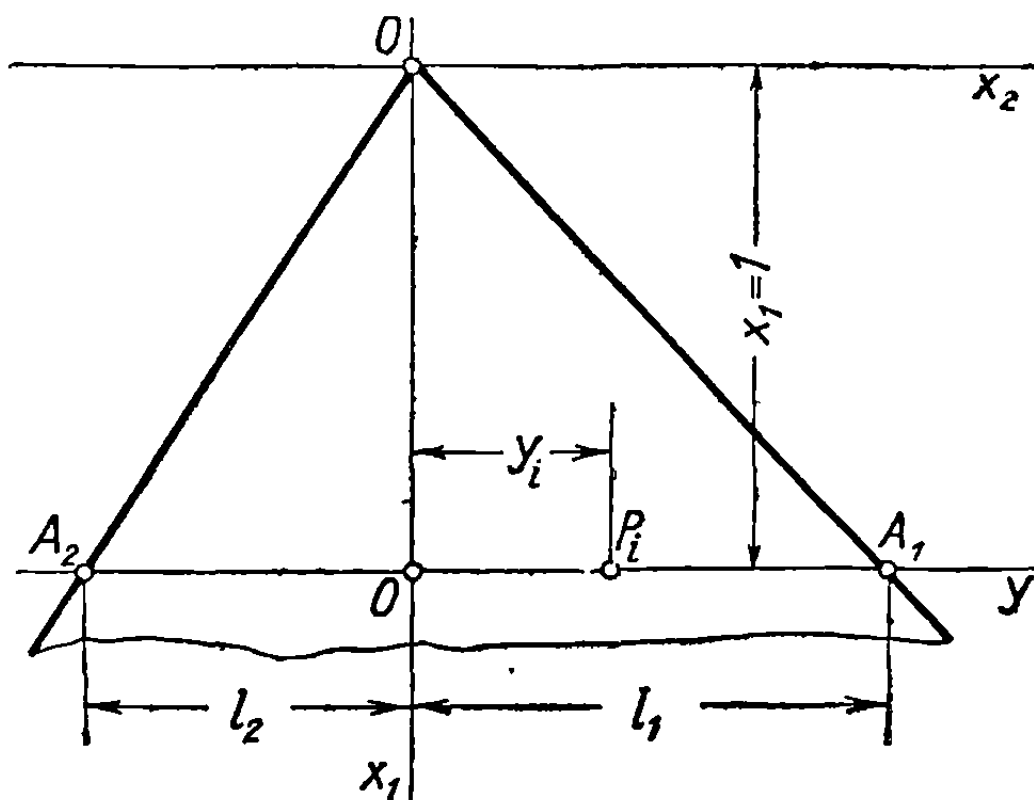
если другие особые линии  $OA_1$  и  $OA_{-1}$  также сверхзвуковые, то скорости даются формулой

$$u = -\frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2(l_1^2 - y^2)}} - \frac{2\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{(B^2 l_2^2 - 1)}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2(l_2^2 - y^2)}}. \quad (25.32)$$

Приведенная формула использована в следующей главе.

### 25.3. Угловидное крыло с непрерывно изменяющимся наклоном

Если направляющая крыла кривая, то результирующий наклон изменяется вдоль оси абсцисс плоскости  $Oyz$ . В некоторой точке  $y$  величина  $\gamma$



Фиг. 25.5

представляет наклон, который будет рассматриваться как непрерывный вдоль заданного интервала. Величину наклона в точках  $A_1$  и  $A_2$  обозначим через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (фиг.25.5). Фиктивный потенциал, обусловленный этими двумя особыми точками, легко выводится из предшествующих результатов; таким образом,

$$f'(X) = \frac{\gamma_1 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \left( \ln \frac{X - L_1}{X + L_1} - i\pi \right) + \frac{\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \ln \frac{X - L_2}{X + L_2}, \quad (25.33)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  определяются соотношениями (25.2). К этому потенциалу должен быть добавлен эффект изменения наклона вдоль следа крыла  $A_2 A_1$ . Если наклон имеет разрывы в некоторых точках, то члены, обусловленные резким изменением наклона в этих точках, должны быть также включены



в приведенное выше выражение. С целью упрощения, без ущерба для общности задачи, будем предполагать непрерывными изменения наклона вдоль всего следа крыла.

В любой точке  $P_i$  с абсциссой  $y_i$ , соответственно  $Y_i$  в плоскости  $X$ , потенциал, обусловленный элементарным источником в этой точке, будет определен, согласно уравнению (24.49), выражениями:  
для положительных абсцисс

$$\delta f_+ = \frac{U_\infty}{\pi B^2} \frac{d\gamma}{dy_i} d \left( \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right) \left( \ln \frac{X - Y_i}{X + Y_i} - i\pi \right), \quad (25.34)$$

для отрицательных абсцисс

$$\delta f_- = \frac{U_\infty}{\pi B^2} \frac{d\gamma}{dy_i} d \left( \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right) \ln \frac{X - Y_i}{X + Y_i}. \quad (25.35)$$

Это различие обеспечивает удовлетворение граничных условий, поэтому величина  $-i\pi$  включена в выражении (25.34) внутрь скобок.

Чтобы выполнить интегрирование вдоль следа  $A_2 A_1$ , произведем подстановку, вытекающую из уравнения (25.43):

$$\sqrt{1 - B^2 y_i^2} = \frac{2 Y_i}{Y_i^2 + 1} \quad (25.36)$$

и соответственно получим:

$$f_+(X) = \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_1^{L_1} \frac{d\gamma}{dy_i} \left( \ln \frac{X - Y_i}{X + Y_i} - i\pi \right) d \left( \frac{2 Y_i}{Y_i^2 + 1} \right), \quad (25.37a)$$

$$f_-(X) = \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_{L_2}^1 \frac{d\gamma}{dy_i} \ln \frac{X - Y_i}{X + Y_i} d \left( \frac{2 Y_i}{Y_i^2 + 1} \right), \quad (25.37b)$$

где пределы 1,  $L_1$  соответствуют пределам 0,  $l_1$  в физической плоскости и  $L_2$ , 1 соответствуют  $-l_2$ , 0 (фиг. 25.5). Полный потенциал будет

$$f(X) = f'(X) + f_+(X) + f_-(X). \quad (25.38)$$

Осевая скорость возмущения на крыле может быть непосредственно вычислена, если положить  $X = Y$ . Используя предшествующие результаты (см. формулу 25.7), получим

$$\begin{aligned} u = & -\frac{\gamma_1 U_\infty}{\pi B} \frac{B l_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{Arch} \frac{1 - B^2 l_1 y}{B(l_1 - y)} - \frac{\gamma_2 U_\infty}{\pi B} \frac{B l_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \operatorname{Arch} \frac{1 + B^2 l_2 y}{B(l_2 + y)} - \\ & - \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_0^{l_1} \frac{d\gamma}{dy_i} \operatorname{Arch} \frac{1 - B^2 y_i y}{B(y_i - y)} d \left( \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right) - \\ & - \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_{-l_2}^0 \frac{d\gamma}{dy_i} \operatorname{Arch} \frac{1 + B^2 y_i y}{B(y_i + y)} d \left( \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right). \end{aligned} \quad (25.39)$$

Для совершенно симметричного крыла ( $l_1 = l_2 = l$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ ), обозначая через  $\gamma_d$ ,  $\gamma_s$  соответственно правый и левый наклоны и через  $y_d$ ,  $y_s$

соответствующие симметричные точки ( $y = -y_d$ ), замечаем, что изменения наклона равны по величине и противоположны по знаку ( $d\gamma_s = -d\gamma_d$ ); поэтому

$$y_d d\gamma_d = y_s d\gamma_s, \quad (25.40)$$

т. е. два интеграла предшествующего выражения сводятся к одному.

Таким образом, имея в виду предшествующие результаты (см. формулу 25.10), находим

$$u = -\frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2 l^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2(l^2-y^2)}} - \\ - 2 \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_0^l \frac{d\gamma}{dy_i} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2(y_i^2-y^2)}} d(\sqrt{1-B^2 y_i^2}); \quad (25.41)$$

интеграл можно рассчитать, если представить величину  $d\gamma dy_i$  как функцию от  $\sqrt{1-B^2 y_i^2}$ . Но это приводит к очень трудным вычислениям. Так как практические указания, касающиеся волнового сопротивления толстых симметричных крыльев, могут быть получены при исследовании наиболее простых случаев, изучим конкретный пример, в предположении, что изменение наклона будет линейным:

$$\frac{d\gamma_d}{dy_i} = -\frac{d\gamma_s}{dy_i} = g. \quad (25.42)$$

В этом случае интеграл во второй части равенства (25.41) легко рассчитать; после элементарных вычислений получим следующее выражение

$$\int_0^l \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2(y_i^2-y^2)}} d(\sqrt{1-B^2 y_i^2}) = \sqrt{1-B^2 l^2} \times \\ \times \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2(l^2-y^2)}} - \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{-B^2 y^2}} + \sqrt{1-B^2 y^2} \times \\ \times \ln \sqrt{\frac{l^2-y^2}{-y^2}} = \sqrt{1-B^2 l^2} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2 y^2}{B^2(l^2-y^2)}} + \\ + \sqrt{1-B^2 y^2} \ln \sqrt{\frac{l^2-y^2}{y^2}} - \operatorname{Arch} \frac{1}{By} - i \frac{\pi}{2} \sqrt{1-B^2 y^2}, \quad (25.43)$$

где содержится мнимый член, который становится действительным для  $y > 1/B$ ; при этом условии он также должен приниматься во внимание.

Вводя обычные обозначения  $n = \frac{1}{Bl}$ ,  $k = \frac{y}{l}$ , определим скорость на крыле с помощью формулы

$$u = -\frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} - Re \frac{2glU_\infty}{\pi B} \left[ \sqrt{n^2-1} \times \right. \\ \times \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} + \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} - n \operatorname{Arch} \frac{n}{k} - \\ \left. - i \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2-k^2} \right]. \quad (25.44)$$

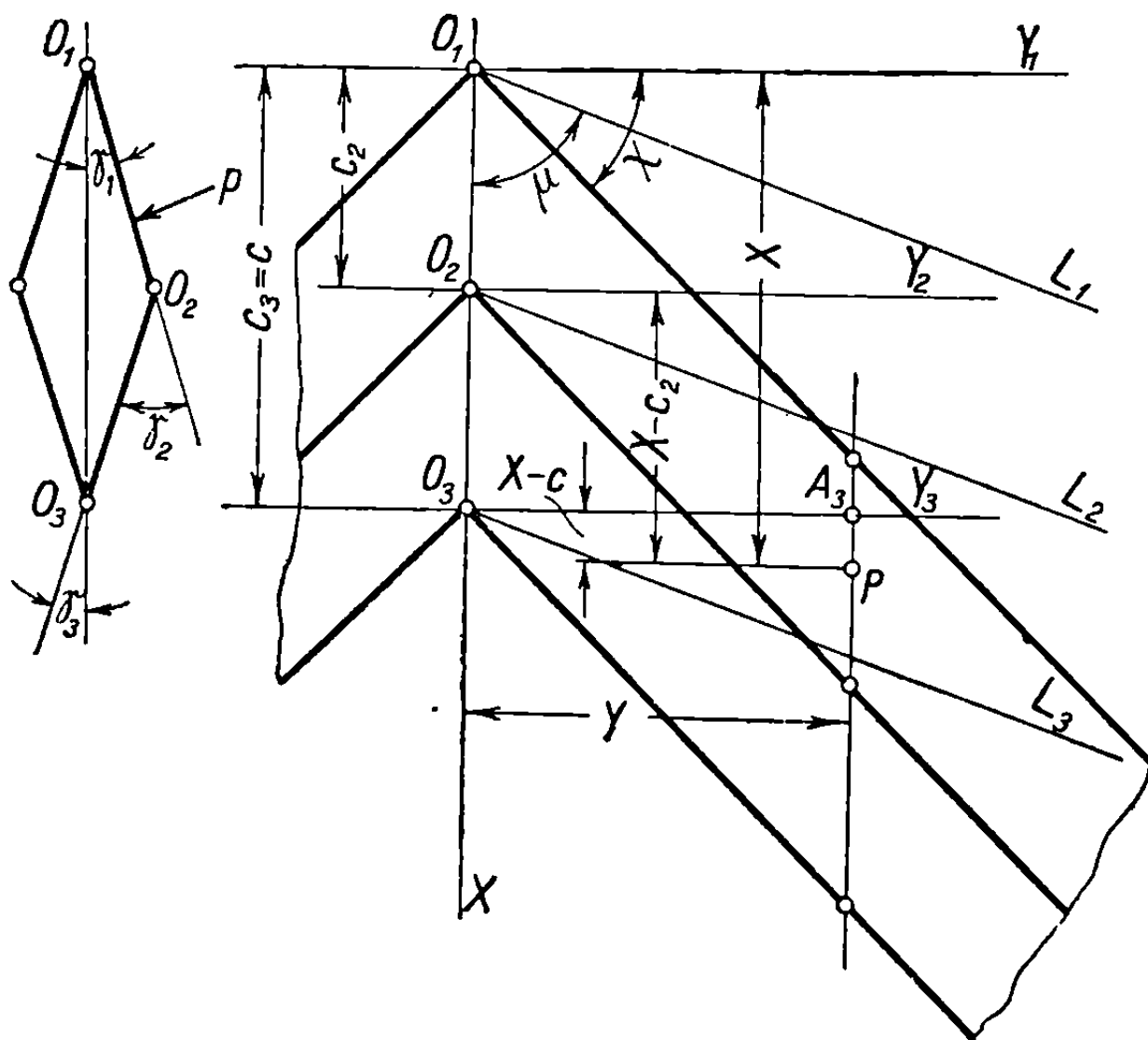
Это уравнение будет применено для вычисления сопротивления толстых симметричных стреловидных крыльев или крыльев дельтообразной формы. Оно справедливо для любого положения конуса Маха. Таким образом, если ведущие кромки сверхзвуковые, то очевидно, что приведенная формула будет иметь вид:

$$u = -\frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \arccos \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} - Re \frac{2glU_\infty}{\pi B} \left[ -\sqrt{1-n^2} \times \right. \\ \times \arccos \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} + \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} - n \operatorname{Arch} \frac{n}{k} - \\ \left. -i\frac{\pi}{2} \sqrt{n^2-k^2} \right]. \quad (25.45)$$

Формула (25.44) имеет, следовательно, общее применение при условии, что принимаются необходимые меры предосторожности для обеспечения того, чтобы все члены были действительными.

#### 25.4. Вычисление давлений для стреловидных крыльев бесконечного размаха с симметричным профилем

Результаты, полученные для конических угловидных крыльев, можно легко применить к бесконечным стреловидным крыльям с симметричным профилем. Чтобы показать метод применения, приведем два простых примера,



Фиг. 25.6

один из которых относится к ромбовидному профилю, а другой к профилю с параболическим контуром.

**25.4.1. Крыло с ромбовидным профилем.** Пусть  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  представляют углы, образованные сторонами ромбообразной фигуры друг с другом или с осью фигуры (фиг. 25.6). Предположим, что кромки стреловидного крыла будут первоначально дозвуковыми  $\left[ \operatorname{tg} \chi > \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \mu \right) = \operatorname{ctg} \mu = B \right]$ .

Общее течение около этого крыла составляется из трех взаимно налагающихся конических течений: первое образуется коническим крылом с вершиной в точке  $O_1$  и наклоном  $\gamma_1$ ; второе — коническим крылом с вершиной в  $O_2$  и наклоном —  $\gamma_2$ , третье — коническим крылом с вершиной в  $O_3$  и наклоном  $\gamma_3$ .

Рассмотрим сечение крыла на расстоянии  $Y$  от плоскости симметрии  $OXZ$  и вычислим осевую скорость возмущения в точке  $P$  этого сечения. Эта точка имеет различное расположение относительно каждого крыла в отдельности, будучи отнесена к соответствующим координатным системам  $O_1XY_1Z_1$ ,  $O_2XY_2Z_2$ ,  $O_3XY_3Z_3$ .

Значение  $l$  и  $n$  одинаковы для каждого крыла:

$$l = \text{ctg } \chi, \quad n = \frac{1}{Bl} = \text{tg } \mu \text{ tg } \chi. \quad (25.46)$$

Чтобы найти отношение  $k = \frac{y}{l}$ , соответствующее трем коническим крыльям, причем обозначения  $y$  и  $k$  имеют тот же смысл, что и в предшествующих случаях, можно записать соответственно уравнения:

для крыла с вершиной в точке  $O_1$

$$k_1 = \frac{y_1}{l} = \frac{Y}{Xl} = \frac{K}{X}, \quad K = \frac{Y}{l}; \quad (25.47)$$

для крыла с вершиной в точке  $O_2$

$$k_2 = \frac{y_2}{l} = \frac{Y}{(X - c_2)l} = \frac{K}{X - c_2} \quad (c_2 = \overline{O_1O_2}); \quad (25.48)$$

для крыла с вершиной в точке  $O_3$

$$k_3 = \frac{y_3}{l} = \frac{Y}{(X - c_3)l} = \frac{K}{X - c} \quad (c_3 = c = \overline{O_1O_3}), \quad (25.49)$$

где  $c_3 = c$  — хорда ромбовидного профиля.

Чтобы вычислить скорость возмущения в точке  $P$ , применим предшествующую формулу, относящуюся к совершенно симметричному крылу с постоянным наклоном (см. формулу 25.10) к каждому крылу в отдельности. Имея в виду приведенные в разделах 25.1.1 и 25.1.3 рассуждения, разделим возмущенную область на три: первая ограничена осями  $O_1Y_1$  и  $O_2Y_2$ , вторая — осями  $O_2Y_2$  и  $O_3Y_3$  и третья простирается за ось  $O_3Y_3$  до бесконечности<sup>1</sup>.

В первой области сказывается только влияние крыла с вершиной в точке  $O_1$ , и осевая скорость возмущения, обозначаемая через  $u_1$ , определяется формулой

$$\begin{aligned} u_1 &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} = \\ &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 X^2 - K^2}{X^2 - K^2}}, \end{aligned} \quad (25.50)$$

где величина  $k_1$  должна быть заменена ее значением из уравнения (25.47).

<sup>1</sup> Фактически области ограничены линиями Маха  $O_1L_1$ ,  $O_2L_2$ ,  $O_3L_3$  (см. фиг. 25.6).

Вторая область подвергается влиянию крыльев с вершинами в  $O_1$  и  $O_2$ ; соответствующая скорость  $u_2$  легко выводится:

$$\begin{aligned} u_2 &= -Re \frac{2U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left[ \gamma_1 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} - \gamma_2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_2^2}{1 - k_2^2}} \right] = \\ &= -Re \frac{2U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left[ \gamma_1 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 X^2 - K^2}{X^2 - K^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 (X - c_2)^2 - K^2}{(X - c_2)^2 - K^2}} \right], \end{aligned} \quad (25.51)$$

причем величина  $k_2$  должна быть заменена ее значением из уравнения (25.48).

В третьей области должны приниматься во внимание все три крыла; здесь скорость возмущения, обозначаемая через  $u_3$ , дается полной формулой

$$\begin{aligned} u_3 &= -Re \frac{2U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left[ \gamma_1 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} - \gamma_2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_2^2}{1 - k_2^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_3^2}{1 - k_3^2}} \right] = -Re \frac{2U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left[ \gamma_1 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 X^2 - K^2}{X^2 - K^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 (X - c_2)^2 - K^2}{(X - c_2)^2 - K^2}} + \gamma_3 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 (X - c)^2 - K^2}{(X - c)^2 - K^2}} \right], \end{aligned} \quad (25.52)$$

где величина  $k_3$  должна быть заменена ее выражением (25.49). Следует напомнить, что должна быть взята только действительная часть ст правой части этой формулы; поэтому здесь введен символ  $Re$ .

Из приведенных формул можно видеть, что скорость возмущения является функцией [от  $X$  и  $Y$  и что для одинаковых значений  $Y$  (т. е. для одного и того же сечения) она будет функцией только от  $X$ .

Коэффициент давления в точке  $P$  сечения  $Y = \text{const}$  может быть выражен как функция от  $X$

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = P(X). \quad (25.53)$$

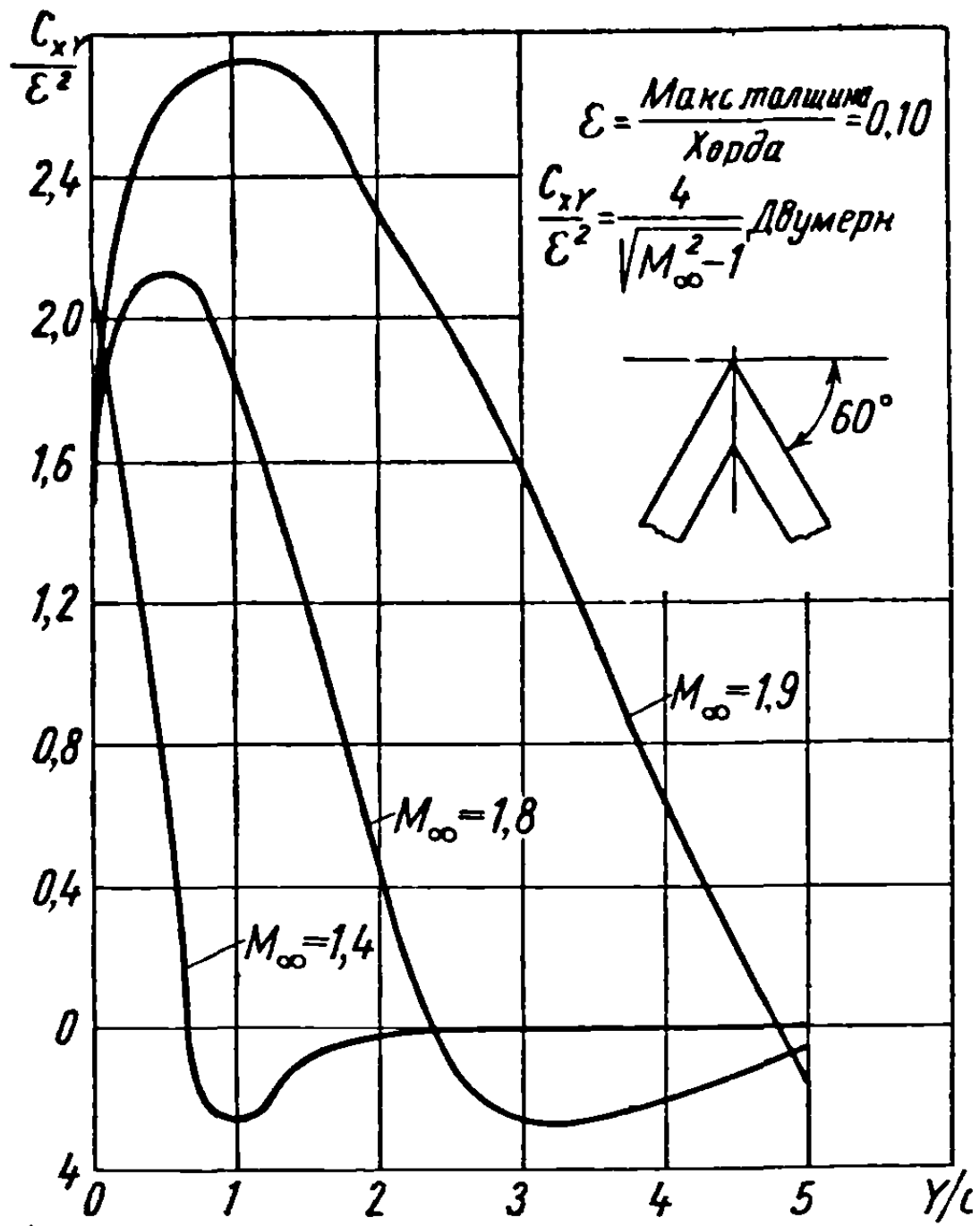
Коэффициент лобового сопротивления профиля в том же сечении определяется формулой

$$C_{xy} = -\frac{4}{U_\infty} \left( \int_0^{c_2} \gamma_1 u dX - \int_{c_2}^c \gamma_2 u dX \right), \quad (25.54)$$

где для случая, приведенного на фиг. 25.6, нужно заменить  $u$  в первом интеграле через  $u_2$  вплоть до точки  $A_3$  и через  $u_3$  за этой точкой; во втором интеграле величина  $u$  должна быть заменена через  $u_3$ .

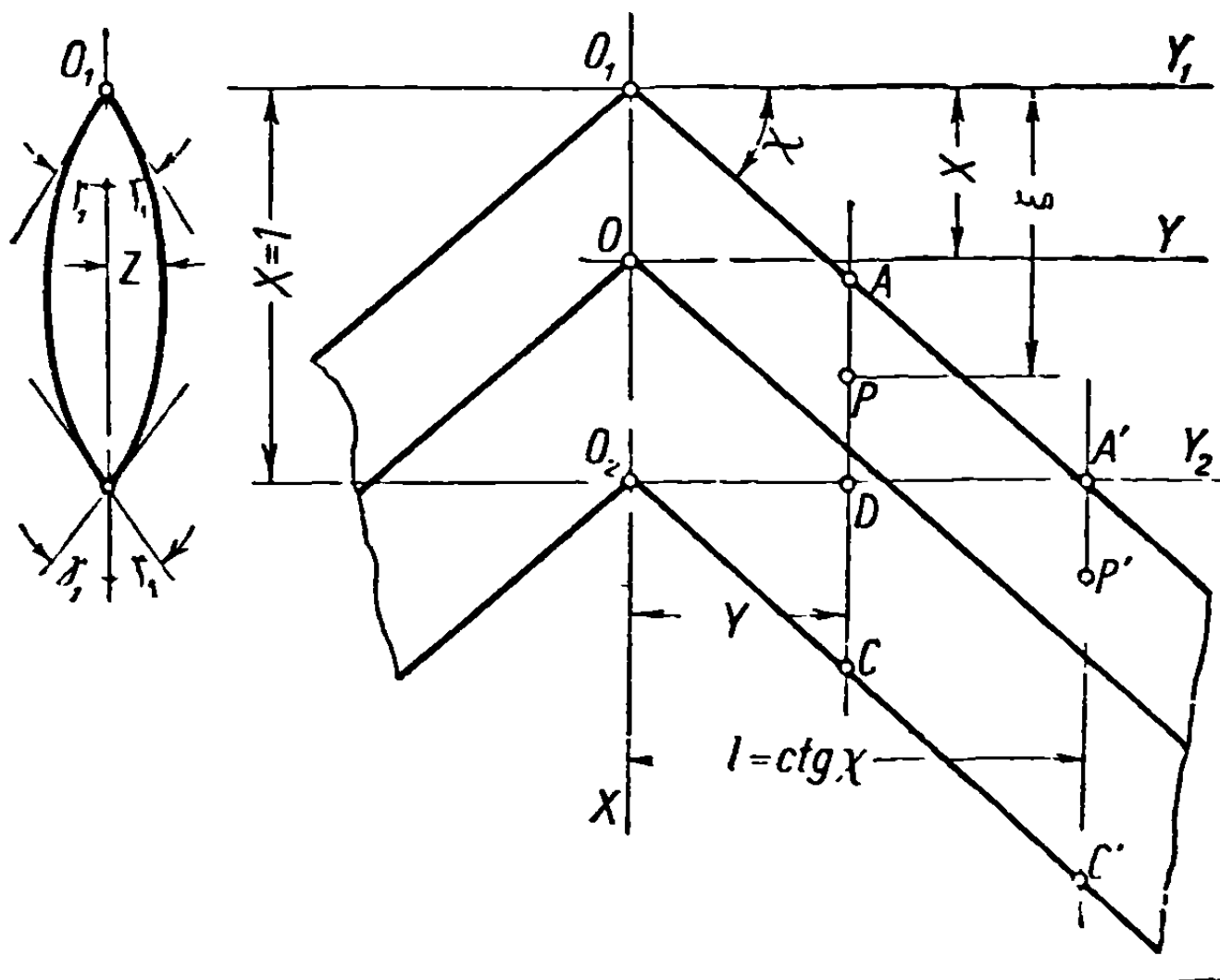
Нет необходимости рассматривать эти интегралы. Однако нужно упомянуть об интересной особенности, касающейся изменения лобового сопротивления вдоль размаха. Вычисления, выполненные для стреловидного крыла с точным ромбовидным профилем при  $\chi = 60^\circ$ , дают изменение лобового сопротивления такого рода, что в некотором сечении появляется эффект тяги, исчезающий на определенном расстоянии  $Y/c$  (фиг. 25.7).

сопротивления зависит от числа  $M$  и показывает, что полное волновое сопротивление будет конечным.



Фиг. 25.7

25.4.2. Крыло с параболическим профилем. Рассмотрим то же стреловидное крыло, параболический, двояковыпуклый, симметричный профиль которого



Фиг. 25.8

определяется выражением

$$Z = -\gamma_1 X(X-1), \quad (25.55)$$

где  $\gamma_1$  представляет наклон двух концов профиля, причем предполагается, что хорда равна единице (фиг. 25.8). Наклон изменяется от точки к точке,

согласно выражению

$$\gamma = \frac{dZ}{dX} = \gamma_1(1 - 2X). \quad (25.56)$$

Течение вокруг крыла может быть образовано двумя коническими крыльями с вершинами в  $O_1$  и  $O_2$  и наклоном  $\gamma_1$ , а также бесконечным числом крыльев с элементарным наклоном

$$d\gamma = -2\gamma_1 dX, \quad (25.57)$$

имеющих вершины в точках  $O$  на расстоянии  $X$  от точки  $O_1$ . Для всех этих крыльев значения  $n$  и  $l$  будут те же, что и в предыдущем случае (см. формулу 25.46):

$$l = \operatorname{ctg} \chi, \quad n = \frac{1}{Bl} = \operatorname{tg} \mu \operatorname{ctg} \chi.$$

Рассмотрим профиль в сечении, проведенном на расстоянии  $Y$  от оси крыла; в любой точке  $P$  этого профиля, имеющей абсциссу  $\xi$ , используя принятые выше обозначения, получим:

для крыла с вершиной в  $O_1$

$$k_1 = \frac{y_1}{l} = \frac{Y}{\xi l} = \frac{K}{\xi}, \quad K = \frac{Y}{l}; \quad (25.58)$$

для элементарного крыла с вершиной в  $O$

$$k = \frac{y}{l} = \frac{Y}{(\xi - X)l} = \frac{K}{(\xi - X)}; \quad (25.59)$$

для крыла с вершиной в  $O_2$

$$k_2 = \frac{y_2}{l} = \frac{Y}{(\xi - 1)l} = \frac{K}{(\xi - 1)}. \quad (25.60)$$

Если точка  $P$  расположена в поле возмущения крыла, имеющего вершину в  $O_1$ , соответственно в  $O_2$ , то соответствующие скорости будут:

$$\begin{aligned} u'_1 &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} = \\ &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 X_p^2 - K^2}{X_p^2 - K^2}}; \end{aligned} \quad (25.61a)$$

$$\begin{aligned} u'_2 &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_2^2}{1 - k_2^2}} = \\ &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 (X_p - 1)^2 - K^2}{(X_p - 1)^2 - K^2}}. \end{aligned} \quad (25.61b)$$

Скорость  $u'$ , обусловленная элементарными крыльями, лежащими между  $O_1$  и  $O$ , согласно уравнениям (25.10) и (25.57), выразится в виде

$$u' = Re \frac{4\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \int_0^X \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} dX. \quad (25.62)$$

Из уравнения (25.59), однако, следует

$$dX = \frac{(\xi - X)^2}{K} dk = K \frac{dk}{k^2}; \quad (25.63)$$

вводя это значение  $dX$  в вышеприведенный интеграл, получим

$$\int_0^X \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} dX = K \int_{k_1}^k \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} \frac{dk}{k^2}. \quad (25.64)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} I(k) &= \int \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} \frac{dk}{k^2} = -\frac{1}{k} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} + \\ &+ \sqrt{n^2 - 1} \int \frac{dk}{(1 - k^2) \sqrt{n^2 - k^2}} = -\frac{1}{k} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} + \\ &+ \text{Arch} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}}; \end{aligned} \quad (25.65)$$

отсюда вытекает соотношение

$$H = \int_0^X \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} dX = K [I(k) - I(k_1)]. \quad (25.66)$$

Заметим, что предел  $X$  соответствует точно  $\xi$ , так как для определенных крайних положений конуса Маха или угла  $\chi$  элементарные крылья с вершинами, лежащими на всем интервале от  $X=0$  до  $X=\xi$ , могут также влиять на точку  $P$ , тогда как крылья с вершинами, лежащими в точках  $X \geq \xi$ , никак не могут на нее воздействовать. Если  $X=\xi$ , то из уравнения (25.59) следует, что  $k = \infty$ , а поэтому уравнение (25.65) приобретает вид

$$I(k)_{X=\xi} = I(\infty) = \text{Arch} \frac{1}{n}. \quad (25.67)$$

Поэтому, если абсцисса точки  $P$  меньше единицы ( $\xi \leq 1$ ), то величина  $H$  (см. формулу 25.66) будет

$$H = K \left[ \text{Arch} \frac{1}{n} - I(k_1) \right]. \quad (25.68)$$

Если абсцисса точки  $P$  больше единицы ( $\xi \geq 1$ ), то  $X=1$ ,  $k=k_2$  и  $H$  запишется в виде

$$H_2 = K [I(k_2) - I(k_1)]. \quad (25.69)$$

При этих условиях для точек, лежащих на участке, ограниченном прямыми  $O_1Y_1$  и  $O_2Y_2$ , осевая скорость возмущения выразится соотношением

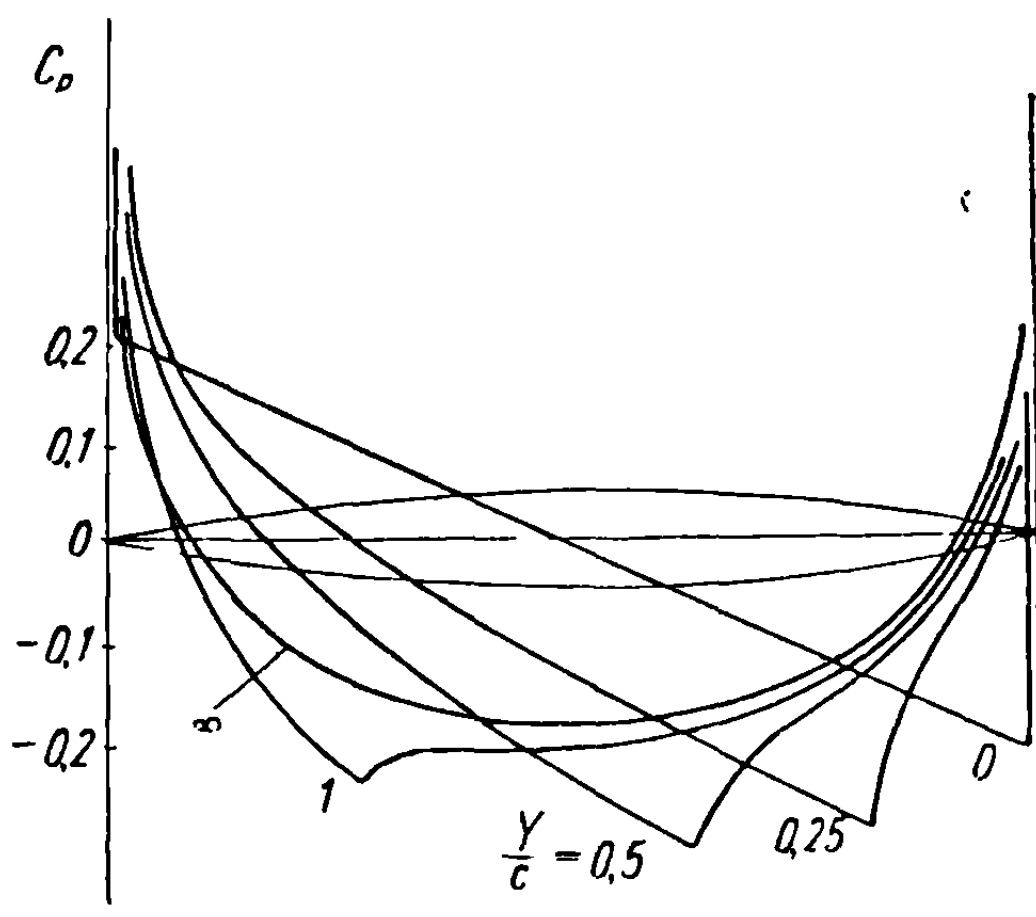
$$u_1 = u'_1 + u' = -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left( \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} - 2H \right) \quad (25.70)$$

и, аналогично, для точек, расположенных за осью  $O_2Y_2$ , получим

$$\begin{aligned} u_2 = u'_1 + u'_2 + u' &= -Re \frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left( \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} - \right. \\ &\left. - 2H_2 + \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_2^2}{1 - k_2^2}} \right). \end{aligned} \quad (25.71)$$



Коэффициент давления  $C_p$  может быть вычислен путем применения формулы (25.53). Интегрируя [вдоль профиля, по обеим [поверхностям, получим лобовое сопротивление в сечении  $Y$ , рассмотренном выше. Второе интегрирование [вдоль размаха дает лобовое сопротивление, соответствующее некоторому



Фиг. 25.9

размаху на бесконечном крыле. Вычисление давлений приводит к диаграмме, изображенной на фиг. 25.9, где представлено распределение давлений по параболическому профилю, максимальная толщина которого равна 10% от хорды, в различных сечениях бесконечного крыла:  $Y/c = 0; 0,25; 0,5; 1; \infty$  при  $M_\infty = 1,40$  [2].

Стоит заметить, что, начиная с некоторого сечения, расположенного на определенном расстоянии от центрального сечения, давление распределяется симметрично относительно середины профиля, и лобовое сопротивление равняется нулю.

Чтобы изучить изменение лобового сопротивления вдоль размаха, рассмотрим вычисление коэффициента лобового сопротивления в сечении  $Y$ . Обозначая этот коэффициент через  $C_{xy}$  и через  $\xi$  текущую абсциссу точки  $P$ , получим для обеих поверхностей крыла

$$C_{xy} = 2 \int_{AC} C_p \gamma d\xi = -4 \int_{AC} \frac{u}{U_\infty} \gamma d\xi, \quad (25.72)$$

где  $\gamma$  и  $\xi$  нужно заменить через  $k$ .

Так, в согласии с уравнениями (25.56), (25.58) и (25.60), в точке  $P$

$$\gamma = \gamma_1 [1 - 2(\xi - K)] = \gamma_1 \left( 1 + 2K - \frac{2K}{k_1} \right) = \gamma_1 \left( -1 + 2K - \frac{2K}{k_2} \right), \quad (25.73a)$$

$$d\xi = -K \frac{dk_1}{k_2^2} = -K \frac{dk_2}{k_2^2}. \quad (25.73b)$$

Следует использовать первое или второе выражение (т. е. функцию от  $k_1$  или от  $k_2$ ) в соответствии с тем, интегрируются ли в формулах (25.70)

и (25.71) для скорости  $u$  члены, зависящие от  $k_1$  или от  $k_2$ . При применении формулы (25.72) надо сделать различие между двумя областями: в первой, для сечений  $Y \geq l = \text{ctg } \chi$ , скорость определится по уравнению (25.71); во второй, для сечений  $Y < l$ , надо применять два уравнения для скорости: уравнение (25.70) на интервале  $AD$  и уравнение (25.71) на интервале  $DC$ .

Выполненные в согласии с этим методом вычисления приводят к результатам<sup>1</sup>, представляемым одной и той же формулой, независимо от положения конуса Маха.

В соответствии с указанными рекомендациями формула (25.72) приводит для сечения  $Y \geq l$  к следующему результату:

$$C_{xY_{Y \geq l}} = -Re \frac{8\gamma_1^2 K}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left\{ \int_1^{\frac{K}{K+1}} \left[ \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} + 2KI(k_1) \right] \times \right. \\ \times \left( 2K + 1 - \frac{2K}{k_1} \right) \frac{dk_1}{k_1^2} + \int_{\frac{K}{K-1}}^1 \left[ \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_2^2}{1 - k_2^2}} + 2KI(k_2) \right] \times \\ \left. \times \left( 2K - 1 - \frac{2K}{k_2} \right) \frac{dk_2}{k_2^2} \right\}. \quad (25.74)$$

Заметим, что в приведенном соотношении два интеграла выводятся один из другого посредством подстановки  $-K$  вместо  $K$  и  $k_2$  вместо  $k_1$ . Чтобы вычислить первый интеграл, нужно заменить  $I(k_1)$  его значением из формулы (25.65); посредством интегрирования получим соотношение

$$\int \left[ \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} + 2KI(k_1) \right] \left( 2K + 1 - \frac{2K}{k_1} \right) \frac{dk_1}{k_1^2} = \\ = \left[ 2K + 1 - 2K(2K + 1) \frac{1}{k_1} + \frac{2K^2}{k_1^2} \right] I(k_1) + 4K^2 I_2(k_1) - 2K^2 I_3(k_1), \quad (25.75)$$

где величина  $I(k)$  определяется из уравнения (25.65), а  $I_2(k)$  и  $I_3(k)$  имеют следующие значения:

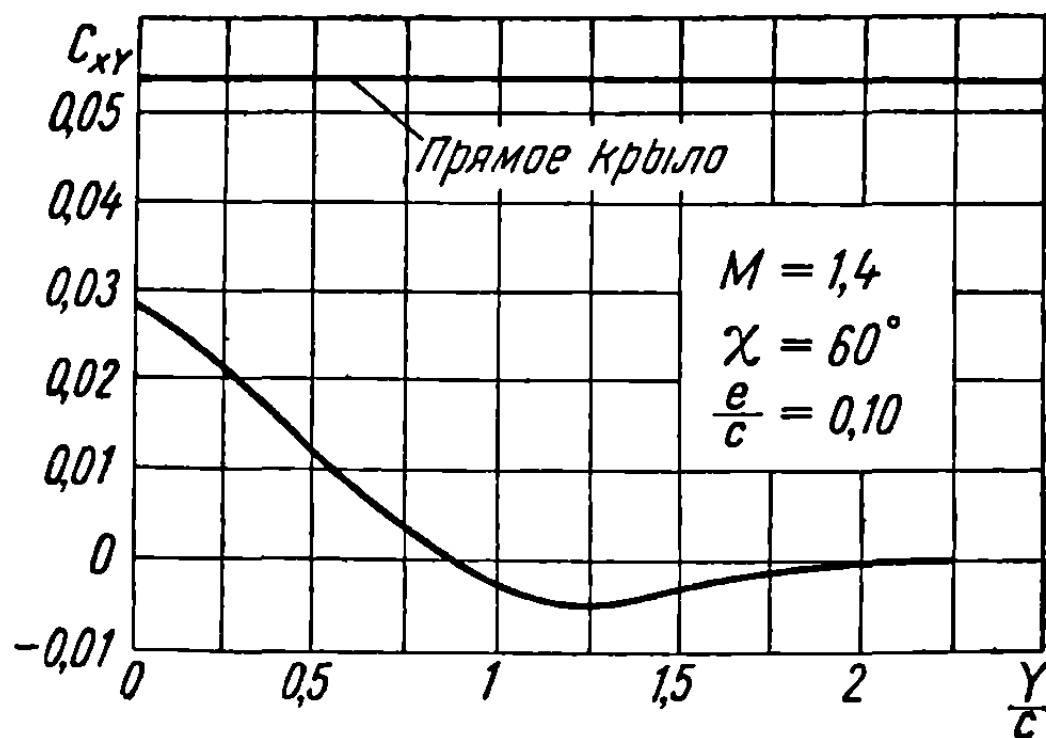
$$I_2(k) = \int \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} \frac{dk}{k^3} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} - \right. \\ \left. - \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} + \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \text{Arch} \frac{n}{k} \right); \quad (25.76a)$$

$$I_3(k) = \int \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} \frac{dk}{k^4} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{k^3} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} - \right. \\ \left. - \text{Arch} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} + \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{k} \right). \quad (25.76b)$$

<sup>1</sup> Уравнения получены М. Ионеску.

Согласно с замечаниями, сделанными о втором интеграле равенства (25.74), и после подстановки пределов интегрирования получим значение для коэффициента лобового сопротивления:

$$C_{xyY \geq l} = -Re \frac{8\gamma_1^2 K}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left\{ (1 - 2K^2) \left[ I\left(\frac{K}{K+1}\right) + I\left(\frac{K}{K-1}\right) \right] + \right. \\ \left. + 4K^2 \left[ I_2\left(\frac{K}{K+1}\right) + I_2\left(\frac{K}{K-1}\right) \right] - 2K^2 \left[ I_3\left(\frac{K}{K+1}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + I_3\left(\frac{K}{K-1}\right) \right] + 2K^2 \left( \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \operatorname{Arch} n - \frac{n^2 - 1}{3n^2} \right) + \left( \frac{8K^2}{3} - 1 \right) \ln \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (25.77)$$



Фиг. 25.10

Аналогично интегрируем выражение (25.72) для сечения  $Y \leq l$  после разделения интеграла на две части:

$$C_{xyY \leq l} = -4 \left( \int_{AD} \frac{u_1}{U_\infty} \gamma d\zeta + \int_{DC} \frac{u_2}{U_\infty} \gamma d\xi \right). \quad (25.78)$$

Элементарные вычисления приводят к выражению, аналогичному (25.74); от последнего оно отличается только нижним пределом второго интеграла, который заменяется через  $\infty$ .

При этих условиях выражение коэффициента лобового сопротивления для  $Y \leq l$  выводится из уравнения (25.77) путем замены интегралов

$I\left(\frac{K}{K-1}\right)$ ,  $I_2\left(\frac{K}{K-1}\right)$ ,  $I_3\left(\frac{K}{K-1}\right)$  через  $I(\infty)$ ,  $I_2(\infty)$ ,  $I_3(\infty)$  соответственно.

После необходимых вычислений получим

$$C_{xyY \leq l} = -Re \frac{8\gamma_1^2 K}{\pi B \sqrt{n^2 - 1}} \left\{ (1 - 2K^2) \left[ I\left(\frac{K}{K+1}\right) + \operatorname{Arch} \frac{1}{n} \right] + \right. \\ \left. + 4K^2 \left[ I_2\left(\frac{K}{K+1}\right) - i \frac{\pi}{4} \right] - 2K^2 \left[ I_3\left(\frac{K}{K+1}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \left( \operatorname{Arch} \frac{1}{n} + i \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2} \right) \right] + 2K^2 \left( \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \operatorname{Arch} n - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2 - 1}{3n^2} \right) + \left( \frac{8K^2}{3} - 1 \right) \ln \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (25.79)$$

На фиг. 25.10 показано изменение лобового сопротивления вдоль размаха для случая дозвуковых вращающихся кромок при  $M_\infty = 1,4$ .

Суммируя, можно утверждать, что волновое сопротивление стреловидного крыла бесконечного размаха имеет конечную величину, как показано Карманом [15], который получил соотношение

$$C_x = 4 \left( \frac{e}{c} \right)^2 \frac{\ln 2}{\pi \lambda} \left[ \frac{(1 + 2 \sin^2 \chi - M_\infty^2 \cos^2 \chi) \cos^2 \chi}{\sin \chi (1 - M_\infty^2 \cos^2 \chi)^{3/2}} \right], \quad (25.80)$$

где  $e$  — максимальная толщина и  $\lambda$  — удлинение рассматриваемого крыла, причем размах  $\lambda$  предполагается более значительным, чем соответствующий сечению, где лобовое сопротивление начинает исчезать.

## 26. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВОЯКОКОНИЧЕСКИХ ДЕЛЬТООБРАЗНЫХ КРЫЛЬЕВ СИММЕТРИЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В предшествующих разделах определена осевая скорость возмущения на бесконечных конических угловидных крыльях, в результате чего выведены соответствующие давления. Реальные крылья, однако, не являются бесконечными и не заканчиваются резким фронтальным сечением. Чтобы избежать увеличения лобового сопротивления, крылья заканчивают соответствующей замыкающей поверхностью, которая может быть или определена произвольно, или получена согласно установленному правилу, или построена на основании конструктивных соображений. Цель состоит всегда в том, чтобы обеспечить минимальное лобовое сопротивление.

Заметим, что передняя часть также может быть произвольной. Так как существует удобный метод расчета, пригодный для конических крыльев, то обычно для передней части применяется коническая поверхность, соединенная сзади с замыкающей поверхностью, образованной с помощью какого-нибудь подходящего метода. Кромки крыла образуют плоский равнобедренный треугольник, и поэтому крыло называется обычно дельтообразным.

Если крыло образуется произвольно, то вычисление лобового сопротивления при существующих математических методах слишком трудоемко для практического применения. Поэтому обсуждение ограничено некоторыми специальными крыльями, для которых вычисления приводят к конкретным результатам.

Крыло, которое мы собираемся исследовать, имеет дельтообразную форму, с конической поверхностью впереди, замыкаемой сзади другой конической поверхностью, соответствующим образом сопрягаемой с передней. Такие крылья мы будем называть двоякокониическими дельтообразными крыльями.

### 26.1. Определение двоякокониического дельтообразного крыла

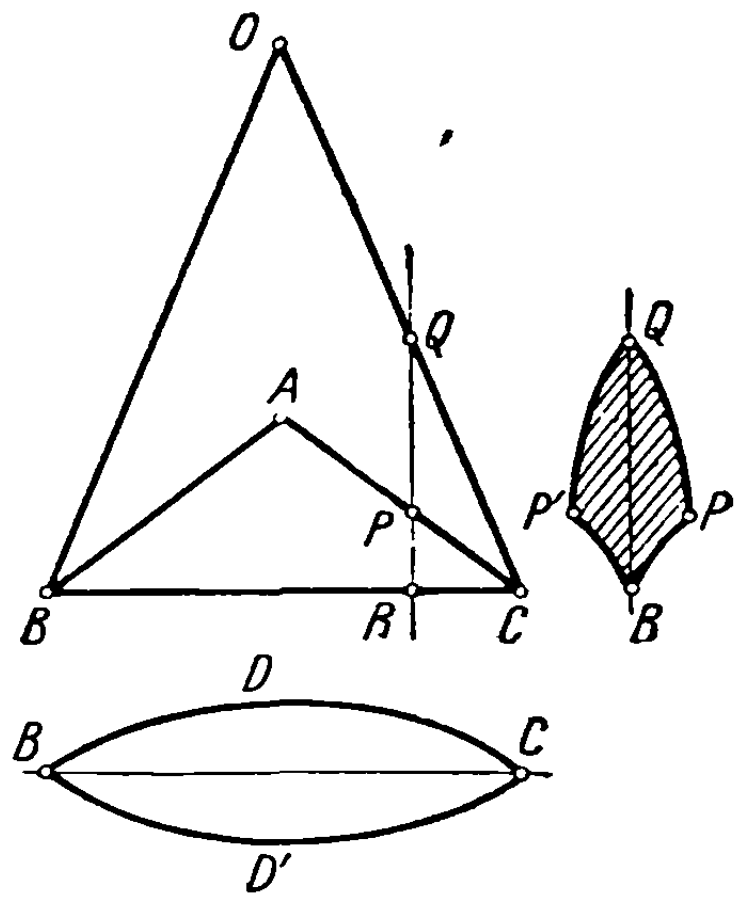
Рассмотрим треугольное крыло, образованное в передней части конусом с вершиной в точке  $O$ , направляющая которого  $BDCD'$  симметрична относительно  $BC$ , а с задней стороны — замыкающей поверхностью  $BAC$ , опирающейся на острую кромку  $BC$  (фиг. 26.1). Эта замыкающая поверхность строится согласно правилу, которое дано ниже. При пересечении замыкающей поверхности и переднего конуса образуются две криволинейные кромки на

конической поверхности крыла. Проекции этих кромок на плоскость крыла будут прямыми линиями  $AB$  и  $AC$ .

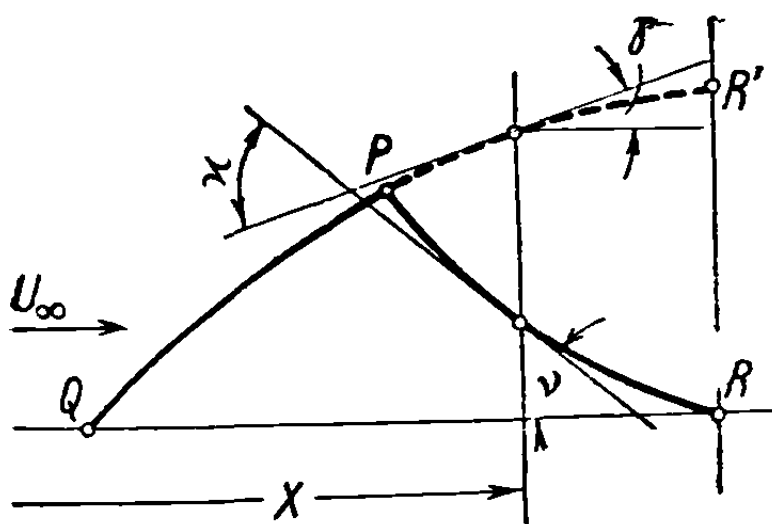
Рассмотрим сечение  $QPR$  (фиг. 26.1 и 26.2), в котором плоскость сечения пересекает передний конус вдоль кривой  $QP$ , и замыкающую поверхность вдоль кривой  $PR$ . При отсутствии последней линия пересечения продолжается за точку  $P$  в виде кривой  $PR'$ . Наклоны профиля в рассматриваемом сечении относительно общего направления потока определяются касательными к этим кривым, и разность наклона между возможной кривой  $PR'$  и замыкающей кривой  $PR$ , показывающая относительный наклон двух кривых в точке с абсциссой  $X$ , будет

$$\alpha = \gamma + \nu. \quad (26.1)$$

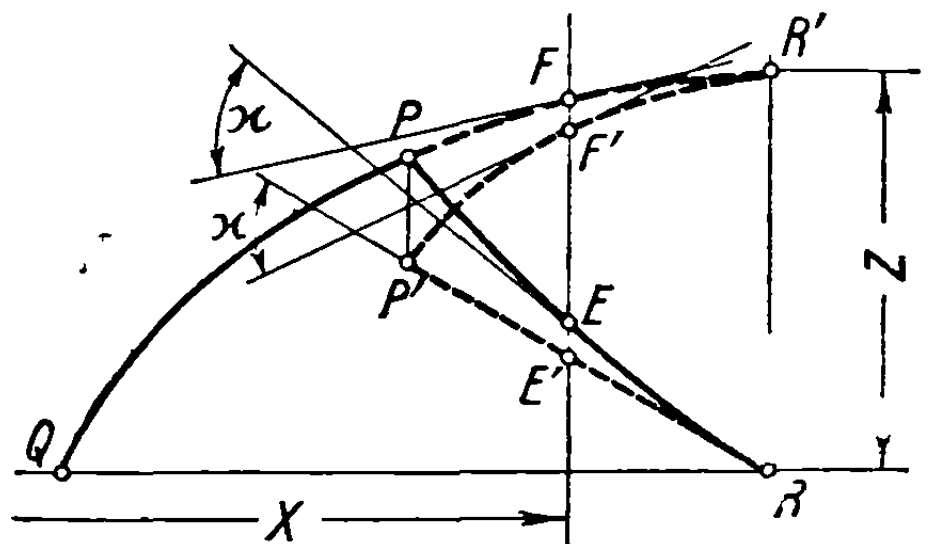
Предполагая, что толщина крыла мала по сравнению с хордой и углы  $\gamma$  и  $\nu$  также малы, можно провести следующее построение замыкающей кривой  $PR$ , поскольку кривые  $PR'$  и  $PR$  очень незначительно отклоняются от прямой линии. Пусть точка  $A$  принята за вершину при той же направляющей  $BDC$ , что и для переднего конуса. Новый



Фиг. 26.1



Фиг. 26.2



Фиг. 26.3

конус, который можно таким образом построить, пересекает плоскость сечения  $QPR$  вдоль кривой  $P'R'$  и вдоль прямой  $P'R$  (фиг. 26,3).

Если отрезок  $E'F'$  заставить скользить вдоль своей собственной опорной прямой до тех пор, пока  $F'$  не совпадет с  $F$  и  $E'$  с  $E$ , то геометрическое место точек типа  $E$  точно определит замыкающую кривую  $PER$ , когда  $F'$  будет описывать кривую  $P'F'R'$ . При этих условиях вследствие малости углов можно легко видеть, что наклон  $\alpha$  заднего конуса равен углу  $\alpha$ , определенному выше. Чтобы получить этот угол, который определяет замыкающую поверхность и представляет отклонение возможного потока на переднем конусе, получающегося в случае, если бы конус был продолжен, уменьшим размеры крыла так, чтобы его полная хорда стала равна единице (фиг. 26.4). Если  $e$  представляет толщину направляющей уменьшенного таким

образом конуса, то соответствующий наклон  $\gamma$  определяется по формуле (24.7)

$$2\gamma = e - y \frac{de}{dy}.$$

Для конуса с вершиной в точке  $A$  наклон в тех же точках возрастает в отношении  $\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'A}} = 1/h$ , так как если размеры этого крыла преобразуются в соответствии с масштабом, по которому высота крыла равняется единице,

то толщина  $e_1$  преобразованной направляющей и абсцисса  $y_1$  увеличиваются в той же пропорции; поэтому

$$2\kappa = e_1 - y_1 \frac{de_1}{dy_1} = \frac{1}{h} \left( e - y \frac{de}{dy} \right) = \frac{2\gamma}{h}. \quad (26.2)$$

Таким образом, значение  $\kappa$  определяется по этой формуле, в то время как величина  $\nu$ , которая требуется для последующих вычислений, выводится из уравнения (26.1).

В приведенном построении крыло, передняя поверхность которого образована конусом с вершиной в точке  $O$ , замыкается с задней стороны нижней

поверхностью конуса с вершиной в точке  $A$ ; этот конус имеет ту же направляющую, что и первый, но слегка искаженную, так, чтобы позволить верхней поверхности заднего конуса совпасть с верхней поверхностью переднего конуса. Нижняя поверхность испытывает идентичное искажение, так что при соединении ее с передним конусом образуется полностью замкнутая поверхность, и относительный наклон  $\kappa$  остается постоянным в каждой точке.

Указанный метод построения крыла приводит к некоторым условиям для течения около крыла. Скорость свободного потока  $U_\infty$  возмущается из-за присутствия переднего конуса, что приводит к условиям конического течения, рассмотренным в предшествующих главах.

Предположим, что передний конус продолжается вдоль всего крыла и перекрывает заднюю замыкающую поверхность, тогда последняя будет представлять отклонение относительно поверхности первого конуса и относительно конического течения, которое этот конус порождает.

Помимо влияния этого течения на заднюю, замыкающую поверхность, которое осуществляется вследствие осевой скорости возмущения, отклонение этой поверхности относительно поверхности переднего конуса вводит новую скорость возмущения.

Чтобы определить последнюю, заметим сначала, что поверхность переднего конуса очень плоская и может быть уподоблена в первом приближении двумерной поверхности, лежащей в плоскости  $OXY$ . Скорость на этой поверхности отличается незначительно от скорости свободного потока.

Пусть  $u, v, w$  представляют компоненты скорости возмущения на переднем коническом крыле с вершиной в точке  $O$ , тогда полная скорость будет

$$V = \sqrt{(U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2} \approx U_\infty + u. \quad (26.3)$$

Очевидно, что эта скорость отличается от скорости свободного потока только членом второго порядка относительно  $U_\infty$ .

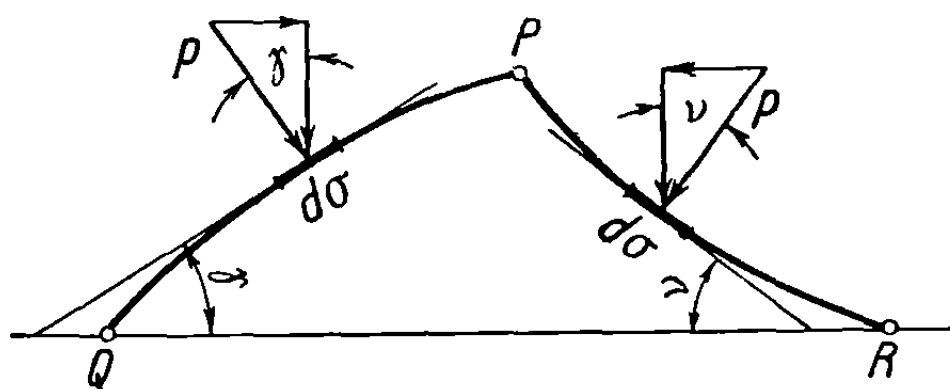
При этих условиях, хотя заднее коническое крыло с вершиной в точке  $A$  располагается в неоднородном течении, новая осевая скорость возмущения  $u'$ , обусловленная отклонением скорости  $V = U_\infty + u$ , включает член первого порядка, связанный с течением вокруг конического крыла с вершиной в точке  $A$ , расположенного в потоке  $U_\infty$ .

Членами второго порядка, возникающими благодаря скорости возмущения, обусловленной передним конусом, можно в первом приближении пренебречь.

Суммируя, устанавливаем, что путем применения упомянутого метода можно построить двоякоконическое крыло; течение вокруг него составляется из двух взаимно налагающихся конических течений, одно из которых обусловлено крылом с вершиной в точке  $O$ , и распространяется по треугольной поверхности  $QBC$ , а другое — крылом с вершиной в точке  $A$ ; последнее распространяется только в пределах соответствующего угла Маха.

## 26. 2. Вычисление волнового сопротивления

Чтобы вычислить волновое сопротивление двоякоконического треугольного крыла, рассмотрим сечение  $QPR$  (фиг. 26.5). В некоторой точке на перед-



Фиг. 26.5

ней части лобовое сопротивление, соответствующее элементу поверхности  $d\sigma$ , будет

$$dR = (p - p_\infty) \sin \gamma d\sigma \approx (p - p_\infty) \gamma d\sigma, \quad (26.4)$$

где  $p_\infty$  — давление на бесконечности.

Лобовое сопротивление для задней части, расположенной за точкой  $P$ , получим аналогично:

$$dR = -(p - p_\infty) \nu d\sigma. \quad (26.5)$$

Разность давлений  $(p - p_\infty)$  пропорциональна в первом приближении осевой скорости возмущения и выражается соотношением

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{2u}{U_\infty}, \quad (26.6)$$

где  $\rho_\infty$  обозначает, как обычно, плотность воздуха на бесконечности.





Первый член во второй части равенства обозначен через  $R_1$ , второй через  $R_2$ . Замечая, что поверхность крыла

$$S = 2l \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = l, \quad (26.11)$$

и вводя обычное обозначение

$$k = \frac{y}{l}, \quad (26.12)$$

получим коэффициент лобового сопротивления, соответствующий силе  $R_1$ :

$$\begin{aligned} C_{x1} &= \frac{R_1}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S} = -\frac{8}{l} \int_{OO'C} \frac{u}{U_{\infty}} \gamma d\sigma = \\ &= -8 \int_0^1 X dX \int_0^1 \frac{u}{U_{\infty}} \gamma dk = -4 \int_0^1 \frac{u}{U_{\infty}} \gamma dk, \end{aligned} \quad (26.13)$$

и коэффициент, соответствующий  $R_2$ :

$$C_{x2} = \frac{R_2}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S} = \frac{8}{l} \int_{AO'C} \frac{u}{U_{\infty}} x d\sigma = 8 \int_0^1 \frac{u}{U_{\infty}} dk \int_{X_0}^1 x X dX, \quad (26.14)$$

где  $X_0$ , в соответствии с уравнением (26.8), определяется выражением

$$X_0 = \overline{OF} = \frac{(1-h)l}{l-h\eta} = \frac{1-h}{1-hk}. \quad (26.15)$$

Обозначая через  $u'$  соответствующую осевую скорость возмущения для задней части, подверженной воздействию второго конического движения, с вершиной в точке  $A$ , находим

$$R' = 4 \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 2 \int_{AO'C} \frac{u'}{U_{\infty}} x d\sigma - 4 \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 2 \int_{AO'C} \frac{u'}{U_{\infty}} \gamma d\sigma = R'_1 + R'_2, \quad (26.16)$$

где  $R'_1$  и  $R'_2$  представляют первый и второй члены во второй части равенства. Поступая, как и выше, получим:

для коэффициента лобового сопротивления, соответствующего силе  $R'_1$ ,

$$C'_{x1} = \frac{R'_1}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S} = \frac{8}{l} \int_{AO'C} \frac{u'}{U_{\infty}} x d\sigma = 4h \int_0^1 \frac{u'}{U_{\infty}} x dk, \quad (26.17)$$

для коэффициента, соответствующего силе  $R'_2$ ,

$$C'_{x2} = \frac{R'_2}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S} = -\frac{8}{h} \int_0^1 \frac{u'}{U_{\infty}} dk \int_{1-h}^1 \gamma (X+h-1) dX. \quad (26.18)$$

Если конус Маха с вершиной в точке  $A$  покрывает часть передней поверхности  $OBAC$ , то интеграл  $R'_2$  должен быть также распространен на область  $AMC$ ; обозначая через  $R'_3$  это дополнительное лобовое сопротивление и замечая, что относительно предшествующего выражения  $R'_2$  изменяются

только пределы интегрирования, получим дополнительный коэффициент сопротивления в виде

$$C'_s = \frac{R'_s}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{8}{h} \int_1^{nh} \frac{u'}{U_\infty} dk \int_{1-h}^{X'} \gamma(X+h-1) dX, \quad (26.19)$$

где  $X'$  представляет выражение, выведенное из уравнения (26.8),

$$X' = \frac{(1-h)y}{y-hl} = \frac{(1-h)k}{k-h}, \quad (26.20)$$

в котором  $k = \frac{y}{l} > 1$ .

Полный коэффициент лобового сопротивления, обозначенный через  $C_x$ , получается суммированием частичных коэффициентов:

$$C_x = C_{x1} + C_{x2} + C'_{x1} + C'_{x2} + C'_s. \quad (26.21)$$

**Замечание.** В приведенных вычислениях мы пренебрегли всеми явлениями отражения между линиями Маха и кромками крыла, так как эффекты, с ними связанные, незначительны и их нелегко вычислить.

### 26.3. Приложение к расчету дельтообразных крыльев с ромбовидным профилем

Рассмотрим треугольное крыло, образованное впереди плоскостями  $OAB$  и  $OAC$ ; плоскость  $ABC$  образует заднюю замыкающую поверхность. Углы  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  постоянны и профиль  $OAO'A'$  будет ромбовидным (см. фиг. 26.7). В согласии с предшествующими рассуждениями, течение около этого крыла определяется двумя взаимно наложенными коническими течениями: одним в передней части, с вершиной в точке  $O$ , имеющим наклон  $\gamma$ , и другим в задней части, с вершиной в  $A$ , наклон которого  $-\alpha = -\frac{\gamma}{h}$ .

Применим общую формулу (25.10) для скорости  $u$  на крыле с вершиной в точке  $O$ ; полагая, как обычно,

$$n = \frac{1}{Bl}, \quad (26.22)$$

получим

$$u = -Re \frac{2\gamma U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}}. \quad (26.23)$$

Для скорости  $u'$  на крыле с вершиной в точке  $A$  можно записать соотношение

$$n' = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{l}{h}} = \frac{h}{Bl} = nh; \quad (26.24)$$

аналогично находим

$$\begin{aligned} u' &= Re \frac{2\gamma U_\infty}{\pi h B} \frac{1}{\sqrt{n'^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n'^2-k^2}{1-k^2}} = \\ &= Re \frac{2\gamma U_\infty}{\pi h B} \frac{1}{\sqrt{n^2 h^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 h^2-k^2}{1-k^2}}. \end{aligned} \quad (26.25)$$

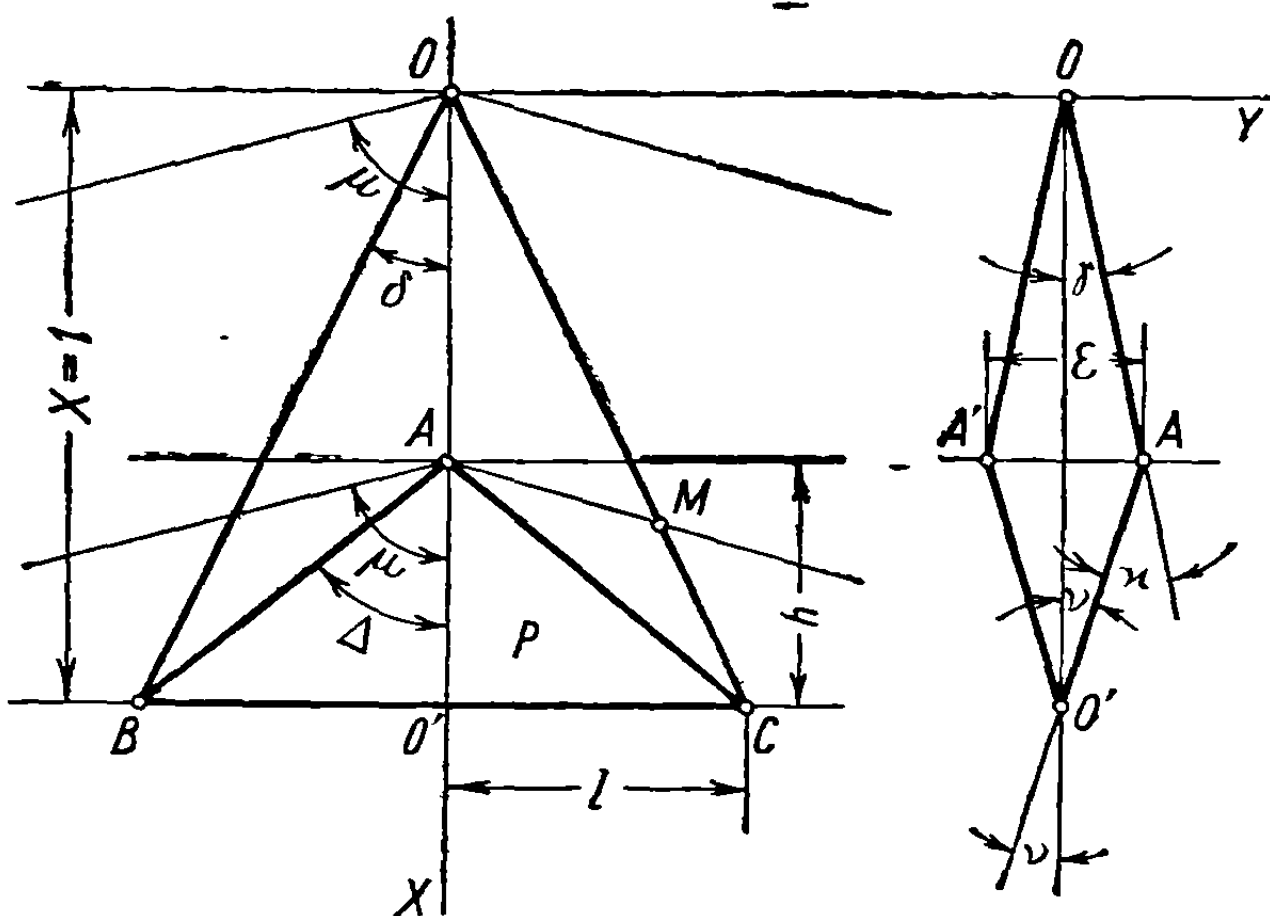
Для вычисления коэффициентов лобового сопротивления применим<sup>1</sup> предшествующие общие формулы; тогда, согласно уравнениям (26.13) и (26.14), соответственно, получим

$$C_{x1} = -4\gamma \int_0^1 \frac{u}{U_\infty} dk, \quad (26.26 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} C_{x2} &= 8 \frac{\gamma}{h} \int_0^1 \frac{u}{U_\infty} dk \int_{X_0}^1 X dX = 4 \frac{\gamma}{h} \int_0^1 (1 - X_0^2) \frac{u}{U_\infty} dk = \\ &= 4 \frac{\gamma}{h} \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{1-h}{1-hk} \right)^2 \right] \frac{u}{U_\infty} dk, \end{aligned} \quad (26.26 \text{ б})$$

где  $X_0$  заменено его выражением из формулы (26.15). Так как  $\gamma$  и  $h$  постоянны, то коэффициент полного лобового сопротивления для задней части будет следовать непосредственно из уравнения (26.16):

$$C'_{x2} = \frac{R'}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{8\gamma(1-h)}{lh} \int_{AO'C} \frac{u'}{U_\infty} d\sigma = 4\gamma(1-h) \int_0^1 \frac{u'}{U_\infty} dk. \quad (26.27)$$



Фиг. 26.7

Если линия  $AM$  конуса Маха пересекает переднюю поверхность крыла (фиг. 26.7), то формула (26.19) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} C'_s &= \frac{8\gamma}{h} \int_1^{nh} \frac{u'}{U_\infty} dk \int_{1-h}^{X'} (X + h - 1) dX = \\ &= \frac{4\gamma}{h} \int_1^{nh} [X' - (1-h)]^2 \frac{u'}{U_\infty} dk = 4\gamma(1-h)^2 h \int_1^{nh} \frac{1}{(k-h)^2} \frac{u'}{U_\infty} dk. \end{aligned} \quad (26.28)$$

<sup>1</sup> Расчеты были выполнены М. Ионеску с помощью общих формул, установленных выше.

Заменим  $u$  и  $u'$  в интегралах их выражениями (26.23.), (26.25); после некоторых элементарных операций получим:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \int_0^1 \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} dk = \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}; \quad (26.29a)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{1-h}{1-hk} \right)^2 \right] \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} dk = \\ &= J_1 - \frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{\ln n + h \text{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\sqrt{n^2h^2-1}} \text{Arth} \frac{\sqrt{n^2h^2-1}}{n + \sqrt{n^2-1} - nh} \right] = J_1 - K_2; \end{aligned} \quad (26.29б)$$

$$J' = \frac{1}{\sqrt{n^2h^2-1}} \int_0^1 \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2h^2-k^2}{1-k^2}} dk = \arcsin \frac{1}{nh} + \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}}; \quad (26.29в)$$

$$\begin{aligned} J'_s &= \frac{(1-h)^2h^2}{\sqrt{n^2h^2-1}} \int_1^{nh} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2h^2-k^2}{1-k^2}} \frac{dk}{(k-h)^2} = \\ &= h^2 \frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2-1}} \text{Arth} \sqrt{\frac{(n+1)(nh-1)}{(n-1)(nh+1)}} \right]. \end{aligned} \quad (26.29г)$$

Заметим, что лобовое сопротивление выражается как функция максимальной толщины, обозначенной через  $\varepsilon$ , которая определяется формулой, непосредственно устанавливаемой по фиг. 26.7:

$$\varepsilon = 2\gamma(1-h). \quad (26.30)$$

Рассматривая вышеприведенные интегралы, получим коэффициент полного лобового сопротивления в виде

$$\begin{aligned} C_x &= C_{x1} + C_{x2} + C'_x + C'_s = \frac{8\gamma^2}{\pi B} \text{Re} \left[ J_1 - \frac{1}{h} J_2 + \frac{(1-h)}{h} J' + \frac{1}{h^2} J'_s \right] = \\ &= \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \text{Re} \left[ \frac{J_1}{h(1-h)} + \frac{K_2}{h(1-h)^2} + \frac{J'}{h(1-h)} + \frac{J'_s}{h^2(1-h)^2} \right]. \end{aligned} \quad (26.31)$$

Хотя эта формула сохраняет свой вид во всех случаях, но для определения действительного коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  необходимо вычислить действительную часть предшествующих членов для каждого из трех случаев:  $\mu > \Delta$ ,  $\delta < \mu < \Delta$ ,  $\mu < \delta$ . Это приводит к результатам, полученным Пакетом [1] (см. фиг. 26.8 и 26.9).

**26.3.1. Крыло с дозвуковой ведущей кромкой и дозвуковой замыкающей поверхностью ( $n > nh > 1$ ).** Из рассмотрения приведенных выше интегралов для случая  $n > nh > 1$  очевидно, что все члены в формуле (26.31) действительны и коэффициент лобового сопротивления выражается формулой (26.31), из которой после необходимых подстановок получается соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\pi B}{2\varepsilon^2} C_x &= \frac{1}{h(1-h)} \left( \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{h(1-h^2)} \left( \frac{\ln n + h \text{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2h^2-1}} \text{Arth} \frac{\sqrt{n^2h^2-1}}{n - nh + \sqrt{n^2-1}} \right) + \end{aligned}$$

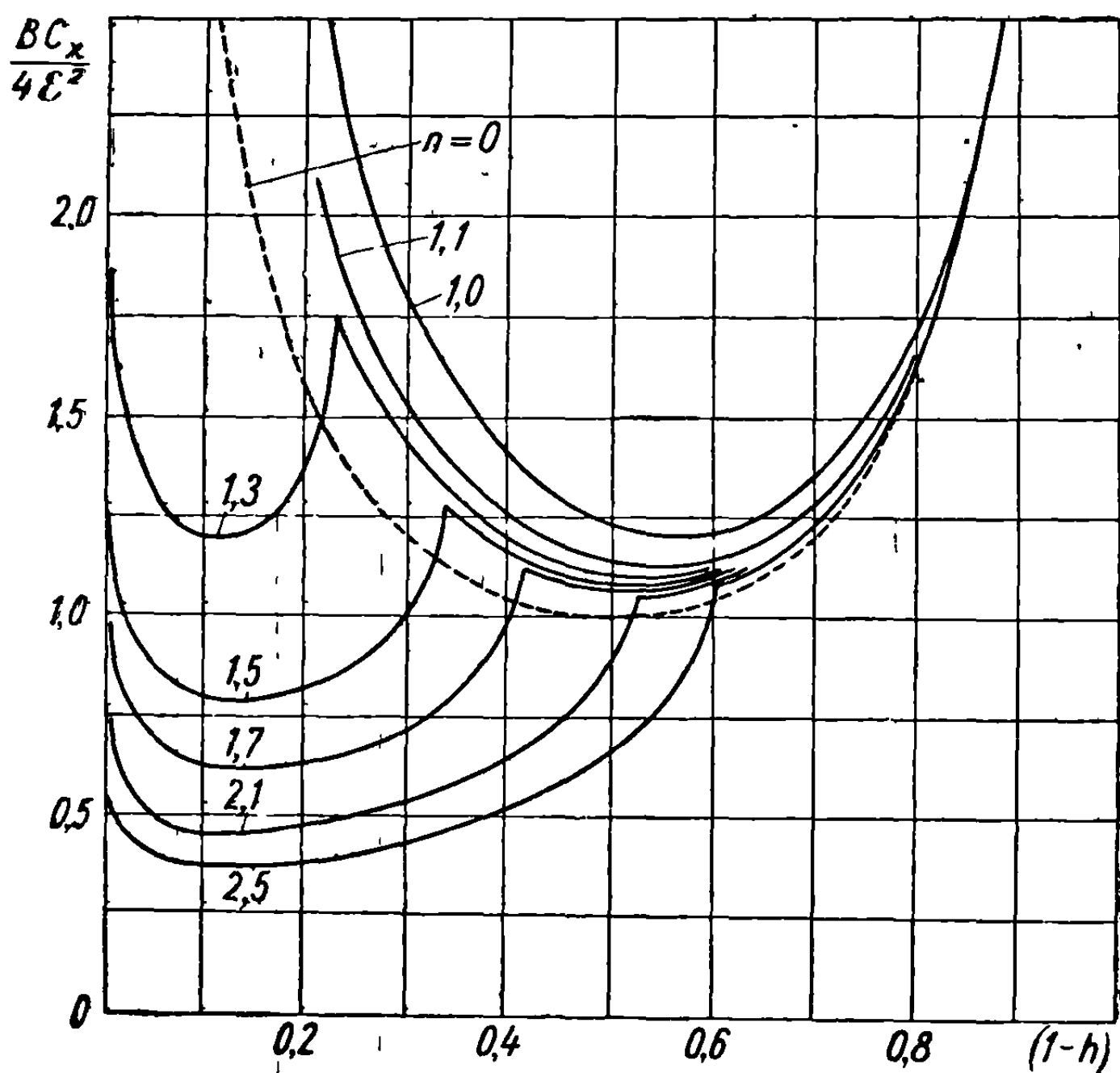
$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1-h} \left( \arcsin \frac{1}{nh} + \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} \right) + \frac{1}{1-h^2} \left( \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(n+1)(nh-1)}{(n-1)(nh+1)}} \right). \quad (26.32)
\end{aligned}$$

Беря производную от слагаемых по  $h$  и приравнявая результат нулю, находим оптимальное положение точки  $A$ .

Формула (26.32) действительна до предельного значения  $n$

$$\frac{\operatorname{tg} \mu}{l} = \frac{1}{Bl} = n \geq \frac{1}{h}, \quad (26.33)$$

ниже которого кромки замыкающей поверхности становятся сверхзвуковыми (см. фиг. 26.7). Диаграммы на фиг. 26.8 показывают изменение лобового сопротивления в зависимости от  $h$  для различных чисел  $n$ , начиная с  $n = 1$ .



Фиг. 26.8

26.3.2. Крыло с дозвуковой ведущей кромкой и сверхзвуковой замыкающей поверхностью ( $n > 1 > nh$ ). Очевидно, что из интегралов, определяемых формулами (26.29), некоторые будут действительны и сохранят свой вид, другие преобразуются в круговые функции, а некоторые становятся мнимыми. Применяя известную формулу, выводим соотношение

$$\begin{aligned}
\arcsin \frac{1}{nh} &= -i \ln \left( \frac{i}{nh} + \frac{\sqrt{n^2h^2-1}}{nh} \right) = -i \ln e^{i \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \sqrt{1-n^2h^2}}{nh} \right) = \\
&= \frac{\pi}{2} - i \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-n^2h^2}}{nh} \right), \quad (26.34)
\end{aligned}$$

реальная часть которого может быть использована. Таким путем получим равенство

$$\frac{\pi B}{2\varepsilon^2} C_x = -\frac{1}{h(1-h)} \left( \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{h(1-h^2)} \left( \frac{\ln n + h \operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{1-n^2h^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2h^2}}{n + \sqrt{n^2-1} - nh} \right). \quad (26.35)$$

Эта формула действительна при

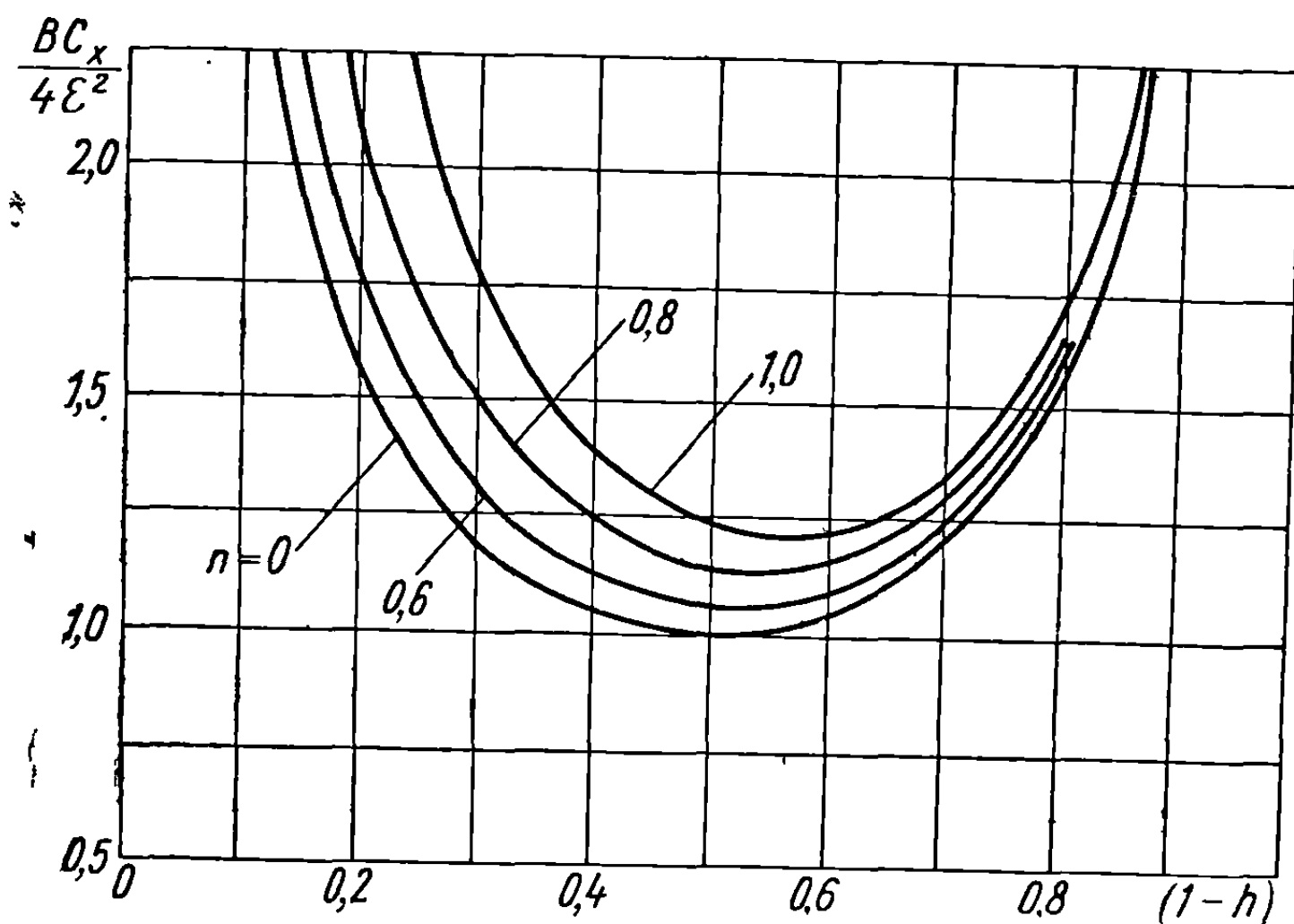
$$n \geq 1. \quad (26.36)$$

Диаграммы фиг. 26.8 включают этот случай также; диаграммы показывают для каждого значения  $n$  положение точки  $A$ , где явления изменяют свой характер и происходит переход от предшествующего случая к описанному выше, определяемому формулой (26.35).

**26.3.3. Крыло со сверхзвуковой ведущей кромкой и сверхзвуковой замыкающей поверхностью ( $1 > n > nh$ ).** Пересматривая все члены выражений (26.29) в согласии с уравнением (26.34) и после преобразования в некоторых из них гиперболических функций в круговые получим формулу

$$C_x = \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \frac{1}{1-h^2} \left( \frac{\arccos n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{\pi - \arccos nh}{h\sqrt{1-n^2h^2}} \right), \quad (26.37)$$

которая справедлива также при  $n = 0$ . Диаграммы на фиг. 26.9 показывают изменение лобового сопротивления в зависимости от  $h$  для различных значений  $n$ .



Фиг. 26.9

Подводя итог, видим, что формула для лобового сопротивления остается той же (см. формулу 26.31), но должна быть интерпретирована для каждого отдельного случая, причем принимается во внимание только действительная часть входящих в эту формулу членов.

**26.3.4. Экспериментальное подтверждение.** Полученные теоретические результаты, по-видимому, вполне утвердительно согласуются с экспериментальными данными. Так, эксперименты, проведенные при  $M_\infty = 1,53$  с дву-

мя крыльями, имевшими максимальную относительную толщину  $\varepsilon = 0,05$ , расположенную в сечении  $1 - h$  при значениях соответственно  $1 - h = 0,20$  и  $1 - h = 0,50$ , дают следующие результаты [17]:

	<u><math>1 - h = 0,20</math></u>	<u><math>1 - h = 0,50</math></u>
вычисленное волновое сопротивление . . . . .	$C_x \approx 0,0057,$	$0,0093;$
вычисленное сопротивление, обусловленное ламинарным трением . . . . .	$C_{xl} \approx 0,0030,$	$0,0030;$
вычисленное сопротивление, обусловленное турбулентным трением . . . . .	$C_{xt} \approx 0,0093,$	$0,0093;$
	$C_x + C_{xl} \approx 0,0087,$	$0,0123;$
	$C_x + C_{xt} \approx 0,0150,$	$0,0186;$
	$C_{x_{\text{эксп}}} \approx 0,0163,$	$0,0150.$

Из этих испытаний очевидно, что преимущество заметного уменьшения волнового сопротивления, даваемое при  $1 - h = 0,20$  дозвуковыми кромками, уничтожается вследствие образования турбулентного режима, который вызывает увеличение трения. С другой стороны, хотя для  $1 - h = 0,50$  волновое сопротивление будет больше, тем не менее, полное лобовое сопротивление оказывается меньшим вследствие того, что в этом случае ламинарное трение превалирует.

#### 26.4. Лобовое сопротивление двоякоконических дельтообразных крыльев с линейным изменением наклона

Вычисление лобового сопротивления, как установлено выше, чрезвычайно трудоемко даже для простых случаев. Трудности еще увеличиваются, когда наклон треугольного крыла изменяется. Хотя решение задачи значительно упрощается путем применения установленного выше метода (см. раздел 26.1), вычисления все же сстаются трудными.

Но так как необходимо знать изменение лобового сопротивления в зависимости от формы конической поверхности и максимальной относительной толщины, ниже рассмотрен случай крыла с линейно изменяющимся наклоном.

Используем метод, примененный в более ранней работе [13], предполагая, что направляющая определяется по формуле

$$e = 2\gamma_0 \left[ 1 - \frac{y}{l} - (m - 1) \frac{y}{l} \ln \frac{y}{l} \right] = 2\gamma_0 [1 - k - (m - 1)k \ln k] \quad (26.38)$$

только для положительных абсцисс и что для отрицательных она симметрична. Величина  $m$  представляет отношение наклона  $\gamma_1$  у ведущей кромки к наклону  $\gamma_0$  в центре

$$m = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}. \quad (26.39)$$

Направляющие показаны на фиг. 26.10 для различных значений  $m$ .

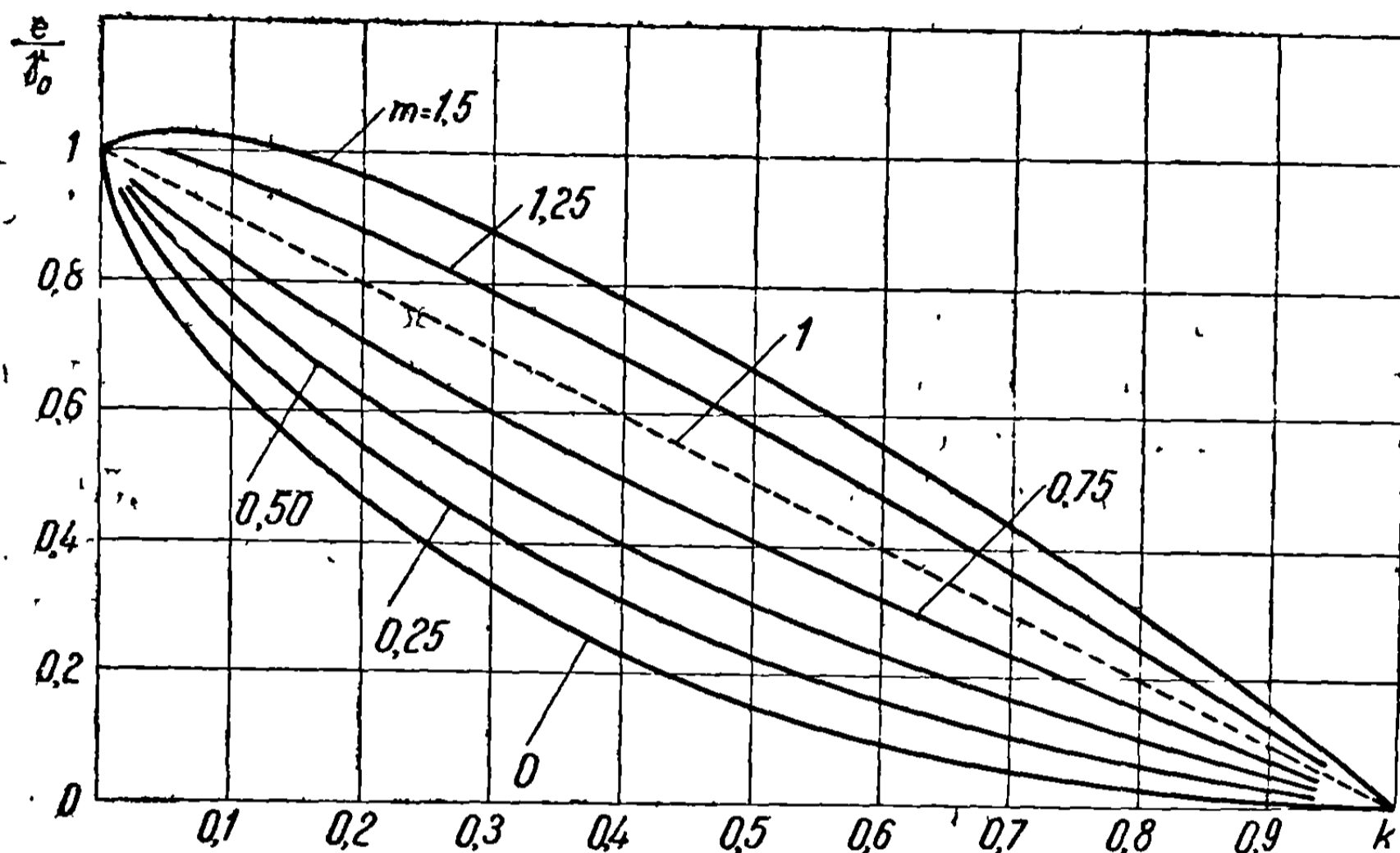
Применяя зависимость (24.7), получим формулу для стороны положительных абсцисс

$$\gamma = \gamma_0 [1 + (m - 1)k]; \quad (26.40)$$

отсюда изменения наклона на правой и левой сторонах крыла будут

$$\begin{aligned}\gamma'_d &= \left( \frac{d\gamma}{dy} \right)_{y>0} = (m-1) \frac{\gamma_0}{l}, \\ \gamma'_{s'} &= -\gamma'_d = (1-m) \frac{\gamma_0}{l}.\end{aligned}\quad (26.41)$$

Скорость  $u$ , обусловленная первым коническим течением с вершиной в точке  $O$ , дается в наиболее общем виде формулой (25.44), которая относится к ведущим и замыкающим кромкам.



Фиг. 26.10

С целью упрощения попытаемся отделить влияние наклона  $\gamma_1$  на краях от влияния изменения наклона; так, полагая

$$f_1 = f_1(n) = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}}, \quad (26.42a)$$

$$\begin{aligned}f_2 = f_2(n) &= \sqrt{n^2-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} + \\ &+ \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} - n \operatorname{Arch} \frac{n}{k} - i \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2-k^2}\end{aligned}\quad (26.42b)$$

и заменяя  $\gamma_1$  и  $g$  в формуле (25.44) через

$$\gamma_1 = m\gamma_0, \quad g = (m-1) \frac{\gamma_0}{l}, \quad (26.43)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned}u = u(n) &= -\frac{2m\gamma_0 U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re} f_1 - \frac{2(m-1)\gamma_0 U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re} f_2 = \\ &= -\frac{2m\gamma_0 U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re} \left( f_1 + \frac{m-1}{m} f_2 \right).\end{aligned}\quad (26.44)$$

Для второго конического течения с вершиной в точке  $A$  скорость  $u'$  должна быть взята с отрицательным знаком; аналогично находим

$$u' = u'(n) = \frac{2m'\gamma'_0 U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re} \left( f'_1 + \frac{m'-1}{m'} f'_2 \right), \quad (26.45)$$



где

$$\gamma_0' = \frac{\gamma_0}{h}, \quad m' = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = m, \quad n' = \frac{1}{Bl'} = nh, \quad (26.46a)$$

$$f_1' = f_1'(n) = f_1(nh), \quad f_2' = f_2'(n) = f_2(nh); \quad (26.46b)$$

отсюда

$$u' = u'(n) = \frac{2m\gamma_0 U_\infty}{\pi h B} \operatorname{Re} \left( f_1' + \frac{m-1}{m} f_2' \right) = -\frac{1}{h} u(nh). \quad (26.47)$$

При вычислении коэффициентов лобового сопротивления (см. раздел 26.2) должен быть выполнен ряд квадратур, некоторые из которых довольно трудоемки. Чтобы сделать выводы более систематическими, произведем эти квадратуры отдельно и результаты введем в формулы для коэффициентов сопротивления. Хотя некоторые обозначения имеют тот же смысл, что и в формулах (26.29), для отличия применим другие обозначения.

Таким образом:

$$I_{11} = I_{11}(n) = \int_0^1 f_1 dk = \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}; \quad (26.48a)$$

$$I_{12} = I_{12}(n) = \int_0^1 f_1 k dk = \frac{1}{2} \left( n - \sqrt{n^2-1} + \frac{\operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} \right); \quad (26.48b)$$

$$I_{13} = I_{13}(n) = \int_0^1 f_2 dk = \sqrt{n^2-1} \ln n - n \operatorname{Arch} n - \arcsin \frac{1}{n} - \\ - i \frac{\pi}{4} \left( \sqrt{n^2-1} + n^2 \arcsin \frac{1}{n} \right) + \int_0^1 \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk; \quad (26.48b)$$

$$I_{14} = I_{14}(n) = \int_0^1 f_2 k dk = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{n^2-1} - n + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} (n^2-1)^{3/2} + \frac{2}{3} n^3 \right) \operatorname{Arch} n - \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{3} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (n^3 \ln 2n + (n^2-1)^{3/2} \ln 2 \sqrt{n^2-1}) + i \frac{\pi}{3} (n^2-1)^{3/2} \right]. \quad (26.48g)$$

Эти интегралы входят в коэффициент  $C_{x1}$  (см. формулу 26.13), который принимает вид

$$C_{x1} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \operatorname{Re} \left\{ I_{11} + \frac{m-1}{m} \left[ (I_{12} + I_{14})m + (I_{13} - I_{14}) \right] \right\}. \quad (26.49)$$

Переходя к вычислению коэффициента  $C_{x2}$ , выразим  $x$  через  $X$  с помощью промежуточного переменного  $y$ ; первая часть двойного интеграла (26.14) может быть предварительно рассчитана, так что

$$\int_{x_0}^1 x X dX = -\frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{h} \left[ F_1 + (m-1) F_2 \right], \quad (26.50)$$

где

$$F_1 = F_1(h, k) = \left( \frac{1-h}{1-hk} \right)^2 - 1, \quad (26.51a)$$

$$F_2 = F_2(h, k) = h(1-h)^2 k \left[ 2 \ln \frac{(1-h)k}{1-hk} + \frac{3-2hk}{(1-hk)^2} - \frac{3-2h}{(1-h)^2} \right]. \quad (26.51b)$$

Вводя обозначения

$$I_{21} = \int_0^1 f_1 F_1 dk = \frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{\ln n + h \operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{n^2 h^2 - 1}} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{n^2 h^2 - 1}}{n - nh - \sqrt{n^2 - 1}} \right] - \left( \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right), \quad (26.52a)$$

$$I_{22} = \int_0^1 f_1 F_2 dk, \quad I_{23} = \int_0^1 f_2 F_1 dk, \quad I_{24} = \int_0^1 f_2 F_2 dk \quad (26.52b)$$

и замечая, что последние три интеграла можно рассчитать, применив правило Симпсона, дающее очень точный результат при условии, что интервалы, на которые разбивается промежуток интегрирования, выбраны подходящим образом, получим выражение для коэффициента  $C_{x2}$

$$C_{x2} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi h B} \operatorname{Re} \left\{ I_{21} + \frac{m-1}{m} \left[ (I_{22} + I_{24})m + (I_{23} - I_{24}) \right] \right\}. \quad (26.53)$$

Для вычисления  $C'_{x1}$  заметим, что в силу равенства (26.46б)

$$I'_{11} = \int_0^1 f'_1 dk = \int_0^1 f_1(nh) dk = I_{11}(nh); \quad (26.54)$$

следовательно, для каждого интеграла (26.48) получим

$$I'_{1k} = I_{1k}(nh) \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (26.55)$$

откуда вытекает равенство

$$C'_{x1} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi h B} \operatorname{Re} \left\{ I'_{11} + \frac{m-1}{m} \left[ (I'_{12} + I'_{14})m + (I'_{13} - I'_{14}) \right] \right\}. \quad (26.56)$$

Для вычисления  $C'_{x2}$  выразим  $\gamma$  как функцию  $X$  через посредство  $\eta$ ; сначала проинтегрируем первую часть двойного интеграла (26.18)

$$\int_{1-h}^1 \gamma(X+h-1) dX = \frac{1}{2} \gamma_0 h^2 [1 - (m-1)F_3 k]; \quad (26.57)$$

здесь введено обозначение

$$F_3 = F_3(h) = \frac{(1-h)^2}{h^3} \left[ \ln(1-h)^2 + \frac{h(2-3h)}{(1-h)^2} \right]. \quad (26.58)$$

Тогда

$$C'_{x2} = -4\gamma_0 h \int_0^1 \frac{u'}{U_\infty} [1 - (m-1)F_3 k] dk, \quad (26.59)$$

и соответствующие интегралы могут быть выведены из предыдущих вычислений

$$\begin{aligned}
 I'_{21} &= - \int_0^1 f'_1 dk = - I'_{11}, \\
 I'_{22} &= F_3 \int_0^1 f'_1 k dk = F_3 I'_{12}, \\
 I'_{23} &= - \int_0^1 f'_2 dk = - I'_{13}, \\
 I'_{24} &= F_3 \int_0^1 f'_2 k dk = F_3 I'_{14}.
 \end{aligned}
 \tag{26.60}$$

Учитывая соответствующие знаки, получим

$$\begin{aligned}
 C'_{x2} &= \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \left\{ I'_{21} + \frac{m-1}{m} [(I'_{22} + I'_{24})m + (I'_{23} - I'_{24})] \right\} = \\
 &= \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \left\{ -I'_{11} + \frac{m-1}{m} [(I'_{12} + I'_{14})F_3 m + (-I'_{13} - F_3 I'_{14})] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{26.61}$$

Для вычисления дополнительного коэффициента  $C'_s$  выполним вначале интегрирование

$$\int_{1-h}^{x'} \gamma(X+h-1) dX = \frac{1}{2} \gamma_0 h^2 [F_4 - (m-1)F_5], \tag{26.62}$$

где

$$F_4 = F_4(h, k) = \left( \frac{1-h}{1-k} \right)^2, \quad F_5 = \frac{(1-h)^2}{h^3} \left[ \ln \left( \frac{k-h}{k} \right)^2 + \frac{h(2k-3h)}{(k-h)^2} \right] k, \tag{26.63a}$$

$$\begin{aligned}
 (F_5 - kF_3) + kF_3 &= \frac{(1-h)^2}{h^3} \left[ \ln \left( \frac{k-h}{(1-h)k} \right)^2 + \frac{h(2k-3h)}{(k-h)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{h(2-3h)}{(1-h)^2} \right] k + F_3 k = -F_2 \left( \frac{1}{h}, k \right) + F_3 k.
 \end{aligned}
 \tag{26.63b}$$

Кроме того:

$$I'_{s1} = -\operatorname{Re} \int_1^{nh} f'_1 F_4 dk = -\frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2 h^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(n+1)(nh-1)}{(n-1)(nh+1)}} \right], \tag{26.64a}$$

$$\begin{aligned}
 I'_{s2} &= \operatorname{Re} \int_1^{nh} f'_1 F_5 dk = -\operatorname{Re} \int_1^{nh} f'_1 F_2 \left( \frac{1}{h}, k \right) dk + \\
 &+ \operatorname{Re} F_3 \int_1^{nh} f'_1 k dk = -I'_{s2} + \frac{F_3}{2} \sqrt{n^2 h^2 - 1};
 \end{aligned}
 \tag{26.64b}$$

$$I'_{s3} = -\operatorname{Re} \int_1^{nh} f'_2 F_4 dk, \quad I'_{s4} = \operatorname{Re} \int_1^{nh} f'_2 F_5 dk. \tag{26.64b}$$

Вследствие трудностей выполнения операций интегралы  $I'_{s2}$ ,  $I'_{s3}$ ,  $I'_{s4}$  вычисляются с помощью правила Симпсона.

Таким образом,

$$C'_{xs} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \left\{ I'_{s1} + \frac{m-1}{m} [(I'_{s2} + I'_{s4})m + (I'_{s3} - I'_{s4})] \right\}. \quad (26.65)$$

Сложим теперь выражения (26.49), (26.53), (26.56), (26.59) и (26.65) с целью получения коэффициента полного лобового сопротивления  $C_x$ . Полагая ради упрощения

$$I_i = I_{1i} + I'_{2i} + I'_{3i} + \frac{1}{h} (I'_{1i} + I_{2i}) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (26.66)$$

и вводя относительную толщину, определенную соотношением (26.30), получим общую формулу для  $C_x$ :

$$C_x = Re \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \frac{m}{(1-h)^2} \left\{ I_1 + \frac{m-1}{m} [(I_2 + I_4)m + (I_3 - I_4)] \right\}. \quad (26.67)$$

Применим эту формулу к некоторым специальным случаям.

Так, для  $m = 0$ ,  $f_1 = 0$  получим

$$C_x^{(0)} = Re \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \frac{1}{(1-h)^2} (I_4 - I_3), \quad (26.68)$$

а для  $m = 1$

$$C_x^{(1)} = Re \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \frac{1}{(1-h)^2} I_1. \quad (26.69)$$

Эта зависимость напоминает уравнение для лобового сопротивления крыла с ромбовидным профилем (см. формулу 26.31).

Простые операции устанавливают идентичность выражений (26.31) и (26.69).

Используя введенные обозначения, получим уравнение для лобового сопротивления в более отчетливой форме:

$$C_x = m \left[ C_x^{(1)} - \frac{m-1}{m} C_x^{(0)} + (m-1) Re \frac{2\varepsilon^2}{\pi B} \frac{1}{(1-h)^2} (I_2 + I_4) \right], \quad (26.70)$$

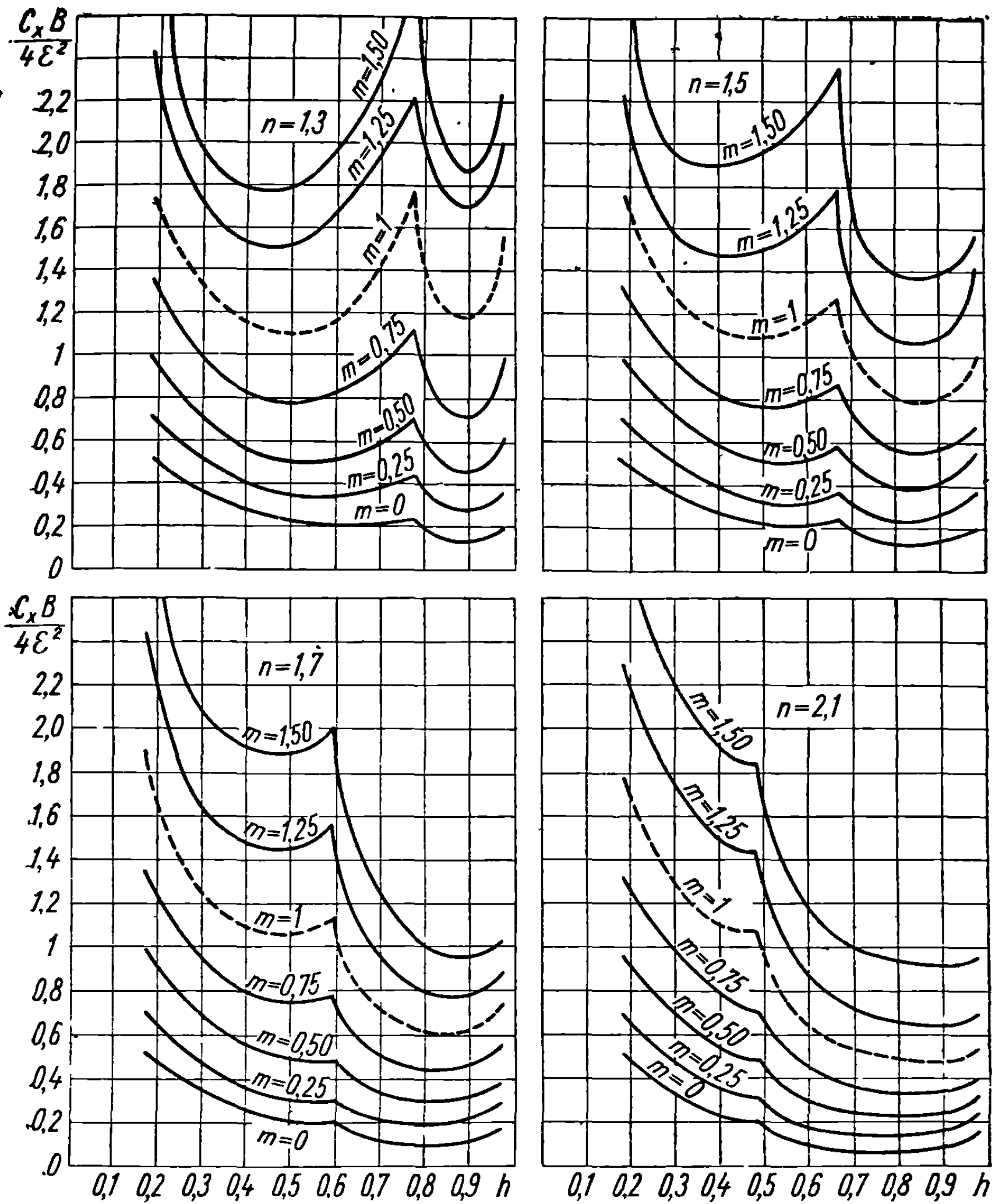
которую удобнее обсудить в каждом из трех случаев, отвечающих определенным положениям конуса Маха. Коэффициент  $C_x^{(1)}$  изучался в разделе 26.3, поэтому ниже рассматриваются только члены, содержащие  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ , так как величина  $I_1$  содержится в  $C_x^{(1)}$ .

26.4.1. Крыло с дозвуковыми ведущей и замыкающей кромками ( $n > nh > 1$ ). Все члены, входящие в коэффициент лобового сопротивления, действительны, за исключением содержащих мнимый множитель. Они выражаются аналитическими формулами, за исключением интегралов

$$\int_0^1 \sqrt{n^2 - k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk, \quad \int_0^1 \sqrt{n^2 h^2 - k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk,$$

входящих в выражения для  $I_{13}$  и  $I'_{13}$ , которые могут быть вычислены приближенно посредством соответствующего разложения.

Вычисления элементарны, но трудоемки, поэтому результаты представлены графически на приведенных ниже фигурах.



Фиг. 26.11

26.4.2. Дозвуковая ведущая и сверхзвуковая замыкающая кромки ( $n > 1 > nh$ ). Все интегралы  $I_{1i}$  идентичны интегралам предшествующего случая. Интеграл  $I_{21}$  принимает значение

$$I_{21} = \frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{\ln n + h \operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{1-n^2h^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2h^2}}{n-nh+\sqrt{n^2-1}} \right] - \left( \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}} \right), \quad (26.71)$$

а интегралы  $I'_{si}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) выразятся соответственно в виде

$$I'_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad I'_{12} = \frac{1}{2} \left( nh + \frac{\arccos nh}{\sqrt{1-n^2h^2}} \right), \quad I'_{13} = -\frac{\pi^1}{4}, \quad (26.72a)$$

$$I'_{14} = -\frac{1}{6} \left[ (1+2n^2h^2) \sqrt{1-n^2h^2} \arccos nh + 2n^3h^3 \ln 2nh + nh \right]. \quad (26.72b)$$

<sup>1</sup> См. стр. 556.

Интегралы  $I'_{2i}$ , определяемые формулами (26.60), можно также присоединить к приведенным выше явным выражениям.

Интегралы  $I'_{si}$ , выражающие действие конического течения с вершиной в точке  $A$  на переднюю часть крыла, не представляют интереса в этом случае. Наконец, интегралы  $I_{2i}$  ( $i = 2, 3, 4$ ) рассчитываются приближенно с помощью степенных рядов.

Диаграммы на фиг. 26.11 показывают изменение лобового сопротивления, представленного через комбинацию  $\frac{B}{4\epsilon^2} C_x$  в зависимости от положения максимальной толщины, или точки  $A$ , для различных значений  $m$  и  $n$  при  $n > 1$ , и дают возможность сравнения с результатами, полученными различными авторами.

**26.4.3. Крыло со сверхзвуковой ведущей кромкой ( $1 > n > nh$ ).**  
В этом случае:

$$I_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad I_{12} = \frac{1}{2} \left( n + \frac{\arccos n}{\sqrt{1-n^2}} \right), \quad I_{13} = -\frac{\pi^1}{4}, \quad (26.73a)$$

$$I_{14} = -\frac{1}{6} [(1 + 2n^2) \sqrt{1-n^2} \arccos n + 2n^3 \ln 2n + n], \quad (26.73b)$$

$$I_{21} = \frac{1-h}{1+h} \left[ \frac{h \arccos n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{\pi - \arccos nh}{\sqrt{1-n^2 h^2}} \right] - \frac{\pi}{2}. \quad (26.73b)$$

Интегралы  $I'_{si}$  равны нулю. Интегралы  $I'_{1i}$ ,  $I'_{2i}$  имеют те же значения, что и в предшествующем случае.

Интегралы  $I_{22}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{24}$  аппроксимируются по правилу Симпсона, как в предыдущем случае, но для  $f_1$  и  $f_2$  получатся соответственно выражения:

$$f_1^* = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \arccos \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}}; \quad (26.74a)$$

$$f_2^* = -\operatorname{Re} \left[ \sqrt{1-n^2} \arccos \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} - \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} + n \operatorname{Arch} \frac{n}{k} - i \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2-k^2} \right]. \quad (26.74b)$$

<sup>1</sup> Так как этот результат не очевиден, приводим доказательство. Последний член уравнения (26.48b) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^1 \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk &= \int_0^n \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk = \\ &= n^2 \int_0^1 \sqrt{1-n^2 u^2} \ln \sqrt{\frac{1-n^2 u^2}{n^2 u^2}} du = n^2 I, \end{aligned}$$

где  $u$  — отношение  $\frac{k}{n}$ , а  $I$  — последний интеграл.

Диаграммы на фиг. 26.12 показывают изменение той же величины  $\frac{B}{4\varepsilon^2} C_x$  для случая сверхзвуковой ведущей кромки.

**26.4.4. Некоторые соображения о волновом сопротивлении треугольных крыльев с переменным наклоном.** Анализ явлений сверхзвукового течения вокруг крыла встречает непреодолимые трудности даже в смысле постановки задачи. Метод, указанный в разделе 26.1, как и другие предложенные для той же цели методы, дает простое решение задачи о крыле с переменным наклоном, избегая теоретических трудностей. Но вычисления очень трудоемки, как показывает рассмотрение задачи о крыле с равномерно-переменным наклоном. Сводя решение к задаче о двух конических течениях с вершинами в точках  $O$  и  $A$ , получаем окончательные результаты посредством квадратур обычных типов, устанавливая явные формулы, которые легко применить для практических целей.

Даже если исследование какого-нибудь заданного изменения наклона не легко довести до конца, тем не менее, полученные результаты дают ценные сведения относительно волнового сопротивления дельтообразных крыльев и соответствующих изменяющихся параметров. Отсюда следует, что решающим элементом, который нужно принимать в расчет, является наклон на ведущей кромке, обозначенный через  $\gamma_1$ .

Можно заключить, что определение порядка величины лобового сопротивления крыла, замыкаемого с задней стороны с помощью метода,

Берем производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial n} &= -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-n^2u^2} du = -\frac{1}{n^3} \left( \arcsin u - \sqrt{1-n^2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2u}}{\sqrt{1-u^2}} \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{\pi}{2n^3} (1 - \sqrt{1-n^2}) \end{aligned}$$

и интегрируем

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\partial I}{\partial n} dn = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{n^2} + \operatorname{Arch} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \sqrt{1-n^2} \right), \\ \operatorname{Re}_{n<1} \int_0^1 \sqrt{n^2-k^2} \ln \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dk &= \frac{\pi}{4} (1 + n^2 \operatorname{Arch} \frac{1}{n} - \sqrt{1-n^2}). \end{aligned}$$

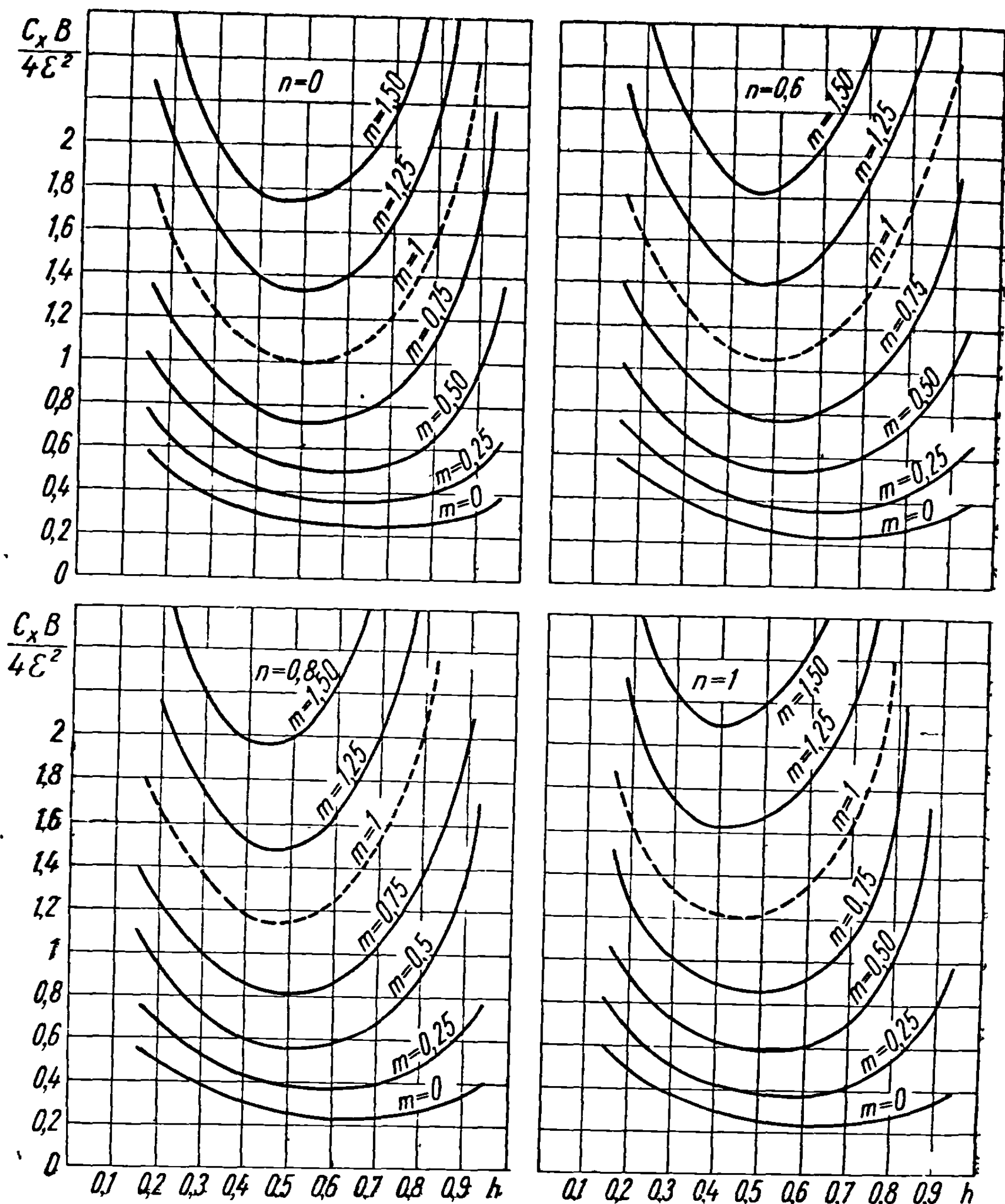
Подставляя результат в уравнение (26.43 в) и, в соответствии с очевидными соотношениями,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_{n<1} \left( i \arcsin \frac{1}{n} \right) &= \operatorname{Re}_{n<1} \left( \operatorname{Arch} \frac{i}{n} \right) = \operatorname{Arch} \frac{1}{n}; \\ \operatorname{Re}_{n<1} (i \sqrt{n^2-1}) &= -\sqrt{1-n^2}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_{n<1} I_{13} &= \operatorname{Re}_{nh<1} I_{13} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \left( \sqrt{1-n^2} - n^2 \operatorname{Arch} \frac{1}{n} \right) + \\ &+ \frac{\pi}{4} (1 + n^2 \operatorname{Arch} \frac{1}{n} - \sqrt{1-n^2}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

отличающегося от рекомендованного выше, может быть сделано в первом приближении путем отождествления этой произвольной замыкающей поверхности с поверхностью, построенной в соответствии с указанным выше методом.



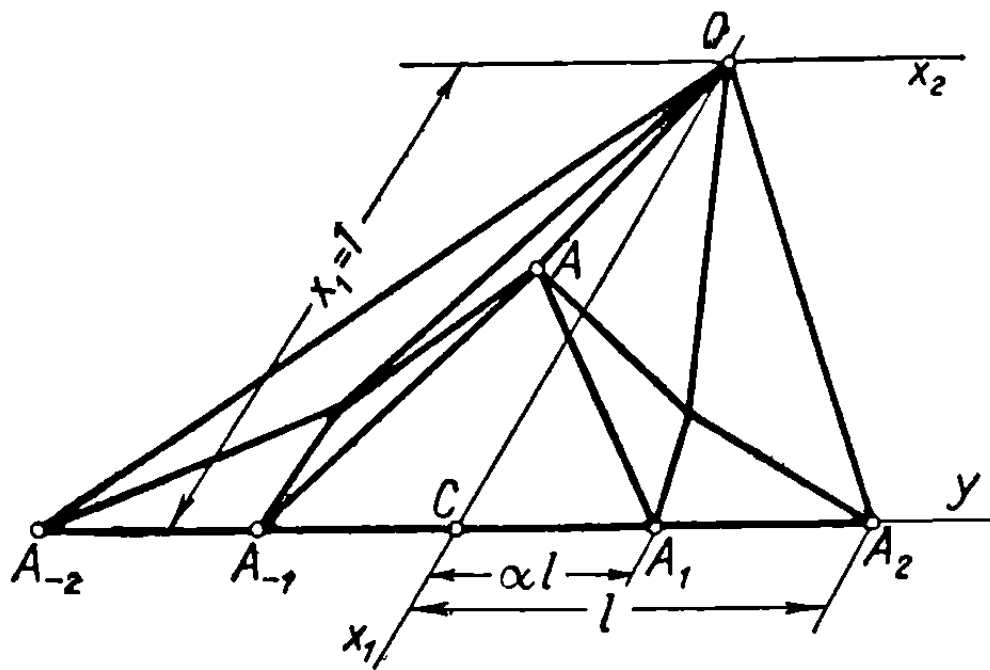
Фиг. 26.12

### 26.5. Волновое сопротивление двоякоконического дельтообразного крыла с двойным наклоном

Исходя из угловидного крыла с двойным наклоном (см. раздел 25.2.1) и применяя метод замыкания (см. раздел. 26.1), получим двоякоконическое дельтообразное крыло (фиг. 26.13). Замыкающая поверхность может быть образована и другими способами; предложенный здесь метод приводит к упрощению задачи и вычислений, которые все же остаются достаточно трудоемкими. Формулы для осевой скорости, обусловленной конусами с вершинами в точках  $O$  и  $A$ , служат отправной точкой в этих вычислениях.



Чтобы установить указанные формулы, обозначим через  $\gamma$  наклон центральной части, через  $m\gamma$  — наклон ведущей кромки  $A_2$  с абсциссой  $l$ , через  $(1-m)\gamma$  — изменение наклона в точке  $A_1$  с абсциссой  $\alpha l$ .<sup>1</sup> Применяя



Фиг. 26.13

формулу (25.30) и вводя обычные обозначения, определим течение, связанное с вершиной  $O$  выражением

$$u = -\frac{2m\gamma U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}} + \frac{(1-m)\alpha}{m} \frac{1}{\sqrt{n^2-\alpha^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{\alpha^2-k^2}} \right], \quad (26.75)$$

где символ  $\operatorname{Re}$  вводится для того, чтобы включить все случаи расположения конуса Маха.

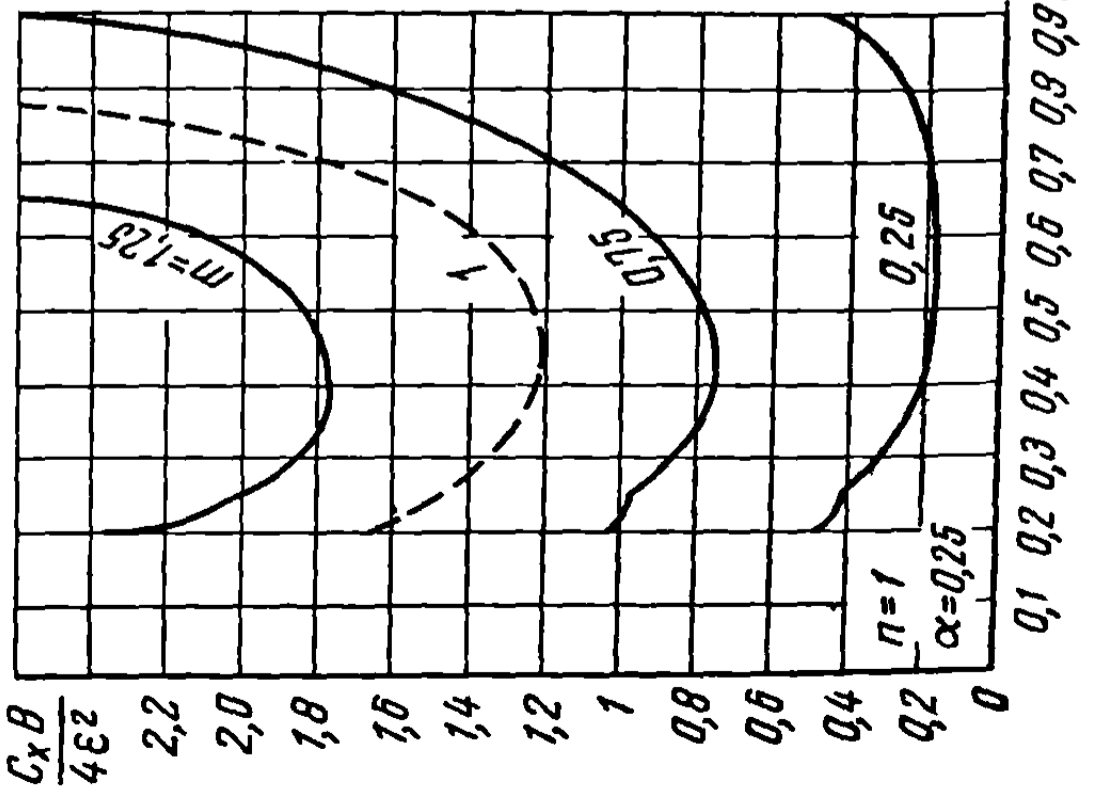
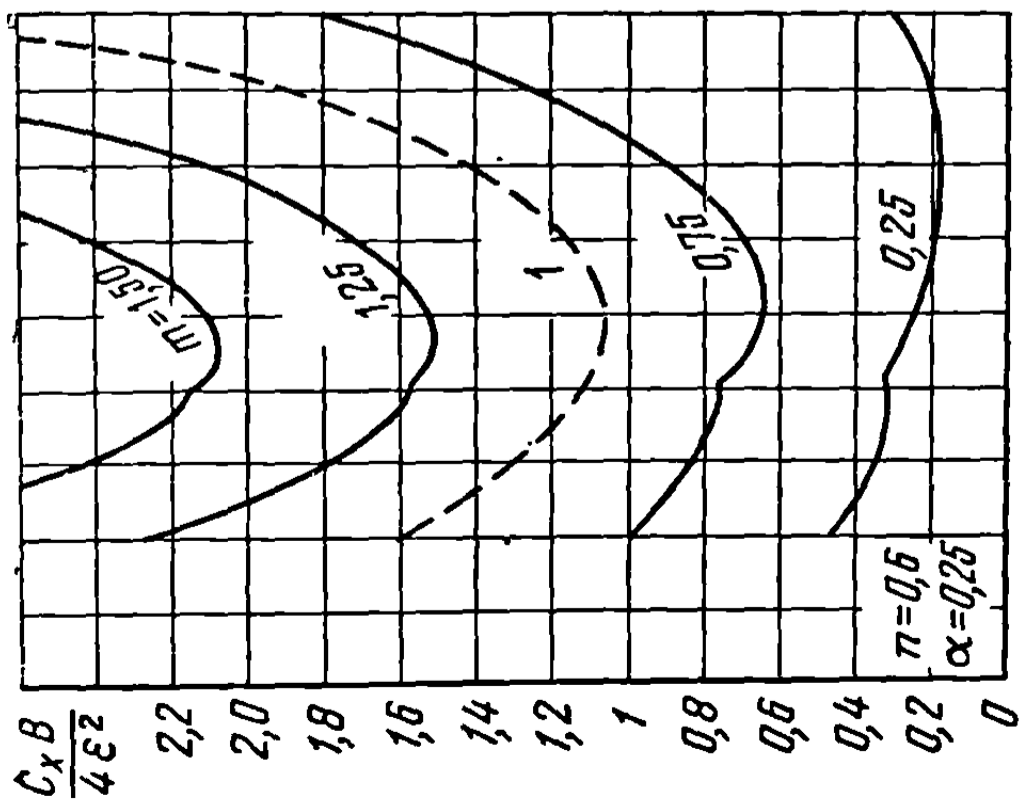
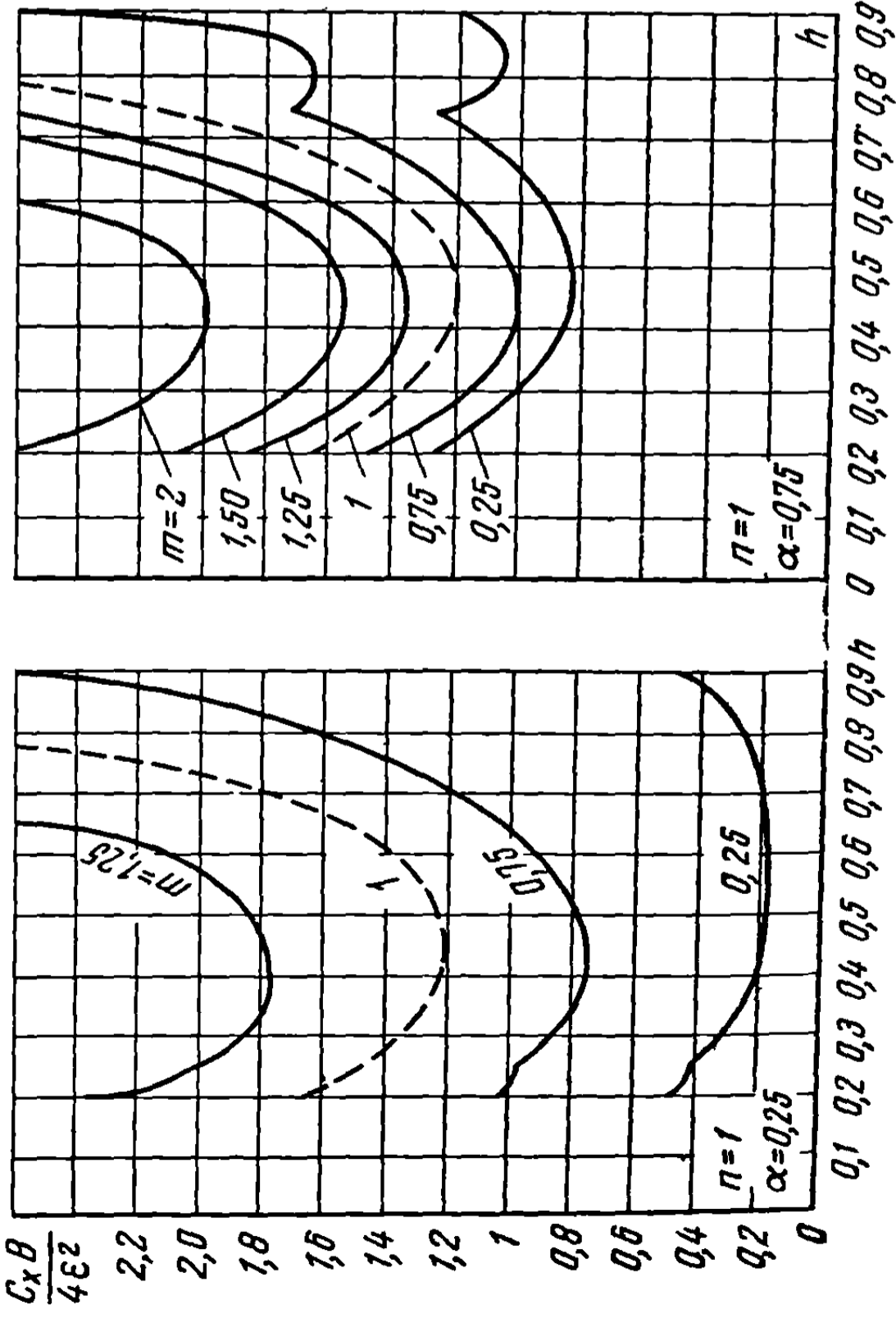
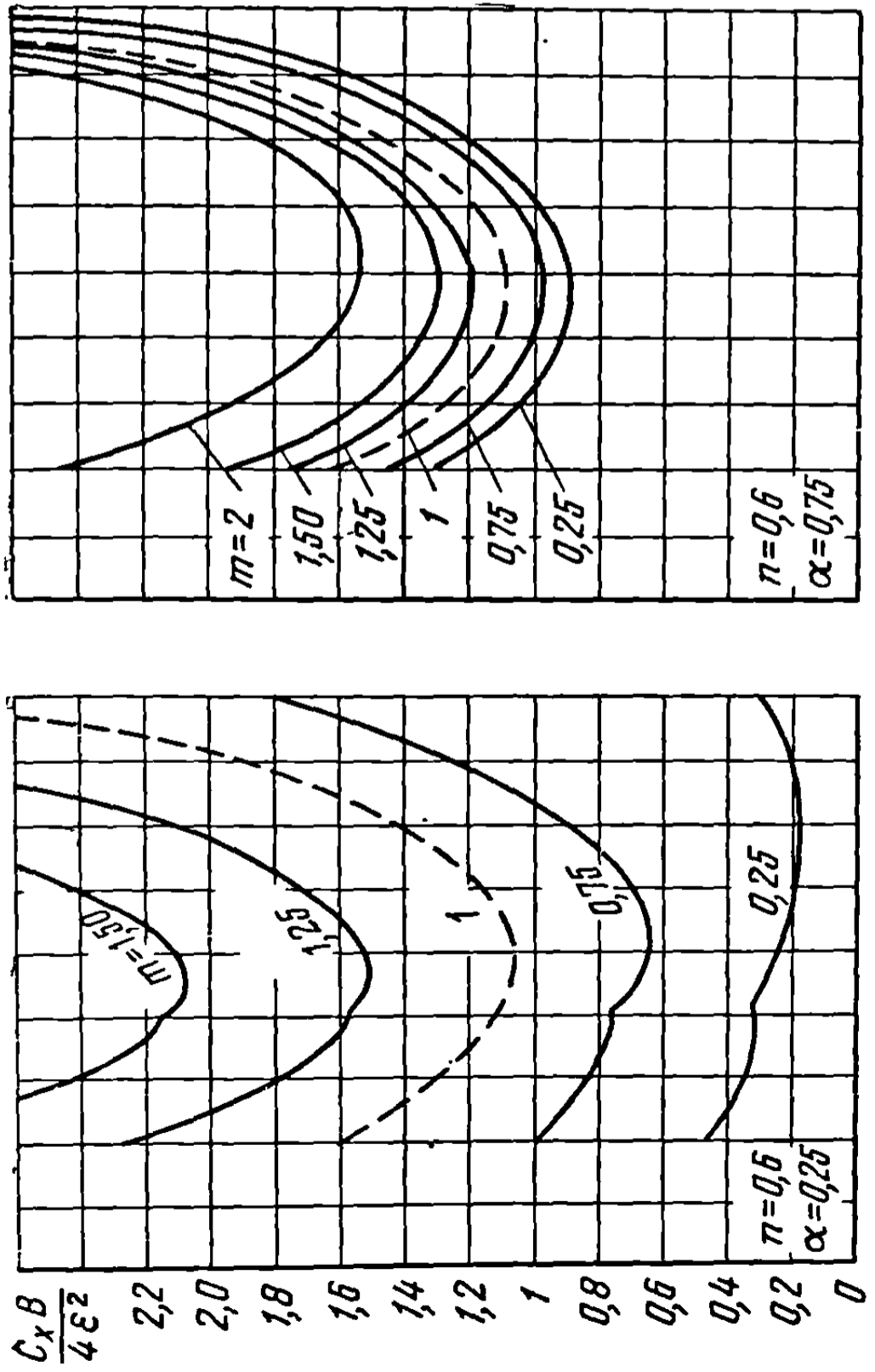
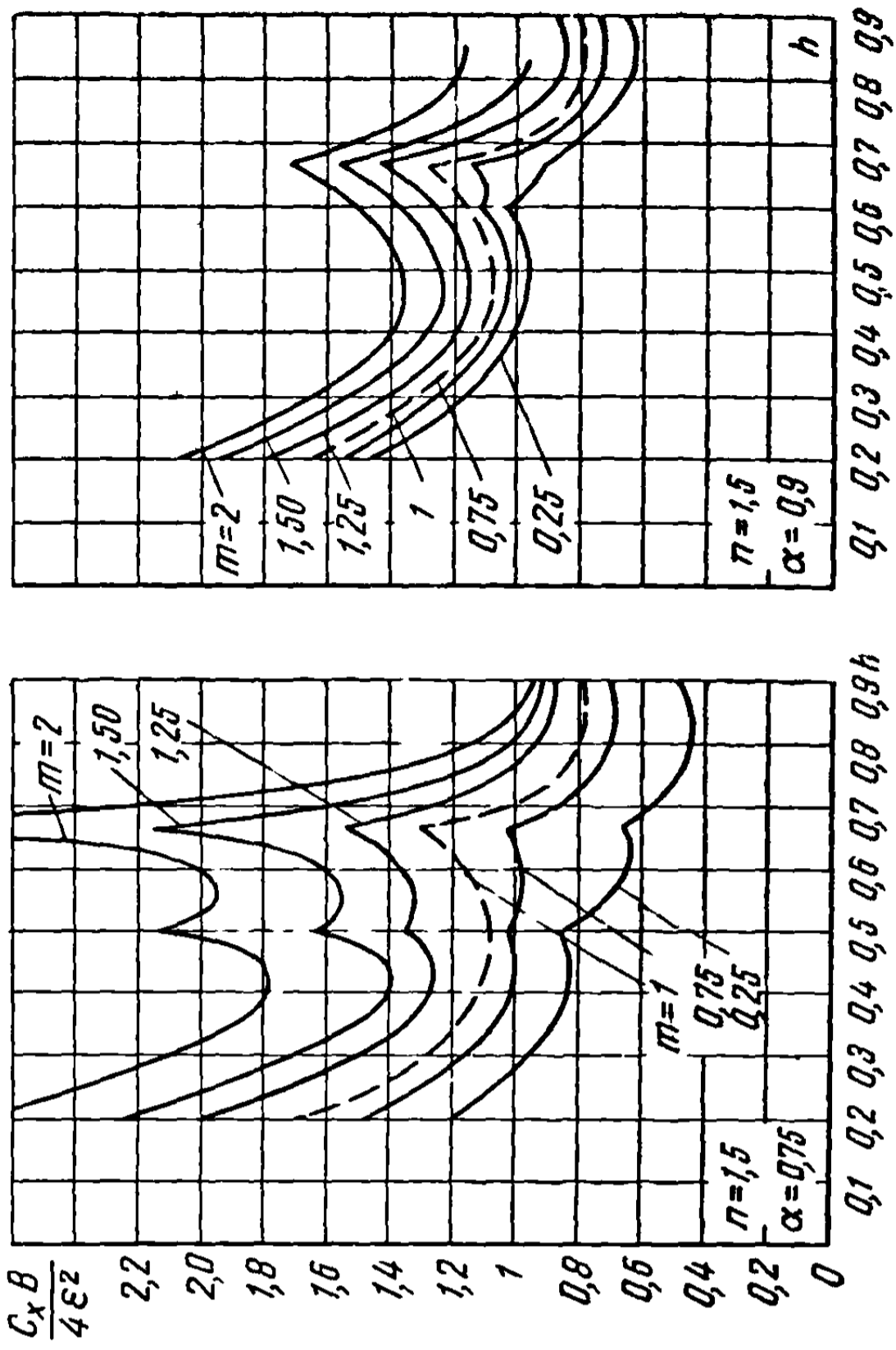
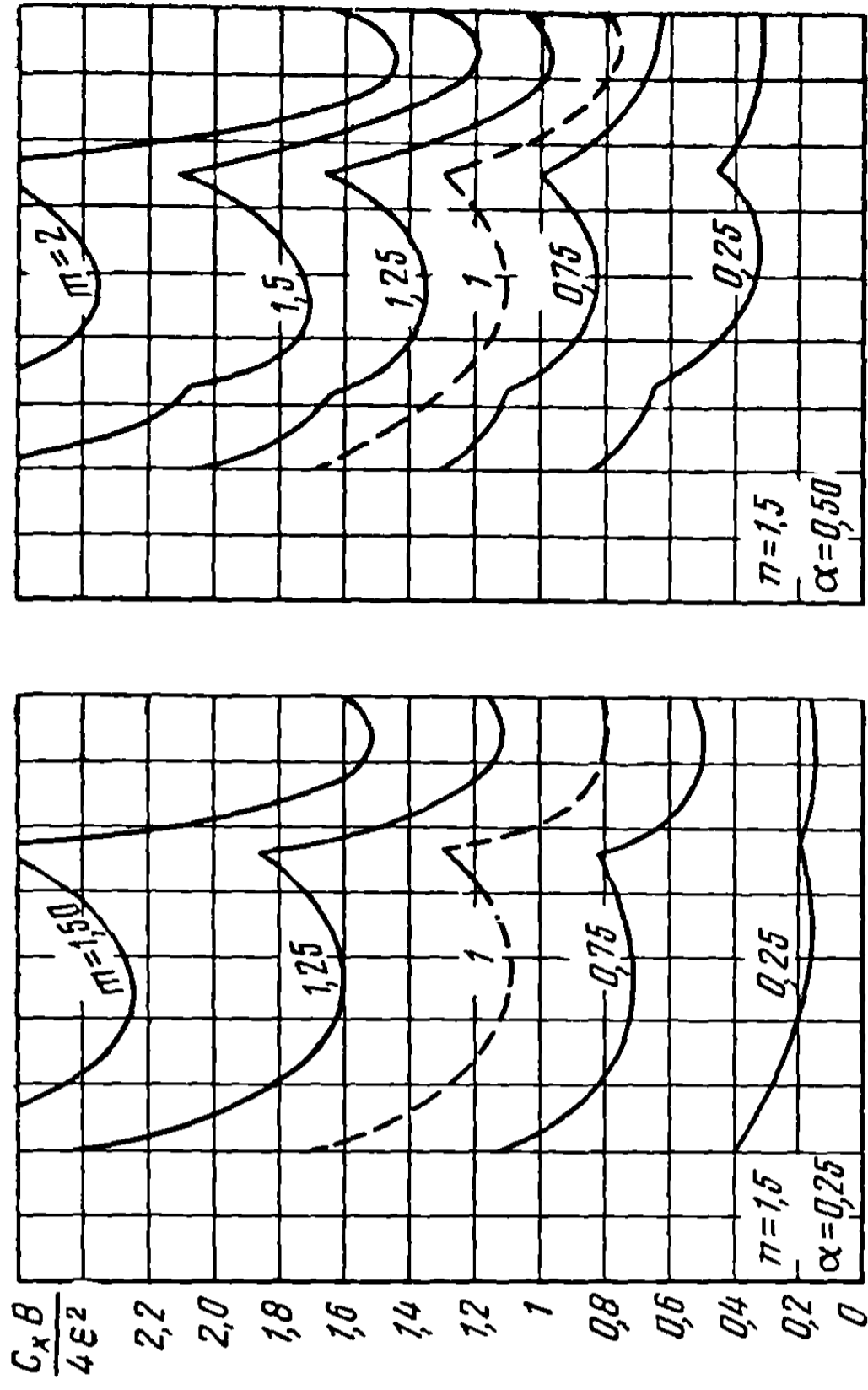
Для течения, связанного с вершиной  $A$ , скорость  $u'$  выводится из скорости  $u$  посредством изменения знака, деления на величину  $h$  и замены  $n$  на  $n' = nh$ ; таким образом,

$$u' = \frac{2m\gamma U_\infty}{\pi B h} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2 h^2 - 1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 h^2 - k^2}{1 - k^2}} + \frac{(1-m)\alpha}{m} \frac{1}{\sqrt{n^2 h^2 - \alpha^2}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 h^2 - k^2}{\alpha^2 - k^2}} \right]. \quad (26.76)$$

Аналогичный метод может быть применен для вычисления волнового сопротивления; однако, в противоположность предыдущему случаю, интегралы будут вычисляться проще и легче.

Вычисления не будут рассматриваться детально. Результаты приводятся в виде диаграмм<sup>1</sup>, показывающих изменение лобового сопротивления в зависимости от  $n$ ,  $h$ ,  $m$  и  $\alpha$  (фиг. 26.14, а, б). Влияние наклона ведущей кромки ( $m\gamma$ ) и точки, в которой происходит изменение наклона ( $\alpha l$ ), из этих диаграмм очевидно. Путем изменения параметров  $m$  и  $\alpha$  можно аппроксимировать любую заданную направляющую крыла и получить достаточную информацию относительно лобового сопротивления любого двоякоконического крыла.

<sup>1</sup> Эти диаграммы воспроизведены из исследования Дэри (неопубликованного): «Применение метода Карафоли к вычислению волнового сопротивления двоякоконических дельтаобразных крыльев с двойным наклоном».

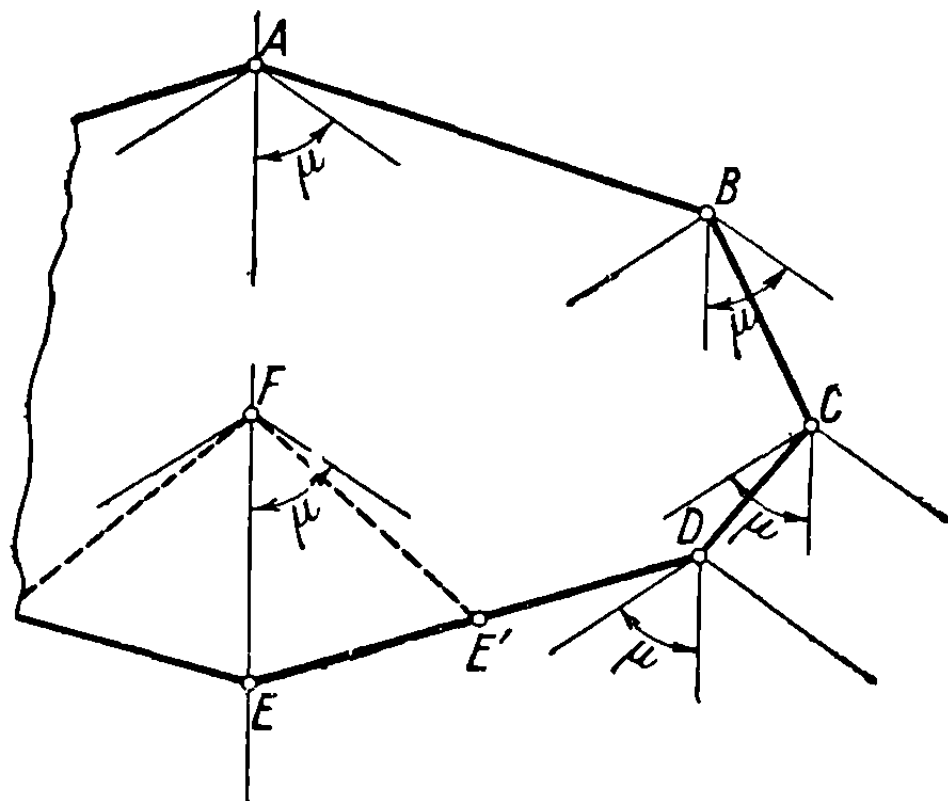


Фиг. 26.14 а

Фиг. 26.14 б

## 27. Теория тонкого плоского треугольного крыла

Рассмотрим плоское тонкое крыло, расположенное под углом атаки  $\alpha$  к сверхзвуковому потоку, имеющему скорость на бесконечности  $U_\infty$ . Хотя крыло может быть произвольного контура<sup>1</sup>, рассмотрим только полигональные формы, к которым применима теория конических течений (фиг. 27.1). Коническое течение появляется у каждой вершины полигонального крыла; картина течения различается в соответствии с условиями, существующими на ведущей и задней кромках, т. е. в зависимости от того, будут они дозвуковыми (кромки  $BC$  и  $CD$  на фиг. 27.1) или сверхзвуковыми (кромки  $AB$  и  $DE$ ).



Фиг. 27.1

Интерференция всех этих течений усложняет задачу. Но если простое течение, без интерференции, известно, то задача может быть решена путем применения линеаризированной теории. Ниже рассмотрены обычные случаи конических течений, применяемых к тонким крыльям. Метод гидродинамической аналогии, описанный в более ранней работе [11], может быть применен и здесь (см. раздел 24).

Заметим, что задача о тонком крыле уже рассматривалась с различных точек зрения многими авторами [8, 18 — 21]; они определяли основные аэродинамические характеристики (подъемную силу, волновое сопротивление, моменты) различными методами, которые уже были частично описаны в начале этой главы. Здесь будет использован единообразный подход, известный как метод гидродинамической аналогии, так как он, по мнению автора, проще и удобнее. Этим методом будет определена осевая скорость возмущения, от которой зависит коэффициент давления

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty},$$

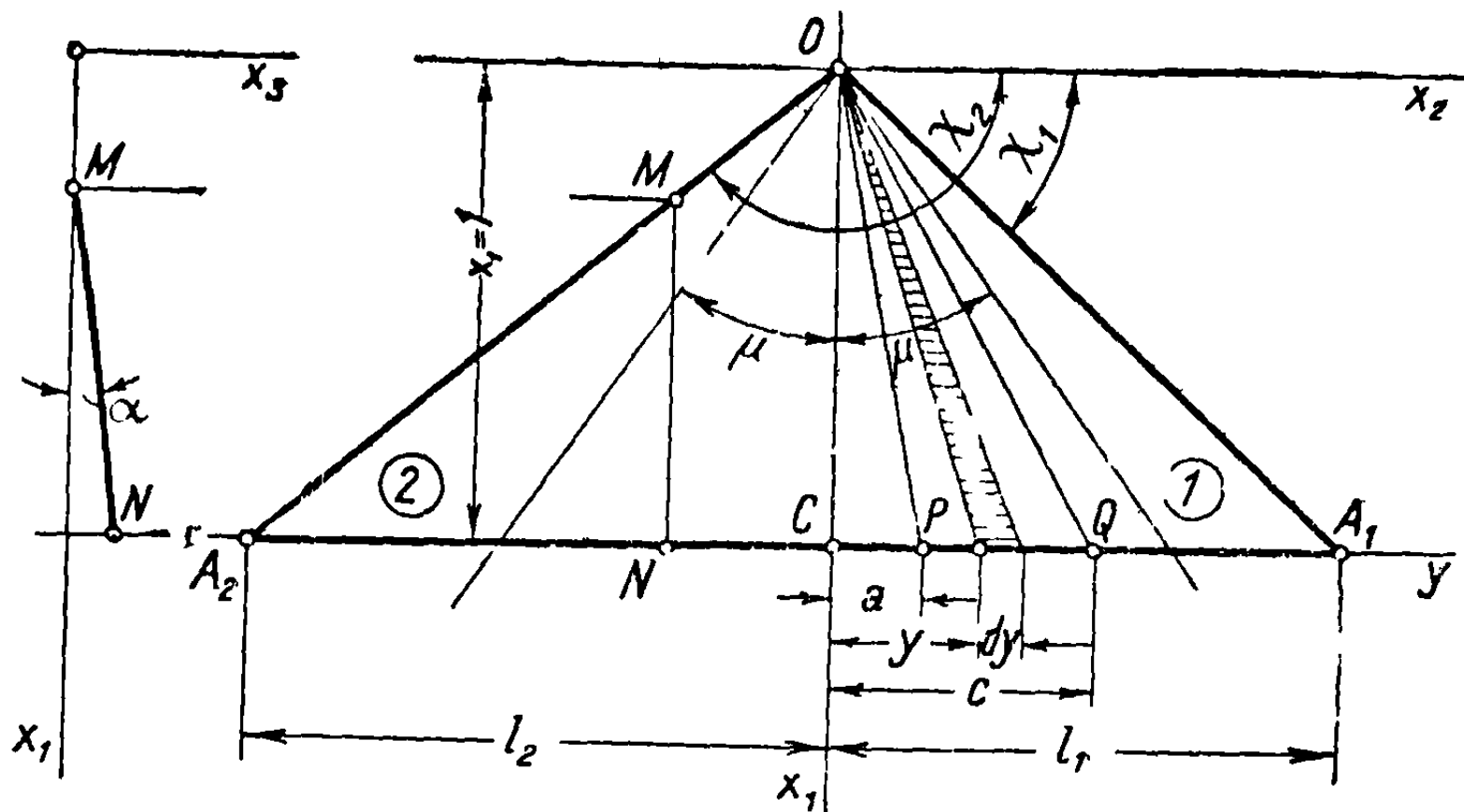
после чего, путем интегрирования, можно вычислить силы и моменты. Заметим, что давление нормально к поверхности тела и направлено внутрь поверхности. Поэтому для вычисления подъемной силы треугольного элемента поверхности (фиг. 27.2), замечая, что давление на нижней стороне равно и противоположно давлению на верхней, получим зависимость

$$dP = -2(p - p_\infty) \frac{1}{2} dy = -\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 C_p dy. \quad (27.1)$$

<sup>1</sup> Криволинейные формы и общая постановка задачи рассматриваются в работе [10].

Средняя подъемная сила  $C_{zm}$  треугольной части крыла с основанием, определенным абсциссами  $a$  и  $c$ , будет

$$\frac{c-a}{2} C_{zm} = - \int_a^c C_p dy = \frac{2}{U_\infty} \int_a^c u dy. \quad (27.2)$$



Фиг. 27.2

Аналогично средний коэффициент момента относительно  $Ox_1$ , обозначаемый через  $C_{lm}$ , дается соотношением

$$\frac{c-a}{2} (c-a) C_{lm} = - \frac{2}{3} \int_a^c C_p y dy = \frac{4}{3U_\infty} \int_a^c u y dy, \quad (27.3)$$

где  $(c-a)$  — длина основания треугольника, взятая как характеристическая длина для коэффициента момента.

Эти формулы будут впоследствии применены для вычисления подъемной силы и моментов угловидных крыльев различных форм.

### 27.1. Тонкое треугольное крыло со сверхзвуковыми ведущими кромками

Так как обе ведущие кромки сверхзвуковые (см. фиг. 27.2), течение на верхней поверхности полностью отделяется от течения на нижней; каждая поверхность ведет себя подобно крылу симметричной толщины со сверхзвуковыми кромками (см. раздел 25.1.3). Заменяя наклон  $\gamma$  через угол атаки  $\alpha$  в формулах, относящихся к этому крылу (см. уравнение 25.17), получим выражение для фиктивного потенциала в плоскости  $X$ , определенной соотношениями (24.41):

$$f(X) = - \frac{i\alpha U_\infty}{\pi B} \left[ \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \ln \frac{X + iH_1}{X - iH_1} + \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} \right] - \frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad (27.4)$$

где, в силу равенства (24.47),

$$H_1 = \sqrt{\frac{Bl_1 + 1}{Bl_1 - 1}}, \quad H_2 = \sqrt{\frac{Bl_2 - 1}{Bl_2 + 1}}. \quad (27.5)$$

Обозначая через  $u_1$  и  $u_2$  скорости на верхней поверхности крыла, в сверхзвуковых областях 1 и 2 имеем

$$u_1 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad u_2 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}. \quad (27.6)$$

При этих условиях скорость на крыле ( $Y$  в плоскости  $X$ ,  $y$  в физической плоскости  $Oyz$ ) будет соответственно

$$u = \operatorname{Re} \frac{i}{\pi} \left[ u_1 \ln \frac{Y + iH_1}{Y - iH_1} + u_2 \ln \frac{Y - iH_2}{Y + iH_2} \right] + u_1, \quad (27.7a)$$

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \left[ u_1 \operatorname{arccos} \frac{1 - B^2 l_1 y}{B(l_1 - y)} + u_2 \operatorname{arccos} \frac{1 + B^2 l_2 y}{B(l_2 + y)} \right]. \quad (27.7b)$$

В согласии с уравнением (24.43) и с известным соотношением

$$\ln \frac{Y + iH_j}{Y - iH_j} = 2i \operatorname{arctg} \left( \frac{H_j}{Y} \right) = 2i \operatorname{arctg} \left( H_j \sqrt{\frac{1 - By}{1 + By}} \right) \quad (j = 1, 2), \quad (27.8)$$

можно также выразить осевую скорость возмущения в виде

$$u = \frac{2}{\pi} \left[ u_1 \operatorname{arctg} \left( H_1 \sqrt{\frac{1 - By}{1 + By}} \right) + u_2 \operatorname{arctg} \left( H_2 \sqrt{\frac{1 - By}{1 + By}} \right) \right]. \quad (27.9)$$

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2$ ,  $u_1 = u_2$ ), то, аналогично уравнению (25.20),

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l_1^2 - y^2)}} = \\ &= -\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{n_1^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} = \frac{2u_1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{n_1^2 - k_1^2}{1 - k_1^2}} \right), \end{aligned} \quad (27.10)$$

где  $k_1$  и  $n_1$  имеют такое же значение, как в (25.5).

**27.1.1. Определение подъемной силы и волнового сопротивления.** Рассмотрим снова треугольник, основание которого определяется абсциссами  $a$  и  $c$ , а вершина лежит в точке  $O$  (фиг. 27.2); вычислим среднюю подъемную силу  $C_{zm}$ , применяя формулы (27.2). С целью упрощения осуществим замену переменных при помощи соотношения (24.43); заменяя  $y$  в физической плоскости через  $Y$  во вспомогательной плоскости  $X$ , получим

$$1 - By = \frac{2}{1 + Y^2}, \quad dy = -\frac{2}{B} d\left(\frac{1}{1 + Y^2}\right), \quad (27.11)$$

и уравнение (27.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{2} C_{zm} &= -\operatorname{Re} \frac{4}{BU} \int_A^c u d\left(\frac{1}{1 + Y^2}\right) = \\ &= -\operatorname{Re} \frac{4}{BU_\infty} \left[ \frac{u}{1 + Y^2} - \int \frac{du}{1 + Y^2} \right]_A^c, \end{aligned} \quad (27.12)$$

где  $A$  и  $C$  соответствуют  $a$  и  $c$ , как это следует из формул преобразования

$$A = \sqrt{\frac{1+Ba}{1-Ba}}, \quad C = \sqrt{\frac{1+Bc}{1-Bc}}. \quad (27.13)$$

Символ  $Re$  поставлен перед правой частью уравнения (27.12), чтобы отметить, что только действительная часть должна быть принята во внимание. Согласно уравнению (27.7а),

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1+Y^2} &= \frac{2u_1H_1}{\pi} \int \frac{dY}{(1+Y^2)(H_1^2+Y^2)} - \frac{2u_2H_2}{\pi} \int \frac{dY}{(1+Y^2)(H_2^2+Y^2)} = \\ &= \frac{2u_1H_1}{\pi(1-H_1^2)} \left( \frac{1}{H_1} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} - \operatorname{arctg} Y \right) - \\ &- \frac{2u_2H_2}{\pi(1-H_2^2)} \left( \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} - \operatorname{arctg} Y \right) + K, \end{aligned} \quad (27.14)$$

где  $K$  — некоторая постоянная.

Вводя результат в уравнение (27.12), находим среднюю подъемную силу  $C_{zm}$  для каждой части крыла. В частности, для области, заключенной внутри конуса Маха, где

$$a = -\frac{1}{B}, \quad c = \frac{1}{B}, \quad A = 0, \quad C = \infty, \quad (27.15)$$

после введения этих пределов в выражение (27.14) уравнение (27.12) принимает вид

$$C_{zm} = \frac{4}{U_\infty} \left[ u_2 + \frac{u_1}{1+H_1} - \frac{u_2}{1+H_2} \right] = \frac{4}{U_\infty} \left[ \frac{u_1}{1+H_1} + \frac{u_2H_2}{1+H_2} \right]. \quad (27.16)$$

Это уравнение может быть также представлено в других формах, если выполнить необходимую подстановку; например,

$$\begin{aligned} C_{zm} &= -\frac{4\alpha}{B} \left[ \frac{Bl_1}{1+Bl_1+\sqrt{B^2l_1^2-1}} + \frac{Bl_2}{1+Bl_2+\sqrt{B^2l_2^2-1}} \right] = \\ &= -\frac{4\alpha}{B} \left[ \frac{1}{1+n_1+\sqrt{1-n_1^2}} + \frac{1}{1+n_2+\sqrt{1-n_2^2}} \right]. \end{aligned} \quad (27.17)$$

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2$ ,  $u_1 = u_2$ ,  $n_1 = n_2$ ,  $H_1 = \frac{1}{H_2}$ ), то соответственно

$$C_{zm} = 4 \frac{u_1}{U_\infty} \frac{2}{1+H_1} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{2Bl_1}{Bl_1+1+\sqrt{B^2l_1^2-1}} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{2}{1+n_1+\sqrt{1-n_1^2}} \quad (27.18)$$

Заметим, что при вычислении полной подъемной силы части крыла (1) и (2), расположенные вне конуса Маха, ведут себя подобно крыльям бесконечного размаха, для которых  $u_1$  и  $u_2$  будут соответствующими осевы-

ми скоростями возмущения. Выполняя необходимые операции и подстановки, получим коэффициент полной подъемной силы

$$C_z = \frac{2}{l_1 + l_2} \left[ \frac{1}{2} \left( l_1 - \frac{1}{B} \right) \frac{4u_1}{U_\infty} + \frac{1}{B} \frac{4u_1}{U_\infty} \frac{1}{1 + H_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{B} \frac{4u_2}{U_\infty} \frac{H_2}{1 + H_2} + \frac{1}{2} \left( l_2 - \frac{1}{B} \right) \frac{4u_2}{U_\infty} \right] = \quad (27.19) \\ = \frac{1}{l_1 + l_2} \left[ \frac{4u_1}{U_\infty} \frac{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}{Bl_1} l_1 + \frac{4u_2}{U_\infty} \frac{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}{Bl_2} l_2 \right] = -\frac{4\alpha}{B};$$

отсюда очевидно, что треугольное крыло со сверхзвуковыми кромками работает в целом, как крыло бесконечного размаха.

Выше описан простой метод вычисления коэффициента полной подъемной силы; однако для дальнейшего применения нужно показать, что полученные результаты могут быть выведены непосредственно из уравнения (27.12), при условии, что принимается во внимание выражение (27.14). Таким образом будет показано, что результат интегрирования применим во всех случаях и подтверждает прежние вычисления (см. раздел 26).

Заметим, что пределы  $A$  и  $C$  будут теперь следующими:

$$\sqrt{\frac{1 + Bl_1}{1 - Bl_1}} = -i \sqrt{\frac{Bl_1 + 1}{Bl_1 - 1}} = -iH_1, \quad \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{1 + Bl_2}} = i \sqrt{\frac{Bl_2 - 1}{Bl_2 + 1}} = iH_2. \quad (27.20)$$

Чтобы определить значение интеграла (27.14), заметим, что  $H_1 > 1$  и  $H_2 < 1$ ; рассчитывая интеграл (27.3) в физической плоскости, будем рассматривать пределы  $-(l_2 - \epsilon)$  и  $(l_1 - \epsilon)$  как соответствующие значениям  $i(H_2 - \epsilon_2)$  и  $-i(H_1 + \epsilon_1)$ , где  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2$  — малые величины, стремящиеся к нулю.

При этих условиях получим:

для  $Y = i(H_2 - \epsilon_2)$ , когда  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ,

$$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} Y = 0, \quad \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = 0, \quad \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} = 0, \quad (27.21a)$$

для  $Y = -i(H_1 + \epsilon_1)$ , когда  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ,

$$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} Y = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} = \frac{\pi}{2}. \quad (27.21b)$$

Производя необходимые подстановки в выражения (27.14) и (27.12), получим

$$\frac{l_1 + l_2}{2} C_z = -\frac{4}{BU_\infty} \left( \frac{u_1 H_1}{1 - H_1^2} - \frac{u_2 H_2}{1 - H_2^2} \right) = -\frac{4\alpha}{B} \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad (27.22)$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью другого метода (см. формулу 27.19).

Волновое сопротивление может быть получено путем умножения подъемной силы на  $\alpha$ , откуда выводится средний коэффициент лобового сопротивления  $C_{xm}$  для каждой части крыла и, следовательно, коэффициент  $C_x$  для всего крыла:

$$C_{xm} = \alpha C_{zm}, \quad C_x = \alpha C_z. \quad (27.23)$$

27.1.2. Определение моментов. Делая, как и выше, подстановку (27.11), получим

$$ydy = \frac{4}{B^2} \left(1 - \frac{2}{1+Y^2}\right) \frac{Y dY}{(1+Y^2)^2} = \frac{2}{B^2} \left[ d\left(\frac{1}{(1+Y^2)^2}\right) - d\left(\frac{1}{1+Y^2}\right) \right]; \quad (27.24)$$

производя замену в интеграле (27.3), находим

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = - \frac{8}{3B^2 U_\infty} \int_A^c u \left[ d\left(\frac{1}{1+Y^2}\right) - d\left(\frac{1}{(1+Y^2)^2}\right) \right]. \quad (27.25)$$

Первый член под знаком интеграла был определен выше (см. формулу (27.14); значения второго члена последовательно будут

$$\int u d\left(\frac{1}{(1+Y^2)^2}\right) = \frac{u}{(1+Y^2)^2} - \int \frac{du}{(1+Y^2)^2} = \frac{u}{(1+Y^2)^2} - \frac{2u_1 H_1}{\pi} \int \frac{dY}{(1+Y^2)^2 (H_1^2 + Y^2)} + \frac{2u_2 H_2}{\pi} \int \frac{dY}{(1+Y^2)^2 (H_2^2 + Y^2)}. \quad (27.26)$$

С точностью до постоянной

$$\int \frac{dY}{(1+Y^2)^2 (H_j^2 + Y^2)} = - \frac{1}{(1-H_j^2)^2} \left[ \frac{1-H_j^2}{2} \left( \frac{Y}{1+Y^2} + \operatorname{arctg} Y_j \right) + \operatorname{arctg} Y - \frac{1}{H_j} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_j} \right] \quad (j=1,2). \quad (27.27)$$

Чтобы вычислить коэффициент момента для части крыла, расположенной внутри конуса Маха, которой соответствуют пределы интегрирования (27.15), находим

$$\int_0^\infty u d\left(\frac{1}{1+Y^2}\right) = - \left( u_2 + \frac{u_1}{1+H_1} - \frac{u_2}{1+H_2} \right), \quad (27.28a)$$

$$\int_0^\infty u d\left(\frac{1}{(1+Y^2)^2}\right) = - \left[ u_2 + \frac{u_1}{1+H_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H_1}{1+H_1}\right) - \frac{u_2}{1+H_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H_2}{1+H_2}\right) \right]; \quad (27.28b)$$

отсюда после необходимых подстановок в (27.25) имеем

$$C_{lm} = \frac{2}{3} \frac{1}{U_\infty} \left[ \frac{u_1 H_1}{(1+H_1)^2} - \frac{u_2 H_2}{(1+H_2)^2} \right] = - \frac{\alpha}{3B} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1-n_1^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-n_2^2}} \right). \quad (27.29)$$

Если крыло симметрично  $\left(l_1 = l_2, H_2 = \frac{1}{H_1}\right)$ , то, очевидно,  $C_{lm} = 0$ .

Для момента, соответствующего всему крылу, пределы интегрирования будут, как и в предыдущем случае,  $i(H_2 - \varepsilon_2)$  и  $-i(H_1 + \varepsilon_1)$ ; результаты

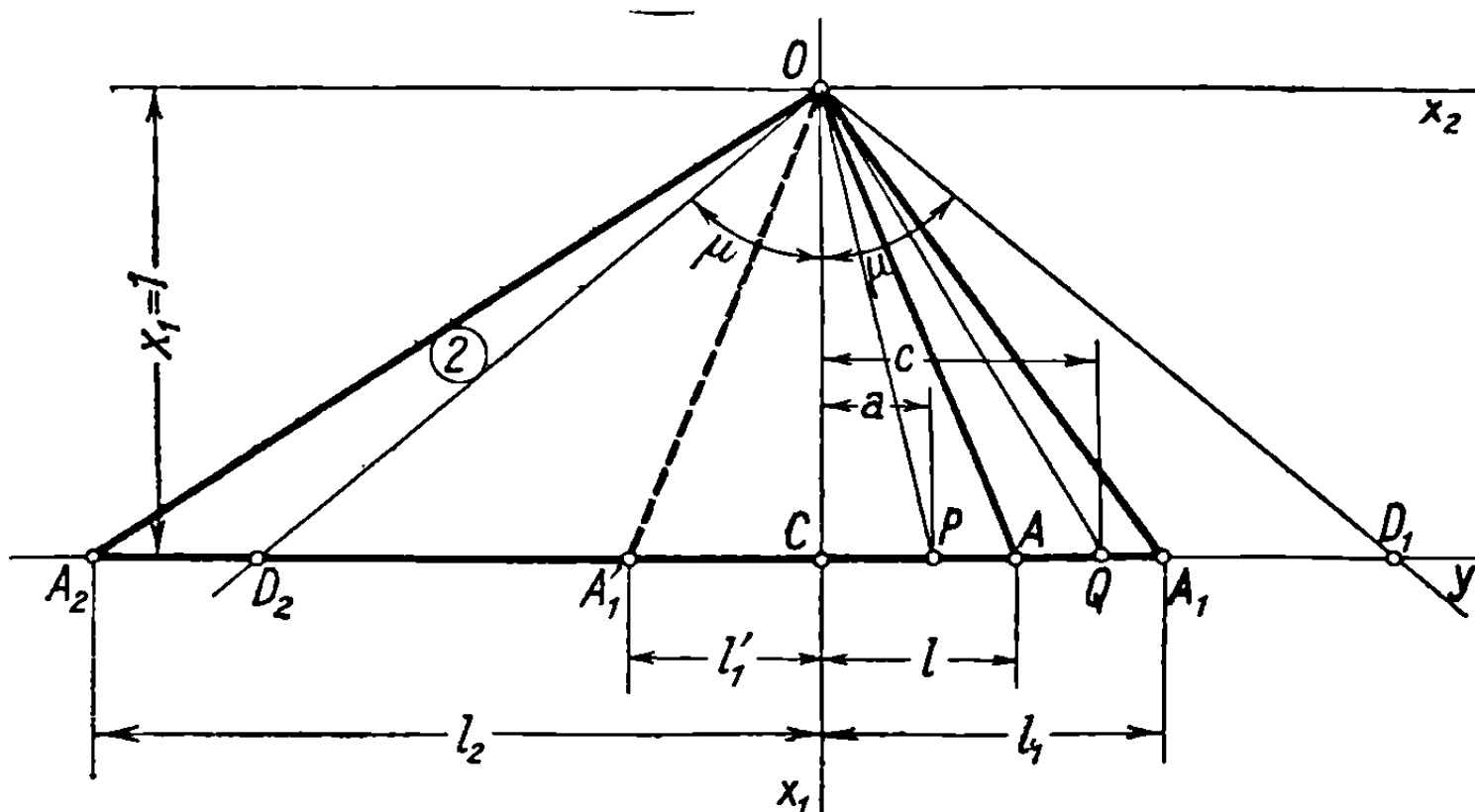


поэтому будут такими же, как (27.21а) и (27.21б); они должны быть введены в выражение (27.27). Остальные расчеты просты.

Заметим, что те же результаты можно получить, если брать моменты для каждой отдельной поверхности (1), (2) и для поверхности, заключенной внутри конуса Маха.

## 27.2. Тонкое треугольное крыло с одной сверхзвуковой ведущей кромкой

Рассмотрим треугольное крыло с дозвуковой ведущей кромкой  $OA_1$  и сверхзвуковой кромкой  $OA_2$  (фиг. 27.3), следом которого в ранее определенной плоскости  $Syz(x_1 = 1)$  будет прямолинейный отрезок.



Фиг. 27.3

Полагая, что угол атаки крыла равен нулю вплоть до точки  $A$ , где происходит внезапный скачок  $\alpha$ , получим задачу, идентичную рассмотренной в разделе 24.32. Будем следовать тому же методу и рассмотрим плоскость  $X$ , определенную уравнением (24.52); таким образом,

$$X^2 = \frac{Bl_1(\xi^2 + 1) - 2\xi}{(\xi + 1)^2}, \quad (27.30)$$

где  $\xi$  — комплексная переменная вспомогательной плоскости Буземана. При помощи такой операции получим конфигурацию, изображенную на фиг. 24.8,б, где ось абсцисс от  $-\infty$  до 0 представляет верхнюю поверхность крыла, заключенную внутри конуса Маха.

Внезапное изменение угла атаки дает фиктивный потенциал, полученный ранее (см. формулу 24.55), а условия течения на дозвуковой ведущей кромке добавляют дополнительный потенциал, определенный посредством уравнения (24.67). Функция  $u + iw' = f(X)$  будет, следовательно, полностью определена. Ее можно записать в форме

$$u + iw' = f(X) = -\frac{\alpha U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \left( \ln \frac{X + L}{X - L} - i\pi \right) + \frac{m_1}{X}. \quad (27.31)$$

которая делает также очевидной роль постоянного члена  $i\pi$  внутри скобок. Заметим, что метод, с помощью которого решается предложенная задача,

может служить также для решения задачи об элероне, которая рассмотрена в следующей главе.

Напомним, что величина  $L$  определяется соотношением (24.54)

$$L = \sqrt{\frac{B(l_1 - l)}{1 + Bl}}. \quad (27.32)$$

Для любой точки  $y$  физической плоскости, соответственно  $\eta$  во вспомогательной существуют две соответствующие точки, согласно уравнениям (27.30) и (24.13):

$$X^2 = \frac{Bl_1 \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) - 2}{\eta + \frac{1}{\eta} + 2} = \frac{B(l_1 - y)}{1 + By} = Y^2. \quad (27.33)$$

Причем, если  $y$  движется к  $A_2$  ( $y = -l_2 < -\frac{1}{B}$ ), то для этой точки

$$X_2 = \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 - Bl_2}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{Bl_2 - 1}} = -iH_2. \quad (27.34)$$

В выражении (27.31) нужно  $L$  заменить через  $-iH_2$ , и кромку  $OA$  заменить сверхзвуковой едущей кромкой  $OA_2$ . Тогда выражение для фиктивного потенциала (27.31) принимает вид

$$f(X) = -\frac{i\alpha U_\infty}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \left( \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} - i\pi \right) + \frac{m_1}{X} = \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} - i\pi \right) + \frac{m_1}{X} \quad (27.35)$$

и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям, так как  $u = u_2$  для  $X = Y = -\infty$ , причем  $u_2$  — скорость на верхней поверхности крыла, у сверхзвуковой кромки. Фиктивное течение обусловлено двумя равными и противоположными вихрями с интенсивностью  $2u_2$ , расположенными в точках  $\pm iH_2$ , и диполем с моментом  $m_1$  (фиг. 27.4).

Чтобы определить постоянную  $m_1$ , используем условие (24.25), полагая  $df = 0$  для  $y = 0$  в физической плоскости или  $Y = \pm \sqrt{Bl_1}$  во вспомогательной плоскости  $X$ . Следовательно, приравнявая нулю производную вышеприведенного выражения, получим

$$m_1 = -\frac{2u_2}{\pi} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} = -\frac{2u_2}{\pi} \frac{l_1}{l_2} \frac{\sqrt{B(l_1 + l_2)(Bl_2 - 1)}}{1 + Bl_1} = -\frac{2u_2}{\pi} \frac{\sqrt{(1 + n_2/n_1)(1 - n_2)}}{1 + n_1}, \quad (27.36)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  имеют прежнее значение (см. формулу 25.5).

Нужно снова оговорить (см. раздел 24.3.2), что фиктивное течение в верхнем полукруге вспомогательной плоскости  $\xi$  представляется во втором квадранте плоскости  $X$  (см. фиг. 27.4).

Приступая к определению скорости возмущения на крыле и рассматривая абсциссу, соответствующую точкам на верхней поверхности, всегда как отрицательную, получим

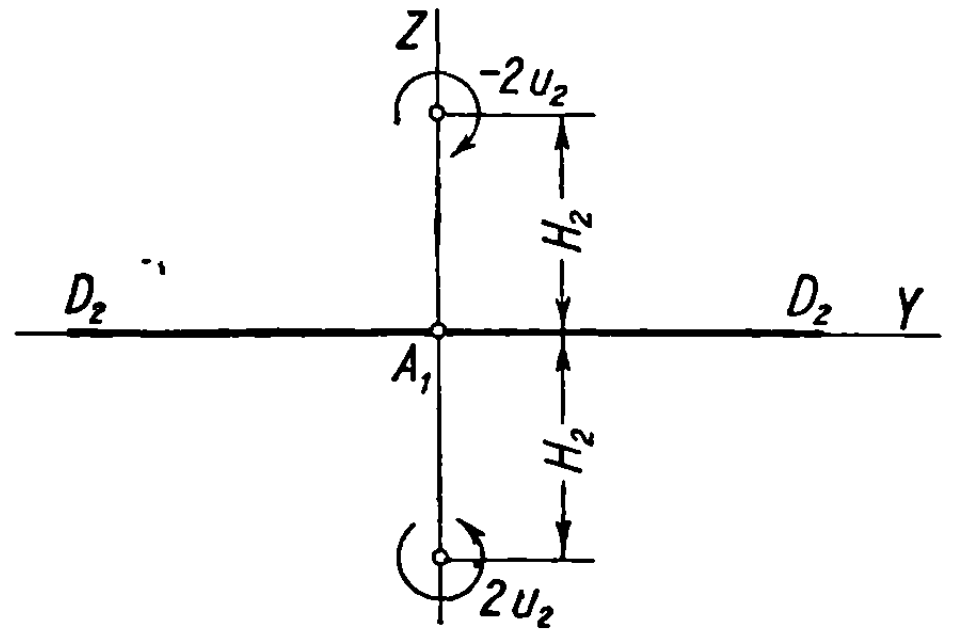
$$u = \operatorname{Re} \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} - i \pi \right) + \operatorname{Re} \frac{m_1}{Y}; \quad (27.37)$$

заменяв величину  $Y$  через ее значения в функции от  $y$  (см. формулу 27.33), принимая отрицательный знак для корня, соответствующего точкам на верхней поверхности крыла, и преобразуя выражение, представленное в виде логарифма, в тригонометрическое с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \ln \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} &= -2i \operatorname{arctg} \frac{H_2}{Y} = \\ &= 2i \operatorname{arctg} \left( H_2 \sqrt{\frac{1 + By}{B(l_1 - y)}} \right), \end{aligned} \quad (27.38)$$

получим

$$u = \frac{u_2}{\pi} \left[ \pi - 2 \operatorname{arctg} \left( H_2 \sqrt{\frac{1 + By}{B(l_1 - y)}} \right) \right] - m_1 \sqrt{\frac{1 + By}{B(l_1 - y)}}. \quad (27.39)$$



Фиг. 27.4

**27.2.1. Случай дозвуковой задней кромки.** Если кромка  $OA_1$  займет положение  $AO'_1$ , то она становится задней кромкой и  $l_1$  принимает отрицательное значение. Условие  $df = 0$ , соответственно  $Y = \pm \sqrt{Bl_1}$ , больше не требуется. В действительности скорость в этой точке становится бесконечной, потому что образуется вихревая пелена, вызывающая появление особенности в точке  $C$ ; это можно легко показать вычислением циркуляции вокруг крыла вдоль части  $A'_1O$ .

Так как процесс на задней кромке в точке  $A'_1$  дозвуковой, местная скорость в этой точке могла бы стать бесконечной. Во избежание этого предположим, что скорость равна нулю, соответственно гипотезе Жуковского для аэродинамических профилей в несжимаемой жидкости. Решение, удовлетворяющее поставленным выше условиям, становится таким же, как и в предшествующем случае, за исключением диполя в точке  $A_1$ , который в точке  $A'_1$  исчезает. Заменяя  $l_1$  через  $-l'_1$ , приведем формулы предыдущего случая соответственно к виду

$$\begin{aligned} Y^2 &= \frac{-B(l'_1 + y)}{1 + By}, \\ H'_2 &= \sqrt{\frac{B(l_2 - l'_1)}{B l_2 - 1}}. \end{aligned} \quad (27.40)$$

фиктивный потенциал получит выражение

$$u + iu' = f(X) = \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{X - i H'_2}{X + i H'_2} - i \pi \right). \quad (27.41)$$

На крыле, как и выше,

$$u = \operatorname{Re} \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} - i \pi \right) =$$

$$= \frac{u_2}{\pi} \left[ \pi - 2 \operatorname{arctg} \left( H_2' \sqrt{\frac{1 + B y}{-B(l_1' + y)}} \right) \right], \quad (27.42)$$

где абсциссу  $Y$  нужно взять отрицательной.

**27.2.2. Определение подъемной силы и лобового сопротивления.** Как и в предыдущем случае, средняя подъемная сила в треугольной части крыла с основанием  $(c - a)$  и высотой, равной единице (см. фиг. 27.3.), дается соотношением (27.2), которое можно преобразовать введением переменной  $Y$ , определенной уравнением (27.33). Таким образом, выводим соотношение

$$dy = - \frac{(1 + B y)^2}{B(1 + B l_1)} 2Y dY = - \frac{1 + B l_1}{B} \frac{2Y dY}{(1 + Y^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + B l_1}{B} d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right) \quad (27.43)$$

и уравнение (27.2) принимает вид

$$\frac{c - a}{2} C_{zm} = \frac{2(1 + B l_1)}{B U_\infty} \int_A^c u d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right), \quad (27.44)$$

где  $A$  и  $C$  — пределы интегрирования, соответствующие  $a$  и  $c$ :

$$A = - \sqrt{\frac{B(l_1 - a)}{1 + B a}}, \quad C = - \sqrt{\frac{B(l_1 - c)}{1 + B c}}. \quad (27.45)$$

С точностью до постоянной

$$- \int \frac{m_1}{Y} d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right) = 2m_1 \int \frac{dY}{(1 + Y^2)^2} = \frac{m_1 Y}{1 + Y^2} + m_1 \operatorname{arctg} Y; \quad (27.46)$$

делая подстановку

$$v = \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} - i \pi \right), \quad (27.47)$$

получим

$$\int v d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right) = \frac{v}{1 + Y^2} + \frac{2u_2 H_2}{\pi(1 - H_2^2)} \int \left( \frac{dY}{H_2^2 + Y^2} - \frac{dY}{1 + Y^2} \right) =$$

$$= \frac{v}{1 + Y^2} + \frac{2u_2 H_2}{\pi(1 - H_2^2)} \left( \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} - \operatorname{arctg} Y \right). \quad (27.48)$$

Для части крыла, содержащейся внутри конуса Маха,

$$a = - \frac{1}{B}, \quad c = l_1, \quad A = - \infty, \quad C = 0; \quad (27.49)$$

отсюда

$$- \int_{-\infty}^0 \frac{m_1}{Y} d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right) = \frac{\pi}{2} m_1, \quad (27.50a)$$

$$\int_{-\infty}^0 v d \left( \frac{1}{1+Y^2} \right) = \frac{u_2}{1+H_2} \quad (27.506)$$

и

$$\begin{aligned} C_{zm} &= \frac{4u_2}{U_\infty} \frac{1}{1+H_2} - \frac{2\pi m_1}{U_\infty} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} \left[ \frac{1}{1+H_2} + \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} \right] = \\ &= -\frac{4\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} \left[ \frac{1}{1+H_2} + \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} \right]. \end{aligned} \quad (27.51)$$

Если  $OA_1$  займет положение  $OA'_1$ , то кромка становится дозвуковой задней кромкой, момент диполя исчезает ( $m_1 = 0$ ), и записанная выше формула принимает вид

$$C'_{zm} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} \frac{1}{1+H'_2}, \quad (27.52)$$

где  $H'_2$  определяется выражением (27.40).

Формулы (27.51) и (27.52) охватывают все случаи, изображенные на фиг. 27.5, и будут применены для вычисления аэродинамических характеристик крыльев обычной формы.

Для вычисления полного лобового сопротивления заметим, что при  $a = -(l_2 - \varepsilon)$ ,  $c = l_1$  пределы соответственно будут

$$A = i(H_2 + \varepsilon_2), \quad C = 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0; \quad (27.53)$$

следовательно,

$$\operatorname{arctg} Y \Big|_{i(H_2 + \varepsilon_2)} = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \Big|_{i(H_2 + \varepsilon_2)} = \frac{\pi}{2}. \quad (27.54)$$

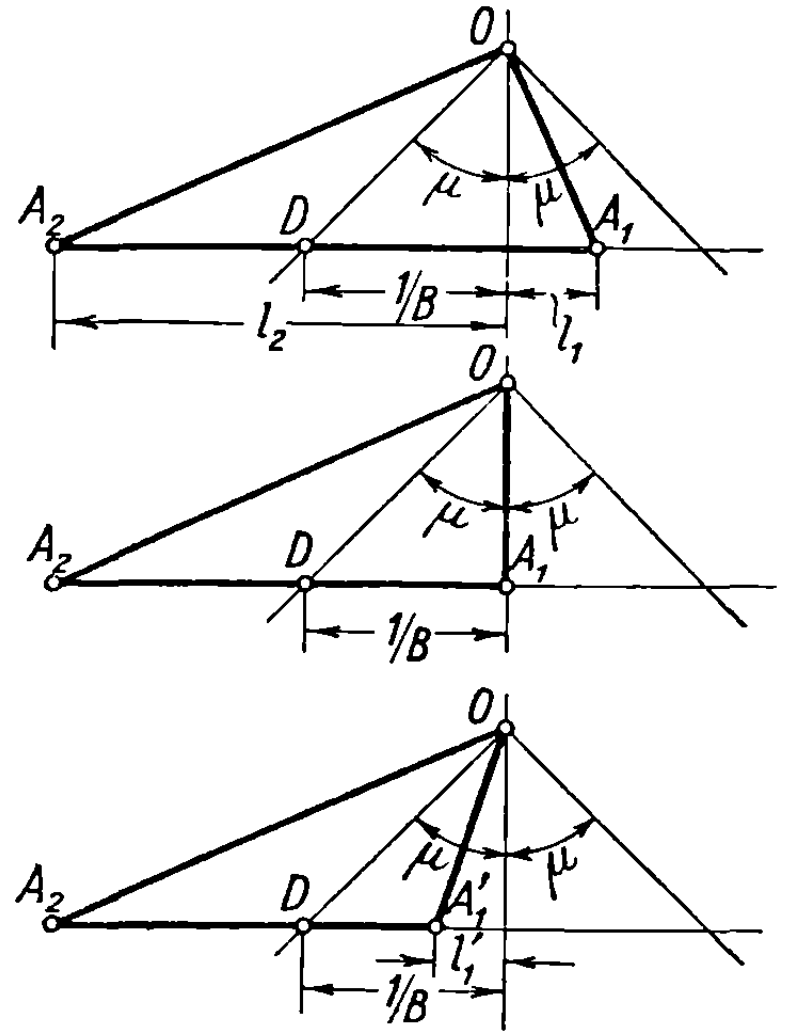
Поставляя этот результат в уравнения (27.46) и (27.48), определим коэффициент полной подъемной силы  $C_z$ . Величина его может быть выведена и другим методом — путем сложения подъемных сил поверхностей, расположенных внутри и вне конуса Маха (см. фиг. 27.3);

таким образом, получаем

$$(l_1 + l_2)C_z = \left(l_2 - \frac{1}{B}\right)C_{z2} + \left(l_1 + \frac{1}{B}\right)C_{zm}, \quad (27.55)$$

где  $C_{z2}$  — коэффициент подъемной силы части крыла (2), на которой будет течение двумерным, следовательно,

$$C_z = -\frac{4\alpha}{B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{Bl_2 + 1}}. \quad (27.56)$$



Фиг. 27.5

Для вычисления лобового сопротивления подъемная сила умножается на  $\alpha$  и получаются те же формулы ( $C_{xm} = \alpha C_{zm}$ ,  $C_x = \alpha C_z$ ), что и в предыдущем случае (см. формулы 27.23).

**27.2.3. Определение моментов.** Чтобы вычислить интеграл в уравнении (27.3), должна быть выполнена прежняя замена переменных:

$$\begin{aligned} ydy &= - \left( \frac{1 + Bl_1}{B} \right)^2 \frac{2Y dY}{(1 + Y^2)^3} + \frac{1 + Bl_1}{B^2} \frac{2Y dY}{(1 + Y^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + Bl_1}{B} \right)^2 d \left( \frac{1}{(1 + Y^2)^2} \right) - \frac{1 + Bl_1}{B^2} d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right); \end{aligned} \quad (27.57)$$

подставляя это значение в уравнение (27.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{(c - a)^2}{2} C_{lm} &= \frac{2}{3U_\infty} \left( \frac{1 + Bl_1}{B} \right)^2 \int_A^c u d \left( \frac{1}{(1 + Y^2)^2} \right) - \\ &- \frac{4}{3U_\infty} \frac{1 + Bl_1}{B^2} \int_A^c u d \left( \frac{1}{1 + Y^2} \right). \end{aligned} \quad (27.58)$$

Второй интеграл в правой части равенства известен из предшествующего случая; для первого интеграла с точностью до постоянной получим выражение

$$\begin{aligned} \int \frac{m_1}{Y} d \left( \frac{1}{(1 + Y^2)^2} \right) &= -4m_1 \int \frac{dY}{(1 + Y^2)^3} = \\ &= -4m_1 \left[ \frac{1}{4} \frac{Y}{(1 + Y^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{Y}{1 + Y^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} Y \right] \end{aligned} \quad (27.59)$$

и

$$\begin{aligned} \int v d \left( \frac{1}{(1 + Y^2)^2} \right) &= \frac{v}{(1 + Y^2)^2} + \frac{2u_2 H_2}{\pi} \int \frac{dY}{(1 + Y^2)^2 (H_2^2 + Y^2)} = \\ &= \frac{v}{(1 + Y^2)^2} - \frac{2u_2 H_2}{\pi(1 - H_2^2)^2} \left[ \frac{1 - H_2^2}{2} \left( \frac{Y}{1 + Y^2} + \operatorname{arctg} Y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} Y - \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \right]. \end{aligned} \quad (27.60)$$

Для части крыла внутри конуса Маха ( $a = -\frac{1}{B}$ ,  $c = l_1$ ) пределы интегрирования будут  $A = -\infty$ ,  $C = 0$ ; соответственно получим

$$\operatorname{arctg} Y \Big|_{-\infty}^0 = \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}; \quad (27.61)$$

коэффициент момента после соответствующих подстановок примет следующие различные формы, нужные для применения:

$$\begin{aligned}
C_{lm} &= \frac{4}{3U_\infty} \int_{-\infty}^0 ud \left( \frac{1}{(1+Y^2)^2} \right) - \frac{8}{3U_\infty(1+Bl_1)} \int_{-\infty}^0 ud \left( \frac{1}{1+Y^2} \right) = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\pi m_1}{U_\infty} \frac{1-3Bl_1}{4(1+Bl_1)} - \frac{4}{3} \frac{u_2}{U_\infty} \frac{1}{1+H_2} \left( \frac{1-Bl_1}{1+Bl_1} + \frac{H_2}{2(1+H_2)} \right) = \\
&= -\frac{4}{3} \frac{u_2}{U_\infty} \left[ \frac{1-3Bl_1}{2(1+Bl_1)} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} + \frac{1}{1+H_2} \left( \frac{1-Bl_1}{1+Bl_1} + \frac{H_2}{2(1+H_2)} \right) \right] = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} \left[ \frac{1-3Bl_1}{2(1+Bl_1)} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} + \frac{1}{1+H_2} \left( \frac{1-Bl_1}{1+Bl_1} + \frac{H_2}{2(1+H_2)} \right) \right].
\end{aligned} \tag{27.62}$$

В случае дозвуковой задней кромки  $l_1$  заменится на  $-l_1$ , тогда как  $m_1 = 0$ ; в результате

$$\begin{aligned}
C'_{lm} &= -\frac{4}{3} \frac{u_2}{U_\infty} \frac{1}{1+H'_2} \left[ \frac{1+Bl'_1}{1-Bl'_1} + \frac{H'_2}{2(1+H'_2)} \right] = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} \frac{1}{1+H'_2} \left[ \frac{1+Bl'_1}{1-Bl'_1} + \frac{H'_2}{2(1+H'_2)} \right],
\end{aligned} \tag{27.63}$$

где  $H'_2$  определяется формулой (27.40).

Для определения коэффициента полного момента применим те же интегралы, с пределами интегрирования, данными равенствами (27.53). Может быть принята и другая процедура, когда записываются моменты каждой части крыла, как было сделано при определении подъемной силы.

### 27.3. Треугольное крыло с дозвуковыми ведущими кромками

Так как ведущие кромки крыла  $OA_1$  и  $OA_2$  дозвуковые, след  $A_2A_1$  полностью содержится внутри круга радиуса  $1/B$  в плоскости  $Syz$  (фиг. 27.6). Посредством геометрического преобразования Буземана (24.13) получается плоскость  $\xi$  (фиг. 27.7,а), которая может быть далее представлена на бесконечной плоскости  $x = y + i\xi$  (фиг. 27.7,б) с помощью функции (24.57):

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad \xi = \frac{1 - \sqrt{1-B^2x^2}}{Bx}, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{1 + \sqrt{1-B^2x^2}}{Bx}. \tag{27.64}$$

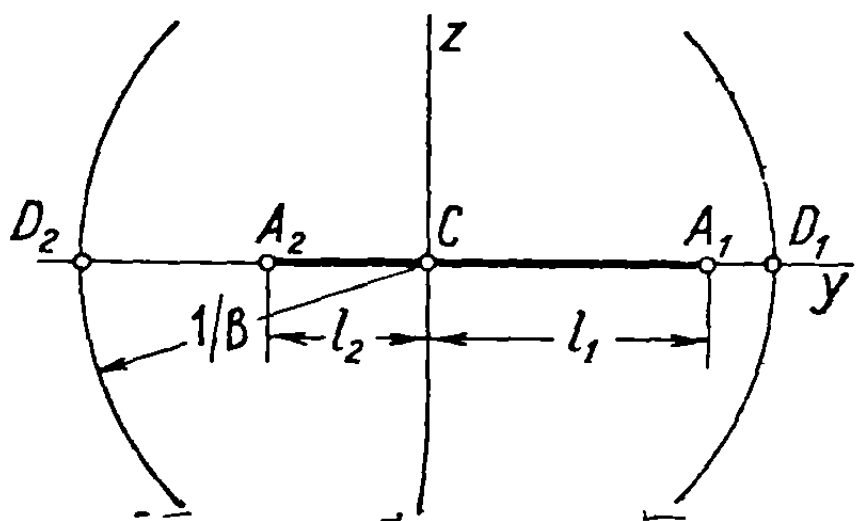
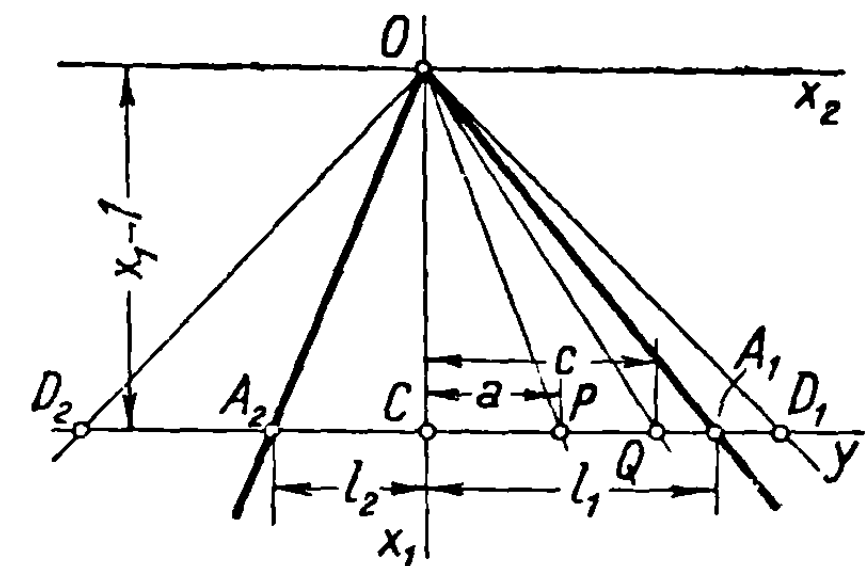
Это преобразование точно воспроизводит след крыла на оси абсцисс в его действительных размерах вследствие того, что преобразование в точках на оси абсцисс соответствует преобразованию Буземана и поэтому точно воспроизводит ось абсцисс физической плоскости (см. фиг. 27.6).

Применение указанного преобразования можно особенно рекомендовать для более сложных задач, как показано позже.

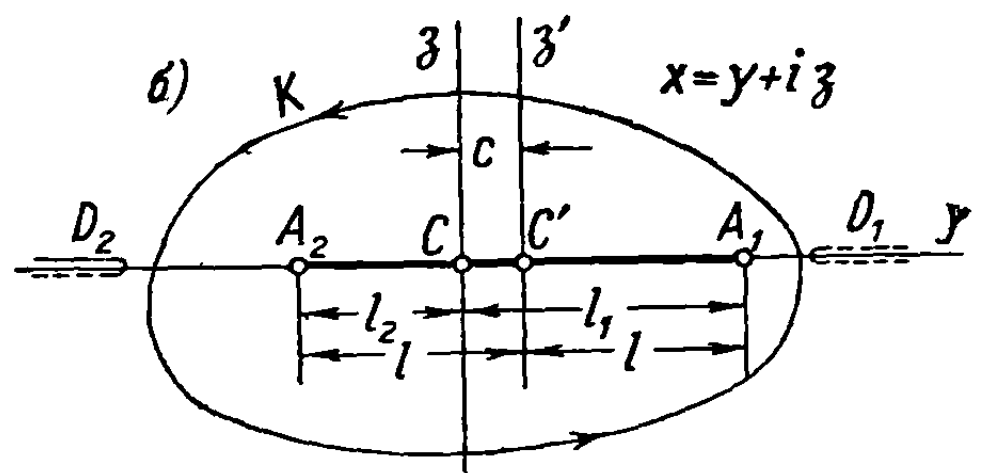
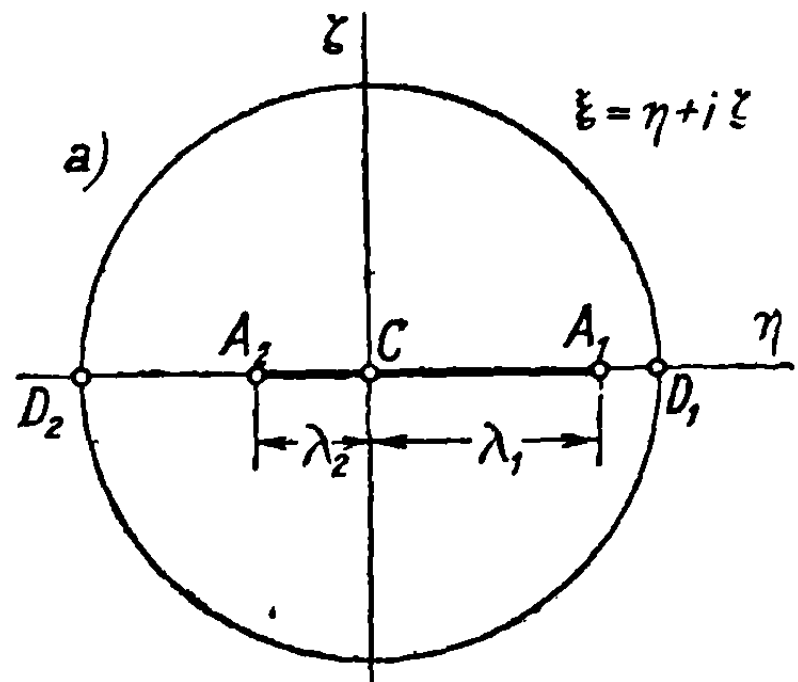
Таким образом, вся задача сводится к нахождению фиктивного течения вокруг пластинки  $A_2A_1$  в плоскости  $x$ , удовлетворяющего следующим условиям:

- 1) отрезок  $A_2A_1$  является линией тока, так как он представляет след крыла во вспомогательной плоскости;
- 2) остальные части оси абсцисс, кроме отрезка  $A_2A_1$ , представляющие линии  $D_2A_2$ ,  $A_1D_1$ , и единичная окружность во вспомогательной плоскости  $\xi$  составляют эквипотенциальную линию, так как вдоль этих линий  $u = 0$ ;

3) при подходе к точкам  $A_1, A_2$  скорость стремится к бесконечности, как  $(x - l_1)^{-1/2}$ , соответственно  $(x + l_2)^{-1/2}$ ; она также стремится к бесконечности в плоскости  $\xi$ , подобно  $(\xi - \lambda_1)^{-1/2}$  или  $(\xi + \lambda_2)^{-1/2}$  (см. формулу 24.67);



Фиг. 27.6



Фиг. 27.7

4) так как на единичной окружности в плоскости  $\xi$  скорость равна нулю, она будет равна нулю и на бесконечности в плоскости  $x$ , так как существует соответствие между некоторыми [определенными точками на единичной окружности и бесконечно удаленными точками плоскости  $x$ .

Функция, удовлетворяющая всем этим условиям, имеет вид

$$u + iu' = f(x) = \frac{i(q_0 + q_1 x)}{\sqrt{(x - l_1)(x + l_2)}}, \quad (27.65)$$

где  $q_1$  определяется наложением условия  $df = 0$  для  $x = 0$ ; в результате получим

$$q_1 = \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} q_0. \quad (27.66)$$

Чтобы найти  $u$ , возьмем действительную часть выражения (27.65); таким образом

$$u = \frac{q_0 \left(1 + \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} y\right)}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}}; \quad (27.67)$$

постоянную  $q_0$  определим позже с помощью других граничных условий.

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2 = l$ ), то имеем выражения: для комплексной функции скорости возмущения

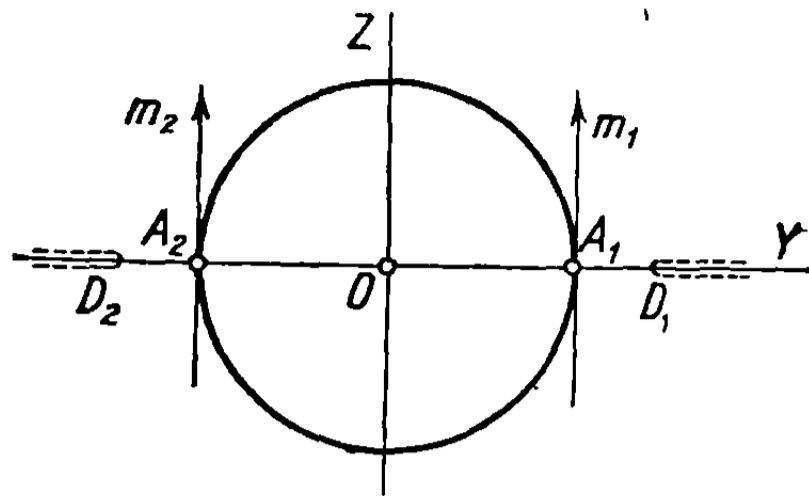
$$u + iu' = f(x) = \frac{i q_0}{\sqrt{x^2 - l^2}}; \quad (27.68)$$



для самой скорости

$$u = \frac{q_0}{\sqrt{l^2 - y^2}}. \quad (27.69)$$

Выражение (27.65) для потенциала фиктивного течения может быть легко получено посредством гидродинамической аналогии. Осуществим пре-



Фиг. 27.8

образование пластинки  $A_2A_1$  на вспомогательной плоскости на единичную окружность другой вспомогательной плоскости  $X$  (фиг. 27.8) с помощью функции

$$x - c = \frac{l}{2} \left( X + \frac{1}{X} \right),$$

$$X = \frac{x - c}{l} + \sqrt{\left( \frac{x - c}{l} \right)^2 - 1}, \quad (27.70)$$

$$\frac{1}{X} = \frac{x - c}{l} - \sqrt{\left( \frac{x - c}{l} \right)^2 - 1},$$

где

$$2c = l_1 - l_2, \quad 2l = l_1 + l_2. \quad (27.71)$$

Заметим, что преобразования в окрестности точек  $A_1$  и  $A_2$  описываются соответственно приближенными равенствами

$$X - 1 \approx a(x - l_1)^{1/2},$$

$$X + 1 \approx b(x + l_2)^{1/2}. \quad (27.72)$$

Следовательно, скорость стремится к бесконечности вблизи точек  $A_1$  и  $A_2$ , как  $(X - 1)^{-1}$  и  $(X + 1)^{-1}$ . Отсюда вытекает, что в указанных точках течение сводится к двум диполям, оси которых касаются единичной окружности, так как последняя является линией тока как для диполей, так и для фиктивного течения, которое должно быть определено.

Так как оси диполей вертикальны, то, обозначая соответственно моменты диполей через  $m_1$  и  $m_2$ , определим потенциал фиктивного течения с точностью до чисто мнимой величины выражением

$$f(X) = \frac{im_1}{X - 1} + \frac{im_2}{X + 1} + i \frac{(m_1 - m_2)}{2} = \frac{i}{X - \frac{1}{X}} \left[ m_1 + m_2 + \frac{m_1 - m_2}{2} \left( X + \frac{1}{X} \right) \right]. \quad (27.73)$$

После необходимых подстановок (27.70) получаем снова выражение (27.65) в виде

$$f(x) = \frac{i}{2} \frac{m_1 l_2 + m_2 l_1 + (m_1 - m_2)x}{\sqrt{(x - l_1)(x + l_2)}}, \quad (27.74)$$

где постоянные  $m_1$  и  $m_2$  даются соотношениями

$$2q_0 = m_1 l_2 + m_2 l_1, \quad 2q_1 = m_1 - m_2, \quad (27.75)$$

выведенными из идентичности формул (27.74) и (27.65).

Приведенные рассуждения показывают решение подобных задач с помощью метода гидродинамической аналогии.

Приступая к определению постоянной  $q_0$ , применим уравнение (24.17), так как его действительная часть дает вертикальный, движущийся вниз поток; рассматривая в плоскости  $x = y + i\zeta$  две точки — одну на бесконечности, где  $\omega = 0$ , и другую на пластинке, где  $\omega = \alpha U_\infty$ , получим

$$-\alpha U_\infty = \operatorname{Re} \frac{iB}{2} \int_{\zeta=0}^{\zeta=\infty} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d\xi. \quad (27.76)$$

Принимая ради упрощения

$$x' = x - c = y - c + i\zeta, \quad (27.77)$$

имеем

$$\frac{iB}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) = -iB \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{Bx} = -iB \frac{\sqrt{1 - B^2 (x' + c)^2}}{B(x' + c)}; \quad (27.78)$$

подставляя результат в уравнение (27.65), получим

$$f(x') = \frac{i q_0}{l_1 l_2} \frac{l^2 + c x'}{\sqrt{x'^2 - l^2}},$$

$$df = -i q_0 \frac{l^2}{l_1 l_2} \frac{(c + x') dx'}{(x'^2 - l^2) \sqrt{x'^2 - l^2}}. \quad (27.79)$$

Приведенный выше интеграл будет иметь вид

$$-\alpha U_\infty = -\operatorname{Re} q_0 \frac{l^2}{l_1 l_2} \int_{\zeta=0}^{\zeta=\infty} \frac{\sqrt{1 - B^2 (x' + c)^2}}{(x'^2 - l^2) \sqrt{x'^2 - l^2}} dx'; \quad (27.80)$$

если интегрирование производится вдоль оси ординат ( $x' = i\zeta$ ,  $dx' = i d\zeta$ ), то

$$-\alpha U_\infty = \operatorname{Re} \frac{q_0 l^2}{l_1 l_2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 - B^2 (i\zeta + c)^2}}{(l^2 + \zeta^2) \sqrt{l^2 + \zeta^2}} d\zeta. \quad (27.81)$$

Далее последовательно имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sqrt{1 - B^2 (i\zeta + c)^2} &= \operatorname{Re} \sqrt{1 - B^2 c^2 + B^2 \zeta^2 - 2iB^2 c \zeta} = \\ &= \sqrt{1 - B^2 c^2 + B^2 \zeta^2} \left( 1 + \frac{B^4 c^2 \zeta^2}{2(1 - B^2 c^2 + B^2 \zeta^2)^2} + \dots \right) \approx \\ &\approx \sqrt{1 - B^2 c^2 + B^2 \zeta^2}, \end{aligned} \quad (27.82)$$

причем приближение оправдывается, так как максимальная величина второго члена в скобках после интегрирования имеет порядок

$$\frac{1}{8} \frac{B^2 c^2}{1 - B^2 c^2} < \frac{1}{8} \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{24},$$

предполагая, в крайнем случае, что  $l_2 = 0$ ,  $2c = 2l = l_1 = \frac{1}{B}$ .

Заменяя переменную через

$$\xi = l \operatorname{tg} \varphi, \quad (27.83)$$

приведем интеграл (26.81) к виду

$$\begin{aligned} -\alpha U_\infty &= \frac{q_0}{l_1 l_2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - B^2 c^2) - (1 - B^2 c^2 - B^2 l^2) \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \\ &= q_0 \frac{\sqrt{1 - B^2 c^2}}{l_1 l_2} E(k_1), \end{aligned} \quad (27.84)$$

где  $E(k_1)$  — эллиптический интеграл второго рода, с модулем

$$k_1 = \sqrt{1 - \frac{B^2 l^2}{1 - B^2 c^2}}. \quad (27.85)$$

Постоянная  $q_0$  будет, следовательно, определена соотношением

$$q_0 = -\frac{\alpha U_\infty}{E(k_1)} \frac{l_1 l_2}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}. \quad (27.86)$$

Ее можно определить точно путем использования эллиптических функций [22].

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2 = l$ ,  $c = 0$ ), то нет необходимости в приближении (27.82), и получается эллиптический интеграл второго рода  $E(k)$  с модулем

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}; \quad (27.87)$$

в этом случае для величины  $q_0$  будем иметь выражение

$$q_0 = -\frac{\alpha U_\infty l^2}{E(k)}. \quad (27.88)$$

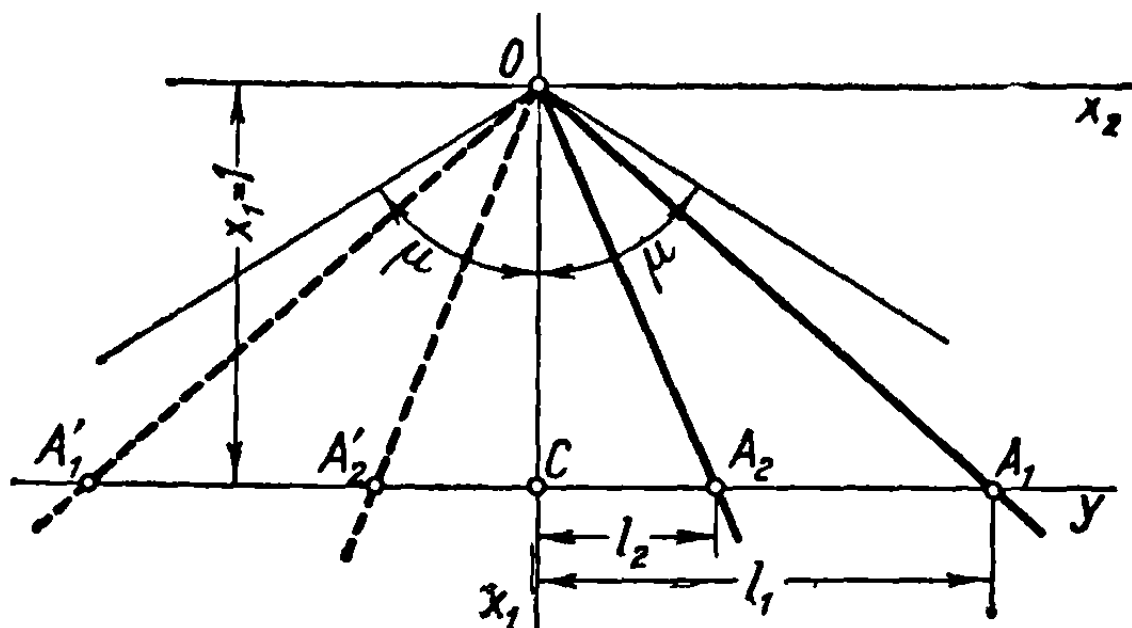
**27.3.1. Случай, когда одна из кромок крыла становится задней кромкой.** Действуем так же, как в предшествующем случае; но скорость должна быть равна нулю на задней кромке в точке  $A_2$  (фиг. 27.9). Так как только это условие и будет новым, то потенциал фиктивного течения в плоскости  $x$  будет иметь ту же форму, что и выражение (27.65); постоянные, однако, должны быть определены так, чтобы удовлетворить указанному условию.

Функция скорости получит выражение

$$f(x) = \frac{i(q_0 + q_1 \lambda)}{\sqrt{(x - l_1)(x - l_2)}} = \frac{i q (x - l_2)}{\sqrt{(x - l_1)(x - l_2)}} = i q \sqrt{\frac{x - l_2}{x - l_1}}, \quad (27.89)$$

которое удовлетворяет всем требуемым условиям. Подставляя в написанное выражение  $y$  вместо  $x$  и беря действительную часть, получим в точке на крыле

$$u = q \sqrt{\frac{y - l_2}{l_1 - y}}. \quad (27.90)$$



Фиг. 27.9

Постоянная  $q$  может быть, как и раньше, определена путем вычисления интеграла (27.76):

$$-\alpha U_\infty = -\operatorname{Re} q \frac{l_1 - l_2}{2} \int_{\text{пластинка}}^{1/B} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} dx}{x(x - l_1) \sqrt{(x - l_1)(x - l_2)}}. \quad (27.91)$$

Вычисление этого интеграла легко произвести при помощи эллиптических функций [22].

Предполагая, что величина  $l_2$  очень мала,

$$l_2 \approx 0, \quad (27.92)$$

получим такой же эллиптический интеграл, как в предыдущем случае, следовательно,

$$q = -\frac{\alpha U_\infty l}{\sqrt{1 - B^2 c^2} E(k_1)}, \quad (27.93)$$

где  $k_1$  и  $E(k_1)$  имеют прежние значения.

Предполагая, что другое крыло, имеющее равный по величине и противоположный по знаку угол атаки (фиг. 27.9), расположено с левой стороны, симметрично относительно оси  $Ox_1$ , получим решение задачи из предыдущего посредством конформного преобразования, полагая  $x = x'^2$  (соответственно  $l_1 = l_1'^2$ ,  $l_2 = l_2'^2$ ). С целью упрощения сохраним прежнее переменное  $x$ , опуская штрихи, так что

$$f(x) = iq \sqrt{\frac{x^2 - l_2^2}{x^2 - l_1^2}}; \quad (27.94)$$

если  $l_2 = 0$ , то, полагая  $l_1 = l$ , получим

$$f(x) = iq \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}}. \quad (27.95)$$

Чтобы определить постоянную  $q$ , применяя то же соотношение (27.76), нужно подставить пределы интегрирования  $y = l$  и  $y = 1/B$ ; в этих точках скорость направленного вниз потока будет соответственно  $\alpha U_\infty$  и 0; таким образом, получим выражение

$$-\alpha U_\infty = -Re \, q l^2 \int_{\text{пластинка}}^{1/B} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{dx}{(x^2 - l^2)^{1/2}}, \quad (27.96)$$

которое очень легко интегрируется, если принять специальные меры предосторожности в отношении особенностей.

**27.3.2. Вычисление подъемной силы и лобового сопротивления.** Рассмотрим треугольник с вершиной в точке  $O$  и основанием  $(c - a)$  (см. фиг. 27.6 и 27.7); применяя формулу (27.2), в согласии с выражением (27.67) получим интеграл

$$\frac{c - a}{2} C_{zm} = \frac{2}{U_\infty} \int_a^c u dy = \frac{2}{U_\infty} \int_a^c \frac{q_0 + q_1 y}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} dy; \quad (27.97)$$

для получения полного коэффициента применим метод вычетов. Замечая что  $(c - a) = l_1 + l_2 = 2l$ , устанавливаем последовательно формулу

$$C_z = \frac{2}{U_\infty} \int_{-l_2}^{l_1} u dy = -\frac{1}{U_\infty} \oint_{A_2 A_1} u dy = -\frac{1}{U_\infty} \oint_K f(x) dx, \quad (27.98)$$

так как на следе крыла  $u' = \zeta = 0$ . Расширяя контур интегрирования  $K$ , что допустимо, так как пространство неограниченно, находим

$$\frac{1 + \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} x}{\sqrt{(x - l_1)(x + l_2)}} \Big|_{x \rightarrow \infty} = \left( \frac{1}{x} + \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{l_1}{x} - \frac{1}{2} \frac{l_2}{x} \dots \right) \Big|_{x \rightarrow \infty} \approx \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} + \frac{l^2}{l_1 l_2} \frac{1}{x}; \quad (27.99)$$

отсюда, вычисляя интеграл по теореме о вычетах, выводим коэффициент подъемной силы

$$C_z = \frac{2\pi l q_0}{l_1 l_2 U_\infty} = -\frac{2\pi l \alpha}{\sqrt{1 - B^2 c^2} E(k_1)}. \quad (27.100)$$

Для симметричного крыла ( $l_1 = l_2 = l$ ) с удлинением  $\lambda = 4l$  полученное соотношение примет вид

$$C_z = -\frac{2\pi l \alpha}{E(k)} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda \alpha}{E(k)}; \quad (27.101)$$

таким образом, мы возвращаемся к формуле Стюарта [23].

Знак минус обусловлен тем, что угол атаки должен рассматриваться как отрицательный, когда передняя часть крыла приподнята.

Формула (27.101) стличается от формулы (16.22), найденной в предположении, что величина  $B l$  очень мала, только членом  $E(k)$  в знаменателе. Значение  $E(k)$  можно считать равным единице, если величина  $B l$  очень мала, так как в этом случае  $k = \sqrt{1 - B^2 l^2} \approx 1$ .

Когда имеется дозвуковая задняя кромка, результат должен быть идентичным. Так, разлагая в ряд квадратный корень уравнения (27.89)

$$\sqrt{\frac{x-l_2}{x-l_1}} = \left(1 - \frac{l_2}{x}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{l_1}{x}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{l_1 - l_2}{x} + \dots, \quad (27.102)$$

а затем интегрируя выражение (27.98), получим формулу, которая имеет такой же вид, как и формула (27.100), что и следовало ожидать:

$$C_z = \frac{2\pi q}{U_\infty}. \quad (27.103)$$

**27.3.3 Вычисление моментов.** Аналогично может быть определен полный момент крена относительно оси  $Ox_1$  или коэффициент момента  $C_l$ . Для этого найдем сначала член, содержащий множитель  $\frac{1}{x}$  в разложении

$$\begin{aligned} x \left(1 + \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2} x\right) (x - l_1)^{-1/2} (x + l_2)^{-1/2} &= \left(1 + \frac{c}{l_1 l_2} x\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l_1}{x} + \frac{3}{8} \frac{l_1^2}{x^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l_2}{x} + \frac{3}{8} \frac{l_2^2}{x^2} + \dots\right) &= \\ = \dots \frac{c}{x} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}\right)\right] + \dots, \end{aligned} \quad (27.104)$$

после чего, подставляя результат в интеграл для момента (27.3), получим

$$C_l = \frac{2}{3l^2 U_\infty} \int_{-l_2}^{l_1} u y d y = -\frac{1}{3} \frac{1}{l^2 U_\infty} \oint f(x) x dx = \frac{1}{3} \frac{2\pi c q}{U_\infty l^2} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 l_2}\right). \quad (27.105)$$

Заменяя величину  $q_0$  через ее значение (27.86) и производя необходимые приближения, получаем

$$\begin{aligned} C_l &= -\frac{1}{3} \frac{2\pi c \alpha}{E(k_1) \sqrt{1-B^2 c^2}} \left(\frac{l_1 l_2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{c}{l} \left(\frac{l_1 l_2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l^2}\right) C_z \approx -\frac{2}{3} \frac{c}{l} C_z. \end{aligned} \quad (27.106)$$

Как следовало ожидать, момент пропорционален расстоянию  $c$  (см. фиг. 27.7, б).

#### 27.4. Эффект подсоса на дозвуковых ведущих кромках

В предшествующих главах было показано, что скорость, нормальная к кромке, будет дозвуковой  $\left(M_n = \frac{U_n}{a} < 1\right)$  и что все возникающие явления будут также дозвуковыми.

Среди этих явлений особенно важен эффект подсоса, возникающего на кромке тонкого крыла, влияющий на величину лобового сопротивления. Обследование указанного явления в несжимаемом дозвуковом режиме возможно с помощью элементарных рассуждений. Обратимся с этой целью к

главному значению скорости вблизи точки заострения, как оно установлено [в разделе 24.4 (см. формулу 24.67, фиг. 24.11)].

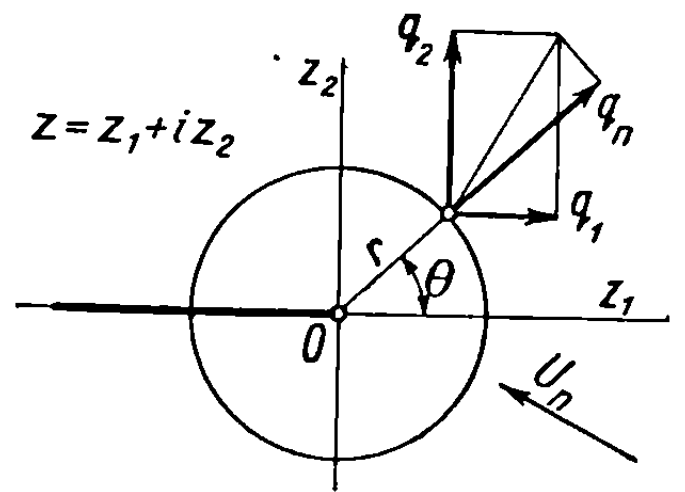
Рассмотрим такую точку, расположенную в начале системы осей  $Oz_1z_2$  (фиг. 27.10). Пусть  $z = z_1 + iz_2 = re^{i\theta}$  будет комплексной переменной; заметим, что вблизи рассматриваемой точки комплексная скорость асимптотически представляется своим главным значением

$$q = q_1 - iq_2 = \frac{iA}{\sqrt{z}} = i \frac{A}{\sqrt{r} e^{i\theta/2}} = \frac{A}{\sqrt{r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right); \quad (27.107)$$

следовательно, на пластинке ( $\theta = -\pi$ ,  $\theta = \pi$ ) абсолютная величина скорости будет

$$Q = \frac{A}{\sqrt{r}}. \quad (27.108)$$

Так как давления вследствие симметрии уравновешиваются, устанавливаем, что применение теоремы о количестве движения к объему, заключенному внутри окружности чрезвычайно малого радиуса  $r$ , приводит к соотношению



Фиг. 27.10

$$\begin{aligned} S &= -\rho \int_{-\pi}^{\pi} q_n q_1 r d\theta = -\rho \int_{-\pi}^{\pi} (q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta) q_1 r d\theta = \\ &= -\frac{\rho}{2} A^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta - 1) d\theta = \pi \rho A^2, \end{aligned} \quad (27.109)$$

где  $S$  — подсасывающая сила, приложенная к точке заострения.

Предполагая, что при дозвуковом сжимаемом режиме течение вблизи точки заострения вызывается общим течением вокруг пластинки, помещенной в свободный поток со скоростью  $U_n$ , приходим к выводу, что скорость  $Q$ , возникающая как скорость возмущения в таком потоке, может рассматриваться согласно общим условиям, установленным в главе IV, как увеличивающаяся вместе с подсасывающей силой, в отношении  $(1 - M_n)^{-1/2}$ :

$$S_c = \frac{S}{\sqrt{1 - M_n^2}} = \pi \rho \frac{A^2}{\sqrt{1 - M_n^2}}, \quad (27.110 \text{ а})$$

$$Q_c = \frac{A}{\sqrt{r} \sqrt{1 - M_n^2}} = \frac{A_c}{\sqrt{r}}. \quad (27.110 \text{ б})$$

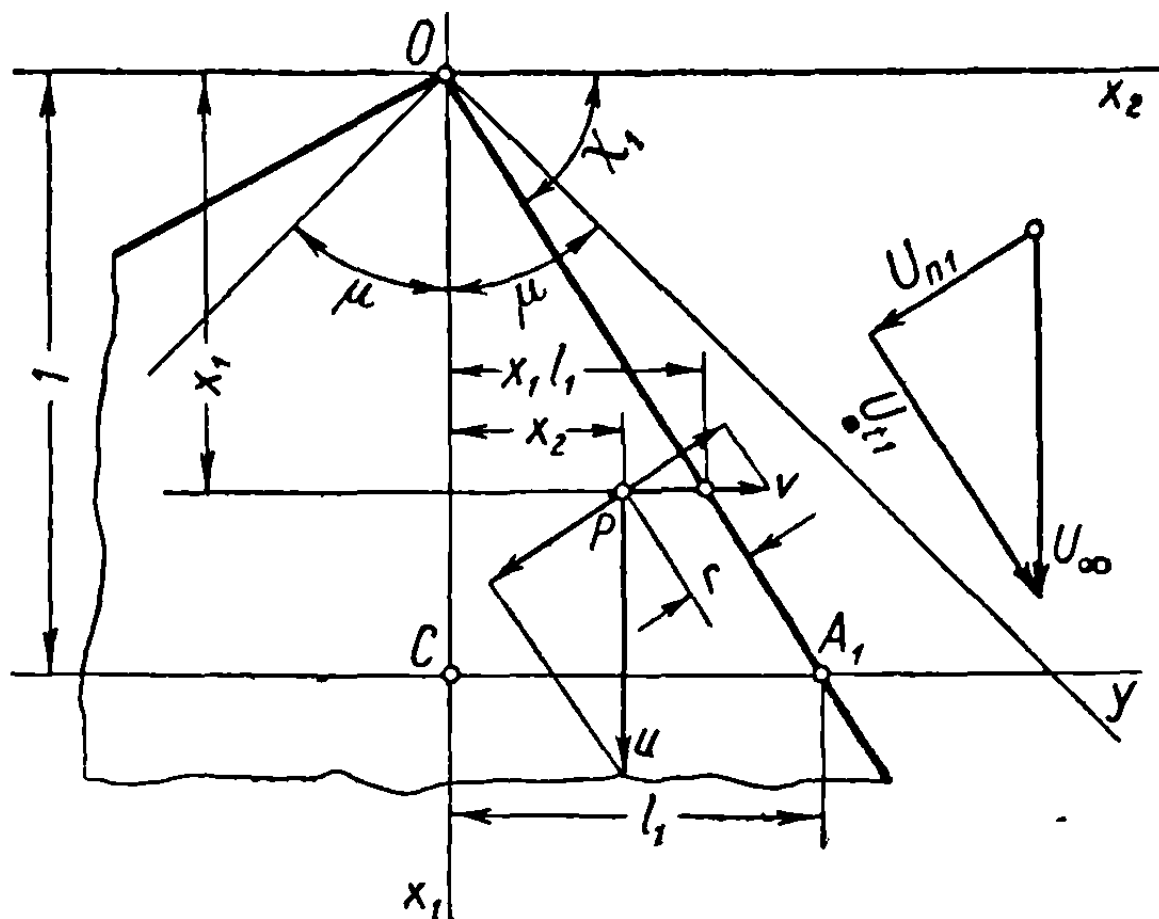
Отсюда следует, что подсасывающая сила в сжимаемом режиме определяется как функция коэффициента  $A_c$  действительной скорости соотношением

$$S_c = \pi \rho \frac{A^2}{\sqrt{1 - M_n^2}} = \pi \rho A_c^2 \sqrt{1 - M_n^2}. \quad (27.111)$$

Полученный результат очень важен для авиационной техники, так как приводит к очень значительному уменьшению лобового сопротивления, что

будет показано ниже. По этой причине дозвуковые ведущие кромки не должны быть острыми, а слегка закругленными, чтобы обеспечить поверхности возможность воспринять подсосывающие силы.

Чтобы вычислить подсосывающую силу, нужно определить коэффициент  $A_c$  с помощью формулы для скорости возмущения, которая должна быть преобразована к виду (27.107).



Фиг. 27.11

Поэтому, рассматривая дозвуковую кромку  $OA_1$  (фиг. 27.11), положим, что  $u$  и  $v$  будут скоростями возмущения в точке  $P$ , расположенной в окрестности кромки; компонента скорости возмущения, нормальная к кромке  $OA_1$  в плоскости крыла, будет

$$Q_c = u \cos \chi_1 - v \sin \chi_1 = \frac{ul_1 - v}{\sqrt{1 + l_1^2}}. \quad (27.112)$$

Скорость  $u$  выводится из ранее установленных формул для всех случаев дозвуковых кромок, тогда как  $v$  определяется путем применения формулы (24.16)

$$\begin{aligned} v + iv' &= -\frac{B}{2} \int \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) df \approx -\frac{B}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int df = \\ &= -\frac{B}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) (u + iu') = -\frac{1}{l_1} (u + iu') \end{aligned} \quad (27.113)$$

к точкам, близким к ведущей кромке, причем  $\xi$  стремится к значению  $\lambda_1$ , соответствующему  $l_1$  в физической плоскости. Отсюда

$$\begin{aligned} v &= -\frac{u}{l_1}, \\ Q_c &= u \frac{\sqrt{1 + l_1^2}}{l_1} = \frac{u}{\cos \chi_1}. \end{aligned} \quad (27.114)$$

Скорость  $u$  в окрестности ведущей кромки должна быть определена для каждого отдельного случая.



27.4.1. Применение к угловидным крыльям с одной дозвуковой ведущей кромкой. При рассмотрении этого случая (см. раздел 27.2) для скорости было получено соотношение (27.39), которое при  $y = l_1$  принимает вид

$$\begin{aligned} u_{y \approx l_1} &= -m_1 \sqrt{\frac{1+By}{B(l_1-y)}} \approx -m_1 \sqrt{\frac{1+Bl_1}{B}} \frac{1}{(l_1-y)^{1/2}} = \\ &= -m_1 \sqrt{\frac{1+Bl_1}{B}} \frac{1}{\left(l_1 - \frac{x_2}{x_1}\right)^{1/2}} = -m_1 \sqrt{\frac{1+Bl_1}{B}} \frac{\sqrt{x_1 \sin \chi_1}}{\sqrt{r}}; \end{aligned} \quad (27.115)$$

отсюда

$$Q_c = \frac{u}{\cos \chi_1} = -m_1 \sqrt{\frac{1+Bl_1}{B}} \frac{\sqrt{x_1 \sin \chi_1}}{\cos \chi_1} \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{A_c}{\sqrt{r}}. \quad (27.116)$$

Если элемент ведущей кромки обозначить через  $ds_1 = \frac{dx_1}{\sin \chi_1}$  и число Маха потока, нормального к кромке  $OA_1$ , через  $M_{n1}$ , то подсасывающая сила на единицу длины определится соотношением

$$\sin \chi_1 \frac{dS_c}{dx_1} = \pi \rho \frac{m_1^2 (1+Bl_1) \operatorname{tg} \chi_1 \sqrt{1-M_{n1}^2}}{B \cos \chi_1} x_1. \quad (27.117)$$

Интегрируя от 0 до 1 вдоль всей ведущей кромки  $OA_1$ , получим

$$S_c = \frac{\rho}{2} \frac{\pi m_1^2 (1+Bl_1) \sqrt{1-M_{n1}^2}}{Bl_1 \cos \chi_1 \sin \chi_1}. \quad (27.118)$$

Чтобы вычислить компоненту силы вдоль направления скорости, умножим приведенные выше результаты на  $\cos \chi_1$ ; полагая

$$\begin{aligned} 1 - M_{n1}^2 &= 1 - M_1^2 \cos^2 \chi_1 = \sin^2 \chi_1 + \cos^2 \chi_1 (1 - M_1^2) = \\ &= \sin^2 \chi_1 [1 + \operatorname{ctg}^2 \chi_1 (1 - M_1^2)] = \frac{1 - B^2 l_1^2}{1 + l_1^2}, \end{aligned} \quad (27.119)$$

находим, что подсасывающая сила в направлении скорости становится силой тяги, которая может быть окончательно определена следующим выражением, записанным в различных формах

$$\begin{aligned} R_s &= -S_c \cos \chi_1 = -\frac{\rho}{2} \frac{\pi B m_1^2 (1+Bl_1) \sqrt{1-B^2 l_1^2}}{B^2 l_1} = \\ &= -\frac{\rho}{2} \frac{4B u_2^2 (1+Bl_1) \sqrt{1-B^2 l_1^2}}{\pi B^2 l_1} \frac{H_2^2 B^2 l_1^2}{(H_2^2 + Bl_1)^2} = \\ &= -\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \frac{4\alpha^2}{\pi B} \frac{1+l_1}{1+n_2} l_1 \sqrt{\frac{n_1-1}{n_1+1}}, \end{aligned} \quad (27.120)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  имеют такое же значение, как в равенстве (25.5).

27.4.2. Подсасывающая сила для угловидного крыла с дозвуковыми ведущими кромками. Осевая скорость возмущения определяется выражением (27.67), которое при  $y \rightarrow l_1$  принимает вид

$$u = \frac{q_0 \left(1 + \frac{l_1 - l_2}{2l_2}\right)}{\sqrt{l_1 + l_2}} \frac{1}{(l_1 - y)^{1/2}} = \frac{q_0 \sqrt{l_1 + l_2} V \frac{x_1 \sin \chi_1}{\sqrt{r}}}{2l_2}; \quad (27.121)$$

отсюда

$$Q_c = \frac{q_0 \sqrt{l_1 + l_2}}{2l_2} \cdot \frac{V \sin \chi_1}{\cos \chi_1} \cdot \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{r}}. \quad (27.122)$$

Подсасывающая сила на единицу длины в этом случае будет

$$\sin \chi_1 \frac{dS_c}{dx_1} = \pi \rho \frac{q_0^2 (l_1 + l_2) \operatorname{tg} \chi_1 \sqrt{1 - M_{n1}^2}}{4l_2^2 \cos \chi_1} x_1; \quad (27.123)$$

после умножения на  $\cos \chi_1$  и интегрирования от  $x_1 = 0$  до  $x_1 = 1$  получается сила тяги для всей ведущей кромки  $OA_1$ , которая путем применения зависимости (27.86) может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{s1} &= -\pi \rho \frac{q_0^2 (l_1 + l_2)}{8l_2^2 l_1} \sqrt{1 - B^2 l_1^2} = \\ &= -\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \frac{\alpha^2}{[E(k_1)]^2} \frac{\pi}{4} (l_1 + l_2) l_1 \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{1 - B^2 c^2}. \end{aligned} \quad (27.124)$$

Если крыло симметрично ( $l_1 = l_2 = l$ ), то для обеих кромок

$$R_s = -2 \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \frac{\alpha^2}{[E(k)]^2} \frac{\pi}{2} l^2 \sqrt{1 - B^2 l^2}. \quad (27.125)$$

## 28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКИХ ПЛОСКИХ КРЫЛЬЕВ ОБЫЧНОЙ ФОРМЫ

На основании результатов, полученных в предыдущих главах, вычислим аэродинамические характеристики крыльев общераспространенной формы, представляющих интерес для практических применений. Наиболее важными для таких применений являются треугольные симметричные крылья, называемые дельтообразными, простые и двойные трапециевидные крылья и т. д. Ниже вычислены подъемная сила, а также момент крена и момент пикирования. Для получения лобового сопротивления специальных вычислений не требуется, так как оно равняется подъемной силе, умноженной на угол атаки  $\alpha$ .

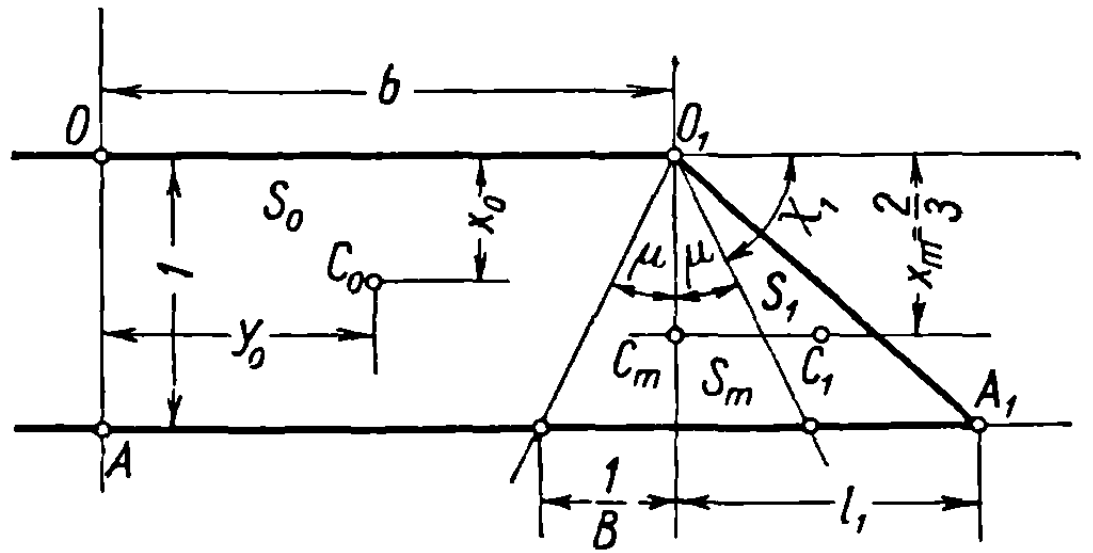
### 28.1. Простые трапециевидные крылья

Крылья, имеющие прямые передние и задние кромки, а также боковые наклонные кромки, которые могут быть ведущими или задними, называются простыми трапециевидными крыльями (фиг. 28.1, 28.2, 28.3, 28.5).

Рассмотрим следующие положения боковой кромки  $O_1A_1$ : сверхзвуковой или дозвуковой ведущей кромки и дозвуковой или сверхзвуковой задней кромки.

28.1.1. Трапецевидное крыло со сверхзвуковой боковой ведущей кромкой. Рассмотрим половину такого крыла  $OO_1A_1A$ , разделенную на три области —  $S_0$ ,  $S_m$ ,  $S_1$  (фиг. 28.1).

Коэффициент подъемной силы для центральной области, как и для всего крыла, равняется коэффициенту подъемной силы для крыла бесконечного размаха



Фиг. 28.1

$$C_z = C_{z0} = -\frac{4\alpha}{B} \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}), \quad (28.1)$$

где  $\alpha$  — угол атаки.

Коэффициенты для частей крыла внутри и вне конуса Маха получим путем применения формулы (27.17):

$$C_{zm} = -\frac{4\alpha}{B} \left( \frac{1}{2} + \frac{Bl_1}{1 + Bl_1 + \sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \right),$$

$$C_{z1} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}. \quad (28.2)$$

Для вычисления момента крена половины крыла положим, что  $C_0$ ,  $C_m$ ,  $C_1$  являются центрами тяжести поверхностей  $S_0$ ,  $S_m$ ,  $S_1$ . Координаты этих точек, а также площади поверхностей выражаются следующими формулами

$$S_0 = b - \frac{1}{2B}, \quad S_m = \frac{1}{B}, \quad S_1 = \frac{1}{2} \left( l_1 - \frac{1}{B} \right); \quad (28.3a)$$

$$x_0 = \frac{1}{3} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left( b - \frac{1}{3B} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1} \right),$$

$$x_m = \frac{2}{3}, \quad y_m = b, \quad (28.3b)$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad y_1 = b + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{B} + l_1 \right).$$

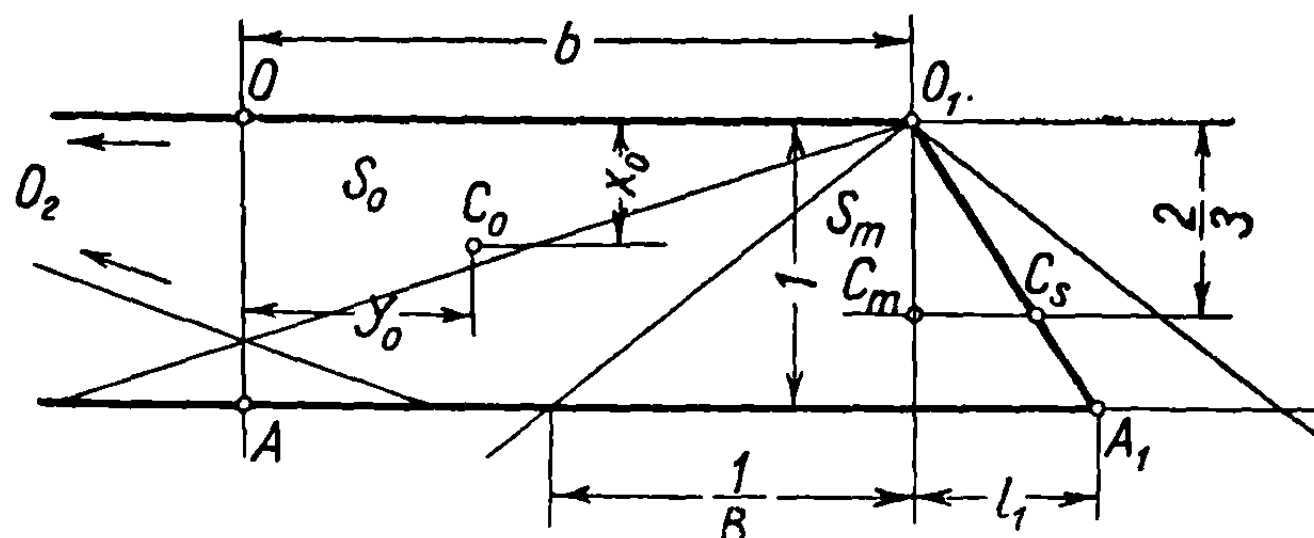
Момент крена для части крыла, расположенной внутри конуса Маха, относительно оси конуса, в силу формулы (27.29) и условия  $n_2 = 0$ , будет

$$\frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{B} \frac{2}{B} C_{lm} = -\frac{2\alpha}{3B^3} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{1 - n_1^2}} - \frac{1}{2} \right), \quad (28.4)$$

где  $n_1$  имеет обычное значение (см. формулу 25.5). Подобные же вычисления дают момент сил сопротивления относительно нормальной оси, проходящей через точку  $C_m$ .

Эта формула служит основанием для вычисления момента относительно оси, проходящей через любое частное сечение крыла. Так, для момента половины крыла относительно его оси получим формулу

$$\frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} = y_0 S_0 C_z + b S_m C_{zm} + y_1 S_1 C_{z1} + \frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2}, \quad (28.5)$$



Фиг. 28.2

тогда как момент относительно передней кромки (момент пикирования) половины крыла выразится соотношением

$$\frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} = x_0 S_0 C_z + \frac{2}{3} S_m C_{zm} + \frac{2}{3} S_1 C_{z1}. \quad (28.6)$$

Для всего крыла момент крена, очевидно, равен нулю. Уравнение (28.5), которое относится к половине крыла, полезно для подсчетов, связанных с распределением аэродинамических сил и моментов на крыле.

**28.1.2. Трапециевидное крыло с дозвуковой боковой ведущей кромкой.** Применяя те же обозначения и обращаясь к фиг. 28.2, находим: для частичных и полной площадей поверхностей

$$\begin{aligned} S_0 &= b - \frac{1}{2B}, \\ S_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} + l_1 \right), \\ S &= S_0 + S_m = b + \frac{1}{2} l_1; \end{aligned} \quad (28.7)$$

для координат центра тяжести  $C_0$  и точки  $C_m$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1}, & y_0 &= \frac{1}{2} \left( b - \frac{1}{3B} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1} \right), \\ x_m &= \frac{2}{3}, & y_m &= b, \end{aligned} \quad (28.8)$$

В силу равенств (25.5), (27.34)

$$n_2 = 0, \quad H_2 = 1.$$

коэффициент подъемной силы для части крыла, расположенной внутри конуса Маха, получается путем применения формулы (27.51) в виде

$$C_{zm} = -\frac{4\alpha}{B} \left( \frac{Bl_1}{1 + Bl_1} + \frac{1}{2} \right). \quad (28.9)$$

Средний полный коэффициент легко выводится из формулы

$$C_z = C_{z0} \frac{S_0}{S} + C_{zm} \frac{S_m}{S} = -\frac{4\alpha}{B} \left(1 - \frac{1 - Bl_1}{2B(2b + l_1)}\right). \quad (28.10)$$

Очевидно, что эта формула применима даже в случае, когда конусы Маха с вершинами в точках  $O_1$  и  $O_2$  крыла пересекаются. Хотя площадь интерференции входит три раза при вычислениях для каждой области, она появляется столько же раз для полной поверхности, так что результат не меняется.

Момент для внутренней части, в согласии с формулой (27.62), будет

$$\begin{aligned} \frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} + l_1\right)^2 C_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} + l_1\right)^2 \frac{4}{3} \frac{\alpha}{B} \left[ \frac{1 - 3Bl_1}{2(1 + Bl_1)} \frac{Bl_1}{1 + Bl_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1} + \frac{1}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (28.11)$$

а выражение для момента половины крыла относительно его оси имеет вид

$$\frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = y_0 S_0 C_{z0} + b S_m C_{zm} + \frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}, \quad (28.12)$$

Для той же половины крыла момент пикирования будет

$$\frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = x_0 S_0 C_{z0} + \frac{2}{3} S_m C_{zm}. \quad (28.13)$$

Дозвуковая ведущая кромка производит также подсос, определяемый по формуле (27.120), причем в этом случае

$$C_s = \frac{R_s}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} = -\frac{2}{2b + l_1} \frac{4\alpha^2}{\pi B} l_1 \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}}. \quad (28.14)$$

Напомним, что полный момент крыла относительно оси  $OA$  равен нулю.

**28.1.3. Прямоугольные крылья.** Применяя приведенные рассуждения к прямоугольному крылу ( $l_1 = 0$ , фиг. 28.3), получим: для поверхностей

$$S_0 = b - \frac{1}{2B}, \quad S_m = \frac{1}{2B}, \quad S = b; \quad (28.15)$$

для координат центра тяжести  $C_0$  и точки  $C_m$

$$\begin{aligned} x_0 = \frac{1}{3} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{3B} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1}\right), \\ x_m = \frac{2}{3}, \quad y_m = b. \end{aligned} \quad (28.16)$$

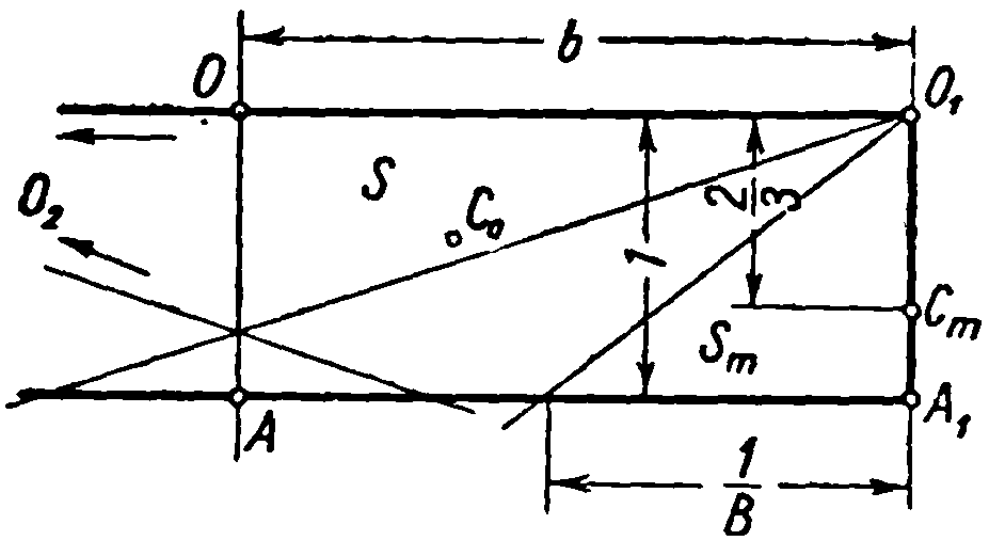
Частичный и полный коэффициенты подъемной силы будут

$$\begin{aligned} C_{zm} = -\frac{2\alpha}{B} = \frac{1}{2} C_{z0}, \\ C_z = -\frac{4\alpha}{B} \left(1 - \frac{1}{4Bb}\right), \end{aligned} \quad (28.17)$$

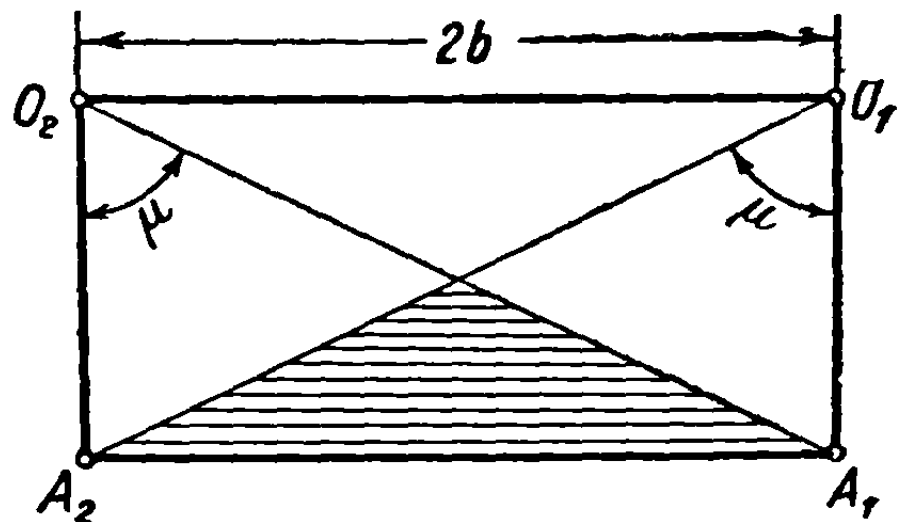
а момент внутренней части относительно оси конуса

$$\frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \frac{5}{12} \frac{\alpha}{B^3}. \quad (28.18)$$

Выражения для полных моментов крена и пикирования остаются идентичными приведенным выше (см. формулу 28.12).



Фиг. 28.3



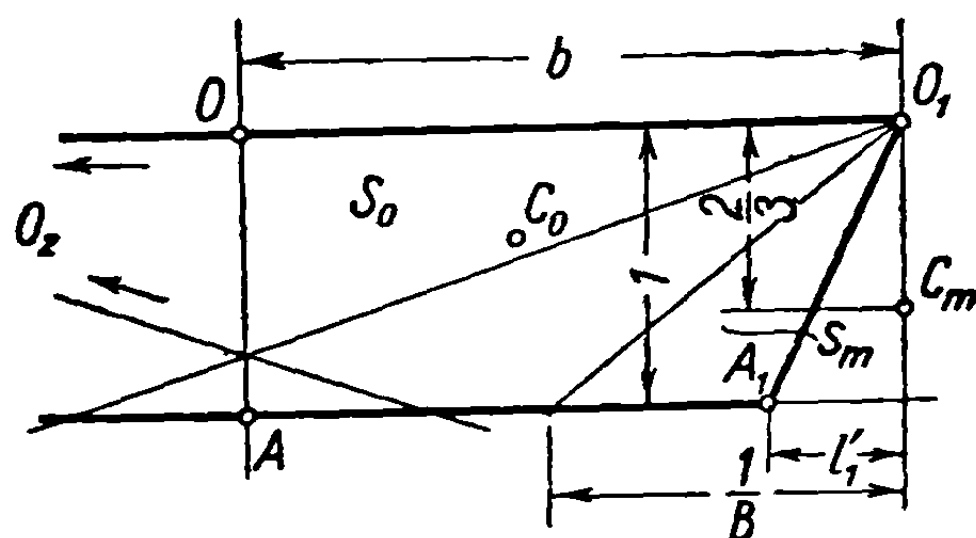
Фиг. 28.4

Прежнее замечание, относящееся к пересечению конусов с вершинами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , остается в силе.

Интересно заметить, что если  $\frac{1}{B} = 2b$  (фиг. 28.4), то коэффициент полной подъемной силы крыла уменьшается вдвое по сравнению с коэффициентом для крыла бесконечного размаха и делается равным  $C_{zm}$ :

$$C_z = C_{zm} = -\frac{2\alpha}{B}. \quad (28.19)$$

28.1.4. Трапецевидное крыло с дозвуковой боковой задней кромкой. Заменяя в приведенных формулах  $l_1$  на  $-l'_1$  и исключая член, обусловленный диполем, получим (фиг. 28.5):



Фиг. 28.5

$$S_0 = b - \frac{1}{2B}, \quad S_m = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} - l'_1 \right), \quad S = b - \frac{1}{2} l'_1, \quad (28.20a)$$

$$x_0 = \frac{1}{3} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left( b - \frac{1}{3B} \frac{3Bb - 2}{2Bb - 1} \right),$$

$$x_m = \frac{2}{3}, \quad y_m = b; \quad (28.20b)$$

для подъемной силы имеем

$$C_{zm} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{1}{2} = -\frac{2\alpha}{B}, \quad C_z = C_{z0} \frac{S_0}{S} + C_{zm} \frac{S_m}{S} =$$

$$= -\frac{4\alpha}{B} \left( 1 - \frac{1 + Bl'_1}{2B(2b - l'_1)} \right). \quad (28.21)$$

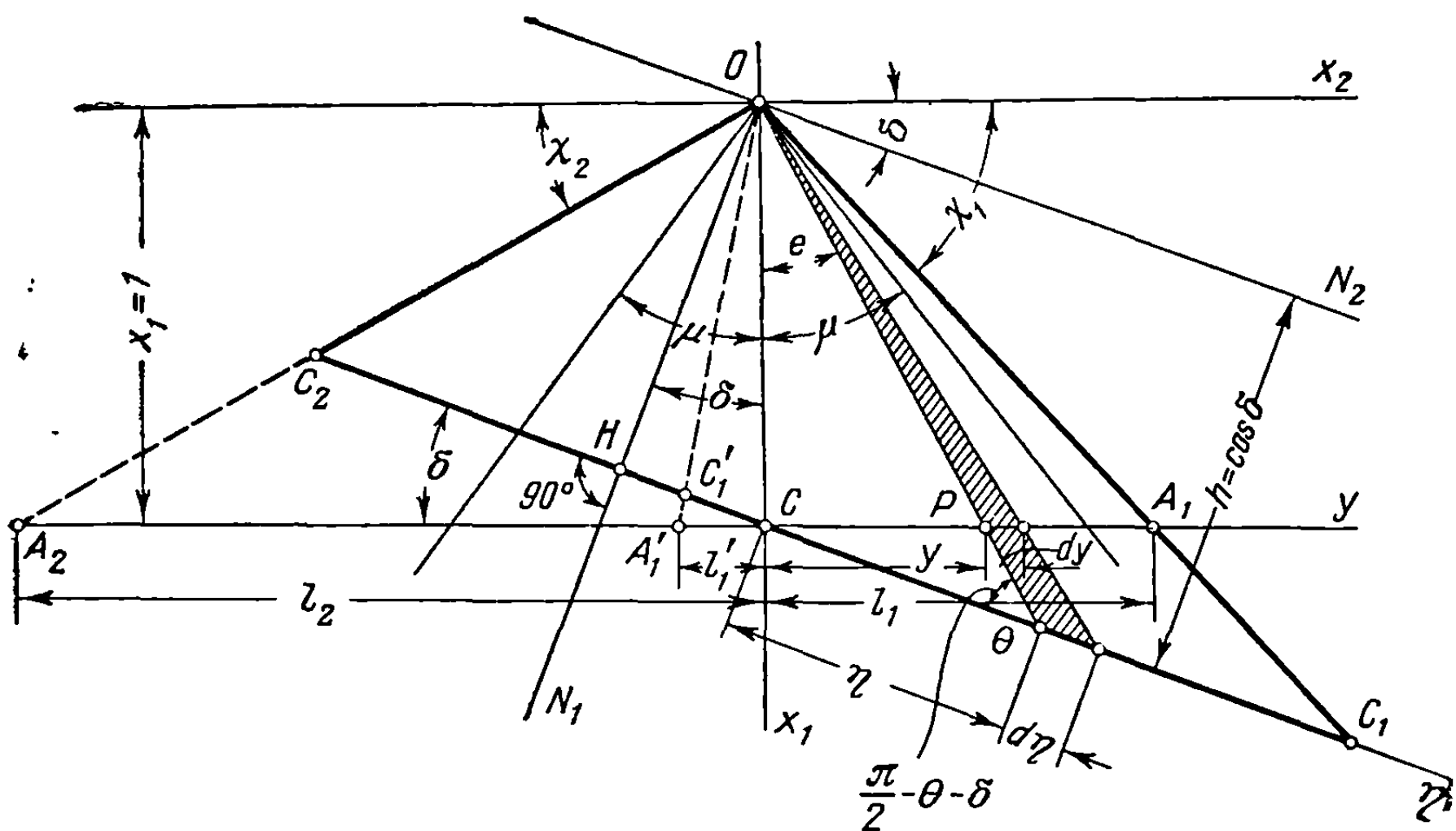
Момент для части крыла, расположенной внутри конуса Маха, определяется тем же выражением (28.11), если не считать, что диполь исключается и величина  $l_1$  заменяется через  $-l'_1$ :

$$\frac{L_m}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{B} - l'_1 \right)^2 \frac{\alpha}{B} \left( \frac{1 + B l'_1}{1 - B l'_1} + \frac{1}{4} \right). \quad (28.22)$$

Те же формулы (28.12) и (28.13) могут быть использованы для момента крена относительно оси крыла и момента пикирования относительно передней кромки.

### 28.2. Вычисление сил и моментов для треугольных крыльев со скошенной задней кромкой

Имея в виду случаи применения дельтообразного крыла, или стреловидных крыльев, при наличии угла рыскания, рассмотрим некоторые общие



Фиг. 28.6

формулы, касающиеся сил и моментов для треугольных крыльев со скошенной задней кромкой. Пусть  $OC_1C_2$  будет такое крыло (фиг. 28.6); нормаль  $ON_1$  к стороне  $C_2C_1$  треугольника составляет угол  $\delta$  с осью  $Ox_1$ . Рассмотрим, как обычно, плоскость  $x_1 = OC = 1$ ; след крыла в этой плоскости будет  $Cy$ . Вводя новую ось  $C\eta$ , направленную вдоль  $C_2C_1$ , и замечая, что из треугольника  $CPQ$  следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{y}{\cos(\theta + \delta)} &= \frac{\eta}{\cos \theta}, \\ \eta \cos \delta &= \frac{y}{1 - y \operatorname{tg} \delta}, \end{aligned} \quad (28.23)$$

получим для элементарной треугольной поверхности с высотой  $h = \cos \delta$

$$dS = \frac{1}{2} \cos \delta d\eta = \frac{1}{2} \frac{dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2}. \quad (28.24)$$

Элементарная подъемная сила, действующая на тот же элемент поверхности, определится аналогично уравнению (27.1):

$$\begin{aligned} dP &= -2(p - p_\infty) \frac{1}{2} \cos \delta d\eta = -\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 C_p \cos \delta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{2u}{U_\infty} \frac{dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2}. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Обозначая полную площадь крыла через  $S$  и коэффициент подъемной силы через  $C_z$  (причем подъемная сила  $P = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_z$ ), получим

$$S C_z = \frac{2}{U_\infty} \int \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2}. \quad (28.26)$$

Подобным же образом находим выражение для элементарного момента относительно оси  $Ox_1$

$$\begin{aligned} dL &= -\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{2}{3} C_p \cos^2 \delta \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{2}{3} \frac{2u}{U_\infty} \frac{y dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^3}; \end{aligned} \quad (28.27)$$

следовательно, беря основание  $\overline{C_1 C_2}$  треугольника как характеристическую длину и обозначая через  $C_l$  коэффициент момента крена ( $L = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \overline{C_2 C_1} S C_l$ ), получим полный момент крена

$$\overline{C_2 C_1} S C_l = \frac{2}{3} \frac{2}{U_\infty} \int_S \frac{uy dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^3}. \quad (28.28)$$

Полагая

$$z = \operatorname{tg} \delta \quad (28.29)$$

и имея в виду, что

$$\frac{2y}{(1 - yz)^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{(1 - yz)^2} \right), \quad (28.30)$$

выразим момент крена соотношением, подобным полученному Мильн—Томсоном [22] при помощи другого метода:

$$\overline{C_2 C_1} S C_l = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (S C_z). \quad (28.31)$$

Замечая, что момент относительно оси  $ON_2$  может быть записан в виде

$$M_2 = \frac{2}{3} \cos \delta \cdot P, \quad (28.32)$$

а момент относительно оси  $ON_1$  определится равенством

$$M_1 = L \cos \delta, \quad (28.33)$$

устанавливаем, что вся задача сводится к вычислению интеграла в формуле (28.26).



Для этого получим

$$\int \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \int u d\left(\frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta}\right); \quad (28.34)$$

интеграл во второй части равенства легко вычисляется после выполнения адекватных преобразований, соответствующих положению ведущих кромок относительно конуса Маха.

**28.2.1. Сверхзвуковые ведущие кромки.** В согласии с равенствами (24.44), (27.5), (27.7а), получим:

$$By = \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1}, \quad d\left(\frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta}\right) = -\frac{B \operatorname{tg} \delta}{(B - \operatorname{tg} \delta)^2} d\left(\frac{1}{Y^2 + K^2}\right); \quad (28.35a)$$

$$du = \frac{2u_1 H_1}{\pi} \frac{dY}{Y^2 + H_1^2} - \frac{2u_2 H_2}{\pi} \frac{dY}{Y^2 + H_2^2}; \quad (28.35b)$$

$$u_1 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad u_2 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}; \quad (28.35b)$$

$$K^2 = \frac{B + \operatorname{tg} \delta}{B - \operatorname{tg} \delta}, \quad H_1^2 = \frac{Bl_1 + 1}{Bl_1 - 1}, \quad H_2^2 = \frac{Bl_2 - 1}{Bl_2 + 1}, \quad (28.35г)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  сохраняют свое обычное значение

$$l_1 = \operatorname{ctg} \chi_1, \quad l_2 = \operatorname{ctg} \chi_2. \quad (28.36)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (28.34), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \int u d\left(\frac{1}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)}\right) &= -\frac{2B}{(B - \operatorname{tg} \delta)^2} \int u d\left(\frac{1}{Y^2 + K^2}\right) = \\ &= -\frac{2B}{(B - \operatorname{tg} \delta)^2} \left\{ \frac{u}{Y^2 + K^2} - \frac{2u_1 H_1}{\pi (H_1^2 - K^2)} \left( \frac{1}{K} \operatorname{arctg} \frac{Y}{K} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{H_1} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} \right) + \frac{2u_2 H_2}{\pi (H_2^2 - K^2)} \left( \frac{1}{K} \operatorname{arctg} \frac{Y}{K} - \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \right) \right\}. \quad (28.37) \end{aligned}$$

Пределы интегрирования в физической плоскости будут  $-(l_2 - \varepsilon)$  и  $(l_1 - \varepsilon)$ , что соответствует значениям  $Y$ , равным  $i(H_2 - \varepsilon_2)$  и  $-i(H_1 + \varepsilon_1)$ , где  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  — очень малые величины. Поступая, как и при выводе соотношений (27.21а) и (27.21б), и рассматривая только действительную часть, получим следующие результаты:

для  $Y = i(H_2 - \varepsilon_2), \varepsilon_2 \rightarrow 0,$

$$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{K} = \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} = 0; \quad (28.38)$$

для  $Y = -i(H_1 + \varepsilon_1), \varepsilon_1 \rightarrow 0,$

$$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{K} = \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} = +\frac{\pi}{2}. \quad (28.39)$$

Подставляя эти значения в уравнение (28.37), находим, что формула (28.26), в согласии с равенством (28.34), принимает вид

$$SC_z = \frac{2}{U_\infty} \int \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2} = \frac{2}{U_\infty} \frac{2B}{(B - \operatorname{tg} \delta)^2} \frac{1}{K} \left[ \frac{u_2 H_2}{K^2 - H_2^2} - \frac{u_1 H_1}{K^2 - H_1^2} \right]. \quad (28.40)$$

Последнее соотношение сводится к зависимости (27.22) при  $\delta = 0$ , так как тогда  $K = 1$ .

Эта формула может быть преобразована подстановкой вместо  $u_1$  и  $u_2$  известных величин:

$$\frac{u_1}{U_\infty} = -\frac{\alpha l_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad \frac{u_2}{U_\infty} = -\frac{\alpha l_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}, \quad (28.41)$$

где  $\alpha$  — угол атаки.

Заменяя  $H_1$ ,  $H_2$  и  $K$  их соответствующими значениями из равенств (28.35г), имеем

$$SC_z = -\frac{4\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tg}^2 \mu \text{tg}^2 \delta}} \frac{1}{2} \left[ \frac{l_1}{1 - l_1 \text{tg} \delta} + \frac{l_2}{1 + l_2 \text{tg} \delta} \right]. \quad (28.42)$$

Из треугольников  $CC_1A_1$  и  $CC_2A_2$  получим соотношения

$$\overline{CC_1} = l_1 \frac{\sin \chi_1}{\sin(\chi_1 - \delta)} = \frac{1}{\cos \delta} \frac{l_1}{1 - l_1 \text{tg} \delta}, \quad (28.43a)$$

$$\overline{CC_2} = l_2 \frac{\sin \chi_2}{\sin(\chi_2 + \delta)} = \frac{1}{\cos \delta} \frac{l_2}{1 + l_2 \text{tg} \delta}, \quad (28.43b)$$

в результате чего посредством формулы

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{l_1}{1 - l_1 \text{tg} \delta} + \frac{l_2}{1 + l_2 \text{tg} \delta} \right) \quad (28.44)$$

представим полную площадь крыла; следовательно, коэффициент подъемной силы будет

$$C_z = -\frac{4\alpha}{B} \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tg}^2 \mu \text{tg}^2 \delta}}. \quad (28.45)$$

Указанный случай, таким образом, подобен случаю крыла бесконечного размаха, имеющего угол рыскания  $\delta$  (см. формулу 14.86).

Для вычисления момента относительно оси  $Ox_1$  применим формулу (28.31); следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{C_1 C_2} SC_l = & -\frac{1}{3} \frac{4\alpha}{B} \frac{S}{\sqrt{1 - \text{tg}^2 \mu \text{tg}^2 \delta}} \left\{ \frac{\text{tg} \delta}{B^2 - \text{tg}^2 \delta} + \right. \\ & \left. + \frac{l_1}{1 - l_1 \text{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \text{tg} \delta} \right\}, \end{aligned} \quad (28.46a)$$

или

$$\overline{C_1 C_2} C_l = \frac{1}{3} C_z \left( \frac{\text{tg} \delta}{B^2 - \text{tg}^2 \delta} + \frac{l_1}{1 - l_1 \text{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \text{tg} \delta} \right). \quad (28.46b)$$

Когда  $\delta = 0$ , последнее соотношение сводится к более простому виду

$$\overline{C_1 C_2} C_l = \frac{l_1 - l_2}{3} C_z. \quad (28.46b)$$

Для некоторых задач, как, например, в случае трапециевидных крыльев, необходимо определить подъемную силу или коэффициент подъемной силы

для части крыла, расположенной внутри конуса Маха. Пределы интегрирования в этом случае в физической плоскости будут  $y = -\frac{1}{B}$  и  $y = \frac{1}{B}$ ; они соответствуют значениям  $Y = 0$  и  $Y = \infty$ . Подставляя последние величины в уравнение (28.37), обозначая через  $S_m$  площадь крыла, расположенную внутри конуса Маха, и через  $C_{zm}$  соответствующий коэффициент подъемной силы, получим соотношение

$$S_m C_{zm} = \frac{4}{U_\infty} \frac{B}{B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta} \left[ \frac{u_2 H_2}{H_2 + K} + \frac{u_1 K}{H_1 + K} \right]; \quad (28.47)$$

оно устанавливает зависимость коэффициента подъемной силы от  $\operatorname{tg} \delta$ , которая может быть использована для получения момента крена или соответствующего ему коэффициента.

Для вычисления площади, лежащей внутри конуса Маха, применим формулу (28.44), в которой  $l_1 = l_2 = \frac{1}{B}$ ; это приводит к формуле

$$S_m = \frac{B}{B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta}. \quad (28.48)$$

далее получаем средний коэффициент подъемной силы

$$C_{zm} = \frac{4}{U_\infty} \left[ \frac{u_2 H_2}{H_2 + K} + \frac{u_1 K}{H_1 + K} \right], \quad (28.49)$$

который сводится к значению (27.16), когда  $\delta = 0$ ; в этом случае величина  $K$  равняется единице.

**28.2.2. Крыло со сверхзвуковой и дозвуковой ведущими кромками.** Применяя соотношение (27.33), как и в предыдущем случае, в силу равенств (27.34), (27.23), получим:

$$By = \frac{Bl_1 - Y^2}{1 + Y^2}, \quad d\left(\frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta}\right) = \frac{B(Bl_1 + 1) \operatorname{tg} \delta}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} d\left(\frac{1}{Y^2 + Q^2}\right); \quad (28.50a)$$

$$u = \operatorname{Re} \frac{i u_2}{\pi} \left( \ln \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} - i \pi \right) + \operatorname{Re} \frac{m_1}{Y}; \quad (28.50b)$$

$$m_1 = -\frac{2u_2}{\pi} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1}, \quad u_2 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}; \quad (28.50b)$$

$$H_2^2 = \frac{B(l_2 + l_1)}{Bl_2 - 1}, \quad Q^2 = \frac{B(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)}{B + \operatorname{tg} \delta}. \quad (28.50g)$$

Поступая, как при выводе формулы (28.37), находим

$$\begin{aligned} \frac{U_\infty}{2} S C_z &= \int \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \int u d\left(\frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta}\right) = \frac{B(Bl_1 + 1)}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \int u d\left(\frac{1}{Y^2 + Q^2}\right) = \\ &= \frac{B(Bl_1 + 1)}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \left\{ \frac{2u_2 H_2}{\pi(H_2^2 - Q^2)} \left( \frac{1}{Q} \operatorname{arctg} \frac{Y}{Q} - \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_1}{Q^2} \left( \frac{1}{Y} + \frac{1}{Q} \operatorname{arctg} \frac{Y}{Q} \right) + \frac{u}{Y^2 + Q^2} \right\}. \end{aligned} \quad (28.51)$$

Если рассматривается только поверхность внутри конуса Маха, то пределы интегрирования будут  $-\infty$  и  $0$  (см. равенства 27.49). Для верхнего

предела, т. е. 0 все члены обращаются в нуль, за исключением двух, значения которых вычисляются посредством других способов. Обозначая через  $\varepsilon$  очень малую величину и предполагая, что отрицательная величина  $-\varepsilon$  будет верхним пределом, получим

$$\left(\frac{u}{Y^2 + Q^2} - \frac{m_1}{Q^2 Y}\right)_{Y=-\varepsilon} = \left[\frac{m_1}{-\varepsilon Q^2} + \frac{m_1}{\varepsilon Q^2}\right]_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0; \quad (28.52)$$

отсюда

$$S_m C_{zm} = \frac{2u_2}{U_\infty} \frac{B(Bl_1 + 1)}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2 Q} \left[ \frac{1}{H_2 + Q} + \frac{1}{Q^2} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1} \right]; \quad (28.53)$$

это выражение сводится к (27.51), когда  $\delta = 0$ .

Переходя к определению коэффициента подъемной силы всего крыла, нужно иметь в виду, что пределы интегрирования (см. формулу 24.53) будут  $i(H_2 + \varepsilon)$  и 0; следовательно,

$$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{Q} \Big|_{i(H_2 + \varepsilon)}^0 = \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \Big|_{i(H_2 + \varepsilon)}^0 = \frac{\pi}{2}. \quad (28.54)$$

Выполняя необходимые вычисления, получим равенство

$$SC_z = \frac{2u_2}{U_\infty} \frac{B(Bl_1 + 1)H_2}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2 Q} \left[ \frac{1}{H_2^2 - Q^2} + \frac{Bl_1}{Q^2(H_2^2 + Bl_1)} \right], \quad (28.55)$$

которое сводится к уравнению (27.55), когда  $\delta = 0$ .

С другой стороны,

$$\frac{1}{H_2^2 - Q^2} + \frac{1}{Q^2(H_2^2 + Bl_1)} = \frac{(Bl_2 - 1)(B + \operatorname{tg} \delta)}{Bl_2(Bl_1 + 1)} \left[ \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} + \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} \right]; \quad (28.56)$$

отсюда получим

$$SC_z = -\frac{2\alpha}{B} \frac{B \sqrt{l_1 + l_2}}{\sqrt{Bl_2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(B + \operatorname{tg} \delta)(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)}} \left[ \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} + \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} \right]. \quad (28.57)$$

Это выражение служит для вычисления момента относительно оси  $Ox_1$ . Замечая, что член в последних скобках равен  $2S$ , будем иметь, окончательно

$$C_z = -\frac{4\alpha}{B} \frac{B \sqrt{l_1 + l_2}}{\sqrt{Bl_2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(B + \operatorname{tg} \delta)(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)}}; \quad (28.58)$$

последняя формула сводится к формуле (27.56), когда  $\delta = 0$ .

Чтобы вычислить момент, применим формулу (28.31), которая при сохранении той же характеристической длины приводит к равенству

$$\overline{C_1 C_2} SC_l = -\frac{1}{3} \frac{4\alpha}{B} \frac{B \sqrt{l_1 + l_2}}{\sqrt{Bl_2 + 1}} \frac{S}{(B + \operatorname{tg} \delta)(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)} \left\{ \frac{3}{2} \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} - \frac{1}{2} \frac{1}{B + \operatorname{tg} \delta} \right\} = -\frac{1}{3} SC_z \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} - \frac{1}{2} \frac{1}{B + \operatorname{tg} \delta} \right]. \quad (28.59)$$

**З а м е ч а н и е.** Подсасывающая сила также должна приниматься в расчет в связи с лобовым сопротивлением; так как она имеет отношение ко всей ведущей кромке  $OC_1$ , то ее выражение получится путем умножения правой части равенства (27.120) на  $\left(\frac{OC_1}{OA_1}\right)^2$ .

**28.2.3. Крыло со сверхзвуковой ведущей кромкой и дозвуковой задней.** В данном случае  $l_1$  заменяется на  $-l'_1$ . Отсюда последовательно имеем

$$\begin{aligned} H_2'^2 &= \frac{B(l_2 - l'_1)}{Bl_2 - 1}, \\ Q'^2 &= \frac{B(1 + l'_1 \operatorname{tg} \delta)}{B + \operatorname{tg} \delta}. \end{aligned} \quad (28.60)$$

Выполняя необходимые подстановки и замечая, что  $m_1 = 0$ , получим из приведенных выше формул:

для коэффициента подъемной силы части крыла, расположенной внутри конуса Маха, площадь которой  $S_m$ :

$$S_m C'_{zm} = \frac{2u_2}{U_\infty} \frac{B(1 - Bl'_1)}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \frac{1}{Q'(H_2' + Q')}; \quad (28.61)$$

для коэффициента подъемной силы всего крыла

$$\begin{aligned} SC'_z &= \frac{2u_2}{U_\infty} \frac{B(1 - Bl'_1)}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \frac{H_2'}{Q'} \frac{1}{H_2'^2 - Q'^2} = \\ &= -\frac{2\alpha}{B} \frac{B \sqrt{l_2 - l'_1}}{\sqrt{Bl_2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(B + \operatorname{tg} \delta)(1 + l'_1 \operatorname{tg} \delta)}} \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta}, \end{aligned} \quad (28.62)$$

где  $S$  получается из того же выражения (28.44) после замены  $l_1$  на  $-l'_1$ :

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l'_1}{1 + l'_1 \operatorname{tg} \delta} \right). \quad (28.63)$$

Величина момента относительно  $Ox_1$  может быть выведена из выражения (28.62).

**28.2.4. Дозвуковые ведущие кромки.** Обе дозвуковые кромки треугольного крыла лежат внутри конуса Маха. Полагая

$$2x = l_1 - l_2, \quad 2\lambda = l_1 + l_2, \quad y = \eta + x, \quad (28.64)$$

приведем последовательно уравнение (27.67), представляющее осевую скорость возмущения, к виду

$$u = \frac{q_0}{l_1 l_2} \frac{\left\{ l_1 l_2 + \frac{1}{2} (l_1 - l_2) y \right\}}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} = \frac{q_0}{l_1 l_2} \frac{\lambda^2 + x\eta}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}}. \quad (28.65)$$

В согласии с выражениями (27.85) и (27.86),

$$k_1 = \sqrt{1 - \frac{B^2 \lambda^2}{1 - B^2 x^2}},$$

$$\frac{q_0}{l_1 l_2} = - \frac{\alpha U_\infty}{E(k_1) \sqrt{1 - B^2 x^2}}; \quad (28.66)$$

следовательно, выражение для коэффициента подъемной силы будет

$$\frac{U_\infty}{2} SC_z = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2} = \frac{q_0}{l_1 l_2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\lambda^2 + x \eta}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} \frac{d\eta}{(1 - x \operatorname{tg} \delta - \eta \operatorname{tg} \delta)^2}. \quad (28.67)$$

Полагая

$$\eta = \lambda \sin \varphi, \quad 1 - x \operatorname{tg} \delta = a, \quad \lambda \operatorname{tg} \delta = b, \quad (28.68)$$

представим уравнение (28.67) в форме

$$\frac{U_\infty}{2} SC_z = \frac{q_0 \lambda}{l_1 l_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + x \sin \varphi}{(a - b \sin \varphi)^2} d\varphi, \quad (28.69)$$

но так, как

$$\int \frac{\lambda + x \sin \varphi}{(a - b \sin \varphi)^2} d\varphi = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{-(\lambda b + ax) \cos \varphi}{a - b \sin \varphi} + \int \frac{(a\lambda + bx) d\varphi}{a - b \sin \varphi} \right\} + C_1, \quad (28.70a)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a - b \sin \varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad (28.70b)$$

$$a\lambda + bx = (1 - x \operatorname{tg} \delta) \lambda + \lambda x \operatorname{tg} \delta = \lambda, \quad (28.70b)$$

то

$$SC_z = \frac{2\pi q_0 \lambda^2}{U_\infty l_1 l_2 (a^2 - b^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\pi q_0 (l_1 + l_2)}{2U_\infty l_1 l_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)(1 + l_2 \operatorname{tg} \delta)}} \left[ \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} + \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} \right], \quad (28.71)$$

или, деля на  $S$ , получим коэффициент подъемной силы

$$C_z = \frac{\pi q_0 (l_1 + l_2)}{U_\infty l_1 l_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)(1 + l_2 \operatorname{tg} \delta)}}. \quad (28.72)$$

Для вычисления момента относительно оси  $Ox_1$ , рассматривая выражение (28.71) и применяя соотношение (28.31), получим

$$\overline{C_1 C_2} SC_l = \frac{1}{3} \frac{\pi q_0 (l_1 + l_2)}{U_\infty l_1 l_2} \frac{S}{\sqrt{(1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)(1 + l_2 \operatorname{tg} \delta)}} \times$$

$$\times \frac{3}{2} \left[ \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} \right]; \quad (28.73)$$

деля на  $S$ , находим

$$\overline{C_1 C_2} C_l = \frac{1}{2} C_z \left( \frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} \right). \quad (28.74)$$

**З а м е ч а н и е.** Кроме волнового сопротивления, как и в предыдущем случае, нужно принять в расчет подсасывающую силу. Она выводится из формулы (27.124) при условии, что передняя кромка  $OC_1$  рассматривается вместо  $OA_1$ . Таким образом: для кромки  $OC_1$

$$R_{s1} = -\pi\rho \frac{q_0^2 (l_1 + l_2)}{8l_1l_2} \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{l_2} \left( \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OA_1}} \right)^2; \quad (28.75)$$

для кромки  $OC_2$

$$R_{s2} = -\pi\rho \frac{q_0^2 (l_1 + l_2)}{8l_1l_2} \frac{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{l_1} \left( \frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA_2}} \right)^2. \quad (28.76)$$

**28.2.5. Дозвуковые ведущая и задняя кромки.** Если ведущая кромка  $OC_1$  заменяется задней кромкой  $OC'_1$ , то  $l_1$  заменяется через  $-l'_1$  (см. фиг. 28.6), и, чтобы определить осевую скорость возмущения, применяется формула (27.30), с тем отличием, что точки  $A'_1$  и  $A_2$  будут лежать на отрицательной стороне оси абсцисс.

Следовательно,

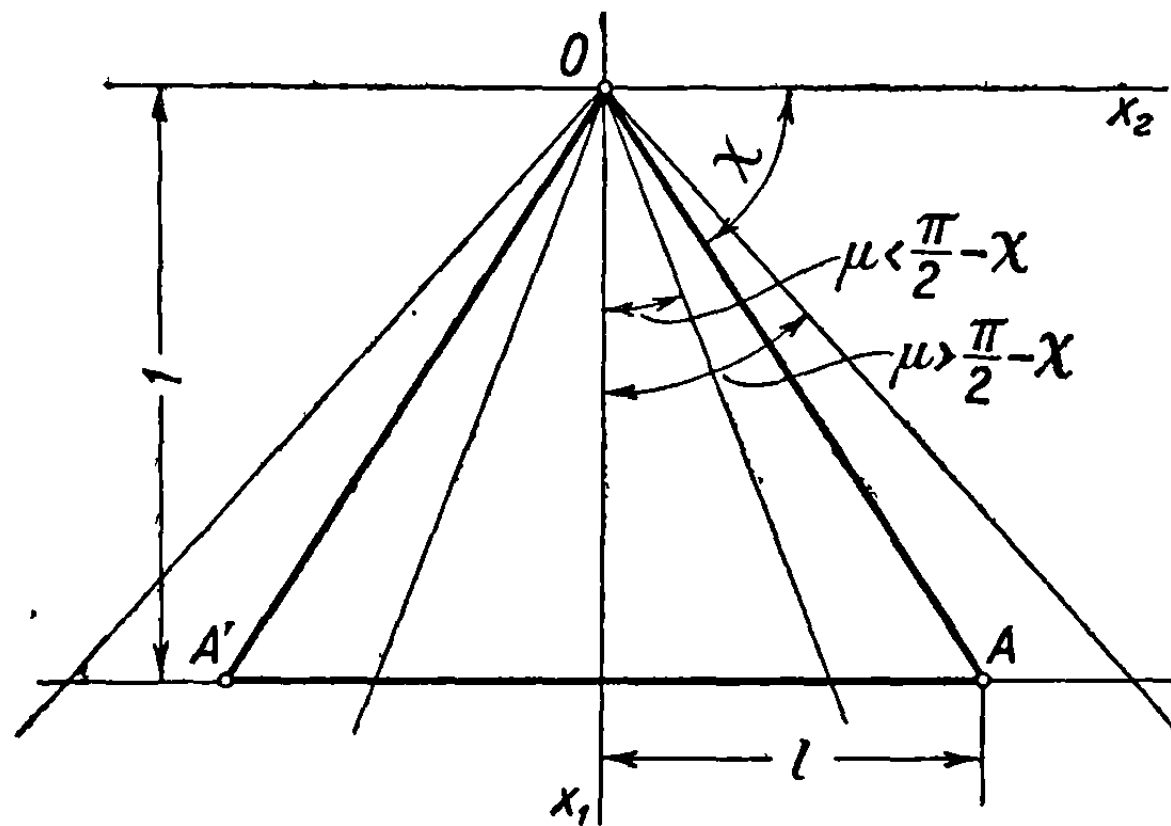
$$u = q \sqrt{\frac{y + l'_1}{y + l_2}}; \quad (28.77)$$

заменяя

$$-2\gamma = l'_1 + l_2, \quad 2\beta = l_2 - l'_1, \quad y = \eta + \gamma, \quad (28.78)$$

приведем выражение для скорости к виду

$$u = q \sqrt{\frac{\eta - \beta}{\eta + \beta}} = \frac{q(\eta - \beta)}{\sqrt{\eta^2 - \beta^2}}. \quad (28.79)$$



Фиг. 28.7

Полученная формула аналогична (28.65), поэтому нет необходимости в дальнейших вычислениях, так как подсчет интеграла (28.26) выполняется немедленно.

**28.2.6. Приложение к треугольному крылу, имеющему угол рысканья.** Рассматривая симметричное треугольное крыло, называемое дельтообразным (фиг. 28.7), определим осевую скорость возмущения и подъемную силу выражениями:

для крыла со сверхзвуковыми кромками

$$\frac{u}{U_\infty} = -\frac{2\alpha}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \arccos \sqrt{\frac{n^2-k^2}{1-k^2}}, \quad (28.80a)$$

$$C_{zm} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{2}{1+n+\sqrt{1-n^2}}, \quad C_z = -\frac{4\alpha}{B}, \quad (28.80b)$$

где  $n = \frac{1}{Bl}$  и  $k = \frac{y}{l}$  сохраняют свое прежнее значение (см. равенства 25.5); для крыла с дозвуковыми кромками

$$u = -\frac{\alpha U_\infty}{E(k)} \frac{l^2}{\sqrt{l^2-y^2}} = -\frac{\alpha U_\infty}{E(k)} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \quad (28.81a)$$

$$C_z = -\frac{2\pi l \alpha}{E} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda \alpha}{E}, \quad (28.81b)$$

где  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $\sqrt{1-B^2l^2}$ ,  $\lambda$  — удлинение.

Напомним, что волновое сопротивление получается умножением подъемной силы на угол атаки  $\alpha$ . Это сопротивление для крыльев с дозвуковыми кромками уменьшается из-за тяги, обусловленной подсосом (см. формулу 27.122)

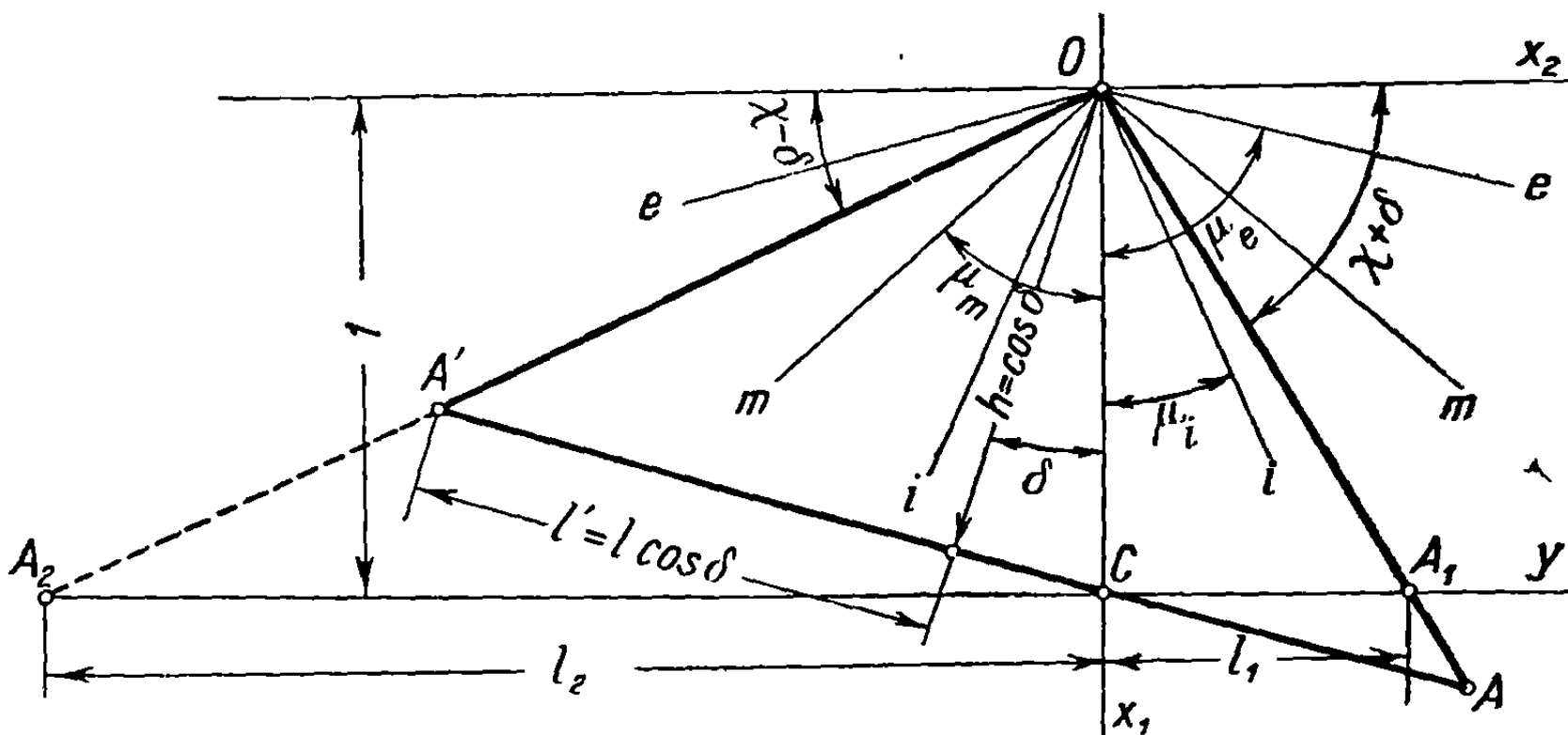
$$C_s = \frac{R_s}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 l} = -\frac{\alpha^2}{E^2} \pi l \sqrt{1-B^2l^2}, \quad (28.82)$$

который возникает на ведущих кромках, если они слегка закруглены.

Таким образом, полный коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{2\pi l \alpha^2}{E} - \frac{\pi l \alpha^2}{E^2} \sqrt{1-B^2l^2} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} (2E - \sqrt{1-B^2l^2}). \quad (28.83)$$

Этот окончательный результат показывает, что подсос на дозвуковых кромках значительно понижает лобовое сопротивление.



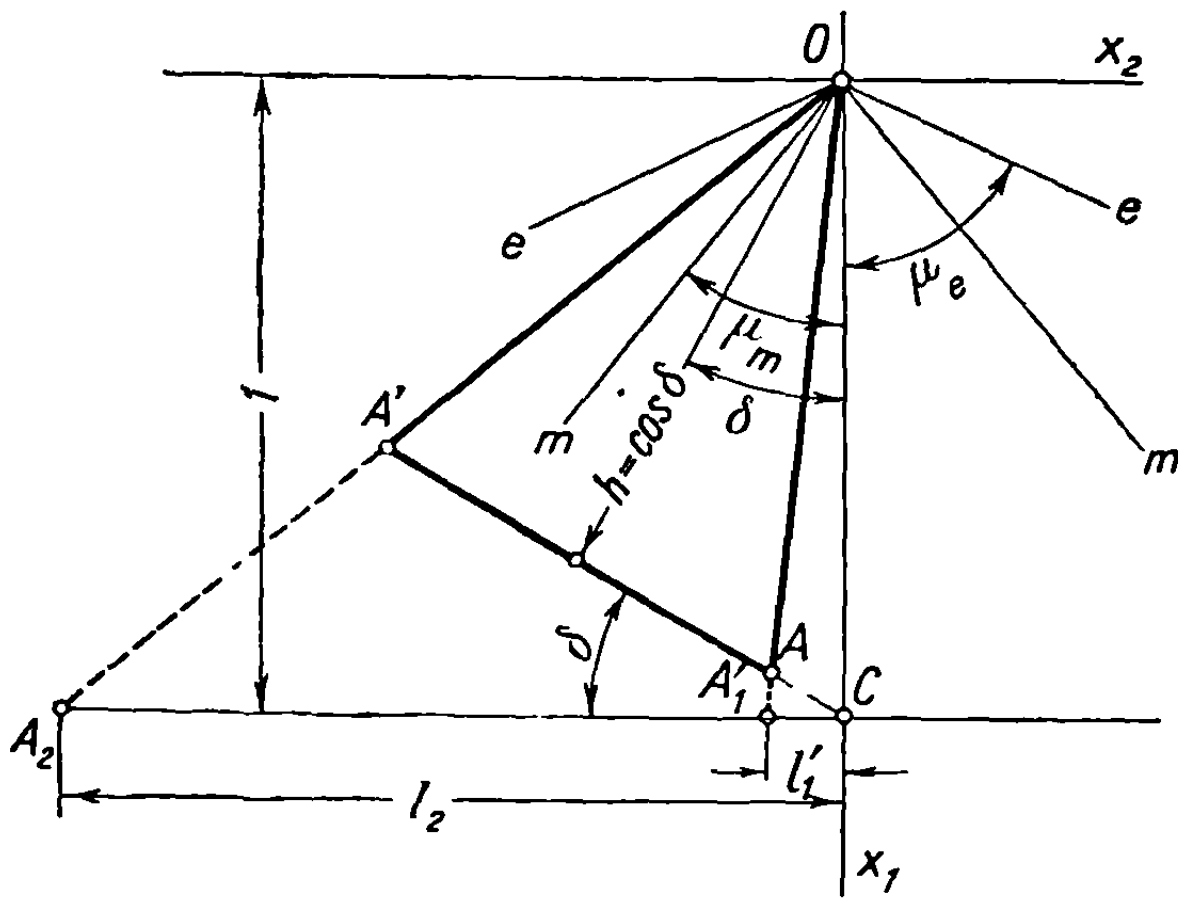
Фиг. 28.8

Предположим, что ось дельтообразного крыла отклонена от направления потока; его основание в этом случае не будет нормальным к этому направлению. Влияние отклонения на аэродинамические характеристики крыла можно легко определить путем применения приведенных результатов к различным случаям, зависящим от положения крыла относительно конуса Маха (фиг. 28.8 и 28.9).



Заметим, что все указанные результаты выражаются через величины  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l$ , которые являются функциями  $\chi$  и  $\delta$ :

$$l = \operatorname{ctg} \chi, \quad l_1 = \operatorname{ctg} (\chi + \delta), \quad l_2 = \operatorname{ctg} (\chi - \delta). \quad (28.84)$$



Фиг. 28.9

Характеристическая длина  $\overline{C_1C_2}$ , которая предполагалась в наших формулах имеющей обычное значение, ввиду определения коэффициента момента крена получает величину

$$\overline{C_1C_2} = \overline{AA'} = 2l' = 2 \operatorname{ctg} \chi \cos \delta. \quad (28.85)$$

Некоторые выражения, встречающиеся в приведенных формулах, даны ниже, чтобы упростить подсчет в получающихся уравнениях:

$$S = \operatorname{ctg} \chi \cos^2 \delta; \quad (28.86a)$$

$$\frac{l_1}{1 - l_1 \operatorname{tg} \delta} - \frac{l_2}{1 + l_2 \operatorname{tg} \delta} = -\sin 2\delta; \quad (28.86b)$$

$$\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} = \frac{2 \sin 2\chi}{\cos^2 \chi + \cos 2\delta}. \quad (28.86b)$$

Отношения  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA_1}}$  и  $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}}$  требуются для вычисления подсасывающей силы; они легко выводятся из равенств

$$\overline{OA} \sin \chi = \overline{OA'} \sin \chi = \cos \delta, \quad \overline{OA_1} \sin (\chi + \delta) = \overline{OA_2} \sin (\chi - \delta) = 1, \quad (28.87)$$

откуда

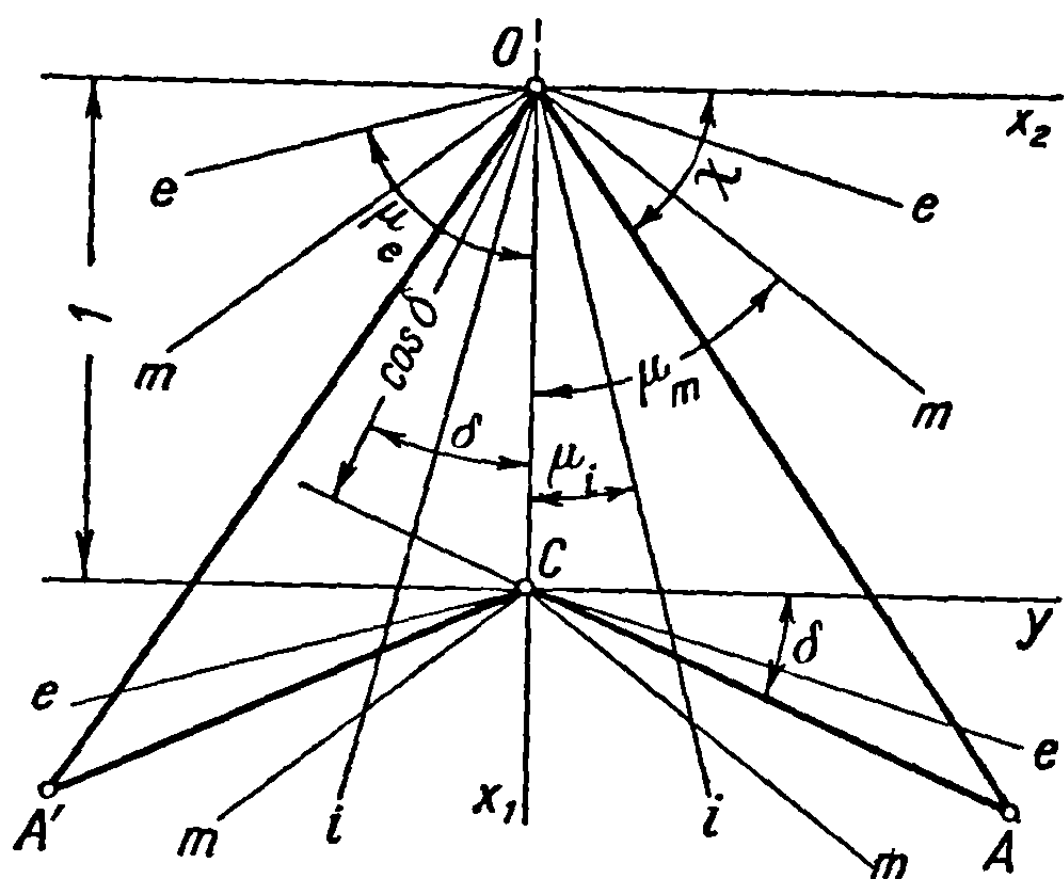
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA_1}} = \cos^2 \delta (1 + \operatorname{ctg} \chi \operatorname{tg} \delta),$$

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} = \cos^2 \delta (1 - \operatorname{ctg} \chi \operatorname{tg} \delta). \quad (28.88)$$

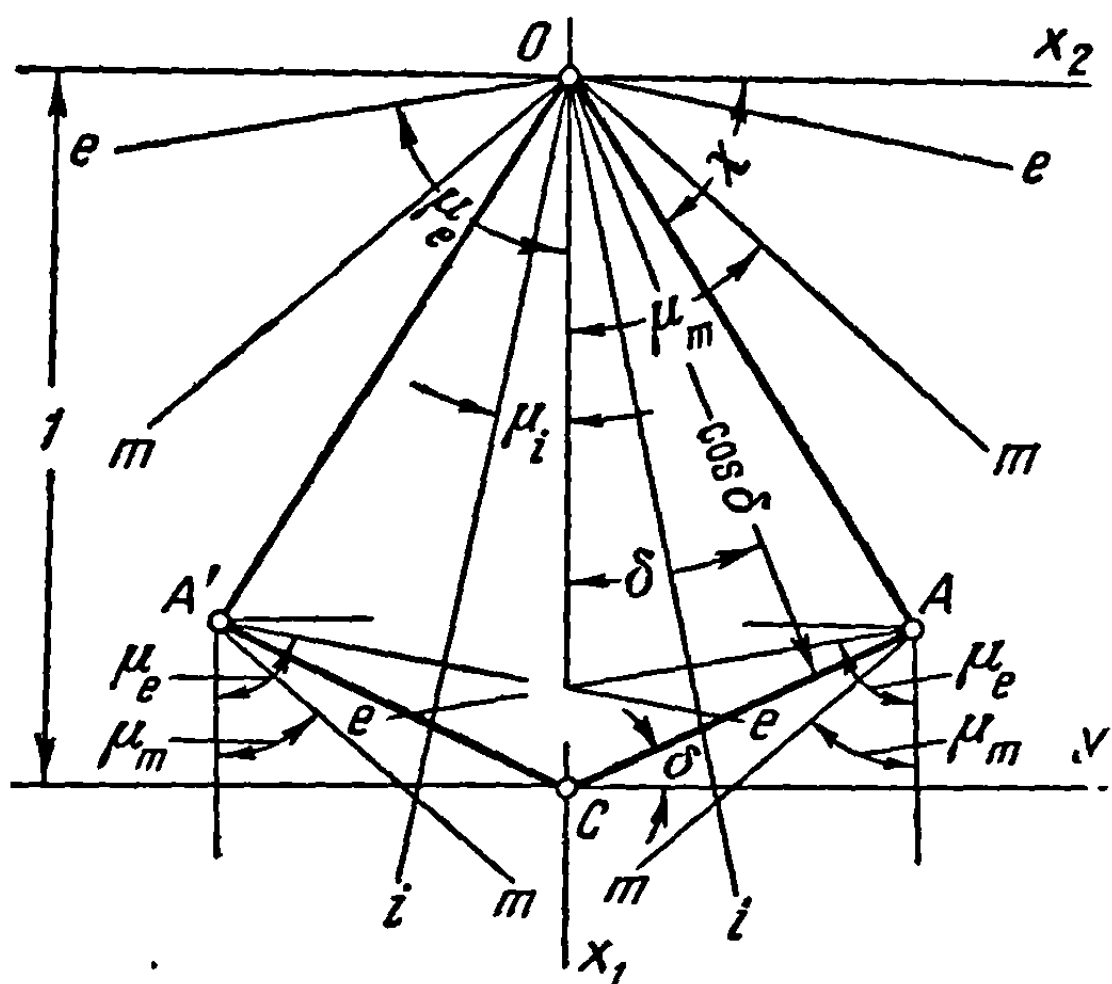
### 28.3. Стреловидные и ромбовидные крылья

Стреловидные и ромбовидные крылья объединяются потому, что обе эти формы выводятся из треугольного крыла одним и тем же методом. Так,

если угол  $\delta$  задней кромки положителен, то полученное крыло будет стреловидным (фиг. 28.10); если угол отрицателен, получается ромбовидное крыло (фиг. 28.11).



Фиг. 28.10



Фиг. 28.11

Для каждой из указанных форм может быть рассмотрено три случая:

$$1) \mu_i < \frac{\pi}{2} - \chi; \quad 2) \frac{\pi}{2} - \chi < \mu_m < \frac{\pi}{2} - \delta; \quad 3) \mu_e > \frac{\pi}{2} - \delta,$$

которые очевидны из рассмотрения упомянутых выше фигур.

Обозначая поверхность стреловидного крыла через  $S_c$  и ромбовидного через  $S_r$ , имеем

$$S_c = \overline{CA} \cos \delta = \frac{\cos \chi \cos \delta}{\sin(\chi - \delta)} = \frac{l}{1 - l \operatorname{tg} \delta}; \quad (28.89a)$$

$$S_r = \overline{CA} \cos \delta = \frac{\cos \chi \cos \delta}{\sin(\chi + \delta)} = \frac{l}{1 + l \operatorname{tg} \delta}. \quad (28.89b)$$

Эти результаты будут учтены при вычислении подъемной силы. Рассмотрим три следующих случая.

**28.3.1. Сверхзвуковые ведущие и задние кромки.** Рассмотрим стреловидное крыло (см. фиг. 28.10) и предположим, что аэродинамические характеристики определены. Заменяя  $\delta$  на  $-\delta$ , можно также вывести характеристики ромбовидного крыла.

Для вычисления коэффициента подъемной силы поверхности, заключенной внутри конуса  $iOi$ , определим осевую скорость возмущения с помощью формулы (25.20), так как крыло симметрично:

$$u = \frac{2u_1}{\pi} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}} \left( u_1 = - \frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \right); \quad (28.90)$$

обозначая поверхность внутри конуса Маха через  $S_m$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_m C_{zm} &= \frac{2}{U_\infty} \int_0^{1/B} \frac{u dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2} = \\ &= \frac{4u_1}{\pi U_\infty} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \int_0^{1/B} \arccos \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}} d \left( \frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta} \right) = \\ &= \frac{4u_1}{\pi U_\infty} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \left\{ \left( \frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \delta} \arccos \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}} \right) \Big|_0^{1/B} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{B^2 l^2 - 1} \int_0^{1/B} \frac{y dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta) (l^2 - y^2) \sqrt{1 - B^2 y^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (28.91)$$

Полагая

$$By = \sin \varphi,$$

выразим записанный выше интеграл, в согласии с равенством (28.706), следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{B^2 l^2 - 1} \int_0^{1/B} \frac{y dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta) (l^2 - y^2) \sqrt{1 - B^2 y^2}} &= \sqrt{B^2 l^2 - 1} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{a}{B - \operatorname{tg} \delta \sin \varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{b}{Bl + \sin \varphi} + \frac{c}{Bl - \sin \varphi} \right) d\varphi = 2a \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{B - \operatorname{tg} \delta}{B + \operatorname{tg} \delta}} - \right. \\ &- \left. \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta}} \right) + 2b \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Bl + 1}{Bl - 1}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \right) + \\ &+ 2c \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Bl - 1}{Bl + 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \right), \end{aligned} \quad (28.92)$$

где

$$a = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{1 - l^2 \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad b = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + l \operatorname{tg} \delta}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - l \operatorname{tg} \delta}. \quad (28.93)$$

Полагая

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \chi} = l \operatorname{tg} \delta, \quad \frac{\operatorname{tg} \delta}{B} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \chi} \frac{1}{B \operatorname{ctg} \chi} = \frac{\varepsilon}{Bl}, \quad (28.94)$$

$$\sigma = \arccos \frac{1}{Bl}, \quad \nu = \arccos \frac{\varepsilon}{Bl}, \quad \pi - \nu = \arccos \left( \frac{-\varepsilon}{Bl} \right),$$

получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{B - \operatorname{tg} \delta}{B + \operatorname{tg} \delta}} &= \frac{\nu}{2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{\pi}{2} - \nu, \\ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Bl - 1}{Bl + 1}} &= \frac{\sigma}{2}, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Bl + 1}{Bl - 1}} = \frac{\pi - \sigma}{2}, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} &= \frac{\pi}{2} - \sigma. \end{aligned} \quad (28.95)$$

Подставляя эти величины в уравнение (28.92), выполняя требуемые операции и вводя найденное значение в формулу (28.91) для подъемной силы, получим окончательный результат в виде

$$\frac{1}{2} S_m C_{zm} = \frac{4u_1}{\pi U_\infty} \frac{l}{1 - \varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon \sigma}{1 + \varepsilon} + \frac{\pi - \nu}{1 + \varepsilon} \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \frac{Bl - 1}{Bl - \varepsilon} \right], \quad (28.96)$$

где, аналогично соотношению (28.89а),

$$S_m = \frac{1}{B - \operatorname{tg} \delta} = \frac{l}{Bl - \epsilon}. \quad (28.97)$$

Для вычисления коэффициента полной подъемной силы, обозначая полную площадь (см. формулу 28.89 а) через  $S$  и площадь поверхности вне конуса Маха через  $S_1$ , будем иметь

$$\begin{aligned} S &= \frac{l}{1 - \epsilon}, \\ S_1 &= S - S_m = \frac{Bl - 1}{Bl - \epsilon} \frac{l}{1 - \epsilon}. \end{aligned} \quad (28.98)$$

Принимая во внимание величину коэффициента подъемной силы этой поверхности

$$C_{z1} = \frac{4u_1}{U_\infty}, \quad (28.99)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{l}{1 - \epsilon} C_z &= \frac{4u_1}{U_\infty} \frac{Bl - 1}{Bl - \epsilon} \frac{l}{1 - \epsilon} + \\ &+ \frac{4u_1}{\pi U_\infty} \frac{2l}{1 - \epsilon} \left[ \frac{\sigma \epsilon}{1 + \epsilon} + \frac{\pi - \nu}{1 + \epsilon} \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \epsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \frac{Bl - 1}{B^2 l^2 - \epsilon^2} \right] = \\ &= \frac{8u_1}{\pi U_\infty} \frac{l}{1 - \epsilon} \left[ \frac{\epsilon \sigma}{1 + \epsilon} + \frac{\pi - \nu}{1 + \epsilon} \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \epsilon^2}} \right]; \end{aligned} \quad (28.100)$$

отсюда элементарным расчетом после необходимых подстановок находим окончательный результат:

$$C_z = \frac{-8}{\pi(1 + \epsilon)} \frac{\alpha}{B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left[ \epsilon \operatorname{arccos} \frac{1}{Bl} + \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \epsilon^2}} \operatorname{arccos} \left( \frac{-\epsilon}{Bl} \right) \right], \quad (28.101)$$

который представляет формулу, данную Пакетом и Стюардом [33].

Для ромбовидного крыла  $\delta$  заменяется через  $-\delta$ , что означает превращение  $\epsilon$  в  $-\epsilon$ ; следовательно,

$$C_z = \frac{-8}{\pi(1 - \epsilon)} \frac{\alpha}{B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left[ \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \epsilon^2}} \operatorname{arccos} \frac{\epsilon}{Bl} - \epsilon \operatorname{arccos} \frac{1}{Bl} \right]. \quad (28.102)$$

Из приведенных формул очевидно, что если  $\delta = 0$ , т. е. в случае дельтообразных крыльев, коэффициент подъемной силы будет таким же, как для крыла бесконечного размаха.

**28.3.2. Дозвуковая ведущая и сверхзвуковая задняя кромки.** В этом случае крыло заключено внутри конуса  $mOm$ , и скорость возмущения выражается формулой (27.69)

$$u = \frac{q_0}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad \left( q_0 = -\frac{\alpha U_\infty l^2}{E(k)}, \quad k = \sqrt{1 - B^2 l^2} \right), \quad (28.103)$$

где  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k$ .

При этих условиях, коэффициент подъемной силы стреловидного крыла определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} SC_z &= \frac{2q_0}{U_\infty} \int_0^l \frac{dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2 \sqrt{l^2 - y^2}} = \frac{2q_0}{U_\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - l \operatorname{tg} \delta \sin \varphi)^2} = \\ &= \frac{2q_0}{U_\infty (1 - l^2 \operatorname{tg}^2 \delta)} \left\{ \frac{-l \operatorname{tg} \delta \cos \varphi}{1 - l \operatorname{tg} \delta \sin \varphi} + \frac{2}{\sqrt{1 - l^2 \operatorname{tg}^2 \delta}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - l \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 - l^2 \operatorname{tg}^2 \delta}} \right\}_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2q_0}{U_\infty (1 - l \operatorname{tg} \delta)} \frac{1}{1 + \varepsilon} \left[ \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arccos}(-\varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (28.104)$$

где при интегрировании переменная  $y$  заменена через

$$y = l \sin \varphi. \quad (28.105)$$

Принимая во внимание выражение (28.98) для площади поверхности, получим окончательный результат

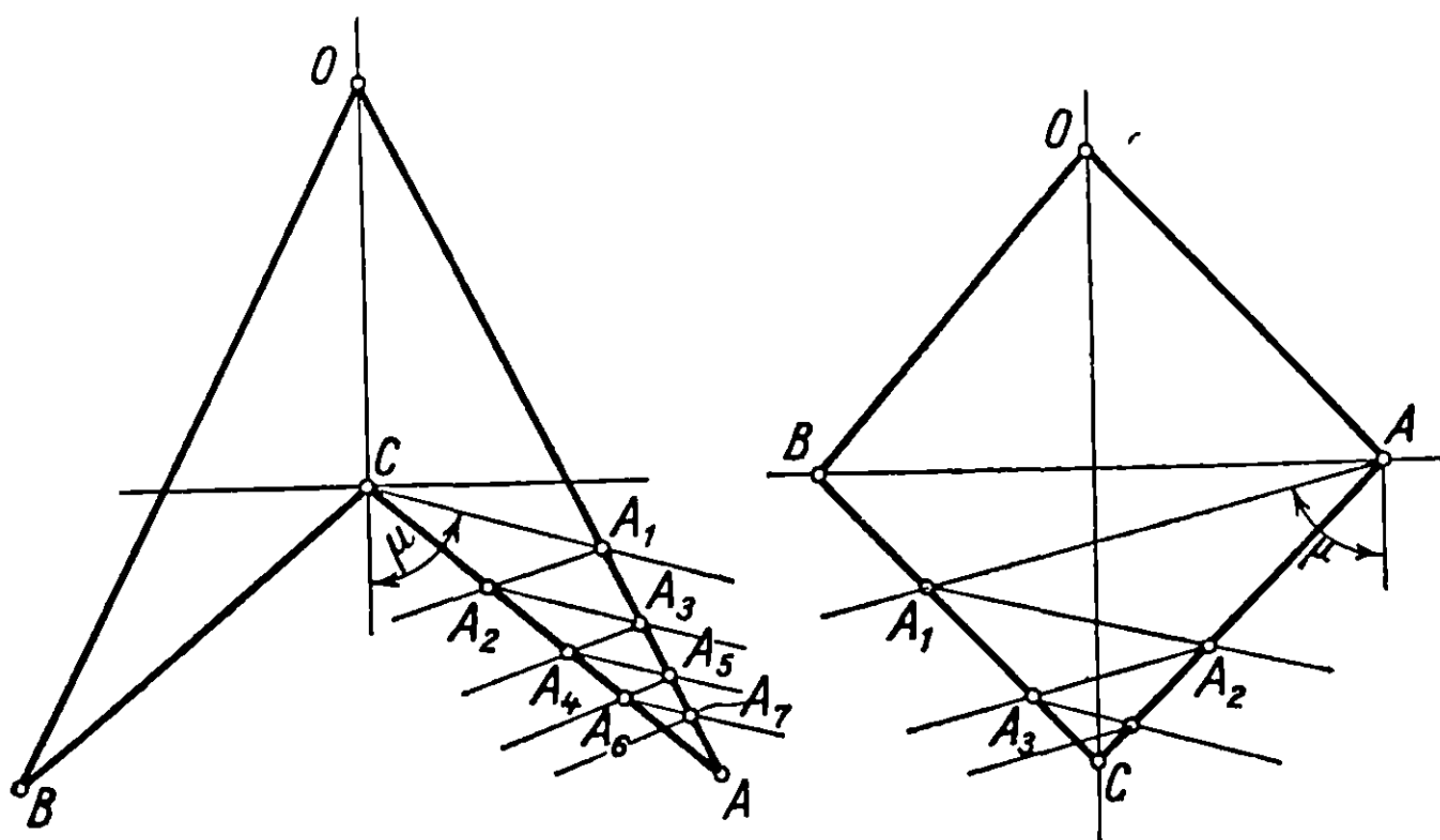
$$C_z = - \frac{4l\alpha}{(1 + \varepsilon) E(k)} \left[ \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arccos}(-\varepsilon) \right], \quad (28.106)$$

который сводится к выражению (27.101) при  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Для ромбовидного крыла, заменяя  $\varepsilon$  на  $-\varepsilon$ , получим

$$C_z = - \frac{4l\alpha}{(1 - \varepsilon) E(k)} \left( -\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arccos} \varepsilon \right). \quad (28.107)$$

**28.3.3. Обе кромки дозвуковые.** Этот случай отличается от предыдущего только тем, что линии конуса Маха, выходящие из точки  $C$  для стреловидного крыла (см. фиг. 28.10), или из точек  $A$ ,  $A'$  для ромбовидного крыла



Фиг. 28.12

(см. фиг. 28.11), пересекают кромки крыла, вызывая последовательные отражения от этих линий, что усложняет форму течения и делает вычисление осевых скоростей чрезвычайно трудным (фиг. 28.12).

В этом случае можно обратиться к приближенной формуле, предложенной Пикаром [24]. Действительно, можно показать, что при  $M \rightarrow 1 \left( \frac{1}{B} \rightarrow \infty \right)$  коэффициент подъемной силы стреловидного крыла имеет величину, приближенно равную величине коэффициента для дельтообразного крыла [25],

$$C_{z1} \approx 2\pi l \alpha, \quad (28.108)$$

следовательно, почти не зависящую от  $\delta$ .

Предположим, что для значений

$$\mu \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad M_\delta \leq \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad B \leq \operatorname{tg} \delta \quad (28.109)$$

коэффициент подъемной силы  $C_z$  изменяется приблизительно линейно в зависимости от  $M$ ; следовательно,

$$C_z = 2\pi l \alpha + \frac{C_{z\delta} - 2\pi l \alpha}{M_\delta - 1} M, \quad (28.110)$$

где  $C_{z\delta}$  — коэффициент подъемной силы для  $B = \operatorname{ctg} \mu = \operatorname{tg} \delta$ . Изменение коэффициента подъемной силы в зависимости от  $M$  будет очень медленным так как оно вызывается только изменением полного эллиптического интеграла второго рода  $E(k)$  с модулем  $k = \sqrt{1 - B^2 l^2}$ , который в пределе ( $B = \operatorname{tg} \delta$ ) становится равным  $k = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ .

#### 28.4. Двоякотрапецевидное крыло

Если две части крыла состоят из двух симметричных относительно оси крыла трапеций с основаниями, параллельными оси, то получается стреловидное двоякотрапецевидное крыло. В более широком смысле это наименование можно применить, если наклон кромки  $AB'$  будет следовать направлению, не совпадающему с направлением общего потока (фиг. 28.13).

Двоякотрапецевидное крыло с отрицательно наклоненной задней кромкой получается аналогично из ромбовидной формы (фиг. 28.14). Геометрические характеристики двоякотрапецевидных крыльев определяются углами  $\alpha$  и  $\delta$ , полуразмахом  $b$ , отношением крайней хорды  $c_e$  к центральной хорде  $c_0$

$$e = \frac{c_e}{c_0} \quad (28.111)$$

удлинением крыла

$$\lambda = \frac{4b^2}{S} = \frac{4}{1 + e} \frac{b}{c_0}. \quad (28.112)$$

Чтобы определить аэродинамические характеристики такого типа крыльев, рассмотрим несколько случаев, в соответствии с ориентацией сторон  $OA$ ,  $CB$  по отношению к линиям конуса Маха. Некоторые из этих случаев можно видеть на фиг. 28.13 для двоякотрапецевидных стреловидных крыльев.

Заметим, что поставленные задачи очень трудно изучать из-за последовательных отражений, которые появляются при пересечении линий Маха со сторонами трапеции, как в случае линий  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $O_4$  и т. д. Аналогично для крыла на фиг. 28.14 может рассматриваться несколько случаев, из них некоторые особенно запутаны из-за отраженных волн, которые значительно усложняют вычисления.

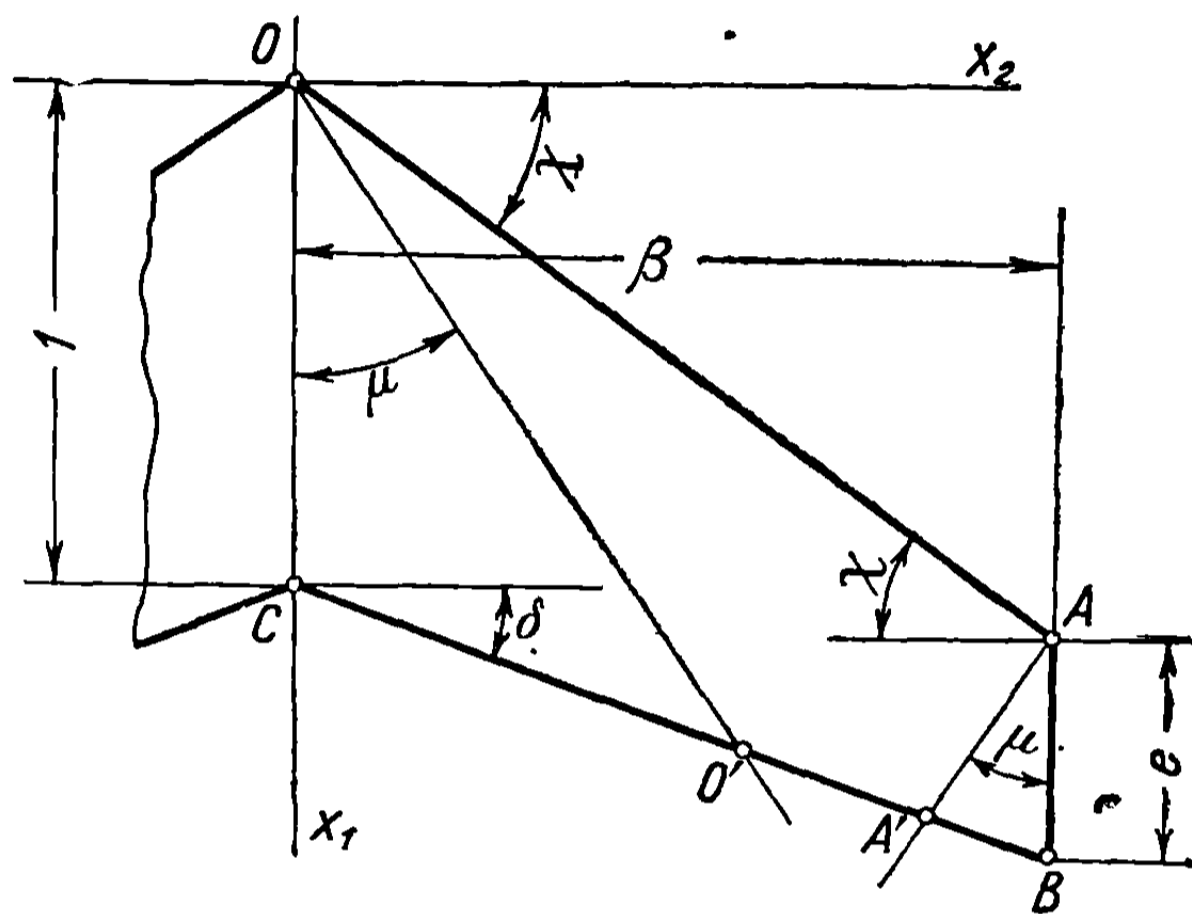


28.4.1. Случай сверхзвуковых кромок. Поверхность крыла делится на три части  $OCO'$ ,  $OO'A'A$ ,  $ABA'$ , обозначаемые соответственно через  $\frac{1}{2} S_m$ ,  $\frac{1}{2} S_1$ ,  $\frac{1}{2} S_a$ :

$$\frac{1}{2} S_m = \frac{1}{2} \frac{1}{B - \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{2} \frac{l}{Bl - \varepsilon}; \quad (28.113a)$$

$$\frac{1}{2} S_a = \frac{1}{2} \frac{e^2}{B + \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{2} \frac{e^2 l}{Bl + \varepsilon}; \quad (28.113b)$$

$$\frac{1}{2} S_1 = \frac{e+1}{2} \beta - \frac{1}{2} \frac{l}{Bl - \varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{e^2 l}{Bl + \varepsilon}. \quad (28.113b)$$



Фиг. 28.15

Для первой части, применяя уравнение (28.86), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_m C_{zm} &= \frac{4u_1}{\pi U_\infty} \frac{l}{1 - \varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \arccos \frac{1}{Bl} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1 + \varepsilon} \sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l^2 - \varepsilon^2}} \arccos \left( \frac{-\varepsilon}{Bl} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{Bl - 1}{Bl - \varepsilon} \right], \end{aligned} \quad (28.114)$$

где  $l$ ,  $\varepsilon$ ,  $u_1$  имеют те же значения, что и в предыдущем случае:

$$l = \operatorname{ctg} \chi, \quad \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \chi}, \quad u_1 = \frac{-\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}. \quad (28.115)$$

Для второй части

$$\frac{1}{2} S_1 C_{z1} = \frac{1}{2} S_1 \frac{4u_1}{U_\infty}, \quad (28.116)$$

а для третьей можно применить прежние результаты (см. формулу 28.61), полагая  $l_1 = 0$  и замечая, что все выражение должно быть умножено на  $e^2$ .

Отсюда

$$\frac{1}{2} S_a C_{za} = \frac{B}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \frac{2u_1}{U_\infty} \frac{e^2}{Q(H + Q)}, \quad (28.117)$$

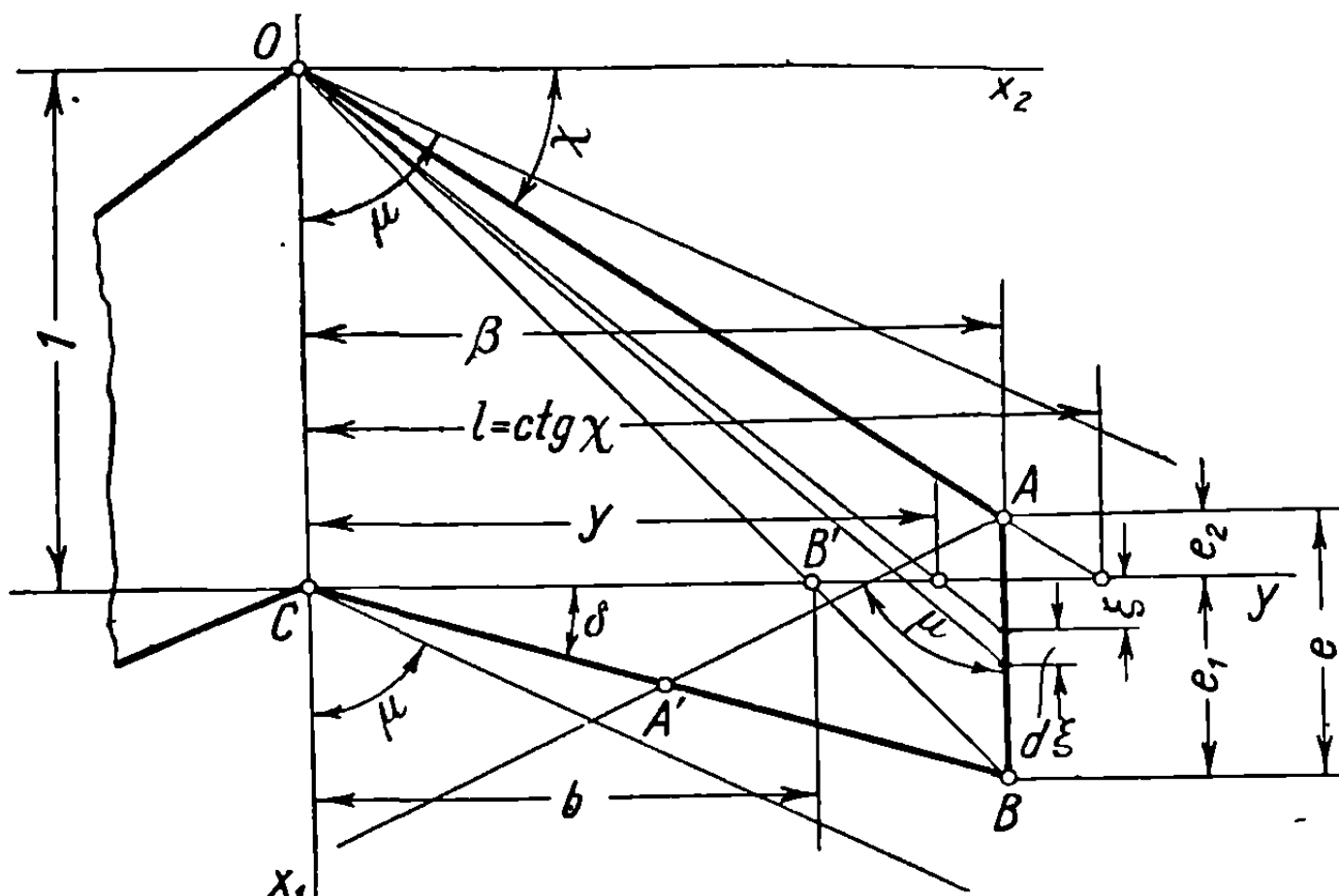
где  $Q$  и  $H$  определяются соотношениями (28.50)

$$Q^2 = \frac{B}{B + \operatorname{tg} \delta} = \frac{Bl}{Bl + \varepsilon}, \quad H^2 = \frac{Bl_2}{Bl_2 - 1} = \frac{Bl}{Bl - 1}. \quad (28.118)$$



Полная подъемная сила выводится из уравнения, которое поддается упрощению.

28.4.2. Дозвуковая ведущая и сверхзвуковая задняя кромки. Рассмотрим коническое течение с вершиной в точке  $O$ , для которого скорость выражается формулой (28.103), и коническое течение с вершиной в точке  $A$ , для которого коэффициент подъемной силы  $C_{za}$  определяется формулой (28.117). Чтобы вычислить коэффициент подъемной силы  $C_{z0}$  для первого течения,



Фиг. 28.16

проинтегрируем последовательно давления по треугольникам  $\triangle OCB$  и  $\triangle OAB$  (фиг. 28.16), причем из чертежа вытекает, что

$$\frac{\xi}{1} = \frac{\beta - y}{y}, \quad d\xi = -\beta \frac{dy}{y^2}. \quad (28.120)$$

Обозначая полную поверхность крыла через  $\int S$  и выполняя подстановку (28.105), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S C_{z0} &= \frac{1 + \epsilon}{2} \beta C_{z0} = \frac{2q}{U_\infty} \int_0^b \frac{dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^2 \sqrt{l^2 - y^2}} + \\ &+ \frac{2q\beta}{U_\infty} \int_{BA}^l \frac{d\xi}{\sqrt{l^2 - y^2}} = \frac{2q}{U_\infty} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1 - l \operatorname{tg} \delta \sin \varphi)^2} - \frac{2q\beta^2}{U_\infty l^2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{2q}{U_\infty (1 - \epsilon^2)} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} + \operatorname{arcsin} \epsilon \right) + \right. \\ &\left. + \epsilon \left( 1 - \frac{\cos \varphi_1}{1 - \epsilon \sin \varphi_1} \right) \right] - \frac{2q\beta^2}{U_\infty l^2} \operatorname{ctg} \varphi_1, \end{aligned} \quad (28.121)$$

где  $\varphi_1$  выражается зависимостью

$$\sin \varphi_1 = \frac{b}{l} = \frac{\beta}{l} \frac{1}{1 + \epsilon \frac{\beta}{l}}. \quad (28.122)$$

Коническое течение с вершиной в точке  $A$  дает результаты, идентичные полученным в предшествующем случае (см. формулу 28.117):

$$\frac{1}{2}S_a C_{za} = \frac{2u_1}{U_\infty} \frac{B}{(B + \operatorname{tg} \delta)^2} \frac{e^2}{(H + Q)Q},$$

причем здесь нужно заменить только величину  $B$ .

Для вычисления полной подъемной силы имеем соотношение

$$SC_{z_0} + S_a C_{za} = (S + S_a) C_z. \quad (28.123)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. E. Puckett. Supersonic Wave Drag of Thin Airfoils. (Сверхзвуковое волновое сопротивление тонких профилей.) «J. Aeronaut. Sci.», 13, № 9, 1946, p. 475—484.
2. R. T. Jones. «NACA Techn. Notes», № 1107, 1946, 21 p.
3. А. Ферри. Аэродинамика сверхзвуковых течений (пер. с англ.). Гос. изд. техн.-теорет. лит., М., 1953.
4. Th. von Карман а. J. M. Burgers. Aerodynamic Theory (под общ. ред. Дюренда, пер. под ред. В. В. Голубева), v. II, Berlin, 1955, S. 118.
5. M. J. Lighthill. The Supersonic Theory of Wings of Finite Span. (Сверхзвуковая теория крыльев конечного размаха.) «Rep. a. Mem.», № 2001, 1945.
6. С. Е. Вроун. «NACA Techn. Notes», № 1183, 1946.
7. H. Schlichting. Deutsche Luftfahrtforschung. Jahrbuch 1, 1937, S. 181—197.
8. С. В. Фалькович. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 11, вып. 3, 1947, стр. 391—394.
9. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, М. П. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИТТЛ, М., 1948.
10. Е. А. Красицькова. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Гос. техиздат, М., 1952.
11. E. Carafoli. Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicata la teoria aripilor poligonale. (О гидродинамическом характере решений в коническом движении, примененных к теории многоугольных крыльев). «Comun. Acad. RPR», 2, № 9—10, București, 1952.
12. E. Carafoli. Extinderea analogiei hidrodinamice die mișcările conice la aripelile groase și cu incidență variabilă. (Применение гидродинамической аналогии конических движений к толстым крыльям с переменным углом атаки.) «Comun. Acad. RPR», 3, № 3—4, București, 1953.
13. E. Carafoli și M. Ionescu. Rezistența aripilor tringhiulare dublu-conice cu pantă variabilă în curent supersonic. (Лобовое сопротивление двойного конического треугольного крыла в сверхзвуковом потоке.) «Studii și cercetări mec. apl.», 5, № 3—4, București, 1954.
14. P. Germain. Théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique. (Общая теория конических течений и их приложений к сверхзвуковой аэродинамике.) Thèse de doctorat, Paris, Sorbonne, 1949.
15. Th. von Карман. «J. Aeronaut. Sci.», 14, № 7, 1947, p. 373—412.
16. E. Carafoli. Asupra portanței și rezistenței aripilor tringhiulare la viteze supersonice. (О подъемной силе и лобовом сопротивлении треугольного крыла в сверхзвуковом потоке.) «Comun. Acad. RPR», 3, № 3—4, București, 1953.
17. W. G. Vincent. Comparison between Theory and Experiment for Wings at Supersonic Speeds. (Сравнение теории и эксперимента для крыльев при сверхзвуковых скоростях). Joint Meeting of J. Ae. S. a. R. Ae. S., May 1949.
18. S. Goldstein а. G. N. Ward. The Linearized Theory of Conical Fields in Supersonic Flow. (Линеаризованная теория конических полей в сверхзвуковом течении.) «Aeronaut. Quart.», 2, № 5, London, 1950.

19. М. И. Гуревич. ПММ, 10, № 4, 1946, стр. 513—520.
  20. С. Jacob. «Anal. Acad. RPR», ser. mat.-fiz., 3, Mem. 15, 1950.
  21. Elena Murgulescu. «Comun. Acad. RPR», 1, № 6, 1951.
  21. L. Milne-Thompson. Theoretical Aerodynamics. (Теоретическая аэродинамика.) 2-d ed. London, McMillan, 1952, p. 400.
  23. H. I. Stewart. The Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds. «Quart. Appl. Math.», 4, № 3, 1946, p. 246—254.
  24. Claude Picard. Caracteristiques aérodynamiques théoriques des ailes delta et des ailes en queue d'hirondelle pour  $M < 3,5$ . (Теоретические аэродинамические характеристики дельтовидных крыльев и крыльев с ласточкиным хвостом). «Rech. aéronaut.», № 39, 1954, p. 15—26.
  25. R. Legendre, E. A. Eichelbrenner, A. von Baarhoff. Ecoulement transsonique autour d'ailes à forte flèche. (Трансзвуковое течение вокруг крыльев с сильной стреловидностью) «O. N. E. R. A. Publ.», № 53, 1952.
  26. A. Standbrook. Lift-curve Slope at Subsonic and Supersonic Speeds (Наклон кривой подъемной силы при дозвуковой и сверхзвуковой скорости.) «Aircraft Eng», 26, № 306, 1954, p. 244—246, 257.
-

## Глава 9

### СЛОЖНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этой главе рассмотрено несколько задач, касающихся треугольных крыльев с переменным наклоном, или углом атаки, влияние концевых пластин, однородные течения более высокого порядка в применении к треугольным крыльям, а также неустановившиеся течения, вызванные периодическим движением.

#### 29. МЕТОД ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ, ПРИМЕНЕННЫЙ К ТОНКИМ КРЫЛЬЯМ С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ АТАКИ

Геометрические характеристики бесконечных конических крыльев были определены в разделе 24.1; нужно напомнить, что течение вокруг такого крыла может быть разложено на два: одно, соответствующее коническому крылу, толщина которого распределена симметрично по отношению к плоскости, проходящей через две стороны угла при вершине, и другое, соответствующее скелету рассмотренного крыла. Условия течения для крыльев симметричной толщины и переменного наклона (см. раздел 25) привели к вычислению волнового сопротивления двоякоконических крыльев (см. раздел 26), замкнутых сзади.

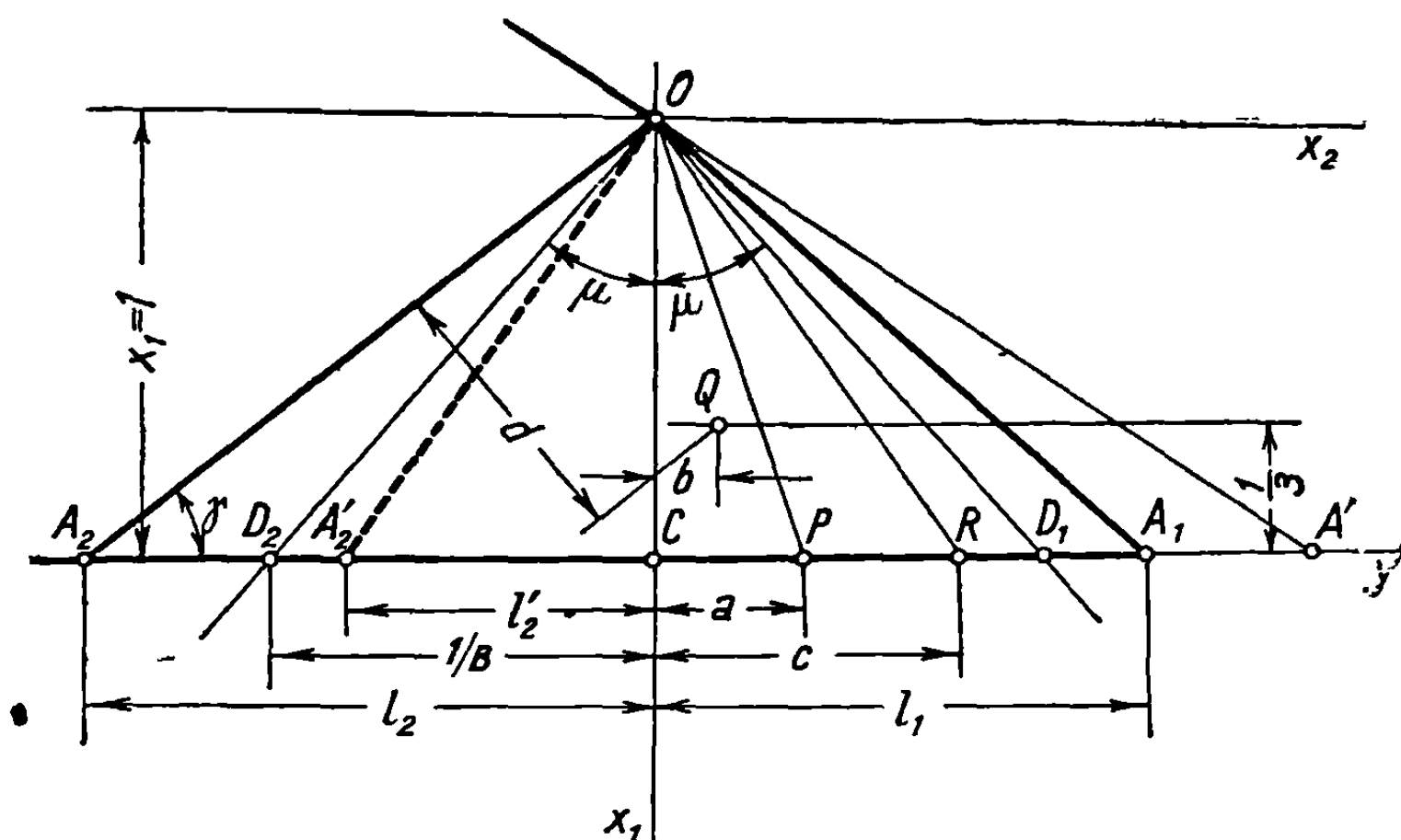
После установления условий течения вокруг тонких угловидных крыльев (см. раздел 27) полученные результаты привели к определению аэродинамических характеристик трапециевидных крыльев и, в частности, треугольных (см. раздел 28).

Рассмотрим теперь некоторые задачи, относящиеся к крыльям с переменным углом атаки, имея в виду их применение для практических целей, например, крылья, снабженные элеронами, *отклонение* которых производит внезапное изменение угла атаки соответствующих частей крыла, крылья со скачкообразным или непрерывным изменением угла атаки, двоякоконические дельтообразные крылья с переменным углом атаки и т. д.

#### 29.1. Влияние отклонения элеронов со сверхзвуковыми ведущими кромками

Так как поток вдоль верхней поверхности крыла полностью отделяется от потока на нижней, каждая из них трактуется как крыло симметричной

толщины, причем применяются результаты, полученные в разделе 25, относительно изменения наклона в конечном числе точек крыла. Последующий раздел посвящен внезапному изменению угла атаки в какой-нибудь частной точке  $A_2$ , которая, по предположению, является следом шарнира элерона



Фиг. 29.1

(фиг. 29.1), обусловленному отклонением последнего. Кромка  $OA_1$  элерона образует сверхзвуковую ведущую кромку конического крыла с вершиной в точке  $O$ , а продолжение кромки основного крыла, вообще говоря, пересекает ось  $Sy$  в  $A'$ , в предположении, что элерон  $OA_2A_1$  будет частью трапецевидного или треугольного крыла, как и может быть во встречающихся на практике случаях.

Предположим, что угол атаки равен нулю вплоть до линии  $OA_2$  и что он скачкообразно изменяется, получая значение  $\alpha$ , между  $OA_2$  и  $OA_1$  вследствие отклонения элерона. Осевая скорость  $u$  на крыле, получающаяся при такой ситуации, определяется как функция от  $Y$  с помощью выражения (27.7а)

$$u = \operatorname{Re} \frac{i}{\pi} \left[ u_1 \left( \ln \frac{Y + iH_1}{Y - iH_1} - i\pi \right) + u_2 \ln \frac{Y - iH_2}{Y + iH_2} \right], \quad (29.1)$$

где  $Y$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  даются, соответственно, соотношениями (24.43) (27.5) и (27.6):

$$Y = \sqrt{\frac{1 + By}{1 - By}}, \quad H_1 = \sqrt{\frac{Bl_1 + 1}{Bl_1 - 1}}, \quad H_2 = \sqrt{\frac{Bl_2 - 1}{Bl_2 + 1}}, \quad (29.2)$$

$$u_1 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad u_2 = -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}.$$

Задача состоит в определении влияния элерона на подъемную силу, момент крена относительно оси  $Ox_1$  и шарнирный момент.

Ось шарнира может, разумеется, попадать внутрь конуса Маха, занимая, например, положение  $OA'_2$ , и в этом случае выражение (29.1) видоизменяется, причем преобразование выполняется автоматически из-за присутствия символа  $\operatorname{Re}$  (действительная часть). Получающееся при этом соотношение может быть

записано после преобразования  $u_2$  и замены  $H_2$  на  $iL_2$  следующим образом:

$$u = \frac{i u_1}{\pi} \ln \frac{Y + i H_1}{Y - i H_1} - \frac{\alpha U_\infty}{\pi B} \sqrt{\frac{B l_2'}{1 - B^2 l_2'^2}} \ln \frac{Y + L_2'}{Y - L_2'} + u_1, \quad (29.3)$$

$$L_2' = \sqrt{\frac{1 - B l_2'}{1 + B l_2'}} \quad (29.4)$$

Благодаря этому свойству могут быть найдены выражения общей применимости для подъемной силы и момента крена как в случае сверхзвуковой оси шарнира  $OA_2$ , так и дозвуковой  $OA_2'$ .

Так как результаты, полученные в разделе 27.1 для угловидных крыльев со сверхзвуковыми кромками, могут быть непосредственно применены к сверхзвуковым шарнирам, рассмотрим сначала этот случай.

Для вычисления подъемной силы и момента крена, обусловленного отклонением элерона, используем метод, описанный [в более ранней работе [1]]. Другим методом подъемная сила была определена Легерстромом и Мартой Грехем [2].

**29.1.1. Влияние элерона на подъемную силу.** В случае сверхзвукового шарнира рассмотрим коэффициент подъемной силы треугольной поверхности  $OPR$  с основанием  $c - a$ , заключенной внутри конуса Маха (фиг. [29.1]).

Согласно установленным ранее соотношениям (27.12), (27.13) и (27.14), получим равенство

$$\frac{c - a}{2} C_{zm} = - \operatorname{Re} \frac{4}{B U_\infty} \left[ \frac{u}{1 + Y^2} + \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{2 u_n H_n}{\pi (1 - H_n^2)} \left( \frac{1}{H_n} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_n} - \operatorname{arctg} Y \right) \right]_A^C, \quad (29.5)$$

в котором значения  $H_1$  и  $H_2$  определяются формулами (29.2), тогда как  $A$  и  $C$  будут пределами интегрирования, соответствующими абсциссам  $a$  и  $c$  в физической плоскости и определяемыми выражениями (27.13).

Применим формулу (29.5) к двум случаям расположения шарнира.

1) Когда шарнир сверхзвуковой, коэффициент подъемной силы для всего элерона будет таким же, как для треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками:

$$C_{za} = - \frac{4a}{B}. \quad (29.6)$$

Как было показано в разделе 27.1.1, этот результат может быть получен непосредственно из приведенной выше формулы, если ввести следующие пределы интегрирования:

$$a = -l_2, \quad c = l_1, \quad A = \sqrt{\frac{1 - B l_2}{1 + B l_2}} = i H_2, \quad (29.7)$$

$$C = \sqrt{\frac{1 + B l_1}{1 - B l_1}} = -i H_1.$$

2) Если шарнир дозвуковой ( $l'_2 < \frac{1}{B}$ ), то сначала надо рассматривать подъемную силу для всего элерона и для части крыла, прикрытой конусом Маха; в этом случае

$$a = -\frac{1}{B}, \quad c = l_1, \quad A = 0,$$

$$C = \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{1 - Bl_1}} = -iH_1, \quad (29.8)$$

Выполняя возможные подстановки и приведения и обозначая соответствующий коэффициент подъемной силы через  $C'_{za}$ , получим

$$C'_{za} = -\frac{4\alpha B (l_1 + l'_2)}{B Bl_1 + 1}. \quad (29.9)$$

Чтобы определить подъемную силу одного элерона, положим

$$a = -l'_2, \quad c = l_1, \quad A = \sqrt{\frac{1 - Bl'_2}{1 + Bl'_2}} = L'_2,$$

$$C = \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{1 - Bl_1}} = -iH_1; \quad (29.10)$$

вводя эти значения в уравнение (29.5), получим равенство

$$C_{za} = -\frac{8\alpha}{\pi B} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{L'_2} + \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{L'_2}{H_1} \right) \quad (29.11)$$

**29.1.2. Момент крена относительно оси  $Ox_1$ .** Момент относительно оси  $Ox_1$ , соответствующий поверхности  $OPR$ , расположенной внутри конуса Маха, легко выводится из соотношений (27.25), (27.26), (27.27); обозначая соответствующий коэффициент момента через  $C_{lm}$ , находим

$$\frac{(c-a)}{2} C_{lm} = -\frac{8}{3B^2 U_\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{u}{1+Y^2} + \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{2u_n H_n}{\pi(1-H_n^2)} \left[ \frac{1}{H_n} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_n} - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} Y \right] - \frac{u}{(1+Y^2)^2} + \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{2u_n H_n}{\pi(1-H_n^2)^2} \left[ \frac{1-H_n^2}{2} \left( \frac{Y}{1+Y^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{arctg} Y \right) + \operatorname{arctg} Y - \frac{1}{H_n} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_n} \right] \Bigg\}_A^c. \quad (29.12)$$

Интерпретируя эту формулу для двух случаев расположения шарнира, отметим следующие различия:

1) Когда шарнир сверхзвуковой, то, в силу равенств (29.7),

$$C_{la} = -\frac{4\alpha}{3B} \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}. \quad (29.13)$$

Заметим, что для элерона, симметричного относительно оси  $Ox_1$  ( $l_1 = l_2$ ), коэффициент  $C_{la}$ , очевидно, будет равен нулю.

2) Если шарнир дозвуковой, то для определения коэффициента момента  $C'_{la}$ , соответствующего элерону и части крыла, прикрытой конусом Маха, применяются равенства (29.8); в результате получим формулу

$$C'_{la} = -\frac{4\alpha}{3B} \frac{B^2 (l_1^2 - l_2'^2)}{(Bl_1 + 1)^2}. \quad (29.14)$$

Чтобы определить коэффициент  $C_{la}$ , соответствующий одному элерону, введем значения (29.10) в соотношение (29.12); это приводит к формуле

$$C_{la} = -\frac{8\alpha}{3\pi B} \frac{1}{l_1 + l_2'} \left[ (l_1 - l_2') \operatorname{arctg} \frac{1}{L_2'} + \frac{1}{B} \frac{L_2'}{1 + L_2'^2} + \right. \\ \left. + \frac{Bl_1}{\sqrt{Bl_1^2 - 1}} (l_1 - l_2') \operatorname{arctg} \frac{L_2'}{H_1} \right]. \quad (29.15)$$

**29.1.3. Шарнирный момент.** Чтобы определить коэффициент шарнирного момента, обозначаемый через  $C_{mc}$ , нужно определить точку приложения  $Q$  подъемной силы  $P_a$ , действующей только на элерон, а также расстояние  $d$  от этой точки до оси шарнира; таким образом, согласно фиг. 29.1,

$$b = (l_1 + l_2) \frac{C_{la}}{C_{za}}; \quad (29.16)$$

отсюда

$$d = \left( \frac{2}{3} l_2 + b \right) \sin \gamma = \left[ \frac{2}{3} l_2 + (l_1 + l_2) \frac{C_{la}}{C_{za}} \right] \sin \gamma. \quad (29.17)$$

Коэффициент шарнирного момента может быть вычислен из очевидного соотношения

$$(l_1 + l_2) C_{mc} = d \cdot C_{za} = \left[ \frac{2}{3} l_2 C_{za} + (l_1 + l_2) C_{la} \right] \sin \gamma. \quad (29.18)$$

## 29.2. Изменение угла атаки для крыльев с одной дозвуковой и одной сверхзвуковой ведущими кромками

Рассмотрим какое-нибудь крыло с дозвуковой кромкой и пусть существует конечное число точек  $P_s$ , в которых угол атаки испытывает скачок  $\Delta\alpha_s$  (фиг. 29.2). Каждой из этих точек, которые первоначально предполагаются расположенными внутри конуса Маха, соответствует источник интенсивности

$$2q_s = \mp 2 \frac{\Delta\alpha_s U_\infty}{B} \frac{Bl_s}{\sqrt{1 - B^2 l_s^2}}, \quad (29.19)$$

причем знак минус соответствует верхней поверхности и знак плюс — нижней.

Осевая скорость возмущения, определяемая в плоскости  $X$  преобразованием (24.52), выражается действительной частью функции

$$u + iu' = f(X) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n q_s \left( \ln \frac{X + L_s}{X - L_s} - i\pi \right) + \frac{m_1}{X}, \quad (29.20)$$

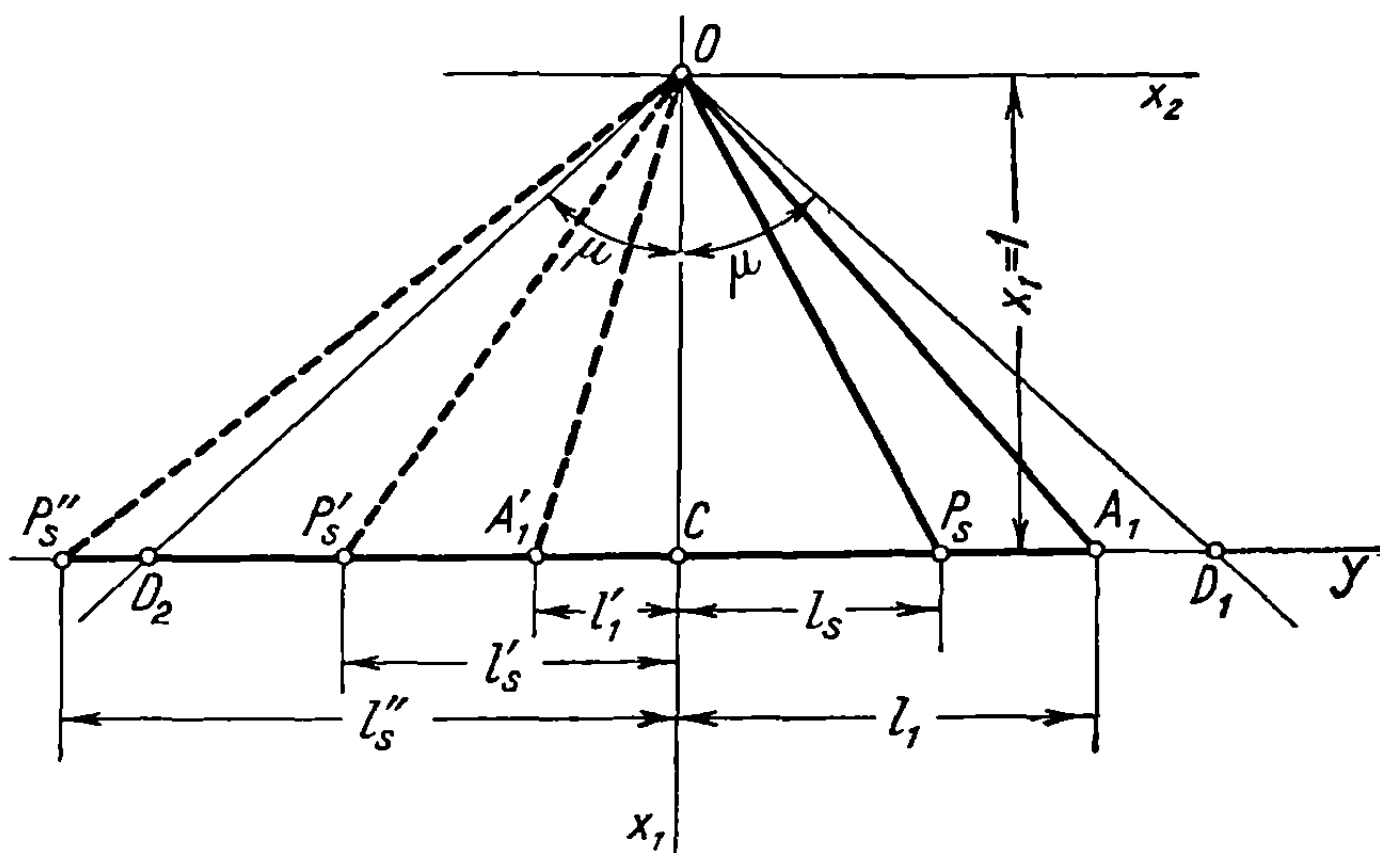


где  $n$  — число точек, в которых происходит скачкообразное изменение угла атаки, а  $L_s$  определяется соотношением

$$L_s = \sqrt{\frac{B(l_1 - l_s)}{1 + Bl_s}} \quad \left( Y = \sqrt{\frac{B(l_1 - y)}{1 + By}} \right). \quad (29.21)$$

Если точка  $P'_s$  имеет отрицательную абсциссу (например,  $y = -l'_s$ ), то

$$L'_s = \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_s)}{1 - Bl'_s}}. \quad (29.22)$$



Фиг. 29.2

Когда точка  $P'_s$  находится вне конуса Маха, например, в точке  $P''_s$  ( $l''_s > \frac{1}{B}$ ), тогда  $L_s$  нужно заменить через

$$\sqrt{\frac{B(l_1 + l''_s)}{1 - Bl''_s}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{B(l_1 + l''_s)}{Bl''_s - 1}} = -iH''_s \quad (29.23)$$

и соответствующий член в уравнении (29.20) примет вид

$$\frac{q_s}{\pi} \left( \ln \frac{X + L_s}{X - L_s} - i\pi \right) = -\frac{\Delta \alpha_s U_\infty}{B} \frac{Bl''_s}{i \sqrt{B^2 l''_s{}^2 - 1}} \left( \ln \frac{X - iH''_s}{X + iH''_s} - i\pi \right). \quad (29.24)$$

Следовательно, уравнение (29.20) имеет общую применимость.

Постоянная  $m_1$  легко определяется путем наложения условия  $df = 0$  для точек  $Y = \pm \sqrt{Bl_1}$  (соответствующих точке  $\xi = 0$  во вспомогательной плоскости Буземана); отсюда

$$m_1 = -\frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^n q_s \frac{Bl_1 L_s}{Bl_1 - L_s^2}. \quad (29.25)$$

Для точки на крыле ( $X = Y$ ) скорость определяется выражением

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n q_s \left( \ln \frac{Y + L_s}{Y - L_s} - i\pi \right) + \operatorname{Re} \frac{m_1}{Y}, \quad (29.26)$$

которое включает также случаи, когда изменение угла атаки происходит вне конуса Маха.

Если дозвуковая ведущая кромка станет дозвуковой задней кромкой, тогда  $m_1 = 0$ , и величина  $l_1$  должна быть заменена на  $-t'_1$ ; отсюда

$$L'_s = \sqrt{\frac{B(-t'_1 + l'_s)}{1 - Bl'_s}}, \quad H'_s = \sqrt{\frac{B(-t'_1 + l'_s)}{Bl'_s - 1}}; \quad (29.27)$$

за исключением того, что  $m_1 = 0$ , уравнение для скорости сохраняет прежнюю форму

$$u' = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n q_s \left( \ln \frac{Y + L'_s}{Y - L'_s} - i\pi \right), \quad (29.28)$$

применимую ко всем случаям.

Предполагая, что изменение угла атаки происходит непрерывно, начиная от некоторой точки  $P_s$  с абсциссой  $l_s$ , в которой совершился внезапный скачок  $\alpha_s$  угла атаки, находим, что элементарный источник в некоторой точке  $y_i$  будет

$$dq_i = - \frac{U_\infty d\alpha}{B} \frac{By_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}} = \frac{U_\infty d\alpha}{B^2} \frac{d\alpha}{dy_i} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}). \quad (29.29)$$

В этом случае, потенциал фиктивного движения во вспомогательной плоскости  $X$ , согласно методу, описанному в нашей более ранней работе [3], будет иметь вид

$$f(X) = \frac{q_s}{\pi} \left( \ln \frac{X + L_s}{X - L_s} - i\pi \right) + \frac{m_1}{X} + \\ + \frac{U_\infty}{B^2} \int_{y_i=l_s}^{y_i=l_1} \left( \ln \frac{X + Y_i}{X - Y_i} - i\pi \right) \frac{d\alpha}{dy_i} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}), \quad (29.30)$$

где

$$Y_i = \sqrt{\frac{B(l_1 - y_i)}{1 + By_i}}. \quad (29.31)$$

Если кромка  $OA_1$  станет задней кромкой, то  $m_1$  приравнивается нулю ( $m_1 = 0$ ) и  $l_1$  заменяется на  $-t'_1$ , причем последняя величина представляет отрицательную абсциссу задней кромки  $OA'_1$ .

Эта задача изучалась другим способом Еленой Мургулеску [4], установившей выражение вертикальной скорости  $w$  (соответственно  $w + iw'$ ), из которого выводится скорость  $u$  с целью вычисления давлений на крыле.

Возвращаясь к уравнению (29.30), можно усмотреть, что когда угол атаки меняется линейно

$$\frac{d\alpha}{dy_i} = \frac{d\alpha}{dy} = a = \text{const}, \quad (29.32)$$

то правая часть уравнения может быть легко проинтегрирована,

Вынося  $a$  за интеграл, получим

$$\int_{y_i=l_s}^{y_i=l_1} \left( \ln \frac{X+Y_i}{X-Y_i} - i\pi \right) d\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right) = \left[ \left( \ln \frac{X+Y_i}{X-Y_i} - i\pi \right) \sqrt{1-B^2y_i^2} \right]_{l_s}^{l_1} + \int_{L_s^2}^0 \sqrt{1-B^2y_i^2} \frac{d(Y_i^2)}{X^2-Y_i^2}. \quad (29.33)$$

Из первого соотношения (29.2) имеем

$$\sqrt{1-B^2y_i^2} = \frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{1+Y_i^2} \sqrt{1+\frac{2Y_i^2}{1-Bl_1}}; \quad (29.34)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int_{L_s^2}^0 \sqrt{1-B^2y_i^2} \frac{d(Y_i^2)}{X^2-Y_i^2} &= \sqrt{1-B^2l_1^2} \int_{L_s^2}^0 \sqrt{1+\frac{2Y_i^2}{1-Bl_1}} \times \\ &\times \frac{d(Y_i^2)}{(1+Y_i^2)(X^2-Y_i^2)} = 2 \frac{\sqrt{1+Bl_1}}{1+X^2} \left[ \sqrt{1-Bl_1+2X^2} \left( \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{1-Bl_1+2X^2}{1-Bl_1}} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{1-Bl_1+2X^2}{1-Bl_1+2L_s^2}} \right) - \sqrt{1+Bl_1} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-Bl_1}{1+Bl_1}} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-Bl_1+2L_s^2}{1+Bl_1}} \right) \right]. \quad (29.35) \end{aligned}$$

Выполняя соответствующие подстановки и вводя их в уравнение (29.30), получим окончательную форму уравнения для скорости.

Чтобы определить скорость на крыле, заменим  $X$  на  $Y$ , причем последняя величина рассматривается как функция  $y$  [согласно первому соотношению (29.2)]; символ  $Re$  ставится перед выражением для скорости, чтобы удовлетворить случаю  $l < -\frac{1}{B}$ , когда изменение наклона происходит вне конуса Маха.

Можно было бы эффективно рассчитать конкретный случай непрерывного изменения угла атаки, но на практике такие случаи встречаются очень редко. Внезапное изменение угла атаки, вследствие отклонения элеронов представляет, однако, большой практический интерес, что оправдывает специальное исследование этого случая в предыдущих разделах.

### 29.3. Применение к элерону с дозвуковой кромкой

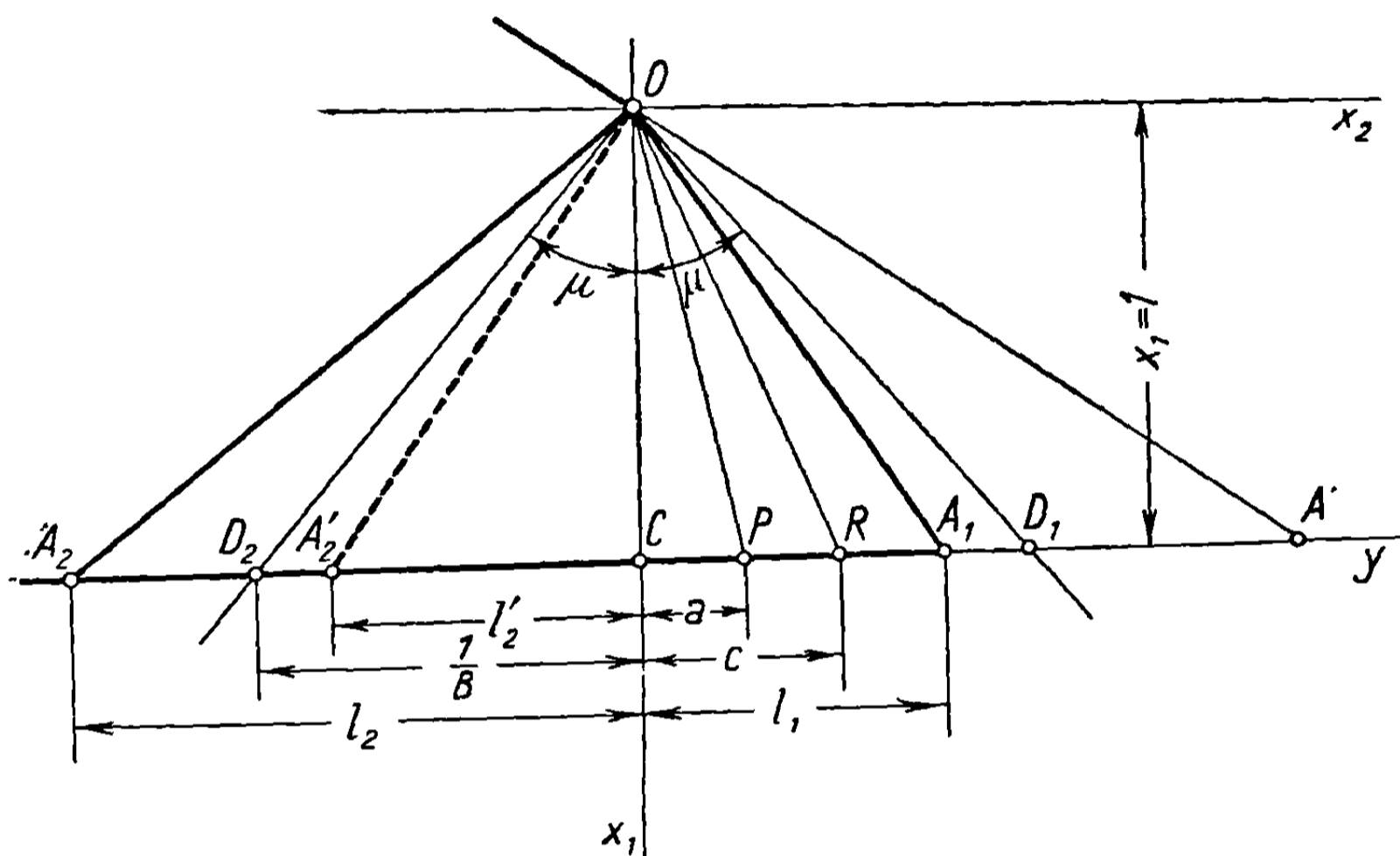
Рассмотрим элерон с дозвуковой внешней кромкой и предположим, что его шарнир  $OA_2$  будет сверхзвуковым (фиг. 29.3).

Если крыло, которому принадлежит элерон, имеет угол атаки, равный нулю, то скорость возмущения определяется выражением (27.37).

$$u = Re \frac{i u_2}{\pi} \ln \left( \frac{Y - i H_2}{Y + i H_2} - i\pi \right) + Re \frac{m_1}{Y}, \quad (29.36)$$

в котором  $Y$ ,  $H_2$ ,  $u_2$  и  $m_1$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 Y &= -\sqrt{\frac{B(l_1 - y)}{1 + By}}; \\
 H_2 &= \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{Bl_2 - 1}}; \\
 u^2 &= -\frac{\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}; \\
 m_1 &= -\frac{2u_2}{\pi} \frac{H_2 Bl_1}{H_2^2 + Bl_1}.
 \end{aligned}
 \tag{29.37}$$



Фиг. 29.3

Если шарнир будет дозвуковым ( $l'_2 < 1/B$ ), то величины  $iu_2$  и  $iH_2$  станут действительными, соответственно

$$\begin{aligned}
 iu_2 &= \frac{-\alpha U_\infty}{B} \frac{Bl'_2}{\sqrt{1 - B^2 l'^2_2}}; \\
 iH_2 &= \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 - Bl'_2}} = L'_2
 \end{aligned}
 \tag{29.38}$$

и полное выражение (29.36) остается справедливым.

Подъемная сила и моменты, обусловленные элероном, вычислены дальше тем же методом, что и в предшествующем случае.

29.3.1. Влияние элерона на подъемную силу. В случае сверхзвукового шарнира средний коэффициент подъемной силы для поверхности  $OPR$ , обозначаемый через  $C_{zm}$ , определится установленным ранее выражением (27.44)

$$\begin{aligned}
 \frac{c-a}{2} C_{zm} &= \text{Re} \frac{2(1 + Bl_1)}{BU_\infty} \left[ \frac{u}{1 + Y^2} + \frac{2u_2 H_2}{\pi(1 - H_2^2)} \left( \frac{1}{H_2} \arctg \frac{Y}{H_2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \arctg Y \right) - m_1 \left( \frac{1}{Y} + \arctg Y \right) \right]_A^C,
 \end{aligned}
 \tag{29.39}$$

в котором для величин  $A$  и  $C$  применимы формулы (27.45)

$$A = -\sqrt{\frac{B(l_1 - a)}{1 + Ba}}, \quad C = -\sqrt{\frac{B(l_1 - c)}{1 + Bc}}. \quad (29.40)$$

Так как результаты интегрирования имеют общую применимость, то формула (29.39) может быть применена к двум случаям расположения шарнира:

1) если шарнир сверхзвуковой ( $l_2 > \frac{1}{B}$ ), то рассматривается вся поверхность элерона; здесь величины  $a$ ,  $c$ ,  $A$  и  $C$  будут соответственно

$$a = -l_2, \quad c = l_1, \\ A = -\sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 - Bl_2}} = iH_2, \quad C = 0; \quad (29.41)$$

подставляя эти значения в уравнение (29.39) и выполняя необходимые вычисления, получим следующее выражение для коэффициента подъемной силы, обозначаемого через  $C_{za}$ :

$$C_{za} = -\frac{4\alpha}{B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}; \quad (29.42)$$

2) если шарнир дозвуковой ( $l'_2 < \frac{1}{B}$ ), то, рассматривая поверхность элерона и части крыла, закрытой конусом Маха, введем в уравнение (29.39) для определения коэффициента подъемной силы  $C'_{za}$  следующие пределы:

$$a = -\frac{1}{B}, \quad c = l_1, \quad A = -\infty, \quad C = 0; \quad (29.43)$$

отсюда

$$C'_{za} = -\frac{4\alpha}{B} \frac{B(l_1 + l'_2)}{Bl_1 + 1} \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 + Bl'_2}}. \quad (29.44)$$

Коэффициент подъемной силы для одного элерона получается посредством подстановки

$$a = -l'_2, \quad c = l_1, \quad A = -\sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 - Bl'_2}} = L'_2, \quad C = 0; \quad (29.45)$$

после приведений и сокращений получим

$$C_{za} = \frac{8\alpha}{\pi B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 + Bl'_2}} \left[ \operatorname{arctg} L'_2 + \frac{l_1}{l_1 + l'_2} \frac{L}{1 + L'^2_2} \right]. \quad (29.46)$$

**29.3.2. Момент крена относительно оси  $Ox_1$ .** Момент крена относительно оси  $Ox_1$  поверхности  $OPR$  был определен соотношением (27.58), которое может быть также представлено в виде

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = \frac{2}{3U_\infty} \left( \frac{1 + Bl_1}{B} \right)^2 \left\{ \frac{u}{(1 + Y^2)^2} - \frac{2u_2 H_2}{\pi (1 - H_2^2)^2} \left[ \frac{1 - H_2^2}{2} \left( \frac{Y}{1 + Y^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{arctg} Y \right) + \operatorname{arctg} Y - \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} \right] - m_1 \left( \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2(1 + Y^2)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} Y \right) \right\}_A^c -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4}{3U_\infty} \frac{1 + Bl_1}{B^2} \left[ \frac{u}{1 + Y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{2u_2 H_2}{\pi (1 - H_2^2)} \left( \frac{1}{H_2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} - \operatorname{arctg} Y \right) - m_1 \left( \frac{1}{Y} + \operatorname{arctg} Y \right) \right]_A^C. \quad (29.47)
\end{aligned}$$

Если рассматривается только действительная часть, то указанное выражение применимо во всех случаях, ссылаясь в силе также для граничных условий вне конуса Маха, как показано ранее.

Применим эту формулу к двум случаям расположения шарнира:

1) если шарнир сверхзвуковой, то выражение для коэффициента момента крена после введения пределов интегрирования (см. формулу 29.41) будет

$$C_{la} = - \frac{2\alpha}{3B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[ \frac{Bl_1(Bl_2 - 1) - Bl_2(2Bl_2 + 1) + 3B^2 l_1^2}{B^2(l_1 + l_2)^2} \right]; \quad (29.48)$$

2) если шарнир дозвуковой и введены пределы (29.43), то выражение для коэффициента момента крена  $C'_{la}$ , полученного для элерона и для поверхности крыла, находящейся внутри конуса Маха, будет

$$C'_{la} = - \frac{2\alpha}{3B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 + Bl'_2}} \left[ \frac{Bl'_2 + 3Bl_1}{1 + Bl_1} - 2 \frac{B^2 l'^2_2 + Bl'_2 + 2Bl_1}{(Bl_1 + 1)^2} \right]. \quad (29.49)$$

Чтобы определить момент крена  $C_{la}$  только для поверхности элерона, используем пределы интегрирования (29.45); получим

$$\begin{aligned}
C_{la} = \frac{4\alpha}{3\pi B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 + Bl'_2}} \left[ \frac{Bl_1(Bl'_2 - 1) - Bl'_2(2Bl'_2 + 1) + 3B^2 l'^2_1}{B^2(l_1 + l'_2)^2} \operatorname{arctg} L'_2 + \right. \\
\left. + \frac{3B^2 l'^2_1 - B^2 l_1 l'_2 + Bl'_2 - Bl_1}{B^2(l_1 + l'_2)^2} \frac{L'_2}{1 + L'^2_2} \right]. \quad (29.50)
\end{aligned}$$

Формула (29.18), полученная ранее, остается справедливой и для коэффициента шарнирного момента.

#### 29.4. Треугольное крыло с дозвуковыми кромками и переменным углом атаки

Применяя прежнее преобразование (см. формулу 27.64), которое воспроизводит в плоскости  $x = y + iz$  точный след крыла в физической плоскости  $S_{yz}$ , и преобразуя этот след в единичный круг с помощью выражений (27.70)

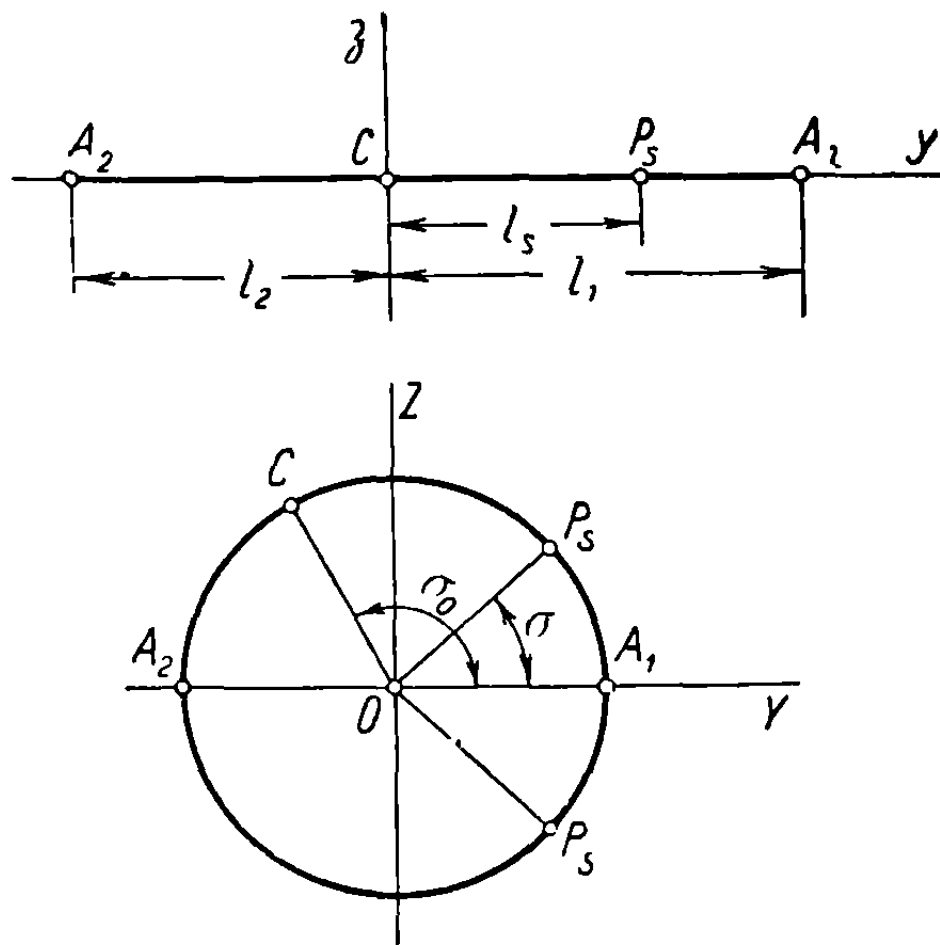
$$x - c = \frac{l}{2} \left( X + \frac{1}{X} \right), \quad \left( X = \frac{x - c}{l} + \sqrt{\left( \frac{x - c}{l} \right)^2 - 1} \right), \quad (29.51)$$

$$2c = l_1 - l_2, \quad 2l = l_1 + l_2,$$

легко определить фиктивный потенциал; он дает скорость в плоскости  $X$  для каждого изменения угла атаки в точке  $P_s$  (с абсциссой  $l_s$ ), представляя

наложение двух равных и противоположных источников, расположенных в точке  $X_s = e^{i\sigma}$  и в ее сопряженной  $X_s = e^{-i\sigma}$  (фиг. 29.4), которые гомологичны точкам на верхней и нижней поверхностях крыла:

$$X_s = \frac{l_s - c}{l} + i \sqrt{1 - \left(\frac{l_s - c}{l}\right)^2} = e^{i\sigma}.$$



Фиг. 29.4

Интенсивность  $2q_s$  источника определится выражением (29.19) для внезапного изменения угла атаки или элементарная интенсивность  $2dq_s$  будет следовать из уравнения

(29.29), если рассматривается непрерывное изменение угла атаки. С целью упрощения эти два случая трактуются отдельно.

### 29.4.1. Крыло с резким изменением угла атаки.

Имея в виду условия для скорости на концах  $A_1$  и  $A_2$ , определяемые уравнением (27.73), получим в плоскости  $X$

$$(X) = i \left( \frac{m_1}{X-1} + \frac{m_2}{X+1} + \frac{m_1 - m_2}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n q_s \ln \frac{X - e^{i\sigma}}{X - e^{-i\sigma}}. \quad (29.52)$$

Постоянные  $m_1$  и  $m_2$  выводятся из условия  $df = 0$  для  $x = 0$ , соответствующего значению  $X_0$  в плоскости  $X$ :

$$X_0 = -\frac{c}{l} + i \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}} = e^{i\sigma_0}; \quad (29.53)$$

отсюда, после некоторых простых вычислений, применяя граничные условия на крыле и используя уравнение (24.17), получим

$$\frac{m_1}{l_1} - \frac{m_2}{l_2} = \frac{2}{\pi l} \sum_{s=1}^n q_s \frac{\sqrt{(l_1 - l)(l_2 + l_s)}}{l_s}. \quad (29.54)$$

Первый член формулы (29.52), которым определяется обтекание простой пластинки с постоянным углом атаки, может быть выражен [см. формулы (27.65) и (27.73)] в двух формах

$$i \left( \frac{m_1}{X-1} + \frac{m_2}{X+1} + \frac{m_1 - m_2}{2} \right) = \frac{i(c_0 + c_1 x)}{\sqrt{(x-l_1)(x+l_2)}} \quad (29.55)$$

$$(2c_0 = m_1 l_1 + m_2 l_2, \quad 2c_1 = m_1 - m_2),$$

которые использованы позже для различных вычислений.

Если крыло симметрично, то интенсивности источников в точках  $l'_s = -l_s$  будут те же ( $q'_s = q_s$ ), так как изменение угла атаки будет равно,

но противоположно по знаку изменению угла для точек  $l_s$ ; следовательно,  $m_1 = m_2$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c = 0$ . В этом случае уравнение (29.54) нельзя больше использовать, так как обе его части обращаются в нуль; единственная остающаяся постоянная определяется с помощью соотношения (24.17).

Для симметричного случая существуют два положительных источника, в точках  $e^{i\sigma}$  и  $-e^{-i\sigma}$ , и два отрицательных, в точках  $e^{-i\sigma}$  и  $-e^{i\sigma}$ ; замечая, что

$$\begin{aligned} \ln \frac{(X - e^{i\sigma})(X + e^{-i\sigma})}{(X - e^{-i\sigma})(X + e^{i\sigma})} &= \ln \frac{\sqrt{x^2 - l^2} - \sqrt{l_s^2 - l^2}}{\sqrt{x^2 - l^2} + \sqrt{l_s^2 - l^2}} = \\ &= -2 \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{l_s^2 - l^2}{x^2 - l^2}} = -2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - l_s^2}}, \end{aligned} \quad (29.56)$$

получим в плоскостях  $X$  или  $x$

$$\begin{aligned} u + iu' &= \frac{2imX}{\lambda^2 - 1} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^m q_s \left( \ln \frac{X - e^{i\sigma}}{X + e^{i\sigma}} - \ln \frac{X - e^{-i\sigma}}{X + e^{-i\sigma}} \right) = \\ &= \frac{ic_0}{\sqrt{x^2 - l^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^m q_s \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - l_s^2}}, \end{aligned} \quad (29.57)$$

где  $m$  — число разрывов на одной половине крыла.

Для определения постоянной  $c_0$  применим уравнение (27.76), обозначая через  $\alpha_0$  угол атаки среднего сечения крыла; интегрируя вдоль оси ординат, получим

$$\begin{aligned} -\alpha_0 U_\infty &= \operatorname{Re} \frac{iB}{2} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = -\operatorname{Re} i \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} d\xi = \\ &= c_0 \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2} d\xi}{(\xi^2 + l^2) \sqrt{\xi^2 + l^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^m q_s \sqrt{l^2 - l_s^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2} d\xi}{(\xi^2 + l_s^2) \sqrt{\xi^2 + l^2}}. \end{aligned} \quad (29.58)$$

Полагая

$$\xi = l \operatorname{tg} \varphi, \quad 1 - B^2 l^2 = k^2, \quad \frac{l_s}{l} = \cos \sigma, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \sigma, \quad (29.59)$$

имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2} d\xi}{(\xi^2 + l^2) \sqrt{\xi^2 + l^2}} = \frac{1}{l^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{E}{l^2} \quad (29.60)$$

и

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2} d\xi}{(\xi^2 + l_s^2) \sqrt{\xi^2 + l^2}} = \frac{1}{l^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{1 - k^2}{l^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta}{l^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - \cos^2 \beta \cos^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= B^2 K + \frac{\sqrt{1 - B^2 l_s^2}}{l_s \sqrt{l^2 - l_s^2}} \left[ \frac{\pi}{2} - KE(\beta, Bl) + (K - E) F(\beta, Bl) \right], \end{aligned} \quad (29.61)$$



где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,  $k$  — модуль,  $F(\beta, Bl)$  и  $E(\beta, Bl)$  — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с аргументом  $\beta$  и модулем  $Bl$ .

Уравнение (29.58), в согласии с выражением (29.60), принимает окончательно вид

$$-\alpha U_\infty = \frac{c_0}{l^2} E + \frac{2U_\infty}{\pi} \sum_{s=1}^m \Delta\alpha_s \sqrt{l^2 - l_s^2} \frac{B^2 l_s}{\sqrt{1 - B^2 l_s^2}} K + \frac{2U_\infty}{\pi} \sum_{s=1}^m \Delta\alpha_s \left[ \frac{\pi}{2} - KE(\beta, Bl) + (K - E)F(\beta, Bl) \right]. \quad (29.62)$$

Для определения коэффициента подъемной силы крыла, заметим, что формула (27.91) справедлива. Действительно, при перемещении вдоль следа крыла в плоскости  $x$  или вдоль соответствующей окружности в плоскости  $X$  (см. фиг. 29.4) мнимая часть функции  $f(x) = u + iu'$  принимает одинаковые значения на верхней и нижней поверхностях, так что, интегрируя по замкнутому контуру в одном и том же направлении, мы получим величины  $\oint u' dy$  на нижней поверхности и  $-\oint u' dy$  на верхней, которые погашают друг друга.

При этих условиях в согласии с общим уравнением для скорости (29.52) и применяя метод вычетов, получим формулу для общего случая несимметричного крыла

$$C_z = -\frac{1}{lU_\infty} \oint f(x) dx = -\frac{1}{2U_\infty} \oint f(X) \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) dX = \frac{\pi}{U_\infty} (m_1 + m_2) - \frac{2}{U_\infty} \sum_{s=1}^n q_s \sqrt{1 - \frac{(l_s - c)^2}{l^2}}, \quad (29.63)$$

где, в соответствии с соотношениями (29.55), первый член в правой части может быть представлен как функция постоянных  $c_0$  и  $c_1$ , входящих в уравнение для скорости в плоскости  $x$ :

$$\frac{\pi}{U_\infty} (m_1 + m_2) = \frac{2\pi(c_0 - c_1)}{lU_\infty}. \quad (29.64)$$

Для симметричного крыла

$$C_z' = \frac{2\pi c_0}{lU_\infty} - \frac{4}{U_\infty} \sum_{s=1}^m q_s \sqrt{1 - \frac{l_s^2}{l^2}}, \quad (29.65)$$

где постоянная  $c_0$  определяется из уравнения (29.62). Предполагается, конечно, что плоскость двух кромок крыла параллельна потоку. Если эта плоскость имеет дополнительный угол атаки  $\alpha'$ , то дополнительная подъемная сила получается из известной формулы (27.101)

$$C_z' = -\frac{2\pi l \alpha'}{E}, \quad (29.66)$$

и полная подъемная сила определяется следующим образом

$$C_{z\alpha} = C_z' + C_z = -\frac{2\pi l}{E} (\alpha' + \alpha'_0), \quad (29.67)$$

где  $\alpha' = -\alpha'_0$ , по аналогии с крыльями в дозвуковом режиме, угол нулевой подъемной силы.

29.4.2. Крыло с линейным изменением угла атаки. Потенциал фиктивного течения имеет форму уравнения (29.52), за исключением того, что дискретные источники  $2q_s$  заменяются элементарными источниками  $2dq_i$ , интенсивность которых определяется формулой (29.29).

В этом случае получим

$$f(X) = i \left( \frac{m_1}{X-1} + \frac{m_2}{X+1} + \frac{m_1 - m_2}{2} \right) + \frac{U_\infty}{\pi B^2} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{d\alpha}{dy_i} \ln \frac{X - X_i}{X - \bar{X}_i} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}); \quad (29.68)$$

интеграл во второй части равенства легче интегрируется, если разложить  $\frac{d\alpha}{dy_i}$  как функцию от  $\sqrt{1 - B^2 y_i^2}$ .

Чтобы избежать трудоемких вычислений, возьмем в качестве примера простой случай линейного изменения угла атаки, так как из него могут быть получены ценные сведения, касающиеся аэродинамических характеристик крыла. Поскольку на практике крылья имеют симметричную форму, рассмотрим симметричное треугольное крыло, без ограничения общности задачи.

Выражение для осевой скорости возмущения упростится, и в плоскости  $x$ , в согласии с уравнением (29.54), будем иметь

$$f(x) = \frac{ic_0}{\sqrt{x^2 - l^2}} - \frac{2U_\infty a}{\pi B^2} \int_0^l \text{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - y_i^2}} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}), \quad (29.69)$$

где наклон кривой угла атаки (см. формулу 29.32) обозначается через  $a = \frac{d\alpha}{dy_i}$ .

Далее

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^l \text{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - y_i^2}} d(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}) = 2 \left[ \text{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - y_i^2}} \sqrt{1 - B^2 y_i^2} \right]_0^l - \\ & - \sqrt{x^2 - l^2} \int_0^l \frac{\sqrt{1 - B^2 y_i^2} d(y_i^2)}{(y_i^2 - x^2) \sqrt{y_i^2 - l^2}} = + i \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arth} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} - \\ & - 2Bl \text{Arth} Bl \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} + 2 \sqrt{1 - B^2 x^2} \text{Arth} \sqrt{\frac{l^2 (1 - B^2 x^2)}{l^2 - x^2}}. \end{aligned} \quad (29.70)$$

Подставляя результат в уравнение (29.69) и беря действительную часть, получим скорость возмущения в потоке вокруг дельтообразного крыла с линейным изменением угла атаки.

Остается определить постоянную  $c_0$ ; с этой целью применим соотношение (29.62), заменяя приращение  $\Delta\alpha_s$  через дифференциал  $d\alpha = \frac{d\alpha}{dy_i} dy_i$ ,  $l_s$  через  $y_i$  и сумму через интеграл.

Обозначая через  $\alpha_0$  угол атаки среднего сечения крыла, получим

$$-\alpha_0 U_\infty = \frac{c_0}{l^2} E + \frac{2U_\infty a l K}{\pi} \int_0^l \sqrt{1 - \frac{y_i^2}{l^2}} \frac{B^2 y_i dy_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}} + \frac{2U_\infty a}{\pi} \frac{\pi}{2} \int_0^l dy_i - \quad (29.71)$$

$$- \frac{2U_\infty a K}{\pi} \int_0^l dy_i \int_0^\beta \sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta} d\beta + \frac{2U_\infty a (K - E)}{\pi} \int_0^l dy_i \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta}}.$$

Делая подстановки (29.59) и заменяя  $l_s$  снова через  $y_i$  ( $y_i = l \cos \sigma = l \sin \beta$ ), имеем последовательно:

$$\int_0^l \sqrt{1 - \frac{y_i^2}{l^2}} \frac{B^2 y_i dy_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}} = \int_0^{\pi/2} \sin \sigma d(\sqrt{1 - B^2 l^2 \cos^2 \sigma}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 - B^2 l^2}{2Bl} \ln \frac{1 + Bl}{1 - Bl} \right); \quad (29.72a)$$

$$\int_0^l dy_i \int_0^\beta \sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta} d\beta = -l \int_0^{\pi/2} d(\cos \sigma) \int_0^\beta \sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta} d\beta =$$

$$= [-l \cos \sigma E(\beta, Bl)]_0^{\pi/2} - l \int_0^{\pi/2} \cos \sigma \sqrt{1 - B^2 l^2 \cos^2 \sigma} d\sigma =$$

$$= lE' - \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1 - B^2 l^2}{2Bl} \ln \frac{1 + Bl}{1 - Bl} \right); \quad (29.72b)$$

$$\int_0^l dy_i \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta}} = -l \int_0^{\pi/2} d(\cos \sigma) \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - B^2 l^2 \sin^2 \beta}} =$$

$$= [-l \cos \sigma F(\beta, Bl)]_0^{\pi/2} - l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \sigma d\sigma}{\sqrt{1 - B^2 l^2 \cos^2 \sigma}} = lK' - \frac{l}{2B} \ln \frac{1 + Bl}{1 - Bl},$$

где  $K'$  и  $E'$  — эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = Bl. \quad (29.73)$$

Подставляя найденные значения интегралов в уравнение (29.68) и вводя обычное обозначение  $Bl = \frac{1}{n}$ , получим

$$c_0 = -\frac{a_0^2 U_\infty}{E} \left\{ 1 + \frac{2la}{\pi \alpha_0} \left[ \frac{\pi}{2} + K(1 - E') + (K - E) \left( K' - \frac{n}{2} \ln \frac{n}{n-1} \right) \right] \right\}. \quad (29.74)$$

Определение подъемной силы. Коэффициент подъемной силы легко выводится из формулы (27.98)

$$C_z = \frac{2}{lU_\infty} \int_l^{+l} u dy = -\frac{1}{lU_\infty} \oint u dy = -\frac{1}{lU_\infty} \oint f(x) dx, \quad (29.75)$$

которая при неограниченном расширении контура интегрирования и применении формулы вычетов принимает последовательно вид

$$C_z = \frac{2\pi c_0}{lU_\infty} - \frac{a}{\pi B^2} \int_0^l d(\sqrt{1 - B^2 y_l^2}) \oint \text{Arch} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{x^2 - y_l^2}} dx = \quad (29.76)$$

$$= \frac{2\pi c_0}{lU_\infty} + \frac{a}{B^2} \left( 2 - \frac{1 - B^2 l^2}{Bl} \ln \frac{1 + Bl}{1 - Bl} \right) = \frac{2\pi c_0}{lU_\infty} + \frac{a}{B^2} \left( 2 - \frac{n^2 - 1}{n} \ln \frac{n + 1}{n - 1} \right),$$

где коэффициент  $c_0$  заменяется его значением (29.74).

**29.4.3. Дельтообразное крыло с линейным изменением угла атаки, продолженное посредством горизонтальной плоскости.** Если рассмотренное выше крыло с дозвуковыми ведущими кромками снабжается впереди горизонтальной плоскостью, параллельной направлению потока, то явления на верхней поверхности не будут зависеть от явлений на нижней.

Осевую скорость возмущения  $u$  можно вычислить, как в случае крыла симметричной толщины с линейным изменением наклона (см. раздел 25.3). Для этого нужно предварительно определить угол атаки  $\alpha_1$  на конце (в точке  $y = l$ ) при помощи формулы для изменения угла атаки

$$\alpha = \alpha_0 + a|y|; \quad (29.77)$$

тогда

$$\alpha_1 = \alpha_0 + al = \alpha_0 m, \quad (29.78)$$

где отношение угла атаки на конце ( $y = l$ ) к углу атаки среднего сечения ( $y = 0$ ) обозначается через  $m$ .

Вводя символы  $n$  и  $k$  ( $Bl = \frac{1}{n}$ ,  $y/l = k$ ), можно применить формулу (25.44), так что осевая скорость возмущения для дозвуковых кромок выразится следующим образом:

$$u = -Re \frac{2\alpha_1 U_\infty}{\pi B} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} -$$

$$- Re \frac{2alU_\infty}{\pi B} \left[ \sqrt{n^2 - 1} \text{Arch} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{1 - k^2}} + \sqrt{n^2 - k^2} \ln \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} - \right.$$

$$\left. - n \text{Arch} \frac{n}{k} - i \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 - k^2} \right]. \quad (29.79)$$

Эту формулу после необходимых преобразований можно также применять в случае сверхзвуковых ведущих кромок.

Для вычисления подъемной силы применим формулу (27.2); отсюда получим равенство

$$C_z = \frac{4}{U_\infty} \int_0^1 u dk = -\frac{4\alpha_0}{B} Re \frac{2}{\pi} [I_{11} + (m - 1)(I_{11} + I_{13})], \quad (29.80)$$

где

$$I_{11} = \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 - 1}}, \quad (29.81a)$$

$$I_{13} = \sqrt{n^2 - 1} \ln n - n \text{Arch} n - \arcsin \frac{1}{n} - i \frac{\pi}{4} \sqrt{n^2 - 1} +$$

$$+ n^2 \arcsin \frac{1}{n} + \int_0^1 \sqrt{n^2 - k^2} \ln \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} dk. \quad (29.81b)$$

Приведенные выражения, как и предшествующая формула (29.76), служат для решения рассмотренных ниже задач о двоякоконических дельтообразных крыльях.

Если ведущие кромки сверхзвуковые ( $n < 1$ ), то, имея в виду, что равенства (26.73а) применимы в этом случае, получим

$$ReI_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad ReI_{13} = -\frac{\pi}{4}, \quad (29.82)$$

и уравнение для подъемной силы примет вид

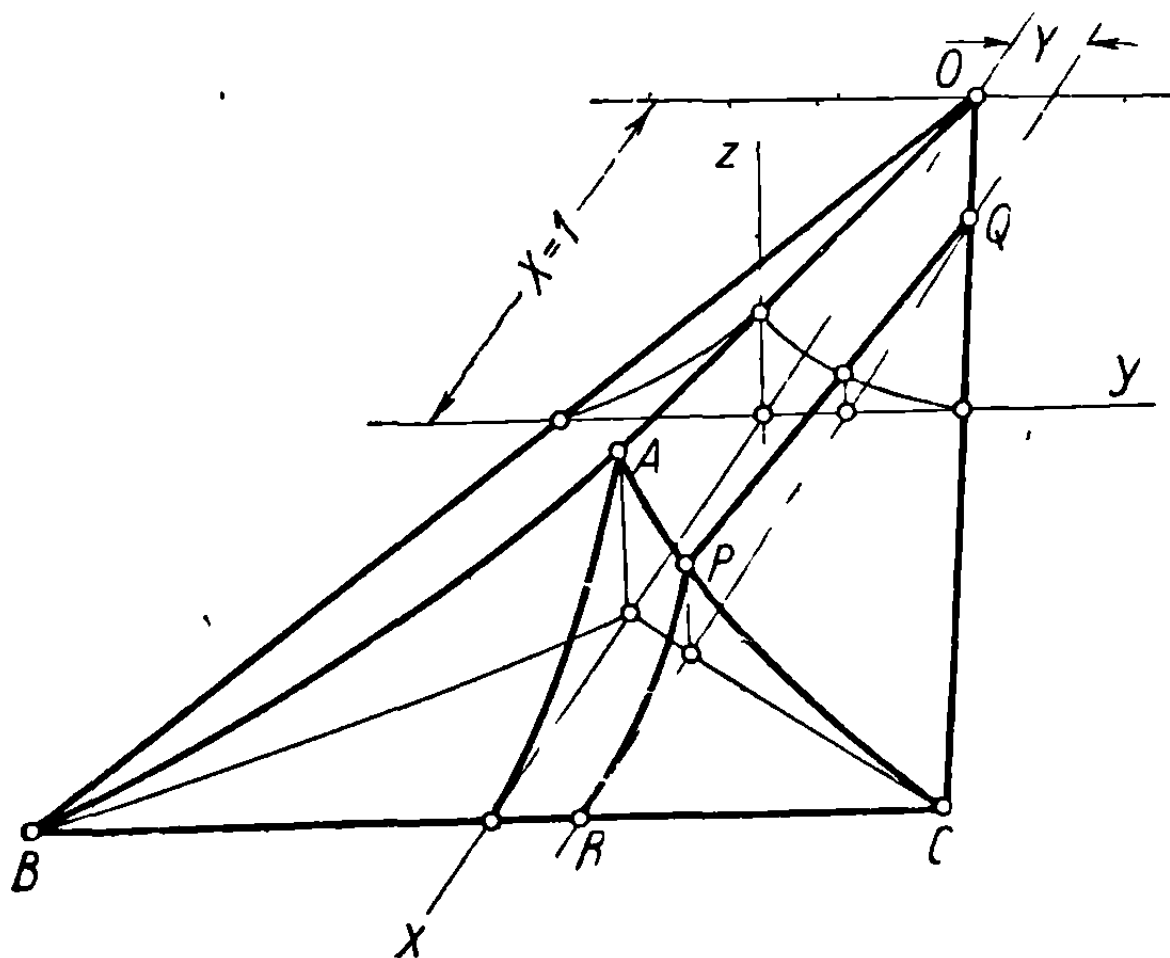
$$C_z = -\frac{4\alpha_0}{B} \left(1 + \frac{m-1}{2}\right); \quad (29.83)$$

оно сводится к случаю тонкой треугольной пластинки при  $m = 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Уравнения для скорости и подъемной силы содержат также мнимые члены, которые могут стать действительными для некоторых положений конуса Маха. Поэтому в каждом случае должна рассматриваться только действительная часть этих выражений.

### 29.5. Подъемная сила тонкого двоякоконического дельтообразного крыла

Симметричное двоякоконическое дельтообразное крыло было определено в разделе 26.1 и было показано построение такого крыла. Если рассматривается только одна поверхность крыла, верхняя или нижняя, то получается тонкое двоякоконическое крыло.



Фиг. 29.5

Рассмотрим течение вокруг такого крыла, помещенного в поток, параллельный основанию, образованному ведущими кромками и задней кромкой (фиг. 29.5). Если плоскость основания расположена под некоторым углом атаки к направлению потока, то течение, соответствующее тонкой треугольной пластинке, должно быть добавлено к предшествующему. Эта задача разрешена в предыдущей главе.

Так как влияние последнего течения просто прибавляется к воздействию первоначального потока, будем исследовать только случай потока, параллельного основанию крыла.

Повторяя замечания, сделанные для симметричного крыла (см. раздел 26.1), можно сказать, что течение около тонкого крыла состоит из конических течений: с вершиной в точке  $O$ , распространяющегося по всему крылу, с вершиной в точке  $A$ , действие которого распространяется только вниз по течению внутри соответствующего конуса Маха.

Как было установлено в нашей предшествующей работе [5] и как видно из фиг. 26.5, изображающей сечение  $Y = \text{const}$  (см. фиг. 29.5), подъемная сила крыла состоит из подъемной силы, соответствующей первому течению, относящемуся ко всему крылу, за вычетом подъемной силы, соответствующей второму течению, которое воздействует только на часть крыла, расположенную в нижнем течении.

Эта задача будет исследована тем же путем, что и в работе [6].

Таким образом, обозначая через  $C_z$  и  $C'_z$  соответствующие коэффициенты подъемной силы и замечая, что соответствующие поверхности будут  $S = l$  и  $S' = hl$ , получим путем применения обычной формулы для коэффициента подъемной силы

$$lC_z = \frac{4}{U_\infty} \int_0^l u \, dy, \quad (29.84a)$$

$$hlC'_z = \frac{4}{U_\infty} \int_0^l u' \, dy, \quad (29.84b)$$

где  $u'$  — осевая скорость возмущения, обусловленная течением с вершиной в точке  $A$ .

Полная подъемная сила, обозначаемая через  $C_{zt}$ , определяется в этом случае по формуле

$$C_{zt} = C_z - hC'_z. \quad (29.85)$$

Различают три формы течения, в соответствии с положением линии Маха относительно ведущей кромки крыла и кромки замыкающей поверхности (фиг. 29.6):  $\mu_1 = \delta$ ,  $\delta < \mu_2 < \delta'$ ,  $\mu_3 > \delta'$ ; углы  $\delta$  и  $\delta'$  будут соответственно значениями для полууглов конического крыла с вершиной в точке  $O$  и замыкающей поверхности с вершиной в точке  $A$ .

В последнем случае нужно учесть эффект интерференции конического течения с вершиной в точке  $A$ , проявляющийся в области  $I$  передней части крыла; подъемная сила, действующая на эту область, выражается формулой

$$S_i C_{zi} = \frac{8}{U_\infty} \int_I u' \, d\sigma, \quad (29.86)$$

где  $C_{zi}$  — коэффициент подъемной силы,  $d\sigma$  — элемент поверхности и  $S_i$  — площадь двух областей  $I$ . Остается определить  $u'$ ,  $C'_z$  и  $C_{iz}$ .

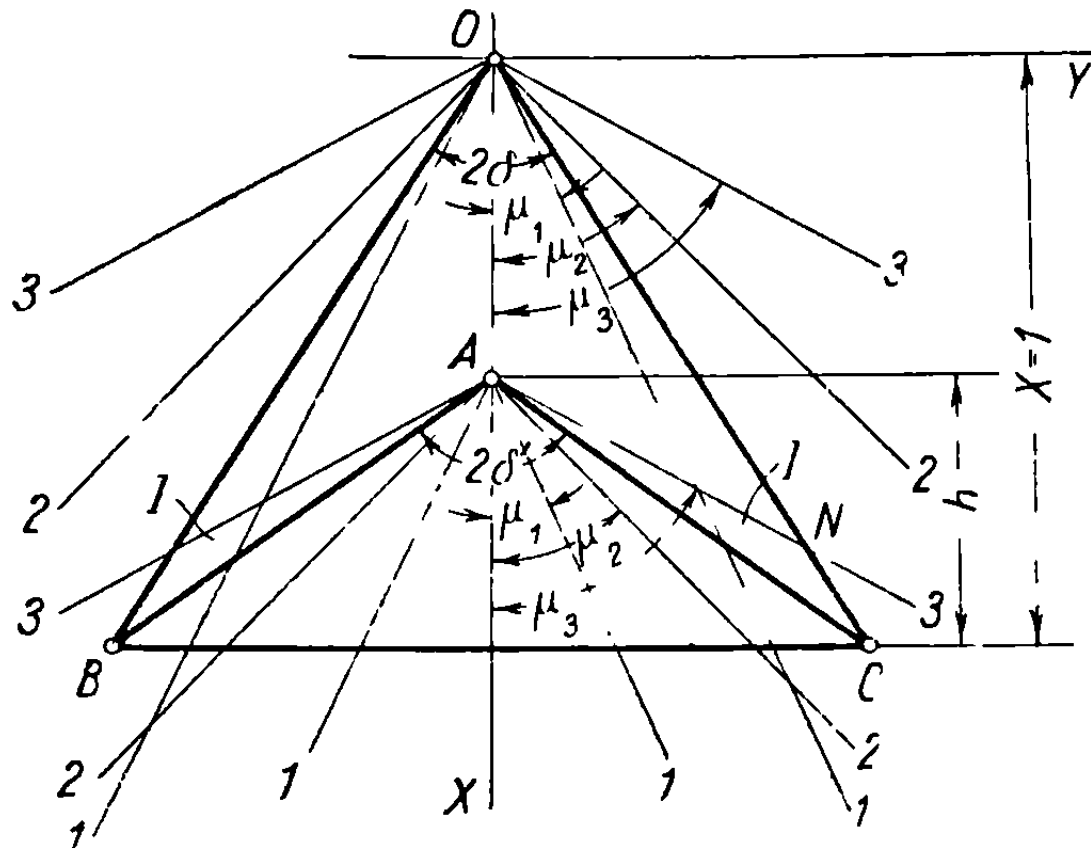
**29.5.1. Вычисление скорости и подъемной силы, обусловленных влиянием замыкающей поверхности.** Как и в случае симметричного двоякоконического крыла, если задняя часть крыла увеличивается в отно-

шении  $1/h$ , так что высота будет равняться единице, то угол атаки  $\alpha'$  и длина  $l'$  будут пропорциональны  $\alpha$  и соответственно  $l$ :

$$\alpha' = \frac{\alpha}{h}, \quad l' = \frac{l}{h}; \quad (29.87)$$

отсюда следует, что

$$n' = \frac{1}{Bl'} = hn. \quad (29.88)$$



Фиг. 29 6

Скорость  $u'$  выводится из  $u$  путем увеличения значения последней в отношении  $1/h$  и замены  $n$  через  $n'$ :

$$u'(n', k) = \frac{1}{h} u(nh, k). \quad (29.89)$$

Подставляя результат в уравнение (29.846), будем иметь

$$hC'_z = -\frac{4\alpha_0}{B} \frac{2}{\pi} [I'_{11} + (m-1)(I'_{11} + I'_{13})], \quad (29.90)$$

где  $I'_{11}$  и  $I'_{13}$  выводятся из  $I_{11}$  и  $I_{13}$  (см. формулу 29.81) путем замены  $n$  через  $n' = nh$ . Заметим снова, что если кромки замыкающей поверхности сверхзвуковые ( $nh < 1$ ), то, как и для передней части крыла (см. формулу 29.83), получим соотношение

$$hC'_z = -\frac{4\alpha_0}{B} \left(1 + \frac{m-1}{2}\right), \quad (29.91)$$

которое сводится к случаю тонкого плоского крыла при  $m = 1$ .

Множитель  $h$ , на который умножается  $C'_z$ , получается от соответствующего увеличения угла атаки задней части крыла ( $\alpha'_0 = \alpha_0/h$ ).

Применим формулу (29.86) для вычисления коэффициента подъемной силы в области интерференции  $I$ . Элемент поверхности  $d\sigma$  из формулы 26.7 и фиг. 26.6 будет

$$d\sigma = \frac{X}{h} dX dy; \quad (29.92)$$

отсюда находим соотношение

$$\begin{aligned} S_i C_{zi} &= \frac{8l}{h^2 U_\infty} \int_1^{nh} u(nh, k) dk \int_{1-h}^{X_1} (X-1+h) dX = \\ &= \frac{4}{U_\infty} \int_1^{nh} u(nh, k) \left(\frac{1-h}{k-h}\right)^2 dk, \end{aligned} \quad (29.93)$$

в котором предел  $X_1$  имеет выражение

$$X_1 = \frac{1-h}{k-h} k. \quad (29.94)$$

Выполняя вычисления, получим окончательный результат

$$S_i C_{zi} = -\frac{4\alpha_0}{B} \frac{2l}{\pi} [I_{i1} + (m-1)(I_{i1} + I_{i3})], \quad (29.95)$$

где, по аналогии с предыдущими выражениями:

$$I_{i1} = \frac{1-h}{1+h} \left( \frac{\ln nh}{\sqrt{n^2 h^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \frac{nh-1}{nh+1}} \right); \quad (29.96a)$$

$$I_{i3} = \int_1^{nh} F(nh, k) \left(\frac{1-h}{k-h}\right)^2 dk; \quad (29.96b)$$

$$\begin{aligned} F(nh, k) &= \sqrt{n^2 h^2 - 1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2 h^2 - k^2}{1 - k^2}} + \\ &+ \sqrt{n^2 h^2 - k^2} \ln \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} - nh \operatorname{Arch} \frac{nh}{k} - i \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 h^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (29.96b)$$

**З а м е ч а н и е.** Напомним, что в приведенных выражениях оставлены мнимые члены, чтобы сделать соответствующие формулы применимыми ко всем случаям, причем всегда берутся только действительные части получающихся выражений.

**29.5.2. Определение полной подъемной силы.** Общая формула для полной подъемной силы

$$C_{zt} = C_z - hC'_z - \frac{S_l}{l} C_{zi}, \quad (29.97)$$

которая устанавливается для каждой из трех форм течения приводит к следующим результатам:

1) Если ведущие кромки дельтообразного крыла сверхзвуковые ( $n < 1$ ), то, используя уравнения (29.82) и (29.91), получим интересный результат

$$C_{zt} = 0. \quad (29.98)$$

2) Если ведущие кромки крыла дозвуковые, а кромки замыкающей поверхности в задней части сверхзвуковые ( $nh < 1 < n$ ), то, в соответствии с уравнениями (29.74), (29.76), (29.91), и полагая

$$F_1(n) = \frac{2\pi}{nE}, \quad (29.99a)$$

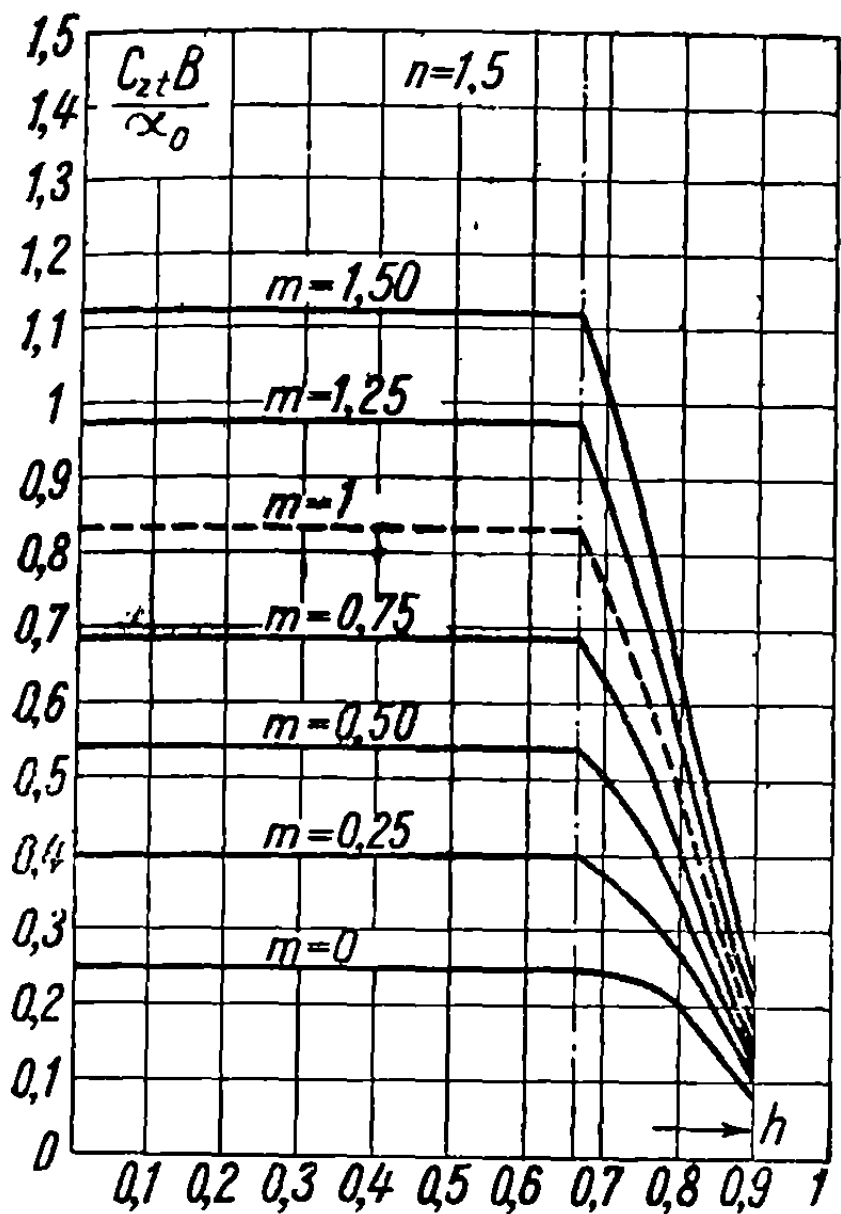
$$\begin{aligned} F_2(n) &= \frac{2n}{E} \left\{ \frac{2}{n^2} \left[ \frac{\pi}{2} + K(1 - E') + (K - E)(K' - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{n}{2} \ln \frac{n+1}{n-1} \right] - E \left( 1 - \frac{n^2 - 1}{2n} \ln \frac{n+1}{n-1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (29.99b)$$



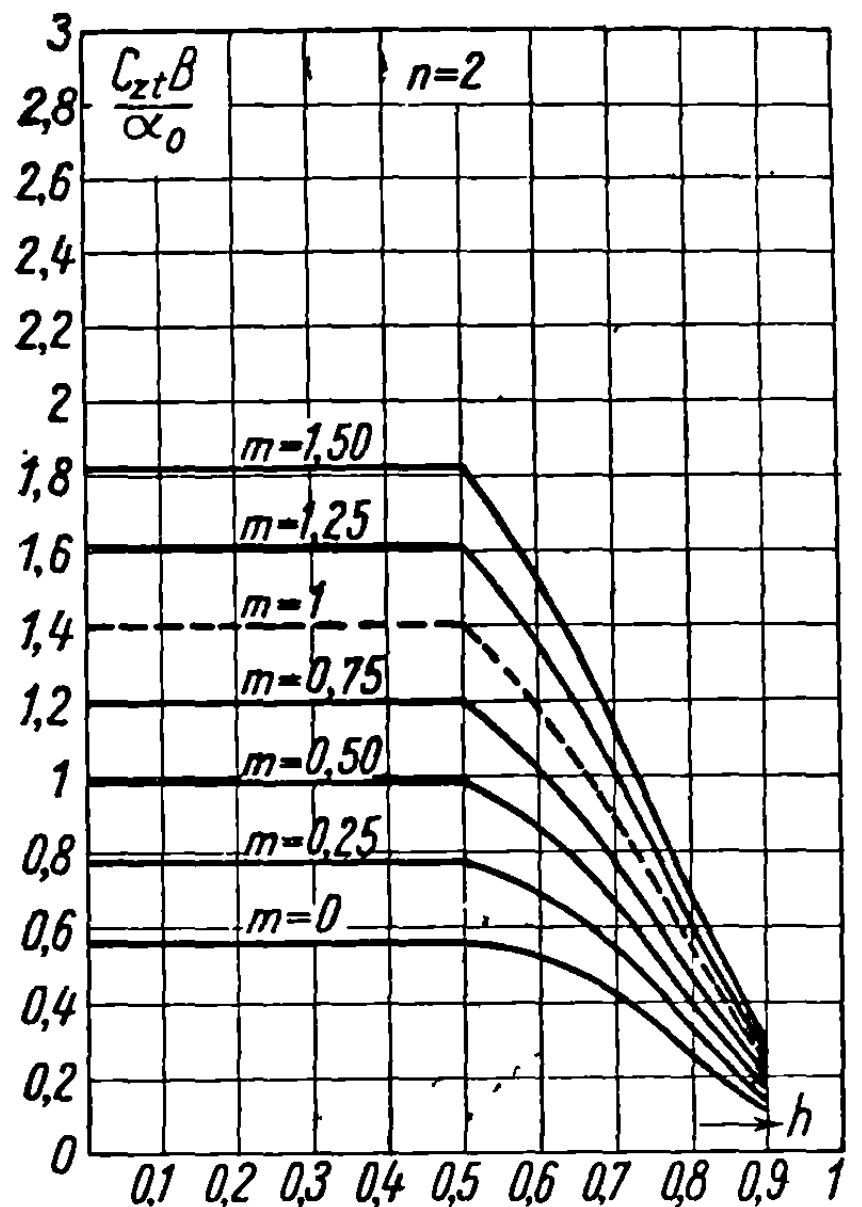
получим

$$\frac{B}{\alpha_0} C_{zt} = 4 - F_1(n) + (m - 1) [2 - F_2(n)]. \quad (29.100)$$

Крыло и пластинка рассматриваются достаточно тонкими, а соответствующие углы атаки относительно направления потока достаточно малыми, чтобы можно было применить гипотезу малых возмущений.



Фиг. 29.7 а



Фиг. 29.7 б

3) Если ведущие кромки крыла и кромки замыкающей поверхности дозвуковые ( $1 < nh < n$ ), то должны быть приняты во внимание уравнения (29.74), (29.76), (29.90) и (29.95); вводя соответствующие значения в формулу для подъемной силы (29.97), получим в окончательном результате

$$\frac{B}{\alpha_0} C_{zt} = \frac{8}{\pi} (I'_{11} + I'_{12}) - F_1(n) + (m - 1) \left[ \frac{8}{\pi} (I'_{11} + I'_{13} + I_{11} + I_{13}) - F_2(n) \right]. \quad (29.101)$$

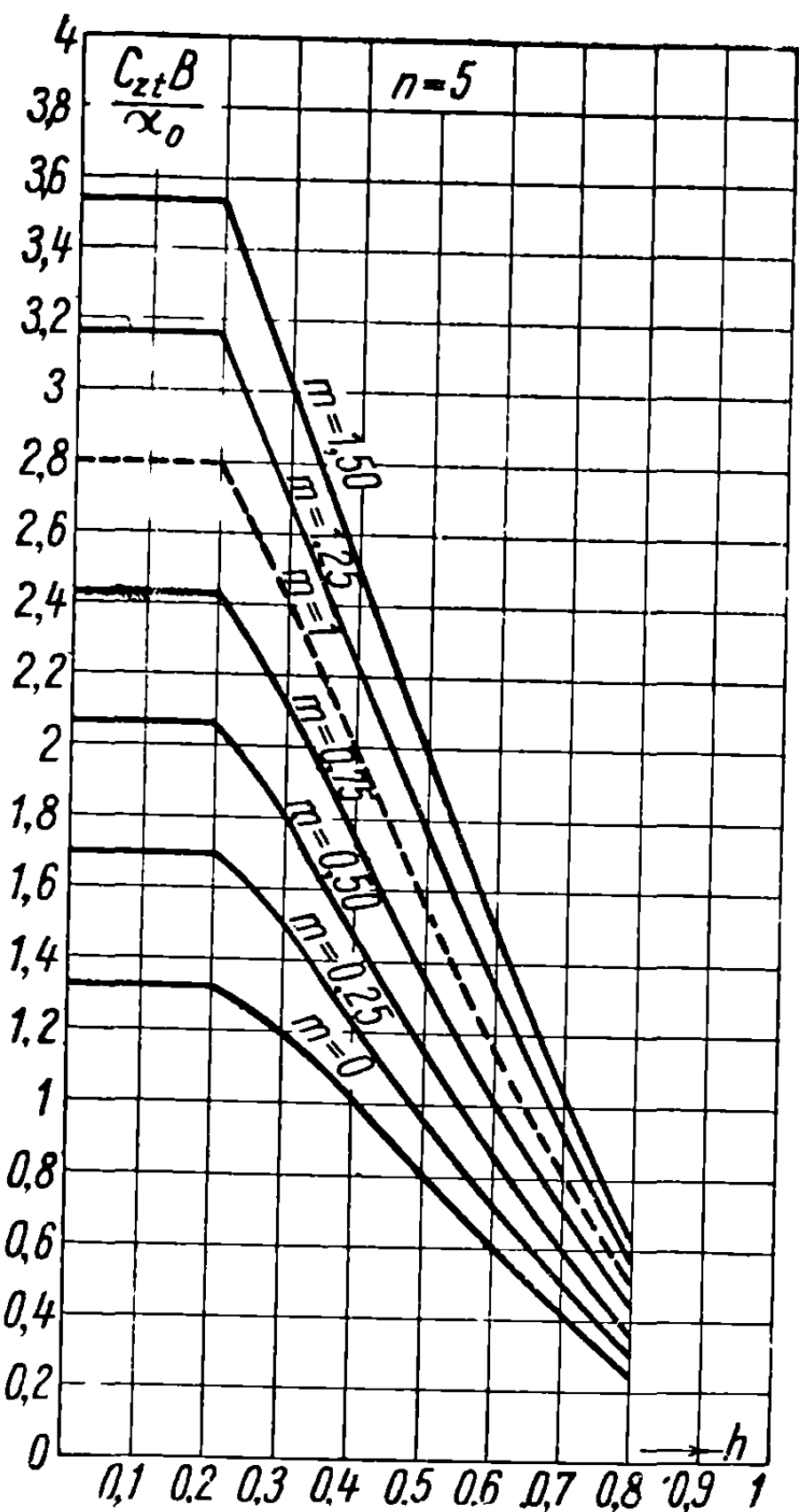
Приведенные выше формулы длинны и очень трудоемки для вычислений; поэтому на фиг. 29.7 а, б, в даны диаграммы, изображающие изменение полной подъемной силы в зависимости от  $h$ ,  $m$ ,  $n$ .

**З а м е ч а н и е.** Очевидно из диаграмм и из формулы (29.70), что полная подъемная сила не зависит от высоты  $h$  для значений последней, меньших, чем значения, соответствующие неравенству  $nh > 1$ , когда замыкающие кромки становятся дозвуковыми. С этого момента должна применяться формула (29.78), которая учитывает также влияние интерференции, происходящей в области  $I$  (фиг. 29.6). Вследствие вычислительных трудностей отражением волн Маха, возникающим при их пересечении в точке  $N$  с ведущей кромкой крыла, мы пренебрегаем.

Напомним, что гипотеза о существовании горизонтальной плоскости, параллельной потоку, впереди заднего крыла, которая принималась, чтобы установить теоретический режим течения, может быть справедлива для  $h \leq 0,90$ , так как иначе влияние возмущений вблизи вершины  $O$  становится значительным и им нельзя пренебрегать.

### 30. ТЕОРИЯ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ, СНАБЖЕННЫХ ПЛОСКИМИ ПЛАСТИНКАМИ, НОРМАЛЬНЫМИ К КРЫЛУ

Ввиду важности этой задачи для применений к вертикальным хвостовым поверхностям самолетов и особенно к крестообразным хвостовым оперениям ракет считаем нужным изучить более подробно различные встречающиеся на практике случаи. Рассмотрим дельтообразное крыло, снабженное тонкой плоской пластинкой, установленной на его оси нормально к крылу, причем эта система крыло — пластинка расположена в свободном потоке со скоростью  $U_\infty$ .



Фиг 29.7 в

Поскольку здесь уравнения течения могут быть линеаризированы (см. раздел 24), отдельные влияния будут складываться. Таким образом, влияние толщины может быть определено отдельно, путем рассмотрения крыла, симметричного относительно плоскости  $Ox_1x_2$ , а влияние кривизны скелета крыла — путем рассмотрения тонкого крыла с переменным углом атаки.

Как толщина крыла, так и кривизна скелета предполагаются достаточно малыми, чтобы оправдать гипотезу о том, что крыло лежит в плоскости  $Ox_1x_2$  и что в плоскости  $x_1=1$  след конического крыла совпадает с осью  $Oy$  координатной системы  $Oyz$  (см. фиг. 30.1). Плоская пластинка также рассматривается

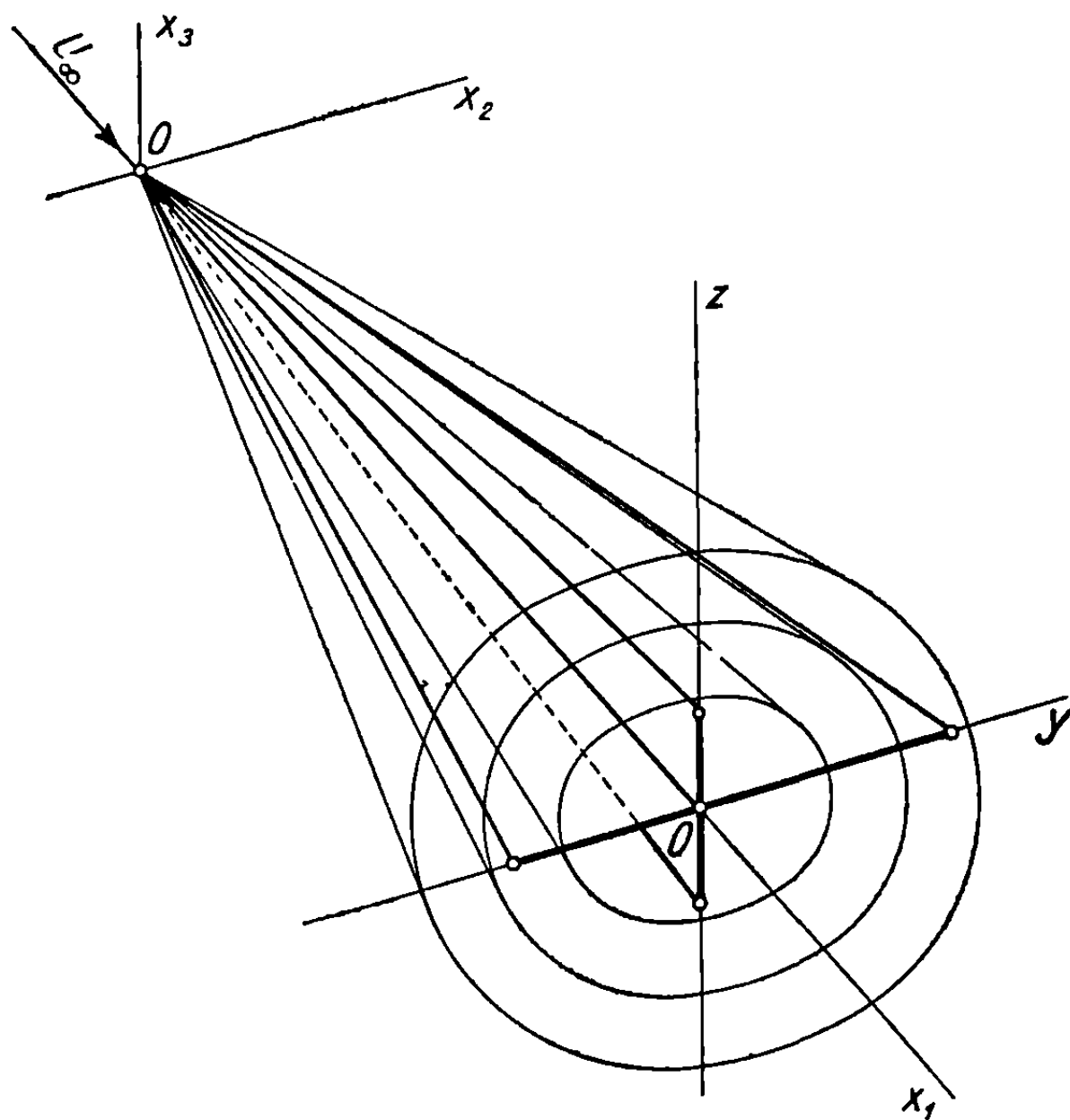
расположенной в плоскости  $Ox_1x_3$  и ее след в плоскости  $Oyz$  находится на оси  $Oz$ .

Так как течение вокруг системы крыло—пластинка коническое, можно применить геометрическое преобразование Буземана (см. формулу 16.69)

$$Br = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \left( B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \right).$$

Напомним, что в результате этого преобразования контур круга радиуса  $r_0 = \frac{1}{B}$  и его внутренняя часть в физической плоскости  $Oyz$  преобразуются в контур круга радиуса  $\rho_0 = 1$  и его внутреннюю часть во вспомогательной плоскости  $\omega\eta\zeta$ . Обозначая, как и выше, через  $\xi = \eta + i\zeta$  комплексную переменную во вспомогательной плоскости, определим осевую компоненту  $u$  скорости возмущения как действительную часть голоморфной функции  $f(\xi) = u + iu'$  в области  $|\xi| < 1$  вне разреза, образуемого следом крыла и плоской пластинки.

Тонкое крыло будет исследоваться отдельно от толстого, причем будут рассматриваться пластинки при наличии и при отсутствии угла атаки; во всех случаях пластинки будут иметь дозвуковые ведущие кромки. При этом



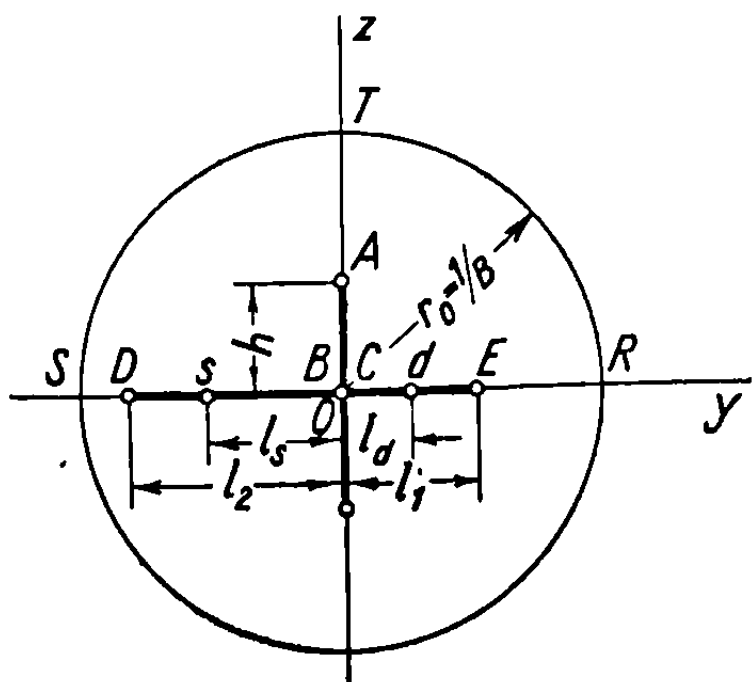
Фиг. 30.1

используется метод, применявшийся в наших ранее опубликованных работах [7—9].

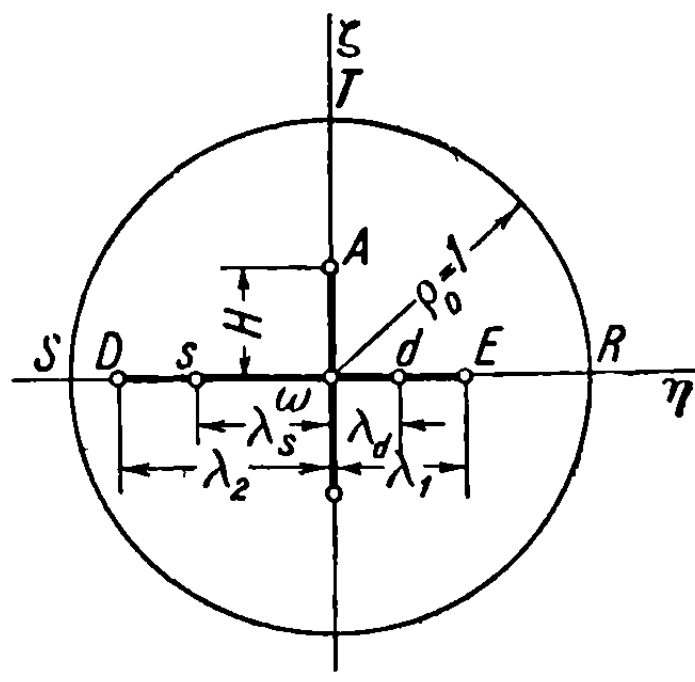
### 30.1. Тонкое угловидное крыло, снабженное пластинкой, перпендикулярной к крылу

Рассмотрим несколько случаев в соответствии с положением ведущих кромок крыла относительно конуса Маха.

30.1.1. Дозвуковые ведущие кромки. Рассмотрим физическую плоскость  $Ouz$ , определенную выше. Конус Маха с полууглом  $\mu$  при вершине пересекает эту плоскость вдоль окружности радиуса  $r_0 = \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{B}$ .



Фиг. 30.2



Фиг. 30.3

Оба следа—крыла и пластинки — располагаются полностью внутри этого круга, соответственно вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$  (фиг. 30.2).

Во вспомогательной плоскости  $\omega\eta\zeta$  указанные следы отображаются соответственно на оси  $\omega\eta$  и  $\omega\zeta$  (фиг. 30.3). Абсцисса  $\lambda$ , как и высота  $H$ , легко выводятся путем применения указанного выше преобразования:

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}}{Bl}, \quad H = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 h^2}}{Bh}. \quad (30.1)$$

Чтобы определить выражение функции  $f = u + iu'$  в плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$ , надо принять во внимание следующие граничные условия.

Ради общности предположим, что угол атаки крыла будет:  $\alpha_2$  на интервале  $(-\lambda_2, -\lambda_s)$ ,  $\alpha_s$  на интервале  $(-\lambda_s, 0)$ ,  $\alpha_d$  на интервале  $(0, \lambda_d)$ ,  $\alpha_1$  на интервале  $(\lambda_d, \lambda_1)$ . Вертикальная компонента  $w$  скорости возмущения принимает на крыле соответственно различным интервалам значения  $-U_\infty \alpha_2$ ,  $-U \alpha_s$ ,  $-U_\infty \alpha_d$ ,  $-U \alpha_1$ .

Из формулы (16.88) для точек на оси  $\omega\eta$

$$d(w + iw') = \frac{iB}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) d(u + iu'); \quad (30.2)$$

замечая, что на тех же интервалах  $dw = 0$ , получим как следствие условие  $du' = 0$  для всего крыла, что было найдено ранее в случае тонкого плоского крыла.

Далее, если угол атаки пластинки предполагается равным нулю, то компонента  $v$  скорости возмущения на пластинке также равна нулю.

Аналогично из формулы (16.87), примененной к точкам на оси  $\omega\zeta$ , получается условие  $du' = 0$  на следе пластинки:

$$d(v + iv') = -\frac{iB}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) d(u + iu'), \quad (30.3)$$

так как  $dv = 0$  на пластинке; эти условия идентичны полученным для крыла.

На окружности Маха  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ .

Заключение, которое можно вывести из применения формул (16.87) и (16.88), состоит в том, что скорости будут иметь бесконечную величину в начале координат ( $\xi = 0$ ), как и было установлено ранее. Так как для действительного крыла это физически невозможно, то функция  $f(\xi)$  должна удовлетворять установленному ранее условию (24.25)

$$(df)_{\xi=0} = 0.$$

Что касается условий течения вокруг дозвуковых ведущих кромок, то из рассуждений, приведенных в разделе 24.4, следует, что в точках  $\xi = \pm iH$ ,  $\xi = -\lambda_2$ ,  $\xi = \lambda_1$  (см. формулу 30.1) компонента  $u$ , а отсюда и функция  $f = u + iu'$  стремятся к бесконечности подобно выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{\xi - iH}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi + iH}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi + \lambda_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi - \lambda_1}}.$$

Чтобы определить аналитическую функцию  $f(\xi)$  в соответствии с поставленными выше условиями, применим гидродинамическую аналогию между функцией  $f = u + iu'$  и потенциалом фиктивного течения несжимаемой жид-

кости, причем  $u$  будет представлять потенциал скорости, а  $u'$  — функцию тока.

Для определения этого фиктивного движения после выполнения геометрического преобразования Буземана произведем конформное отображение

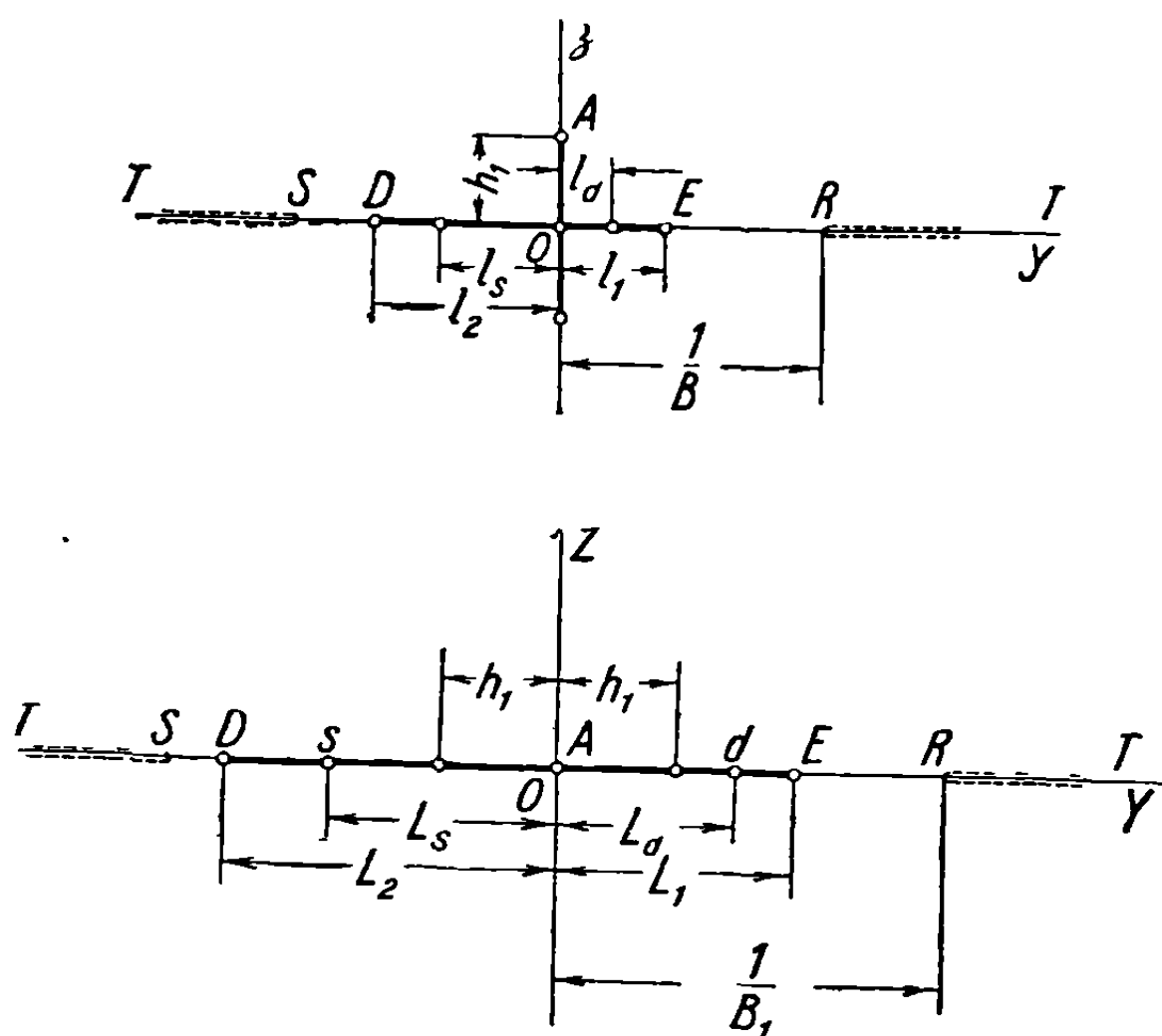
$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad (30.4)$$

представляющее точно след крыла в физической плоскости (см. фиг. 30.2) и дающее конфигурацию, изображенную на фиг. 30.4; преобразование

$$X^2 = x^2 + h_1^2 \quad (30.5)$$

приводит к конфигурации на фиг. 30.5; последним преобразованием будет

$$X = \frac{L_1 + L_2}{4} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right) + \frac{L_1 - L_2}{2}. \quad (30.6)$$



Фиг. 30.5

Значения величин  $h_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\frac{1}{B_1}$  выводятся из фиг. 30.4 и 30.5 путем простого применения формул (30.4) и (30.5):

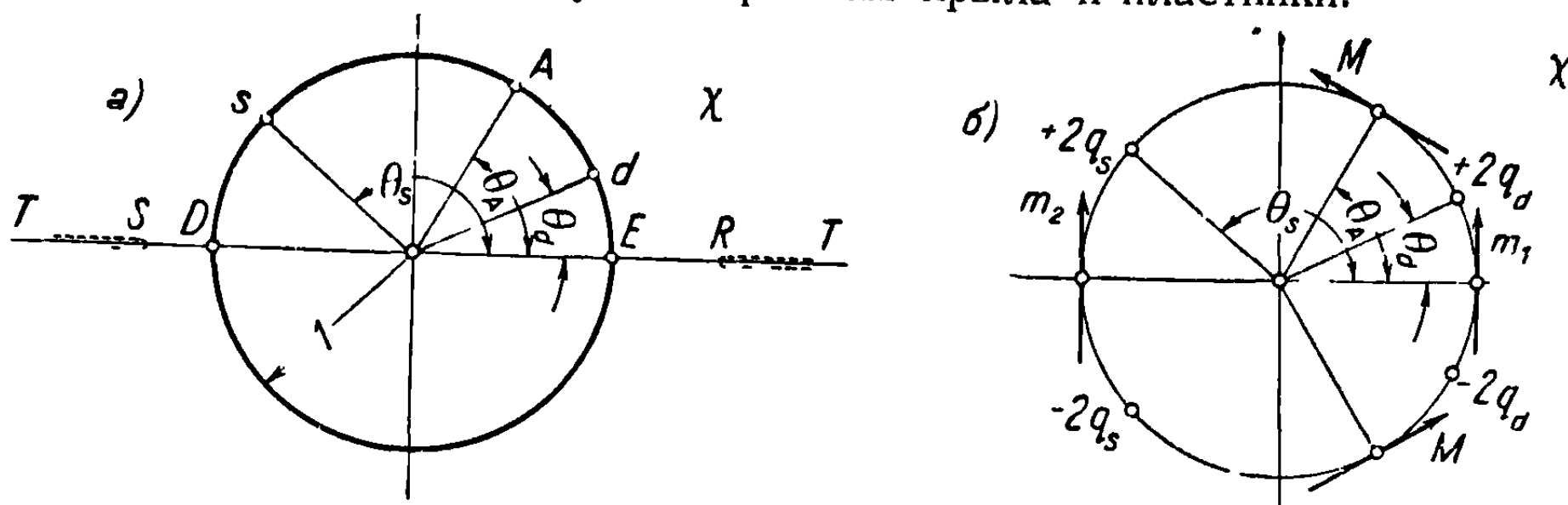
$$Bh_1 = \frac{2H}{1 - H^2} = \frac{Bh}{\sqrt{1 - B^2h^2}}, \quad L_k^2 = h_1^2 + l_k^2 \quad (k = 1, 2),$$

$$\frac{1}{B_1^2} h_1^2 + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{B^2 (1 - B^2h^2)}. \quad (30.7)$$

Область, заключенная между окружностью единичного радиуса и следами пластинки и крыла в плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$ , отображается таким образом на область вне окружности  $|\chi| = 1$  и двух прямых линий на действительной оси (фиг. 30.6, a). Граничные условия, которым должна удовлетворять функция  $f = u + iu'$  в плоскости  $\chi$ , будут:

$du' = 0$  на частях окружности  $|\chi| = 1$ , соответствующих крылу и пластинке;  
 $u = 0$  на действительной оси;

$f$  стремится к бесконечности в точках  $\chi = +1, \chi = e^{\pm i\theta_A}$  ( $\cos \theta_A = \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}$ ), которые соответствуют ведущим кромкам крыла и пластинки.



Фиг. 30.6

Условие  $df = 0$  в точке  $\xi = 0$  выполняется автоматически; действительно, для  $\xi = 0$

$$df = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dX} \frac{dX}{dx} \frac{dx}{d\xi} d\xi = 0, \quad (30.8)$$

так как  $\left(\frac{dX}{dx}\right)_{\xi=0} = 0$ , а другие множители принимают конечные значения.

Путем применения гидродинамической аналогии фиктивное течение, комплексный потенциал которого  $f = u + iu'$  удовлетворяет поставленным выше условиям, определяется системой диполей и источников, расположенных на окружности в точках  $\chi = \pm 1, \chi = e^{\pm i\theta_A}, \chi = e^{\pm i\theta_s}, \chi = e^{\pm i\theta_d}$ , соответствующих кромкам пластинки, кромкам крыла и точкам  $l_s$  и  $l_d$  (фиг. 30.6, б), в которых происходит изменение наклона.

Комплексный потенциал этого течения дается выражением

$$f(\chi) = u + iu' = iM \left( \frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}} \right) + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_d}}{\chi - e^{-i\theta_d}} + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_s}}{\chi - e^{-i\theta_s}} + \frac{im_1}{\chi - 1} + \frac{im_2}{\chi + 1}, \quad (30.9a)$$

где

$$\cos \theta_A = \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}, \quad \cos \theta_s = \frac{-2L_s + L_2 - L_1}{L_2 + L_1}, \quad \cos \theta_d = \frac{2L_d + L_2 - L_1}{L_2 + L_1}. \quad (30.9b)$$

Для определения значений постоянных  $M, m_1$  и  $m_2$  нужно потребовать, чтобы компонента  $v$  принимала значение  $v = 0$  на пластинке, а компонента  $w$  на частях крыла, имеющих углы атаки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , — соответственно значения

$$\omega_1 = -U_\infty \alpha_1, \quad \omega_2 = -U_\infty \alpha_2. \quad (30.10)$$

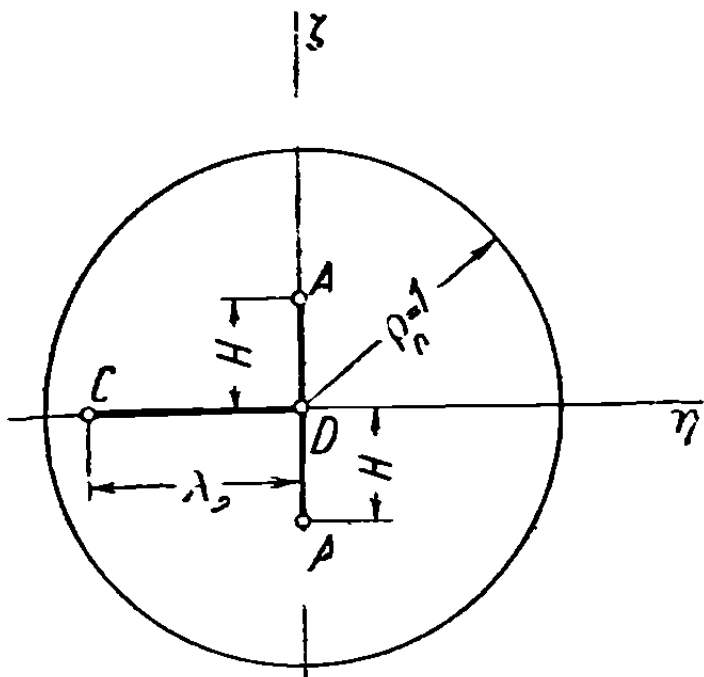
Из формул (16.87) и (16.88) и того, что  $v = w = 0$  на окружности Маха, следует:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{окружность Маха}} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'); \\ U_\infty \alpha_1 &= \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\substack{\text{пластинка} \\ \text{окружность Маха}}} i \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'); \\ U_\infty \alpha_2 &= \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\substack{\text{окружность Маха} \\ \text{крыло } (-l_2, -l_1)}} i \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'). \end{aligned} \quad (30.11)$$

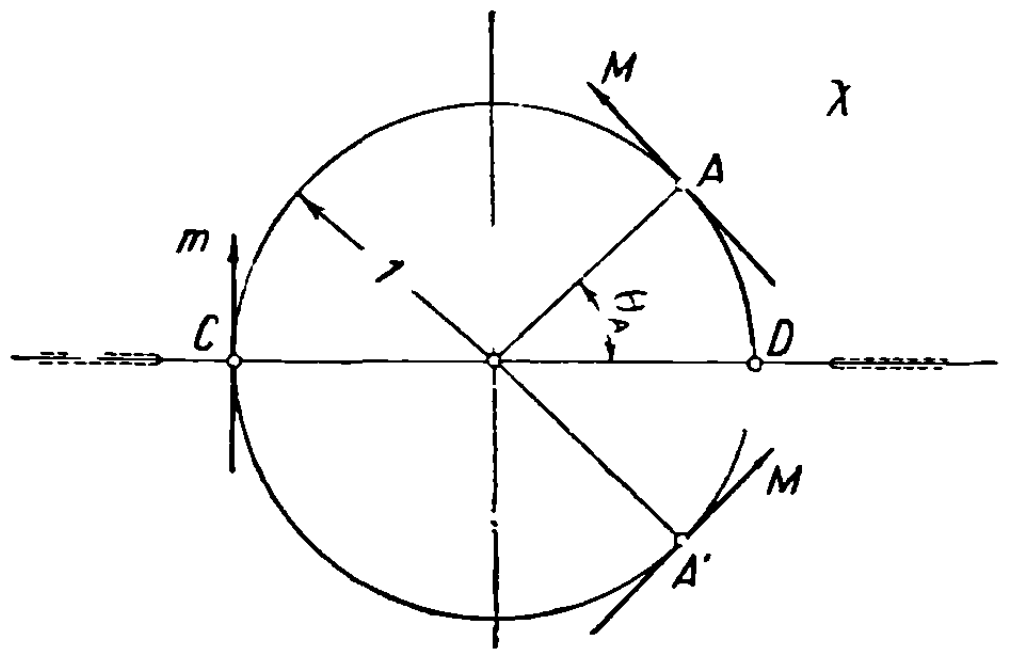
Рассчитаем эти интегралы для некоторых специальных случаев. Постоянные  $q_s$  и  $q_d$  имеют следующие значения (см. раздел 24):

$$q_s = -(\alpha_s - \alpha_2) \frac{l_s U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 l_s^2}}; \quad q_d = (\alpha_1 - \alpha_d) \frac{l_d U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 l_d^2}}. \quad (30.12)$$

Особый случай  $l_1 = 0$  при отсутствии изменения угла атаки крыла (фиг. 30.7) можно исследовать непосредственно. Применяя конформное



Фиг. 30.7



Фиг. 30.8

преобразование, описанное ранее, и отмечая, что  $l_1 = 0$ , можно специализировать последнее из указанных выше преобразований и выразить его в форме

$$X = \frac{L_2 + h_1}{4} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right) + \frac{h_1 - L_2}{2}, \quad (30.13)$$

где  $h_1$  и  $L_2$  определяются соотношениями (30.7).

В плоскости  $\chi$  комплексный потенциал, выведенный посредством гидродинамической аналогии, является потенциалом фиктивного течения, вызванного системой трех диполей. Эти диполи расположены на окружности  $|\chi| = 1$  в точках, соответствующих кромкам крыла и пластинки (фиг. 30.8).

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(\chi) = u + iu' &= iM \left( \frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}} \right) + \frac{im}{\chi + 1} = \\ &= i2M \frac{\chi \cos \theta_A - 1}{\chi^2 - 2 \cos \theta_A \chi + 1} + \frac{im}{\chi + 1}, \end{aligned} \quad (30.14)$$

где

$$\cos \theta_A = \frac{L_2 - h_1}{L_2 + h_1}.$$

Чтобы определить значения постоянных  $M$  и  $m$ , нужно удовлетворить следующим условиям:  $df = 0$  в точке  $\chi = 1$ ,  $w = -U_\infty \alpha$  на следе крыла,  $w = 0$  на окружности Маха; это приводит к соотношениям

$$M = \frac{m}{2} \sin^2 \frac{\theta_A}{2} = \frac{m}{2} \frac{h_1}{h_1 + L_2}, \quad (30.15a)$$

окружность Маха

$$U_\infty \alpha = \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{крыл}} i \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'). \quad (30.15b)$$

Условие  $v = 0$  на следе пластинки удовлетворяется автоматически. Действительно, так как  $u = 0$  на действительной оси вне следа крыла, то, применяя формулу (16.87) к точкам действительной оси, получим

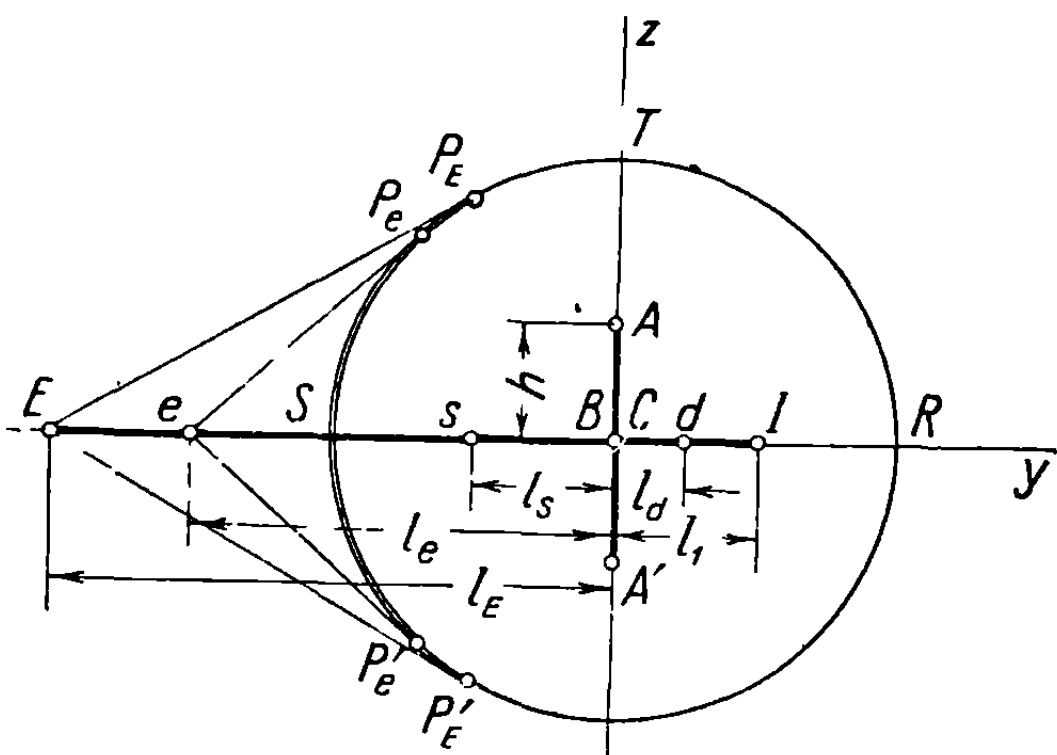
$$d(v + iv') = -\frac{B}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d(u + iu');$$

следовательно,  $dv = 0$ , откуда  $v = \text{const}$  для тех же точек.

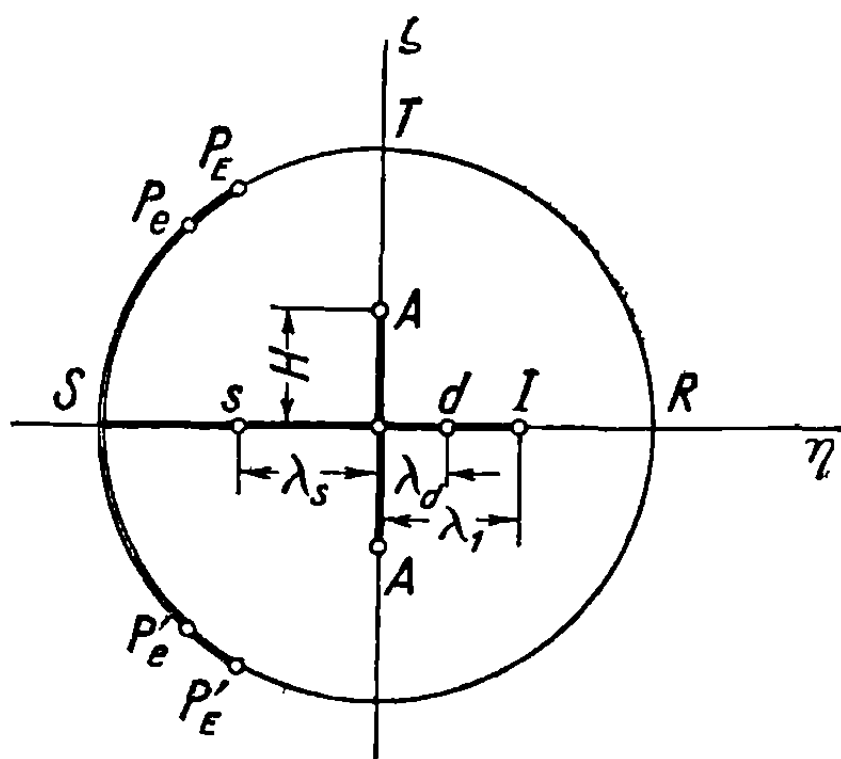
Так как  $v = \text{const}$  на следе пластинки и на действительной оси вне следа крыла и  $v = 0$  на окружности Маха, то постоянная величина скорости  $v$  на следе пластинки будет равна нулю.

### 30.1.2. Крыло с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками

Конфигурация границ рассматриваемых областей в физической плоскости  $Oyz$  ( $x_1 = 1$ ) изображена на фиг. 30.9. Угол  $P_E E P'_E$  представляет пересечение с плоскостью  $Oyz$  двугранного угла, ребро которого является сверх-



Фиг. 30.9



Фиг. 30.10

звуковой кромкой крыла, а плоскости касаются конуса Маха; угол  $P_e P'_e$  представляет пересечение с плоскостью  $Oyz$  двугранного угла, плоскости которого касаются конуса Маха, а ребро является линией изменения угла атаки крыла.

После применения геометрического преобразования (см. формулу 16.69) функция  $f = u + iu'$  должна удовлетворять следующим условиям в новой плоскости  $\xi = \eta + i\zeta$  (фиг. 30.10).

На пластинке, как и в предыдущем случае,  $du' = 0$ .

На крыле  $du' = 0$  в силу формулы (16.88), так как вертикальная компонента скорости возмущения  $w$  является постоянной на определенных частях крыла. (Угол атаки крыла предполагался распределенным следующим образом:  $\alpha_E$  на интервале  $Ee$ ,  $\alpha_e$  на интервале  $es$ ,  $\alpha_s$  на интервале  $sB$ ,  $\alpha_d$  вдоль  $Cd$  и  $\alpha_1$  вдоль  $dI$ .)

На окружности Маха условия будут:  $u = 0$  вдоль  $\widehat{P_E R P'_E}$ ,  $u = u_E$  вдоль  $\widehat{P_e P'_e}$ ;  $u = -u_E$  вдоль  $\widehat{P'_e P'_E}$ ;  $u = u_e$  вдоль  $\widehat{S P_e}$ ;  $u = -u_e$  вдоль  $\widehat{S P'_e}$ .



Чтобы избежать особенности на крыле, было выведено из формул (16.87) и (16.88) условие  $d(u + iu') = 0$  в точке  $\xi = 0$ .

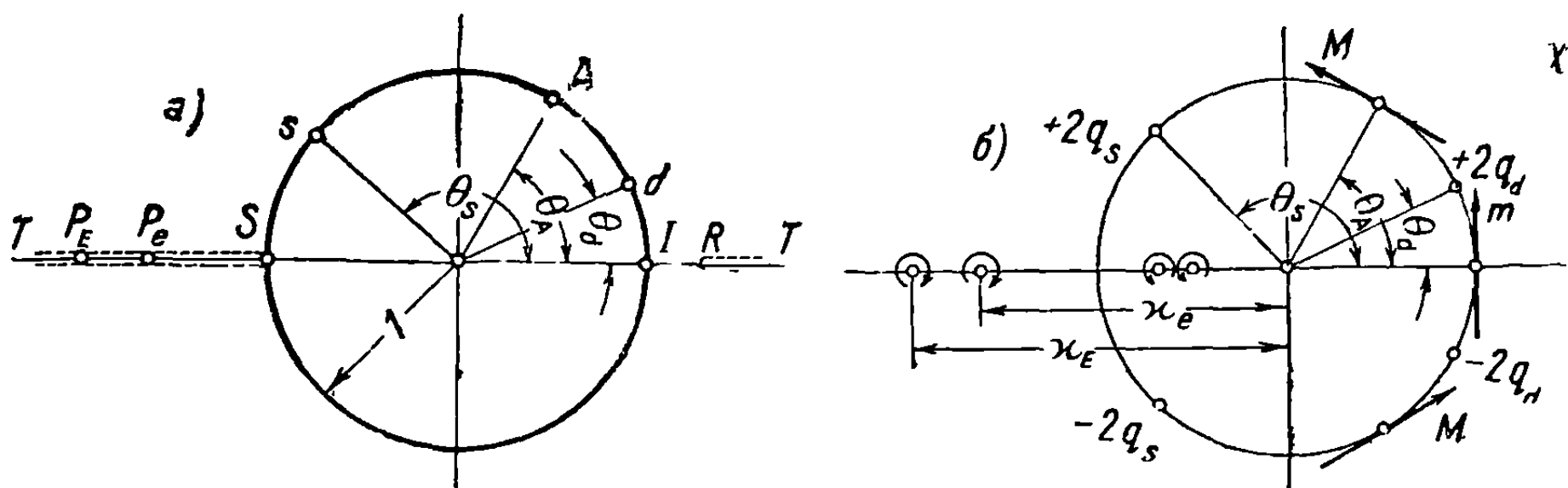
При подходе к точкам  $\xi = \pm iH$ ,  $\xi = +\lambda_1$  (см. формулу 30.1) скорость  $u$  и, следовательно, функция  $f = u + iu'$  стремятся к бесконечности подобно выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{\xi - iH}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi + iH}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi - \lambda_1}}.$$

Выполняя конформные преобразования, аналогичные примененным в предыдущем случае,

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad X^2 = x^2 + h_1^2, \quad X = \frac{L_1 + \frac{1}{B_1}}{4} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right) + \frac{L_1 - \frac{1}{B_1}}{2}, \quad (30.16)$$

где  $h_1, L_1, 1/B_1$  определяются формулами (30.7), получим в плоскости  $\chi$  конфигурацию, изображенную на фиг. 30.11, а.



Фиг. 30.11

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция  $f$  в плоскости  $\chi$ , будут:

$du' = 0$  на окружности  $|\chi| = 1$ , соответствующей пластинке и отрезкам крыла внутри конуса Маха;

$u = 0$  на прямых  $TP_E$  и  $IRT$ ;

$u = u_E$  на отрезке  $P_E P_e$  с верхней стороны;

$u = -u_E$  на отрезке  $P_E P_e$  с нижней стороны;

$u = u_e$  на отрезке  $P_e S$  с верхней стороны;

$u = -u_e$  на отрезке  $P_e S$  с нижней стороны;

$f$  стремится к бесконечности в точках  $\chi = 1$ ,  $\chi = e^{\pm i\theta_A}$ .

Как и в предыдущем случае, условие  $df_{\xi=0} = 0$  удовлетворяется автоматически.

Фиктивное двумерное потенциальное течение, которое удовлетворяет приведенным выше условиям, определяется системой диполей, источников и вихрей, расположенных, как показано на фиг. 30.11, б.

Комплексный потенциал этого течения выражается уравнением

$$f(\chi) = u + iu' = iM \left( \frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}} \right) + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_d}}{\chi - e^{-i\theta_d}} + \\ + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_s}}{\chi - e^{-i\theta_s}} + \frac{im}{\chi - 1} + \frac{i u_F}{\pi} \ln \frac{\chi + x_F}{\chi + 1/x_E} + \frac{i(u_e - u_f)}{\pi} \ln \frac{\chi + x_e}{\chi + 1/x_e}, \quad (30.17)$$

где  $q_s$  и  $q_d$  имеют те же значения, что и в предшествующем случае (см. формулу 30.12), тогда как  $\kappa_e$ ,  $\kappa_E$ ,  $e^{i\theta_A}$ ,  $e^{i\theta_d}$ ,  $e^{i\theta_s}$  легко выводятся из формул преобразования.

Чтобы определить постоянные  $M$  и  $m$ , должны быть поставлены условия  $v = 0$  на пластинке и  $w = -U_\infty \alpha$  на отрезке  $(l_d, l_1)$  крыла. В силу формул (16.87), (16.88)

$$0 = -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка}}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'),$$

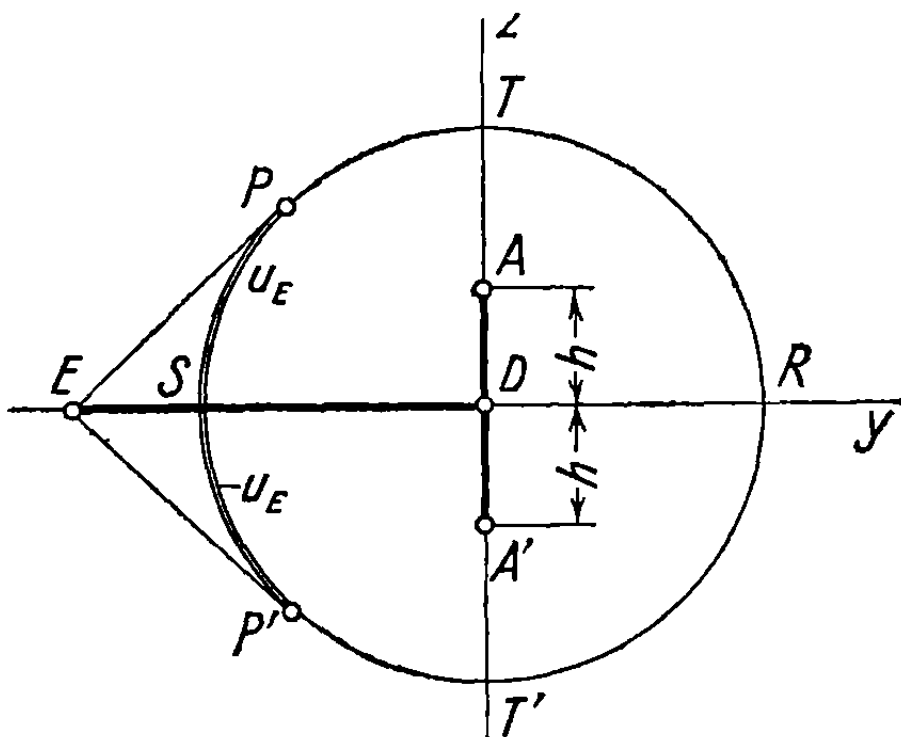
$$U_\infty \alpha_1 = \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{крыло}(l_d, l_1)}^{\text{окружность Маха}} i \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'). \quad (30.18)$$

Постоянные  $u_E$  и  $u_e$  определяются из других простых соображений. Напомним, что эти скорости выражаются формулами (25.14)

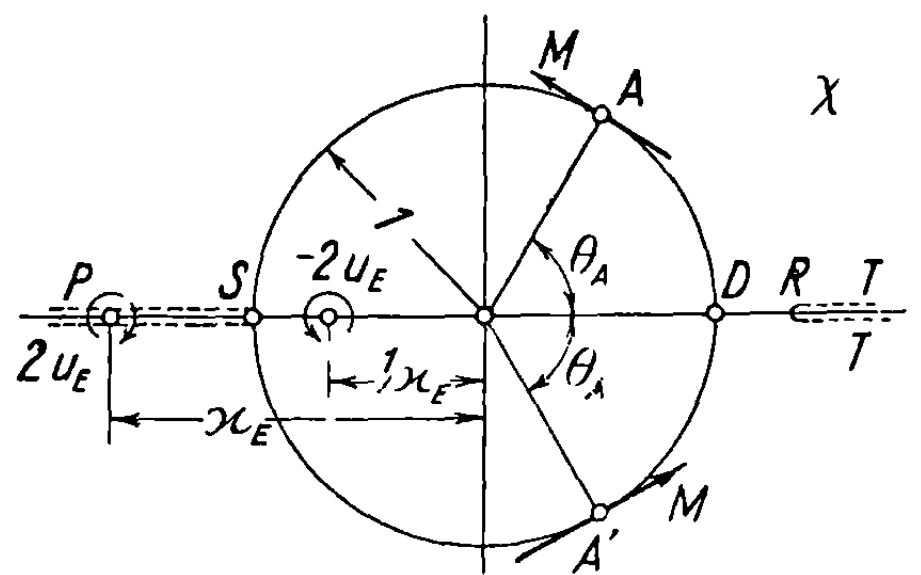
$$u_E = \frac{-\alpha_E U_\infty}{B} \frac{Bl_E}{\sqrt{B^2 l_E^2 - 1}}, \quad u_e = u_E - \frac{\alpha_e U_\infty}{B} \frac{Bl_e}{\sqrt{B^2 l_e^2 - 1}}, \quad (30.19)$$

где  $l_e$  и  $l_E$  показаны на фиг. 30.9.

Случай  $l_1 = 0$  может быть исследован непосредственно. Применим прежние конформные преобразования, помня, что  $l_1 = 0$ . С целью упрощения



Фиг. 30.12



Фиг. 30.13

примем, что нет скачкообразных изменений угла атаки крыла, тогда конфигурация в физической плоскости будет, как на фиг. 30.12. В этом случае, комплексный потенциал в плоскости  $\chi$  обуславливается системой диполей и вихрей, расположенных, как показано на фиг. 30.13.

Отсюда

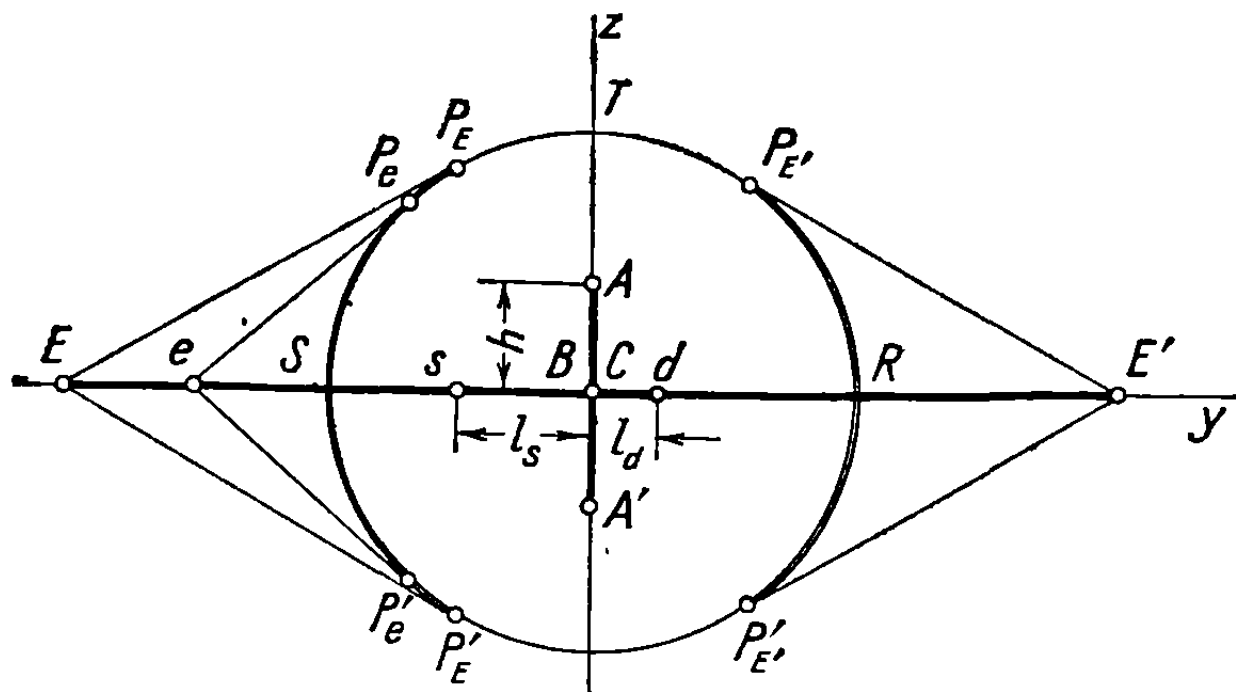
$$f(\chi) = u + iu' = \frac{i u_E}{\pi} \ln \frac{\chi + \kappa_E}{\chi + 1/\kappa_E} + iM \left( \frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}} \right). \quad (30.20)$$

Подставив условие  $df = 0$  в точке  $\xi = 0$ , получим значение постоянной  $M$

$$M = -\frac{2u_E}{\pi} \frac{1 - \kappa_E}{1 + \kappa_E} \sin^2 \frac{\theta_A}{2} = -\frac{2u_E}{\pi} \frac{1 - \kappa_E}{1 + \kappa_E} \frac{hB}{1 + hB}. \quad (30.21)$$

Напомним, что величина  $\kappa_E$  выводится путем последовательного применения формул преобразования.

Если  $\kappa_E$  стремится к бесконечности, то получается течение вокруг прямоугольного крыла, снабженного концевой пластинкой, исследованное П. Жерменом [10].



Фиг. 30.14

**30.1.3. Сверхзвуковые ведущие кромки.** Аналогично предыдущим случаям (см. фиг. 30.14),  $v = 0$  на пластинке,  $w = -U_\infty \alpha_2$  на части  $S_s$  крыла,  $w = -U_\infty \alpha_s$  на части  $sB$ ,  $w = -U_\infty \alpha_d$  на части  $Cd$ ,  $w = -U_\infty \alpha_1$  на части  $dR$ .

Условия на окружности Маха будут:  $u = u_e$  вдоль  $\widehat{SP_e}$ ;  $u = u_E$  вдоль  $\widehat{P_e P_E}$ ;  $u = u_E$  вдоль  $\widehat{P_E R}$ ;  $u = -u_e$  вдоль  $\widehat{SP'_e}$ ;  $u = -u_E$  вдоль  $\widehat{P'_e P'_E}$ ;  $u = -u_E$  вдоль  $\widehat{P'_E R}$ ;  $u = 0$  вдоль  $\widehat{P_E P_E'}$  и вдоль  $\widehat{P'_E P'_E'}$ .

В плоскости  $\xi$ , определяемой геометрическим преобразованием (16.19),  $d(u + iu') = 0$  для  $\xi = 0$ .

В точках  $\xi = \pm iH$  (см. формулу 30.1) функция  $f = u + iu'$  стремится к бесконечности подобно выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{\xi - iH}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi + iH}}.$$

После выполнения конформных преобразований

$$\begin{aligned} Bx &= \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \\ X^2 &= x^2 + h_1^2, \\ X &= \frac{1}{2B_1} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (30.22)$$

получается конфигурация в плоскости  $\chi$ , изображенная на фиг. 30.15, а. Здесь функция  $f = u + iu'$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$du' = 0$  на окружности  $|\chi| = 1$ , соответствующей плоской пластинке и отрезкам крыла, имеющим постоянный угол атаки, заключенным внутри конуса Маха;

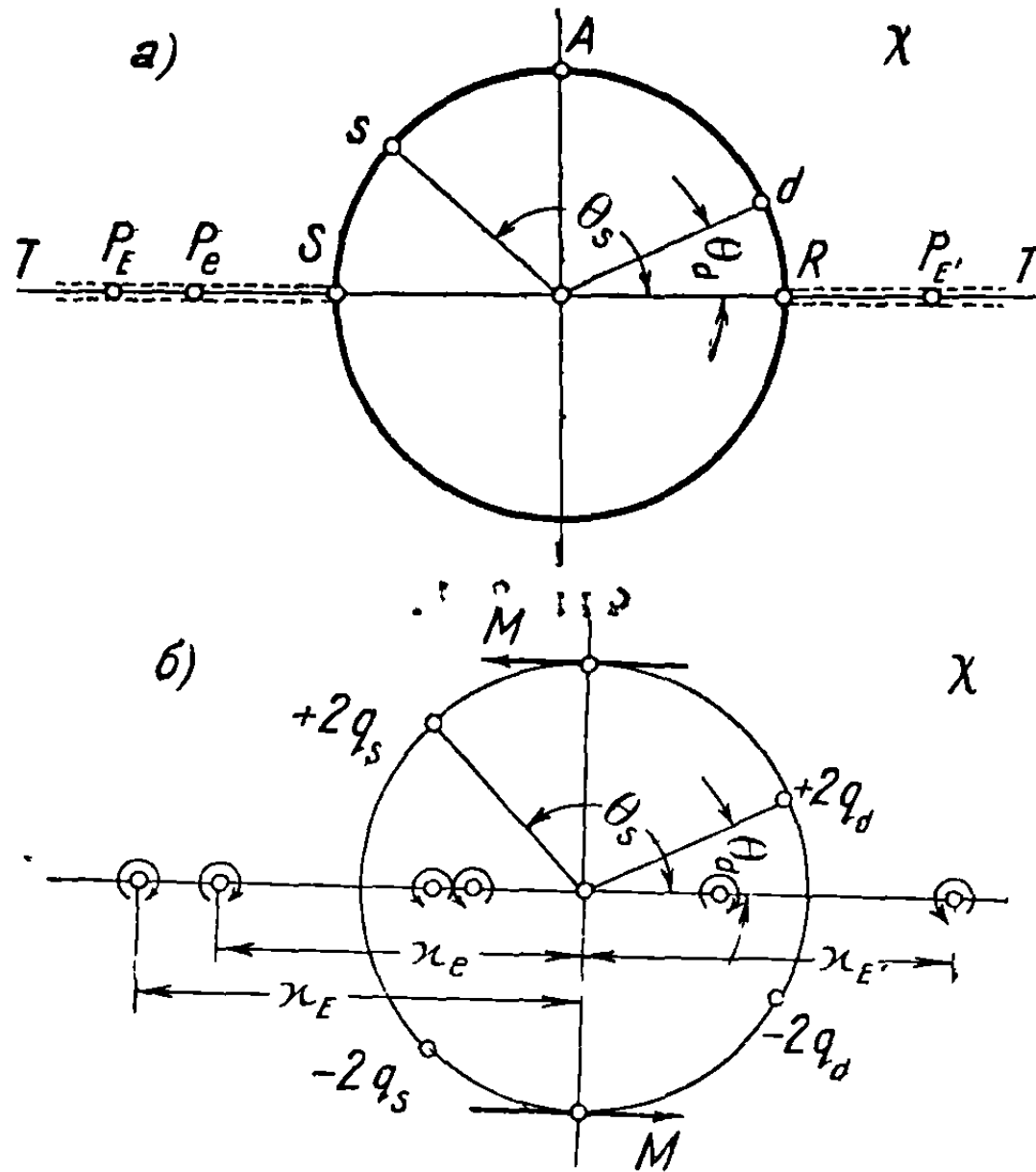
$u = 0$  на прямых  $TP_E$  и  $P_{E'}T$ ;

$u = u_E$  на верхней стороне отрезка  $P_E P_e$ ;

$u = u_e$  на верхней стороне отрезка  $P_e S$ ;

$u = u_E$  на верхней стороне отрезка  $RP_{E'}$ .

На нижней стороне тех же отрезков компонента  $u$  принимает значения, равные и противоположные по знаку таковым на верхней стороне. Кроме того,  $f$  стремится к бесконечности в точках  $\chi = \pm i$ .



Фиг. 30.15

Как и выше, условие  $df = 0$  в точке  $\xi = 0$  удовлетворяется автоматически.

Комплексный потенциал фиктивного течения, удовлетворяющий отмеченным выше условиям, определяется системой диполей, источников и вихрей, расположенных, как показано на фиг. 30.15, б.

Вытекающее отсюда выражение для потенциала будет

$$\begin{aligned}
 f(\chi) = u + iu' = & M \left( \frac{1}{\chi + i} - \frac{1}{\chi - i} \right) + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_d}}{\chi - e^{-i\theta_d}} + \\
 & + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_s}}{\chi - e^{-i\theta_s}} + \frac{i u_E}{\pi} \ln \frac{\chi + \chi_E}{\chi + 1/\chi_E} + \frac{i(u_e - u_E)}{\pi} \ln \frac{\chi + \chi_e}{\chi + 1/\chi_e} + \\
 & + \frac{i u_{E'}}{\pi} \ln \frac{\chi - 1/\chi_{E'}}{\chi - \chi_{E'}}.
 \end{aligned} \quad (30.23)$$

Чтобы определить постоянную  $M$ , поставим условие  $v = 0$  на пластинке. Следовательно,

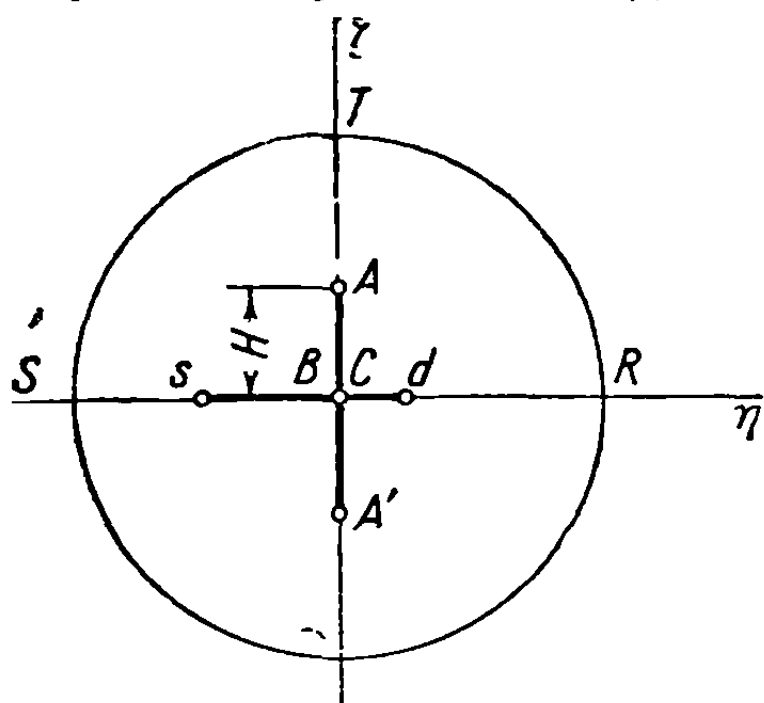
$$0 = - \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка}}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'), \quad (30.24)$$

откуда выводится значение  $M$ ; постоянные  $q_d, q_s, u_e, u_{E'}, u_E, e^{i\theta_s}, e^{i\theta_d}, \kappa_E, \kappa_e, \kappa_{E'}$  определяются тем же путем, как и выше.

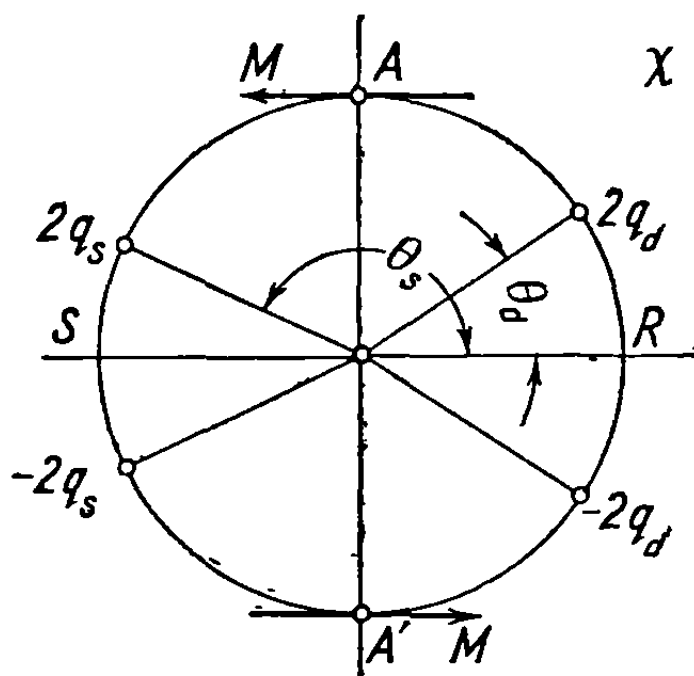
### 30.2. Толстое симметричное крыло, снабженное пластинкой, нормальной к крылу

Ниже рассмотрены три случая в соответствии с положением ведущих кромок: обе ведущие кромки дозвуковые; одна дозвуковая, а другая сверхзвуковая; обе сверхзвуковые.

30.2.1. Дозвуковые ведущие кромки. На основании симметрии ситуация в верхней полуплоскости идентична таковой в нижней.



Фиг. 30.16



Фиг. 30.17

В плоскости  $\xi$  (фиг. 30.16) после применения геометрического преобразования (см. формулу 16.69) граничные условия, которым должна удовлетворять функция  $f = u + iu'$ , будут:

$v = 0$ , следовательно,  $du' = 0$  на пластинке;

$w = 0$  на отрезках  $Ss, dR$  (на основании симметрии);

$w = U_\infty \alpha_s$  на отрезке  $sB$ , причем наклон на этом отрезке равен  $\alpha_s$ ;

$w = U_\infty \alpha_d$  на отрезке  $Cd$ , причем  $\alpha_d$  — наклон на этом отрезке.

Следовательно,  $du' = 0$  на отрезках  $Ss, sB, Cd, dR$ .

На конусе Маха  $u = 0$  и  $df = 0$  в точке  $\xi = 0$ , как автоматически получается при конформном преобразовании.

В точке  $\xi = iH$  компонента  $u$  и, следовательно,  $f$  стремятся к бесконечности подобно выражению

$$\frac{1}{V \xi - iH}.$$

Одинаковая ситуация будет и для нижней полуплоскости.

Отмеченные выше граничные условия подобны поставленным для верхней полуплоскости в задаче 30.1.3, за исключением того, что на скружности Маха  $u = 0$  и на отрезках  $Ss, dR$   $w = 0$ .

Таким образом, после выполнения конформных преобразований (30.22) получим следующее выражение для потенциала в плоскости  $\chi$ , справедливое для верхней полуплоскости (см. фиг. 30.17):

$$f(\chi) = M \left( \frac{1}{\chi + i} - \frac{1}{\chi - i} \right) + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_d}}{\chi - e^{-i\theta_d}} + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_s}}{\chi - e^{-i\theta_s}}. \quad (30.25)$$

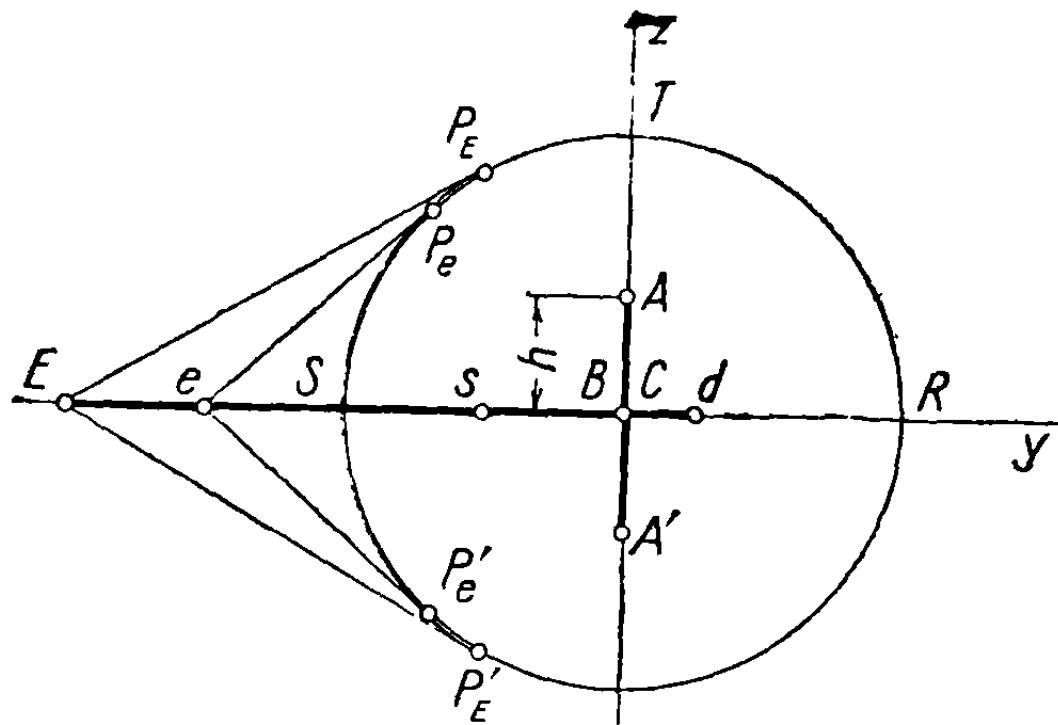
Постоянные  $q_s$  и  $q_d$  определяются, если принять во внимание, что наклон крыла в точке  $s$  изменяется от 0 до  $\alpha_s$  и в точке  $d$  от  $\alpha_d$  до 0:

$$q_s = -\alpha_s \frac{l_s U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 l_s^2}}, \quad q_d = -\alpha_d \frac{l_d U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 l_d^2}}. \quad (30.26)$$

Чтобы определить постоянную  $M$ , нужно удовлетворить условие  $v = 0$  на пластинке

$$0 = -\frac{B}{2} Re \int_{\text{пластинка}}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'). \quad (30.27)$$

**30.2.2. Крыло с одной дозвуковой и одной сверхзвуковой ведущими кромками.** Граничные условия аналогичны установленным для верх-



Фиг. 30.18

ней полуплоскости в задаче 30.1.3. (см. фиг. 30.14) со следующими отличиями:  $u = 0$  на  $\widehat{P_E T R}$  и наклон на отрезке  $dR$  будет  $\alpha_1 = 0$  (фиг. 30.18). Выполняя те же преобразования, получим следующее выражение для потенциала в плоскости  $\chi$ :

$$f(\chi) = M \left( \frac{1}{\chi + i} - \frac{1}{\chi - i} \right) + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_d}}{\chi - e^{-i\theta_d}} + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\chi - e^{i\theta_s}}{\chi - e^{-i\theta_s}} + \frac{i u_E}{\pi} \ln \frac{\chi + \kappa_E}{\chi + 1/\kappa_E} + \frac{i(u_e - u_E)}{\pi} \ln \frac{\chi + \kappa_e}{\chi + 1/\kappa_e}; \quad (30.28)$$

оно идентично выражению (30.23), за исключением последнего члена, который получается за счет сверхзвуковой кромки  $E'$ .

Постоянные  $M$ ,  $q_d$  и  $q_s$  определяются так же, как в предшествующем случае.

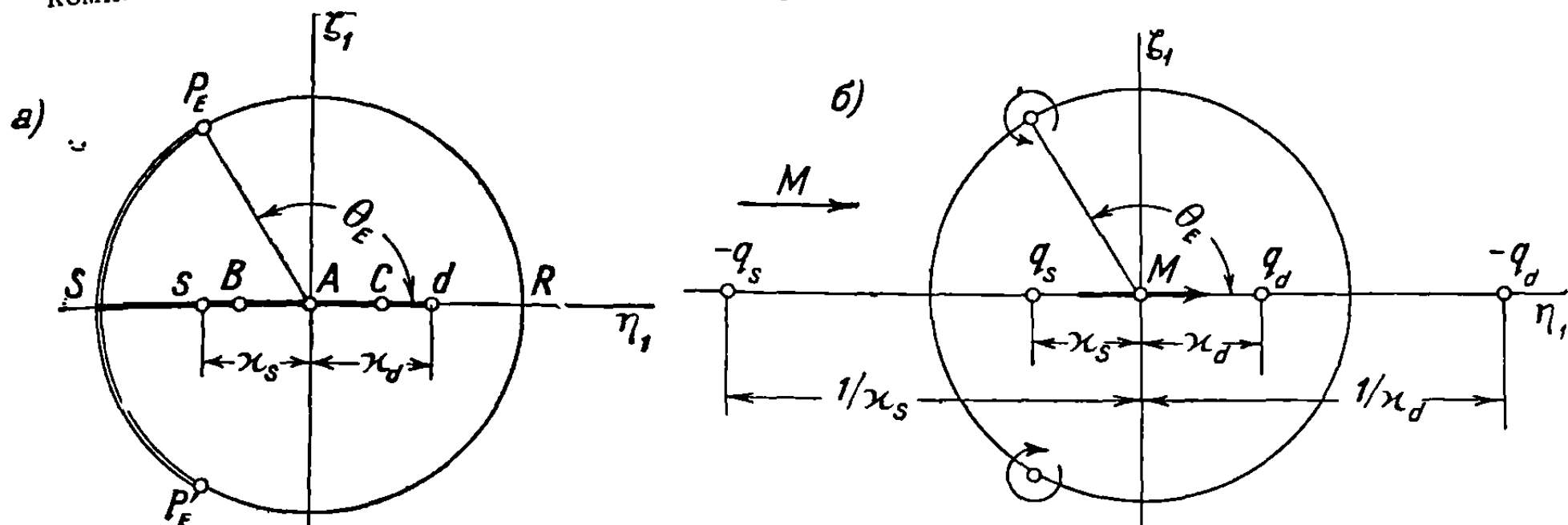
**30.2.3. Сверхзвуковые ведущие кромки.** Задача в смысле граничных условий идентична задаче 30.1.3 для верхней полуплоскости.

**З а м е ч а н и е.** Случай толстого симметричного крыла может изучаться независимо от результатов, полученных в случае тонкого крыла, путем выполнения следующих конформных преобразований:

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad X^2 = x^2 + h_1^2, \quad B_1 X = \frac{2\xi_1}{1 + \xi_1^2}. \quad (30.29)$$

Таким образом получается конфигурация в плоскости  $\xi_1$ , изображенная на фиг. 30.19, для случая крыла, частично заключенного внутри конуса Маха.

Применяя гидродинамическую аналогию, находим, что двумерное потенциальное течение, комплексный потенциал которого удовлетворит отмеченным выше условиям, определяется



Фиг. 30.19

системой диполей, источников и вихрей, расположенных в свободном потоке со скоростью  $M$  (см. фиг. 30.19, б).

Следовательно,

$$f(\xi_1) = M \left( \xi_1 - \frac{1}{\xi_1} \right) + \frac{q_s}{\pi} \ln \frac{\xi_1 + x_s}{\xi_1 + 1/x_s} + \frac{q_d}{\pi} \ln \frac{\xi_1 - x_d}{\xi_1 - 1/x_d} + \\ + \frac{i u_E}{\pi} \ln \frac{\xi_1 - e^{i\theta_E}}{\xi_1 - e^{-i\theta_E}} + u_E + \frac{u_E \theta_E}{\pi} - \frac{q_s}{\pi} \ln x_s - \frac{q_d}{\pi} \ln x_d. \quad (30.30)$$

Значения постоянных, встречающихся в приведенном выражении, получаются тем же путем, что и раньше.

### 30.3. Функция $f = u + iu'$ в случае пластинки с углом атаки, отличным от нуля

В предшествующих разделах предполагалось, что пластинка имеет нулевой угол атаки. Если пластинка имеет некоторый постоянный угол атаки  $\gamma_1$  для части, расположенной над верхней поверхностью крыла, и угол атаки  $\gamma_2$  для части, расположенной под нижней поверхностью, то влияние антисимметричных углов атаки  $+\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$  для части над верхней поверхностью и  $-\gamma = -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$  для части под нижней поверхностью и влияние постоянного угла атаки  $\gamma' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$  для всей пластинки могут исследоваться отдельно как в случае тонкого крыла, так и в случае симметричного толстого крыла.

**30.3.1. Тонкое крыло.** Рассмотрим случай пластинки с углом атаки  $+\gamma$  для части, расположенной над верхней поверхностью крыла, и  $-\gamma$  для части, расположенной под нижней поверхностью; выражение для функции  $f = u + iu'$  будет таким же, как для случая  $\gamma = 0$ , но постоянные принимают другие значения. Чтобы определить эти постоянные, нужно заменить условие  $v = 0$  на пластинке условием  $v = -\gamma U_\infty$  на части пластинки, расположенной над верхней поверхностью; в результате получим соотношение

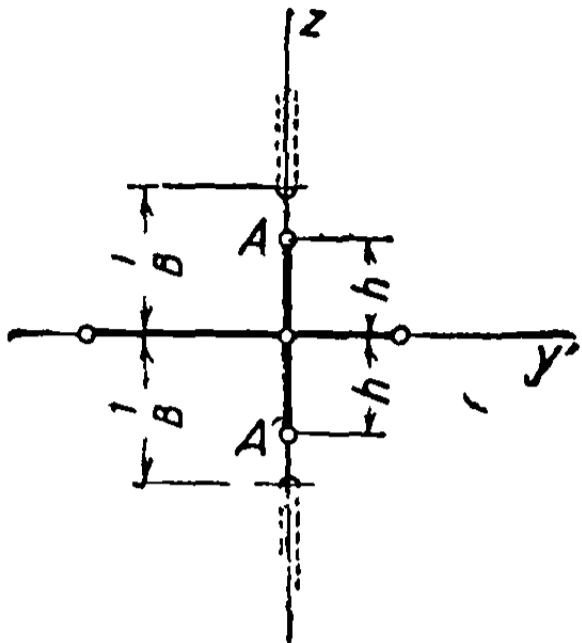
$$\gamma U_\infty = -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка}}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) d(u + iu'). \quad (30.31)$$

Условие  $v = +\gamma U_\infty$  автоматически удовлетворяется на части пластинки, расположенной под нижней поверхностью. Замечая, что выражение  $f = u + iu' = f(\chi)$ , определенное выше, удовлетворяет соотношению

$$f(\chi) = -\overline{f(\bar{\chi})}, \quad (30.32)$$

и применяя формулу (16.87) в виде

$$dv = -\frac{B}{2} \left[ \left( \eta + \frac{\eta}{\eta^2 + \zeta^2} \right) du - \left( \zeta - \frac{\zeta}{\eta^2 + \zeta^2} \right) du' \right], \quad (30.33)$$



Фиг. 30.20

получим

$$dv(\eta, \zeta) = -dv(\eta, -\zeta); \quad (30.34)$$

вспоминая, что  $v = 0$  на окружности Маха, имеем

$$v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \quad (30.35)$$

Если рассматривается случай, когда угол атаки пластинки  $\gamma'$  постоянен вдоль всей ее высоты, то к выражению  $f(\chi)$  прибавляется дополнительный потенциал  $f_1(x')$ , представляющий влияние этого угла атаки.

Для определения этой функции применим конформное преобразование

$$Bx' = \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \quad (x' = y' + iz), \quad (30.36)$$

которое обладает свойством точного воспроизведения следа пластинки  $AA'$ .

В плоскости  $x'$  (фиг. 30.20) функция  $f_1 = u_1 + iu_1'$  должна удовлетворять следующим условиям:

$du_1' = 0$  на следе крыла и на следе пластинки;

$u_1 = 0$  на прямых линиях, на которые конформно отображается окружность Маха;

$f_1 = u_1 + iu_1'$  стремится к бесконечности на ведущих кромках пластинки, подобно выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{x' - ih}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x' + ih}}.$$

Голоморфная функция  $f_1 = u_1 + iu_1'$ , удовлетворяющая указанным условиям, определяется как в случае тонкого плоского дельтаобразного крыла (см. раздел 27.3).

Следовательно,

$$f_1 = \frac{q}{\sqrt{x'^2 + h^2}}. \quad (30.37)$$



Ставя условие  $v = -\gamma'U_\infty$  на пластинке, получим соотношение

$$q = \frac{U_\infty \gamma' h^2}{E (\sqrt{1-B^2 h^2})}, \quad (30.38)$$

аналогичное формуле (27.88).

**30.3.2. Симметричное толстое крыло.** Если угол атаки пластинки предполагается равным  $\pm \gamma$  для части, расположенной над верхней поверхностью, и  $-\gamma$  для части, расположенной под нижней поверхностью, то к выражению  $f(\chi)$ , найденному для случая  $\gamma = 0$ , прибавляется дополнительный потенциал  $f_1$ , представляющий влияние этих антисимметричных углов атаки пластинки. Этот потенциал  $f_1$  получается при рассмотрении тонкого крыла с нулевым углом атаки, имеющего такой же след, как изучаемое толстое крыло, причем пластинка на крыле имеет антисимметричные углы атаки.

Процесс будет таким, как если бы симметричное толстое крыло свелось к его следу, и течение, вызываемое антисимметричной пластинкой, огибает концы, соответствующие дозвуковым ведущим кромкам, или выглядит так, как в случае тонкого крыла со сверхзвуковыми ведущими кромками. Решение выводится из результатов, полученных в аналогичных случаях.

Так, в случае крыла с дозвуковыми ведущими кромками выражение дается формулой (30.9а), где  $q_s = q_d = 0$ :

$$f_1(\chi) = iM \left( \frac{e^{i\theta A}}{\chi - e^{i\theta A}} + \frac{e^{-i\theta A}}{\chi - e^{-i\theta A}} \right) + \frac{im_1}{\chi - 1} + \frac{im_2}{\chi + 1}; \quad (30.39)$$

переменная  $\chi$  получена путем преобразования (30.6).

Постоянные  $M$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  определяются из условий  $w = 0$  на крыле справа и слева от плоской пластинки и  $v = -\gamma U_\infty$  на части пластинки, расположенной над верхней поверхностью.

В случае симметричного толстого крыла с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками, выражение для  $f_1(\chi)$  определяется формулой (30.17), где  $q_s = q_d = u_e = u_E = 0$ , а именно

$$f_1(\chi) = iM \left( \frac{e^{i\theta A}}{\chi - e^{i\theta A}} + \frac{e^{-i\theta A}}{\chi - e^{-i\theta A}} \right) + \frac{im}{\chi - 1}; \quad (30.40)$$

переменная  $\chi$  получается посредством преобразований (30.16).

Значения постоянных  $M$  и  $m$  определяются из условий  $w = 0$  на участке крыла с дозвуковой ведущей кромкой и  $v = -\gamma U_\infty$  на части пластинки расположенной над верхней поверхностью.

В случае, когда обе ведущие кромки крыла сверхзвуковые, выражение  $f_1$  дается формулой (30.23), где  $q_s = q_d = u_e = u_E = u_{E'} = 0$ .

Следовательно,

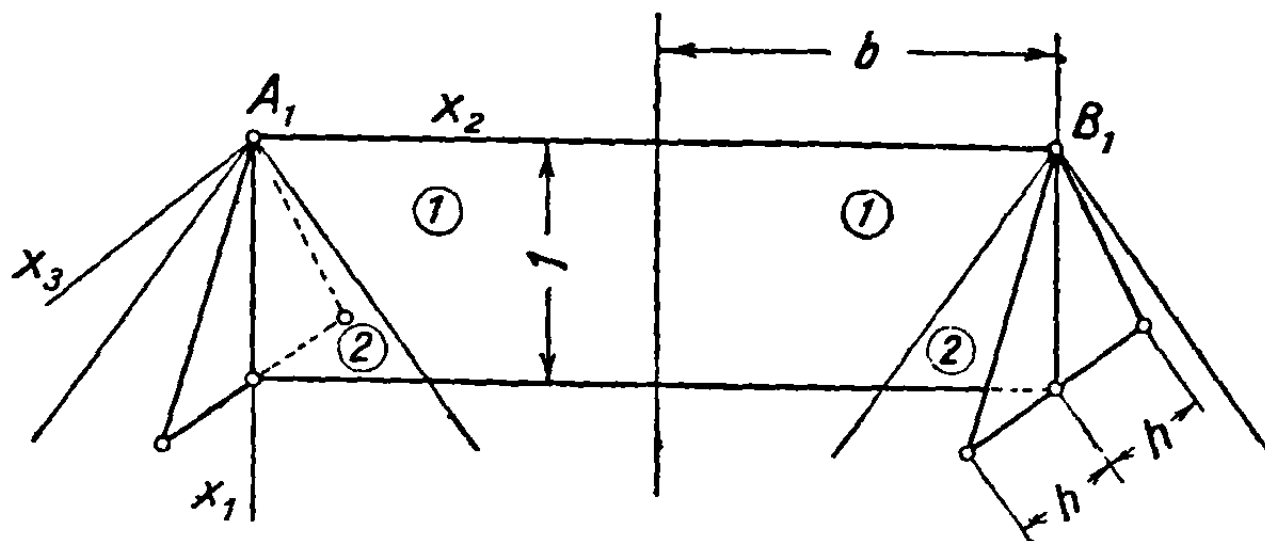
$$f_1(\chi) = M \left( \frac{1}{\chi + i} - \frac{1}{\chi - i} \right), \quad (30.41)$$

причем  $\chi$  выводится из преобразований (30.22). Условие  $v = -\gamma U_\infty$  на части пластинки, расположенной над верхней поверхностью, определяет постоянную  $M$ .

В случае симметричного толстого крыла с постоянным углом атаки пластинки  $\gamma'$  вдоль всей ее высоты [выражение дополнительного [потенциала  $\overline{f}_1$  определяется формулой (30.37).

### 30.4. Применение к прямоугольному крылу, снабженному концевыми пластинками

Пусть прямоугольное плоское крыло (фиг. 30.21) с размахом  $2b$  и шириной, равной единице, снабжено концевыми пластинками высотой  $h$  и той же ширины.



Фиг. 30.21

Пусть  $\alpha$ —угол атаки крыла,  $\gamma$ —угол атаки части пластинки, расположенной над верхней поверхностью,  $-\gamma$ —угол атаки для части, расположенной под нижней поверхностью.

Чтобы определить значения подъемной силы, лобового сопротивления и моментов для системы крыло — пластинка, нужно знать осевую компоненту  $u$  скорости возмущения.

Течение на крыле вне конусов Маха с вершинами в точках  $A_1$  и  $B_1$  (область 1) двумерно и скорость  $u$  выражается равенством

$$u_1 = \frac{\alpha U_\infty}{B}. \quad (30.42)$$

Течение внутри конусов Маха (область 2) коническое.

В системе осей координат  $A_1x_1x_2x_3$  конфигурация изображается на фиг. 30.22 в плоскости  $x_1 = 1$ , отнесенной к системе осей  $Oyz$ .

В силу соображений, приведенных в разделе 30.1, после выполнения преобразования Буземана и конформных преобразований, аналогичных (30.16)

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2},$$

$$X^2 = x^2 + h_1^2,$$

$$X = \frac{h_1 + \frac{1}{B_1}}{4} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right) - \frac{h_1 - \frac{1}{B_1}}{2}, \quad (30.43)$$

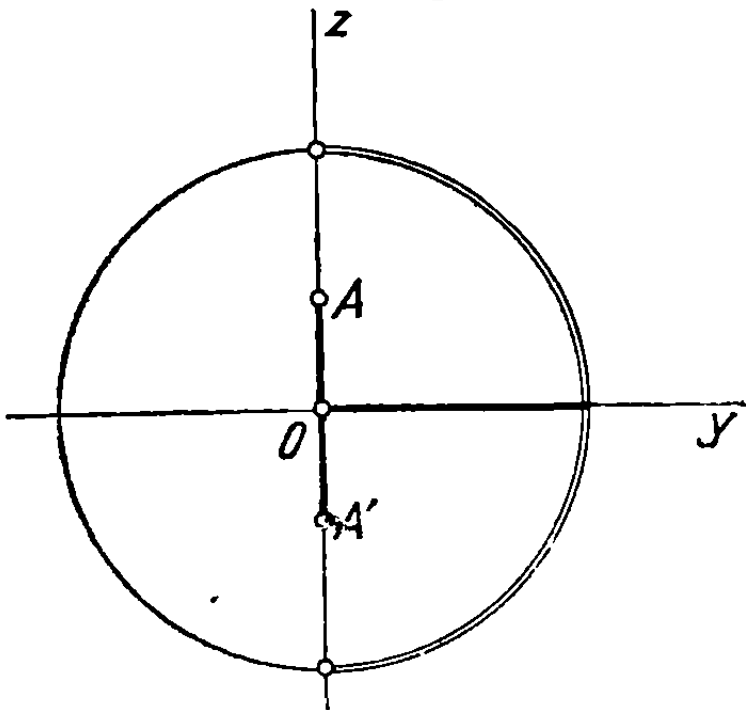
выражение для потенциала  $f$  в плоскости  $\chi$  будет

$$u + iu' = f(\chi) = i \frac{\alpha U_\infty}{\pi B} \ln \chi + iM \left( \frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}} \right) + \frac{\alpha U_\infty}{B}, \quad (30.44)$$

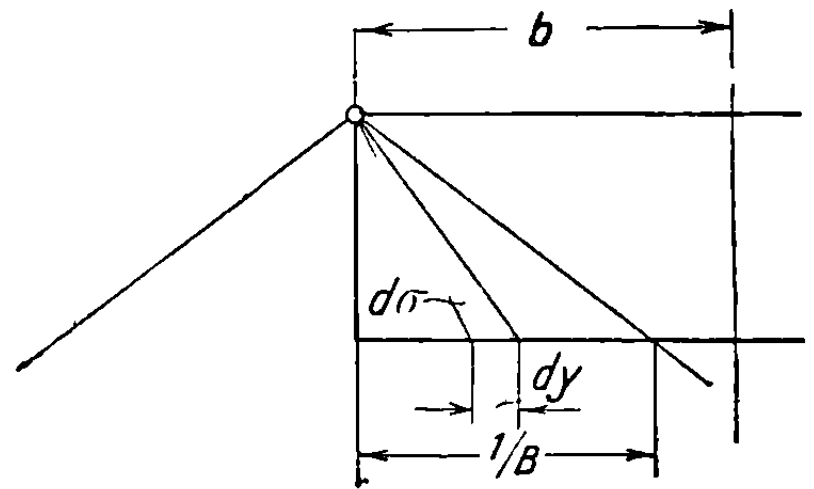
где точка  $\chi = e^{i\theta_A}$  соответствует ведущей кромке пластинки ( $y = 0, z = h$ ), согласно соотношению

$$\cos \theta_A = \frac{hB - 1}{hB + 1}. \quad (30.45)$$

Постоянная  $M$  определяется из предположения, что  $v = -\gamma U_\infty$  на следе части пластинки, расположенной над верхней поверхностью. Напомним,



Фиг. 30.22



Фиг. 30.23

что  $v = +\gamma U_\infty$  на части пластинки, расположенной под нижней поверхностью (см. раздел 30.3.1). Применяя соотношение (16.87) и замечая, что на конусе Маха  $v = 0$ , получим

$$\gamma U_\infty = -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка}}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) df. \quad (30.46)$$

В соответствии с преобразованиями (30.43), предыдущая формула примет вид

$$\begin{aligned} \gamma U_\infty = & -\operatorname{Re} \int_{h_1}^{1/B_1} \left[ \frac{i\alpha U_\infty}{\pi B} - i \frac{M}{2} \frac{(h_1 - 1/B_1) X - 2h_1 B_1}{X^2} \right] \times \\ & \times \frac{dX}{(X + h_1) \sqrt{(X - h_1)(X - 1/B_1)}}, \end{aligned} \quad (30.47)$$

или, так как  $X = Y$  на действительной оси,

$$\begin{aligned} \gamma U_\infty = & -\int_{h_1}^{1/B_1} \left[ \frac{\alpha U_\infty}{\pi B} - \frac{M}{2} \frac{(h_1 - 1/B_1) Y - 2h_1/B_1}{Y^2} \right] \times \\ & \times \frac{dY}{(Y + h_1) \sqrt{(1/B_1 - Y)(Y - h_1)}}. \end{aligned} \quad (30.48)$$

После необходимых расчетов получим окончательное выражение для коэффициента  $M$

$$M = -\frac{2U_\infty}{\pi} \left( \gamma + \frac{\alpha}{B} \right) \frac{hB}{1 + hB}. \quad (30.49)$$

30.4.1. Вычисление подъемной силы. Коэффициент давления определяется, согласно уравнению (5.28), формулой

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \approx -\frac{2u}{U_\infty}.$$

Обозначая через  $C_{ps}$  и  $C_{pi}$  ( $C_{ps} = -C_{pi}$ ) коэффициенты давления для верхней и нижней поверхностей крыла и площадь области 2 через  $S_2 = \frac{1}{2B}$ , коэффициент подъемной силы  $C_{z2}$  для этой области можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \int_{S_2} (C_{pi} - C_{ps}) d\sigma = -2 \int_{S_2} C_{ps} d\sigma = U_\infty^{-2} \int_{S_2} u d\sigma, \quad (30.50)$$

где  $u$  — скорость на верхней поверхности крыла, выраженная через действительную часть функции (30.44).

Заменяя  $d\sigma$  через  $\frac{dy}{2}$  (фиг. 30.23), получим соотношение

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{4}{U_\infty} \int_{S_2} u d\sigma = \frac{2}{U_\infty} \int_0^{1/B} u dy, \quad (30.51)$$

которое, в согласии с формулами (30.43) и предположением, что  $du' = 0$  на крыле, последовательно примет вид

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{2}{U_\infty} \int_0^{1/B} u dy = \frac{2}{U_\infty} \left[ yu \Big|_{y=0}^{y=1/B} - \int_{x=0}^{x=1/B} x df \right] = \frac{2}{U_\infty} \left[ \frac{\alpha U_\infty}{B^2} - \int_{x=0}^{x=1/B} x df \right]. \quad (30.52)$$

Произведем подсчет интеграла, представляющего последний член:

$$\int_{x=0}^{x=1/B} x df = \int_{Y=h_1}^{Y=1/B_1} \left[ \frac{\alpha U_\infty}{B} + \frac{\gamma U_\infty + \frac{\alpha U_\infty}{B}}{\pi} \frac{h_1}{h_1 + 1/B_1} \left( \frac{h_1 - 1/B_1}{Y} - \frac{2h_1/B_1}{Y^2} \right) \right] \times \\ \times \frac{(Y - h_1) dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y - h_1)}} = \frac{\alpha U_\infty (1 - h_1 B_1)^2}{2B B_1 (1 + h_1 B_1)} - \gamma U_\infty \frac{h_1 (1 - h_1 B_1)}{1 + h_1 B_1}; \quad (30.53)$$

отсюда

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{2}{U_\infty} \left[ \frac{\alpha U_\infty}{B^2} - \frac{\alpha U_\infty (1 - h_1 B_1)^2}{2B B_1 (1 + h_1 B_1)} - \frac{\gamma U_\infty h_1 (h_1 B_1 - 1)}{1 + h_1 B_1} \right]. \quad (30.54)$$

В силу соотношений

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2 B^2}}, \quad \frac{1}{B_1} = \frac{1}{B \sqrt{1 - h^2 B^2}},$$

получим

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = 2 \left[ \frac{\alpha}{B^2} - \frac{\alpha}{2B^2} \left( \frac{1 - hB}{1 + hB} \right)^{3/2} + \frac{\gamma h}{1 + hB} \left( \frac{1 - hB}{1 + hB} \right)^{1/2} \right]. \quad (30.55)$$

В области 1, площадь которой

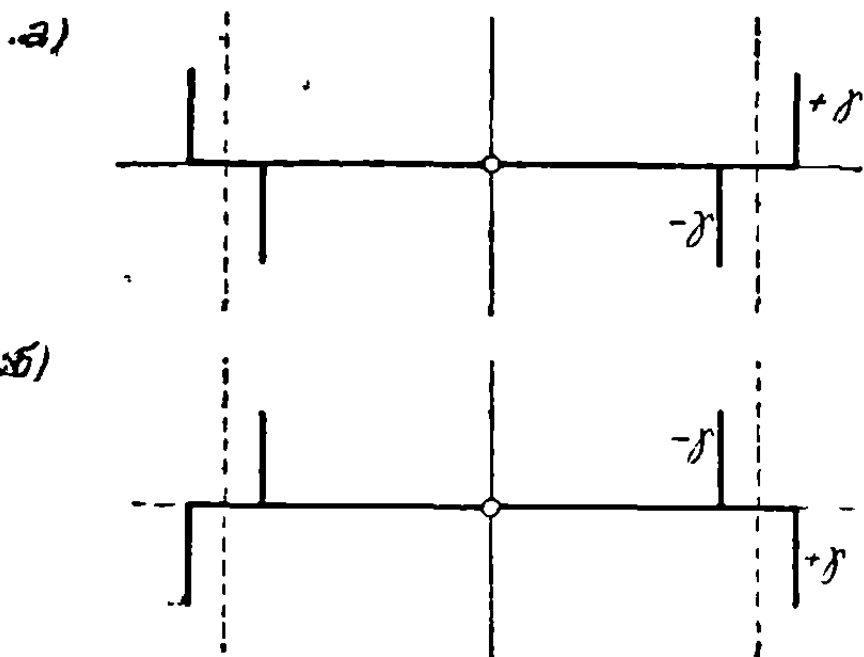
$$S_1 = b - \frac{1}{2B}, \quad (30.56)$$

коэффициент подъемной силы  $C_{z1}$  будет

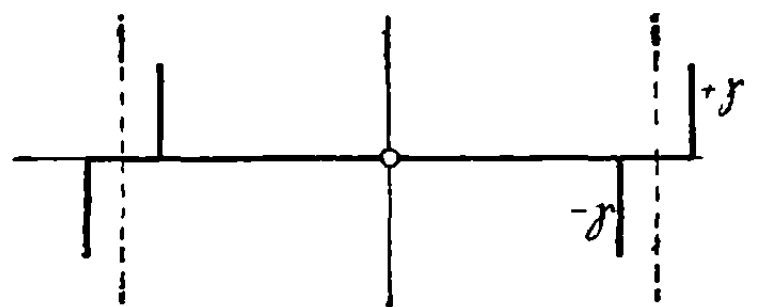
$$\left(b - \frac{1}{2B}\right) C_{z1} = \frac{4\alpha}{B} \left(b - \frac{1}{2B}\right). \quad (30.57)$$

Коэффициент полной подъемной силы  $C_z$  для всего крыла выражается соотношением

$$bC_z = \left(b - \frac{1}{2B}\right) C_{z1} + \frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{4ab}{B} - \frac{\alpha}{B^2} \left(\frac{1-hB}{1+hB}\right)^{3/2} + \frac{2\gamma h}{1+hB} \left(\frac{1-hB}{1+hB}\right)^{1/2}. \quad (30.58)$$



Фиг. 30.24



Фиг. 30.25

Угол атаки  $\gamma$  пластинки рассматривается положительным или отрицательным, в соответствии с тем, как показано на фиг. 30.24, а и б.

Пунктирные линии показывают положение пластинок при нулевом угле атаки. В случае, изображенном на фиг. 30.25, влияние углов атаки  $\gamma$  взаимно погашается, так что

$$bC_z = \frac{4\alpha b}{B} - \frac{\alpha}{B^2} \left(\frac{1-hB}{1+hB}\right)^{3/2}, \quad (30.59)$$

как в случаях пластинок при нулевом угле атаки.

**30.4.2. Вычисление лобового сопротивления.** Замечая, что  $2S_d = h$  представляет площадь одной пластинки, и обозначая через  $C_y$  соответствующий коэффициент поперечной силы, а через  $C_z$  коэффициент полной подъемной силы крыла, получим для коэффициента лобового сопротивления системы крыло-пластинка, обозначаемого через  $C_x$ , соотношение

$$bC_x = \alpha b C_z + h\gamma C_y. \quad (30.60)$$

Обозначая через  $C_{pd}$  и  $C'_{pd}$  коэффициенты давления на внутренней и внешней сторонах пластинки (фиг. 30.26), последовательно получим

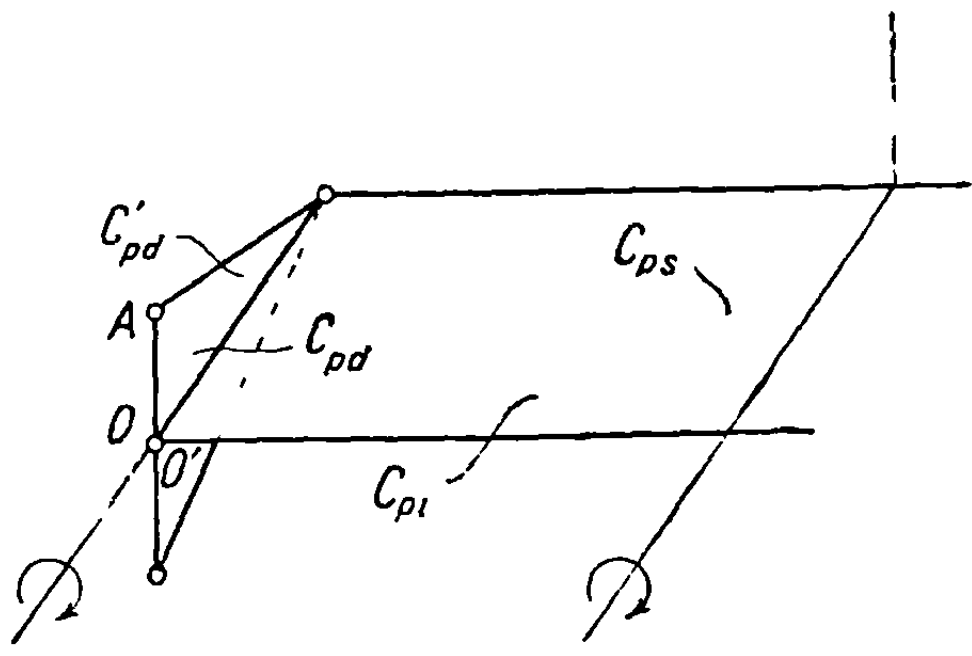
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h C_y &= \int_{S_d} (C'_{pd} - C_{pd}) d\sigma = \int_0^h (C'_{pd} - C_{pd}) \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \left[ \int_0^h C'_{pd} dz - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^h C_{pd} dz \right] = -U_\infty^2 \int_{OAO'} u dz, \end{aligned} \quad (30.61)$$

причем  $u$  — действительная часть функции (30.44).

В согласии с геометрическим преобразованием (16.69), получим уравнение

$$\int_{OAO'} u dz = \int_{OAO'} u d \frac{\zeta}{\sqrt{1+B^2\zeta^2}} = -i \int_{\overline{OAO'}} f d \frac{x}{\sqrt{1-B^2x^2}}. \quad (30.62)$$

С помощью дальнейших преобразований (30.43) из предыдущего выражения выводятся интегралы



$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{\sqrt{(Y+1/B_1)(h_1-Y)}},$$

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y-1/B_1)\sqrt{(Y+1/B_1)(h_1-Y)}},$$

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y+1/B_1)\sqrt{(Y+1/B_1)(h_1-Y)}}. \quad (30.63)$$

Фиг. 30.26

После вычислений получим окончательный результат

$$\frac{1}{2} h C_y = \frac{2\alpha^*}{\pi B^2} \left[ \arccos \sqrt{\frac{1-hB}{1+hB}} + (1-hB) \sqrt{2(1-hB)} \arccos \frac{1-hB}{1+hB} + \frac{hB \sqrt{2hB(1-hB)}}{1+hB} \right] + \frac{2\gamma h}{\pi} \sqrt{2(1-hB)} \left[ \frac{\sqrt{hB}}{1+hB} - \arccos \frac{1-hB}{1+hB} \right]. \quad (30.64)$$

Вводя коэффициенты  $C_z$  и  $C_y$  в формулу (30.60), находим выражение для лобового сопротивления системы крыло—пластинка.

**30.4.3. Вычисление момента крена.** Использованные обозначения сохраняются и здесь; кроме того, введем следующие обозначения:

- $C_l$  — момент крена системы крыло—пластинка;
- $C_{ld}$  — момент крена пластинки относительно ее оси;
- $C_{l2}$  — коэффициент момента области 2 относительно оси пластинки;
- $b_1$  — расстояние от центра тяжести области 1 до оси крыла.

Для вычисления момента крена для половины пластинки имеем

$$\frac{h}{2} h C_{ld} = \frac{2}{3} \int_0^h (C'_{pd} - C_{pd}) z \frac{dz}{2} = -\frac{2}{3U_\infty} \int_{OAO'} u z dz = \frac{1}{3U_\infty} \int_{\overline{OAO'}} f d \frac{x^2}{1-B^2x^2}. \quad (30.65)$$

Применяя преобразования (30.43), сводим подсчет интеграла в последнем уравнении к вычислению следующих интегралов:

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{\sqrt{(1/B_1-Y)(Y+h_1)}}, \quad \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y-1/B_1)\sqrt{(1/B_1-Y)(Y+h_1)}},$$

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y+1/B_1)\sqrt{(1/B_1-Y)(Y+h_1)}}, \quad \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y+1/B_1)^2\sqrt{(1/B_1-Y)(Y+h_1)}}. \quad (30.66)$$

После расчетов получим

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} hC_{1d} = & \frac{\alpha}{3\pi B^3} \left[ 2\arccos \sqrt{\frac{1-hB}{1+hB}} - \frac{1-3h^2B^2}{1+hB} \sqrt{2hB(1-hB)} - \right. \\ & \left. - \frac{(1-hB)(1+3hB)\sqrt{2(1-hB)}}{2} \arccos \frac{1-hB}{1+hB} \right] + \\ & + \frac{\gamma}{3\pi B^2} \frac{hB}{1+hB} \left[ (1+3hB)\sqrt{2hB(1-hB)} - \right. \\ & \left. - (1+hB)(1-3hB)\sqrt{2(1-hB)} \arccos \frac{1-hB}{1+hB} \right]. \end{aligned} \quad (30.67)$$

Приступим к вычислению момента крена области 2 относительно оси пластинки; применяя прежние преобразования, находим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2B} \cdot \frac{1}{B} C_{12} = & \frac{2}{3} \int_0^{1/B} (C_{pi} - C_{ps}) y \frac{dy}{2} = -\frac{2}{3} \int_0^{1/B} C_{ps} y dy = \\ = & \frac{4}{3U_\infty} \int_0^{1/B} u y dy = \frac{2}{3U_\infty} \int_{x=0}^{x=1/B} f dx^2 + \frac{iM}{B^2} \frac{2}{3U_\infty}. \end{aligned} \quad (30.68)$$

Продолжая эти вычисления, сведем предыдущее выражение к сумме интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_{h_1}^{1/B_1} \frac{dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y + h_1)}}, \quad \int_{h_1}^{1/B_1} \frac{Y^2 dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y + h_1)}}, \\ \int_{h_1}^{1/B_1} \sqrt{(1/B_1 - Y)(Y + h_1)} dY; \end{aligned} \quad (30.69)$$

выполнение интегрирования приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2B^2} C_{12} = & \frac{\alpha}{6\pi B^3} \left\{ \left[ 2 + \left( \frac{1-3hB}{1+hB} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{2hB}{1-hB}} + 3 \frac{1-3hB}{1-hB} \arcsin \sqrt{\frac{1-hB}{1+hB}} + 4\pi \right\} - \\ - & \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\pi B^2} \frac{hB}{1+hB} \left[ \frac{1-3hB}{1+hB} \sqrt{\frac{2hB}{1-hB}} + \frac{1+hB}{1-hB} \arcsin \sqrt{\frac{1-hB}{1+hB}} \right]. \end{aligned} \quad (30.70)$$

В случае  $h = \frac{1}{B}$  получается следующая формула путем перехода к пределу в уравнении (30.70):

$$\frac{1}{2B^2} C_{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{B^3}.$$

Момент крена для половины крыла относительно его продольной оси дается выражением

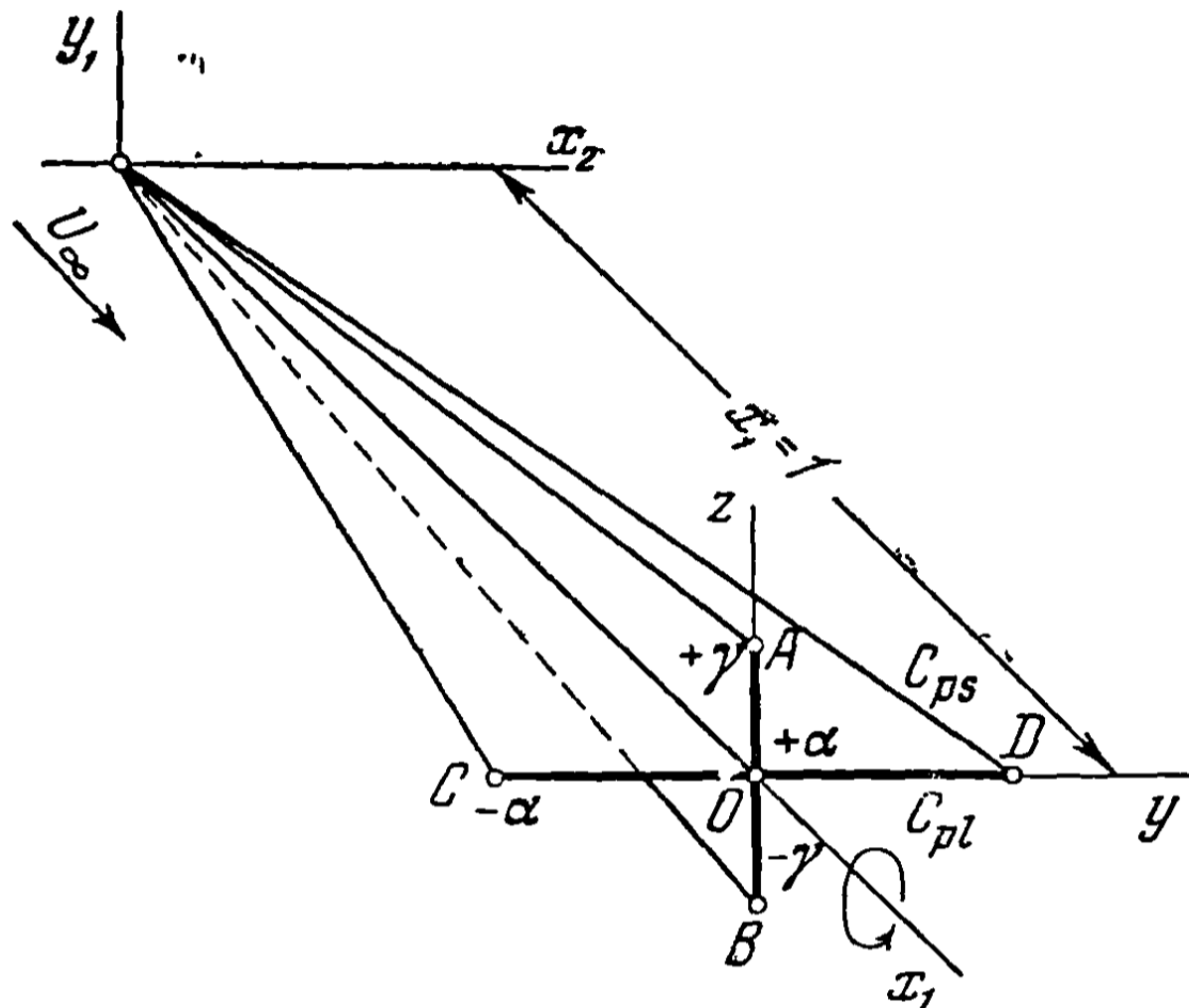
$$b \cdot b \cdot C_l = 2 \frac{h}{2} hC_{1d} + \frac{1}{2B} \cdot \frac{1}{B} C_{12} + \frac{1}{2B} bC_{z2} + \left( b - \frac{1}{2B} \right) b_1 C_{z1}, \quad (30.71)$$

где  $C_{1d}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{z2}$ ,  $C_{z1}$  определяются соответственно из формул (30.67), (30.70), (30.55), (30.57).

Если пластинки имеют постоянный угол атаки вдоль всей их высоты, то лобовое сопротивление системы крыло—пластинка больше сопротивления в случае пластинок с нулевым углом атаки. Значения подъемной силы и моментов не зависят от этого угла атаки.

### 30.5. Крестообразное крыло с асимметричным наклоном

Рассмотрим симметричное дельтообразное крыло с пластинкой, нормальной к крылу. Пусть угол атаки крыла будет  $+\alpha$  на его части справа от



Фиг. 30.27

пластинки и  $-\alpha$  слева; угол атаки пластинки будет  $+\gamma$  на верхней поверхности и  $-\gamma$  на нижней.

В физической плоскости  $Oyz$  получается конфигурация, изображенная на фиг. 30.27. Эта задача представляет специальный вид случая, изучавшегося выше (см. раздел 30.1.1).

Следовательно, применяя ряд конформных преобразований, аналогичных преобразованиям (30.4), (30.5), (30.6), замечая, что  $L_1 = L_2 = L$ , получим соотношения

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad X^2 = x^2 + h_1^2, \quad X = \frac{L}{2} \left( \chi + \frac{1}{\chi} \right), \quad (30.72)$$

причем, если  $2h$  представляет высоту следа пластинки и  $2l$  длину следа крыла, то

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2 h^2}}, \quad L^2 = l^2 + h_1^2. \quad (30.73)$$

Задача, таким образом, ставится в плоскости  $\chi$ . Комплексный потенциал, выведенный в этой плоскости с помощью гидродинамической аналогии, является потенциалом, обусловленным системой диполей, распределенных так, как показано на фиг. 30.28, т. е.

$$u + iu' = f(\chi) = iM \left( \frac{1}{\chi - 1} - \frac{1}{\chi + 1} \right) + N \left( \frac{1}{\chi - i} - \frac{1}{\chi + i} \right), \quad (30.74)$$



или, возвращаясь к плоскости  $x$ , определенной первым преобразованием (30.72), получим

$$u + iu' = f = i \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}}. \quad (30.75)$$

Для определения постоянных  $a$  и  $b$  служат соотношения

$$\alpha U_\infty = \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{крыло } (0, l)}^{\text{окружность Маха}} i \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df,$$

$$\gamma U_\infty = - \frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) df. \quad (30.76)$$

Они получаются в предположении, что  $w = -\alpha U_\infty$  на части крыла справа от пластинки и что  $v = -\gamma U_\infty$  на пластинке, расположенной над верхней поверхностью крыла.

Легко показать, что, определяя значения постоянных таким образом, мы автоматически получим равенство  $w = \alpha U_\infty$  на части крыла слева от пластинки и  $v = \gamma U_\infty$  на пластинке, расположенной под нижней поверхностью крыла.

Докажем с этой целью правильность соотношений, аналогичных равенству (30.35):

$$w(\eta, \zeta) = -w(-\eta, \zeta), \quad v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \quad (30.77)$$

На основании формулы (30.74) можно записать уравнения

$$f(\chi) = -\overline{f(\overline{\chi})}, \quad f(\chi) = f(-\chi); \quad (30.78)$$

взяв действительную часть уравнения (16.88), получим

$$dw = -\frac{B}{2} \left[ \eta \left( 1 - \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2} \right) du' + \zeta \left( 1 + \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2} \right) du \right]; \quad (30.79)$$

отсюда

$$dw(\eta, \zeta) = -dw(-\eta, \zeta). \quad (30.80)$$

Интегрируя и налагая условие  $w = 0$  на конусе Маха, имеем

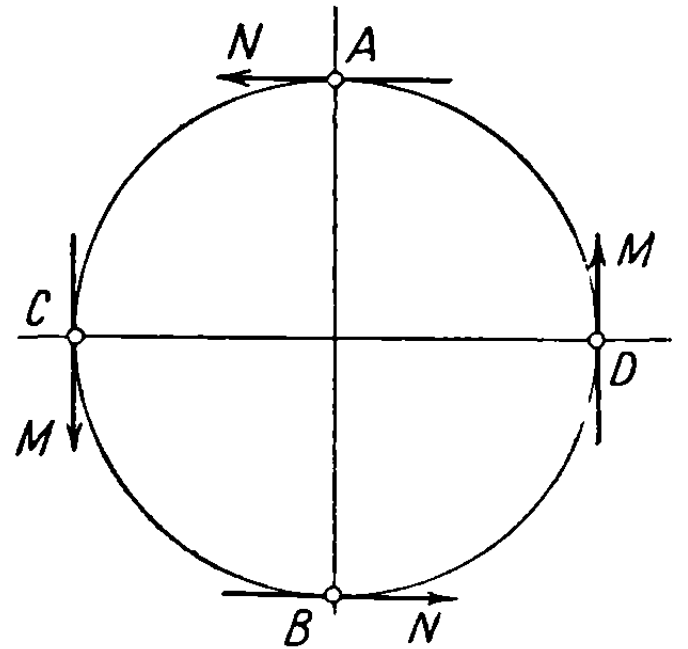
$$w(\eta, \zeta) = -w(-\eta, \zeta). \quad (30.81)$$

Точно так же из формул (30.78) и (16.87), поскольку на конусе Маха  $v = 0$ , следует

$$v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \quad (30.82)$$

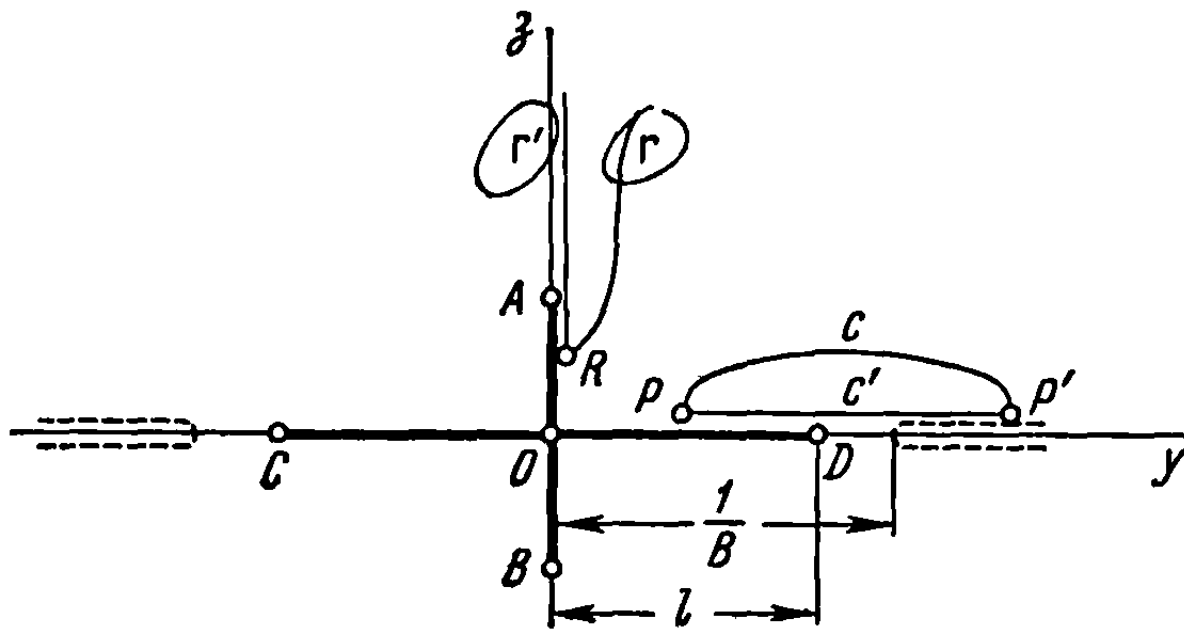
Для определения постоянных  $a$  и  $b$  нужно вычислить интегралы в формулах (30.76).

Так, первая из указанных формул может быть последовательно записана следующим образом:



Фиг. 30.28

$$\begin{aligned}
\alpha U_\infty &= \operatorname{Re} \int_{\text{крыло } (0, l)}^{\text{окружность Маха}} \frac{iB}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) df = \\
&= \operatorname{Re} \left[ \frac{iB}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) f \right]_{\text{крыло } (0, l)}^{\text{окружность Маха}} - \frac{iB}{2} \int_{\text{крыло } (0, l)}^{\text{окружность Маха}} f d \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right). \quad (30.83)
\end{aligned}$$



Фиг. 30.29

Первый член в последнем уравнении равен нулю, так как на окружности Маха ( $\xi = e^{i\theta}$ )

$$\operatorname{Re} \frac{iB}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) f = \operatorname{Re} \frac{iB}{2} iu' 2i \sin\theta = 0, \quad (30.84)$$

а на крыле ( $\xi = \eta$ )

$$\operatorname{Re} \frac{iB}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) f = \operatorname{Re} \frac{iB}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) u = 0. \quad (30.85)$$

Применяя уравнение (30.75) и первое из преобразований (30.72), получим (фиг. 30.29)

$$\begin{aligned}
\alpha U_\infty &= - \operatorname{Re} \int_{\text{крыло } (0, l)}^{\text{окружность Маха}} f d \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) = \operatorname{Re} \int_{PcP'} \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - B^2 x^2}} = \\
&= \operatorname{Re} \int_{Pc'P'} \frac{(ax^2 + b) dx}{x^2 \sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)(1 - B^2 x^2)}}. \quad (30.86)
\end{aligned}$$

Так как точки  $x = l$  и  $x = \frac{1}{B}$ , лежащие на контуре  $Pc'P'$ , являются интегрируемыми особенностями предыдущего выражения и так как интегралы вдоль частей крыла и окружности Маха чисто мнимые, имеем

$$\alpha U_\infty = \frac{1}{B} \int_l^{1/B} \frac{(ay^2 + b) dy}{y^2 \sqrt{(y^2 - l^2)(y^2 + h_1^2)(1/B^2 - y^2)}}. \quad (30.87)$$

Применяя преобразование

$$y_2 = \frac{l^2}{1 - (1 - B^2 l^2) \sin^2 \varphi} \quad (30.88)$$

и выполняя расчеты, получим первое соотношение между двумя постоянными  $a$  и  $b$

$$\alpha U_\infty = \frac{a}{\sqrt{l^2 + h_1^2}} K_1 + \frac{b}{h_1^2} \left[ \frac{\sqrt{l^2 + h_1^2}}{l^2} E_1 - \frac{K_1}{\sqrt{l^2 + h_1^2}} \right], \quad (30.89)$$

где  $K_1$  и  $E_1$  — эллиптические интегралы первого и второго рода, модуль которых  $k_1$  определяется равенством

$$k_1^2 = \frac{h_1^2 (1 - B^2 l^2)}{l^2 + h_1^2} = \frac{h^2 (1 - B^2 l^2)}{l^2 + h^2 (1 - B^2 l^2)}. \quad (30.90)$$

Вторая формула (30.76) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma U_\infty &= -\frac{B}{2} \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) d\xi = -\operatorname{Re} \int_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} \frac{d\xi}{x} = \\ &= -\operatorname{Re} \left[ \frac{f}{x} \Big|_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} + \int_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} f \frac{dx}{x^2} \right]. \end{aligned} \quad (30.91)$$

Замечая, что

$$\operatorname{Re} \frac{f}{x} \Big|_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} = 0, \quad (30.92)$$

получим

$$\gamma U_\infty = \operatorname{Re} \int_{\text{пластинка } (0, ih)}^{\text{окружность Маха}} f \frac{dx}{x^2} = -\operatorname{Re} \int_{R\Gamma_\infty} i \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \frac{dx}{x^2}; \quad (30.93)$$

интегрируя вдоль оси ординат, будем иметь

$$\gamma U_\infty = -\operatorname{Re} \int_{R\Gamma_\infty} i \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \frac{dx}{x^2} = \int_{h_1}^{\infty} \frac{a\zeta^2 - b}{\sqrt{(\zeta^2 + l^2)(\zeta^2 - h_1^2)}} \frac{d\zeta}{\zeta^2}. \quad (30.94)$$

Применяя преобразование

$$\zeta^2 = \frac{h_1^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{h^2}{(1 - B^2 h^2) \cos^2 \varphi} \quad (30.95)$$

и выполняя все вычисления, получим вторую зависимость между постоянными  $a$  и  $b$ :

$$\gamma U_\infty = \frac{a}{\sqrt{l^2 + h_1^2}} K_2 - \frac{b}{l^2} \left[ \frac{\sqrt{h_1^2 + l^2}}{h_1^2} E_2 - \frac{K_2}{\sqrt{h_1^2 + l^2}} \right], \quad (30.96)$$

где  $K_2$  и  $E_2$  — эллиптические интегралы первого и второго рода, модуль которых  $k_2$  определяется из соотношения

$$k_2^2 = \frac{l^2}{h_1^2 + l^2} = \frac{l^2 (1 - B^2 h^2)}{h^2 + l^2 (1 - B^2 h^2)}. \quad (30.97)$$

После решения системы уравнений (30.89) и (30.96) получаются следующие значения для  $a$  и  $b$  как функций от углов атаки  $\alpha$ ,  $\gamma$  и длин  $h$ ,  $l$ :

$$\frac{a(\alpha, \gamma, h, l)}{U_\infty} = \frac{\gamma [(h_1^2 + l^2) E_1 - l^2 K_1] + \alpha [(h_1^2 + l^2) E_2 - h_1^2 K_2]}{\sqrt{h_1^2 + l^2 (K_1 E_2 + K_2 E_1 - K_1 K_2)}}, \quad (30.98a)$$

$$\frac{b(\alpha, \gamma, h, l)}{U_\infty} = \frac{h_1^2 l^2 (\alpha K_2 - \gamma K_1)}{\sqrt{h_1^2 + l^2 (K_1 E_2 + K_2 E_1 - K_1 K_2)}}. \quad (30.98b)$$

30. 5. 1. Вычисление момента крена. Пусть  $C_{la}$  и  $C_{ld}$  обозначают моменты крена для крыла и пластинки соответственно.

Величина  $C_{la}$  определяется равенством

$$\frac{l}{2} l C_{la} = \frac{2}{3} \int_0^l (C_{pi} - C_{ps}) y \frac{dy}{2} = \frac{2}{3U_\infty} \int_0^{y=l} u dy^2 = \frac{2}{3U_\infty} \int_0^{y=l} \frac{(ay^2 + b) dy^2}{\sqrt{(l^2 - y^2)(y^2 + h_1^2)}}, \quad (30.99)$$

где  $u$  представляет значение скорости возмущения  $u$  на верхней поверхности крыла.

После проведения необходимых вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{2} C_{la} &= \frac{2}{3U_\infty} \left[ alh_1 + \left( a \frac{l^2 - h_1^2}{2} + b \right) \arccos \frac{h_1^2 - l^2}{h_1^2 + l^2} \right] = \\ &= \frac{2}{3U_\infty} \left\{ \frac{a(\alpha, \gamma, h, l) lh}{\sqrt{1 - h^2 B^2}} + [a(\alpha, \gamma, h, l) \frac{l^2 - h^2 - l^2 h^2 B^2}{2(1 - h^2 B^2)} + \right. \\ &\quad \left. + b(\alpha, \gamma, h, l)] \arccos \frac{h^2 - l^2 + l^2 h^2 B^2}{h^2 + l^2 - l^2 h^2 B^2} \right\}, \quad (30.100) \end{aligned}$$

где значения постоянных  $a$  и  $b$  определяются из соотношений (30.98). Заменяя в уравнении (30.100)  $\alpha$  через  $-\gamma$  и  $l$  через  $-h$  и соответственно  $\gamma$  через  $-\alpha$  и  $h$  через  $-l$ , получим момент крена пластинки

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} C_{ld} &= \frac{2}{3U_\infty} \left\{ \frac{a(\gamma, \alpha, l, h) hl}{\sqrt{1 - l^2 B^2}} + [a(\gamma, \alpha, l, h) \frac{h^2 - l^2 - l^2 h^2 B^2}{2(1 - l^2 B^2)} + \right. \\ &\quad \left. + b(\gamma, \alpha, l, h)] \arccos \frac{l^2 - h^2 + l^2 h^2 B^2}{h^2 + l^2 - l^2 h^2 B^2} \right\}. \quad (30.101) \end{aligned}$$

Если  $l = h$  и  $\alpha = \gamma$ , то

$$\frac{l^2}{2} C_l = \frac{2\alpha}{3U_\infty} \frac{l^3 \sqrt{2 - l^2 B^2}}{K \left[ \frac{1 - l^2 B^2}{2 - l^2 B^2} \right]} \left[ \frac{1}{1 - l^2 B^2} - \frac{l^2 B^2}{2(1 - l^2 B^2)^{3/2}} \arccos \frac{l^2 B^2}{2 - l^2 B^2} \right]. \quad (30.102)$$

### 31. КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ДЕЛЬТООБРАЗНЫМ КРЫЛЬЯМ

Рассмотрим систему прямоугольных осей  $Ox_1 x_2 x_3$  и пусть  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  будет потенциал скорости некоторого заданного течения; будем называть это течение коническим течением порядка  $n$ , если  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  будет однородной функцией порядка  $n$ . В этом случае производная порядка  $n$  от потенциала  $\Phi$  по переменным  $x_1, x_2, x_3$  постоянна вдоль радиуса-вектора,

исходящего из начала координат, и поэтому является однородной функцией нулевого порядка. Таким образом, исследование конических течений любого порядка связано с анализом однородных функций того же порядка. Эта задача широко изучалась в указанном направлении Жерменом [11] и некоторыми другими авторами [12—16]. Работы Жермена, составляющие теоретическую основу для изучения конических течений высшего порядка, цитируются особо.

Указанная задача рассмотрена ниже с точки зрения практических применений путем использования простого и непосредственного метода, основанного на гидродинамической аналогии, приложенного ранее к случаю конических течений первого порядка.

### 31.1. Предварительные замечания

Пусть  $\Phi_{p,q,r}$  обозначает частную производную порядка  $(p + q + r)$  однородной функции  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  порядка  $n$ , а именно порядка  $p$  по переменной  $x_1$ , порядка  $q$  по переменной  $x_2$  и порядка  $r$  по переменной  $x_3$ ; следовательно,

$$\Phi_{p,q,r} = \frac{\partial^{p+q+r}\Phi}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^q \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^r \Phi. \quad (31.1)$$

В общем случае  $p + q + r < n$ ; если  $p + q + r = n$ , то  $\Phi_{p,q,r}$  будет однородной функцией нулевого порядка, представляющей, таким образом, коническое течение, понимаемое в обычном смысле.

Из теоремы Эйлера для однородных функций, используя обычные символы, получим соотношение

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^k \Phi, \quad (31.2a)$$

$$n! \Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n \Phi, \quad (31.2b)$$

где  $k < n$ .

Полагая

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1} \quad (31.3)$$

и замечая, что в этом случае может быть записано соотношение

$$n! \Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n \Phi, \quad (31.4)$$

получим как следствие, что функция

$$\frac{n! \Phi}{x_1^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n \Phi \quad (31.5)$$

будет однородной функцией нулевого порядка.

Скорости возмущения

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Phi_{1,0,0}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi_{0,1,0}, \quad \omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \Phi_{0,0,1} \quad (31.6)$$

являются однородными функциями порядка  $(n-1)$ .

Таким образом, в силу соотношения (31.5):

$$(n-1)! \frac{u}{x_1^{n-1}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{n-1} u, \quad (31.7a)$$

$$(n-1)! \frac{v}{x_1^{n-1}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{n-1} v, \quad (31.7б)$$

$$(n-1)! \frac{w}{x_1^{n-1}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{n-1} w, \quad (31.7в)$$

причем эти равенства также определяют однородные функции нулевого порядка.

Исходя из функций (31.6), определим производные порядка  $(n-1)$  в плоскости  $x_3 = 0$ , полагая

$$u_{nq} = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{n-q-1} \partial x_2^q} = \Phi_{n-q, q, 0}, \quad (31.8a)$$

$$v_{nq} = \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x_1^{n-q-1} \partial x_2^q} = \Phi_{n-q-1, q+1, 0}, \quad (31.8б)$$

$$w_{nq} = \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x_1^{n-q-1} \partial x_2^q} = \Phi_{n-q-1, q, 1}, \quad (31.8в)$$

так как в плоскости  $x_3 = 0$  можно в соотношениях (31.7) приравнять  $z$  нулю, то, используя выражения (31.8), получим:

$$\frac{(n-1)! u}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q u_{nq} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q, q, 0}, \quad (31.9a)$$

$$\frac{(n-1)! v}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q v_{nq} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q-1, q+1, 0}, \quad (31.9б)$$

$$\frac{(n-1)! w}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q w_{nq} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q-1, q, 1}, \quad (31.9в)$$

где  $C_{n-1}^q$  представляют биномиальные коэффициенты. Эти однородные функции нулевого порядка определяют, следовательно, значения выражений (31.7) в плоскости  $x_3 = 0$ .

В плоскости  $\xi$  Буземана (см. раздел 16.3) каждая функция  $\Phi_{p,q,r}$ , для которой  $p + q + r = n$ , является, следовательно, однородной функцией нулевого порядка и будет представлять действительную часть аналитической функции

$$F_{p,q,r} = \Phi_{p,q,r} + i\Phi'_{p,q,r}, \quad (31.10)$$

где  $\Phi'_{p,q,r}$  — сопряженная гармоническая функция.

Замечая, что  $y$  на крыле является действительной частью комплексной переменной  $x = y + iz$  новой вспомогательной плоскости, причем (см. формулу 24.57)

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \quad (31.11)$$

и заменяя  $y$  через  $x$ , приведем соотношения (31.9), которые справедливы только на крыльях, к виду:

$$\frac{(n-1)! u}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q,q,0}, \quad (31.12a)$$

$$\frac{(n-1)! v}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q-1,q+1,0}, \quad (31.12б)$$

$$\frac{(n-1)! w}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q-1,q,1}. \quad (31.12в)$$

Функции  $F_{n-q,q,0}$ ,  $F_{n-q-1,q+1,0}$ ,  $F_{n-q-1,q,1}$  связаны друг с другом установленными ниже двумя соотношениями совместности, так что задача может быть полностью решена, если известны, например, функции  $F_{n-q,q,0}$ .

Рассмотрим связь между приведенными выше рассуждениями и теорией крыла. Предположим, что треугольное крыло в первом приближении содержится в плоскости  $Ox_1x_2$ . Если обозначить ординату точки на поверхности крыла через  $x_3$ , то наклон профиля в любом частном сечении  $x_2 = \text{const}$  будет

$$\tau = \tau(x_1, x_2) = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \quad (31.13)$$

причем он зависит от  $x_1$  и  $x_2$ .

Наклон  $\tau$ , как и ордината  $x_3$ , предполагаются, конечно, достаточно малыми, чтобы можно было применить метод малых возмущений. При этих условиях, если  $U_\infty$  — скорость свободного потока, компонента скорости вдоль  $Ox_3$  будет

$$\omega = U_\infty \tau(x_1, x_2); \quad (31.14)$$

в силу принятых гипотез, она может быть представлена в виде суммы однородных функций порядка  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Любая из этих однородных функций может быть выражена в форме (31.9в); таким образом, этим функциям соответствуют конические течения порядка  $1, 2, 3, \dots, n$ . Общее течение вокруг любого треугольного крыла состоит из суммы конических течений различных порядков.

Процедура, которой нужно следовать в каждом отдельном случае, будет показана ниже.

Поступая с целью упрощения, как в случае конического течения первого порядка, отделим влияние толщины крыла от влияния скелета, разлагая крыло на две части: треугольное крыло с симметрично распределенной толщиной относительно плоскости  $x_3 = 0$ , в которой оно расположено, и тонкое крыло, составляющее скелет физического крыла, ординаты которого относительно той же плоскости являются средними значениями ординат нижней и верхней поверхностей. Для симметричного крыла наклон элемента симметричного профиля обозначим по-прежнему через  $\gamma = \gamma(x_1, x_2)$ , а для скелета угол атаки элемента тонкого профиля через  $\sigma = \alpha(x_1, x_2)$ . Предыдущие замечания относительно  $\tau$  могут быть повторены отдельно для  $\gamma$  и  $\alpha$ .

### 31.2. Соотношения совместности

Рассмотрим одну из производных функции  $\Phi$  порядка  $(n - 1)$ , например,

$$\Phi_{n-1,0,0} = \frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x_1^{n-1}}, \quad (31.15)$$

и заметим, что последняя представляет потенциал обычного конического течения первого порядка.

Скорости, выводимые из этого потенциала,

$$u_n = \frac{\partial \Phi_{n-1,0,0}}{\partial x_1} = \Phi_{n,0,0}, \quad (31.16a)$$

$$v_n = \frac{\partial \Phi_{n-1,0,0}}{\partial x_2} = \Phi_{n-1,1,0}, \quad (31.16b)$$

$$w_n = \frac{\partial \Phi_{n-1,0,0}}{\partial x_3} = \Phi_{n-1,0,1} \quad (31.16в)$$

являются однородными функциями нулевого порядка со всеми соответствующими свойствами.

Движение, представляемое потенциалом  $\Phi_{n-1,0,0}$  будет безвихревым, поэтому соответствующие скорости должны удовлетворять вытекающим из этого свойства соотношениям, аналогичным (16.87) и (16.88).

Поскольку выражения (31.16) представляют действительную часть аналитических функций  $F_{n,0,0}$ ,  $F_{n-1,1,0}$ ,  $F_{n-1,0,1}$ , которые играют роль функций  $f(\xi)$ ,  $g(\xi)$  и  $h(\xi)$  собственно конического течения (см. формулы 16.74), можно аналогично записать следующие соотношения:

$$-dF_{n,0,0} = \frac{2}{B} \frac{\xi}{\xi^2 + 1} dF_{n-1,1,0} = \frac{2}{B} \frac{i\xi}{\xi^2 - 1} dF_{n-1,0,1}. \quad (31.17)$$

Проведенную операцию можно повторить для любой другой производной порядка  $(n - 1)$  от  $\Phi$ , например, для  $\Phi_{n-2,1,0}$ , в результате чего получаются соответствующие производные  $\Phi_{n-1,1,0}$ ,  $\Phi_{n-2,2,0}$ ,  $\Phi_{n-2,1,1}$  и заключительные соотношения

$$-dF_{n-1,1,0} = \frac{2}{B} \frac{\xi}{\xi^2 + 1} dF_{n-2,2,0} = \frac{2}{B} \frac{i\xi}{\xi^2 - 1} dF_{n-2,1,1}. \quad (31.18)$$

Продолжая указанные действия последовательно для всех рассматриваемых производных, можно легко вывести, что все приведенные соотношения, называемые *соотношениями совместности* [11], можно получить из выражения

$$(-1)^{q+r} \left( \frac{2}{B} \frac{\xi}{\xi^2 + 1} \right)^q \left( \frac{2}{B} \frac{i\xi}{\xi^2 - 1} \right)^r dF_{n-q-r,q,r}, \quad (31.19)$$

которое одинаково для любых целых чисел  $q$  и  $r$ , подчиняющихся условию  $0 \leq q + r \leq n$ .

В плоскости  $x = y + iz$ , определенной равенством (31.11), то же выражение может быть записано в форме

$$(-1)^{q+r} \left( \frac{ix}{\sqrt{1 - B^2 x^2}} \right)^r dF_{n-q-r,q,r}. \quad (31.20)$$



Возвращаясь к соотношениям (31.12), замечаем, что функции  $F_{n-q,q,0}$ ,  $F_{n-q-1,q+1,0}$ ,  $F_{n-q-1,q,1}$  связаны друг с другом соотношениями совместности

$$-dF_{n-q,q,0} = x dF_{n-q-1,q+1,0} = -\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{n-q-1,q,1}, \quad (31.21)$$

определенными во вспомогательной плоскости  $x$ . Чтобы функция  $\Phi_{n-q-1,q,1}$  не имела разрыва в точке  $x=0$ , соответственно  $\xi=0$ , нужно, аналогично равенству (24.25), поставить условие

$$dF_{n-q,q,0} = 0 \quad (x=0). \quad (31.22)$$

Соотношения (31.21) часто используются ниже для определения некоторых постоянных задачи. Поэтому надо выразить их в форме, более удобной для применения. Заменяя  $F_{n-q,q,0}$  через функцию  $F_{n,0,0}$  или  $F_{1,n-1,0}$  путем применения условия (31.20), получим

$$dF_{n,0,0} = (-1)^{n-1} x^{n-1} dF_{1,n-1,0} = (-1)^q \frac{ix^{q+1}}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{n-q-1,q,1}. \quad (31.23)$$

По тем же соображениям, которые привели к условию (31.22), необходимо, чтобы дифференциал  $dF_{n,0,0}$  содержал по крайней мере множитель  $x^{q+1}$ ; замечая, что максимальная величина  $q$  равна  $(n-1)$ , получим как следствие, что дифференциал  $dF_{n,0,0}$  должен содержать множитель  $x^n$ . Если обобщить условие (31.22), то

$$\frac{dF_{n,0,0}}{dx} = x^n Q(x),$$

где функция  $Q(x)$  не содержит  $x$  как множитель в знаменателе.

На основе приведенных соображений теперь можно исследовать различные задачи, касающиеся дельтообразного крыла в сверхзвуковом потоке.

### 31.3. Применение к тонким треугольным крыльям с дозвуковыми ведущими кромками

Рассмотрим треугольное крыло, заключенное внутри конуса Маха (см. фиг. 31.1), и пусть  $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$  будет угол между касательной к профилю в точке  $P$  в сечении  $O'P$  и направлением  $O'x_1$ ; скорость на крыле ( $x_3 \approx 0$ ) вдоль направления  $Ox_3$  определим выражением

$$\frac{w}{U} = \alpha(x_1, x_2), \quad (31.24)$$

которое допускает, по предположению, разложение на несколько однородных функций порядка  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Коническое течение порядка  $n$  будет соответствовать функции, имеющей порядок  $(n-1)$ .

Определим характеристики этого течения. В общем случае однородной функции порядка  $(n-1)$  задача трудна и сложна для решения. Если функция сводится к *однородному полиному*, то задача упрощается, и соответствующее течение, рассмотренное ниже, назовем *элементарным коническим течением порядка  $n$* .

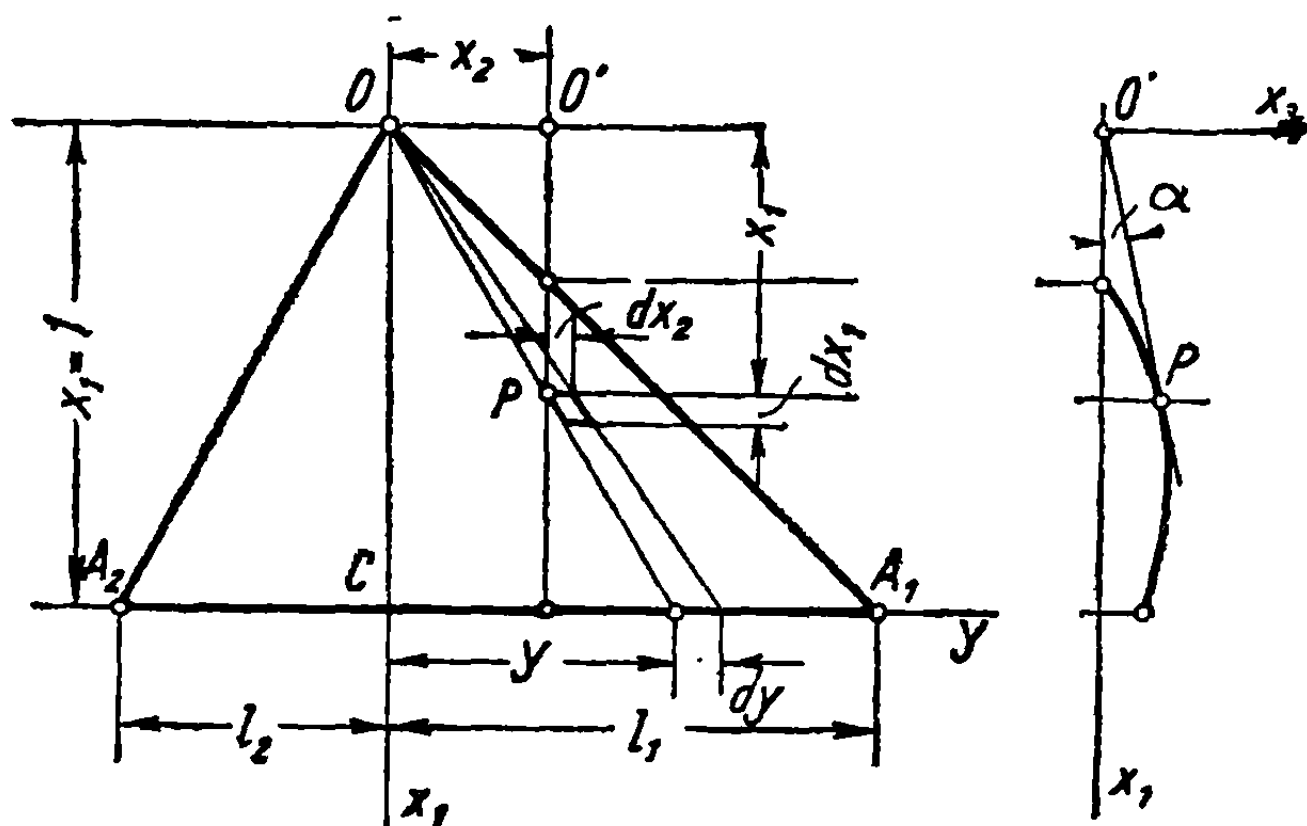
31. 3. 1. Определение осевой скорости  $u$ . Если функцию, определяющую угол атаки, представить в виде суммы однородных полиномов, то граничное условие для скорости на крыле ( $x_3 = 0$ ) может быть записано в виде

$$\frac{\omega}{U_\infty} \alpha(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(x_1, x_2), \quad (31.25)$$

где

$$\alpha_m(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^m \alpha_{m-q,q} x_1^{m-q} x_2^q, \quad (31.26)$$

причем коэффициенты  $\alpha_{m-q,q}$  постоянны.



Фиг. 31.1

Рассмотрим полином порядка  $m = n - 1$ .  
В этом случае

$$\frac{1}{x_1^{n-1}} \frac{\omega}{U_\infty} = \frac{\alpha_{n-1}}{x_1^{n-1}} = \alpha_{n-1,0} + \alpha_{n-2,1} y + \dots + \alpha_{1,n-2} y^{n-2} + \alpha_{0,n-1} y^{n-1}. \quad (31.27)$$

Отождествляя это выражение с (31.9 в), получим соотношение

$$C_{n-1}^q \Phi_{n-q-1,q,1} = (n-1)! U_\infty \alpha_{n-q-1,q}, \quad (31.28)$$

которое будет служить для определения постоянных, входящих в функции, представляющие требуемое течение.

Рассмотрим условия течения вокруг дозвуковых ведущих кромок, чтобы определить другие граничные условия. Напомним, что скорость  $u$  вблизи такой кромки стремится к бесконечности, как  $(x_1 l_1 - x_2)^{-1/2}$  в случае кромки  $OA_1$  и как  $(x_1 l_2 + x_2)^{-1/2}$  в случае кромки  $OA_2$ .

Легко видеть, что любая производная от  $u$ , порядка  $(n-1)$  относительно  $x_1$  или  $x_2$ , будет стремиться к бесконечности на обеих кромках, как  $(x_1 l_1 - x_2)^{-(n-\frac{1}{2})}$ , соответственно  $(x_1 l_2 + x_2)^{-(n-\frac{1}{2})}$ . Отсюда следует, что функция  $\Phi_{n-q,q,0}$  в уравнении (31.8а) стремится к бесконечности, как пока-

зано выше, и что аналитическая функция  $F_{n-q, q, 0}$  в выражении (31.12а), действительной частью которой является  $\Phi_{n-q, q, 0}$ , имеет то же свойство.

Из уравнения (31.21) выводится соотношение для поверхности крыла ( $x = y, \xi = 0$ )

$$d(\Phi_{n-q, q, 0} + i\Phi'_{n-q, q, 0}) = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} d(i\Phi_{n-q-1, q, 1} - \Phi'_{n-q-1, q, 1}), \quad (31.29)$$

тогда как из соотношения (31.28) очевидно, что

$$d\Phi_{n-q-1, q, 1} = 0, \quad (31.30)$$

$$d\Phi'_{n-q, q, 0} = 0,$$

так как  $\alpha_{n-q-1, q}$  постоянна.

Следовательно, для любой функции  $F_{n-q, q, 0}$ , представляющей потенциал фиктивного течения, след крыла является линией тока.

В этом случае

$$F_{n-q, q, 0} = \frac{i(a_0 + a_1 x + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1})}{(x - l_1)^{n-1} (x + l_2)^{n-1} \sqrt{(x - l_1)(x + l_2)}}, \quad (31.31)$$

где постоянные  $a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}$  действительны. В самом деле,  $F_{n-q, q, 0}$  сводится к чисто мнимой постоянной на окружности Маха или на бесконечности в плоскости  $x$ , тогда как на крыле ( $x = y, \xi = 0$ )

$$F_{n-q, q, 0} = \Phi_{n-q, q, 0} = \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_{2n-1} y^{2n-1}}{(y - l_1)^{n-1} (y + l_2)^{n-1} \sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}}; \quad (31.32)$$

тем самым удовлетворяются все граничные условия.

Так как компонента  $u$  равна нулю на окружности Маха в физической плоскости или на бесконечности во вспомогательной плоскости  $x$ , то каждый член  $F_{n-q, q, 0}$  в соотношении (31.12а) должен быть в тех же точках чисто мнимым; таким образом, подтверждаются высказанные соображения.

Если величину  $\Phi_{n-q, q, 0}$  в уравнении (31.9а) заменить ее выражением, приведенным выше, и принять во внимание, что скорость  $u$  стремится к бесконечности как  $(l_1 - y)^{-1/2} \cdot (l_2 + y)^{-1/2}$ , то знаменатель будет содержать только этот член; в таком случае общий вид формулы для скорости возмущения будет

$$u_{n-1} = \frac{u}{x_1^{n-1}} = \frac{C_0 + C_1 y + \dots + C_n y^n}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}}. \quad (31.33)$$

Предположим, что указанное выражение, справедливое на крыле, на оси абсцисс, будет действительной частью аналитической функции  $U_{n-1}$

$$U_{n-1} = \frac{-i(C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n)}{\sqrt{(x - l_1)(x + l_2)}} \quad (31.34)$$

в точках  $x = y, \xi = 0$  на крыле.

Если крыло симметрично, то, полагая  $l_1 = l_2 = l$ , приведем записанные выражения к виду

$$u_{n-1} = \frac{C_0 + C_1 y + \dots + C_n y^n}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad (31.35a)$$

$$U_{n-1} = \frac{C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n}{i\sqrt{x^2 - l^2}}. \quad (31.35б)$$

Постоянные  $C_0, C_1, \dots, C_n$ , число которых равно  $n + 1$ , получаются из следующих  $(n + 1)$  соотношений.

Из уравнений (31.25) и (31.26) очевидно, что существует  $n$  коэффициентов  $\alpha_{n-q, q}$ , из которых может быть выведено  $n$  значений  $\Phi_{n-q-1, q, 1}$ . Действительно, используя уравнение (31.23) и замечая, что одно из указанных значений определяется на крыле и что в точках, соответствующих окружности Маха, значение равно нулю, получим  $n$  уравнений вида

$$\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{n-q} i \int_{\text{окружность Маха}}^{\text{крыло}} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2x^2} dF_{1, n-1, 0}. \quad (31.36)$$

Если интегрирование производится вдоль оси  $y$ , то  $x$  заменяется через  $y$  в выражении под знаком интеграла и принимаются специальные меры предосторожности, чтобы избежать особенностей на концах крыла [15].

Часто удобнее, особенно в случае симметричных крыльев, интегрировать вдоль оси  $\xi$ ; тогда  $x$  в выражении под знаком интеграла заменяется через  $\xi$  и пределы интегрирования будут  $\xi = \infty$  и  $\xi = 0$ , как при рассмотрении простых конических течений (см. формулу 27.80).

Определение  $(n + 1)$ -й постоянной производится при помощи одного из соотношений (31.22).

Для определения функции  $F_{1, n-1, 0}$ , входящей в уравнение (31.36), необходимо заметить, что

$$\Phi_{1, n-1, 0} = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_2^{n-1}} = \frac{d^{n-1} u_{n-1}}{dy^{n-1}}; \quad (31.37)$$

принимая во внимание выражения (31.34) и (31.35б), получим

$$F_{1, n-1, 0} = \frac{d^{n-1} U_{n-1}}{dx^{n-1}}. \quad (31.38)$$

Выполняя интегрирование вдоль оси ординат и предполагая, что крыло симметрично ( $l_1 = l_2 = l$ ), будем иметь вместо уравнения (31.36) соотношение

$$\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{n-q} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{C_0 + \dots + C_nx^n}{\sqrt{x^2 - l^2}} \right) dx, \quad (31.39)$$

где  $x$  можно заменить через  $i\xi$ .

Если  $n$  велико, то расчет становится трудоемким, поэтому необходимо рассмотреть случай, когда  $n=3$ , представляющий практический интерес.

**31.3.2. Применения.** С целью упрощения разберем случай дельтообразного крыла ( $l_1 = l_2 = l$ ), принимая  $n = 3$ . При этих условиях

$$\alpha_2(x_1, x_2) = \alpha_{20}x_1^2 + \alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{02}x_2^2; \quad (31.40)$$

отсюда, применяя соотношение (31.28), получим

$$\Phi_{201} = 2U_\infty\alpha_{20}, \quad \Phi_{111} = U_\infty\alpha_{11}, \quad \Phi_{021} = 2U_\infty\alpha_{02}. \quad (31.41)$$

В силу выражения (31.35), имеем равенство

$$u_2 = \frac{C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad (31.42)$$

в котором числитель можно значительно упростить, рассматривая отдельно каждый член выражения (31.40).

В самом деле, полагая

$$\alpha_2^{(20)} = \alpha_{20} x_1, \quad \alpha_2^{(02)} = \alpha_{02} x_2^2, \quad (31.43)$$

находим, что скорость  $u$  должна быть симметрична относительно оси  $Ox_1$ , и в обеих случаях

$$u_2 = \frac{C_0 + C_2 y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad (31.44)$$

причем постоянные  $C_0, C_2$  различны.

Если

$$\alpha_2^{(11)} = \alpha_{11} x_1 x_2, \quad (31.45)$$

то скорость  $u$  будет антисимметрична; тогда

$$u_2 = \frac{C_1 y + C_3 y^3}{\sqrt{l^2 - y^2}}. \quad (31.46)$$

1) Завершая вычисления для последнего случая, после нескольких элементарных операций получим

$$\frac{d^3}{dy^3} \left( \frac{C_1 y + C_3 y^3}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right) = 3l^2 \frac{(C_1 + 2C_3 l^2) + (4C_1 + 3C_3 l^2) y^2}{(l^2 - y^2)^{7/2}}; \quad (31.47)$$

принимая во внимание соотношения (31.22) и (31.37), будем иметь равенство

$$d\Phi_{120} = d \left( \frac{\partial^2 u_-}{\partial y^2} \right) = \frac{d^3}{dy^3} \left( \frac{C_1 y + C_3 y^3}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right)_{y=0} = 0, \quad (31.48)$$

из которого выводится первое условие для определения постоянных

$$C_1 + 2C_3 l^2 = 0. \quad (31.49)$$

Чтобы определить постоянную  $C_3$ , заменим  $y$  через  $x$  в выражении (31.47) применяя формулу (31.39) и подставляя  $i_3$  вместо  $x$ , получим последовательно

$$\begin{aligned} \Phi_{111} = U_\infty \alpha_{11} &= 15C_3 l^4 \int_{i_3}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} x^3 dx}{(x^2 - l^2)^{7/2}} = \\ &= 15C_3 l^4 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 + B^2 i_3^2} i_3^3 di_3}{(i_3^2 + l^2)^3 \sqrt{i_3^2 + l^2}}. \end{aligned} \quad (31.50)$$

Обозначая через  $K$  и  $E$  полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $\sqrt{1 - B^2 l^2}$ , после интегрирования и введения обозначения  $1/n = Bt$ , находим окончательно

$$C_3 = -U_\infty \alpha_{11} \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)K - 2(n^4 - n^2 + 1)E}. \quad (31.51)$$

Два соотношения мы исключили. При рассмотренном выше распределении (31.45) угла атаки  $\alpha_2^{(11)}$  имеем  $\Phi_{201} = \Phi_{021} = 0$ . Соотношение (31.39) применимо к каждой из этих функций; соответствующие интегралы, однако, автоматически равны нулю, так как  $\Phi_{201}$ ,  $\Phi_{021}$  равны нулю на окружности Маха.

Коэффициент давления определяется выражением

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} = -2 \frac{u_2}{U_\infty} x_1^2 = 2 \frac{C_3 x_1^2}{U_\infty} \frac{(2l^2 - y^2) y}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad (31.52)$$

из которого очевидно, что распределение давления будет антисимметричным. Отсюда следует, что подъемная сила равна нулю, но момент относительно оси  $Ox_1$  не равен нулю.

2) В случае двух членов (см. формулы 31.43), поступая, как и выше, из выражения (31.44) и принимая во внимание соотношения (31.35б) и (31.38), получим равенство

$$\frac{d^3 U_2}{dx^3} = -3 \frac{(4C_2 l^2 + 3C_0) l^2 x + (C_2 l^2 + 2C_0) x^3}{i(x^2 - l^2)^{7/2}}, \quad (31.53)$$

которое ясно показывает, что условие (31.22) удовлетворяется, что следует также из гипотезы о симметрии, принятой с самого начала.

Применяя соотношение (31.38), получим

$$\Phi_{2-q, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{3-q} \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} \frac{x^{1-q} \sqrt{1 - B^2 x^2}}{(x^2 - l^2)^{7/2}} (A_1 x + A_3 x^3) dx, \quad (31.54)$$

где с целью упрощения введены обозначения

$$A_1 = -3(4C_2 l^2 + 3C_0) l^2, \quad A_3 = -3(C_2 l^2 + 2C_0). \quad (31.55)$$

Чтобы определить постоянные  $C_0$  и  $C_2$ , рассмотрим отдельно два случая (31.43): для первого обозначим постоянные через  $C_0^{(20)}$  и  $C_2^{(20)}$  (соответственно  $A_1^{(20)}$  и  $A_3^{(20)}$ ), для второго введем обозначения  $C_0^{(02)}$  и  $C_2^{(02)}$  (соответственно  $A_1^{(02)}$  и  $A_3^{(02)}$ ).

В первом случае

$$\Phi_{201} = 2U_\infty \alpha_{20} = - \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2}}{(\xi^2 + l^2)^{7/2}} (A_1^{(20)} \xi^2 - A_3^{(20)} \xi^4) d\xi, \quad (31.56a)$$

$$\Phi_{021} = 0 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + B^2 \xi^2}}{(\xi^2 + l^2)^{7/2}} (A_1^{(20)} - A_3^{(20)} \xi^2) d\xi, \quad (31.56b)$$

откуда после интегрирования выводим следующие значения:

$$C_0^{(20)} = 2U_\infty \alpha_{20} \frac{l^2 [(3n^2 - 5)K - 2(3n^4 - 5n^2 + 1)E]}{N};$$

$$C_2^{(20)} = -2U_\infty \alpha_{20} \frac{[2(n^2 - 2)K - (4n^4 - 7n^2 + 1)E]}{N}, \quad (31.57)$$

$$N = 5K^2 - 8(n^2 + 1)KE - (4n^4 - 19n^2 + 4)E^2.$$

Во втором случае получим соотношения, аналогичные (31.56), при условии, что в первые части равенств вводятся значения  $\Phi_{201} = 0$ ,  $\Phi_{021} = 2U_\infty \alpha_{02}$

и во вторых частях  $A_1^{(20)}$ ,  $A_3^{(20)}$  заменяются на  $A_1^{(02)}$  и  $A_3^{(02)}$ . После этого получим окончательный результат в виде

$$\begin{aligned} C_0^{(02)} &= -2U_\infty \alpha_{02} \frac{l^4 [2K - (n^2 + 1)E] n^2}{N}, \\ C_2^{(02)} &= 2U_\infty \alpha_{02} \frac{l^2 [(3n^2 - 1)K - 2(2n^2 - 1)E]}{N}, \end{aligned} \quad (31.58)$$

где  $n$  имеет то же значение, что и выше.

Другие примеры могут рассматриваться таким же методом, но трудности расчета значительно возрастают с увеличением числа  $n$ .

**31.3.3. Применение к искривленному дельтообразному крылу.** В приведенных примерах рассматривались только изолированные члены разложения по однородным полиномам. Исследуем теперь действительный вид искривленного дельтообразного крыла. С целью упрощения, но без ограничения общности задачи, исследуем крыло, каждое сечение которого представляет параболическую дугу.

В простейшем случае ордината дельтообразного крыла относительно горизонтальной плоскости  $Ox_1x_2$  дается уравнением

$$x_3 = 4fx_1(1 - x_1) \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right), \quad (31.59)$$

в котором высота крыла принимается равной единице, основание  $2l$  и максимальная кривизна  $f$ . Поперечные сечения представляют параболические дуги, пересекающие плоскость крыла в точках  $x_2 = \pm l$ . Угол атаки элемента в любом заданном сечении  $x_2 = \text{const}$  будет

$$\alpha = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 4f \left(1 - 2x_1 - \frac{x_2^2}{l^2} + \frac{2}{l^2} x_1 x_2^2\right). \quad (31.60)$$

Предположим, что крыло расположено в сверхзвуковом потоке, параллельном плоскости, образованной вершиной и основанием треугольника. Если бы эта плоскость имела также угол атаки, то его влияние, такое же, как влияние тонкого плоского крыла, что уже показывалось ранее в одном из разделов, нужно было бы добавить.

При этих условиях общее течение вокруг крыла состоит из течений, каждое из которых обусловлено одним из членов разложения угла атаки  $\alpha$

$$\alpha = \alpha_{00} + \alpha_{10}x_1 + \alpha_{02}x_2^2 + \alpha_{12}x_1x_2^2. \quad (31.61)$$

Однородное течение порядка  $n = 1$

$$u_0 = \frac{C_0}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad (\alpha_{00} = 4f), \quad (31.62)$$

где коэффициент определяется по формуле (27.88)

$$C_0 = - \frac{\alpha_{00} U_\infty l^2}{E}. \quad (31.63)$$

Однородное течение порядка  $n = 2$

$$\frac{u}{x_1} = u_1 = \frac{C_0 + C_2 y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad (\alpha_{10} = -8f), \quad (31.64)$$

где коэффициенты  $C_0, C_2$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} C_0 &= -U_\infty \alpha_{10} \frac{2(n^2 - 1)l^2}{K + (n^2 - 2)E}, \\ C_2 &= U_\infty \alpha_{10} \frac{(n^2 - 1)}{K + (n^2 - 2)E}. \end{aligned} \quad (31.65)$$

Однородное течение порядка  $n = 3$

$$\frac{u}{x_1^2} = u_2 = \frac{C_0 + C_2 y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad \left( \alpha_{02} = -\frac{4f}{l^2} \right), \quad (31.66)$$

где  $C_0$  и  $C_2$  имеют значения, определенные ранее (см. равенства 31.58).

Однородное течение порядка  $n = 4$

$$\frac{u}{x_1^3} = u_3 = \frac{C_0 + C_2 y^2 + C_4 y^4}{\sqrt{l^2 - y^2}} \quad \left( \alpha_{12} = \frac{2f}{l^2} \right), \quad (31.67)$$

где коэффициенты  $C_0, C_2, C_4$  определяются выражениями [15]

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{U_\infty \alpha_{12} 8l^4 n^2 (n^2 - 1)}{3 N_1} [(n^2 - 1)K - (3n^4 + 7n^2 - 2)E], \\ C_2 &= \frac{U_\infty \alpha_{12} 2l^2 (n^2 - 1)}{3 N_1} [(81n^4 - 65n^2 + 24)K + (3n^6 - \\ &\quad - 131n^4 + 136n^2 - 48)E], \end{aligned} \quad (31.68)$$

$$C_4 = -\frac{U_\infty \alpha_{12} 2(n^2 - 1)}{3 N_1} [(27n^4 - 31n^2 + 12)K + (6n^6 - 55n^4 + 65n^2 - 24)E].$$

Значение  $N_1$  дается формулой

$$\begin{aligned} N_1 &= (27n^4 - 31n^2 - 8)K^2 - 2(24n^6 - 5n^4 - \\ &\quad - 15n^2 - 16)KE - (12n^8 - 119n^6 + 151n^4 - 64n^2 + 32)E^2. \end{aligned} \quad (31.69)$$

Если плоскость крыла, которая проходит через его вершину и основание, имеет угол атаки  $\alpha_0$ , то прибавляется обусловленное им течение; для последнего получается выражение (31.62), где коэффициент  $C_0$  определяется формулой (31.63), причем угол  $\alpha_{00}$  нужно заменить через  $\alpha_0$ .

Резюмируя, можно сказать, что течение вокруг дельтообразного крыла с дозвуковыми кромками образуется из нескольких элементарных течений различного порядка.

#### 31.4. Действие неоднородного потока на тонкое плоское треугольное крыло с дозвуковыми кромками

Предположим, что скорость свободного потока не будет постоянной и однородной в пространстве, причем ее поперечные компоненты  $v$  и  $w$  предположим очень малыми, чтобы можно было применить метод малых возмущений.

Таковым будет случай обтекания хвостового оперения или крыла, расположенного за другим крылом, за которым поток становится неоднородным.



Если плоское дельтообразное крыло расположено в таком неоднородном потоке и находится в плоскости  $Ox_1x_2$ , то оно подвергается только воздействию вертикальной скорости  $w$ , выражение которой может быть представлено в виде суммы однородных полиномов вида

$$w = w(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{n-1} w_m(x_1, x_2), \quad (31.70)$$

где

$$w_m = w_m(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^m w_{m-q,q} x_1^{m-q} x_2^q. \quad (31.71)$$

Эти два выражения идентичны выражениям (31.25) и (31.26), относящимся к изменению угла атаки  $\alpha$ , и отличаются только множителем  $U_\infty$ .

Присутствие крыла в этом неоднородном потоке вызывает течение, действие которого уничтожает скорость возмущения  $w$ , на поверхности крыла.

Указанное условие, которое необходимо должно выполняться на границе, образованной самим крылом, может быть удовлетворено крылом такого же контура, но с искривленной поверхностью, построенной таким образом, чтобы угол атаки любого элемента профиля в любом сечении  $x_2 = \text{const}$  определялся соотношениями

$$\alpha = -\frac{w}{U_\infty}, \quad \alpha_m = -\frac{w_m}{U_\infty}, \quad \alpha_{m-q,q} = -\frac{w_{m-q,q}}{U_\infty}. \quad (31.72)$$

Течение вокруг такого крыла, которое, по условию, предполагается безвихревым, будет создавать в каждой точке плоскости крыла скорость  $-w$ .

Таким образом, приходим к предыдущему случаю: начиная с соотношений (31.72), определяем угол атаки в каждой точке и применяем уравнения (31.70) и (31.71).

Если дельтообразное крыло также имеет угол атаки  $\alpha_0$  относительно общего потока, то к определенному выше течению нужно добавить течение, соответствующее этому углу атаки.

Исходя из тех же соображений, но пользуясь другим методом, Ленс получил ряд результатов, которые вместе с результатами других авторов приведены ниже [15]:

Для  $w = w_{01}x_2$

$$\frac{u}{x_1} = u_1 = \frac{-w_{01}l^2(n^2-1)}{k - (2n^2-1)E} \frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}}; \quad (31.73)$$

Для  $w = w_{30}x_1^3$

$$\frac{u}{x_1^3} = u_3 = \frac{C_0 + C_2y^2 + C_4y^4}{\sqrt{l^2-y^2}}, \quad (31.74)$$

$$C_0 = \frac{w_{30}8l^2(n^2-1)}{N_1} [(3n^4 - 9n^2 - 2)K - (6n^6 - 15n^4 + 5n^2 - 4)E],$$

$$C_2 = \frac{-w_{30}2(n^2-1)}{N_1} [(9n^4 - 45n^2 - 4)K - (18n^6 - 51n^4 + n^2 - 8)E], \quad (31.75)$$

$$C_4 = -\frac{w_{30}2B^2n^2(n^2-1)}{N_1} [(9n^2 - 1)K - (3n^4 + 7n^2 - 2)E],$$

$\Lambda$  дается формулой (31.69)

$$\Lambda = \kappa_2 \Gamma x_2$$

$$\frac{u}{x^2} = \frac{+C_2 u^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}, \quad 31.77$$

где

$$C_1 = -\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \pi^2 - 1}{\pi} [12\pi^4 - 31\pi^2 + 27] K - 24\pi^6 - 65\pi^4 + 55\pi^2 - 6] E, \quad 31.78$$

$$C = \frac{\pi - \pi^2 - 1}{\pi} [3\pi^4 - 21\pi^2 + 21] K - 16\pi^6 - 44\pi^4 + 39\pi^2 - 3] E$$

$\Lambda_2$  определяется выражением

$$\Lambda_2 = \pi^4 + 31\pi^2 - 27] K^2 - 2 [16\pi^6 + 15\pi^4 + 5\pi^2 - 24] KE + 32\pi^8 - 64\pi^6 - 151\pi^4 - 119\pi^2 + 12] E^2, \quad 31.78$$

$$\Lambda_2 = \kappa_3 \Gamma_2$$

$$\frac{u}{x^2} = \Gamma_2 = \frac{C_1 - C_2 u^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}, \quad 31.79$$

где

$$C_1 = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot \pi^2 - 1}{\pi} [\pi^2 - 9] K - 2\pi^4 - 7\pi^2 - 3] E, \quad 31.80$$

$$C_2 = \frac{-\pi \cdot 6^2 \cdot \pi^2 - 1}{\pi} [9\pi^2 - 1] K - 3\pi^4 + 7\pi^2 - 2] E,$$

причем  $\Lambda_2$  определяется равенством 31.78

Представляется необходимым дать точные значения коэффициентов  $C_1, C_2$  для дальнейших практических вычислений, особенно в связи с тем, что определение этих коэффициентов очень трудоемко

### 31.5. Определение сил и моментов

Предполагая, что осевая скорость возмущения однородного течения порядка  $n$  определена, получим соответствующий коэффициент давления

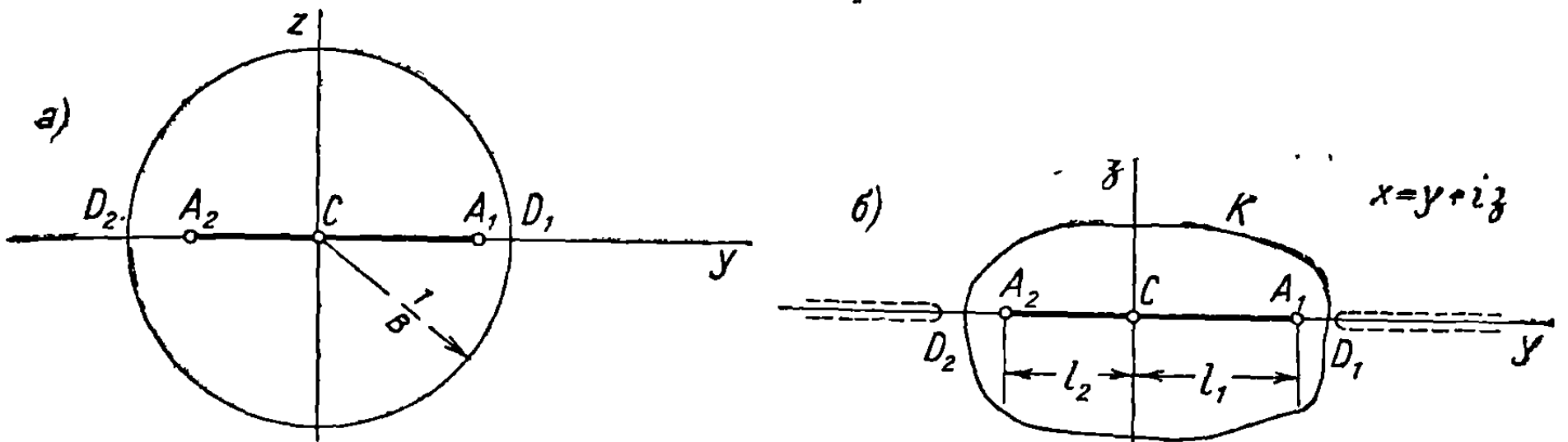
$$C_p^{(n)} = -2 \frac{u}{U_\infty} = -2 \frac{u_{n-1}}{U_\infty} x_1^{n-1}. \quad 31.81$$

Рассмотрим элемент поверхности  $d\sigma = dx_1 dx_2$  и заметим, пользуясь § II 31.1, что

$$d\sigma = dx_1 dx_2 = x_1 dx_1 dy. \quad (31.82)$$

Коэффициент подъемной силы  $C_z^{(n)}$  для любого дельтообразного крыла с высотой, равной единице, обусловленный тем же однородным течением порядка  $n$ , определится формулой

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{2} C_z^{(n)} &= \frac{4}{U_\infty} \int_{OA_1A_2} u x_1 dx_1 dy = \frac{4}{U_\infty} \int_0^1 x_1^n dx_1 \int_{-l_2}^{l_1} u_{n-1} dy = \\ &= \frac{4}{(n+1)U_\infty} \int_{-l_2}^{l_1} u_{n-1} dy. \end{aligned} \quad (31.83)$$



Фиг. 31.2

Рассматривая след крыла в физической плоскости  $Cyz$  (фиг. 31.2,а), воспроизведенный точно во вспомогательной плоскости  $x = y + iz$  (фиг. 31.2,б), получим, принимая во внимание выражение (31.34),

$$2 \int_{-l_2}^{l_1} u_{n-1} dy = - \oint_{A_2A_1} u_{n-1} dy = - \oint_K U_{n-1} dx, \quad (31.84)$$

так как мнимые части  $U_{n-1}$  и  $z$  равны нулю на крыле. Заменяя  $U_{n-1}$  его выражением (31.34), будем иметь в окончательном результате

$$C_z^{(n)} = \frac{4i}{(n+1)(l_1+l_2)U_\infty} \oint_K \frac{C_0 + C_1x + \dots + C_n x^n}{\sqrt{(x-l_1)(x+l_2)}} dx. \quad (31.85)$$

Применим полученное соотношение к дельтообразному крылу ( $l_1 = l_2 = l$ ) и заметим, что нечетные члены равны нулю. Разлагая множитель  $(1 - \frac{l^2}{x^2})^{-1/2}$  по обычной формуле бинома и беря вычит интеграла во второй части равенства, получим

$$\begin{aligned} C_z^{(n)} &= \frac{2i}{(n+1)lU_\infty} \oint_K \frac{C_0 + C_2x^2 + C_4x^4 + \dots}{x \sqrt{1 - \frac{l^2}{x^2}}} dx = \\ &= \frac{-4\pi}{(n+1)lU_\infty} \left( C_0 + \frac{1}{2} l^2 C_2 + \frac{3}{8} l^4 C_4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} l^{2p} C_{2p} \right), \end{aligned} \quad (31.86)$$

где  $2p = n$ , если  $n$  — четное, и  $2p = n - 1$ , если  $n$  — нечетное. Коэффициент полной подъемной силы, обусловленный всеми однородными течениями, будет

$$C_z = \sum_1^n C_z^{(n)}. \quad (31.87)$$

Аналогичную формулу можно установить для коэффициента волнового сопротивления  $C_x$ . Заметим, что коэффициент, соответствующий течению

порядка  $n$ , отличается от первого интеграла в равенствах (31.83) только тем, что  $u$  умножается на  $\alpha$  и что знак будет отрицательным:

$$\frac{l_1 + l_2}{2} C_x^{(n)} = -\frac{4}{U_\infty} \int_{OA_1A_2} \alpha u x_1 dx_1 dy. \quad (31.88)$$

Тот же метод вычетов, примененный в случае подъемной силы, может быть использован для определения сопротивления, но вычисления становятся значительно более трудоемкими. Поэтому достаточно указать метод, при котором рассматривается в разложении  $\alpha$  единственный член порядка  $m$  (см. формулу 31.26), представляемый в виде

$$\alpha_m = x_1^m \sum_{q=0}^m \alpha_{m-q,q} y^q = x_1^m (\alpha_{m0} + \alpha_{m-1,1} y + \alpha_{m-2,2} y^2 + \dots + \alpha_{0m} y^m). \quad (31.89)$$

Для этого члена имеем

$$\frac{l_1 + l_2}{2} C_{x,m}^{(n)} = -\frac{4}{U_\infty} \int_0^1 x_1^{n+m} dx_1 \int_{-l_2}^{l_1} u_{n-1} \sum_{q=0}^m \alpha_{m-q,q} y^q dy; \quad (31.90)$$

поступая, как выше, заменим в приведенном равенстве  $u_{n-1}$  и  $y$  через  $U_{n-1}$  и  $x$  соответственно:

$$C_{x,m}^{(n)} = \frac{-4i}{(n+m+1)(l_1+l_2)U_\infty} \times \int_K \frac{(C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n)(\alpha_{m0} + \alpha_{m-1,1} x + \dots + \alpha_{0m} x^m)}{\sqrt{(x-l_1)(x+l_2)}} dx, \quad (31.91)$$

получая для симметричного крыла

$$C_{x,m}^{(n)} = \frac{2i}{(n+m+1)lU_\infty} \int_K \frac{(C_0 + C_1 x + \dots)(\alpha_{m0} + \alpha_{m-1,1} x + \dots)}{\sqrt{x^2 - l^2}} dx. \quad (31.92)$$

С этого момента операции становятся элементарными, хотя и очень трудоемкими. Поэтому приведенные выражения будут сохранены в данной выше форме для применения к простым конкретным случаям.

Для вычисления моментов, рассматривая фиг. 31.1, можно написать соотношение

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{2} (l_1 + l_2) C_m^{(n)} &= \frac{4}{U_\infty} \int_{OA_1A_2} u x_2 x_1 dx_1 dy = \frac{4}{U_\infty} \int_0^1 x_1^{n+1} dx_1 \int_{-l_2}^{l_1} u_{n-1} y dy = \\ &= -\frac{2}{(n+2)U_\infty} \int_{A_2A_1} u_{n-1} y dy. \end{aligned} \quad (31.93)$$

Действуя как в случае подъемной силы, получим

$$C_m^{(n)} = \frac{4i}{(n+2)(l_1+l_2)^2 U_\infty} \int_K \frac{(C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n) x dx}{\sqrt{(x-l_1)(x+l_2)}}. \quad (31.94)$$

Если рассматривается дельтообразное крыло, то, замечая, что четные члены равны нулю, будем иметь

$$C_m^{(n)} = \frac{i}{(n+2)l^2U_\infty} \oint_K \frac{(C_1x + C_3x^3 + \dots) dx}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{-2\pi}{(n+2)l^2U_\infty} \left( \frac{1}{2} l^2 C_1 + \frac{3}{8} l^4 C_3 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4 \dots 2p} l^{2p} C_{2p-1} \right), \quad (31.95)$$

где  $2p - 1 = n$ , если  $n$  нечетное, и  $2p = n$ , если  $n$  четное.

Коэффициент полного момента, обусловленный всеми однородными течениями, будет

$$C_m = \sum_1^n C_m^{(n)}. \quad (31.96)$$

### 31.6. Гидродинамический метод определения осевой скорости возмущения в случае дельтообразных крыльев симметричной толщины

Рассмотрим дельтообразное крыло симметричной толщины и предположим, что наклон в любой точке  $P(x_1, x_2)$ , обозначаемый через  $\gamma$ , определяется с помощью суммы однородных полиномов, аналогичной выражению, используемому при определении угла атаки в случае тонких дельтообразных крыльев (см. формулу 31.25).

Рассмотрим один из полиномов порядка  $(n - 1)$

$$\gamma_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \gamma_{n-q-1,q} x_1^{n-q-1} x_2^q; \quad (31.97)$$

ему будет соответствовать скос потока на крыле, определяемый соотношением

$$\frac{1}{x_1^{n-1}} \frac{w}{U_\infty} = \frac{1}{x_1^{n-1}} \gamma_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} y^q \gamma_{n-q-1,q}, \quad (31.98)$$

где  $y$  сохраняет прежнее значение (31.3).

Так как дельтообразное крыло симметричной толщины предполагается также симметричным относительно оси  $Ox_1$ , то когда  $q$  число нечетное ( $q = 2k + 1$ ), то коэффициент  $\gamma_{n-q-1,q}$  принимает положительное или отрицательное значение, соответственно тому, будет ли  $x_2$  больше или меньше нуля. Следовательно, для любого показателя  $q$

$$\gamma_{n-1}(x_1, x_2) = \gamma_{n-1}(x_1, -x_2). \quad (31.99)$$

Это замечание будет важно в дальнейшем.

Движение, возникающее вокруг рассматриваемого крыла, будет однородным порядка  $n$ , поэтому скорость возмущения  $u$  можно представить в форме (31.12а), причем индекс  $q$  заменяется на  $k$ , чтобы избежать смешения со случаем изменения наклона (см. формулу 31.98)

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}} u = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y^k \Phi_{n-k,k,0} = Re \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k F_{n-k,k,0}; \quad (31.100)$$

здесь  $x = y + iz$  — комплексная переменная (см. формулу 31.11) и функции  $F_{n-k,k,0}$  представляют собственно коническое течение (однородное течение первого порядка).

По аналогии с выражением (31.28)

$$C_{n-1}^q \Phi_{n-q-1,q,1} = (n-1)! U_\infty \gamma_{n-q-1,q}. \quad (31.101)$$

Если принять в рассмотрение соотношения совместности

$$dF_{n-q,q,0} = (-1)^k q x^k q dF_{n-k,k,0} = \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{n-q-1,q,1}, \quad (31.102)$$

то функция  $u$  может быть получена простым применением процедуры, аналогичной той, которая использовалась в случае тонких крыльев с дозвуковыми ведущими кромками.

Чтобы получить общий вид скорости возмущения  $u$ , проанализируем условия движения вблизи точки на ведущей кромке и установим рациональную последовательность операций.

Применим метод, полностью разобранный в работе [17].

**31.6.1. Принцип, положенный в основу метода.** В случае собственно конического движения (первого порядка), соответствующего угловидному крылу с постоянным наклоном  $\gamma_0$  и дозвуковыми ведущими кромками, осевая скорость возмущения дается формулой (25.10), которая может быть представлена и в логарифмической форме

$$u = -\frac{2\gamma_0 U_\infty}{\pi B} \cdot \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}} \text{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2y^2}{B^2(l^2-y^2)}} = \\ = -K_0 [\ln(\sqrt{1-B^2y^2} + \sqrt{1-B^2l^2}) - \ln B \sqrt{l^2-y^2}], \quad (31.103)$$

где  $K_0$  — постоянный множитель, пропорциональный наклону, стоящий перед функцией  $\text{Arch}$ .

Около точек, расположенных на ведущих кромках ( $y = \pm l$ ), где происходит резкий скачок наклона, эта скорость будет стремиться к бесконечности, соответственно следующим асимптотическим представлениям:

$$u_{y \rightarrow l} = K_0 \ln |l - y|, \quad u_{y \rightarrow -l} = K_0 \ln |l + y|. \quad (31.104)$$

Возвратимся к реальному крылу и рассмотрим условия течения в непосредственной близости от ведущей кромки в приведенном пространстве, которое можно уподобить пространству, соответствующему ведущей кромке угловидного крыла с постоянным наклоном.

Обозначая через  $K = K(x_1, x_2)$  множитель в выражении для скорости, изменяющийся от одной точки ведущей кромки к другой, можно принять, что скорость в этих точках стремится к бесконечности таким же образом, как и выше, т. е. в согласии с асимптотическими равенствами

$$u_{y \rightarrow l} = K \ln |l - y|, \quad u_{y \rightarrow -l} = K \ln |l + y|. \quad (31.105)$$

Легко видеть, что производная порядка  $(n-1)$  от  $u$  по переменным  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.  $\Phi_{n-k,k,0}$  содержит для точек из окрестности ведущих кромок

члены, имеющие как минимальную, так и максимальную сингулярность, соответственно

$$\ln |l - y|, \frac{1}{l - y}, \dots, \frac{1}{(l - y)^{n-1}},$$

$$\ln |l + y|, \frac{1}{l + y}, \dots, \frac{1}{(l + y)^{n-1}}.$$

Что касается логарифмического члена (минимальная сингулярность), то его также легко вывести из уравнений совместности, в которых резкие изменения коэффициентов  $\gamma_{n-q-1,q}$ , согласно соотношениям (31.101), вызывают резкие изменения функций  $\Phi_{n-q-1,q,1}$ ; последние для действительных частей функций  $F_{n-k,k,0}$ , т. е. для  $\Phi_{n-k,k,0}$  будут соответствовать логарифмическим членам.

Проверка указанного может быть выполнена апостериори после того, как выражение для скорости  $u$  будет найдено.

Если указываются условия на обеих ведущих кромках, то, с одной стороны, мы будем иметь логарифмический член вида

$$\ln |l^2 - y^2|, \quad \ln \left| \frac{l - y}{l + y} \right|,$$

и, с другой, собирая все прочие члены и представляя их в виде одного члена, получим его в форме дроби, знаменатель которой имеет выражение

$$(l^2 - y^2)^{n-1}.$$

Основываясь на этих условиях течения в непосредственной близости от ведущих кромок, нужно получить функции  $F_{n-k,k,0}$ , удовлетворяющие всем граничным условиям.

Поэтому вернемся к комплексной переменной  $x = y + iz$ , замечая, что выражение

$$\frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} (a_0 + a_1 x + \dots + a_{2n-3} x^{2n-3})}{(l^2 - x^2)^{n-1}},$$

действительная часть которого равна нулю на окружности Маха или на интервалах  $y \leq -1/B$ ,  $y \geq 1/B$  в рассматриваемой плоскости  $x = y + iz$  и которое сводится к чисто мнимой постоянной на бесконечности, если все коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{2n-3}$  действительны, удовлетворяет всем условиям конических движений. Это можно показать непосредственно, исходя из особенностей в плоскости Буземана и переходя затем к плоскости  $x$ .

Если  $k$  четное ( $k = 2x$ ), то, полагая компоненту  $u$  симметричной относительно оси  $Ox_1$ , получим как следствие из уравнения (31.100), что степени  $x$  в полиноме числителя четны; следовательно,

$$F'_{n-2x,2x,0} = \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n-4} x^{2n-4})}{(l^2 - x^2)^{n-1}}. \quad (31.106)$$

Если  $k$  нечетно ( $k = 2x + 1$ ), то по той же причине степени  $x$  нечетны и, следовательно,

$$F'_{n-2x-1,2x+1,0} = \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} (a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-3} x^{2n-3})}{(l^2 - x^2)^{n-1}} \quad (31.107)$$

Что касается логарифмических членов, то для них можно привести следующие рассуждения.

Согласно гидродинамической аналогии (см. раздел 24.3), эти члены представляются аналитическими функциями  $F_{n-k,k,0}$  посредством двух равных источников, расположенных в точках  $y = \pm l$ , к которым, чтобы удовлетворить граничным условиям, добавляются другие выражения.

Источники будут иметь одинаковые или противоположные знаки, в соответствии с тем, будет ли  $k$  четное ( $k = 2x$ ) или нечетное ( $k = 2x + 1$ ):

а) если  $k$  четно, то помня, что компонента  $u$  симметрична относительно оси  $Ox_1$ , получим, что функции  $F_{n-2x,2x,0}$  будут содержать члены, соответствующие двум равным и одинакового знака источникам, включая также дополнительное выражение, позволяющее удовлетворить граничным условиям. Таким образом, мы встречаемся с коническим течением первого порядка постоянного наклона, откуда, применяя формулу (25.10), находим

$$\operatorname{Arch} \frac{1 - B^2 l y}{B(l - y)} + \operatorname{Arch} \frac{1 + B^2 l y}{B(l + y)} = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}}; \quad (31.108)$$

заменяя  $y$  через  $x$ , получим окончательно

$$F_{n-2x,2x,0}'' = G_{2x} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}}, \quad (31.109)$$

где  $G_{2x}$  — постоянная, которая определена позже;

б) если  $k$  нечетно, то источники, расположенные в точках  $y = \pm l$ , будут равны и противоположны по знаку, и в этом случае скорость  $u$ , определяемая формулой (31.100), сохраняет симметрию; решение обеспечивается выражением, аналогичным (31.108), которое получается из этого последнего путем вычитания двух членов левой части

$$\operatorname{Arch} \frac{1 - B^2 l y}{B(l - y)} - \operatorname{Arch} \frac{1 + B^2 l y}{B(l + y)} = \pm 2 \operatorname{Arch} B l \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}}, \quad (31.110)$$

при этом знак минус относится к отрицательной абсциссе.

Заменяя также  $y$  через  $x$ , получим другое выражение для  $F_{n-k,k,0}$

$$F_{n-2x-1,2x+1,0}'' = G_{2x+1} \operatorname{Arch} B l \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}}, \quad (31.111)$$

где постоянная  $G_{2x+1}$  должна быть определена.

Исходя только от особенностей на ведущих кромках ( $y = \pm l$ ), получим в окончательном результате, когда  $k$  четно

$$F_{n-2x,2x,0}^{(l)} = G_{2x} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n-4} x^{2n-4})}{(l^2 - x^2)^{n-1}}; \quad (31.112)$$

когда  $k$  нечетно

$$F_{n-2x-1,2x+1,0}^{(l)} = G_{2x+1} \operatorname{Arch} B l \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} (a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-3} x^{2n-3})}{(l^2 - x^2)^{n-1}} \quad (31.113)$$



Влияние особенностей, расположенных в начале координат. Если  $q$  нечетно, то, рассматривая симметричное крыло, находим, что коэффициенты  $(\pm)\gamma_{n-q-1,q}$  имеют положительный знак для  $y > 0$  и отрицательный для  $y < 0$ ; в результате этого получается скачок в начале координат, приводящий к новой особенности, которую можно проанализировать косвенным путем.

Предполагая, что на малом интервале  $-e < y < e$  около центра крыла наклон равен нулю, увидим, что явления в точках  $y = \pm l$  в виде инверсии будут повторяться в точках  $y = \pm e$ ; в соответствии с этим можно добавить дополнительные функции, связанные с такими предположительными скачками:

когда  $k$  четно

$$F_{n-2x,2x,0}^{(e)} = H_{2x} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(e^2-x^2)}} + \frac{\sqrt{1-B^2x^2}(b_0 + b_2x^2 + \dots + b_{2n-4}x^{2n-4})}{(e^2-x^2)^{n-1}}; \quad (31.114)$$

когда  $k$  нечетно

$$F_{n-2x-1,2x+1,0}^{(e)} = H_{2x+1} \operatorname{Arch} Be \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(e^2-x^2)}} + \frac{\sqrt{1-B^2x^2}(b_1x + b_3x^3 + \dots + b_{2n-3}x^{2n-3})}{(e^2-x^2)^{n-1}}, \quad (31.115)$$

где  $H_{2x}$ ,  $H_{2x+1}$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\dots$ ,  $b_{2n-4}$ ,  $b_{2n-3}$  — действительные постоянные.

Если  $e$  стремится к нулю, то выражения в асимптотическом смысле соответственно становятся следующими:

когда  $k$  четно

$$\operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(e^2-x^2)}} \underset{e \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arch} \frac{1}{Bx} + i \frac{\pi}{2}; \quad (31.116)$$

когда  $k$  нечетно

$$\operatorname{Arch} Be \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(e^2-x^2)}} \underset{e \rightarrow 0}{=} i \frac{\pi}{2}. \quad (31.117)$$

Так как мнимые постоянные не играют роли, то остается только первый член во второй части соотношения (31.116); следовательно, только функции  $F_{n-2x,2x,0}$  будут содержать этот член.

Когда  $q$  нечетно и, следовательно,  $q \geq 1$ , то легко видеть из соотношений совместности (31.102), что  $F_{n,0,0}$  ( $k = 2x = 0$ ) не содержит этого члена, так как соответствующий скачок в начале координат будет всегда равен нулю вследствие наличия множителя, содержащего  $x$ . Член вида  $\operatorname{Arch} 1/Bx$  начинает встречаться вместе с функцией  $F_{n-2,2,0}$ , т. е. при  $n \geq 3$ .

Если коэффициенты  $\gamma_{n-q-1,q}$  не имеют скачков в начале координат, то член вида  $\operatorname{Arch} 1/Bx$  в выражении для скорости  $u$  должен быть опущен.

Последние выражения во второй части соотношений (31.114) и (31.115), как и выражения из соотношений (31.106) и (31.107), должны быть подставлены совместно в формулу для скорости  $u$ , которая определена ниже; таким образом, нет необходимости подвергать указанные выражения специальному анализу, связанному с переходом к пределу при  $e \rightarrow 0$ .

**31.6.2. Общее выражение для осевой скорости возмущения.** Применяя соотношение (31.100) и принимая во внимание установленную форму функций  $F_{n-k,k,0}$  и то, что компонента  $u$  не имеет полюса в начале координат ( $y=0$ ) или в точках  $y=\pm l$ , можно легко определить выражение для осевой скорости возмущения.

Так: когда  $n$  нечетно

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^{n-1}} u = & \operatorname{Re} \{ (A_0 + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1} x^{n-1}) \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \\ & + x (B_0 + B_2 x^2 + \dots + B_{n-3} x^{n-3}) \operatorname{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \\ & + x^2 (C_0 + C_2 x^2 + \dots + C_{n-3} x^{n-3}) \operatorname{Arch} \frac{1}{Bx} + \\ & + (D_0 + D_2 x^2 + \dots + D_{n-3} x^{n-3}) \sqrt{1 - B^2 x^2} \}; \end{aligned} \quad (31.118)$$

когда  $n$  четно

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^{n-1}} u = & \operatorname{Re} \{ (A_0 + A_2 x^2 + \dots + A_{n-2} x^{n-2}) \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \\ & + x (B_0 + B_2 x^2 + \dots + B_{n-2} x^{n-2}) \operatorname{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \\ & + x^2 (C_0 + C_2 x^2 + \dots + C_{n-4} x^{n-4}) \operatorname{Arch} \frac{1}{Bx} + \\ & + (D_0 + D_2 x^2 + \dots + D_{n-2} x^{n-2}) \sqrt{1 - B^2 x^2} \}. \end{aligned} \quad (31.119)$$

**31.6.3. Определение постоянных.** Из приведенных формул очевидно, что существует  $(2n-1)$  постоянных, для определения которых имеется такое же число уравнений.

1) Система  $n$  уравнений, аналогичных уравнениям (31.36), представляющих скачки на ведущих кромках. Пусть функция  $\Phi_{n-q-1, q, 1}$ , выведенная с помощью коэффициентов, определяющих наклон (см. формулу 31.101), представляется уравнением

$$-\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{n-q} i \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2} dF_{1, n-1, 0}, \quad (31.120)$$

где интеграл берется по полуокружности малого радиуса  $r$  вокруг точек, аналогичных  $y=l$ .

Вся операция, таким образом, ограничивается получением соответствующего полувывчета относительно, например, точки  $y=l$ .

Как и в случае тонких крыльев, пусть  $U_{n-1}$  обозначает аналитическую функцию комплексного переменного  $x$ ; полагая

$$\frac{1}{x_1^{n-1}} u = \operatorname{Re} U_{n-1}, \quad (31.121)$$

где правая часть определяется выражением, которое содержится внутри фигурных скобок уравнений (31.118), (31.119), можно, в соответствии с равенством (31.38), заменить приведенный интеграл следующим:

$$-\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{n-q} i \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx. \quad (31.122)$$

Заметим далее, что можно соответственно записать:

$$\text{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} = \ln(\sqrt{1 - B^2 x^2} + \sqrt{1 - B^2 l^2}) - \ln B \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (31.123a)$$

$$\text{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} = \ln(Bx \sqrt{1 - B^2 l^2} + Bl \sqrt{1 - B^2 x^2}) - \ln B \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (31.123b)$$

так что для определения полувычета в точке  $y = l$  можно рассматривать только член  $\ln(l - x)$ .

В этом случае, функция  $U_{n-1}$  в приведенном выше интеграле сводится к простому выражению, обозначаемому через  $U_{n-1}^{(r)}$ :

когда  $n$  нечетно

$$U_{n-1}^{(r)} = -\frac{1}{2}[(A_0 + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1} x^{n-1}) + x(B_0 + B_2 x^2 + \dots + B_{n-3} x^{n-3})] \ln(l - x); \quad (31.124)$$

тогда  $n$  четно

$$U_{n-1}^{(r)} = -\frac{1}{2}[(A_0 + A_2 x^2 + \dots + A_{n-2} x^{n-2}) + x(B_0 + B_2 x^2 + \dots + B_{n-2} x^{n-2})] \ln(l - x). \quad (31.125)$$

Другая система  $(n - 1)$  уравнений выводится из каждой производной  $\frac{dU_{n-1}}{dx}$ , которая не должна содержать в знаменателе выражения  $\sqrt{1 - B^2 x^2}$  во избежание особенностей в точках  $y = \pm 1/B$ ; согласно данным задачи, эти особенности не существуют в действительности.

**31.6.4. Примеры применения.** Если в приведенных уравнениях положить  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , то соответственно получим:

$$u = \text{Re} A_0 \text{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}}, \quad (n = 1); \quad (31.126a)$$

$$\frac{1}{x_1} u = \text{Re} \left\{ A_0 \text{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + B_0 x \text{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + D_0 \sqrt{1 - B^2 x^2} \right\} \quad (n = 2); \quad (31.126b)$$

$$\frac{1}{x_1^2} u = \text{Re} \left\{ (A_0 + A_2 x^2) \text{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + B_0 x \text{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + C_0 x^2 \text{Arch} \frac{1}{Bx} + D_0 \sqrt{1 - B^2 x^2} \right\} \quad (n = 3); \quad (31.126c)$$

$$\frac{1}{x_1^3} u = \text{Re} \left\{ (A_0 + A_2 x^2) \text{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + (B_0 + B_2 x^2) x \text{Arch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + C_0 x^2 \text{Arch} \frac{1}{Bx} + (D_0 + D_2 x^2) \sqrt{1 - B^2 x^2} \right\} \quad (n = 4). \quad (31.126d)$$

Напомним, что это выражение для  $u$  справедливо только на крыле ( $x=y$ ), тем не менее, комплексная переменная сохраняется, чтобы можно было выполнить расчеты по формуле (31.121).

В соответствии с указанным методом можно определить постоянные. С целью упрощения исследуем только случай, когда  $n=3$ , придавая особое значение процедуре вычислений.

Рассмотрим выражение (31.126в) для  $u$  при  $n=3$ .

Отправляясь от однородного полинома второго порядка, содержащего  $x_1$  и  $x_2$ , который дает наклон

$$\gamma_2 = \gamma_{20}x_1^2 + \gamma_{11}x_1x_2 + \gamma_{02}x_2^2, \quad (31.127)$$

и применяя соотношение (31.101), будем иметь

$$\Phi_{201} = 2U_\infty\gamma_{20}, \quad \Phi_{111} = U_\infty\gamma_{11}, \quad \Phi_{021} = 2U_\infty\gamma_{02}; \quad (31.128)$$

далее, используя равенство (31.123), получим:

$$U_2^{(r)} = -\frac{1}{2}[(A_0 + A_2x^2) + B_0x] \ln(l-x). \quad (31.129)$$

Это выражение нужно подставить в соотношение (31.122) вместо  $U_{n-1}$ ; определяя соответствующие поправочные, получим окончательно следующие формулы:

$$A_0 = -\frac{U_\infty l}{\pi(1-B^2l^2)^{3/2}}[(2B^4l^4 - 5B^2l^2 + 6)\gamma_{20} + 3l\gamma_{11} + (B^2l^2 + 2)l^2\gamma_{02}]; \quad (31.130a)$$

$$A_2 = -\frac{U_\infty}{\pi(1-B^2l^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l} [3B^2l^2\gamma_{20} + (4B^2l^2 - 1)l\gamma_{11} + B^2l^2(2B^2l^2 + 1)l^2\gamma_{02}]; \quad (31.130б)$$

$$B_0 = \frac{2U_\infty}{\pi(1-B^2l^2)^{3/2}} [(B^2l^2 + 2)\gamma_{20} - B^2l^2(B^2l^2 - 4)l\gamma_{11} + 3B^2l^2 \cdot l^2\gamma_{02}]. \quad (31.130в)$$

Рассматривая первую и вторую производные от  $U_{n-1}$  и имея в виду, что выражение  $\sqrt{1-B^2x^2}$  не должно содержаться в знаменателе, находим:

$$C_0 = -\frac{U_\infty}{\pi}\gamma_{11};$$

$$D_0 = \frac{U_\infty l}{\pi(1-B^2l^2)^2} [(5 - 2B^2l^2)\gamma_{20} + (4 - B^2l^2)l\gamma_{11} + 3l^2\gamma_{20}]. \quad (31.131)$$

Таким образом, результаты, полученные Жерменом [11] и Фененом [12], достигнуты путем использования другого метода.

31.6.5. Применение к тонким дельтообразным крыльям со сверхзвуковыми кромками. Формулы (31.118) и (31.119) применимы также к случаю дельтообразных крыльев со сверхзвуковыми кромками. Так как, с одной стороны,

$$\text{Arch} \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}} = i \arccos \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}, \quad (31.132a)$$

$$\text{Arch} Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}} = i \arccos Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}, \quad (31.132б)$$

а, с другой стороны очевидно, что коэффициенты  $A_j, B_j$  ( $j = 0, 2, 4$ ), выведенные из соотношения (31.121), содержат множитель  $\sqrt{1 - B^2 l^2}$ , который становится мнимым при  $l > 1/B$ :

$$\sqrt{1 - B^2 l^2} = i \sqrt{B^2 l^2 - 1}, \quad (31.133)$$

давая, однако, действительные члены для  $u$  [см. уравнения (31.130)], то, отмечая, новые коэффициенты штрихами, определим скорость  $u$  выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^{n-1}} u = \operatorname{Re} \left\{ (A'_0 + A'_2 x^2 + \dots) \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + \right. \\ \left. + x (B'_0 + B'_2 x^2 + \dots) \operatorname{arccos} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + x^2 (C_0 + C_2 x^2 + \dots) \operatorname{Arch} 1/Bx + \right. \\ \left. + (D_0 + D_2 x^2 + \dots) \sqrt{1 - B^2 x^2} \right\}. \quad (31.134) \end{aligned}$$

Для точек на крыле, расположенных вне конуса Маха,

$$\operatorname{Re}_{x > 1/B} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} = \operatorname{Re}_{x > 1/B} \operatorname{arccos} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} = \frac{\pi}{2}, \quad (31.135a)$$

$$\operatorname{Re}_{x > 1/B} \operatorname{Arch} 1/Bx = \operatorname{Re}_{x > 1/B} \sqrt{1 - B^2 x^2} = 0, \quad (31.135b)$$

откуда получается

$$\frac{1}{x_1^{n-1}} u = \frac{\pi}{2} (A'_0 + B'_0 y + A'_2 y^2 + B'_2 y^3 + \dots). \quad (31.136)$$

### 31. 7. Распространение гидродинамического метода на тонкие треугольные крылья с одной сверхзвуковой ведущей кромкой

Указанный метод, основанный на гидродинамической аналогии, которая состоит в использовании источников или особенностей более высокого порядка, рассматриваемых при изучении соответствующих конических течений, был применен пока только к дельтообразным крыльям симметричной толщины.

Основываясь на тех же рассуждениях, этот метод можно распространить на любое другое треугольное крыло симметричной толщины или на тонкие треугольные крылья.

Рассмотрим такое крыло. Предположим, что в некоторой точке  $y = l$ , представляющей дозвуковую кромку, отличную от линии ведущей кромки, угол атаки крыла переходит от нуля к значению, определяемому однородным полиномом порядка  $(n - 1)$ .

В указанной точке производная того же порядка от скорости возмущения  $u$  будет содержать все сингулярности от минимальной до максимальной  $\left( \ln |l - y|, \dots, \frac{1}{(l - y)^{n-1}} \right)$ .

Эти особенности воспроизводятся в плоскости Буземана и в любой другой плоскости, в которую она преобразуется.

В одной из таких плоскостей указанные особенности (источники, диполи и т. д.) разместятся в соответствующих точках, подобранных как в дву-

мерной гидродинамике, чтобы удовлетворить граничным условиям фиктивного двумерного движения. С этого момента собственно коническое движение (первого порядка), представленное каждой производной от  $u$  порядка  $(n - 1)$ , будет полностью определено.

Переходя к применению формулы (31.100), можно определить выражение для  $u$ , принимая во внимание, что в этой конечной форме  $u$  должно стремиться к бесконечности, как  $\ln |l - y|$ .

Если мы имеем дело с дозвуковыми кромками рассматриваемых тонких крыльев, то в этой точке производная от  $u$  порядка  $(n - 1)$  будет стремиться к бесконечности подобно  $(l_1 - y)^{-(n - \frac{1}{2})}$ , как показано ранее.

Если преобразованная плоскость, в которой нужно установить выражение для скорости, воспроизводит точно конец крыла, то особенность в этой плоскости появится в таком же виде; если при преобразовании конец крыла исчезает, то нужно принять во внимание форму преобразования (см. раздел 24.4).

Проиллюстрируем приведенные соображения на простом примере. Рассмотрим треугольное крыло (фиг. 31.3) с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками и предположим, что вплоть до точки  $A$  ( $y = l$ ) угол атаки крыла равен нулю.

На кромке  $OA$  происходит скачкообразное возрастание угла атаки, изменяющегося от  $OA$  до  $OA_1$  в соответствии с однородным полиномом первого порядка:

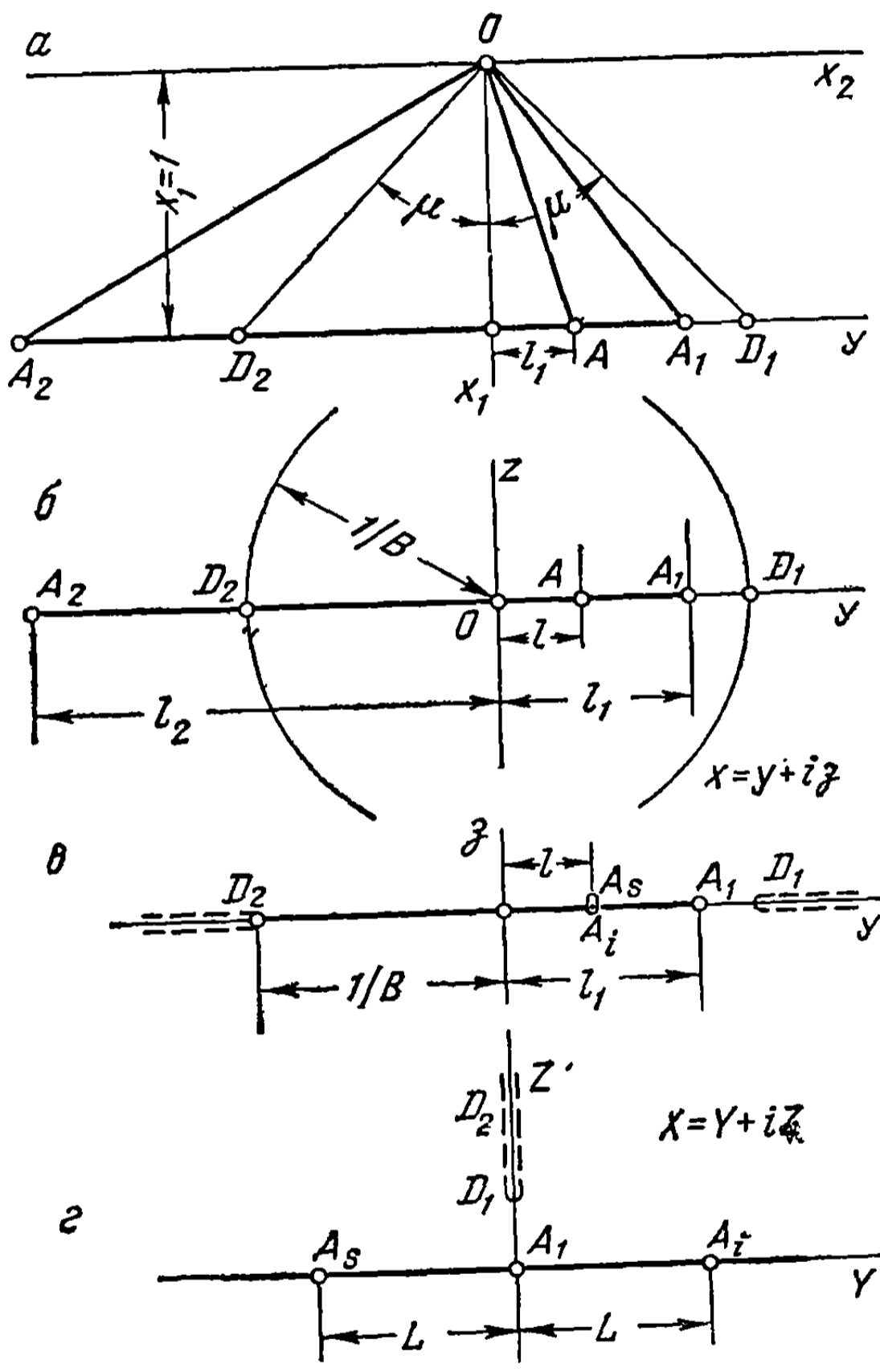
$$\alpha_1 = \alpha_{10}x_1 + \alpha_{01}x_2.$$

Течение будет однородным движением второго порядка; первая производная от  $u$  имеет особенности:

$$\ln |l - y|, \frac{1}{l - y};$$

в точке  $y = l_1$  на конце крыла

$$\frac{1}{(l_1 - y)^{1/2}}, \frac{1}{(l_1 - y)^{3/2}}.$$



Фиг. 31.3

Рассмотрим преобразования

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad X^2 = \frac{B(l_1 - x)}{1 + Bx}, \quad (31.138)$$

которые переводят плоскость Буземана в плоскость  $x$  и последнюю в плоскость  $X$  (фиг. 31.3), причем точка  $y = l$  попадает в точку  $X = Y = L$ , определяемую формулой

$$L = \sqrt{\frac{B(l_1 - l)}{1 + Bl}}, \quad (31.139)$$

и ведущая кромка ( $y = l_1$ ) соответствует  $X = L_1 = 0$ .

Таким образом, на этой плоскости мы будем иметь особенности, соответствующие упомянутым выше, а именно

$$\ln(X - L), \quad \frac{1}{X - L}, \quad \frac{1}{X}, \quad \frac{1}{X^3}.$$

Чтобы получить функцию с равной нулю действительной частью на оси  $Z$ , эти выражения должны быть дополнены другими членами.

Данное условие соответствует условию на окружности Маха ( $u = 0$ ).

Для каждой особенности на обеих плоскостях имеем равенства

$$\ln \frac{X + L}{X - L} = 2 \operatorname{Arth} \frac{L}{X} = 2 \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(l_1 - l)(1 + Bx)}{(1 + Bl)(l_1 - x)}}; \quad (31.140a)$$

$$\frac{1}{X - L} + \frac{1}{X + L} = \sqrt{(1 + Bx)(l_1 - x)} \left( \frac{a}{l - x} \right); \quad (31.140б)$$

$$\frac{m_1}{X} + \frac{m_3}{X^3} = \sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} \left( \frac{b_0 + b_1 x}{l_1 - x} \right). \quad (31.140в)$$

Что касается знака первого соотношения, то для его установления должны быть приняты во внимание те же соображения, что и при выводе формулы (27.39).

Функции  $F_{2-k, k, 0}$  могут быть представлены теперь в форме

$$F_{2-k, k, 0} = G_k \left( \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(l_1 - l)(1 + Bx)}{(1 + Bl)(l_1 - x)}} + i \frac{\pi}{2} \right) + \\ + \sqrt{(1 + Bx)(l_1 - x)} \left( \frac{a_k}{l - x} \right) + \sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} \left( \frac{b_k + c_k x}{l_1 - x} \right); \quad (31.141)$$

здесь введена постоянная  $i \frac{\pi}{2}$ , чтобы принять во внимание случай, когда рассматриваемая кромка  $OA$  становится сверхзвуковой вместо ведущей кромки  $OA_2$ .

Замечая, что  $u$  стремится к бесконечности, как  $\ln |l - y$  в точке  $A$  и как  $(l_1 - y)^{-1/2}$  в точке  $A_1$ , получим соотношение

$$\frac{1}{x_1} u = \operatorname{Re} U_1 = \operatorname{Re} \left\{ (A_0 + A_1 x) \left( \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(l_1 - l)(1 + Bx)}{(1 + Bl)(l_1 - x)}} + i \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + (C_0 + C_1 x) \sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} \right\}, \quad (31.142)$$

которое также удовлетворяет граничным условиям. Чтобы определить постоянные, применим сначала два соотношения вида (31.122), где необходимо вычислить соответствующий полувычет:

$$\Phi_{101} = \gamma_{10} U_{\infty} = \operatorname{Re} i \int \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx; \quad (31.143a)$$

$$\Phi_{011} = \gamma_{01} U_{\infty} = - \int \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx. \quad (31.143b)$$

Чтобы упростить подсчет, можно заменить  $U_1$  через

$$U_1^{(r)} = -\frac{1}{2} (A_0 + A_1 x) \ln(l - x). \quad (31.144)$$

Третье соотношение выводится из того, что производная  $\frac{dU_1}{dx}$  не содержит  $\sqrt{1 + Bx}$  в знаменателе, и четвертое — из соотношения совместности

$$dF_{011} = -\frac{i \sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} dF_{110} = -\frac{i \sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx, \quad (31.145)$$

приводящего к заключению, что для избежания разрыва функции  $F_{011}$  в начале координат необходимо удовлетворить условие

$$\left( \frac{d^2 U_1}{dx^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (31.146)$$

Путем элементарных вычислений получаем следующие выражения:

$$A_0 = -\frac{2U_{\infty} l}{\pi(1 - B^2 l^2)^{3/2}} \left[ (2 - B^2 l^2) \alpha_{10} + l \alpha_{01} \right]; \quad (31.147a)$$

$$A_1 = \frac{2U_{\infty}}{\pi(1 - B^2 l^2)^{3/2}} [\alpha_{10} + B^2 l^2 \cdot l \alpha_{01}]; \quad (31.147b)$$

$$C_0 = -\frac{(l_1 - l)^{1/2} l_1}{3l^2 (1 + Bl_1)^2 (1 + Bl)^{1/2}} [(3B^2 l^2 l_1 + 5Bl^2 + Bll_1 + 2l_1 + l) A_0 + 4(l_1 - l) l A_1]; \quad (31.147b)$$

$$C_1 = -\frac{(l_1 - l)^{1/2}}{3l^2 (1 + Bl_1)^2 (1 + Bl)^{1/2}} [B(l_1 - l)(Bll_1 + 3l + 2l_1) A_0 + (3B^2 l_1^2 l + 4Bl_1^2 + 2Bll_1 + 3l) l A_1]. \quad (31.147g)$$

Из соотношений (31.143) видим, что  $\sqrt{1 - B^2 l^2}$  служит множителем в выражениях для коэффициентов  $A_0$  и  $A_1$ , которые становятся мнимыми, записываемыми, скажем, в виде  $iA'_0$  и  $iA'_1$ , когда  $l = -l_2$ , и рассматриваемая кромка  $OA$  заменяет сверхзвуковую кромку  $OA_2$ .

Таким будет случай тонкого крыла со сверхзвуковой и дозвуковой кромками. Принимая во внимание соотношение

$$\operatorname{Arth} \left( i \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1 + Bx)}{(Bl_2 - 1)(l_1 - x)}} \right) = i \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1 + Bx)}{(Bl_2 - 1)(l_1 - x)}}, \quad (31.148)$$



получим равенство

$$\frac{1}{x_1} u = Re, \left\{ A'_0 + A'_1 x \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1 + Bx)}{(Bl_2 - 1)(l_1 - x)}} - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + (C'_0 + C'_1 x) \sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} \right\}, \quad (31.149)$$

которое при  $n = 1$  сводится к случаю, рассмотренному ранее (см. формулу 27.39).

Приведенный пример, относящийся к простому случаю  $n=2$ , показывает наш метод как весьма практичный для нахождения решений в форме однородных движений высшего порядка без ограничения общности задачи. В работе [17] рассмотрены многие задачи, относящиеся к общему случаю однородных конических течений высшего порядка.

## 32. ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Все рассмотренные до сих пор задачи относились к прямолинейному и равномерному движению крыла или тела вращения. Течение, получающееся при таком движении, является стационарным. В последующих разделах мы разбираем некоторые виды неустановившегося движения в предположении линеаризированной теории, рассматривая в особенности простой случай гармонических колебаний. Будем придерживаться порядка изложения, принятого Тэмплем [18].

### 32.1. Линеаризированные уравнения для неустановившегося течения

Пусть  $U_\infty$  — скорость потока на бесконечности, предполагаемая постоянной и направленной вдоль оси  $Ox_1$  и  $\mathbf{q}$  — скорость возмущения, изменяющаяся со временем, с компонентами  $u, v, w$  относительно системы  $Ox_1x_2x_3$ , получающаяся вследствие движения некоторого заданного тела.

Обозначая полную скорость через  $V$ , получим

$$\mathbf{V} = U_\infty + \mathbf{q} = i_1 (U_\infty + u) + i_2 v + i_3 w, \quad (32.1)$$

и уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (U_\infty + u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + v \frac{\partial V}{\partial x_2} + w \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (U_\infty + u) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_1} + v \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_2} + w \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_3} = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{a^2}{\rho} \nabla \rho. \quad (32.2)$$

При гипотезе малых возмущений изменения давления и плотности, по сравнению со значениями  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  для свободного потока, будут невелики. Обозначая через  $s$  «коэффициент уплотнения»,

$$\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} = s, \quad (32.3)$$

предполагаемый очень малым, получим последовательно

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + s, \quad \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^\kappa = (1 + s)^\kappa \approx 1 + \kappa s, \quad (32.4a)$$

$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{p}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho} = [1 + (\kappa - 1)s] a_\infty^2 \approx a_\infty^2. \quad (32.4b)$$

При той же гипотезе малых возмущений членами второго порядка в уравнении (32.2) можно пренебречь, получая в конечном счете, в силу выражения (32.4б), линеаризованное уравнение неустановившегося движения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial q}{\partial x_1} \approx -a_\infty^2 \nabla s. \quad (32.5)$$

Коэффициент уплотнения  $s$  появляется вместо давления во второй части равенства; две величины связаны друг с другом соотношением, выведенным из уравнения (32.4a):

$$\frac{p - p_\infty}{p_\infty} = \kappa \frac{p_\infty}{p_\infty} s = a_\infty^2 s, \quad (32.6)$$

оно будет использовано позже, при вычислении давлений.

Обозначая вихрь скорости через  $\Omega$ ,

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{q}, \quad (32.7)$$

беря далее операцию rot от обеих частей уравнения (32.5) и замечая, что ротор градиента равен нулю, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{q}) + U_\infty \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \times \mathbf{q}) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0; \quad (32.8)$$

отсюда выводится известное решение

$$\Omega = \Omega(x_1 - U_\infty t, x_2, x_3). \quad (32.9)$$

Легко доказать, что вихрь сохраняет неизменное положение относительно системы, которая движется со скоростью  $U_\infty$ , параллельной оси  $Ox_1$ . Следовательно, по отношению к системе, связанной с препятствием, вихри движутся со скоростью  $U_\infty$ .

Предположим, что движение начинается из покоя; следовательно, вихри вначале равны нулю и останутся таковыми во всем пространстве, за исключением некоторых областей, где происходит непрерывное возникновение вихрей, как, например, у задней кромки крыла. Как только эти вихри появляются, они движутся, в соответствии с уравнением (32.9), со скоростью  $U_\infty$  в направлении, параллельном последней, образуя тонкий слой за крылом, распространяющийся до бесконечности вниз по течению.

Если крыло тонкое и угол атаки мал, то крыло можно рассматривать находящимся в плоскости  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) с тем результатом, что пелена свободных вихрей, образующаяся за задней кромкой, будет также содержаться в этой плоскости ( $x_3 = 0$ ).

Само крыло также представляет слой присоединенных вихрей, распределенных по поверхности в соответствии с определенным законом.

Так, если  $u_s, u_i$  и  $v_s, v_i$  являются компонентами скорости на верхней и нижней сторонах крыла, то интенсивность вихрей на единицу площади вдоль  $Ox_1$  и  $Ox_2$  будет

$$\gamma_1 = v_i - v_s, \quad \gamma_2 = -u_i + u_s, \quad (32.10)$$

Следовательно, распределение вихрей известно, если определены скорости на обеих поверхностях.

Вихри везде равны нулю, за исключением крыла и следа из свободных вихрей; таким образом, существует потенциал скорости возмущения  $\Phi$

$$\mathbf{q} = \nabla \Phi. \quad (32.11)$$

В этом случае уравнение (32.5) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + a_\infty^2 s = C(t), \quad (32.12)$$

где величина  $C(t)$  есть функция времени; если включить эту величину в  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + a_\infty^2 s = 0; \quad (32.13)$$

правая часть равенства равна нулю, в соответствии с постоянным значением на бесконечности потенциала  $\Phi$ .

Последнее выражение соответствует уравнению Бернулли—Лагранжа при гипотезе малых возмущений.

### 32.2. Приведенное уравнение для потенциала

Исходя из уравнения неразрывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) + (U_\infty + u) \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \\ &+ w \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \quad (32.14)$$

замечая, что при гипотезе малых возмущений можно пренебречь членами второго порядка, и используя соотношение (32.3), приведем уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = - \frac{\partial s}{\partial t} - U_\infty \frac{\partial s}{\partial x_1}. \quad (32.15)$$

Вводя потенциал скорости и применяя формулу (32.13), получим дифференциальное уравнение для потенциала

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a_\infty^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t} \right). \quad (32.16)$$

Это уравнение дает простое и изящное решение в случае простых гармонических колебаний. Обозначая частоту колебания через  $\frac{\omega}{2\pi}$ , имеем

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty e^{i(\omega t + kx_1)} \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (32.17)$$

где  $\varphi$  не зависит от времени.

Вводя характеристическую длину  $c$ , представляющую обычно среднюю хорду крыла, и определяя безразмерный параметр  $\lambda$  посредством равенства

$$\lambda = \frac{\omega c}{U_{\infty}}, \quad (32.18)$$

полагая также

$$k = \frac{\lambda}{c} \frac{M_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \quad (32.19)$$

и подставляя эти значения в уравнение (32.16), приведем последнее к виду

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = - \frac{\lambda^2}{c^2} \frac{M_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \varphi. \quad (32.20)$$

Функция  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  называется приведенным потенциалом и может изучаться в некоторых случаях с помощью методов, использованных при исследовании дозвуковых или сверхзвуковых установившихся течений на основе линеаризованных уравнений. Так, если параметр  $\lambda$  предположить малым, то второй частью [уравнения (32.20) можно пренебречь. Получается уравнение, идентичное уравнению для потенциала при установившемся течении

$$- B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (32.21)$$

решение которого может быть найдено среди решений, полученных для задач установившихся течений, разобранных в предшествующих главах.

Для этой цели надо прежде всего определить граничные условия.

**32.2.1. Приведенный скос потока.** Если продифференцировать соотношение (32.17) по переменной  $x_3$ , то получим скос потока

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = U_{\infty} e^{i(\omega t + kx_1)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad (32.22)$$

где, по аналогии с приведенным потенциалом, соответствующая производная этого потенциала, называемая приведенным скосом потока, будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \beta. \quad (32.23)$$

Общее сверхзвуковое движение крыла предполагается состоящим из установившегося прямолинейного движения и из колебательного. Влияния их суммируются в линейной теории, так что достаточно разобрать каждое из этих движений в отдельности.

Рассмотрим колебательное движение, разложенное на три части: вертикальное поступательное перемещение  $Z$ , вращение  $\psi$  вокруг оси  $Ox_1$  и вращение  $\theta$  вокруг оси  $Ox_2$ :

$$Z = Z_0 e^{i\omega t}, \quad \psi = \psi_0 e^{i\omega t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i\omega t}. \quad (32.24)$$

В заданной точке крыла с координатами  $x_1, x_2$  нормальная скорос каждого отдельного движения, будет иметь выражения

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{dZ}{dt} = i\omega Z, \\ \omega_\psi &= x_2 \frac{d\psi}{dt} = i\omega x_2 \psi, \\ \omega_\theta &= -x_1 \frac{d\theta}{dt} = -i\omega x_1 \theta, \end{aligned} \quad (32.25)$$

а полная скорость

$$\omega' = \omega_z + \omega_\psi + \omega_\theta = i\omega e^{i\omega t} (Z_0 + x_2 \psi_0 - x_1 \theta_0). \quad (32.26)$$

С другой стороны, компоненты местной скорости будут  $U_\infty + u, v, w$ ; при проектировании их на нормаль получим те же значения, что и выше

$$\omega_n = w + (U_\infty + u) \theta - v \psi \approx w + U_\infty \theta = \omega'; \quad (32.27)$$

отсюда

$$\begin{aligned} w &= \omega' - U_\infty \theta = i\omega e^{i\omega t} (Z_0 + x_2 \psi_0 - x_1 \theta_0) - U_\infty \theta_0 e^{i\omega t} = \\ &= U_\infty e^{i\omega t} \left[ i\lambda \frac{Z_0}{c} - \theta_0 + i\lambda \psi_0 \frac{x_2}{c} - i\lambda \theta_0 \frac{x_1}{c} \right]. \end{aligned} \quad (32.28)$$

Применяя уравнение (32.22), получим приведенный скос потока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = i\lambda e^{-ikx_1} \cdot \left( \frac{Z_0}{c} + \psi_0 \frac{x_2}{c} - \theta_0 \frac{x_1}{c} \right) - e^{-ikx_1} \cdot \theta_0, \quad (32.29)$$

который вследствие того, что  $k$  и  $\lambda$  малы (см. формулы 32.18, 32.19) и членами, содержащими  $\lambda^2$ , можно пренебречь, примет окончательно следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = i\lambda (1 - ikx_1) \left( \frac{Z_0}{c} + \psi_0 \frac{x_2}{c} - \theta_0 \frac{x_1}{c} \right) - (1 - ikx_1) \theta_0 \approx \\ &\approx i\lambda \left[ \frac{Z_0}{c} + \psi_0 \frac{x_2}{c} - \theta_0 \left( 1 - \frac{kc}{\lambda} \right) \frac{x_1}{c} \right] - \theta_0 + \dots = \\ &= -\theta_0 + i\lambda \left( \frac{Z_0}{c} + \psi_0 \frac{x_2}{c} - \theta_0 \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{x_1}{c} \right) + \dots \end{aligned} \quad (32.30)$$

**32.2.2. Разложение приведенного потенциала.** Можно таким же путем получить разложение для потенциала как функции от  $\lambda$ , пользуясь уравнением для приведенного скоса потока и пренебрегая членами, содержащими  $\lambda^2$  и более высокие степени  $\lambda$ , полагая при этом

$$\varphi = \varphi_0 + i\lambda \varphi_1 + \dots \quad (32.31)$$

Вводя это разложение в (32.21), получим для каждого члена уравнение

$$B^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_3^2} \quad (n = 0, 1), \quad (32.32)$$

а граничные условия на крыле (см. формулу 32.30) будут соответственно

$$\beta_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3} = -\theta_0, \quad \beta_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \frac{Z_0}{c} + \psi_0 \frac{x_2}{c} - \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \theta_0 \frac{x_1}{c}. \quad (32.33)$$

Задача, таким образом, сведена Майлсом [19] к случаю наложения однородных установившихся движений первого и второго порядков, поддающемуся исследованиям с помощью методов, описанных в разделе 31.

32.2.3. Вычисление давлений. Применяя формулы (32.6) и (32.13), получим

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = 2 \frac{a_\infty^2}{U_\infty^2} s = -\frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = \\ &= -2e^{i(\omega t + kx_1)} \left( \frac{i\lambda}{c} \frac{\varphi}{1 - M_\infty^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (32.34)$$

Так как  $k$ , по условию, предполагается очень малым, можно заменить  $e^{ikx_1}$  через  $1 + ikx_1$ ; затем, пренебрегая членами второго порядка, находим

$$\begin{aligned} C_p &= -2e^{i\omega t} (1 + ikx_1) \left( \frac{i\lambda}{c} \frac{\varphi}{1 - M_\infty^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \approx \\ &\approx -2e^{i\omega t} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{i\lambda}{1 - M_\infty^2} \frac{\varphi}{c} + ikc \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{x_1}{c} \right] = \\ &= -2e^{i\omega t} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{i\lambda}{1 - M_\infty^2} \left( \frac{\varphi}{c} + M_\infty^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{x_1}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32.35)$$

Если потенциал  $\varphi$  заменить его выражением (32.31) и также пренебречь членами второго порядка, то будем иметь

$$C_p = -2e^{i\omega t} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + i\lambda \left( \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\varphi_0}{c} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} \frac{x_1}{c} \right) \right]. \quad (32.36)$$

Очевидно, что давление является функцией  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , т. е. приведенного потенциала, который подобен по форме потенциалу установившегося течения и удовлетворяет граничным условиям, определяемым выражениями (32.33).

### 32.3 Приложение к крылу бесконечного размаха

В этом случае будет только одно простое вращение вокруг линии ведущей кромки, поэтому  $\psi_0 = 0$ . Два члена потенциала  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  удовлетворяют волновому уравнению

$$B^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_3^2} \quad (n = 0, 1), \quad (32.37)$$

которое допускает общее решение вида

$$\varphi_n = \varphi_n'(x_1 - Bx_3) + \varphi_n''(x_1 + Bx_3), \quad (n = 0, 1). \quad (32.38)$$

Напомним (см. раздел 14.2), что первый член во второй части предыдущего равенства соответствует верхней области (1), а второй — нижней (2). Если рассматривается только одна верхняя область (фиг. 32.1), то

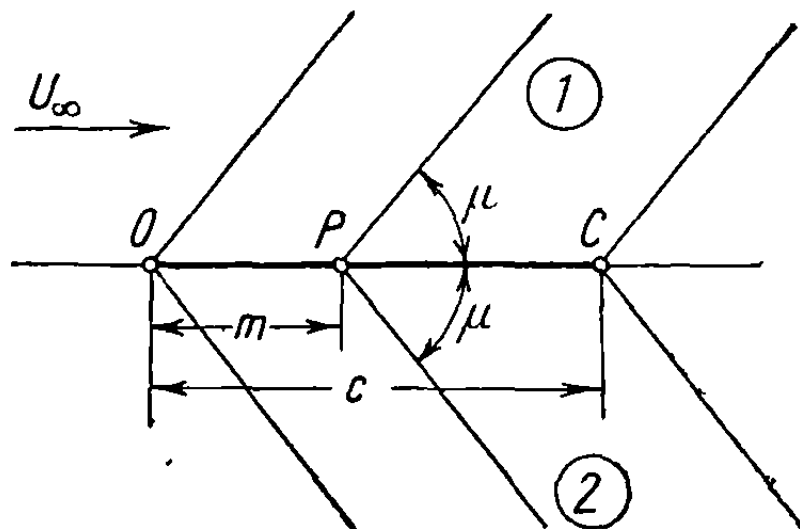
$$\frac{\partial \varphi_n'}{\partial x_2} = \frac{d\varphi_n'}{d(x_1 - Bx_3)} \frac{\partial (x_1 - Bx_3)}{\partial x_3} = -\frac{B d\varphi_n'}{d(x_1 - Bx_3)}; \quad (32.39)$$

отсюда

$$\frac{d\varphi'_n}{d(x_1 - Bx_3)} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi'_n}{\partial x_3}. \quad (32.40)$$

Используя граничные условия (32.33), относящиеся к плоскости  $x_3 = 0$ , выводим значения  $\varphi'_0$  и  $\varphi'_1$  на этой плоскости, а затем, применяя равенство (32.38) и в любой другой точке  $x_3 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= \frac{\theta_0}{B} (x_1 - Bx_3), \\ \varphi'_1 &= -\frac{Z_0}{cB} (x_1 - Bx_3) + \\ &+ \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{2cB} (x_1 - Bx_3)^2. \end{aligned} \quad (32.41)$$



Фиг. 32.1

Приведенные выражения справедливы для верхней поверхности (1) в области, заключенной между двумя прямыми

$$x_1 - Bx_3 = 0, \quad x_1 + c - Bx_3 = 0, \quad (32.42)$$

выходящими из начала координат (ведущая кромка) и из точки  $C$  (задняя кромка). Аналогично заменяя  $x_3$  через  $-x_3$  и замечая, что в этом случае знак правой части уравнения (32.40) будет положительным, получим для области (2)

$$\begin{aligned} \varphi''_0 &= -\frac{\theta_0}{B} (x_1 + Bx_3), \\ \varphi''_1 &= \frac{Z_0}{cB} (x_1 + Bx_3) - \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{2cB} (x_1 + Bx_3)^2. \end{aligned} \quad (32.43)$$

Потенциал будет, очевидно, постоянен вдоль прямой  $x_1 - Bx_3 = m$  в области (1) и прямой  $x_1 + Bx_3 = m$  в области (2), причем обе линии выходят из точки  $P$ .

Давление на крыле ( $x_3 = 0$ ) для верхней поверхности определится выражением

$$\begin{aligned} C_p &= -2e^{i\omega t} \left[ \frac{\theta_0}{B} + i\lambda \left( \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{B} \frac{x_1}{c} - \frac{Z_0}{cB} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{B} \frac{x_1}{c} + \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{B} \frac{x_1}{c} \right) \right] = \\ &= -\frac{2e^{i\omega t}}{B} \left\{ \left[ 1 + i\lambda \left( 1 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{x_1}{c} \right] \theta_0 - i\lambda \frac{Z_0}{c} \right\}. \end{aligned} \quad (32.44)$$

На нижней поверхности давление будет равно по величине и противоположно по знаку, следовательно, для обеих поверхностей получим значение  $-2C_p$ .

Коэффициент подъемной силы можно найти путем простого интегрирования

$$C_z = -\frac{1}{c} \int_0^c 2C_p dx_1 = \frac{4e^{i\omega t}}{B} \left[ \theta_0 - i\lambda \frac{z_0}{c} + i\lambda \left(1 - \frac{1}{B^2}\right) \frac{\theta_0}{2} \right]. \quad (32.45)$$

тогда как коэффициент момента пикирования относительно средней точки крыла будет

$$C_m = -\frac{1}{c^2} \int_0^c 2C_p \left(x_1 - \frac{c}{2}\right) dx_1 = \frac{i\lambda}{3B} \left(1 - \frac{1}{B^2}\right) \theta_0 e^{i\omega t}. \quad (32.46)$$

Из этой формулы очевидно, что момент пикирования меняет знак при  $B^2 = M_\infty^2 - 1 = 1$ , т. е. для  $M_\infty = \sqrt{2}$ . Этот результат, по-видимому, не подтверждается экспериментальными данными.

#### 32.4. Применение к треугольному крылу с дозвуковыми ведущими кромками

Граничные условия для приведенного скоса потока, определенные выражениями (32.33), показывают, что приведенный потенциал  $\varphi = \varphi_0 + i\lambda\varphi_1$  можно найти в форме однородной функции первого порядка для  $\varphi_0$  и второго порядка для  $\varphi_1$ . Функция  $\varphi_0$  соответствует потенциалу симметричного треугольного крыла, нормальная скорость которого постоянна и равна приведенному скосу потока  $\beta = -\theta_0$ , в результате чего, как в аналогичном случае (27.69),

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} = \frac{C_0 l^2 \partial_0 x_1}{\sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}}, \quad \varphi_0 = C_0 \theta_0 (x_1^2 l^2 - x_2^2)^{1/2}. \quad (32.47)$$

Заметим, что  $2l$  представляет основание треугольного крыла и  $C_0 l \theta_0$  равно величине  $-q_0$ , определяемой формулой (27.86); если приведенный скос потока  $\theta_0$  приравнять значению  $-\alpha U_\infty$ , то

$$C_0 = \frac{1}{E(k)} \quad (k = \sqrt{1 - B^2 l^2}), \quad (32.48)$$

причем  $E(k)$  будет прежним полным эллиптическим интегралом второго рода. Предыдущие результаты, относящиеся к коническим полям высшего порядка, можно легко применить к функции  $\varphi_1$ . Если принять во внимание приведенный скос потока  $\beta_1$  (см. равенство 32.33) и применить формулы (31.64), (31.65) к члену, содержащему  $x_1$ , и формулу (31.73) к члену, содержащему  $x_2$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = & -C_0 l^2 \frac{z_0}{c} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}} + C_1 \frac{1 - 2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{c} \frac{2l^2 x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}} - \\ & - C_2 l^2 \frac{\psi_0}{c} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}}, \end{aligned} \quad (32.49)$$



где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  выводятся из формул

$$C_1 = \frac{1 - B^2 l^2}{(1 - 2B^2 l^2) E(k) + B^2 l^2 K(k)}, \quad (32.50)$$

$$C_2 = \frac{1 - B^2 l^2}{(2 - B^2 l^2) E(k) - B^2 l^2 K(k)}.$$

После интегрирования получим решение Робинсона [20]

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -C_0 \frac{Z_0}{c} \sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2} + C_1 \frac{1 - 2M_\infty^2 \theta_0}{1 - M_\infty^2} \frac{\theta_0}{c} x_1 \sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2} - \\ & - C_2 \frac{\psi_0}{c} x_2 \sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}, \end{aligned} \quad (32.51)$$

которое совместно с выражениями (32.47) должно быть подставлено в формулу для давления (32.35). Вычисление подъемной силы и моментов легко выполняется.

Действительно,  $\varphi = \varphi_0 + i\lambda\varphi_1$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$  можно заменить в формуле (32.35) через найденные выше значения, получая таким образом коэффициент давления. Если пренебречь членами, содержащими  $\lambda^2$ , то можно применить приближенную формулу (32.36), в которую  $\varphi_1$  не входит, находя тем самым простое выражение для коэффициента давления.

При дальнейшем вычислении коэффициентов подъемной силы и момента получаем значения, найденные ранее Майлсом [21]:

$$C_z = \frac{4}{B} \left\{ \frac{\pi}{2} C_0 B l \theta - \left[ \frac{\pi l}{B} (C_0 - C_1) - \frac{2}{3} \pi B l (3C_1 - 2C_0) \right] \frac{d\theta}{dt} \right\}, \quad (32.52a)$$

$$C_m = -\frac{1}{18} \frac{4}{B} \left[ \pi B l (3C_1 - C_0) - \frac{3}{2} \frac{\pi l}{B} (C_0 - C_1) \right] \frac{d\theta}{dt}. \quad (32.52b)$$

Момент берется относительно оси, параллельной  $Ox_2$ , и расположенной на расстоянии  $2/3$  хорды дельтообразного крыла, причем в качестве характеристической длины берется сама хорда.

**З а м е ч а н и е.** Выражение функции  $\varphi_1$  (см. формулу 32.51) можно легко вывести из соотношений Эйлера для однородных функций. Полагая приведенный скос потока (см. формулу 32.33) равным  $\beta_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ , получим выражение вида

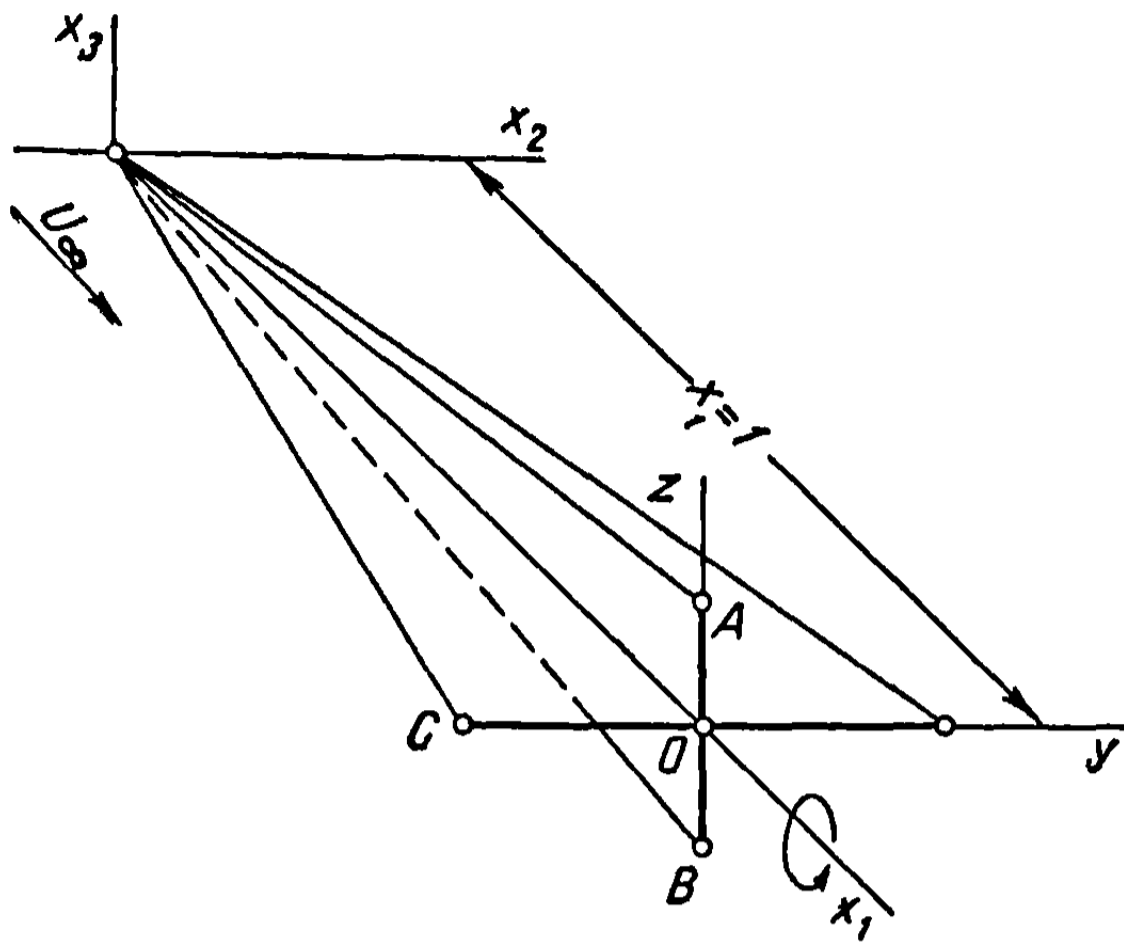
$$\varphi_1 = -(a_0 C_0 + a_1 C_1 x_1 + a_2 C_2 x_2) \sqrt{x_1^2 l^2 - x_2^2}. \quad (32.53)$$

Расчет не содержит теоретических трудностей, особенно в рассмотренном выше случае, причем решение находится почти интуитивно. В более сложных случаях, как, например, приведенный ниже, вычисления более трудоемки; поэтому они будут проведены полностью, чтобы иллюстрировать метод и показать порядок соответствующих операций.

### 32.5. Колебательное движение крестовидного дельтообразного крыла

Колебательное движение крестовидного крыла представляет особый практический интерес и в то же время более полно иллюстрирует возникающие при нем конические течения высшего порядка.

Чтобы упростить изложение, будем именовать горизонтальную плоскость «крыло», а вертикальную «пластинка». Рассмотрим крестовидное крыло, содержащееся полностью внутри конуса Маха (фиг. 32.2).



Фиг. 32.2

Колебательное движение крыла указанного типа можно разложить на два поступательных движения, вдоль  $Ox_2$  и  $Ox_3$ , и три вращения, относительно осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  и  $Ox_3$ . Два поступательных движения и вращения около осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$  будут одинаковы с рассмотренными в случае простого треугольного крыла (см. раздел 32.4), так как пластинка не оказывает влияния на поступательное движение вдоль оси  $Ox_3$  и на вращение около  $Ox_2$ . Крыло также не влияет на

поступательное движение вдоль оси  $Ox_2$  и на вращение относительно  $Ox_3$ .

Остается исследовать вращение крестовидного крыла около оси  $Ox_1$ .

Полагая, как и выше (см. формулу 32.24),

$$\psi = \psi_0 e^{i\omega t} \quad (32.54)$$

и применяя соотношение (32.30), получим приведенный скос потока в точках на крыле

$$\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = i\lambda \psi_0 \frac{x_2}{c}; \quad (32.55)$$

поступая, как в разделе (32.2.1), находим, что в точках на пластинке

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -i\lambda \psi_0 \frac{x_3}{c}. \quad (32.56)$$

Приведенный потенциал можно теперь записать в виде

$$\varphi = i\lambda \varphi_1; \quad (32.57)$$

Следовательно, аналогично уравнениям (32.33), получим

$$\beta_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \psi_0 \frac{x_2}{c}, \quad (32.58a)$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\psi_0 \frac{x_3}{c}. \quad (32.58b)$$

Задача сводится, таким образом, к рассмотрению однородных движений второго порядка, которые уже исследовались более подробно в ранее опубликованной статье [22].

32.5.1. Определение функций  $\Phi_{100} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ . Используя те же обозначения, что и в случае однородных движений высшего порядка (см. раздел 31), и

приравнивая  $\varphi_1$  в выражении приведенного потенциала некоторому потенциалу  $\Phi$ , соответствующему однородному движению второго порядка, получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \Phi_{100}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \Phi_{010}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \Phi_{001} \quad (32.59)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} = \Phi_{200}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \Phi_{110}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \Phi_{101}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} = \Phi_{020}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \Phi_{011}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} = \Phi_{002}. \end{aligned} \quad (32.60)$$

Все эти выражения являются однородными функциями нулевого порядка они удовлетворяют уравнению малых возмущений (32.32) и являются, следовательно, гармоническими функциями в плоскости Буземана, определенной соотношением (16.69). Поэтому их можно объединить с соответствующими сопряженными функциями  $\Phi'_{200}$ ,  $\Phi'_{110}$ , ...,  $\Phi'_{002}$ , в результате чего получим аналитические функции  $F_{200} = \Phi_{200} + i\Phi'_{200}$ ,  $F_{110} = \Phi_{110} + i\Phi'_{110}$ , ... (см. формулу 31.10).

Чтобы получить производную  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \Phi_{100}$ , которая появляется в формуле для давления, используем найденные ранее результаты в соответствии с граничными условиями на крыле и на пластинке (см. формулы 32.58).

Применяя формулу Эйлера для однородных функций, а также выражения (32.59) и (32.60), получим общие соотношения:

$$\Phi_{100} = x_1 \Phi_{200} + x_2 \Phi_{110} + x_3 \Phi_{101}; \quad (32.61a)$$

$$\Phi_{010} = x_1 \Phi_{110} + x_2 \Phi_{020} + x_3 \Phi_{011}; \quad (32.61b)$$

$$\Phi_{001} = x_1 \Phi_{101} + x_2 \Phi_{011} + x_3 \Phi_{002}. \quad (32.61b)$$

На крыле ( $x_3 = 0$ ) уравнения (32.61a) и (32.61b) приводятся к виду

$$\Phi_{100} = x_1 \Phi_{200} + x_2 \Phi_{110} = x_1 (\Phi_{200} + y \Phi_{110}) \quad \left( \frac{x_2}{x_1} = y \right), \quad (32.62a)$$

$$\Phi_{001} = x_1 \Phi_{101} + x_2 \Phi_{011} = x_2 \Phi_{011} = x_2 \frac{\psi_0}{c} = \beta_1 \quad \left( \Phi_{011} = \frac{\psi_0}{c} \right); \quad (32.62b)$$

следовательно, для точек на крыле, используя также уравнение (31.61b), будем иметь

$$d\Phi_{101} = d\Phi_{011} = 0. \quad (32.63)$$

На пластинке  $x_2 = 0$  подобным же образом

$$\Phi_{100} = x_1 \Phi_{200} + x_3 \Phi_{101} = x_1 (\Phi_{200} + z \Phi_{101}) \quad \left( \frac{x_3}{x_1} = z \right), \quad (32.64a)$$

$$\Phi_{010} = x_1 \Phi_{110} + x_3 \Phi_{011} = x_3 \Phi_{011} = -x_3 \frac{\psi_0}{c} = \nu_1 \quad \left( \Phi_{011} = -\frac{\psi_0}{c} \right); \quad (32.64b)$$

для точек на пластинке, применяя выражение (32.61b), получим

$$d\Phi_{110} = d\Phi_{011} = 0 \quad (32.65)$$

В плоскости Буземана, в которой комплексная переменная обозначалась через  $\xi$ , выполнив преобразование

$$Bx = B(y + i\xi) = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad (32.66)$$

использовавшееся часто в предыдущих задачах, можно записать соотношение (32.62а) для точек на крыле

$$\frac{1}{x_1} \Phi_{100} = \operatorname{Re}(F_{200} + xF_{110}). \quad (32.67)$$

Для точек на пластинке вспомогательную плоскость Буземана нужно сначала повернуть

$$\xi' = i\xi = -\zeta + i\eta = \eta' + i\xi', \quad (32.68)$$

так, чтобы пластинка оказалась на действительной оси, а крыло на мнимой.

Применим, далее, известное преобразование

$$Bx' = \frac{2\xi'}{1 + \xi'^2}, \quad (32.69)$$

которое возвращает пластинку к ее первоначальному размеру и положению в физической плоскости, повернутой на угол  $\frac{\pi}{2}$ , так, что верхняя часть пластинки ( $z > 0$ ) попадает теперь на отрицательную ось абсцисс. В новой вспомогательной плоскости заменим  $z$  через  $-y'$ , так что для точек на пластинке уравнение (32.64а) примет вид

$$\frac{1}{x_1} \Phi_{100} = \operatorname{Re}(F_{200} - x'F_{101}). \quad (32.70)$$

Аналитические функции  $F_{200}$ ,  $F_{110}$ ,  $F_{101}$  определяют таким образом  $\Phi_{100}$  для точек на крыле (см. формулу 32.67) и на пластинке (см. формулу 32.70). Эти функции легко найти из граничных условий, условий течения на ведущих кромках и соотношений совместности (31.21).

В определенной ранее вспомогательной плоскости  $x = y + i\xi$  указанные соотношения можно записать в форме

$$dF_{200} = -x dF_{110} = x^2 dF_{020} = \frac{ix}{\sqrt{1 - B^2x^2}} dF_{101} = -\frac{ix^2}{\sqrt{1 - B^2x^2}} dF_{011}, \quad (32.71)$$

Для точек на крыле ( $\xi = 0$ ), принимая во внимание условие (32.63), имеем

$$d\Phi'_{200} = d\Phi'_{110} = 0, \quad (32.72)$$

как это можно вывести из соотношений (32.71), тогда как для точек на пластинке ( $y = 0$ ) получим

$$d\Phi'_{200} = d\Phi'_{101} = 0. \quad (32.73)$$

В свете гидродинамической аналогии функция  $F_{200}$  будет представлять комплексный потенциал фиктивного течения, в котором линии крыла и пластинки являются линиями тока; потенциал, представленный через  $F_{110}$ , позволяет крылу быть линией тока (см. формулу 32.72), а пластинке — эквипотенциальной линией (см. формулу 32.65).

Исследуя условия течения на ведущих кромках крыла и пластинки, т. е. характер стремления компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$  к бесконечности на кромках, и применяя те же рассуждения, как в случае однородных движений высшего порядка для простого крыла (см. раздел 31.3.1), увидим, что функция  $F_{200}$  будет стремиться к бесконечности, как  $[(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)]^{-3/2}$ , так что все условия удовлетворяются, если положить

$$F_{200} = i \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6}{[(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)]^{3/2}}. \quad (32.74a)$$

Используя соотношения совместности (32.71), получим

$$F_{110} = -i \int \frac{1}{x} d \left( \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6}{[(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)]^{3/2}} \right), \quad (32.74b)$$

где  $l$  — половина следа крыла в физической плоскости  $Oyz$ , а  $h_1$  легко выводится как функция высоты  $h$  пластинки из формул (30.7):

$$h_1^2 = \frac{h^2}{1 - B^2 h^2}. \quad (32.75)$$

Принимая во внимание формулу (32.67), можно записать для точек на крыле

$$\frac{1}{x_1} \Phi_{100} = \frac{u}{x_1} = \operatorname{Re} \left[ F_{200} - \overset{\text{крыло}}{x} \int \frac{1}{x} dF_{200} \right]_{\text{окружность Маха}} = \frac{a + by^2}{\sqrt{(l^2 - y^2)(h_1^2 + y^2)}} + C_1 y [F(\varphi, k) - K(k)] + C_2 y [E(\varphi, k) - E(k)], \quad (32.76)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  — постоянные,  $F(\varphi, k)$  и  $E(\varphi, k)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода,  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы.

Следующие выражения определяют  $\varphi$  и  $k$ :

$$\varphi = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{y^2(l^2 + h_1^2)}{l^2(h_1^2 + y^2)}}, \quad k^2 = \frac{l^2}{l^2 + h_1^2}. \quad (32.77)$$

Выражение (32.76) использовано ниже в форме

$$\frac{u}{x_1} = \operatorname{Re} U_1, \quad (32.78)$$

где  $U_1$  имеет то же значение, что и в рассмотренных ранее случаях.

Заметим, что приведенное выражение, рассматриваемое на крыле, является функцией от  $y = \frac{x_2}{x_1}$ .

Чтобы получить выражение для  $u$  в точках на пластинке, можно использовать тот же метод, но исходя из соотношения (32.70).

Применяя формулу (32.36), находим, что выражение для коэффициента давления получает в первом приближении следующую форму:

$$C_p = -2i\lambda e^{i\omega t} u. \quad (32.79)$$

**32.5.2. Определение приведенного потенциала  $\varphi_1$ .** Для более точного вычисления давления нужно использовать формулу (32.35), в которую

входит функция  $\varphi_1$ , пропорциональная приведенному потенциалу  $\varphi$  (см. формулу 32.57).

Для определения  $\varphi_1$  используем формулу Эйлера для однородных функций; так, для точек на крыле

$$2\varphi_1 = x_1^2\Phi_{200} + 2x_1x_2\Phi_{110} + x_2^2\Phi_{020}. \quad (32.80)$$

Деля на  $x_1^2$  и полагая снова  $y = \frac{x_2}{x_1}$ , получим

$$\frac{2}{x_1^2}\varphi_1 = \Phi_{200} + 2y\Phi_{110} + y^2\Phi_{020}, \quad (32.81)$$

или, в комплексной форме,

$$\frac{2}{x_1^2}\varphi_1 = \operatorname{Re}(F_{200} + 2xF_{110} + x^2F_{020}). \quad (32.82)$$

Соотношения совместности, определяемые уравнениями (32.71), дают

$$F_{110} = - \int \frac{1}{x} dF_{200} \quad (32.83)$$

$$F_{020} = \int \frac{1}{x^2} dF_{200}. \quad (32.84)$$

Рассматривая уравнение (32.78), можно записать

$$F_{200} = U_1 - x \frac{dU_1}{dx}, \quad (32.85)$$

$$dF_{200} = -x \frac{d^2U_1}{dx^2} dx. \quad (32.86)$$

В соответствии с равенством (31.38), будем иметь

$$F_{110} = \frac{dU_1}{dx}; \quad (32.87)$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} F_{020} &= - \int \frac{1}{x} \frac{d^2U_1}{dx^2} dx = - \frac{1}{x} \frac{dU_1}{dx} - \int \frac{1}{x^2} \frac{dU_1}{dx} dx = - \frac{1}{x} \frac{dU_1}{dx} - \\ &\quad - \frac{U_1}{x^2} + \int U_1 d\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (32.88)$$

Подставляя результаты в уравнение (32.82), получим окончательно

$$\frac{2}{x_1^2}\varphi_1 = \operatorname{Re} x^2 \int U_1 d\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (32.89)$$

**32.5.3. Определение постоянных.** Из граничных условий на крыле

$$\Phi_{011} = \frac{\psi_0}{c}, \quad \Phi_{101} = 0, \quad (32.90)$$

выводимых из равенств (32.61в) и (32.62б), и из граничных условий для пластинки

$$\Phi_{110} = 0, \quad \Phi_{011} = - \frac{\psi_0}{c}, \quad (32.91)$$

выводимых из равенств (32.61б) и (32.64б), вытекает, что постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  из выражения (32.76) можно определить из следующих четырех уравнений, полученных из соотношений совместности:

$$0 = \operatorname{Re} \left( \frac{dU_1}{dx} \right)_{\text{пластинка}}; \quad (32.92)$$

$$0 = \operatorname{Re} \int_{\text{окружность Маха}}^{\text{крыло}} i \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx; \quad (32.93)$$

$$-\frac{\psi_0}{c} = \operatorname{Re} \int_{\text{окружность Маха}}^{\text{крыло}} \frac{i \sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx; \quad (32.94)$$

$$\frac{\psi_0}{c} = \operatorname{Re} \int_{\text{окружность Маха}}^{\text{пластинка}} \frac{i \sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{d^2 U_1}{dx^2} dx. \quad (32.95)$$

Легко заметить, что выражение  $u$  на крыле является функцией переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и зависит также от данных задачи, т. е.  $l$ ,  $h$  и  $\psi_0$ .

Выражение для  $u$  на пластинке может быть получено из выражения для  $u$  в точках на крыле путем замены  $x_2$  на  $x_3$  и перестановки  $l$  и  $h$ .

## 32.6. Теория высокочастотных гармонических колебаний крыльев бесконечного размаха

Если частота гармонического колебания так велика, что величиной  $\lambda^2$ , определенной уравнением (32.18), нельзя пренебречь, то решение уравнения (32.20) для приведенного потенциала становится чрезвычайно трудным. Чтобы упростить задачу, Карман ввел преобразование Фурье и с его помощью привел уравнение для потенциала к известной форме, для которой решение получается непосредственно. Ниже даются сведения, касающиеся преобразования Фурье.

**32.6.1. Преобразование Фурье.** Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную для действительных значений  $x$  и интегрируемую вдоль всей оси  $Ox$ ; можно доказать следующее соотношение, называемое комплексной формой интеграла Фурье [23]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} e^{in(u-x)} f(u) du. \quad (32.96)$$

Выражение

$$F(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inu} f(u) du \quad (32.97)$$

называется преобразованием Фурье функции  $f(u)$ . Применяя равенство (32.96), получим соотношение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} F(n) dn, \quad (32.98)$$

называемое обратным преобразованием Фурье функции  $F(n)$ .

Преобразования Фурье любых функций обозначаются обычно через прописные буквы и соответствие между функцией и ее преобразованием обозначается так:

$$f(x) \rightarrow F(n), \quad g(x) \rightarrow G(n) \text{ и т. д.}$$

Можно также доказать следующую теорему свертки

$$\int_0^x f(s) g(x-s) ds \rightarrow F(n) G(n), \quad (32.99)$$

которая использована ниже.

Рассмотрим функцию  $f(x_1)$ , которая равна нулю для  $x_1 < 0$  и имеет производную  $\frac{df}{dx_1}$ , когда  $x_1 \geq 0$ , как в случае приведенного потенциала, определяемого уравнением (32.20); преобразование такой функции будет

$$F(n) = \int_0^{\infty} e^{inx_1} f(x_1) dx_1; \quad (32.100)$$

отметим также, что обобщенное обратное преобразование Фурье определяется соотношением

$$f(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-inx_1} F(n) dn, \quad (32.101)$$

где  $ia$  — мнимая часть  $n$ , причем величина  $a$  положительна и больше некоторого заданного числа [24].

Приведенные соотношения, которые были даны как определения, применены ниже к задачам, касающимся гармонических колебаний крыльев и тонких тел.

**32.6.2. Приложение к крылу бесконечного размаха.** В случае крыла бесконечного размаха уравнение (32.20) принимает вид:

$$-B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\lambda^2 M_\infty^2}{c^2 B^2} \varphi; \quad (32.102)$$

по предположению, второй частью уравнения пренебречь нельзя.

Если функция  $f(x_1, x_3)$  является приведенным потенциалом скорости возмущения, то, в силу равенства (32.101):

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3) &\rightarrow F(n; x_3), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &\rightarrow -inF(n; x_3), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} &\rightarrow -n^2 F(n; x_3). \end{aligned} \quad (32.103)$$

Взяв преобразование каждой части уравнения (32.102), получим простое уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} + \sigma^2 F = 0, \quad (32.104)$$



где

$$\sigma^2 = B^2 (n^2 - n_0^2), \quad \left( n_0 = \frac{\lambda M_\infty}{c B^2} \right). \quad (32.105)$$

Так как функция  $\varphi(x_1, x_3)$  при  $x_3 \rightarrow \infty$  ограничена, то это свойство относится также и к  $F(n, x_3)$ .

Обозначая через  $B(n)$  функцию от  $n$ , будем иметь

$$F(n; x_3) = \frac{i}{\sigma} B(n) e^{i\sigma x_3}; \quad (32.106)$$

заметим, что мнимая часть  $\sigma$  должна быть положительна.

На крыле ( $x_3 = 0$ )

$$F(n; 0) = \frac{i}{\sigma} B(n). \quad (32.107)$$

Дифференцируя обе части соотношения (32.106) по переменной  $x_3$ , получим для точек на крыле ( $x_3 = 0$ )

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = -B(n). \quad (32.108)$$

Первая часть представляет преобразование приведенного скоса потока  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ , следовательно,  $-B(n)$  также является таким преобразованием; обозначим его через  $\beta(x_1, 0)$ .

Заметим, что  $\frac{iB}{\sigma}$  является преобразованием функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(n_0 x_1)$ , интегральная форма которой будет

$$J_0(n_0 x_1) = \frac{1}{2\pi i} \int t^{-1} e^{\frac{n_0 x_1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)} dt, \quad (32.109)$$

причем интеграл берется по замкнутой кривой; полагая  $t = ie^{i\Psi}$ , получим

$$J_0(n_0 x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in_0 x_1 \cos \Psi} d\Psi. \quad (32.110)$$

Преобразование этой функции, очевидно, запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{inx_1} J_0(n_0 x_1) dx_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\infty e^{ix_1 (n + n_0 \cos \Psi)} dx_1 = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi}{n + n_0 \cos \Psi} = \frac{i}{\sqrt{n^2 - n_0^2}} = \frac{iB}{\sigma}; \end{aligned} \quad (32.111)$$

полагая

$$J_0(n_0 x_1) \rightarrow \frac{iB}{\sigma}, \quad \beta(x_1, 0) \rightarrow -B(n),$$

находим, в соответствии с равенством (32.107),

$$B\varphi(x_1, 0) \rightarrow BF(n; 0) = \frac{iB}{\sigma} B(n). \quad (32.112)$$

Применяя теорему свертки, имеем

$$\int_0^{x_1} \beta(x_1, 0) J_0[n_0(x_1 - s)] ds = \int_0^{x_1} \beta(x_1 - s, 0) J_0(n_0 s) ds \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{iB}{\sigma} B(n). \quad (32.113)$$

Окончательно получим

$$B\varphi(x_1, 0) = -\int_0^{x_1} \beta(x_1 - s, 0) J_0(n_0 s) ds. \quad (32.114)$$

Действительный скос потока  $w(x_1, 0)$  и потенциал  $\Phi(x_1, 0)$  связаны соотношением

$$B\Phi(x_1, 0) = -\int_0^{x_1} w(x_1 - s, 0) e^{iks} J_0(n_0 s) ds = \\ = -\int_0^{x_1} w(x_1, 0) e^{ik(x_1 - s)} J_0[n_0(x_1 - s)] ds. \quad (32.115)$$

Применяя формулу (32.34), получим равенство, выражающее коэффициент давления, в форме, данной Тэмплем [25]:

$$C_p = \frac{2}{BU_\infty} \left[ w(x_1) - \int_0^{x_1} w(s) \frac{\partial G}{\partial s} ds + i\lambda \int_0^{x_1} w(s) G ds \right], \quad (32.116)$$

где

$$G = e^{ik(x_1 - s)} J_0[n_0(x_1 - s)]. \quad (32.117)$$

Приведенная формула получена несколькими авторами [26 — 31] при помощи различных методов. Для простых гармонических колебаний скос потока  $w(x_1)$  полностью определяется по формуле [32.28], так что теоретически вычисление давления не представляет трудности. Эту формулу можно использовать шире при изучении явлений, которые не являются чисто периодическими, таких, как порыв ветра, исследованный Майльсом [32].

### 32.7. Применение двойного преобразования Фурье к крыльям конечного размаха

Применения двойного преобразования Фурье к различным задачам, касающимся крыльев конечного размаха, очень многочисленны и приводят к конкретным решениям обычных случаев переменного движения дельтообразного и прямоугольного крыльев.

Этот метод с успехом распространен на задачи дозвукового течения, причем получены замечательные результаты. В работе Темпля [25] рассматриваются важные задачи дозвукового и сверхзвукового течений.

Основой метода является двойное преобразование Фурье [33]. Полагая

$$F(n; y, z) = \int_0^{\infty} e^{inx} f(x, y, z) dx,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_+(n, \nu; z) = \int_0^{\infty} e^{i\nu y} F(n; y, z) dy, \quad (32.118)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_-(n, \nu; z) = \int_{-\infty}^0 e^{i\nu y} F(n; y, z) dy,$$

показываем связь двойного преобразования с исходной функцией тем же способом, что и в случае простого преобразования:

$$f(x, y; z) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_+(n, \nu; z), \quad \tilde{\mathcal{F}}_-(n, \nu; z),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow -n^2 \tilde{\mathcal{F}}_+(n, \nu; z), \quad -n^2 \tilde{\mathcal{F}}_-(n, \nu; z),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_+}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_-}{\partial z^2}, \quad (32.119)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rightarrow -\nu^2 \tilde{\mathcal{F}}_+(n, \nu; z) + H, \quad -\nu^2 \tilde{\mathcal{F}}_-(n, \nu; z) - H,$$

где

$$H = -\frac{\partial F(n; 0, z)}{\partial y} + i\nu F(n; 0, z). \quad (32.120)$$

Обозначая через  $\mathcal{B}_+(n, \nu)$  и  $\mathcal{B}_-(n, \nu)$  двойные преобразования приведенного скоса потока  $\beta(x, y)$ , будем иметь на крыле ( $z = 0$ )

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_+}{\partial z} = \mathcal{B}_+(n, \nu), \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_-}{\partial z} = \mathcal{B}_-(n, \nu). \quad (32.121)$$

Выполнив необходимые операции, преобразуем уравнение приведенного потенциала к виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_+}{\partial z^2} + \tau^2 \tilde{\mathcal{F}}_+ = -H, \quad (32.122a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_-}{\partial z^2} + \tau^2 \tilde{\mathcal{F}}_- = H, \quad (32.122b)$$

где

$$\tau^2 = B^2(n^2 - n_0^2) - \nu^2 = \sigma^2 - \nu^2, \quad (32.123)$$

причем  $n$  и  $n_0$  имеют прежние значения (см. формулу 32.105).

Рассматривая значения, которые принимает на крыле ( $z = 0$ ) приведенный потенциал скорости, выразим решение следующими основными формулами

$$i\tau \tilde{\mathcal{F}}_+(n, \nu; 0) = \mathcal{B}_+(n, \nu; 0) - K_0, \quad (32.124a)$$

$$i\tau \tilde{\mathcal{F}}_-(n, \nu; 0) = \mathcal{B}_-(n, \nu; 0) + K_0, \quad (32.124b)$$

где

$$K_0 = \int_0^{\infty} e^{-i\tau\xi} H(\xi) d\xi. \quad (32.125)$$

С помощью этих формул нашли простое решение многочисленные конкретные задачи, путем перехода от двойных преобразований к их исходным функциям [33 — 37].

### 32.8. Гармонические колебания тонких тел вращения

Рассмотрим очень тонкое тело вращения, полная длина которого обозначается через  $c$ , отнесенное к правосторонней прямоугольной координатной системе  $Ox_1, x_2, x_3$ . Предполагая, что ось  $Ox_1$  направлена вдоль оси тела и ось  $Ox_2$  вдоль вертикали, рассмотрим цилиндрическую координатную систему  $x_1, r, \theta$ , определяемую равенствами

$$x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta. \quad (32.126)$$

Предположим, что имеются движения: поперечное поступательное, направленное вдоль  $Ox_2$ ,

$$\eta = \eta_0 e^{i\omega t}, \quad (32.127)$$

вращение около оси  $Ox_3$

$$\psi = \psi_0 e^{i\omega t}. \quad (32.128)$$

Скорость любой точки  $x_1$  на оси тела направлена вдоль  $Ox_2$  и выражается соотношением

$$\frac{d\eta}{dt} + x_1 \frac{d\psi}{dt} = i\lambda U_\infty \left( \frac{\eta}{c} + \frac{x_1}{c} \psi \right), \quad (32.129)$$

где  $\lambda$  имеет прежнее значение (см. формулу 32.18). Предполагая, что радиус кругового поперечного сечения очень мал, можно рассматривать определенную выше скорость как приближенно равную скорости в точке на поверхности тела, для того же значения координаты  $x_1$ .

Обращаясь к фиг. 1.17 и подставляя  $\theta$  вместо  $\omega$ , получим радиальную скорость (которая приближенно будет нормальна к телу в сечении  $x_1$ ) в точке, определяемой углом  $\theta$ :

$$v_r = i\lambda U_\infty \left( \frac{\eta}{c} + \frac{x_1}{c} \psi \right) \cos \theta. \quad (32.130)$$

Компоненты скоростей воздушного потока в той же точке будут соответственно  $U_\infty + u, v, w$ . Так как направляющие косинусы нормали имеют значения

$$-\psi \cos \theta, \cos \theta, \sin \theta,$$

то результирующая скорость  $v_n$  вдоль нормали к поверхности тела, которая приближенно равна радиальной компоненте, будет

$$v_n = -(U_\infty + u)\psi \cos \theta + v \cos \theta + w \sin \theta \approx v_r. \quad (32.131)$$

Если  $\Phi$  — потенциал скорости возмущения, то нормальная компонента скорости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -u\psi \cos \theta + v \cos \theta + w \sin \theta \approx \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (32.132)$$

и уравнение (32.131) принимает вид

$$v_r = -U_\infty \psi \cos \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad (32.133)$$

приравнивая этот результат значению (32.130), получим

$$\begin{aligned} U_{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \left(1 + i\lambda \frac{x_1}{c}\right) \psi \cos \theta + i\lambda \frac{\eta}{c} \cos \theta = \\ &= \left[\left(1 + i\lambda \frac{x_1}{c}\right) \psi_0 + i\lambda \frac{\eta_0}{c}\right] e^{i\omega t} \cos \theta. \end{aligned} \quad (32.134)$$

Записывая левую часть уравнения (32.16) для потенциала в цилиндрических координатах (см. формулу 5.55б), но заменив  $\varphi$  через  $\Phi$  и  $\omega$  через  $\theta$ , получим

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a_{\infty}^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2U_{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \right). \quad (32.135)$$

Из уравнения (32.134) очевидно, что потенциал  $\Phi$  пропорционален  $\cos \theta$ , следовательно,

$$\Phi = \cos \theta P(x_1, r), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\Phi. \quad (32.136)$$

Определяя, как выше, приведенный потенциал соотношением (32.17), получим после некоторых простых вычислений дифференциальное уравнение для приведенного потенциала в цилиндрических координатах:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2} = \frac{\lambda^2}{c^2} \frac{M_{\infty}^2}{M_{\infty}^2 - 1}. \quad (32.137)$$

Так как  $\varphi = 0$ , при  $x_1 \leq 0$ , то можно применить тот же метод, что и в случае крыла бесконечного размаха, используя преобразование Фурье для приведенного потенциала

$$\varphi(x_1, r) \rightarrow F(n; r).$$

Используя прежние обозначения и взяв преобразование каждой части записанного выше уравнения, будем иметь

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left[ B^2 (n^2 - n_0^2) - \frac{1}{r^2} \right] F = 0. \quad (32.138)$$

Радиус любого сечения тела продолжаем предполагать очень малым. Так как интерес представляет движение вблизи тела, то решение уравнения (32.138) дано для значений  $r$ , близких к нулю.

В этом случае главный член функции  $F(n, r)$  выразится в форме

$$F(n; r) \approx \frac{Q(n)}{r} \cos \theta + \dots; \quad (32.139)$$

отсюда, производя обратное преобразование, получим

$$\varphi(x_1, r) = \frac{q(x_1)}{r} \cos \theta + \dots, \quad (32.140)$$

или

$$\Phi = U_{\infty} e^{i(\omega t + kx_1)} \frac{q(x_1)}{r} \cos \theta + \dots \quad (32.141)$$

Дифференцируя и приравнявая результат ко второй части уравнения (32.134), находим

$$\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - e^{i(\omega t + kx_1)} \frac{q(x_1)}{r^2} \cos \theta = \left[ \left(1 + i\lambda \frac{x_1}{c}\right) \psi_0 + i\lambda \frac{\eta_0}{c} \right] e^{i\omega t} \cos \theta. \quad (32.142)$$

Отсюда

$$q(x_1) = e^{-ikx_1} \left[ \left(1 + i\lambda \frac{x_1}{c}\right) \psi_0 + i\lambda \frac{\eta_0}{c} \right] r^2 = - e^{-ikx_1} Q(x_1) r^2, \quad (32.143)$$

где  $Q(x_1)$  заменяет члены в скобках. Окончательно будем иметь

$$\Phi = - U_\infty e^{i\omega t} Q(x_1) r \cos \theta = - U_\infty e^{i\omega t} \frac{Q(x_1)}{\pi r} \pi r^2 \cos \theta. \quad (32.144)$$

Так как требуется определить движение на поверхности тела, то  $r$  будет радиусом кругового поперечного сечения, который обозначим через  $R$ ; обозначая это сечение, изменяющееся в зависимости от  $x_1$ , через  $S(x_1)$ , получим

$$\Phi = - U_\infty e^{i\omega t} \frac{Q(x_1) S(x_1)}{\pi R} \cos \theta. \quad (32.145)$$

Применяя уравнение для давления (32.34), получим коэффициент давления в любой точке  $x_1$ , определенный Стюартсоном [35]:

$$C_{p-} = 2 e^{i\omega t} \cos \theta \left[ i\lambda R Q(x_1) + R \frac{dQ}{dx_1} + 2Q(x_1) \frac{dR}{dx_1} \right]. \quad (32.146)$$

Простым интегрированием вдоль тела можно получить без особых трудностей поперечную силу, действующую на тело, и момент относительно оси  $Ox_3$ .

### 33. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА, ОХВАТЫВАЮЩАЯ КАК ПРЯМЫЕ, ТАК И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Целью предшествующих глав было изучение конических течений высшего порядка в применении к тонким дельтообразным крыльям с дозвуковыми ведущими кромками, к дельтообразным крыльям симметричной толщины, а также к тонким треугольным крыльям с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками.

Обобщим эту теорию, применяя ее единообразным путем к каждому случаю прямой задачи и распространяя ее и на обратные задачи.

#### 33.1. Предварительные рассуждения

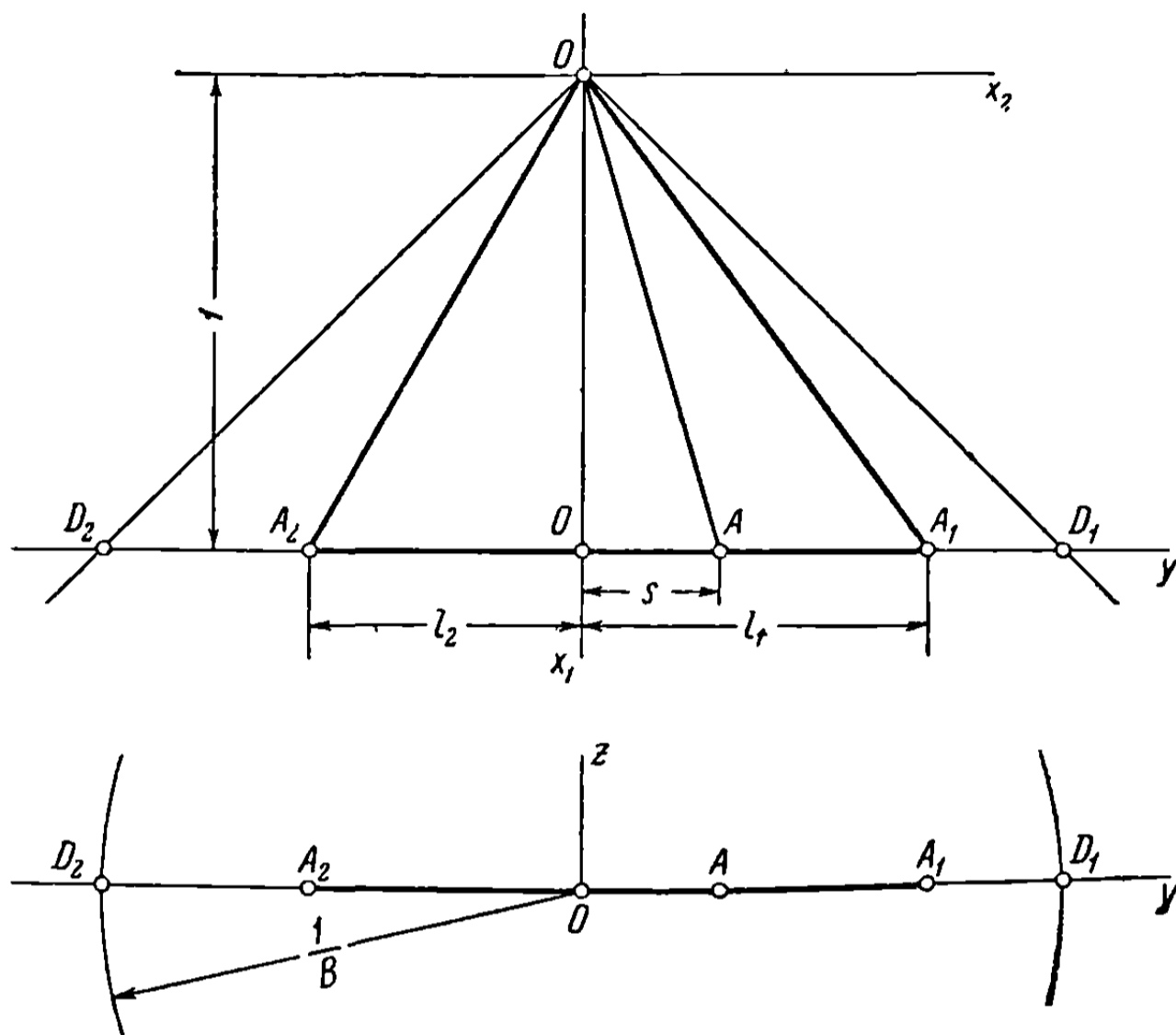
Определим прежде всего указанные две задачи.

Прямая задача состоит в нахождении распределения давления на заданном крыле (или осевой скорости возмущения, которая пропорциональна коэффициенту давления); обратная задача состоит в определении деформации, или искривления крыла, распределение давления по поверхности которого заранее задано. Это определение рассматриваемых задач хотя и не полностью сов-

падает с определением, даваемым некоторыми авторами, тем не менее является точным.

Как и в случаях, разобранных в предыдущих главах, отнесем крыло к системе осей  $Ox_1x_2x_3$ , начало которых находится в вершине крыла, тогда как ось  $Ox_1$  будет параллельна скорости свободного потока  $U_\infty$ .

На крыле наряду с ведущими кромками  $OA_1$  и  $OA_2$  может существовать ребро  $OA$  (фиг. 33.1).



Фиг. 33.1

В случае прямой задачи это ребро отделяет, по определению, две области с различными скосами потока, в случае обратной оно разделяет области с различными режимами давления.

Предположим, что угол атаки или наклон в первом случае и распределение давления по крылу в последнем изменяются в соответствии с законом, определяемым однородным полиномом  $(n - 1)$ -го порядка относительно  $x_1, x_2$ . Получающееся в результате течение определяется потенциалом скорости  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ , также представляющим однородную функцию высшего порядка, а именно порядка  $n$ .

Для симметричного толстого крыла в прямой задаче ребро  $OA$  играет ту же роль, что и ведущая кромка. Такое же замечание может быть сделано для тонкого крыла в случае обратной задачи.

Поскольку скорости  $u, v, w$  как производные потенциала  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  по переменным  $x_1, x_2, x_3$  являются однородными функциями  $(n - 1)$ -го порядка, формулы Эйлера для точек на крыле ( $\delta = 0$ ), могут быть записаны в виде

$$(n - 1)! u = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q, q, 0} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q, q, 0}, \quad (33.1a)$$

$$(n - 1)! w = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q-1, q, 1} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q-1, q, 1}, \quad (33.16)$$

причем комплексная переменная  $x = y + iz$  соответствует вспомогательной плоскости (см. формулу 31.11).

Рассмотрим прямую задачу и ее соответствующее приложение к гармоническим колебательным движениям, а также и обратную задачу.

### 33.2. Общее выражение для осевой скорости и на крыле (прямая задача)

Как было изложено выше, эта задача являлась объектом многочисленных исследований. Самим автором была развита единообразная теория, использующая общее решение, которое охватывает все возможные случаи применения. Здесь дается краткое описание этой теории [38, 39].

Примем, что скос потока  $\omega$  на крыле определяется однородным полиномом порядка  $(n - 1)$

$$\omega_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_{n-1-q, q} x_1^{n-1-q} x_2^q, \quad (33.2)$$

где коэффициенты  $\omega_{n-1-q, q}$  постоянны; следовательно, согласно выражению (33.16),

$$C_{n-1}^q \Phi_{n-1-q, q, 1} = (n-1)! \omega_{n-1-q, q} \quad (d\Phi_{n-1-q, q, 1} = 0). \quad (33.3)$$

Введем аналитические функции

$$F_{n-q-1, q, 1} = \Phi_{n-q-1, q, 1} + i\Phi'_{n-q-1, q, 1}, \quad F_{n-q, q, 0} = \Phi_{n-q, q, 0} + i\Phi'_{n-q, q, 0}; \quad (33.4)$$

отсюда вытекает условие на следе крыла, выводимое из соотношений совместности (31.21):

$$d\Phi_{n-1-q, q, 1} = d\Phi'_{n-q, q, 0} = 0. \quad (33.5)$$

Легко убедиться, что функция  $F_{n-q, q, 0}$  может представлять потенциал несжимаемого фиктивного течения, для которого след крыла является линией тока.

Рассмотрим ребро  $OA$ , вдоль которого скорость переходит от значения 0 к значению  $\omega_{n-1}$  и дозвуковую ведущую кромку  $OA_1$  тонкого крыла (см. фиг. 33.1). След в плоскости  $x$  будет соответственно  $y = s$  для ребра и  $y = l_1$  для ведущей кромки.

Ведущая кромка  $A_2 (y = -l_2)$  может также рассматриваться как дозвуковая.

Осевая скорость возмущения в непосредственной близости этих точек имеет следующие асимптотические представления:

$$u_{y \rightarrow s} = K \ln |s - y|, \quad u_{y \rightarrow l_1} = K_1 (l_1 - y)^{-1/2}, \quad u_{y \rightarrow -l_2} = K_2 (l_2 + y)^{-1/2}. \quad (33.6)$$

Указанные соотношения вытекают из свойств конического течения первого порядка, которое предполагается установленным при местных условиях около точек  $y = s$ ,  $y = l_1$ , соответственно  $y = -l_2$ . Действительно, производная  $(n - 1)$ -го порядка от  $u$ , которая ранее обозначалась через  $\Phi_{n-q, q, 0}$ , будет включать в тех же точках ряды особенностей, которые содержит



функция  $F_{n-q, q, 0}$ , а именно: особенности, соответствующие точке  $A$  ребра, имеющие вид

$$\ln(s-x), \frac{1}{s-x}, \dots, \frac{1}{(s-x)^{n-1}} \quad (33.7)$$

особенности, отвечающие точке  $A_1$  ведущей кромки тонкого крыла, соответственно точке  $A_2$ , в виде

$$(l_1-x)^{-1/2}, (l_1-x)^{-3/2}, \dots, (l_1-x)^{-n+1/2}, \quad (33.8a)$$

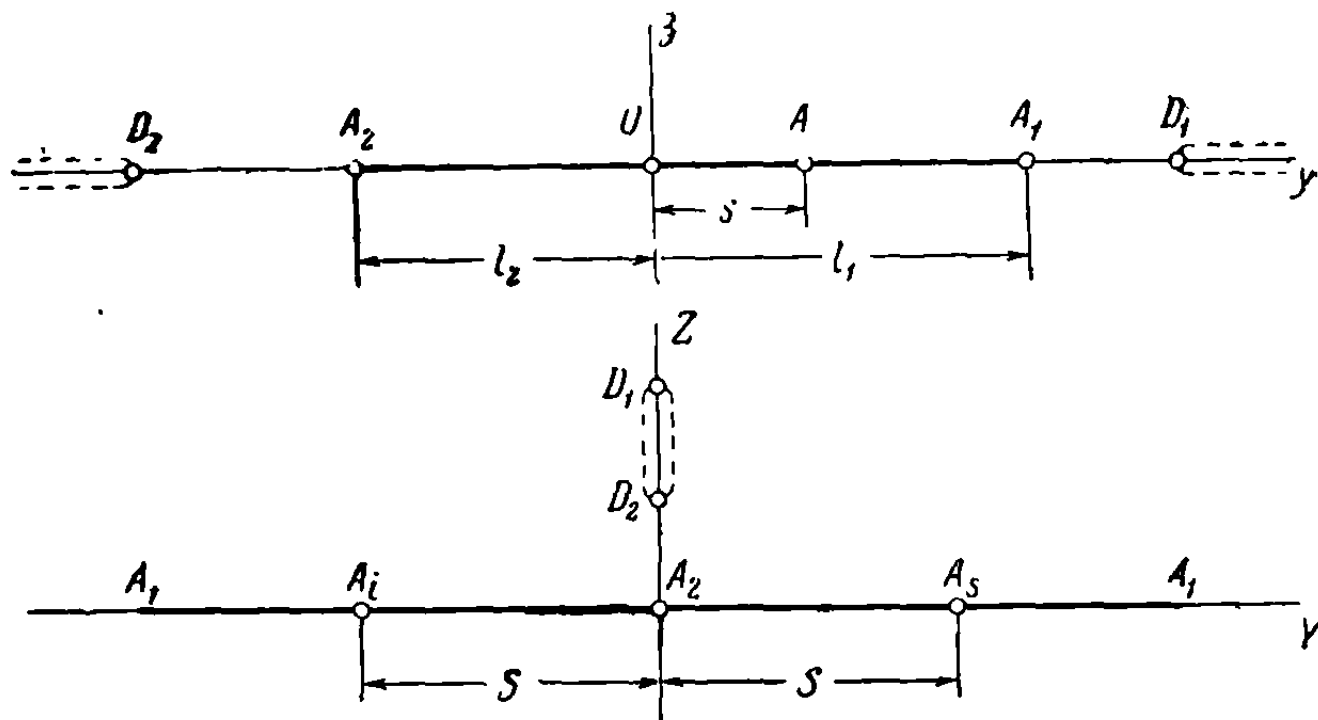
$$(l_2+x)^{-1/2}, (l_2+x)^{-3/2}, \dots, (l_2+x)^{-n+1/2}. \quad (33.8b)$$

Решение легко найти в форме потенциала  $F_{n-q, q, 0}$ , соответствующего фиктивному течению несжимаемой жидкости, для которого след крыла, согласно уравнению (33.5), является линией тока. Используем плоскости, определяемые преобразованиями

$$X^2 = \frac{l_2+x}{l_1-x}, \quad X^2 = \frac{1/B+x}{l_1-x}, \quad X^2 = \frac{l_2+x}{1/B-x}, \quad X^2 = \frac{1/B+x}{1/B-x}, \quad (33.9)$$

применимыми соответственно:

- к тонкому крылу с дозвуковыми ведущими кромками;
- к крылу со сверхзвуковой ведущей кромкой  $A_2$  ( $l_2 > 1/B$ ), получаемой из первой путем подстановки  $1/B$  вместо  $l_2$ ;



Фиг. 33.2

к тонкому крылу со сверхзвуковой ведущей кромкой  $A_1$  ( $l_1 > \frac{1}{B}$ ), также получаемой из первой с помощью подстановки  $1/B$  вместо  $l_1$ ;

к крылу со сверхзвуковыми ведущими кромками  $l_1 > \frac{1}{B}$ ,  $l_2 > \frac{1}{B}$  или к симметричному толстому крылу, причем  $l_1$  и  $l_2$  заменяются на  $1/B$ .

Рассмотрим течение вокруг ребер и ведущих кромок, чтобы определить соответствующие им эффекты.

**33.2.1. Влияние ребра.** Рассмотрим тонкое крыло с дозвуковыми ведущими кромками, к которому в дальнейшем применим первое преобразование (33.9).

В новой плоскости  $X = Y + iZ$ , где ось абсцисс является линией тока и ось ординат — эквипотенциальной линией (фиг. 33.2), фиктивный потенциал  $F_{n-q, q, 0}$  обусловленный источником и мультиполями в точках

$A_s$  и  $A_i(Y = +S)$ , соответствующими ребру, расположенному в точке  $y = s$  физической плоскости, дается выражением

$$F_{n-q, q, 0} = A_0 \ln \frac{X-S}{X+S} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \left[ \frac{1}{(X-S)^j} - \frac{(-1)^j}{(X+S)^j} \right], \quad (33.10)$$

которое в плоскости  $x$  принимает вид

$$F_{n-q, q, 0} = A_0 \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(l_2+x)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + iC \right] + \frac{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}}{(x-s)^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-2} C_q x^q. \quad (33.11)$$

где  $iC$  — мнимая постоянная<sup>1</sup>.

Применяя формулу Эйлера (33.1a) и замечая, что скорость  $u$  стремится к бесконечности как  $\ln|s-y|$ , получим окончательно

$$u = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(l_2+x)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + iC \right) \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}}{(x-s)^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-2} D_r x^r \right] = x_1^{n-1} \operatorname{Re} U_{n-1}, \quad (33.12)$$

где  $U_{n-1}$  представляет аналитическую функцию, заключенную в скобках.

Если ведущая кромка  $A_2$  (или, возможно,  $A_1$ ) сверхзвуковая, то  $l_2$  заменяется через  $\frac{1}{B}$  (или  $l_1$  на  $\frac{1}{B}$ ); если обе ведущие кромки сверхзвуковые, то нужно положить  $l_1 = l_2 = \frac{1}{B}$ , и формула (33.12) сохранит свою общность. В этом случае преобразование также принимает соответствующие формы, указанные выше (см. формулы 33.9). Если ребро  $A$  будет сверхзвуковым ( $s > \frac{1}{B}$ ), то, заменяя  $l_1$  на  $\frac{1}{B}$ , получим

$$u = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(Bs-1)(l_2+x)}{(1+Bl_2)(s-x)}} + i \frac{\pi}{2} \right) \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\frac{1}{B}-x\right)(l_2+x)} \sum_{r=0}^{n-2} D_r x^r \right], \quad (33.13)$$

тогда как если  $A$  совпадает со сверхзвуковой ведущей кромкой  $A_1$ , то в формуле нужно положить  $s = l_1$ .

Влияние ведущих кромок. Что касается особенностей, соответствующих ведущей кромке, например,  $A_2$ , то обусловленный ими потенциал имеет в плоскости  $X$  выражение

$$F_{n-q, q, 0}^{(2)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_{2j-1}}{X^{2j-1}}, \quad (33.14)$$

<sup>1</sup> Мнимая постоянная  $iC$  не играет никакой роли, если кромка дозвуковая. В случае сверхзвуковой кромки имеем  $C = \frac{\pi}{2}$ , если  $s > \frac{1}{B}$ , или  $C = 0$ , если  $s < -\frac{1}{B}$ .

как доказываемым посредством (33.8б) и 33.9); в плоскости  $x$  этот потенциал легко получается в виде

$$F_{n-q, q, 0}^{(2)} = \sqrt{\frac{l_1 - x}{l_2 + x}} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{a_q x^q}{(x + l_2)^{n-1}}. \quad (33.15)$$

Ту же процедуру можно применить к ведущей кромке  $A_1$ , если перевернуть дробь в первом преобразовании (33.9) и положить

$$X^2 = \frac{l_1 - x}{l_2 + x}. \quad (33.16)$$

Посредством дальнейших вычислений, применяя формулу Эйлера (33.1а), получим окончательно равенства:

$$u^{(2)} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{l_1 - x}{l_2 + x}} \sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(2)} x^m = x_1^{n-1} \operatorname{Re} U_{n-1}^{(2)}, \quad (33.17a)$$

$$u^{(1)} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{l_2 + x}{l_1 - x}} \sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(1)} x^m = x_1^{n-1} \operatorname{Re} U_{n-1}^{(1)}, \quad (33.17б)$$

$$u = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} \sum_{m=0}^n A_m x^m = x_1^{n-1} \operatorname{Re} U_{n-1}, \quad (33.17в)$$

которые представляют соответственно влияния ведущих кромок  $A_2$ ,  $A_1$  и обеих одновременно.

Подставляя  $l_1 = \frac{1}{B}$  в уравнение (33.17а), получим скорость, соответствующую случаю дозвуковой ведущей кромки, причем другая ведущая кромка  $A_1$  будет сверхзвуковой. Полагая, в уравнении (33.17б)  $l_2 = \frac{1}{B}$ , будем иметь случай дозвуковой ведущей кромки, в то время как ведущая кромка  $A_2$  будет сверхзвуковой.

**33.2.2. Примеры применения.** Рассмотрим симметричное тонкое крыло, называемое дельтообразным ( $l_1 = l_2 = l$ ), и предположим, что ребром служит сама ось симметрии, а именно  $s = 0$ . Совместным применением формул (33.12) и (33.17в) получим решение. Так как компонента  $u$  симметрична относительно оси симметрии крыла, то числа  $q$  и  $r$  будут четными.

Вследствие наличия ребра получаем

$$u^{(0)} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x+l}{2x}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2k} x^{2k} + \sqrt{l^2 - x^2} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} D_{2k} x^{2k} \right], \quad (33.18)$$

тогда как ведущие кромки дают

$$u^{(l)} = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2k} x^{2k}. \quad (33.19)$$

Символ  $E(t)$  представляет наибольшее целое число, не превышающее  $t$ . Комбинируя эти две формулы и замечая, что

$$\operatorname{Re} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x+l}{2x}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}}, \quad (33.20)$$

получим окончательно

$$u = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2k} x^{2k} + \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{2k} x^{2k} \right]. \quad (33.21)$$

Для более легкого понимания описанного выше метода исследования можно указать второй пример, касающийся дельтообразного крыла симметричной толщины [см. формулы (31.118) и (31.119)]. Здесь каждая из ведущих кромок  $OA_1$  и  $OA_2$  играет роль ребра. Следовательно, формулу (33.12), в которой  $\frac{1}{B}$  заменяет  $l_1$  и  $l_2$ , нужно трижды применить для трех точек  $s = 0$ ,  $s = \pm l$ . Формула будет иметь вид:

$$u = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1 - Bs)(1 + Bx)}{2B(x - s)}} \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \sqrt{1 - B^2 x^2} \sum_{r=0}^{n-2} D'_r x^r \right]. \quad (33.22)$$

Так как значения  $u$  симметричны относительно оси крыла, то отсюда следует, что  $r$  будет четным числом ( $r = 2k$ ) и что необходимо выполнение равенств

$$C_{2k+1}^{(+)} = -C_{2k+1}^{(-)}, \quad C_{2k}^{(+)} = C_{2k}^{(-)} \quad (33.23)$$

для коэффициентов  $C_q$ , соответствующих кромкам  $\pm l$ .

Отсюда получим следующие упрощения:

$$\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(x + l)}} + \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1 - Bl)(1 + Bx)}{2B(x - l)}} \right] = \\ = \operatorname{Re} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}}. \quad (33.24a)$$

$$\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(x + l)}} - \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1 - Bl)(1 + Bx)}{2B(x - l)}} \right] = \\ = \operatorname{Re} \operatorname{Arch} Bl \sqrt{\frac{(1 - B^2 x^2)}{B^2 (l^2 - x^2)}}. \quad (33.24b)$$

При  $s = 0$  в результате симметрии  $q$  будет всегда четно ( $q = 2k$ ) и одновременно может быть применена формула (33.20), но с заменой величины  $l$  на  $\frac{1}{B}$ .

В конечном результате получатся выражения (31.118) и (31.119), уже найденные выше.

**33.2.3. Определение постоянных.** Уже было показано, что явное выражение для  $u$ , охватывающее все задачи треугольных крыльев в сверхзвуковом потоке, можно найти путем комбинирования формул (33.12) и (33.17).

Для определения постоянных используем сначала соотношения совместности, представленные в особой форме:

$$(-1)^q x^q \frac{ix}{\sqrt{1 - B^2 x^2}} dF_{n-q-1, q, 1} = (-1)^{n-1} x^{n-1} dF_{1, n-1, 0}; \quad (33.25)$$

отсюда

$$\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} (-1)^{n-q} i \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2} dF_{1, n-1, 0}. \quad (33.26)$$

Подставляя  $d^n \frac{U_{n-1}}{dx^n} dx$  вместо  $dF_{1,n-1,0}$ , в соответствии с (31.38), получим уравнение

$$\Phi_{n-q-1, q, 1} = \operatorname{Re} \left[ (-1)^{n-q} i \int_a^b x^{n-q-2} \sqrt{1-B^2x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx \right]. \quad (33.27)$$

Из сравнения выражения (33.2) с формулой Эйлера (33.16) видим, что  $\Phi_{n-q-1, q, 1}$  пропорциональна  $\omega_{n-q-1, q}$ ; следовательно, первая часть предшествующего уравнения будет определяться как функция коэффициентов разложения  $\omega$  по однородным полиномам  $(n-1)$ -го порядка.

Что касается пределов интегрирования во второй части, то они разъяснены ниже.

Таким образом, получим  $n$  соотношений для каждого ребра или ведущей кромки. Следует заметить, что все производные в точках  $x = \pm \frac{1}{B}$  должны обратиться в нуль. Это условие приводит к следующим  $2(n-1)$  уравнениям

$$\left( \frac{d^p U_{n-1}}{dx^p} \right)_{x=\pm \frac{1}{B}} = 0, [p = 1, 2, \dots, (n-1)]. \quad (33.28)$$

Последнее условие найдем, замечая, что в центре

$$\left( \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} \right)_{x=0} = 0, \quad (33.29)$$

если в этой точке нет ребра. Следует указать, что даже если ось  $Ox_1$  является ребром, скорость  $u$  должна быть конечной в точке  $x = 0$ . Таким образом, получается новое уравнение, которое заменяет уравнение (33.29). Более подробные детали можно найти в работе [29].

**З а м е ч а н и е.** Интеграл во второй части равенств (33.26) или (33.27) должен вычисляться по полуокружности очень малого радиуса, описанной вокруг ребра; в случае дозвуковой ведущей кромки тонкого крыла двумя пределами интеграла будут соответственно след крыла и окружность Маха.

### 33.3. Общее решение для гармонического движения низкой частоты

Полученные результаты непосредственно применимы к течениям, обусловленным неоднородным сверхзвуковым потоком, гармонически изменяющимся со временем, а также к гармоническим колебаниям элеронов вокруг шарнира и к гармоническим упругим деформациям поверхности крыла.

В сущности, как это будет видно дальше, эта задача сводится к предыдущей, так что нет никаких трудностей для ее решения.

Примем во внимание определения приведенного потенциала (32.17) и приведенной скорости (32.22), представляемой теперь в форме

$$\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = e^{-i(\omega t + kx_1)} \frac{\omega}{U_\infty} \approx e^{-i\omega t} (1 - ikx_1) \frac{\omega}{U_\infty}. \quad (33.30)$$

Рассмотрим любую точку на поверхности крыла, которая подвержена деформации, зависящей от времени; ордината этой точки в направлении

нормали к плоскости  $OA_1A_2$  определится выражением

$$Z = e^{i\omega t} P(x_1, x_2), \quad (33.31)$$

где  $P(x_1, x_2)$  — однородный полином  $n$ -го порядка.

Получающаяся скорость  $\omega'_n$  рассматривается как нормальная к крылу и легко выводится путем дифференцирования

$$\omega'_n = \frac{\partial Z}{\partial t} = i\omega e^{i\omega t} P(x_1, x_2) = i\omega Z. \quad (33.32)$$

Эта же нормальная скорость равна нормальной компоненте  $\omega_n$  полной скорости в той же точке, непосредственно выводимой из потенциала  $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ ; компонентами этой полной скорости являются  $U_\infty + u, v, w$ , отсюда

$$\omega'_n = \omega_n \approx w - \frac{\partial Z}{\partial x_1} (U_\infty + u) - v \frac{\partial Z}{\partial x_2} \approx w - U_\infty \frac{\partial Z}{\partial x_1}. \quad (33.33)$$

Из уравнений (33.30), (33.31) и (33.32) следует, что

$$\begin{aligned} \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= (1 - ikx_1) \left[ \frac{i\omega}{U_\infty} P(x_1, x_2) + \frac{\partial P}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \\ &+ i\lambda \left[ \frac{P(x_1, x_2)}{c} - \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{x_1}{c} \frac{\partial P}{\partial x_1} \right]. \end{aligned} \quad (33.34)$$

Окончательно получим

$$\beta_{n-1} = \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad \beta_n = \frac{P(x_1, x_2)}{c} - \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{x_1}{c} \frac{\partial P}{\partial x_1}. \quad (33.35)$$

В согласии с результатом, включающим действительную и мнимую части, приведенный потенциал будет также разбиваться на два члена, из которых первый является однородной функцией  $n$ -го порядка, соответствующей  $\beta_{n-1}$ , а второй —  $(n + 1)$ -го порядка соответствует  $\beta_n$ :

$$\varphi = \varphi_0 + i\lambda \varphi_1. \quad (33.36)$$

Здесь использованы прежние обозначения  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , соответственно для потенциалов конического течения порядка  $n$  и  $n + 1$  (см. формулу 32.31).

В формулу для коэффициента давления (32.36)

$$C_p = -2e^{i\omega t} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + i\lambda \left( \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\varphi_0}{c} + \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{x_1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right) \right] \quad (33.37)$$

можно ввести осевые скорости конических течений  $n$ -го и  $(n + 1)$ -го порядков  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} = u_0$  и  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = u_1$ , которые были объектами предшествующего исследования.

Каким путем можно получить  $\varphi_0$ , будет показано ниже. Примем во внимание, что в обычно встречающихся примерах  $\varphi_0$  относится главным образом к коническому течению первого порядка; поэтому указанный случай будет последовательно рассмотрен.

Применяя формулу Эйлера для однородной функции, легко получим уравнение

$$\varphi_0 = x_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} = x_1 (u_0 + yv_0) = x_1 \operatorname{Re}(U_0 + xV_0), \quad (33.38)$$

где  $U_0$  и  $V_0$  имеют те же значения, что и в формулах (31.12), а именно

$$U_0 = u_0 + iu'_0, \quad V_0 = v_0 + iv'_0. \quad (33.39)$$

С помощью уравнений совместности легко получается уравнение

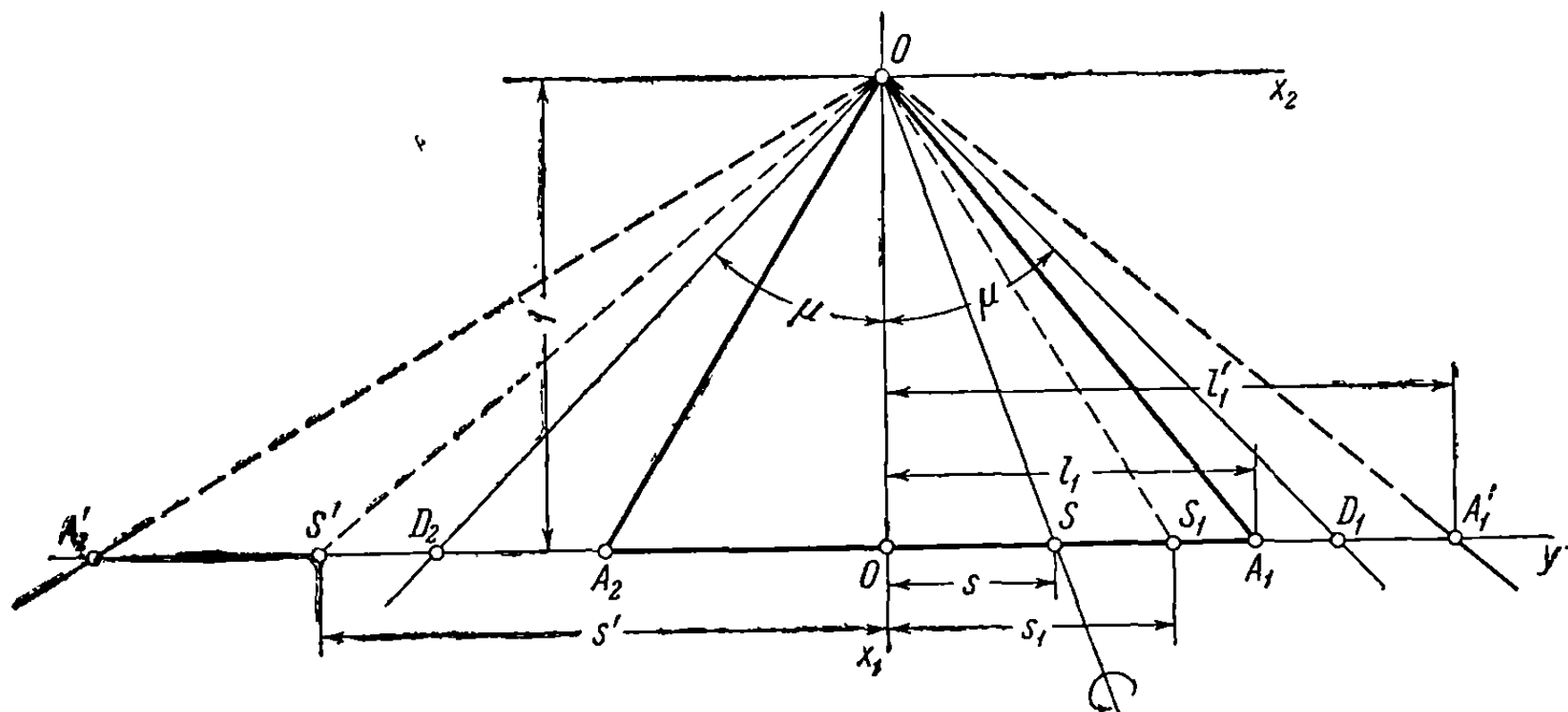
$$V_0 = - \int \frac{dU_0}{x}. \quad (33.40)$$

Отсюда следует, что функция  $V_0$  может быть вычислена для каждого случая.

В общем случае

$$n! \varphi_0 = x_1^n \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n \varphi_0; \quad (33.41)$$

следовательно,  $\varphi_0$  выводится из производных нулевого порядка путем применения соотношений совместности.



Фиг. 33.3

Поэтому решение получается немедленно и будет зависеть от полинома  $P(x_1, x_2)$  и от особых условий рассматриваемого движения.

Чтобы представить этот метод исследования во всей широте, ниже приведены некоторые, обычно встречающиеся случаи применений, взятые из других работ [40].

**33.3.1. Гармонические колебания вокруг оси.** Рассмотрим крыло, гармонически колеблющееся вокруг оси  $OS$  (фиг. 33.3). Колебание около этой оси может быть разложено на колебания вокруг осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , причем каждое из этих движений может рассматриваться отдельно. Предположим, что  $\theta_1$  и  $\theta_2$  будут амплитудами соответствующих колебаний, обозначаемых через  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ ; тогда

$$\Theta_1 = \theta_1 e^{i\omega t}, \quad \Theta_2 = \theta_2 e^{i\omega t}; \quad (33.42)$$

следовательно,

$$Z = x_2 \Theta_1 - x_1 \Theta_2 = (\theta_1 x_2 - \theta_2 x_1) e^{i\omega t}, \quad (33.43)$$

откуда

$$P(x_1, x_2) = \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1, \quad \frac{\partial P}{\partial x_1} = -\theta_2. \quad (33.44)$$

Приведенный скос потока будет соответственно

$$\beta_0 = -\theta_2, \quad (33.45a)$$

$$\beta_1 = \theta_1 \frac{x_2}{c} - \theta_2 \frac{1-2M_\infty^2}{1-M_\infty^2} \frac{x_1}{c}. \quad (33.45b)$$

Мы можем получить приведенный потенциал  $\varphi_0$  первого порядка, а также другой потенциал  $\varphi_1$  второго порядка, причем оба легко определяются во всех практических случаях для треугольного крыла, как было доказано выше.

Для случая тонких крыльев с дозвуковыми ведущими кромками решения даны в разделе 32.4.

Предполагая, что крыло имеет сверхзвуковую ведущую кромку  $OA'_1$ , рассмотрим дозвуковое ребро  $OS_1$  ( $y = s_1$ ), вдоль которого приведенный скос потока переходит от значений  $\beta_0$  и  $\beta_1$  к значению 0, причем величина  $s_1$  должна стремиться к своей сверхзвуковой величине  $s_1 = l'_1 > 1/B$  в конечной формуле.

В этом случае  $n$  равняется единице для  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1}$  и двум для  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ , причем можно применить формулы (33.12) и (33.17a), полагая  $l_1 = \frac{1}{B}$  ( $C = \frac{\pi}{2}$ ) и подставляя затем  $l_1$  вместо  $s'_1$  в первую формулу, измененную указанным образом. Для  $\varphi_0$  можно применить формулы (33.38) и (33.40).

Если обе ведущие кромки сверхзвуковые, то рассмотрим симметричное толстое крыло с двумя ребрами: вдоль одного из них приведенный скос потока переходит от значений  $\beta_0$  и  $\beta_1$  к значению 0 при  $y = s_1$ , а вдоль другого — от значения 0 к значениям  $\beta_0$  и  $\beta_1$  при  $y = -s_2$ . Примем, разумеется,  $n = 1$  и  $n = 2$  и применим затем формулу (33.12), положив  $l_1 = l_2 = 1/B$ . Далее запишем, что  $s_1 = l_1 > 1/B$ ,  $C = \frac{\pi}{2}$  и  $s_2 = -l_2 < -1/B$ ,  $C = 0$  и получим их сумму. То же замечание можно повторить для  $\varphi_0$ .

**33.3.2. Гармонические колебания элеронов.** Для случая, приведенного на фиг. 33.3, когда только один элерон  $OSA_1$  осуществляет гармонические колебания, а другая сторона крыла  $OSA_2$  остается неподвижной, граничные условия будут такими же, как установленные ранее (33.45), причем линия  $OS$  образует ребро, слева от которого скос потока равен нулю, а на правой стороне изменяется в соответствии с формулами (33.45).

Решение выводится из общих формул, установленных при рассмотрении крыла с одной ведущей кромкой  $OA'_2$  сверхзвуковой, другой дозвуковой и ребром  $OS$ , вдоль которого приведенный скос потока переходит от значения 0 к значениям  $\beta_0$  и  $\beta_1$ . Используем формулы (33.12) и (33.17b), в которых  $l_2$  подставляется вместо  $1/B$ , причем рассматриваются, разумеется, только случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ .

Если ребро  $OS$  будет сверхзвуковым, занимая, например, положение  $OS'$ , то формулы будут по-прежнему справедливы, за исключением того, что ну-



можно выполнить некоторые элементарные преобразования, а именно:  $-s'$  подставить вместо  $s$ .

Если  $OA_1$  будет также сверхзвуковой ведущей кромкой, занимая, например, положение  $OA'_1$ , то рассматривается симметричное толстое крыло со вторым ребром  $OS_1$ , вдоль которого [скос потока переходит от значений  $\beta_0$  и  $\beta_1$  к значению 0 в точке  $y = s_1$ , после чего  $s_1$  должно стремиться к своему сверхзвуковому значению  $s_1 \rightarrow l_1 > \frac{1}{B}$ .

После подстановки  $1/B$  вместо  $l_1$  и  $l_2$  можно использовать формулу (33.12), применяя ее дважды — первый раз для кромки  $OS$  и второй — для  $OS_1$  ( $s = s_1$ ). Затем  $s_1$  должно быть приравнено  $l_1$  ( $s_1 = l_1 > 1/B$ ).

### 33.3.3. Случай неоднородного и периодического потока

Этот раздел посвящен возмущениям скоса потока при гармонических изменениях. На крыле эти скорости имеют прежние значения, и движение может быть заменено другим, эквивалентным движением, соответствующим крылу с периодическим искривлением, скос потока на котором будет равен по величине и противоположен по знаку скосу потока в случае рассматриваемого неоднородного течения. Общий случай (см. формулу 33.31), приводящий к решению, выражаемому соотношениями (33.35) и (33.36), таким образом, получается снова. Следовательно, нет трудностей при решении этой задачи, которая обобщает исследования гармонических колебательных движений.

Заметим, что эта задача имеет практические приложения, так как любое хвостовое оперение, помещенное за крылом, подвергается воздействию неоднородного и в некоторых случаях периодического потока, вызываемого течениями вокруг крыла.

### 33.4. Треугольные крылья с заданным распределением давления (обратная задача)

Как было установлено с самого начала, задача состоит в определении искривления поверхности крыла, когда давление уже задано.

Этот раздел касается треугольных крыльев. Заметим, что давление изменяется в соответствии с определенным законом, который определен в дальнейшем. Будем исходить от коэффициента давления

$$C_p = -2 \frac{u}{U_\infty} \quad (33.46)$$

и заметим, что изменение давления можно определить изменением этого коэффициента, который в свою очередь представляется через осевую скорость  $u$ .

Как и в случае прямой задачи, допустим, по предположению, что скорость  $u$  выражается суммой однородных полиномов порядка 0, 1, 2, ...,  $(n-1)$  относительно  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассмотрим полином порядка  $(n-1)$

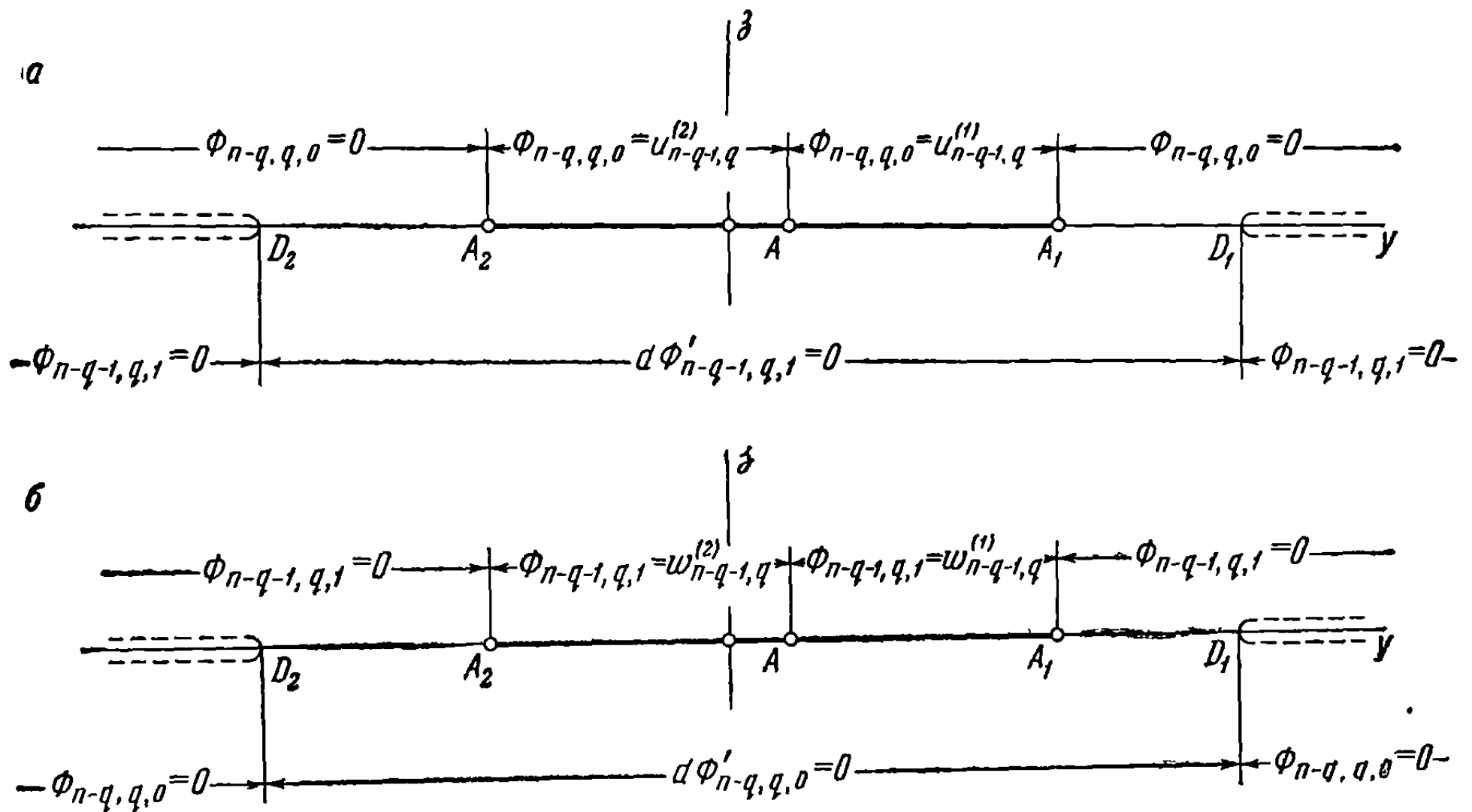
$$u = \sum_{q=0}^{n-1} u_{n-q-1,q} x_1^{n-q-1} x_2^q, \quad (33.47)$$

где коэффициенты  $u_{n,q-1,q}$  постоянные, и предположим, что он представляет закон изменения давления на самом крыле. Соответствующее движение выводится из потенциала  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ , который будет однородным полиномом  $n$ -го порядка.

Скос потока  $\omega$  в точке на крыле, который вытекает из этого потенциала, определит угол атаки или наклон поверхности крыла в рассматриваемой точке. Если ординату поверхности крыла в этой же точке обозначить через  $Z(x_1, x_2)$ , то

$$\frac{\omega}{U_\infty} = \frac{\partial Z}{\partial x_1}; \quad (33.48)$$

отсюда видно, что ордината  $Z$  может быть вычислена путем интегрирования, следовательно, задача решена, если скорость  $\omega$  на крыле известна.



Фиг. 33.4

Войдем в существо задачи. Для этого обратимся к нашей предшествующей работе, приводя ниже изложение ее результатов [41].

Рассмотрим крыло  $OA_1A_2$  (фиг. 33.1) и предположим, что ребро  $OA$  отделяет на крыле две области, в которых давление, или, точнее, осевая скорость  $u$  выражается через различные полиномы одинакового порядка  $(n-1)$ .

Так как подход, применяемый при трактовке обратной задачи, аналогичен изложенному ранее, то и воздействия здесь те же, что и в прямой задаче, а именно: воздействие ребра  $OA$ , а также влияние ведущих кромок  $OA_1$  и  $OA_2$ , если они дозвуковые.

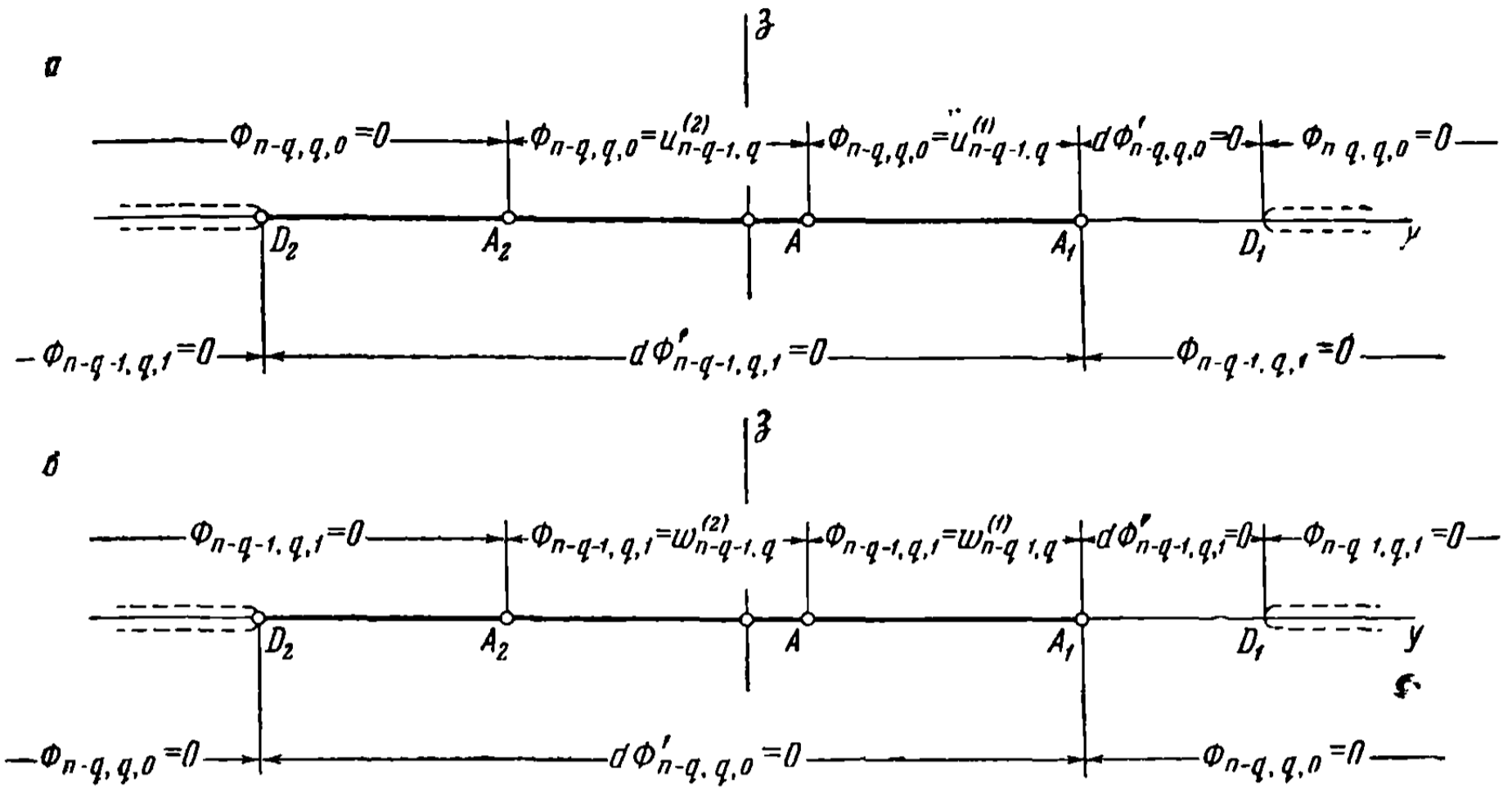
Что касается граничных условий, то каждая обратная задача соответствует той или другой эквивалентной ей прямой задаче.

В самом деле, принимая во внимание фигуры 33.4, 33.5, 33.6 и анализируя граничные условия, можно делать следующие заключения:

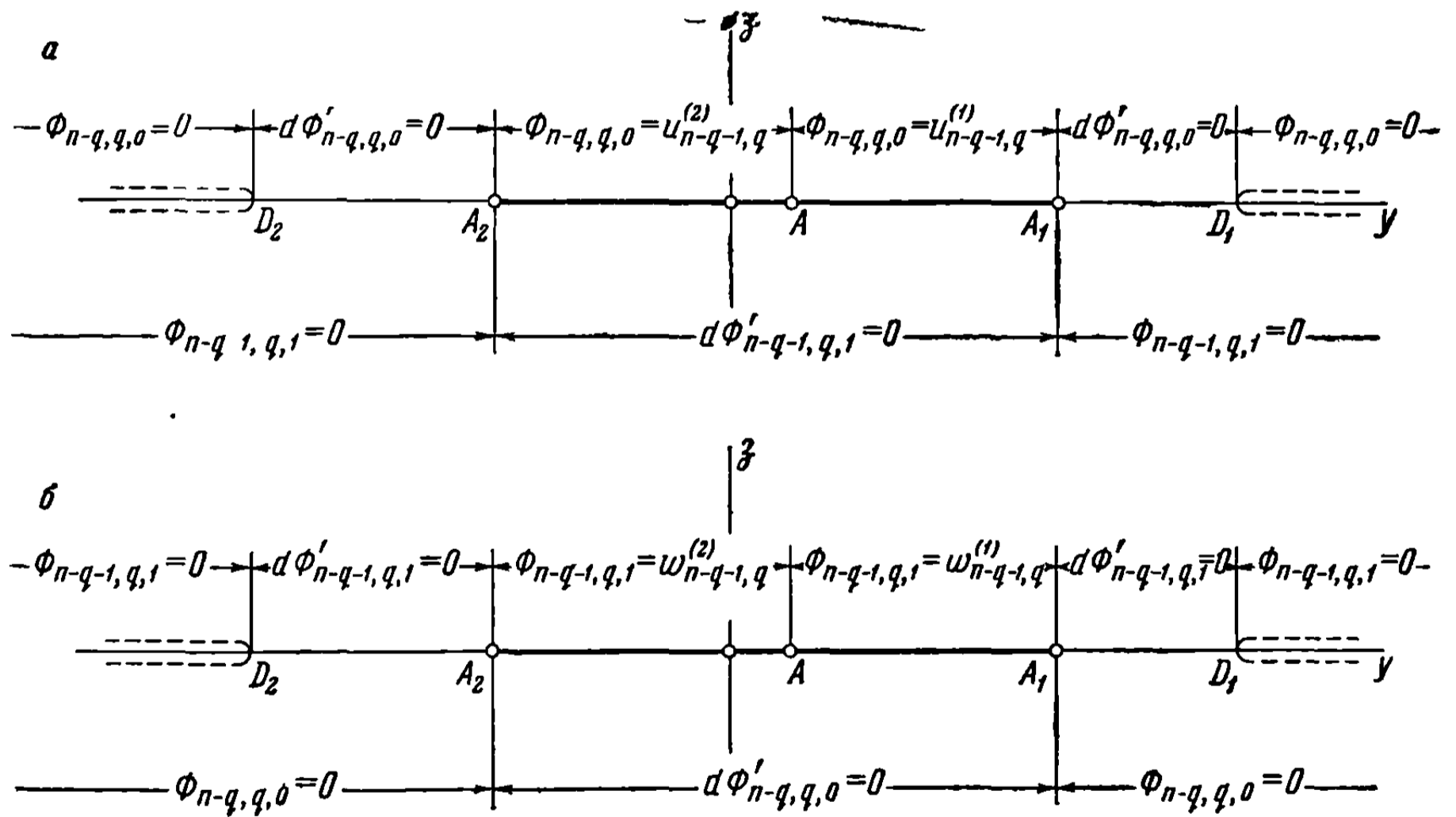
- обратная задача, касающаяся тонкого крыла, соответствует прямой задаче для симметричного толстого крыла (фиг. 33.4);
- обратная задача для толстого крыла с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками соответствует прямой задаче для тонкого крыла с такими же ведущими кромками (фиг. 33.5);

обратная задача для толстого крыла, когда обе ведущие кромки дозвуковые, соответствует прямой задаче для тонкого крыла с такими же кромками (фиг. 33.6)

Посредством формул Эйлера (33.1)  $w$  в обратной задаче и  $u$  в эквивалентной прямой могут быть выражены соответственно с помощью функций  $F_{n-q-1,q,1}$  и  $F_{n-q,q,0}$ .



Фиг. 33.5



Фиг. 33.6

Так как эти функции, а следовательно и  $u$ , уже установлены (см. раздел 33.2) для всех случаев и всех типов крыльев путем сведения задачи к учету влияния ребра и ведущих кромок, то решение для  $w$  в обратной задаче будет выражаться формулой, соответствующей формуле для  $u$  в эквивалентной прямой.

Следовательно,  $w$  может быть подставлено вместо  $u$  во все формулы, установленные для  $u$ ; тем не менее, какая-нибудь формула еще не будет полной, так как существует член, обусловленный особенностью, появляю-

щейся в начале координат, который должен быть добавлен, что и сделано ниже.

**33.4.1. Логарифмическая особенность в начале координат.** Будем исходить из соотношений совместности (31.21), которые можно представить, в соответствии с уравнением (31.38), в виде

$$\begin{aligned} dF_{n-q-1, q, 1} &= (-1)^{n-q-2} x^{n-q-2} i \sqrt{1-B^2x^2} dF_{1, n-1, 0} = \\ &= (-1)^{n-q-2} x^{n-q-2} i \sqrt{1-B^2x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx. \end{aligned} \quad (33.49)$$

Замечая, что аналитическая функция  $\frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}$  не имеет особенностей в начале координат благодаря самой форме функции  $F_{1, n-1, 0}$ , получим как следствие, что ни одна из функций  $F_{n-q-1, q, 1}$  также не имеет каких-либо особенностей в начале, за исключением случая  $q = n - 1$ , для которого

$$dF_{0, n-1, 1} = \frac{-i \sqrt{1-B^2x^2}}{x} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx; \quad (33.50)$$

тогда как  $F_{0, n-1, 1}$  включает особенность  $\ln x$  в начале, другие функции  $F_{n-q-1, q, 1}$  будут здесь равны нулю.

В соответствии с граничными условиями, относящимися к толстому крылу с дозвуковыми ведущими кромками, и формулами Эйлера (33.16), находим, что получающийся в результате добавочный член для  $\omega$  будет

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{Re} [F_{n-1, 0, 1} + C_{n-1}^1 x F_{n-2, 1, 1} + \dots + x^{n-1} F_{0, n-1, 1}] = \\ &= x_1^{n-1} \operatorname{Re} A_0 x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)x}}. \end{aligned} \quad (33.51)$$

Поэтому выражение для  $\omega$  должно быть дополнено этим членом.

**33.4.2. Общие формулы для  $\omega$ .** Начнем с толстого крыла, имеющего дозвуковые ведущие кромки, которое эквивалентно прямой задаче для тонкого крыла. Точно воспроизводя выражения (33.12) и (33.17), в которых можно изменить буквенные обозначения коэффициентов, и добавляя член из уравнения (33.51), получим

$$\begin{aligned} \omega &= x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + iC \right) \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \right. \\ &\left. + \sqrt{(l_1-x)(l_2+x)} \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(l_2+x)}{(l_1+l_2)x}} \right] \end{aligned} \quad (33.52)$$

для воздействия ребра, расположенного на линии  $y = s$ , где  $C$  имеет такое же значение, как в разделе 33.2.1; соответственно имеем:

для воздействия ведущей кромки  $A_1$

$$\omega = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{l_2+x}{l_1-x}} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(l_2+x)}{(l_1+l_2)x}} \right]; \quad (33.53a)$$

для влияния ведущей кромки  $A_2$

$$\omega = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{l_1 - x}{l_2 + x}} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(2)} x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(l_2 + x)}{(l_1 + l_2)x}} \right], \quad (33.53б)$$

для общего влияния обеих ведущих кромок  $A_1$  и  $A_2$

$$\omega = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} \sum_{q=0}^n A_q x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(l_2 + x)}{(l_1 + l_2)x}} \right]. \quad (33.53в)$$

Если одна или обе ведущие кромки сверхзвуковые, то приведенные формулы сохраняют свою силу при условии, что будут выполнены следующие подстановки:

в формулу (33.52), относящуюся к воздействию ребра  $OA$ , подставляется  $l_1 = 1/B$ , если ведущая кромка  $A_1$  сверхзвуковая, или  $l_2 = 1/B$ , если сверхзвуковой будет ведущая кромка  $A_2$ , или  $l_1 = l_2 = 1/B$ , если обе ведущие кромки  $A_1$  и  $A_2$  сверхзвуковые или крыло тонкое. Если само ребро  $OA$  будет сверхзвуковым ( $s > 1/B$ ), то сначала подставляется  $l_1 = 1/B$ , а затем величине  $s$  дается рассматриваемое сверхзвуковое значение;

что касается влияния ведущих кромок, то если кромка  $A_2$  сверхзвуковая, то в формулу (33.53а) подставляется  $l_2 = 1/B$ , если сверхзвуковой будет кромка  $A_1$ , то в формулу (33.53б) подставляется  $l_1 = 1/B$ .

**33.4.3. Примеры применений.** Предположим, что треугольное крыло имеет дополнительное ребро в точке  $y = s$ .

Установим формулы, определяющие  $\omega$  для трех случаев; для толстого крыла с дозвуковыми ведущими кромками применим формулы (33.52) и (33.53в), получая

$$\omega_{n-1} = \frac{\omega}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} \sum_{q=0}^n A_q x^q + \right. \\ \left. + \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(l_2 + x)}{(l_1 + l_2)(x - s)}} \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(l_2 + x)}{(l_1 + l_2)x}} \right]; \quad (33.54)$$

для крыла с одной дозвуковой ведущей кромкой, например,  $OA_1$ , применим формулу (33.52) для ребра  $OA$  после предварительной подстановки  $l_2 = \frac{1}{B}$ ; та же измененная формула [применяется для сверхзвуковой ведущей кромки  $A_2$ , если положить  $s = -l_2$ ; формула (33.53а) может быть применена для дозвуковой ведущей кромки  $OA_1$  после подстановки  $1/B$  вместо  $l_2$ ; в конечном счете получаем выражение

$$\omega_{n-1} = \frac{\omega}{x_1^{n-1}} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{1+Bx}{l_1 - x}} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(1+Bl_1)x}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arc} \cos \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(2)} x^q + \right. \\ \left. + \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x-s)}} \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q \right]; \quad (33.55)$$

Для тонкого крыла, когда обе ведущие кромки дозвуковые (или сверхзвуковые, для которых результаты получаются простым преобразованием гиперболических функций в круговые), подставляем сначала  $l_1 = l_2 = 1/B$  в формулу (33.52), которую затем применяем три раза — для ребра  $OA$ , для ведущей кромки  $OA_1$ , полагая одновременно  $s = l_1$ , и для ведущей кромки  $OA_2$ , полагая  $s = -l_2$ ; следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} = & \frac{\omega}{x_1^{n-1}} \operatorname{Re} \left[ \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}} + i\frac{\pi}{2} \right) \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q + \right. \\ & + \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(2)} x^q + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \\ & \left. + \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}} + i\frac{\pi}{2} \right) \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \sqrt{1-B^2x^2} \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q \right]. \quad (33.56) \end{aligned}$$

**33.4.4. Определение постоянных.** Исходя из соотношений совместности, представленных в форме

$$(-1)^q x^q dF_{n-q, q, 0} = -(-1)^n \frac{ix^n}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{0, n-1, 1}, \quad (33.57)$$

и замечая, что, по аналогии с уравнением (31.38), можно записать выражение

$$dF_{0, n-1, 1} = \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx, \quad (33.58)$$

причем  $W_{n-1}$  — аналитическая функция, действительная часть которой будет  $\omega_{n-1} = \frac{\omega}{x_1^{n-1}}$ , получим в конечном виде

$$\Phi_{n-q, q, 0} = -(-1)^{n-q} \operatorname{Re} i \int_{\substack{\text{крыло} \\ \text{окружность Маха}}} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx. \quad (33.59)$$

Сравнивая выражение (33.47) с формулой Эйлера (33.1a), будем иметь

$$\Phi_{n-q, q, 0} = \frac{(n-1)! u_{n-q-1, q}}{C_{n-1}^q}. \quad (33.60)$$

Предположим, что по обеим сторонам разделяющего ребра  $OA$  коэффициенты различны; таким образом, функция может быть записана для правой стороны ( $u_{n-q-1, q}^{(1)}$ ) и для левой стороны ( $u_{n-q-1, q}^{(2)}$ ).

Все производные от  $\omega_{n-1} = \frac{\omega}{x_1^{n-1}}$  должны быть равны нулю на окружности Маха, откуда

$$\left( \frac{d^p W_{n-1}}{dx^p} \right)_{x=\pm 1/B} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n). \quad (33.61)$$

Таким образом, получены  $4n$  уравнений, которые должны определить постоянные, входящие в функцию  $\omega$ , для трех случаев применения (см. раздел 33.4.3):

в случае толстого крыла с дозвуковыми ведущими кромками уравнения (33.61) удовлетворяются тождественно. Существует не более  $2n$  уравнений (33.59), но число постоянных в выражении (33.54) будет  $2(n+1)$ , поэтому останутся две не определенные постоянные, из которых одну можно получить приравниванием нулю коэффициента  $A^{(0)}$ ;

в случае толстого крыла с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками тождественно удовлетворяются  $n$  уравнений (33.61), соответствующих дозвуковой ведущей кромке. Остается  $3n$  уравнений для  $(3n+1)$  постоянных выражения (33.51). В этом случае коэффициент  $A^{(0)}$  нельзя приравнять нулю;

в случае тонкого крыла  $4n$  постоянных будут получены из  $4n$  уравнений. В этом случае нет никаких неопределенностей.

**З а м е ч а н и е.** В случаях ребра, разделяющего различные области осевых возмущений, или дозвуковых ведущих кромок тонких крыльев, скачок функции  $\Phi_{n-q, q, 0}$  вычисляется взятием полувычетов выражений (33.59) в этих точках. Таким образом, постоянные, входящие в  $\omega$ , будут полностью либо частично определены.

**33.4.5. Применение к собственно коническому течению.** Если существует однородное распределение  $u$  по всему крылу, например,  $u = u_0$  и поэтому разделяющего ребра не будет, то в предшествующих формулах нужно положить  $n = 1$  и применить приведенные выше соотношения для определения постоянных.

а) Для тонкого крыла с дозвуковыми ведущими кромками из уравнения (33.56) можно вывести, что

$$\omega = \operatorname{Re} \left[ A^{(1)} \left( \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}} + i \frac{\pi}{2} \right) + A^{(2)} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} + \right. \\ \left. + A^{(0)} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} \right]; \quad (33.62)$$

далее посредством вычисления вычетов во второй части выражений (33.59) в точках  $y = l_1$  и  $y = -l_2$ , а также путем применения одного из соотношений (33.61), приходим соответственно к результатам

$$A^{(1)} = \frac{2u_0}{\pi} \frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{l_1}, \quad A^{(2)} = \frac{2u_0}{\pi} \frac{\sqrt{1-B^2l_2^2}}{l_2}, \quad A^{(0)} = -\frac{2u_0}{\pi} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right). \quad (33.63)$$

Если одна из ведущих кромок, например  $OA_1$ , сводится к самой оси  $Ox_1$  и  $l_1$  стремится к нулю, то

$$\omega = \frac{2u_0}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{2x} + \frac{\sqrt{1-B^2l_2^2}}{l_2} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{l_2} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} \right]; \quad (33.64)$$

этот результат путем использования совершенно других методов исследования был получен и другими авторами [40].

Если ведущие кромки сверхзвуковые, то в заключенных в скобки первых двух членах выражения (33.62) Arch заменяется на arccos, и коэффициенты  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  принимают вид

$$A^{(1)} = -\frac{2u_0}{\pi} \frac{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}{l_1}, \quad A^{(2)} = -\frac{2u_0}{\pi} \frac{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}{l_2}. \quad (33.65)$$

б) Для толстого крыла с дозвуковой ведущей кромкой, например  $OA_1$ , и другой кромкой] сверхзвуковой, полагая в формуле (33.55)  $n = 1$  и предполагая, что разделяющее ребро отсутствует, получим как следствие

$$\begin{aligned} \omega = \operatorname{Re} \left[ A^{(1)} \sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + A^{(2)} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right. \\ \left. + A^{(0)} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(l_1+Bl_1)x}} \right]; \end{aligned} \quad (33.66)$$

при этом путем применения соотношений, используемых для определения постоянных, получаются следующие значения коэффициентов:

$$A^{(2)} = -\frac{2u_0}{\pi} \frac{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}{l_2}, \quad (33.67a)$$

$$A^{(1)} + \frac{2u_0}{\pi} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(Bl_2+1)}{l_2}} + A^{(0)} \sqrt{l_1} = 0. \quad (33.67b)$$

Отсюда очевидно, что имеется одна неопределенность.

Если скорость не должна становиться бесконечной на дозвуковой ведущей кромке, то коэффициент  $A^{(1)}$  приравнивается нулю.

в) Рассмотрим толстое крыло с дозвуковой ведущей кромкой  $OA_1$  и сверхзвуковой  $OA_2$ , имеющее линейное распределение осевой скорости

$$u = u_{10}x_1 + u_{01}x_2. \quad (33.68)$$

Здесь можно применить уравнение (33.55), полагая  $n = 2$ ; следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \omega = x_1 \operatorname{Re} \left[ (A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x) \sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + (A_0^{(2)} + \right. \\ \left. + A_1^{(2)}x) \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + A^{(0)}x \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(1+Bl_1)x}} \right]. \end{aligned} \quad (33.69)$$

Из постоянных две легко определяются:

$$A_0^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \frac{B^2 l_2 u_{10} - u_{01}}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}, \quad A_1^{(2)} = \frac{2}{\pi} \frac{-u_{10} + (2 - B^2 l_2^2) l_2 u_{01}}{l_2^2 \sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}; \quad (33.70)$$



для остальных трех есть только два соотношения:

$$BA_0^{(1)} - A_1^{(1)} - \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{Bl_2 - 1}} (BA_0^{(2)} - A_1^{(2)}) - A^{(0)} \sqrt{l_1} = 0, \quad (33.71a)$$

$$\frac{(3 + 2Bl_1)A_0^{(1)} + A_1^{(1)}l_1}{1 + Bl_1} + \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{Bl_2 - 1}} \frac{(3 - 2Bl_2)A_0^{(2)} - A_1^{(2)}l_2}{Bl_2 - 1} = 0 \quad (33.71b)$$

Коэффициент  $A^{(0)}$  нельзя приравнять нулю, так как это может привести в некоторых случаях к физической несообразности. Вместо этого можно сделать конечной скорость  $\omega$  на ведущей кромке  $A_1$ , если положить

$$A_0^{(1)} + A_1^{(1)}l_1 = 0. \quad (33.72)$$

**З а м е ч а н и е.** В случае толстого крыла со сверхзвуковой ведущей кромкой  $OA_2$  рассматривалось сначала дозвуковое ребро, расположенное при  $y = s$  (см. формулу 33.52), затем  $s$  заменялось на  $-l_2$ , и таким образом получались формулы (33.55), (33.66) и (33.69). Следует отметить, что удобнее сохранить формулы, в которые входит  $s$  ( $s < 1/B$ ), и для определения некоторых постоянных подсчитать полувычет для точки  $y = s$ , а затем положить  $s = -l_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. Carafoli, S. Sandulescu. Influenta aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale arpipilor triunghiulare in curent supersonic. (Влияние элеронов на аэродинамические характеристики треугольных крыльев в сверхзвуковом потоке.) «Studii și cercetari mec. appl.», № 4, Buchurești, 1956.
2. P. A. Lagerstrom, Martha E. Graham. The Linearized Theory of Supersonic Control Surfaces. (Линеаризированная теория контрольных поверхностей.) «J. Aeronaut. Sci», 16, № 1, 1949, p. 31—34.
3. E. Carafoli. Extinderea analogiei hidrodinamice din miscările conice la arpile cu grosime și cu incidentă variabile. (Распространение гидродинамической аналогии в коническом течении на крылья с переменной толщиной и наклоном.) «Comun. Acad. RPR», 3, № 3—4, 1953.
4. Elena Murgulescu. Probleme la limită din teoria miscărilor conice în cazul arpii subțiré de sectiune dată. (Задачи предела в теории конического течения в случае тонких крыльев данного поперечного сечения.) «Comun. Acad. RPR», 2, № 9—10, 1952.
5. E. Carafoli. Asupra portatei și rezistentei arpii triunghiulare la viteze supersonice. (О подъемной силе и лобовом сопротивлении дельтовидных крыльев при сверхзвуковых скоростях.) «Comun. Acad. RPR», 4, № 5—6, 1954.
6. E. Carafoli, L. Dumitrescu. Asupra arpii delta subtiri dublu-conice cu incidenta variabila in curent supersonic. (О тонком двоякоконтическом дельтовидном крыле с переменным углом атаки в сверхзвуковом потоке.) «Studii și cercetari mec. appl.», 6, № 3—4, București, 1955.
7. E. Carafoli, Beatrice Horovitz. Miscarea supersonică în jurul arpii triunghiulare cu discuri marginale. (Сверхзвуковое течение вокруг дельтовидного крыла с концевыми пластинками.) «Comun. Acad. RPR», 3, № 11—12, 1953.
8. E. Carafoli, Beatrice Horovitz. Influenta discurilor axiale asupra miscării supersonice in jurul arpipilor unghiulare conice groase și cu incidenta variabila. (Влияние осевых пластин на сверхзвуковое течение около толстых конических)

- дельтовидных крыльев с меняющимся наклоном.) «Comun. Acad. RPR», 4, № 5—6, 1954.
9. E. Carafoli, Beatrice Horovitz. L'écoulement supersonique autour d'une aile angulaire à disque axial «Rev. méc. Appl. Acad. RPR», 1, № 1, București, 1955.
  10. P. Germain. La théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique. (Теория конических течений и их приложение к сверхзвуковой аэродинамике.) «O. N. E. R. A. Publ.», № 34, 1948.
  11. P. Germain. La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique. (Теория однородных течений и ее приложение к расчету некоторых дельтовидных крыльев при сверхзвуковом режиме.) «Rech. aéronaut.», № 7, 1949, p. 3—16.
  12. M. Fenain. Trainée d'ailes delta symétriques à incidence nulle en régime supersonique. (Лобовое сопротивление дельтовидных симметричных крыльев при нулевом угле атаки на сверхзвуковом режиме.) «Rech. aéronaut.», № 16, 1950, p. 27—38.
  13. H. Multhopp, O. Unified. Theory of Supersonic Wing Flow, employing Conical Fields. (К теории сверхзвукового обтекания крыльев с применением конических полей.) «R. A. E. Report. Aero», № 2415, April 1951.
  14. H. Lomax a. M. A. Heaslet. Generalized Conical Flow Fields in Supersonic Wing Theory. (Обобщенные конические течения в теории сверхзвукового обтекания крыла.) «NASA Techn. Notes», № 2497, 1951.
  15. G. N. Lance. The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream. (Дельтовидное крыло в неоднородном сверхзвуковом потоке.) «Aeronaut. Quart.», 5, Pt, 1, London, 1954. p. 55—72.
  16. E. Carafoli. Conical Flow in Supersonic Stream. (Конические течения в сверхзвуковом потоке.) Peking, Ed. Acad. Sinica. 1955, p. 101.
  17. E. Carafoli, M. Ionescu. High Order Conical Flows Around Triangular Thin Wings and Symmetrical Thick Wings. (Конические течения высшего порядка около тонких треугольных крыльев и симметричных толстых крыльев.) (Не опубликовано).
  18. G. Temple. Unsteady Motion. Modern Developments in Fluid Dynamics. (Неустановившиеся движения; современные проблемы в гидродинамике.) Oxford, Clarendon Press, 1953, p. 325.
  19. E. R. C. Miles. «J. Aeronaut. Sci», 16, № 6, 1949, p. 378—379.
  20. A. Robinson. «J. Roy. Aeronaut. Soc.», 52, 1948, p. 735—752.
  21. E. R. C. Miles. «J. Aeronaut. Sci.», 16, 1949, p. 674.
  22. E. Carafoli a. Beatrice Horovitz. Homogeneous Flows of Higher Order round a Cruciform Wing with Application to Harmonic Oscillations. (Однородные течения высшего порядка вокруг крестообразных крыльев с применением к гармоническим колебаниям.) XI Internat. Congr. Appl. Mech., Brussels, Sept. 1956.
  23. Г. А. Толстов. Ряды Фурье, гл. VII, §10, М., 1951.
  24. E. K. Titchmarsh. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. (Введение в теорию интегралов Фурье.) Oxford, Clarendon Press, 1937, p. 4.
  25. G. Temple. Modern Developments in Fluid Dynamics. (Неустановившееся движение.) Oxford, Clarendon Press, 1953, p. 339.
  26. C. Possio. «Acta pontif. Acad. sci.», I, 1937, p. 93.
  27. V. Borbely. «Zschr. angew. Math. u. Mech.», 22, 1942, p. 190.
  28. H. Höhl. «Ann. Phys.», 43, 1943, p. 437—464.
  29. J. E. Garrick a. S. J. Rubinov. «NASA Techn. Notes», № 1158, 1946, 45 p.
  30. G. Temple a. Jahn. «Rep. Aeronaut. Res. Counc.», № 2140, 1949.
  31. E. R. C. Miles. «J. Aeronaut. Sci.», 14, № 6, 1947, p. 351—358.
  32. E. R. C. Miles. «J. Aeronaut. Sci.», 15, № 10, 1948, p. 592.
  33. E. R. C. Miles. «J. Aeronaut. Sci.», 16, № 6, 1949, p. 381, 568; 17, № 2, 1950, p. 127.
  34. J. E. Garrick a. S. J. Rubinov. «NASA Techn. Notes», № 1383, 1947, 39 p.
  35. R. Stewartson. «Rep. Aeronaut. Res. Counc.», № 12112, 1950.

36. C. Possio. «Aerotecnica», 18, 1938, p. 441.
37. H. G. Küssner. «NACA Techn. Notes», № 979, 000.
38. E. Carafoli, M. Jonescu. Sur une théorie unitaire de l'aile supersonique en écoulement homogène d'ordre supérieur. «Zschr. ang. Math. u. Mech.», 37, H. 7/8, 1957.
39. E. Carafoli a. M. Jonescu. Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces à épaisseur symétrique. (Exposé d'une théorie générale unitaire). «Rev. Méc. appl.», № 1, 1957.
40. E. Carafoli. S. Sandulescu. Harmonic oscillations of wings and Ailerons in Supersonic stream. (Не опубликовано.)
41. E. Carafoli, M. Jonescu. Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pressions donnée (problème inverse). «Rev. Méc. appl.», № 2, 1958.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора . . . . .	3
Предисловие редактора . . . . .	5
<b>Глава 1. Физико-математическое введение . . . . .</b>	<b>7</b>
1 <i>Наиболее часто употребляемые формулы векторного анализа . . . . .</i>	<i>7</i>
1.1. Скаляры и векторы, определения . . . . .	7
1.2. Векторные операции . . . . .	9
1.3. Точечные функции: градиент, дивергенция, вихрь . . . . .	10
1.3.1. Градиент . . . . .	11
1.3.2. Дивергенция . . . . .	12
1.3.3. Вихрь . . . . .	12
1.4. Символическое представление посредством оператора набла . . . . .	13
1.5. Теорема Гаусса . . . . .	15
1.6. Преобразование координатных систем . . . . .	16
1.6.1. Градиент . . . . .	19
1.6.2. Дивергенция . . . . .	20
1.6.3. Вихрь . . . . .	21
2. <i>Термодинамика газов . . . . .</i>	<i>22</i>
2.1. Предварительные рассмотрения . . . . .	22
2.2. Физические свойства сжимаемой жидкости . . . . .	23
2.3. Единицы . . . . .	25
2.4. Уравнение состояния . . . . .	26
2.5. Первый закон термодинамики . . . . .	28
2.5.1. Внешняя механическая работа . . . . .	29
2.5.2. Внутренняя энергия . . . . .	29
2.6. Теплоемкость . . . . .	30
2.7. Другие функции состояния: энтальпия и энтропия . . . . .	33
2.7.1. Энтальпия . . . . .	33
2.7.2. Энтропия . . . . .	34
2.8. Эффект потери энергии. Тепло диссипации . . . . .	35
2.9. Изменение состояния газов . . . . .	36
2.9.1. Политропическое уравнение состояния . . . . .	37
2.9.2. Графическое представление . . . . .	39
2.9.3. Уравнение состояния в применении к динамике газа . . . . .	39
2.9.4. Обратимые и необратимые процессы . . . . .	40
2.10. Механизм обратимого процесса. Цикл Карно . . . . .	41
2.11. Второй закон термодинамики . . . . .	42
2.12. Теплопередача . . . . .	43
2.12.1. Конвекция . . . . .	43
2.12.2. Теплопроводность . . . . .	44
2.12.3. Излучение . . . . .	45
2.13. Вязкость. Турбулентность . . . . .	45
<b>Глава 2. Основные соотношения, определяющие движение сжимаемой жидкости</b>	<b>47</b>
3. <i>Основные уравнения для течения сжимаемой идеальной жидкости . . . . .</i>	<i>47</i>
3.1. Уравнения движения . . . . .	47
3.1.1. Другие формы уравнений движения . . . . .	49

3.1.2. Линия тока. Вихревая линия . . . . .	50
3.1.3. Уравнения движения вдоль линий тока: естественные уравнения . . . . .	51
3.2. Уравнение неразрывности . . . . .	51
3.2.1 Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах . . . . .	52
3.2.2. Уравнение неразрывности в полярных координатах . . . . .	54
3.2.3. Уравнение неразрывности для течения вдоль узкой трубки тока . . . . .	56
3.3. Уравнение энергии (или уравнение давления) . . . . .	57
3.3.1. Замечания к уравнению давления . . . . .	59
3.3.2. Различные формы уравнения Бернулли . . . . .	61
3.4. Теоремы о циркуляции . . . . .	62
3.5. Теорема о количестве движения . . . . .	64
3.6. Момент количества движения . . . . .	65
4. <i>Распределение движения в сжимаемой жидкости</i> . . . . .	66
4.1. Предварительные соображения . . . . .	66
4.2. Распространение плоских возмущений малой интенсивности . . . . .	68
4.3. Распространение сферических возмущений малой интенсивности . . . . .	71
4.4. Цилиндрические волны малой интенсивности . . . . .	72
4.5. Распространение плоских волн большой интенсивности . . . . .	73
4.6. Отличительный характер дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых течений . . . . .	76
5. <i>Характеристические формы уравнений для течения сжимаемой жидкости, в которые вводятся скорость звука и число Маха</i> . . . . .	78
5.1. Различные виды уравнения давления, или уравнения энергии . . . . .	78
5.1.1. Критические скорость, давление, плотность и температура . . . . .	79
5.1.2. Изменение характеристик в зависимости от числа Маха . . . . .	80
5.1.3. Изменение давления в случае малых возмущений . . . . .	82
5.2. Дифференциальное уравнение для потенциала скорости при установившемся течении . . . . .	84
5.2.1. Уравнение для потенциала в декартовых координатах . . . . .	84
5.2.2. Уравнение потенциала в цилиндрических координатах . . . . .	86
5.2.3. Уравнение потенциала в полярных координатах . . . . .	88
<b>Глава 3. Установившееся одномерное течение</b> . . . . .	90
6. <i>Установившееся течение через трубы и сопла</i> . . . . .	90
6.1. Уравнения для течения газа через трубы . . . . .	90
6.2. Течение через сопло Лавала . . . . .	93
6.2.1. Изменение скорости как функции поперечного сечения . . . . .	97
6.2.2. Методы для определения условий течения, когда поток массы меньше максимального . . . . .	97
6.3. Течение в трубе с постоянной площадью поперечного сечения при наличии теплопередачи . . . . .	99
7. <i>Теория плоских ударных волн</i> . . . . .	101
7.1. Простая нормальная волна . . . . .	102
7.2. Нормальная ударная волна . . . . .	103
7.2.1. Изменение энтропии . . . . .	105
7.2.2. Потеря напора при переходе через ударную волну . . . . .	107
7.3. Косая ударная волна . . . . .	108
7.3.1. Условия течения за ударной волной . . . . .	113
7.3.2. Условия, приводящие к образованию плоских ударных волн. Фронтальные ударные волны . . . . .	114
7.3.3. Отраженные волны . . . . .	117
7.4. Потеря напора. Волновые сопротивления . . . . .	118
7.5. Графическое представление уравнений ударной волны . . . . .	121
7.6. Отклонение как функция давления . . . . .	125
8. <i>Различные приложения одномерного течения</i> . . . . .	126
8.1. Условия равновесия при течении через сопла . . . . .	126
8.2. Распределение скоростей в сечениях аэродинамической трубы . . . . .	131

8.3. Условия течения в канале дозвуковой аэродинамической трубы . . . . .	132
8.3.1. Потеря напора . . . . .	137
8.3.2. Коэффициент использования аэродинамической трубы . . . . .	140
8.3.3. Условия течения вдоль канала . . . . .	140
8.4. Условия в сверхзвуковой аэродинамической трубе . . . . .	144
8.5. Рассмотрение сверхзвуковых аэродинамических труб прерывистого действия . . . . .	149
8.6. Измерение давления и температуры . . . . .	151
8.6.1. Измерение давления торможения . . . . .	151
8.6.2. Измерение статического давления . . . . .	152
8.6.3. Определение направления скорости . . . . .	155
8.6.4. Измерение температуры торможения . . . . .	155
<b>Глава 4. Общее дозвуковое течение. Рассмотрение трансзвукового режима</b>	<b>157</b>
9. Теория малых возмущений в дозвуковом потоке (линейная теория) . . . . .	157
9.1. Двумерное течение вдоль волнообразной стенки (прямой метод) . . . . .	158
9.2. Течение вокруг тонких профилей (крылья бесконечного размаха) . . . . .	161
9.2.1. Случай инвариантного профиля . . . . .	163
9.2.2. Случай равных потенциалов . . . . .	166
9.2.3. Прямой вывод формулы Прандтля-Глауерта . . . . .	167
9.3. Критическое число Маха при гипотезе малых возмущений . . . . .	168
9.3.1. Прямое и точное определение критического числа Маха . . . . .	170
9.4. Распределение давлений на тонких крыльях . . . . .	171
9.4.1. Распределение давления на аэродинамическом профиле любой формы . . . . .	171
9.4.2. Построение профилей с заданным распределением давления. Ламинарные профили . . . . .	174
9.5. Течение вокруг тонкого тела вращения . . . . .	174
9.5.1. Тонкие тела с осями, параллельными общему направлению потока . . . . .	175
9.5.2. Поперечное движение тела вращения . . . . .	178
9.5.3. Приближенный подсчет поперечной нагрузки и скоростей . . . . .	179
10. Влияние сжимаемости на крыло конечного размаха при гипотезе малых возмущений . . . . .	180
10.1. Предварительные теоретические рассмотрения вихрей в дозвуковом течении . . . . .	180
10.1.1. Поле скоростей, индуцированное вихревой трубкой . . . . .	181
10.1.2. Скорость, индуцируемая прямолинейным отрезком вихревой трубки . . . . .	182
10.1.3. Теорема Кутта — Жуковского . . . . .	187
10.2. Уравнение для циркуляции вокруг крыла конечного размаха . . . . .	188
10.3. Распределение циркуляции вокруг эллиптических прямоугольных и трапециoidalных крыльев . . . . .	192
10.4. Аэродинамические силы и моменты . . . . .	197
10.4.1. Подъемная сила . . . . .	197
10.4.2. Индуктивное сопротивление . . . . .	199
10.4.3. Аэродинамические моменты . . . . .	199
10.5. Отклонение потока вниз по течению . . . . .	201
10.6. Стреловидные и отклоненные (при ненулевом угле рыскания) крылья . . . . .	202
10.6.1. Предварительные замечания . . . . .	203
10.6.2. Действие свободных вихрей на стреловидное и скользящее крылья . . . . .	204
10.6.3. Приложения к стреловидным крыльям . . . . .	206
10.6.4. Применение к отклоненным (скользящим) крыльям . . . . .	212
11. Дозвуковое двумерное течение в случае больших изменений скорости . . . . .	213
11.1. Уравнения Чаплыгина (метод годографа) . . . . .	214
11.1.1. Симметризация уравнений Чаплыгина . . . . .	217
11.1.2. Упрощение уравнений путем применения закона квази-изэнтропического преобразования . . . . .	219
11.2. Метод Кармана — Тзяна для подсчета давлений . . . . .	[ 223

11.2.1. Критическое число Маха . . . . .	227
11.3. Соответствие между плоскостью сжимаемого течения и вспомогательной плоскостью несжимаемого течения при отсутствии циркуляции . . . . .	228
11.3.1. Основные формулы соответствия . . . . .	228
11.3.2. Применение к эллиптическому контуру . . . . .	231
11.3.3. Течение без циркуляции около круга . . . . .	233
11.3.4. Альтернативный метод для определения течения около круга . . . . .	236
12. <i>Определение формул соответствия для течения с циркуляцией</i> . . . . .	238
12.1. Основные формулы соответствия для течения с циркуляцией . . . . .	238
12.1.1. Соответствие в случае круга . . . . .	242
12.2. Построение профилей в физической плоскости, соответствующих данному профилю на вспомогательной плоскости . . . . .	244
12.2.1. Приложения к двояковыпуклым симметричным профилям Жуковского . . . . .	247
12.3. Построение профиля соответствия для заданного профиля в плоскости реального сжимаемого течения . . . . .	250
12.3.1. Приложение к двояковыпуклым симметричным профилям . . . . .	253
13. <i>Область применения теории дозвуковых течений. Трансзвуковой режим</i> . . . . .	258
13.1. Предварительные замечания . . . . .	258
13.2. Качественная оценка волнового для сопротивления значений $M_\infty$ , заключенных между $M_c$ и единицей . . . . .	264
13.3. Изменение давления и подъемной силы . . . . .	268
13.3.1. Влияние кривизны профиля . . . . .	272
13.3.2. Ламинарные профили . . . . .	276
13.4. Изменения аэродинамических моментов . . . . .	276
13.4.1. Коэффициент момента для симметричных профилей . . . . .	276
13.4.2. Коэффициент момента при нулевой подъемной силе . . . . .	276
13.5. Рассмотрение стрелковидных крыльев при большой дозвуковой скорости полета . . . . .	278
13.6. Выводы . . . . .	281
<b>Глава 5. Сверхзвуковое течение в случае малых возмущений</b> . . . . .	284
14. <i>Метод малых возмущений в двумерном сверхзвуковом потоке</i> . . . . .	284
14.1. Сверхзвуковое течение вдоль стенки волнообразной формы . . . . .	285
14.2. Теория тонкого профиля (линейная теория) Аккерета . . . . .	287
14.2.1. Определение коэффициента подъемной силы . . . . .	289
14.2.2. Определение коэффициента лобового сопротивления . . . . .	290
14.2.3. Коэффициенты моментов . . . . .	294
14.3. Лобовое сопротивление профилей . . . . .	295
14.3.1. Максимальное аэродинамическое качество . . . . .	295
14.3.2. Профили с минимальным лобовым сопротивлением . . . . .	296
14.3.3. Ламинарные профили в сверхзвуковом потоке . . . . .	299
14.3.4. Изменение подъемной силы и полного лобового сопротивления в зависимости от числа Маха . . . . .	301
14.4. Обтекание крыла бесконечного размаха при наличии скольжения . . . . .	301
15. <i>Течение вокруг тела вращения в предположении малых возмущений</i> . . . . .	304
15.1. Рассмотрение дифференциального уравнения для потенциала скорости . . . . .	304
15.2. Осесимметричное течение . . . . .	307
15.2.1. Применение к простому круговому конусу . . . . .	309
15.2.2. Вычисление скоростей и давлений на теле вращения . . . . .	310
15.2.3. Тонкое тело вращения с протоком . . . . .	313
15.2.4. Тонкие заостренные тела вращения . . . . .	313
15.3. Лобовое сопротивление тонких заостренных тел в случае осесимметричного течения . . . . .	316
15.3.1. Практический метод вычисления лобового сопротивления для тел вращения . . . . .	320
15.4. Обтекание тел вращения, наклоненных под углом атаки к потоку . . . . .	322

15.4.1. Применение к конусу вращения, наклоненному под углом атаки к потоку . . . . .	323
15.4.2. Тонкие заостренные тела, наклоненные под углом атаки к потоку . . . . .	325
<b>16. Теория конического течения в предположении малых возмущений . . . . .</b>	<b>328</b>
16.1. Упрощение уравнения для потенциала скорости в случае обтекания тонких конических тел . . . . .	329
16.1.1. Тонкая треугольная пластинка . . . . .	331
16.1.2. Лобовое сопротивление клиновидного треугольного крыла . . . . .	332
16.2. Влияние фюзеляжа . . . . .	334
16.2.1. Распространение метода на тонкий фюзеляж, снабженный тонкими крыльями . . . . .	337
16.3. Преобразование Буземана для приведения потенциала к двумерному уравнению Лапласа . . . . .	338
16.3.1. Свойство преобразования Буземана . . . . .	341
16.3.2. Применение к потоку, обтекающему конус вращения . . . . .	344
16.3.3. Применение к крыльям конечного размаха . . . . .	344
<b>Глава 6. Точные решения в случае двумерного сверхзвукового течения . . . . .</b>	<b>346</b>
<b>17. Расширение двумерного сверхзвукового потока . . . . .</b>	<b>346</b>
17.1. Определение основных уравнений для разрежения вокруг угла . . . . .	347
17.2. Полное расширение Прандтля-Майера . . . . .	349
17.2.1. Вычисление отклонения потока . . . . .	351
17.2.2. Эпициклоидная кривая . . . . .	355
17.2.3. Графическое построение нормалей к эпициклоиде . . . . .	357
17.3 Ограниченное (частное) расширение . . . . .	358
17.3.1. Расширение вокруг угла . . . . .	358
17.3.2. Расширение вдоль искривленной стенки . . . . .	361
17.3.3. Применение формулы для расширения к волнам сжатия в случае малых отклонений . . . . .	361
17.4. Применение к точной теории сверхзвуковых профилей . . . . .	362
17.4.1. Плоская пластинка в сверхзвуковом потоке . . . . .	363
17.4.2. Ромбовидный профиль . . . . .	366
17.4.3. Искривленный профиль . . . . .	367
17.5. Гидродинамическая аналогия для волновой системы . . . . .	368
17.6. Течения, не зависящие от отклонения потока . . . . .	371
17.6.1. Течение вокруг вихря . . . . .	371
17.6.2. Источник с постоянным расходом . . . . .	372
17.6.3. Наложение источника и вихря . . . . .	373
<b>18. Теория сверхзвуковых профилей во втором приближении . . . . .</b>	<b>373</b>
18.1. Разложение коэффициента давления в ряд по степеням отклонения . . . . .	374
18.1.1. Разложение коэффициента давления в случае ударных волн . . . . .	374
18.1.2. Разложение коэффициента давления в случае волн разрежения . . . . .	376
18.1.3. Выбор формулы второго приближения для подсчета давлений . . . . .	377
18.2. Общие формулы для вычисления подъемной силы, волнового сопротивления и результирующих моментов сверхзвуковых профилей . . . . .	380
18.2.1. Профили с минимальным лобовым сопротивлением при нулевой подъемной силе ( $C_{x0}$ минимум) . . . . .	385
18.2.2. Профили максимального аэродинамического качества . . . . .	387
18.3. Аэродинамические характеристики обычных сверхзвуковых профилей . . . . .	388
18.3.1. Ромбовидные профили . . . . .	388
18.3.2. Профили, образованные из дуг окружностей . . . . .	390
18.3.3. Двоякотрапециoidalные профили . . . . .	392
18.4. Экспериментальное подтверждение . . . . .	393
<b>19. Метод характеристик, применяемый для анализа двумерного сверхзвукового течения . . . . .</b>	<b>398</b>



19.1. Предварительные теоретические соображения . . . . .	398
19.1.1. Линеаризованные уравнения для двумерного течения . . . . .	399
19.2. Характеристические линии . . . . .	401
19.2.1. Интегрирование уравнения характеристик в плоскости годографа	406
19.2.2. Практическое применение диаграммы характеристик . . . . .	407
19.3. Волны, отраженные твердыми стенками или свободными поверхно- стями . . . . .	412
19.4. Волны интерференции . . . . .	415
19.4.1. Интерференция ударных волн и волн разрежения . . . . .	417
19.4.2. Пересечение волн интерференции . . . . .	420
19.4.3. Применение диаграммы характеристик к сетке волн интерференции	423
19.5. Влияние отраженных волн и волн интерференции на лобовое сопро- тивление сверхзвукового биплана при нулевой подъемной силе . . . . .	424
20. Приложение метода характеристик к расчету плоских эффузоров, диффу- зоров и сопел . . . . .	428
20.1. Расчет плоского сверхзвукового эффузора . . . . .	429
20.2. Графическое построение эффузора . . . . .	433
20.2.1. Эффузор с резким отклонением стенки . . . . .	433
20.2.2. Эффузор с постепенным изменением наклона стенки . . . . .	434
20.3. Аналитическое определение контура эффузора . . . . .	435
20.3.1. Приближенное определение течения вблизи звуковой горловины . . . . .	437
20.4. Рассмотрение сверхзвукового диффузора . . . . .	440
20.5. Определение условий течения в двумерных сверхзвуковых струях . . . . .	442
<b>Глава 7. Точные решения для течений вокруг тел вращения . . . . .</b>	<b>448</b>
21. Обтекание круглого конуса . . . . .	448
21.1. Общие уравнения конического течения . . . . .	449
21.2. Круглый конус с осью, параллельной потоку . . . . .	450
21.2.1. Определение конической ударной волны . . . . .	451
21.3. Вычисление скоростей и давлений при осесимметричном обтекании круглого конуса . . . . .	452
21.3.1. Определение твердого конуса, когда полуугол конуса ударной волны известен . . . . .	456
21.4. Метод Буземана для графического определения осесимметричного течения вокруг конуса вращения . . . . .	457
12.4.1. Яблоковидная диаграмма . . . . .	460
22. Изучение течения вокруг тел вращения и внутри эффузоров круглого по- перечного сечения . . . . .	463
22.1. Общие уравнения движения . . . . .	463
22.2. Метод характеристик при осесимметричном течении . . . . .	464
22.2.1. Дифференциальные уравнения характеристик . . . . .	464
22.3. Использование характеристик при последовательных операциях . . . . .	467
22.4. Определение потока, обтекающего заостренное тело вращения, путем применения метода характеристик . . . . .	474
22.5. Приложение характеристик к расчету круглых эффузоров . . . . .	475
22.5.1. Расчет идеального эффузора с круговым поперечным сечением . . . . .	476
22.5.2. Аналитическое определение условий течения вблизи звуковой гор- ловины . . . . .	478
22.6. Тяга, создаваемая сверхзвуковой струей . . . . .	479
<b>Глава 8. Теория крыльев конечного размаха в сверхзвуковом потоке, основан-     ная на методе малых возмущений . . . . .</b>	<b>481</b>
23. Методы расчета, применяемые в теории крыльев конечного размаха в сверхзвуковом потоке . . . . .	481
23.1. Метод источников, примененный к расчету крыльев с симметричным профилем и нулевым углом атаки . . . . .	481
23.2. Применение к крылу угловидной формы с постоянным наклоном . . . . .	486
23.3. Теория тонких крыльев, основанная на методе диполей . . . . .	489

23.4. Применение к угловидной пластинке с дозвуковыми ведущими кромками . . . . .	491
23.5. Метод потенциалов ускорения . . . . .	496
24. Предварительные рассмотрения теории бесконечных угловидных крыльев, основанной на методе конического течения . . . . .	497
24.1. Геометрические характеристики конического крыла . . . . .	498
24.1.1. Определение кромок крыла в зависимости от конуса Маха . . . . .	501
24.2. Применение основных формул конического течения к коническим угловидным крыльям . . . . .	503
24.2.1. Граничные условия . . . . .	506
24.3. Общее выражение функции. Гидродинамическая аналогия . . . . .	507
24.3.1. Симметричное толстое крыло . . . . .	509
24.3.2. Тонкое угловидное крыло с дозвуковыми ведущими кромками . . . . .	512
24.3.3. Тонкое крыло в случае, когда обе ведущие кромки дозвуковые . . . . .	513
24.4. Условия течения около дозвуковых ведущих кромок тонких крыльев . . . . .	517
25. Вычисление осевых скоростей возмущения и давлений для угловидных крыльев симметричной толщины . . . . .	518
25.1. Угловидное крыло с постоянным наклоном . . . . .	518
25.1.1. Дозвуковые ведущие кромки . . . . .	520
25.1.2. Крыло с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками . . . . .	521
25.1.3. Крыло со сверхзвуковыми ведущими кромками . . . . .	522
25.2. Угловидное симметричное крыло со многими гранями . . . . .	523
25.2.1. Приложение к симметричному крылу с двойным наклоном . . . . .	525
25.3. Угловидное крыло с непрерывно изменяющимся наклоном . . . . .	526
25.4. Вычисление давлений для стреловидных крыльев бесконечного размаха с симметричным профилем . . . . .	529
25.4.1. Крыло с ромбовидным профилем . . . . .	529
25.4.2. Крыло с параболическим профилем . . . . .	532
26. Волновое сопротивление двоякоконических дельтообразных крыльев симметричной толщины . . . . .	538
26.1. Определение двоякоконического дельтообразного крыла . . . . .	538
26.2. Вычисление волнового сопротивления . . . . .	541
26.3. Приложение к расчету дельтообразных крыльев с ромбовидным профилем . . . . .	544
26.3.1. Крыло с дозвуковой ведущей кромкой и дозвуковой замыкающей поверхностью . . . . .	546
26.3.2. Крыло с дозвуковой ведущей кромкой и сверхзвуковой замыкающей поверхностью . . . . .	547
26.3.3. Крыло со сверхзвуковой ведущей кромкой и сверхзвуковой замыкающей поверхностью . . . . .	548
26.3.4. Экспериментальное подтверждение . . . . .	548
26.4. Лобовое сопротивление двоякоконических дельтообразных крыльев с линейным изменением наклона . . . . .	549
26.4.1. Крыло с дозвуковой ведущей кромкой и дозвуковой замыкающей кромкой . . . . .	554
26.4.2. Дозвуковая ведущая кромка и сверхзвуковая замыкающая кромка . . . . .	555
26.4.3. Крыло со сверхзвуковой ведущей кромкой . . . . .	556
26.4.4. Некоторые соображения о волновом сопротивлении треугольных крыльев с переменным наклоном . . . . .	557
26.5. Волновое сопротивление двоякоконического дельтообразного крыла с двойным наклоном . . . . .	558
27. Теория тонкого плоского треугольного крыла . . . . .	561
27.1. Тонкое треугольное крыло со сверхзвуковыми ведущими кромками . . . . .	562
27.1.1. Определение подъемной силы и волнового сопротивления . . . . .	563
27.1.2. Определение моментов . . . . .	566
27.2. Тонкое треугольное крыло с одной сверхзвуковой ведущей кромкой . . . . .	567

27.2.1. Случай дозвуковой задней кромки . . . . .	569
27.2.2. Определение подъемной силы и лобового сопротивления . . . . .	570
27.2.3. Определение моментов . . . . .	572
27.3. Треугольное крыло с дозвуковыми ведущими кромками . . . . .	573
27.3.1. Случай, когда одна из кромок крыла становится задней кромкой . . . . .	577
27.3.2. Вычисление подъемной силы и лобового сопротивления . . . . .	579
27.3.3. Вычисление моментов . . . . .	580
27.4. Эффект подсоса на дозвуковых ведущих кромках . . . . .	580
27.4.1. Применение к угловидным крыльям с одной дозвуковой ведущей кромкой . . . . .	583
27.4.2. Подсасывающая сила для угловидного крыла с дозвуковыми ведущими кромками . . . . .	584
<b>28. Определение аэродинамических характеристик тонких плоских крыльев обычной формы . . . . .</b>	<b>584</b>
28.1. Простые трапециевидные крылья . . . . .	584
28.1.1. Трапециевидное крыло со сверхзвуковой боковой ведущей кромкой . . . . .	585
28.1.2. Трапециевидное крыло с дозвуковой боковой ведущей кромкой . . . . .	586
28.1.3. Прямоугольные крылья . . . . .	587
28.1.4. Трапециевидное крыло с дозвуковой боковой задней кромкой . . . . .	588
28.2. Вычисление сил и моментов для треугольных крыльев со скошенной задней кромкой . . . . .	589
28.2.1. Сверхзвуковые ведущие кромки . . . . .	591
28.2.2. Крыло с одной сверхзвуковой и одной дозвуковой ведущими кромками . . . . .	593
28.2.3. Крыло с сверхзвуковой ведущей кромкой и дозвуковой задней кромкой . . . . .	595
28.2.4. Дозвуковые ведущие кромки . . . . .	595
28.2.5. Дозвуковая ведущая кромка и дозвуковая задняя кромка . . . . .	597
28.2.6. Приложение к треугольному крылу, имеющему угол рысканья . . . . .	597
28.3. Стреловидные и ромбовидные крылья . . . . .	599
28.3.1. Сверхзвуковые ведущие и задние кромки . . . . .	600
28.3.2. Дозвуковая ведущая кромка и сверхзвуковая задняя кромка . . . . .	602
28.3.3. Обе кромки дозвуковые . . . . .	603
28.4. Двоякотрапециевидное крыло . . . . .	604
28.4.1. Случай сверхзвуковых кромок . . . . .	606
28.4.2. Дозвуковая ведущая кромка и сверхзвуковая задняя кромка . . . . .	607
<b>Глава 9. Сложные течения вокруг треугольных крыльев и их применение к определению аэродинамических характеристик . . . . .</b>	<b>610</b>
<b>29. Метод гидродинамической аналогии, примененный к тонким крыльям с переменным углом атаки . . . . .</b>	<b>610</b>
29.1. Влияние отклонения элеронов со сверхзвуковыми ведущими кромками . . . . .	610
29.1.1. Влияние элерона на подъемную силу . . . . .	612
29.1.2. Момент крена относительно оси $Ox_1$ . . . . .	613
29.1.3. Шарнирный момент . . . . .	614
29.2. Изменение угла атаки для крыльев с одной дозвуковой и одной сверхзвуковой ведущими кромками . . . . .	614
29.3. Применение к элерону с дозвуковой кромкой . . . . .	617
29.3.1. Влияние элерона на подъемную силу . . . . .	618
29.3.2. Момент крена относительно оси $Ox_1$ . . . . .	619
29.4. Треугольное крыло с дозвуковыми кромками и переменным углом атаки . . . . .	620
29.4.1. Крыло с резким изменением угла атаки . . . . .	621
29.4.2. Крыло с линейным изменением угла атаки . . . . .	624
29.4.3. Дельтообразное крыло с линейным изменением угла, продолженное посредством горизонтальной плоскости . . . . .	626
29.5. Подъемная сила тонкого двоякоконического дельтообразного крыла . . . . .	627

29.5.1. Вычисление скорости и подъемной силы, обусловленных влиянием замыкающей поверхности . . . . .	628
29.5.2. Определение полной подъемной силы . . . . .	630
30. Теория полигональных крыльев, снабженных плоскими пластинками, нормальными к крылу . . . . .	632
30.1. Тонкое угловидное крыло, снабженное пластинкой, перпендикулярной к крылу . . . . .	633
30.1.1. Дозвуковые ведущие кромки . . . . .	633
30.1.2. Крыло с дозвуковой и сверхзвуковой ведущими кромками . . . . .	538
30.1.3. Сверхзвуковые ведущие кромки . . . . .	641
30.2. Толстое симметричное крыло, снабженное пластинкой, нормальной к крылу . . . . .	643
30.2.1. Дозвуковые ведущие кромки . . . . .	643
30.2.2. Крыло с одной дозвуковой и одной сверхзвуковой ведущими кромками . . . . .	644
30.2.3. Сверхзвуковые ведущие кромки . . . . .	644
30.3. Функция $f = u + iu'$ в случае пластинки с углом атаки, отличным от нуля . . . . .	645
30.3.1. Тонкое крыло . . . . .	645
30.3.2. Симметричное толстое крыло . . . . .	647
30.4. Применение к прямоугольному крылу, снабженному концевыми пластинками . . . . .	648
30.4.1. Вычисление подъемной силы . . . . .	650
30.4.2. Вычисление лобового сопротивления . . . . .	651
30.4.3. Вычисление момента крена . . . . .	652
30.5. Крестообразное крыло с асимметричным наклоном . . . . .	654
30.5.1. Вычисление момента крена . . . . .	658
31. Конические течения высшего порядка и их применение к дельтообразным крыльям . . . . .	658
31.1. Предварительные замечания . . . . .	659
31.2. Соотношения совместимости . . . . .	662
31.3. Применение к тонким треугольным крыльям с дозвуковыми ведущими кромками . . . . .	663
31.3.1. Определение осевой скорости $u$ . . . . .	664
31.3.2. Примечания . . . . .	656
31.3.3. Применение к искривленному дельтообразному крылу . . . . .	669
31.4. Действие неоднородного потока на тонкое плоское треугольное крыло с дозвуковыми кромками . . . . .	670
31.5. Определение сил и моментов . . . . .	672
31.6. Гидродинамический метод определения осевой скорости возмущения в случае дельтообразных крыльев симметричной толщины . . . . .	675
31.6.1. Принцип, положенный в основу метода . . . . .	676
31.6.2. Общее выражение для осевой скорости возмущения . . . . .	680
31.6.3. Определение постоянных . . . . .	680
31.6.4. Примеры применения . . . . .	681
31.6.5. Применение к тонким дельтообразным крыльям со сверхзвуковыми кромками . . . . .	682
31.7. Распространение гидродинамического метода на тонкие треугольные крылья с одной сверхзвуковой ведущей кромкой . . . . .	683
32. Исследования неустановившегося течения при больших скоростях . . . . .	687
32.1. Линеаризованные уравнения для неустановившегося течения . . . . .	687
32.2. Приведенное уравнение для потенциала . . . . .	689
32.2.1. Приведенный скос потока . . . . .	690
32.2.2. Разложение приведенного потенциала . . . . .	691
32.2.3. Вычисление давлений . . . . .	692
32.3. Приложение к крылу бесконечного размаха . . . . .	692

32.4. Применение к треугольному крылу с дозвуковыми ведущими кромками	694
32.5. Колебательное движение крестовидного дельтообразного крыла	695
32.5.1. Определение функций $\Phi_{100} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$	696
32.5.2. Определение приведенного потенциала $\varphi_1$	699
32.5.3. Определение постоянных	700
32.6. Теория высокочастотных гармонических колебаний крыльев	701
32.6.1. Преобразование Фурье	701
32.6.2. Приложение к крылу бесконечного размаха	702
32.7. Применение двойного преобразования Фурье к крыльям конического размаха	704
32.8. Гармонические колебания тонких тел вращения	706
33. <i>Обобщенная теория конических течений высокого порядка, охватывающая как прямые, так и обратные задачи</i>	708
33.1. Предварительные рассмотрения	708
33.2. Общее выражение для осевой скорости на крыле	710
33.2.1. Влияние ребра	711
33.2.2. Примеры применения	713
33.2.3. Определение постоянных	714
33.3. Общее решение для гармонического движения низкой частоты	715
33.3.1. Гармонические колебания вокруг оси	717
33.3.2. Гармонические колебания элеронов	718
33.3.3. Случай неоднородного и периодического потока	719
33.4. Треугольные крылья с заданным распределением давления (обратная задача)	719
33.4.1. Логарифмическая особенность в начале координат	722
33.4.2. Общие формулы для $w$	722
33.4.3. Примеры применения	723
33.4.4. Определение постоянных	724
33.4.5. Применение к собственно коническому течению	725

*Е. Карифоли*  
**Аэродинамика больших скоростей**

*Утверждено к печати*  
*Институтом механики Академии наук СССР*

•  
Технический редактор **Г. Н. Шевченко**

•  
РИСО АН СССР № 65-64В. Сдано в набор 20/VII 1959 г.  
Подписано к печати 24/II 1960 г. Формат 70×108<sup>1/16</sup>. 46,25 печ. л.  
63,36 усл.-печ. л. + 1 вклейка 48,5 уч.-изд. л. Тираж 3800 экз.  
Т-00184. Изд. № 3596. Тип. зак. № 3631.

*Цена 36 руб.*

---

Издательство Академии наук СССР  
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография Издательства АН СССР  
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
35	Ф-ла (2.38)	$\frac{\rho}{\rho^x}$	$\frac{\rho}{\rho^x}$
35	Ф-ла (2.39)	$\frac{\rho}{\rho^x} = \frac{\rho_0}{\rho_0^x}$	$\frac{\rho}{\rho^x} = \frac{\rho_0}{\rho^x}$
36	Ф-ла (2.44)	$= \frac{dQ_t}{T}$	$dS = \frac{dQ}{T}$
49	Ф-ла (3.12)	$\frac{\partial \rho}{\partial x}$	$\frac{\partial \rho}{\partial x}$
58	Ф-ла (3.59)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} V^2 = \text{const}$
68	Ф-ла (4.6)	$\frac{\partial u^2}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
69	19 св.	$\frac{\text{кг/сек}}{\text{м}^4}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$
83	Ф-ла (5.28)	$C_p \parallel \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = -2 \frac{v}{U_\infty}$	$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \approx -2 \frac{u}{U_\infty}$
101	Ф-ла (6.34)	$(1 + \kappa M_2^2)^2$	$(1 + \kappa M_2^2)^2$
110	Ф-ла (7.426)	$\frac{2}{M_1^2 \sin^2 \beta}$	$\frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta}$
264	3 сн.	$M_2$	$M_c$
316	Ф-ла (15.53)	$-f(x)$	$-f'(x)$
339	Ф-ла (16.60)	$\frac{\partial q}{\partial \omega}$	$\frac{\partial q}{\partial \omega}$
488	Ф-ла (23.30)	$B - \sqrt{1 - \text{tg}^2 \kappa \text{tg}^2 \mu}$	$B \sqrt{1 - \text{tg}^2 \kappa \text{tg}^2 \mu}$
607	1 св.	уравнения,	уравнения $(1 + e) \beta C_z -$ $= S_m C_{zm} + S_1 C_{z_1} + S_a C_{za} (28.119)$
612	Ф-ла (29.6)	$4a$	$4a$
614	Ф-ла (29.15)	$\sqrt{Bl_1^2 - 1}$	$\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}$
619	Ф-ла (29.46)	$L$	$L_2^1$
621	Ф-ла (29.54)	$l_1 - l$	$l_1 - l_s$
650	3 сн.	$\frac{1}{B_2}$	$\frac{1}{B_1}$
686	Ф-ла (31.1436)	$-e$	$-Rei$
713	Ф-ла (33.19)	$E \left( \frac{n-1}{2} \right)$	$E \left( \frac{n}{2} \right)$