О. А. ИВАНОВ

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор И. Н. Рязанова

Рецензенты: кабинет математики С.-Петербург. ун-та педагогич. мастерства; д-р физ.-мат. наук, проф. А. С. Меркурьев (С.-Петербург. ун-т)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета С.-Петербургского университета

УДК 514.075

Иванов О. А.

Избранные главы элементарной математики: Учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1995. 224 с.

ISBN 5-288-01430-2

Книга представляет собой изложение одноименного курса лекций, на протяжении ряда лет читавшегося автором в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете для старшекурсников педагогической специализации математико-механического факультета. Особенностью этой книги является то, что в ней впервые в отечественной учебной литературе элементарные задачи естественным образом связываются с вопросами "высшей" математики.

Книга предназначена для широкого круга читателей: учащихся и учителей специализированных средних учебных заведений, студентов педагогической специализации университетов и всех интересующихся преподаванием математики.

Библиогр. 32 назв. Табл. 1. Ил. 60.

$$\text{И}\ \frac{4306020000-031}{076(02)-95}\ 79\text{–}95$$

ISBN 5-288-01430-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга эта необычна, даже единственна в своем роде, по крайней мере среди изданий по математике, опубликованных на русском языке. Перед вами не учебник и не монография, хотя "Избранные главы элементарной математики" являются, безусловно, хорошим учебно-методическим пособием. Я думаю, что предлагаемая книга не только о математике и не только об искусстве ее преподавания. Не касаясь содержания (о нем достаточно подробно написал автор во введении), попробую дать представление о книге в целом и передать ощущения, возникшие при ее чтении.

Практически все главы книги начинаются с известных задач по элементарной математике. А ведь в каждой хорошей элементарной задаче под ее занимательной формулировкой скрывается, так сказать, "высокая" математика, лучше просто – математика, что и демонстрирует автор читателю. И естественным образом в каждую главу вкладываются далеко не элементарные рассуждения. В результате предмет данной книги предстает перед читателем объемно, как на голографическом изображении, на которое можно взглянуть с различных сторон.

Трудно сказать, чем это достигается. Умело подобранные задачи и продуманное их расположение, к месту вставленное упражнение (в котором подчас важна уже сама его формулировка), иногда автор использует даже литературные приемы. Как во всякой хорошей книге – важен и сюжет, и стиль, и язык, и то, что за текстом ощущается личность автора.

Как всякая серьезная книга, "Избранные главы элементарной математики" будут поняты далеко не каждым – чтобы читатель мог воспринимать всю ее глубину, сам он должен обладать достаточно высокой культурой, в данном случае – математической. Возможно, что наибольшее удовольствие от чтения этой книги получит математик-профессионал. Что же, пусть кто-то из читателей будет лишь следить за развитием элементарных сюжетов, а после перескажет их своим ученикам. Но хорошо, что такая книга написана, и я с удовольствием представляю ее широкому кругу читателей.

Проф. А.С.Меркурьев

ОТ АВТОРА

Эта книга есть расширенный конспект лекционного курса, который автор в течение ряда лет читает для студентов 4-5 курсов педагогической специализации математико-механического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета. Этот курс (объемом 60 лекционных часов) был задуман как итоговый общематематический, содержащий множество ссылок на понятия и утверждения базовых математических курсов. По-видимому, многим профессиональным преподавателям понравилась бы идея создания такого лекционного курса, предмет которого – "математика в целом", без традиционного деления на алгебру, анализ, геометрию и т.д. Конечно, читаемый автором курс курс лекций не может заменить базовые курсы, а призван их дополнить и прояснить.

Подчеркну, что "Избранные главы элементарной математики" – это книга для учителей средних (специализированных) учебных заведений и тех, кто готовится ими стать. Учитель, работающий в специализированной школе (гимназии, лицее, в том числе и гуманитарного профиля), должен знать и понимать математику настолько хорошо и широко, чтобы быть в состоянии разработать программу обучения, соответствующую профилю данного учебного заведения. В частности и поэтому его образование не может ограничиваться лишь материалом, который он непосредственно преподает. К примеру, учитель не должен даже упоминать об аксиоматике Пеано в классе (за исключением, быть может, лишь самой элитарной – в лучшем смысле этого слова – аудитории). Однако сам он должен ее понимать хотя бы для того, чтобы суметь доступно и математически грамотно ответить умному шестикласснику, откуда же взялась таблица умножения, или же умному десятикласснику, которому не очевиден метод математической индукции.

ВВЕДЕНИЕ

Излагаемый в книге материал разбит на отдельные темы-сюжеты, объединенные, в основном, внутренней структурой их изложения. Большинство глав начинается с задач по элементарной математике, которые могут составить основу для занятий школьного кружка или факультатива*. Далее появляются понятия "высшей" математики, использующие аналогичные методы и идеи либо связанные с обоснованием этих методов. Примеры того, как это делается, будут приведены далее. Что касается "высшей " математики, то в этой книге рассматриваются классические результаты с несложными и поучительными доказательствами, использующие подчас понятия, далекие, на первый взгляд, от поставленных задач, которые везде и всюду трактуются с единой алгебро-геометрической точки зрения. Подчеркнем также, что книга содержит и некоторые понятия и результаты, не входящие в традиционные для математико-механического факультета базовые курсы. В конце каждой главы имеются замечания методического характера. В силу того, что автор совершенно сознательно стремился быть кратким (это – конспект!), к отдельным задачам даны лишь указания, а некоторые моменты рассуждений сформулированы как упражнения для читателя. Так что между формулировкой утверждения и знаком ■, обозначающим конец доказательства, вполне могут находиться несколько упражнений.

Что касается ссылок на использованную литературу, то они даны в тех случаях, когда указанный источник существенно использован в тексте книги. Автор также должен признаться, что в содержании данной книги и принятом в ней методе изложения отразились педагогические идеи Ф.Клейна [10] и Д.Пойа [18] – так, как автор их воспринимает.

Подчеркнем еще раз, что во всех главах этой книги, за исключением глав 8-10, имеются элементарные задачи. Задачи

*Автор рекомендует учителям также пособия серии "MATHESIS. Математика". В [8] содержатся варианты работ с нестандартно сформулированными, но, по сути, обычными задачами, в [9] приведены сто специально подобранных задач олимпиадного характера для тех старшеклассников, которые только начали заниматься математикой на более высоком уровне.

главы 9, хотя не могут быть причислены к элементарным, связаны с входящим в школьную программу понятием производной.

А дальнейшее изложение содержания книги, к которому мы сейчас переходим, в основном посвящено развитию неэлементарных ее сюжетов.

В главе 1 – "Индукция" – основной объект – это множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Попытка доказать принцип математической индукции приводит к необходимости дать формальное описание этого множества. Логическая простота предложенной Пеано аксиоматики позволяет проследить, как же, шаг за шагом, вводятся алгебраические структуры на множестве $\mathbb{N}$ (в частности, читателю предлагается в качестве упражнения доказать(!), что $2 \times 2 = 4$). Подчеркивается разница между формальным использованием метода математической индукции и индуктивным методом рассуждения (задача 2) и обращается внимание на неявное использование этого метода. Отдельный сюжет главы 1 связан с определением числа элементов множества, в одном из упражнений предлагается доказать (очевидную) формулу $|A \times B| = |A|\,|B|$. Кроме того, в этой главе дано и построение множества $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Глава 2 – "Комбинаторика" – посвящена в основном мотивировке, введению и применению функционального подхода к комбинаторным задачам, так называемому методу производящих функций. Мотивировка этого метода дана на примере разложения бинома Ньютона. Числа сочетаний введены перед этим тремя различными, но равносильными способами, причем в самом геометричном из них практически очевидно основное рекуррентное соотношение между этими числами. Далее, на примере вывода явной формулы для чисел Фибоначчи, показано, что для понимания метода производящих функций следует ввести в рассмотрение кольцо формальных степенных рядов. Основная комбинаторная задача этой главы – это задача о числе разбиений натурального числа. Кроме того, рассмотрена одна относительно несложная задача о перечислении графов. В заключение приведено аналитическое доказательство формулы Стирлинга, дающей асимптотику для числа $n!$.

Основная идея главы 3 – "Геометрические преобразования" – введение алгебраической (групповой) структуры в множестве всех движений плоскости. В качестве мотивировки основного определения приведен ряд элементарных задач, среди которых наиболее важны задачи 7, 8, а его наиболее существенное применение – это алгебраическая классификация периодических узоров (орнаментов) на полосе. В методическом плане важное место в этой главе занимают координатные вычисления композиций преобразований.

Изложение материала в главе 4 – "Неравенства" – в основном следует классическому труду Харди, Литтлвуда и Пойа [16]. Проведены пять доказательств классического неравенства Коши. В отличие от [16] уделяется больше внимания геометрической интерпретации неравенств, в частности введено понятие нормы Минковского, доказана теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве. Кроме того, дана геометрическая интерпретация коэффициентов и ряда Фурье, используемого в доказательстве неравенства Виртингера. Последнее неравенство применяется для решения изопериметрической задачи (в этом рассуждении также используется частный случай формулы Грина – формулы, выражающей площадь области через интеграл по ограничивающей ее кривой).

В главу 5 включен очень разнообразный материал, хотя ее название "Множества, уравнения и многочлены" довольно точно отражает ее основную идею: изучение свойств множеств путем исследования задающих эти множества уравнений. Отметим два сюжета. Первый из них, хотя очень прост, полезен для образования учащихся. Речь идет об изображении множеств, заданных совсем простыми уравнениями (неравенствами). Исходной точкой второго сюжета можно считать задачу о построении многочлена с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Стандартное ее решение содержит идею исключения неизвестного из системы уравнений. Развитие этой идеи – метод исключения – имеет в качестве своего приложения доказательство теоремы Безу о числе точек пересечения двух плоских алгебраических кривых. А через небольшую, казалось бы, переформулировку – доказать существование такого многочлена – читатель подводится к понятию конечного расширения поля.

Тематика главы 6 – "Графы" – всегда присутствует в сочинениях, посвященных элементарной математике. Стандартным является и доказательство формулы Эйлера для плоских графов. Однако из вопроса – почему же неверен аналог формулы Эйлера для графов на торе – возникает потребность сформулировать и доказать теорему Жордана. Приведенное доказательство последней теоремы использует такое общематематическое понятие, как степень точки относительно кривой (в рассматриваемом случае – степень по модулю два относительно простой замкнутой ломаной). Используя понятие паросочетания в графе, можно получить геометрически прозрачное доказательство теоремы Бернштейна о сравнении мощностей множеств.

Основная идея большинства рассуждений главы 7 – "Принцип Дирихле" – очень проста: если более чем n предметов разложены по n коробкам, то в какой-то из них лежит не менее двух этих предметов. Такого рода соображения являются ключевыми при решении многих олимпиадных задач, в данной главе они, кроме того, применяются для ответа на вопрос: является ли число -1 квадратичным вычетом по данному модулю (леммы, используемые в доказательствах теорем Эйлера и Лагранжа о представимости натурального числа как суммы двух или четырех квадратов целых чисел)? Наиболее интересные результаты получаются, если "принцип Дирихле" применяется к бесконечным множествам, а вместо числа элементов подсчитывается мера (длина, площадь, объем) его подмножеств. Абстрактные результаты, представленные в этой главе – это теорема Пуанкаре о возвращении (для сохраняющего меру преобразования) и лемма Минковского о центрально симметричном выпуклом подмножестве в $\mathbb{R}^n$ (дающая достаточное условие, при котором такое множество содержит ненулевую точку фиксированной решетки). Каждое из этих двух утверждений имеет разнообразные, в том числе и достаточно элементарные, приложения. Кроме того, лемма Минковского играет ключевую роль в доказательствах упомянутых выше теорем Эйлера и Лагранжа, а теорема Пуанкаре – при выводе одного парадоксального физического утверждения. В этой главе естественно появляются и такие утверждения, как теорема Лагранжа об индексе подгруппы конечной группы, системы первой вариации и дифференцируемость по начальным данным решений систем дифференциальных уравнений, теорема Фубини, замкнутые подгруппы.

Глава 8 – "Кватернионы" – кажется, на первый взгляд, не соответствующей основной идее книги. В качестве мотивировки ее включения автор избрал использование кватернионов для ясной интерпретации появившегося в конце предыдущей главы тождества Эйлера. Кроме того, из одного из результатов главы 8 следует, что не существует числового поля, содержащего поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел (и отличного от него). Далее исследование свойств тела кватернионов приводит к определению новой алгебраической структуры – так называемых алгебр, важными примерами которой служит естественная структура в пространствах матриц. В качестве приложения понятия кватернионов дано описание вращений в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$. Еще один результат этой главы: если в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести структуру алгебры с делением, то на единичной сфере этого пространства существует $n-1$ линейно независимых векторных поля (теорема Штифеля). Приведено также доказательство классической теоремы Фробениуса о классификации конечномерных алгебр с делением над $\mathbb{R}$.

Основное содержание главы 9 – "Производная" – приложения этого понятия (в основном к задачам геометрии и механики), например для описания положения точки, сумма расстояний от которой до трех данных имеет наименьшее значение (задача 3), основанного на классической теореме дифференциального исчисления – теореме Ферма – и формуле для производной модуля вектор-функции. Далее, задача о разложении ускорения материальной точки при ее движении по фиксированной кривой приводит к обобщению известной из школьного курса физики формулы $w_n = \frac{v^2}{R}$ для центростремительного ускорения, в рассматриваемом случае R – радиус кривизны кривой. Из признаков постоянства вектор-функций получены знаменитые законы Кеплера для движения тел в поле гравитационных сил. Отдельный сюжет связан с исследованием уравнения маятника, обобщение которого – консервативные системы на прямой, т.е. системы, обладающие первым интегралом (энергией). Исследуются устойчивость точек покоя, решения систем первого приближения. Отметим также приведенную в этой главе интерпретацию двух стандартных определений числа e через известные методы получения приближенных решений дифференциальных уравнений.

Важный сюжет главы 9 начинается со вполне доступной учащимся, даже для самостоятельного решения, задачи 10. Однако ее простое и наглядное решение не обобщается непосредственно на старшие размерности. Далее изложен итерационный метод решения уравнений, теоретической основой которого является теорема Банаха о сжимающем отображении. Этот метод применен для доказательства существования решений одного дифференциального уравнения и теоремы об обратном отображении. Доказан также частный случай теоремы Морса–Сарда, из которой, в частности, следует существование плоской кривой четвертой степени, являющейся объединением четырех овалов.

Отметим, что, несмотря на кажущуюся сложность, практически весь материал главы 9 может быть включен в программу факультатива в специализированной физико-математической школе.

Особое положение занимает глава 10 – "Основания анализа", главная цель которой – дать аккуратное определение и показать с разных сторон основной объект, на котором строится математический анализ – множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Приведено построение моделей множества $\mathbb{R}$ по Дедекинду (как множества сечений в $\mathbb{Q}$) и по Коши (как фактормножества множества всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел). Интересно отметить, что в первой из этих моделей проще доказать выполнение аксиомы непрерывности, а во второй – существование арифметических операций. Более общим из них является пополнение по Коши, применимое к любому метрическому пространству и, в частности, к $\mathbb{Q}$ с p-адической метрикой на нем. Кстати, в последнем пункте данной главы доказано, что всякая норма на поле рациональных чисел эквивалентна либо стандартной, либо p-адической.

Другой объект, о котором рассказано в этой главе и который редко рассматривается в стандартных курсах анализа – это так называемая нестандартная (неархимедова) прямая, являющаяся упорядоченным полем, содержащим поле $\mathbb{R}$ и ненулевые бесконечно малые элементы. Построение модели такой прямой в какой-то степени аналогично построению $\mathbb{R}$ "по Коши". Связь обычного и "нестандартного" анализа дает "принцип переноса", сущность которого в том, что всякое утверждение обычного анализа остается верным, если в его условии вместо поля $\mathbb{R}$ рассматривать нестандартную числовую прямую. Из приведенных примеров видно, что доказательства теорем обычного анализа проще проводить через понятия нестандартного анализа, так что основной момент в построении последнего – это принцип переноса. Не вдаваясь в детали, отметим, что только для построения модели нестандартной прямой нужно доказать существование системы подмножеств $\mathbb{N}$, обладающей совсем нетривиальными свойствами. Причем такой набор нельзя “построить”, поскольку доказательство его существования опирается на лемму Цорна.

Наконец, о Приложении к данной книге, которое написано А.Н.Ильиной в соответствии с предложенной автором идеей, суть которой состоит в следующем: разработать систему кодировки статей по элементарной математике наборами из “ключевых” слов, чтобы они отражали не только тематику статьи, но и характер изложения материала, указывали также на методы и идеи, находящиеся в данной статье на втором плане. Такая работа была проделана по отношению к журналу “Квант”, статьи в котором чрезвычайно многоплановы. При помощи проведенной кодировки учитель, к примеру, может найти все статьи, в которых использован аксиоматический метод (безотносительно к тематике), или же найти примеры использования индукции в геометрии. Кроме того, в Приложении приведен список статей журнала “Квант” по тематике данной книги.

Как же следует читать эту книгу? В полном объеме она будет доступна читателю, знакомому с основными понятиями и утверждениями алгебры, анализа, геометрии, топологии, дифференциальных уравнений в объеме двух курсов математических факультетов университетов. Однако, как представляется автору, читать ее без карандаша и бумаги сможет только профессиональный математик, которому может быть интересен стиль изложения и интерпретация отдельных утверждений и тем. Для всех остальных ее чтение может оказаться не слишком простым делом.

Автор старался облегчить эту задачу, организовав текст таким образом, что его можно читать, начиная с почти любой страницы, поскольку все главы и даже большинство пунктов практически независимы. Большая часть книги доступна учащимся старших классов (при условии, если они проявят достаточное усердие). Что касается тех, для кого автор писал свою книгу, то самое большое его желание – чтобы она помогла им лучше понять предмет, который они преподают (или будут преподавать), а также его место в той области человеческого знания, которая называется "Математика".

Автор надеется, что эта книга окажется полезной всем, кто математику изучает или же преподает, и что она выдержана в духе и традициях ленинградской школы преподавания математики. Она не могла бы быть написана, если бы автору в свое время не посчастливилось учиться сначала в физико-математической школе (ныне гимназии) №30 Ленинграда у блестящих педагогов Анатолия Анатольевича Ванеева и Иосифа Яковлевича Веребейчика, а затем на математико-механическом факультете Ленинградского университета, где его научными руководителями были такие известные математики и прекрасные преподаватели, как Виктор Александрович Плисс и Владимир Абрамович Рохлин.

Автор глубоко признателен Татьяне Михайловне Мищенко за постоянную моральную поддержку и многочисленные содержательные беседы, Александру Сергеевичу Меркурьеву, взявшему на себя труд прочитать рукопись книги, Ирине Николаевне Рязановой за проделанную ею работу по редактированию, а также всем тем, кто учил автора языку TEX.

Наконец, я не могу не вспомнить о прекрасной части моей семьи, так много претерпевшей, пока я писал, переписывал и готовил к изданию эти "Избранные главы элементарной математики", которые я и посвящаю *Тане, Тане и Яне.*

Санкт-Петербург, 1993 год

Глава 1

ИНДУКЦИЯ

1.1. Принцип или метод. Словосочетания "метод математической индукции", "принцип математической индукции", "индукционный метод рассуждения" иногда используют как синонимы. Одна из целей данного пункта – продемонстрировать, насколько различен их внутренний смысл.

Задача 1. Докажите тождество $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Проведем рассуждение при помощи "метода математической индукции". Ясно, что это тождество верно при $n = 1$. Далее, предполагая, что $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$, докажем, что $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2(n+2)^2/4$.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Следовательно, данное тождество верно при всех натуральных n.

Заметим, что мы могли как бы обойтись "без индукции", воспользовавшись тем, что $k^3 = k^2(k+1)^2/4 - (k-1)^2k^2/4$, и сложив равенства $1^3 = 1^2 \cdot 2^2/4 - 0$, $2^3 = 2^2 \cdot 3^2/4 - 1^2 \cdot 2^2/4, \ldots$, $n^3 = n^2(n+1)^2/4 - (n-1)^2n^2/4$.

Таким образом, в разобранном примере метод математической индукции предстает как удобная схема доказательства заранее сформулированных утверждений.

Задача 2 (о ханойской башне). На одну из трех палочек насажены 10 колец разного диаметра так, что меньшее кольцо лежит на большем. За какое наименьшее число перекладываний можно переложить их на другую палочку, пользуясь вспомогательной третьей, если в процессе перекладываний запрещено класть кольцо большего диаметра на меньшее?

Будем решать эту задачу сразу для произвольного числа n колец. Разобрав случаи $n = 1, 2, 3$, получим, что потребуются, соответственно, одно, три или семь перекладываний. Для того, чтобы переложить "башню" из четырех колец, необходимо: снять верхние три кольца, затем переложить нижнее кольцо на свободную палочку и, наконец, положить на него три кольца меньшего диаметра. Таким образом, потребуются $7+1+7=15$ перекладываний. Из приведенного рассуждения сразу следует рекуррентная формула: $p_{n+1} = 2p_n + 1$, где p_n – это требуемое число перекладываний для башни из n колец. Вычисляя далее по этой формуле, находим следующие значения для чисел p_n: 31, 63, 127 и так далее, откуда ясно видно, что $p_n = 2^n - 1$. Последняя формула очень просто доказывается "по индукции".

Задача о ханойской башне является одной из лучших задач на индукционный метод рассуждения, в ее решении собственно "метод математической индукции" играет не слишком содержательную роль. Анализ приведенного решения показывает, что существо решения – в построении рекурсивного алгоритма. Именно, пусть $\mathcal{T}_n(i,j)$ – это последовательность перекладываний, которые следует произвести, чтобы n колец перекочевали с i-й палочки из данных трех на j-ю. Тогда $\mathcal{T}_1(i,j) = \{$переложить кольцо с i-й на j-ю палочку$\}$, и

$$\mathcal{T}_{n+1}(i,j) = \{\mathcal{T}_n(i,k), \mathcal{T}_1(i,j), \mathcal{T}_n(k,j)\}\,.$$

Еще одна хорошая задача подобного типа.

Задача 3. Докажите, что квадратную доску $2^n \times 2^n$, из которой удалена одна клетка, можно замостить "уголками"  .

(Если разделить доску на четыре квадрата и положить уголок так, чтобы он не задевал квадрат, в котором находится удаленная клетка, то мы получим четыре квадрата вдвое меньшего размера, в каждом из которых не нужно накрывать ровно одну клетку.)

Задача 4. На сколько частей разделят: а) прямую n точек; б) плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке ?

То, что доказательство "по индукции" действительно является доказательством, представляется очевидным. Сомневающимся можно предложить следующее рассуждение.

Пусть некоторое утверждение верно при $n = 1$, из предположения, что оно верно при $n = k$, следует, что это утверждение верно при $n = k + 1$, однако оно справедливо не при всех натуральных n. Рассмотрим наименьшее число n_0, при котором данное утверждение является неверным, ясно, что $n_0 > 1$. Число $n_0 - 1$, тем самым, является натуральным, и для него данное утверждение справедливо, но в таком случае это утверждение должно быть верным и для n_0!

У совсем неверующих может возникнуть следующий вопрос: а почему любое подмножество $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент, ведь ясно, что для подмножеств множества $\mathbb{Q}$ это может не иметь места! Итак, пусть $a \in E \subset \mathbb{N}$. Если число a не наименьшее, то найдется $a^{(1)} < a$, где $a^{(1)} \in E$. Если и $a^{(1)}$ – не наименьшее, то выберем $a^{(2)}$, и так далее, пока не дойдем до единицы, которая меньше любого другого натурального числа. Но как бы обойтись без слов "и так далее"?

1.2. Множество целых чисел. Предположим пока, что множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел существует (что бы это ни означало), в нем определены операции сложения, умножения, а также отношение порядка, обладающие обычными свойствами. Построим теперь множество $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где 0 – это какой-то не содержащийся в $\mathbb{N}$ элемент. Положим по определению: $a + 0 = 0 + a = a$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ при всех $a \in \mathbb{Z}_+$ и пусть $0 < a$ для любого $a \in \mathbb{N}$.

Упражнение. Докажите, что из определения нуля как нейтрального элемента относительно сложения следует, в силу свойства дистрибутивности умножения относительно сложения, что $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Рассмотрим множество $\mathcal{Z}$ упорядоченных пар (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}_+$ и следующее отношение в нем: $(a, b) \sim (a', b')$, если $a + b' = a' + b$. Поскольку введенное отношение является отношением эквивалентности, т.е. удовлетворяет свойствам рефлексивности: $(a, b) \sim (a, b)$, симметричности: если $(a, b) \sim (a', b')$, то $(a', b') \sim (a, b)$, и транзитивности: если $(a, b) \sim (a', b')$, $(a', b') \sim (a'', b'')$, то $(a, b) \sim (a'', b'')$ (почему?), то множество $\mathcal{Z}$ разбивается на классы, состоящие из попарно эквивалентных друг другу пар. Введем обозначение

$$[a, b] = \{(a', b') \in \mathcal{Z} \mid (a', b') \sim (a, b)\}.$$

Множество таких классов (являющееся фактормножеством исходного множества $\mathcal{Z}$) и назовем множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел.

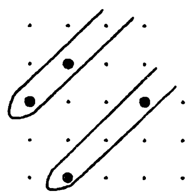
Определим арифметические операции. Пусть $(a,b),(c,d) \in \mathcal{Z}$, положим $(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$. Если $(a,b) \sim (a',b')$, то

$$ac + bd + a'd + b'c = (a+b')c + (a'+b)d =$$
$$= (a'+b)c + (a+b')d = ad + bc + a'c + b'd,$$

значит, $(a,b)\cdot(c,d) \sim (a',b')\cdot(c,d)$. Пусть теперь $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$, выберем пары $(a,b),(c,d) \in \mathcal{Z}$ так, чтобы $[a,b]=\alpha$, $[c,d]=\beta$. Положим по определению

$$\alpha\cdot\beta = [(a,b)\cdot(c,d)] = [ac+bd, ad+bc].$$

$[0,2] = \alpha = [1,3]$



$[1,0] = \beta = [3,2]$

Выше было доказано, что класс, стоящий в правой части, не зависит от выбора пар (a,b) и (c,d) в классах α и β соответственно. К примеру, $[0,2]\cdot[1,0] = [0,2] = [9,11] = [(1,3)\times(3,2)]$ (рисунок). Далее, пусть $[a,b] < [c,d]$, если $a+d < b+c$. Наконец, если отождествить число $a \in \mathbb{Z}_+$ с классом $[a,0] \in \mathbb{Z}$, получим, что $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$. (А почему это вложение?)

Упражнение. Проверьте справедливость свойств арифметических операций и отношения порядка в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Положим $-1 = [0,1]$, тогда $[a,b] = [a,0]+[0,b] = [a,0]+[0,1]\times[b,0] = a + (-1)b$, таким образом, $\mathcal{Z}$ – это множество формальных разностей $a-b$, $a,b \in \mathbb{Z}_+$. Теперь становится понятным, откуда берется такое, на первый взгляд странное, определение умножения в множестве пар.

Итак, имея натуральные числа, мы построили целые, но на что же можно опереться, чтобы определить числа натуральные? В данной ситуации не остается ничего иного, как использовать аксиоматический способ описания объектов и отношений между ними через постулирование свойств этих отношений (подобно тому, как это делается в геометрии).

1.3. Аксиоматика Пеано. Назовем множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел тройку $\{\mathcal{N}, 1, s\}$, состоящую из некоторого множества $\mathcal{N}$, отмеченного в нем элемента 1 и отображения $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, удовлетворяющих следующим свойствам [31]:

(Пе1) отображение s инъективно, т.е. если $x,y \in \mathcal{N}$ и $x \neq y$, то $s(x) \neq s(y)$;

(Пе2) $1 \notin s(\mathcal{N})$, т.е. отмеченный элемент не является образом никакого элемента множества $\mathcal{N}$;

(Пе3) если $M \subset \mathcal{N}$, $1 \in M$ и $s(x) \in M$ $\forall x \in M$, то $M = \mathcal{N}$.

Будем называть подмножество M множества $\mathcal{N}$ индуктивным, если $1 \in M$ и $s(x) \in M$ $\forall x \in M$. Таким образом, последнюю аксиому можно сформулировать так: в $\mathcal{N}$ не существует нетривиальных, т.е. отличных от $\mathcal{N}$, индуктивных подмножеств. Данная аксиоматика была введена в 90-х годах прошлого века итальянским математиком Пеано. С привычной точки зрения, $s(x)$ – это следующее за x натуральное число, т.е. $x+1$, однако сложение в множестве $\mathcal{N}$ еще предстоит определить. Аксиоматика Пеано - это пример так называемой полной аксиоматики, т.е. если $\{\mathcal{N}, 1, s\}$ и $\{\mathcal{N}', 1', s'\}$ - две тройки, удовлетворяющие сформулированным аксиомам, то они изоморфны, т.е. существует такое взаимно однозначное отображение $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, что $\Phi(1) = 1'$ и при всех $x \in \mathcal{N}$ верно равенство $\Phi(s(x)) = s'(\Phi(x))$ (этот факт оставим без доказательства).

Извлечем первые следствия из аксиом Пеано.

Лемма 1. Имеем $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{1\}$ и $s(a) \neq a$ при всех $a \in \mathcal{N}$.

(Докажите, что следующие множества являются индуктивными: $M_1 = \{1\} \cup s(\mathcal{N})$ и $M_2 = \{a \in \mathcal{N} \mid s(a) \neq a\}$.) ■

Операция в множестве – это отображение F, сопоставляющее паре (a, b) его элементов элемент $c = F(a, b)$ этого множества. Коммутативность операции равносильна симметричности отображения F, а ассоциативность равносильна следующему его свойству:

$$F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{N}.$$

Рассмотрим следующие свойства:

(Сл1) $F(a, 1) = s(a)$ при всех $a \in \mathcal{N}$;

(Сл2) $F(a, s(b)) = s(F(a, b))$ при всех $a, b \in \mathcal{N}$.

Теорема 1. Отображение $F : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, удовлетворяющее свойствам (Сл1), (Сл2), ассоциативно и коммутативно.

Докажем ассоциативность. Фиксируем $a, b \in \mathcal{N}$, пусть

$$M = \{c \in \mathcal{N} \mid F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c)\}.$$

Поскольку $F(a, F(b, 1)) = F(a, s(b))$ (использовано свойство (Сл1)) $= s(F(a,b))$ (использовано (Сл2)) $= F(F(a,b), 1)$ (снова (Сл1)), то $1 \in M$. Пусть $c \in M$, тогда $F(a, F(b, s(c))) = F(a, s(F(b,c))) = s(F(a, F(b,c))) = s(F(F(a,b), c)) =$ (в этом месте мы использовали, что $c \in M$) $= F(F(a,b), s(c))$, значит, $s(c) \in M$. Таким образом, M – индуктивное множество, значит, $M = \mathcal{N}$.

Упражнение. Докажите второе утверждение теоремы.

(Множество $M = \{a \in \mathcal{N} \mid F(a,1) = F(1,a)\}$ индуктивно.) ∎

Теорема 2. Существует не более одного отображения, удовлетворяющего свойствам (Сл1), (Сл2).

Фиксируем элемент $a \in \mathcal{N}$ и рассмотрим множество

$$M = \{b \in \mathcal{N} \mid F(a,b) = F'(a,b)\},$$

где F и F' - отображения со свойствами (Сл1), (Сл2). Поскольку $F(a,1) = s(a) = F'(a,1)$, то $1 \in M$. Пусть $b \in M$, тогда $F(a, s(b)) = s(F(a,b)) = s(F'(a,b)) = F'(a, s(b))$, значит, $s(b) \in M$, т.е. M – индуктивное множество, поэтому $M = \mathcal{N}$, тем самым $F = F'$. ∎

1.4. Сложение, порядок и умножение. Рассмотрим множество M, состоящее из всех элементов $a \in \mathcal{N}$, для которых существует такое отображение $f_a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, что $f_a(1) = s(a)$ и $f_a(s(b)) = s(f_a(b))$ при всех $b \in \mathcal{N}$. Положим $f_1(b) = s(b)$, тогда $f_1(1) = s(1)$ и $f_1(s(b)) = s(s(b)) = s(f_1(b))$, т.е. $1 \in M$. Если $a \in M$, то определим $f_{s(a)}$ формулой $f_{s(a)}(b) = s(f_a(b))$. Имеем $f_{s(a)}(1) = s(f_a(1)) = s(s(a))$ и $f_{s(a)}(s(b)) = s(f_a(s(b))) = s(s(f_a(b))) = s\left(f_{s(a)}(b)\right)$ при всех $b \in \mathcal{N}$. Тем самым доказано, что множество M индуктивно, значит, $M = \mathcal{N}$ и формула $F(a,b) = f_a(b)$ определяет отображение F, удовлетворяющее свойствам (Сл1), (Сл2). В силу теорем 1 и 2 получаем, что верна следующая теорема:

Теорема 3. В множестве $\mathcal{N}$ существует операция сложения, т.е. существует отображение F, удовлетворяющее свойствам (Сл1), (Сл2). Причем такое отображение единственно и определяет в $\mathcal{N}$ коммутативную и ассоциативную операцию.

Лемма 2. Имеем $a + b \neq a$ при всех $a, b \in \mathcal{N}$.

Действительно, $1 + b = b + 1 = s(b) \neq 1$ в силу леммы 1. Далее, если элемент $a \in \mathcal{N}$ таков, что $a + b \neq a$ при всех $b \in \mathcal{N}$, то, поскольку отображение s инъективно, то $s(a) \neq s(a + b) = s(b + a) = b + s(a) = s(a) + b$, значит, множество $M = \{a \in \mathcal{N} \mid a + b \neq a \ \forall b \in \mathcal{N}\}$ индуктивно, откуда и следует утверждение леммы. ■

Введем отношение порядка на множестве $\mathcal{N}$. Будем говорить, что $a > b$, если найдется такой элемент $k \in \mathcal{N}$, что $a = b + k$.

Теорема 4. Для любых элементов $a, b \in \mathcal{N}$ имеет место одна из следующих возможностей: 1) $a > b$; 2) $a = b$; 3) $a < b$.

То, что никакие две из перечисленных возможностей не имеют места одновременно, вытекает из леммы 2. Чтобы доказать, что хотя бы одна из них реализуется, фиксируем элемент $b \in \mathcal{N}$ и рассмотрим множество $M = \{a \mid a > b \text{ или } a = b \text{ или } a < b\}$.

Упражнение. Докажите, что введенное множество M индуктивно. ■

Следствия. 1. Элементы $a, a+1$ являются соседними относительно введенного на множестве $\mathcal{N}$ порядка, т.е. не существует такого элемента $b \in \mathcal{N}$, что $a < b < a + 1$. 2. Для любого элемента $a \in \mathcal{N}$ верно неравенство $a \geqslant 1$.

Упражнение. Докажите эти следствия.

Теорема 5. Всякое непустое подмножество в $\mathcal{N}$ имеет наименьший элемент.

Рассмотрим множество $M = \{a \in \mathcal{N} \mid a \leqslant b \ \forall b \in E\}$, состоящее из нижних границ множества E. Поскольку множество E непусто, то, по следствию 2 предыдущей теоремы, $1 \in M$, значит, найдется такой элемент $u \in \mathcal{N}$, что $u \in M$ и $u + 1 \notin M$. Если будет доказано, что $u \in E$, то u – наименьший элемент этого множества. Поскольку $u + 1 \notin M$, то найдется такой элемент $b_0 \in E$, что $b_0 < u + 1$. Если $u \notin E$, то $u < b$ при всех $b \in E$, в частности, $u < b_0 < u + 1$, что противоречит следствию 1 теоремы 4. ■

Умножение в множестве натуральных чисел вводится по аналогичной схеме. Именно, верна следующая теорема.

Теорема 6. Существует такое единственное отображение $G : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, что:

(Ум1) $G(a, 1) = a$;

(Ум2) $G(a, s(b)) = G(a, b) + a$.

Отображение G определяет в множестве $\mathcal{N}$ операцию, являющуюся ассоциативной, коммутативной и дистрибутивной относительно сложения, т.е. при всех $a, b, c \in \mathcal{N}$ имеет место равенство $G(a + b, c) = G(a, c) + G(b, c)$.

Упражнение. Докажите эту теорему. ■

Упражнение. Докажите, что $2 \times 2 = 4$ (здесь $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$).

Упражнение. Докажите, что если $a < b$ и $c \in \mathcal{N}$, то $ac < bc$.

1.5. Метод математической индукции. То, что метод математической индукции действительно верен – это, как мы видим, одна из аксиом, определяющих множество натуральных чисел, поэтому естественнее здесь говорить не о "методе", а о "принципе математической индукции".

Теорема 7. Пусть $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \in \mathcal{N}}$ – последовательность математических утверждений. Предположим, что верно утверждение $\mathcal{P}(l)$ и для всякого натурального числа n из того, что утверждения $\mathcal{P}(k)$ при $l \leqslant k \leqslant n$ верны, следует, что верно утверждение $\mathcal{P}(n+1)$. Тогда утверждения $\mathcal{P}(n)$ верны при всех натуральных $n \geqslant l$.

(Таким образом, принцип математической индукции справедлив и в расширенной форме.)

Для доказательства теоремы рассмотрим число

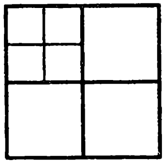
$$n_0 = \min\{n \in \mathcal{N} \mid n \geqslant l \text{ и } \mathcal{P}(n) \text{ неверно}\}.$$

Поскольку $\mathcal{P}(n_0)$ – неверное утверждение, то $n_0 > l$. В силу выбора n_0 утверждение $\mathcal{P}(k)$ верно при $k = l, l + 1, \ldots, n_0 - 1$, значит, по основному предположению, верно и утверждение $\mathcal{P}(n_0)$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следует ясно представлять себе, что часто при решении элементарных задач, особенно предназначенных для младших школьников, принцип математической индукции используется в скрытой форме.

Задача 5. Докажите, что квадрат можно разрезать на 6, 8, 9 квадратов. На какое еще число квадратов можно разрезать квадрат ?

Ответ: на любое число, отличное от 2, 3, 5.



Нетрудно разрезать квадрат на 6, 8, 9 квадратов, а разрезать его на семь совсем просто: достаточно в исходном квадрате, а затем в его четвертинке нарисовать крестик (рисунок).

Это основная идея задачи: если если мы разрезали квадрат на k квадратов, то существует разрезание и на $k+3$ квадрата. Безусловно, что для младших школьников таким рассуждением и следует ограничиться. Однако индукционный переход в этом рассуждении имеется, и строгое доказательство должно опираться на принцип математической индукции, причем в его расширенной формулировке.

Задача 6. Докажите, что любую сумму больше 7 коп. можно уплатить, имея в кармане лишь трех- и пятикопеечные монеты.

Встречаются и такие задачи, в которых индукцию непосредственно применить не удается, однако более сильное утверждение может быть доказано без труда.

Задача 7. Докажите неравенство $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{4}$.

Обозначив через a_n левую часть неравенства, получим, что

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=a_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>a_n,$$

поэтому неясно, как из неравенства $a_n<3/4$ получить, что $a_{n+1}<3/4$. Однако нетрудно видеть, что если $a_n<3/4-1/4n$, то $a_{n+1}<3/4-1/(4n+4)$ (докажите это), поэтому при всех натуральных n верно, что $a_n<3/4-1/4n<3/4$.

В формулировке данной задачи стоит многоточие, хотя мы с самого начала хотели избавиться от слов "и так далее". Так как в множестве $\mathbb{N}$ имеется отношение порядка, то мы вправе рассмотреть следующее его подмножество: $I_k=\{n\in\mathbb{N}\mid n\leqslant k\}$,

$k \in \mathbb{N}$. Неравенство задачи 7 без использования многоточия записывается в следующем виде:

$$\sum_{i \in I_n} \frac{1}{n+i} < \frac{3}{4}.$$

Часто мы используем слова "число элементов множества" или "количество элементов данного множества". Число, в данном случае натуральное, есть элемент $\mathbb{N}$, каким же образом его можно сопоставить данному множеству?

Рассмотрим следующий пример из жизни.

Как проще выяснить, юношей или девушек больше в танцевальном зале? Конечно, их можно просто пересчитать по отдельности и сравнить полученные числа. Но естественнее поступить по-другому. Если объявить "белый танец", то каждая из девушек будет стремиться найти себе партнера, и ответ на поставленный вопрос определится тем, кто же, юноши или девушки, останутся стоять у стен этого зала.

Будем говорить, что множество A состоит из k элементов, если существует взаимно однозначное соответствие (биекция) между ним и множеством I_k. Осталось доказать, что множество не может одновременно состоять из, к примеру, трех и четырех элементов одновременно. Предположим, что существуют взаимо однозначные соответствия $A \cong I_k$ и $A \cong I_l$, где $k \neq l$, пусть для определенности $l < k$. То, что множество I_l является собственным подмножеством множества I_k, еще не доказывает, что между ними нет взаимно однозначного соответствия, поскольку отображение s осуществляет такое соответствие между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Можно возразить, что в рассматриваемом случае множества конечны. Однако что же такое – конечное множество?...

Теорема 8. Если $k \neq l$, то $I_k \not\cong I_l$.

Упражнение. Докажите эту теорему, используя принцип математической индукции. ■

Упражнение. Постройте взаимно однозначное соответствие между $[0;1)$ и $[0;1]$.

Докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. При всех $k, l \in \mathcal{N}$ верно, что $I_k \cong I_{k+l} \setminus I_l$.

Определим отображение $\psi\colon I_k \to \mathcal{N}$, положив $\psi(i) = i + l$. Из неравенств $1 \leqslant i \leqslant k$ следует, что $l + 1 \leqslant \psi(i) \leqslant k + l$, значит, $\forall i \in I_k \quad \psi(i) \in I_{k+l} \setminus I_l$. Нетрудно видеть, что ψ – инъекция, поэтому осталось показать, что $\psi(I_k) = I_{k+l} \setminus I_l$. Действительно, если $j \in I_{k+l} \setminus I_l$, то $j > l$, значит, $j = l + i$ и ясно, что $i \leqslant k$. ∎

Будем далее обозначать через $|A|$ число элементов множества A.

Следствие. Если A и B – непересекающиеся множества, то $|A \cup B| = |A| + |B|$, в частности, если множество B состоит из одного элемента, то $|A \cup B| = s(|A|)$.

Упражнение. Положим $H(|A|, |B|) = |A \times B|$. Докажите, что эта формула определяет операцию в множестве $\mathbb{N}$, удовлетворяющую свойствам (Умн1), (Умн2), так что $|A \times B| = |A||B|$.

Проведенные только что рассуждения можно использовать, чтобы попытаться построить "модель" множества натуральных чисел (которая, разумеется, будет таковой лишь с очень наивной точки зрения). Именно, назовем натуральным числом количество (!) палочек в некоторой кучке. Подкинув одну палочку, получим следующее натуральное число. Как такие числа складывать и перемножать – ясно из только что изложенного. Советуем читателю попробовать формализовать этот подход.

Последняя задача в этой главе специально сформулирована таким образом, чтобы казалось, что индукция, а точнее, индукционный метод рассуждения, здесь ни при чем.

Задача 8. Докажите, что если $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, то

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 \geqslant (a - b + c - d + e)^2.$$

(Используя разложение на множители, докажите вначале аналогичное неравенство для трех чисел, применив которое дважды, получите требуемое.)

Закончим первую главу теоремой-шуткой, которая взята автором из книги "Физики продолжают шутить". Перефразируя известное изречение "сказка – ложь, да в ней намек..." – в каждой шутке есть доля правды...

Теорема (шутка). Александр Великий не существовал.

Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма (неверная). Все предметы имеют одинаковый цвет.

Доказательство проведем по индукции. Пусть n – число предметов. При $n = 1$ утверждение очевидно, пусть лемма верна, если $n = k$. По индукционному предположению любые k предметов имеют одинаковый цвет, поэтому, убрав вначале один из них, затем, положив его на место и убрав другой, получим что все предметы из $k + 1$ имеющихся – того же самого цвета. ■

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим противное, что Александр Македонский жил. По утверждению историков (а они никогда не лгут), Александр ездил на вороном коне по кличке Буцефал. Известно, что существуют предметы белого цвета*, поэтому, в силу доказанной леммы, все предметы – белые, значит, на вороном коне Александр Великий ездить уж никак не мог. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Нетрудно научить школьников доказывать по индукции тождества по схеме решения задачи 1. Однако для их математического образования гораздо важнее (и неизмеримо труднее) привить навык индукционного способа рассуждения, характерного вообще для поиска решения (см. решение задачи 2), существенная часть которого состоит в умении увидеть основную идею при рассмотрении частных случаев. Заметим, что задачу 1 можно усложнить, дав следующую формулировку: докажите, что сумма кубов первых n натуральных чисел есть квадрат натурального числа. Ясно, что в такой формулировке ее нельзя предлагать младшим школьникам, для которых у этой задачи есть хорошая замена: докажите, что сумма первых n нечетных чисел есть квадрат натурального числа. Кстати, тождество из последней задачи имеет симпатичную геометрическую интерпретацию (а какова интерпретация задачи 1?). В духе "принципа кроликов" (см. главу 6) можно предложить младшим школьникам "принцип сосны": чтобы залезть на макушку сосны, нужно как-то забраться на нижнюю ветку и изобрести способ, при помощи которого можно далее перебираться с каждой ветки на следующую.

Автор ограничился в этой главе небольшой подборкой задач, приведенной в основном для иллюстрации, поскольку почти в каждой главе

*М. Твен. СС в 12 т. Т. 10. Похищение белого слона. М., ГИХЛ, 1961. С.430.

далее имеются утверждения, в доказательстве которых используется метод математической индукции (см. также книгу [20], в которой можно найти много хороших задач). Хочется еще раз подчеркнуть, что во многих случаях принцип математической индукции (как основная аксиома, определяющая множество $\mathbb{N}$) используется неявно, например, когда имеется многоточие или употребляются слова "и так далее". Учитель может (или даже должен) вслух про индукцию не упоминать, но сам о ней помнить он обязан.

Несколько слов об аксиоматике Пеано. Ясно, что школьникам нужно демонстрировать аксиоматический метод в математике на хорошо знакомых примерах, обычно с ним знакомят на примере обоснования геометрии. Однако аксиоматика геометрии достаточно сложна, так что практически невозможно, оставаясь в рамках программы средней школы, дать законченное (хотя бы частично) построение элементарной геометрии – чего стоит хотя бы определить по Гильберту понятие луча [4]. Исключение – аксиоматика по Вейлю, но это уже не геометрия, а линейная алгебра... Аксиоматика Пеано, определяя всем настолько хорошо знакомый объект, будучи очень краткой по своей структуре и тесно связанной с изучаемым в школе "методом математической индукции", дает возможность взглянуть по-новому на множество натуральных чисел и операции в этом множестве. Поэтому представляется странным, что она не нашла себе места в программах (специализированных) школ. Автору данной книги, можно сказать, повезло. Он познакомился с этой аксиоматикой в старших классах и, хотя прошло более четверти века, до сих пор помнит то впечатление, которое она на него произвела.

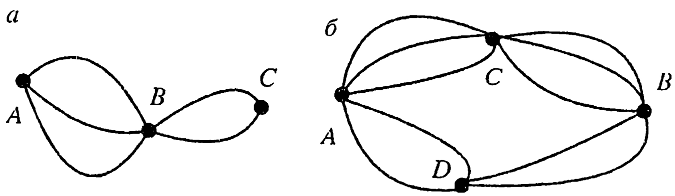
Глава 2
КОМБИНАТОРИКА

2.1. Элементарные задачи. Комбинаторные задачи связаны с вопросом о числе определенных конфигураций (в более сложных случаях – об их существовании и, иногда, о выборе оптимальной конфигурации из множества всех возможных). В данном пункте будет приведена подборка совсем элементарных задач, доступных и учащимся шестого класса [3]. Этот цикл задач нацелен на то, чтобы привить навык использования "правила суммы и правила произведения" о количестве элементов в объединении двух (непересекающихся) множеств и о количестве упорядоченных пар, первый элемент которой принадлежит одному, а второй – другому из двух множеств (см. следствие и упражнение после леммы 3 главы 1).

Задача 1. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся или на 9, или на 15?

($|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ – формула включений–исключений.)

Задача 2. Сколькими способами можно проехать из города A в город B, проезжая по пути не более чем через один город, если города соединены дорогами так, как это показано на рисунках *а* и *б*?



(Правила сумм-произведений в чистом виде.)

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

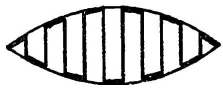
(Совсем простая задача, в которой возникает важное для дальнейшего число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – "n факториал".)

Задача 4. Из Манчестера в Ливерпуль ведут две шоссейные дороги, которые соединены десятью проселочными. Сколькими способами можно проехать из одного города в другой, не проезжая ни один перекресток дважды?

Из Манчестера можно выехать по одной из двух шоссейных дорог и, подъехав по каждой из них к пересечению с проселочной дорогой, можно либо свернуть на нее, либо поехать прямо, следовательно, в одиннадцати случаях имеется выбор одной из двух возможностей, таким образом, всего есть $2^{11} = 2048$ способов проехать из одного города в другой.

Приведем еще одно решение, связанное с построением для данной комбинаторной задачи, как далее будем говорить, изоморфной ей модели.

Сущ[illegible]у[illegible] ^{11} 11-[illegible]ц[illegible]д[illegible]-ичных чисел. Сопоставим каждому такому числу путь из Манчестера в Ливерпуль по следующему правилу: если в нулевой позиции стоит единица, то выедем из Манчестера по северному шоссе (рисунок), далее, если в i-й позиции имеется единица ($i = 1, 2, \ldots, 10$), то путь проходит по i-й проселочной дороге. К примеру, числу из одних единиц соответствует изображенный на рисунке путь. Ясно, что описанное соответствие является взаимно однозначным, поэтому путей столько же, сколько и двоичных чисел.



Задача 5. Сколькими способами могут располагаться (согласно правилам шахмат) на шахматной доске белый и черный короли?

Ответ: $4 \cdot (64-4) + 24 \cdot (64-6) + 36 \cdot (64-9) = 3612$ способами; если черный король находится в одной из четырех угловых клеток, то есть $64 - 4 = 60$ возможностей для расположения белого короля, если черный король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей 24), то имеются 58 вариантов для белого короля, в оставшихся 36 случаях белый король может стоять на любой из 55 клеток.

Следующая задача имеет (на первый взгляд) неожиданный ответ.

Задача 6. Каких чисел среди восьмизначных больше: тех, в записи которых присутствует единица, или таких, в записи которых ее нет?

Всего имеется $9 \cdot 10^7$ восьмизначных чисел (крайняя левая цифра не может быть нулем), единица отсутствует в записи у

$8 \cdot 9^7$ из них. Поскольку

$$\frac{9 \cdot 10^7}{8 \cdot 9^7} = \frac{9}{8}(1 + \frac{1}{9})^7 > \frac{9}{8}(1 + \frac{7}{9}) = 2$$

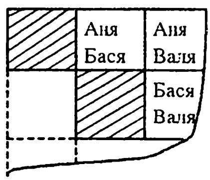
(использовано неравенство Бернулли – см. главу 5), то последние числа составляют менее половины всех восьмизначных.

Задача 7. Сколько различных делителей (включая единицу и само число) имеет число: а) 720; б) $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$ (где p_i – простые числа)?

Типичный случай, когда общая формулировка задачи содержит подсказку, т.е. решить задачу пункта б) проще, чем задачу пункта а).

Задач такого типа, как приведенные выше, можно придумать неограниченно много (причем с разнообразными, хотя часто и "изоморфными" формулировками).

Задача 8. В классе 9 девочек и 16 мальчиков. Сколькими способами можно составить пару для участия в теннисном турнире в: а) смешанном разряде; б) парном женском; в) парном мужском?



Первый вопрос – на правило произведения. Чтобы ответить на второй, можно либо нарисовать табличку (рисунок), либо использовать следующее рассуждение. Будем вначале прикалывать на спину девочкам номера 1 или 2. Ясно, что таких упорядоченных пар всего $9 \cdot 8 = 72$, а поскольку из каждой пары девочек можно получить две упорядоченные пары, то возможностей выбора команды для участия в парном женском турнире вдвое меньше, чем число 72, т.е. всего их 36.

Еще две задачи на использованные соображения.

Задача 9. Сколько различных буквенных сочетений можно составить, используя все буквы слов: арба; аллах; баобаб?

Задача 10. Имеются два рубина, два изумруда и два граната. Сколькими способами можно разложить их: а) в ряд; б) по окружности; в) сколько различных ожерелий можно составить, используя все эти камни? (Чем отличается расположение по окружности от составления ожерелья?)

В последних двух задачах можно было бы использовать термины: размещения с повторениями и т.п., однако автор считает, что при первоначальном знакомстве с предметом излишество в терминологии только вредит пониманию.

Задача 11. Сколько существует различных: а) игральных кубиков; б) "игральных тетраэдров" (т.е. тетраэдров, на гранях которых стоят одна, две, три и четыре точки)?

Приведем решение пункта б) этой задачи. Поставим тетраэдр на стол той гранью, на которой стоит одна точка, и затем повернем его так, чтобы грань, на которой стоят две точки, была обращена к нам. Положение тетраэдра фиксировано и имеются два варианта расположения трех и четырех точек на оставшихся двух гранях. Таким образом, бывают два вида игровых тетраэдров, так сказать, "правый" и "левый".

2.2. Числа сочетаний и рекуррентные соотношения. Сформулируем три задачи.

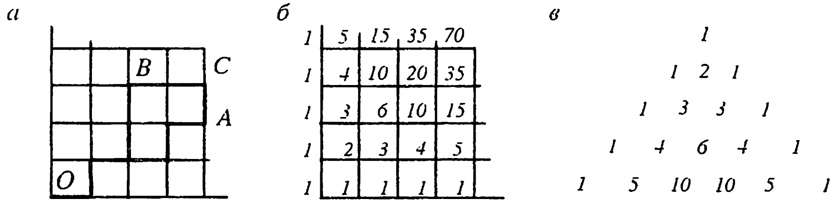
Задача 12. Сколькими способами можно выбрать три предмета из семи различных?

Задача 13. Сколько существует последовательностей из трех нулей и четырех единиц?

Задача 14. Сколькими различными путями наименьшей длины можно пройти из начала координат в точку с координатами $(4, 3)$, если путь должен проходить по сторонам единичной сетки?

Упражнение. Установите изоморфность задач 12-14, т.е. установите взаимнооднозначное соответствие между множествами комбинаций, о которых идет речь в этих задачах.

Наиболее простое решение имеет (в силу своего геометрического характера) последняя из приведенных задач.



Рассмотрим точки со следующими координатами: $A(k, n-k)$, $B(k-1, n-k+1)$ и $C(k, n-k+1)$. Ясно, что число кратчайших путей, идущих из O в точку C, равно сумме числа путей, ведущих в A, и путей, ведущих в B (рисунок *а*), поэтому, ставя у каждого узла сетки число ведущих в него путей и начиная вычислять от начала координат, получим следующую таблицу (рисунок *б*). Найденные числа обычно располагают другим образом (рисунок *в*) – в виде треугольника Паскаля. Будем обозначать число, стоящее на k-м месте слева в n-й строке $(n, k = 0, 1, \ldots)$, через C_n^k . При построении этих чисел мы использовали соотношение $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Упражнение. Проверьте, что числа $T_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ удовлетворяют указанному рекуррентному соотношению.

Обычно полагают по определению $0! = 1$, тогда, поскольку $C_n^0 = T_{n,0} = C_n^n = T_{n,n} = 1$, получим, что $C_n^k = T_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (как?).

Задача 15. Может ли быть, чтобы любые два жителя Китая отличались набором своих зубов (к примеру, один беззубый, 32 – с одним зубом, и т.д.)?

К этой задаче можно подойти с двух сторон. Число расположений k зубов среди 32 возможных равно C_{32}^k, поэтому число всевозможных комбинаций зубов равно сумме $\sum_{k=0}^{32} C_{32}^k$. С другой стороны, для каждого зуба имеются две возможности – он может быть, или же на его месте – дырка, поэтому всего имеется $2^{32} = 4294864896$ вариантов, что явно больше, чем число всех проживающих в Китае людей.

Кстати, решив эту задачу двумя способами, мы установили тождество $\sum_{k=0}^{32} C_{32}^k = 2^{32}$.

Упражнение. Докажите, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. Каково число всех k-элементных подмножеств данного множества?

Выполнив это упражнение, вы получите обобщение приведенного выше тождества, именно, что $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Нетрудно проверить на примерах, что вроде бы справедливо и тождество $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 3^n$. Читатель, знакомый с биномом Ньютона, уже понял, что сейчас мы перейдем к числам C_n^k как к коэффициентам в разложении бинома.

Задача 16. Обозначим через $D_{n,k}$ коэффициент при мономе $a^k b^{n-k}$ в разложении бинома $(a+b)^n$. Используя тождество $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$, докажите, что $D_{n+1,k} = D_{n,k} + D_{n,k-1}$.

Отсюда, поскольку $D_{n,0} = D_{n,n} = 1$, получим тождество $D_{n,k} = C_n^k$.

Упражнение. Установите непосредственно изоморфизм задачи 16 об определении коэффициентов в разложении бинома с задачами 12-14.

Из доказанного разложения бинома, в частности, следуют тождества

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ , \ 3^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k \ , \ 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ ,$$

т.е.

$$\sum_{k-\text{четно}} C_n^k = \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k.$$

Между биномиальными коэффициентами существуют и другие соотношения, многие из них могут быть получены при помощи свойств функции $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Лемма 1. Тождество $P_{n+1}(x) = (x+1)P_n(x)$ равносильно тому, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Утверждение леммы очевидно, поскольку $(x+1)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) x^k$. ■

Следствие. Справедливо тождество $P_n(x) = (x+1)^n$.

Термин "функция" был употреблен не зря. Поскольку

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{k+1} (k+1) x^k,$$

а с другой стороны,

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = n(x+1)^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k,$$

то

$$C_n^{k+1} = \frac{n}{k+1} C_{n-1}^k = \frac{n(n-1)}{(k+1)k} = \ldots =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)k\ldots 1} C_{n-k}^1 =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)k\ldots 1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}.$$

Опять, как и в следствии к лемме 1, мы получили уже известное утверждение, однако заслуживает внимания метод проведенного доказательства.

Упражнение. Докажите, что $C_{2n}^k = \sum_{l=0}^k C_n^l C_n^{k-l}$, используя тождество $((1+x)^n)^2 = (1+x)^{2n}$.

Задача 17. Докажите, что $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$. Сформулируйте и докажите аналогичную формулу для функции $\operatorname{tg} nx$.

Положим для краткости $t = \operatorname{tg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} 2x = 2t/(1-t^2)$, $\operatorname{tg} 3x = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$, то можно сделать предположение, что $\operatorname{tg} 4x = (4t - 4t^3)/(1 - 6t^2 + t^4)$, проверить его непосредственно, а когда оно подтвердится, написать и общую формулу

$$\operatorname{tg} nx = \frac{\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} t^{2k}},$$

которую нетрудно доказать по индукции. Приведем, однако, и другое доказательство этой формулы.

Поскольку

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k x \cos^{n-k} x,$$

то

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \sin^{2k} x \cos^{n-2k} x$$

и

$$\sin nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{n-2k-1} x,$$

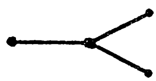
откуда

$$\operatorname{tg} nx = \frac{\sin nx}{\cos nx} = \frac{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{n-2k-1} x}{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k} \sin^{2k} x \cos^{n-2k} x} = $$
$$= \frac{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1} t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k} t^{2k}}.$$

Комбинаторные задачи часто имеют совсем нетривиальный характер. В качестве примера приведем одну из простейших задач о перечислении графов. Назовем граф с n вершинами помеченным, если каждой из них сопоставлено число $i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$, причем различным вершинам соответствуют различные числа (таким образом, задана биекция между множеством вершин графа и множеством I_n).

Теорема 1 (Кэли) [22]. Существует всего n^{n-2} различных (т.е. неизоморфных) помеченных деревьев с n вершинами.

Упражнение. Найдите число неизоморфных помеченных деревьев, полученных расстановкой меток в вершинах деревьев, изображенных на следующих рисунках.



Ответ: 12 и 4, а в сумме $16 = 4^2$.

Для доказательства теоремы зафиксируем некоторую вершину v и обозначим через $T(n, k)$ число помеченных деревьев с n вершинами, в которых эта вершина имеет степень $\rho(v) = k$ (т.е. к ней примыкают k ребер). Пусть A – дерево, в котором $\rho(v) = k - 1$, а B – дерево, полученное при помощи следующей процедуры. Если w и z – две вершины, соединенные в A ребром, то его удаление приводит к двум деревьям, одно из которых содержит вершину v и одну из вершин w или z, для определенности – вершину w. Соединив v с z ребром, получим дерево, которое и обозначим B; заметим, что в построенном дереве B к вершине v примыкают k ребер. Пару (A, B) назовем связкой. Поскольку существует $T(n, k-1)$ деревьев A, а дерево B определяется ребром, которое можно выбрать $(n-1) - (k-1) = n - k$ способами, то число всех связок

(A, B) равно $(n-k)T(n, k-1)$. С другой стороны, пусть B – помеченное дерево, в котором к вершине v примыкают k ребер, пусть $T_1, \dots, T_k$ – поддеревья, полученные из B удалением вершины v и примыкающих к ней ребер. Помеченное дерево A (у которого к вершине v примыкает $k-1$ ребро) получается удалением из B одного из этих ребер и соединением соответствующей вершины w_i с любой вершиной другого поддерева T_j. Поскольку существует $T(n, k)$ помеченных деревьев B, то число способов соединения вершины w_i равно сумме $(n-1-n_1)+\ldots+(n-1-n_k) = (n-1)(k-1)$ (здесь $n_i = |T_i|$), значит, число всех связок равно $(n-1)(k-1)T(n, k)$. Тем самым доказано, что $(n-1)(k-1)T(n, k) = (n-k)T(n, k-1)$.

Упражнение. Докажите, что $T(n, k) = C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

(Воспользуйтесь равенством $T(n, n-1) = 1$.)

Следовательно, число всех помеченных деревьев равно сумме

$$\sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{n-k+1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}. \blacksquare$$

В заключение приведем две простые, но содержательные задачи.

Задача 18. Докажите, что произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

Заметим, что хотя такое произведение делится на любое натуральное число, не превосходящее k, однако отсюда не следует, что оно делится на $k!$.

Задача 19. Докажите неравенство $C_n^k \leqslant C_n^{[n/2]}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

2.3. Рекуррентные соотношения и свойства степенных рядов. Рассуждения, проведенные в предыдущем пункте, показывают, насколько полезно было сопоставить функцию (ряд) набору числовых величин. Ниже мы применим этот метод к классической задаче Фибоначчи:

Каждая пара кроликов ежемесячно приносит пару кроликов, которые начинают давать приплод через два месяца после своего рождения. Сколько пар кроликов будет через n месяцев, если вначале была одна пара новорожденных кроликов, а убыли кроликов не наблюдалось?

Если через a_n обозначить имеющееся через n месяцев число кроличьих пар, то $a_1 = a_0 = 1$ (приплода пока нет), а $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (к имевшимся в предыдущем месяце парам добавилось потомство тех пар, которые появились на свет по меньшей мере два месяца назад).

Теорема 2. Справедливо равенство

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Для доказательства рассмотрим следующий степенной ряд, называемый производящей функцией числовой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и найдем произведение

$$(1 - x - x^2)\varphi(x) = (1 - x - x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$
$$= (1 - x - x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) =$$
$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \ldots$$

В силу начальных условий и рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи полученный ряд равен просто единице, т.е. $\varphi(x) = 1/(1-x-x^2)$. Далее, поскольку $1-x-x^2 = -(\varepsilon_1-x)(\varepsilon_2-x)$, где $\varepsilon_1 = (\sqrt{5}-1)/2$, $\varepsilon_2 = -(\sqrt{5}+1)/2$, а

$$\frac{1}{\varepsilon_i - x} = \frac{1/\varepsilon_i}{1 - x/\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\varepsilon_i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\varepsilon_i^{k+1}},$$

получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{1 - x - x^2} = -\frac{1}{(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)} =$$
$$= \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 - x} - \frac{1}{\varepsilon_2 - x}\right) = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{\varepsilon_1^{k+1}} - \frac{x^k}{\varepsilon_2^{k+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-\varepsilon_2)^{k+1} - (-\varepsilon_1)^{k+1}\right)x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)x^k,$$

откуда, приравняв коэффициенты при соответствующих степенях x, и получаем требуемую формулу. ■

Приведенное рассуждение изящно, однако напоминает некий фокус. Кроме того, одно место в нем требует дополнительных пояснений. Именно, каков смысл равенства $\varphi(x) = 1/(1-x-x^2)$? К примеру, бессмысленно подставлять в него $x = 1$.

Введем на множестве степенных рядов алгебраическую структуру. Именно, рассмотрим множество

$$\mathbb{R}\,[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

формальных степенных рядов, определим сложение и умножение в этом множестве посредством равенств

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Упражнение. Докажите, что множество $\mathbb{R}\,[[x]]$ с введенными операциями является коммутативным кольцом, в котором элемент $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Заметим, что единицей в этом кольце является ряд $1+0+\ldots$, который мы будем отождествлять с числом $1 \in \mathbb{R}$, а записанное в процессе доказательства теоремы равенство $\varphi(x)(1-x-x^2) = 1$ означает, что $\varphi(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$ в рассматриваемом кольце. Аналогично, положив $\varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/(\varepsilon_i)^{k+1}$, $i = 1, 2$, имеем, что $\varphi_i(x) = (\varepsilon_i - x)^{-1}$.

Упражнение. Докажите, что если элементы u, v коммутативного кольца K, а также их разность $u - v$ обратимы, то верна формула $(uv)^{-1} = (u - v)^{-1} \left(v^{-1} - u^{-1}\right)$.

Теперь мы в состоянии придать смысл вычислению, проведенному в доказательстве теоремы. Если под $1/u(x)$ понимать обратный к $u(x)$ элемент кольца $\mathbb{R}\,[[x]]$, то

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1 - x - x^2)^{-1} = -\left((\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)\right)^{-1} = \\ &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{-1} \left((\varepsilon_2 - x)^{-1} - (\varepsilon_1 - x)^{-1}\right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \left(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right).\end{aligned}$$

Интересен и другой способ вывода явной формулы для чисел Фибоначчи [1]. Пусть

$$\xi_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

тогда

$$\xi_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-1} + a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} =$$
$$= A\xi_{n-1} = A^{n-1}\xi_1 = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

таким образом, достаточно найти явную формулу для n-й степени матрицы A. Характеристический многочлен этой матрицы есть

$$\psi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - t - 1,$$

поэтому ее собственные числа – это $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Поскольку матрица A имеет различные собственные числа, то ее можно привести к диагональному виду при помощи неособого преобразования, т.е. найдется такая матрица S, что $A = S^{-1}\Lambda S$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

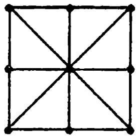
Упражнение. *Докажите, что* $A^n = S^{-1}\Lambda^n S$.

Следовательно, $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, коэффициенты c_1 и c_2 можно найти из начальных условий $a_0 = a_1 = 1$, так что $c_1 + c_2 = 1$ и $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 1$.

2.4. Метод производящих функций. Начнем данный пункт со следующей задачи.

Задача 20. *Докажите, что в центре магического квадрата* 3×3 *стоит число 5, а в углах располагаются числа 2, 4, 6 и 8.*

Поскольку сумма всех чисел в рассматриваемом квадрате равна 45, то каждая из сумм трех чисел в каждой его строке, столбце и на его диагоналях равна 15. Рассмотрим всевозможные разбиения этого числа на суммы трех различных чисел от 1 до 9. Всего имеется восемь таких разбиений, именно: $1+5+9$, $1+6+8$, $2+4+9$, $2+5+8$, $2+6+7$, $3+4+8$, $3+5+7$, $4+5+6$.



Число, которое находится в центре магического квадрата, должно присутствовать в четырех разбиениях (рисунок), а таковым является лишь число 5. В трех разбиениях присутствуют лишь числа $2, 4, 6, 8$, поэтому именно они стоят в углах квадрата.

Задача 21. Найдите количество всевозможных упорядоченных разбиений числа n на k неотрицательных целых чисел.

Ответ: C_{n+k-1}^{k-1}.

Основная цель данного пункта – применить метод производящих функций в действительно сложной задаче нахождения соотношения между числами разбиений натуральных чисел на натуральные же слагаемые [18]. Подсчет этих чисел довольно затруднителен, к примеру, число 100 можно представить 190569292 способами.

Обозначим через $p(n)$ число таких разбиений натурального числа n, положим по определению $p(0) = 1$.

Лемма 2. Справедливо следующее разложение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots) \ldots \times$$
$$\times (1 + x^k + x^{2k} + \ldots) \ldots$$

Заметим, что хотя в правой части данной формулы и стоит бесконечное произведение, однако для вычисления коэффициента при фиксированной степени нужно проделать конечное число действий.

Итак, сопоставим набору $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ неотрицательных целых чисел, с одной стороны, произведение $x^{m_1} x^{m_2} \ldots x^{m_k}$, а с другой, разбиение числа $n = m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k$ на m_1 единиц, m_2 двоек, и т.д. Ясно, что оба эти соответствия взаимно однозначны, таким образом, коэффициент при x^n после раскрытия скобок в правой части формулы действительно равен числу $p(n)$ разбиений натурального числа n. ∎

Следствие. Справедливо разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots}.$$

Введем еще два типа разбиений: пусть $l(n)$ – это число разбиений n на нечетные слагаемые, а $d(n)$ – на различные.

Упражнение. Докажите, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\dots}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n = (1+x)(1+x^2)\dots$$

Теорема 3. Справедливо тождество $d(n) = l(n)$.

Пусть $D(x)$ и $L(x)$ – производящие функции для последовательностей чисел $d(n)$ и $l(n)$. Имеем

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n = (1+x)(1+x^2)\dots =$$
$$= \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\dots} = L(x). \blacksquare$$

Заметим, однако, что в последнем равенстве приведенного доказательства подразумевается, что в бесконечном произведении дробей сделано бесконечно много сокращений. Поэтому дадим менее изящное, однако более строгое рассуждение.

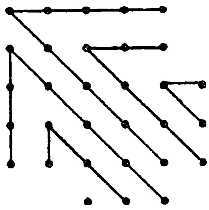
Говорим, что элементы $f, g \in \mathbb{R}[[x]]$ сравнимы по модулю x^n, и пишем $f \equiv g \pmod{x^n}$, если $f - g = x^n h$ для некоторого $h \in \mathbb{R}[[x]]$. Ясно, что $f = g$ тогда и только тогда, когда $f \equiv g \pmod{x^n}$ для сколь угодно больших n. Имеем

$$D(x) \equiv (1+x)\dots(1+x^{2n}) \pmod{x^{2n+1}} =$$
$$= (1-x^2)\dots(1-x^{4n})(1-x)^{-1}\dots(1-x^{2n}) \pmod{x^{2n+1}} \equiv$$
$$\equiv (1-x)^{-1}\dots(1-x^{2n-1})^{-1} \pmod{x^{2n+1}} \equiv L(x) \pmod{x^{2n+1}}.$$

Значит, $D(x) = L(x)$. $\blacksquare$

(С точки зрения алгебры мы доказали, что совпадают образы элементов $D(x)$ и $L(x)$ в факторкольцах $\mathbb{R}[[x]]/x^{2n+1}\mathbb{R}[[x]]$, откуда следует совпадение самих этих элементов.)

Другой подход к доказательству отнюдь не очевидного тождества данной теоремы состоит в использовании преобразований так называемых диаграмм Юнга. Пусть $n = (2k_1+1) + (2k_2+1) + \dots + (2k_s+1)$, где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_s$ – разбиение числа n на нечетные слагаемые.



Рассмотрим уголок с равными сторонами, на каждой из которых расположено по $k_1 + 1$ точек (считая и его вершину, так что всего на нем имеется $2k_1 + 1$ точек). Аналогичный уголок с $2k_2 + 1$ точкой расположим на один ряд ниже и правее его, и т.д. (на рисунке приведен пример расположения, соответствующего разбиению $(9; 7; 7; 5; 3)$). Проведем на такой диаграмме двузвенные ломаные так, как это изображено на рисунке. На этих ломаных в рассмотренном примере располагаются $9, 6, 3, 8, 4$, и 1 точка, таким образом получено разбиение числа 31 на попарно различные слагаемые.

Упражнение. Докажите, что всегда в результате применения указанного алгоритма будет получено разбиение на различные слагаемые. (Более сложно доказать, что описанное соответствие является взаимно однозначным.)

Выше было доказано, что производящая функция последовательности чисел разбиений обратна бесконечному произведению $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$. Проделаем небольшое вычисление: $(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$, умножая полученый многочлен на $1 - x^3$, получаем $1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$, далее:

$$1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 - x^{10}, \quad 1 - x - x^2 + x^5 + \ldots$$

Заметим, что выписанный многочлен не изменится при дальнейшем умножении на двучлены $1 - x^k$, $k \geqslant 6$. Если не полениться, то можно подсчитать, что начальными членами в бесконечном произведении окажутся

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$$

Теорема 4 (Эйлер). Справедливо тождество

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (-1)^q x^{(3q^2+q)/2}.$$

Следствие. Имеет место следующая рекуррентная формула:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \ldots$$

Действительно, так как $P(x)\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \cdot (1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots)=1,$$

откуда, в силу равенства

$$x^n\left(p(n)-p(n-1)-p(n-2)+\ldots\right)=0,$$

и следует указанная формула. ∎

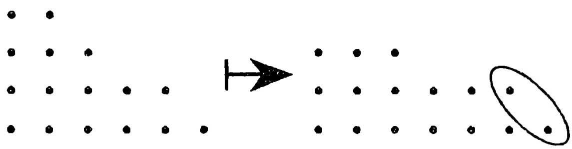
Докажем теорему 4. Пусть a_n – коэффициент при x^n в произведении $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$. Ясно, что число a_n есть сумма чисел $(-1)^k$ по всем разбиениям числа n на сумму k различных натуральных слагаемых. Пусть $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$, где $n_1<n_2<\ldots<n_k$. Разобьем все такие разбиения на три типа. Введем дополнительное обозначение. Пусть s – это наибольшее из таких чисел, что числа n_{k-s}, n_{k-s+1}, $\ldots$, n_k являются соседними в натуральном ряду.

Отнесем к типу 1 все такие разбиения, в которых $n_1 \leqslant s \leqslant k$, исключая случай $n_1 = s = k$, т.е. исключая разбиение $n = k+(k+1)+\ldots+(2k-1)$. К типу 2 отнесем разбиения, у которых $n_1 > s$, за исключением разбиения с $n_1 = s+1$, $s = k$, т.е. разбиения $n = (k+1)+(k+2)+\ldots+2k$. Третий тип состоит из оставшихся исключительных разбиений. Заметим, что разбиения этого типа существуют лишь у чисел вида $n = k+(k+1)+\ldots+(2k-1) = k(3k-1)/2$ и $k(3k+1)/2$, т.е. именно у чисел, которые появляются как показатели степеней в правой части тождества Эйлера!

Рассмотрим произвольное разбиение $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ первого типа и сопоставим ему следующее разбиение того же числа:

$$n = n_2+\ldots+n_{k-n_1}+\ldots+(n_{k-n_1+1}+1)+\ldots+(n_k+1),$$

что возможно, поскольку $n_1 < k$. В полученном разбиении подряд будут стоять $s' = n_1$ чисел, а первым является число $n_1' = n_2$, которое больше числа $s' = n_1$, следовательно, построено разбиение второго типа. Это соответствие можно описать



на языке диаграмм Юнга (рисунок): точки верхнего ряда добавляются по одной в нижние ряды.

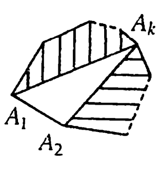
При раскрытии скобок в произведении указанным разбиениям соответствуют коэффициенты $(-1)^k$ и $(-1)^{k+1}$, сумма которых равна нулю. Нетрудно видеть, что описанное соответствие между разбиениями первого и второго типов является взаимно однозначным, следовательно, коэффициент при x^n отличен от нуля лишь в случае, если для числа n существует разбиение третьего типа. ■

Задача 22. Докажите, что для того чтобы разбить выпуклый n-угольник на треугольники непересекающимися (в своих внутренних точках) диагоналями, нужно провести $n-3$ диагонали.

В качестве последнего приложения метода производящих функций рассмотрим одну задачу комбинаторной геометрии [18].

Обозначим через D_n число различных разбиений n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ на треугольники своими непересекающимися диагоналями, положим по определению $D_2 = 1$.

Задача 23. Докажите, что при всех $n \geqslant 3$ имеет место тождество $D_n = D_2D_{n-1} + D_3D_{n-2} + \ldots + D_{n-1}D_2$.



(Сторона A_1A_2 исходного многоугольника является стороной какого-либо треугольника разбиения, третьей вершиной которого является одна из точек $A_3, \ldots, A_n$ (рисунок).)

Пусть $D(x) = D_2x^2 + D_3x^3 + \ldots$ — производящая функция последовательности $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$.

Упражнение. Докажите, что если для последовательности $\{D_n\}$ выполнено приведенное в задаче 23 рекуррентное соотношение, то производящая функция этой последовательности удовлетворяет функциональному уравнению $y^2 - xy + x^3 = 0$.

Следовательно, $y = x\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right)/2$, а поскольку ряд для $D(x)$ не содержит линейного члена, то $y = x\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)/2$, значит,

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n x^n = \frac{x}{2}\Bigg(1 - 1 + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+2\right)2^{2(n-1)}x^{n-1} + \ldots\Bigg),$$

откуда следует равенство

$$D_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-5) \cdot 2^{2(n-1)}}{(n-1)!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}.$$

Упражнение. Попробуйте придать смысл приведенному вычислению.

2.5. Числа π, e и n-факториал.

Упражнение. Пусть $a_n = n!\, n^{-n}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = e.$$

Выражение $n!$ часто появляется при подсчете числа комбинаций. Как следует из результата упражнения, в его асимптотике в каком-то виде должны присутствовать n^n и e^{-n}, точная формулировка – в следующей теореме [30].

Теорема 5 (Стирлинг). Справедливо асимптотическое равенство

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}\left(1 + o(1)\right), \text{ т.е. } \lim_{n\to+\infty} \frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi n}\; n^n} = 1.$$

Доказательство теоремы имеет чисто аналитический характер. Введем вначале функцию, называемую гамма-функцией Эйлера: $\Gamma(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1}e^{-t}dt$.

Упражнение. Докажите, что функция Γ определена при всех $\tau > 0$, причем $\Gamma(\tau+1) = \tau!$ при всех $\tau \in \mathbb{N}$.

(Заметим, что $\Gamma(\tau+1) = \int_0^\infty t^\tau e^{-t}dt = -t^\tau e^{-t}\big|_0^\infty + \tau\int_0^\infty t^{\tau-1}e^{-t}dt$ $= \tau\Gamma(\tau)$.)

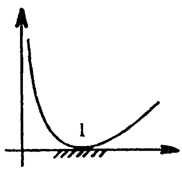
Лемма 3. Имеем

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-t}\int_0^\infty e^{-sf(x)}dx, \text{ где } f(x) = x - \ln x - 1.$$

Действительно, сделав замену $t = sx$ в интеграле для значения $\Gamma(s+1)$, получаем

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}dt = \int_0^\infty s^{s+1}x^s e^{-sx}dx = \\ = s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-s(x-\ln x-1)}dx. \ \blacksquare$$

Для доказательства формулы Стирлинга осталось показать, что интеграл $I(s) = \int_0^\infty e^{-sf(x)}dx$ имеет следующую асимптотику: $I(s) \sim \sqrt{2\pi/s}$, т.е. $I(s)\sqrt{s/(2\pi)} \to 1$ при $s \to +\infty$.



Характер получаемой для рассматриваемого интеграла асимптотики связан с поведением функции f (рисунок). Оказывается, что основной вклад в значение $I(s)$ при больших s дает интеграл по ε-окрестности единицы, в которой данная функция близка к квадратичной.

Лемма 4. Справедливо равенство $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Действительно,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} re^{-r^2}drd\varphi = \\ = \pi\int_0^\infty 2re^{-r^2}dr = \pi\int_0^\infty e^{-u}du = \pi.$$

Следствие. Справедливо равенство $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Итак, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть функция f определена на $(0;+\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) f убывает на $(0;1)$, возрастает на $(1;+\infty)$, а $f(1)=0$;

2) существуют такие числа $c>1$ и $b>0$, что $f(x)\geqslant bx$ при всех $x\geqslant c$;

3) существуют такие положительные числа a,δ и M, что $f(x)=a(x-1)^2+(x-1)^3\psi(x)$, где $|\psi(x)|\leqslant M$ при всех $x\in(1-\delta;1+\delta)$.

Тогда $I(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-sf(x)}dx=\sqrt{\pi/(sa)}\,(1+o(1))$ при $s\to+\infty$.

Упражнение. Докажите, что функция $f(x)=x-\ln x-1$ удовлетворяет условиям 1) – 3).

Докажем лемму 5. Будем считать число δ настолько малым, что $f(x)\geqslant a(x-1)^2/2$ при всех $x\in(1-\delta;1+\delta)$, а число s настолько большим, что $\varepsilon=1/\sqrt[3]{s}<\delta$. Разобъем рассматриваемый интеграл на интегралы по промежуткам $[0;1-\varepsilon]$, $[1-\varepsilon;1+\varepsilon]$, $[1+\varepsilon;c]$ и $[c;+\infty)$. Поскольку $f(x)\geqslant f(1-\varepsilon)$ при всех $x\in[0;1-\varepsilon]$, то $-sf(x)\leqslant -sf(1-\varepsilon)\leqslant -s\varepsilon^2a/2=a\sqrt[3]{\varepsilon}/2$, значит,

$$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(x)}dx\leqslant\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(1-\varepsilon)}dx\leqslant\int_0^{1-\varepsilon} e^{-a\sqrt[3]{s}/2}=(1-\varepsilon)e^{-a\sqrt[3]{s}/2},$$

т.е. первый интеграл экспоненциально стремится к нулю при $s\to+\infty$. Аналогичная оценка имеет место и для интеграла по отрезку $[1+\varepsilon;\varepsilon]$.

Далее,

$$\int_c^\infty e^{-sf(x)}dx\leqslant\int_c^\infty e^{-sbx}dx=\frac{1}{sb}e^{-sbc},$$

следовательно, интеграл по этому промежутку также стремится к нулю экспоненциально.

Наконец,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(x)}dx\sim\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sa(x-1)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{sa}}\int_{-\sqrt{sa}\,\varepsilon}^{\sqrt{sa}\,\varepsilon} e^{-y^2}dy\sim$$
$$\sim\frac{1}{\sqrt{sa}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{sa}}$$

(детальное доказательство предоставляется провести читателю).

Элементарные комбинаторные задачи, примеры которых приведены в пункте 1 данной главы, могут быть с успехом использованы при обучении математике учащихся младших (5–8-х) классов средней школы, поскольку при решении этих задач школьники обучаются проводить (и записывать) элементарные логические рассуждения, оставаясь между тем в рамках одной формальной схемы (огромное количество подобных задач имеется в книге [3]). Эти задачи имеют, с одной стороны, разнообразные формулировки, а с другой – являются конкретными реализациями совсем небольшого числа основных моделей. С точки зрения учителя, немаловажно и то обстоятельство, что правильность решения в большинстве случаев показывает ответ, случайное совпадение с которым невероятно, так же как маловероятно, чтобы учащийся смог подобрать правильное решение по данному к задаче ответу.

В пункте 2 автор предлагает подход к введению чисел сочетаний, основывающийся на выводе рекуррентного соотношения между ними, на примере трех различных задач. В идейном плане важную роль играет лемма 1 и ее следствия, в которых свойства наборов числовых величин описываются через свойства функции, сопоставленной этому набору. Развитием этого метода является проведенное в пункте 3 исследование задачи Фибоначчи. Подчеркнем еще раз (учитель это обязан понимать!), что формальное вычисление в доказательстве теоремы 2, хотя и кажется естественным, нуждается в построении математического объекта, в котором оно проводится. Наиболее адекватным данной задаче объектом и является введенное кольцо формальных степенных рядов. В конце пункта 3 указан и другой подход к нахождению явной формулы для чисел Фибоначчи, связанный с разностными уравнениями, которые, в свою очередь, связаны с линейными дифференциальными уравнениями.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1. Параллельный перенос, поворот и симметрии в задачах. Начнем со следующих четырех задач.

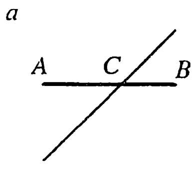
Задача 1. Дана прямая ℓ и не лежащие на ней точки A и B. Найдите на этой прямой такую точку C, сумма расстояний от которой до точек A и B является наименьшей.

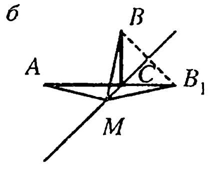
Задача 2. Дан угол и точка M внутри него. Постройте отрезок, концы которого лежат на сторонах данного угла, а середина совпадает с этой точкой.

Задача 3. Две деревни расположены по разным сторонам канала с параллельными берегами. В каком месте следует построить мост через канал, чтобы путь из одной деревни в другую был наиболее коротким?

Задача 4. Пусть A, B, C – точки некоторой прямой (B лежит между A и C), а D и E – вершины равносторонних треугольников, построенных на отрезках AB и BC соответственно по одну сторону от рассматриваемой прямой. Докажите, что точка B и середины отрезков AE и CD также являются вершинами равностороннего треугольника.

Красивые решения данных задач используют понятия осевой и центральной симметрий, параллельного переноса и поворота.

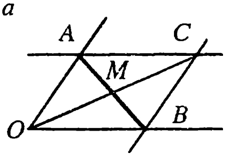




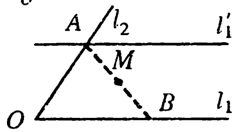
В задаче 1 следует рассмотреть два случая. Если данные точки лежат по разные стороны от прямой, то решение очевидно: искомая точка – это точка пересечения данной прямой с отрезком AB (рисунок *а*). Пусть теперь точки A и B лежат по одну сторону от прямой и точка B_1 симметрична точке B относительно этой прямой. Поскольку $AM+MB = AM+MB_1$, то эта сумма является наименьшей, если $M = C$ (рисунок *б*).

Решение задачи 2. Пусть O – вершина угла, а точка C такова, что M – середина отрезка OC. Проведем через точку C прямые, параллельные сторонам данного угла, пусть A и B – точки их пересечения с этими сторонами (рисунок *a*). Поскольку $OACB$ – параллелограмм, а M – середина одной его диагонали, то эта точка является серединой и его диагонали AB.

а



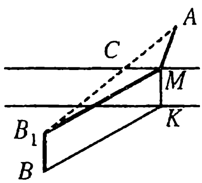
б

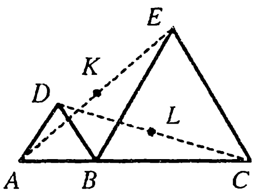


Приведем и другое рассуждение. Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 стороны данного угла, рассмотрим луч $\ell_1{}'$, симметричный лучу ℓ_1 относительно данной точки M. Пусть A – точка пересечения лучей ℓ_2 и $\ell_1{}'$ (рисунок *б*). По построению эта точка симметрична некоторой точке $B \in \ell_1$, т.е. M – середина отрезка AB.

Чтобы ощутить разницу приведенных решений – смотрите задачу 5 ниже.

Решение задачи 3 изображено на рисунке. Точка B_1 получена из точки B параллельным переносом в направлении, перпендикулярном берегам канала на его ширину. Следовательно, BB_1MK – параллелограмм, значит, длины ломаных $BKMA$ и BB_1MA равны, и изображенная на рисунке точка C – искомая.





Наконец, задача 4. При повороте на угол 60° против часовой стрелки вокруг точки B точка C перейдет в точку E, точка D – в A (рисунок). Поэтому отрезок CD перейдет в EA, а его середина L – в точку K – середину отрезка AE. Получаем, что треугольник BKL является равнобедренным с углом 60° при вершине, значит, он равносторонний.

Приведем теперь еще несколько задач, решения которых используют такие же идеи.

Задача 5. *Даны две окружности и точка. Постройте отрезок, концы которого лежат на данных окружностях, а середина совпадает с этой точкой.*

Аналог второго решения задачи 2. Пусть C_1, C_2 – данные окружности и $C_1{}'$ – окружность, симметричная первой относительно данной точки. Точка, принадлежащая пересечению $C_1{}' \cap C_2$, является одним из концов искомого отрезка.

Аналитический подход к задаче 5. Пусть $p(x,y) = 0$, $q(x,y) = 0$ – уравнения данных окружностей, $M(x_0, y_0)$ – данная точка. Если $B(x,y)$ – лежащий на второй окружности конец искомого отрезка, то другой его конец – точка $A(2x_0 - x, 2y_0 - y)$. Поэтому числа x и y являются решениями системы

$$\begin{cases} p(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0, \\ q(x,y) = 0. \end{cases}$$

Упражнение. Докажите, что $p(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$ – уравнение окружности $C_1{}'$.

Задача 6. *У борта бильярда стоит шар. В каком направлении нужно толкнуть его, чтобы, отразившись от трех других бортов, он вернулся в исходную точку?*

Задача 7. Точка P лежит на дуге AB окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что $PC = PA + PB$.

Задача 8. *Длина средней линии четырехугольника равна полусумме длин не пересекающихся с нею сторон. Докажите, что этот четырехугольник – трапеция.*

Последняя из приведенных задач имеет красивое решение, использующее векторы. Дадим еще две задачи, в которых можно использовать как технику векторной алгебры, так и геометрические преобразования.

Задача 9. Вершины двух квадратов на плоскости последовательно, с сохранением направления обхода, соединены отрезками. Докажите, что середины этих отрезков также являются вершинами квадрата.

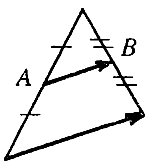
Задача 10. Пусть $ABCD$ и $CEFG$ – квадраты на плоскости. Докажите, что продолжение медианы треугольника CDG является высотой в треугольнике BCE.

Много задач элементарной геометрии, в решении которых полезно использовать движения плоскости, приведено в книге [32].

3.2. Композиции в задачах.

Задача 11. Докажите, что ограниченное множество на плоскости не может иметь двух различных центров симметрии.

Будем рассуждать от противного. Пусть A и B – это точки, центральные симметрии H_A и H_B относительно которых переводят данное множество в себя. Рассмотрим композицию $F = H_B \circ H_A \circ H_B \circ \ldots \circ H_B \circ H_A$, состоящую из $2n$ центральных симметрий.



Отоб ажение F перево ит анное множество в себя. Но композиция $H_B \circ H_A$ двух симметрий является параллельным переносом на вектор $2\overline{AB}$ (рисунок), следовательно построенное отображение F – это параллельный пе[illegible] на в[illegible] $2n\overline{AB}$, п[illegible]этому, если чи[illegible]ло n достаточно велико, оно никак не может переводить данное ограниченное множество в себя.

Совершенно аналогично доказывается, что любое ограниченное множество не может иметь двух различных параллельных осей симметрий.

Упражнение. Докажите, что композиция осевых симметрий относительно двух пересекающихся прямых является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между ними.

Задача 12. Докажите, что если замкнутое выпуклое множество имеет две оси симметрии, угол между которыми не соизмерим с π, то оно есть круг или вся плоскость.

Действительно, поскольку в рассматриваемом случае композиция данных осевых симметрий – это поворот на угол, не соизмеримый с π, то данное множество переходит в себя при поворотах Φ_α относительно точки пересечения этих прямых, где множество углов поворотов всюду плотно на окружности (см. главу 7). Поскольку данное множество является замкнутым, то оно переходит в себя при любом повороте относительно этой точки. Отсюда, в силу выпуклости этого множества, и следует требуемое утверждение.

Хотя приведенные рассуждения и не являются сложными, не используют ничего из, так сказать, "высшей математики", они все же отличаются от тех, которые в школе привыкли называть элементарными. Следующая задача вполне элементарна (в общепринятом смысле этого слова).

Задача 13. Постройте многоугольник по заданнным точкам $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$, являющимся серединами его сторон.

Нетрудно видеть, что композиция $H = H_{2n+1} \circ H_{2n} \circ \cdots \circ H_1$ центральных симметрий относительно данных точек является центральной симметрией относительно вершины искомого многоугольника (почему?). Поэтому, взяв произвольно точку M и рассмотрев ее образ $M' = H(M)$ относительно указанной композиции, получим, что середина отрезка MM' – это и есть одна из вершин искомого многоугольника. Остальные его вершины находятся без труда.

Мы и далее будем использовать обозначения: Id – тождественное отображение; H_A – центральная симметрия относительно точки A; R_ℓ – осевая симметрия относительно прямой ℓ; $\Pi_{\mathbf{a}}$ – параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}$; $\Phi_\alpha(A)$ – поворот на угол α относительно точки A.

Композиция отображений по своей записи напоминает произведение, но в отличие от произведения чисел свойство коммутативности для композиции отображений не имеет места. К примеру, $H_A \circ H_B = \Pi_{2\overline{BA}} \neq \Pi_{2\overline{AB}} = H_B \circ H_A$, более того, $(H_A \circ H_B) \circ (H_B \circ H_A)$ – это тождественное отображение, что впрочем, очевидно, поскольку

$$(H_A \circ H_B) \circ (H_B \circ H_A) = (H_A \circ (H_B \circ H_B)) \circ H_A = H_A \circ H_A = \mathrm{Id}\,.$$

Мы видели выше (задача 12), что круг характеризуется своей инвариантностью относительно некоторых двух симметрий. В следующих задачах мы увидим, как соотношения типа соотношения коммутативности характеризуют взаимное расположение геометрических объектов [12].

Далее для краткости будем опускать кружок при обозначении композиции.

Задача 14. Докажите, что: 1) $R_{\ell_1}R_{\ell_2} = R_{\ell_2}R_{\ell_1} \iff \ell_1 \perp \ell_2$; 2) $R_\ell H_A = H_A R_\ell \iff A \in \ell$.

Задача 15. Докажите, что:

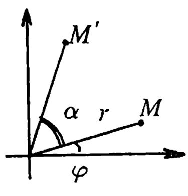
1) $R_{\ell_1}R_{\ell_2}R_{\ell_3} = R_{\ell_3}R_{\ell_2}R_{\ell_1}$ тогда и только тогда, когда прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 или параллельны друг другу, или же проходят через одну точку;

2) $H_A H_B = H_B H_C$ тогда и только тогда, когда точка B является серединой отрезка AC.

Упражнение. Какое свойство взаимного расположения точек отражает равенство $H_A H_B H_C H_D = \mathrm{Id}$?

При изучении понятия движений полезно вводить их координатное представление, что, с одной стороны, показывает, что геометрические (бескоординатные) рассуждения можно заменить вычислением, а с другой, что первые часто и короче, и легче для восприятия.

Теорема 1. Справедливы утверждения: 1) при параллельном переносе на вектор $\mathbf{a}(c, d)$ точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x + c, y + d)$; 2) при центральной. симметрии относительно точки $A(x_0, y_0)$ точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(2x_0 - x, 2y_0 - y)$; 3) при повороте на угол α относительно начала координат точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.



Приведем доказательство последнего пункта теоремы. Пусть [illegible] $= r$, а φ – угол между вектором $\overline{OM}$ и осью абсцисс. Тогда $OM' = OM = r$, вектор $\overline{OM}'$ образует с осью абсцисс угол $\varphi + \alpha$ (рисунок) и абсцисса точки M' равна $r\cos(\varphi + \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$; ордината находится аналогично. ■

Упражнение. Докажите утверждение 3) теоремы, не используя формул для косинуса и синуса суммы и, наоборот, выведите их из этого утверждения.

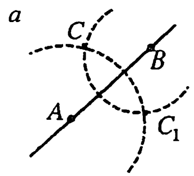
Упражнение. Докажите, что композиция двух поворотов является либо поворотом, либо параллельным переносом.

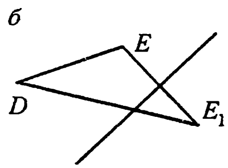
3.3. Группа движений плоскости. Всюду выше мы, говоря о геометрических преобразованиях, рассматривали лишь симметрии, переносы, повороты. Напомним, что преобразование плоскости на себя называется движением, если это преобразование сохраняет расстояние между точками, иначе говоря, если F – движение и $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$, то $AB = A_1B_1$. Ясно, что все использовавшиеся выше преобразования являются движениями. Нетрудно также видеть, что верна следующая лемма.

Лемма 1. а) Любое движение плоскости является обратимым преобразованием; б) композиция движений и отображение, обратное движению, является движением. ■

В качестве следствия получаем, что множество всех движений плоскости с групповой операцией, определяемой их композицией, является (некоммутативной) группой.

Лемма 2. Если движение оставляет на месте две различные точки плоскости, то либо оно является тождественным отображением, либо симметрией относительно прямой, проходящей через эти точки.





Предположим вначале, что точка C лежит на отрезке AB, где A и B – неподвижные относительно рассматриваемого движения точки. Пусть C_1 – образ точки C. Поскольку $AC_1 + C_1B = AC + CB = AB$, то точка C_1 лежит на этом же отрезке и, более того, совпадает с C. Аналогичное рассуждение показывает, что любая точка прямой AB неподвижна относительно данного движения. Если точка не лежит на этой прямой, то из свойства сохранения расстояний до неподвижных точек A и B следует, что возможны два варианта: ее образ либо совпадает с ней, либо симметричен этой точке (рисунок *а*).

Упражнение. Докажите, что если некоторая не лежащая на прямой AB точка является неподвижной, то рассматриваемое преобразование тождественно.

(Смотрите рисунок *б*: $DE_1 \geqslant DE$.) ■

Следствие. Если движение имеет три неподвижные точки (не лежащее на одной прямой), то оно тождественно.

Теорема 2. Любое движение плоскости является композицией не более трех осевых симметрий.

Пусть движение F переводит: точку A в A_1, B в B_1 и C в C_1. Предположим, что $A \neq A_1$ (иначе этот пункт рассуждения надо просто пропустить). Осевая симметрия R_1 относительно серединного перпендикуляра к отрезку AA_1 переведет A_1 в A, образы точек B_1 и C_1 при этой симметрии обозначим, соответственно, B_2 и C_2. Далее, если $B_2 \neq B$, то осевая симметрия R_2 относительно биссектрисы угла $\angle BAB_2$ переводит точку B_2 в B, пусть C_3 – образ точки C_2 при этой симметрии. Если $C_3 = C$, то композиция R_2R_1F имеет три неподвижные точки, значит (в силу леммы 2), $R_2R_1F = \mathrm{Id}$, поэтому $F = R_1R_2$. В противном случае $R_2R_1F = R_3$ (где R_3 – осевая симметрия относительно прямой AB), так что $F = R_1R_2R_3$. ∎

Следствие. Множество осевых симметрий является множеством образующих группы всех движений плоскости, таким образом, эта группа имеет множество образующих, порядок каждой из которых равен двум.

Назовем группой симметрий некоторого множества множество всех движений плоскости, отображающих это множество на себя.

Упражнение. Докажите, что это множество действительно группа.

К примеру, группа симметрий равностороннего треугольника состоит из шести элементов и изоморфна группе всех подстановок трех элементов. Действительно, поскольку любое движение определяется образами трех не лежащих на одной прямой точек, то достаточно рассматривать образы вершин данного треугольника (которые сами должны являться его вершинами). А для любого взаимно однозначного соответствия между вершинами равностороннего треугольника существует движение, его реализующее. В качестве образующих группы можно взять осевые симметрии относительно двух медиан.

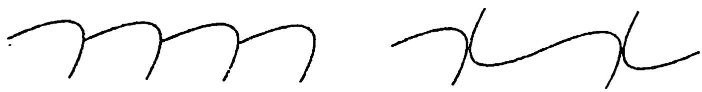
Упражнение. Докажите, что группа симметрий треугольника изоморфна группе с двумя образующими a, b (порядка два) и соотношением $aba = bab$ между ними.

Упражнение. Найдите подмножество плоскости, группа симметрий которого изоморфна группе целых чисел.

Для классификации движений можно использовать и их координатное представление – смотрите следующую задачу.

Задача 16. Найдите необходимое и достаточное условие на числа a, b, c, d, при выполнении которого отображение, сопоставляющее точке $M(x, y)$ точку $M'(ax + by, cx + dy)$, является движением.

3.4. Орнаменты. В этом пункте мы применим алгебраический подход, связанный с рассмотрением групп симметрий, к задаче классификации узоров на полосе. Узоры, изображенные на рисунке, как каждый скажет, симметричны "по-разному", математик – что у них разные группы симметрий.



Будем называть орнаментом такое замкнутое подмножество, лежащее в полосе между двумя параллельными прямыми, что группа G симметрий этого множества содержит нетривиальный параллельный перенос, но не содержит все переносы на векторы, параллельные рассматриваемой полосе.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{M}$ - орнамент. Множество параллельных переносов, содержащихся в группе его симметрий, является ее подгруппой, которая изоморфна $\mathbb{Z}$, т.е. найдется такой параллельный перенос (в дальнейшем будем обозначать его через Π), что любой другой перенос, переводящий множество $\mathcal{M}$ на себя, есть его степень Π^k, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Pi_{\mathbf{a}}$ – перенос, входящий в группу симметрий G орнамента. Рассмотрим следующее подмножество M числовой прямой: $M = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Pi_{\lambda\mathbf{a}} \in G\}$. Ясно, что M – замкнутая подгруппа $\mathbb{R}$, поэтому (см. гл. 7) $M = \{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$, так что можно положить $\Pi = \Pi_{\alpha\mathbf{a}}$. ∎

Параллельный перенос Π будем называть периодом данного орнамента, а порожденную им подгруппу C_∞ подгруппой его периодов.

Теорема 3. Пусть G – группа симметрий данного орнамента, C_∞ – подгруппа его периодов. Существует шесть различных (т.е. неизоморфных) пар (G, C_∞) и семь геометрически различных реализаций пар таких групп.

Доказательство этой теоремы будет проведено путем аккуратного перебора всевозможных вариантов. Сформулируем вначале вспомогательное утверждение, доказательство которого оставляется читателю в качестве упражнения.

Будем называть осью орнамента некоторую прямую, параллельную полосе, в которой лежит рассматриваемый орнамент.

Лемма 4. В группу симметрий орнамента могут, кроме параллельных переносов, входить лишь:

1) одна осевая симметрия относительно оси орнамента, обозначаемая в дальнейшем R';

2) осевые симметрии относительно прямых, перпендикулярных оси орнамента;

3) центральные симметрии относительно точек, лежащих на оси орнамента;

4) одна скользящая симметрия (т.е. композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси этой симметрии) относительно оси данного орнамента, обозначаемая в дальнейшем U. ∎

Докажем теорему 3. Введем систему координат, расположив ось абсцисс на оси данного орнамента, фиксируем направление и масштаб так, чтобы параллельный перенос Π производился на вектор с координатами $(1,0)$. Через R_a и H_a будем обозначать, соответственно, осевую симметрию относительно прямой $x = a$ и центральную симметрию относительно точки с координатами $(a,0)$.

Случай 1. Если группа симметрий содержит только параллельные переносы, то $G = C_\infty = \{\Pi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Случай 2. Пусть группа G содержит и осевую симметрию R' относительно оси орнамента. Поскольку движения R' и Π коммутируют, то группа G изоморфна коммутативной группе с двумя образующими a, b, одна из которых имеет порядок два, так что $G = \{a, b \mid b^2 = 1\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Случай 3. Предположим, что группа G содержит, кроме переносов Π^k, осевую симметрию R_0 относительно прямой, перпендикулярной оси орнамента. Выберем начало координат так, чтобы эта прямая совпадала с осью ординат. Композиция $R_0\Pi$ переводит точку с координатами (x, y) в точку $(-x-1, y)$, следовательно, $R_0\Pi = \Pi^{-1}R_0$. Таким образом, в группе G имеются образующие a и c, причем $a^2 = 1$ и $ac = c^{-1}a$, или $a = cac$, или $acac = 1$ (так как $a^2 = 1$). Заменив образующую c на $b = ac$, получаем, что $G = \{a, b \mid a^2 = b^2 = 1\}$.

В дальнейшем эту группу будем обозначать D_∞ (так называемая диэдрическая группа). Заметим, что и группа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ и D_∞ содержат C_∞ как подгруппу индекса 2, однако вторая из них не коммутативна, следовательно, $D_\infty \not\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Упражнение. *Докажите, что в рассматриваемом случае $R_{k/2} \in G$ при всех целых k.*

Заметим, что если $R_a \in G$, то композиция $R_a R_0$ является параллельным переносом на отрезок длиной $2a$, поэтому $2a \in \mathbb{Z}$.

Случай 4. Пусть $H_0, \Pi \in G$. Абстрактная группа орнамента в данном случае изоморфна группе D_∞.

Случай 5. Предположим, что в группу симметрий входит некоторая скользящая симметрия $U' : (x, y) \mapsto (x+u, -y)$. Так как $(U')^2 = \Pi_{2u}$, то $2u \in \mathbb{Z}$, пусть $k = 2u$. Если $u \in \mathbb{Z}$, то $\Pi^{-u}U' = R'$, тем самым $R' \in G$, этот вариант был разобран выше. Поэтому предположим, что $2u = 2l + 1$. Композиция $\Pi^{-l}U'$ является скользящей симметрией $U_{1/2}$, далее пишем просто U. Поскольку $\Pi = U^2$, то $G = \{U^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ и эта группа содержит C_∞ как подгруппу четных степеней образующей U.

Случай 6. Теперь предположим, что R', R_0, $\Pi \in G$. Так как симметрии R' и R_0 коммутируют (их оси взаимно перпендикулярны), то $G \cong D_\infty \times \mathbb{Z}_2$. Заметим также, что в этом случае, поскольку $H_0 = R'R_0$, то вместе с любыми двумя из указанных трех симметрий группа G содержит и третью.

Ситуация, когда R', $U \in G$, невозможна, так как $R'U = \Pi_{1/2}$, а этот параллельный перенос не является симметрией данного орнамента.

Случай 7. Пусть, наконец, $H_0, U \in G$. Тогда

$$(x, y) \overset{U}{\mapsto} \left(x + \frac{1}{2}, -y\right) \overset{H_0}{\mapsto} \left(-x - \frac{1}{2}, y\right) \overset{U}{\mapsto} (-x, -y),$$

т.е. $UH_0U = H_0$. Значит, абстрактная группа G имеет две образующие a и b, где $a^2 = 1$, а $bab = a$, откуда $(ab)^2 = 1$, следовательно, $G \cong D_\infty$.

Упражнение. *Докажите, что пара* (G, C_∞) в рассматриваемом случае не изоморфна соответствующей паре из случаев 3 и 4.

Упражнение. *Докажите, что если* $H_0, U \in G$, то $R_{1/4} \in G$, а если $R_0, U \in G$, то $H_{1/4} \in G$.

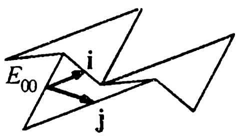
Остался нерассмотренным случай, когда $H_0, R_a \in G$. Имеем $R_aH_0 : (x, y) \mapsto (2a + x, y)$, т.е. $R_aH_0 = U_{2a}$, значит, $4a \in \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что этот случай совпадает с предыдущим.

Упражнение. Нарисуйте семь орнаментов, соответствующих каждому из случаев, рассмотренных в доказательстве теоремы. Каким из них соответствуют орнаменты, изображенные на рисунке в начале этого пункта?

3.5. О мозаиках и дискретных подгруппах движений.

Задача 17. *Докажите, что плоскость можно замостить без перекрытий и пропусков четырехугольниками, равными данному (который может быть невыпуклым).*

Рассмотрим параллелограмм, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника. Обозначим эти вершины E_{00}, E_{01}, E_{11} и E_{10} (рисунок). Введем систему координат с началом в точке E_{00} и базисными векторами $\mathbf{i} = \overline{E_{00}E_{10}}$, $\mathbf{j} = \overline{E_{00}E_{01}}$. Рассмотрим множество четырехугольников, центрально симметричных данному относительно всех точек E_{kl} с координатами (k, l), пусть H_{kl} – центральная симметрия относительно такой точки. Если два образа исходного четырехугольника имеют общие внутренние точки, то композиция $H_{mn}H_{kl}$ перевела бы некоторую точку исходного четырехугольника внутрь его самого, что невозможно, так как она является параллельным переносом на вектор $2(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$, $a, b \in \mathbb{Z}$.



Наконец, при помощи параллельных переносов на векторы такого вида любую точку плоскости можно перевести в исходный или же в один из двух центрально симметричных соседних с ним четырехугольников (рисунок), следовательно, построенное множество четырехугольников действительно заполняет плоскость.

Нетрудно видеть, что если четырехугольник достаточно произволен, то множество всех движений плоскости, переводящих мозаику из четырехугольников в себя, совпадает с множеством композиций всех центральных симметрий относительно решетки вершин вспомогательных параллелограммов. Полученная группа имеет обозначение **p2** и является одной из 17 дискретных групп изометрий плоскости, содержащих два независимых параллельных переноса. В данном пункте мы лишь коснемся этой классификации, но прежде отметим, что каждая из этих групп использовалась в орнаментах, которыми мавры в XIII веке украсили стены Альгамбры – знаменитого дворца арабских султанов в Гранаде.

Будем называть правильной точечной системой на плоскости [5] такое бесконечное множество ее точек, что: 1) число точек в любой ограниченной области конечно; 2) число точек в круге возрастает пропорционально квадрату его радиуса; 3) для любых двух точек этого множества существует его симметрия, переводящая одну из этих точек в другую.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два вектора в плоскости, имеющие различные длины, угол между которыми отличен от $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$. Фиксируем произвольную точку E этой плоскости и рассмотрим так называемую общую решетку, образованную такими точками E_{kl}, для которых $\overline{EE_{kl}} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Упражнение. Докажите, что построенная решетка симметрична относительно середин отрезков, соединяющих любую пару ее точек.

Середины отрезков, соединяющих пары точек исходной решетки, также образуют решетку (построенную на векторах $\mathbf{a}/2$ и $\mathbf{b}/2$).

Лемма 5. Группа симметрий общей решетки состоит из параллельных переносов на вектора $\mathbf{e} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, и центральных симметрий относительно точек вдвое мелкой решетки.

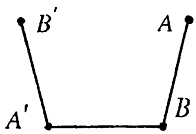
То, что указанные движения входят в группу симметрий, очевидно. Других движений она не содержит в силу условия на угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. ■

Лемма 6 [12]. Единственными возможными конечными циклическими подгруппами группы симметрий правильной точечной системы являются группы порядков $2, 3, 4$ или 6.

Если S' – элемент порядка n в группе симметрий, то S' – это вращение на угол $2\pi k/n$, где числа k и n взаимно просты.

Упражнение. Докажите, что если вращение S – симметрия правильной точечной системы, то оно есть поворот на угол $2\pi k/n$, т.е. $S^n = \mathrm{Id}$.

Следовательно, найдутся такие целые числа a и b, что $ak + bn = 1$, откуда $2\pi ak/n + 2\pi b = 2\pi/n$, значит, $S = (S')^a$ – это поворот на угол $2\pi/n$. Пусть A – центр вращения S. Остальные симметрии данной точечной системы переводят точку A в бесконечное множество центров вращений того же самого порядка. Из свойства 1) правильной точечной системы следует, что в этом множестве найдется ближайшая к A точка B.



Пусть A' – образ точки A при повороте на угол $2\pi/n$ вокруг точки B, а B' – образ точки B при повороте на тот же угол вокруг точки A' (рисунок). Если $A = B'$, то $n = 6$. В остальных случаях, так как B – ближайшая к A точка, то $AB' \geqslant AB$, значит, $n \leqslant 4$. ■

Материал данной главы естественно делится на две (неравные) части. Первая из них содержит элементарные задачи, сформулированные в пункте 1, которые интересны и сами по себе. Поучительно также сопоставить решения этих задач, использующие основные преобразования, с решениями аналитического характера (при помощи аппарата векторной алгебры или метода координат). К примеру, основную идею геометрических решений задач 2 и 5 можно выделить из приведенного аналитического решения второй из них.

Конечно, наиболее изящные решения задач, сформулированные в пункте 1 данной главы, получаются при использовании подхода, которому она и посвящена. По-видимому, невозможно научить школьников решать задачи этим методом, важно привить вкус к подобного рода рассуждениям, и, что чрезвычайно существенно, приучить учащихся рассматривать отображения (движения, функции) как такие же математические объекты, как, к примеру, действительные числа.

Остальные пункты данной главы тоже так или иначе связаны с композициями отображений. Понятие композиции появляется в школьной программе в виде так называемых “сложных” функций. Однако используемые обозначения ориентированы главным образом на вычисление значений функций, при этом остается за скобками взгляд на отображение, определяемое данной формулой, так сказать, “в целом”. Пункт 2 как раз и начинается с простой и содержательной задачи, в решении которой целесообразна подобная точка зрения, еще более характерные примеры – задачи 14 и 15. С методической точки зрения, данный пункт – это мостик, соединяющий элементарную геометрию с материалом пунктов 4 и 5, в которых рассматриваются группы симметрий. Добавим, что вычисление композиций можно сделать более привычным для учащихся, если использовать координатное представление отображений (теорема 1), подобно тому, как это проделано в доказательстве теоремы 3.

Глава 4

НЕРАВЕНСТВА

4.1. Средние двух чисел. Данная тема совершенно необъятна, и автор совершенно сознательно ограничил себя (и читателей) лишь классическими неравенствами [27].

Начнем с задач, использующих простейшее неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Задача 1. Докажите следующие неравенства:

1) $|a/b + b/a| \geqslant 2$; 2) $|x + a/x| \geqslant 2\sqrt{a}$, $a \geqslant 0$;

3) $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$, $a, b \geqslant 0$;

4) $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$; 5) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$;

6) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$, если $a_i > 0$ и $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$;

7) $n! \leqslant ((n+1)/2)^n$; 8) $n! \leqslant n^n 2^{1-n}$; 9) $(n!)^2 > n^n$;

10) $(a^2+b^2)/(a+b) \leqslant (a^3+b^3)/(a^2+b^2)$, $a, b > 0$;

11) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2$;

12) $a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a+b) \geqslant 3/2$, $a, b, c > 0$;

13) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$, $a, b, c \geqslant 0$;

14) $abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, a, b, c – длины сторон треугольника;

15) $(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$; 16) $a+b+c+d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$.

Неравенства в приведенной подборке тесно связаны друг с другом. Мы приведем только решение неравенства 12).

Положим $u = b+c, v = a+c, w = a+b$, тогда $a = (v+w-u)/2$, $b = (u+w-v)/2$ и $c = (u+v-w)/2$, подставив в неравенство 11), имеем

$$\frac{v+w-u}{2u} + \frac{u+w-v}{2v} + \frac{u+v-w}{2w} \geqslant \frac{3}{2},$$

преобразуя далее, получаем очевидное неравенство

$$\left(\frac{v}{u} + \frac{u}{v}\right) + \left(\frac{w}{u} + \frac{u}{w}\right) + \left(\frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right) \geqslant 6.$$

Теперь – три задачи якобы геометрического характера.

Задача 2. Единичный квадрат разделили двумя отрезками, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей несмежных прямоугольников не превосходит 1/16.

Задача 3. Обозначим через s_1, s_2 площади частей, на которые некоторая прямая разделила правильный шестиугольник сторона которого равна единице. Найдите наибольшее значение произведения $s_1 s_2$.

(Поскольку сумма $s = s_1 + s_2$ равна площади шестиугольника, то $s_1 s_2 \leqslant s^2/4 = 27/16$.)

Конечно, неравенство $x(a-x) \leqslant a^2/4$, используемое в задачах 2, 3, следует и из свойств квадратичной функции.

Задача 4. Найдите образ плоскости при отображении, заданном формулой $f(x, y) = (x+y, xy)$, и объясните полученный ответ с точки зрения алгебры.

Задача 5. Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда: а) имеющего наименьшую полную поверхность, если длина его главной диагонали равна единице; б) имеющего наибольшую главную диагональ, если площадь его полной поверхности равна единице.

(В обоих пунктах используется неравенство 5) задачи 1.)

Задача 6. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = xy$ на множестве, заданном неравенством $x^2 + xy + y^2 \leqslant 1$.

В заключение этой подборки приведем неравенства между различными средними двух чисел и их геометрическую интерпретацию.

Задача 7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b верны неравенства

$$\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \max\{a, b\}.$$

Задача 8. Докажите, что в трапеции с основаниями a, b:

1) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ – длина отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего ее на части равной площади;

2) $\dfrac{a+b}{2}$ – длина средней линии трапеции;

3) $\dfrac{2ab}{a+b}$ – длина отрезка, параллельного основаниям трапеции и проходящего через точку пересечения ее диагоналей;

4) $\sqrt{ab}$ – длина отрезка, делящего данную трапецию на две подобных.

Во многих задачах приходится использовать неравенство Коши для средних трех чисел.

Задача 9. а) Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3 = 3abc$;

б) разложите многочлен $a^3+b^3+c^3-3abc$ в произведение двух многочленов;

в) докажите неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

Пункт а) задачи дает подсказку к пункту б): разложение для многочлена $a^3+b^3+c^3-3abc$ естественно поискать в виде $(a+b+c)P_2(a,b,c)$, где P_2 – однородный многочлен второй степени: $P_2(a,b,c) = a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)$. Нетрудно видеть, что возможно лишь значение $k=-1$, прямая проверка показывает, что действительно $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Пункт в): положим $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$, воспользуемся разложением, полученным в предыдущем пункте, и неравенством 5) задачи 1.

Задача 10. Докажите, что:

а) наименьшее значение функции $y = ax^2 + 2b/x$ при положительных x равно $3\sqrt[3]{ab^2}$;

б) наибольший объем V коробки, которую можно склеить из квадратного листа бумаги площадью a^2, вырезав его уголки, равен $2a^3/27$;

в) среди прямоугольных параллелепипедов единичного объема наименьшую полную поверхность имеет куб.

а) Действительно,

$$ax^2 + \frac{2b}{x} = ax^2 + \frac{b}{x} + \frac{b}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{ax^2\frac{b}{x}\frac{b}{x}} = 3\sqrt[3]{ab^2}.$$

б) Если x – длина стороны квадратного уголка, удаляемого из данного листа, то

$$V = x(a-2x)^2 = \frac{1}{4}(4x)(a-2x)(a-2x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}.$$

в) Имеем $ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$.

Пункт а) данной задачи в действительности рассмотрен не до конца. К примеру, $ax^2 + 2b/x = ax^2 + b/2x + 3b/2x \geqslant 3\sqrt[3]{3ab^2/4}$, однако выражение, стоящее в правой части полученного неравенства, не является наименьшим значением данной функции. Заметим также, что вместо неравенства Коши можно было применить производную для исследования данной функции.

Неравенство Коши имеет и неожиданные применения.

Задача 11. Найдите все целые решения уравнения

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Его можно с успехом использовать и в геометрических задачах.

Задача 12. Докажите, что среди всех треугольников фиксированного периметра равносторонний треугольник имеет: а) наименьший радиус описанной окружности; б) наибольший радиус вписанной окружности.

К примеру,

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{a+b+c}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{27}}.$$

В следующей задаче, в отличие от многих геометрических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений, угадать ответ очень непросто.

Задача 13. Имеется прямоугольный параллелепипед единичного объема. При каких длинах его ребер кратчайшее расстояние по его поверхности между противоположными вершинами является наименьшим?

Обозначим длины ребер этого параллелепипеда через a, b, c. Из рассмотрения развертки нетрудно видеть, что если число d – это кратчайшее расстояние между его противоположными вершинами, то d есть наименьшее из чисел $d_1 = \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$, $d_2 = \sqrt{b^2 + (c+a)^2}$, $d_3 = \sqrt{c^2 + (b+a)^2}$. Так как $abc = 1$, то

$$a^2 + (b+c)^2 = \frac{1}{b^2c^2} + (b+c)^2 \geqslant \frac{1}{b^2c^2} + 4bc \geqslant 3\sqrt[3]{4},$$

причем равенство достигается при $b = c = 1/\sqrt[6]{2}$, $a = \sqrt[3]{2}$. Осталось заметить, что при найденных значениях a, b, c верно, что $d_1 = \min\{d_1, d_2, d_3\}$.

В заключение этого вводного пункта приведем несложную, но не совсем обычную задачу.

Задача 14. Докажите, что если числа a, b, c положительны, то неравенства $a(1-b) > 1/4$, $b(1-c) > 1/4$, $c(1-a) > 1/4$ не могут выполняться одновременно.

(Докажите, что из первого из них следует, что $a - b > 0$, далее – аналогично.)

4.2. Неравенства Коши. Общее изложение классических неравенств начнем с неравенства Коши–Буняковского.

Теорема 1. Справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Рассмотрим квадратичное относительно переменной t выражение $\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i t)^2$. Заметим, что уравнение $\Phi(t) = 0$ разрешимо лишь если наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ пропорциональны. Далее, при всех $t \in \mathbb{R}$ верно, что

$$\Phi(t) = t^2 \sum_{1}^{n} b_i^2 - 2t \sum_{1}^{n} a_i b_i + \sum_{1}^{n} a_i^2 \geqslant 0,$$

значит, $\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$. ■

Задача 15. Докажите неравенства:

1) $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$;

2) $\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n a_i^{-1} \geqslant n^2$, $a_i > 0$;

3) $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geqslant 1/n$, если $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $a_i > 0$;

4) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ (в каком случае имеет место равенство?).

Неравенство 4) данной задачи и само неравенство Коши–Буняковского имеют ясную геометрическую интерпретацию: для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ верны неравенства

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \text{ и } |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2,$$

их обобщения смотрите ниже.

Еще одно классическое неравенство.

Задача 16. а) Докажите, что при всех натуральных n и действительных $h > -1$ верно неравенство Бернулли $(1+h)^n \geqslant 1 + hn$;

б) Кащей Бессмертный положил в банк 1 доллар из расчета 1% годовых. Докажите, что через 1000 лет на его счету будет лежать по меньшей мере 1000 долларов.

(Доказательство неравенства Бернулли – простое упражнение на метод математической индукции, пункт б) данной задачи следует из этого неравенства, правда, не в один шаг.)

Следующее неравенство – это знаменитое неравенство Коши.

Теорема 2. Справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i \geqslant 0.$$

Ввиду его важности приведем пять различных доказательств.

Первый шаг первого доказательства читатель может сделать самостоятельно.

Упражнение. Докажите неравенство Коши в случае, если число n является степенью двойки.

Пусть теперь число n произвольно. Выберем число k так, что $n < 2^k = m$. Положим $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ и рассмотрим набор $b_1, b_2, \ldots, b_m$, где $b_i = a_i$ при $i \leqslant n$, $b_i = \xi$ при $n+1 \leqslant i \leqslant m$. В силу результата, сформулированного в упражнении, $\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} b_i} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_i$, что равносильно неравенству

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \xi^{n-m}\right)^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i + (m-n)\xi\right).$$

Поскольку в правой части стоит $\frac{1}{m}(n\xi + (m-n)\xi) = \xi$, то после простых преобразований получим, что $\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \xi^n$. ∎

Исходной точкой второго доказательства является следующее рассуждение. Введем обозначение

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Пусть среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ имеются различные, для определенности пусть $a_1 \neq a_2$. Поскольку $a_1 a_2 < (a_1 + a_2)^2/4$, то

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) < \Pi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n\right).$$

Поэтому при фиксированном значении $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ среднего арифметического наибольшее значение функции Π может достигаться лишь в такой точке $a_1^*, \ldots, a_n^*$, что $a_1^* = \ldots = a_n^*$. Следовательно, $\Pi(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \Pi(a_1^*, \ldots, a_n^*) = a_1^* = \xi$.

Проведенное рассуждение обладает с методической точки зрения тем достоинством, что в нем имеется логическая ошибка: в действительности доказано, что если максимум функции Π существует, то он достигается в случае равенства ее аргументов. Однако в принципе максимум может и не существовать. Поскольку в рассматриваемом случае функция Π, является непрерывной и задана на компактном множестве $\{\ (a_i)_{i=1}^{n} \mid a_i \geqslant 0,\ \sum_1^n a_i \leqslant n\xi\}$, то в силу теоремы Вейерштрасса она достигает на нем своего наибольшего значения. ∎

Третье доказательство на первый взгляд удивительно тем, что в нем неравенство Коши сводится к неравенству от одной переменной. Будем рассуждать по индукции. Предположим, что

$$\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leqslant \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Тогда $\sum_1^n a_i \geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_1^{n-1} a_i} + a_n$ и достаточно показать, что $(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_1^{n-1} a_i} + a_n \geqslant n\sqrt[n]{\prod_1^n a_i}$. Положим $\theta^{n(n-1)} = \prod_1^{n-1}(a_i/a_n)$ и перепишем последнее неравенство в виде $(n-1)\theta^n + 1 \geqslant \theta^{n-1}$ или $n\theta^{n-1}(\theta-1) \geqslant \theta^n - 1$. Полученное неравенство доказывается без труда. ■

Заметим, что его можно преобразовать и к такому виду: $f(\theta)-f(1) \leqslant f'(\theta)(\theta-1)$, где $f(x) = x^n$, так что оно есть следствие теоремы Лагранжа, а его геометрический смысл – выпуклость графика функции f .

Четвертое доказательство.

Лемма 1. Пусть $a_i, q_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n q_i = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^x\right)^{1/x} = \sum_{i=1}^n q_i \ln a_i.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^x\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\sum_{i=1}^n q_i a_i^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{i=1}^n q_i a_i^x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{i=1}^n q_i(a_i^x - 1)}{x} = \sum_{i=1}^n q_i \lim_{x\to 0} \frac{a_i^x - 1}{x} = \sum_{i=1}^n q_i \ln a_i\ . \ ■$$

Упражнение. Выведите из неравенства Коши–Буняковского, что при всех $b_i \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}\right)^2.$$

В силу результата данного упражнения получаем монотонно убывающую последовательность

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt[4]{a_i}\right)^4 \geqslant \ldots,$$

предел которой, в силу леммы 1, равен $\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$, значит, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$. ■

Данное рассуждение обладает очевидным достоинством и менее очевидным недостатком. Достоинство состоит в том, что его легко обобщить. Именно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{i=1}^{n} q_i a_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{q_i}\sqrt{q_i a_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \sqrt[4]{a_i}\right)^2 \geqslant \ldots$$

и так как предел построенной последовательности равен $\exp\left(q_i \sum_{i=1}^{n} \ln a_i\right) = \prod a_i^{q_i}$, получаем следующее обобщение:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i a_i, \text{ где } q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

Упражнение. Докажите, что при $q_i \in \mathbb{Q}$ это обобщение может быть выведено из неравенства Коши, а затем докажите его в случае $q_i \in \mathbb{R}$. (Какое свойство показательной функции вам придется использовать?)

Недостаток четвертого доказательства в том, что при обычном изложении курса математического анализа неравенство Коши используется при выводе свойств показательной функции, поэтому мы можем попасть в "порочный круг".

Наконец, последнее доказательство (к которому также относится только что сделанное замечание). Поскольку функция $f(x) = \ln x$ имеет выпуклый вверх график, то, если $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, $q_i > 0$, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(a_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right),$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \ln a_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right) \text{ или } \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i a_i. \ ■ \ ■$$

Задача 17. Докажите, что последовательность x_n, где $x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, монотонно убывает.

(Неравенство $x_n < x_{n-1}$ можно записать в виде

$$\sqrt[n+1]{\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot 1} < \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n\frac{n-1}{n}+1).)$$

Задача 18. Докажите, что:
1) $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \ldots + a_n/a_1 \geqslant n$, $a_i > 0$;
2) $(1+1/n)^n < 4$; 3) $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ при $n \geqslant 3$.

Упражнение. Выведите из неравенства Коши неравенство Юнга:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ a, b, p, q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

В каком случае в нем имеет место равенство?

Другое доказательство неравенства Юнга смотрите в решении задачи 21 ниже.

4.3. Классические неравенства и геометрия.

Теорема 3 (Гельдер). Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},\ p, q, a_i, b_i > 0,\ 1/p + 1/q = 1.$$

Положив $x_i = a_i^p$, $y_i = b_i^q$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$, перепишем неравенство в виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha y_i^\beta \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^\beta,$$

поделив на его правую часть, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sum_1^n x_i}\right)^\alpha \left(\frac{y_i}{\sum_1^n y_i}\right)^\beta \leqslant 1.$$

Теперь применим к каждому произведению в левой части обобщенное неравенство Коши:

$$\left(\frac{x_i}{\sum_1^n x_i}\right)^\alpha \left(\frac{y_i}{\sum_1^n y_i}\right)^\beta \leqslant \alpha\frac{x_i}{\sum_1^n x_i} + \beta\frac{y_i}{\sum_1^n y_i}.$$

Сложив полученные неравенства, получим искомое. ∎

Упражнение. Обобщите неравенство Гельдера на случай неравенства, в левой части которого стоит сумма произведений k сомножителей.

Теорема 4 (Минковский). Справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}, \quad a_i, b_i > 0,\ p > 1.$$

Положим $1/q = 1-1/p$, $q > 0$, $u_i = a_i+b_i$, $s = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}$. В силу неравенства Гельдера

$$s^p = \sum_{i=1}^{n} u_i^p = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{1/q}$$

Правая часть полученного неравенства преобразуется к виду

$$s^{p-1}\left(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{1/p}\right),$$

откуда и следует искомое неравенство. ■

Упражнение. Обобщите неравенство Минковского на случай, когда в левой части стоит сумма k слагаемых.

Упражнение. Докажите, что если $p < 1$, то справедливо неравенство, обратное неравенству Минковского.

Неравенство Минковского имеет прозрачный геометрический смысл, именно, верно следующее утверждение.

Следствие теоремы 4. Функция

$$|\cdot|_p : \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto |\overline{x}|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

является при $p \geqslant 1$ нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Упражнение. Докажите, что $\lim\limits_{p\to\infty} |\overline{x}|_p = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

В соответствии с результатом упражнения введем обозначение $|\overline{x}|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$. Ясно, что $|\ .\ |_\infty$ – норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется однопараметрическое семейство норм. Естественный вопрос: какие вообще нормы можно ввести в этом пространстве и насколько они могут отличаться друг от друга.

Лемма 2. Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – такая функция, что

1) $p(x) \geqslant 0$, причем $p(x) = 0$, лишь если $x = 0$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Функция p является нормой в том и только том случае, когда множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) \leqslant 1\}$ выпукло (в таком случае будем называть множество D единичным шаром относительно имеющейся нормы).

Действительно, если множество D выпукло, то при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$z = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\frac{x}{p(x)} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}\frac{y}{p(y)} \in D,$$

поэтому $p(z) = \dfrac{p(x+y)}{p(x)+p(y)} \leqslant 1$, т.е. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, таким образом, p – норма.

Обратно, если p – норма, $x, y \in D$ и $\alpha \in [0; 1]$, то

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \leqslant \alpha + (1-\alpha) = 1,$$

значит, $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$, т.е. множество D выпукло. ■

Теорема 5. Любые две нормы в конечномерном векторном пространстве эквивалентны, т.е. если p_1, p_2 – нормы, то существуют такие положительные числа c, C, что

$$cp_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant Cp_1(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку ясно, что эквивалентность норм есть отношение эквивалентности, то достаточно доказать, что любая норма p в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна стандартной евклидовой норме $|\ .\ |_2$. Прежде всего покажем, что функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Действительно, пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, где $\{e_i\}_1^n$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$p(x-y)=p\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p(e_i)|x_i-y_i|\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\leqslant Cn|x-y|_2$$

(здесь $C=\max_{i=1,\dots,n}\{p(e_i)\}$), таким образом, функция p даже липшицева, в частности, она непрерывна.

Рассмотрим стандартную единичную сферу $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$, являющуюся компактным множеством в этом пространстве. По теореме Вейерштрасса функция p достигает на S^{n-1} наибольшего и наименьшего значений, т.е. найдутся такие положительные числа c и C, что $c\leqslant p(y)\leqslant C$ при всех $y\in S^{n-1}$. Пусть $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$, тогда

$$\frac{x}{|x|_2}\in S^{n-1}\ \text{и}\ c\leqslant p\Big(\frac{x}{|x|_2}\Big)=\frac{p(x)}{|x|_2}\leqslant C,$$

откуда $c|x|_2\leqslant p(x)\leqslant C|x|_2$. ■

Следствие. Для любой нормы p в пространстве $\mathbb{R}^n$ единичный шар D является компактным, выпуклым множеством, имеющим непустую внутренность.

Упражнение. Докажите, что следующие нормы в пространстве $C\,[0;1]$ всех непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций не эквивалентны

$$|f|_C=\max_{t\in[0;1]}|f(t)|\quad\text{и}\quad|f|_1=\int_0^1|f|.$$

Теорема 6. *Для любого компактного, выпуклого и имеющего непустую внутренность множества $D\subset\mathbb{R}^n$ существует норма в этом пространстве, относительно которой это множество является единичным шаром.*

Положим $p(x)=\min\{\lambda\mid x/\lambda\in D\}$ при $x\neq 0$, $p(0)=0$.

Упражнение. Докажите, что p – искомая норма. ■

Задача 19. Решите уравнение $\sin^{19}x+\cos^{92}x=1$.

(Если $\sin x,\cos x\neq 0$, то $\sin^{19}x<\sin^2 x$, $\cos^{92}x<\cos^2 x$, следовательно, $\sin^{19}x+\cos^{92}x<1$.)

Задача 20. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Идею, использованную при решении этих задач, можно обобщить.

Теорема 7 (Иенсен). Справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{1/q} \quad 0 < p \leqslant q, \ a_i \geqslant 0$$

(в частности, если $1 \leqslant p \leqslant q$, то $|x|_p \geqslant |x|_q$, $x \in \mathbb{R}^n$), причем при $p < q$ равенство имеет место только лишь если одно из чисел a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, отлично от нуля.

Поскольку обе части неравенства Иенсена суть однородные функции, то достаточно доказать, что если $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \leqslant 1$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i^q \leqslant 1$ (почему?). Если же $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \leqslant 1$, то $a_i \leqslant 1$, значит, $a_i^q \leqslant a_i^p$, поэтому $\sum_{i=1}^{n} a_i^q \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^p \leqslant 1$. ■

Если $1 \leqslant p \leqslant q$, то пропущенный в доказательстве теоремы 7 момент имеет следующую геометрическую интерпретацию.

Упражнение. Пусть D_1, D_2 – единичные шары относительно норм p_1, p_2 в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что

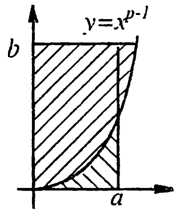
$$D_1 \supset D_2 \iff p_1(x) \leqslant p_2(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

4.4. Интегральные варианты классических неравенств. Начнем данный пункт со следующих двух задач, решение которых связано с геометрической интерпретацией входящих в них выражений.

Задача 21. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, p, q, где $1/p + 1/q = 1$, верно неравенство

$$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b x^{q-1} dx,$$

причем равенство имеет место лишь если $b = a^{p-1}$.



Заметим прежде всего, что равенство $1/p+1/q=1$ равносильно тому, что $(p-1)(q-1)=1$, значит, функции $f(x)=x^{p-1}$ и $g(x)=x^{q-1}$ взаимно обратны. Следовательно, интегралы, входящие в данное неравенство, суть площади заштрихованных на рисунке областей, объединение которых содержит прямоугольник со сторонами a и b.

Задача 22. Непрерывная и строго монотонная функция f такова, что $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Докажите, что

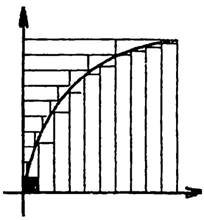
$$f(\tfrac{1}{10})+f(\tfrac{2}{10})+\ldots+f(\tfrac{9}{10})+f^{-1}(\tfrac{1}{10})+\ldots+f^{-1}(\tfrac{9}{10})\leqslant\tfrac{99}{10}.$$

Очевидно, что сумма

$$\tfrac{1}{10}\left(f(\tfrac{1}{10})+f(\tfrac{2}{10})+\ldots+f(\tfrac{9}{10})\right)$$

равна сумме площадей изображенных на рисунке вертикальных прямоугольников, а сумма

$$\tfrac{1}{10}\left(f^{-1}(\tfrac{1}{10})+\ldots+f^{-1}(\tfrac{9}{10})\right)$$



равна сумме площадей горизонтальных прямоугольников. Осталось заметить, что все они лежат в единичном квадрате, не пересекаются и не задевают нижний левый квадратик размером $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$.

Еще одна аналогичная задача.

Задача 23. Докажите, что

$$9<\int_0^3\sqrt[4]{x^4+1}dx+\int_1^3\sqrt[4]{x^4-1}dx<9,0001\,.$$

Приведенные в предыдущих пунктах классические неравенства можно перенести на случай, в котором суммирование заменено на интегрирование. Пусть X – пространство с мерой μ и $f,g:X\to\mathbb{R}$ – измеримые функции. Предположим, что интегралы $A^p=\int_X|f|^p dx$ и $B^q=\int_X|g|^q dx$, где $p,q>0$, $1/p+1/q=1$, конечны. Поскольку при всяком $x\in X$ верно, что

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB}\leqslant\frac{|f(x)|^p}{pA^p}+\frac{|g(x)|^q}{qB^q}\ \text{(Юнг)},$$

то, проинтегрировав это неравенство по всему пространству, получим

$$\frac{1}{AB}\int_X |fg|d\mu \leqslant \frac{1}{pA^p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{qA^q}\int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда следует интегральный вариант неравенства Гельдера

$$\int_X |fg|d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}$$

Упражнение. Сформулируйте и докажите интегральный вариант неравенства Минковского.

В заключение этого пункта заметим, что интегральный вариант неравенства Коши–Буняковского (его называют неравенством Шварца) имеет тот же геометрический смысл, что и его конечномерный аналог

$$(f,g)_{L^2} \leqslant |f|_{L^2}|g|_{L^2}.$$

В случае, когда функции f и g непрерывны, можно провести рассуждение, аналогичное использованному при доказательстве неравенства Коши–Буняковского.

4.5. Неравенство Виртингера и изопериметрическая задача. В этом пункте мы установим неравенство между интегралом от функции и интегралом от ее производной.

Теорема 8 (Виртингер). Пусть f – это C^1-гладкая на отрезке $[0;2\pi]$ функция, причем $\int_0^{2\pi} f dx = 0$. Справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} f^2 \leqslant \int_0^{2\pi} (f')^2,$$

причем равенство выполняется лишь для функции $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Идея доказательства очень геометрична. Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ – ортонормированный базис в конечномерном пространстве, то для любого вектора x этого пространства имеет место разложение $x = \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k$ (здесь (x, y) – скалярное произведение), и, возведя это равенство в квадрат, получим, что $|x|^2 =$

$\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)^2$ ("теорема Пифагора"). Применим это рассуждение к пространству $L^2[0; 2\pi]$, состоящему из функций, интеграл от квадрата которых по отрезку $[0; 2\pi]$ конечен, скалярное произведение в нем определено формулой $(f, g) = \int_0^{2\pi} fg$ (конечность правой части этого неравенства – следствие неравенства Шварца). Тривиальное упражнение: функции

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx,$$
$$v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \ k = 1, 2, \dots,$$

образуют ортонормированную систему в этом пространстве. Обозначим через a_k, b_k коэффициенты Фурье функции f:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, u_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, u_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, u_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Фиксируем натуральное число n, пусть

$$g(x) = f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

так что

$$g = f - (f, u_0)u_0 - \sum_{k=1}^{n} ((f, u_k)u_k + (f, v_k)v_k) = f - f_n.$$

Упражнение. Докажите, что функция g ортогональна векторам u_0, u_k, v_k, $k = 1, 2, \dots$

Следовательно, $(g, f_n) = 0$, значит,

$$|f|_{L^2}^2 = (f, f) = (g + f_n, g + f_n) = |g|_{L^2}^2 + |f_n|_{L^2}^2,$$

откуда следует неравенство $|f_n|^2_{L^2} \leqslant |f|^2_{L^2}$, или

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant |f|^2_{L^2}.$$

Поскольку число n произвольно, то справедливо неравенство

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant |f|^2_{L^2},$$

в частности, ряд, стоящий в его правой части, сходящийся. Как доказывается в курсе математического (функционального) анализа, указанная система функций является полной, что равносильно следующему ее свойству:

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = |f|^2_{L^2} \text{ (равенство Парсеваля).}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Упражнение. Докажите, что если функция f дифференцируема и a_k, b_k – ее коэффициенты Фурье, то числа $a'_k = kb_k$ и $b'_k = -ka_k$ являются коэффициентами Фурье производной этой функции.

Итак, $a_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0$. Значит,

$$|f|^2_{L^2} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 b_k^2 + k^2 a_k^2) = |f'|^2_{L^2},$$

причем равенство имеет место только тогда, когда $a_k = b_k = 0$ при всех $k \geqslant 2$. Осталось заметить, что, опять-таки в силу полноты тригонометрической системы, в таком случае $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$. ■

Заметим, что достаточно было потребовать, чтобы функция f являлась кусочно-дифференцируемой.

Следствие. Если функция f дифференцируема на отрезке $[0; \pi/2]$ и $f(0) = 0$, то $\int_0^{\pi/2} f^2 \leqslant \int_0^{\pi/2} (f')^2$.

(Рассмотрите такую функцию g на отрезке $[0; 2\pi]$, что $g(x) = f(x), x \in [0; \pi/2]$, $g(x) = f(\pi - x), x \in [\pi/2; \pi]$, $g(x) = -f(x - \pi), x \in [\pi; 3\pi/2]$ и $g(x) = -f(2\pi - x)$ при $x \in [3\pi/2; 2\pi]$.)

Задача 24. Докажите, что интеграл $S = -\int_0^{2\pi} f'g$, где $f(t) = a\cos t$, $g(t) = b\sin t$, равен площади области, ограниченной кривой $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Теорема 9. Пусть гладкая простая замкнутая кривая длиной L ограничивает область, имеющую площадь A. Тогда $L^2 \geqslant 4\pi A$, причем равенство имеет место лишь если эта кривая – окружность.

Пусть $(x(s), y(s))$, $s \in [0; L]$ – натуральная параметризация данной кривой (так что $(\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$). Введем другую ее параметризацию $(\varphi(t), \psi(t))$, положив

$$\varphi(t) = x\left(\frac{Lt}{2\pi}\right), \ \psi(t) = y\left(\frac{Lt}{2\pi}\right), \ t \in [0, 2\pi].$$

Произведем параллельный перенос данной кривой так, чтобы $\int_0^{2\pi} \psi = 0$. По формуле Грина площадь, ограничиваемая кривой, находится по формуле $A = -\int_0^{2\pi} \varphi'\psi$ (предполагаем, что при обходе кривой область остается слева). Поскольку

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

то

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A = \int_0^{2\pi} \left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right) + 2\int_0^{2\pi} \varphi'\psi =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\varphi' + \psi)^2 + \int_0^{2\pi} \left((\psi')^2 - \psi^2\right) \geqslant 0$$

в силу неравенства Виртингера. Равенство имеет место, если $\psi(t) = a\cos t + b\sin t$, а $\varphi(t) = -\int(a\cos t + b\sin t)dt = x_0 + b\cos t - a\sin t$, т.е. если данная кривая – окружность. ∎

Следствие (изопериметрическое свойство окружности). Среди всех кусочно гладких простых замкнутых кривых фиксированной длины окружность ограничивает область наибольшей площади.

При изложении классических неравенств автор следовал книге [27], лишь слегка коснувшись их связи со свойством выпуклости функций (см. книгу Полиа и Сеге "Задачи и теоремы из анализа"). Здесь мы рассмотрим серию неравенств, приведенных в задаче 1, которые автор с определенной целью оставил без решений.

Эффективность преподавания во многом определяется тем, насколько в этот процесс вовлечены учащиеся. Всем, кто занимался преподаванием в математических кружках, хорошо известно, что задачи полезно давать сериями, и лучшие книги, посвященные задачам математических кружков, из таких серий и состоят. Конечно, любую последовательность задач можно назвать серией, и в школе задачи по математике обычно предлагаются не по одной. Наиболее распространены следующие типы серий. Первый – "частные случаи": учитель объяснил, как надо решать, к примеру, квадратные неравенства и дал набор примеров, в которых надо применить изложенный метод. Другой тип – "на идею": все предлагаемые задачи решаются при помощи одного и того же соображения. К примеру, все задачи п.1 данной главы можно рассматривать как серию задач на неравенство $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$ (располагать их, конечно, нужно по возрастанию технической сложности). Третий – "пошаговый подход": преподаватель формулирует ряд утверждений, следствием которых является непростой результат. Учащимся, так сказать, указывают путь, по которому они должны пройти, чтобы в итоге доказать интересное утверждение. Пример – неравенство 5) задачи 1; пункты а), б) и в) задачи 9.

Рассмотрим теперь такую серию: неравенства 13), 14), 12) задачи 1 (именно в такой последовательности!). Первое из них совсем простое. Затем учащиеся должны увидеть (?!), что, так как $(a+b-c)+(b+c-a)=2b$, то, сделав замену $u=(b+c-a)/2$, $v=(c+a-b)/2$, $w=(a+b-c)/2$ во втором неравенстве, мы получим первое! А эта замена и является ключевой идеей решения и последнего из приведенных неравенств (попробуйте доказать его, не используя этой замены). Такие серии автор называет "сериями-подсказками".

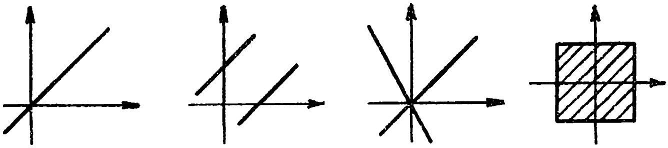
Глава 5

МНОЖЕСТВА, УРАВНЕНИЯ И МНОГОЧЛЕНЫ

5.1. Фигуры и их уравнения.

Задача 1. Нарисуйте на плоскости множества, заданные следующими уравнениями и неравенствами $x^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 2y - 1$; $x^2 + y^2 = 2xy$; $xy + 1 = x + y$; $x^2 + y^2 = 2x$; $x^2y + y^3 = 2xy$; $|x - y| = 1$; $x^2 + xy - 2y^2 = 0$; $y^2 \leqslant |x|$; $\max\{|x|, |y|\} \leqslant 1$; $|x + y| + |x - y| \leqslant 2$.

Некоторые ответы можно найти на следующих рисунках.



В процессе решения этой задачи приходилось постоянно использовать утверждения, общая формулировка которых дана в следующей теореме, которую можно с некоторым преувеличением и долей истины назвать основной теоремой аналитической геометрии.

Теорема 1. Пусть множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $f(x, y) = 0$, а множество $\mathcal{N}$ – уравнением $g(x, y) = 0$. Тогда:

1) уравнение $f(x, y)g(x, y) = 0$ задает объединение $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ этих множеств;

2) уравнение $f^2(x, y) + g^2(x, y) = 0$ и система $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ задают их пересечение $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

Напомним основное определение. Говорят, что множество $\mathcal{M}$ задано уравнением $f(x, y) = 0$ (неравенством $f(x, y) > 0$), если:

(i) координаты любой точки, принадлежащей данному множеству, удовлетворяют данному уравнению (неравенству);

(ii) для любой пары чисел (x, y), удовлетворяющей данному уравнению (неравенству), точка A с координатами (x, y) принадлежит множеству $\mathcal{M}$.

Приведем доказательство пункта 1) теоремы. Если точка $A(x_0, y_0) \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, то $A \in \mathcal{M}$ или $A \in \mathcal{N}$, значит, по пункту (i) определения $f(x_0, y_0) = 0$ или же $g(x_0, y_0) = 0$, поэтому

$f(x_0, y_0)g(x_0, y_0) = 0$, т.е. пара чисел x_0, y_0 – координаты точки A удовлетворяет уравнению $f(x,y)g(x,y) = 0$. Обратно, если $f(x_0, y_0)g(x_0, y_0) = 0$, то $f(x_0, y_0) = 0$ или $g(x_0, y_0) = 0$, тогда, в силу свойства (ii) определения, $A(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ или $A(x_0, y_0) \in \mathcal{N}$, т.е. $A \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. ■

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для множества, заданного неравенством $f(x,y)g(x,y) > 0$.

Упражнение. Найдите алгебраическое доказательство теоретико-множественной формулы $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$.

Две следующие задачи поставлены рядом не случайно.

Задача 2. Верно ли, что если $a > b$, $a, b \neq 0$, то: $1/a < 1/b$, $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, $a/b > 1$, $b/a < 1$, $a^3 - 3a > b^3 - 3b$?

Задача 3. Изобразите на координатной плоскости множества, заданные неравенствами: $1/x < 1/x$, $x^2 > y^2$, $x^3 > y^3$, $x/y > 1$, $y/x < 1$, $x^3 - 3x > y^3 - 3y$?

Вопрос, поставленный в первой из них, можно переформулировать следующим образом: верно ли, что полуплоскость, заданная неравенством $x > y$ (с удаленными осями координат), содержится в множестве, заданном соответствующим неравенством задачи 2? Изобразите, к примеру, множество, заданное неравенством $x/y > 1$, к которому, если его переписать в виде $(x - y)/y > 0$, применим аналог теоремы 1, сформулированный в упражнении выше.

Вообще, почти нетрудно видеть, что за исключением пары неравенств $x > y$ и $x^3 > y^3$ все множества, задаваемые неравенствами задачи 2, попарно различны. Слово “почти” относится к последнему неравенству, которое можно записать в виде $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) > 0$. Это неравенство мы разберем чуть позже (см. задачу 5), а пока еще одна задача, аналогичная задаче 1.

Задача 4. Изобразите на координатной плоскости множества, заданные слелующими неравенствами:

$\{x\} \leqslant \{y\}$, $\sin(x+y)\sin(x-y) \geqslant 0$, $|x| \leqslant |\sin y|$,

$(x^2 + y^2 - 4)\sqrt{1 - |x|} \leqslant 0$ ($\{\ \cdot\ \}$ – дробная часть числа).

Задача 5. Докажите, что множество, заданное неравенством $x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$:

а) симметрично относительно начала координат;

б) содержит круг радиусом $\sqrt{2}$;
в) содержится в круге радиусом $\sqrt{6}$;
г) содержится в квадрате со стороной 4.

а) Пары (x, y) и $(-x, -y)$ удовлетворяют данному неравенству одновременно, следовательно, точки $A(x, y)$ и $B(-x, -y)$, центрально-симметричные друг другу относительно начала координат, принадлежат данному множеству или нет одновременно, что и означает, что это множество центрально-симметрично относительно начала координат.

б), в) Поскольку $2|xy| \leqslant x^2+y^2$, то имеют место неравенства $(x^2+y^2)/2 \leqslant x^2+xy+y^2 \leqslant 3(x^2+y^2)/2$, поэтому, если $x^2+y^2 \leqslant 2$, то $x^2+xy+y^2 \leqslant 3$, а из неравенства $x^2+xy+y^2 \leqslant 3$ следует, что $x^2+y^2 \leqslant 6$.

г) Так как $x^2+xy+y^2 = 3x^2/4+(x/2+y)^2$, то, если $x^2+xy+y^2 \leqslant 3$, значит, $3x^2/4 \leqslant 3$, т.е. $|x| \leqslant 2$. Аналогично получаем и неравенство $|y| \leqslant 2$.

Тем, кто знаком с классификацией кривых второго порядка, ясно, что в задаче 5 рассматривалась фигура, ограниченная эллипсом. Сила же координатных рассуждений в том, что мы смогли при помощи простых алгебраических рассуждений получить некоторые свойства этой фигуры.

Задача 6. Пусть уравнение $f(x, y) = 0$ задает множество $\mathcal{M}$. Напишите уравнение множества, полученного из множества $\mathcal{M}$ при его: а) параллельном переносе на вектор $\mathbf{a}(k, l)$; б) центральной симметрии относительно точки $A(x_0, y_0)$; в) гомотетии с коэффициентом k и центром в начале координат.

Для того чтобы не ошибиться при решении этой и аналогичных задач, следует проводить точные рассуждения, использующие определения. Именно, в случае пункта в) точка $P'(x, y)$ принадлежит образу множества $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда точка P с координатами (X, Y), где $x = kX, y = kY$, т.е. точка $P(x/k, y/k)$, входит в это множество, т.е. когда $f(x/k, y/k) = 0$. Полученное уравнение и есть уравнение, задающее образ множества $\mathcal{M}$.

В заключение данного вводного пункта приведем обобщение так называемого “метода интервалов” решения неравенств. Для простоты ограничимся случаем, когда функции, входящие и левую часть неравенства, определены на всей координатной плоскости.

Теорема 2. Множество решений неравенства $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} > 0$, где $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, состоит из целых компонент связности дополнения в $\mathbb{R}^2$ множества $\mathcal{Z}$, заданного уравнением $f(x,y)g(x,y) = 0$. (Более просто: множество $\mathcal{Z}$ разбивает плоскость на части, каждая из которых или состоит целиком из решений данного неравенства, или не состоит.)

Свойство связности множества (понятие компоненты связности) – это одно из основных понятий топологии, являющей собой, так сказать, "общее учение о непрерывности". В данном случае можно использовать следующее определение.

Точки P и Q принадлежат одной компоненте связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$, если существует соединяющая их ломаная, лежащая в этом множестве, т.е. не пересекающаяся с множеством $\mathcal{Z}$.

Для доказательства теоремы 2 предположим, что (x_0, y_0) – решение данного неравенства и что точка $Q(\bar{x}, \bar{y})$ лежит в той же компоненте связности, что и точка $P(x_0, y_0)$.

Упражнение. Пусть $P = A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x', y')$ – Q – вершины ломаной, соединяющей точки P и Q. Задайте формулами такие функции $\varphi, \psi : [0;1] \to \mathbb{R}^2$, что $\varphi(0) = x_0$, $\psi(0) = x'$, $\varphi(1) = x_1$, $\psi(1) = y'$ и отображение $\Phi : t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ имеет данную ломаную своим образом.

(Функции φ и ψ могут быть взяты кусочно-линейными.)

Теперь рассмотрим функцию $u : [0;1] \to \mathbb{R}^2$, заданную формулой

$$u(t) = f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) g\left(\varphi(t), \psi(t)\right).$$

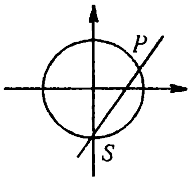
Так как $u(0) = f(x_0, y_0)g(x_0, y_0) > 0$, функция u непрерывна и не имеет нулей, то, в силу теоремы Коши, $u(t) > 0$ при всех $t \in [0;1]$, в частности, $u(1) = f(x', y')g(x', y') > 0$, т.е. (x', y') – решение данного неравенства. ■

5.2. Пифагоровы тройки и Великая теорема Ферма.

Задача 7. Докажите, что формулы $x = 2kmn$, $y = k(m^2 - n^2)$, $z = k(m^2 + n^2)$, где k, m, n – целые числа, задают все (с точностью до перестановок) целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

То, что приведенные формулы действительно определяют решения данного уравнения, проверяется простой подстановкой.

Лемма 1. Формулы $x = 2t/(t^2+1)$, $y = (t^2-1)/(t^2+1)$, где $t \in \mathbb{Q}$, определяют все рациональные решения уравнения $x^2 + y^2 = 1$, кроме $x = 0$, $y = -1$.



Рассмотрим прямую, проходящую через точку $S(0,1)$, обозначим через t ее угловой коэффициент. Нетрудно подсчитать, что точка P пересечения этой прямой с единичной окружностью (рисунок) имеет координаты $(2t/(t^2+1); (t^2-1)/(t^2+1))$. Теперь же ясно, что любому рациональному значению t соответствуют рациональные же координаты точки P, и обратно, если координаты точки P рациональны, то является рациональным и угловой коэффициент прямой SP. ■

Вернемся к задаче 7.

Пусть a, b, c – целочисленные решения уравнения $x^2+y^2 = z^2$. Будем предполагать, что $a, b \neq 0$. В силу леммы 1 найдется такая несократимая дробь $p/q = t$, что

$$\frac{a}{c} = \frac{2t}{t^2+1} = \frac{2pq}{p^2+q^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} = \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$$

Ясно, что числа p и q одновременно не являются четными.

Упражнение. Докажите, что если целые числа p и q взаимно просты и одно из них четно, то числа $2pq$ и p^2+q^2 также взаимно просты.

Следовательно, если одно из этих чисел четно, то дробь $2pq/(p^2+q^2)$ несократима, значит, $a = 2kpq$, $c = k(p^2+q^2)$, поэтому и $b = k(p^2-q^2)$. Предположим теперь, что $p = 2u+1, q = 2v+1$. Имеем

$$2pq = 2\left((u+v+1)^2 - (u-v)^2\right),$$
$$p^2-q^2 = 4(u-v)(u+v+1),$$
$$p^2+q^2 = 2\left((u+v+1)^2 + (u-v)^2\right),$$

таким образом, $a/c = (m^2-n^2)/(m^2+n^2)$, $b/c = 2mn/(m^2+n^2)$, где $m = u+v+1$, $n = u-v$, а $m^2+n^2 < u^2+v^2$. Если полученные числа m и n нечетны, то рассуждение можно продолжить.

Итак, лемма 1 дает формулу, по которой определяются все (кроме одного) рациональные решения уравнения $x^2 + y^2 = 1$. Казалось бы, естественное обобщение – найти аналогичные формулы для уравнения $x^n + y^n = 1$ – приводит к Великой теореме Ферма, которая равносильна утверждению о том, что если $n > 3$, то кривая $x^n + y^n = 1$ не проходит ни через одну точку с рациональными координатами. Естественно, что теорему Ферма мы доказать не сможем, однако докажем другое утверждение [29].

Теорема 3. Кривая $x^n + y^n = 1$ не имеет рациональной параметризации (более того: не существует таких дробно-рациональных функций $p(t)/r(t)$, $q(t)/r(t)$, которые обращают уравнение этой кривой в равенство).

Предположим противное, что существуют такие многочлены $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$, что точки с координатами $(p(t)/r(t), q(t)/r(t))$ лежат на кривой $x^n + y^n = 1$. Предполагаем, что эти многочлены в совокупности не имеют общего делителя. Поскольку

$$p^n(t) + q^n(t) - r^n(t) = 0,$$

то, продифференцировав это тождество, получим

$$p'(t)p^{n-1}(t) + q'(t)q^{n-1}(t) - r'(t)r^{n-1}(t) = 0.$$

Положим $x = p^{n-1}$, $y = q^{n-1}$, $z = r^{n-1}$. Поскольку всякое решение системы

$$\begin{cases} px + qy - rz = 0, \\ p'x + q'y - r'z = 0 \end{cases}$$

пропорционально тройке $(q'r - qr', r'p - rp', p'q - pq')$, то найдутся такие взаимно простые многочлены f и g, что

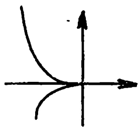
$$p^{n-1} = \frac{f}{g}(q'r - qr'), \quad q^{n-1} = \frac{f}{g}(r'p - rp'), \quad r^{n-1} = \frac{f}{g}(p'q - pq').$$

Поскольку многочлены p, q, r не имеют в совокупности общего делителя, то многочлены $p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1}$ их также не имеют, следовательно, $f(t) = 1$. Пусть k, l, m – степени многочленов p, q, r соответственно. Предположим для определенности, что $k \geqslant l \geqslant m$. Так как $q'r - qr' = gp^{n-1}$, то степень многочлена p^{n-1} не превосходит степени многочлена $q'r - qr'$, которая, в свою очередь, не больше $l + m - 1$. Получаем неравенство $(n-1)k \leqslant l + m - 1$, которое неверно, если $n \geqslant 3$. ∎

Параметрическое задание множеств может появиться совершенно естественным образом при решении и элементарных задач.

Задача 8. Изобразите на плоскости множество всех таких пар (a, b), что уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет два корня.

Пусть t, t, u – корни рассматриваемого уравнения. Поскольку по теореме Безу $x^3 + ax + b = (x-t)^2(x-u)$ (t - корень кратности два), то $2t + u = 0$, $t^2 + 2ut = a$ и $b = -ut^2$, откуда $a = -3t^2$ и $b = 2t^3$. Таким образом, искомое множество есть множество пар $(-3t^2, 2t^3), t \in \mathbb{R}$. Найдем его уравнение. Если $b = 2t^3$, то $a = -3t^2$ тогда и только тогда, когда $a^3 = -27t^6 = -\frac{27}{4}b^2$, т.е. искомое множество задается уравнением $4a^3 + 27b^2 = 0$ (рисунок).



Упражнение. Докажите, что число вещественных корней уравнения $x^3 + ax + b = 0$ (один или три) определяется знаком выражения $-4a^3 - 27b^2$.

(Наиболее простой подход – путем исследования функции $y = x^3 + ax$, попробуйте также найти и чисто алгебраическое решение.)

Иногда геометрическая интерпретация помогает осознать суть формулы. Приведем обобщение утверждения леммы 1.

Лемма 2. Подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$ приводит к рациональной параметризации части кривой $y^2 = ax^2 + bx + c$, $c > 0$.

Уравнение $y = tx + \sqrt{c}$ определяет прямую, проходящую через точку $(0, \sqrt{c})$, лежащую на данной кривой. Прямая, заданная этим уравнением, пересекает эту кривую еще в одной точке, имеем: $(tx + \sqrt{c})^2 = ax^2 + bx + c$ или $t^2x^2 + 2t\sqrt{c}x = ax^2 + bx$, откуда $x = 2t\sqrt{c}b/(a - t^2)$, а $y = \left((2 - \sqrt{c})t^2 + a\sqrt{c}\right)/(a - t^2)$. ∎

Упражнение. Укажите геометрический смысл подстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$, $a > 0$.

Следствие. Интеграл $\int P\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, где $P(x, y)$ - многочлен, выражается через элементарные функции.

Действительно, рассмотрим рациональную параметризацию $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ кривой $y^2 = ax^2 + bx + c$. Замена $x = \varphi(t)$

сводит данный интеграл к интегралу $\int P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt$ от рациональной функции. ■

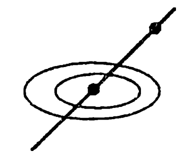
Задача 9. Найдите какую-нибудь рациональную параметризацию кривой $x^3 + y^3 = 3xy$ и нарисуйте эту кривую.

В заключение данного пункта приведем один пример и одно рассуждение.

Нетрудно видеть, что уравнение

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = 0$$

задает на плоскости две вложенных одна в другую окружности. Рассмотрим общее уравнение $p(x, y) = 0$, где p – многочлен степени 4. Предположим, что кривая, заданная эти уравнением, содержит пару вложенных одна в другую замкнутых кривых (так называемых овалов). Докажем, что тогда кривая совпадает с объединением этих овалов.



Предположим обратное, т.е. что существует точка, не лежащая на этих овалах, координаты которой удовлетворяют уравнению $p(x, y) = 0$. Пусть $ax + by + c = 0$ – уравнение прямой, проходящей через эту точку и проходящей также через точку области, ограниченной внутренним овалом (рисунок). Ясно, что построенная прямая имеет с данной кривой по крайней мере пять общих точек. С другой стороны, точки их пересечения суть решения системы

$$\begin{cases} p(x, y) = 0, \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Подставляя $y = -(ax + c)/b$ в уравнение кривой, получим уравнение $q(x) = 0$, где q – многочлен степени, не большей четырех, поэтому это уравнение не может иметь более четырех решений.

5.3. Числа и многочлены.

Задача 10. Упростите выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$

где числа a, b, c попарно различны.

Обозначим данное квадратичное выражение через $P(x)$. Не трудно видеть, что $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Следовательно, уравнение $P(x) = 1$ имеет три различных корня, что возможно только если многочлен P тождественно равен единице (почему?).

В решении задачи 10 мы использовали частный случай следующего утверждения.

Теорема 4. Если многочлен $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет $n+1$ корень, то все его коэффициенты равны нулю.

Обычное доказательство этой теоремы использует теорему Безу. Приведем здесь другое рассуждение.

Если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – корни многочлена p, то

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ \ldots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \end{cases}$$

поэтому, если предположить, что среди коэффициентов данного многочлена имеются отличные от нуля, то однородная линейная система с матрицей $X = \left(x_i^{n-j}\right)_{i,j=0}^{n}$ будет иметь нетривиальное решение. А это невозможно, поскольку определитель этой матрицы – определитель Вандермонда – отличен от нуля:

$$\det X = \prod_{0 \leqslant l < k \leqslant n} (x_l - x_k) \neq 0. \blacksquare$$

Упражнение. Докажите, что для совпадения двух многочленов от двух и более переменных недостаточно их совпадения на множестве, состоящем из N точек, насколько бы велико ни было число N.

Следствие. Если при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ совпадают значения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многочленов, то $f = g$ (т.е. совпадают коэффициенты этих многочленов).

Упражнение. Докажите это следствие.

Сравните два решения следующей задачи.

Задача 11. Докажите, что если $abc = 1$ и $1/a + 1/b + 1/c = a + b + c$, то одно из чисел a, b, c равно единице.

Первое решение. Имеем

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - 1 + ab + bc + ca - (a+b+c) =$$
$$abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - (a+b+c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a+b+c) = 0,$$

поэтому либо $a = 1$, либо $b = 1$, или же $c = 1$.

Второе решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

корнями которого являются данные числа. Так как $abc = 1$ и $a + b + c = ab + bc + ca$, то

$$P(x) = x^3 - Ax^2 + Ax - 1 = (x-1)(x^2 + (1-A)x + 1),$$

значит, один из корней многочлена равен единице.

Задача 12. Докажите, что: а) многочлен $x^3 - 7x^2 + 5x - 11$ не имеет отрицательных корней; б) если a, b, c – вещественные числа и abc, $ab + bc + ca$, $a + b + c > 0$, то и сами числа a, b, c положительны.

Пункт а) доказывается от противного. Для доказательства второго пункта можно рассмотреть тот же многочлен P, что и в предыдущей задаче, и применить к нему рассуждение пункта а)

5.4. Симметрические многочлены.

Задача 13. Найдите сумму кубов корней уравнений:
1) $x^2 - 5x - 7 = 0$; 2) $2x^3 - 3x^2 - 12x - 1 = 0$.

1) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = 5(5^2 + 21) = 230$, или по-другому:

$$x_1^3 + x_2^3 = 5(x_1^2 + x_2^2) + 7(x_1 + x_2) =$$
$$= 5\,(5(x_1 + x_2) + 14) + 7(x_1 + x_2) = 32(x_1 + x_2) + 70 = 230,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{1}{2}\left(3(x_1^2 + x_2^2 + x_3)^2 + 12(x_1 + x_2 + x_3) + 3\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(3(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \right.$$
$$\left. + 12(x_1 + x_2 + x_3) + 3\right) = \ldots,$$

опять по теореме Виета.

2) Аналог первого решения пункта 1) найти в данном случае более затруднительно, но возможно:

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 + z^3 = \\
&= 3xyz + (x+y+z)\left((x+y+z)^2 - 3(xe + yz + zx)\right) = \\
&= (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz.
\end{aligned}$$

Упражнение. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 + z^4 = (x+y+z)^4 - 4(x+y+z)^2(xy+yz+zx)+ \\
+ 2(xy+yz+zx)^2 + 4xyz(x+y+z).
\end{aligned}$$

Задача 14. Докажите, что если $2(a^8+b^8+c^8) = (a^4+b^4+c^4)^2$, то треугольник со сторонами a, b, c прямоугольный.

($(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^4+y^4+z^4) = (x+y+z)(x+y-z)\times$ $(y+z-x)(z+x-y)$.)

Введем общее понятие элементарного симметрического многочлена. Рассмотрим следующий многочлен от переменных $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$: $S(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, разложив который по степеням x, получим

$$S(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k s_k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Многочлены $s_k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ и называются элементарными симметрическими многочленами от n переменных.

Вообще многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрическим, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$$

для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ набора $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Упражнение. Докажите, что введенные многочлены $s_k^{(n)}$ являются симметрическими.

Очевидно, что для любого многочлена $F(y_1, \ldots, y_k)$ многочлен

$$F\left(s_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

является симметрическим. Обратное утверждение не является тривиальным [13].

Теорема 5. Если многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ симметрический, то существует единственный многочлен $F(y_1, \dots, y_k)$, такой, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = F\left(s_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\right)$$

(иначе говоря, кольцо всех симметрических многочленов является кольцом полиномов от элементарных симметрических многочленов).

Существование многочлена F докажем индукцией по числу n его переменных и его степени m. При $n = 1$ или $m = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что теорема верна для многочленов от не более чем $n - 1$ переменных и многочленов от n переменных, степень которых меньше m.

Рассмотрим многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ степени m. По предположению найдется такой многочлен $g_1(y_1, \dots, y_{n-1})$, что

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \\ = g_1\left(s_1^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, s_{n-1}^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1})\right).$$

Рассмотрим разность

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \\ - g_1\left(s_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, s_{n-1}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\right).$$

Поскольку $f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, то многочлен f_1 делится на x_n, а так как он является симметрическим, то

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n h(x_1, \dots, x_n) = \\ = s_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n) h(x_1, \dots, x_n).$$

Так как $\deg h < m$, то многочлен h, а значит, и многочлен f являются многочленами от $s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)}$.

Для доказательства единственности такого многочлена F достаточно показать алгебраическую независимость элементарных симметрических многочленов, т.е. доказать, что многочлен

$$F\left(s_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\right)$$

является нулевым лишь в случае, когда сам многочлен F нулевой.

Предположим, что это утверждение верно для всех многочленов от менее чем n переменных. Пусть $g(y_1, \dots, y_n)$ – многочлен наименьшей степени, такой, что

$$g\left(s_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\right) = 0.$$

Запишем этот многочлен в виде

$$g(y_1 \dots, y_n) = g_0(y_1, \dots, y_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n} g_k(y_1, \dots, y_{n-1}) y_n^k.$$

Упражнение. Докажите, что многочлен g_0 ненулевой.

Теперь, подставив $x_n = 0$ в тождество $g(s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)}) = 0$, получим $g_0(s_1^{(n-1)}, \dots, s_{n-1}^{(n-1)}) = 0$. В силу индуктивного предположения отсюда следует равенство $g_0 = 0$. ∎

Следствие. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен, а $t_1, \dots, t_n$ – корни уравнения $x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, то найдется такой многочлен $F(y_1, \dots, y_n)$, что

$$f(t_1, \dots, t_n) = F(a_1, \dots, a_n),$$

причем коэффициенты многочлена F лежат в том же кольце (поле), что и коэффициенты многочлена f.

Задача 15. Докажите, что если число $x + x^{-1}$ целое, то при любом $k \in \mathbb{Z}$ число $x^k + x^{-k}$ также является целым.

(Воспользуйтесь тождеством: $(a^{k-1} + b^{k-1})(a + b) = a^k + b^k + ab(a^{k-2} + b^{k-2})$.)

Идеей решения этой задачи можно воспользоваться для представления многочленов $p_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ как многочленов от элементарных симметрических функций.

Задача 16. Докажите, что если число a нечетно, а x, y – корни многочлена $t^2 + at - 1$, то числа $x^4 + y^4$, $x^5 + y^5$ являются целыми и взаимно простыми.

5.5. Дискриминант и результант. Применим доказанную в предыдущем пункте теорему, точнее ее следствие, к симметрическому многочлену

$$\Delta_n^2 = \left(\det(x_i^j)_{i=1,\dots,n}^{j=0,\dots,n-1}\right)^2,$$

являющемуся квадратом определителя Вандермонда.

Назовем $D_f(y_1,\dots,y_n)$ дискриминантным многочленом степени n, если $D_f(s_1^{(n)},\dots,s_n^{(n)}) = \Delta_n^2$.

Теорема 6. Многочлен $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ имеет кратные корни (в поле комплексных чисел) тогда и только тогда, когда $D_f(-a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n) = 0$.

Действительно, если $t_1,\dots,t_n$ – корни многочлена f, то

$$D_f(-a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n) = \Delta^2(t_1,\dots,t_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_j - t_i)^2,$$

последнее выражение равно нулю лишь тогда, когда среди корней имеются равные. ■

В задаче 6 было получено условие, при выполнении которого многочлен $x^3 + ax + b$ имеет кратные корни. Покажем, что $D(a,b) = -4a^3 - 27b^2$ – это и есть в данном случае дискриминантный многочлен.

Имеем:

$$(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & t_1+t_2+t_3 & t_1^2+t_2^2+t_3^2 \\ t_1+t_2+t_3 & t_1^2+t_2^2+t_3^2 & t_1^3+t_2^3+t_3^3 \\ t_1^2+t_2^2+t_3^2 & t_1^3+t_2^3+t_3^3 & t_1^4+t_2^4+t_3^4 \end{vmatrix}.$$

Если $t_1+t_2+t_3 = 0$, то $t_1^3+t_2^3+t_3^3 = 3t_1t_2t_3 = -3b$, $t_1^2+t_2^2+t_3^2 = -2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) = -2a$ и $t_1^4+t_2^4+t_3^4 = \frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2+t_3^2) = 2a^2$. Таким образом,

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2a \\ 0 & -2a & -3b \\ -2a & -3b & 2a^2 \end{vmatrix} = -4a^3 - 27b^2.$$

Задача 17. При каких значениях параметра a многочлены x^2+2x+a и x^2+ax+2 имеют общий действительный корень?

Ответ: $a = -3$.

Задача 18. Найдите условие на коэффициенты многочленов $x^2+a_1x+a_2$ и $x^2+b_1x+b_2$, при котором эти многочлены имеют хотя бы один общий корень в поле комплексных чисел.

Если x – общий корень этих многочленов, то вектор $(x^2, x, 1)$ есть решение системы

$$\begin{cases} u + a_1 v + a_2 w = 0, \\ u + b_1 v + b_2 w = 0, \end{cases}$$

поэтому он параллелен вектору $(a_1b_2 - a_2b_1, a_2 - b_2, b_1 - a_1)$, откуда и получаем условие $(b_2 - a_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1 - a_1)$.

Найти кустарным способом соответствующее условие для многочленов высших степеней несравненно тяжелее. Введем следующее определение.

Результантом $R_{f,g}$ многочленов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k,$$

степеней n и k называется следующий определитель размером $n+k$, первые k строк которого составлены из коэффициентов первого многочлена, а последние n строк – из коэффициентов второго:

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \ldots & \ldots & & a_n \\ b_0 & & b_k & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & b_k \end{vmatrix}.$$

Теорема 7. Справедливы утверждения:

1) $R_{f,g} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_0 = b_0 = 0$ или же многочлены f и g имеют общий множитель;

2) $R_{f,g} = a_0^k b_0^n \prod\limits_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}} (\alpha_i - \beta_j)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена f, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ – корни g (кратный корень выписывается столько раз, какова его кратность);

3) $R_{f,f'} = a_0(-1)^{n(n-1)/2}D_f$ (здесь f' – производная f, а под дискриминантом в случае, когда коэффициент при x^n отличен от единицы, понимаем произведение $a_0^{2n-2}\Delta_n^2$).

1) Покажем прежде всего, что $a_0 = b_0 = 0$ или многочлены f и g имеют общий множитель в том и только том случае, когда существуют такие одновременно не равные нулю многочлены f_1 и g_1, что $fg_1 + f_1g = 0$, а $\deg f_1 < n$, $\deg g_1 < k$.

Если $a_0 = b_0 = 0$, то можно положить $f_1 = f, g_1 = -g$. Пусть h – наименьший общий делитель f и g, тогда $f = hf_1, g = hg_1$.

Упражнение. Докажите обратную импликацию.

Пусть $f_1 = c_0x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}$, $g_1 = d_0x^{k-1} + \ldots + d_{k-1}$. Выписав условия равенства нулю многочлена $fg_1 + f_1g$, получим линейную систему с матрицей, определитель которой равен результанту многочленов f и g, т.е. результант равен нулю в том и только том случае, когда такие многочлены f_1 и g_1 существуют.

Перейдем к пункту 2).

Упражнение. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_n & 0 & & 0 \\ 0 & a_0 & & \ldots & a_n & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & a_n \\ b_0 & \ldots & b_k & 0 & & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{n+k-1} & & \alpha_n^{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & & \alpha_n \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1^{k-1}f(\beta_1) & \ldots & \beta_k^{k-1}f(\beta_k) & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\beta_1) & & f(\beta_k) & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \alpha_1^{n-1}g(\alpha_1) & & \alpha_n^{n-1}g(\alpha_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & g(\alpha_1) & \ldots & g(\alpha_n) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$R_{f,g}\prod_{i,j}(\beta_j - \alpha_i)\prod_{i>j}(\beta_j - \beta_i)\prod_{i>j}(\alpha_j - \alpha_i) =$$

$$= \prod_j f(\beta_j)\prod_i g(\alpha_i)\prod_{i>j}(\beta_j - \beta_i)\prod_{i>j}(\alpha_j - \alpha_i).$$

Предположим, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_k$ попарно различны, тогда, так как

$$f(\beta_j) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i), \quad g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{k} (\alpha_i - \beta_j),$$

то

$$R_{f,g} \prod_{i,j} (\beta_j - \alpha_i) = a_0^k b_0^n \prod_{i,j} (\beta_j - \alpha_i) \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j),$$

откуда и следует требуемое равенство.

Теперь рассмотрим общий случай. Введем на пространстве $\mathbb{R}^{n+k}$ две функции, одна из которых сопоставляет точке $(\alpha_1, \ldots, \beta_k)$ правую часть доказываемого равенства, а другая – результант многочленов f и g, корнями которых являются наборы чисел α_i и β_j (считаем, что $a_0 = b_0 = 1$). Уравнения $\alpha_i = \alpha_j$ и $\beta_k = \beta_l$ определяют в $\mathbb{R}^{n+k}$ нигде не плотные множества. Поскольку доказано, что формула имеет место на дополнении их объединения, т.е. на всюду плотном в $\mathbb{R}^{n+k}$ множестве, и поскольку введенные функции непрерывны, то они совпадают всюду в $\mathbb{R}^{n+k}$, т.е. формула верна для любых многочленов.

Докажем 3). Согласно утверждению предыдущего пункта

$$R_{f,f'} = a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i),$$

но, так как

$$f'(x) = a_0 \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\prod_{i \neq j} (x - \alpha_i) \Bigr),$$

то $f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$, следовательно,

$$R_{f,f'} = a_0^{2n-1} \prod_{i=1}^{n} \Bigl(\prod_{j \neq i} (\alpha_- \alpha_j) \Bigr) =$$

$$= a_0 (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{2n-2} \prod_{j<i} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = a_0 (-1)^{n(n-1)/2} D_f. \ \blacksquare$$

Упражнение. Докажите, что многочлен

$$R = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_0 b_1 - a_1 b_0)$$

является результантом квадратных трехчленов $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ и $g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$.

5.6. Метод исключения и теорема Безу.

Задача 19. Найдите многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является: а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

а) Если $t=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, то $t^2-2t\sqrt{2}+2=3$, $t^2-1=2t\sqrt{2}$ и $t^4-10t^2+1=0$.

Многочлен в случае б): $t^6-6t^4-4t^3+12t^2-24t-4$.

Общий подход к решению подобных задач будет изложен далее, а пока еще одна задача.

Задача 20. Докажите, что если две кривые второго порядка на плоскости имеют конечное число общих точек, то этих точек не более четырех.

Приведем два решения. В первом никакая теория не используется.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} P(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \\ Q(x,y)=b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_{13}x+2b_{23}y+b_{33}=0. \end{cases}$$

Поскольку в разности $b_{11}P(x,y)-a_{11}Q(x,y)$ отсутствует член с x^2, то из уравнения $b_{11}P(x,y)-a_{11}Q(x,y)=0$ можно выразить x через y: $x=h_2(y)/h_1(y)$, где $\deg h_2\leqslant 2$ и $\deg h_1\leqslant 1$. Подставив полученное выражение в первое уравнение, получим уравнение вида $r(y)=0$, где $\deg r\leqslant 4$.

Теперь поступим по-другому. Запишем многочлены P и Q по степеням x:

$$P(x,y)=p_0(y)x^2+p_1(y)x+p_2(y),\ Q(x,y)=q_0(y)x^2+q_1(y)x+q_2(y).$$

Если $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$, то трехчлены $P(x,y_0)$ и $Q(x,y_0)$ имеют общий корень, следовательно, их результант равен нулю, поэтому число y_0 – корень многочлена

$$\begin{aligned}&(p_0(y)q_2(y)-p_2(y)q_0(y))^2-\\ &\qquad -(p_1(y)q_2(y)-p_2(y)q_1(y)(p_0(y)q_1(y)-p_1(y)q_0(y)),\end{aligned}$$

степень которого не более четырех.

(Заметим, что поворотом осей координат можно добиться, чтобы никакие две точки пересечения этих кривых не попадали на одну прямую $x=y_0$.)

Теорема 8 (Безу). Если многочлены $f(x,y)$ и $g(x,y)$ не имеют нетривиального общего множителя, то система

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

имеет не более nk решений, где n и k – степени этих многочленов.

Следствие. Кривая четвертого порядка не может состоять более чем из четырех овалов.

Предположим противное, что уравнению $p_4(x,y) = 0$ кроме четырех овалов удовлетворяют еще координаты некоторой точки M. Ясно, что все эти овалы лежат вне друг друга (см. п. 5.2). Выберем по точке A, B, C, D внутри каждого из них и пусть уравнение $q_2(x,y) = 0$ определяет кривую, на которой лежат эти точки и точка M. Из геометрических соображений ясно, что построенная кривая и исходная имеют не менее девяти общих точек, чего не может быть по теореме Безу.

Упражнение. Докажите, что если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то кривая, заданная уравнением $2x^4+2y^4+5x^2y^2-3x^2-3y^2+1+\varepsilon=0$, состоит из четырех отдельных кусков.

$(2x^4+2y^4+5x^2y^2-3x^2-3y^2+1=(x^2+2y^2-1)(2x^2+y^2-1).)$

Заметим, что мы пока не можем доказать, что она будет состоять из четырех овалов, смотрите далее пункт 9.7.

Доказательство теоремы Безу оставлено читателю в качестве упражнения. Идея этого доказательства была только что изложена во втором решении задачи 20, поэтому, вместо того чтобы излагать общее рассуждение, приведем еще одно решение задачи 19.

Итак, пусть $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$, $z=x+y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогда $x^2=2$, $y^2=3$, $x+y=z$, т.е. $x^2=2$, $(z-x)^2=x^2-2xz+z^2=3$. Таким образом, уравнения $x^2-2=0$ и $x^2-2xz+z^2-3=0$ имеют общий корень. Составим результант полученных многочленов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2z & z^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & -2z & z^2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2z & z^2-1 & 0 \\ 1 & -2z & z^2-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (z^2-1)(z^2-3)-8z^2+2(z^2-1) = z^4-10z^2+1,$$

корнем которого и является число z.

Приведем теперь общую формулировку.

Теорема 9. Пусть $f(x)$, $g(y)$, $h(x,y)$ – многочлены с рациональными коэффициентами. Если число x – корень первого из них, y – корень второго, а $z = h(x,y)$, то существует многочлен p с рациональными коэффициентами, корнем которого является число z.

Построение такого многочлена проводится "исключением" x, y из системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(y) = 0, \\ z = h(x,y) \end{cases}$$

и может быть проведено по изложенной выше схеме. Если же доказывать теорему так, как она сформулирована, т.е. доказывать лишь существование многочлена p, то можно поступить по-другому.

Будем рассматривать подполя поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Лемма 3. Если число α является корнем некоторого многочлена p с рациональными коэффициентами, то множество

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{\, q(\alpha) \mid q \in \mathbb{Q}[t] \,\}$$

является подполем $\mathbb{C}$.

Ясно, что сложение, умножение и разность не выводят из множества $\mathbb{Q}(\alpha)$. Таким образом, нужно доказать, что для любого $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ число $1/\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Пусть $f \in \mathbb{Q}[t]$ – многочлен наименьшей степени, корнем которого является число α. Разделим p на многочлен f с остатком: $p(t) = d(t)f(t) + r(t)$, откуда $\beta = p(\alpha) = d(\alpha)f(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha) \neq 0$, здесь $\deg r < \deg f = n$.

Упражнение. Докажите, что многочлен f неприводим над $\mathbb{Q}$, т.е. не раскладывается в произведение нетривиальных многочленов с рациональными коэффициентами.

Следовательно, f не имеет нетривиальных делителей, значит, f и r взаимно просты, поэтому существуют такие многочлены $A, B \in \mathbb{Q}[t]$, что $Af + Br = 1$, откуда $A(\alpha)f(\alpha) + B(\alpha)r(\alpha) = 1$, т.е. $B(\alpha)\beta = 1$. Таким образом, $B(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ – обратный к β элемент. ∎

Упражнение. Докажите, что поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ является векторным пространством над $\mathbb{Q}$ размерности $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = \deg f$.

В доказательстве леммы 3 не было использовано никаких особых свойств поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Если β – еще один корень какого-то многочлена, то нетрудно видеть, что множество

$$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha)(\beta) = \{q(\beta) \mid q \in \mathbb{Q}(\alpha)[t]\} = \{s(\alpha, \beta) \mid s \in \mathbb{Q}[t, u]\}$$

также является полем.

Лемма 4. Множество $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ является конечномерным векторным пространством над $\mathbb{Q}$.

Действительно, $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ конечномерно над $\mathbb{Q}(\alpha)$, которое в свою очередь является конечномерным пространством над $\mathbb{Q}$.

Упражнение. Закончите доказательство данной леммы. ∎

Докажем теорему 9. Пусть $z = h(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y)$ и $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x, y) = N$. Так как в наборе $1, z, \ldots, z^N$ имеется $N + 1$ элемент векторного пространства размерности N, то эти элементы линейно зависимы, т.е. найдутся такие числа $a_i \in \mathbb{Q}$, что $\sum_{i=0}^{N} a_i z^i = 0$, так что $p(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i$ – искомый многочлен. ∎

5.7. Теорема Безу и конечные поля. В данном пункте будет доказано следующее интересное утверждение, которое к тому же потребуется нам в главе 7.

Теорема 10. Мультипликативная группа $F^* = F \setminus 0$ конечного поля F является циклической.

Пусть R – область целостности, т.е. кольцо без делителей нуля. Ее характеристикой называется следующее натуральное число: $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot 1 = 0\}$. Если $k \cdot 1 \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то говорят, что характеристика поля равна нулю. Заметим, что здесь $k \notin F$ и $k \cdot 1 = 1 + \ldots + 1$ (сумма k слагаемых), так что равенство $p \cdot 1 = 0$ не противоречит отсутствию делителей нуля в рассматриваемом кольце.

Упражнение. Докажите, что характеристика области целостности является простым числом.

Лемма 5. Пусть R – конечная область целостности характеристики p. Тогда $|R| = p^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, нетрудно видеть, что R – векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_p$. Если n – его размерность над этим полем, то $|R| = p^n$. ■

Вспомним теперь деление многочленов.

Задача 21. Известно, что остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$ и $x+1$ равны, соответственно, 3 и -1. Найдите остаток от деления этого многочлена на $x^2 - x - 2$.

По условию $P(x) = (x-2)d_1(x) + 3$ и $P(x) = (x+1)d_2(x) + 1$, подставляя в эти равенства, соответственно, $x = 2$ и $x = -1$, получим, что $P(2) = 3$ и $P(-1) = 1$. Далее,

$$P(x) = (x^2 - x - 2)d(x) + ax + b = (x-2)(x+1)d(x) + ax + b,$$

откуда $2a + b = P(2) = 3$ и $-a + b = P(-1) = 1$. Решив систему

$$\begin{cases} 2a + b = 3, \\ -a + b = 1, \end{cases}$$

получим ответ.

Обычный процесс деления многочленов "в столбик" можно провести и тогда, когда коэффициенты многочленов лежат в произвольном поле. Как и в случае обычных числовых полей, элемент $c \in F$ является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $x - c$. В качестве следствия получаем, что многочлен $f \in F[x]$ степени n имеет в F не более n корней.

Предположим, что F – конечное поле характеристики p и $|F| = p^n$. Положим $q = p^n - 1$.

Лемма 6. Если r – делитель числа q, то многочлен $x^r - 1$ имеет ровно r корней в поле F.

Поскольку мультипликативная группа F^* имеет порядок q, то $x^q = 1$, значит, уравнение $x^q - 1 = 0$ имеет в поле F q различных корней. Далее, $x^q - 1 = (x^r - 1)h(x)$, где $\deg h = q - r$. Так как каждый из многочленов $x^r - 1$ и $h(x)$ имеет в F не более r и $q - r$ корней соответственно, то число корней уравнения $x^r - 1 = 0$ равно r. ■

Теорема 10 следует теперь из такого теоретико-группового утверждения.

Лемма 7. Пусть G – коммутативная группа порядка q. Предположим, что для каждого делителя r числа q в этой группе имеются ровно r таких элементов g, что $g^r = 1$. Тогда группа G циклическая.

Разложим число q в произведение степеней простых чисел: $q = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$. По предположению

$$\forall i = 1, \dots, k \ \exists g_i \in G\colon \ g_i^{p_i^{m_i}} = 1, \ g_i^{p_i^{m_i - 1}} \neq 1.$$

Ясно, что каждый из элементов g_i имеет порядок $p_i^{m_i}$. Рассмотрим элемент $g = g_1 \dots g_k$ и докажем, что его порядок равен q.

Предположим противное, т.е. $g^t = 1$, где $t = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $n_i \leqslant m_i$ и хотя бы при одном значении i имеет место строгое неравенство. Пусть, для определенности, $n_1 < m_1$, положим $u = p_1^{n_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$. Тогда

$$1 = g^u = g_1^{p_1^{n_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}} = g_1^u,$$

откуда следует, что q – делитель числа u, что невозможно, так как $n_1 < m_1$. ■

Подход к обучению решения уравнений, а особенно – неравенств, связанный с изображением множеств на плоскости, обладает, с точки зрения преподавания, многими достоинствами. Допущенные учащимися ошибки очень наглядны, буквально "бросаются в глаза" – настолько разными могут оказаться полученные картинки. В отличие от обычных неравенств и уравнений, усложнение которых обычно достигается за счет большей громоздкости входящих в них выражений, даже очень простые по виду неравенства "с x и y" (которых можно придумать неограниченно много) часто приводят к неожиданым и симпатичным картинкам. Никаких новых методов, по сравнению с решением уравнений (неравенств) на прямой, использовать не нужно, и, что очень важно, при изображении множеств учащиеся волей-неволей должны, кроме преобразования формул, проводить и некоторые рассуждения. Логических же идей совсем немного – основные сформулированы в теоремах 1 и 3. Последнее, что хочется отметить – это широчайшие возможности для учителя в составлении серий задач.

Прокомментируем теорему 2. Тривиальное замечание, которое тем не менее часто упускается из виду, состоит в том, что если график функции

f трактовать как множество, заданное уравнением $y=f(x)$, или $y-f(x)=0$, то нет никакой разницы, к примеру, между сдвигами этого графика на a единиц вдоль оси Ox и вдоль оси Oy. В обоих случаях следует вычесть a из соответствующей переменной в уравнении, получив, соответственно, уравнения $y-f(x-a)=0$, т.е. $y=f(x-a)$, и $y-a-f(x)=0$ или $y=f(x)+a$! Очень существенно при этом постоянно проводить "функциональный" подход в решении уравнений и неравенств, в отличие от чисто алгебраического, в котором основное – применить нужную формулу.

Однако же не стоит недооценивать алгебру. Никакой другой метод, кроме тренировки в разложении на множители алгебраических выражений, не вырабатывает "чувства формул", привычки в преобразовании сколь угодно запутанных выражений. Далее, сколько интересных задач связано с такими достаточно простыми формулами, как формулы Виета. И, наконец, отметим небольшой кусочек "современной алгебры", приведенный в самом конце данной главы.

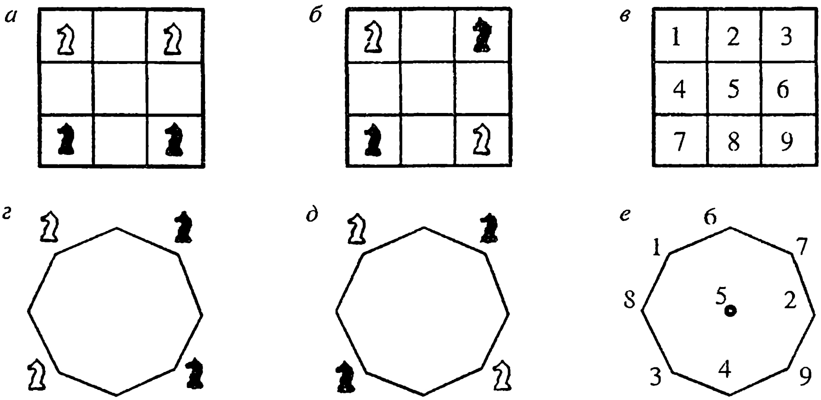
Глава 6

ГРАФЫ

6.1. Графические иллюстрации. Начнем с трех задач [15].

Задача 1. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рисунке *а*, получить такое, какое изображено на рисунке *б*? Очевидно, что это сделать нельзя, однако как эту очевидность доказать?

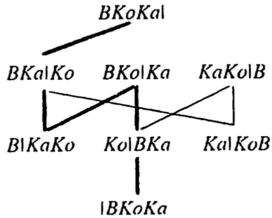
Обозначим цифрами 1, 2, ... , 9 клетки доски так, как показано на рисунке *в* и сопоставим им точки на плоскости.



Если из одной клетки можно попасть в другую за один ход коня, соединим соответствующие точки отрезком (рисунок *е*). Исходная и итоговая расстановки коней изображены на рисунках *г* и *д*. Поскольку в исходной расстановке белые кони являлись соседями, а в итоговой между ними расположен черный конь, то переставить коней требуемым образом невозможно.

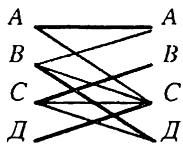
Задача 2. Путник, у которого есть волк, коза и капуста, подошел к реке. У берега реки стоит плотик, который может удержать на плаву только путника и волка, путника и козу, или же его с капустой. Путник не может оставлять наедине ни волка с козой, ни козу с капустой. Как же ему перебраться на другой берег, чтобы его собственность не претерпела ущерба?

Решение данной задачи нетрудно найти в уме, однако дадим ему и графическую интерпретацию. Изобразим точками "состояния" в процессе переправы: к примеру, обозначение $BKoKa|$ означает, что на берегу, к которому дошел путник, находится вся его собственность. Отрезки на рисунке означают, что путник без ущерба для себя может перевести эту собственность из одного состояния в другое. Решение состоит в указании пути из состояния $BKoKa|$ к состоянию $|BKoKa$ (выделен на рисунке).



Задача 3. Алеша знаком с Аней и Соней, Ваня – с Аней, Соней и Дашей. Саша знает Валю, Соню, а Дима – только Соню. Каждый из мальчиков хочет пригласить на танец одну из своих знакомых. Кого должен приглашать каждый из них, чтобы перед девочками не встала проблема выбора партнера?

Решение на рисунке.



Итак, во всех рассмотренных задачах оказалось полезным привести графическую иллюстрацию условия, т.е. ввести граф, соответствующий данной задаче.

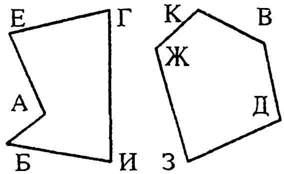
Перейдем к точным определениям. На формальном языке проще всего ввести понятие простого ориентированного графа: это пара $\{V, E\}$, где V – некоторое множество, а E – подмножество произведения $V \times V$, не содержащее пар вида (v, v) (т.е. не пересекающееся с диагональю). Элементы множества V назовем вершинами, а элементы E – ребрами графа. Причем, если $(v_0, v_1) \in V$, то говорим, что v_0 – начало, а v_1 – конец данного ребра, иначе – что это ребро ведет из вершины v_0 в вершину v_1 данного графа.

В двльнейшем мы не будем использовать настолько формализованный язык. Будем считать, что граф G состоит из некоторого множества V его вершин и множества E его ребер, каждое из которых соединяет какие-то две вершины из множества V. Граф называется простым, если в нем нет ребер, соединяющих вершину саму с собой, и для любой пары его вершин существует не более одного соединяющего их ребра.

Далее в основном будут рассматриваться лишь конечные графы, т.е. графы, у которых множества V и E конечны. Назовем степенью $\rho(v)$ вершины v конечного графа число примыкающих к ней ребер. Путем в графе назовем последовательность $v_0, \ell_0, v_1, \ldots, \ell_k, v_{k+1}$ его вершин и ребер, в которой ребро ℓ_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Еще одна тривиальная задача [6].

Задача 4. В стране Алфавит десять городов: А, Б,..., К и десять дорог, соединяющих города А и Б, Е и Г, В и Д, И и Б, Ж и К, З и Д, Е и А, К и В, И и Г, Ж и З. Можно ли по этим дорогам проехать из города А в город К ?



Нарисовав граф, вершины которого – города, а ребра – соединяющие их дороги (рисунок), мы ясно видим, что проехать из А в К невозможно.

В заключение этого вводного пункта приведем одну логическую задачу, решить которую в уме достаточно затруднительно.

Задача 5. Известно, что:

А. Ни одна рыба не уверена в своем вооружении, если она не имеет трех рядов зубов.

Б. Ни одна акула не сомневается в том, что она хорошо вооружена.

В. Рыба, которая не умеет танцевать кадриль, заслуживает сострадания.

Г. Все рыбы, кроме акул, ласковы с детьми.

Д. Тяжелые рыбы не умеют танцевать кадриль.

Е. Рыба, имеющая три ряда зубов, не заслуживает сострадания.

Можно ли тогда утверждать, что тяжелые рыбы ласковы с детьми?

(Нарисуйте ориентированный граф, сопоставив каждому из утверждений А–Д ребро по аналогии с тем, как это сделано для утверждения Е:

у рыбы три ряда зубов $\rightarrow$ рыба не заслуживает сострадания.)

6.2. Графы и четность. Что общего у следующих двух задач?

Задача 6. Можно ли так соединить 1001 телефон, чтобы каждый из них соединялся ровно с одиннадцатью другими?

Задача 7. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Можно ли утверждать, спрашивал он, что хотя бы один из этих мостов выходит на берег озера?

Приведем сразу общую теорему, из которой следуют решения этих задач.

Теорема 1. В произвольном графе количество вершин нечетной степени является четным числом.

Действительно,

$$\sum_{v\in V}\rho(v)=\sum_{\rho(v)\ \text{четно}}\rho(v)+\sum_{\rho(v)\ \text{нечетно}}\rho(v).$$

Поскольку сумма $\sum\limits_{v\in V}\rho(v)$ равна удвоенному числу ребер графа, то она четна, значит, четна и вторая сумма в правой части полученного равенства, поэтому число слагаемых в ней, т.е. количество вершин нечетной степени, четно. ■

В занимательной форме эту теорему обычно формулируют следующим образом: число людей, которые за свою жизнь сделали нечетное число рукопожатий, является четным.

Задача 8. В тридевятом царстве из столицы ведет двадцать одна ковролиния (сообщение между городами происходит при помощи ковров-самолетов), из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по десять. Докажите, что из столицы можно добраться до города Дальнего, возможно, что с пересадками.

Действительно, если предположить противное, то в графе, вершинами которого являются все те города, в которые можно добраться из столицы, будет всего одна вершина нечетной степени.

В рассмотренных задачах 5 и 8 в неявной форме использовалось понятие компоненты связности и понятие связного графа. Причем использовались два различных определения связности, эквивалентность которых очевидна на картинках, но все же требует обоснования (особенно в случае, когда граф не является конечным).

Теорема 2. Следующие утверждения равносильны:

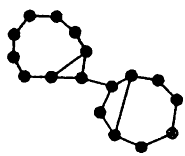
1) для любых двух вершин графа существует соединяющий их путь;

2) при любом разбиении множества V вершин графа на два непустых подмножества V_1 и V_2 найдется ребро, соединяющее вершину из V_1 с вершиной из V_2.

(Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) практически очевидна, импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) доказывайте от противного.) ■

6.3. Деревья.

Задача 9. В лагуне семнадцать островов. а) Какое наименьшее число мостов следует построить, чтобы с любого острова можно было добраться до любого другого? б) Туземцы работали без плана и построили двадцать мостов, соединяющих эти острова. Докажите, что можно указать четыре таких моста, уничтожив которые, туземцы все-таки смогут добраться с каждого острова до любого другого.



Ответ на вопрос пункта а) кажется очевидным – нужно построить шестнадцать мостов. Но как доказать, что меньшим количеством мостов не обойтись?

Замечание к пункту б) задачи: не любой мост из построенных можно уничтожать (рисунок).

В решении этой задачи появляются графы специального вида – так называемые деревья. Перейдем к определениям.

Цепью в графе будем называть путь, в котором все ребра различны; простой цепью назовем путь, в котором различны также и вершины, кроме, разве что, начальной и конечной. Цикл – это простая цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают. Наконец, назовем ребро графа критическим, если при его удалении граф становится несвязным.

Теорема 3. Пусть T – граф с n вершинами. Следующие утверждения равносильны:

1) граф T связен и не имеет циклов;

2) граф T не имеет циклов и содержит $n-1$ ребро;

3) граф T связен и содержит $n-1$ ребро;

4) граф T связен и любое его ребро – критическое;

5) для любых двух вершин графа T существует единственная соединяющая их цепь;

6) в графе T нет циклов, но добавление еще одного ребра приводит к графу, в котором циклы существуют.

Граф, удовлетворяющий одному из свойств 1)–6), будем называть деревом.

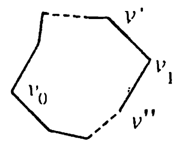
Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2), т.е. докажем формулу $|V|-|E|=1$, связывающую число вершин и ребер дерева. Как будет видно из дальнейшего, эта формула есть частный случай формулы Эйлера для плоских графов.

Лемма 1. В конечном графе без циклов существует вершина, степень которой не превосходит единицы.

Будем считать, что вершин нулевой степени, т.е. из которых не выходит ни одного ребра, в графе нет. С наглядной точки зрения лемма совершенно очевидна: если мы пойдем по графу, то поскольку мы не можем попасть в уже пройденную вершину, где-то наш путь закончится, что и может произойти лишь в вершине степени один.

Приведем теперь формальное доказательство леммы.

Фиксируем вершину $v_0 \in V$ и сопоставим вершине $v \in V$ целое число $m(v)$, равное числу ребер в цепи, соединяющей вершины v_0 и v. Пусть v_1 – одна из вершин, для которых значение $m(v)$ – максимально возможное в данном графе.



Предположим, что из v_1 выходят два ребра, соединяющих эту вершину с вершинами v' и v'' (рисунок). Поскольку $m(v'), m(v'') \leqslant m(v_1)$, то цепи, соединяющие вершины v', v'' с v_0, не могут проходить через вершину v_1, откуда следует, что в рассматриваемом графе имеется цикл. ■

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) проведем индукцией по числу n вершин графа T. При $n=1$ все очевидно. Рассмотрим связный и не имеющий циклов граф T с $n+1$ вершиной. По лемме найдется вершина v_1, к которой примыкает единственное ребро ℓ_1. Рассмотрим граф T', в котором $V' = V \setminus \{v_1\}$, $E' =$

$E \setminus \{\ell_1\}$. Граф T' связен, не имеет циклов и имеет n вершин. По индукционному предположению

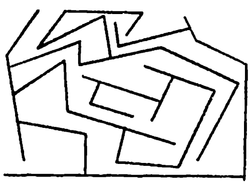
$$1 = |V'| - |E'| = (|V| - 1) - (|E| - 1) = |V| - |E|.$$

Упражнение. *Докажите остальные импликации в сформулированной теореме.* ■

Предположим, что дано взаимно однозначное соответствие между вершинами графа и некоторым множеством точек плоскости, пусть также каждому ребру этого графа соответствует ломаная, соединяющая соответствующие точки. Если эти ломаные не имеют общих внутренних точек, то будем говорить, что имеется плоская реализация данного графа (под которой мы также будем понимать и объединение всех его ребер–ломаных), или, менее формально, что данный граф вложен в плоскость.

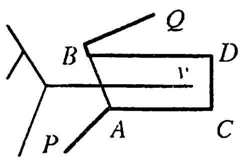
Упражнение. *Докажите, что любое дерево имеет плоскую реализацию.*

Теорема 4. Если L – плоская реализация дерева T, то множество L не разбивает плоскость, т.е. любые две точки из множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить ломаной, не пересекающей L (как принято говорить, $\mathbb{R}^2 \setminus L$ связно при помощи ломаных).



Это утверждение представляется очевидным, но если посмотреть на рисунок, то из изображенного на нем лабиринта найти выход не так-то легко (кстати, слово “лабиринт” употреблено здесь [illegible] ущ[illegible]).

Доказательство, как обычно, проведем при помощи индукции, в данном случае по числу ребер дерева. Будет удобно ввести дополнительные вершины на данном дереве так, чтобы каждое ребро его плоской реализации являлось просто отрезком. База индукции очевидна. Пусть L – плоская реализация дерева, имеющего $n+1$ ребро. В силу леммы 1, в L существует точка v, к которой примыкает лишь один отрезок ℓ, пусть L' – дерево, полученное из L отбрасыванием вершины v и ребра ℓ. Рассмотрим точки $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus L'$. По индукционному предположению существует ломаная Γ_1, соединяющая точки P и Q, $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus L'$, следовательно, $\Gamma_1 \cap L = \Gamma_1 \cap \ell$.



Пусть M – ближайшая к вершине v точка в пересечении $\Gamma \cap \ell$, а s – содержащее ее звено ломаной Γ_1. Заменив отрезок AB в звене s ломаной Γ_1 на ломаную $ACDB$ (рисунок), получим ломаную Γ_2, имеющую с деревом L на одну точку пересечения меньше. Продолжая рассуждение, получим ломаную, не пересекающуюся с деревом L (строго говоря, следовало провести еще одно рассуждение по индукции, на этот раз по числу точек в пересечении $\Gamma \cap \ell$). ■

6.4. Формула Эйлера и эйлерова характеристика. Далее, для простоты, будем говорить просто о графах, лежащих в плоскости, на сфере и т.п.

Теорема 5 (Эйлер). Пусть G – связный граф, $G \subset \mathbb{R}^2$, P – множество компонент связности дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Справедлива следующая формула:

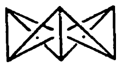
$$|V| - |E| + |P| = 2.$$

Проведем индукцию по числу ребер графа G. Заметим прежде всего, что доказаную в предыдущем пункте формулу можно записать в виде $|V| - |E| + 1 = 2$. Поскольку дополнение любого дерева L в плоскости состоит из одной компоненты связности, эта формула является частным случаем формулы Эйлера. Следовательно, мы вправе предположить, что граф G – не дерево, значит, в нем найдется некритическое ребро ℓ. Удалив его, мы получим граф G', для которого по индукционному предположению верна формула $|V'| - |E'| + |P'| = 2$. Осталось заметить, что $|E'| = |E| - 1$, и, поскольку ребро ℓ делит одну из компонент дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus G'$ на две, то $|P'| = |P| - 1$, поэтому $|V| - |E| + |P| = 2$.

Упражнение. Обобщите формулу Эйлера на случай произвольного плоского графа.

Задача 10. Баба-Яга, Змей Горыныч и Кащей Бессмертный поссорились друг с другом и желают ходить к колодцам с живой, мертвой и питьевой водой от своих избушек каждый по своей тропинке. Смогут ли они проложить тропки так, чтобы те не пересекались?

В действительности дать строгое доказательство невозможности нам не удастся, поскольку трудно определить, что же такое – кривая, дуга... Следовало бы ограничиться случаем, когда тропинки являются ломаными, однако мы просто будем считать, что дуга – это "кривой отрезок" и что формула Эйлера верна в случае, когда ребра являются дугами.



Таким образом, вопрос в следующем: существует ли плоская реализация графа $G_{3,3}$, изображенного на рисунке?

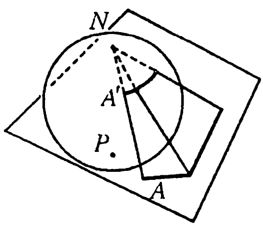
Имеем $|V| = 6$, а $|E| = 9$. Если плоская реализация такого графа существует, то каждая из областей, на которые он разбивает плоскость, является по крайней мере четырехугольником. Из формулы Эйлера получаем, что $|P| = 5$. Далее, поскольку каждое ребро является стороной в двух областях, то удвоенное число ребер не может быть меньше $4 \cdot 5 = 20$, а в нашем графе ребер всего 9.

Упражнение. Докажите, что полный 5-граф (т.е. граф с пятью вершинами, каждая пара которых соединена ребром) нельзя вложить в плоскость.

В качестве еще одного приложения формулы Эйлера докажем следующую теорему.

Теорема 6. Существует не более пяти типов правильных многогранников.

Лемма 2. Формула Эйлера справедлива для графов, расположенных на сфере.



Выберем некоторую точку $N \in S^2 \setminus G$, пусть – диаметрально противоположная ей точка сферы. Расположим плоскость так, чтобы она касалась сферы в точке P. Сопоставим точке A плоскости точку пересечения отрезка NA со сфе ой (рисунок).

Определенное таким образом соответствие множества $S^2 \setminus N$ и плоскости является взаимно однозначным. Тем самым графу G' на сфере можно сопоставить граф G в плоскости (и наоборот), причем $|V| = |V'|$, $|E| = |E'|$, $|P| = |P'|$. ■

Докажем теорему 6. Пусть каждая грань многогранника является n-угольником и в каждой его вершине сходятся q ребер. Расположив данный многогранник внутри сферы и спроектировав его на эту сферу из некоторой точки, лежащей внутри многогранника, получим граф на сфере, у которого $|P|n = 2|E| = |V|q$, поэтому из формулы Эйлера следует, что

$$2\frac{|E|}{q} - |E| + 2\frac{|E|}{n} = 2, \text{ или } \frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{|E|} + \frac{1}{2}.$$

Поскольку $n, q \geqslant 3$ и $1/n + 1/q > 2$, получаем пять вариантов для значений n и q (таблица). Чтобы доказать, что все указанные значения действительно реализуются, нужно построить многогранник с такими n и q.

n	3	3	4	3	5
q	3	4	3	5	3

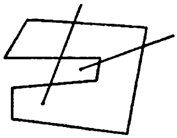
В случае первых трех пар значений искомые многогранники – это тетраэдр, октаэдр и куб, оставшиеся два значения также реализуются (соответствующие многогранники – это икосаэдр и додекаэдр). ■

Взглянем на формулу Эйлера с несколько другой точки зрения. Именно, эта формула означает, что для любого связного графа G на сфере число $|V|-|E|+|P|$ не зависит от графа, следовательно, то, что это число равно двум, является свойством сферы! (Математики говорят, что эйлерова характеристика сферы равна двум.) Естественно было бы ожидать, что аналог этого свойства справедлив и для других поверхностей, к примеру, для тора. Однако нетрудно видеть, что граф Δ можно вложить в тор двумя принципиально различными способами, в одном из которых $|P| = 2$, а в другом $|P| = 1$! (к графу $\bigwedge$ можно так добавить ребро, что еще одна область в дополнении этого графа не появится). Почему же дополнительная область обязана появиться в случае, если граф расположен на плоскости или на сфере? Каким свойством этих пространств мы неявно пользовались?

6.5. Теорема Жордана. В доказательстве теоремы 5 использовалось следующее наглядно очевидное утверждение, известное как теорема Жордана.

Теорема 7 (Жордан). Многоугольник (т.е. простая замкнутая ломаная) разбивает плоскость на две области.

Требуется доказать, что если L – простая замкнутая ломаная на плоскости, то $\mathbb{R}^2 \setminus L = U \cup V$, где U и V – две такие области, что две любые точки, взятые в одной из них, можно соединить ломаной, не пересекающейся с L, а точки, лежащие в различных областях, соединить таким образом невозможно.



Интуитивно ясно, что точки могут быть "внутренними" и "внешними" относительно многоугольника. Различить их можно по числу точек пересечения с контуром многоугольника исходящих из них лучей (рисунок).

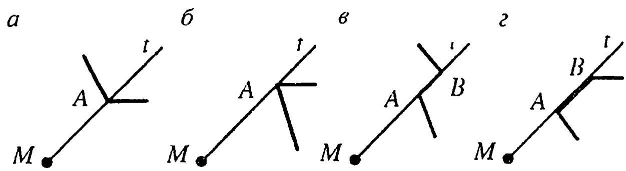
Доказательство теоремы Жордана, которое будет намечено далее, было предложено Д.Гильбертом [4] и интересно тем, что в нем используется такое общематематическое понятие, как степень точки относительно кривой (в данном случае – степень по модулю два относительно простой замкнутой ломаной).

Пусть $M \notin L$ и t – луч, исходящий из точки M. Предположим вначале, что этот луч не проходит ни через одну из вершин многоугольника L, и определим индекс луча t относительно этого многоугольника следующим образом:

$$\mathcal{I}(M, L; t) = \begin{cases} 0, \text{если число } |t \cap L| \text{ четно,} \\ 1, \text{если число } |t \cap L| \text{ нечетно} \end{cases}$$

(здесь, как обычно, через $|\mathcal{E}|$ обозначено число элементов конечного множества $\mathcal{E}$, так что $|t \cap L|$ – число точек пересечения луча с данным многоугольником).

Будем использовать далее то, что любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, поэтому имеет смысл говорить об отрезках, лежащих по одну и по разные стороны от луча. Пусть луч t проходит через вершину $A \in L$. Возможны следующие варианты расположения звеньев ломаной L, смежных с этой вершиной (рисунки *а*–*г*).



В первом и третьем случаях считаем, что луч t имеет одну точку пересечения с L, во втором и четвертом – что он их вообще не имеет.

Сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3. Число $\mathcal{I}(M, L; t)$ не зависит от луча t.

В соответствии с результатом этой леммы далее будем говорит об индексе $\mathcal{I}(M, L)$ точки относительно простой замкнутой ломаной.

Лемма 4. Если точки A и B можно соединить ломаной, не пересекающей многоугольник L, то $\mathcal{I}(A, L) = \mathcal{I}(B, L)$.

В следующих двух леммах предполагается, что отрезок AB пересекает данный многоугольник в одной точке, не являющейся его вершиной.

Лемма 5. Имеем $\mathcal{I}(A, L) \neq \mathcal{I}(B, L)$.

Лемма 6. Любую точку плоскости, не лежащую на многоуольнике, можно соединить ломаной, не пересекающей этот многоугольник, либо с точкой A, либо с точкой B.

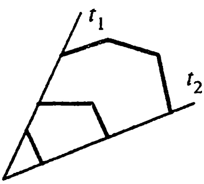


Схема доказательства леммы 3. Пусть t_1, t_2 – два луча с началом в точке M. Если ни на одном из них нет вершин многоугольника L, то пересечение L с углом, ограниченным лучами t_1 и t_2, состоит из простых ломаных, концы которых лежат на этих лучах (рисунок).

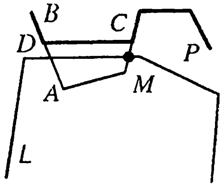
Ясно, что разность $|t_1 \cap L| - |t_2 \cap L|$ есть число четное, поэтому $\mathcal{I}(M, L; t_1) = \mathcal{I}(M, L; t_2)$. Если какая-то вершина многоугольника L попала на один из этих лучей, то надо внимательно посмотреть на рисунки *а–г*, приведенные выше. ■

Докажем лемму 4. Пусть $A = P_0, P_1, \ldots, P_n = B$ – вершины ломаной, соединяющей точки A и B. Поскольку отрезки P_iP_{i+1} не пересекают L, то луч $[P_iP_{i+1})$ и содержащийся в нем луч с вершиной в точке P_{i+1} имеют равное число точек пересечения с L, следовательно, $\mathcal{I}(A, L) = \mathcal{I}(P_1, L) = \ldots = \mathcal{I}(B, L)$. ■

Лемма 5, очевидно, доказывается при помощи аналогичного рассуждения. ■

Лемма 6 не зависит от предыдущих, ее доказательство основано на теореме 4.

Поскольку простая незамкнутая ломаная является деревом, то существует ломаная Γ, соединяющая некоторую точку $P \notin L$



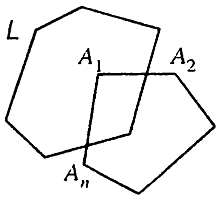
с точкой A, причем $\Gamma \cap L = \Gamma \cap \ell$. Пусть M – это первая точка пересечения ломано Γ с многоугольником L, считая от точки P, а Γ_1 – "отрезок" ломаной Γ от P до M (рисунок). Пусть C – точка на Γ_1, близкая к M. Ясно, что C можно соединить либо с A, либо с B ломаной, не пересекающей многоугольник L. ■

Докажем теорему Жордана. Пусть

$$U = \{P \in \mathbb{R}^2 \setminus L \,|\, \mathcal{I}(P, L) = 0\}, V = \{P \in \mathbb{R}^2 \setminus L \,|\, \mathcal{I}(P, L) = 1\}$$

и AB – отрезок, пересекающий многоугольник L в точке, не являющейся его вершиной. Из доказанных лемм следует, что $U, V \neq \emptyset$ (лемма 5) и что, если $P \in U, Q \in V$, то эти точки нельзя соединить ломаной в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ (лемма 4). Пусть $A, P, Q \in U$ и $B \in V$. В силу леммы 6 точки P и Q можно соединить с одной из точек A или B, но их можно соединить только с A, следовательно, P соединяется с Q ломаной, не пересекающей данный многоугольник. ■

Следствие. Если два многоугольника не имеют общих вершин, то пересечение этих многоугольников состоит из четного числа точек.



(Количество пар различных чисел в последовательности $\mathcal{I}(A_1, L), \ldots, \mathcal{I}(A_n, L), \mathcal{I}(A_1, L)$ совпадает с числом точек пересечения многоугольника L и многоугольника с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рисунок).)

6.6. Паросочетания. В данном пункте будет сформулирована и доказана теорема, пример к которой – это задача 3.

Задача 11 (о свадьбах) [19]. Рассмотрим некоторое множество юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками. Требуется женить юношей так, чтобы каждый из них сочетался браком со знакомой ему девушкой.

Теорема 8 (Холл). Решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного семейства знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.

Необходимость данного условия очевидна. Доказательство достаточности проведем при помощи индукции по числу юношей.

Пусть теорема верна, если число юношей меньше m. Предположим, что любые k юношей, $1 \leqslant k < m$, знакомы в совокупности не менее чем с $k+1$ девушкой. Тогда, женив любого юношу на знакомой ему девушке, получим, что любые k из оставшихся $m-1$ юношей будут знакомы по крайней мере с k девушками.

Теперь предположим, что имеются k юношей, $k < m$, знакомых всего с k девушками. Этих юношей женить можно. Остаются еще $m-k$ из них, и любые l юношей из оставшихся знакомы не менее чем с l девушками (почему?), таким образом, условие теоремы Холла выполнено и в силу индукционного предположения этих юношей также можно женить. ■

Сформулируем теперь теорему Холла на языке теории графов.

Граф называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на такие два подмножества V' и V'', что любое ребро рассматриваемого графа соединяет вершину из V' с вершиной из V''. Паросочетанием из V' в V'' называется такой набор $\mathcal{M}$ ребер двудольного графа, что никакие два ребра из этого набора не имеют общих вершин и для всякой вершины $v' \in V'$ найдется примыкающее к ней ребро ℓ (иначе: паросочетание – это такое инъективное отображение $\varphi : V' \to V''$, что для любой вершины $v' \in V'$ существует ребро, соединяющее вершины v' и $\varphi(v')$).

Теорема Холла очевидно равносильна следующему утверждению: паросочетание из V' в V'' существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset V'$ имеем $|\varphi(A)| \geqslant |A|$.

Еще одно эквивалентное этой теореме утверждение.

Теорема 9. Пусть E – конечное множество, $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ – набор его подмножеств. Множество $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ (все точки в котором различны), такое, что $\forall i\ s_i \in E_i$ существует тогда и только тогда, когда объединение любых k элементов набора $\mathcal{E}$ содержит не менее k элементов множества E.

Упражнение. Докажите равносильность сформулированной теоремы и теоремы Холла. ■

Несколько элементарных задач.

Задача 12. На каждой из сторон листа бумаги нарисованы карты, состоящие из одинакового числа равновеликих (по площади) стран. Докажите, что можно так проткнуть этот лист иголкой, что каждая страна (на обеих сторонах листа) будет проткнута лишь один раз.

Латинским $m \times n$, $m < n$, прямоугольником называется такая матрица $(a_{i,j})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$, в которой $a_{i,j} \in \{1, 2, \dots, n\}$, причем все элементы любой ее строки и любого столбца различны.

Задача 13. Докажите, что всякий латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.

(Рассмотрите множества E_i, состоящие из тех чисел набора $\{1, 2, \dots, n\}$, которые не встречаются в i-м столбце матрицы.)

В заключение этого пункта приведем еще одну теорему, которая является содержательной в случае, если рассматриваемый граф бесконечен.

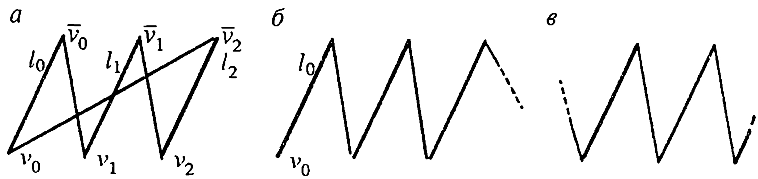
Теорема 10 (Бернштейн). Если $\mathcal{M}'$ – паросочетание из V' в V'', а $\mathcal{M}''$ – паросочетание из V'' в V', то существует паросочетание $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ из V' на V''.

Рассуждение будет проходить в подграфе исходного графа, содержащем лишь ребра из объединения $\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ исходных паросочетаний. Поскольку к каждой вершине этого подграфа примыкает одно или два ребра, то объединение простых цепей, имеющих общую вершину, есть простая цепь, поэтому для любой вершины этого графа существует содержащая ее максимальная цепь. Возможны следующие виды таких максимальных цепей:

а) замкнутая цепь

$$\mathcal{S} = \{v_0, \ell_0, \bar{v}_0, \bar{\ell}_0, v_1, \dots, v_k\},$$

здесь v_i, ℓ_i и $\bar{v}_i, \bar{\ell}_i$ – вершины и ребра из одного из наборов $V', \mathcal{M}'$ или $V'', \mathcal{M}''$ (рисунок a);



б) неограниченная в одну сторону цепь $\mathcal{S} = \{v_0, \ell_0, \ldots\}$ (рисунок *б*);

в) неограниченная цепь $\mathcal{S} = \{\ldots \bar{\ell}_{-1}, v_0, \ell_0, \ldots\}$ (рисунок *в*).

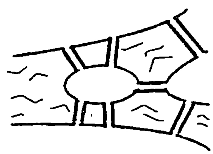
В случаях а) и в) ребра любого из паросочетаний $\mathcal{M}'$ или $\mathcal{M}''$ определяют паросочетание между $\mathcal{S} \cap V'$ и $\mathcal{S} \cap V''$. Если же цепь полуограничена и $v_0 \in V'$ ($v_o \in V''$), то ребра из $\mathcal{M}'$ (соответственно, из паросочетания $\mathcal{M}''$) определяют искомое паросочетание. ■

Теорема Бернштейна – это теорема из теории множеств. Напомним, что множества A и B называются равномощными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, пишем $|A| = |B|$. Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B, если A равномощно некоторому подмножеству $B_1 \subset B$ (пишем $|A| \preceq |B|$). В этих терминах теорема Бернштейна означает, что если $|A| \preceq |B|$ и $|B| \preceq |A|$, то $|A| = |B|$.

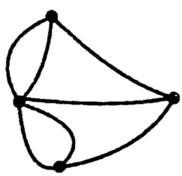
6.7. Эйлеровы графы и еще кое-что.

Задача 14. Можно ли нарисовать фигурки  и  "одним росчерком пера", т.е. не отрывая карандаша от бумаги и не проводя ни одной линии дважды?

Задача 15 (о кенигсбергских мостах). Можно ли прогуляться по городу так, чтобы пройти по одному разу по каждому из изображенных на рисунке мостов?



Вторая из предложенных задач вполне аналогична первой, поскольку она имеет следующую переформулировку: можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф одним росчерком пера?



На языке теории графов вопрос ставится следующим образом: существует ли цепь, которая содержит все ребра данного графа (рисунок)? Такие цепи, а также графы, в которых они существуют, называются эйлеровыми.

Теорема 11. Связный граф является эйлеровым в том и только том случае, если он либо не содержит вершин нечетной степени, либо имеет две такие вершины.

Необходимость приведенного условия будет вполне ясна, если решить следующую задачу.

Задача 16. Группа туристов совершила прогулку по островам архипелага, пройдя по каждому из соединяющих их мостов всего один раз. Оказалось, что на одном из этих островов они побывали трижды. Сколько мостов ведет с этого острова, если туристы: а) не с него начали и не на нем закончили свою прогулку? б) с этого острова начали экскурсию, но не на нем закончили ее? в) начали и закончили прогулку на этом острове?

Достаточность условия теоремы доказывается индукцией по числу ребер. Идея индукционного перехода станет понятной, если разобраться с такой задачей.

Задача 17. Докажите, что фигуру, образованную несколькими пересекающимися окружностями, можно нарисовать одним росчерком пера. ■

Еще одна элементарная задача на эту тему.

Задача 18. а) Какое наименьшее число раз придется ломать кусок проволоки длиной 120 см, чтобы изготовить из него каркас куба с ребром 10 см? б) Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы, не ломая его, можно было изготовить каркас такого куба?

Закончим эту главу задачами, в какой-то степени связанными с раскрасками графов.

Задача 19. а) По кругу расположены одиннадцать сцепленных друг с другом шестеренок. Могут ли они вращаться? б) Сможет ли вращаться такая система, если шестеренок двенадцать? (Число зубцов на них может быть различным.) в) Найдите условие, при котором может вращаться система из расположенных в плоскости и каким-то образом сцепленных друг с другом шестеренок?

Задача 20. В некотором государстве каждые два города соединены всего одной дорогой: это либо шоссе, либо железная дорога. Докажите, что можно выбрать один вид транспорта – автобус или поезд так, чтобы из любого города в любой другой можно было проехать, заезжая по дороге не более чем в два других города и используя только этот вид транспорта.

Как было нетрудно заметить, речь в данной главе идет не о "теории графов", а о графах как об интересных математических объектах, которые, с одной стороны, чрезвычайно наглядны и естественны, а с другой – все же являются математической абстракцией. Первая из этих характеристик достаточно ясна, приведем, чтобы проиллюстрировать вторую, еще две задачи.

Задача 21. Существует ли выпуклый стоодинграпник, каждая грань которого является трех-, пяти- или семиугольником?

Задача 22. Можно ли так расположить на плоскости девять отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

В задачах 21, 22 решающим шагом является построение некоторого графа, к которому затем применяется теорема 1 данной главы. В первом случае – это так называемый двойственный граф. Граф, который следует рассмотреть во второй из предложенных задач, является также частным случаем некоторой общей математической конструкции. Заметим, что вторая задача станет проще, если в ее условии заменить отрезки произвольными множествами, поскольку отсекутся рассуждения, использующие прямолинейность отрезков.

Как и в случае с задачами по комбинаторике, задачи, связанные с графами, можно (и нужно) предлагать как младшим, иак и старшим школьникам. При этом можно познакомить учащихся с таким важным понятием, как изоморфизм (см. простые примеры в книге [6]), математическая модель. Старшеклассникам будет очень полезно потренироваться в доказательствах по индукции. Задачи на графы очень естественно объединяются в серии (см. [15]), в частности, и поэтому они столь популярны среди руководителей математических кружков (см. примечания к главе 4). Читатель, конечно, заметил, что и изложение в данной главе ведется как бы на двух уровнях. К примеру, аккуратное доказательство существования висячего ребра у произвольного дерева имеет смысл проводить только в достаточно математически грамотной аудитории.

Глава 7

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

7.1. Клетки и кролики. Принцип Дирихле – "если в n клетках сидят не менее $n+1$ кроликов, то в какой-то клетке их не менее двух" – совершенно очевидное утверждение (если предположить противное, то, подсчитав кроликов, сразу придем к противоречию). Кажется маловероятным, чтобы применение такого рода соображений приводило к нетривиальным результатам, однако... Начнем, как обычно, со стандартных элементарных задач [6].

Задача 1. В классе 30 учеников. Саша Иванов сделал в диктанте 13 ошибок, а остальные меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок (или не сделавшие ни одной).

(Тринадцать "клеток" для сделавших от 0 до 12 ошибок и 29 "кроликов" – учеников.)

Заметим, что мы не можем ничего утверждать ни о числе ошибок, которые сделала такая троица, ни о том, было ли таковых трое, четверо, или же все двадцать девять учеников сделали равное число ошибок.

Задача 2. На белую плоскость брызнули черной краской. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии один метр одна от другой.

(Среди трех вершин равностороннего треугольника с длиной стороны 1 м найдутся две одного цвета.)

Задача 3. В первенстве по футболу участвуют 18 команд. Докажите, что в любой день имеются две команды, которые сыграли равное число матчей.

Казалось бы, что количество возможностей для сыгранного числа матчей – от 0 до 17 – равно числу команд. Однако, если некоторая команда не сыграла ни одного матча, то нет и команды, сыгравшей все 17 игр ("клетки" с номерами 0 и 17 не могут быть заняты одновременно).

Задача 4. В квадрате со стороной 1 расположена 51 точка. Докажите, что найдутся три из них, лежащие в: а) квадрате со стороной 1/5; б) круге с радиусом 1/7.

Утверждение пункта а) очевидно. Далее, поскольку $2/7 > \sqrt{2}/5$, то круг с радиусом $1/7$ содержит квадрат со стороной $1/5$, поэтому из а) следует б).

Задача 5. В доме 123 жильца, которым в сумме 3813 лет. Докажите, что некоторым ста из них в сумме не менее 3100 лет.

Предположим, что самым старым жильцам в сумме меньше 3100 лет. Тогда младший из этих ста моложе 31 года, значит, оставшиеся 23 также моложе 31 года, поэтому им в сумме меньше 713 лет. Так что получаем, что всем жильцам дома в сумме менее 3813 лет.

Приведенная задача – частный случай следующего утверждения.

Теорема 1. Если $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = s$, то для всякого $k \leqslant n$ найдутся такие наборы различных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_k$, что $\sum_{l=1}^{k} a_{i_l} \geqslant ks$ и $\sum_{l=1}^{k} a_{j_l} \leqslant ks$.

(Смотрите решение задачи 5.) ■

Как мог убедиться читатель, научить решать несложные задачи на "принцип Дирихле" – это научить правильно доказывать "от противного".

В дальнейшем будет существенно, что применять принцип Дирихле можно, не только подсчитывая число элементов.

Задача 6. Сумма длин покрашенных дуг окружности меньше половины ее длины. Докажите, что найдется диаметр, концы которого не покрашены.

Действительно, если окрасить дополнительно дуги, которые центрально симметричны окрашенным первоначально, то, во-первых, не вся окружность будет закрашена, а во-вторых, незакрашенное множество является центрально симметричным.

Задача 7. На столе лежат 15 салфеток (произвольной формы и размера), которые его полностью закрывают. Докажите, что можно убрать 8 из них так, чтобы оставшиеся закрывали не менее 7/15 площади стола.

Пусть $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{15}$ – это площади частей каждой из салфеток, соприкасающихся со столом. Ясно, что $\sum_{i=1}^{7} s_i \geqslant 7/15$ площади стола (см. выше). Если убрать последние 8 салфеток, то у оставшихся площадь соприкосновения со столом разве что увеличится.

Заметим, что совсем не обязательно найдутся 7 салфеток, которые накрывают менее 7/15 стола.

Задача 8. Докажите, что некоторая натуральная степень числа 29 оканчивается двумя нулями и единицей.

Поскольку чисел от 0 до 999 имеется ровно тысяча, то среди степеней $29^1, 29^2, \ldots, 29^{1001}$ найдутся две с совпадающими тремя последними цифрами, т.е. $29^k - 29^l$ делится на 1000. Пусть $k > l$ и $29^l\left(29^{k-l} - 1\right)$ делится на 1000, так как числа 29 и 10 взаимно просты, то и $29^{k-l} - 1$ делится на 1000, т.е. десятичная запись числа 29^{k-l} имеет на конце 001.

Заметим, что утверждение задачи следует также из Малой теоремы Ферма (см. пункт 7.5 далее).

Задача 9. Докажите, что среди чисел Фибоначчи найдется число, оканчивающееся тремя нулями.

Имеется всего 10^6 пар (a, b), где $0 \leqslant a, b \leqslant 999$, поэтому среди пар $\{(a_i, a_{i+1}\}_{i=0}^{10^6}$ соседних чисел Фибоначчи найдутся две такие пары (a_k, a_{k+1}) и (a_l, a_{l+1}), где $k > l$, что разности $a_{k+1} - a_{l+1}$ и $a_k - a_l$ делятся на 1000. Поскольку по определению чисел Фибоначчи $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ и $a_{l-1} = a_{l+1} - a_l$, то и разность $a_{k-1} - a_{l-1}$ делится на 1000, и так далее. В итоге получим, что числа $a_{k-l+1} - a_1$ и $a_{k-l} - a_0$ делятся на 1000. Так как $a_1 = a_0 = 1$, то число $a_{k-l-1} = a_{k-l+1} - a_{k-l}$ имеет на конце три нуля, поскольку оно также делится на 1000.

7.2. Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть (X, μ) – пространство с мерой, которая отличается от объема лишь дополнительным требованием счетной аддитивности. Именно, если попарно не пересекающиеся множества A_i, $i \in \mathbb{N}$, измеримы, то множество $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ также измеримо и $\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$.

Отображение $T : X \to X$ называется сохраняющим меру, если для любого измеримого множества $E \subset X$ его прообраз $T^{-1}(E)$ также измерим и $\mu\left(T^{-1}(E)\right) = \mu E$.

В этом месте пришлось использовать термин – “измеримое множество”. Точного определения дано не будет, но тот, кто с этим термином встречается впервые, может быть спокоен: все множества, какие он себе сможет вообразить, будут измеримы.

В дальнейшем мы еще вернемся к элементарным задачам, а сейчас докажем следующее общее утверждение, известное как теорема Пуанкаре о возвращении [26].

Теорема 2. Если отображение $T : X \to X$ сохраняет меру, $\mu X < \infty$ и множество $E \subset X$ измеримо, то для почти всех точек $x \in E$ найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $T^n(x) \in E$.

Такие точки называются возвращающимися; термин "почти все" означает, что мера множества невозвращающихся точек равна нулю.

Для доказательства рассмотрим множество

$$F = E \cap T^{-1}(X \setminus E) \cap T^{-2}(X \setminus E) \cap \dots$$

Если $x \in F$, то $T^n(x) \notin E$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и наоборот, значит, F – это множество не возвращающихся в E точек, в частности, $T^{-n}(F) \cap F = \emptyset$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$T^{-n}(F \cap T^{-k}(F)) = T^{-n}(F) \cap T^{-(n+k)}(F),$$

то множества $T^{-n}(F)$ попарно не пересекаются, а поскольку преобразование T сохраняет меру, то $\mu(T^{-n}(F)) = \mu F$. Так как мера всего пространства X конечна, то отсюда следует, что $\mu F = 0$. ■

Теорема 3. Пусть g – поворот окружности S^1 на угол α, не соизмеримый с π (т.е. $\alpha \neq \pi k/n$, $k, n \in \mathbb{Z}$). Тогда для всякой точки $x \in S^1$ ее положительная орбита (т.е. множество $\{g^n x\}_{n=1}^{\infty}$) всюду плотна на окружности (т.е. на любой дуге этой окружности найдется точка этого множества).

Воспользуемся теоремой Пуанкаре: $X = S^1$, 2π – длина окружности, и вообще, мера дуги окружности есть просто длина этой дуги. Пусть дуга U – окрестность точки $1 \in S^1$. Найдется такая точка $x \in U$ и такое натуральное число n, что $g^n(x) \in U$, следовательно, так как отображение g^n также является поворотом, то оно есть поворот на угол, меньший длины дуги U. Поэтому на любой дуге такой же (или большей) длины найдется точка вида $g^{nk}x$. ■

Упражнение. *Докажите теорему 3 непосредственно, без ссылки на теорему Пуанкаре.*

Упражнение. Укажите то место в доказательстве теоремы 3, где следовало воспользоваться несоизмеримостью α и π.

Следствие. Для любого положительного иррационального числа ξ множество $\Xi = \{k\xi - n \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на $\mathbb{R}$.

Действительно, рассмотрим произвольный интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Выберем число l так, чтобы $\tilde{\xi} = l\xi > b$. Пусть g – поворот единичной окружности на угол $2\pi\tilde{\xi}$, а $(\tilde{a}, \tilde{b})$ – соответствующая интервалу (a, b) дуга этой окружности. В силу теоремы 3 найдется такое натуральное число s, что $g^s(1) \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, что равносильно неравенству $a < s\tilde{\xi} - n < b$ (n – некоторое целое число). В силу выбора числа $\tilde{\xi}$ имеем, что $n \in \mathbb{N}$ и $(sl)\xi - n \in (a, b)$. ■

Задача 10. Докажите, что если непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x+1) = f(x)$ и $f(x+\sqrt{2}) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то она постоянна.

Будем называть число ω периодом функции f, если $f(x+\omega) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Сформулированная задача вытекает из следующих утверждений.

Упражнение. Докажите, что множество периодов заданной на $\mathbb{R}$ функции является подгруппой $\mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите, что если функция непрерывна, то множество ее периодов является замкнутым.

Упражнение. Докажите, что если G – замкнутая подгруппа $\mathbb{R}$, не совпадающая с $\mathbb{R}$, то найдется такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $G = \{\alpha k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Приведем для полноты решение задачи 10, не использующее ученой терминологии. Пусть $c \in \mathbb{R}$. В силу следствия теоремы 3, найдутся такие целые числа a_n, b_n, что $|c - (a_n + b_n\sqrt{2})| < 1/n$. Положив $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$, получим такую последовательность, что $f(x_n) = f(b_n\sqrt{2}) = f(0)$, и, так как $x_n \to c$, то $f(x_n) \to f(c)$ при $n \to +\infty$, откуда следует, что $f(c) = f(0)$.

Теорема Пуанкаре, а точнее следствие теоремы 3, имеет и арифметические приложения. Решите вначале вспомогательную задачу.

Задача 11. Докажите, что число $\lg 2$ иррационально.

Задача 12. Докажите, что существует степень числа 2, десятичная запись которой начинается с цифры 7.

(Воспользуйтесь тем, что $2^k = \overline{7\ldots}$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $7 \cdot 10^k \leqslant 2^k < 8 \cdot 10^n$, или $n + \lg 7 \leqslant k \lg 2 < n + \lg 8$.)

7.3. Теорема Лиувилля. В этом пункте будет доказано следующее парадоксальное утверждение: если открыть перегородку, разделяющую камеру с газом и камеру с вакуумом, то через некоторое время все молекулы газа соберутся вновь в первом сосуде (если, конечно, за это время не исчезнет Вселенная... [2]).

Напомним, что вронскианом $W(t)$ набора $\psi^{(1)}(t)$, $\psi^{(2)}(t), \ldots,$ $\psi^{(n)}(t)$ решений системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется определитель матрицы, столбцами которой являются координатные функции этих решений:

$$W(t) = \det\left(\psi_i^{(j)}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Как известно, вронскиан является решением линейного дифференциального уравнения $\dot{w} = \operatorname{tr} A(t)w$, где $\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ – след матрицы системы, следовательно,

$$W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau)d\tau\right) W(t_0).$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\operatorname{tr} A(t) = 0$, то $W(t) = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x, f(x) \in \mathbb{R}^n,\ f \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

обозначим через $\varphi(x_0, t)$ решение задачи Коши с начальными данными $\varphi(x_0, 0) = x_0$. Теорема о дифференцируемости решений по начальным данным утверждает, что функция φ является гладкой, причем ее якобиева матрица $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ – это фундаментальная система решений следующей линейной системы:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,t))\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

называемой системой в вариациях. Если известно, что функция φ дифференцируема, то второе утверждение доказывается без труда.

Действительно, так как $\varphi(x, 0) = x$, то, продифференцировав это равенство, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0) = E_n.$$

Далее, продифференцировав тождество $\dfrac{d}{dt}(\varphi(x,t)) = f(\varphi(x,t))$, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,t))\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t).$$

Для системы в вариациях $\operatorname{tr}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} f$, следовательно,

$$\det\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f(\varphi(x,\tau))d\tau\right).$$

Предположим, что решения $\varphi(x,t)$ данной автономной системы определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Определим отображение $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, называемое сдвигом по траекториям системы, по формуле $g_t(x) = \varphi(x,t)$.

Теорема 4 (Лиувилль). Если $\operatorname{div} f = 0$, то сдвиг по траекториям системы $\dot{x} = f(x)$ является преобразованием, сохраняющим меру.

Пусть U – множество конечной меры. Сделав в интеграле

$$\int_{g_t(U)} dy_1 dy_2 \ldots dy_n = \operatorname{vol}(g_t(U))$$

замену $y = g_t(x)$, получим

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(g_t(U)) &= \int_U \det\left(\frac{\partial g_t}{\partial x}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ &= \int_U \det\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ &= \int_U dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \operatorname{vol}(U),\end{aligned}$$

поскольку

$$\det \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} f(\varphi(x,\tau))d\tau\right) = 1. \blacksquare$$

Вернемся к примеру с газом. Движение системы из N молекул газа описывается системой

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}, \; q \in \mathbb{R}^{3N},$$

где q – вектор координат молекул, или же следующей системой уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q}. \end{cases}$$

Потенциал U этой системы зависит лишь от координат молекул и ограничен снизу. Поскольку дивергенция векторного поля, стоящего в правой части системы, равна нулю, то, в силу теоремы Лиувилля, сдвиг по ее траекториям сохраняет объем. Наконец, множество

$$\left\{ \; (p,q) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} p_i^2 + U(q) \leqslant E_0 \; \right\}$$

является ограниченным и переводится отображением g_t в себя (см. главу 9). Следовательно, по теореме Пуанкаре по прошествии "некоторого времени" все молекулы вернутся в окрестность исходного состояния, т.е. соберутся в первом сосуде.

7.4. Лемма Минковского. Решеткой в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$L = \left\{ \; \sum_{i=1}^{n} k_i b_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \; \right\},$$

где $\{b_i\}_{i=1}^n$ – некоторый базис этого пространства. Фундаментальная область (иначе – ячейка) – это множество

$$P = \left\{ \; \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i \mid \xi \in [0;1) \; \right\}$$

с объемом $\operatorname{vol}(P) = |\det(b_i)|$.

Лемма 2. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственная точка $y \in P$, такая, что $x - y \in L$.

Достаточно положить $y_i \equiv x_i \pmod 1$, единственность следует из того, что $P \cap L = \emptyset$. ■

Следовательно, определено отображение $p : \mathbb{R}^n \to P$.

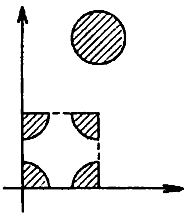
Лемма 3. Отображение p локально сохраняет объем, точнее, если измеримое множество E таково, что $p(x) \neq p(y)$ для любых различных точек $x, y \in E$, то $\operatorname{vol} p(E) = \operatorname{vol} E$.

Представим множество E в виде следующего дизъюнктного объединения:

$$E = \bigcup_{u \in L} E_u = \bigcup_{u \in L} (E \cap P_u),$$

где множество P_u получено из ячейки P параллельным переносом на вектор $u \in L$. Ясно, что если $x \in P_u$, то $p(x) = x - u$. Из инъективности отображения p на данном множестве E следует, что образы $p(E_u)$ попарно не пересекаются, значит,

$$\operatorname{vol} p(E) = \sum_{u \in L} \operatorname{vol} p(E_u) = \sum_{u \in L} \operatorname{vol} E_u = \operatorname{vol} E. \ ■$$



В качестве иллюстрации к проведенному доказательству рассмотрим на плоскости решетку точек с целочисленными координатами.

Пусть D – круг с радиусом $1/3$ и центром в точке $A(1, 2)$, его образ состоит из расположенных в единичном квадрате четвертей круга с таким же радиусом (рисунок).

Теорема 5 (лемма Минковского) [17]. Пусть K – выпуклое и центрально симметричное относительно начала координат подмножество $\mathbb{R}^n$, L – решетка в этом пространстве, а P - ее фундаментальная область. Если $\operatorname{vol} K > 2^n \operatorname{vol} P$, то множество K содержит хотя бы одну ненулевую точку этой решетки.

Рассмотрим множество K', гомотетичное K с коэффициентом гомотетии $1/2$, $\operatorname{vol} K' = 2^{-n} \operatorname{vol} K > \operatorname{vol} P$, поэтому отображение $p : K' \to P$, локально сохраняющее объем, не может быть инъективным. Значит, существуют такие различные точки $x, y \in K'$, что $z = x - y \in L$. Имеем: $2x, 2y \in K$, а так как множество K выпукло и центрально симметрично, то $z = (2x + (-2y))/2 \in K$. ■

Следствие. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – решетка, v – объем ее фундаментальной области. Существует такая отличная от нуля точка $x_0 \in L$, что $|x_0| \leqslant 2\sqrt[n]{v/\omega_n}$, где ω_n – это объем единичного n-мерного шара.

Действительно, пусть D – замкнутый шар радиусом r с центром в начале координат. Поскольку он есть замкнутое множество, то из неравенства $\operatorname{vol} D \geqslant 2^n v$ следует, что в нем имеется ненулевая точка решетки L, т.е., если $\omega_n r^n \geqslant 2^n v$, то найдется такая точка x_0, что $|x_0| \leqslant r$. ■

В следующих пунктах лемма Минковского будет применена для доказательства двух классических арифметических утверждений, сейчас же используем ее в более элементарных задачах.

Задача 13. Рассмотрим множество кругов фиксированного радиуса, центры которых располагаются в узлах бесконечной сетки квадратов. Докажите, что любая прямая, проходящая через один из узлов этой сетки, пересечет еще хотя бы один такой круг.

(Используйте следствие теоремы 3.)

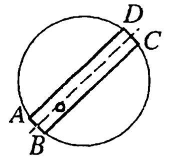
Таким образом, если мы стоим в бесконечном лесу, посаженном квадратно-гнездовым способом, то как бы молод он ни был, ни из какого гнезда мы не увидим ничего, кроме стволов.

Задача 14 [32]. Имеется круглый сад радиусом 50 м, деревья в котором посажены в узлах сетки квадратов со стороной 1 м, в центре сада расположена беседка. Докажите, что пока радиусы стволов остаются меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2501}}$, вид из беседки не будет заслонен полностью, но если радиусы будут более $\frac{1}{50}$, то из этой беседки мы ничего, кроме стволов, не увидим.

Рассмотрим прямую, проходящую через начало координат и точку $K(50,1)$. Ясно, что ближайшими к ней вершинами узлов являются точки $A(49,1)$ и $B(1,0)$, расстояние от которых до этой прямой равно $\frac{1}{\sqrt{2501}}$. Значит, если $r < \frac{1}{\sqrt{2501}}$, то в направлении этой прямой из центра сада имеется просвет.

Теперь рассмотрим произвольный диаметр нашего сада, пусть

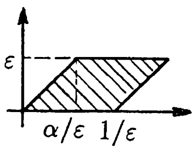
$ABCD$ – прямоугольник, для которого этот диаметр есть средняя линия, так что $BC = 100$, а $AB = 1/25$.



Так как фундаментальной областью данной решетки является квадрат единичной площади, то $S_{ABCD} = 100/25 = 4 = 2^2 \operatorname{vol} P$, а поскольку прямоугольник $ABCD$ – это центрально симметричное и выпуклое множество, то внут. и него имеется точка анной решетки, которая тем самым удалена от диаметра на расстояние, не превосходящее $\frac{1}{50}$. Значит, если радиусы деревьев более $\frac{1}{50}$, то в направлении любого из диаметров мы увидим какой-нибудь ствол.

Еще одно применение леммы Минковского связано с приближениями действительных чисел рациональными [5].

Задача 15. Докажите, что для любого действительного числа α существует такая дробь k/n (с произвольно большим знаменателем), что $|\alpha - k/n| \leqslant 1/n^2$.



Ясно, что число α можно считать иррациональным и лежащим в интервале $(0; 1)$. Рассмотрим решетку

$$\left\{(x, y) \mid x = \tfrac{\alpha n - k}{\varepsilon}, y = \varepsilon n,\ n, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

где ε – произвольное положительное число, и квадрат с вершинами в точках $(\pm 1, \pm(\mp 1))$.

Площадь фундаментальной области этой решетки – изображенного на рисунке параллелограмма – равна единице. По лемме Минковского единичный квадрат содержит ненулевую точку решетки, следовательно, найдутся такие целые числа k и n, что $|(\alpha n - k)/\varepsilon| \leqslant 1$ и $|\varepsilon n| \leqslant 1$, откуда $|\alpha - k/n| \leqslant \varepsilon/|n| \leqslant 1/n^2$. Если число ε достаточно мало, то n должно быть большим.

7.5. Суммы двух квадратов. Цель данного и следующего за ним пункта – доказать следующие теоремы.

Теорема 6 (Эйлер). Если p – простое число и $p \equiv 1 \pmod 4$, то найдутся такие целые числа a и b, что $p = a^2 + b^2$.

Теорема 7 (Лагранж). Всякое натуральное число есть сумма квадратов четырех целых чисел.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ остатков от деления на натуральное число n и обозначим через $\mathbb{Z}_n^*$ его подмножество, состоящее из обратимых в нем относительно умножения элементов, т.е.

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \exists b \in \mathbb{Z}_n : ab \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

Лемма 4. Множество $\mathbb{Z}_n^*$ состоит из всех натуральных чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним.

Действительно, $ab \equiv 1 \pmod{n}$, если $ab = 1 - mn$, т.е. $ab + mn = 1$, что равносильно взаимной простоте чисел a и n. ■

Напомним один факт, известный в теории групп как теорема Лагранжа: если G – подгруппа конечной группы H, то число $|G|$ элементов этой подгруппы является делителем числа $|H|$ элементов группы.

В качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 8 (малая теорема Ферма). Если число p – простое и $t \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Поскольку p – простое число, то $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$. Если $t^k \equiv 1 \pmod{p}$, то элементы $\{1, t, \ldots, t^{k-1}\}$ образуют подгруппу $\mathbb{Z}_p^*$ (по умножению), значит, $p-1$ делится на k и $t^{p-1} = \left(t^k\right)^{p-1/k} \equiv 1 \pmod{p}$.

Другое доказательство: если $t \not\equiv 0 \pmod{p}$, то числа kt, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, все имеют различные остатки при делении на p, значит, $(p-1)!\,t^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$, откуда и следует, что $t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. ■

Упражнение. Докажите, что если числа a и n взаимно просты, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, где $\varphi(n)$ – число натуральных чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним.

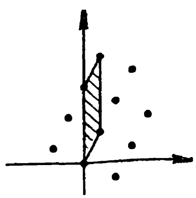
В доказательстве теоремы Эйлера будет использовано, что для любого простого числа p группа $\mathbb{Z}_p^*$ является циклической, т.е. найдется такой элемент $t \in \mathbb{Z}_p^*$, что $\mathbb{Z}_p^* = \{1, t, \ldots, t^{p-2}\}$ (теорема 10 главы 5).

Упражнение. Докажите, что группа $\mathbb{Z}_{15}^*$ не является циклической.

Лемма 5. Пусть число p простое. Уравнение $u^2 + 1 = 0$ разрешимо в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Если $u^2+1=0$, то $u^4=1$, значит, $\{1,u,u^2,u^3\}$ – подгруппа $\mathbb{Z}_p^*$, поэтому число $p-1$ делится на 4.

Обратно, пусть число $p-1$ кратно 4, а x – это образующая группы $\mathbb{Z}_p^*$. Положим $u=x^{p-1/4}$, $y=u^2=x^{p-1/2}$. Поскольку $y^2=1$ в $\mathbb{Z}_p$, то $(y-1)(y+1)=0$. В кольце $\mathbb{Z}_p$ (поскольку p простое) нет делителей нуля, значит, $y=1$ или $y=-1$ в $\mathbb{Z}_p$. Первый случай невозможен, так как тогда мы получим, что $x^{p-1/2}=1$, т.е. что x – не образующая. ■



Перейдем к доказательству теоремы Эйлера.

Пусть p – простое число и $p\equiv 1 \pmod 4$. В силу леммы 5 существует такой элемент $u\in\mathbb{Z}_p$, что $u^2\equiv -1 \pmod p$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ решетку

$$L=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Z}, b\equiv ua \pmod p\}$$

(на рисунке изображен случай $p=5$).

Базисом этой решетки являются векторы $\mathrm{b}_1(1,u)$ и $\mathrm{b}_2(0,p)$, так что площадь ее фундаментальной области равна p. Поскольку $\omega_2=\pi$, то, в силу следствия леммы Минковского, найдется такой ненулевой вектор $x=(a,b)\in L$, что $|x|^2=a^2+b^2\leqslant 4p/\pi<2p$. С другой стороны, так как $a^2+b^2\equiv a^2+u^2a^2 \pmod p \equiv a^2(1+u^2) \pmod p$, то число a^2+b^2 делится на p, следовательно, $a^2+b^2=p$. ■

Следствие. Пусть $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}$, p_i – простые числа. Число n есть сумма квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда выполнено условие: $k_i\equiv 0 \pmod 2$ для всех таких чисел p_i, что $p_i\equiv -1 \pmod 4$.

Достаточность приведенного условия вытекает из таких двух соображений: если $n=a^2+b^2$, то $k^2n=(ka)^2+(kb)^2$, и, если $m=c^2+d^2$, то $mn=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

Необходимость. Пусть $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}$, $p_1\equiv -1 \pmod 4$ и $k_1=2l+1$. Пусть, далее, p_1^{2m} – наибольшая степень числа p_1, делящая и a^2, и b^2. Тогда

$$\left(\frac{a}{p_1^m}\right)^2+\left(\frac{b}{p_1^m}\right)^2=p_1^{1+2(l-m)}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}\equiv 0 \pmod{p_1}.$$

т.е. $(a')^2+(b')^2 \equiv 0 \pmod{p_1}$. По построению, одно из чисел a', b' не делится на p_1, для определенности пусть $a' \not\equiv 0 \pmod{p_1}$, тогда это число имеет в кольце $\mathbb{Z}_{p_1}^*$ обратный элемент a_1. Значит, $a'a_1 \equiv 1 \pmod{p_1}$, откуда $(b'a_1)^2 \equiv -(a'a_1)^2 \equiv -1 \pmod{p_1}$, что невозможно в силу леммы 5. ■

7.6. Суммы четырех квадратов. Тождество Эйлера. Перед доказательством теоремы Лагранжа рассмотрим два вспомогательных утверждения.

Лемма 6. Объем ω_4 единичного четырехмерного шара равен $\pi^2/2$.

Пусть $D^{(4)} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 \leqslant 1\right\}$. Сечение этого шара плоскостью Ox_1x_2 является единичным кругом $D^{(2)}$. Если $(x_1, x_2) \in D^{(2)}$, то сечение шара $D^{(4)}$ плоскостью, параллельной Ox_3x_4 и проходящей через данную точку, есть круг $D_r^{(2)}(x_1, x_2)$ с радиусом $r = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. По теореме Фубини, дающей выражение "двойного" интеграла через "повторные" (иначе: объем тела равен интегралу от площадей поперечных сечений), имеем:

$$\omega_4 = \operatorname{vol} D^{(4)} = \int_{D^{(4)}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$= \int_{D^{(2)}} \left(\int_{D_r^{(2)}(x_1, x_2)} dx_3 dx_4 \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{D^{(2)}} \pi r^2 dx_1 dx_2 = \pi \int_{D^{(2)}} (1 - x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - \rho^2)\rho d\rho \right) d\varphi = 2\pi^2 \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi^2}{2},$$

мы сделали в интеграле замену переменной $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, а

$$\rho = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

есть якобиан функции перехода к полярным координатам на плоскости. ■

Лемма 7. *Для всякого простого числа p уравнение $u^2 + v^2 + 1 = 0$ разрешимо в $\mathbb{Z}_p$.*

При $p = 2$ утверждение леммы очевидно. Пусть $p > 2$. Рассмотрим следующие отображения $f, g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $f(u) = u^2$ и $g(u) = -1 - u^2$. Ясно, что образы $f(\mathbb{Z}_p)$ и $g(\mathbb{Z}_p)$ этих отображений имеют одинаковое число элементов. Образ отображения f состоит из нуля и элементов вида u^2 для каждых двух элементов $-u, u \in \mathbb{Z}_p$, т.е. всего из $1 + (p-1)/2 = (p+1)/2$ элементов. Поскольку $(p+1)/2+(p+1)/2 > p$, то по принципу Дирихле образы отображений f и g должны пересекаться. Следовательно, существуют такие элементы $u, v \in \mathbb{Z}$, что $u^2 = -1 - v^2$, т.е. $u^2 + v^2 = -1$ в $\mathbb{Z}_p$. ■

Докажем теорему Лагранжа. Предположим вначале, что число $n = p$ является простым. Пусть u, v – решения в $\mathbb{Z}_p$ уравнения $u^2 + v^2 + 1 = 0$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^4$ следующую решетку $L \subset \mathbb{Z}^4$:

$L = \{(a, b, c, d) \mid c \equiv ua + vb \pmod p, d \equiv ub - va \pmod p\}$.

Упражнение. Докажите, что векторы $\mathbf{b}_1(1, 0, u, -v)$, $\mathbf{b}_2(0, 1, v, u)$, $\mathbf{b}_3(0, 0, p, 0)$ и $\mathbf{b}_4(0, 0, 0, p)$ образуют базис решетки L и объем V ее фундаментальной области равен p^2.

Следовательно, решетка L содержит такой ненулевой элемент $x = (a, b, c, d)$, что

$$|x|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 4\sqrt{\frac{V}{\omega_4}} = 4\sqrt{\frac{2p^2}{\pi^2}} = p\frac{4\sqrt{2}}{\pi} < 2p.$$

Так как

$$|x|^2 \equiv a^2 + b^2 + (ua + vb)^2 + (ub - va)^2 \equiv$$
$$\equiv (a^2 + b^2)(1 + u^2 + v^2) \equiv 0 \pmod p,$$

то $|x|^2$ кратно p, значит, $|x|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$. Для того чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что из тождества Эйлера

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) =$$
$$= (aA - bB - cC - dD)^2 + (aB + bA + cD - dC)^2 +$$
$$+ (aC + cA + bD - dB)^2 + (aD + dA + bC - cB)^2$$

следует, что произведение двух сумм четырех квадратов целых чисел есть сумма четырех квадратов целых чисел.

Упражнение. Докажите тождество Эйлера. ■

В заключение этой главы заметим, что если $L \subset L' \subset \mathbb{R}^n$, где L и L' – решетки с объемами v и v' своих фундаментальных областей, то $v = |L'/L|v'$. Это следует из того, что отображение $p: P \to P'$, во-первых, локально сохраняет объем, а во-вторых, является $|L'/L|$-кратным, т.е. прообраз каждой точки $x \in P'$ состоит из $|L'/L|$ элементов.

Глава 8

КВАТЕРНИОНЫ

8.1. Тело кватернионов и тождество Эйлера. В данной главе нет элементарных задач, и то, что автор включил ее в эту книгу, вызвано внутренней необходимостью. Прежде всего хотелось прояснить смысл появившегося в предыдущей главе красивого и загадочного тождества Эйлера. Далее, тело кватернионов, которому посвящена эта глава, представляет собой пример, на котором можно изучать свойства новой (и важной) алгебраической структуры, так называемых алгебр. Наконец, из одной из основных теорем этой главы следует, что цепочку числовых полей $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ продолжить далее невозможно.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$, являющееся группой по сложению, и попытаемся определить произведение $u \cdot v \in \mathbb{R}^4$ его элементов. Если положить $u \cdot v = (u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3)$ для $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, то оказывается, что в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеются делители нуля, т.е. такие ненулевые элементы $u, v \in \mathbb{R}^4$, что $u \cdot v = 0$. Тем же дефектом обладает умножение, определенное посредством произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0v_0 + u_1v_2 & u_0v_1 + u_1v_3 \\ u_2v_0 + u_3v_2 & u_2v_1 + u_3v_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{e, i, j, k\}$ стандартный базис в $\mathbb{R}^4$ и следующим образом определим попарные произведения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e^2 = -e,$$
$$ei = ie = i, \quad ej = je = j, \quad ek = ke = k,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Упражнение. Докажите, что умножение любых трех базисных элементов обладает свойством ассоциативности.

(Можно прямо проверить 27 равенств, в дальнейшем ассоциативность будет доказана из других соображений.)

Лемма 1. Существует единственное отображение $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, являющееся линейным по каждой переменной, значение которого на паре базисных элементов совпадает с их произведением, причем из равенства $f(u, v) = 0$ следует, что $u = 0$ или $v = 0$.

Напомним, что термин "линейность по каждой переменной" (в данном случае – билинейность) означает, что для любых элементов $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеют место равенства $f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w)$ и $f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u, v) + \beta f(u, w)$.

Первое утверждение леммы совершенно очевидно. Далее, если $u = ae + bi + cj + dk$, а $v = Ae + Bi + Cj + Dk$, то, используя эти равенства и определение отображения f на парах базисных элементов (к примеру, $f(i, j) = ij = k$), получим

$$f(u, v) = u \cdot v = (aA - bB - cC - dD)e + (aB + bA + cD - dC)i + \\ + (aC + cA + dB - bD)j + (aD + dA + bC - cB)k.$$

Предположим теперь, что $f(u, v) = 0$ и $u \neq 0$. В силу полученной формулы, числа A, B, C, D являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases} ax - by - cz - dt = 0, \\ bx + ay - dz + ct = 0, \\ cx + dy + az - bt = 0, \\ dx - cy + bz + at = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что столбцы матрицы этой системы попарно ортогональны и имеют длину $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Следовательно, ее определитель, модуль которого равен объему параллелепипеда (в данном случае – куба), натянутого на вектора-столбцы матрицы, отличен от нуля, поэтому система имеет лишь тривиальное решение, таким образом, $v = 0$. ■

Назовем сопряженным к $u = ae + bi + cj + dk \in \mathbb{R}$ элемент $\bar{u} = ae - bi - cj - dk$. Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 2. Имеют место тождества:
а) $u \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |u|^2$;
б) $u \cdot \bar{u}/|u|^2 = e$;
в) $\overline{u \cdot v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$. ■

Теорема 1. Пространство $\mathbb{R}^4$ с введенной операцией умножения и обычным сложением является телом (т.е. множеством, в котором выполнены все аксиомы поля за исключением коммутативности умножения). Оно называется телом кватернионов и обозначается $\mathbb{H}$.

Действительно, дистрибутивность умножения относительно сложения следует из билинейности отображения f. Далее, так как $ei = i, ej = j$ и $ek = k$, то опять-таки из свойства билинейности по второму сомножителю получим

$$e(ae + bi + cj + dk) = a(ee) + b(ei) + c(ej) + d(ek) = \\ = ae + bi + cj + dk.$$

Следовательно, e – единица. Из утверждений а) и б) леммы 2 следует, что элемент $v = \bar{u}/|u|^2$ является обратным к u. Ассоциативность умножения следует из ассоциативности на базисных элементах. ■

Упражнение. Докажите, что подмножество $\{ae \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ изоморфно полю $\mathbb{R}$.

(Имеем $(ae)(be) = (ab)e$.)

В дальнейшем при записи кватернионов будем опускать обозначение e, так что, если $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, то пишем $u = a + bi + cj + dk$. Величина $|u| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ называется нормой кватерниона.

Теорема 2. Для любых кватернионов $u, v \in \mathbb{H}$ имеет место тождество $|uv| = |u||v|$, равносильное тождеству Эйлера.

Действительно,

$$|uv|^2 = (uv)(\overline{uv}) = (uv)(\bar{v}\ \bar{u}) = ((u(v\bar{v}))\bar{u}) = \\ = (u|v|^2)\bar{u} = |v|^2(u\bar{u}) = |u|^2|v|^2.$$

Очевидно, что расписав это равенство покомпонентно, мы получим тождество Эйлера. ■

8.2. Алгебры с делением. Теорема Фробениуса. Векторное пространство V над полем P называется алгеброй над этим полем, если в этом пространстве определено произведение $u, v \in V \mapsto u \cdot v \in V$, определяющее билинейное отображение $V \times V \to V$.

Теорема 3 (Штифель) [28]. Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести умножение, которое делает это пространство алгеброй над $\mathbb{R}$ без делителей нуля, то на единичной сфере S^{n-1} существуют $n - 1$ линейно независимых касательных векторных поля.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi(x) = x \cdot e_1$. В силу билинейности умножения отображение φ линейно, а так как в $\mathbb{R}^n$ нет делителей нуля, то ядро φ тривиально, следовательно, φ – изоморфизм. Поэтому формула

$$v_i(x \cdot e_1) = v_i(\varphi(x)) = x \cdot e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

определяет отображения $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, причем $v_1(x) = x$.

Для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ векторы $v_1(y), v_2(y), \dots, v_n(y)$ образуют базис $\mathbb{R}^n$, таким образом, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(xe_1) = 0$, то $x(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(xe_i) = 0$, откуда $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, значит, $\lambda_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через $\hat{v}_i(y)$ проекцию вектора $v_i(y)$ на гиперплоскость, перпендикулярную вектору $y = v_1(y)$. Поскольку $\hat{v}_i(y) = v_i(y) + \nu_i y$, то векторы $\hat{v}_2(y), \dots, \hat{v}_n(y)$ образуют базис этой гиперплоскости, являющейся касательным пространством единичной сферы. ■

Трудная теорема топологии состоит в том, что такими сферами являются лишь сферы S^1, S^3, S^7. Не очень сложно, хотя и неэлементарно, доказывается, что на сфере S^2 не существует ни одного не обращающегося в ноль касательного векторного поля (это так называемая теорема о "непричесываемости ежа").

Упражнение. Задайте в явном виде три линейно независимых непрерывных касательных к S^3 векторных поля.

Алгеброй с делением будем называть такую ассоциативную и содержащую единичный элемент алгебру, любой ненулевой элемент в которой имеет обратный. Нам потребуются далее несколько вспомогательных утверждений, доказательство которых оставляется читателю в качестве упражнения [31].

Лемма 3. Если $\mathcal{R}$ – конечномерная алгебра над полем P, то для любого элемента $x \in \mathcal{R}$ найдутся такие элементы $a_0, a_1, \dots, a_N \in P$, что $\sum_{i=1}^N a_i x^i = 0$.

(Если $N = \dim_P \mathcal{R}$, то элементы $1, x, \dots, x^N$ линейно зависимы.) ■

Лемма 4. Если $\mathcal{R}$ – алгебра, $f, g \in P[t]$ – многочлены с коэффициентами из поля P и $h = fg \in P[t]$, то для любого элемента $x \in \mathcal{R}$ верно равенство $h(x) = f(x)g(x)$. ■

Лемма 5. Если $\mathcal{R}$ – алгебра с единицей, то $\mathcal{R} \supset P$, точнее, в $\mathcal{R}$ существует подалгебра, изоморфная полю P.

(Смотрите упражнение после теоремы 1.) ■

Теорема 4. а) Любая конечномерная коммутативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ изоморфна или $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. б) Любая алгебра с делением ранга 1 или 2 над $\mathbb{R}$ изоморфна $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Докажем первое утверждение теоремы. В силу леммы 5 $\mathcal{R} \supset \mathbb{R}$, предположим, что существует элемент $x \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{R}$. По лемме 3 найдется такой многочлен $f \in \mathbb{R}[t]$, что $f(x) = 0$. Пусть $f(t) = f_1(t) \dots f_k(t)$, где $f_i \in \mathbb{R}[t]$ и $\deg f_i \leqslant 2$. По лемме 4 имеем, что $f(x) = f_1(x) \dots f_k(x)$, а поскольку в алгебре $\mathcal{R}$ нет делителей нуля, то $f_i(x) = 0$ для некоторого i. Ясно, что $\deg f_i = 2$, иначе $x \in \mathbb{R}$. Пусть $f_i(t) = t^2 + pt + q$, откуда $p^2/4 - q = -c^2 < 0$ (иначе, опять-таки $x \in \mathbb{R}$). Следовательно, $(x + p/2)^2 = -c^2$ и $(x/c + p/(2c))^2 = -1$. Положим $i = x/c + p/(2c)$. Ясно, что 1 и i линейно независимы над $\mathbb{R}$, обозначим через $\mathcal{R}_0$ порожденную ими алгебру, которая, очевидно, изоморфна $\mathbb{C}$. Пусть $y \in \mathcal{R}$ – произвольный элемент алгебры. Так же, как и выше, построим по y такой элемент $\hat{i}$, что $\hat{i}^2 = -1$, заметим, что $1, y, \hat{i}$ линейно зависимы. Поскольку алгебра $\mathcal{R}$ по условию является коммутативной, то $(i - \hat{i})(i + \hat{i}) = i^2 - \hat{i}^2 = 0$, значит, $i = \pm\hat{i}$, поэтому элементы $1, y, i$ линейно зависимы, следовательно, $y \in \mathcal{R}_0$.

Упражнение. Докажите второе утверждение теоремы. ■

Следствие. Если P – поле, $P \supset \mathbb{R}$ и является над $\mathbb{R}$ конечномерной алгеброй, то $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$.

Упражнение. Докажите следующее утверждение.

Теорема 5. Не существует конечномерных коммутативных алгебр над $\mathbb{C}$ ранга, большего единицы.

Упражнение. Приведите пример коммутативной алгебры с делением над $\mathbb{R}$, не совпадающей ни с $\mathbb{R}$, ни с $\mathbb{C}$.

Теорема 6 (Фробениус). Любая конечномерная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ изоморфна $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

Приведем схему доказательства. Как и в доказательстве теоремы 4, если $\mathcal{R} \neq \mathbb{R}$, то найдется такой элемент i, что $i^2 = -1$. Предположим, что $\mathcal{R} \neq \mathbb{C}$, значит, найдется такой элемент $x_1 \in \mathcal{R}$, что $x_1^2 = -1$ и $1, i, x_1$ линейно независимы. Элементы

$i \pm x_1$ являются корнями квадратных уравнений с вещественными коэффициентами. Можно показать, что $(i \pm x_1)^2 \in \mathbb{R}$, откуда получим, что $ix_1 + x_1 i = 2t \in \mathbb{R}$. Положим $x_2 = x_1 + ti$, тогда $x_2^2 = -c^2$, где $c \in \mathbb{R}$. Пусть $j = x_2/c$, так что $j^2 = -1$, а $ij + ji = 0$. Наконец, пусть $k = ij$, заметим, что

$$ki = (ij)i = i(ji) = -i(ij) = (-i^2)j = j.$$

Покажем, что элементы $1, i, j, k$ линейно независимы. Действительно, если $k = a + bi + cj$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, то, умножив это равенство на i слева, получим, что $c^2 = -1$.

Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{R}_0 = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

которая очевидно изоморфна $\mathbb{H}$. Если $\hat{x} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$, то, как и выше, построим такой элемент $\hat{x}_1 \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$, что $i\hat{x}_1 + \hat{x}_1 i = a \in \mathbb{R}$, $j\hat{x}_1 + \hat{x}_1 j = b \in \mathbb{R}$ и $k\hat{x}_1 + \hat{x}_1 k = c \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 k = \hat{x}_1(ij) &= (\hat{x}_1 i)j = (a - i\hat{x}_1)j = aj - i(\hat{x}_1 j) = \\ &= aj - i(b - j\hat{x}_1) = aj - ib + k\hat{x}_1, \end{aligned}$$

откуда $(c - \hat{x}_1 k)k = ai + bj - \hat{x}_1$, т.е. $2\hat{x}_1 = ai + bj - ck \in \mathcal{R}_0$. ■

8.3. Матричные алгебры. Пусть $\mathrm{M}_n(P)$ – множество матриц размером $n \times n$ с элементами из поля P. Ясно, что операция матричного умножения делает векторное пространство $\mathrm{M}_n(P)$ ассоциативной алгеброй с единицей.

Упражнение. Докажите, что множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

является подалгеброй $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, изоморфной $\mathbb{C}$. Более того, существует вложение $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$, образ которого является подалгеброй.

Доказательство следующей леммы оставляется читателю.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{R}$ – ассоциативная алгебра над полем P. Положим

$$\hat{\mathcal{R}} = P \oplus \mathcal{R} = \{\ (\lambda, x) \mid \lambda \in P,\ x \in \mathcal{R}\ \}$$

и определим умножение в $\hat{\mathcal{R}}$ посредством формулы $(\lambda, x) \cdot (\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy)$. Тогда $\hat{\mathcal{R}}$ – ассоциативная алгебра с единицей. ■

Роль матричных алгебр видна из следующего утверждения.

Теорема 7. Любая ассоциативная алгебра ранга n над полем P может быть вложена как подалгебра в матричную алгебру $\mathrm{M}_{n+1}(P)$, причем, если $\mathcal{R}$ – алгебра с единицей, то она изоморфна и подалгебре $\mathrm{M}_n(P)$.

Достаточно доказать только второе утверждение теоремы, поскольку первое, в силу леммы 6, является его следствием. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в $\mathcal{R}$ над P. Сопоставим элементу $a \in \mathcal{R}$ отображение $L_a : x \mapsto ax$. Ясно, что отображение L_a линейно, причем, если $a \neq b$, то $L_a(1) = a \neq L_b(1)$, т.е. $L_a \neq L_b$. Сопоставим, наконец, элементу a матрицу отображения L_a в некотором фиксированном базисе, в силу доказанного, такое отображение инъективно. Ясно, что

$$\begin{aligned} L_{\lambda a+\mu b} &= \lambda L_a + \mu L_b, \\ L_{ab}(x) &= (ab)x = a(bx) = aL_b(x) = L_a L_b(x), \end{aligned}$$

т.е. $L_{ab} = L_a L_b$, таким образом, построенное отображение является мономорфизмом алгебр. ■

Упражнение. Докажите, что соответствия

$$u = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mapsto A_{\mathbb{C}}(u) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix},$$

$$u = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mapsto A_{\mathbb{R}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

являются изоморфизмами алгебры кватернионов и подалгебр в $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

Эти вложения можно использовать для доказательства ассоциативности умножения кватернионов.

Описанные соответствия обладают следующими свойствами.

Упражнение. Докажите, что $A(\bar{u}) = A(u)^*$, где A^* – это в действительном случае транспонированная, а в комплексном – эрмитово-сопряженная к A матрица.

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

составляющие базис подалгебры $M_2(\mathbb{C})$, изоморфной $\mathbb{H}$, называются в физике матрицами Паули.

8.4. Вращения и кватернионы. В данном пункте мы будем рассматривать лишь чисто мнимые кватернионы $u = bi+cj+dk$, которые естественно отождествляются с векторами в $\mathbb{R}^3$, здесь i, j, k – стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Из определения умножения кватернионов следует, что $uv = -(u\,, v) + [u \times v]$, где $(u\,, v)$ – скалярное, а $[u \times v]$ – векторное произведение соответствующих кватернионам u и v векторов (так что, в частности, чисто мнимые кватернионы подалгебру не образуют).

Лемма 7 [24]. Существует взаимно однозначное соответствие между автоморфизмами алгебры кватернионов и собственными вращениями пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть u, v, w – образы кватернионов i, j, k при некотором автоморфизме φ. Поскольку $\varphi(1) = 1$, то $u^2 = \varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1$. Пусть $u = a + u_1$, где $a \in \mathbb{R}$, u_1 – чисто мнимый кватернион, тогда $u^2 = a^2 + 2au_1 - |u_1|^2 = -1$, значит, $au_1 = 0$. Если предположить, что $u_1 = 0$, то $a^2 = -1$, что невозможно, значит, $a = 0$, т.е. u – чисто мнимый кватернион. Так как $w = \varphi(k) = \varphi(ij) = \varphi(i)\varphi(j) = uv$, то $u \cdot v = 0$, а $u \times v = w$, значит, тройка векторов u, v, w образует правый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, т.е. индуцированное автоморфизмом φ отображение пространства $\mathbb{R}^3$ в себя является (собственным) вращением.

Упражнение. Докажите, что вращение $\mathbb{R}^3$ индуцирует автоморфизм $\mathbb{H}$. ■

Теорема 8. Группа SO(3) собственных вращений трехмерного пространства изоморфна факторгруппе группы кватернионов единичного модуля по подгруппе $\{\pm 1\}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{H}$, $|\alpha| = 1$. Ясно, что соответствие $x \mapsto \alpha^{-1}x\alpha$ – автоморфизм $\mathbb{H}$. Пусть $\alpha = a + u_0$, где $a = \mathrm{Re}(\alpha)$ – это скалярная часть кватерниона α. Так как $|\alpha|^2 = |a|^2 + |u_0|^2 = 1$, то можно

положить $a = \cos\theta$, $|u_0| = \sin\theta$, $\theta \in [0; 2\pi]$. Запишем элемент α в виде
$$\alpha = a + u_0 = a + \frac{u_0}{|u_0|}|u_0| = \cos\theta + u\sin\theta,$$
где $|u| = 1$.

Если $u_0 = 0$, то в качестве u можно взять любой единичный вектор, поскольку $\sin\theta = 0$. Пусть v – единичный вектор, ортогональный u, а $w = uv$. Ясно, что $\alpha u = u\alpha$, значит, $\alpha^{-1}u\alpha = u$. Далее,
$$\begin{aligned}\alpha^{-1}v\alpha = \bar{\alpha}v\alpha &= (\cos\theta - u\sin\theta)v(\cos\theta + u\sin\theta) = \\ &= (v\cos\theta - w\sin\theta)(\cos\theta + u\sin\theta) = \\ &= v(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2w\sin\theta\cos\theta = v\cos 2\theta + w\sin 2\theta.\end{aligned}$$
Аналогично: $\alpha^{-1}w\alpha = v\sin 2\theta + w\cos 2\theta$. Итак, автоморфизм $x \mapsto \alpha^{-1}x\alpha$ переводит кватернион u в себя, а в плоскости, натянутой на векторы v и w, совпадает с поворотом на угол 2θ. Поскольку любое сохраняющее ориентацию ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$ является поворотом относительно некоторой оси, то соответствие $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ является сюръекцией, т.е. гомоморфизмом множества кватернионов единичного модуля на группу SO(3).

Упражнение. Докажите, что кватернионы единичного модуля образуют группу, причем соответствие $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ является гомоморфизмом этой группы в группу SO(3) собственных движений.

Вычислим ядро этого гомоморфизма. Если $\alpha^{-1}x\alpha = x$ при всех $x \in \mathbb{H}$, то $x\alpha = \alpha x$. Взяв $x = i$, получим, что $c = d = 0$. Подставив теперь $x = j$, имеем $b = d = 0$. Таким образом, $\alpha = a$, а так как $|\alpha| = |a| = 1$, то $\alpha = \pm 1$. ■

Упражнение. Докажите, что любой автоморфизм алгебры кватернионов является внутренним, т.е. имеет вид φ_α.

Упражнение. Докажите, что группа кватернионов единичного модуля изоморфна группе
$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = E, \det A = 1\}.$$

В заключение приведем без доказательства два утверждения о связи кватернионов с вращениями четырехмерного пространства. Будем рассматривать $\mathbb{H}$ как евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ со скалярным произведением $(u, v) = \mathrm{Re}(\bar{u}v) = \mathrm{Re}(u\bar{v})$.

Лемма 8. Пусть $\alpha \in \mathbb{H}$, $|\alpha| = 1$. Операторы правого и левого умножения на кватернион α являются ортогональными.

Теорема 9. Пусть $\gamma, \beta \in \mathbb{H}$, $|\gamma| = |\beta| = 1$. Сопоставим паре (γ, β) преобразование $u \mapsto \gamma^{-1} u \beta$ пространства $\mathbb{R}^4$. Указанное соответствие индуцирует изоморфизм между группой $\mathrm{SO}(4)$ собственных движений $\mathbb{R}^4$ и факторгруппой прямого произведения двух групп кватернионов единичного модуля по подгруппе $\{\pm(1,1)\}$.

Глава 9

ПРОИЗВОДНАЯ

9.1. Геометрия и механика. Определить производную так называемых вектор-функций, т.е. функций, сопоставляющих числу $t \in (a, b)$ вектор $\mathbf{f}(t)$ трехмерного пространства, проще всего следующим образом. Предположим, что в пространстве введена система координат. Обозначим через $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ координаты вектора $\mathbf{f}(t)$, так что $f_i : (a, b) \to \mathbb{R}$ – это обычные числовые функции, и назовем производной $\mathbf{f}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{f}$ вектор с координатами $(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$.

Упражнение. Докажите, что производная вектор-функции не зависит от выбора системы координат в пространстве.

Нетрудно проверить, что для производных вектор-функций имеют место обычные правила дифференцирования.

Упражнение. Докажите, что: а) $(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$;

б) $(\varphi\mathbf{f})' = \varphi'\mathbf{f} + \varphi\mathbf{f}'$ (здесь φ – скалярная функция);

в) $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}'$ ($\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ – скалярное произведение векторов);

г) $\mathbf{f} = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{f}'(t) = 0$ при всех $t \in (a, b)$.

Заметим, что в случае скалярных функций доказательство утверждения, аналогичного сформулированному в пункте г), основано на теореме Лагранжа, которая для вектор-функций неверна.

К примеру, если $\mathbf{f}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, то $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(2\pi)$, а $\mathbf{f}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \neq 0$.

Докажем формулу, которая далее будет основным техническим орудием.

Лемма 1. Справедлива формула

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}(t)| = \frac{\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}(t)|} = \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{e}(t),$$

где $\mathbf{e}(t)$ – единичный вектор, сонаправленный с $\mathbf{f}(t)$.

Действительно, так как $|\mathbf{f}(t)| = \sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3^2(t)}$ (мы считаем, что в пространстве выбран ортонормированный базис), то по формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}(t)| = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3^2(t)}\right) =$$

$$= \frac{2f_1f_1' + 2f_2f_2' + 2f_3f_3'}{2\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} = \frac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}(t)|} = \mathbf{f}'(t)\cdot\mathrm{e}(t).$$

(Бескоординатное вычисление: продифференцируйте тождество $|\mathbf{f}(t)|^2 = (\mathbf{f}(t))^2$.) ■

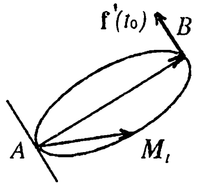
Всюду в дальнейшем можно использовать координатное задание вектор-функций, однако векторный язык существенно менее громоздок и является более наглядным.

Напомним одну из основных теорем дифференциального исчисления – теорему Ферма: если функция φ, заданная на отрезке $[a, b]$, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в точке $t_0 \in (a, b)$ и дифференцируема в этой точке, то $\varphi'(t_0) = 0$.

В качестве следствия и примера ее использования давайте докажем такое утверждение.

Если E – подмножество плоскости, ограниченное дифференцируемой кривой C, и AB – его диаметр (т.е. отрезок наибольшей длины с концами в множестве E), то отрезок AB перпендикулярен касательным кривой C, проведенным в точках A и B.

С наглядной точки зрения это утверждение абсолютно очевидно, впрочем, так же, как очевидна и сама теорема Ферма.



Пусть $\varphi(t) = |AM_t| = |\mathbf{f}(t)|$, где M_t – точка на кривой C, пусть $M_{t_0} = B$ и $t_0 \in (a, b)$ (рисунок). По условию $\varphi(t_0)$ – это наибольшее значение функции φ, значит,

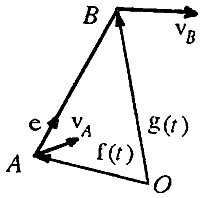
$$\varphi'(t_0) = \mathbf{f}(t_0)\cdot\mathrm{e}(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)\frac{\overline{AB}}{|AB|} = 0,$$

т.е. вектор $\mathbf{f}'(t_0)$, параллельный касательной данной кривой в точке B, перпендикулярен отрезку AB.

Производные вектор-функций естественно возникают в задачах механики как скорость $\mathbf{v} = \mathbf{f}'$ и ускорение $\mathbf{w} = \mathbf{v}' = \mathbf{f}''(t)$, здесь вектор-функция $\mathbf{f}(t) = \overline{OM_t}$ задает движение M_t материальной точки в пространстве.

Задача 1 ("о палке"). Докажите, что при произвольном движении твердого стержня в пространстве проекции скоростей его концов на прямую, содержащую этот стержень, равны.

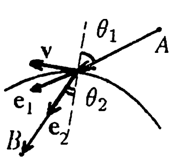
Убедимся, что сформулированная теорема механики является простым следствием основной формулы леммы 1.



Действительно, пусть $\mathbf{f}(t) = \overline{OA_t}$, $\mathbf{g}(t) = \overline{OB_t}$, где A_t и B_t – положения концов стержня в момент времени t (рисунок). Требуется доказать, что $\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}_A = \mathbf{e}\cdot\mathbf{v}_B$, или $\mathbf{e}(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_b) = 0$, т.е. $\mathbf{e}(\mathbf{f}'-\mathbf{g}') = 0$, что верно, поскольку в левой части последнего равенства стоит производная $\frac{d}{dt}|\mathbf{f}-\mathbf{g}|$ постоянной функции $|\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)|$ – длины данного стержня.

Задача 2. Докажите закон преломления (Снеллиус): отношение синусов угла падения и угла преломления на границе разделе двух однородных сред равно отношению скоростей распространения света в этих средах.

Для того чтобы перевести задачу на математический язык, воспользуемся общим физическим принципом наименьшего действия, который в данном случае формулируется следующим образом: свет распространяется из точки A в точку B по тому пути, на прохождение которого затрачивается минимальное время (принцип Ферма).



Обозначим через c_1, c_2 скорости света в данных средах и рассмотрим точку M_t, движущуюся с некоторой скоростью по линии раздела. Для простоты ограничимся плоской задачей. Пусть $\mathbf{f}(t) = \overline{AM_t}$, $\mathbf{g}(t) = \overline{M_tB}$ (рисунок).

Положим

$$\varphi(t) = \frac{|\mathbf{f}(t)|}{c_1} + \frac{|\mathbf{g}(t)|}{c_2},$$

т.е. $\varphi(t)$ – это время, затрачиваемое на прохождение ломаной AM_tB. Поскольку $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \overline{AB} = \overline{\text{const}}$, то $\mathbf{v} = \mathbf{f}' = -\mathbf{g}'$, поэтому

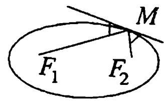
$$\varphi' = \frac{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{f}'}{c_1} + \frac{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{g}'}{c_2} = \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{e}_1}{c_1} - \frac{\mathbf{e}_2}{c_2}\right).$$

По принципу Ферма точка прохождения лучом линии раздела сред – это точка минимума функции φ, следовательно, в силу теоремы Ферма, $\varphi'(t_0) = 0$, значит,

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Задача 3. Докажите оптическое свойств эллипса: касательная к эллипсу образует равные углы с отрезками, соединяющими фокусы эллипса с точкой касания.

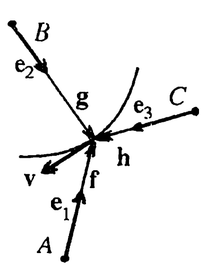
($|F_1M|+|F_2M| = \text{const}$, $\overline{F_1M}+\overline{MF_2} = \overline{F_1F_2} = \overline{\text{const}}$ (рисунок).)



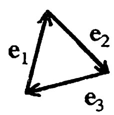
Изложенная схема применения производной может быть использована и в геометрических задачах.

Задача 4. Докажите, что если M_0 – точка, в которой реализуется минимум суммы расстояний до вершин остроугольного треугольника, то каждая из его сторон видна из этой точки под углом 120°.

Р с о р д и ение $_t$ очки по ри о , проходящей через точку минимума $M_0 = M_{t_0}$. Предположим пока, что точка M_0 не совпадает ни с одной из вершин A, B, C данного треугольника. Имеем $\mathbf{v} = \mathbf{f}'(t) = \mathbf{g}'(t) = \mathbf{h}'(t)$ (рисунок), пусть



$$\varphi(t) = |\mathbf{f}(t)| + |\mathbf{g}(t)| + |\mathbf{h}(t)|.$$



Так как $\varphi'(t_0) = 0$, то $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = 0$, откуда следует, что $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$ (почему?). Поскольк векто ы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ имеют единичн ю длину, то все углы между ними равны 120°.

Упражнение. Где в проведенном рассуждении использовалось, что $M_0 \neq A, B, C$?

Если точка M лежит на стороне AB данного (остроугольного) треугольника вблизи от его вершины A, то из очевидного неравенства $MA + MB + MC < AB + AC$ и следует, что $M_0 \neq A, B, C$.

Проведенное решение демонстрирует как силу, так и слабость изложенного метода. Слабость его в том, что нужно изначально предполагать существование точки минимума, в которой, к тому же, функция должна быть дифференцируема.

Докажем существование искомого минимума суммы $\psi(M) = MA + MB + MC$. Ясно, что эта точка не может лежать вне круга, содержащего данный треугольник, с радиусом, равным, к примеру, его периметру. Поскольку функция ψ непрерывна, а круг есть ограниченное и замкнутое, т.е. компактное, множество, то по второй теореме Вейерштрасса (точнее, по ее обобщению) эта функция достигает в данном круге своего наименьшего значения.

Попробуйте обобщить утверждение задачи 4 на случай произвольного треугольника.

9.2. Функциональные уравнения.

Задача 5. Найдите все такие функции f, для которых:

а) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$;

б) $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ для всех возможных пар x, y действительных чисел.

Ясно, что функция $f(x) = cx$ удовлетворяет условию а). Оказывается, что иных непрерывных функций не существует (см. упражнение ниже), мы же здесь будем решать эту задачу при дополнительном предположении о существовании у функции f производной в нуле.

Прежде всего заметим, что, подставляя в равенства а) и б) $x = y = 0$, получим, что $f(0) = 0$. Для функций, удовлетворяющих первому условию, имеем

$$c = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y},$$

значит, функция f имеет производную во всех точках, причем эта производная постоянна на всей прямой: $f'(x) = f'(0) = c$. Поэтому $(f(x) - cx)' = f'(x) - c = 0$, откуда $f(x) = cx + d$, но поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) = cx$.

Проведем аналогичное вычисление во втором случае, когда рассматриваемая функция удовлетворяет тождеству пункта б):

$$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{y}\left(\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)\right)\right)=$$
$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{f(y)}{y}\,\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)}\right)=f'(0)\left(1+f^2(x)\right)=c\left(1+f^2(x)\right).$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} f(x))'=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=c,$$

откуда $\operatorname{arctg} f(x)=cx+d$, а так как $f(0)=0$, то $d=0$. Окончательно получаем, что $f(x)=\operatorname{tg} x$. Осталось заметить, что любая из найденных функций удовлетворяет данному функциональному равенству. Такая проверка необходима, поскольку полученное дифференциальное уравнение является лишь следствием этого равенства.

Упражнение. Найдите все дифференцируемые функции, для которых $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите, что если при всех $x,y\in\mathbb{R}$ верно равенство $f(x+y)=f(x)+f(y)$, то: а) $f(k)=f(1)k$ при всех целых k; б) $f(k/n)=f(1)k/n$ при любых целых k,n; в) если функция f непрерывна в нуле, то $f(x)=f(1)x$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

Задача 6. Функция f такова, что $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$. Докажите, что она постоянна.

Так как $\left|\dfrac{f(y)-f(x}{y-x}\right|\leqslant|x-y|\to0$ при $y\to x$, то $f'(x)=0$.

Во втором решении этой задачи производные не используются:

$$|f(x)-f(0)|=\Big|\sum_{k=1}^{n}\big(f(\tfrac{kx}{n})-f(\tfrac{(k-1)x}{n}\big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\Big|f(\tfrac{kx}{n})-f(\tfrac{(k-1)x}{n})\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to0\quad\text{при}\quad n\to0.$$

Значит, $f(x)=f(0)$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

9.3. Движение материальной точки. Рассмотрим вновь задачи механики. Как обычно, траекторией движения материальной точки, описываемой вектор-функцией $f(t)$, будем называть множество $\{M_t\}$ концов этих векторов, отложенных от начала координат, т.е множество $\{M_t \mid \overline{OM}_t = f(t),\ t \in (a,b)\}$.

Задача 7. Движение электрона в постоянном магнитном поле описывается вектор-функцией $\mathbf{f}$, удовлетворяющей уравнению $\mathbf{f}'' = \mathbf{f}' \times \mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \mathrm{const}$ (здесь $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – векторное произведение). Докажите, что траекторией его движения является винтовая линия.

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Если $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \times \omega$, ($\omega = \mathrm{const}$), то вектор-функция $\mathbf{v}(t)$ описывает движение материальной точки, вращающейся с постоянной скоростью по окружности в плоскости с нормалью ω, т.е. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + a(\mathbf{i}\cos(\beta t + \alpha) + \mathbf{j}\sin(\beta t + \alpha)$, где вектор $\mathbf{v}_0$ параллелен ω, а единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ перпендикулярны этому вектору.

Поскольку $\mathbf{v}' \cdot \omega = 0$, то $\mathbf{v} \cdot \omega = \mathrm{const}$, а так как $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = 0$, то и $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$. Следовательно, угол между векторами $\mathbf{v}$ и ω постоянен, значит, $|\mathbf{v}'| = \mathrm{const}$. Таким образом,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + a\left(\mathbf{i}\cos\theta(t) + \mathbf{j}\sin\theta(t)\right),$$
$$|\mathbf{v}(t)'| = |-a\left(\mathbf{i}\sin\theta(t) + \mathbf{j}\cos\theta(t)\right)\theta'(t)| = |a||\theta'(t)|,$$

поэтому $\theta'(t) = \mathrm{const}$, значит, $\theta(t) = \beta t + \alpha$. ■

Скорость $\mathbf{v}$ электрона удовлетворяет уравнению $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, откуда, интегрируя равенство леммы 2, получим, что

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{a}{\beta}\left(\mathbf{i}\cos(\beta t + \alpha) + \mathbf{j}\sin(\beta t + \alpha)\right).$$

В дальнейшем нам потребуется еще одна формула дифференцирования.

Упражнение. Докажите, что $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$.

Задача 8. Движение материальной точки под действием гравитационных сил описывается уравнением $\mathbf{f}'' = -\mu\mathbf{f}/|\mathbf{f}|^3$. Докажите, что: а) все траектории являются плоскими кривыми; б) кривая, гомотетичная некоторой траектории, сама является траекторией; в) если две замкнутые траектории гомотетичны, то отношение квадратов периодов движения по этим траекториям равно кубу коэффициента гомотетии.

Заметим, что утверждения пунктов б) и в) – это так называемые законы Кеплера.

Ограничимся указаниями. К пункту а): докажите, что вектор $\mathbf{M} = \mathbf{f} \times \mathbf{f}'$ постоянен. К пунктам б) и в): если $\mathbf{f}(t)$ удовлетворяет уравнению, то и вектор-функция $\mathbf{g}(t) = k\mathbf{f}(k^{-3/2}t)$ есть решение этого уравнения.

Как известно из курса физики, если точка движется по окружности радиусом R, то величина центростремительного ускорения этой точки зависит лишь от ее скорости и вычисляется по формуле $w_n = v^2/R$. Оказывается, что аналогичная формула имеет место и в случае движения точки по произвольной пространственной кривой.

Теорема 1 (о разложении ускорения). Пусть $\mathbf{f}(t)$ – вектор-функция, описывающая движение точки по некоторой кривой C. Рассмотрим разложение $\mathbf{w} = \mathbf{w}_t + \mathbf{w}_n$ ускорения $\mathbf{w}$ этой точки, в котором вектор $\mathbf{w}_t$ параллелен, а вектор $\mathbf{w}_n$ перпендикулярен вектору скорости $\mathbf{v}$. Тогда

$$\mathbf{w}_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad |\mathbf{w}_n| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R},$$

где скалярная величина R зависит лишь от траектории (и не зависит от скорости движения) и называется радиусом кривизны кривой C в данной точке.

Действительно, если $\mathbf{w}_t = \lambda\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, то

$$\lambda = \frac{\mathbf{w}_t \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}$$

в силу формулы леммы 1. Далее,

$$|\mathbf{w}_n|^2 = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{w}_t|^2 = |\mathbf{v}'|^2 - \frac{|\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} =$$

$$= \frac{|\mathbf{v}|^2|\mathbf{v}'|\left(1 - \cos^2(\mathbf{v}, \hat{\ } \mathbf{v}')\right)}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|^2|\mathbf{v}'|\sin^2(\mathbf{v}, \hat{\ } \mathbf{v}')}{|\mathbf{v}|^2},$$

откуда

$$|\mathbf{w}_n| = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{v}|^2\cdot\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

Осталось доказать, что величина

$$\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{f}'\times\mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3}$$

не зависит от характера прохождения данной траектории C, что вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. Если $\mathbf{f},\mathbf{g}$ – вектор-функции, φ – скалярная функция с отличной от нуля производной и $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t))$, то

$$|\mathbf{f}'\times\mathbf{f}''|\cdot|\mathbf{f}'|^{-3} = |\mathbf{g}'\times\mathbf{g}''|\cdot|\mathbf{g}'|^{-3}.$$

(Продифференцируйте два раза равенство, связывающее данные функции.) ■ ■

В рассмотренные выше уравнения не случайно входили вторые производные, поскольку по третьему закону Ньютона имеем $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, значит, $m\mathbf{f}'' = \mathbf{F}$. В дальнейшем мы будем исследовать так называемые системы с одной степенью свободы, т.е., с математической точки зрения, рассматривать дифференциальные уравнения, содержащие скалярные функции.

9.4. О числе e. Как получить решения простейшего уравнения второго порядка – уравнения $y'' = a$, $a = \text{const}$, ясно из изложенного выше.

Задача 9. *Докажите, что решения уравнения* $y' = k\,y$ *имеют вид* $\varphi(x) = Ce^{kx}$.

Заметим, что указанные функции очевидно удовлетворяют данному дифференциальному уравнению. Для доказательства обратного утверждения продифференцируем функцию $\varphi(x)e^{-kx}$, где φ – это решение данного уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)e^{-kx}\right) = \varphi'(x)e^{-kx} - k\varphi(x)e^{-kx} = \left(\varphi'(x) - k\varphi(x)\right)e^{-kx} = 0,$$

следовательно, $\varphi(x)e^{-kx} = C = \text{const}$, т.е. $\varphi(x) = Ce^{kx}$.

Рассмотрим теперь следующие уравнения, в которые входят вторые производные.

Лемма 4. Пусть $\varphi(x), \psi(x)$ – соответственно решения уравнений $y''+\omega^2 y = 0$ и $y''-k^2y=0$. Тогда $\varphi(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, $\psi(x) = ae^{kx}+be^{-kx}$.

Продифференцируем:

$$\left((\psi(x)' \pm k\psi(x)e^{\mp kx})\right)' = (\psi'' \pm k\psi'(x))\, e^{\mp kx} \mp (\psi'(x) \pm k\psi(x))\, ke^{\mp kx}$$
$$= e^{\mp kx}\left(\psi'' - k^2\psi(x)\right) = 0.$$

Значит,

$$\begin{cases} \psi' + k\psi(x) = e^{kx}c_1, \\ \psi' - k\psi(x) = e^{-kx}c_2, \end{cases}$$

откуда и следует формула для функции ψ.

Упражнение. Докажите формулу для решения первого уравнения. ■

Как мы видели, при решении дифференциальных уравнений используется основное число математического анализа – число e, которое обычно вводится как предел некоторой последовательности или сумма некоторого ряда. Рассмотрим решение φ дифференциального уравнения $y' = y$ с начальными данными $\varphi(0) = 1$, так что $\varphi(1) = e$. Оказывается, что в формулах $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ и $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ выражения $(1+1/n)^n$ и $\sum_{k=0}^{n} 1/k!$ суть приближения к значению $e = \varphi(1)$, получаемые, соответственно, стандартными методами приближенного решения дифференциальных уравнений – методом ломаных Эйлера и при помощи приближений Пикара.

Упражнение. а) Рассмотрим ломаную $P_0P_1\ldots P_n$ на плоскости, определенную следующим образом: $P_0(0,1)$, $P_i(i/n, y_i)$, где точки P_i таковы, что угловой коэффициент звена P_iP_{i+1} этой ломаной равен ординате y_i. Докажите, что $y_n = (1+1/n)^n$.

б) Рассмотрим последовательность функций $\varphi_i(x)$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, а

$$\varphi_{i+1}(x) = 1 + \int_0^x \varphi_i(u)du, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Докажите, что $\varphi_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$.

(Имеем: а) $y_{i+1} - y_i = y_i/n$; б) $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$.)

Часто бывает удобным рассматривать не дифференциальные, а интегральные уравнения.

Упражнение. Докажите, что если функция φ непрерывна и $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(u)du$, то эта функция является решением дифференциального уравнения $y' = y$, причем $\varphi(0) = 1$.

Теорема 2. Функция $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, является решением дифференциального уравнения $y' = y$, в частности, $e = \varphi(1)$ $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

Имеем: $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{i} t^k/k! + \sum_{k=i+1}^{\infty} t^k/k! = \varphi_i(x) + r_i(x)$ и для функций φ_i выполняется рекуррентное соотношение $\varphi_{i+1}(x)$: $1 + \int_0^x \varphi_i(u)du$.

Далее,

$$\left|\int_0^x \varphi(u)du - \int_0^x \varphi_i(u)du\right| = \left|\int_0^x \left(\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\right) du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^x \left(\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}\right) du\right| = |x| \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \to 0 \text{ при } i \to \infty,$$

поскольку ряд для функции φ является сходящимся. Следовательно, если перейти к пределу в указанном рекуррентном соотношении, то получим, что $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(u)du$. В силу предыдущего упражнения, получаем, что φ – решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

Упражнение. Докажите, что функция φ непрерывна. ■

Теперь о ломаных Эйлера. Введем функцию $\chi_n : [0,1] \to [0,1]$ по формуле $\chi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ (здесь [.] - целая часть числа). Мы докажем одну лемму, которая показывает, что в данном случае можно также записать некоторое интегральное уравнение.

Лемма 5. Пусть ψ_n – кусочно-линейная фунция, графиком которой является ломаная Эйлера $P_0P_1 \dots P_n$. Тогда

$$\psi_n(x) = 1 + \int_0^x \psi_n(\chi_n(u))\, du, \quad x \in [0,1].$$

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что равенство доказано при $x \leqslant k/n$, где k – целое число, меньшее

n, пусть $x \in [k/n; (k+1)/n)$. Имеем

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= y_k + y_k(x - k/n) = \psi_n(k/n) + \psi_n(k/n)(x - k/n) = \\ &= \psi_n(k/n) + \int_{k/n}^{x} \psi_n(\chi_n(u))\, du = \\ &= 1 + \int_0^{k/n} \psi_n(\chi_n(u))\, du + \int_{k/n}^{x} \psi_n(\chi_n(u))\, du = \\ &= 1 + \int_0^{x} \psi_n(\chi_n(u))\, du.\end{aligned}$$

Поскольку в обеих частях полученного равенства стоят непрерывные функции, то оно верно и при $x = (k+1)/n$. ■

9.5. Сжимающие отображения.

Задача 10. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, причем $|f'(x)| \leqslant q < 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение.

Действительно, если $f(x) = x$ и $f(y) = y$, то

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| < |x - y|,$$

откуда следует, что $x = y$. Теперь для определенности предположим, что $f(0) > 0$. Выберем число b так, что $b > f(0)/(1-q)$. В силу теоремы Лагранжа $f(b) - f(0) = f'(a)b$, где $a \in (0; b)$, откуда $f(b) - b \leqslant f(0) + qb - b < 0$. Функция $y = f(x) - x$ непрерывна и на концах отрезка $[0, b]$ принимает значения разных знаков, поэтому существует такое число $x_* \in (0, b)$, что $f(x_*) - x_* = 0$, т.е. $f(x_*) = x_*$.

Нетрудно видеть, что в условиях этой задачи верна оценка $|x_*| \leqslant |f(0)|/(1-q)$.

Упражнение. Постройте пример, из которого следует, что условия $|f'(x)| < 1$, $x \in \mathbb{R}$, на производную недостаточно для существования решения рассматриваемого уравнения.

Заметим, что из приведенного рассуждения следует лишь существование решения, однако существует и алгоритм, позволяющий найти решение уравнения $f(x) = x$ с произвольной точностью. Соответствующее утверждение будет сформулировано в достаточно общем виде.

Вначале несколько определений.

Метрическим пространством называется множество X, на котором фиксирована метрика (расстояние) d, т.е. такая функция $(x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$, что: 1) $d(x, y) \geqslant 0$; 2) $d(x, y) = d(y, x)$ и 3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, последнее неравенство из понятных соображений называется неравенством треугольника. Читатель может даже считать, что $X = \mathbb{R}$ (или $X = \mathbb{R}^n$), а $d(x, y) = |x - y|$ (в случае $X = \mathbb{R}^n$ $|x - y|$ - это длина вектора).

Напомним, что метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность его точек имеет предел (см. главу 10). Как доказывается в курсах математического анализа, пространства $\mathbb{R}^n$ являются полными.

Далее, отображение $f \colon X \to X$ метрического пространства в себя называется сжимающим, если существует $\alpha \in (0; 1)$, такое, что $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Следующее утверждение называется теоремой о сжимающем отображении.

Теорема 3. Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, т.е. если отображение $f : X \to X$ - сжимающее, то существует такая точка x_*, что $f(x_*) = x_*$, причем $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 0$, а x_0 - произвольная точка пространства X.

Единственность неподвижной точки очевидна (см. решение задачи 10).

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$, а точка x_0 произвольна. Поскольку

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\left(f(x_n), f(x_{n-1})\right) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}),$$

то $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0) = a\alpha^n$, и, если $n > k > 0$, то

$$d(x_n, x_k) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} d(x_i, x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} a\alpha^{i-1} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} a\alpha^i = \frac{a\alpha^k}{1-\alpha},$$

значит, $d(x_n, x_k) \to 0$ при $n, k \to \infty$, т.е. эта последовательность фундаментальна. Если x_* - ее предел, то

$$f(x_*) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*,$$

т.е. x_* - это неподвижная точка данного отображения. ■

Упражнение. Докажите, что

$$d(x_*, x) \leqslant (1-\alpha)^{-1} d(f(x), x)\, \forall x \in X.$$

Следствие. Пусть x_* – неподвижная точка сжимающего (с константой α) отображения f, а y_* – неподвижная точка отображения g. Тогда

$$d(x_*, y_*) \leqslant (1-\alpha)^{-1} \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Действительно, по доказательству предыдущего упражнения

$$d(x_*, y_*) \leqslant \frac{d(f(y_*), y_*)}{1-\alpha} \leqslant \frac{d(f(y_*), g(y_*))}{1-\alpha} \leqslant (1-\alpha)^{-1} \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Ясно, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является сжимающей, если $|f'(x)| \leqslant q < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ верно аналогичное утверждение.

Упражнение. Докажите, что отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является сжимающим (относительно евклидовой метрики), если верно следующее неравенство для его частных производных:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant \frac{q}{n^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ где } q < 1.$$

Как мы видели, доказательство теоремы о сжимающем отображении совсем просто, а как мы вскоре убедимся, ее приложения разнообразны и глубоки.

Задача 11. Докажите, что последовательность, заданная формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, где $x_o \geqslant a$, имеет своим пределом число $\sqrt{a}$.

(Формула $f(x) = (x + a/x)/2$ определяет сжимающее отображение луча $[\sqrt{a}; +\infty)$ в себя.)

Следующая задача – прямое следствие теоремы 3. Попробуйте также найти и элементарное ее решение.

Задача 12. На план масштаба $1 : 10^5$ наложен план того же участка местности масштаба $1 : 10^6$. Докажите, что некоторая точка этой местности изображена на этих планах точками, одна из которых лежит под другой.

Теорема о сжимающем отображении применяется и для доказательства существования и единственности решений дифференциальных уравнений.

Пусть $C[a,b]$ – это пространство всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, метрика в котором введена по формуле

$$d_C(u,v) = \max_{t\in[a,b]} |u(t) - v(t)|.$$

Как известно, это пространство является полным. Рассмотрим теперь, к примеру, уравнение $y' = y$ и отображения, определенные формулами

$$f(u)(t) = 1 + \int_0^t u(\tau)\,d\tau\,,\quad g_n(u)(t) = 1 + \int_0^t u\left(\chi_n(\tau)\right)\,d\tau.$$

Упражнение. Докажите, что если $a \in (0,1)$, то отображения $f, g_n\colon C[0,a] \to C[0,a]$ являются сжимающими, причем

$$\max_{C[0,a]} |f(u) - g_n(u)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 3 будет играть важную роль и в дальнейшем.

9.6. Линеаризация. В данном пункте мы ограничимся обычными числовыми функциями. Хотя в этом случае можно провести и более простые рассуждения, однако достоинство приводимых доказательств в том, что они без особых затруднений могут быть перенесены на случай отображений $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

В отличие от школьного определения производной удобнее использовать другое (эквивалентное ему) определение.

Число a называется производной функции f в точке x_0 ($a = f'(x_0)$), если $f(x_0+h) = f(x_0) + ah + \alpha(x_0,h)$, где $\frac{\alpha(x_0,h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$ (для краткости далее будем писать $\alpha(h)$).

Теперь мы будем рассматривать не просто дифференцируемые функции, а так называемые функции класса C^1 (пишем $f \in C^1$), производная f' которых непрерывна.

Лемма 6. Если $f \in C^1(\mathbb{R})$, то для любого числа $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого положительного числа l найдется такое положительное число δ, что

$$|\alpha(h_1) - \alpha(h_2)| \leqslant l\,|h_1 - h_2|\ \forall\, h_1,h_2 \in [x_0-\delta; x_0+\delta].$$

Действительно,

$$|\alpha(h_1) - \alpha(h_2)| = |\alpha'(\xi)(h_1 - h_2)| =$$
$$= |f'(x_0 + \xi) - f'(x_0)||h_1 - h_2| \leqslant l|h_1 - h_2|,$$

если числа $|h_1|, |h_2|$ достаточно малы. ■

Теорема 4. Рассмотрим функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$. Пусть $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число m, что для любой функции $\beta \in C^1$, удовлетворяющей неравенствам $|\beta(x)|, |\beta'(x)| \leqslant m$, уравнение $f(x) + \beta(x) = 0$ имеет только одно решение в ε-окрестности нуля. В частности, $f(x) \neq 0$ при $x \in (-\varepsilon; \varepsilon) \setminus 0$.

Итак, $f(x) = ax + \alpha(x)$, здесь $a = f'(0) \neq 0$. Преобразуем уравнение $f(x) + \beta(x) = 0$ к виду $x = -a^{-1}(\alpha(x) + \beta(x))$ и обозначим через $g(x)$ правую часть полученного уравнения. Фиксируем число $q \in (0; 1/2)$. В силу леммы 6 существует такое число $\varepsilon_1 > 0$ (считаем $\varepsilon_1 < \varepsilon$), что

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant |a^{-1}|^{-1} q |x - y| \text{ при } |x|, |y| \leqslant \varepsilon_1.$$

Пусть $m < \min\{\varepsilon_1 |a^{-1}|^{-1}(1 - 2q), |a^{-1}|^{-1} q\}$, тогда

$$|\beta(x) - \beta(y)| < |a^{-1}| q\, |x - y|.$$

Покажем, что g является сжимающим отображением отрезка $[-\varepsilon_1; \varepsilon_1]$ в себя. Действительно,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |a^{-1}|(|\alpha(x) - \alpha(y)| + |\beta(x) - \beta(y)|) \leqslant 2q|x - y|$$

и

$$|g(x)| \leqslant |g(0)| + |g(x) - g(0)| \leqslant |a^{-1}|m + 2q|x| <$$
$$< (1 - 2q)\varepsilon_1 + 2q\varepsilon_1 = \varepsilon_1.$$

Для завершения доказательства осталось применить теорему о сжимающем отображении. ■

Упражнение. Приведите пример, показывающий, что условия: а) $f'(0) \neq 0$ и б) $|\beta'(x)| < m$ в данной теореме являются существенными.

Следствие (теорема об обратном отображении). В условиях теоремы 3 существуют такие положительные числа ε, δ и такая дифференцируемая функция $h\colon (-\delta;\delta) \to (-\varepsilon;\varepsilon)$, что $f(h(y)) = y$ при всех $y \in (-\delta;\delta)$.

Положим $\delta = m$ и рассмотрим постоянную функцию $\beta(x) = -y$. Пусть $h(y)$ – решение уравнения $f(x) + \beta(x) = 0$, т.е. уравнения $f(x) = y$. Таким образом, функция h существует и $h(y) = a^{-1}(y + \alpha(h(y)))$. Осталось доказать, что $|\alpha(h(y))|/|y| \to 0$ при $y \to 0$, что будет следовать из неравенства $|h(y)| \leqslant c|y|$, которое, в свою очередь, можно получить из сформулированного выше следствия теоремы 3. Детали этого рассуждения читатель может восстановить самостоятельно. ■

Приведем неточную, но выразительную переформулировку теоремы 4: если линейное уравнение имеет единственное решение, то и уравнение, достаточно близкое к нему, имеет единственное решение в окрестности начала координат.

Еще раз подчеркнем, что приведенные рассуждения переносятся почти без изменений на многомерный случай. Условие однозначной разрешимости системы $Ax = 0$ линейного приближения – это условие $\det A \neq 0$, где A – якобиева матрица отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, т.е.

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

9.7. Теорема Морса–Сарда.

Упражнение. Пусть $f \in C^1[a,b]$. Рассмотрим множество $f^{-1}(0)$ нулей этой функции и предположим, что $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in f^{-1}(0)$. Докажите, что множество $f^{-1}(0)$ конечно.

Будем говорить, что x – регулярная точка функции f, если $f'(x) \neq 0$, и что число y является регулярным значением этой функции, если все точки в прообразе $f^{-1}(y)$ являются регулярными (т.е. $f'(x) \neq 0$ если $f(x) = y$).

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 4 и такого простого факта: если непрерывная функция не имеет нулей на данном отрезке, то тем же свойством обладает любая достаточно близкая к ней функция.

Упражнение. Дайте аккуратную формулировку этого факта и докажите его.

Теорема 5. Пусть 0 – регулярное значение функции f класса C^1, заданной на отрезке $[a;b]$, причем $f(a), f(b) \neq 0$. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что любая функция $g \in C^1$, такая, что

$$|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)| < \delta \text{ при } x \in [a;b],$$

имеет в отрезке $[a;b]$ столько же нулей, что и функция f, причем каждый из них расположен в ε-окрестности некоторого нуля функции f.

Как говорят математики, невырожденные нули C^1-гладкой функции устойчивы относительно C^1-малых возмущений. ■

Упражнение. Докажите, что 0 является регулярным значением многочлена $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ тогда и только тогда, когда все его (действительные) корни – простые.

Следовательно, существует такое число $\sigma > 0$, что если $|a_i - b_i| < \sigma$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то многочлен $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ имеет столько же действительных корней, что и многочлен f. Однако многочлены, которые кажутся близкими с наивной точки зрения, могут иметь совершенно различные корни. Приведем классический пример [25].

Многочлен $q(x) = \prod_{k=1}^{20}(x - k) + 2^{-23}x^{19}$ имеет десять вещественных корней, хотя он отличается от многочлена с простыми корнями $1, 2, \ldots, 20$ всего в одном коэффициенте: $-209,999\ldots$ вместо -210, причем корням 10 и 11 соответствует пара комплексно-сопряженных корней $10,095\ldots \pm i \cdot 0,643\ldots$ многочлена q.

Поскольку уравнение $p'(x) = 0$, где p – многочлен, имеет конечное число корней, то многочлен имеет конечное число нерегулярных значений. Для произвольных C^1-гладких функций это, безусловно, неверно, однако можно утверждать, что нерегулярных значений в некотором определенном смысле мало.

Следующее утверждение является очень частным случаем теоремы Морса–Сарда.

Лемма 7. Мера множества нерегулярных значений C^1-гладкой функции равна нулю, т.е., если $f \in C^1(\mathbb{R})$, то

$$\mu C = \mu\{f(x) \mid f'(x) = 0\} = 0$$

(здесь μ – мера Лебега на прямой).

Без понятия меры можно обойтись, поскольку мера множества на прямой равна нулю, если это множество можно покрыть набором интервалов произвольно малой заданной суммарной длины.

В силу счетной аддитивности меры мы вправе считать, что функция f задана на отрезке $[0;1]$.

Упражнение. Докажите, что объединение счетного числа множеств нулевой меры имеет меру ноль.

Фиксируем число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы Кантора производная f' рассматриваемой функции равномерно непрерывна на отрезке $[0;1]$. Выберем число $n \in \mathbb{N}$ так, что $|f'(x_1) - f'(x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < 2/n$. Разделим этот отрезок на n равных частей и обозначим через $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, те из отрезков дробления, в которых имеется такая точка x_i, что $f'(x_i) = 0$. Если $y_1, y_2 \in \Delta_i$, то $|f(y_1) - f(y_2)| = |f'(c)||y_1 - y_2| = |f'(c) - f'(x_i)||y_1 - y_1| < \varepsilon/n$, так как $|c - x_i|, |y_1 - y_2| \leqslant 1/n$. Множество C содержится в объединении $\cup_{i=1}^{k} f(\Delta_i)$, а поскольку мы показали, что образ каждого из отрезков Δ_i имеет длину, меньшую ε/n, то суммарная длина отрезков из этого объединения меньше ε. ■

Заметим, что не очень сложно перенести доказательство этой леммы на случай C^1-гладких отображений $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, при этом $C = \left\{ f(x) \mid \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0 \right\}$. Если же $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, где $n > k$, нужно изменить как формулировку, так и доказательство. Рассмотрим, к примеру, отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, предполагая, что $f \in C^2$ (т.е. у этой функции существуют непрерывные частные производные до второго порядка включительно). Тогда

$$\mu \left\{ f(x,y) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \right\} = 0.$$

Применим это утверждение (доказательство которого опускаем) к функции $f(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 1)(2x^2 + y^2 - 1)$, расматривавшейся в главе 5. Имеем: $0 \in C$, по теореме Морса–Сарда найдется сколь угодно близкое к нулю отрицательное регулярное значение этой функции. Следовательно, если $f(x_0, y_0) = -\varepsilon$, то одна из частных производных $\partial f/\partial x\,(x_0, y_0)$, $\partial f/\partial y\,(x_0, y_0)$ отлична от нуля.

Пусть $\partial f/\partial y\,(x_0, y_0)$ и для простоты записи предположим, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $F(x,y) = (x, f(x,y) + \varepsilon)$, и его якобиеву матрицу в начале координат

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det A = \partial f/\partial y\,(x_0, y_0) \neq 0$, мы можем применить обобщение теоремы 3 на случай $n = 2$. Следовательно, существует такая функция $G\colon (u,v) \mapsto (g_1(u,v), g_2(u,v))$, что точка $(g_1(u,v), g_2(u,v))$ – единственное решение (в окрестности начала координат) системы

$$\begin{cases} x = u, \\ f(x,y) = v. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $h(u) = g_2(u,\varepsilon)$, являющуюся единственным решением системы

$$\begin{cases} x = u, \\ f(x,y) = -\varepsilon, \end{cases}$$

тогда $f(u, h(u)) = -\varepsilon$, т.е. уравнение $f(x,y) = -\varepsilon$ в окрестности начала координат является графиком некоторой функции, откуда следует, что это уравнение определяет множество, состоящее по крайней мере из четырех овалов. Из рассуждений, приведенных в главе 5, следует, что кривая, определяемая уравнением $f(x,y) = -\varepsilon$, состоит именно из четырех овалов.

9.8. Закон сохранения энергии. Вернемся снова к дифференциальным уравнениям. Далеко не всегда легко написать явную формулу для их решений. Идея следующего утверждения – основа для дальнейших исследований.

Лемма 8. Если функция φ – решение дифференциального уравнения $y'' + \sin y = 0$, то функция E, заданная формулой $E(t) = \frac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \cos\varphi(t)$, постоянна.

Действительно,

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt}E(t) = \varphi'(t)\varphi''(t) + \sin\varphi(t)\varphi'(t) = \varphi'(t)\left(\varphi''(t) + \sin\varphi(t)\right) = 0.$$

Упражнение. Докажите, что если $\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0$, то

$$\omega^2(\varphi(t))^2 + (\varphi'(t))^2 = \mathrm{const},$$

а если $\varphi''(t) - k^2\varphi(t) = 0$, то

$$-k^2\left(\varphi(t)\right)^2 + \left(\varphi'(t)\right)^2 = \text{const},$$

не используя полученных выше явных формул решений указанных уравнений.

В данном пункте будут исследоваться так называемые консервативные системы с одной степенью свободы [2], описываемые уравнениями вида

$$\ddot{x} = -U'(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Функцию U будем называть потенциалом (или потенциальной энергией). Удобно перейти от уравнения, содержащего вторую производную от неизвестной функции, к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -U'(x), \end{cases} \tag{$**$}$$

в которую входят лишь первые производные.

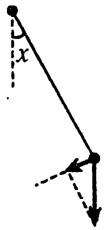
Будем называть полной энергией данной системы функцию $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную формулой $E(x,y) = y^2/2 + U(x)$.

Теорема 6 (закон сохранения энергии). Функция E постоянна на любом решении системы ($**$), т.е. если φ, ψ – функции, удовлетворяющие уравнениям системы, то $E\left(\varphi(t), \psi(t)\right) = \text{const}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \frac{d}{dt}E\left(\varphi(t),\psi(t)\right) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left(\psi(t)\right)^2 + U\left(\varphi(t)\right)\Big) = \\ &= \psi(t)\psi'(t) + U'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = \\ &= \psi(t)\big(-U'\left(\varphi(t)\right)\big) + U'\left(\varphi(t)\right)\psi(t) = 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Напомним, что если (φ,ψ) – решение системы, то множество $\{(\varphi(t),\psi(t)) \mid t \in (a;b)\} \subset \mathbb{R}^2$ называется траекторией этого решения. Линией уровня функции $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется прообраз числа $c \in \mathbb{R}$, т.е. множество $\{(x,y) \mid E(x,y) = c\}$. Доказанная теорема имеет следующую геометрическую переформулировку: каждая траектория консервативной системы целиком содержится в некоторой линии уровня функции энергии. Как будет видно из дальнейшего, линия уровня энергии может состоять из нескольких (и даже бесконечного числа) траекторий.



В качестве примера рассмотрим маятник в виде груза, прикрепленного к стержню. Пусть m – масса этой системы, а l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести системы стержень–груз. Пусть x – угол отклонения маятника от вертикали (рисунок). Из третьего закона Ньютона получаем уравнение $ml\ddot{x} = -mg\sin x$, или $\ddot{x} = -g/l \cdot \sin x$.

Упражнение. Докажите, что если $x(t)$ – решение уравнения маятника, а $\varphi(\tau) = x(\sqrt{l/g}\,\tau)$, то $\varphi'' = -\sin\varphi$.

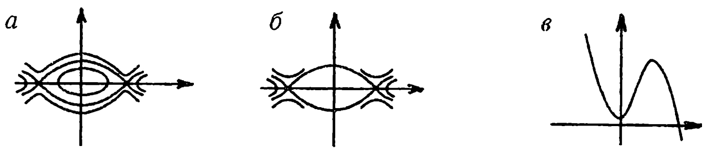
Таким образом, достаточно рассмотреть лишь уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ или равносильную ему систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

Уравнение маятника – пример так называемой консервативной системы с потенциалом $U(x) = -\cos x$.

Упражнение. Докажите, что $(U(x_1) - U(x_2))\,mg$ есть приращение потенциальной энергии системы стержень–груз в поле силы тяжести.

В силу доказанной теоремы – закона сохранения энергии – траектории уравнения (системы) маятника содержатся в линиях уровня энергии $E(x, y) = y^2/2 - \cos x$. В данном случае линия уровня энергии задается уравнением $|y| = \sqrt{2(c + \cos x)}$.



Нетрудно видеть, что, если $c < -1$, то соответствующее множество пусто (система не может иметь энергию, меньшую -1), при $c = -1$ линия уровня состоит из отдельных точек с координатами $(2\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. При $c \in (-1; 1)$ каждая линия уровня – объединение счетного числа замкнутых кривых (рисунок a).

Интересен случай $c = 1$, на линии уровня $|y| = 2\cos\frac{x}{2}$ лежат точки $((2k+1)\pi, 0)$, каждая из которых есть траектория (верхнее положение равновесия маятника), разбивающие ее на "арки" $y = \pm\cos\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, являющиеся траекториями, описывающими движение маятника из окрестности верхнего положения равновесия снова к этому положению (рисунок *б*). Ясно, что движение маятника с высоким уровнем энергии (т.е. большим единицы) есть вращение, при котором маятник последовательно проходит через верхнее и нижнее положения равновесия.

Упражнение. Нарисуйте траектории системы с потенциалом: а) график которого изображен на рисунке *в*; б) заданным формулой $U(x) = -\frac{k}{x} + \frac{M^2}{2x^2}$.

9.9. Малые колебания. Вернемся к общему уравнению. Ясно, что постоянные функции $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -U'(x), \end{cases}$$

если $U'(x_0) = 0$, $y_0 = 0$, таким образом, точки покоя данной системы лежат на оси абсцисс и совпадают с критическими точками потенциала U. Из физики известно, что устойчивыми положениями равновесия яаляются точки минимума потенциальной энергии. Дадим математическое определение устойчивости точки покоя системы дифференциальных уравнений.

Точка покоя (x_0, y_0) называется устойчивой, если для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что любое решение $(x(t), y(t))$ системы, начинающееся в δ-окрестности точки (x_0, y_0) (т.е. такое, что $(x(0), y(0)) \in D_\delta(x_0, y_0))$, остается в ε-окрестности этой точки при всех $t \geqslant 0$: $(x(t), y(t)) \in D_\varepsilon(x_0, y_0)$ $\forall t \geqslant 0$.

Назовем критическую точку x_0 потенциала U невырожденной, если $U''(x_0) \neq 0$.

Теорема 7. Если ξ – невырожденный минимум потенциала U, то $(\xi, 0)$ – устойчивая точка покоя системы.

Поскольку ξ – невырожденный минимум, то $U''(\xi) > 0$, поэтому существует такая окрестность точки ξ, что $U(x) > U(\xi)$, если x взято из этой окрестности и $x \neq \xi$. Фиксируем такое положительное число r, что $E(x,y) = y^2/2 + U(x) > E(\xi, 0) = c$ при всех $(x,y) \in D_r(x,0)$, $(x,y) \neq (\xi,0)$. Считаем далее, что $\varepsilon \leqslant r$. Положим $\sigma = \min\{E(x,y) \mid |x|^2+|y|^2=\varepsilon^2\}$.

Нетрудно видеть, что $\sigma > c$, в силу непрерывности функции E существует такое число $\delta > 0$, что $E(x,y) < \sigma$ при всех $(x,y) \in D_\delta(\xi,0)$. Если $(x_0,y_0) \in D_\delta(\xi,0)$, то $E(x(t),y(t)) = E(x(0),y(0)) < \sigma \leqslant E(x,y)$ для всех $t \geqslant 0$ и для всякой точки (x,y), лежащей на границе выбранной ε-окрестности. Поэтому решение, исходящее из этой точки, никогда не пересечет границу этой окрестности и, тем самым, останется в ней при всех $t \geqslant 0$. ■

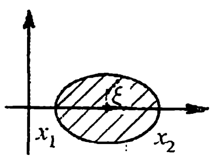
Существование функции, постоянной на решениях системы, так называемого интеграла системы (в данном случае – интеграла энергии), позволяет найти решение в квадратурах, т.е. выразить его через первообразные элементарных функций. Поскольку $\dot{x} = y = \pm\sqrt{2(E-U(x))}$, то

$$\frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{2(E-U(x))}} = 1.$$

Предположим, что $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ и $E - U(x) > 0$ при $x \in (x_1;x_2)$. Проинтегрировав полученное равенство по $(x_1;x_2)$, получим, что

$$t_2 - t_1 = \pm\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}.$$

Пусть ξ – невырожденный минимум потенциала U. Для значений энергии, близких к $E(\xi,0)$ (но больших его), линии уровня функции E является гладкой кривой, окружающей точку $(\xi,0)$. Пусть x_1, x_2 – это абсциссы ее точек пересечения с осью Ox (рисунок).



Решение $(x(t),y(t))$, траекторией которого является эта кривая, периодично. Поскольку его период равен удвоенному времени движения по дуге от точки $x_1(E)$ к $x_2(E)$, то верна

Теорема 8. Период движения по замкнутой траектории определяется формулой

$$T(E) = 2\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}. \quad ■$$

Пусть $S(E)$ – площадь области, ограниченной замкнутой траекторией движения с энергией E.

Упражнение. Докажите, что $T(E) = \dfrac{dS}{dE}$.

(Поскольку $S(E) = \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2(E-U(x))}\,dx$, то можно воспользоваться формулой Барроу и, кроме того, возможностью продифференцировать подынтегральную функцию по E.)

Продолжим изучать колебания в окрестности точки покоя системы. Пусть, как и ранее, $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) \neq 0$. Тогда

$$U(x) = \tfrac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right),$$

и, сделав замену $\xi = x - x_0$, $\eta = y$, получим, что $\dot{\xi} = \eta$, $\dot{\eta} = -U''(x_0)\xi + o(\xi^2)$. Рассмотрим так называемую систему малых колебаний в окрестности точки покоя $(x_0, 0)$, т.е. систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = -U''(x_0)\xi, \end{cases}$$

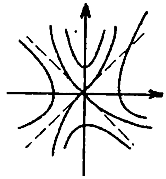
являющуюся линейным приближением к исходной. При $\omega^2 = U''(x_0) > 0$ эта система равносильна уравнению $\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0$, решения которого имеют период $2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{U''(x_0)}$. При $U''(0) = -k^2 < 0$ ее траекториями являются: ветви гипербол $\eta^2 - k^2\xi^2 = \mathrm{const}$ и лучи, лежащие на их асимптотах. Естественно ожидать, что решения исходной системы близки в окрестности точки покоя к решениям системы малых колебаний. Точные формулировки – в следующей теореме.

Теорема 9. а) Пусть $U(0) = U'(0) = 0$, $U''(0), E > 0$. Периоды движения по замкнутым траекториям стремятся к периоду малых колебаний при $E \to 0$, т.е.

$$\lim_{E\to 0+} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(0)}}.$$

б) Если $U''(0) < 0$, то касательные к ветвям линии нулевого уровня энергии имеют уравнения $y = \pm\sqrt{-U''(0)}\,x$, т.е. совпадают с траекториями системы в вариациях (рисунок).

Ограничимся указаниями. При близких к нулю значениях энергии множество, заданное неравенством $E(x,y) \leqslant E)$, близко к эллипсу с полуосями $\sqrt{2E}$ и $\sqrt{2E/U''(0)}$, откуда



$$T(E) = \frac{dS}{dE} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(0)}} + o(1).$$

Если $U''(0) < 0$, то

$$y = \pm\sqrt{2\,(E - U(x))} = \pm\sqrt{-U''(0)x^2 + o(x^2)} = \\ = \pm x\sqrt{-U''(0)}\sqrt{1 + o(1)}. \blacksquare$$

Упражнение. Докажите, что если $(x_0, 0)$ – невырожденный максимум потенциала U, то эта точка является неустойчивой.

Ранее мы исследовали поведение решений систем, описывающих идеальные механические объекты, в которых, в частности, отсутствовали силы трения (что и обеспечивало сохранение энергии). Следующее приближение к реальности в примере с маятником состоит во введении в уравнение члена $a\dot{x}$, $a > 0$, поскольку при не очень больших скоростях величина трения о воздух пропорциональна скорости движения тела. Таким образом, получаем уравнение $\ddot{x} + a\dot{x} + \sin x = 0$ или равносильную ему систему

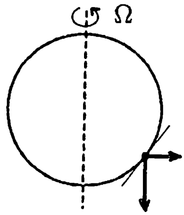
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - \sin x. \end{cases}$$

Упражнение. Докажите, что функция энергии строго убывает вдоль каждого нестационарного решения этой системы.

Упражнение. Докажите, что нижнее положение равновесия маятника (при учете сил трения) является устойчивым.

(В данном случае применимо рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 6.)

Завершим основную часть данной главы одним примером [2].



Рассмотрим проволочное кольцо, на которое надета бусинка (рисунок). Предположим, что это кольцо вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. Из физического смысла задачи ясно, что при достаточно больших угловых скоростях вращения нижнее положение равновесия будет неустойчивым, но взамен появятся два новых положения равновесия, которые будут устойчивыми.

Упражнение. Докажите, что движение бусинки в приведенном примере описывается уравнением с потенциалом

$$U(x) = -\tfrac{g}{r}\cos x - \tfrac{\Omega^2}{2}\sin^2 x.$$

Нарисуйте линии уровня энергии и картину траекторий при различных значениях Ω. При каких Ω нижнее положение равновесия неустойчиво?

Почти все, что изложено в данной главе, может служить основой факультативов в физико-математических и физико-технических школах. В очередной раз приходится констатировать, что программа средней школы напоминает, к сожалению, своего рода математический гербарий – в ней присутствуют многие разделы математики, но уж в очень засушенном виде. Это относится и к понятию производной. Как мы знаем из истории математики, на первом этапе дифференциальное исчисление развивалось под влиянием потребностей физики, однако в школьном курсе анализа есть не более чем упоминание об этом и самые простейшие примеры. Конечно, использование производной для исследования функций и построения их графиков есть тема, достойная внимания, но ограничиваться этим не следует. Автор считает, что материал, изложенный в пунктах 1 и 3 данной главы, есть яркий пример того, как можно установить связи между школьными курсами математики и физики и продемонстрировать учащимся, что скрывается за словами “развитие математики под влиянием физики”. Кроме того, изучение этих разделов оправданно с методической точки зрения еще и тем, что построение дифференциального исчисления для вектор-функций через понятие производной обычной (скалярной) функции позволяет повторить основные определения, свойства и утверждения. Учащиеся могут самостоятельно доказывать аналоги известных теорем. Может представить определенную трудность использование языка векторной алгебры, но поскольку доказательство основных свойств проводятся покоординатно, учитель имеет возможность повторить и данный важный раздел геометрии.

О других идеях этой главы. Задачу 5 можно обыграть с разных сторон (смотрите, к примеру, упражнение в конце пункта 2). Кроме того, эта задача является хорошей мотивировкой перед рассмотрением (и решением) несложных дифференциальных уравнений. Наконец, исследование поведения решений уравнения маятника и не очень сложно, и содержательно с математической точки зрения.

Теперь о материале пунктов 5–7. Изложенные в них рассуждения могут показаться неуместными, если рассматривать лишь функции, заданные на числовой прямой. Но дело в том, что обычное изложение дифференциального исчисления функций одной переменной обладает сильным дефектом: большинство доказательств не переносится на многомерный случай. Числовая прямая обладает следующими двумя особенностями: она является полем, так что кажется естественным определять производную через предел отношения, кроме того, это поле упорядочено. В частности, отсюда следует, что заданная на отрезке и непрерывная на нем функция является обратимой тогда и только тогда, когда она строго монотонна – результат, не имеющий аналога в размерностях, больших единицы. Автор попытался в простой ситуации провести достаточно общий подход и даже почти доказал теорему о неявной функции (хотя и не привел точной формулировки – смотрите конец пункта 7).

Глава 10

ОСНОВАНИЯ АНАЛИЗА

10.1. Поля рациональных и действительных чисел. Понятия натурального и целого числа, точнее, множества натуральных и множества целых чисел, были аккуратно определены в первой главе. Данная, последняя, глава посвящена понятию, лежащему в основе математического анализа – множеству $\mathbb{R}$ действительных чисел. Начнем же мы с того, что рассмотрим строгое описание множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Рассмотрим множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ упорядоченных пар целых чисел и введем в этом множестве отношение, считая, что $(a, b) \sim (c, d)$, если $ad = bc$.

Упражнение. Докажите, что введенное отношение есть отношение эквивалентности.

В соответствии с результатом данного упражнения мы вправе рассматривать множество классов эквивалентных пар. Назовем его множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, класс, содержащий пару (a, b), пока обозначим $[a/b]$. Положим $[a/b] \cdot [c/d] = [ac/bd]$ и $[a/b] + [c/d] = [ad + bc/bd]$.

Упражнение. Докажите, что введенные операции определены корректно (т.е. класс, стоящий в правой части равенств, не зависит от выбора представителя) и что эти операции определяют в множестве $\mathbb{Q}$ структуру поля.

Заметим, что описанная только что конструкция является общеалгебраической, именно, $\mathbb{Q}$ строится из $\mathbb{Z}$ как поле частных области целостности.

Назовем класс $[a/b]$ положительным числом, если $ab > 0$, отрицательным, если $ab < 0$, обозначим через $\mathbb{Q}_+$ множество положительных рациональных чисел. Отношение порядка в $\mathbb{Q}$ введем следующим образом: $x > y$, если $x - y \in \mathbb{Q}_+$.

Напомним, что поле называется упорядоченным, если операции и отношение порядка в нем удовлетворяют свойствам:

1) $\forall x, y, z \quad (x > y \implies x + z > y + z)$;
2) $\forall x, y\ \forall z > 0 \quad (x > y \implies xz > yz)$.

Упражнение. Докажите, что $\mathbb{Q}$ является упорядоченным полем.

Упражнение. Докажите, что всякое упорядоченное поле имеет характеристику нуль (см. главу 5) и, тем самым, содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$.

Конечно, мы будем использовать для рационального числа стандартное обозначение a/b. Для дальнейшего будет существенно, что в множестве $\mathbb{Q}$ выполнена следующая аксиома, называемая аксиомой Архимеда:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \colon |nx| > 1.$$

Действительно, если $x = a/b$, то достаточно взять $n = |b|$.

Прежде чем перейти собственно к теме данной главы, хочется подчеркнуть, что множество $\mathbb{R}$ – это первый пример числовой системы, которая, в отличие от $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, является математической абстракцией и имеет неалгебраическую природу.

Как обычно, наиболее короткий (но не всегда – наиболее понятный) путь – аксиоматический.

Будем называть множество, в котором введены две арифметические операции и отношение порядка, множеством действительных чисел, если оно есть упорядоченное поле, в котором выполнены аксиома Архимеда и аксиома непрерывности (полноты).

Существует несколько формулировок, при выполнении которых упорядоченное поле называется полным, приведем некоторые из них.

Аксиома непрерывности в форме Кантора:

Если $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ – такая последовательность отрезков, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ и $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$.

Далее, напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n, k \geqslant N \; |x_n - x_k| < \varepsilon.$$

Аксиома непрерывности в форме Коши:

Всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Аксиома непрерывности в форме Дедекинда:

Если A и B – два таких множества, что $\forall x \in A \, \forall y \in B \; (x \leqslant y)$, то $\exists z \colon (\forall x \in A \, \forall y \in B \;\; x \leqslant z \leqslant y)$.

Теорема 1. Приведенные аксиомы равносильны в случае, если в рассматриваемом поле выполнена аксиома Архимеда.

Поскольку доказательства импликаций являются стандартными утверждениями математического анализа, здесь мы их приводить не будем. Читатель может проделать это в качестве упражнения.

Стандартным является и доказательство того факта, что всякое ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю границу – $\sup E$, т.е. такое число m, которое является наименьшим элементом множества $\{c \in \mathbb{R} \mid x \leqslant c \ \forall x \in E\}$. Отметим в связи с этим следующее.

Теорема 2. Если F – упорядоченное поле, в котором всякое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань, то в этом поле выполнены и аксиома Архимеда, и аксиома непрерывности.

Проще всего проверяется справедливость аксиомы непрерывности в форме Дедекинда: достаточно положить $z = \sup E$. Перед тем как доказывать вторую часть теоремы, введем следующее определение.

Элемент $\alpha \in F$ называется бесконечно малым, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\alpha n| \leqslant 1$.

Таким образом, в упорядоченном поле аксиома Архимеда верна только в том случае, если это поле не содержит ненулевых бесконечно малых элементов.

Предположим, что в поле F утверждение аксиомы Архимеда не выполнено. Рассмотрим множество E всех бесконечно малых элементов этого поля.

Упражнение. Докажите, что множество E не имеет точной верхней (и нижней) границы. ■

Поле $\mathbb{R}$ определено приведенным набором аксиом однозначно. Именно, верна следующая теорема.

Теорема 3. Если $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ – упорядоченные поля, удовлетворяющие аксиоме Архимеда и аксиоме непрерывности, то существует монотонное отображение $\varphi\colon \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$, являющееся изоморфизмом полей.

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Каждый интервал упорядоченного поля F, удовлетворяющего аксиоме Архимеда, содержит рациональное число.

Как было отмечено, мы вправе считать, что $F \supset \mathbb{Q}$. Рассмотрим произвольный интервал $(a;b)$, $a, b \in F$. Пусть $1/n < b - a$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $k = \min\{m \mid m > an\}$. Нетрудно видеть, что $a < k/n < b$. ■

Докажем теорему 3. Обозначим через $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ подполя в $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, изоморфные полю рациональных чисел. Пусть $x \in \mathbf{R}_1$. Рассмотрим множество $A_1 = \{r \in \mathbf{Q}_1 \mid r \leqslant x\} \subset \mathbf{Q}_1 \subseteq \mathbf{R}_1$ и соответствующее ему множество $A_2 \subset \mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{R}_2$. Положим $\varphi(x) = \sup A_2$. Монотонность отображения φ очевидна. Поскольку ясно, что $A_2 = \{r \in \mathbf{Q}_2 \mid r \leqslant \varphi(x)\}$, то отображение φ – биекция.

Упражнение. Докажите, что φ – изоморфизм, причем отображения φ и φ^{-1} непрерывны. ■

В отличие от построения множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, когда для его определения мы принципиально не имели другого подхода кроме аксиоматического, можно предъявить различные конструкции, которые приводят к построению множества действительных чисел. Таким построениям посвящены пункты 4 и 5 этой главы, а в следующем пункте мы рассмотрим совершенно новый и непривычный объект – так называемую нестандартную прямую $^*\mathbb{R}$.

10.2. Нестандартные числовые прямые. Объекты, название которых приведено в заголовке, будут введены аксиоматически. И не случайно в заголовке данного пункта использовано множественное число. В отличие от аксиоматики множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ аксиомы нестандартной прямой не определяют этот объект однозначно. Не все из них имеют привычный вид, так что естествен вопрос о существовании объекта с требуемыми свойствами. Далее в 10.6 будет описан некий объект (а, вернее, доказано его существование), который в действительности и обладает нужными свойствами (правда, доказать мы этого не сможем).

Итак, нестандартной числовой прямой будем называть множество $^*\mathbb{R}$, которое является неархимедовым упорядоченным полем, содержащим поле $\mathbb{R}$. Еще одно очень важное условие на ${}^*\mathbb{R}$ будет приведено чуть далее.

В силу результатов предыдущего пункта поле ${}^*\mathbb{R}$ содержит ненулевые бесконечно малые элементы. Назовем элемент $z \in {}^*\mathbb{R}$ бесконечно большим, если $|z| > x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите, что если элемент $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R} \setminus 0$ является бесконечно малым, то $\omega = 1/\varepsilon$ – бесконечно большое число.

Приведем пример поля, удовлетворяющего сформулированным условиям. Пусть $\mathbf{R}(\varepsilon) = \{\, p(\varepsilon)/q(\varepsilon) \mid p, q \in \mathbb{R}[t], q \neq 0\}$ множество рациональных дробей от одной переменной с вещественными коэффициентами, которое очевидно является полем. Понятие положительного элемента в $\mathbf{R}(\varepsilon)$ введем следующим образом. Пусть $p(\varepsilon) = \varepsilon^k(a_k + \ldots + a_n\varepsilon^{n-k})$, $q(\varepsilon) = \varepsilon^l(b_l + \ldots + b_m\varepsilon^{m-l})$, где $a_k, b_l \neq 0$, $k, l \geqslant 0$, и $n \geqslant k$, $m \geqslant l$. Считаем, что $p(\varepsilon)/q(\varepsilon) > 0$, если $a_k b_l > 0$. Соответственно, $p_1(\varepsilon)/q_1(\varepsilon) > p_2(\varepsilon)/q_2(\varepsilon)$, если

$$\frac{p_1(\varepsilon)}{q_1(\varepsilon)} - \frac{p_2(\varepsilon)}{q_2(\varepsilon)} = \frac{p_1(\varepsilon)q_2(\varepsilon) - p_2(\varepsilon)q_1(\varepsilon)}{q_1(\varepsilon)q_2(\varepsilon)} > 0.$$

Упражнение. Докажите, что $\mathbf{R}(\varepsilon)$ – упорядоченное поле.

Заметим, что $1 - n\varepsilon > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следовательно, ε является бесконечно малым элементом поля $\mathbf{R}(\varepsilon)$, соответственно элемент $1/\varepsilon$ – бесконечно большой.

В дальнейшем будем называть нестандартными числами элементы, принадлежащие разности ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, и будем говорить, что $u, v \in {}^*\mathbb{R}$ бесконечно близки ($u \approx v$), если разность $u - v$ есть бесконечно малое число. Конечным числом будем далее называть элемент поля ${}^*\mathbb{R}$, не являющийся бесконечно большим.

Пример: в поле $\mathbf{R}(\varepsilon)$ числа $1 + \varepsilon$ и $1 + \varepsilon^2$ являются нестандартными, причем каждое из них бесконечно близко к единице.

Упражнение. Пусть многочлены p и q имеют указанный выше вид. Докажите, что число $x = p(\varepsilon)/q(\varepsilon)$ является: а) бесконечно большим, если $k < l$; б) бесконечно малым, если $k > l$; в) бесконечно близким к a_k/b_l при $k = l$.

Как видно из результата данного упражнения, для любого конечного числа $u \in \mathbf{R}(\varepsilon)$ существует бесконечно близкое к нему обычное действительное число. Оказывается, что это утверждение справедливо для любой нестандартной прямой. Именно, имеет место теорема.

Теорема 4. *Для всякого конечного нестандартного числа v существует единственное действительное число $y = \mathrm{st}(v)$ (называемое его стандартной частью), такое, что разность $v - y$ бесконечно мала.*

Единственность стандартной части очевидна, поскольку, если числа $v - y_1$ и $v - y_2$ бесконечно малы, то является бесконечно малым числом и их разность $y_1 - y_2$ (почему?), которая есть стандартное бесконечно малое число, а таковым является лишь ноль.

Для доказательства существования рассмотрим следующее разбиение множества действительных чисел: $\mathbb{R} = L \cup R$, где $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < v\}$ и $R = \{x \in \mathbb{R} \mid x > v\}$. По аксиоме Дедекинда найдется такое число $y \in \mathbb{R}$, что $x_1 \leqslant y \leqslant x_2$ при всех $x_1 \in L$, $x_2 \in R$. Предположим, что разность $v - y$ положительна и не является бесконечно малой. Тогда существует такое число $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, что $v - y > \varepsilon$, значит, $v > y + \varepsilon$, поэтому число $y + \varepsilon/2$, с одной стороны, больше y, значит, $y + \varepsilon/2 \notin L$, а с другой, меньше v, поэтому $y + \varepsilon/2 \notin R$. Полученное противоречие – $y + \varepsilon/2 \notin L \cup R$ – доказывает теорему. ■

Сформулируем теперь дополнительное требование на поле ${}^*\mathbb{R}$.

Принцип переноса. Всякое утверждение обычного математического анализа (на $\mathbb{R}$) имеет аналог, относящийся к полю ${}^*\mathbb{R}$, причем исходное утверждение и его аналог одновременно верны или же неверны.

Этот принцип прежде всего утверждает, что всякому отображению $f : A \to B$, где $A, B \subset \mathbb{R}$, соответствует его нестандартный аналог, т.е. отображение ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$, где $A \subset {}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$, $B \subset {}^*B \subset {}^*\mathbb{R}$, причем $\forall x \in A$ $({}^*f(x) = f(x))$. Мы будем и в дальнейшем использовать звездочку для обозначения нестандартных аналогов.

Рассмотрим примеры использования принципа переноса.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $f = \mathrm{const} \implies {}^*f = \mathrm{const}$;

2) уравнение $f(x) = 0$ имеет решение в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда имеет решение в ${}^*\mathbb{R}$ уравнение ${}^*f(x) = 0$;

3) множество $^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ непусто и состоит из бесконечно больших чисел.

1) То, что функция f постоянна, означает, что справедливо утверждение

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,\bigl(f(x) = f(y)\bigr).$$

По принципу переноса верно утверждение

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R}\,\bigl({}^*f(x) = {}^*f(y)\bigr),$$

т.е. $^*f = \mathrm{const}$.

2) Как и в предыдущем пункте, вначале переведем словесную формулировку на формальный язык. Если уравнение $^*f(x) = 0$ имеет решение, то верно высказывание

$$\exists x \in {}^*\mathbb{R}\ \bigl({}^*f(x) = 0\bigr),$$

поэтому верно и такое:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \bigl(f(x) = 0\bigr).$$

Ясно, что в разобранном примере вместо одного уравнения можно рассматривать систему, состоящую из конечного числа уравнений и неравенств.

3) Рассмотрим следующее верное утверждение:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,\exists n \in \mathbb{N}\,(n > x).$$

Выписав его нестандартный аналог

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R}\,\exists n \in {}^*\mathbb{N}\,(n > x),$$

который также верен, и взяв число x_0 бесконечно большим, получаем, что в множестве $^*\mathbb{N}$ имеется бесконечно большой элемент ω, в частности, $^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N} \neq \emptyset$.

Упражнение. Докажите, что $^*\mathbb{N} \cap \{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant 0 \,\} = \emptyset$.

Поэтому, если предположить, что число $\omega \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ конечно, то найдется такое число $k \in \mathbb{Z}$, что $k < \omega < k + 1$. Получаем, что хотя система

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N}, \\ x \in (k; k+1), \end{cases}$$

не имеет решений, число ω является решением его нестандартного аналога. ■

Из следующего примера будет видно, что к построению нестандартных аналогов нужно подходить с осторожностью, так что в предыдущих случаях мы не зря формулировали утверждения на языке высказываний.

Поскольку в $\mathbb{R}$ верен принцип математической индукции, то он имеет место и в $^*\mathbb{R}$, поэтому (казалось бы) должно быть верным утверждение

$$\forall M \subset {}^*\mathbb{R}\big(1 \in M \ \& \ (\forall x \in M \implies x+1 \in M) \implies M = {}^*\mathbb{N}\big),$$

однако само множество $\mathbb{N}$ является контрпримером к нему.

Дело в том, что при построении аналогов допускается рассмотрение не любых подмножеств $^*\mathbb{R}$, а лишь так называемых внутренних, т.е. являющихся аналогами подмножеств $\mathbb{R}$. Таким образом, ответ на появившийся парадокс: значит, множество $\mathbb{N}$ не является внутренним в $^*\mathbb{R}$!

Аналогично поскольку всякое внутреннее и ограниченное в $^*\mathbb{R}$ множество имеет, в силу принципа переноса, точную верхнюю границу, то множество бесконечно малых чисел также не является внутренним в $^*\mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите, что множество $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ не является внутренним.

10.3. "Нестандартные" формулировки и доказательства.

Упражнение. Докажите, что $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$ и $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.

Конечно, мы не сможем изложить сколь-нибудь полно математический анализ на "нестандартной" базе. Дальнейшее изложение будет организовано следующим образом. Будут приведены несколько "нестандартных" определений и с их помощью доказаны нестандартные аналоги известных утверждений.

Начнем с одного технического результата.

Лемма 3. Если множество A бесконечно, то $^*A \setminus A \neq \emptyset$ и все числа в этой разности нестандартные, причем множество A ограничено тогда и только тогда, когда все числа множества $^*A$ конечны.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек множества A, все элементы в которой различны. На формальном языке имеется инъективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \to A$, нестандартным аналогом которого является отображение $^*\alpha : {}^*\mathbb{N} \to {}^*A$, или, менее формально, последовательность $\{x_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ (у обычной последовательности вырос нестандартный хвост). Пусть $B = \{\alpha(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – множество значений исходной последовательности. Так как $\alpha(k) \neq \alpha(l)\ \forall k, l, \in \mathbb{N}$, то $^*\alpha(\omega) \neq {}^*\alpha(tau)\ \forall \omega, \tau \in {}^*\mathbb{N}$, в частности, $^*\alpha(\omega) \notin B\,\forall \omega \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Далее, если $^*\alpha(\omega) = a \in \mathbb{R}\setminus B$, то $\exists n \in \mathbb{N}\ (\alpha(n)) = a$, что невозможно. Можно доказать и больше.

Упражнение. Докажите, что все числа в $^*A \setminus A$ являются нестандартными.

Если A – ограниченное множество, то ясно, что все числа множества $^*A$ конечные. Если множество A не является ограниченным, то существует такая последовательность его точек, что $\forall n \in \mathbb{N}\,(x_n > n)$, значит, $\forall n \in {}^*\mathbb{N}\,(x_n > n)$, поэтому число x_ω бесконечно большое, если таковым является число $\omega \in {}^*\mathbb{N}$. ■

Нестандартное определение предела последовательности выглядит абсолютно так же, как и обычное. Именно, число a есть предел последовательности $\{x_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$, если

$$\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R} : \varepsilon > 0\ \exists k \in {}^*\mathbb{N}\colon\ (\forall n \in {}^*\mathbb{N} : n \geqslant k \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Однако можно дать другую, эквивалентную ей формулировку этого определения, в которой появится множество $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, не являющееся внутренним.

Лемма 4. Имеем $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff \forall \omega \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\ (x_\omega \approx a)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и такое число $k \in \mathbb{N}$, что $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant k$. Тогда

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}\,(n \geqslant k \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Если $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, то ω – бесконечно большое число, значит, $\omega \geqslant k$ и $|x_\omega - a| < \varepsilon$. Поскольку это утверждение верно для всех положительных $\varepsilon \in \mathbb{R}$, то $x_\omega \approx a$.

Если $a \neq \lim x_n$, то

$$\exists \varepsilon_0 > 0\colon\ \forall k\, \exists n \geqslant k\colon\ (|x_n - a| \geqslant \varepsilon_0),$$

поэтому в силу принципа переноса, если $k \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, то найдется такое бесконечно большое число $\omega \geqslant k$, что $|x_\omega - a| \geqslant \varepsilon_0$, т.е. $x_\omega \not\approx a$. ■

Теорема 5. Всякое бесконечное ограниченное множество в $\mathbb{R}$ имеет предельную точку.

Пусть множество A ограничено и бесконечно. Взяв $x \in {}^*A \setminus A$, нетрудно видеть, что точка $y = \mathrm{st}(x)$ и будет предельной для рассматриваемого множества. ■

Заметим, что последний шаг в проведенном рассуждении еще надо бы доказать. Но, как говорят приверженцы "нестандартного" подхода к преподаванию математического анализа, пусть его и доказывают те, кто стоит на позиции традиционного преподавания этой дисциплины.

Упражнение. Докажите, что функция $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$ тогда и только тогда, когда $\forall x \approx x_0$ ${}^*f(x) \approx {}^*f(x_0)$.

Теорема 6. Пусть функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда:

1) (Вейерштрасс) она ограничена;

2) (Кантор) она равномерно непрерывна;

3) (Коши) отрезок между точками $f(a)$ и $f(b)$ содержится в множестве значений этой функции.

1) Заметим прежде всего, что ${}^*[a; b] = \{z \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leqslant z \leqslant b\}$, все эти числа конечны и $\mathrm{st}(z) \in [a; b]$, значит, конечны и все значения ${}^*f(z)$, где $z \in {}^*[a; b]$, т.е. множество ${}^*f\left({}^*[a; b]\right)$ не содержит бесконечно больших чисел, следовательно, множество $f([a; b])$ ограничено.

Упражнение. Почему это рассуждение неприменимо к интервалу $(a; b)$?

2) Пусть числа $x, y \in {}^*[a; b]$ являются бесконечно близкими, тогда $c = \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y) \in [a; b]$, значит, ${}^*f(c) \approx {}^*f(x)$ и ${}^*f(c) \approx {}^*f(y)$, откуда ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$, что и означает равномерную непрерывность рассматриваемой функции.

3) Выберем $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, пусть $x_i = a + i(b-a)/\omega$, $i \in {}^*\mathbb{N}$. В силу принципа математической индукции в ${}^*\mathbb{N}$ найдется такое число $k \leqslant \omega$, что ${}^*f(x_k)\,{}^*f(x_{k+1}) \leqslant 0$. Ясно, что $x_k \approx \mathrm{st}(x_k) \approx x_{k+1}$, значит, ${}^*f(x_k) \approx {}^*f(x_{k+1})$, поэтому $\mathrm{st}\left({}^*f(x_k)\right) = \mathrm{st}\left({}^*f(x_{k+1})\right) = f\left(\mathrm{st}(x_k)\right) = 0$. ■

10.4. Метод сечений Дедекинда. В данном пункте будет приведено построение множества $\mathbb{R}$ по Дедекинду [14]. Назовем сечением в множестве положительных рациональных чисел такое его разбиение $\mathbb{Q}_+ = L \cup R$ на два (непересекающихся) подмножества, что $\forall x \in L \forall y \in R$ $(x \leqslant y)$. И назовем множеством $\mathcal{R}$ положительных действительных чисел множество всех таких сечений $L \cup R$ в множестве положительных рациональных чисел, у которых множество L не имеет наибольшего элемента. Каждому положительному рациональному числу r соответствует сечение, в котором $L = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < r\}$ и $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant r\}$, поэтому мы вправе считать, что $\mathcal{R} \supset \mathbb{Q}_+$.

Упражнение. Докажите, что сечение, обладающее указанным свойством, однозначно определяется указанием такого собственного подмножества L множества положительных рациональных чисел, что

1) $\forall x \in L\ \exists y \in L\colon\ x < y$;

2) если $0 < y < x$ и $x \in L$, то $y \in L$.

Назовем числа, принадлежащие множеству L, нижними, а не принадлежащие – верхними числами сечения. В дальнейшем мы, для удобства, будем обозначать сечения одной буквой, к примеру ξ, а через R_ξ и L_ξ будем обозначать множество верхних и, соответственно, нижних чисел сечения ξ.

Определим порядок в множестве сечений, считая, что $\xi > \eta$, если $L_\eta \subset L_\xi$ и $L_\eta \neq L_\xi$.

Далее будет удобно использовать другую формулировку этого определения.

Упражнение. Докажите, что $\xi > \eta$ тогда и только тогда, когда существует нижнее для сечения ξ число, являющееся верхним для сечения η.

Теорема 7. Множество $\mathcal{R}$ линейно упорядочено относительно введенного отношения порядка.

Действительно, транзитивность отношения очевидна: если $L_\xi \supset L_\eta$ и $L_\eta \supset L_\zeta$, то $L_\xi \supset L_\zeta$. Далее, если $L_\xi \neq L_\eta$, то существует число $r \in L_\eta \setminus L_\xi$, т.е. число, являющееся нижним для числа η и верхним для ξ. ■

Лемма 5. Если ξ, η – сечения, то множество $L = \{x + y \mid x \in L_\xi,\ y \in L_\eta\}$ также определяет сечение, которое будем называть суммой сечений ξ и η и обозначать, как обычно, $\xi + \eta$.

Проверим непустоту дополнения множества L и свойства 1), 2). Так как множества R_ξ, R_η непусты, то найдутся такие числа u и v, что $x < u$ для всех $x \in L_\xi$ и $y < v$ для всех $y \in L_\eta$, откуда

$z = x + y < u + v$ при всех $z \in L$. Далее, если $z = x + y \in L$, то найдутся такие числа $x_1 \in L_\xi$, $y_1 \in L_\eta$, что $x < x_1$ и $y < y_1$, значит, $z < x_1 + y_1 \in L$. Наконец, если $u < z = x + y \in L$, то $u = \frac{u}{x+y}x + \frac{u}{x+y}y \in L$, поскольку $\frac{u}{x+y}x < x$ и $\frac{u}{x+y}x \in L_\xi$. Аналогично $\frac{u}{x+y}y < y$. ∎

Упражнение. Докажите ассоциативность и коммутативность сложения сечений.

Заметим, что в случае, если сечения определяются рациональными числами, то сумма этих сечений просто определяется суммой рациональных чисел.

Упражнение. Докажите, что если ξ, η, ζ – сечения и $\xi > \eta$, то $\xi + \zeta > \eta + \zeta$.

Следующая лемма имеет чисто технический характер.

Лемма 6. Для всякого рационального числа a и сечения ξ найдутся такие числа $x \in L_\xi$ и $y \in R_\xi$, что $y - x = a$.

Пусть $z \in L_\xi$. Рассмотрим множество $M = \{n \in \mathbb{N} \mid z + na \in R_\xi\}$. Ясно, что оно непусто. Как известно, множество натуральных чисел вполне упорядочено, поэтому множество M имеет минимальный элемент n_0. Таким образом, $y = z + n_0 a \in R_\xi$, а $x = z + (n_0 - 1)a \notin R_\xi$, т.е. $x \in L_\xi$ и $y - x = a$. ∎

Теорема 8. Пусть сечения ξ и η таковы, что $\xi > \eta$. Найдется такое единственное сечение θ, что $\xi = \eta + \theta$. Сечение θ будем обозначать $\xi - \eta$ и называть разностью этих сечений.

Рассмотрим множество $L = \{x - y \mid x > y,\ x \in L_\xi,\ y \in R_\eta\}$ и покажем, что оно определяет сечение. Нетрудно видеть, что $L \neq \emptyset$ и $L \neq \mathbb{Q}_+$. Далее, если $u = x - y \in L$, то найдется такое число $x_1 \in L$, что $x_1 > x$, поэтому $u_1 = x_1 - y > u$ и $u_1 \in L$. Наконец, если $u < x - y$, где $x \in L_\xi$ и $y \in R_\eta$, то $u + y < x$, значит, $u + y \in L_\xi$, так что $u = (u + y) - y \in L$.

Почему построенное сечение является искомым? По определению суммы сечений имеем:

$$\begin{aligned} L_{\eta+\theta} &= \{z + u \mid z \in L_\eta,\ u \in L_\theta\} = \\ &= \{z + x - y \mid x > y,\ z \in L_\eta,\ y \in R_\eta,\ x \in L_\xi\}. \end{aligned}$$

Поскольку $z + x - y = x - (y - z) < x$, то $z + x - y \in L_\xi$, таким образом, $L_{\eta+\theta} \subset L_\xi$ и $\eta + \theta < \xi$. Докажем обратное неравенство, т.е. покажем, что выполнено включение $L_\xi \subset L_{\eta+\theta}$. Пусть $x \in L_\xi \cap R_\eta$ (такое число существует, так как $\xi > \eta$), а $x_1 > x$ и $x_1 \in L_\xi$. По предыдущей лемме найдутся такие числа $y_1 \in R_\eta$ и $z_1 \in L_\eta$, что $y_1 - z_1 = x_1 - x$, т.е. $x = x_1 - y_1 + z_1 \in L_{\eta+\theta}$. ■

Умножение в множестве сечений вводится совершенно аналогично.

Упражнение. Постройте в $\mathcal{R}$ операцию умножения сечений и докажите ее свойства.

Поскольку множество $\mathcal{R}$ линейно упорядочено, в нем также можно рассматривать сечения. Всякое число ξ из этого множества определяет сечение $\mathcal{L}_\xi \cup \mathcal{R}_\xi$, где $\mathcal{L}_\xi = \{\eta \in \mathcal{R} \mid \eta < \xi\}$, а $\mathcal{R}_\xi = \{\eta \in \mathcal{R} \mid \eta \geqslant \xi\}$.

Теорема 9. Для всякого сечения в $\mathcal{R}$ существует элемент этого множества (т.е. действительное число), разделяющее множество верхних и нижних чисел этого сечения.

Пусть $\mathcal{L}$ – множество нижних чисел данного сечения. Положим

$$L = \bigcup_{\xi \in \mathcal{L}} L_\xi.$$

Ясно, что множество L определяет сечение θ в $\mathbb{Q}_+$. Поскольку $L_\xi \subset L$ для любого $\xi \in \mathcal{L}$, то $\xi \leqslant \theta$. Пусть теперь η – верхнее число сечения в $\mathcal{R}$. Так как $\eta > \xi$ для любого $\xi \in \mathcal{L}$, то $L_\eta \supset L_\xi$, значит, $L_\eta \supset L$, поэтому $\eta \geqslant \theta$. ■

Построение множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел производится из множества $\mathcal{R}$ совершенно аналогично тому, как в главе 1 строилось множество $\mathbb{Z}$ по $\mathbb{N}$. Отметим только, что из требования дистрибутивности вытекают обычные правила действий со знаками при умножении.

Лемма 7. Справедливы тождества $(-1)a = -a$, $(-a)b = -ab$, $(-a)(-b) = ab$.

Заметим, что первое равенство не является тавтологией, поскольку $-a$ есть число, обратное a по сложению, т.е. такое число c, что $a + c = 0$, $\omega = -1$ также определяется при помощи сложения, $1 + \omega = 0$. Поэтому $0 = (\omega + 1)a = \omega a + a$, т.е. $c = -a = (-1)a$. Далее, $(-a)b = (-1)ab = -(ab)$ и $(-a)(-b) = a((-1)(-b)) = a(-(-b)) = ab$. ■

Теорема 10. Множество $\mathbb{R}$ полно.

Упражнение. Выведите эту теорему из теоремы 7. ■

10.5. Пополнение по Коши. Прежде всего наметим другой подход к построению множества действительных чисел – через понятие фундаментальной последовательности – являющийся более общей математической конструкцией, чем метод сечений Дедекинда.

Расмотрим множество всех фундаментальных последовательностей $\bar{x} = \{x_n\}$ рациональных чисел и введем в нем следующее отношение: $\bar{x} \sim \bar{x}'$, если $x_n - x'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, что это есть отношение эквивалентности. Следовательно, мы вправе рассмотреть множество $\mathcal{X}$ всех классов X эквивалентных друг другу последовательностей, назовем его множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел. Каждому рациональному числу q соответствует класс, содержащий стационарную последовательность: $x_n = q$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение. Докажите, что различным рациональным числам соответствуют различные содержащие их классы эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Поэтому $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Следующая лемма имеет технический характер.

Лемма 8. Если $\bar{x} \not\sim 0$ (т.е. $0 \neq \lim x_n$), то найдется такое натуральное число N, что либо $x_n > 0$ при всех $n \geqslant N$, либо $x_n < 0$ при всех $n \geqslant N$.

Поскольку $x_n \not\to 0$, то найдется такое число $\varepsilon > 0$ и такая возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, что $|x_{n_k}| > \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Среди членов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ будет бесконечно много либо положительных, либо отрицательных чисел. Предположим для определенности, что эта последовательность состоит из положительных чисел. Так как исходная последовательность фундаментальна, то найдется такое число N, что $|x_i - x_j| < \varepsilon/2$ при всех $i, j \geqslant N$. Пусть $n_s, i \geqslant N$, тогда $x_i = x_{n_s} + x_i - x_{n_s} \geqslant x_{n_s} - |x_i - x_{n_s}| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 > 0$. ■

Следствие. Если $\bar{x} \sim \bar{x}' \not\sim 0$, то найдется такое число N, что при всех $n \geqslant N$ знаки чисел x_n, x'_n совпадают.

Доказанная лемма дает возможность определить порядок в множестве фундаментальных последовательностей и показать, что если $X \neq 0$, то у X существует обратный по умножению элемент. Заметим, что сумма и произведение определяются покомпонентно. Резюмируем:

Теорема 11. Множество $\mathbb{R}$ является упорядоченным архимедовым полем.

Упражнение. Докажите эту теорему. ■

Рассмотрим $X, X' \in \mathbb{R}$. Назовем расстоянием между этими классами класс, содержащий последовательность $\varepsilon_n = |x_n - x'_n|$, где $\bar{x} = \{x_n\}$ и $\bar{x}' = \{x'_n\}$ – представители классов X и X'.

Упражнение. Докажите, что тем самым в $\mathbb{R}$ определена метрика.

Следующая теорема утверждает, что определенное нами пространство фундаментальных последовательностей является полным. Читатель может попробовать доказать ее самостоятельно.

Теорема 12. Всякая фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}$ имеет предел.

10.6. Построение модели нестандартной прямой. Кажущийся естественным подход к построению нестандартной прямой состоит в том, чтобы объявить бесконечно малыми числами стремящиеся к нулю последовательности действительных чисел. Однако, как нетрудно видеть, при таком определении ненулевое число может не быть обратимым.

Рассмотрим множество всех последовательностей действительных чисел и введем в нем отношение: $\bar{x} = \{x_n\}_1^\infty \sim \bar{y} = \{y_n\}_1^\infty$, если $x_n = y_n$ для "почти всех" $n \in \mathbb{N}$, или более формально, если

$$x_n = y_n \ \forall n \in A \in \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ – это некоторый фиксированный набор подмножеств $\mathbb{N}$.

Проведем прежде всего небольшое исследование. Выясним, какими свойствами должен обладать набор $\mathcal{F}$. Доказательство следующего утверждение – упражнение для читателя.

Лемма 9. Введенное выше отношение на множестве всех последовательностей является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда набор $\mathcal{F}$ непуст и обладает следующими свойствами:

(R1) $\forall A \subset B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $(A \in \mathcal{F} \implies B \in \mathcal{F})$,

(R2) $\forall A, B$ $(A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F})$. ■

Рассмотрим два набора:

$$\mathcal{F}_0 = \{A \mid |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\} \ , \ \mathcal{F}_d = \{A \mid 1 \in A\}.$$

Очевидно, что свойства (R1), (R2) имеют для них место, но как будет видно из дальнейшего, эти наборы не такие, какие требуются.

В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые наборы подмножеств непусты, не совпадают с $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и удовлетворяют свойствам (R1), (R2).

Упражнение. Докажите, что множество классов эквивалентных последовательностей, определенных посредством набора $\mathcal{F}_d$, естественным образом может быть отождествлено с $\mathbb{R}$.

Замечание. Ясно, что если $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, то в него не могут одновременно входить множества A и $\mathbb{N} \setminus A$ (докажите это).

Операции в множестве ${}^*\mathbf{R}$ (будем обозначать его так) вводятся покоординатно. Если положить

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} \text{ и } \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\},$$

то сложение и умножение переносятся и на множество классов эквивалентности.

Лемма 10. Имеем ${}^*\mathbf{R}$ – поле $\Longleftrightarrow$ $(\forall A \notin \mathcal{F} \implies \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F})$.

Действительно, если $\{x_n\}_1^\infty \not\sim 0$, то $A = \{k \mid x_k = 0\} \notin \mathcal{F}$. Если положить $y_n = 1/x_n$ при $n \notin A$ и $y_n = 1$ при $n \in A$, то $\{x_n\}\{y_n\} \sim 1$ в том случае, когда $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.

Упражнение. Закончите доказательство леммы. ■

Условие, появившееся в формулировке этой леммы, обозначим через (R3). Его роль видна из следующего утверждения.

Теорема 13. Набор $\mathcal{F}$ является максимальным (по включению) элементом среди всех наборов, удовлетворяющих свойствам (R1), (R2) и отличных от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет свойству (R3).

Пусть $\mathcal{F}'$ – какой-то содержащий $\mathcal{F}$ набор. Предположим, что $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F} \neq \emptyset$, возьмем множество A из этой разности, тогда $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. В силу (R2) $A \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}'$, значит, $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Упражнение. Докажите оставшуюся в этой теореме импликацию. ■

Замечание. Набор $\mathcal{F}_0$ не удовлетворяет условию (R3).

В соответствием с результатом упражнения, приведенного после леммы 9, будем предполагать, что набор $\mathcal{F}$ не содержит конечных множеств.

Теорема 14. Существует набор $\mathcal{F}^{\star}$, удовлетворяющий свойствам (R1)–(R3), содержащий $\mathcal{F}_0$ и не совпадающий с $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

В каком-то смысле доказательство этой теоремы очевидно, хотя, если вы попробуете построить (или хотя бы представить себе) такой набор, то слово "очевидно" вам захочется заменить на совсем другое ... Дело в том, что в этом доказательстве мы будем вынуждены использовать лемму Цорна – следующее утверждение, тесно связанное со знаменитой аксиомой выбора в теории множеств: если в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{A}$ любое его линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то в этом множестве есть максимальный элемент (т.е. такой элемент $\mathfrak{m} \in \mathfrak{A}$, что из неравенства $\mathfrak{m} \preceq \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} \in \mathfrak{A}$, следует, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{m}$).

Действительно, давайте рассмотрим линейно упорядоченное множество $\{\mathcal{F}_\lambda\}$ наборов, удовлетворяющих свойствам (R1), (R2). Ясно, что набор $\mathcal{F}' = \bigcup_\lambda \mathcal{F}_\lambda$ есть верхняя граница для каждого из наборов $\mathcal{F}_\lambda$ (докажите это, а для этого вначале придется понять, что же надо доказывать). По Лемме Цорна среди наборов, удовлетворяющих условиям теоремы, найдется максимальный элемент $\mathcal{F}^{\star}$, который и удовлетворяет условию (R3) в силу теоремы 13. ■

Построенный набор имеет достаточно странные свойства. Попробуем ввести порядок в множестве ${}^{\star}\mathbf{R}$. Рассмотрим вначале последовательности $\bar{x} = \{x_n\}_1^\infty$, $\bar{y} = \{y_n\}_1^\infty$, имеющие общий предел. Казалось бы, что если $\ldots < x_n < y_n < x_{n+1} < \ldots$, то невозможно никаким естественным образом определить $\bar{x} \leqslant \bar{y}$ или $\bar{y} \leqslant \bar{x}$.

Однако рассмотрим множество $A = \{n \mid x_n \leqslant y_n\}$. Если $A \in \mathcal{F}^{\star}$, то положим $\bar{x} \leqslant \bar{y}$, в противном случае, в силу того, что набор $\mathcal{F}^{\star}$ удовлетворяет свойству (R3), $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}^{\star}$, т.е. $\{n \mid x_n > y_n\} \in \mathcal{F}^{\star}$, в этом случае считаем по определению, что $\bar{x} > \bar{y}$.

Упражнение. Докажите, что класс, содержащий последовательность $\{\frac{1}{n}\}$, является положительным бесконечно малым числом.

Теорема 15. Множество ${}^*\mathbf{R}$ является упорядоченным неархимедовым полем, содержащим поле $\mathbb{R}$.

Упражнение. Докажите эту теорему. ■

Отметим еще одно свойство набора $\mathcal{F}^\star$.

Упражнение. Докажите, что если $A \cup B \in \mathcal{F}^\star$, то $A \in \mathcal{F}^\star$ или $B \in \mathcal{F}^\star$.

Вернемся к доказанной теореме. В силу теоремы 4 каждое конечное нестандартное число имеет стандартную часть. Рассмотрим число в ${}^*\mathbf{R}$, имеющее своим представителем последовательность $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$. Ясно, что его стандартной частью является либо 0 либо 1, в соответствии с тем, множество нечетных или же множество четных чисел входит в набор $\mathcal{F}^\star$. Однако ответа на этот вопрос мы не в состоянии дать, поскольку теорема гарантирует лишь существование набора с требуемыми свойствами.

Как мы видели ранее, чтобы говорить о нестандартной числовой прямой, еще недостаточно иметь упорядоченное неархимедово поле. Основным моментом является справедливость принципа переноса, к частичной проверке которого мы сейчас и переходим.

Пусть для любого подмножества $M \subset \mathbb{R}$ его нестандартный аналог – множество ${}^*M$ – состоит из классов тех последовательностей $\{x_n\}$, для которых $\{n \mid x_n \in M\} \in \mathcal{F}^\star$.

Нетрудно видеть (докажите это), что из свойств (R1)–(R3) следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 11. Справедливы тождества ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$, ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$. ■

Всякому отображению $f : M \to N$ сопоставим его нестандартный аналог – отображение ${}^*f : {}^*M \to {}^*N$, определенное по следующему правилу: ${}^*f(u)$ – это класс последовательности $\{f(x_n)\}$, где $\{x_n\}$ есть представитель класса $u \in {}^*M$. Корректность данного определения проверяется без труда.

Мы не будем доказывать справедливость принципа переноса в полной мере – для этого пришлось бы довольно глубоко погрузиться в математическую логику. Докажем только, что если нестандартный аналог некоторой системы уравнений и неравенств имеет решение, то имеет решение и исходная система.

Теорема 16. Пусть f, g, h и k – функции, заданные на множествах F, G, H и K соответственно. Если система

$$\begin{cases} {}^\star f(x) = {}^\star g(x), \\ {}^\star h(x) \neq {}^\star k(x) \end{cases}$$

имеет решение, то его имеет и система

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) \neq k(x). \end{cases}$$

Пусть $\{x_n\}$ – представитель класса решения первой системы. Рассмотрим следующие подмножества множества натуральных чисел: $A_F = \{n \mid x_n \in F\} \in \mathcal{F}^\star$, множества A_G, A_H и A_K определены аналогично. Далее, пусть $B = \{n \mid f(x_n) = g(x_n)\} \in \mathcal{F}^\star$, $C = \{n \mid h(x_n) = k(x_n)\} \notin \mathcal{F}^\star$, значит, $\mathbb{N} \setminus C \in \mathcal{F}^\star$. Нетрудно видеть, что

$$A_F \cap A_G \cap A_H \cap A_K \cap B \cap (\mathbb{N} \setminus C) \in \mathcal{F}^\star,$$

и если число $n_0 \in \mathbb{N}$ лежит в этом пересечении, то x_{n_0} – решение второй системы. ■

10.7. Нормы в поле рациональных чисел. В определении множества $\mathbb{R}$ фигурировала норма на множестве рациональных чисел. Поэтому результат пополнения по Коши зависит от рассматриваемой нормы. Естественно поставить вопрос: какие вообще нормы на $\mathbb{Q}$ существуют?

Пусть p – простое число, n – целое. Положим число $\operatorname{ord}_p n$ равным показателю наибольшей степени числа p, делящей n. Если n/k – рациональное число, то по определению $\operatorname{ord}_p n/k = \operatorname{ord}_p n - \operatorname{ord}_p k$. Положим, наконец, $|x|_p = 0$, если $x = 0$, $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p x}$ при $x \in \mathbb{Q} \setminus 0$.

Лемма 12. Функция $|.|_p$ является нормой на поле $\mathbb{Q}$.

Нужно проверить: 1) $|x|_p = 0$ только если $x = 0$, 2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ и 3) $|x + y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p$. Свойства 1), 2) очевидны. Проверим свойство 3).

Пусть $x = a/b$, $y = c/d$ – несократимые дроби. Поскольку наибольшая степень числа p, делящая сумму двух чисел, не меньше любой степени, делящей каждое слагаемое, то $\operatorname{ord}_p(x+y) = \operatorname{ord}_p \frac{ad+bc}{bd} = \operatorname{ord}_p(ad+bc) - \operatorname{ord}_p b - \operatorname{ord}_p d \geqslant \min\{\operatorname{ord}_p(ad), \operatorname{ord}_p(bc)\} - \operatorname{ord}_p b - \operatorname{ord}_p d = \min\{\operatorname{ord}_p a + \operatorname{ord}_p d, \operatorname{ord}_p b + \operatorname{ord}_p c\} - \operatorname{ord}_p b - \operatorname{ord}_p d = \min\{\operatorname{ord}_p a - \operatorname{ord}_p b, \operatorname{ord}_p c - \operatorname{ord}_p d\} = \min\{\operatorname{ord}_p x, \operatorname{ord}_p y\}$. Следовательно,

$$|x+y|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x+y)} \leqslant \max\{p^{-\operatorname{ord}_p x}, p^{-\operatorname{ord}_p y}\} = \\ = \max\{|x|_p, |y|_p\} \leqslant |x|_p + |y|_p. \blacksquare$$

Как видно из доказательства, норма $|\cdot|_p$ удовлетворяет усиленному неравенству треугольника. Такие нормы называются неархимедовыми (или ультранормами), они обладают необычными, с точки зрения привычных представлений, свойствами. Приведем одно из них.

Упражнение. Докажите, что если метрика в некотором пространстве неархимедова, то сферы этого пространства являются открытыми множествами в порожденной такой метрикой топологии.

В дальнейшем будет удобно использовать слегка видоизмененную норму. Положим (сохраняя старые обозначения)

$$|x|_p = \rho^{\operatorname{ord}_p x}, \ \rho \in (0;1).$$

Через $|.|_\infty$ будем обозначать обычную норму – модуль числа, а $|.|_0$ – это так называемая тривиальная норма: $|x|_0 = 1$ для всех $x \neq 0$. Хотя определенные выше два типа метрик $|\cdot|_p$ и различны, однако они эквивалентны, и, в частности, последовательность фундаментальна в одной из них тогда и только тогда, когда она является фундаментальной в другой.

Теорема 17 (Островский) [11]. Каждая нетривиальная норма $||.||$ на поле $\mathbb{Q}$ эквивалентна норме $|.|_p$ для некоторого простого числа p или же $p = \infty$.

Предположим вначале, что существует такое натуральное число n, что $||n|| > 1$, пусть n_0 – наименьшее из чисел, обладающих таким свойством, а число α таково, что $||n_0|| = n_0^\alpha$. Запишем произвольное натуральное число n в виде

$$n = a_0 + a_1 n_0 + \cdots + a_s n_0^s, \ 0 \leqslant a_i < n_0, \ a_i \in \mathbb{Z}, \text{ где } a_s \neq 0.$$

Заметим, что $||a_i|| \leqslant 1$. Тогда

$$||n|| \leqslant ||a_0|| + ||a_1||n_0^\alpha + \dots + ||a_s||n_0^{s\alpha} \leqslant 1 + n_0^\alpha + \dots + n_0^{s\alpha} =$$
$$= n_0^{s\alpha}(1 + n_0^{-\alpha} + \dots + n_0^{-s\alpha}) \leqslant n^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{1-\alpha i} = Cn^\alpha .$$

Поэтому $||n||^N = ||n^N|| \leqslant Cn^{\alpha N}$, откуда $||n|| \leqslant \sqrt[N]{C}n^\alpha$ для любого натурального числа N. Перейдя к пределу, получим, что $||n|| \leqslant n^\alpha$.

Докажем обратное неравенство. Воспользовавшись тем же представлением числа n, получим, что $n_0^{s+1} > n \geqslant n_0^s$. Далее, $||n|| = ||n_0^{s+1} - (n_0^{s+1} - n)|| \geqslant ||n_0^{s+1}|| - ||n_0^{s+1} - n|| \geqslant n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n)^\alpha = n_0^{(s+1)\alpha}\left(1 - (1 - n_0^{-1})^\alpha\right) \geqslant C'n^\alpha$. Поскольку постоянная C' зависит лишь от α и n_0, то, аналогично тому, как это было сделано ранее, получим $||n|| \geqslant n^\alpha$. Таким образом, $||n|| = n^\alpha$.

Упражнение. Докажите, что в рассматриваемом случае:

а) $||x|| = x^\alpha$ для всех $x \in \mathbb{Q}$;

б) $||\cdot||$ является нормой тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 1$;

в) эта норма эквивалентна обычной норме $|\cdot|_\infty$ на поле $\mathbb{Q}$.

Продолжим доказательство и предположим, что $||n|| \leqslant 1$ при всех $n \in N$, пусть $p = \min\{n \mid ||n|| < 1\}$.

Упражнение. Докажите, что p – простое число.

Пусть q – простое число, отличное от p. Если $||q|| < 1$, то при некотором натуральном N имеем, что $||q||^N < 1/2$, аналогично $||p||^M < 1/2$. Так как числа p^M и q^N взаимно просты, то существуют такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что $mp^M + nq^N = 1$. Тогда

$$1 = ||1|| = ||mp^M + nq^N|| \leqslant ||m||\cdot||p||^M + ||n||\cdot||q||^N \leqslant ||p||^M + ||q||^N < 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что нормы всех простых, отличных от p, чисел, равны единице, значит, для любого натурального числа n

$$||n|| = ||p||^{\operatorname{ord}_p n} = \rho^{\operatorname{ord}_p n}, \quad \rho \in (0; 1).$$

Упражнение. Докажите, что в этом случае $||x|| = \rho^{\operatorname{ord}_p x}$ при всех $x \in \mathbb{Q} \setminus 0$. ∎

Упражнение. Докажите, что если $|x|_p < 1$ для всех простых p, то число x целое.

В отличие от всех предыдущих глав материал главы 10 предназначен учителю для внутреннего использования, поскольку автор с трудом может представить себе состоящую из школьников аудиторию, которая была бы в состоянии воспринять содержание этой главы. Однако при преподавании математического анализа в средних учебных заведениях невозможно обойтись без точного определения числовой прямой, иначе ничего нельзя доказать! Единственный представляющийся разумным путь – аксиоматический. По мнению автора, среди приведенных формулировок аксиомы полноты (непрерывности) множества действительных чисел с методической точки зрения является наиболее естественной аксиома существования разделяющей точки. Ее формулировка геометрически наглядна и не требует введения дополнительных определений. Подчеркнем еще раз, что требование существования точной верхней границы множества равносильно и полноте, и справедливости аксиомы Архимеда. Что касается последней аксиомы, то автор не уверен, стоит ли ее вообще формулировать в явном виде. Если в не подготовленной к тому аудитории с серьезным видом сформулировать в качестве аксиомы высказывание

$$\forall x>0\ \exists n\in\mathbb{N}:\ 0<\tfrac{1}{n}<x,$$

в то время как всякий школьник скажет: “а давайте возьмем $n=[1/x]+1$”, то результатом будет полное непонимание.

Приложение*

О СТАТЬЯХ ЖУРНАЛА КВАНТ

1. О ключевых словах. Статьи для школьников, в частности статьи журнала "Квант", неоценимы как для самостоятельного изучения, так и при использовании на факультативах и в качестве дополнительного материала на уроках. Трудность заключается в том, как среди огромного количества статей найти необходимые для иллюстрации той или иной темы. Эта проблема обычно решается созданием каталога. Не так уж сложно разработать тематический каталог, однако, в отличие от научных статей по математике, статьи для школьников несравнимо более многоплановы. Один и тот же фактический материал можно изложить совершенно различными способами, показав взаимосвязи с другими задачами, теориями, проблемами, применив принципиально иные подходы к доказательствам. Тематический каталог не дает возможности найти статьи, в которых интересующая нас идея (понятие) находится, условно говоря, на втором плане.

Гораздо более гибким и удобным является подход, при котором содержание статьи кодируется набором из нескольких так называемых "ключевых слов". Среди ключевых слов, безусловно, есть такие, которые отражают предмет (комбинаторика, стереометрия – разделы математики; многоугольник, вектор, расстояние, уравнение – используемые понятия), и таких слов большинство. Но есть слова методического плана, отражающие логику изложения, например: метод, наглядность, описание, обобщение, приложения и другие.

Особую функцию выполняют следующие два слова: "задачи" – наличие этого слова в наборе ключевых слов говорит о том, что в статье есть упражнения для самостоятельной работы, или же некоторые утверждения и теоремы формулируются без доказательств, провести которые предлагается читателю; слово "стандартная" означает, что статья не содержит каких-либо нетривиальных результатов, неожиданных фактов, не требует творческого подхода.

Допустим, что в наборе ключевых слов встречается слово "площадь". Это может означать, что площадь – центральная тема статьи, или же, что это понятие появляется лишь в отдельном эпизоде. Этот эпизод может быть маленьким и не связанным с основным содержанием статьи, но интересным именно неожиданностью использования понятия площади.

---

*Приложение написано А.Н.Ильиной.

Несколько конкретных примеров:

В статье В.Болтянского "О понятиях площади и объема"(1977. №5. С. 2-9) ключевое слово "площадь" отражает суть содержания статьи, которая состоит в следующем: дается определение площади, основанное на рассмотрении палетки, аксиоматическое определение площади и рассматриваются способы вычисления площадей.

В статье С.Овчинникова "Если промежуток не замкнут ..."(1979. №10. С. 44-48) рассматривается несколько задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений. В одной из них требуется вырезать прямоугольник наибольшей площади из прямоугольника с отрезанным "уголком". Таким образом, здесь ключевое слово не отражает сущности статьи, а показывает связь основного материала с понятием "площадь".

В статьях А.Виленкина, Ю.Ионина "Площадь и интеграл" (1977. №5. С. 30-35), В.Гутенмахера "Основные теоремы" (1987. №10. С. 36-38) и И.Быстрого "Площадь сегмента параболы Нейля" (1980. №6. С. 14-15) применяется интегральное исчисление для вычисления площадей фигур, т.е. разговор идет о методе ее вычисления.

В статьях С.Гиндикина "Звездный век циклоиды" (1985. №6. С. 8-15) и С.Верова "Тайны циклоиды" (1975. №8. С. 19-27) речь идет о циклоиде, и площадь здесь лишь одна из характеристик этой кривой.

В статьях Я.Понарина "Вычисление площадей" (1976. №7. С. 25-27) и Г.Бевзы "Задачи можно решать проще" (1979. №11. С. 41-43) рассматриваются задачи на вычисление площадей многоугольников с помощью векторов.

В статьях С.Белого "Прямоугольный треугольник" (1976. №12. С. 50-54), С.Сефибекова "Четыре доказательства теоремы о биссектрисе" (1983. №8. С. 37) и "Доказательство геометрических неравенств" (1979. №3. С. 51-53) речь идет об элементах треугольника, при нахождении которых используется понятие площади. Таким образом, здесь площадь выступает как инструмент.

2. Список ключевых слов.

А

аксиоматика
алгоритм
арифметика

Б

биномиальные коэффициенты

Н

наглядность
непрерывность
неравенство

О

обобщение
объем
окружность
олимпиады
операции
описание
ориентация
отображение
оценки
ошибки

П

парабола
парадокс
параллелограмм
параметр
периметр
периодичность
пирамида
планиметрия
плоскость
площадь
поверхность
подобие
последовательность
построение
правдоподобие
предел
преобразование
приближение
приложения
программирование
прогрессии
проекция
производная
пространство
простые числа
проценты
прямая

Р

равносильность
радикал
разбиение
размерность
распознавание
расстояние
рациональность
рациональные числа
рекуррентность
рецензия
решение
решетки
ряд

С

сечение
симметрия
система счисления
системы
сравнение
средние
стандартная
степень
стереометрия
существование
сфера

Т

тело	трапеция
тетраэдр	треугольник
тождество	тригонометрия
топология	

У

угол	уравнение
узел	

Ф

фигура	функция
формула	

Ц

центр тяжести	цифра
цепная дробь	

Ч

четность	число пи
число е	

Э

экспонента	эллипс

3. Кодировка содержания статей. Приведем еще несколько примеров статей с наборами ключевых слов. Если в предыдущих примерах нас интересовало одно конкретное слово (площадь), то теперь посмотрим на набор в целом. Читателей может сам оценить, насколько полно отражают содержание статей предлагаемые наборы ключевых слов.

Депман И. "Совершенные числа". 1971. №8. С. 1-6.

Набор ключевых слов: история, делимость, простые числа, задачи.

Статья рассказывает об истории открытия совершенных чисел. Древним грекам были известны только два совершенных числа: $6 = 1+2+3$ и $28 = 1+2+4+7+14$. Евклид доказал, что любое число, представимое в виде произведения множителей 2^{p-1} и $2^p - 1$, где p и $2^p - 1$ – простые числа, является совершенным числом. Используя свое правило, Евклид нашел еще два совершенных числа: 496 и 8128.

До появления вычислительной техники было найдено 12 совершенных чисел, и этот поиск было связан с большими трудностями из-за необходимости проверки простоты чисел $2^p - 1$. В настоящее время известно 23 совершенных числа. Эйлер доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечетные совершенные числа, и могут ли они вообще существовать, остается неизвестным и по сей день. Также неизвестно, конечно ли множество совершенных чисел. В конце статьи приведены задачи для самостоятельного решения.

Савин А. "Инверсия и задача Аполлония". 1971. №8. С. 23-28.

Набор ключевых слов: окружность, преобразования, касательная, построение, задачи.

В статье дается определение преобразования плоскости – инверсии и доказывается ряд ее свойств. Это преобразование применяется для решения знаменитой задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей. Кроме того, в статье рассказывается об инверсорах – приборах, позволяющих рисовать образы, получающиеся инверсией из различных фигур. Несколько утверждений предлагается доказать читателю, есть задачи для самостоятельного решения.

Атамукас М. "Квадратный трехчлен". 1971. №9. С. 41-46.

Набор ключевых слов: уравнение, парабола, график, задачи, стандартная.

В статье графическим способом решаются различные задачи, связанные с квадратным трехчленом. Обращается внимание читателя, насколько удобнее бывает использовать именно геометрические, а не алгебраические соображения. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Понтрягин Л. "Комплексные числа". 1983. №2. С. 16-20.

Набор ключевых слов: комплексные числа, тригонометрия, преобразование, стандартная.

Статья начинается с краткой исторической справки о том, как возникли в математике комплексные числа. Дается определение комплексных чисел, действий над ними, их геометрическая интерпретация. Попутно доказываются некоторые тригонометрические формулы, тесно связанные с комплексными числами. В геометрической интерпретации умножения комплексных чисел используется поворот (отсюда ключевое слово "преобразование").

4. Обзор статей по теме "площадь". По мотивам использования понятия площади эти статьи можно разделить на четыре класса.

4.1. Статьи, где площадь – ведущая тема. Этот класс делится на два типа. В статьях, принадлежащих первому, речь идет об определении понятия площади.

Болтянский В. "О понятии площади и объема". 1977. №5. С. 2 9

Набор ключевых слов: площадь, предел, аксиоматика, интеграл, объем.

В статье дается определение площади, основанное на рассмотрении палетки – разбиения плоскости на конгруэнтные квадраты.

Рассматривается палетка, длины сторон квадратов которой равны 10^{-k}. Пусть плоская фигура F содержит фигуру, составленную из a_k квадратов этой палетки, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких квадратов. Тогда $a_k \cdot 10^{-2k}$ – значение площади фигуры F с недостатком, а $b_k \cdot 10^{-2k}$ – с избытком. Рассмотрим пределы $\underline{s}(F) = \lim_{k\to+\infty}(a_k \cdot 10^{-2k})$, $\overline{s}(F) = \lim_{k\to+\infty}(b_k \cdot 10^{-2k})$, первый из которых называется нижней площадью фигуры F, а второй – ее верхней площадью. Если эти пределы совпадают, то фигура F называется квадрируемой, а число $S = \underline{s}(F) = \overline{s}(F)$ называется ее площадью.

Далее дается аксиоматическое определение площади. Площадью $\mathcal{S}$ называется числовая функция, заданная на множестве всех квадрируемых фигур и удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $\mathcal{S}$ неотрицательна;
2) функция $\mathcal{S}$ аддитивна;
3) функция $\mathcal{S}$ инвариантна относительно движений;
4) единичный квадрат имеет площадь единица.

При таком способе определения площади палетка уже не нужна. Далее рассматриваются способы вычисления площадей.

Метод разложения. Фигуру, площадь которой нужно вычислить, пытаются разбить на конечное число частей так, чтобы из этих частей можно было составить фигуру, площадь которой уже известна.

Метод исчерпывания. Рассматривается квадрируемая фигура F и последовательность вложенных в нее квадрируемых фигур $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ Если часть фигуры F, не заполненная фигурой G_n, имеет площадь, неограниченно уменьшающуюся при $n \to \infty$, то $\mathcal{S}(F) = \lim \mathcal{S}(G_n)$. (Фигуры G_n постепенно "исчерпывают" фигуру F.)

Подробно рассказывается о наиболее универсальном методе применения первообразной.

Принцип Кавальери: если две фигуры, лежащие в одной плоскости, обладают тем свойством, что любая прямая, параллельная фиксированной прямой, лежащей в этой же плоскости, в пересечении с этими фигурами дает равные отрезки, то и площади этих фигур равны.

Дубровский В. "В поисках определения площади поверхности". 1978. №5. С. 31-34.

Набор ключевых слов: поверхность, площадь, последовательность, предел, задачи.

В статье предлагаются два способа определения площади поверхности. Первый способ – рассмотреть развертку. Однако не всякую поверхность можно развернуть, в статье показано, что развертки сферы не существует. Второй способ – рассмотреть последовательность вписанных в данную поверхность многогранников, предел последовательности площадей поверхностей можно назвать площадью поверхности. Однако дать корректное определение, основанное на этом подходе, достаточно сложно.

Как выйти из создавшегося положения – описывается в следующей статье.

Дубровский В. "Площадь поверхности по Минковскому". 1979. №4. С. 33-36.

Набор ключевых слов: поверхность, площадь, предел, обобщение, задачи.

В статье предлагается способ определения площади поверхности, предложенный немецким математиком Минковским. Площадью поверхности P называется предел

$$\mathcal{S}(P) = \lim_{\delta \to 0} \frac{V(P_\delta)}{2\delta},$$

где $V(P_\delta)$ – объем δ-окрестности этой поверхности. С помощью этого определения вычислены площади поверхности сферы, тора, цилиндра и конуса.

Лопшиц А. "Площадь ориентированных фигур". 1978. №3. С.2-10.

Набор ключевых слов: площадь, ориентация, многоугольник, вектор.

Статья является продолжением, или точнее, развитием идеи, предложенной в его же статье "Задача Мебиуса и ее продолжение", относящейся к другому классу, именно: измерять площадь ориентированных многоугольников не только положительными, но и отрицательными числами. Определение площади, использующее правило Мебиуса, дается аксиоматически. Рассматривается многовершинник $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n}$ – произвольная замкнутая ломаная, для которой указан порядок следования вершин. Заметим, что упорядоченный n-вершинник $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n}$ совпадает с n-вершинником $\overline{A_2 A_3 \ldots A_n A_1}$.

Каждому многовершиннику $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ ставится в соответствие некоторое число $\mathcal{S}\left(\overline{A_1A_2\ldots A_n}\right)$, которое может быть как положительным, так и отрицательным. При этом требуется, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $\mathcal{S}\left(\overline{ABC}\right) = -\mathcal{S}\left(\overline{BAC}\right)$;

2) $\mathcal{S}\left(\overline{A_1A_2\ldots A_n}\right) = \mathcal{S}\left(\overline{A_1A_2A_3}\right) + \mathcal{S}\left(\overline{A_1A_3\ldots A_n}\right)$;

3) если Q – середина отрезка A_iA_j, то $\mathcal{S}\left(\overline{PA_iQ}\right) = \mathcal{S}\left(\overline{PQA_j}\right)$ для любой точки P.

В статьях второго типа вычисляются площади конкретных фигур, рассматриваются также методы вычисления площадей.

Лопшиц А. "Задача Мебиуса и ее продолжение.". 1977. №3. С. 2-4.

Набор ключевых слов: площадь, ориентация, многоугольник, многочлен, задачи.

В статье приводится условие и ответ следующей задачи:

Каждые две из пяти произвольно заданных в плоскости точек A, B, C, D, E соединены прямой. Площади возникающих при этом пяти треугольников EAB, ABC, CDE, DEA, BCD равны a, b, c, d, e. Требуется выразить через них площадь пятиугольника $ABCDE$.

Пусть теперь заданы площади четырехугольников: $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$ – a', b', c', d', e'. Как выражается через них площадь того же пятиугольника $ABCDE$?

Оказывается, что искомая площадь есть корень уравнения

$$x^2 - x(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$$

в первом случае и корень аналогичного уравнения

$$x^2 - x\left(a'+b'+c'+d'+e'\right) + \left(a'b'+b'c'+c'd'+d'e'+e'a'\right) = 0$$

во втором. Решение этой задачи предоставляется читателю. Приводятся также некоторые ее обобщения. Обращается внимание на то, что Мебиус рассматривает не только выпуклые многоугольники, а площадь измеряется как положительными, так и отрицательными числами в зависимости от порядка обхода (ориентации) многоугольника.

Виленкин А., Ионин Ю. "Площадь и интегралы". 1977. №5. С. 30-35.

Набор ключевых слов: площадь, интеграл, приложения, задачи, стандартная.

В статье рассказывается о применении интегрального исчисления для вычисления площадей. Кроме того, приводятся примеры применения геометрических соображений для вычисления интегралов. Приводится также вывод физической формулы КПД цикла Карно.

Трофимов В. “Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки”. 1985. №5. С. 22-27.

Набор ключевых слов: периметр, площадь, максимизация, существование, наглядность.

В статье решается основная изопериметрическая задача: среди всех плоских фигур периметра L найти ту, которая имеет максимальную площадь.

Особое внимание обращается на необходимость доказательства существования решения. Предлагается серия опытов с мыльными пленками, наглядно убеждающих в том, что такое решение существует в физической реальности.

Гашков С. “Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника”. 1985. №10. С. 15-19.

Набор ключевых слов: многоугольник, площадь, периметр, максимизация, неравенство.

В статье рассматриваются изопериметрические задачи для многоугольников. Доказывается теорема, что среди n-угольников, лежащих в круге, наибольшую площадь и периметр имеет вписанный, а наименьшую площадь и периметр среди n-угольников, содержащих круг, имеет описанный. Отсюда выводятся различные интересные неравенства, связывающие площадь и периметр, радиусы вписанного и описанного кругов. Многие вспомогательные утверждения предлагается доказать читателю.

Статьи Н.Вагутена “Формула площади” (1981. №4. С. 17-20) и С.Сефибекова “О площади многоугольника” (1981. №4. С. 20-21) объединены общим сюжетом. Площадь многоугольника в них выражается через координаты его вершин. Приведены различные доказательства этой формулы.

Ключевые слова первой и второй статьи совпадают: многоугольник, площадь, координаты, задачи.

Быстрый И. “Площадь сегмента параболы Нейля”. 1980. №6. С. 14-15.

Набор ключевых слов: кривая, касательная, площадь, интеграл, задачи.

В статье при помощи интегрального исчисления вычисляется площадь сегмента параболы Нейля $y = \sqrt[3]{x^2}$, т.е. площадь фигуры, ограниченной параболой и касательной к ней.

4.2. Статьи, где с помощью понятия "площадь" доказывается основное утверждение, само по себе с этим понятием не связанное. К этому классу можно отнести следующие статьи.

Сатьянов П. "С помощью обратной функции". 1985. №5. С. 34-36. Набор ключевых слов: интеграл, интерпретация, площадь, задачи, функция.

Понятие площади применяется в статье для вычисления интегралов. Доказывается теорема: если функция f дифференцируема и обратима на отрезке $[c; d]$, функция g является обратной к f на $[c; d]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Основная цель – вычислить интеграл, средством для ее достижения является площадь.

Сефибеков С. "Четыре доказательства теоремы о биссектрисе". 1983. №8. С. 37.

Набор ключевых слов: треугольник, подобие, площадь, доказательство.

В статье четырьмя способами доказывается следующее утверждение: биссектриса BD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам BC и BA треугольника. В одном из приводимых доказательств применяется площадь.

Зурабишвили З. "Еще раз о пифагоровых тройках". 1981. №4. С. 39.

Набор ключевых слов: диофантовы уравнения, интерпретация, площадь.

В заметке решается геометрическим методом задача о нахождении пифагоровых троек: $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c \in \mathbb{N}$. Достаточно указать тройки, в которых числа a, b, c попарно взаимно просты. Для решения рассматриваются квадраты со сторонами a, b и c и их площади.

Котляр Б. "О числе целых точек в плоском множестве". 1989. №10. С. 37-38.

Набор ключевых слов: фигура, решетки, площадь, множество.

Статья посвящена решению следующей задачи: на листе клетчатой бумаги нарисована фигура G. Сколько узлов сетки находится в этой фигуре?

На этот вопрос точно ответить нелегко, а вот приближенный ответ дать несложно.

Каждому квадрату, целиком содержащемуся в фигуре, сопоставим узел, находящийся в левом нижнем углу квадрата. Число таких квадратов приблизительно равно площади S фигуры, а число их "левых нижних" углов – числу N всех узлов в области G. Значит, $N \approx S$. В статье приведены более строгие рассуждения.

4.3. Статьи, где решаются задачи определенного типа на нахождение площадей фигур (без изложения теории).

Дорофеев Г. "Отношение отрезков, площадей и объемов". 1975. №1. С. 55-59.

Набор ключевых слов: площадь, объем, многоугольник, задачи, стандартная.

В статье приводится серия задач, связанных с делением в некотором отношении отрезков, площадей и объемов. В некоторых из них возникает необходимость вычислить площадь отсекаемой части многоугольника или объем отсекаемой части многогранника по заданным точкам на его сторонах (ребрах).

Егерев В., Мордкович А. "Правильная пирамида". 1975. №3. С. 61-65.

Набор ключевых слов: пирамида, объем, площадь, задачи, стандартная.

В данной статье на примере задач, связанных с нахождением площади поверхности, объема, различных элементов в правильной пирамиде, демонстрируется метод сведения задачи к предыдущей.

Понарин Я. "Вычисление площадей". 1976. №7. С. 25-27.

Набор ключевых слов: площадь, вектор, задачи, стандартная.

В статье приводятся формулы для площадей треугольника и четырехугольника, использующие операции над векторами. Решаются стандартные задачи на применение этих формул.

Суконник Я., Горнштейн П. "Задачи на площади и двугранные углы". 1977. №12. С. 48-51.

Набор ключевых слов: площадь, сечение, угол, задачи, стандартная.

В статье рассматриваются стандартные стереометрические задачи на нахождение площадей и двугранных углов. Применяется формула для площади ортогональной проекции. В рассматриваемых задачах часто оказывается полезным рассмотреть сечение данного тела.

Овчинников С. "Если промежуток не замкнут...". 1979. №10. С. 44-48.

Набор ключевых слов: максимизация, периметр, площадь, задачи, ошибки.

В статье рассматриваются геометрические задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения. Обращается внимание на следующее: при решении этих задач нельзя забывать, что искомые величины иногда удовлетворяют определенным ограничениям, обусловленным их геометрическим смыслом. В таких случаях исследование рассматриваемой функции на границах области ее определения является существенной частью решения. В одной из приводимых в статье задач требуется максимизировать площадь.

4 4. Статьи, где понятие "площадь" не связано с основной темой.

Веров С. "Тайны циклоиды". 1975. №8. С. 19-27.

Набор ключевых слов: кривая, описание, площадь, приложения, задачи.

В статье рассказывается о циклоиде. Дается ее кинематическое и аналитическое определение, рассказывается о применении циклоиды при создании маятника. Попутно возникает вопрос о площадях криволинейных фигур и, в частности, о площади фигуры под аркой циклоиды.

Площадь, не являясь основной темой статьи, безусловно, занимает в ней важное место.

Гиндикин С. "Звездный век циклоиды". 1985. №6. С. 8-15.

Набор ключевых слов: история, кривая, касательная, площадь, приложения.

Статья носит описательный характер, в ней рассказывается о циклоиде, об истории ее открытия и изучения. Отдельное место уделено касательной к циклоиде и площади фигуры под аркой циклоиды, вычисляемой с помощью принципа Кавальери. Рассказывается о часах с циклоидальным маятником. Вычисление площади – один из эпизодов статьи.

Васильев Н. "Сложение фигур". 1976. №4. С. 22-29.

Набор ключевых слов: фигура, операции, выпуклость, площадь, задачи.

В статье речь идет о "векторной сумме"("сумме Минковского") плоских фигур. Дается определение этой операции, отдельно рассматривается сумма выпуклых фигур. Вводится понятие линейной комбинации фигур, доказывается теорема Брунна–Минковского: для любых двух выпуклых фигур F, G и любых положительных чисел a, b верно неравенство:

$$S_{aF+bG} \geqslant \left(a\sqrt{S_f} + b\sqrt{S_g}\right)^2.$$

Площадь помогает читателю понять смысл рассматриваемого понятия – "векторной суммы" фигур.

Гутенмахер В. "Основные теоремы". 1987. №10. С. 36-38.

Набор ключевых слов: множитель, многочлен, простые числа, интеграл, площадь.

В статье рассказывается о трех знаменитых теоремах – о разложении чисел на простые множители, разложении многочленов на неприводимые и о вычислении площади. Третья теорема – это теорема Ньютона–Лейбница.

5. Список статей журнала "Квант" по тематике книги.

К главе 1

1. *Беспамятных С.* Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях. 1983. №6. С. 35-38. (конфигурация, прогрессии, индукция, Дирихле принцип, задачи).
2. *Васильев Н., Гутенмахер В.* О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера. 1988. №2. С. 52-55. (многоугольник, угол, индукция, многогранник).
3. *Милг М.* Что сказал проводник? 1973. №8. С. 38-34. (индукция, логика, парадокс).
4. *Соловьев Ю.* Огюстен Луи Коши и математическая индукция. 1991. №3. С. 13-14. (средние, неравенство, индукция).
5. *Фукс Д., Фукс М.* Арифметика биномиальных коэффициентов. 1970. №6. С. 17-25. (биномиальные коэффициенты, индукция, сравнение, задачи).

К главе 2

6. *Васильев Н., Гутенмахер В.* Арифметика и принципы подсчета. 1983. №1. С. 30-35.
   (делимость, комбинаторика, включения и исключения, взаимно простые, задачи).
7. *Виленкин Н.* Комбинаторика. 1971. №1. С. 13-19. (комбинаторика, множество, биномиальные коэффициенты, задачи).
8. *Воронин С., Кулагин А.* Метод производящих функций. 1984. №5. С. 11-15. (диофантово уравнение, комбинаторика, метод, функция, задачи).
9. *Мешойрер Р.* Комбинаторные доказательства формулы Ньютона. 1978. №9. С. 45-46. (биномиальные коэффициенты, комбинаторика, обобщение, стандартная).
10. Об одной комбинаторной формуле. 1990. №2. С. 17. (комбинаторика, формула, многочлен, стандартная, рекуррентность).
11. *Фомин С.* Билеты и ящики. 1978. №8. С. 44-47. (комбинаторика, интерпретация, координаты, конфигурация, оценки).
12. *Фукс Д.* О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях. 1981. №8. С. 12-20. (многочлен, тождество, комбинаторика, функция, ряд).
13. *Шевелев В.* Латинские прямоугольники. 1990. №5. С. 6-9. (комбинаторика, рекуррентность, оценки, приближение).
14. *Ширшов А.* Об одной комбинаторной задаче. 1979. №9. С. 19-20. (комбинаторика, последовательность, рекуррентность, биномиальные коэффициенты, операции).

К главе 3

15. *Болтянский В.* Перемещение плоскости. 1980. №3. С. 2-8. (плоскость, преобразования, ориентация, композиция, задачи).
16. *Вагутен В.* Правильные многогранники и повороты. 1989. №10. С. 46-51. (многогранник, преобразования, построение, симметрия, задачи).
17. *Галиулин Р.* Как устроены кристаллы. 1983. №11. С. 10. (решетки, симметрия, преобразование, приложения, задачи).
18. *Гейдман Б.* Осевая симметрия. 1976. №9. С. 50-58. (симметрия, треугольник, расстояние, задачи, стандартная).
19. *Гейдман Б.* Композиция двух осевых симметрий. 1978. №2. С. 36-38. (плоскость, преобразование, композиция, задачи, стандартная).
20. *Дубровский В.* Преобразование плоскости в задачах на построение.

1987. №8. С. 40-42. (построение, плоскость, преобразования, задачи, стандартная).

21. *Зельманзон М., Хлабыстова Л.* Самосовмещения квадрата и тайнопись. 1980. №12. С. 32-34. (плоскость, преобразование, приложения, задачи).
22. *Изаак Д., Уткина Т.* Кружочки Степы Мошкина. 1980. №1. С. 42-45. (преобразования, композиция, задачи, построение, вектор).
23. *Колмогоров А.* Группы преобразований. 1976. №10. С. 2-5. (преобразование, симметрия, группы, задачи).
24. *Колмогоров А.* Паркеты из правильных многоугольников. 1986. №8. С. 3-4. (многоугольник, конфигурация, периодичность, симметрия, преобразование).
25. *Семенов Е.* Степа Мошкин повторяет геометрию. 1977. №10. С. 51-55. (преобразование, симметрия, построение, задачи).
26. *Сосинский А.* Конечные группы. 1987. №2. С. 8-11. (группы, симметрия, комбинаторика, отображения).
27. *Стомахин В.* Геометрические преобразования в планиметрических задачах. 1986. №12. С. 16-19. (планиметрия, преобразования, задачи, стандартная).

К главе 4

28. *Бендукидзе А.* Начинаем с неравенства Евклида. 1990. №12. С. 34-35. (неравенство, прогрессии).
29. *Берколайко С.* Использование неравенства Коши при решении задач. 1975. №4. С. 37-40. (неравенство, средние, минимизация, задачи, стандартная).
30. *Берколайко С.* Интеграл помогает доказывать неравенство Коши. 1979. №8. С.26. (неравенство, интеграл, средние, площадь, интерпретация).
31. *Гольдман А., Звавич Л.* Числовые средние и геометрия. 1990. №9. С. 62-65. (средние, интерпретация, неравенство, трапеция, задачи).
32. *Ижболдин О., Курляндчик Л.* Неравенство Йенсена. 1990. №4. С. 57-62. (неравенство, выпуклость, производная, средние, задачи).
33. *Конюшков А.* Неравенство Коши–Буняковского. 1987. №8. С. 42-44. (неравенства, интерпретация, задачи, стандартная, вектор).
34. *Пинтер Л., Хегедыш Й.* Упорядоченные наборы чисел и неравенства. 1985. №12. С. 14-16. (неравенство, метод, задачи, стандартная).

35. *Севрюк М.* Вариации на тему классических неравенств. 1979. №5. С. 18-21. (неравенство, доказательство, биномиальные коэффициенты).

36. *Смышляев В.* Применение неравенства Буняковского–Коши к решению некоторых задач. 1972. №1. С. 33-35. (неравенство, максимизация, задачи).

37. *Трофимов В.* Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки. 1985. №5. С. 22-27. (периметр, площадь, максимизация, существование, наглядность).

38. *Шкапенюк М.* Выпуклость функций и доказательство неравенств. 1980. №3. С. 21-24. (функция, выпуклость, неравенство, средние, задачи).

К главе 5

39. *Быстрый И.* Конструирование уравнений по графикам функций. 1975. №8. С. 54-57. (график, периодичность, приложения, задачи, стандартная).

40. *Вирский А., Звонкин А.* Овал, восьмерка, два овала... . 1979. №8. С. 21-25. (кривая, описание, параметр, топология, задачи).

41. *Воронин С., Кулагин А.* О задаче Пифагора. 1987. №1. С. 11-14. (диофантовы уравнения, простые числа, интерпретация, кривая, интеграл).

42. *Калужин Л.* К 100-летию теории множеств Георга Кантора. 1973. №12. С. 3-8. (история, множество, мощность).

43. *Котов Ю.* Умножим уравнения. 1980. №10. С.62. (кривая, поверхность, уравнения, операции).

44. *Маневич А.* О целочисленных точках кривых вида $x^n+y^n=c$. 1983. №7. С. 58. (кривая, график, диофантовы уравнения, неравенство).

45. *Соловьев Ю.* Арифметика эллиптических кривых. 1987. №7. С. 2-7. (диофантовы уравнения, координаты, график, касательная, операции).

К главе 6

46. *Бекламов Б.* Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам. 1974. №10. С. 17-19. (граф, задачи).

47. *Березина Л.* О графах с цветными ребрами. 1973. №8. С. 49-53. (граф, наглядность, задачи).

48. *Болтянский В.* Плоские графы. 1981. №7. С. 11-16. (граф, плоскость, инвариант, четность).

49. *Вагутен В.* Задача о графах или сказка “Иван-царевич и Серый Волк”. 1974. №11. С. 23-29. (граф, метод).

50. *Вакарелов Д.* Путешествие по графам. 1986. №7. С. 50-57. (головоломка, алгоритм, граф, группа, задачи).

51. *Кац М.* О плоских правильных графах. 1975. №11. С. 12-15. (граф, описание, существование, плоскость).

52. *Макаров Г.* Непересекающиеся тропинки. 1978. №10. С. 60-61. (топология, граф, поверхность, задачи).

53. *Приятель А.* Решение логических задач при помощи графов с цветными вершинами. 1974. №12. С. 14-22. (граф, логика, наглядность).

54. *Фосс Ф.* Элементы теории графов. 1973. №8. С. 55-59. (граф, задачи).

К главе 7

55. *Болтянский В.* Шесть зайцев в пяти клетках. 1977. №2. С. 17-20. (дирихле принцип, делимость, простые числа, дробь, задачи).

56. *Орлов А.* Принцип Дирихле. 1971. №7. С. 17-21. (дирихле принцип, делимость, планиметрия, задачи).

К главе 8

57. *Мищенко А., Соловьев Ю.* Кватернионы. 1983. №9. С. 10-15. (комплексные числа, обобщение, вектор, операции, аксиоматика).

К главе 9

58. *Арнольд В.* Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения. 1986. №2. С. 13-20. (уравнение, производная, кривая, приложения, задачи).

59. *Бродский Я., Слипенко А.* Функциональные уравнения и группы. 1985. №7. С. 23-26. (функция, уравнение, композиция, группа, задачи).

60. *Веселов А.* О математике гармонических колебаний. 1986. №5. С. 9-13. (уравнение, производная, кривая, приложения).

61. *Лодкин А.* Функциональное уравнение на сфере. 1977. №6. С. 57-60. (функция, сфера, вектор, непрерывность).

62. *Табачников С.* Дифференциальная геометрия вокруг нас. 1989. №11. С. 9-13. (кривая, приложения, поверхность, задачи).

К главе 10

63. *Табачников С.* Чего больше? 1990. №10. С. 34-36. (мощность, вещественные числа, существование, последовательность).

6. Справочно-информационная система "Квант. Математика". Кроме наборов ключевых слов при организации каталога существенную роль играет также классификация статей по тематическому указателю, отражающая их основную тему. На основе классификатора Американского математического общества О.А. Ивановым был разработан педагогически ориентированный указатель. Мы не будем приводить его здесь целиком, а ограничимся некоторыми примерами.

00 Общие вопросы преподавания

00B Учебники
00C Задачники
00D Справочники
00E Пособия
00F Труды конференций
00G Методы и идеи преподавания
00H Конференции учащихся
00Q Математика как профессия
00R Что такое математика
00Y Рецензии и библиография

52 Выпуклые множества

52— Учебная литература
52A Элементарные свойства
52B Приложения понятия о центре тяжести
52C Неравенства и экстремальные задачи
52D Диаметры фигур
52E Теоремы Радона и Хелли
52P Упаковки и покрытия
52Z Смесь

97 Занимательная математика

97— Сборники
97A Головоломки и ребусы
97B Логические задачи и игры
97C Арифметические задачи
97D Задачи с целыми числами
97E Фокусы и загадки
97P Полимино
97R Разрезания
97Y Математические сюрпризы
97Z Смесь

99 Конкурсные задачи

99— Сборники задач, варианты экзаменов
99A Алгебраические уравнения и неравенства
99B Тригонометрические тождества, уравнения и неравенства
99C Иррациональные уравнения и неравенства
99D Трансцендентные уравнения и неравенства
99E Системы уравнений
99F Текстовые задачи
99G Исследование функций
99H Геометрия: задачи на вычисление
99I Геометрия: задачи на доказательство
99M Геометрические задачи на экстремум
99P Соотношения в геометрических телах
99Q Вписанные и описанные тела
99U Задачи с параметрами
99V Графические методы решений
99X Стандартные идеи и методы
99Y Стандартные ошибки
99Z Смесь

Идея использования тематического указателя и ключевых слов в качестве, так сказать, "системы координат" легла в основу разработанной на математико-механическим факультете СПбГУ справочно-информационной системы "Квант. Математика".* Насколько элементы такой "пары координат" дополняют друг друга, видно из примеров записей, содержащих информацию о статьях, описанных в разд. 1 данного приложения.

В.Болтянский "О понятиях площади и объема"
Квант. 1977. №5. С. 2-9
Планиметрия и стереометрия
50P Площадь и объем
площадь, объем, предел, аксиоматика, интеграл

С.Овчинников "Если промежуток не замкнут ..."
Квант. 1979. №10. С. 44-48
Математический анализ
26I Производная и исследование функций
максимизация, периметр, площадь, задачи, ошибки

---

* О.А. Иванов, Д.А. Пляко. Справочно-информационная система "Квант. Математика". 1994. Версия 1.0.

Указатель литературы

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984. 272 с.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М., 1979. 432 с.

3* *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М., 1969. 328 с.

4. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.;Л., 1948. 492 с.
5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.;Л., 1951. 352 с.

6* *Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л.* Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. М., 1984. 310 с.

7* Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике. Л., 1981-1992.**

8* *Иванов О.А.* Контрольные и экзаменационные работы по математике / MATHESIS. Математика. Вып. 1(1). СПб., 1993. 52 с.

9* *Иванов О.А.* Сто олимпиадных задач для старшеклассников / MATHESIS. Математика. Вып. 2(2). СПб., 1993. 36 с.

10. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1. М., 1987. 482 с.
11. *Коблиц Н.* p-адический анализ и дзета-функции. М., 1982. 192 с.
12. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию. М., 1966. 648 с.
13. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М., 1977. 496 с.
14. *Ландау Э.* Основы анализа. М., 1947. 184 с.

15* Математический кружок, первый год обучения (5-6 классы). М., 1990. 86 с.

16. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М., 1972. 278 с.
17. *Милнор Дж., Хьюзмоллер Д.* Симметрические билинейные формы. М., 1986. 176 с.

18* *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975. 464 с.

19. *Постников М.М.* Теория Галуа. М., 1963. 220 с.

---

* В приведенном списке использованной литературы автор отметил звездочкой те книги, которые, по его мнению, можно рекомендовать преподавателям средних учебных заведений.

** Выходили ежегодно.

20* *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М.* О математической индукции. М., 1967. 144 с.

21. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. М.;Л., 1937. 476 с.

22* *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М., 1977. 208 с.

23. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ. М., 1987. 128 с.

24. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М., 1984. 416 с.

25. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М., 1980. 386 с.

26. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. М., 1959. 148 с.

27. *Харди Г.Г., Литльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948. 456 с.

28. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970. 444 с.

29. *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. М., 1972. 568 с.

30. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч.1-2. М., 1969. 528 с.

31* Энциклопедия элементарной математики. Т. 1,2. М.;Л., 1951. 448, 424 с.

32* *Яглом И.М.* Геометрические преобразования. Ч. 1. М., 1955. 284 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Иванов Олег Александрович

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор *И. Н. Рязанова*
Художественный редактор *Е. И. Егорова*

Издание подготовлено в $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX'е

ИБ №4297

Лицензия ЛР №040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 05.04.95. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,02. Усл. кр.-отт. 13,19. Уч.-изд. л. 11,34. Тираж 723 экз. Заказ 55.
Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Участок оперативной полиграфии типографии Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.