

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ им. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Научный редактор член-корреспондент РАН Б. Д. Аннин

НОВОСИБИРСК
СИБИРСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
2002

УДК 539.371
ББК 22.251.2
Ч 66

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (издательский проект № 02-01-14025)

Авторский коллектив:

Иванов Г. В. — к.ф.-м.н., доцент, зав.лаб. ИГиЛ СО РАН;
Волчков Ю. М. — д.ф.-м.н., профессор, в.н.с. ИГиЛ СО РАН;
Богульский И. О. — д.ф.-м.н., профессор, в.н.с. ИВМ СО РАН;
Анисимов С. А. — к.ф.-м.н., с.н.с. ИГиЛ СО РАН;
Кургузов В. Д. — к.ф.-м.н., доцент, с.н.с. ИГиЛ СО РАН.

Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский и др. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.

ISBN 5-94087-072-4

Монография посвящена построению эффективных численных алгоритмов повышенной точности интегрирования одномерных и многомерных задач динамики упругопластического деформирования и моделированию на их основе динамических процессов в твердых телах. Разработанные алгоритмы применяются для исследования неустановившихся процессов в механике твердых деформируемых сред, геофизике, оптике и других областях. В монографии обобщены результаты исследований, проведенных за период с 1980 по 2000 гг. в Институте гидродинамики СО РАН (г. Новосибирск) и Институте вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск).

Монография предназначена для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области численных методов и их применения к задачам механики деформируемого твердого тела.

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук профессор *А. И. Гулидов*
доктор физико-математических наук профессор *И. Ю. Цвелодуб*

ISBN 5-94087-072-4

©Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2002

©Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2002

©Коллектив авторов, 2002

Оглавление

Введение	9
Глава 1. Схемы решения динамических задач теории упругости на основе нескольких аппроксимаций	31
1.1. Одномерные гиперболические системы первого порядка...	31
1.2. Метод Годунова	34
1.3. Численное решение на основе нескольких аппроксимаций неизвестных функций	37
1.3.1. Аппроксимация смещений и напряжений	37
1.3.2. Дополнительные уравнения	39
1.4. Сходимость приближенного решения к точному в энергетической норме	41
1.5. Явная схема вычисления решения	45
1.6. Сравнение приближенного решения с точным	47
1.7. Выбор констант диссипации	49
1.8. Монотонная схема второго порядка точности	51
1.9. Численное решение краевых задач для одномерных систем гиперболических уравнений	59
1.9.1. Схема I (схема Годунова)	61
1.9.2. Схема II	62
1.9.3. Схема III	63
1.10. Качественные свойства построенных схем	64
1.11. Нестационарное деформирование пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига	69
1.12. Одномерные упругие задачи с осевой и сферической симметрией	76
1.12.1. Распространение звуковых волн	77
1.12.2. Численное решение упругой задачи	82

Глава 2. Схемы решения двумерных задач на основе нескольких аппроксимаций полиномами	90
2.1. Плоская и осесимметричная задачи двумерной динамической теории упругости	91
2.2. Схемы решения плоской задачи на основе нескольких аппроксимаций линейными полиномами	95
2.3. Схема решения двумерной осесимметричной задачи	107
2.4. Алгоритм построения численных решений в областях, состоящих из произвольных четырехугольников	113
2.4.1. Уравнения плоской динамической задачи упругости в локальной системе координат	114
2.4.2. Аппроксимация решения в элементарном четырехугольнике	116
2.4.3. Схемы решения вспомогательных одномерных задач	121
2.4.4. Устойчивость вычисления приближенного решения. Сходимость последовательности приближенных решений к точному решению задачи	122
Глава 3. Итерационная процедура решения двумерных задач	126
3.1. Корректировка решения последовательными приближениями	127
3.2. Симметричный вариант расщепления	132
3.3. Решение задач для областей, составленных из произвольных четырехугольников. Диссипативность приближенных решений	141
3.4. Двухэтапная процедура решения осесимметричной задачи	145
3.5. О точности решения двумерных задач	152
3.6. Плоская задача	152
3.7. Осесимметричная задача	156
3.8. Локальная аппроксимация решения полиномами порядка выше первого	159
3.9. Структура вычислительного алгоритма для неоднородной области. Адаптация сетки	164
3.10. Неотражающие условия	172

Глава 4. Численное моделирование многомерных процессов распространения волн в неоднородных упругих телах	174
4.1. Моделирование процессов распространения электромагнитных волн в слоистых диэлектриках.....	174
4.1.1. Постановка задачи.....	175
4.1.2. Алгоритм решения.....	178
4.1.3. Численный эксперимент.....	180
4.2. Моделирование распространения плоских ударных волн в анизотропной упругой среде.....	185
4.2.1. Плоские волны в анизотропном упругом слое.....	185
4.2.2. Численное решение на основе векторного расщепления.....	188
4.2.3. Итерационная процедура решения задачи.....	191
4.2.4. Прохождение волны через многослойную упругую преграду.....	194
4.3. Моделирование множественного ударного воздействия жестких ударников на упругую плиту.....	196
4.3.1. Постановка задачи.....	197
4.3.2. Алгоритм сборки.....	200
4.3.3. Численная реализация задачи в комплексе.....	202
4.4. Численное решение задачи распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде.....	208
4.4.1. Постановка задачи.....	209
4.4.2. Задача о действии заглубленного источника импульсного типа в однородной полубесконечной среде..	212
4.5. Определение физических и геометрических характеристик слоисто-неоднородной упругой среды.....	219
4.5.1. Постановка задачи.....	219
4.5.2. Выбор целевого функционала.....	223
4.5.3. Поиск минимума.....	227

Глава 5. Динамика упругопластического деформирования	233
5.1. Уравнения упругопластического деформирования	233
5.2. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 1)	235
5.2.1. Аппроксимация уравнений упругопластического течения	235
5.2.2. Вычисление λ по напряжениям и скоростям деформаций	236
5.2.3. Итерационная процедура вычисления λ	238
5.3. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 2)	238
5.4. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 3)	240
5.4.1. Вычисление напряжений по скоростям деформаций	240
5.4.2. Итерационная процедура вычисления скоростей деформаций и напряжений	244
5.5. Уравнения двумерной динамической задачи в криволинейной системе координат	245
5.5.1. Уравнения движения и соотношения Коши в плоской задаче	245
5.5.2. Уравнения движения и соотношения Коши в осесимметричной задаче	245
5.6. Аппроксимация искомых функций в двумерной задаче	246
5.6.1. Аппроксимация искомых функций в плоской задаче	246
5.6.2. Аппроксимация искомых функций в осесимметричной задаче	250
5.7. Энергетическое тождество	253
5.7.1. Энергетическое тождество в плоской задаче	254
5.7.2. Энергетическое тождество в осесимметричной задаче	256
5.8. Формулировка вспомогательных одномерных задач	257
5.8.1. Дополнительные уравнения в плоской задаче	257

5.8.2. Дополнительные уравнения в осесимметричной задаче	261
5.9. Условия неотрицательности диссипации	265
5.9.1. Условия неотрицательности диссипации в плоской задаче	265
5.9.2. Условия неотрицательности диссипации в осесимметричной задаче	267
5.10. Построение решения в областях, составленных из четырехугольных элементов	268
5.10.1. Вычисление коэффициентов полиномов	269
5.10.2. Устойчивость процесса вычислений	274
5.11. Сходимость приближенного решения к точному	275
5.11.1. Сходимость приближенного решения к точному в плоской задаче	275
5.11.2. Сходимость приближенного решения к точному в осесимметричной задаче	279
5.12. Алгоритм решения динамической упругопластической задачи для тел вращения при неосесимметричном нагружении	281
5.12.1. Построение решения для элемента тела вращения	281
5.12.2. Энергетическое тождество	286
5.12.3. Дополнительные уравнения	288
5.12.4. Сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи в энергетической норме	291
5.12.5. Построение решения для тела вращения	295
5.12.6. Определение скоростей на оси вращения	295
5.13. Моделирование процессов хрупкого разрушения	296
5.14. Примеры численных решений	299
5.14.1. Упругопластическое деформирование кольца	299
5.14.2. Деформирование цилиндрической оболочки под действием синусоидальной нагрузки	301
5.14.3. Упругопластическое деформирование круговой арки	303
5.14.4. Хрупкое разрушение кольца при боковом давлении	303

Глава 6. Динамика упругопластического деформирования при больших деформациях	309
6.1. Уравнения упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций	309
6.1.1. Уравнения упругопластического деформирования при малых компонентах девиатора упругих деформаций	313
6.2. Алгоритм решения динамических задач упругопластического деформирования при больших деформациях	315
6.2.1. Системы координат Эйлера и Лагранжа. Локальная система координат	315
6.2.2. Уравнения динамической упругопластической задачи с учетом больших перемещений	316
6.2.3. Определяющие соотношения	317
6.2.4. Алгоритм численного решения	321
6.2.5. Дополнительные уравнения. Ограничение на шаг по времени при вычислении решения по явной схеме	324
6.3. Квазиодномерная модель процессов высокоскоростного соударения	327
6.3.1. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины проникания ударника в преграду	328
6.3.2. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины зоны тыльных отколов	330
6.3.3. Зависимость глубины проникания от соотношения плотностей материалов ударника и преграды	330
6.3.4. Зависимость глубины проникания цилиндрического стержня в преграду от скорости соударения	332
6.4. Задача теплопроводности	333
6.4.1. Уравнения теплопроводности для четырехугольного элемента	334
6.4.2. Уравнения теплопроводности для системы элементов	335
6.4.3. Итерационное решение уравнений теплопроводности для системы элементов	336
Литература	337

ВВЕДЕНИЕ

Численное решение неодномерных задач динамики деформируемых тел связано с немалыми трудностями, которые определяются сложностью реологической модели среды, существенной нелинейностью задачи и т. д. Проблемы возникают даже при численном решении линейных задач — задач деформирования линейных упругих тел при малых деформациях. Они обусловлены или большой размерностью задачи, или необходимостью ее решения в специальных криволинейных системах координат, или иными требованиями, или всеми этими обстоятельствами одновременно. Особые трудности вызывает численное моделирование задач, в решении которых имеются поверхности разрывов.

Потребность в создании эффективных численных алгоритмов, описывающих нестационарные процессы, определяется как необходимостью повысить точность расчетов, так и невозможностью в большинстве случаев решить поставленную задачу аналитическими методами. Повышение точности схем для численного интегрирования квазилинейных систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, к которым сводятся задачи, описывающие нестационарные процессы в твердых телах, зачастую вступает в противоречие с качеством численного решения. К примеру, использование линейных разностных схем с порядком аппроксимации выше первого приводит к появлению у решения не имеющих физического смысла осцилляций в окрестностях разрывов. Другие алгоритмы могут порождать аналогичные эффекты у границ расчетной области.

Как правило, монотонность схемы обеспечивается явным или неявным формированием искусственной диссипации. Для широкого класса прикладных задач наличие в алгоритме искусственной вязкости вполне приемлемо и позволяет удовлетворительно не только качественно, но и количественно описать реальные процессы, если имеется возможность выполнить расчеты на достаточно мелкой сетке.

Однако существует ряд задач, для которых требования к точности решения оказываются достаточно жесткими. Одной из таких задач, например, является прямая задача сейсмологии, характерной особенностью

которой можно считать достаточно малую зону действия источника возмущений по сравнению с масштабами всей расчетной области. Кроме того, сильно осциллирующий характер источника накладывает ограничения на шаг по времени, что, в свою очередь, приводит к необходимости достаточно мелкой дискретизации пространства. Для решения задач сейсмологии обычно применяется полуаналитический метод, основанный на сведении исходной многомерной задачи к семейству одномерных краевых задач с последующим восстановлением решения [4, 154]. При решении этих задач классическими разностными схемами встречаются серьезные трудности.

Анализ задачи и тестовые расчеты показывают, что численное решение такого рода задач с применением разностной схемы принципиально возможно только в том случае, если при построении алгоритма были выполнены следующие условия:

- алгоритм дает монотонное решение и, в частности, не искажает его в окрестности оси симметрии при решении задачи в осесимметричной постановке;
- метод допускает естественную формулировку физических краевых условий (отсутствуют сложности, связанные с введением фиктивных слоев, и т. д.);
- схема не обладает искусственной диссипацией ни на продольных, ни на поперечных волнах (опыт показывает, что наличие даже малой искусственной диссипации очень скоро приводит к полному затуханию возмущения);
- алгоритм допускает обобщение на случай существенно неоднородной среды;
- условия на границах выделенного для численного решения объема эффективно обеспечивают неотражение от этих границ.

В монографии излагаются алгоритмы, в основном удовлетворяющие сформулированным требованиям, и решаются задачи динамики деформируемых твердых тел с использованием этих алгоритмов.

Существенное влияние на методы численного решения задач механики твердого тела оказали подходы, разработанные при решении задач газовой динамики и механики вязкой жидкости. Исторически вычислительные методы в этих областях стали применяться раньше, и в настоящее время здесь накоплен большой опыт. Достаточно полный обзор

существующих методов численного решения задач гидро- и газодинамики, анализ и классификация конечно-разностных схем по определенным признакам даны в работах [21, 22, 111, 118, 137, 139, 148, 163].

Как уже отмечалось, при численном решении нестационарных задач основные проблемы возникают тогда, когда необходимо рассчитывать разрывные решения. В настоящее время существует два основных подхода к расчету скачков решения: схемы с выделением разрыва и методы сквозного счета.

Метод выделения разрыва, позволяющий рассчитывать разрывные решения без размазывания скачков, был предложен С. К. Годуновым [1, 61] и основан на использовании подвижных сеток. В расчетной области, с помощью известного соотношения на скачке, выделяется поверхность разрыва. Течение за фронтом является гладким и расчет его по явным или неявным схемам не вызывает больших проблем. Метод широко и эффективно используется при расчете газодинамических течений [63], однако, применение его чрезвычайно затруднительно в задачах, для которых характерно присутствие различных поверхностей разрыва, положение и конфигурация которых неизвестны.

При выборе численной схемы сквозного счета для исследования распространения ударных волн и их взаимодействия следовало бы отдать предпочтение схемам повышенного порядка точности, позволяющим более точно описывать картину течения, экономить время решения задач на ЭВМ. С помощью широко известных схем второго и выше порядка точности [85, 141, 179, 182, 183] либо их модификаций решается значительное число задач газовой динамики. Решения неодномерных задач механики твердого тела с помощью методов повышенного порядка аппроксимации содержатся, например, в работах [75, 76, 175].

Однако известно [61, 63], что линейные разностные схемы второго и выше порядка аппроксимации немонотонны: возникающие при расчете разрывных решений нефизичные осцилляции существенно искажают картину течения. Как отмечалось выше, помехи, вызванные немонотонностью, для ряда задач принципиальны. Это приводит к необходимости разработки специальных способов борьбы с ними.

Как уже говорилось, одним из способов подавления нефизичных эффектов является процедура введения в дифференциальные уравнения дополнительных членов, которые принято называть искусственной вязкостью [137, 179]. Иногда к полученному решению применяют некоторое сглаживание [179], которое может быть каким-то образом связано с характером решения [90], либо применяться вообще безотносительно

к уравнениям. Анализ диссипативных и дисперсионных свойств таких схем можно найти в [165].

Эффективный способ построения монотонных схем, имеющих на гладких решениях второй порядок аппроксимации, предложен Борисом и Буком [46, 174] и развит в последующих исследованиях [53, 78, 79]. Метод, названный ими FCT-метод (метод коррекции потоков), представляет собой нелинейное консервативное сглаживание, имеющее два характерных этапа, — введение в схему диффузионного оператора и последующее исключение диффузии. Метод применялся в основном для решения задач газодинамики. В [75, 76] на основе идеи коррекции решения разработан гибридный конечно-разностный алгоритм для расчета динамических процессов деформирования оболочечных конструкций.

Еще одним способом борьбы с немонотонностью схем высокого порядка аппроксимации является процедура монотонизации, представляющая собой подстройку численного алгоритма в зависимости от характера решения на предыдущем временном слое. В результате строится нелинейная разностная схема, сохраняющая высокий порядок точности. Целое семейство таких схем с переменным шаблоном получено на основе принципа минимальных значений производной, предложенного в [91, 104, 126]. Их обзор можно найти в [6, 89, 121, 138].

На основе аналогичного подхода построены монотонные схемы второго и выше порядка аппроксимации в работах [180, 181]. К этому же семейству методов можно отнести опубликованные в [28, 33, 37, 170, 173] и изложенные в настоящей монографии схемы второго порядка точности, строгая монотонность которых обеспечивается специальным выбором входящих в схему параметров — констант диссипации, в зависимости от характера решения на нижнем слое по времени.

Недостатков, которые связаны с немонотонностью решения, лишен метод, предложенный С. К. Годуновым для расчета одномерных [1] и многомерных [63] задач газовой динамики. Метод представляет собой двухшаговую схему типа «предиктор-корректор». На каждом слое решение рассматривается как кусочно-постоянное, а для вычисления некоторых вспомогательных («больших») величин на промежуточном этапе используются формулы распада произвольного разрыва. Схема обладает свойством монотонности, но имеет только первый порядок точности. В [63] выписана и схема решения плоской динамической задачи теории упругости в декартовых координатах. На основе метода Годунова и его модификаций получено решение ряда задач динамической теории упругости как в плоской геометрии, так и в криволинейных

системах координат [127, 136, 158, 159]. В то же время, как отмечается в [111], существенная сложность определяющих уравнений твердого тела и специфика этих задач не позволяют непосредственно переносить результаты из области гидромеханики на задачи твердого тела.

Достаточно подробно этот вопрос обсуждается в [63, 118]. В качестве примера отличия подходов к решению этих задач обсуждаются особенности расчета процессов, имеющих ярко выраженный ударно-волновой характер, в сжимаемом газе и линейно-упругом твердом теле. Поверхности разрыва в линейно-упругом теле могут возникать только в результате формулировки имеющих разрывный характер граничных условий (и множиться в результате взаимодействия с границами раздела) и в вычислительном плане аналогичны контактному разрывам в газовой динамике. В отличие от ударных волн в газе, механизм, сдерживающий размазывание разрывов, здесь отсутствует, и при длительном расчете на основе схем первого порядка аппроксимации наблюдается практически полное выглаживание скачков. Для расчета таких линейных разрывов применение схем более высокого порядка аппроксимации, чем первый, имеет ряд преимуществ.

Подробный обзор и анализ различных подходов к решению задач динамической теории упругости и пластичности можно найти, например, в работах [15, 109, 111, 112, 128]. Существующие методы решения задач динамики твердых тел достаточно условно можно представить в виде трех направлений [111]:

- методы конечных элементов;
- характеристические и сеточно-характеристические методы;
- сеточные или конечно-разностные методы.

Следует сказать, что все три подхода не противопоставляются и их взаимное проникновение все более заметно в последнее время.

Под методами конечных элементов понимают подходы, основанные на дискретизации расчетной области и формировании конечных соотношений между искомыми величинами (действующими в узлах силами и их перемещениями) на основе законов механики в вариационной форме, минуя стадию формулировки краевых задач для систем дифференциальных уравнений. Такой подход дает определенные преимущества при описании процесса деформирования тел со сложной геометрией. Метод надежно зарекомендовал себя для решения статических задач и интенсивно используется при исследовании нестационарных процессов в деформируемых твердых телах. Среди отечественных работ этого направления отметим работы [5, 16, 20, 25, 36, 48, 101, 102, 119, 135, 140, 157].

Как сочетание и обобщение методов конечных элементов и вариационно-разностных можно упомянуть дискретно-вариационный метод [105, 106], разработанный для исследования нестационарных процессов в слоистых и композиционных средах. Конечно-элементный подход активно развивается за рубежом. В качестве примера здесь можно указать работы [18, 80, 168, 169, 177].

Детальному изложению, подробному обзору и анализу характеристических и сеточно-характеристических методов посвящена монография [118]. Эти подходы основаны на записи системы дифференциальных уравнений в характеристической форме с последующей их конечно-разностной аппроксимацией. Различают прямой и обратный характеристический метод [116, 160].

Прямой метод состоит в следующем. В начальный момент времени в среде выбирается некоторая сетка, в узлах сетки выстраиваются характеристические поверхности и с помощью соотношений на них определяется решение на некотором удалении от начального момента времени. В случае, когда характеристические поверхности существенно зависят от решения, реализация метода достаточно сложна (определенные трудности вызывает и неединственность характеристической формы системы в многомерном случае) — решение получается в точках, нерегулярно распределенных по пространству и на разном расстоянии от начального момента времени. Однако для решения задач динамики упругих материалов с малыми деформациями, когда скорости распространения возмущений в среде постоянны, метод представляет собой процедуру пересчета решения на один и тот же слой по времени и при этом сохраняет начальную регулярность выбранной сетки. При решении многомерных задач характеристический метод позволяет максимально сблизить области зависимости разностной задачи и исходной системы дифференциальных уравнений. В то же время даже для одномерных линейных задач в случае, когда из узла сетки выходят несколько поверхностей с постоянными, но различными скоростями, требуется интерполяция построенного решения, что расширяет область зависимости разностной задачи и в итоге снижает точность решения.

В обратном характеристическом методе решение для всей области вычисляется в точках, отвечающих одному и тому же шагу по времени. При этом используется конечно-разностная аппроксимация соотношений на характеристических плоскостях, касательных к характеристическим конусам, выходящим из этой точки на предыдущий (нижний) слой по времени. Метод требует интерполирования на предыдущем слое, при

этом расширяется область зависимости разностной задачи. В некоторых работах [117, 118] метод называется сеточно-характеристическим.

Описанный подход допускает большое многообразие модификаций, основанных и на различной интерполяции, и на различном выборе шаблона. В результате могут получаться как схемы первого порядка аппроксимации, так и методы второго порядка [93, 107, 131, 134, 142, 156, 178]. Иногда рассматриваются полухарактеристические схемы, которые получаются в результате записи в характеристической форме системы уравнений меньшей размерности, после предварительной конечно-разностной аппроксимации по одной из пространственных переменных.

Среди работ, посвященных применению сеточно-характеристических методов для решения динамических задач деформирования упругих и упругопластических тел, можно указать следующие [92, 94, 95, 130, 175].

Сеточные методы решения нестационарных задач механики деформируемого твердого тела основаны на аппроксимации гиперболической системы дифференциальных уравнений, описывающей движение среды, краевых и начальных условий для нее. В настоящее время это наиболее разработанный и часто используемый способ численного интегрирования задачи. Как правило, алгоритм представляет собой пересчет известного решения с нижнего слоя по времени (начиная с известных начальных условий) на следующий — верхний слой. Однако известны и многослойные методы, когда в вычислении решения на некотором шаге участвуют несколько предыдущих слоев.

В зависимости от того, дает ли процедура такого вычисления непосредственно значения искомых величин на верхнем слое или же для их определения необходимо решать систему перевязанных между собой уравнений, различают явные и неявные схемы. Одним из основных вопросов при выборе разностной схемы решения задачи является вопрос о целесообразности использования явных и неявных схем с точки зрения их точности и экономичности.

В пользу применения неявных схем при решении динамических задач говорит тот факт, что в большинстве своем неявные схемы абсолютно устойчивы, что, в принципе, позволяет вести интегрирование с большим шагом по времени. Кроме того, им может быть отдано предпочтение при решении задач с сильной неоднородностью рассчитываемого течения, так как использование в этом случае явных схем связано с большим различием величины шага интегрирования в разных точках области, что приводит к необходимости использования малого шага по

времени. Несомненно, неявные схемы более экономичны и при вычислении гладких решений.

Однако, как отмечается в [111], при расчете волновых процессов с большими градиентами, на шаг по времени все равно возникают ограничения, вызванные соображениями не устойчивости, а точности, которые не позволяют выбирать его достаточно крупным. В то же время, использование неявных схем с шагами интегрирования, сравнимыми с допускаемыми явными схемами, менее экономично ввиду дополнительных сложностей реализации неявных схем.

Среди используемых неявных разностных схем наибольшее применение получили схемы расщепления [14, 77, 122, 132, 146, 147] и схемы, основанные на методе дробных шагов [68–70, 96–100, 123, 165]. Примеры решенных с использованием этих схем задач содержатся в работах [49–51]. Достаточно эффективными оказываются подходы, допускающие использование комбинированных схем, в частности схем явных в одном направлении и неявных в другом.

Для численного решения двумерных задач динамической теории упругости Г. В. Иванов предложил использовать несколько локальных аппроксимаций неизвестных функций полиномами Лежандра [82]. В отличие от классических конечно-элементных подходов процедура нескольких аппроксимаций для каждой из искомых функций дает возможность сформировать достаточную для обеспечения монотонности численного решения искусственную диссипацию с одновременным расщеплением многомерной задачи на ряд независимых одномерных задач по пространственным направлениям. Содержащиеся в одномерных задачах параметры — константы диссипации — позволяют регулировать в получаемых схемах величину искусственной вязкости. При этом процедура решения каждой из этих одномерных задач является независимой и может быть как явной, так и неявной.

При частном выборе констант диссипации, для случая регулярных сеток, получающаяся явная схема полностью совпадает со схемой Годунова. В то же время, одно из преимуществ подхода состоит в возможности построения схем, обладающих лучшими диссипативными свойствами по сравнению с методом распада разрыва. Существенно, что при этом не происходит увеличение числа арифметических операций, т. е. помимо улучшения диссипативных характеристик возрастает экономичность схемы.

Данная монография посвящена построению на основе нескольких локальных аппроксимаций каждой из неизвестных функций эффектив-

ных численных алгоритмов повышенной точности интегрирования одномерных и многомерных задач динамической теории упругости, задач упругопластического деформирования и моделированию на их основе динамических процессов в твердых телах. Приведены примеры использования разработанных методов для исследования неустановившихся процессов в механике твердых деформируемых сред, геофизике, оптике и других областях.

Частично материал, изложенный в монографии, опубликован в работах авторов [4, 8, 9–12, 26–45, 55, 57, 59, 83, 170–173].

Первая глава посвящена конструированию эффективных разностных схем решения одномерных задач динамики. Эти схемы являются основным элементом в алгоритмах численного интегрирования многомерных задач, которые расщепляются на ряд одномерных, и качеством их решения определяется эффективность алгоритма в целом.

В первых разделах главы приводятся необходимые сведения о системах дифференциальных уравнений гиперболического типа первого порядка, к которым сводятся задачи, описывающие нестационарные процессы в твердых телах, и излагаются основные принципы построения метода решения задач динамики на основе решения одномерных задач о распаде произвольного разрыва [63]. Следует сказать, что принципы формулировки предлагаемых вычислительных алгоритмов возникли под влиянием идей С. К. Годунова, поэтому сохранены основные обозначения, принятые в [63], а иллюстрация эффективности построенных схем чаще всего дается в сравнении с методом Годунова. Заметим, что при этом мы имеем опосредованное сравнение с большинством известных и новых алгоритмов, которые, как правило, также сравниваются со схемой Годунова.

Далее строится схема решения одномерной задачи динамической теории упругости в декартовой системе координат на основе локальной аппроксимации решения линейными полиномами. В основе схемы лежит идея нескольких независимых аппроксимаций неизвестных функций [82]. Однако, в отличие от [82], при формулировке дополнительных уравнений в схему вводится максимально возможное число параметров, которые в дальнейшем называются константами диссипации. При этом алгоритм приобретает достаточно большой произвол, распорядиться которым можно так, что без дополнительных вычислительных затрат удастся добиться более высокой точности при сохранении таких положительных качеств, как монотонность, диссипативность и т. д.

Из всего множества получающихся схем выделяется двухпараметрическое семейство явных схем, включающее как частный случай и схему Годунова и схему, имеющую нулевую мощность искусственной диссипации, что в данном случае соответствует схеме второго порядка точности на гладких решениях. Удастся выделить область изменения параметров, при которых решение имеет монотонный профиль, а диссипация существенно меньше, чем в схеме [63]. Показано, что при условии диссипативности имеет место сходимость построенного приближенного решения к точному в энергетической норме. Алгоритм иллюстрируется тестовыми расчетами.

Раздел 1.8 посвящен построению явной монотонной разностной схемы второго порядка точности для модельной гиперболической системы, описывающей одномерные процессы распространения упругих возмущений. Процедура построения представляет собой обобщение способа, предложенного в разделах 1.3, 1.4. В этом разделе используется аппроксимация неизвестных функций полиномами степени выше первой. Это позволяет построить достаточно широкое семейство схем (с большим количеством параметров), включающее в себя схемы как первого, так и второго порядка точности. Предложен критерий монотонности построенных алгоритмов, на основании которого построена оптимальная (с минимально допустимой искусственной диссипацией) линейная монотонная схема первого порядка и нелинейная монотонная схема второго порядка точности с достаточно простым переключением параметров. Показано, что некоторые известные схемы (например, [180, 181]) содержатся в построенном семействе при определенном выборе параметров. Из результатов численных экспериментов следует, что в отличие от ряда известных схем, построенная схема второго порядка точности обладает лучшими диссипативными свойствами.

Чрезвычайно полезным свойством построенного класса алгоритмов (даже схем первого порядка) оказалась возможность с их помощью получать точное решение одномерных линейных задач не только для числа Куранта равного единице, но и при значении 0,5. Поэтому использование полиномов второй степени для локальной аппроксимации касательных напряжений и сдвигов в двумерной динамической задаче теории упругости позволило практически точно рассчитывать на одной и той же сетке и продольные и поперечные волны.

В разделе 1.9 подход, предложенный в предыдущих разделах, используется для построения алгоритмов решения одномерных систем гиперболических уравнений общего вида. Принципиально новым эле-

ментом при построении этих алгоритмов является процедура независимой аппроксимации младших недифференциальных членов уравнений. Оказывается, что произвол, возникающий в результате использования нескольких локальных аппроксимаций (в том числе и независимой аппроксимации младших членов уравнений), позволяет строить схемы, которые наряду с обычными условиями аппроксимации и устойчивости удовлетворяют ряду дополнительных требований.

Эти требования сводятся к тому, что разностная схема должна хорошо моделировать свойства решений исходной системы уравнений в условиях, когда шаги сетки остаются конечными. Так, при решении задач, описывающих процессы поглощения, существенное значение имеет свойство асимптотической устойчивости [86], а при аппроксимации динамических задач механики твердого тела (осесимметричные задачи динамики и задачи динамики тонких оболочек вращения) важным является свойство устойчивости относительно соответствующего статического решения.

За счет выбора различной аппроксимации младших членов, конструируются и исследуются три различные явные схемы (I, II и III), каждая из которых является диссипативной, а следовательно, и устойчивой в энергетической норме. Анализ этих схем позволяет выбрать из них схему наиболее предпочтительную в смысле наилучших диссипативных характеристик и наиболее широкого диапазона изменения шага по времени, обеспечивающего монотонность, консервативность, а также сохранение важных свойств, имеющих ясный механический смысл.

В разделе 1.11 рассматриваются безразмерные уравнения нестационарного деформирования пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига (модель Тимошенко). Трудности построения алгоритмов численного решения задач для уравнений типа уравнений Тимошенко связаны с тем, что при достаточно больших временах искомые функции как функции пространственных координат имеют колебательный характер. Для описания этих колебаний необходимо соответствующее измельчение разностной сетки. Если шаг интегрирования по пространству не мал, то применение даже устойчивых схем I и II может давать быстрое накопление ошибок округлений.

Показано, что схема III с независимой аппроксимацией младших членов обладает свойством сильной устойчивости [86] (хорошей обусловленности) при решении задач для уравнений Тимошенко. На примере решения задачи об импульсном деформировании пластины показано, что в схеме III влияние искусственной диссипации приводит к то-

му, что при неограниченном росте времени значения скорости прогиба стремятся к нулю, в то время как структура диссипации в схемах I и II такова, что с течением времени напряжения (усилия и моменты) стремятся к постоянным значениям, близким к статическому решению, а скорости — к постоянным, но не равным нулю значениям, приводящим к неограниченному росту прогиба пластины.

Раздел 1.12 посвящен численному исследованию задач динамики, решение которых обладает свойством осевой или сферической симметрии. Трудности, возникающие при создании алгоритмов решения таких задач, связаны с тем, что коэффициенты младших членов систем уравнений этого класса имеют особенность в точках оси симметрии. Численные расчеты показывают, что применение в этом случае схем, лишенных недостатков при решении плоских задач (схемы I и II), может приводить к решениям, обладающим дополнительными локальными экстремумами в окрестности оси симметрии, которые не связаны с физической природой задачи. При решении двумерной осесимметричной задачи это, например, приводит к тому, что фронт плоской волны, распространяющейся вдоль оси симметрии, деформируется вблизи этой оси. Независимая аппроксимация младших членов позволяет сформулировать схемы, свободные от указанных недостатков.

Проведено сравнение численного решения, полученного на основе построенной схемы, с аналитическим (асимптотическим) решением задачи о схлопывании цилиндрической упругой волны.

Во второй главе подход, основанный на нескольких аппроксимациях неизвестных функций и детально описанный в первой главе для построения схем решения одномерных задач динамики, обобщен на случай двумерных (плоских и осесимметричных) задач динамического деформирования.

Неотрицательные параметры (константы диссипации) в одномерных задачах позволяют регулировать величину искусственной вязкости в получаемых схемах. При частном выборе констант диссипации и в случае использования регулярных сеток явная схема совпадает со схемой Годунова.

В первых разделах этой главы формулируются плоская и осесимметричная двумерные задачи динамической теории упругости. Фактически осесимметричная задача представляет собой совокупность двух самостоятельных задач, первая из которых описывает распространение сдвиговых волн и волн сжатия при отсутствии кручения, а вторая — только крутильные (SH) волны. Показано, что система уравнений, опи-

сывающая крутильные колебания среды, заменой неизвестных функций сводится к уравнениям плоской задачи распространения акустических волн в среде с переменной плотностью, так что присутствие в этой системе младших членов (что вызывает определенные сложности при построении численного алгоритма) несущественно.

Далее на основе нескольких локальных аппроксимаций неизвестных функций линейными полиномами строится схема решения плоской двумерной динамической задачи теории упругости. Алгоритм основывается на расщеплении полной задачи на четыре независимые одномерные, причем каждая из этих одномерных задач содержит максимальный набор констант диссипации, как и в одномерном случае.

Совокупность этих одномерных задач можно интерпретировать как систему уравнений жесткости прямоугольного элемента сетки. При этом две первые задачи описывают растяжение–сжатие в направлениях по нормали к координатным линиям, а две другие — сдвиг на этих линиях. В классических конечно-элементных подходах уравнения жесткости формулируются относительно значений искомых функций в вершинах элемента, при этом сопряжение происходит в общем для нескольких элементов узле. В предлагаемых алгоритмах уравнения жесткости строятся относительно осредненных по граням элемента значений усилий и скоростей, и сопряжение этих значений происходит по общей для двух элементов грани, что в физическом смысле представляется более оправданным.

Исследована диссипативность, а следовательно, и устойчивость в энергетической норме построенной схемы. Показано, что при лучших диссипативных характеристиках и без увеличения вычислительных затрат, шаг интегрирования по времени в предложенном алгоритме может быть увеличен в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со схемой распада разрыва.

Процедура решения осесимметричной задачи в целом повторяет все этапы конструирования решения в плоском случае. Особенности здесь связаны с двумя обстоятельствами:

- с аппроксимацией как усилий, так и напряжений в соответствующих элементарных объемах;
- с аппроксимацией младших (недифференциальных) членов уравнений.

При построении этой схемы принимается независимая аппроксимация младших членов. В итоге получается схема, достоинства которой аналогичны достоинствам схемы решения плоской задачи.

В разделе 2.4 полученные в предыдущих разделах результаты обобщаются на случай решения задач в областях сложной геометрической формы. Необходимость конструирования высокоэффективных методов расчета задач динамики для таких областей обусловлена еще и тем обстоятельством, что именно к этим задачам может быть сведено моделирование процессов упругопластического деформирования, характеризующихся произвольными величинами деформаций. Численное решение на основе использования процедуры нескольких линейных аппроксимаций строится для произвольных выпуклых четырехугольников, на которые разбивается расчетная область. Предлагается подход, базирующийся на векторном расщеплении двумерной системы. Приводится доказательство сходимости последовательности приближенных решений, полученных по предложенному алгоритму, к точному решению задачи.

Третья глава посвящена построению и исследованию схемы решения двумерных задач динамики упругих тел, основанных на итерационной процедуре решения одномерных задач, на которые расщепляется исходная задача.

В алгоритмах, построенных в предыдущей главе, одномерные задачи решались независимо друг от друга. При этом независимо от того, явная или неявная схема используется при их решении, сама процедура расщепления (необходимое условие устойчивости алгоритма в целом) накладывает на константы, содержащиеся в одномерных задачах, ограничения, которые, в отличие от одномерных задач, в двумерных задачах не позволяют сделать диссипацию нулевой при любом соотношении между входящими в схему параметрами. Таким образом, полная консервативность схемы и возможность расщепления задачи на ряд независимых одномерных задач вступают в противоречие.

Кроме того, следует сказать, что в случае осесимметричных задач процедура расщепления двумерной задачи на ряд независимых одномерных не позволила полностью удовлетворить всем сформулированным выше требованиям к численному решению. Не удается, к примеру, выполнить условие того, чтобы на каждом шаге схема строго сохраняла статическое решение, проблематична возможность использования аппроксимации полиномами порядка выше первого. Это так же явилось одним из стимулов создания итерационного алгоритма.

Предлагается явный алгоритм, основанный на решении одномерных задач в два или несколько последовательных этапов, в котором ограничения, определяемые условиями устойчивости, не жестче, чем для соответствующих одномерных задач, а отсутствие искусственной

вязкости в решениях этих одномерных задач, делает ее нулевой и для задачи в целом.

Разделы 3.1, 3.2 посвящены конструированию итерационной процедуры решения плоской двумерной задачи динамической теории упругости. Алгоритм состоит из следующих этапов. На первом этапе решаются независимые одномерные задачи, полностью совпадающие с задачами, которые сформулированы в главе 2. После того, как это решение найдено, оно используется в качестве поправочных слагаемых к начальным условиям, после чего эти одномерные задачи решаются еще один раз. В частном случае такая процедура просто совпадает с методом дробных шагов [165] (или суммарной аппроксимации [145]). Однако можно использовать симметричный вариант такого расщепления, который, как показывает численный эксперимент, обладает свойством монотонности. Для иллюстрации работы алгоритма решена задача об ударном растяжении квазислоистой пластины, представляющей собой две склеенные пластины из одного и того же металла, в случае дефекта склейки.

В разделе 3.3 предложенная процедура обобщается на задачи для областей, составленных из произвольных выпуклых четырехугольников. Дается сравнительный анализ эффективности построенного алгоритма второго приближения и схем первого приближения, рассмотренных в предыдущей главе.

В разделе 3.4 на основе этой же процедуры строится схема решения осесимметричной задачи. Построенный алгоритм дает возможность полностью удовлетворить выше сформулированным требованиям к численному решению этой задачи. Из результатов решения тестовых задач следует, что в численном решении не происходит размазывания фронта ударной волны и отсутствуют побочные (не связанные с физической природой задачи) эффекты вблизи фронта и в окрестности точек разрыва граничных условий.

В разделе 3.5 построено точное решение двумерной модельной задачи об ударе по упругой пластине. Аналитическое решение проектируется на разностную сетку. Численное решение, полученное с использованием предложенной схемы, и проекция точного решения на разностную сетку полностью совпадают.

В качестве одного из требований выше выдвигалось условие того, чтобы схема не обладала искусственной вязкостью ни на продольных, ни на поперечных волнах. В разделе 3.8 строится алгоритм решения двумерных упругих задач, в котором используется локальная аппроксимация некоторых функций полиномами степени выше первой. Это

приводит к тому, что для реальных материалов, у которых значение коэффициента Пуассона близко к $1/3$, на одной и той же квадратной сетке удается получить численное решение, не обладающее искусственной диссипацией ни на продольных ни на поперечных волнах.

Раздел 3.9 посвящен адаптации алгоритма к существенно неоднородным средам. Предлагается процедура построения разностной сетки для модели слоисто-неоднородной среды, которая обеспечивает в этом случае сохранение всех положительных качеств схемы, установленных для однородной области.

В разделе 3.10 приводится вариант граничных условий, обеспечивающий эффективное неотражение от границ области.

Четвертая глава посвящена моделированию одномерных и неоднородных нестационарных процессов с помощью предложенных в предыдущих главах алгоритмов.

В разделе 4.1 проведено моделирование процессов распространения электромагнитных волн в слоистых диэлектриках. Рассматривается задача распространения в направлении некоторой оси плоских электромагнитных волн в слоистых диэлектриках, имеющих структуру, которая состоит из чередующихся слоев анизотропного и изотропного материалов (сверхрешетках). В качестве анизотропного материала рассматривается нематический жидкий кристалл, обладающий сильной анизотропией диэлектрической проницаемости и высокой чувствительностью к внешним полям.

Математически задача сводится к решению двух самостоятельных смешанных задач для систем гиперболических уравнений того же вида, что и в случае одномерной динамической задачи для упругой среды. Существенная и сильно меняющаяся неоднородность среды приводит к необходимости включения в алгоритм автоматической дискретизации расчетной области, согласованной со свойствами конкретной слоистой структуры. Контакт сверхрешетки с вакуумом моделируется включением слоев вакуума в расчетную область и формулировкой на концах области неотражающих граничных условий.

Из результатов вычислительного эксперимента следует, что спектры и структура электромагнитных волн в рассматриваемой среде обладают рядом особенностей, возникающих из-за специфики нематического жидкого кристалла. В частности, спектр электромагнитных волн для данной области частот может качественно перестраиваться при изменении ориентации оптической оси нематика. Кроме того, с использованием модели конечной сверхрешетки установлена сильная зависи-

мость коэффициента пропускания от ориентации директора нематика. Заметим, что эти особенности не изучены экспериментально.

В разделе 4.2 численно моделируется процесс распространения плоских волн в анизотропном, слоисто-неоднородном упругом теле. Рассматривается модель трансверсально-изотропного упругого материала. Исследование таких процессов приводит к необходимости решать смешанную задачу для одномерной гиперболической системы перевязанных между собой уравнений. Алгоритм численного решения таких задач описан в разделе 1.9 и основан на приведении системы к каноническому виду. Однако, в случае системы большой размерности, такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. В разделе 4.2 строится и иллюстрируется примерами решения ряда задач метод, сформулированный для систем общего вида в разделе 1.9, и предлагается итерационная процедура решения полученной гиперболической системы уравнений, представляющая собой некоторый симметричный вариант расщепления по физическим процессам.

Суть ее состоит в том, что перевязывающие систему члены уравнений учитываются в алгоритме в виде «подправочных» слагаемых только на последующих итерациях, а на всех этапах интегрируются модельные гиперболические системы двух уравнений типа системы уравнений акустики, решение которых не содержит принципиальных сложностей. Сравнение этих двух подходов на примере решения задачи об ударном нагружении анизотропных материалов позволяет говорить о практически совпадении построенных решений. Предложенный алгоритм используется также для решения задачи о распространении плоской волны через многослойную анизотропную упругую преграду. Для многослойной конструкции определенного вида определена частота монохроматической волны, поток волновой энергии которой максимально гасится при прохождении через данную преграду.

В разделе 4.3 решается задача взаимодействия нескольких ударников, имеющих форму длинных цилиндрических стержней, с многослойной упругой преградой. В основе решения этой существенно трехмерной задачи лежит суперпозиция двумерных (осесимметричных) решений, которые предварительно получены и записаны в базовом файле данных для нескольких значений диаметра стержня. Таким образом, решение полной задачи состоит в конструировании (сборке) на основе этих элементарных решений и информации об относительном запаздывании времени подлета стержней, скорости подлета, координат центров удара на лицевой поверхности и т. д.

Получены решения об одновременном полете двух, трех (расположенных в вершинах правильного треугольника) и нескольких ударников, исследованы взаимодействия волн в случае запаздывающего удара дополнительным стержнем.

Предлагаемая постановка позволяет моделировать процесс удара об упругую преграду жесткого тела сложной пространственной формы. В этом случае тело представляется в виде набора цилиндрических стержней, а его пространственная конфигурация моделируется путем учета времени полета этих стержней (запаздывания по сравнению с первым). В разделе 4.3 рассматривается задача ударного воздействия на упругую плиту жесткого тела, имеющего пространственно-винтовую форму.

Раздел 4.4 посвящен численному решению прямой задачи сейсмоки. Как уже отмечалось, эта задача является одним из основных тестов для численных алгоритмов решения многомерных динамических волновых задач теории упругости и некоторые недостатки методов могут делать ее решение невозможным.

Задача состоит в следующем. Исследуется процесс распространения упругих волн, порождаемых некоторым источником взрывного типа, расположенным или вблизи свободной дневной поверхности, или достаточно заглубленным в известной вертикально-неоднородной среде, слои которой имеют определенную плотность и скорости распространения продольных и поперечных упругих волн. Возмущение (как правило, вертикальная составляющая вектора массовой скорости частиц) регистрируется в расположенных на свободной поверхности приемниках, и совокупность кривых — зависимостей от времени — составляет сейсмограмму, характеризующую отражение возмущения от каждой из границ раздела и в итоге — временной разрез рассматриваемой среды.

Для решения этой задачи создан набор программ. Он включает программы, обеспечивающие автоматическую дискретизацию расчетной области для заданной модели слоисто-неоднородной упругой среды, и программы, которые непосредственно решают динамическую упругую задачу в плоской или осесимметричной постановке и обеспечивают графический вывод результатов. Программа апробирована на тестовых примерах, проведено сравнение с натурными полевыми исследованиями в районе реальной скважины.

В разделе 4.5 сформулирована и решена для случая трехслойной модели среды обратная задача, которая заключается в определении механических характеристик (плотностей, скорости распростране-

ния упругих волн) и толщин упругих слоев. Предполагается, что первый (верхний) слой, в котором располагаются и источник возмущения взрывного типа, и несколько приемников, представляет собой идеальную сжимаемую жидкость (воду).

Рассматриваемая задача является классической динамической обратной задачей сейсмологии. Первые постановки этих задач были сформулированы и исследованы в [4, 23, 114, 115], достаточно разработаны и методы их решения. Однако относительная простота постановки конкретной задачи позволила предложить методику, при которой прямые задачи сейсмологии решаются не непосредственно в процессе решения обратной задачи, а заранее. Таким образом, в достаточно широком диапазоне изменения неизвестных параметров формируется банк сейсмограмм, после чего для решения обратной задачи на основе этого банка и экспериментальной сейсмограммы вычисляются значения предлагаемого в работе целевого функционала, минимизация которого, как показывает вычислительный эксперимент, обеспечивает определение механических характеристик с погрешностью порядка одного процента. Созданный для решения задачи комплекс программ включает в себя весь набор программ для решения прямой задачи (на этапе создания банка сейсмограмм), а так же программы вычисления целевого функционала и его минимизации.

В пятой главе на основе нескольких аппроксимаций искомым функциям строятся алгоритмы численного решения динамических задач упругопластического деформирования твердых тел при малых деформациях.

Напряженно-деформированное состояние элементов конструкций при интенсивном теплосиловом воздействии имеет сложный характер, что обуславливается большими градиентами полей деформаций, напряжений, температуры. Численное решение должно с достаточной точностью воспроизводить эту сложную картину.

Задачи упругопластического деформирования даже в случае сравнительно малых деформаций являются нелинейными из-за нелинейности определяющих соотношений. Многое из того, о чем сказано выше при обзоре численных методов решения упругих динамических задач, относится и к задачам деформирования твердых тел с учетом неупругих деформаций. При этом, по-видимому, основным отличием является то, что при использовании различных численных схем решения динамических задач с учетом неупругих деформаций приходится на том или ином этапе решения прибегать к итерационным процедурам.

Обзор исследований, посвященных построению численных алгоритмов и решению задач динамики упругопластического деформирования, содержится в [15, 108, 109, 112]. В [108] анализируются различные подходы к построению численных алгоритмов и их эффективность при решении задач упругопластического деформирования. В [15] можно найти широкий спектр задач различного физического и механического содержания, решенных численными методами.

Для определенного класса задач применение характеристических методов позволяет получить достаточно хорошее описание динамических процессов за счет того, что в этих методах области влияния исходной дифференциальной задачи и конечно-разностной схемы близки. В [110, 111] приводятся различные способы построения разностных схем решения упругопластических задач на основе характеристических методов и анализируются их преимущества и недостатки.

Из-за сложности реализации характеристических методов на ЭВМ в двумерных и тем более трехмерных задачах широкое распространение получили конечно-разностные схемы сквозного счета. Стремление восполнить потерю адаптируемости методов сквозного счета к искомому решению привело к появлению различных подходов и способов их построения. При построении этих методов используются как переменные Эйлера, так и Лагранжа. Целесообразность использования тех или иных переменных определяется характером задачи. Численное решение задач в переменных Лагранжа вызывает необходимость перестройки разностной сетки при больших деформациях. Примеры построения алгоритмов в переменных Лагранжа можно найти в работах [120, 153]. Вопросы, связанные с перестройкой сетки в процессе решения динамических задач, рассматриваются в [63, 73, 74, 120]. Так как каждый из упомянутых подходов имеет свои преимущества и недостатки, то применяются также методы, в которых одновременно используются лагранжевы и эйлеровы переменные [155]. Метод, предложенный в работе [155] и получивший название метода частиц, сочетает как лагранжевы, так и эйлеровы подходы. Дальнейшее обобщение и развитие этого метода содержится в [22].

Алгоритмы решения задач динамики упругопластического деформирования на основе структурного подхода и дискретного моделирования физических процессов построены в [106].

В [143] численное моделирование разрывных решений задач динамики упругопластических сред проводится на основе теории вариационных неравенств. Несомненным преимуществом такого подхода является

то, что единообразно формулируются в виде вариационных неравенств как ограничения, содержащиеся в определяющих соотношениях упругоупругопластических сред, так и кинематические ограничения на контактных границах. В [143] предложен ряд численных алгоритмов решения задач, допускающих постановку в виде вариационных неравенств.

Необходимым элементом при решении задач упругоупругопластического деформирования является аппроксимация уравнений упругоупругопластического течения. В разделах 5.2–5.4 излагаются три схемы аппроксимации уравнений изотропного упругоупругопластического течения, которые использовались авторами при решении конкретных задач. Целесообразность применения той или иной аппроксимации зависит от решаемой задачи.

В разделах 5.5–5.12 строятся схемы решения плоской и осесимметричной задач при разбиении области на произвольные четырехугольники.

В разделе 5.13 излагается процедура моделирования процессов хрупкого разрушения. При моделировании процесса хрупкого разрушения в рамках построенных алгоритмов предполагается, что разрушение происходит по границам элементов при достижении нормальными или касательными напряжениями предельных значений. Вычисление решения с учетом разрушения на каждом шаге по времени состоит из двух этапов: 1) вычисления соответствующей этому слою времени системы расположения разрывов и расслоений с учетом возможного захлопывания трещин и образования новых; 2) вычисления решения с учетом расположения разрывов и расслоений, найденного на первом этапе. При вычислении решения по неявной схеме строится итерационная процедура вычисления разрывов и расслоений на каждом временном слое. При вычислении же решения по явной схеме скорости и напряжения на границе между элементами на среднем слое по времени зависят от решения на нижнем слое только в двух примыкающих друг к другу элементах, и в этом случае расположение разрывов и расслоений однозначно определяется на первой итерации.

В разделе 5.14 приводятся примеры численных решений. В задачах динамики упругоупругопластического деформирования непосредственное сравнение численных решений с аналитическими практически невозможно. Одним из способов тестовых проверок качества численных схем решения динамических задач является сравнение результатов с аналитическими при выходе на установившийся или волновой режим.

В первой тестовой задаче рассматривается упругоупругопластическое деформирование кольца. На волновой стадии, когда напряжения и де-

формации практически постоянны по сечению кольца, можно выписать аналитическое решение как на стадии упругого, так и на стадии пластического деформирования. Это решение сравнивается с численным.

Во второй задаче о деформировании цилиндрической оболочки под действием синусоидальной нагрузки и проведено сравнение численных результатов с результатами работ [161, 184].

Анализ результатов решения этих двух тестовых задач и ряда других показывает, что интегральные характеристики динамического упругопластического деформирования предложенными алгоритмами описываются вполне удовлетворительно.

В этом же разделе решена задача об упругопластическом деформировании круговой арки, в которой прослеживается развитие зон пластических деформаций, и задачи о хрупком разрушении однородного и слоистого колец.

В шестой главе алгоритм обобщается на задачи упругопластического деформирования при больших деформациях. При построении алгоритма используются лагранжевы координаты.

В разделе 6.3 на основе численного алгоритма, построенного в разделе 6.2, предложены две приближенные схемы вычисления интегральных характеристик процесса соударения ударника с преградой.

Результаты исследований, изложенные в предлагаемой монографии, докладывались и обсуждались на научных семинарах Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и Института вычислительного моделирования СО РАН. Авторы выражают благодарность своим коллегам за внимание к их работе.

Авторы благодарят редактора книги члена-корреспондента РАН Б. Д. Аннина, рецензентов д-ра физ.-мат. наук, профессора А. И. Гулидова и д-ра физ.-мат. наук, профессора И. Ю. Цвелодуба.

Глава 1

Схемы решения динамических задач теории упругости на основе нескольких аппроксимаций

Необходимость исследования и построения эффективных численных алгоритмов решения одномерных задач для гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных в первую очередь определяется тем, что решение этих задач является основным элементом процедуры численного интегрирования многомерных задач (расщеплении на ряд одномерных), и качеством решения одномерных задач определяется эффективность алгоритма в целом.

1.1. Одномерные гиперболические системы первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает распространение волны сжатия в тонком упругом стержне:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Здесь u — скорость частиц в направлении оси стержня; σ — напряжение на площадке, нормальной к оси стержня; известные функции переменной x (постоянные в случае однородного стержня) $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ и $a(x) \geq a_0 > 0$ имеют смысл плотности среды и модуля Юнга соответственно. Первое уравнение представляет собой уравнение движения частиц среды, второе — почленно продифференцированный по переменной t закон Гука.

К этой же системе уравнений мы приходим, рассматривая одномерную задачу о распространении упругих волн в изотропной полубесконечной среде $x \geq 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ в случае, когда

краевые условия при $t = 0$ и $x = 0$ не зависят от переменных y и z . В этом случае мы имеем три независимые системы вида (1.1). Одна из них описывает распространение плоской продольной волны сжатия, две другие — волны сдвига. В первой системе функции u и σ будут соответственно компонентой u_x вектора скорости и нормальной компонентой σ_x тензора напряжений в данной точке среды, $a = \lambda + 2\mu$, во второй и третьей — компонентой u_y либо u_z вектора скорости и касательными напряжениями τ_{xy} либо τ_{xz} тензора напряжений, $a = \mu$. Здесь λ и μ — постоянные Ламе, которые в общем случае являются функциями x .

Систему уравнений (1.1) часто записывают в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

В этом случае ее называют системой уравнений акустики, она описывает распространение плоских звуковых волн. Величину $p = -\sigma$ называют давлением в среде, $c = \sqrt{a/\rho}$ — скоростью звуковых волн.

Если ρ и c постоянны, то, умножая второе уравнение (1.1) на $1/\rho c$, складывая с первым и вычитая из первого второе, получаем

$$\frac{\partial X}{\partial t} + c \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} - c \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

где введены обозначения

$$X = u - \frac{\sigma}{\rho c}, \quad Y = u + \frac{\sigma}{\rho c}.$$

В случае переменных коэффициентов система (1.1) полностью разделяется на два независимых уравнения только тогда, когда упругая среда имеет постоянную жесткость ρc (что фактически возможно только в случае ее однородности).

Величины X и Y называются инвариантами Римана. Очевидно, что общее решение полученных уравнений имеет вид

$$X = f(x - ct), \quad Y = \varphi(x + ct), \quad (1.3)$$

где f и φ — произвольные гладкие функции. Из (1.3) следует, что величины X и Y не изменяются соответственно вдоль линий $x - ct = \text{const}$ и $x + ct = \text{const}$, которые называют характеристиками системы (1.1).

Для однозначного определения решения необходимо задать краевые условия [62]. К примеру, для решения задачи на отрезке $l_1 \leq x \leq l_2$ нужно знать значения u и σ при $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad (1.4)$$

и некоторую линейную комбинацию u и σ при $x = l_1, x = l_2$

$$(\alpha_1 u + \beta_1 \sigma)|_{x=l_1} = f_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 \sigma)|_{x=l_2} = f_2(t), \quad (1.5)$$

$$(\alpha_1/\rho c - \beta_1 \neq 0, \quad \alpha_2/\rho c + \beta_2 \neq 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0).$$

При этом для определения u и σ в так называемом характеристическом треугольнике, ограниченном на плоскости x, t отрезками прямой $t = 0$ и характеристиками $x \pm ct = \text{const}$, которые проходят через точки $(l_2, 0)$ и $(l_1, 0)$, достаточно только начальных условий (1.4).

В дальнейшем нам будет полезным энергетическое тождество — закон сохранения энергии. Оно получается из (1.1) следующим образом: умножим первое уравнение в (1.1) на u и добавим к левой и правой частям величину $\sigma(\partial u/\partial x)$. Внося u под производную, находим

$$\frac{1}{2}\rho \frac{\partial u^2}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u\sigma)}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим в плоскости x, t прямоугольник $\omega = \{l_1 \leq x \leq l_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$ и проинтегрируем тождество (1.6) по ω :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{2}\rho \frac{\partial u^2}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \int_{l_1}^{l_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(u\sigma)}{\partial x} dt dx. \quad (1.7)$$

Слагаемые в левой части (1.7) представляют собой приращения соответственно кинетической и потенциальной энергий за промежуток времени $[t_1, t_2]$, интеграл в правой части — разность работ, произведенных внешними силами за промежуток времени $[t_1, t_2]$ на торцах $x = l_2$ и $x = l_1$.

Тождество (1.7) позволяет показать единственность решения задачи (1.1), (1.4), (1.5) для определенного набора величин $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Предположив наличие двух различных решений задачи u_1, σ_1 и u_2, σ_2 , получим, что в силу линейности задачи их разность $\hat{u} = u_1 - u_2$, $\hat{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_2$ удовлетворяет системе (1.1), условиям (1.4), (1.5), в которых правые части тождественно равны нулю, и для них также справедливо тождество (1.7). Выражая $\partial \hat{u}/\partial x$ во втором слагаемом в левой части тождества (1.7) из второго уравнения (1.1) и выполняя интегрирование по одной из переменных, получаем:

$$\frac{1}{2}\rho \int_{l_1}^{l_2} (\hat{u}^2 + \frac{1}{\rho^2 c^2} \hat{\sigma}^2) dx = \int_{t_1}^{t_2} \hat{u} \hat{\sigma}|_{x=l_2} dt - \int_{t_1}^{t_2} \hat{u} \hat{\sigma}|_{x=l_1} dt.$$

Так как α_1 и β_1 , а так же α_2 и β_2 одновременно не равны нулю, то, считая, например, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, находим

$$\hat{u}|_{x=l_1} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \hat{\sigma}|_{x=l_1}, \quad \hat{u}|_{x=l_2} = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \hat{\sigma}|_{x=l_2},$$

$$\frac{1}{2}\rho \int_{l_1}^{l_2} (\widehat{u}^2 + \frac{1}{\rho^2 c^2} \widehat{\sigma}^2) dx = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \int_{t_1}^{t_2} \widehat{\sigma}^2|_{x=l_2} dt + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \int_{t_1}^{t_2} \widehat{\sigma}^2|_{x=l_1} dt.$$

Если

$$\alpha_2 \beta_2 \geq 0, \quad \alpha_1 \beta_1 \leq 0, \quad (1.8)$$

то

$$\int_{l_1}^{l_2} (\widehat{u}^2 + \frac{1}{\rho^2 c^2} \widehat{\sigma}^2) dx \leq 0,$$

откуда следует единственность решения задачи: $\widehat{u} \equiv 0$, $\widehat{\sigma} \equiv 0$.

В случае выполнения неравенств (1.8) граничные условия (1.5) называются диссипативными [62].

1.2. Метод Годунова

При численном решении систем квазилинейных гиперболических уравнений широкую известность получил метод Годунова [63], основанный на расщеплении решения многомерной задачи на ряд одномерных задач о распаде произвольного разрыва. Изложим основные идеи, лежащие в основе этого алгоритма решения модельной одномерной задачи (1.1), (1.4), (1.5).

Пусть начальные данные для системы (1.1) заданы на момент времени t_0 . Решение для $t > t_0$ будем получать, двигаясь к моменту времени t шагами длительностью τ . Опишем процедуру вычисления решения на одном шаге, т. е. на момент времени $t_0 + \tau$.

Отрезок $[l_1, l_2]$, на котором необходимо определить решение, разобьем точками x_j (узлами сетки), $j = 1, \dots, N$. Для простоты примем разбиение равномерным: $x_{j+1} - x_j = h = \text{const}$. Будем считать, что в момент времени t_0 внутри каждого интервала $[x_j, x_{j+1}]$ величины u и σ постоянны. Их значения обозначим $u_{j+\frac{1}{2}}$, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$. В момент времени $t_0 + \tau$ точное решение u^* , σ^* можно найти по (1.3)–(1.5). Ясно, что это будут ступенчатые функции, разрывы которых, вообще говоря, не совпадают с узлами x_j . Заменяем решение приближенным, получающимся при осреднении точного решения по ячейке $[x_j, x_{j+1}]$:

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u^*(x, t_0 + \tau) dx, \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma^*(x, t_0 + \tau) dx.$$

В результате, в качестве решения при $t = t_0 + \tau$ мы снова получим ступенчатые функции с разрывами в узлах x_j . Такая процедура повторяется необходимое число раз.

Оказывается, что для вычисления $u^{j+\frac{1}{2}}, \sigma^{j+\frac{1}{2}}$ нет необходимости вычислять точное решение u^*, σ^* , а можно сразу получить соотношение между средними значениями этого точного решения на верхнем шаге по времени $u^{j+\frac{1}{2}}, \sigma^{j+\frac{1}{2}}$ и величинами $u_{j+\frac{1}{2}}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}$. Проинтегрировав (1.1) по элементарному прямоугольнику $\omega = [x_j, x_{j+1}] \times [t_0, t_0 + \tau]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_0 + \tau) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_0) dx + \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} [\sigma(x_{j+1}, t) - \sigma(x_j, t)] dt, \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma(x, t_0 + \tau) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma(x, t_0) dx + \rho c^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} [u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)] dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь мы предположили, что величины ρ и c постоянны внутри отрезка $[x_j, x_{j+1}]$. Заметим, что до тех пор, пока информация из соседних с x_j узлов не достигнет x_j (а это произойдет за время $\tau^* = h/c$), величины $u(x_j, t)$ и $\sigma(x_j, t)$ будут сохраняться постоянными. Их значения вычислим, используя (1.3), (1.4), и обозначим U_j, Σ_j :

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{2} \left[(u_{j+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{\rho c} (\sigma_{j+\frac{1}{2}} - \sigma_{j-\frac{1}{2}}) \right], \\ \Sigma_j &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_{j+\frac{1}{2}} + \sigma_{j-\frac{1}{2}}) + \rho c (u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Разделим равенства (1.9) на h и разрешим их относительно $u^{j+\frac{1}{2}}, \sigma^{j+\frac{1}{2}}$:

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{R}{\rho c} (\Sigma_{j+1} - \Sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c R (U_{j+1} - U_j). \quad (1.11)$$

Здесь $R = c\tau/h$ — параметр Куранта. Очевидно, что формулы (1.11) имеют смысл, если $R \leq 1$. При $R = 1$ формулы (1.10), (1.11) дают точное решение задачи методом характеристик.

Формулы (1.10) справедливы для всех внутренних узлов. Величины U_0, Σ_0 и U_N, Σ_N рассчитываются с помощью одного из граничных условий (1.5) и соотношения на приходящей на границу характеристике: $\Sigma_0 + \rho c U_0 = \sigma_{\frac{1}{2}} + \rho c u_{\frac{1}{2}}$ — для первого узла и $\Sigma_N - \rho c U_N = \sigma_{N-\frac{1}{2}} - \rho c u_{N-\frac{1}{2}}$ — для последнего.

Формулы (1.10), (1.11) выписаны для постоянных значений ρ и c . Очевидно, что не представляет сложности получить их и для случая, когда ρ и c принимают различные постоянные значения в каждом из

интервалов $[x_j, x_{j+1}]$ и когда разбиение отрезка $[l_1, l_2]$ узлами x_j не является равномерным.

Для доказательства корректности построенной схемы необходимо проверить, аппроксимирует ли она исходную систему уравнений и является ли устойчивой. С этой целью, подставляя (1.10) в (1.11), полагая, что $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ достаточно гладкие функции, разлагая их в ряд Тейлора и удерживая члены до второго порядка по h и τ , получаем, что схема (1.10), (1.11) аппроксимирует (на решениях уравнений (1.1)) систему параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + h \frac{c}{2} (1 - R) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{c}{2} (1 - R) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad (1.12)$$

которую называют первым дифференциальным приближением. Из (1.12) следует, что при $h \rightarrow 0$ схема аппроксимирует систему (1.1) с первым порядком. Из курса уравнений математической физики известно, что задача Коши для (1.12) корректна в случае, когда коэффициенты при вторых производных неотрицательны [62]. Таким образом, для устойчивости схемы необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R \leq 1 \quad \text{или} \quad \tau \leq \frac{h}{c}. \quad (1.13)$$

Анализу разностной схемы по ее дифференциальному приближению и, в частности, вопросам связи устойчивости с неполной параболичностью первого дифференциального приближения в случае решения задачи Коши посвящена монография Ю. И. Шокина, Н. Н. Яненко [163]. Исследование устойчивости схемы можно также провести и методом Фурье. Получающееся при этом необходимое условие совпадает с (1.13).

Можно показать, что в случае диссипативных граничных условий ограничение (1.13) является и достаточным условием устойчивости разностной краевой задачи. Для этого удобно воспользоваться оценками приближенного решения в энергетической норме. Выберем в качестве нормы решения $\{u_{j+\frac{1}{2}}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}\}$ на временном слое $t = \text{const}$

$$\| \{u_{j+\frac{1}{2}}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}\} \|^2 = \int_{l_1}^{l_2} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2\rho c^2} \right) dx = h \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^N \left(u_{j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^2}{\rho^2 c^2} \right). \quad (1.14)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что численное решение, получающееся в результате вычислений по формулам (1.10),

(1.11), на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \rho \frac{(u^{j+\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{(\sigma^{j+\frac{1}{2}})^2}{2\rho c^2} + \rho \frac{R(1-R)}{2} \left[(U_{j+1} - U_j)^2 + \frac{1}{\rho^2 c^2} (\Sigma_{j+1} - \Sigma_j)^2 \right] = \\ = \rho \frac{(u_{j+\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{(\sigma_{j+\frac{1}{2}})^2}{2\rho c^2} + \frac{\tau}{h} (\Sigma_{j+1} U_{j+1} - \Sigma_j U_j), \end{aligned} \quad (1.15)$$

которое является разностным аналогом энергетического тождества на этом отрезке. При $R \leq 1$ содержащее квадратные скобки слагаемое в левой части (1.15) является неотрицательным и, следовательно, будет справедливым неравенство

$$\rho \frac{(u^{j+\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{(\sigma^{j+\frac{1}{2}})^2}{2\rho c^2} \leq \rho \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^2}{2} + \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^2}{2\rho c^2} + \frac{\tau}{h} (\Sigma_{j+1} U_{j+1} - \Sigma_j U_j). \quad (1.16)$$

Суммируя (1.16) по всем ячейкам отрезка $[l_1, l_2]$, получаем неравенство

$$\| \{u^{j+\frac{1}{2}}, \sigma^{j+\frac{1}{2}}\} \|^2 \leq \| \{u_{j+\frac{1}{2}}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}\} \|^2 + \frac{\tau}{h} (\Sigma_N U_N - \Sigma_0 U_0),$$

из которого в случае диссипативных граничных условий (1.5), (1.8) следует

$$\| \{u^{j+\frac{1}{2}}, \sigma^{j+\frac{1}{2}}\} \| \leq \| \{u_{j+\frac{1}{2}}, \sigma_{j+\frac{1}{2}}\} \|,$$

что означает равномерную устойчивость процесса вычислений по формулам (1.10), (1.11). Далее для краткости мы будем ссылаться на схему (1.10), (1.11) как на схему (*).

1.3. Численное решение на основе нескольких аппроксимаций неизвестных функций

1.3.1. Аппроксимация смещений и напряжений

Г. В. Иванов предложил подход к построению схемы решения задачи (1.1), (1.4), (1.5), основанный на использовании нескольких локальных аппроксимаций неизвестных функций линейными полиномами по переменным x и t [82]. Разобьем область определения функций $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ прямыми $x = x_j$, $t = t_k$ ($j = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, M$) параллельными осям координат Ox и Ot , на элементарные прямоугольники $\omega = \{t_k \leq t \leq t_{k+1}, x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$. Как и ранее, будем считать величины ρ и c постоянными, а разбиение расчетной области равномерным: $x_{j+1} - x_j = h$, $t_{k+1} - t_k = \tau$.

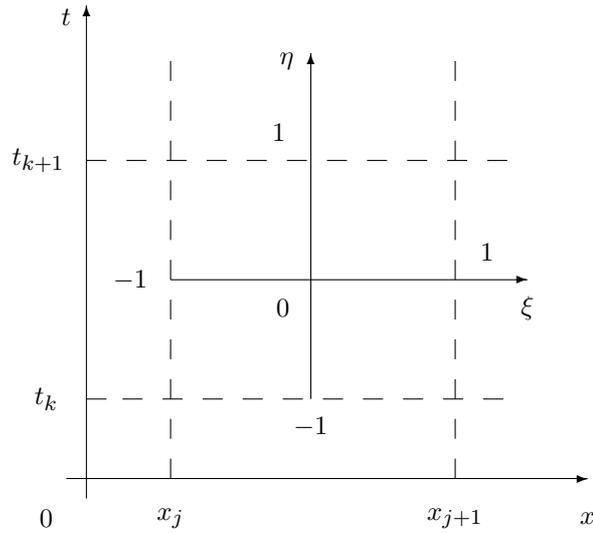


Рис. 1.1. Локальная система координат

С элементарным прямоугольником ω свяжем локальные координаты ξ и η (рис. 1.1):

$$\xi = \frac{2}{h} \left[x - \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \right], \quad \eta = \frac{2}{\tau} \left[t - \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}) \right],$$

так что $\omega = \{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$.

В качестве приближенного решения в прямоугольнике ω примем функции

$$u = u_0 + u_1\eta, \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1\eta, \quad (1.17)$$

$$u' = u'_0 + u'_1\xi, \quad \sigma' = \sigma'_0 + \sigma'_1\xi, \quad (1.18)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (1.19)$$

Пусть полиномы (1.17) удовлетворяют начальным условиям

$$u|_{t=0} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0(x) dx, \quad \sigma|_{t=0} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma_0(x) dx, \quad (1.20)$$

а полиномы (1.18) — граничным условиям (1.5) в виде

$$(\alpha_1 u' + \beta_1 \sigma')|_{x=l_1} = \widehat{f}_1, \quad (\alpha_2 u' + \beta_2 \sigma')|_{x=l_2} = \widehat{f}_2, \quad (1.21)$$

где $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ — средние значения $f_1(t), f_2(t)$ на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} u|_{\eta=-1} &= u_{j+\frac{1}{2}}, & u|_{\eta=1} &= u^{j+\frac{1}{2}}, & \sigma|_{\eta=-1} &= \sigma_{j+\frac{1}{2}}, & \sigma|_{\eta=1} &= \sigma^{j+\frac{1}{2}}, \\ u'|_{\xi=-1} &= u_j, & u'|_{\xi=1} &= u_{j+1}, & \sigma'|_{\xi=-1} &= \sigma_j, & \sigma'|_{\xi=1} &= \sigma_{j+1}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_j), & u'_1 &= \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_j), \\ \sigma'_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_{j+1} + \sigma_j), & \sigma'_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j). \end{aligned}$$

Подставляя (1.17), (1.18) в (1.19) мы получаем связь между решениями на нижнем и верхнем слоях по времени

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{R}{\rho c}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c R(u_{j+1} - u_j), \quad (1.22)$$

что в точности соответствует формулам (1.11) метода Годунова. Величины u_j , σ_j с целочисленными индексами имеют смысл «больших» величин U_j , Σ_j в формулах (1.10), (1.11).

Построение схемы будет закончено, если для определения $2N + 2$ неизвестных констант u_j , σ_j , $j = 0, \dots, N$ нам удастся дополнительно к (1.22) сформулировать $2N$ уравнений. Вместе с двумя граничными условиями (1.21) система таких уравнений будет замкнута.

1.3.2. Дополнительные уравнения

Заметим, что для любых функций (1.17), (1.18), удовлетворяющих уравнениям (1.19), справедливо тождество

$$\int_{\omega} \left(\frac{\rho}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u'}{\partial x} \right) d\omega + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial(u'\sigma')}{\partial x} d\omega, \quad (1.23)$$

где

$$D = (u'_0 - u_0) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\sigma'_0 - \sigma_0) \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (1.24)$$

Тождество (1.23) является разностным аналогом энергетического тождества (1.7). Заметим, что в отличие от (1.7) в левой части равенства (1.23) содержится дополнительное слагаемое $\int_{\omega} D d\omega$, которое в случае своей неотрицательной определенности имеет смысл искусственной диссипации приближенного решения в ячейке ω . Для схемы (1.10), (1.11) эта диссипация (последнее слагаемое в левой части (1.15)) представляет собой неотрицательную при $R \leq 1$ квадратичную форму относительно величин $(U_{j+1} - U_j)$ и $(\Sigma_{j+1} - \Sigma_j)$, отличающихся только множителем h от значений $\partial u'/\partial x$ и $\partial \sigma'/\partial x$ в данном методе.

С помощью (1.17), (1.19) мощность искусственной диссипации D можно записать в виде

$$D = \left(u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \left(\sigma'_0 - \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \rho c^2 \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (1.25)$$

Дополнительные уравнения для определения величин u_j , σ_j можно сформулировать, приравняв выражения в скобках в (1.25) к производным, на которые эти скобки умножаются, с некоторым, пока неопределенным, множителем γ :

$$u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, \quad \sigma'_0 - \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \rho c^2 \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} = \rho c^2 \frac{\gamma}{2} \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (1.26)$$

В этом случае D имеет вид

$$D = \frac{\gamma}{2\rho} \left[\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + \rho^2 c^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right]$$

и полностью соответствует виду искусственной диссипации в схеме Годунова.

Именно такой вариант формулировки уравнений был предложен первоначально в работах [82, 83]. Ясно, что требование неотрицательности искусственной диссипации D ($\gamma \geq 0$ в данном случае) обеспечивает устойчивость в энергетической норме процедуры вычисления приближенного решения по начальным данным. Действительно, суммируя (1.23) по всем ячейкам расчетной области, при неотрицательном значении D получаем неравенство

$$\frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2 c^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} \right) dx dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial}{\partial x} (u' \sigma'),$$

которое в случае равенства нулю мощности сил на границе $u' \sigma' |_{x=l_{1,2}} = 0$ и выбора в качестве нормы решения (1.14) означает равномерную устойчивость:

$$\| (u, \sigma) \|_{t=t_0+\tau}^2 \leq \| (u, \sigma) \|_{t=t_0}^2.$$

Если $D = 0$ ($\gamma = 0$), решение будет консервативным [145]: сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна при равной нулю мощности внешних сил.

Теперь мы сформулируем дополнительные уравнения в самом общем виде — в рамках следующей идеи: мощность искусственной диссипации D должна быть квадратичной формой переменных $\partial \sigma' / \partial x$ и $\partial u' / \partial x$, знаком и величиной которой, аналогично рассмотренному выше варианту, мы могли бы управлять с помощью некоторых парамет-

ров — констант диссипации. Чтобы излишне не усложнять последующие формулы, примем константы ρ и c , входящие в систему уравнений, равными единице. Фактически это означает, что мы обезразмериваем систему, отнеся неизвестные функции u и σ соответственно к c и ρc^2 .

Пусть дополнительные уравнения для определения u_j, σ_j имеют вид:

$$u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \sigma'_0 - \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\gamma_4}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial \sigma'}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Тогда

$$D = \frac{1}{2} \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + 2(\gamma_2 + \gamma_3) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma_4 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (1.28)$$

Для неотрицательности D , а следовательно, и для устойчивости схемы, необходимо потребовать

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0, \quad (\gamma_2 + \gamma_3)^2 \leq \gamma_1 \gamma_4. \quad (1.29)$$

Из $2N$ уравнений (1.27) и граничных условий величины с целочисленными индексами u_j, σ_j однозначно определяются, если некоторым образом выбраны константы диссипации $\gamma_1, \dots, \gamma_4$. На их выборе мы остановимся ниже, а сейчас покажем, что имеет место сходимость построенного таким образом приближенного решения к точному в энергетической норме.

1.4. Сходимость приближенного решения к точному в энергетической норме

Пусть u^*, σ^* — точное решение задачи (1.1), (1.4), (1.5) в области $[0, l] \times [0, T]$. Обозначим через E разность квадратов энергетических норм разности между точным (u^*, σ^*) и приближенным (u, σ) решениями при $t = T$ и $t = 0$:

$$E = \int_0^T \int_0^l \left[(u^* - u) \frac{\partial (u^* - u)}{\partial t} + (\sigma^* - \sigma) \frac{\partial (\sigma^* - \sigma)}{\partial t} \right] dx dt = \\ = \| (u^* - u), (\sigma^* - \sigma) \|_{t=T}^2 - \| (u^* - u), (\sigma^* - \sigma) \|_{t=0}^2. \quad (1.30)$$

Рассмотрим вариант граничных условий, когда, например, $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$. В этом случае можно считать $\alpha_1 = 1, \beta_2 = 1$. Из диссипативности граничных условий (1.5), (1.8) следует, что $\beta_1 \leq 0, \alpha_2 \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\sigma^* - \sigma')(u^* - u')|_{x=l} &\leq (f_2 - \widehat{f}_2)(u^* - u')|_{x=l}, \\
(\sigma^* - \sigma')(u^* - u')|_{x=0} &\geq (f_1 - \widehat{f}_1)(\sigma^* - \sigma')|_{x=0},
\end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma^* - \sigma')(u^* - u')] dx dt \leq \int_0^T [(f_2 - \widehat{f}_2)(u^* - u')|_{x=l} - (f_1 - \widehat{f}_1)(\sigma^* - \sigma')|_{x=0}] dt.$$

Так как функции u' и σ' не зависят от t , то

$$\int_0^T [(f_2 - \widehat{f}_2)u'|_{x=l} - (f_1 - \widehat{f}_1)\sigma'|_{x=0}] dt = 0.$$

Из (1.30), (1.1), (1.19) получаем

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma^* - \sigma')(u^* - u')] dx dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l \left[(u' - u) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^* - \sigma') + (\sigma' - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} (u^* - u') \right] dx dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что по определению

$$\int_0^T \int_0^l \left[(u' - u) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\sigma' - \sigma) \frac{\partial u'}{\partial x} \right] dx dt = \int_0^T \int_0^l D dx dt,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
E + \int_0^T \int_0^l D dx dt &\leq \int_0^T [(f_2 - \widehat{f}_2)u^*|_{x=l} - (f_1 - \widehat{f}_1)\sigma^*|_{x=0}] dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l \left[(u' - u) \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} + (\sigma' - \sigma) \frac{\partial u^*}{\partial x} \right] dx dt.
\end{aligned}$$

Осталось оценить интегралы

$$\int_0^T \int_0^l (u' - u) \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} dx dt, \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_0^l (\sigma' - \sigma) \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dt.$$

По неравенству Гельдера

$$\int_0^T \int_0^l (u' - u) \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} dx dt \leq \left(\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_0^l (u' - u)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу линейности u и u' по ξ и η

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (u' - u)^2 dx dt &= \int_0^T \int_0^l \left[(u'_0 - u_0)^2 + \frac{1}{3} u_1'^2 + \frac{1}{3} u_1^2 \right] dx dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^l \left[\left(\gamma_1^2 + \frac{\tau^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + 4\gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left(4\gamma_2^2 + \frac{h^2}{3} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \leq K_1^2 \int_0^T \int_0^l D dx dt, \end{aligned}$$

где K_1^2 — положительная константа, при которой выполняется неравенство

$$\frac{1}{4} \left[\left(\gamma_1^2 + \frac{\tau^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + 4\gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(4\gamma_2^2 + \frac{h^2}{3} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right] \leq K_1^2 D.$$

В силу положительной определенности D и квадратичной формы в левой части этого неравенства такая константа существует.

Таким образом,

$$\int_0^T \int_0^l (u' - u) \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} dx dt \leq K_1 \left(\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_0^l D dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_1 \rightarrow 0$, если τ , h , γ_i ($i = 1, \dots, 4$) стремятся к нулю.

Аналогично оценивается второй интеграл

$$\int_0^T \int_0^l (\sigma' - \sigma) \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dt \leq K_2 \left(\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_0^l D dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_2 \rightarrow 0$, как только τ , h , γ_i ($i = 1, \dots, 4$) $\rightarrow 0$.

Очевидно, что

$$\int_0^T (f_2 - \widehat{f}_2) u^* |_{x=l} dt \leq \left(\int_0^T u^{*2} |_{x=l} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T (f_2 - \widehat{f}_2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^T (f_1 - \widehat{f}_1) \sigma^* |_{x=0} dt \leq \left(\int_0^T \sigma^{*2} |_{x=0} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T (f_1 - \widehat{f}_1)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из предположения ограниченности точного решения u^* , σ^* и его производных по x

$$\int_0^T u^{*2} |_{x=l} dt \leq M_1^2, \quad \int_0^T \sigma^{*2} |_{x=0} dt \leq M_2^2,$$

$$\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq A_1^2, \quad \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq A_2^2$$

следует оценка

$$\begin{aligned} \|(u^* - u), (\sigma^* - \sigma)\|_{t=T}^2 + \int_0^T \int_0^l D dx dt \leq & \|(u^* - u), (\sigma^* - \sigma)\|_{t=0}^2 + \\ & + M_1 \left(\int_0^T (f_2 - \widehat{f}_2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + M_2 \left(\int_0^T (f_1 - \widehat{f}_1)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + (A_1 K_1 + A_2 K_2) \left(\int_0^T \int_0^l D dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует ограниченность искусственной диссипации $\int_0^T \int_0^l D dx dt$. При $h \rightarrow 0$ стремится к нулю первое слагаемое в правой части, при $\tau \rightarrow 0$ — второе и третье. Последнее слагаемое стремится к нулю, когда $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $\gamma_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, 4$). В этом случае

$$\|(u^* - u), (\sigma^* - \sigma)\|_{t=T}^2 \rightarrow 0,$$

что и означает сходимость приближенного решения к точному в энергетической норме.

Используя связь между u_0 , σ_0 , $\partial u'/\partial x$, $\partial \sigma'/\partial x$ и u_j , σ_j , перепишем уравнения (1.27) в виде

$$\begin{aligned} (\gamma_1^* + R)\sigma_{j+1} - (1 - \gamma_2^*)u_{j+1} &= (\gamma_1^* + R)\sigma_j + (1 + \gamma_2^*)u_j - 2u_{j+\frac{1}{2}}, \\ -(1 - \gamma_3^*)\sigma_{j+1} + (\gamma_4^* + R)u_{j+1} &= (1 + \gamma_3^*)\sigma_j + (\gamma_4^* + R)u_j - 2\sigma_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь $\gamma_i^* = \gamma_i/h$ (далее без «звездочки»).

Систему $2N$ уравнений (1.31) и граничных условий (1.21) в общем случае можно решать методом прогонки. Причем, как показано в [82], условия неотрицательности D (1.29) обеспечивают хорошую обусловленность процедуры прогонки.

1.5. Явная схема вычисления решения

Константы γ_i ($i = 1, \dots, 4$) можно выбрать таким образом, чтобы схема вычисления u_j, σ_j была явной. Потребуем, чтобы в ячейке ω величины u_{j+1}, σ_{j+1} на правой стороне ячейки не зависели от u_j, σ_j на левой стороне ячейки, и наоборот.

Для этого достаточно, чтобы определитель матрицы коэффициентов при u_{j+1}, σ_{j+1} и определитель матрицы коэффициентов при u_j, σ_j были нулевыми:

$$\det \begin{vmatrix} \gamma_1 + R & -(1 - \gamma_2) \\ -(1 - \gamma_3) & \gamma_4 + R \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} \gamma_1 + R & 1 + \gamma_2 \\ 1 + \gamma_3 & \gamma_4 + R \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует

$$\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \quad 1 - \gamma_2^2 = (\gamma_1 + R)(\gamma_4 + R). \quad (1.32)$$

Тогда из (1.31) получаем

$$\begin{aligned} u_j + \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_4 + R} \sigma_j &= u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_4 + R} \sigma_{j+\frac{1}{2}}, \\ u_{j+1} - \frac{1 + \gamma_2}{\gamma_4 + R} \sigma_{j+1} &= u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1 + \gamma_2}{\gamma_4 + R} \sigma_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для всех внутренних узлов слоя формулы вычисления u_{j+1}, σ_{j+1} будут следующими:

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \frac{1}{2}[(1 + \gamma_2)u_{j+\frac{3}{2}} + (1 - \gamma_2)u_{j+\frac{1}{2}}] + \frac{\gamma_1 + R}{2}(\sigma_{j+\frac{3}{2}} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}), \\ \sigma_{j+1} &= \frac{1}{2}[(1 - \gamma_2)\sigma_{j+\frac{3}{2}} + (1 + \gamma_2)\sigma_{j+\frac{1}{2}}] + \frac{\gamma_4 + R}{2}(u_{j+\frac{3}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Величины u_0, σ_0 и u_N, σ_N рассчитываются с помощью одного из граничных условий (1.21) и одного из соотношений (1.33). Схема содержит два свободных параметра γ_1 и γ_4 ,

$$\gamma_2^2 = 1 - (\gamma_1 + R)(\gamma_4 + R). \quad (1.35)$$

Предложенный выше простейший вариант (1.26) получается, если $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_4$. Тогда из (1.32) $\gamma_4 = \gamma_1 = 1 - R$ и явная схема (1.34) полностью совпадает со схемой Годунова.

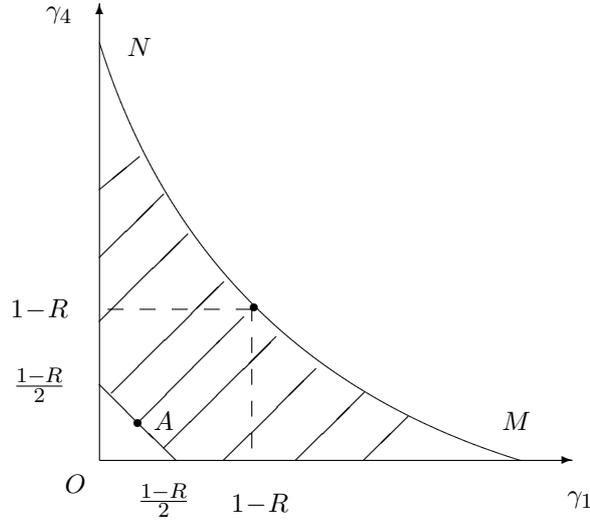


Рис. 1.2. Область изменения параметров диссипации

Так как $\gamma_2^2 \geq 0$, то из ограничений (1.29) и (1.35) следует, что параметры γ_1 и γ_4 изменяются внутри криволинейного треугольника OMN , ограниченного отрезками прямых $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_4 = 0$ и гиперболой $(\gamma_1 + R)(\gamma_4 + R) = 1$ (рис. 1.2).

Таким образом, для пересчета решения системы уравнений (1.1) (в размерном виде) на один шаг по времени используются формулы:

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{R}{\rho c}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c R(u_{j+1} - u_j),$$

где величины с целочисленными индексами определяются по формулам:

$$u_{j+1} = \frac{1}{2}[(1 + \gamma_2)u_{j+\frac{3}{2}} + (1 - \gamma_2)u_{j+\frac{1}{2}}] + \frac{\gamma_1 + R}{2\rho c}(\sigma_{j+\frac{3}{2}} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}),$$

$$\sigma_{j+1} = \frac{1}{2}[(1 - \gamma_2)\sigma_{j+\frac{3}{2}} + (1 + \gamma_2)\sigma_{j+\frac{1}{2}}] + \rho c \frac{\gamma_4 + R}{2}(u_{j+\frac{3}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}).$$

Значения констант γ_1 , γ_4 необходимо предварительно задать (константа γ_2 определяется из (1.35)). Отметим, что именно к задачам такого вида будет сводиться процедура решения двумерных задач.

Прежде чем остановиться на конкретном выборе констант γ_1 , γ_4 , выясним, насколько правильно приближенное решение описывает точное решение задачи на реальных сетках.

1.6. Сравнение приближенного решения с точным

В первую очередь нас интересуют решения, которые содержат разрывы, возникающие в случае линейной задачи либо в результате задания разрывных начальных условий, либо из-за несогласованности граничных и начальных условий в граничных точках. Понятно, что в этом случае речь идет об обобщенных решениях, определить которые можно различным способом (например, см. [62]). Мы можем считать обобщенным решение нашей задачи, построенное методом характеристик, не требующим гладкости краевых условий.

Рассмотрим две модельные задачи, выписать точное решение которых не представляет труда.

Задача I: $u(x, 0) = 0, \sigma(x, 0) = 0, \sigma(0, t) = 1, u(1, t) = 0$ (рис. 1.3).

Задача II: $u(x, 0) = 0, \sigma(x, 0) = 0, \sigma(0, t) = e^{-kt}, u(1, t) = 0$ (рис. 1.4).

На рис. 1.3, 1.4 штриховая линия — точное решение соответствующей задачи на момент времени $t = 0,5$, линия 1 — решение по схеме Годунова (*). Отрезок $[0, 1]$ разбит на 50 ячеек. Число Куранта R принято равным 0,5. В задаче I вместо разрыва мы имеем плавную кривую с точкой перегиба, совпадающей с фронтом волны. Содержащиеся в точном решении задачи II максимумы (и особенно острые пики) сильно

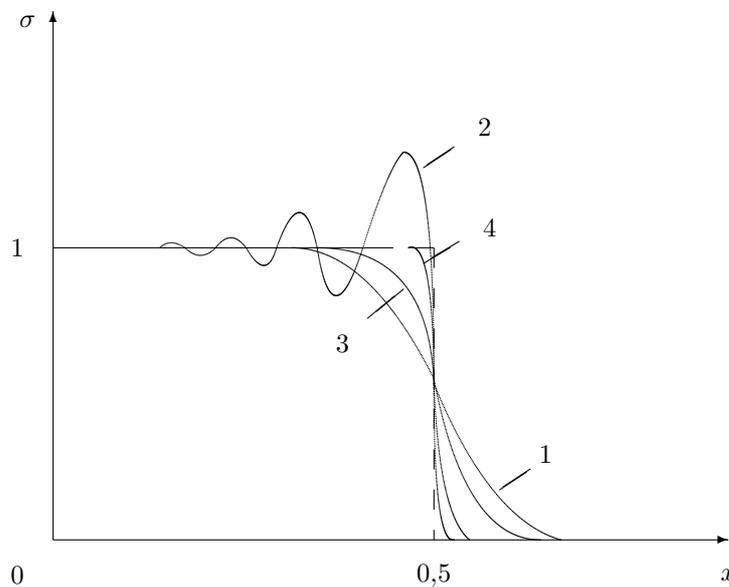


Рис. 1.3. Модельная задача I

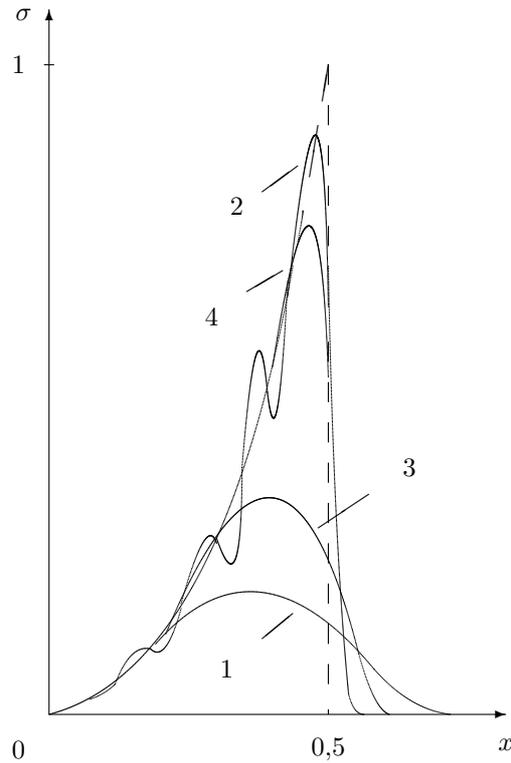


Рис. 1.4. Модельная задача II

затухают. Говорят, что приближенное решение «размазывает» разрыв. Причину такого размазывания можно установить, вспомнив, что схема (*) со вторым порядком аппроксимирует систему уравнений (1.12) параболического типа. К такого вида системе приводилась бы задача движения среды, обладающей физической вязкостью. Поэтому говорят, что в этом случае разностная схема привносит в решение «искусственную» или «аппроксимационную» вязкость.

В [63] на примере одного модельного уравнения переноса исследована величина зоны размазывания для схемы (*). Размазывание уменьшается по мере приближения R к единице, и при $R = 1$ мы имеем точное решение. Однако выбирать параметр Куранта R в точности равным единице мы можем разве что в случае модельной задачи, решение которой носит чисто методический характер. В случае квазилинейных систем уравнений при исследовании многомерных задач и при решении даже одномерных задач, но для неизотропной упругой среды невозможность такого выбора является принципиальной.

1.7. Выбор констант диссипации

Поставим перед собой цель выбрать параметры γ_1 , γ_4 , которыми мы вправе распоряжаться сами, такими, чтобы для любого значения R точность приближенного решения была наиболее высокой и размазывание разрыва минимальным.

В силу того, что мерой близости между точным и приближенным решениями в нашем подходе является мощность искусственной диссипации

$$D = \gamma_1 \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + \gamma_4 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2,$$

ясно, что имеет смысл выбирать γ_1 , γ_4 по возможности минимальными.

Их можно было бы взять просто равными нулю. В этом случае схема будет обладать вторым порядком точности. Такое решение для $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$ приведено на рис. 1.3, 1.4 (кривые 2). Несмотря на то, что это решение имеет существенно более крутой профиль в области разрыва, оно, тем не менее, не очень пригодно для анализа результатов, поскольку имеет колебательный характер. Эти, нефизической природы, осцилляции не исчезают с измельчением разностной сетки, а имеют значительную амплитуду.

Такое решение называют немонотонным, соответствующий термин приписывают и схеме, по которой это решение вычисляется. Вообще, термин «монотонное» корректно применять только к одномерному уравнению переноса, точное решение которого действительно сохраняет монотонно возрастающими или убывающими начальными данными, если они таковыми являлись. Под монотонностью численного решения системы (1.1) либо любой другой задачи обычно понимают сохранение достаточно плавной формы и отсутствие «паразитных» осцилляций.

В работах [63, 61] доказано, что среди линейных двухслойных схем второго порядка нет монотонных схем. Более общий результат получен в [118]. В литературе можно найти исследования (например, см. [84]), объясняющие присутствие «паразитных» колебаний у схем второго порядка тем, что первым дифференциальным приближением таких схем является уравнение Кортевега – де Фриза, содержащее функции с незаходящими осцилляциями в качестве решения.

Но немонотонными могут быть не только схемы второго порядка. В этом можно убедиться, выбирая значения γ_1 и γ_4 близкими к нулю [34]. Колебательный характер решения (хотя и с несколько меньшей

амплитудой) при этом сохранится, а схема будет иметь первый порядок точности.

Для того чтобы получить монотонное решение с порядком точности выше первого, обычно поступают одним из следующих способов:

— используют нелинейную (с разрывными коэффициентами) схему, учитывающую характер решения на предыдущем по времени слое. Такие алгоритмы приведены, например, в [37, 91, 104, 126, 180, 181];

— используют сглаживание немонотонного решения, корректируя его при помощи монотонной, но менее точной схемы (например, см. [75, 76]).

Возвращаясь к схеме (1.22), (1.34), заметим, что расчеты позволили выделить область изменения параметров γ_1, γ_4 , в которой у приближенного решения паразитных осцилляций не наблюдается. На рис. 1.2 заштрихована часть криволинейного треугольника OMN , в которой расчеты показали монотонный профиль приближенного решения. Область монотонности лежит вне треугольника $\gamma_1 \geq 0, \gamma_4 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_4 \leq (1-R)/2$. Можно выбрать $\gamma_1 = \gamma_4 = (1-R)/4$ (точка A на рис. 1.2). В этом случае схема будет обладать примерно в 4 раза меньшей диссипацией, чем схема (*). Отметим, что при этом структура вычислительного алгоритма остается той же, что и для схемы Годунова, не появляется и дополнительных вычислительных затрат. На рис. 1.3, 1.4 кривые 3 — решения задач I и II по предложенной схеме для $\gamma_1 = \gamma_4 = (1-R)/4$. Обращает на себя внимание более крутой профиль решения, чем по схеме (*), и отсутствие осцилляций.

Интересным оказывается минимально отличающийся от схемы Годунова вариант схемы (1.22), (1.34), в котором $\gamma_2 = 0$, но $\gamma_1 \neq \gamma_4$. Он имеет вид

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{R}{\rho c}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c R(u_{j+1} - u_j),$$

где

$$u_{j+1} = \frac{1}{2}(u_{j+\frac{3}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\gamma_1 + R}{2\rho c}(\sigma_{j+\frac{3}{2}} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}),$$

$$\sigma_{j+1} = \frac{1}{2}(\sigma_{j+\frac{3}{2}} + \sigma_{j+\frac{1}{2}}) + \rho c \frac{1}{2(\gamma_1 + R)}(u_{j+\frac{3}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}).$$

Как мы увидим ниже, алгоритмы решения двумерных задач, основанные на независимом расщеплении, базируются именно на этой схеме.

1.8. Монотонная схема второго порядка точности

С использованием нескольких аппроксимаций искомых функций полиномами можно построить схемы решения задачи с порядком точности выше первого. Очевидно, что для этого требуется использовать локальную аппроксимацию более высокого порядка, чем линейные функции.

Процедуру построения таких схем проиллюстрируем для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0). \quad (1.36)$$

В области $x \geq 0, t \geq 0$ требуется определить функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую краевым условиям:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.37)$$

где $\varphi(t)$ и $u_0(x)$ — известные функции. Не нарушая общности, будем считать $a = 1$.

Расчетную область с помощью процедуры, описанной в разделе 1.2, разобьем на элементарные прямоугольники ω , в каждом из которых введем локальные координаты ξ и η : $\omega = \{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$.

В качестве приближенного решения в элементе ω примем функции

$$u = \sum_{k=0}^n (u_k^0 + u_k^1 \eta) P_k(\xi), \quad (1.38)$$

$$u' = \sum_{k=0}^{n+1} u_k' P_k(\xi), \quad (1.39)$$

где u_k^0, u_k^1, u_k' — константы, $P_k(\xi)$ — ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ полиномы Лежандра степени k .

Пусть функции (1.38), (1.39) удовлетворяют в элементе ω уравнениям

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} \right) P_k(\xi) d\omega = 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad (1.40)$$

граничные и начальные условия выполнены интегрально:

$$\int_{-1}^1 [u|_{\eta=-1} - u_0(\xi)] P_k(\xi) d\xi = 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad (1.41)$$

$$\int_{-1}^1 (u' |_{\xi=-1} - \varphi(\eta)) d\eta = 0. \quad (1.42)$$

Система $2n+3$ уравнений (1.40)–(1.42) содержит $3n+4$ неизвестных констант и является, таким образом, незамкнутой. Необходимые для замыкания $n+1$ уравнений получим, используя справедливое для всех функций u, u' , удовлетворяющих (1.40), энергетическое тождество

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) d\omega + \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x} (u'^2) d\omega + \int_{\omega} D d\omega = 0,$$

где

$$\int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} (u - u') \frac{\partial u'}{\partial x} d\omega. \quad (1.43)$$

Используя (1.38)–(1.42), равенство (1.43) можно представить в виде

$$\int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \left(u |_{\eta=-1} - u' - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} d\omega.$$

В качестве дополнительных уравнений примем

$$\int_{-1}^1 \left[u |_{\eta=-1} - u' - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} - \sum_{i,j=0}^n \gamma_{ij} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_j P_i(\xi) \right] P_k(\xi) d\xi = 0, \quad (1.44)$$

где $k = 0, \dots, n$; γ_{ij} — константы диссипации; $(\partial u' / \partial x)_j$ — коэффициенты разложения $\partial u' / \partial x$ в ряд по полиномам Лежандра на отрезке $[-1, 1]$. Уравнения (1.44) и граничные условия (1.42) образуют замкнутую систему относительно неизвестных величин u'_1, \dots, u'_{n+1} . Числа γ_{ij} всегда можно подобрать таким образом, что $D \geq 0$. Несложно показать (совершенно аналогично тому, как это сделано в разделе 1.2), что это условие будет достаточным для равномерной устойчивости процесса вычисления в энергетической норме $\| u \|_t^2 = \int_0^\infty u^2 dx$:

$$\| u \|_{t=(i+1)\tau}^2 \leq \| u \|_{t=i\tau}^2.$$

Рассмотрим случай $n = 1$. Введем обозначения

$$u |_{\eta=-1} = u_{j+\frac{1}{2}}^0 + u_{j+\frac{1}{2}}^1 \xi, \quad u |_{\eta=1} = u^{0j+\frac{1}{2}} + u^{1j+\frac{1}{2}} \xi, \\ u' |_{\xi=-1} = u_j, \quad u' |_{\xi=1} = u_{j+1}.$$

Из (1.40) получаем формулы пересчета на верхний слой по времени

$$u^{0j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}}^0 - 2Ru'_1, \quad u^{1j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}}^1 - 6Ru'_2. \quad (1.45)$$

Дополнительные уравнения (1.44) дают

$$\begin{aligned} u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}}^0 + (R + \gamma_1)u'_1 + \gamma_2 u'_2 &= 0, \\ u'_1 - u_{j+\frac{1}{2}}^1 + 3(R + \gamma_4)u'_2 - \gamma_3 u'_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

В систему уравнений (1.46) входят четыре, пока не определенные нами, константы $\gamma_1, \dots, \gamma_4$. Мощность искусственной диссипации D записывается в виде

$$D = \gamma_1(u'_1)^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)u'_1 u'_2 + 3\gamma_4(u'_2)^2. \quad (1.47)$$

Квадратичная форма D неотрицательна, если

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0, \quad (\gamma_2 - \gamma_3)^2 \leq 12\gamma_1\gamma_4. \quad (1.48)$$

Подставляя в (1.46) $u'_1 = (u_{j+1} - u_j)/2$ и исключая u'_2 , мы получаем уравнение, связывающее u_j и u_{j+1} . Схема будет явной, если u_{j+1} не будет зависеть от u_j . Это приводит к условию

$$3(\gamma_4 + R)(1 - R - \gamma_1) = (1 - \gamma_3)(1 - \gamma_2).$$

Окончательно, мы имеем явную схему

$$\begin{aligned} u^{0\ j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 - R(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} &= (1 - 6\delta R)u_{j+\frac{1}{2}}^1 + 3\beta R(u_{j+1} - u_j), \\ u_{j+1} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \alpha u_{j+\frac{1}{2}}^1. \end{aligned} \quad (1.49)$$

В (1.49) введены обозначения:

$$\alpha = \frac{1 - R - \gamma_1}{1 - \gamma_3}, \quad \beta = \frac{1 - R - \gamma_1}{1 - \gamma_2}, \quad \delta = \frac{1 - R - \gamma_1}{(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3)}.$$

Условия неотрицательности (1.48) D принимают вид

$$\begin{aligned} 1 - R - \frac{\alpha\beta}{\delta} \geq 0, \quad \frac{1}{3\delta} \geq R, \\ (\beta - \alpha)^2 \leq 12\delta^2 \left(1 - R - \frac{\alpha\beta}{\delta}\right) \left(\frac{1}{3\delta} - R\right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ясно, что величины u'_1 и u'_2 имеют соответственно первый и второй порядки малости по h , следовательно, схема (1.49) будет схемой второго порядка, если $\gamma_1 = 0$ или, что то же самое,

$$\delta = \alpha\beta/(1 - R). \quad (1.51)$$

Показать это можно, выписав дифференциальное приближение для схемы (1.49). Однако, надо отметить, что схема записана в несколько нетрадиционном виде. На самом деле, подставляя третье уравнение в два первых и выполняя ряд преобразований, можно записать (1.49)

в виде трехслойной явной разностной схемы для расчета величин $u_{j+\frac{1}{2}}^0$ либо $u_{j+\frac{1}{2}}^1$:

$$(u_m^{n+2} - u_m^{n+1}) + R(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) - A[(u_m^{n+1} - u_m^n) + R(u_m^n - u_{m-1}^n)] + \\ + 3\alpha\beta R[(u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n) + R(u_m^n - u_{m-1}^n)] = 0,$$

где введены обозначения

$$A = 1 - 6\delta R + 3\alpha\beta R, \quad u_m^n = u_{j+\frac{1}{2}}^0.$$

Первое дифференциальное приближение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2} \left(1 - R - \frac{\alpha\beta}{\delta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Отсюда видно, что, действительно, схема имеет второй порядок, если выполнено соотношение (1.51).

С помощью метода Фурье можно выписать необходимые условия устойчивости схемы, которые совпадут с первыми двумя неравенствами (1.50). Следует отметить, что третье неравенство (1.50) не является необходимым. В работе [33] показано, что схему, с точностью до обозначений совпадающую с (1.49), можно получить, выбирая вместо рассмотренных нами полиномов Лежандра любую ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ систему функций. При этом определенным выбором базиса всегда можно добиться того, чтобы α равнялось β .

На самом деле, семейство схем, построенных на локальной кусочно-квадратичной аппроксимации, может быть максимально расширено, если в качестве приближенного решения принять следующие функции [170]:

$$u = (u_0^0 + u_0^1\eta + u_0^2 P_2(\eta)) + (u_1^0 + u_1^1\eta)\xi, \\ u' = (u_0^1 + v_0^1\eta) + (u_1^1 + 3v_1^1\eta)\xi + u_2^1 P_2(\xi). \quad (1.52)$$

В этом случае с помощью описанной выше процедуры мы получим семейство явных схем, содержащее пять параметров:

$$u^{0\ j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}}^0 - R(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} = (1 - 6\delta R)u_{j+\frac{1}{2}}^1 + 3\beta R(u_{j+1} - u_j) - RK_2(v_{j+1} - v_j), \\ u_{j+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \alpha u_{j+\frac{1}{2}}^1, \quad v_{j+1} = K_1 u_{j+\frac{1}{2}}^1. \quad (1.53)$$

Схема (1.53) будет иметь второй порядок, если $\delta = \alpha\beta/(1 - R)$, $\alpha = \beta$, $K_1 = K_2$, и будет устойчивой, если $3\alpha^2 + (1 - R)K_1^2 \leq (1 - R)/R$.

Зададимся целью выбрать из трехпараметрического семейства схем (1.49) или пятипараметрического семейства (1.53) монотонные схемы, а

среди них — схемы с меньшей искусственной диссипацией. Предварительно мы должны определить, что мы будем понимать под монотонной схемой и, в первую очередь, что должны понимать под монотонным приближенным решением, представляющим собой в каждый момент времени в нашем случае кусочно-линейную функцию.

Подойти к определению монотонности нам может помочь следующий факт, справедливый для всякой монотонно возрастающей функции. Если $f_-^0 + f_-^1\xi$ и $f_+^0 + f_+^1\xi$ — линейные части в разложении монотонно возрастающей функции в двух соседних ячейках ($-1 \leq \xi \leq 1$), то справедливы следующие неравенства:

$$f_-^0 + \frac{1}{3}f_-^1 \leq f_+^0 - \frac{1}{3}f_+^1, \quad f_-^1 \geq 0, \quad f_+^1 \geq 0.$$

Это положение доказывается непосредственной проверкой неравенств после подстановки в них значений $f_-^0, f_+^0, f_-^1, f_+^1$ в виде интегралов от $f(x)$.

По аналогии с этим фактом предложим следующее, оказавшееся достаточно конструктивным, определение монотонности решения. Решение назовем монотонно возрастающим, если значения $u_{j+\frac{1}{2}}^0, u_{j+\frac{1}{2}}^1$ в любых двух соседних ячейках связаны неравенствами:

$$u_{j-\frac{1}{2}}^0 + ku_{j-\frac{1}{2}}^1 \leq u_{j+\frac{1}{2}}^0 - lu_{j+\frac{1}{2}}^1, \quad u_{j+\frac{1}{2}}^1 \geq 0, \quad k + l \geq 0. \quad (1.54)$$

В случае монотонно убывающей функции знаки первых двух неравенств в (1.54) меняются на противоположные.

Схему назовем монотонной, если она сохраняет у решения свойства (1.54) при переходе на следующий шаг по времени.

Опуская громоздкие преобразования, выпишем условия, накладываемые на параметры $\alpha, \beta, \delta, R, k, l$, обеспечивающие монотонность схемы (1.49):

$$\begin{aligned} \beta &\geq 0, \quad 6\delta - 3\alpha\beta - 3\beta l \leq \frac{1}{R}, \quad \alpha \leq k, \\ l(6\delta - 3\alpha\beta - 3\beta l) &\geq \alpha + l, \quad 3\beta \leq \frac{1}{k}, \quad 3\beta \leq \frac{1-R}{lR}, \\ 6\delta k - 3\alpha\beta k + 3\alpha\beta l - 6\beta lk - k + l + 2\alpha &\geq 0, \quad k + l \geq 0. \end{aligned}$$

В случае схемы первого порядка среди множества параметров, удовлетворяющих условию монотонности, можно указать те, при которых мощность диссипации D минимальна: $\alpha = \beta = k = l = 1/\sqrt{3}$, $\delta = 2/3$ при $R \leq 1/2$; $k = l = 1/\sqrt{3}$, $\alpha = \beta = (1-R)/\sqrt{3}R$, $\delta = 1/6R^2$ при

$1/2 \leq R \leq 1$. Схема имеет вид:

$$\begin{aligned} u^{0\ j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 - R(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} &= (1 - 4R)u_{j+\frac{1}{2}}^1 + \sqrt{3}R(u_{j+1} - u_j), \\ u_{j+1} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_{j+\frac{1}{2}}^1 \end{aligned} \quad (1.55)$$

при $R \leq 1/2$;

$$\begin{aligned} u^{0\ j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 - R(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1-R}{R}u_{j+\frac{1}{2}}^1 + \sqrt{3}(1-R)(u_{j+1} - u_j), \\ u_{j+1} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \frac{1-R}{\sqrt{3}R}u_{j+\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

при $1/2 \leq R \leq 1$.

Эта же схема остается наилучшей (в смысле минимума D) среди линейных схем первого порядка и в случае семейства схем (1.53).

Легко показать, что для схемы второго порядка ($\delta = \alpha^2/(1-R)$) не существует постоянных в каждой ячейке параметров, удовлетворяющих условиям монотонности. Однако возможность выбирать входящие в схему параметры, принимающие различные значения в зависимости от характера решения на нижнем слое по времени, позволяет получить монотонную (естественно, нелинейную) схему второго порядка. Такая схема не единственна. Можно предложить следующий вариант:

$$\begin{aligned} u^{0\ j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 - R(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{6R\alpha^2}{1-R}\right)u_{j+\frac{1}{2}}^1 + 3R\alpha(u_{j+1} - u_j) - R\beta_{j+\frac{1}{2}}(v_{j+1} - v_j), \\ u_{j+1} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \alpha u_{j+\frac{1}{2}}^1, \quad v_{j+1} = \beta_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}}^1, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-2R}{R(1-R)}}, & \text{если } |u_{j+\frac{1}{2}}^1| > |u_{j-\frac{1}{2}}^1|, \\ 0, & \text{если } |u_{j+\frac{1}{2}}^1| \leq |u_{j-\frac{1}{2}}^1| \end{cases}$$

при $R \leq 1/2$;

$$\alpha = \frac{1-R}{\sqrt{3}R}, \quad \beta_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2R-1}}{R}, & \text{если } |u_{j+\frac{1}{2}}^1| > |u_{j-\frac{1}{2}}^1|, \\ 0, & \text{если } |u_{j+\frac{1}{2}}^1| \leq |u_{j-\frac{1}{2}}^1| \end{cases}$$

при $1/2 \leq R \leq 1$. Условия монотонности выполнены при $k = l = 1/\sqrt{3}$.

Более громоздкими выкладками, но не сложнее принципиально, строится схема, использующая кусочно-квадратичную аппроксимацию, и для системы уравнений, описывающих одномерную динамику стержня (1.1). Принимается следующая аппроксимация неизвестных функций:

$$\begin{aligned} u &= (u_0 + u_1\eta) + (u_2 + u_3\eta)\xi, & \sigma &= (\sigma_0 + \sigma_1\eta) + (\sigma_2 + \sigma_3\eta)\xi, \\ u' &= u'_0 + u'_1\xi + u'_2P_2(\xi), & \sigma' &= \sigma'_0 + \sigma'_1\xi + \sigma'_2P_2(\xi). \end{aligned}$$

Опуская вывод, приведем окончательный вид разностной схемы при такой аппроксимации решения в самом общем случае, когда разбиение отрезка узлами может быть неравномерным ($x_{j+1} - x_j = h_{j+\frac{1}{2}}$) и коэффициенты системы принимают различные постоянные значения в каждом отрезке ($\rho_{j+\frac{1}{2}}, c_{j+\frac{1}{2}}; R_{j+\frac{1}{2}} = c_{j+\frac{1}{2}}\tau/h_{j+\frac{1}{2}}, G_{j+\frac{1}{2}} = \rho_{j+\frac{1}{2}}c_{j+\frac{1}{2}}$):

$$\begin{aligned} u^{0\ j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}}^0 + \frac{R_{j+\frac{1}{2}}}{G_{j+\frac{1}{2}}}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \\ \sigma^{0\ j+\frac{1}{2}} &= \sigma_{j+\frac{1}{2}}^0 + R_{j+\frac{1}{2}}G_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j), \\ u^{1\ j+\frac{1}{2}} &= [1 - 3R(\delta^1 + \delta^2)]_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}}^1 + \left[\frac{3R}{G}(\delta^1 - \delta^2) \right]_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^1 + \\ &+ \left[\frac{3R(\alpha^1 + \alpha^2)}{2} \right]_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) + \left[\frac{3R(\alpha^1 - \alpha^2)}{2G} \right]_{j+\frac{1}{2}}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \\ \sigma^{1\ j+\frac{1}{2}} &= [1 - 3R(\delta^1 + \delta^2)]_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^1 + [3GR(\delta^1 - \delta^2)]_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}}^1 + \\ &+ \left[\frac{3R(\alpha^2 - \alpha^1)}{2}G \right]_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) + \left[\frac{3R(\alpha^1 + \alpha^2)}{2} \right]_{j+\frac{1}{2}}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{(G_{j+\frac{1}{2}} + G_{j-\frac{1}{2}})}(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^0 - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^0 + G_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}}^0 + G_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}^0 - \\ &- \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2G_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{j-\frac{1}{2}}^1G_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}^1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2\sigma_{j+\frac{1}{2}}^1 - \alpha_{j-\frac{1}{2}}^1\sigma_{j-\frac{1}{2}}^1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{1}{(G_{j+\frac{1}{2}} + G_{j-\frac{1}{2}})}[G_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j-\frac{1}{2}}^0 + G_{j-\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^0 + \\ &+ G_{j+\frac{1}{2}}G_{j-\frac{1}{2}}(u_{j+\frac{1}{2}}^0 - u_{j-\frac{1}{2}}^0) - G_{j+\frac{1}{2}}G_{j-\frac{1}{2}}(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^1u_{j-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2u_{j+\frac{1}{2}}^1) + \\ &+ \alpha_{j-\frac{1}{2}}^1G_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j-\frac{1}{2}}^1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2G_{j-\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}}^1]. \end{aligned}$$

Схема (1.57) будет «наилучшей» схемой первого порядка, когда:

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^1 = \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \delta_{j+\frac{1}{2}}^1 = \delta_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{2}{3}, \quad \text{если } R_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2};$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^1 = \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1 - R_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}R_{j+\frac{1}{2}}}, \quad \delta_{j+\frac{1}{2}}^1 = \delta_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{6R_{j+\frac{1}{2}}}, \quad \text{если } \frac{1}{2} \leq R_{j+\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Для монотонной схемы второго порядка параметры необходимо выбирать следующими:

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}^1 = \frac{(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^1)^2}{1 - R_{j+\frac{1}{2}}}, \quad \delta_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2)^2}{1 - R_{j+\frac{1}{2}}}, \quad R_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2};$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^1 = \begin{cases} \left[\frac{1-R}{\sqrt{3R(1-R)}} \right]_{j+\frac{1}{2}}, & \text{если } |(\sigma^1 - Gu^1)R|_{j+\frac{1}{2}} > |(\sigma^1 - Gu^1)R|_{j-\frac{1}{2}}, \\ \left[\frac{R}{\sqrt{3R(1-R)}} \right]_{j+\frac{1}{2}}, & \text{если } |(\sigma^1 - Gu^1)R|_{j+\frac{1}{2}} \leq |(\sigma^1 - Gu^1)R|_{j-\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 = \begin{cases} \left[\frac{1-R}{\sqrt{3R(1-R)}} \right]_{j+\frac{1}{2}}, & \text{если } |(\sigma^1 + Gu^1)R|_{j+\frac{1}{2}} > |(\sigma^1 + Gu^1)R|_{j-\frac{1}{2}}, \\ \left[\frac{R}{\sqrt{3R(1-R)}} \right]_{j+\frac{1}{2}}, & \text{если } |(\sigma^1 + Gu^1)R|_{j+\frac{1}{2}} \leq |(\sigma^1 + Gu^1)R|_{j-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Можно увидеть, что последние формулы содержат другой вариант выбора констант, нежели в формулах (1.56).

Отметим, что конструкция схемы первого порядка такова, что в отличие от схем, использующих линейную аппроксимацию (раздел 1.2), точное решение на ее основе получается не только в случае $R = 1$, но и при $R = 0,5$. То, что при $R \approx 0,5$ схема дает высокую точность, будет использовано нами при построении эффективного алгоритма решения двумерных упругих задач.

В семействе схем (1.53) при определенных значениях констант содержатся многие известные в литературе схемы. Например, если положить

$$\alpha = 1 - R, \quad \beta = \delta = \frac{1}{6R}, \quad K_1 = K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то получим схему II, предложенную ван Лиром [180], [181].

Если выбрать $\alpha = \beta = \delta = 1 - R$, $K_1 = K_2 = R$, то получим схему III из этой же работы. Обе схемы устойчивы при $R \leq 1$.

Для иллюстрации эффективности схемы на рис. 1.3, 1.4 приведены решения задач I и II из раздела 1.6 (кривые 4). Число Куранта R выбрано равным 0,45.

1.9. Численное решение краевых задач для одномерных систем гиперболических уравнений

Обобщим рассмотренный в предыдущих параграфах подход на случай решения задач для одномерных систем гиперболических уравнений. Принципиально новым элементом при построении схем является процедура независимой аппроксимации младших (недифференциальных) членов уравнений. Ниже показано, что произвол, возникающий в результате использования нескольких локальных аппроксимаций (в том числе и независимой аппроксимации для младших членов уравнений), позволяет формулировать схемы, которые наряду с обычными условиями аппроксимации и устойчивости удовлетворяют ряду дополнительных требований.

Эти требования сводятся к тому, что разностная схема должна хорошо моделировать свойства решений исходной системы дифференциальных уравнений в условиях, когда шаги сетки остаются конечными. Так, при решении задач, описывающих процессы поглощения, существенное значение имеет свойство асимптотической устойчивости схемы, а при аппроксимации динамических задач механики твердого тела (осесимметричные задачи динамики и задачи динамики тонких оболочек вращения) важным является свойство устойчивости относительно соответствующего статического решения.

Рассмотрим симметричную [62] одномерную гиперболическую систему уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + C \bar{u} = 0, \quad (1.58)$$

где вектор $\bar{u} = \|u_i\|$, $i = 1, \dots, n$; матрицы A и B симметричны, A — положительно определена.

Известно [62], что невырожденным ортогональным преобразованием система (1.58) может быть приведена к следующей канонической форме

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + F \bar{v} = 0, \quad (1.59)$$

где $\bar{v} = \|v_i\|$, $i = 1, \dots, n$; матрица Λ имеет диагональный вид: $\Lambda = \lambda_j \delta_{kj}$; δ_{kj} — символ Кронекера.

В дальнейшем, при конструировании алгоритмов численного решения, будем использовать каноническую форму уравнений (1.59). Все полученные результаты могут быть легко перенесены на случай представления уравнений в форме (1.58).

Решение краевой задачи для системы уравнений (1.59) будем искать в каждом элементе ω в виде линейных полиномов по времени

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1 \eta, \quad (1.60)$$

линейных полиномов по координате

$$\bar{v}' = \bar{v}'_0 + \bar{v}'_1 \xi \quad (1.61)$$

и постоянных в пределах элемента ω величин \bar{v}'' , удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + F \bar{v}'' = 0. \quad (1.62)$$

Из (1.60), (1.61) следует, что систему (1.62) можно записать в виде

$$\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t + \tau) = \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \frac{\tau}{h} \Lambda [\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j] - \tau F \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}, \quad (1.63)$$

где $\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t + \tau)$, $\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t)$ — значения искомого решения на верхнем ($\eta = 1$) и нижнем ($\eta = -1$) слоях по времени соответственно; \bar{v}_j — значение полинома (1.61) в общем для двух соседних элементов узле; $\bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$ — значение независимой аппроксимации недифференциальных членов системы (1.59) в элементе ω .

Очевидно, что уравнений (1.62) вместе с краевыми условиями, которым должны удовлетворять полиномы (1.60), (1.61), недостаточно для определения коэффициентов этих полиномов и величин \bar{v}'' . Для замкнутости системы необходимо указать способ вычисления величин \bar{v}_j , $\bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$ по уже известным значениям $\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t)$.

Заметим, что для любых полиномов (1.60), (1.61) и величин \bar{v}'' , удовлетворяющих уравнению (1.62), имеет место энергетическое равенство

$$\int_{\omega} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \bar{v}_0 + \Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \bar{v}' + F \bar{v}'' \bar{v}'' \right] d\omega + Q = 0,$$

где

$$Q = \int_{\omega} \left[\Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} (\bar{v}_0 - \bar{v}'_0) + F \bar{v}'' (\bar{v}_0 - \bar{v}'') \right] d\omega. \quad (1.64)$$

В качестве дополнительных уравнений для определения значений $\bar{v}_j, \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$ примем

$$\begin{aligned} \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \frac{\tau}{2}\Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\tau}{2}F\bar{v}''_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}'_0 &= \frac{1}{2}\Gamma_1\Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + \frac{1}{2}W_1F\bar{v}''\bar{v}'', \\ \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \frac{\tau}{2}\Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\tau}{2}F\bar{v}''_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\Gamma_2\Lambda \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + \frac{1}{2}W_2F\bar{v}''\bar{v}'', \end{aligned} \quad (1.65)$$

где Γ_k, W_k ($k = 1, 2$) — некоторые матрицы, элементы которых будут определены ниже.

Используя (1.60)–(1.63), (1.65), выражение для величины Q в (1.64) можно записать в виде

$$Q = \int_{\omega} \frac{1}{2}[\Gamma_1\bar{a}\bar{a} + (W_1^* + \Gamma_2)\bar{a}\bar{b} + W_2\bar{b}\bar{b}]d\omega, \quad (1.66)$$

где $\bar{a} = \Lambda(\partial\bar{v}'/\partial x)$, $\bar{b} = F\bar{v}''$.

В случае $\Gamma_k = 0, W_k = 0$ решение системы (1.63), (1.65) обладает свойством консервативности ($Q = 0$), при этом дополнительные уравнения (1.65) принимают вид $\bar{v}'_0 = \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}} = \bar{v}_0$. Однако нетрудно заметить, что построение консервативного решения сопряжено с необходимостью решать систему жестко связанных между собой уравнений относительно величин $\bar{v}_j, \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$ во всей расчетной области. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать варианты выбора матриц Γ_k, W_k , в которых за счет введения искусственной диссипации $Q \geq 0$ система дополнительных уравнений (1.65) расщепляется на независимые подсистемы относительно величин $\bar{v}_j, \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$. В случае $Q \geq 0$ матрицы Γ_k, W_k будем называть матрицами констант диссипации.

1.9.1. Схема I (схема Годунова)

Существует выбор матриц констант диссипации, при котором уравнения (1.63), (1.65) совпадают с уравнениями схемы «распада разрыва» Годунова. Положим

$$W_1 = -\tau I, \quad \Gamma_2 = \tau(2\gamma - 1)I, \quad W_2 = \tau(2\gamma - 1)I, \quad (1.67)$$

где I — единичная матрица; γ — весовой коэффициент: $0 \leq \gamma \leq 1$.

Используя (1.61), (1.63), (1.67), запишем уравнения (1.65) в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_{j+1} + \bar{v}_j + \frac{1}{h}[\tau I + \Gamma_1]\Lambda(\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j) &= 2\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t), \\ \bar{v}''_{j+\frac{1}{2}} &= \gamma\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t + \tau) + (1 - \gamma)\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (1.68)$$

В случае выполнения условий

$$[\tau I + \Gamma_1]|\Lambda| = hI \quad \text{или} \quad \Gamma_1 = \gamma_{kj}\delta_{kj}, \quad \gamma_{kk} = \frac{h}{|\lambda_{kk}|} - \tau \quad (1.69)$$

значения \bar{v}_j в первом уравнении (1.68) не зависят от значений \bar{v}_{j+1} и находятся по явным формулам

$$\bar{v}_j = 0,5(I + \text{sgn}\Lambda)\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}(t) + 0,5(I - \text{sgn}\Lambda)\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t), \quad (1.70)$$

где $\text{sgn}\Lambda = \text{sgn}(\lambda_{kj})\delta_{kj}$.

Уравнения (1.70) совпадают с уравнениями для определения «больших» величин в схеме Годунова, аппроксимирующей систему (1.59) при $F = 0$. Аппроксимация младших членов, аналогичная аппроксимации во втором уравнении (1.68), обсуждалась в работе [63] при обобщении схемы «распада разрыва» на случай $F \neq 0$.

Согласно (1.63), (1.68), (1.70) схема Годунова может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t + \tau) = [I + \tau\gamma F]^{-1} \{ & T_0\bar{v}_{j+\frac{3}{2}}(t) + \\ & + [T_1 - \tau(1 - \gamma)F]\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) + T_2\bar{v}_{j-\frac{1}{2}}(t) \}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

где

$$T_0 = \frac{\tau}{2h}(|\Lambda| - \Lambda), \quad T_1 = I - \frac{\tau}{h}|\Lambda|, \quad T_2 = \frac{\tau}{2h}(|\Lambda| + \Lambda).$$

Далее схему (1.71) будем называть схемой I. Из (1.66), (1.67), (1.69) следует, что для схемы I условие неотрицательности

$$Q = \int_{\omega} \frac{1}{2} [\Gamma_1 \bar{a}\bar{a} + 2\tau(\gamma - 1)\bar{a}\bar{b} + (2\gamma - 1)\tau\bar{b}\bar{b}] d\omega \geq 0$$

можно записать в виде

$$\gamma_{kk} \geq \tau \frac{(\gamma - 1)^2}{(2\gamma - 1)}, \quad \gamma > \frac{1}{2}. \quad (1.72)$$

Условия (1.69), (1.72) определяют ограничения на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{2\gamma - 1}{\gamma^2} \min_k \frac{h}{|\lambda_{kk}|}, \quad 1 \geq \gamma > \frac{1}{2}, \quad (1.73)$$

при которых схема I является диссипативной, а значит, и устойчивой в энергетической норме.

1.9.2. Схема II

Можно ослабить ограничения на матрицы констант диссипации (1.72) и шаг по времени (1.73), потребовав выполнения условий «ко-

сосимметричности» для уравнений (1.65)

$$W_1 + \Gamma_2 = 0. \quad (1.74)$$

Один из возможных способов аппроксимации младших членов в системе (1.58), учитывающий условия (1.74), рассматривался в работе [55] при построении алгоритма решения осесимметричных задач теории упругости и в работе [13] при решении задач динамики тонких оболочек вращения. Этому способу соответствует выбор матриц констант диссипации в виде

$$\Gamma_1 = \gamma_{kj} \delta_{kj}, \quad W_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad W_2 = 0. \quad (1.75)$$

Нетрудно заметить, что в случае (1.75), в отличие от схемы I, вычисление узловых значений \bar{v}_j из первого уравнения (1.65) (шаг предиктор) зависит от аппроксимации младших членов, которые на шаге корректор (уравнения (1.63)) принимаются равными значениям на среднем слое по времени.

Схему (1.63), (1.65), (1.75) будем называть схемой II. Необходимые и достаточные условия диссипативности схемы II следуют из (1.66), (1.75): $\gamma_{kk} \geq 0$. В общем случае (для произвольной матрицы F) выписать явные формулы решения для схемы II (аналогичные формулам (1.70), (1.71) в схеме I) затруднительно, так как возникает необходимость в приведении к диагональному виду матриц вида $F[I + 0,5\tau F]^{-1}$. При этом ограничения на шаг τ , следующие из условий диссипативности схемы II, зависят от элементов матрицы F . Можно показать [13, 55], что для уравнений упругости и уравнений тонких оболочек указанные ограничения являются менее жесткими, чем условия (1.73) в схеме I.

1.9.3. Схема III

Среди схем, удовлетворяющих условию (1.74), наибольший интерес представляет схема, в которой для определения узловых величин \bar{v}_j используются уравнения, совпадающие с уравнениями (1.70) в схеме Годунова. Такой схеме соответствует выбор матриц констант диссипации в виде

$$\Gamma_1 = \gamma_{kj} \delta_{kj}, \quad W_1 = -\tau I, \quad \Gamma_2 = \tau I, \quad W_2 = 0. \quad (1.76)$$

Из (1.65) следует, что в случае (1.76) величину $\bar{v}''_{j+\frac{1}{2}}$ нельзя интерпретировать как аппроксимацию искомой вектор-функции на некотором слое по времени в промежутке $[t, t + \tau]$. Поэтому в дальнейшем схему (1.63), (1.65), (1.76) будем называть схемой с независимой аппроксимацией младших членов (схема III).

Аналогично (1.71) явная схема III может быть записана в виде

$$\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t+\tau) = \left[I - \frac{\tau}{2}F\right] \left[I + \frac{\tau}{2}F\right]^{-1} \{T_0 \bar{v}_{j+\frac{3}{2}}(t) + T_1 \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) + T_2 \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}(t)\}. \quad (1.77)$$

Учитывая (1.66), (1.69), (1.76), можно найти ограничение на шаг интегрирования τ в схеме (1.77):

$$\tau \leq \min_k \frac{h}{|\lambda_{kk}|}. \quad (1.78)$$

Заметим, что схема, совпадающая со схемой III во внутренних точках области интегрирования, была построена в работе [81] на основе процедуры сеточно-характеристической интерполяции как модифицированный вариант схемы Куранта. Там же, в [81], дана оценка роста разностного решения задачи Коши в зависимости от матрицы F недифференциальных членов.

1.10. Качественные свойства построенных схем

Исследуем качественные свойства построенных выше схем на примере конкретных уравнений [10].

В основе каждого численного метода лежит та или иная «элементарная» схема для простейшего уравнения переноса, на которые расщепляются системы уравнений гиперболического типа. Выбор этой схемы во многом определяет свойства и эффективность вычислительного алгоритма в целом. Поэтому несомненный интерес представляет сравнительный анализ применения схем I–III для решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u &= 0, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Общее решение задачи (1.79) имеет вид:

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} \varphi(x - t). \quad (1.80)$$

Решение (1.80) описывает перенос частиц по характеристикам при наличии поглощения ($\alpha > 0$). В табл. 1 приведены некоторые качественные характеристики исследуемых схем решения задачи (1.79).

Во втором и третьем столбцах таблицы приведены необходимые и достаточные условия диссипативности и монотонности схем I–III. Заметим, что у схемы с независимой аппроксимацией младших членов (схема III) диапазон устойчивости в энергетической норме совпадает с

Таблица 1. Качественные характеристики исследуемых схем

Схема	Условия диссипативности	Условия монотонности	Спектральное условие Неймана	Устойчивость относительно стационарного решения
I	$\tau \leq \frac{2\gamma-1}{\gamma^2}h$ $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$	$\tau \leq \frac{h}{1+\Delta_h}$ $\Delta_h =$ $= \alpha(1-\gamma)h$	$\rho_q^1 = \Delta_1[1 -$ $-\tau\alpha(1-\gamma) -$ $-R(1 - e^{-iqh})],$ $\Delta_1 = (1 + \tau\gamma\alpha)^{-1}$	$\rho^1 = \Delta_1[1 -$ $-\tau\alpha(1-\gamma) -$ $-R(1 - e^{\alpha h})]$
II	$\tau \leq \frac{h}{1-\frac{h}{2}\alpha}$	$\frac{\tau}{h} \leq 1 - \frac{\tau^2}{4}\alpha^2$	$\rho_q^2 = \Delta_2[1 - \frac{\tau^2\alpha^2}{4} -$ $-R(1 - e^{-iqh})],$ $\Delta_2 = (1 + \frac{\tau\alpha}{2})^{-2}$	$\rho^2 = \Delta_2[1 -$ $-\frac{\tau^2\alpha^2}{4} -$ $-R(1 - e^{\alpha h})]$
III	$\tau \leq h$	$\tau \leq h$ $\tau\alpha \leq 2$	$\rho_q^3 = \Delta_3[1 -$ $-R(1 - e^{-iqh})],$ $\Delta_3 = \frac{1-\frac{\tau}{2}\alpha}{1+\frac{\tau}{2}\alpha}$	$\rho^3 = \Delta_3[1 -$ $-R(1 - e^{\alpha h})]$

диапазоном монотонности. При этом максимальная величина отношения $R = \tau/h$, допускаемая условиями диссипативности и монотонности, совпадает с максимальным значением $R = 1$ в условии Куранта для схемы, аппроксимирующей задачу (1.79) в случае отсутствия ($\alpha = 0$) недифференциальных членов. Аналогичным свойством обладает и схема I, но только при $\gamma = 1$, что соответствует аппроксимации младшего члена с верхнего слоя по времени. При $\gamma < 1$ и $\tau = h$ схема I становится немонотонной.

Максимальное значение шага τ , определяемое условием диссипативности схемы II, может значительно (для достаточно больших α) превышать величину, допускаемую условием ее монотонности. Уже в случае $\tau = h$ схема II не обладает свойством монотонности. Таким образом, для получения монотонных численных решений задачи (1.79) с максимально возможным шагом по времени τ , предпочтительным является использование схемы III и схемы I при $\gamma = 1$. Однако при $\tau = h$ схема III обладает меньшей аппроксимационной вязкостью, чем схема I ($\gamma = 1$). Действительно, как следует из условий (1.66), (1.69), (1.76) для уравнений (1.79), решение, получаемое по схеме III, в случае $\tau = h$ будет консервативным ($Q = 0$), тогда как решение по схеме I ($\gamma = 1$) характеризуется искусственной диссипацией, величина которой может быть найдена из (1.66), (1.67), (1.69), и имеет вид

$$Q = \int_{\omega} \frac{\tau}{2} \alpha^2 u_{i+\frac{1}{2}}^2(t + \tau) d\omega > 0.$$

В четвертом столбце табл. 1 приведены множители роста ρ_q^k ($k = 1, 2, 3$) q -й гармоники (собственные числа оператора перехода), полученные при исследовании схем I–III методом разделения переменных. Как известно [65], при некоторых ограничениях на функцию $\varphi(x)$ начальных данных в (1.79), условия вида

$$|\rho_q| \leq 1 + c\tau, \quad c = \text{const} \quad (1.81)$$

являются необходимыми и достаточными для устойчивости разностной задачи Коши в норме L_2 . Можно показать, что схемы I–III удовлетворяют неравенствам (1.81), если выполнено условие Куранта $\tau \leq h$. Однако характер устойчивости исследуемых схем различен. Так, в случае выполнения условия Куранта, для схем I ($\gamma = 1$), II, III справедливы оценки

$$\max_q |\rho_q^1| \leq (1 + \alpha\tau)^{-1} \quad (\gamma = 1), \quad \max_q |\rho_q^2| \leq \left(1 + \frac{\tau^2 \alpha^2}{4}\right) \Delta_2, \quad (1.82)$$

$$\max_q |\rho_q^3| \leq \Delta_3.$$

Из (1.82) следует, что схемы I ($\gamma = 1$), II, III не только устойчивы, но и хорошо обусловлены: ошибки начальных данных не возрастают, а убывают при $t \rightarrow \infty$. Для схемы I при $\gamma \in [0, 0,5)$ и $\tau = h$ всегда можно указать такие значения $q = q^*$, что $1 \leq |\rho_{q^*}^1| \leq 1 + \tau\alpha$, т. е. ошибки начальных данных не убывают.

На основании оценок (1.82) можно сделать вывод об асимптотической устойчивости [86] схемы I ($\gamma = 1$) и схемы III при $\tau = h$, так как гармоники этих схем за один шаг затухают не медленнее, чем гармоники точного решения (1.80). Для асимптотической устойчивости схемы II достаточно потребовать выполнения условия ее монотонности. Очевидно также, что схема I при $\gamma \neq 1$ и $\tau = h$ не обладает свойством асимптотической устойчивости.

Важной качественной характеристикой устойчивости разностных схем является свойство, характеризующее поведение приближенного решения относительно стационарного (неизменяемого) решения задачи Коши. Для задачи (1.79) стационарное решение имеет вид

$$u(x, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad A = \text{const}. \quad (1.83)$$

В последнем столбце табл. 1 приведены выражения операторов перехода ρ^k для схем I–III в случае, когда в качестве начального условия задано стационарное решение (1.83).

Анализ величин ρ^1 и ρ^2 показывает, что при любом $\tau \leq h$, $h > 0$ и при любых $\gamma \in [0, 1]$ (для схемы I), выполнены неравенства $\rho^1 > 1$, $\rho^2 > 1$, т. е. на больших интервалах времени в условиях, когда шаги сетки остаются конечными, решения, вырабатываемые схемами I–II, могут достаточно сильно отличаться от точного решения (1.83).

Совершенно другой характер имеет решение, получаемое по схеме III. Легко показать, что для любых величин $h > 0$, $\alpha > 0$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \rho^3 &= 1, & \text{если } \tau = \tau^* &= 2[\alpha^{-1} - h(e^{\alpha h} - 1)^{-1}] \in (0, h); \\ \rho^3 &< 1, & \text{если } \tau^* < \tau &\leq h; \\ \rho^3 &> 1, & \text{если } 0 < \tau < \tau^*. \end{aligned}$$

Таким образом, всегда можно указать такой шаг интегрирования $\tau = \tau^*$, удовлетворяющий условию Куранта, при котором схема III «сохраняет» стационарное решение (1.83).

В заключение отметим, что множители роста ρ^k могут служить количественной характеристикой устойчивости разностных схем I–III. Так, например, для схемы I ($\gamma = 1$), зафиксировав $\tau = h$, найдем выражение относительной погрешности на n -ом слое по времени

$$\Delta = (\rho^1)^n - 1 = \left[\frac{e^{\alpha h}}{1 + \alpha h} \right]^n - 1.$$

Ясно, что величина Δ должна быть меньше единицы, чтобы приближенное решение можно было считать сколько-нибудь точным. Таким образом, можно получить оценку для величины n — числа шагов по времени, допускаемых схемой I ($\gamma = 1$) при решении задачи (1.79) с начальным условием (1.83):

$$n \leq (\ln(e^{\alpha h}(1 + \alpha h)^{-1}))^{-1} \ln 2. \quad (1.84)$$

Подводя итог, сформулируем из проведенного анализа основные качественные выводы:

- для получения монотонных численных решений задачи Коши для уравнения (1.79) с максимально возможным шагом по времени τ предпочтительным является использование схемы III и схемы I при $\gamma = 1$;
- при $\tau = h$ решение, получаемое по схеме III, обладает свойством консервативности ($Q = 0$), тогда как решение по схеме Годунова характеризуется искусственной диссипацией, величина которой в случае $\gamma = 1$ больше нуля;
- схемы II и III при выполнении условий их монотонности обладают свойством асимптотической устойчивости [86];
- всегда можно указать такой шаг интегрирования $\tau = \tau^*$, удовлетворяющий условию устойчивости, при котором схема III «сохраняет» стационарное ($u_t = 0$) решение задачи Коши для уравнения (1.79).

Таким образом, схема III обладает рядом преимуществ в случае решения простейших уравнений переноса, на которые расщепляются системы уравнений гиперболического типа. Как мы увидим далее, наиболее наглядно эти преимущества проявляются при решении задач, аналогичных задачам динамики тонких оболочек.

1.11. Нестационарное деформирование пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига

В качестве примера применения описанной в разделе 1.4 процедуры решения одномерных смешанных задач для систем гиперболических уравнений, содержащих младшие недифференциальные члены, рассмотрим безразмерные уравнения нестационарного деформирования пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига (модель Тимошенко)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \omega \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \varepsilon^{-1} Q, & \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

где W — скорость прогиба; ω — скорость поворота; Q — перерезывающая сила; M — момент; k — константа упругого материала; $\varepsilon = H^2/(12L^2)$, H , L — толщина и характерная длина пластины.

В работе [81] дана формулировка уравнений (1.85) в симметризованном виде (1.59) и на примере задачи об импульсном деформировании пластины проведено численное сравнение свойств стандартной и модифицированной сеточно-характеристических схем, совпадающих в точках интегрирования (за исключением точек границы) со схемами I и III предыдущего раздела соответственно.

Трудности построения алгоритмов численного решения задач для уравнений типа уравнений Тимошенко связаны с тем, что при достаточно больших временах распределение искомым функций по пространственной координате имеет колебательный характер. Для описания этих колебаний необходимо соответствующее измельчение разностной сетки. Если шаг интегрирования h не мал (по сравнению с толщиной пластины H), то применение устойчивых схем I, II может давать быстрое накопление ошибок аппроксимации и округления.

Аналогичный эффект обсуждался выше — при анализе устойчивости схемы I относительно стационарного решения уравнения переноса. Из (1.83) следует, что с увеличением коэффициента поглощения α (при фиксированной величине h), происходит быстрое уменьшение максимального значения числа шагов по времени n , при котором схема I дает решение с приемлемой точностью.

Опишем подробнее процедуру построения схем решения задач для системы уравнений Тимошенко.

Точно так же, как и в разделе 1.2, разобьем область определения функций W , ω , Q , M $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ на элементарные прямоугольники v , с каждым из которых свяжем локальную систему координат ξ и η : $v = \{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$. В качестве приближенного решения в прямоугольнике v примем функции

$$W = W_0 + W_1\eta, \quad Q = Q_0 + Q_1\eta, \quad \dots, \quad (1.86)$$

$$W' = W'_0 + W'_1\xi, \quad Q' = Q'_0 + Q'_1\xi, \quad \dots, \quad (1.87)$$

$$\omega'', \quad Q'', \quad (1.88)$$

где $W_0, \dots, W'_0, \dots, \omega'', Q''$ — постоянные, удовлетворяющие в v уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial Q'}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = k \left(\frac{\partial W'}{\partial x} + \omega'' \right), \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial M'}{\partial x} - \varepsilon^{-1}Q'', \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \omega'}{\partial x},$$

начальным условиям

$$W|_{\eta=-1} = W_{j+\frac{1}{2}}, \quad Q|_{\eta=-1} = Q_{j+\frac{1}{2}}, \quad M|_{\eta=-1} = M_{j+\frac{1}{2}}, \quad \omega|_{\eta=-1} = \omega_{j+\frac{1}{2}}$$

и граничным условиям, достаточно общий вариант которых может быть следующим:

$$(\alpha_1 W + \beta_1 Q)|_{\xi=-1} = f_1, \quad (\alpha_2 \omega + \beta_2 M)|_{\xi=-1} = f_2$$

на левой границе первой ячейки и

$$(\alpha_3 W + \beta_3 Q)|_{\xi=1} = f_3, \quad (\alpha_4 \omega + \beta_4 M)|_{\xi=1} = f_4$$

на правой границе последней ячейки. На границах между ячейками выполнены условия сопряжения полиномов (1.87). Для значений этих функций на границах ячеек принимаются обозначения

$$W'|_{\xi=-1} = W_j, \quad W'|_{\xi=1} = W_{j+1}, \quad \dots \text{ и т. д.} \quad (1.90)$$

На основании (1.86)–(1.90) получаем формулы для вычисления значений многочленов (1.86) на верхнем слое по времени, которые обозначаем через $W^{j+\frac{1}{2}}, Q^{j+\frac{1}{2}}, \dots$ и т. д.

$$\begin{aligned} W^{j+\frac{1}{2}} &= W_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}(Q_{j+1} - Q_j), \\ Q^{j+\frac{1}{2}} &= Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau k}{h}(W_{j+1} - W_j) + \tau k \omega'', \\ \omega^{j+\frac{1}{2}} &= \omega_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}(M_{j+1} - M_j) - \frac{\tau}{\varepsilon} Q'', \\ M^{j+\frac{1}{2}} &= M_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}(\omega_{j+1} - \omega_j). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Дополнительные уравнения для определения величин с целочисленными индексами и постоянных ω'' и Q'' получим, используя энергетическое тождество, справедливое для всякого точного решения системы уравнений (1.85)

$$\begin{aligned} \iint_v \left[W \frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + \varepsilon M \frac{\partial \omega}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \omega \right) \right] dv = \\ = \iint_v \frac{\partial}{\partial x} (WQ + \varepsilon M \omega). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Приближенный аналог (1.92), справедливый для любых функций (1.86)–(1.88), удовлетворяющих (1.89), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \iint_v \left[W' \frac{\partial W'}{\partial t} + \varepsilon \omega' \frac{\partial \omega'}{\partial t} + \varepsilon M' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + Q' \left(\frac{\partial W'}{\partial x} + \omega'' \right) \right] dv + \iint_v D dv = \\ = \iint_v \frac{\partial}{\partial x} (W'Q' + \varepsilon M' \omega'), \end{aligned} \quad (1.93)$$

где мощность искусственной диссипации D имеет вид

$$\begin{aligned} D = (Q'_0 - Q_0) \frac{\partial W'}{\partial x} + (W'_0 - W_0) \frac{\partial Q'}{\partial x} + \varepsilon (M'_0 - M_0) \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \\ + \varepsilon (\omega'_0 - \omega_0) \frac{\partial M'}{\partial x} + (\omega_0 - \omega'') Q'' + (Q'' - Q_0) \omega''. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Самый общий вариант уравнений получается приравнованием членов, заключенных в круглые скобки в (1.94), всевозможным комбинациям постоянных $\partial W'/\partial x$, $\partial M'/\partial x$, ..., ω'' , Q'' :

$$\begin{aligned} Q'_0 - Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau k}{2} \frac{\partial W'}{\partial x} - \frac{\tau k}{2} \omega'' = \gamma_{11} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\ + \gamma_{13} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{14} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{15} \omega'' + \gamma_{16} Q'', \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} W'_0 - W_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial Q'}{\partial x} = \gamma_{21} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\ + \gamma_{23} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{24} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{25} \omega'' + \gamma_{26} Q'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'_0 - M_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \omega'}{\partial x} &= \gamma_{31} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{32} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\
&\quad + \gamma_{33} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{34} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{35} \omega'' + \gamma_{36} Q'', \\
\omega'_0 - \omega_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial Q'}{\partial x} &= \gamma_{41} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{42} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\
&\quad + \gamma_{43} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{44} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{45} \omega'' + \gamma_{46} Q'', \\
Q''_0 - Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau k}{2} \frac{\partial W'}{\partial x} - \frac{\tau k}{2} \omega'' &= \gamma_{51} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{52} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\
&\quad + \gamma_{53} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{54} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{55} \omega'' + \gamma_{56} Q'', \\
\omega_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial M'}{\partial x} - \frac{\tau}{2\varepsilon} Q'' - \omega'' &= \gamma_{61} \frac{\partial W'}{\partial x} + \gamma_{62} \frac{\partial Q'}{\partial x} + \\
&\quad + \gamma_{63} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \gamma_{64} \frac{\partial M'}{\partial x} + \gamma_{65} \omega'' + \gamma_{66} Q''.
\end{aligned}$$

Правые части уравнений (1.95) в самом общем виде содержат 36 констант диссипации, а конкретный выбор этих констант приводит нас к определенной разностной схеме и, в частности, к схемам I, II, III из раздела 1.9.

Схема I получается, если выбрать константы γ_{ij} так, чтобы уравнения (1.95) совпадали с уравнениями (1.67), аппроксимирующими систему (1.85) при отсутствии младших членов ($F = 0$), т. е.

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} = \frac{\alpha k}{2}, \quad \gamma_{15} = -\frac{\tau k}{2}, \quad \gamma_{22} = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{h}{\sqrt{k}} - \tau, \\
\gamma_{33} = \frac{\beta}{2}, \quad \gamma_{44} = \frac{\beta}{2}, \quad \gamma_{46} = \frac{\tau}{2\varepsilon}, \quad \beta = h - \tau,
\end{aligned} \tag{1.96}$$

остальные $\gamma_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$).

Значения γ_{5i}, γ_{6i} ($i = 1, \dots, 6$) выбираются такими, чтобы обеспечить совпадение ω'', Q'' с ω, Q на слое $\gamma\tau$, $0 \leq \gamma \leq 1$:

$$\omega'' = (1 - \gamma)\omega_{j+\frac{1}{2}} + \gamma\omega^{j+\frac{1}{2}}, \quad Q'' = (1 - \gamma)Q_{j+\frac{1}{2}} + \gamma Q^{j+\frac{1}{2}}.$$

Схеме II соответствует аппроксимация младших членов, равная значению искомого решения на среднем слое по времени, т. е. в (1.95)

$$\gamma_{5i} = 0, \quad \gamma_{6i} = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \tag{1.97}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} Q'' &= \frac{1}{A} \left(Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau k}{2} \omega_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau k}{2} \frac{\partial W'}{\partial x} + \frac{\tau^2 k}{4} \frac{\partial M'}{\partial x} \right), \\ \omega'' &= \frac{1}{A} \left(\omega_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\varepsilon} Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2 k}{4\varepsilon} \frac{\partial W'}{\partial x} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial M'}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.98)$$

где $A = 1 + \tau^2 k / 4\varepsilon$. Величины с целочисленными индексами вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} W_{j+1} &= \frac{1}{2} \left[\hat{W}_{j+\frac{3}{2}} + \hat{W}_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{A}{k}} (\hat{Q}_{j+\frac{3}{2}} - \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}) \right], \\ Q_{j+1} &= \frac{1}{2} \left[\hat{Q}_{j+\frac{3}{2}} + \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{k}{A}} (\hat{W}_{j+\frac{3}{2}} - \hat{W}_{j+\frac{1}{2}}) \right], \\ \omega_{j+1} &= \frac{1}{2} \left[\hat{\omega}_{j+\frac{3}{2}} + \hat{\omega}_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{A}} (\hat{M}_{j+\frac{3}{2}} - \hat{M}_{j+\frac{1}{2}}) \right], \\ M_{j+1} &= \frac{1}{2} \left[\hat{M}_{j+\frac{3}{2}} + \hat{M}_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{A} (\hat{\omega}_{j+\frac{3}{2}} - \hat{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \right], \end{aligned} \quad (1.99)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \hat{M}_{j+\frac{1}{2}} &= M_{j+\frac{1}{2}}, \quad \hat{W}_{j+\frac{1}{2}} = W_{j+\frac{1}{2}}, \\ \hat{\omega}_{j+\frac{1}{2}} &= \left(\omega_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\varepsilon} Q_{j+\frac{1}{2}} \right) / A, \quad \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}} = \left(Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau k}{2} \omega_{j+\frac{1}{2}} \right) / A. \end{aligned}$$

Схема устойчива если выполняется ограничение

$$\tau \leq \sqrt{Ah} \quad (1.100)$$

заведомо более слабое, чем ограничение в схеме Годунова.

Схема III конструируется, исходя из следующих требований:

- этап «предиктор» полностью совпадает с «предиктором» в схеме I Годунова;
- матрица констант диссипации γ_{ij} является кососимметричной.

В этом случае константы γ_{ij} ($i = 1, 4, j = 1, 6$) принимают значения (1.96), а γ_{5j} и γ_{6j} обеспечивают выполнение второго условия. При этом

из последних двух уравнений (1.95) находим

$$\begin{aligned} Q'' &= \frac{1}{A} \left(Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau k}{2} \omega_{j+\frac{1}{2}} + \tau k \frac{\partial W'}{\partial x} + \frac{\tau^2 k}{2} \frac{\partial M'}{\partial x} \right), \\ \omega'' &= \frac{1}{A} \left(\omega_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\varepsilon} Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2 k}{2\varepsilon} \frac{\partial W'}{\partial x} + \tau \frac{\partial M'}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.101)$$

а величины с целочисленными индексами находятся по формулам

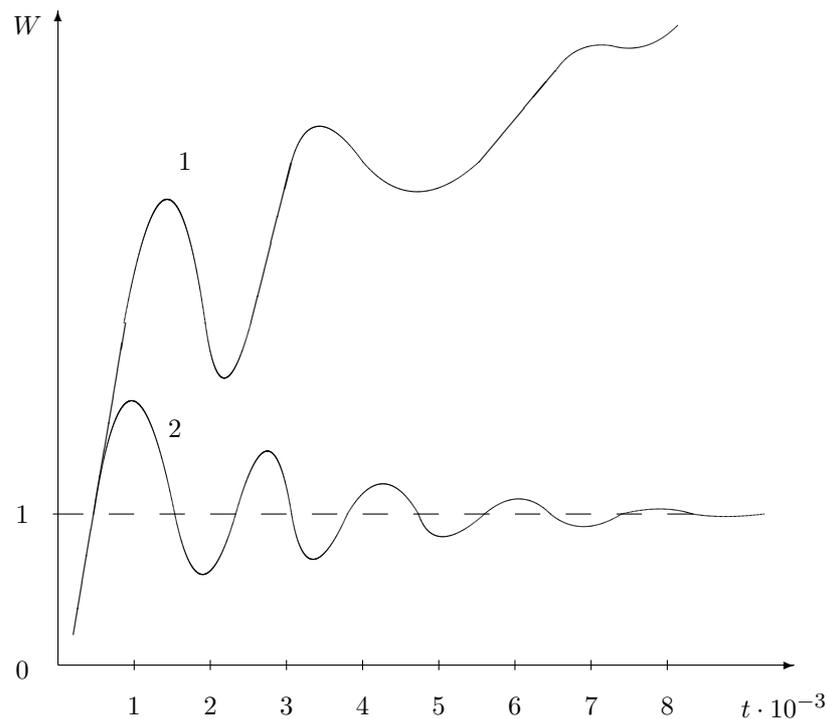
$$\begin{aligned} W_{j+1} &= \frac{1}{2} [W_{j+\frac{3}{2}} + W_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{k}} (Q_{j+\frac{3}{2}} - Q_{j+\frac{1}{2}})], \\ Q_{j+1} &= \frac{1}{2} [Q_{j+\frac{3}{2}} + Q_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{k} (W_{j+\frac{3}{2}} - W_{j+\frac{1}{2}})], \\ \omega_{j+1} &= \frac{1}{2} [\omega_{j+\frac{3}{2}} + \omega_{j+\frac{1}{2}} + (M_{j+\frac{3}{2}} - M_{j+\frac{1}{2}})], \\ M_{j+1} &= \frac{1}{2} [M_{j+\frac{3}{2}} + M_{j+\frac{1}{2}} + (\omega_{j+\frac{3}{2}} - \omega_{j+\frac{1}{2}})]. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Схема устойчива при $\tau \leq h$. Отметим, что соотношения (1.101) нельзя интерпретировать как аппроксимацию искомых функций на некотором слое. Можно показать, что схема III кроме того обладает свойством сильной устойчивости [86] (хорошей обусловленности) при решении задач для уравнений Тимошенко. Действительно, при формулировке уравнений (1.95) в виде (1.102) матрица F недифференциальных членов является кососимметричной $F + F^* = 0$, что означает отсутствие в системе внутренних источников энергии. По теореме Кэли [60], устанавливающей взаимно однозначное соответствие между ортогональными и кососимметричными матрицами, матрица $[I - \frac{\tau}{2} F][I + \frac{\tau}{2} F]^{-1}$ будет ортогональной. Так как для любой ортогональной матрицы U выполнено равенство $\|\bar{x}\|_{l_2} = \|U\bar{x}\|_{l_2}$, то согласно (1.77) для схемы III справедливо соотношение

$$\|\bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t + \tau)\|_{l_2} = \|T_0 \bar{v}_{j+\frac{3}{2}}(t) + T_1 \bar{v}_{j+\frac{1}{2}}(t) + T_2 \bar{v}_{j-\frac{1}{2}}(t)\|_{l_2},$$

которое означает, что в случае выполнения условия Куранта энергетическая норма оператора перехода схемы III не возрастает. Более того, норма решения на каждом шаге по времени не зависит от матрицы $F = -F^*$ и совпадает с нормой решения для схемы, аппроксимирующей уравнения (1.59) в случае отсутствия младших членов ($F = 0$).

Различный характер устойчивости (а значит и сходимости) схем I–III можно проиллюстрировать на примере решения задачи об импульсном деформировании пластины. Граничные условия (в безразмерных переменных) имеют вид: $W = 0$, $\omega = 0$ при $x = 0$; $Q = Q^*$, $\omega = 0$ при

Рис. 1.5. Импульсное деформирование пластины: $\tau = h = 0,05$

$x = 1$. Значение поперечного усилия Q^* выбиралась так, чтобы прогиб W в точке $x = 1$, соответствующий точному решению статической задачи, был равен 1.

На рис. 1.5, 1.6 показаны численные решения сформулированной задачи, полученные по схеме I ($\gamma = 1$) (кривая 1) и по схеме III (кривая 2). По осям абсцисс и ординат отложены число шагов по времени и прогиб W в точке $x = 1$ соответственно. При проведении расчетов полагалось: $\tau = h = 0,05$ (рис. 1.5), $\tau = h = 0,02$ (рис. 1.6), $\varepsilon = 0,208 \cdot 10^{-3}$, $k = 0,3$.

Структура диссипации в схемах I, II такова, что с течением времени напряжения (усилия и моменты) стремятся к постоянным значениям, близким к статическому решению, а скорости стремятся к постоянным, но не равным нулю значениям, приводящим к неограниченному росту прогиба пластины. В схеме III влияние искусственной диссипации приводит к тому, что значения скорости прогиба стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ (в точном решении сформулированной динамической задачи значение скорости должно иметь знакопеременный колебатель-

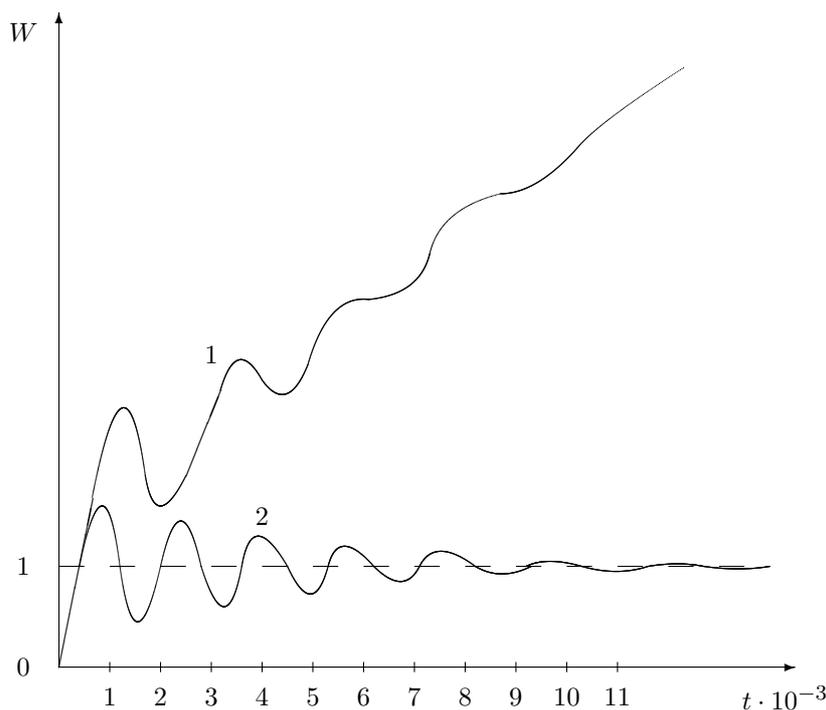


Рис. 1.6. Импульсное деформирование пластины: $\tau = h = 0,02$

ный характер). Поэтому решение (прогибы пластины), вырабатываемое схемой III, выходит на статический режим (штриховая линия). Заметим, что даже существенное измельчение разностной сетки (расчеты при $h = 0,005 - 0,0025$) не изменяет качественного характера решений, получаемых по схемам I–III.

1.12. Одномерные упругие задачи с осевой и сферической симметрией

Особый интерес представляет вопрос об аппроксимации младших (недифференциальных) членов в задачах, решения которых обладают свойством осевой или сферической симметрии. Система уравнений для указанного класса задач может быть сформулирована в каноническом виде (1.59). При этом коэффициенты при младших членах (компоненты матрицы F) имеют особенность в точках оси симметрии. Численные расчеты показывают, что решения, получаемые по схемам I, II, могут обладать дополнительными (нефизическими) локальными экстремумами

в окрестности оси симметрии. Ниже, в рамках рассмотренного в разделе 1.9 алгоритма независимой аппроксимации младших членов (схема III), показана возможность построения схемы, свободной от указанных недостатков.

Одномерная осесимметричная деформация упругого цилиндра описывается системой уравнений

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\varphi, \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} + b \frac{u}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \quad (1.103)$$

где σ_r, σ_φ — компоненты тензора напряжений, нормальные к граням малого элемента поперечного сечения цилиндра, вырезанного двумя близкими радиусами и двумя концентрическими окружностями; u — компонента скорости в радиальном направлении. Система (1.103) записана в безразмерном виде: σ_r и σ_φ отнесены к $\lambda + 2\mu$, где λ и μ — параметры Ламе; u — к скорости продольных упругих волн $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$; координата r — к характерному линейному размеру l (например, радиусу); время t — к (l/c_p) ; $b = \lambda/(\lambda + 2\mu)$.

Сформулируем следующую задачу: определить ограниченное решение системы (1.103), удовлетворяющее начальным условиям ($t = 0$)

$$u(0, r) = u^*(r), \quad \sigma_r(0, r) = \sigma_r^*(r), \quad \sigma_\varphi(0, r) = \sigma_\varphi^*(r) \quad (1.104)$$

и граничному условию при $r = 1$

$$[\alpha u + \beta(r\sigma_r)]|_{r=1} = f(t). \quad (1.105)$$

Заметим, что условие ограниченности при $r = 0$ приводит ко второму граничному условию:

$$u|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=0} = \sigma_\varphi|_{r=0}.$$

Отличие сформулированной задачи от плоской одномерной состоит в том, что система уравнений содержит младшие, недифференциальные члены, коэффициенты при которых являются переменными и имеют особенность при $r = 0$.

1.12.1. Распространение звуковых волн

Остановимся на одном важном для нас в дальнейшем частном случае системы уравнений (1.103), описывающим распространение звуковых волн в среде. Будем считать, что сдвиговая жесткость $\mu = 0$ ($b = 1$). Система (1.103) при этом вырождается в систему двух уравнений для определения неизвестных функций u и $\sigma = \sigma_r = \sigma_\varphi$, которая (в размер-

ных переменных) записывается в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (1.106)$$

Для u и σ считаем выполненными начальные и краевые условия типа (1.104), (1.105).

Наряду с (1.106) рассмотрим систему уравнений, описывающую процесс распространения звуковых волн, которые обладают сферической симметрией

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u \right). \quad (1.107)$$

Здесь $u = u_r$ — радиальная составляющая массовой скорости частиц, $\sigma = \sigma_\varphi = \sigma_\theta$ удовлетворяют начальным и краевым условиям типа (1.20), (1.21).

Вариант уравнений (1.103) при $b = 1$ интересен тем, что только в этом случае системы уравнений (1.106), (1.107) путем введения новых неизвестных функций преобразуются к виду, не содержащему младшие члены. Действительно, если в (1.106) ввести новое неизвестное $v = ru$, а известную функцию ρ/r обозначить ρ_1 , то эта система запишется в виде

$$\rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho_1 c^2 \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (1.108)$$

полностью совпадающим с системой (1.1) с переменной плотностью ρ_1 .

Замена $w = r^2 u$ приводит уравнения (1.107) к виду

$$\rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho_2 c^2 \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (1.109)$$

где $\rho_2 = \rho/r^2$ — переменная плотность.

Простейший явный алгоритм (1.22), (1.26) интегрирования (1.108) (метод Годунова) приводит нас к схеме

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h} (\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{hr_{j+\frac{1}{2}}} \rho c^2 (v_{j+1} - v_j), \quad (1.110)$$

где σ_{j+1} , v_{j+1} вычисляются из соотношений

$$\sigma_j + \frac{\rho c}{r_{j+\frac{1}{2}}} v_j = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c u_{j+\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{j+1} - \frac{\rho c}{r_{j+\frac{1}{2}}} v_{j+1} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \rho c u_{j+\frac{1}{2}} \quad (1.111)$$

либо одного из равенств (1.111) и соответствующего граничного условия.

Для уравнений (1.109) схема соответственно имеет вид

$$u^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{hr_{j+\frac{1}{2}}^2} \rho c^2 (v_{j+1} - v_j), \quad (1.112)$$

где

$$\sigma_j + \frac{\rho c}{r_{j+\frac{1}{2}}^2} v_j = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c u_{j+\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{j+1} - \frac{\rho c}{r_{j+\frac{1}{2}}^2} v_{j+1} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \rho c u_{j+\frac{1}{2}}. \quad (1.113)$$

В этих формулах $r_{j+\frac{1}{2}}$ — среднее значение r внутри ячейки с номером $j + \frac{1}{2}$, условие устойчивости схемы — $\tau \leq h/c$.

В том, что схемы (1.110)–(1.113) при $\tau = h/c$ дают решение высокой точности, лишенное «паразитных» эффектов, можно убедиться на примере решения следующей тестовой задачи. Рассмотрим пространство с вырезанной сферической полостью $r < 1$, на границе которой $r = 1$ приложено нормальное напряжение $\sigma|_{r=1} = f(t)$. Начальные условия при $t = 0$ нулевые; $\rho = 1$, $c = 1$.

В решении этой задачи содержится любопытный эффект, который при ее численном решении можно принять за недостаток алгоритма. Предположим, что напряжения действуют только в течение времени t_0 , т. е. $f(t) = 0$ при $t > t_0 = 1$. На рис. 1.7, 1.8 приведены графики зависимости σ и u от r на момент времени $t = 8$ по схеме (1.112), (1.113) при $f(t) = 1$, $0 \leq t < t_0 = 1$. На рис. 1.7 ясно видны передний и задний фронты решения, однако значение u между точкой $r = 1$ и задним фронтом (рис. 1.8) остается неизменным в течение всего времени, в частности, $u(1, t) = 1$. На самом деле построенное численное решение является фактически точным, а полученному эффекту удастся найти следующее объяснение.

Рассмотрим упругую статическую задачу о сферически симметричной деформации рассматриваемой области. Она описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad \sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} u, \quad \sigma_\varphi = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2(\lambda + \mu)}{r} u,$$

у которой несложно находится точное, ограниченное при $r \rightarrow \infty$, решение:

$$u(r) = C/r^2, \quad \sigma_r = -4\mu C/r^3, \quad \sigma_\varphi = 2\mu C/r^3, \quad (1.114)$$

где C — известное радиальное перемещение при $r = 1$, $C \neq 0$. При $\mu = 0$ из (1.114) следует, что ненулевое поле перемещений может реализоваться при нулевом напряженном состоянии. То же самое происходит и в случае осевой симметрии. Решение статических уравнений

$$u(r) = C/r, \quad \sigma_r = -2\mu C/r^2, \quad \sigma_\varphi = 2\mu C/r^2,$$

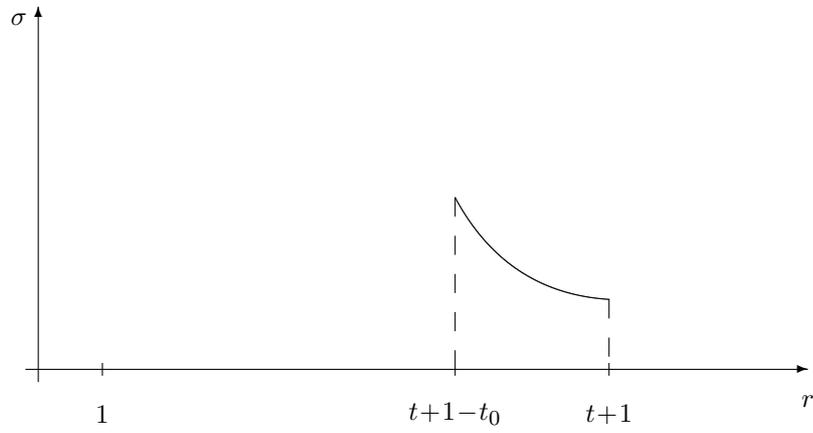


Рис. 1.7. Пространство с вырезанной сферической полостью: распределение напряжений

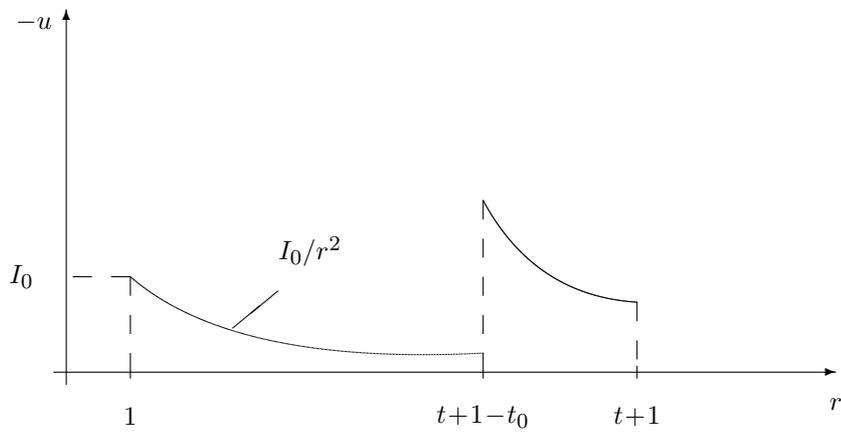


Рис. 1.8. Пространство с вырезанной сферической полостью: распределение скоростей

при $\mu = 0$ дает ненулевое поле перемещений при нулевом напряженном состоянии.

Построим точное решение рассмотренной выше задачи для системы уравнений (1.107) и получим условия, когда стационарному состоянию за задним фронтом волны будет соответствовать и нулевое поле напряжений и нулевое поле скоростей. К уравнениям (1.107) и краевому условию применим преобразование Лапласа по переменной t . Мы приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \tilde{\sigma}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\tilde{\sigma}}{dr} - s^2 \tilde{\sigma} = 0, \quad \tilde{\sigma}|_{r=1} = F(s). \quad (1.115)$$

Здесь $\tilde{\sigma}(r, s)$ — изображение по Лапласу $\sigma(r, t)$; $F(s)$ — изображение граничного условия $f(t)$; s — комплексный параметр. Ограниченное при $r \rightarrow \infty$ решение (1.115) есть

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{r} F(s) e^{-s(r-1)},$$

следовательно,

$$\sigma(r, t) = \frac{1}{r} \begin{cases} f(t - r + 1), & \text{при } t - t_0 + 1 < r < t + 1, \\ 0, & \text{при } r > t + 1, r < t - t_0 + 1. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу скорости \tilde{u} находится из уравнения $\tilde{u} = 1/s d\tilde{\sigma}/dr$ или $\tilde{u} = -\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}/rs$. Следовательно,

$$u(t) = -\sigma(t) - \frac{1}{r} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

Если обозначить

$$I_0 = \int_0^{t_0} f(\tau) d\tau,$$

то перемещение u можно записать в виде

$$u = \begin{cases} 0, & \text{при } r > t + 1, r < 1, \\ -\frac{1}{r} f(t - r + 1) - \frac{1}{r^2} \int_0^t f(\tau - r + 1) d\tau, & \text{при } t - t_0 + 1 < r < t + 1, \\ \frac{I_0}{r^2}, & \text{при } 1 \leq r < t - t_0 + 1. \end{cases} \quad (1.116)$$

Таким образом, за задним фронтом волны ($r = t - t_0 + 1$) реализуется стационарное поле скорости $u = I_0/r^2$, которое равно нулю только в случае $I_0 = 0$. В этом легко убедиться, получив численное решение той же, что приведена на рис. 1.7, 1.8, задачи с краевым условием,

обеспечивающим выполнение равенства $I_0 = 0$, например, с граничным условием

$$\sigma|_{r=1} = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ -1, & \text{при } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{при } t > 2. \end{cases}$$

1.12.2. Численное решение упругой задачи

При численном решении упругой задачи (1.103) разобьем область (r, t) на прямоугольники ω , в каждом из них введем локальную систему координат ξ, η . Будем считать начальные данные (1.104) постоянными в ω . В качестве приближенного решения в элементе ω выберем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r^1 \eta, & \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^1 \eta, & u &= u^0 + u^1 \eta, \\ T' &= T'_0 + T'_1 \xi, & u' &= u'_0 + u'_1 \xi, & u'' &, \quad \sigma_\varphi'' \end{aligned} \quad (1.117)$$

где $\sigma_r^0, \dots, u'', \sigma_\varphi''$ — постоянные, удовлетворяющие в ω уравнениям

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial r} - \sigma_\varphi'', \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial r} + b \frac{u''}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} = b \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u''}{r}, \quad (1.118)$$

граничному условию на правой стороне самой удаленной от центра ячейки ω

$$(\alpha u + \beta T')|_{\xi=1} = \hat{f}, \quad (1.119)$$

где \hat{f} — среднее значение $f(t)$ на интервале времени длительности τ , граничному условию на левой стороне первой ячейки

$$u'|_{\xi=-1} = 0, \quad (1.120)$$

и начальным условиям

$$u|_{\eta=-1} = u^*, \quad \sigma_r|_{\eta=-1} = \sigma_r^*, \quad \sigma_\varphi|_{\eta=-1} = \sigma_\varphi^*.$$

Если расчетная область представляет собой полый цилиндр, то в ближайшей к центру ячейке вместо условия (1.105) выполнено соотношение типа (1.119).

Из (1.117), (1.118) следуют выражения для неизвестных функций на среднем слое по времени ($\eta = 0$)

$$\begin{aligned} u^0 &= u^* + \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'', \\ \sigma_r^0 &= \sigma_r^* + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{b\tau}{2r} u'', \\ \sigma_\varphi^0 &= \sigma_\varphi^* + \frac{b\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\tau}{2r} u'' \end{aligned} \quad (1.121)$$

и формулы пересчета решения (мы обозначим его \bar{u} , $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$) на верхний по времени слой $\eta = 1$

$$\bar{u} = 2u^0 - u^*, \quad \bar{\sigma}_r = 2\sigma_r^0 - \sigma_r^*, \quad \bar{\sigma}_\varphi = 2\sigma_\varphi^0 - \sigma_\varphi^*.$$

Для определения констант $\partial T'/\partial r$, $\partial u'/\partial r$, u'' , σ_φ'' необходимо сформулировать дополнительные уравнения. Для этого выпишем справедливое для всех функций (1.117), удовлетворяющих уравнениям (1.118), энергетическое тождество

$$\int_{\omega} \left[u^0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_r^0 \frac{\partial u'}{\partial r} + \sigma_\varphi^0 \frac{u''}{r} \right] r d\omega + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial(T'u')}{\partial r} d\omega,$$

где

$$D = (u'_0 - u^0) \frac{\partial T'}{\partial r} + (T'_0 - r\sigma_r^0) \frac{\partial u'}{\partial r} + (u^0 - u'')\sigma_\varphi'' + (\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^0)u''. \quad (1.122)$$

Подставляя (1.121) в (1.122) и приравнявая выражения в скобках в (1.122) всевозможным комбинациям $\partial T'/\partial r$, $\partial u'/\partial r$, u'' , σ_φ'' , получаем (аналогично (1.65)) четыре уравнения, необходимые для замыкания системы:

$$\begin{aligned} u'_0 - u^* - \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} + \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'' &= \gamma_{11} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{12} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{13} \sigma_\varphi'' + \gamma_{14} u'', \\ T'_0 - r\sigma_r^* - \frac{r\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{b\tau}{2} u'' &= \gamma_{21} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{22} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{23} \sigma_\varphi'' + \gamma_{24} u'', \\ u^* + \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'' - u'' &= \gamma_{31} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{32} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{33} \sigma_\varphi'' + \gamma_{34} u'', \\ \sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^* - \frac{b\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} u'' &= \gamma_{41} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{42} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{43} \sigma_\varphi'' + \gamma_{44} u''. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Младшие члены u'' , σ_φ'' можно было бы принять равными значениям u^0 , σ_φ^0 на среднем слое по времени, как это предложено сделать в [55]. В уравнениях (1.123) это соответствует выбору параметров γ_{ij} следующими: все γ_{ij} кроме γ_{11} и γ_{22} равны нулю, а $\gamma_{22}/r = \gamma$, $r\gamma_{11} = \gamma$. Заметим, что такой выбор констант аналогичен выбору матриц констант диссипации в виде (1.75) (см. схему II, раздел 1.9.2). В этом случае первые два уравнения (1.123) аналогичны (1.110), если считать, что роль $u_{j+\frac{1}{2}}$, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ играют некоторые комбинации u^* , σ_r^* , σ_φ^* . Однако решение, полученное по этой схеме, обладает тем недостатком, что при пошаговом счете изменяет статическое решение задачи $\sigma_r(r, t) = \sigma_\varphi(r, t) = 1$, $u(r, t) = 0$, если таковое взять в качестве начальных условий, а граничное условие в виде $\sigma_r(1, t) = 1$. Численный расчет показывает, что в этом случае в ближайших к оси $r = 0$ ячейках (и больше всего в первой) решение

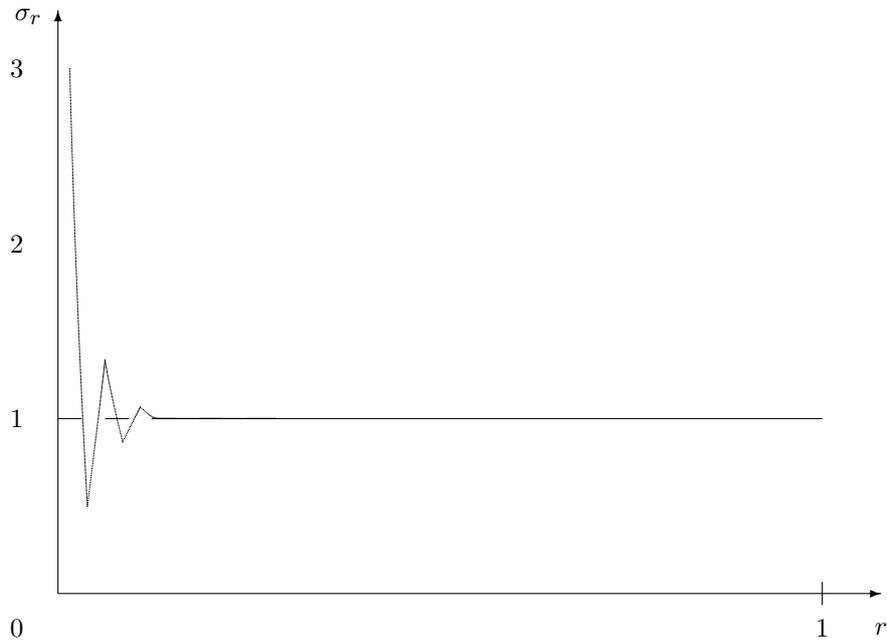


Рис. 1.9. Выброс численного решения в начале координат

имеет «выброс», амплитуда которого увеличивается с ростом числа шагов по времени (рис. 1.9). На рис. 1.9 напряжение σ_r приведено после 20 шагов по времени; по радиусу расчетная область разбита на 30 ячеек.

Зададимся целью построить схему исходя из требования, чтобы статическое решение в точности сохранялось при переходе на следующий шаг по времени, т. е. чтобы уравнения (1.123) точно удовлетворялись, когда

$$\begin{aligned} u^* = 0, & \quad \sigma_r^* = \sigma_\varphi^* = 1, & \quad \frac{\partial u'}{\partial r} = 0, & \quad \frac{\partial T'}{\partial r} = 1, \\ u'' = 0, & \quad \sigma_\varphi'' = 1, & \quad u'_0 = 0, & \quad T'_0 = r. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Для этого у нас имеется возможность достаточно произвольно выбирать константы. Мы ограничимся случаем, когда матрица констант γ_{ij} будет кососимметричной, т. е. $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, $i \neq j$. Тогда мощность диссипации D будет определяться значением только диагональных элементов γ_{ii} :

$$D = \gamma_{11} \left(\frac{\partial T'}{\partial r} \right)^2 + \gamma_{22} \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \right)^2 + \gamma_{33} (\sigma_\varphi'')^2 + \gamma_{44} (u'')^2 \quad (1.125)$$

и будет неотрицательной, если

$$\gamma_{ii} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1.126)$$

Подставляя (1.124) в (1.123), получаем с учетом (1.126)

$$\gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{33} = 0, \quad \gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{34} = -\gamma_{14} = 0, \quad \gamma_{23} = \gamma_{12}.$$

Выражая σ''_φ , u'' из двух последних уравнений (1.123) и подставляя в два первых, получаем

$$u'_0 - \hat{u} = A_1 \frac{\partial T'}{\partial r} + A_2 \frac{\partial u'}{\partial r}, \quad T'_0 - \hat{\sigma} = B_1 \frac{\partial u'}{\partial r} + B_2 \frac{\partial T'}{\partial r},$$

где

$$\hat{u} = u^* - \frac{\tau}{2rA} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) u^* + \frac{\gamma_{14}(1 - \gamma_{14})}{A} u^* - \frac{\tau}{2rA} (1 - \gamma_{14}) \sigma^*_\varphi - \frac{\tau \gamma_{14}}{2rA} \sigma^*_\varphi,$$

$$\hat{\sigma} = 2\sigma^*_r + \frac{(1 - \gamma_{14})(\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2})}{A} u^* + \frac{\gamma_{12}}{A} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) u^* - \\ - \frac{\tau}{2rA} \left(\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2} \right) \sigma^*_\varphi + \frac{\gamma_{12}(1 - \gamma_{14})}{A} \sigma^*_\varphi,$$

$$A_1 = \frac{\tau}{2r} - \frac{\tau}{2rA} \left[\frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) - \gamma_{14}(1 - \gamma_{14}) \right] + \frac{\tau}{2rA} \gamma_{14},$$

$$A_2 = \gamma_{12} - \frac{\tau}{2rA} \left[\gamma_{12} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) + (1 - \gamma_{14}) \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right] + \\ + \frac{\gamma_{14}}{A} \left[\gamma_{12}(1 - \gamma_{14}) - \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right],$$

$$B_1 = \gamma_{22} + \frac{2\tau}{2} + \frac{(\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2})}{A} \left[\gamma_{12}(1 - \gamma_{14}) - \frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right] + \\ + \frac{\gamma_{12}}{A} \left[\gamma_{12} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) + (1 - \gamma_{14}) \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right],$$

$$B_2 = -\gamma_{12} + \frac{\tau}{2rA} (\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2}) + \frac{\gamma_{12}}{A} \left[\frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) - \gamma_{14}(1 - \gamma_{14}) \right], \\ A = (1 - \gamma_{14})^2 + \frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) > 0.$$

Оставшиеся пять констант определяются из требования симметричности схемы, ее явности и минимальности искусственной диссипации. Окончательно соотношения для расчета величин с целочисленными индексами на границах между ячейками принимают вид

$$C_{j+\frac{1}{2}} T_j + V_j = C_{j+\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_{j+\frac{1}{2}} + \hat{u}_{j+\frac{1}{2}}, \quad C_{j+\frac{1}{2}} T_{j+1} - V_{j+1} = C_{j+\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{j+\frac{1}{2}}, \quad (1.127)$$

где

$$C = \frac{\tau}{rhA}, \quad \hat{u} = \frac{1}{A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma^*_\varphi \right), \quad \hat{\sigma} = r\sigma^*_r + \frac{\tau b}{2} u^*, \quad A = 1 + \frac{\tau^2}{4r^2}.$$

Производные в каждой ячейке вычисляются по формулам

$$\frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{1}{h}(T_{j+1} - T_j), \quad \frac{\partial u'}{\partial r} = \frac{1}{h}(V_{j+1} - V_j).$$

На верхний слой по времени неизвестные функции пересчитываются при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -u^* + \frac{2}{A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \frac{\tau}{rA} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau^2 b}{2r} \frac{\partial u'}{\partial r}, \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_r^* + \frac{b\tau}{rA} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \tau \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{b\tau^2}{2rA} \frac{\partial T'}{\partial r}, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \sigma_\varphi^* + \frac{\tau}{2A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \tau b \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\tau^2}{2rA} \frac{\partial T'}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Схема обладает неотрицательной искусственной диссипацией и, следовательно, устойчива, когда

$$\tau^2 \left(1 + \frac{\tau^2 b^2}{4r^2} \right) \leq h^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{4r^2} \right).$$

Последнее условие заведомо слабее условия $\tau \leq h$, так как

$$\frac{4r^2 + \tau^2}{4r^2 + \tau^2 b^2} \geq 1, \quad \text{поскольку } b = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \leq 1.$$

На рис. 1.10 приведено численное решение по схеме (1.127), (1.128) задачи (1.103)–(1.105) при условиях

$$u(0, r) = \sigma_r(0, r) = \sigma_\varphi(0, r) = 0, \quad \sigma_r|_{r=1} = 1. \quad (1.129)$$

Кривые 1–5 изображают профили упругой волны, движущейся к центру диска, кривые 6–10 — отраженные от центра волны, $\tau = h$.

В отличие от одномерной задачи в декартовой системе координат здесь нам трудно оценить, насколько правильно численное решение описывает точное. Поэтому попытаемся получить аналитическое решение задачи, если не во всей области, то хотя бы в окрестности фронта движущейся волны [27]. Для этого применим преобразование Лапласа по переменной t к задаче (1.103)–(1.105):

$$\begin{aligned} s\tilde{u} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\varphi}{r}, \quad s\tilde{\sigma}_r = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{b}{r}\tilde{u}, \quad s\tilde{\sigma}_\varphi = b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{u}, \\ \tilde{\sigma}_r|_{r=1} &= \frac{1}{s}, \quad |\tilde{\sigma}_r| + |\tilde{\sigma}_\varphi| + |\tilde{u}| < \infty. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Здесь \tilde{u} , $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\sigma}_\varphi$ — изображения по Лапласу соответствующих функций; s — параметр; $b = 1 - 2k^2$; $k = c_s/c_p$; c_p , c_s — продольная и поперечная скорости упругих волн.

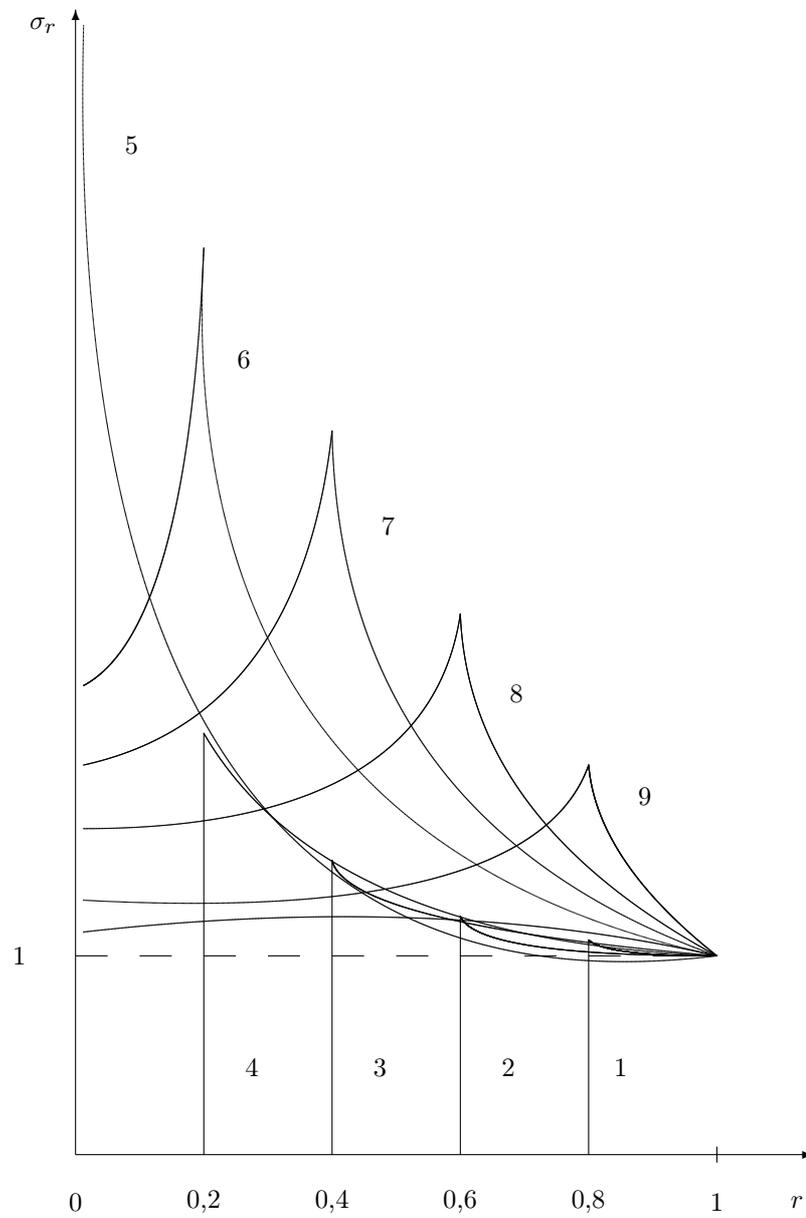


Рис. 1.10. Одномерная осесимметричная деформация упругого диска

Система (1.130) преобразуется к одному модифицированному уравнению Бесселя для \tilde{u}

$$\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{rs^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \left(1 + \frac{1}{r^2 s^2}\right) \tilde{u} = 0,$$

ограниченное решение которого есть модифицированная функция Бесселя первого порядка $\tilde{u} = cI_1(rs)$. Таким образом, решение задачи принимает вид

$$\tilde{\sigma}_r = \frac{I_0(rs) - \frac{2k^2}{rs} I_1(rs)}{sI_0(s) - 2k^2 I_1(s)}, \quad \tilde{\sigma}_\varphi = \frac{bI_0(rs) + \frac{2k^2}{rs} I_1(rs)}{sI_0(s) - 2k^2 I_1(s)}, \quad \tilde{u} = \frac{I_1(rs)}{sI_0(s) - 2k^2 I_1(s)},$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Для большей простоты выкладок мы рассмотрим случай распространения звуковых волн ($k = 0$). Тогда

$$\tilde{\sigma}(r, s) = \frac{I_0(rs)}{sI_0(s)}, \quad \tilde{u} = \frac{I_1(rs)}{sI_0(s)}. \quad (1.131)$$

Зададимся целью получить решение в окрестности фронта волны, пришедшей в точку r . Если $\tilde{\sigma}$ определяется формулой (1.131), то функция $F(s, r) = e^{(1-r)s} I_0(rs)/sI_0(s)$ — преобразование Лапласа функции σ^* , которая получается из σ сдвигом по r влево на $(1-r)$. Так как скорость упругой волны в нашей задаче равна единице, значение σ на фронте волны есть значение σ^* в нуле справа и может быть найдено как $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

Для вычисления этого предела используем асимптотическое представление модифицированных функций Бесселя для $|s| \rightarrow \infty$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left(1 + \frac{a_1(\nu)}{z} + \frac{a_2(\nu)}{z^2} + \dots\right). \quad (1.132)$$

Получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{(1-r)s} e^{rs} \sqrt{2\pi s} \left(1 + \frac{a_1}{rs} + \frac{a_2}{r^2 s^2} + \dots\right)}{e^s \sqrt{2\pi r s} \left(1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots\right)} = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Таким образом, в точку r в момент времени $t = 1-r$ волна приходит с амплитудой, равной $1/\sqrt{r}$. Значение u на фронте — то же самое, σ_φ имеет амплитуду b/\sqrt{r} .

С помощью асимптотического представления (1.132) получим решение и в окрестности фронта для малых r в интервале $t \in (1-r, 1+r)$, т. е. как для проходящей к центру волны, так и для отраженной

$$F(s) \sim \frac{1}{s\sqrt{r}} \frac{1 + \frac{a_1}{rs} + \frac{a_2}{r^2 s^2} + \dots}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots}.$$

При $\nu = 0$

$$a_k(0) = \frac{[(2k-1)!!]^2}{k!8^k} = \frac{[(2k)!]^2}{2^{5k}(k!)^3}.$$

Для малых значений r функция $F(s)$ будет представляться рядом Лорана

$$F(s) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(sr)^k},$$

которому формально в качестве оригинала будет соответствовать ряд Тейлора для σ^*

$$\sigma^*(r, t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k!)^2}{(k!)^4}.$$

В случае $0 \leq t/r < 2$ сумма этого ряда равна

$$\sigma^*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{2}{\pi} K \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right), \quad (1.133)$$

где $K(x)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Аналогично получаем выражение для u^* :

$$u^*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{2}{\pi} \left[2E \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right) - K \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right) \right], \quad (1.134)$$

где $E(x)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода. Из формул (1.133), (1.134) следует, что после отражения от центра волна движется с бесконечным значением амплитуды на фронте. Решение (1.133), (1.134) практически совпадает с полученным численным решением.

Глава 2

Схемы решения двумерных задач на основе нескольких аппроксимаций полиномами

В первой главе разработан эффективный подход, основанный на процедуре нескольких аппроксимаций неизвестных функций линейными полиномами, к построению схем решения одномерных задач для гиперболических систем уравнений.

В этой главе указанный подход будет обобщен на случай решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач динамического деформирования упругих тел.

В отличие от классических конечно-элементных аппроксимаций процедура нескольких аппроксимаций для каждой из искомым функций дает возможность сформировать достаточную для обеспечения монотонности численного решения искусственную диссипацию с одновременным расщеплением двумерной задачи на ряд независимых одномерных задач по пространственным направлениям. Содержащиеся в одномерных задачах неотрицательные параметры — константы диссипации — позволяют регулировать величину искусственной вязкости в получаемых схемах. При частном выборе констант диссипации и в случае, когда область, в которой ищется решение, допускает разбиение на прямоугольные элементы со сторонами, параллельными осям декартовой (или цилиндрической) системы координат, явная схема совпадает со схемой Годунова.

Одно из преимуществ предлагаемого подхода состоит в возможности построения схем, обладающих лучшими диссипативными свойствами по сравнению с методом «распада разрыва». В этой главе указан способ формулировки одномерных задач (т. е. способ выбора констант диссипации), при котором величина максимального шага интегрирования

по времени в $\sqrt{2}$ раз (для квадратной сетки) превосходит аналогичный параметр в методе Годунова. Существенно, что при этом не происходит увеличения числа арифметических операций, т. е. помимо улучшения диссипативных характеристик возрастает экономичность схемы.

Основные принципы построения алгоритма решения двумерных задач излагаются для частного случая прямоугольных областей; обсуждаются вопросы обоснования алгоритма.

2.1. Плоская и осесимметричная задачи двумерной динамической теории упругости

Пусть плоская область Ω представляет собой объединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат Oxy . Динамическая задача теории упругости в декартовой системе координат формулируется следующим образом.

Определить функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\sigma_x(x, y, t)$, $\sigma_y(x, y, t)$, $\tau_{xy}(x, y, t)$, удовлетворяющие в области Ω системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где в общем случае — функции, а в случае однородной среды — константы ρ , c_p , c_s — плотность среды, продольная и поперечная скорости упругих волн соответственно; $\theta = 1 - 2c_s^2/c_p^2$. Неизвестные функции u и v — компоненты вектора скорости частиц упругой среды; σ_x , σ_y , τ_{xy} — нормальные и касательная компоненты тензора напряжений.

Кроме того, неизвестные функции должны удовлетворять начальным условиям ($t = 0$):

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u^*(x, y), & v(x, y, 0) &= v^*(x, y), \\ \sigma_x(x, y, 0) &= \sigma_x^*(x, y), & \sigma_y(x, y, 0) &= \sigma_y^*(x, y), & \tau_{xy}(x, y, 0) &= \tau_{xy}^*(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и граничным условиям, одним из вариантов которых может быть следующий:

$$\begin{aligned} (a_i^1 u + b_i^1 \sigma_x)|_{x=l_i} &= f_i^1, & (a_i^2 v + b_i^2 \tau_{xy})|_{x=l_i} &= f_i^2, & i &= 1, \dots, N, \\ |a_i^s| + |b_i^s| &\neq 0, & s &= 1, 2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

если участок границы параллелен оси Oy ;

$$\begin{aligned} (c_j^1 u + d_j^1 \tau_{xy})|_{y=l_j} &= g_j^1, & (c_j^2 v + d_j^2 \sigma_y)|_{y=l_j} &= g_j^2, & j &= 1, \dots, M, \\ |c_j^s| + |d_j^s| &\neq 0, & s &= 1, 2, \end{aligned}$$

если участок границы параллелен оси Ox . Коэффициенты граничных условий должны удовлетворять условиям диссипативности, формулировка которых приведена ниже.

Иногда мы будем рассматривать наиболее простую модель упругой среды с нулевой сдвиговой жесткостью μ ($c_s = 0$, $\theta = 1$). В этом случае $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$ и система уравнений (2.1) вырождается в три уравнения

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.4)$$

которые называют системой уравнений двумерной акустики.

Если область Ω , в которой необходимо решать задачу, можно представить в виде объединения круговых цилиндров (сплошных либо полых) с единой осью, а свойства среды, начальное состояние и внешнее воздействие одинаковы в каждом проходящем через ось меридианальном сечении, мы можем сформулировать так называемую осесимметричную задачу в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, где ось Oz совпадает с осью цилиндров.

На самом деле, в этом случае мы имеем две полностью независимые задачи, первая из которых описывает процесс распространения в радиальном направлении и направлении оси z возмущений, связанных с сжатием и сдвигом среды при отсутствии кручения, а вторая — так называемые «крутильные волны».

Первая задача формулируется следующим образом. В области Ω необходимо определить неизвестные компоненты вектора скорости $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r, z, t)$,

$\sigma_\varphi(r, z, t)$, $\sigma_z(r, z, t)$, $\tau_{rz}(r, z, t)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{aligned}
r\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial z} - \sigma_\varphi, \\
r\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial(r\sigma_z)}{\partial z}, \\
\frac{\partial\sigma_r}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r \right), \\
\frac{\partial\sigma_z}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r \right), \\
\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \right), \\
\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial t} &= \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Вторая задача — это задача определения в области Ω компоненты вектора скорости u_φ и касательных напряжений $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{z\varphi}}{r} + \frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial z}, \\
\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial t} &= \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\
\frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial t} &= \rho c_s^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Входящие в (2.5) и (2.6) константы (или положительные функции координат r , z для случая неоднородной среды) — те же, что и в (2.1). Неизвестные функции удовлетворяют начальным условиям

$$\sigma_r(r, z, 0) = \sigma_r^*(r, z), \quad \dots, \quad u_z(r, z, 0) = u_z^*(r, z) \tag{2.7}$$

для первой задачи и начальным условиям

$$\tau_{r\varphi}(r, z, 0) = \tau_{r\varphi}^*(r, z), \quad \tau_{z\varphi}(r, z, 0) = \tau_{z\varphi}^*(r, z), \quad u_\varphi(r, z, 0) = u_\varphi^*(r, z) \tag{2.8}$$

для второй, а также граничным условиям на боковых поверхностях цилиндров и в перпендикулярных к оси сечениях:

$$(a_i^1 u_r + b_i^1 r \sigma_r)|_{r=R_i} = f_i^1(t, z), \quad (a_i^2 u_z + b_i^2 r \tau_{rz})|_{r=R_i} = f_i^2(t, z), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.9}$$

$$(c_j^1 u_r + d_j^1 r \tau_{rz})|_{z=z_j} = g_j^1(t, r), \quad (c_j^2 u_z + d_j^2 r \sigma_z)|_{z=z_j} = g_j^2(t, r), \quad j = 1, \dots, M;$$

$$(a_i^3 u_\varphi + b_i^3 \tau_{r\varphi})|_{r=R_i} = f_i^3(t, z), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.10}$$

$$(c_j^3 u_\varphi + d_j^3 \tau_{z\varphi})|_{z=z_j} = g_j^3(t, r), \quad j = 1, \dots, M$$

для первой и второй задач соответственно.

Если цилиндр является сплошным, т. е. включает в себя ось, то на оси $r = 0$ должны быть выполнены условия:

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=0} = 0, \quad (2.11)$$

$$u_\varphi|_{r=0} = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_{r=0} = 0. \quad (2.12)$$

В отличие от системы уравнений (2.1), уравнения осесимметричной задачи содержат младшие члены. С этим связаны трудности и особенности построения численных алгоритмов их решения. Однако система уравнений (2.6), описывающая крутильные колебания, хотя и содержит в правых частях младшие члены, с помощью замены неизвестных функций приводится к виду, содержащему только производные от искомых функций. Схема решения такой системы заведомо однородна и представляет собой схему для задачи распространения акустических волн в среде с переменной по одной из координат плотностью.

Примем в качестве новых неизвестных функции σ , u , v :

$$\sigma = u_\varphi/r, \quad u = r^2\tau_{r\varphi}, \quad v = r^2\tau_{z\varphi}.$$

Система уравнений (2.6) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho r^3 c_s^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \rho r^3 c_s^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \rho r^3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

или, если обозначить $\tilde{\rho} = 1/\rho r^3 c_s^2$,

$$\tilde{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \tilde{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{\rho} c_s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (2.13)$$

Таким образом, мы имеем двумерную систему уравнений акустики в декартовой системе координат (2.4) для среды, плотность которой обратно пропорциональна кубу координаты r . Начальные условия для новых функций формулируются в виде

$$u(r, z, 0) = u^*(r, z), \quad v(r, z, 0) = v^*(r, z), \quad \sigma(r, z, 0) = \sigma^*(r, z),$$

граничные условия на торцах, боковой поверхности и оси $r = 0$:

$$(a_i^3 u + b_i^3 \sigma)|_{r=R_i} = f_i^3(t, z), \quad u|_{r=0} = 0, \quad (c_j^3 v + d_j^3 \sigma)|_{z=z_j} = g_j^3(t, r).$$

Умножая первые два уравнения в (2.1) соответственно на u и v , складывая и интегрируя по произвольной плоской области ω , можно получить энергетическое тождество — закон сохранения механической

энергии в виде

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\omega = \\ = \int_{\omega} \left[\frac{\partial(\sigma_x u + \tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y v + \tau_{xy} u)}{\partial y} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогичное тождество получается и для случая осесимметричной задачи:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[\rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} + \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_{\varphi} \frac{u_r}{r} + \right. \\ \left. + \tau_{rz} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] r d\omega = \\ = \int_{\omega} \left[\frac{\partial(r\sigma_r u_r + r\tau_{rz} u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau_{rz} u_r + r\sigma_z u_z)}{\partial z} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При построении численного решения мы будем использовать разностные аналоги тождеств (2.14), (2.15).

Отметим, что форма записи уравнений (2.5), в которой напряжения собраны в виде произведений на r , имеет физический смысл. Эти произведения — усилия на соответствующих гранях элементарного объема. Именно эти величины мы будем аппроксимировать в процессе конструирования алгоритма.

2.2. Схемы решения плоской задачи на основе нескольких аппроксимаций линейными полиномами

Для численного решения задачи (2.1)–(2.3), как и в одномерном случае, разобьем область Ω плоскостями, параллельными координатным плоскостям на элементарные параллелепипеды ω :

$$x = x_j, \quad j = 1, \dots, N; \quad y = y_i, \quad i = 1, \dots, M; \quad t = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Будем пока считать разбиение по каждой из координат равномерным:

$$h_x = x_{j+1} - x_j, \quad h_y = y_{i+1} - y_i, \quad \tau = t_{k+1} - t_k; \quad h_x, h_y, \tau = \text{const},$$

а среду — однородной.

С каждым из элементарных параллелепипедов ω свяжем локальную систему координат ξ, ζ, η :

$$\xi = \frac{2}{h_x} \left[x - \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_j) \right], \quad \zeta = \frac{2}{h_y} \left[y - \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i) \right],$$

$$\eta = \frac{2}{\tau} \left[t - \frac{1}{2}(t_{k+1} + t_k) \right],$$

так что

$$\omega = [-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1].$$

Основной составляющей излагаемых ниже схем является построение решения задачи (2.1)–(2.3) в элементарном параллелепипеде ω .

В качестве приближенного решения в ω выберем линейные полиномы:

$$u = u^0 + u^1\eta, \quad v = v^0 + v^1\eta, \quad (2.16)$$

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1\eta, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1\eta, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1\eta;$$

$$u' = u'_0 + u'_1\xi, \quad v' = v'_0 + v'_1\xi,$$

$$u'' = u''_0 + u''_1\zeta, \quad v'' = v''_0 + v''_1\zeta, \quad (2.17)$$

$$\sigma'_x = (\sigma_x)_0' + (\sigma_x)_1'\xi, \quad \tau'_{xy} = (\tau_{xy})_0' + (\tau_{xy})_1'\xi,$$

$$\sigma''_y = (\sigma_y)_0'' + (\sigma_y)_1''\zeta, \quad \tau''_{xy} = (\tau_{xy})_0'' + (\tau_{xy})_1''\zeta,$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y},$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \theta \frac{\partial v''}{\partial y} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right).$$

Полиномы (2.16) при $\eta = -1$ удовлетворяют начальным условиям (2.2), которые мы будем считать постоянными в прямоугольнике $\{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1, \eta = -1\}$. Полиномы (2.17) удовлетворяют граничным условиям вида (2.3), в которых правые части f_i^s, g_i^s считаются постоянными на соответствующих гранях прямоугольного элемента.

Решение плоской задачи для области Ω , допускающей разбиение на элементарные прямоугольники, складывается из построенных решений для каждого из составляющих эту область прямоугольников. При этом на сторонах прямоугольников, образующих границу области, формулируются условия типа (2.3), на общих для двух прямоугольников сторонах условия (2.3) заменяются условиями непрерывности полиномов (2.17).

Подставляя (2.16), (2.17) в (2.18), получаем формулы пересчета решения с нижнего ($\eta = -1$) на верхний ($\eta = 1$) слой по времени:

$$\begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{R_x}{\rho c_p} [(\sigma_x)_{j+1} - (\sigma_x)_j] + \frac{R_y}{\rho c_p} [(\tau_{xy})_{i+1} - (\tau_{xy})_i], \\ v^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{R_x}{\rho c_p} [(\tau_{xy})_{j+1} - (\tau_{xy})_j] + \frac{R_y}{\rho c_p} [(\sigma_y)_{i+1} - (\sigma_y)_i], \\ (\sigma_x)^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= (\sigma_x)_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + R_x \rho c_p [u_{j+1} - u_j] + R_y \rho c_p \theta [v_{i+1} - v_i], \\ (\sigma_y)^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= (\sigma_y)_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + R_x \rho c_p \theta [u_{j+1} - u_j] + R_y \rho c_p [v_{i+1} - v_i], \\ (\tau_{xy})^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= (\tau_{xy})_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + R_x \rho \frac{c_s^2}{c_p} [v_{j+1} - v_j] + R_y \rho \frac{c_s^2}{c_p} [u_{i+1} - u_i]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} u|_{\eta=-1} &= u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}}, \quad u|_{\eta=1} = u^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}}, \dots \\ u'|_{\xi=-1} &= u_j, \quad u'|_{\xi=1} = u_{j+1}, \dots \quad u''|_{\zeta=-1} = u_i, \quad u''|_{\zeta=1} = u_{i+1}, \dots \end{aligned}$$

$$R_x = \frac{c_p \tau}{h_x}, \quad R_y = \frac{c_p \tau}{h_y}.$$

Для определения величин с целочисленными индексами необходимо сформулировать дополнительные уравнения. Для этого запишем тождество, справедливое для всяких функций (2.16), (2.17), удовлетворяющих (2.18), и являющееся разностным аналогом закона сохранения энергии (2.14):

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v''}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] d\omega + \\ + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \left[\frac{\partial(\sigma'_x u' + \tau'_{xy} v')}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma''_y v'' + \tau''_{xy} u'')}{\partial y} \right] d\omega, \end{aligned}$$

где

$$\int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \left[(u'_0 - u_0) \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + (\sigma'_{x0} - \sigma_x^0) \frac{\partial u'}{\partial x} + \right. \\ \left. + (v''_0 - v_0) \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + (\sigma''_{y0} - \sigma_y^0) \frac{\partial v''}{\partial y} + (v'_0 - v_0) \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \right. \\ \left. + (\tau'_{xy0} - \tau_{xy}^0) \frac{\partial v'}{\partial x} + (u''_0 - u_0) \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + (\tau''_{xy0} - \tau_{xy}^0) \frac{\partial u''}{\partial y} \right] d\omega. \quad (2.20)$$

С учетом (2.16)–(2.18) величину D можно записать следующим образом

$$D = \left(u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \\ + \left(\sigma'_{x0} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \theta \frac{\partial v''}{\partial y} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} + \\ + \left(v''_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \\ + \left(\sigma''_{y0} - \sigma_{yj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \theta \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \frac{\partial v''}{\partial y} + \\ + \left(v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} \right) \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \\ + \left(\tau'_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \\ + \left(u''_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \right) \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \\ + \left(\tau''_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \frac{\partial u''}{\partial y}. \quad (2.21)$$

Одна из возможных формулировок дополнительных уравнений для определения величин с целочисленными индексами (коэффициентов полиномов (2.17)) состоит в том, чтобы приравнять к нулю каждую из скобок в (2.21). Полученные при этом уравнения и граничные условия (2.3) образуют замкнутую систему уравнений относительно коэффициентов полиномов (2.17). Так как в этом случае $D = 0$, то построенное приближенное решение будет консервативным.

Нетрудно заметить, что построение консервативного решения сопряжено с необходимостью решать систему связанных между собой уравнений относительно всех коэффициентов полиномов (2.17). Поэтому представляет интерес формулировка дополнительных уравнений с введением диссипации $D \geq 0$, вследствие чего рассматриваемая двумерная задача сводится к решению ряда одномерных задач, и соответственно, система уравнений для коэффициентов полиномов (2.17) разделяется на ряд независимых подсистем. Имея это ввиду, в качестве дополнительных уравнений для определения величин с целочисленными индексами примем:

$$\begin{aligned}
u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} &= \frac{\gamma_1}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \\
\sigma'_{x0} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\gamma_4}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}; \\
v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} &= \frac{\omega_1}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial v'}{\partial x}, \\
\tau'_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{\omega_4}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \omega_3 \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}; \\
v''_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} &= \frac{\alpha_1}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial v''}{\partial y}, \\
\sigma''_{y0} - \sigma_{yj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} &= \frac{\alpha_4}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y}; \\
u''_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} &= \frac{\beta_1}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \beta_2 \frac{\partial u''}{\partial y}, \\
\tau''_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} &= \frac{\beta_4}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} + \beta_3 \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Каждая из четырех одномерных задач (2.22) вместе с соответствующими граничными условиями (2.3) является замкнутой системой уравнений для определения величин (u_j, σ_{xj}) , (v_j, τ_{xyj}) , (v_i, σ_{yi}) , (u_i, τ_{xyi}) , решается независимо от других задач и полностью совпадает с задачей расчета целочисленных величин в одномерном случае (см. уравнения (1.27)).

Заметим, что совокупность уравнений (2.22) можно интерпретировать как систему уравнений жесткости прямоугольного элемента сетки. При этом первая и третья одномерные задачи описывают «растяжение–сжатие» в направлениях по нормали к линиям $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$,

вторая и четвертая одномерные задачи — «сдвиг» на указанных линиях. В классических конечно-элементных подходах уравнения жесткости формулируются относительно значений искомых функций в вершинах элемента, при этом сопряжение происходит в общем для нескольких элементов узле. В рассматриваемом подходе уравнения жесткости строятся относительно осредненных по граням элемента значений напряжений и скоростей (именно такой смысл имеют величины с целочисленными индексами), и сопряжение этих значений происходит по общей для двух элементов грани, что в физическом смысле представляется более оправданным.

Способ решения каждой из одномерных задач может быть различным — схема может быть явной по всем направлениям, явной в одном направлении и неявной в другом и т. д. В дальнейшем мы будем рассматривать только явные схемы решения одномерных задач (2.22) и, учитывая результаты первой главы, считать выполненными равенства:

$$\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \quad \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Подставляя (2.22) в (2.21), получаем

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left[\gamma_4 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 - 2\tau\theta \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v''}{\partial y} + \alpha_4 \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \rho c_s^2 \left[\omega_4 \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial u''}{\partial y} + \beta_4 \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2\rho} \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \beta_1 \left(\frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2\rho} \left[\omega_1 \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \alpha_1 \left(\frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

В первой главе было показано, что условие неотрицательности D обеспечивает устойчивость схемы в энергетической норме. Для этого необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0, \quad \omega_1 \geq 0, \quad \omega_4 \geq 0, \\ \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_4 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_4 \geq 0, \\ \gamma_4 \alpha_4 \geq \tau^2 \theta^2, \quad \omega_4 \beta_4 \geq \tau^2, \quad \gamma_1 \beta_1 \geq \tau^2, \quad \omega_1 \alpha_1 \geq \tau^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве сходимости построенного приближенного решения к точному, а покажем это ниже для общего случая.

Рассмотрим конкретный выбор констант диссипации $\gamma_1, \gamma_4, \omega_1, \dots$ только для явных схем решения одномерных задач. Если выбрать константы диссипации в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_4, \quad \omega_1 = \omega_4, \quad \alpha_1 = \alpha_4, \quad \beta_1 = \beta_4, \\ \gamma_m, \quad \omega_m, \quad \alpha_m, \quad \beta_m = 0, \quad m = 2, 3, \end{aligned}$$

то каждая из одномерных задач (2.22) совпадет с уравнениями (1.26).

Как уже отмечалось, в случае выполнения условий (1.32) решение уравнений (1.26) определяется по явной схеме, полностью совпадающей со схемой Годунова. Учитывая предыдущие соотношения для констант диссипации, условия типа (1.32) для одномерных задач (2.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_4 = \frac{h_x}{c_p} - \tau, \quad \omega_1 = \omega_4 = \frac{h_x}{c_s} - \tau, \\ \alpha_1 = \alpha_4 = \frac{h_y}{c_p} - \tau, \quad \beta_1 = \beta_4 = \frac{h_y}{c_s} - \tau. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Явную схему, получающуюся в результате выбора констант в виде (2.24), называют схемой Годунова решения двумерной задачи. Конечно, здесь изложен подход к ее построению, отличающийся от изложенного в работе [63], где эта схема строится на примере решения двумерной системы акустики (и обобщается на произвольные t -гиперболические по Фридрихсу системы) на основе независимого решения набора одномерных задач «распадов разрывов».

Из неравенств (2.23) можно получить достаточные для устойчивости ограничения на шаг по времени τ . Первое из четырех неравенств (2.23) содержит в правой части константу $\theta = \lambda/(\lambda + 2\mu) = 1 - 2c_s^2/c_p^2$, характеризующую конкретный упругий материал. Так как $\theta \leq 1$, мы только усилим неравенство (2.23), если примем $\theta = 1$, и ограничение, которое получим, будет достаточным для любого упругого материала. Подставляя (2.24) в первое неравенство (2.23), при $\theta = 1$ получаем

$$\left(\frac{h_x}{c_p} - \tau \right) \left(\frac{h_y}{c_p} - \tau \right) \geq \tau^2,$$

или

$$c_p \tau \leq \frac{h_x h_y}{h_x + h_y}. \quad (2.25)$$

Условие устойчивости (2.25), действительно, будет достаточным для всех упругих материалов, но необходимым только для предельного случая акустики ($\theta = 1$). Покажем, что для реальных упругих сред это условие может быть значительно ослаблено [30].

Пусть конкретная упругая среда характеризуется константой $k = c_s/c_p$; $\theta = 1 - 2k^2$. Подставляя (2.24) в (2.23), получаем систему четырех неравенств

$$\left(\frac{h_x}{c_p} - \tau\right) \left(\frac{h_y}{c_p} - \tau\right) \geq (1 - 2k^2)^2 \tau^2, \quad \left(\frac{h_x}{c_s} - \tau\right) \left(\frac{h_y}{c_s} - \tau\right) \geq \tau^2, \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{h_x}{c_p} - \tau\right) \left(\frac{h_y}{c_s} - \tau\right) \geq \tau^2, \quad \left(\frac{h_x}{c_s} - \tau\right) \left(\frac{h_y}{c_p} - \tau\right) \geq \tau^2.$$

В работе [30] выписаны вытекающие из (2.26) ограничения на шаг τ для различных значений k . Наиболее интересным случаем, который мы и приведем здесь, является вариант выбора квадратной сетки $h_x = h_y = h$, когда эти ограничения принимают особенно простой вид:

$$c_p \tau \leq \frac{1}{2(1 - k^2)} h, \quad \text{если } k \leq \frac{1}{2}, \quad (2.27)$$

$$c_p \tau \leq \frac{1}{1 + k} h, \quad \text{если } k \geq \frac{1}{2}.$$

Если $k = 1/2$, то $c_p \tau \leq 2h/3$ в отличие от условия (2.25), ограничивающего $c_p \tau$ значением $h/2$. Следует сказать, что значительное число реальных упругих материалов (металлы, горные породы и т. д.) имеют значение k близкое к $1/2$ (это соответствует значению коэффициента Пуассона $\nu = 1/3$). Заметим, что ограничение $\tau \leq 2h/3c_p$ является максимально допустимым в схеме (2.22), (2.24).

Схема (2.19), (2.22) в случае явных формул расчета величин с целочисленными индексами имеет шеститочечный шаблон, изображенный на рис. 2.1. Согласно критерию Куранта (см., например, [65]), можно ожидать сходимости схемы, имеющей такой шаблон, только в случае, когда область зависимости решения от начальных данных, которая в этом случае представляет собой круг, являющийся сечением плоскостью t_k характеристического конуса с наклоном образующей, равным c_p , целиком лежит в ромбе, полудиagonали которого равны h_x и h_y . Радиус этого круга, равный $c_p \tau$, не должен превосходить радиуса вписанной в ромб окружности, который, как легко определить, равен $h_x h_y / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. Так что более жесткое условие (2.25) обусловлено конкретным выбором констант диссипации в виде (2.24), и мы можем наде-

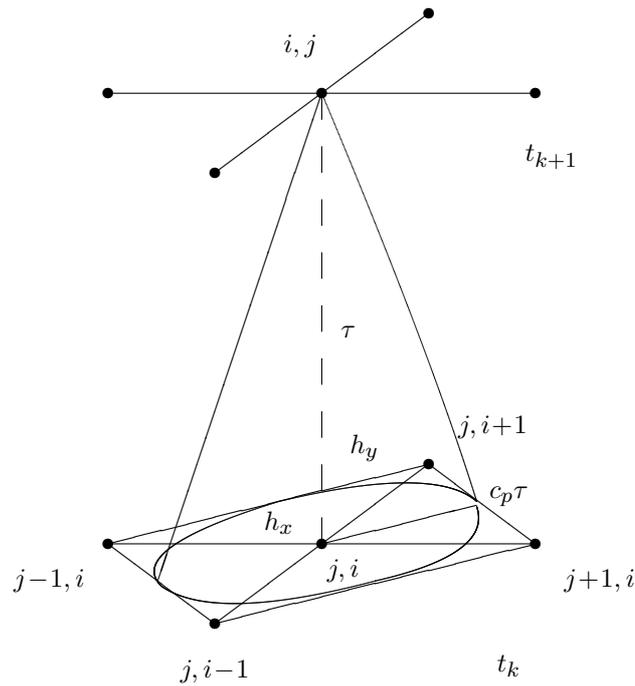


Рис. 2.1. Область зависимости решения от начальных данных

ваться получить более слабое ограничение, выбирая эти константы иным способом.

Рассмотрим наиболее простой случай акустики: $\theta = 1$ или $c_s = 0$ [63]. Как мы увидели, ограничения, обеспечивающие устойчивость схемы, для системы уравнений акустики (2.4) являются самыми жесткими. Очевидно, что вся описанная процедура построения приближенного решения в этом случае остается прежней. Однако дополнительные уравнения представляют собой только две одномерные задачи (первая и третья задачи в (2.22)), которые содержат шесть констант диссипации — $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, а для устойчивости схемы достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_4 \geq 0, \quad \gamma_4 \alpha_4 \geq \tau^2. \quad (2.28)$$

В случае явных схем согласно формулам (1.35) для размерных уравнений константы диссипации связаны соотношениями

$$(\gamma_1 + \tau)(\gamma_4 + \tau) = \frac{h_x^2}{c_p^2} - \frac{4}{c_p^2} \gamma_2^2, \quad (\alpha_1 + \tau)(\alpha_4 + \tau) = \frac{h_y^2}{c_p^2} - \frac{4}{c_p^2} \alpha_2^2$$

и, следовательно,

$$(\gamma_1 + \tau)(\gamma_4 + \tau) \leq \frac{h_x^2}{c_p^2}, \quad (\alpha_1 + \tau)(\alpha_4 + \tau) \leq \frac{h_y^2}{c_p^2},$$

откуда с учетом (2.28)

$$\gamma_4 \leq \frac{h_x^2}{c_p^2(\gamma_1 + \tau)} - \tau \leq \frac{h_x^2}{c_p^2\tau} - \tau, \quad \alpha_4 \leq \frac{h_y^2}{c_p^2(\alpha_1 + \tau)} - \tau \leq \frac{h_y^2}{c_p^2\tau} - \tau.$$

Подставляя полученные неравенства в последнее условие в (2.28), получаем

$$\tau^2 \leq \left(\frac{h_x^2}{c_p^2\tau} - \tau \right) \left(\frac{h_y^2}{c_p^2\tau} - \tau \right)$$

или

$$c_p\tau \leq \frac{h_x h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}. \quad (2.29)$$

Таким образом, максимально слабое условие устойчивости можно реализовать, если выбирать константы диссипации лежащими на гиперболах $(\gamma_1 + \tau)(\gamma_4 + \tau) = h_x^2/c_p^2$ и $(\alpha_1 + \tau)(\alpha_4 + \tau) = h_y^2/c_p^2$, причем в угловых точках $\gamma_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$.

Для общего случая упругой среды получить ограничение (2.29) несколько сложнее технически. Мы ограничимся тем, что приведем конкретные значения констант, обеспечивающие выполнение неравенств (2.23), если шаг по времени τ подчиняется ограничению (2.29):

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \frac{\theta h_x^2}{h_y^2} \tau, & \alpha_4 &= \frac{\theta h_y^2}{h_x^2} \tau, & \omega_4 &= \tau, & \beta_4 &= \tau, \\ \gamma_1 &= \frac{h_x^2}{c_p^2(\gamma_4 + \tau)} - \tau, & \alpha_1 &= \frac{h_y^2}{c_p^2(\alpha_4 + \tau)} - \tau, & & & & \\ \omega_1 &= \frac{h_x^2}{2c_s^2\tau} - \tau, & \beta_1 &= \frac{h_y^2}{2c_s^2\tau} - \tau. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Приведем полностью вариант схемы решения плоской задачи, когда константы диссипации выбираются в виде (2.30) для случая квадратной сетки.

На следующий слой по времени искомые функции пересчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{xj+1} - \sigma_{xj}) + \frac{\tau}{\rho h}(\tau_{xyi+1} - \tau_{xyi}), \\ v^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h}(\tau_{xyj+1} - \tau_{xyj}) + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{yi+1} - \sigma_{yi}), \\ \sigma_x^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \sigma_{xj+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}\rho c_p^2(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h}\rho c_p^2\theta(v_{i+1} - v_i), \\ \sigma_y^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \sigma_{yj+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}\rho c_p^2\theta(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h}\rho c_p^2(v_{i+1} - v_i), \\ \tau_{xy}^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \tau_{xyj+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}\rho c_s^2(v_{j+1} - v_j) + \frac{\tau}{h}\rho c_s^2(u_{i+1} - u_i), \end{aligned}$$

где значения величин с целыми индексами рассчитываются (для внутренних узлов) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \frac{1}{2}(u_{j+\frac{3}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\rho c_p^2(\theta+1)\tau}(\sigma_{xj+\frac{3}{2}} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}}, \\ \sigma_{xj+1} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xj+\frac{3}{2}} + \sigma_{xj+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\rho c_p^2(\theta+1)\tau}{2h}(u_{j+\frac{3}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}}; \\ v_{j+1} &= \frac{1}{2}(v_{j+\frac{3}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{4\rho c_s^2\tau}(\tau_{xyj+\frac{3}{2}} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}}, \\ \tau_{xyj+1} &= \frac{1}{2}(\tau_{xyj+\frac{3}{2}} + \tau_{xyj+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\rho c_s^2\tau}{h}(v_{j+\frac{3}{2}} - v_{j+\frac{1}{2}})_{i+\frac{1}{2}}; \\ v_{i+1} &= \frac{1}{2}(v_{i+\frac{3}{2}} + v_{i+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\rho c_p^2(\theta+1)\tau}(\sigma_{yi+\frac{3}{2}} - \sigma_{yi+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}}, \\ \sigma_{yi+1} &= \frac{1}{2}(\sigma_{yi+\frac{3}{2}} + \sigma_{yi+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\rho c_p^2(\theta+1)\tau}{2h}(v_{i+\frac{3}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}}; \\ u_{i+1} &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{3}{2}} + u_{i+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{4\rho c_s^2\tau}(\tau_{xyi+\frac{3}{2}} - \tau_{xyi+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}}, \\ \tau_{xy\ i+1} &= \frac{1}{2}(\tau_{xyi+\frac{3}{2}} + \tau_{xyi+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\rho c_s^2\tau}{h}(u_{i+\frac{3}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}})_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В случае квадратной сетки условие (2.29) принимает вид

$$c_p\tau \leq \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 2.2 в виде изопроекции поверхности σ_x на момент времени $t = 1/2$ приведено решение тестовой задачи об ударе по упругому телу в форме квадрата со стороной равной единице. Краевые условия взяты следующими. При $t = 0$, тело находится в ненапряженном состоянии и покоится: $u(x, y, 0) = 0, \dots, \tau_{xy}(x, y, 0) = 0, \sigma_x|_{x=0} = 1, \tau_{xy}|_{x=0} = 0$.

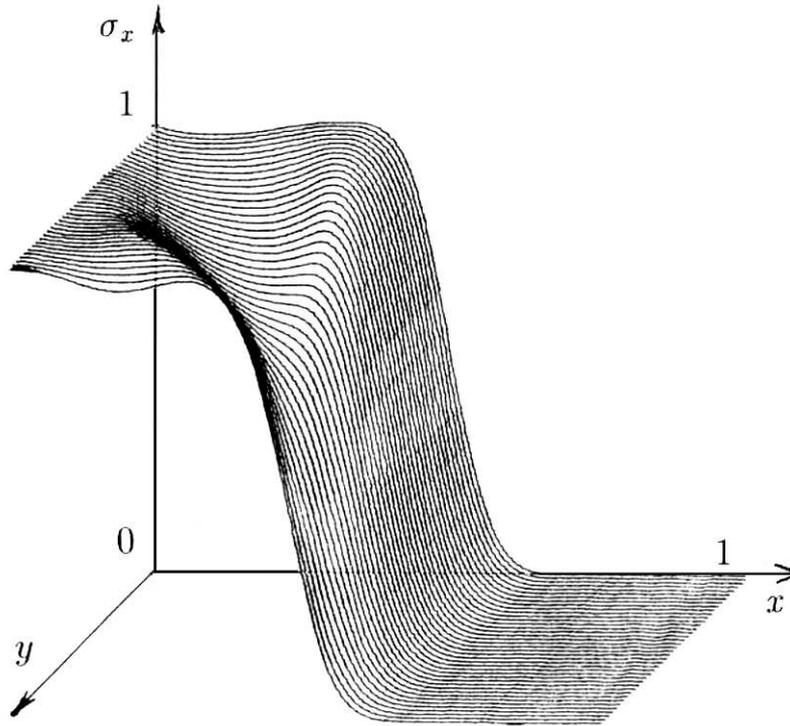


Рис. 2.2. Решение тестовой задачи об ударе по упругому телу

Остальная поверхность свободна от напряжений. Решение получено по схеме Годунова (2.24) на квадратной сетке 40×40 при $\tau = h/2$, $c_p = 1$, $\rho = 1$, $\theta = 1/2$. Следует отметить монотонный профиль решения.

Решение этой же задачи по схеме (2.30) при $\tau = h/\sqrt{2}$ также имеет плавную форму и несколько более крутой профиль продольной упругой волны.

В заключение раздела приведем явную схему решения задачи о распространении крутильных волн в теле цилиндрической формы, которая, как показано выше, сводится к задаче для системы уравнений двумерной акустики в декартовой системе координат.

Схема представляет собой формулы пересчета неизвестных функций в ячейке ω с номером $j + 1/2, i + 1/2$ на один шаг по времени

$$\tau_{r\varphi}^{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} = \tau_{r\varphi}^{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h} \rho r_{j+\frac{1}{2}} c_s^2 (P_{j+1} - P_j)_{i+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\varphi}^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \tau_{z\varphi j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}\rho r_{j+\frac{1}{2}}c_s^2(P_{i+1} - P_i)_{j+\frac{1}{2}}, \\ u_{\varphi}^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= u_{\varphi j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h\rho r_{j+\frac{1}{2}}^2}[(U_{j+1} - U_j)_{i+\frac{1}{2}} + (V_{i+1} - V_i)_{j+\frac{1}{2}}],\end{aligned}$$

где «большие» величины с целыми индексами для внутренних узлов рассчитываются из формул

$$P_j = \frac{\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j-\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j-\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}}\tilde{\rho}_{j-\frac{1}{2}}c_s(u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}})}{\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j-\frac{1}{2}}},$$

$$U_j = \frac{\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + (\sigma_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} - \sigma_{j-\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}})/c_s}{\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j-\frac{1}{2}}},$$

$$P_i = \frac{1}{2}[\sigma_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \sigma_{j+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} + \tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}}c_s(u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}})],$$

$$V_i = \frac{1}{2}[v_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} + (\sigma_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} - \sigma_{j+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}})/\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}}c_s],$$

а для расчета граничных величин используются соотношения, следующие из решений одномерных задач и одно из соответствующих краевых условий. В этих формулах $\tilde{\rho}_{j+\frac{1}{2}} = 1/\rho r_{j+\frac{1}{2}}^3 c_s^2$, где $r_{j+\frac{1}{2}}$ — значение r в центре ячейки Ω . Здесь приведен симметричный вариант схемы, соответствующий выбору констант диссипации в виде $\omega_1 = \omega_4$, $\alpha_1 = \alpha_4$.

2.3. Схема решения двумерной осесимметричной задачи

Процедура решения двумерной осесимметричной задачи (при отсутствии кручения) в целом повторяет все этапы конструирования решения для плоской задачи. Особенности здесь связаны с двумя обстоятельствами:

- с аппроксимацией как усилий, так и напряжений в соответствующих элементарных объемах;
- с аппроксимацией младших (недифференциальных) членов в уравнениях (2.5).

Напомним, что в этой главе поставлена цель изложить подход к решению двумерных задач, основанный на расщеплении этих задач на ряд независимых одномерных. Оказывается, это условие не позволяет построить схему, полностью удовлетворяющую сформулированным в

первой главе требованиям, к примеру, схему, сохраняющую на каждом шаге статическое решение. Однако исследование этого алгоритма вместе с его недостаточной точностью привело к поиску иных вариантов расщепления и, в частности, к необходимости создания итерационной процедуры решения одномерных задач, изложению которой посвящена глава 3.

Как и в плоском случае, разобьем расчетную область плоскостями $r = r_j$, $j = 1, \dots, N$, $z = z_i$, $i = 1, \dots, M$, $t = t_k$, $k = 0, 1, \dots$ на элементарные параллелепипеды ω и с каждым из них свяжем локальную систему координат ξ , ζ , η :

$$\xi = \frac{2}{h_r} \left[r - \frac{1}{2}(r_j + r_{j+1}) \right], \quad \zeta = \frac{2}{h_z} \left[z - \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1}) \right],$$

$$\eta = \frac{2}{\tau} \left[t - \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}) \right].$$

Будем пока считать разбиение равномерным:

$$r_{j+1} - r_j = h_r, \quad z_{i+1} - z_i = h_z, \quad t_{k+1} - t_k = \tau.$$

В качестве приближенного решения в элементе ω примем линейные многочлены по переменной η

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^0 + u_r^1 \eta, & u_z &= u_z^0 + u_z^1 \eta, & \sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r^1 \eta, \\ \sigma_z &= \sigma_z^0 + \sigma_z^1 \eta, & \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^1 \eta, & \tau_{rz} &= \tau_{rz}^0 + \tau_{rz}^1 \eta \end{aligned} \quad (2.31)$$

и многочлены по переменным ξ и ζ

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{11}^0 + t_{11}^1 \xi, & t_{21} &= t_{21}^0 + t_{21}^1 \xi, & t_{12} &= t_{12}^0 + t_{12}^1 \zeta, \\ t_{22} &= t_{22}^0 + t_{22}^1 \zeta, & u_{11} &= u_{11}^0 + u_{11}^1 \xi, & u_{21} &= u_{21}^0 + u_{21}^1 \xi, \\ u_{12} &= u_{12}^0 + u_{12}^1 \zeta, & u_{22} &= u_{22}^0 + u_{22}^1 \zeta, & \sigma_\varphi'' &, \quad u_r'' \end{aligned} \quad (2.32)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} r\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} - \sigma_\varphi'', \\ r\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial t_{21}}{\partial r} + \frac{\partial t_{22}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r'' \right), \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r'' \right), \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} &= \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r'' \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} + \frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right).$$

Кроме того, полиномы (2.31) удовлетворяют начальным условиям (2.7), которые в пределах одной ячейки ω мы будем считать постоянными:

$$u_r|_{\eta=-1} = u_r^*, \quad u_z|_{\eta=-1} = u_z^*, \quad \dots, \quad \sigma_\varphi|_{\eta=-1} = \sigma_\varphi^*, \quad \tau_{rz}|_{\eta=-1} = \tau_{rz}^*.$$

Значения полиномов (2.31) на верхнем слое по времени ($\eta = 1$), вычислить которые нам и требуется в процессе решения, мы будем обозначать соответствующим символом с чертой сверху

$$u_r|_{\eta=1} = \bar{u}_r, \quad \dots, \quad \tau_{rz}|_{\eta=1} = \bar{\tau}_{rz}.$$

Линейные функции (2.32) удовлетворяют граничным условиям (2.9) в граничных сечениях $z = \text{const}$ и на внешних и внутренних боковых поверхностях $r = \text{const} \neq 0$. Если область включает ось симметрии $r = 0$, то в прилегающей к оси ячейке граничные условия формулируются в виде (2.11):

$$u_{11}|_{\xi=-1} = 0, \quad t_{21}|_{\xi=-1} = 0.$$

Из (2.31)–(2.33) следуют формулы пересчета решения с нижнего слоя по времени на средний:

$$\begin{aligned} u_r^0 &= u_r^* + \frac{\tau}{2r\rho} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} - \sigma_\varphi'' \right), \\ u_z^0 &= u_z^* + \frac{\tau}{2r\rho} \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial r} + \frac{\partial t_{22}}{\partial z} \right), \\ \sigma_r^0 &= \sigma_r^* + \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r'' \right), \\ \sigma_z^0 &= \sigma_z^* + \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{\theta}{r} u_r'' \right), \\ \sigma_\varphi^0 &= \sigma_\varphi^* + \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \theta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r'' \right), \\ \tau_{rz}^0 &= \tau_{rz}^* + \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} + \frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Решение на верхнем по времени слое вычисляется через значения его на среднем слое с помощью простых соотношений, следующих из (2.31):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= 2\sigma_r^0 - \sigma_r^*, & \bar{\sigma}_z &= 2\sigma_z^0 - \sigma_z^*, & \bar{\sigma}_\varphi &= 2\sigma_\varphi^0 - \sigma_\varphi^*, \\ \bar{\tau}_{rz} &= 2\tau_{rz}^0 - \tau_{rz}^*, & \bar{u}_r &= 2u_r^0 - u_r^*, & \bar{u}_z &= 2u_z^0 - u_z^*. \end{aligned}$$

Таким образом, для получения решения на следующем шаге необходимо вычислить значения входящих в (2.34) производных

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial r} = \frac{1}{h_r} [(t_{11})_{j+1} - (t_{11})_j], \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial z} = \frac{1}{h_z} [(u_{22})_{i+1} - (u_{22})_i] \quad \text{и т. д.},$$

где индексами $j+1$ и j обозначены значения линейных полиномов (2.32) по переменной ξ при $\xi = 1$ и $\xi = -1$ соответственно, а индексами $i+1$ и i — значения линейных полиномов (2.32) по переменной ζ при $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ соответственно.

Для этого запишем энергетическое тождество, справедливое для всякого приближенного решения (2.31), (2.32), удовлетворяющего (2.33):

$$\int_{\omega} \left[\rho u_r^0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_z^0 \frac{\partial u_z}{\partial t} + \sigma_r^0 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \sigma_z^0 \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \sigma_{\varphi}^0 \frac{u_r''}{r} + \tau_{rz}^0 \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} + \frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right) \right] r d\omega + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \left[\frac{\partial(t_{11}u_{11} + t_{21}u_{21})}{\partial r} + \frac{\partial(t_{12}u_{12} + t_{22}u_{22})}{\partial z} \right] d\omega,$$

где

$$\begin{aligned} D = & (t_{11}^0 - r\sigma_r^0) \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + (u_{11}^0 - u_r^0) \frac{\partial t_{11}}{\partial r} + (u_r^0 - u_r'') \sigma_{\varphi}'' + (\sigma_{\varphi}'' - \sigma_{\varphi}^0) u_r'' + \\ & + (t_{21}^0 - r\tau_{rz}^0) \frac{\partial u_{21}}{\partial r} + (u_{21}^0 - u_z^0) \frac{\partial t_{21}}{\partial r} + (t_{22}^0 - r\sigma_z^0) \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \\ & + (u_{22}^0 - u_z^0) \frac{\partial t_{22}}{\partial z} + (t_{12}^0 - r\tau_{rz}^0) \frac{\partial u_{12}}{\partial z} + (u_{12}^0 - u_r^0) \frac{\partial t_{12}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Подставляя (2.34) в (2.35), можно получить выражение для D , которое содержит только известные значения функций на нижнем по времени слое и производные по z и r .

Последние три пары слагаемых в (2.35) соответствуют таким же слагаемым в выражении для D в плоском случае (2.20). Поэтому, обе одномерные задачи в направлении z и одномерную задачу для поперечных волн в направлении r мы можем формулировать аналогичным образом.

Первые четыре слагаемых в (2.35) с точностью до обозначений совпадают с выражением (1.59) для мощности искусственной диссипации в одномерной осесимметричной задаче. Формулировка этой задачи нами хорошо исследована, в частности выяснено, какими необходимо брать константы диссипации, чтобы схема сохраняла при переходе на следующий шаг по времени статическое решение и выполнялся ряд других требований. Однако в двумерном случае мы лишены возможности

сформулировать эту одномерную задачу таким образом. Дело в том, что при выборе констант, обеспечивающем сохранение статического решения одномерной осесимметричной задачи, мощность искусственной диссипации не содержит квадрата производной $(\partial t_{11}/\partial r)$, а квадратичная форма (2.35) после формулировки одномерных задач содержит произведение $(\partial t_{11}/\partial r)(\partial t_{12}/\partial z)$, и никаким выбором оставшихся свободных констант мы не сможем гарантировать ее неотрицательность, необходимую нам для устойчивости схемы.

Выберем вариант формулировки одномерных задач, полностью (с точностью до обозначений искомых функций) совпадающий с вариантом (2.22) для плоского случая:

$$\begin{aligned}
t_{11}^0 - r\sigma_r^* - \frac{\tau r}{2}\rho c_p^2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} &= \frac{\gamma_1 r}{2}\rho c_p^2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \gamma_2 \frac{\partial t_{11}}{\partial r}, \\
u_{11}^0 - u_r^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial r} &= \frac{\gamma_4}{2r\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial r} - \gamma_2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r}, \\
t_{21}^0 - r\tau_{rz}^* - \frac{\tau r}{2}\rho c_s^2 \frac{\partial u_{21}}{\partial r} &= \frac{\omega_1 r}{2}\rho c_s^2 \frac{\partial u_{21}}{\partial r} + \omega_2 \frac{\partial t_{21}}{\partial r}, \\
u_{21}^0 - u_z^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{21}}{\partial r} &= \frac{\omega_4}{2r\rho} \frac{\partial t_{21}}{\partial r} - \omega_2 \frac{\partial u_{21}}{\partial r}, \\
t_{22}^0 - r\sigma_z^* - \frac{\tau r}{2}\rho c_p^2 \frac{\partial u_{22}}{\partial z} &= \frac{\alpha_1 r}{2}\rho c_p^2 \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial t_{22}}{\partial z}, \\
u_{22}^0 - u_z^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} &= \frac{\alpha_4}{2r\rho} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} - \alpha_2 \frac{\partial u_{22}}{\partial z}, \\
t_{12}^0 - r\tau_{rz}^* - \frac{\tau r}{2}\rho c_s^2 \frac{\partial u_{12}}{\partial z} &= \frac{\beta_1 r}{2}\rho c_s^2 \frac{\partial u_{12}}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial t_{12}}{\partial z}, \\
u_{12}^0 - u_r^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} &= \frac{\beta_4}{2r\rho} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} - \beta_2 \frac{\partial u_{12}}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Используя (2.35), (2.36), мощность искусственной диссипации D можно записать в виде

$$\begin{aligned}
D &= \frac{r}{2}\rho c_p^2 \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau\theta \frac{\partial u_{11}}{\partial r} \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
&+ \frac{r}{2}\rho c_s^2 \left[\omega_1 \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial u_{21}}{\partial r} \frac{\partial u_{12}}{\partial z} + \beta_1 \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{2r\rho} \left[\omega_4 \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial t_{21}}{\partial r} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} + \alpha_4 \left(\frac{\partial t_{22}}{\partial z} \right)^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2r\rho} \left[\gamma_4 \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial t_{11}}{\partial r} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} + \beta_4 \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{\tau}{2r\rho} \sigma_\varphi'' \left[\frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right] - \frac{\tau}{2} \theta \rho c_p^2 u_r'' \left[\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right] + \\
& + (u_r^0 - u_r'') \sigma_\varphi'' + (\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^0) u_r''.
\end{aligned}$$

Воспользуемся свободой в выборе независимых аппроксимаций для младших членов и положим

$$u_r^0 - u_r'' = -\frac{\tau}{2r\rho} \left[\frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right], \quad \sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^0 = \frac{\tau}{2} \theta \rho c_p^2 \left[\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right].$$

Отсюда, учитывая выражения для u_r^0 , σ_φ^0 в (2.34), находим неизвестные величины u_r'' , σ_φ'' :

$$\begin{aligned}
u_r'' &= \hat{u}_r + \frac{\tau}{r\rho A} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right) - \frac{\tau^2 \theta c_p^2}{2rA} \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right), \\
\sigma_\varphi'' &= \hat{\sigma}_\varphi + \frac{\tau}{A} \theta \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right) + \frac{\tau^2 c_p^2}{2r^2 A} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

где

$$\hat{u}_r = \frac{1}{A} \left(u_r^* - \frac{\tau}{2r\rho} \sigma_\varphi^* \right), \quad \hat{\sigma}_\varphi = \frac{1}{A} \left(\sigma_\varphi^* + \frac{\tau}{2r} \rho c_p^2 u_r^* \right), \quad A = 1 + \frac{\tau^2 c_p^2}{4r^2}.$$

Очевидно, что в случае выбора независимой аппроксимации младших членов в виде (2.37) мощность искусственной диссипации D , как и для плоской задачи, записывается в виде суммы четырех квадратичных форм. Условия неотрицательности величины D совпадут с ограничениями (2.23) для плоской задачи, и на описанную выше схему автоматически перенесутся результаты предыдущего параграфа, определяющие оптимальный выбор значений констант диссипации (2.24) и ограничение на шаг по времени

$$c_p \tau \leq \frac{h_r h_z}{\sqrt{h_r^2 + h_z^2}}.$$

Возможен и другой вариант (см. [55, 59]) формулировки одномерных задач (2.36), при котором независимая аппроксимация младших членов совпадает с их аппроксимацией на среднем слое по времени. Получаемые при этом уравнения одномерных задач аналогичны уравнениям схемы II, рассмотренной в первой главе.

В этом разделе не приводятся численные примеры, иллюстрирующие работоспособность построенной схемы, ввиду того, что в следую-

щей главе будет предложен численный алгоритм решения осесимметричной задачи, обладающий существенно более высокой точностью и лишенный недостатков, связанных с дефектом решения в окрестности оси симметрии.

2.4. Алгоритм построения численных решений в областях, состоящих из произвольных четырехугольников

Обобщим результаты, полученные выше, на случай решения задач в областях сложной геометрической формы. Широко распространенные конечно-разностные методы, как правило, обеспечивают аппроксимацию уравнений только на достаточно «хороших» сетках, не имеющих изломов сеточных линий, тогда как характерной особенностью большинства задач, встречающихся в приложениях, является нерегулярность границ рассматриваемых областей. Необходимость конструирования высокоэффективных методов для расчета разрывных решений динамических задач в областях сложной формы обусловлена еще и тем обстоятельством, что именно к этим задачам может быть сведено моделирование процессов упругопластического деформирования, характеризующихся произвольными величинами деформаций.

Отметим, что обобщение, например, схемы Годунова на нерегулярные сетки не вызывает каких-либо значительных затруднений [63]. Проблема заключается лишь в обосновании метода для указанной ситуации. В частности, необходимо найти как можно более точные условия устойчивости, т. е. ограничения на шаг по времени. Используемые в большинстве расчетов ограничения на шаг по времени, как правило, приняты на основе различных эвристических соображений и поэтому в значительной степени загроулены. Важность получения точных оценок определяется тем, что значение максимально допустимого шага по времени является основной диссипативной характеристикой метода: увеличение шага по времени приводит к уменьшению значения аппроксимационной вязкости. Как будет показано ниже, использование процедуры нескольких линейных аппроксимаций позволяет получать достаточно точные оценки для шага интегрирования по времени, существенно увеличивая при этом диапазон устойчивости метода.

2.4.1. Уравнения плоской динамической задачи упругости в локальной системе координат

В декартовой системе координат x_1, x_2 рассмотрим выпуклый произвольный четырехугольник с вершинами в точках $(x_1^k; x_2^k)$, $k = 1, \dots, 4$ (рис. 2.3). Введем косоугольную локальную систему координат ξ^1, ξ^2 , связанную с декартовой формулами:

$$x_1 = \sum_{k=1}^4 N_k x_1^k, \quad x_2 = \sum_{k=1}^4 N_k x_2^k, \quad (2.38)$$

где

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2).$$

Соотношения (2.38) определяют преобразование произвольного четырехугольного элемента в квадрат с центром в начале координат и вершинами в точках $(1; -1)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$ в локальной системе координат ξ^1, ξ^2 . Определим ковариантный и контравариантный

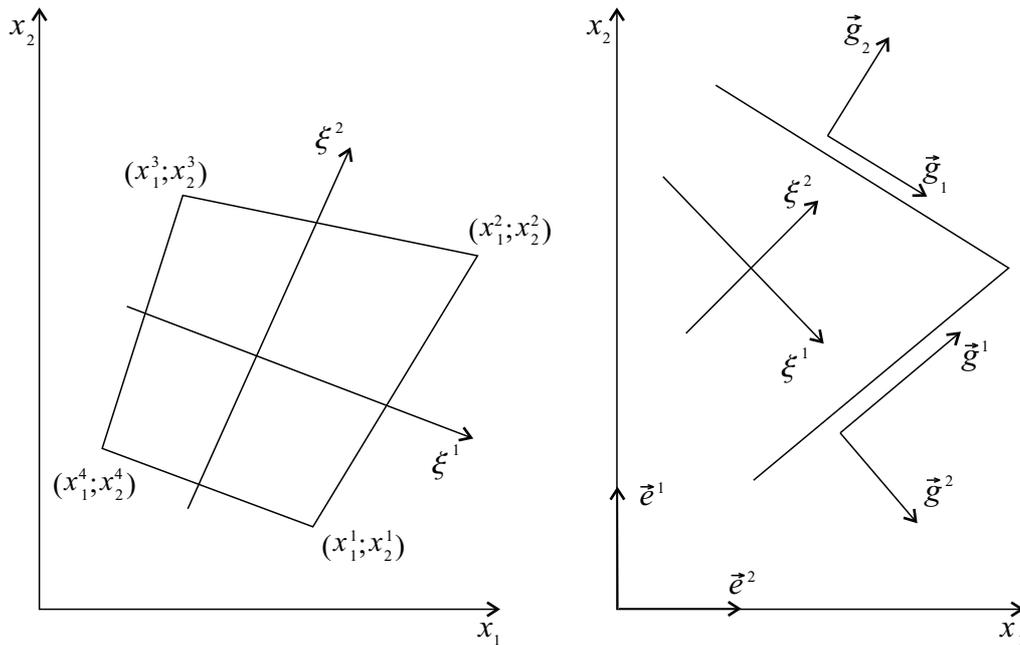


Рис. 2.3. Косоугольная локальная система координат и ее ковариантный и контравариантный базисы

базисы локальной системы координат (рис. 2.3):

$$\vec{g}_i = x_{j,i} \vec{e}_j, \quad \vec{g}^i = g^{ji} \vec{g}_j, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.39)$$

где

$$\vec{g}_i = g_{ji} \cdot \vec{g}^j, \quad x_{j,i} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi^i}, \quad g^{ji} = \vec{g}^j \cdot \vec{g}^i, \quad g_{ji} = \vec{g}_j \cdot \vec{g}_i$$

— компоненты метрических тензоров системы ξ^1, ξ^2 ; \vec{e}_j — базисные векторы декартовой системы координат.

В (2.39) и далее слагаемое, содержащее два и более одинаковых немых индекса, означает сумму по этому индексу от 1 до 2. Под немым понимается индекс, который отсутствует хотя бы в одном из слагаемых уравнения.

Плоская динамическая задача теории упругости в косоугольной локальной системе координат ξ^1, ξ^2 может быть сформулирована следующим образом: найти функции $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{u}$, удовлетворяющие в $\omega = \{\xi^1, \xi^2, \eta \in [-1, 1]\}$ уравнениям

$$\rho \sqrt{g} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial t} = A_n^i \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi^n}, \quad i, n = 1, 2, \quad (2.40)$$

$$\eta = \frac{2}{\tau} \left[t - \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \right], \quad \tau = t_{m+1} - t_m,$$

условиям на нижнем слое по времени

$$\vec{u} = \vec{u}^*, \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}^* \quad \text{при} \quad \eta = -1 \quad (2.41)$$

и граничным условиям

$$[B_{1i}^\pm \vec{u} + B_{2i}^\pm \vec{\sigma}_i] = \varphi_i^\pm \quad \text{при} \quad \xi^i = \pm 1. \quad (2.42)$$

В (2.40)–(2.42) приняты обозначения: \vec{u} — вектор скорости; $\vec{\sigma}_i$ — векторы напряжений, действующие на гранях $\xi^i = \text{const}$; ρ — плотность; t — время; $\sqrt{g} = |\vec{g}_1 \times \vec{g}_2|$ — якобиан преобразования (2.38); $\vec{u}^*, \vec{\sigma}_i^*$ — заданные функции координат; φ_i^\pm — заданные функции времени.

Элементы матриц A_n^i имеют вид:

$$\|(A_{jm})_n^i\| = \frac{1}{\sqrt{g}} a_{jkms} \chi_s^n \chi_k^i, \quad j, k, m, s = 1, 2, \quad (2.43)$$

где $\chi_k^i = \sqrt{g}(\vec{g}^i \cdot \vec{e}_k)$; a_{jkms} — декартовы компоненты тензора модулей упругости. Элементы диагональных матриц B_{ij}^\pm — коэффициенты граничных условий (2.42), предполагаются постоянными и удовлетворяют условиям

$$B_{1j}^- \cdot B_{2j}^- \leq 0, \quad B_{1j}^+ \cdot B_{2j}^+ \geq 0. \quad (2.44)$$

Отметим также следующие важные свойства, которыми обладают матрицы — коэффициенты в уравнениях связи (2.40):

1) матрицы A_i^i симметричны и положительно определены:

$$A_i^i = (A_i^i)^T > 0, \quad A_n^i = (A_i^n)^T, \quad i, n = 1, 2; \quad (2.45)$$

2) матрицы A_i^i имеют ортогональный собственный базис, состоящий из векторов $\{\vec{g}^i, \vec{g}_n\}$ ($i \neq n$), причем выполнены равенства

$$A_i^i \vec{g}^i = \sqrt{g} g^{ii} a_{iiii} \vec{g}^i, \quad A_i^i \vec{g}_n = \sqrt{g} g^{ii} a_{inin} \vec{g}_n \quad (2.46)$$

(для случая однородной и изотропной среды элементы a_{iiii} , a_{inin} имеют вид:

$$a_{1111} = a_{2222} = \lambda + 2\mu, \quad a_{1212} = a_{2121} = \mu, \quad (2.47)$$

где λ , μ — коэффициенты Ламе);

3) для любых векторов \vec{a}_i выполнено неравенство

$$\sum_{in} A_n^i \vec{a}_i \vec{a}_n \geq 0, \quad (2.48)$$

причем равенство имеет место только в случае $\vec{a}_i = \vec{a}_n = 0$. Справедливость утверждений (2.45)–(2.48) непосредственно следует из формул (2.39), (2.43) и свойств компонент тензора модулей упругости.

Соотношения (2.40)–(2.42) образуют замкнутую систему уравнений плоской динамической задачи теории упругости, сформулированной в локальной косоугольной системе координат относительно неизвестных векторов напряжений и скорости. Для прямоугольных элементов со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат, уравнения (2.40) совпадают с уравнениями (2.1), рассмотренными в предыдущих разделах.

2.4.2. Аппроксимация решения в элементарном четырехугольнике

В рамках излагаемого подхода к построению алгоритмов расщепления задач динамики в областях из нерегулярных элементов существует несколько вариантов аппроксимации уравнений (2.40)–(2.42). При этом существенным оказывается выбор искомых функций, относительно которых формулируются одномерные задачи.

В работах [12, 55] рассмотрен вариант скалярного расщепления двумерной задачи упругости на оси декартовой системы координат, а в работе [57] предложен и обоснован алгоритм решения указанной задачи на основе ее расщепления до уровня независимых скалярных одномерных

задач для проекций векторов скорости и усилий на нормаль и касательную к координатным линиям локальной системы координат четырехугольного элемента. Ниже излагается подход, который в отличие от алгоритмов скалярного расщепления [12, 55, 57] базируется на векторном расщеплении [44]. Использование процедуры векторного расщепления позволяет существенно уменьшить необходимую для монотонности численного решения величину искусственной диссипации и тем самым создает возможность получать при тех же затратах вычислительных ресурсов лучшее описание разрывных решений задач динамического деформирования.

Решение сформулированной задачи (2.40)–(2.42) в элементе $s = \{\xi^1, \xi^2 \in [-1, 1]\}$ на интервале времени $\eta \in [-1, 1]$ будем искать в виде линейных полиномов по времени

$$\vec{u} = \vec{u}^0 + \vec{u}^1\eta, \quad \vec{\sigma}_i = \vec{\sigma}_i^0 + \vec{\sigma}_i^1\eta, \quad (2.49)$$

линейных полиномов по координатам

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i^0 + \vec{u}_i^1\xi^i, \quad \vec{p}_i = \vec{p}_i^0 + \vec{p}_i^1\xi^i, \quad (2.50)$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\rho\sqrt{g}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{p}_i}{\partial\xi^i}, \quad \frac{\partial\vec{\sigma}_i}{\partial t} = A_n^i\frac{\partial\vec{u}_n}{\partial\xi^n}, \quad i, n = 1, 2, \quad (2.51)$$

в которых величины $\rho\sqrt{g}$, A_n^i предполагаются осредненными по элементу s . Кроме того, потребуем, чтобы полиномы (2.49) удовлетворяли осредненным по элементу s начальным условиям (2.41), а полиномы (2.50) удовлетворяли граничным условиям (2.42) в виде

$$[B_{1i}^\pm\vec{u} + B_{2i}^\pm\vec{p}_i] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_i^\pm d\eta \quad \text{при} \quad \xi^i = \pm 1. \quad (2.52)$$

Таким образом, в (2.51) полиномы \vec{u} , $\vec{\sigma}_i$ характеризуют осредненные по элементу s величины векторов скорости и напряжений; \vec{u}_i , \vec{p}_i — осредненные по времени $\eta \in [-1, 1]$ и по сечениям $\xi^i = \text{const}$ величины векторов скорости и напряжений.

Алгебраическая система уравнений (2.41), (2.51), (2.52) относительно коэффициентов полиномов (2.49), (2.50) не замкнута, т. е. для вычисления векторов \vec{u} , $\vec{\sigma}_i$ (значений искоемых функций (2.49) на «верхнем» слое по времени $\eta = 1$) этих уравнений недостаточно. Необходимо сформулировать дополнительные уравнения для определения полиномов (2.50).

Заметим, что значения полиномов (2.50) на гранях элемента s имеют смысл, аналогичный смыслу «больших» величин в методе Годунова, которые определяются на основе решения одномерных задач о распаде произвольного разрыва. Как и ранее, при построении дополнительных уравнений для определения полиномов (2.50) используются два основных принципа:

- расщепление многомерной задачи на каждом шаге по времени на ряд одномерных задач;
- диссипативность получаемых решений (наличие в приближенных уравнениях аппроксимационной вязкости).

Требование диссипативности гарантирует устойчивость процесса вычисления в энергетической норме и является необходимым условием для обеспечения монотонности численного решения. Наряду с положительной ролью гасителя «паразитных» колебаний искусственная диссипация играет отрицательную роль: «размазывает» разрывы, поглощает энергию. Поэтому важной характеристикой качества алгоритмов, предназначенных для описания разрывных решений задач динамического деформирования, является величина диссипации, которая обеспечивает монотонность решения.

Для любых полиномов (2.49), (2.50), удовлетворяющих первому уравнению в (2.51), имеет место энергетическое равенство

$$\int_{\omega} \left[\rho \sqrt{g} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \vec{u}^0 + \vec{\sigma}_i^0 \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \right] d\omega + Q = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\vec{p}_i \vec{u}_i) d\omega, \quad (2.53)$$

где

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad Q_1 = \int_{\omega} (\vec{u}_i^0 - \vec{u}^0) \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} d\omega, \quad Q_2 = \int_{\omega} (\vec{p}_i^0 - \vec{\sigma}_i^0) \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} d\omega. \quad (2.54)$$

Равенство (2.53) является аналогом закона сохранения энергии для задачи (2.40)–(2.42). В отличие от указанного закона сохранения равенство (2.43) содержит в левой части дополнительное слагаемое Q . В случае $Q \geq 0$ это слагаемое имеет смысл искусственной диссипации энергии. Поэтому при формулировке дополнительных уравнений для полиномов (2.50) будем требовать выполнения неравенства $Q \geq 0$, что обеспечит диссипативность алгоритма.

Другое требование, как уже отмечалось, состоит в расщеплении исходной двумерной задачи на две независимые векторные одномерные задачи. Имея это в виду, в качестве дополнительных уравнений для определения полиномов \vec{u}_i, \vec{p}_i примем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[\vec{u}_i - \vec{u}^* - \frac{\tau}{2\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} \right] d\omega &= \int_{\omega} \frac{1}{2\rho\sqrt{g}} X_i \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} d\omega, \\ \int_{\omega} \left[\vec{p}_i - \vec{p}^* - \frac{\tau}{2} A_i^i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \right] d\omega &= \int_{\omega} \frac{1}{2} Y_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} d\omega, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где $i = 1, 2$ (по i не суммировать); X_i, Y_i — некоторые матрицы, элементы которых будут определены ниже.

Каждая из одномерных задач (2.55) связывает величины векторов напряжений и скорости на двух противоположных гранях четырехугольного элемента ($\xi^i = \pm 1$), при этом значения \vec{u}_1, \vec{p}_1 ($\xi^1 = \pm 1$) и \vec{u}_2, \vec{p}_2 ($\xi^2 = \pm 1$) вычисляются независимо друг от друга.

Используя (2.49)–(2.51), (2.55), найдем выражения для величин Q_1, Q_2 в (2.54):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{\omega} \frac{1}{2\rho\sqrt{g}} \left\{ X_i \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} - \tau \sum_{n \neq i} \frac{\partial \vec{p}_n}{\partial \xi^n} \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial \xi^i} \right\} d\omega, \\ Q_2 &= \int_{\omega} \frac{1}{2} \left\{ Y_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} - \tau \sum_{n \neq i} A_n^i \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial \xi^n} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Из условия неотрицательности диссипации Q следует, что матрицы X_i, Y_i в правой части векторных одномерных задач (2.55) должны быть выбраны так, чтобы обеспечить неотрицательность квадратичных форм (2.56). Помимо этого выбором матриц X_i, Y_i определяется величина Q , максимальный шаг по времени в явных схемах, инвариантность алгоритма относительно поворота системы координат и другие качественные характеристики метода.

Заметим, что в силу свойств (2.45), (2.46) матриц A_i^i существуют невырожденные ортогональные преобразования T_i , приводящие матрицы A_i^i к диагональному виду:

$$A_i^i = T_i D_i T_i^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

где T_i — матрицы, столбцами которых являются векторы собственных базисов матриц A_i^i ; элементы матриц D_i имеют вид:

$$\|(D_i)_{ks}\| = \lambda_k^i \delta_{ks}, \quad \lambda_k^i = \sqrt{g} g^{ii} a_{iiii}, \quad k = i, \quad \lambda_k^i = \sqrt{g} g^{ii} a_{ikik}, \quad k \neq i. \quad (2.57)$$

Выберем матрицы X_i, Y_i в следующей форме:

$$X_i = T_i \Omega_i T_i^{-1}, \quad Y_i = T_i \Gamma_i T_i^{-1}, \quad (2.58)$$

где $\|(\Omega_i)_{ks}\| = \omega_k^i \delta_{ks}$; $\|(\Gamma_i)_{ks}\| = \lambda_k^i \gamma_k^i \delta_{ks}$; δ_{ks} — символ Кронекера; ω_k^i, γ_k^i — некоторые постоянные, которые будем называть константами диссипации.

Найдем условия, которым должны удовлетворять матрицы констант диссипации X_i, Y_i для того, чтобы обеспечить неотрицательность квадратичных форм (2.56). Используя критерий Сильвестра [60], легко показать, что для неотрицательности величины Q_1 достаточно выполнения условий

$$\omega_k^i \geq \tau, \quad i, k = 1, 2. \quad (2.59)$$

Из свойств матриц A_n^i (2.45), (2.48) следует неотрицательность квадратичной формы

$$\Phi = \int_{\omega} \frac{1}{2} \left\{ A_1^1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \xi^1} - 2 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \xi^1} A_2^1 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \xi^2} + A_2^2 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \xi^2} \right\} d\omega \geq 0.$$

Вычитая вспомогательную форму $\tau\Phi$ из величины Q_2 в (2.56), находим

$$Q_2 - \tau\Phi = \int_{\omega} \frac{1}{2} [Y_i - \tau A_i^i] \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} d\omega.$$

Таким образом, для неотрицательности величины Q_2 в (2.56) достаточно выполнения условий $Y_i - \tau A_i^i \geq 0$, которые, в силу представлений (2.48), можно записать в виде

$$\gamma_k^i \geq \tau, \quad i, k = 1, 2. \quad (2.60)$$

Выполнение условий (2.59), (2.60) гарантирует неотрицательность квадратичных форм Q_1 и Q_2 , а значит, и неотрицательность искусственной диссипации Q .

Как будет доказано ниже, условие неотрицательности Q обеспечивает устойчивость алгоритма вычисления приближенного решения в энергетической норме. Кроме того, ограничения на константы диссипации (2.59), (2.60) совместно с условиями «диссипативности» (2.44) граничных условий, являются достаточными для однозначной разрешимости систем алгебраических уравнений (2.42), (2.55) относительно коэффициентов векторных полиномов \vec{p}_i и \vec{u}_i .

Итак, процедура вычисления приближенного решения плоской динамической задачи теории упругости в элементарном четырехугольнике s включает в себя следующие этапы:

- определение полиномов (2.50) на основе решения систем алгебраических уравнений, составленных из векторных одномерных задач (2.55) и соответствующих граничных условий (2.42);
- вычисление решения на верхнем слое по времени (т. е. определение значений полиномов (2.49) при $\eta = 1$) по уравнениям (2.51) и начальным условиям (2.41).

2.4.3. Схемы решения вспомогательных одномерных задач

Решение плоской задачи для области G , составленной из элементарных четырехугольников, складывается из построенных решений для каждого из элементов s , составляющих область G . При этом на сторонах элементов, образующих границу области G , формулируются условия типа (2.52), (2.44), а на общих для двух четырехугольников сторонах должны быть выполнены условия непрерывности векторов \vec{u}_i , \vec{p}_i . Поэтому из (2.50), (2.52), (2.55) следует, что вычисление решений одномерных задач в составляющих область G элементах сводится к решению вспомогательных задач типа

$$\begin{aligned} \vec{w}_k + \vec{w}_{k+1} - \tilde{X}_{k+\frac{1}{2}}[\vec{q}_{k+1} - \vec{q}_k] &= \vec{f}_{k+\frac{1}{2}}, \\ \vec{q}_k + \vec{q}_{k+1} - \tilde{Y}_{k+\frac{1}{2}}[\vec{w}_{k+1} - \vec{w}_k] &= \vec{g}_{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\ B_1^- \vec{w}_0 + B_2^- \vec{q}_0 &= \vec{\varphi}^-, \quad B_1^+ \vec{w}_K + B_2^+ \vec{q}_K = \vec{\varphi}^+, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где \vec{q}_k , \vec{w}_k — имеют смысл векторов напряжений и скорости на гранях элементов:

$$\begin{aligned} \vec{q}_k &\sim \vec{u}_i|_{\xi^i=-1}, \quad \vec{w}_k \sim \vec{p}_i|_{\xi^i=-1}, \quad \vec{q}_{k+1} \sim \vec{u}_i|_{\xi^i=1}, \quad \vec{w}_{k+1} \sim \vec{p}_i|_{\xi^i=1}; \\ \vec{f}_{k+\frac{1}{2}} &\sim 2\vec{u}^*, \quad \vec{g}_{k+\frac{1}{2}} \sim 2\vec{\sigma}_i^* \text{ — известные в элементе } k+1/2 \text{ величины с} \\ &\text{нижнего слоя по времени;} \end{aligned}$$

$$\tilde{X}_{k+\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2\rho\sqrt{g}}[\tau I + X_i], \quad \tilde{Y}_{k+\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2}[\tau A_i^i + Y_i]$$

— коэффициенты одномерных задач (2.55); K — число элементов в выделенном из области G слое по направлению ξ^i .

Решение алгебраической системы уравнений (2.61) может быть получено методом прогонки [9], при этом в силу (2.44), (2.57)–(2.60) коэффициенты $\tilde{Y}_{k+\frac{1}{2}}$, $\tilde{X}_{k+\frac{1}{2}}$, B_i^\pm удовлетворяют условиям признака хорошей обусловленности [65, 86], что гарантирует слабую чувствительность решений одномерных задач (2.61) к ошибкам округления.

В случае выполнения условий

$$\tilde{X}_{k+\frac{1}{2}}\tilde{Y}_{k+\frac{1}{2}} = I, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (2.62)$$

где I — единичная матрица, значения \vec{q}_k, \vec{w}_k не зависят от значений $\vec{q}_{k+1}, \vec{w}_{k+1}$ и решение системы (2.61) вычисляется по явной схеме [9], подробное описание которой для случая прямоугольных элементов приведено в предыдущих разделах.

Для каждого из элементов s условия (2.62) могут быть записаны в виде

$$(\tau + \omega_k^i)(\tau + \gamma_k^i)\lambda_k^i = 4\rho\sqrt{g}, \quad i, k = 1, 2. \quad (2.63)$$

Неравенства (2.59), (2.60) и условие (2.63) налагают ограничение на шаг по времени τ при вычислении решения одномерных задач (2.61) по явной схеме. Приведем указанное ограничение для случая $\omega_k^i = \gamma_k^i$ (т. е. в случае уменьшения числа независимых констант диссипации в два раза):

$$\tau \leq \min_{s \in G} \min_{i,k} \sqrt{\frac{\rho\sqrt{g}}{\lambda_k^i}}. \quad (2.64)$$

В случае решения задач в областях, допускающих разбиение на прямоугольные элементы, при определенном выборе констант ω_k^i, γ_k^i явная схема построенного алгоритма совпадает с явной схемой метода Годунова, а ограничение (2.64) переходит в условие устойчивости (2.25).

2.4.4. Устойчивость вычисления приближенного решения. Сходимость последовательности приближенных решений к точному решению задачи

Отметим, что анализ устойчивости разностной начально-краевой задачи (2.51), (2.52), (2.55) может быть проведен традиционными способами [65, 145], например методом разделения переменных с использованием спектрального признака устойчивости. Указанный метод позволяет доказать устойчивость решения разностной задачи по начальным данным (при условии ограниченности правых частей в равенствах (2.41)) в норме L_2 (т. е. в норме сеточных функций, суммируемых с квадратом).

Легко показать также устойчивость сформулированного выше алгоритма вычисления приближенного решения в энергетической норме, введенной в пространстве сеточных функций, которые удовлетворяют

уравнениям (2.51), (2.52):

$$E^2 = \int_G \int_{-1}^1 \left[\rho \sqrt{g} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \vec{u}^0 + \vec{\sigma}_i^0 \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi^i} \right] d\eta ds.$$

Действительно, используя энергетическое равенство (2.53), находим, что в случае отсутствия внешних сил на границе области G имеет место равенство

$$E^2 + \sum_{s \in G} Q = 0. \quad (2.65)$$

Равенство (2.65) означает, что в случае выполнения условий диссипативности ($Q \geq 0$) сумма кинетической и потенциальной энергий элементов s , составляющих область G , не возрастает при переходе на верхний слой по времени, что обеспечивает устойчивость процесса вычисления приближенного решения по начальным данным. Другими словами, ограничения на константы диссипации (2.59), (2.60) являются достаточными для устойчивости алгоритма в энергетической норме.

В заключение приведем основные этапы доказательства сходимости последовательности приближенных решений (получаемых по изложенному алгоритму) к точному решению задачи (2.40)–(2.42).

Пусть $\vec{\sigma}_i^*$, \vec{u}^* — напряжения и скорости смещений, соответствующие точному решению задачи о динамическом деформировании области G на промежутке времени $t \in [0, T]$ при начальных условиях типа (2.41) в каждом из составляющих область G четырехугольников и условиях на границе G , являющихся кусочно-постоянными функциями времени типа (2.52). Разбивая рассматриваемый промежуток времени на конечное число интервалов длительностью t и используя на каждом из интервалов изложенную выше процедуру приближенного решения, можно построить приближенное решение на всем промежутке $[0, T]$. Обозначим через $E^2(T)$ квадрат энергетической нормы разности между точным и приближенным решениями, соответствующими $t = T$:

$$E^2(T) = \int_0^T \int_G \left[\rho \sqrt{g} \frac{\partial(\vec{u}^* - \vec{u})}{\partial t} (\vec{u}^* - \vec{u}) + (\vec{\sigma}_i^* - \vec{\sigma}_i) \frac{\partial(\vec{u}^* - \vec{u}_i)}{\partial \xi^i} \right] ds dt.$$

Из уравнения движения в (2.40) и его аппроксимации в (2.51) следует:

$$E^2(T) = E_1 + E_2, \quad (2.66)$$

где

$$E_1 = \int_0^T \int_G \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\vec{\sigma}_i^* - \vec{p}_i) (\vec{u}^* - \vec{u}_i) ds dt,$$

$$E_2 = \int_0^T \int_G \left[(\vec{u}_i - \vec{u}) \frac{\partial (\vec{\sigma}_i^* - \vec{p}_i)}{\partial \xi^i} + (\vec{p}_i - \vec{\sigma}_i) \frac{\partial (\vec{u}^* - \vec{u}_i)}{\partial \xi^i} \right] ds dt.$$

Из неравенств типа (2.44) на границе области G получим $E_1 \leq 0$. Откуда, используя (2.53), (2.54), (2.66), находим

$$E^2(T) + \sum_{s,\tau} Q \leq \int_0^T \int_G \left[(\vec{u}_i - \vec{u}) \frac{\partial \vec{\sigma}_i^*}{\partial \xi^i} + (\vec{p}_i - \vec{\sigma}_i) \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \xi^i} \right] ds dt. \quad (2.67)$$

Используя (2.51), (2.55), (2.64), можно показать справедливость следующих неравенств:

$$\int_0^T \int_G \rho \sqrt{g} (\vec{u}_i - \vec{u})^2 ds dt \leq C_1 \max_{i,k} \omega_k^i \cdot \sum_{s,\tau} Q_1,$$

$$\int_0^T \int_G \rho \sqrt{g} (\vec{p}_i - \vec{\sigma}_i)^2 ds dt \leq C_2 \max_{i,k} \gamma_k^i \cdot \sum_{s,\tau} Q_2,$$
(2.68)

где C_1, C_2 — ограниченные постоянные; Q_1, Q_2 определены в (2.54); $\sum_{s,\tau}$ — означает суммирование по элементам $s \in G$ и интервалам времени τ .

Предположим, что величины

$$\int_0^T \int_G \left(\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \xi^i} \right)^2 ds dt, \quad \int_0^T \int_G \rho \sqrt{g} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_i^*}{\partial \xi^i} \right)^2 ds dt$$

ограничены. Тогда, используя неравенство Буняковского – Шварца [19], из (2.67), (2.68) получаем

$$E^2(T) + \sum_{s,\tau} Q \leq A_1 [\max_{i,k} \omega_k^i]^{1/2} \cdot \left(\sum_{s,\tau} Q_1 \right)^{1/2} +$$

$$+ A_2 [\max_{i,k} \gamma_k^i]^{1/2} \cdot \left(\sum_{s,\tau} Q_2 \right)^{1/2} \leq A \sqrt{\gamma} \left(\sum_{s,\tau} Q \right)^{1/2}, \quad (2.69)$$

где A_1, A_2, A — ограниченные постоянные, $\gamma = \max_{i,k} \{\omega_k^i, \gamma_k^i\}$. Так как $E^2(T) \geq 0$, то из (2.69) следует

$$\left(\sum_{s,\tau} Q \right)^{1/2} \leq A\sqrt{\gamma}. \quad (2.70)$$

Используя (2.39), (2.57), (2.59), (2.60), (2.63), (2.64), находим, что $\gamma = O(\tau + h)$, где $h = \max_i (\sqrt{g}/\sqrt{g_{ii}})$ — характерный линейный размер элемента s (максимальная длина дуги координатных кривых ξ^1, ξ^2 в элементе s).

Таким образом, в силу неотрицательности величины $\sum_{s,\tau} Q$ из неравенств (2.69), (2.70) имеем для величины $E^2(T)$ оценку

$$E^2(T) \leq A\sqrt{g} \left(\sum_{s,\tau} Q \right)^{1/2} \leq A^2\gamma.$$

Из этой оценки следует, что соответствующие любому t решения, найденные по изложенному выше алгоритму векторного расщепления, сходятся при $h, \tau \rightarrow 0$ к соответствующему этому же t точному решению.

Таким образом, аппроксимация неизвестных функций несколькими линейными полиномами позволила построить явные монотонные схемы решения плоской и осесимметричной двумерных задач динамической теории упругости с хорошими диссипативными свойствами. При этом максимально ослаблено допустимое шаблоном схемы ограничение на шаг интегрирования по времени. При условии диссипативности схемы приближенное решение сходится к точному в энергетической норме.

Глава 3

Итерационная процедура решения двумерных задач

Предложенные в предыдущей главе вычислительные алгоритмы решения двумерных задач динамической теории упругости — плоской и осесимметричной — представляют собой формулы пересчета решения с нижнего временного слоя на верхний слой и используют некоторые вспомогательные величины, требующие предварительного определения. Для вычисления этих величин сформулированы четыре одномерные задачи, каждая из которых вместе с соответствующими граничными условиями представляет собой замкнутую систему уравнений. Процедура их решения может быть различной. При некоторых значениях, входящих в систему параметров (констант диссипации), все неизвестные будут связаны друг с другом — в этом случае их можно определить с помощью метода прогонки, а разностная схема будет неявной в соответствующем направлении.

Однако константы диссипации можно выбрать и такими, что неизвестные с целочисленными индексами будут вычисляться с помощью формул, содержащих только известные значения с нижнего слоя по времени в соседних с данным узлом ячейках, и схема будет явной. В этом случае требование устойчивости схемы приводит к тому, что шаг по времени τ не может выбираться произвольно, а должен подчиняться ограничению сверху. Схема при этом обладает искусственной диссипацией, что сказывается на ее точности, в частности, разрывы, содержащиеся в решении, размазываются.

Если в одномерных задачах мы все же могли выбирать такое соотношение между шагом по пространству и шагом по времени, что диссипация обращалась в нуль и решение получалось точным, то в двумерном случае в рамках описанного в предыдущей главе подхода этого нельзя сделать принципиально.

Не следует думать, что сложности, связанные с ограничением на шаг по времени, исчезнут, если мы откажемся от использования явных схем и будем рассматривать схемы неявные. Опыт вычислений показывает, что хотя использование неявных схем, как правило, и позволяет снять жесткие ограничения на шаг по времени τ , вести счет с большими значениями τ все равно оказывается неприемлемым ввиду низкой точности получающегося решения. Кроме того, необходимые для устойчивости ограничения на константы диссипации обусловлены самой процедурой расщепления двумерной задачи на ряд одномерных, а не способом решения этих одномерных задач.

Конструкция предложенного в предыдущей главе алгоритма предполагает, что мощность искусственной диссипации представляет собой сумму квадратичных форм вида

$$\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (3.1)$$

где параметрами α и β мы, с одной стороны, можем распоряжаться, а с другой стороны, не можем выбрать их достаточно малыми, так как для неотрицательности этой формы (и, следовательно, для устойчивости схемы) они обязаны удовлетворять условиям

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha\beta \geq \tau^2.$$

Далее будет изложена процедура решения вспомогательных одномерных задач в два последовательных этапа, целью которой является если и не обратить в ноль, то сделать сколь угодно малым второе слагаемое в (3.1), после чего с помощью выбора α и β удастся регулировать величину искусственной диссипации.

3.1. Корректировка решения последовательными приближениями

Рассмотрим решение плоской двумерной задачи в декартовой системе координат. Пусть процедура ее численного решения остается в точности прежней вплоть до момента формулировки одномерных задач для определения величин с целочисленными индексами. Для упрощения конструкции алгоритма, формулируя одномерные задачи, будем выбирать константы диссипации самым простым способом: $\gamma_1 = \gamma_4$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, ... и т. д.

Напомним, что все четыре системы уравнений (2.22) вместе с соответствующими граничными условиями решались независимо друг от друга. Рассмотрим следующую процедуру их решения.

Сформулируем первые две задачи (содержащие производные по переменной x) точно так же, как в (2.22):

$$\begin{aligned} u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}, \\ \sigma'_{x0} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \\ v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} &= \frac{\omega}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}, \\ \tau'_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{\omega}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

и решим их. В результате мы определим u_j , v_j , σ_{xj} , τ_{xyj} , $j = 0, \dots, N$ и, следовательно, нам будут известны производные $\partial u'/\partial x = \frac{1}{h}(u_{j+1} - u_j)$, $\partial v'/\partial x = \frac{1}{h}(v_{j+1} - v_j)$, \dots и т. д. во всех ячейках плоской области.

При формулировке оставшихся двух задач в направлении y эти, уже известные нам, производные, могут быть включены в правые части:

$$\begin{aligned} v''_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho} \delta_1 \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}, \\ \sigma''_{y0} - \sigma_{yj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} + \tau \rho \theta c_p^2 \delta_2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \\ u''_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} &= \frac{\beta}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho} \delta_3 \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}, \\ \tau''_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} &= \frac{\beta}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} + \tau \rho c_s^2 \delta_4 \frac{\partial v'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 — неопределенные пока параметры. Подставляя (3.2), (3.3) в выражение для D (2.21), получаем

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left[\gamma \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 - 2\tau\theta(1 - \delta_2) \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v''}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left[\omega \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 - 2\tau(1 - \delta_4) \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial u''}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial u''}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2\rho} \left[\gamma \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \right)^2 - 2\tau(1 - \delta_3) \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2\rho} \left[\omega \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} \right)^2 - 2\tau(1 - \delta_1) \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

откуда видно, что если параметры $\delta_i = 1$ ($i = 1, \dots, 4$), то квадратичная форма D будет представлять собой сумму квадратов и ее неотрицательность обеспечивается только неотрицательностью констант $\gamma, \omega, \alpha, \beta$:

$$\gamma \geq 0, \quad \omega \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, устойчивость двумерной схемы будет полностью обеспечиваться устойчивостью одномерных задач, на которые она расщепляется. При этом одномерные схемы могут быть как явные, так и неявные.

Очевидно, что у алгоритма есть несимметрия. Мы могли бы с равным успехом решать сначала одномерные задачи в направлении y и добавлять в правые части систем уравнений по x члены, содержащие найденные производные по y .

Если в качестве метода решения одномерных задач выбрать явную схему, то при формулировке задач в виде (3.2), (3.3) параметры $\gamma, \omega, \alpha, \beta$ определяются однозначно:

$$\gamma = \frac{h_x}{c_p} - \tau, \quad \omega = \frac{h_x}{c_s} - \tau, \quad \alpha = \frac{h_y}{c_p} - \tau, \quad \beta = \frac{h_y}{c_s} - \tau, \quad (3.6)$$

и условия (3.5) приводят к ограничению на шаг τ

$$c_p \tau \leq h_x, \quad c_p \tau \leq h_y. \quad (3.7)$$

Описанный алгоритм допускает достаточно простую интерпретацию. Решая на первом этапе одномерные задачи (3.2), мы выполняем этап «предиктор» решения двух одномерных задач о распространении в направлении x плоских продольной и поперечной волн, описываемых системами уравнений

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \rho c_p^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.8)$$

и

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \rho c_s^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9)$$

с соответствующими краевыми условиями в каждой ячейке ω .

Системы (3.8), (3.9) получаются из системы уравнений плоской задачи (3.1) вычеркиванием членов, содержащих производные по y . На этапе «корректор» мы пересчитываем решение этих задач на следую-

щий временной слой по формулам

$$\begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h_x} (\sigma_{xj+1} - \sigma_{xj}), \\ \sigma_x^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \sigma_{xj+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h_x} \rho c_p^2 (u_{j+1} - u_j), \\ v^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h_x} (\tau_{xyj+1} - \tau_{xyj}), \\ \tau_{xy}^{j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} &= \tau_{xyj+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h_x} \rho c_s^2 (v_{j+1} - v_j). \end{aligned}$$

После этого «пересчитанные» значения мы используем в качестве начальных условий для решения двух одномерных задач распространения возмущений в направлении оси y :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \rho c_p^2 \frac{\partial v}{\partial y}$$

и

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \rho c_s^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

с необходимыми граничными условиями.

Этап расчета «больших» величин с целочисленными индексами для этих задач состоит в решении системы уравнений (3.3).

Описанную процедуру расщепления многомерной задачи на одномерные называют методом дробных шагов (одним из простейших его вариантов) [14, 97, 165] или методом суммарной аппроксимации [145].

Проиллюстрируем работоспособность рассмотренного алгоритма на примере тестовой двумерной задачи об ударном воздействии на плоскую область прямоугольной формы. Рассмотрим наиболее простую модель упругой среды — акустику ($c_s = 0$, $\theta = 1$). В этом случае для определения «больших» величин нам необходимо решать только две одномерные задачи (первые в (3.2) и (3.3)). В расчетной области целесообразно ввести квадратную сетку $h_x = h_y = h$, тогда для явной схемы $\alpha = \gamma = h/c_p - \tau$. Мощность искусственной диссипации D в этом случае равна

$$D = \gamma \left[\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial \sigma''}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right],$$

и, выбирая $c_p \tau = h$, мы можем сделать ее вообще нулевой.

Пусть начальные условия будут нулевыми: $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$, $\sigma(x, y, 0) = 0$, а граничные условия имеют вид:

$$\sigma|_{x=0} = 1, \quad \sigma|_{x=1} = 0, \quad \sigma|_{y=0} = 0, \quad \sigma|_{y=1} = 0.$$

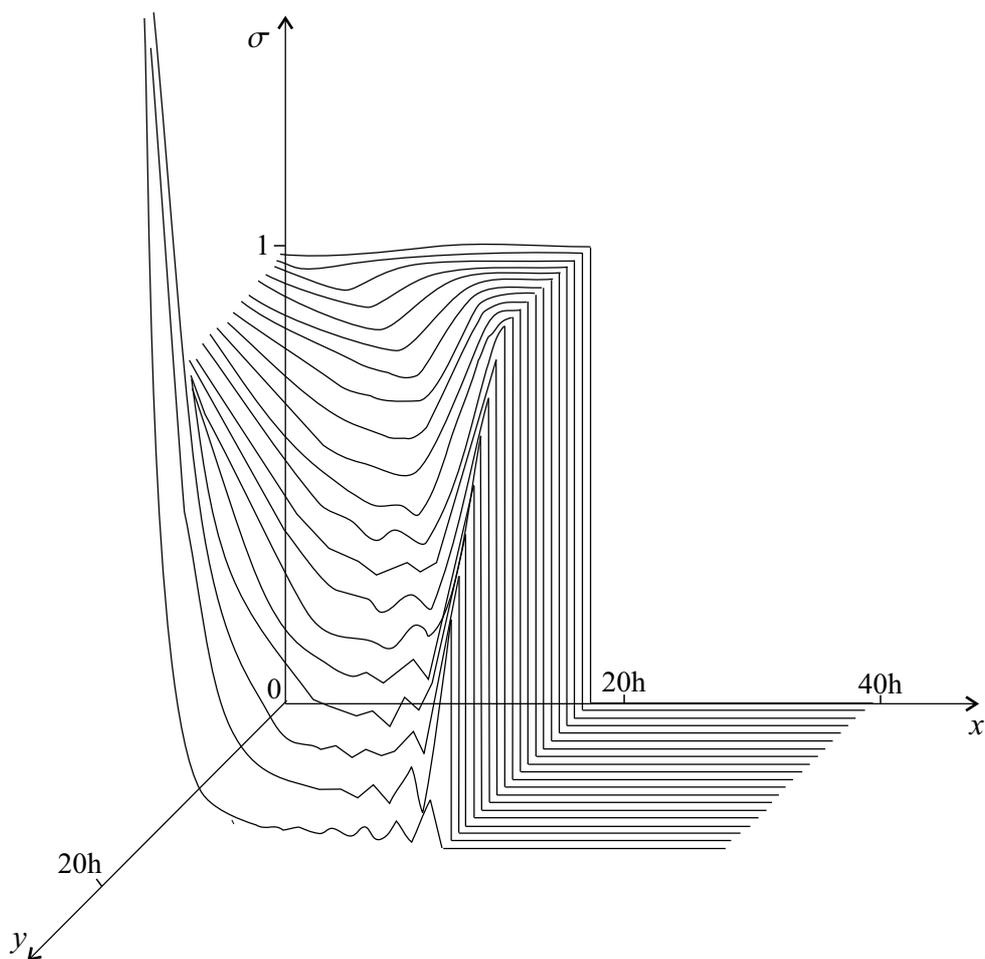


Рис. 3.1. Ударное воздействие на плоскую область: $R = 1,0$

Решение задачи для момента времени $t = 0,5$ при $c_p = 1$, $\rho = 1$, полученное на сетке 40×40 , приведено на рис. 3.1. С одной стороны, следует отметить, что численное решение точно описывает разрыв, с другой стороны, в решении, в окрестности угловой точки присутствует не имеющий никакого физического смысла «выброс» достаточно большой амплитуды (значение напряжения в угловой точке равно приблизительно восьми). Если в алгоритме мы поменяем последовательность решения одномерных задач, осцилляции вблизи угла будут такой же большой амплитуды, но поменяют знак.

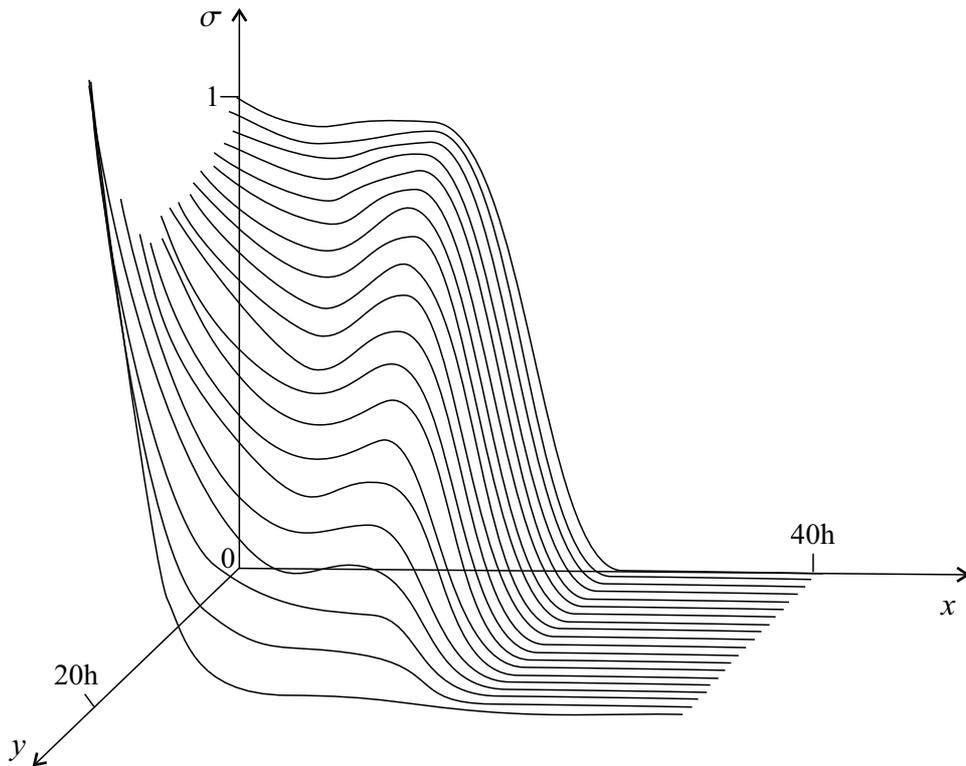


Рис. 3.2. Ударное воздействие на плоскую область: $R = 0,7$

Аналогичные эффекты при использовании этого алгоритма мы можем наблюдать и в других задачах в окрестностях точек разрыва граничных условий. Интересно отметить, что нефизичные «всплески» решения будут снижаться по мере уменьшения числа Куранта (решение этой же задачи для $R = 0,7$ приведено на рис. 3.2) и пропадут полностью только тогда, когда $\tau \leq h/2$, что в данном случае является ограничением на шаг τ в схеме Годунова.

3.2. Симметричный вариант расщепления

Можно ожидать, что численное решение будет монотонным (в данном случае под этим понимается отсутствие «паразитных выбросов»), если алгоритм будет обладать симметрией по направлениям x и y .

Предлагается следующая двухэтапная процедура вычисления величин с целочисленными индексами. На первом этапе любым способом (явным или неявным) решаются четыре одномерные задачи (2.22):

$$\begin{aligned}
u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}, \\
\sigma'_{x0} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \\
v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} &= \frac{\omega}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}, \\
\tau'_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{\omega}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x}, \\
v''_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2\rho} \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y}, \\
\sigma''_{y0} - \sigma_{yj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y}, \\
u''_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} &= \frac{\beta}{2\rho} \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y}, \\
\tau''_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} &= \frac{\beta}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

В результате в каждом элементарном прямоугольнике ω оказываются вычисленными производные, которые мы обозначим $\widetilde{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)}$, $\widetilde{\left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}\right)}$, $\widetilde{\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)}$, ... и т. д. После этого снова решаются четыре одномерные задачи, отличающиеся от (3.10) только добавками к правым частям или, что очевидно, только тем, что в качестве «начальных» данных в них фигурируют некоторые комбинации уже известных нам величин:

$$\begin{aligned}
u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho} \nu_1 \left(\widetilde{\left(\frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y}\right)} \right), \\
\sigma'_{x0} - \sigma_{xj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\gamma}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau \rho \theta c_p^2 \nu_2 \left(\widetilde{\left(\frac{\partial v''}{\partial y}\right)} \right), \\
v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} &= \frac{\omega}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho} \nu_3 \left(\widetilde{\left(\frac{\partial \sigma''_y}{\partial y}\right)} \right), \\
\tau'_{xy0} - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{\omega}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \tau \rho c_s^2 \nu_4 \left(\widetilde{\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)} \right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
v_0'' - v_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2\rho} \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho} \delta_1 \left(\widetilde{\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x}} \right), \\
\sigma_{y0}'' - \sigma_{yj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} &= \frac{\alpha}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial v''}{\partial y} + \tau \rho \theta c_p^2 \delta_2 \left(\widetilde{\frac{\partial u'}{\partial x}} \right), \\
u_0'' - u_{j+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} &= \frac{\beta}{2\rho} \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho} \delta_3 \left(\widetilde{\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x}} \right), \\
\tau_{xy0}'' - \tau_{xyj+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} &= \frac{\beta}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u''}{\partial y} + \tau \rho c_s^2 \delta_4 \left(\widetilde{\frac{\partial v'}{\partial x}} \right).
\end{aligned}$$

Мощность искусственной диссипации при этом имеет вид

$$\begin{aligned}
D = \frac{1}{2} \rho c_p^2 \left\{ \gamma \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 - \tau \theta \left[\frac{\partial v''}{\partial y} - 2\nu_2 \left(\widetilde{\frac{\partial v''}{\partial y}} \right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} - \right. \\
\left. - \tau \theta \left[\frac{\partial u'}{\partial x} - 2\delta_2 \left(\widetilde{\frac{\partial u'}{\partial x}} \right) \right] \frac{\partial v''}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
+ \frac{1}{2} \rho c_s^2 \left\{ \omega \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 - \tau \left[\frac{\partial u''}{\partial y} - 2\nu_4 \left(\widetilde{\frac{\partial u''}{\partial y}} \right) \right] \frac{\partial v'}{\partial x} - \right. \\
\left. - \tau \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - 2\delta_4 \left(\widetilde{\frac{\partial v'}{\partial x}} \right) \right] \frac{\partial u''}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial u''}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
+ \frac{1}{2\rho} \left\{ \gamma \left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} \right)^2 - \tau \left[\frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} - 2\nu_1 \left(\widetilde{\frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y}} \right) \right] \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} - \right. \\
\left. - \tau \left[\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} - 2\delta_3 \left(\widetilde{\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x}} \right) \right] \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
+ \frac{1}{2\rho} \left\{ \omega \left(\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} \right)^2 - \tau \left[\frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} - 2\nu_3 \left(\widetilde{\frac{\partial \sigma_y''}{\partial y}} \right) \right] \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} - \right. \\
\left. - \tau \left[\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} - 2\delta_1 \left(\widetilde{\frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x}} \right) \right] \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Алгоритм будет обладать необходимой симметрией, если $\nu_2 = \delta_2$, $\nu_4 = \delta_4$, $\nu_1 = \delta_3$, $\nu_3 = \delta_1$. Если в (3.12) нельзя оставить только квадраты производных, то ожидать, что смешанные произведения будут настолько малыми, что знак квадратичной формы будет определяться только

знаком параметров γ , ω , α , β , можно, по крайней мере, тогда, когда $\nu_i = 1/2$, $\delta_i = 1/2$, $i = 1, \dots, 4$. Действительно, в этом случае в (3.12) присутствуют разности вида $\widehat{\partial u' / \partial x} - \widehat{\partial u' / \partial x}$, ... и т. д., где $\widehat{\partial u' / \partial x}$ и $\widetilde{\partial u' / \partial x}$ — решения одной и той же линейной задачи, но с входными данными, отличающимися друг от друга на величину порядка h . Отсюда следует, что разность производных — величина, имеющая, по крайней мере, порядок h^2 , и если есть сходимость приближенного решения к точному, то для достаточно малых h члены, содержащие квадраты производных, будучи на порядок больше, определяют знак D .

По аналогии с представлением метода в предыдущем параграфе как варианта метода дробных шагов настоящему алгоритму также можно дать подобную интерпретацию. Мы получаем решения одномерных (факторизованных) задач типа (3.8), (3.9) на среднем слое по времени $\tau/2$ и используем их в качестве начальных условий для последующего решения этих же задач еще на шаг $\tau/2$.

Вообще говоря, значение диссипации D в отдельной ячейке ω в данном алгоритме может быть и отрицательным. В этом можно непосредственно убедиться, выбрав определенные значения начальных либо граничных условий. Однако отсюда еще не следует, что при этом мы получаем неустойчивую схему вычисления. Для доказательства устойчивости и сходимости метода нам требуется неотрицательность суммарной искусственной диссипации по всем элементарным ячейкам ω на каждом временном слое, что в предыдущих алгоритмах заведомо обеспечивалось неотрицательностью D в каждой ячейке ω . Оказывается, такая «суммарная диссипативность» имеет место для рассмотренного алгоритма, что и будет показано дальше.

Численное решение на основе предложенного алгоритма рассмотренной в предыдущем параграфе задачи для системы уравнений двумерной акустики (рис. 3.3) показывает, что схема точно описывает разрыв и в то же время не привносит в решение немонотонность.

На рис. 3.4 приведено решение аналогичной задачи для случая однородной упругой среды: $c_s/c_p = 1/2$, $\rho c_p = 1$. Начальные условия в плоской области $0 \leq x \leq 1$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$ выбирались нулевыми. К торцу $x = 0$ приложено нормальное напряжение ударного типа $\sigma_x|_{x=0} = 1$, $\tau_{xy}|_{x=0} = 0$, остальная поверхность свободна от напряжений:

$$\sigma_x|_{x=1} = \tau_{xy}|_{x=1} = \sigma_y|_{y=-1/2} = \tau_{xy}|_{y=-1/2} = \sigma_y|_{y=1/2} = \tau_{xy}|_{y=1/2} = 0.$$

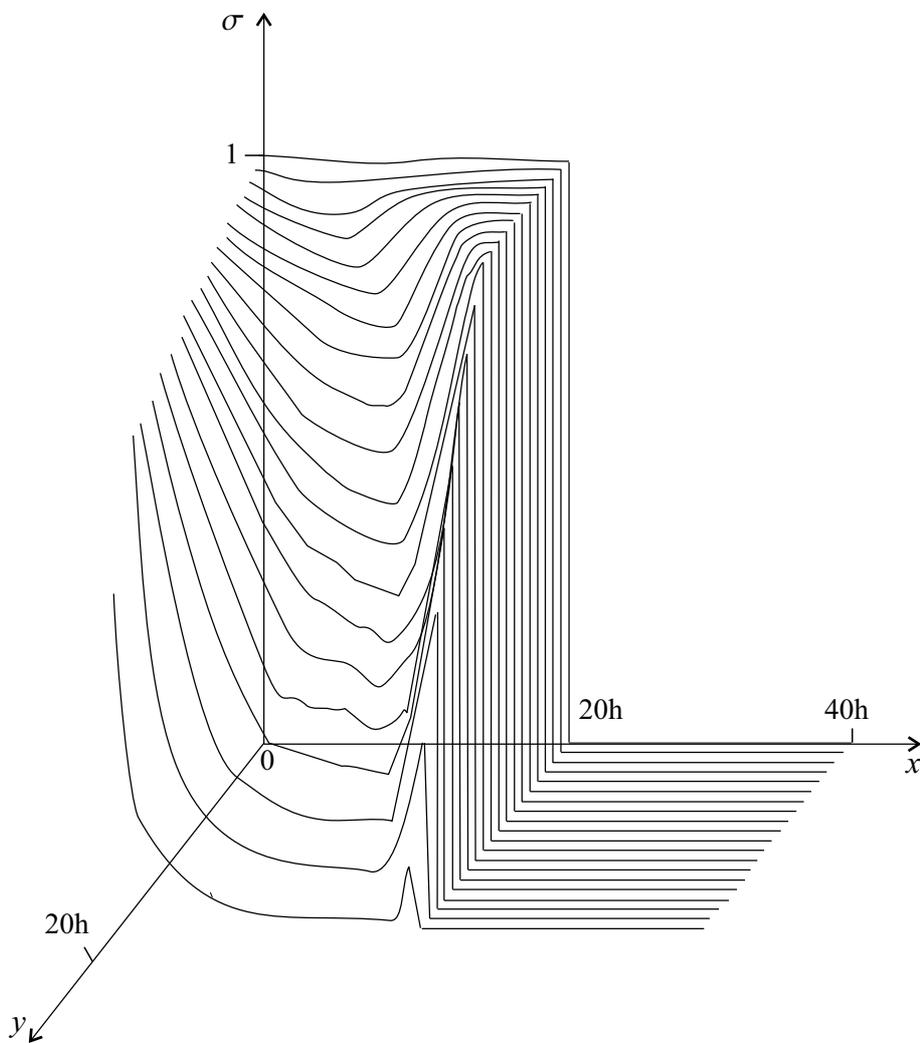


Рис. 3.3. Численное решение задачи для системы уравнений двумерной акустики

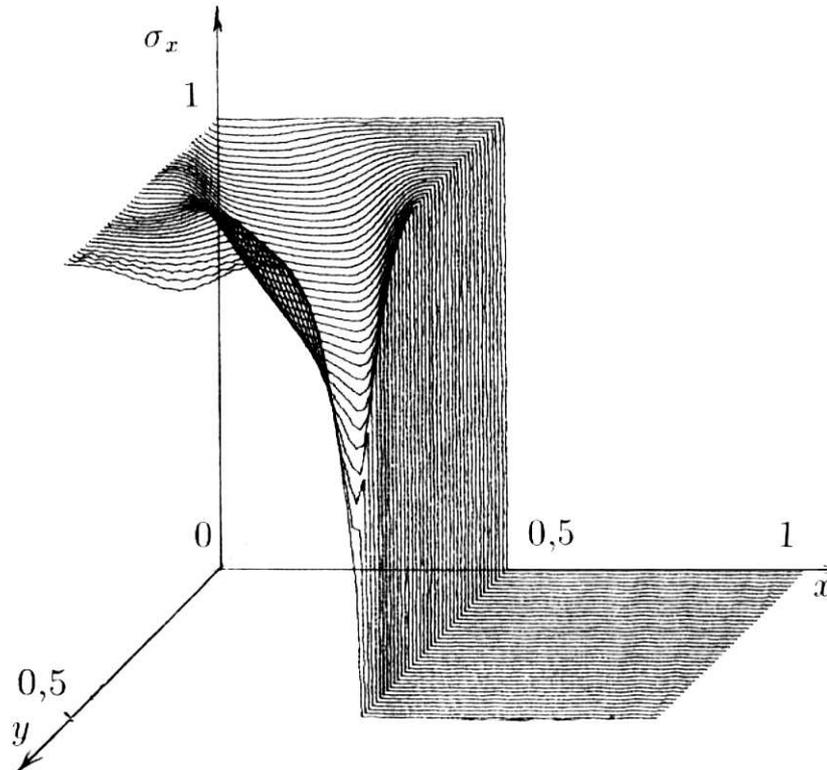


Рис. 3.4. Численное решение задачи для системы уравнений двумерной акустики: однородная упругая среда

Поверхность $\sigma_x(x, y)$ приведена на момент времени $t = 1/2c_p$ в половине области (до оси симметрии $y = 0$). Расчет выполнялся по явной схеме (3.6) на квадратной сетке $h_x = h_y = h$ размером 40×40 с $\tau = h/c_p$. В этом случае $\gamma = \alpha = 0$, $\omega = \beta = \tau$, т. е. на продольных волнах диссипация отсутствует.

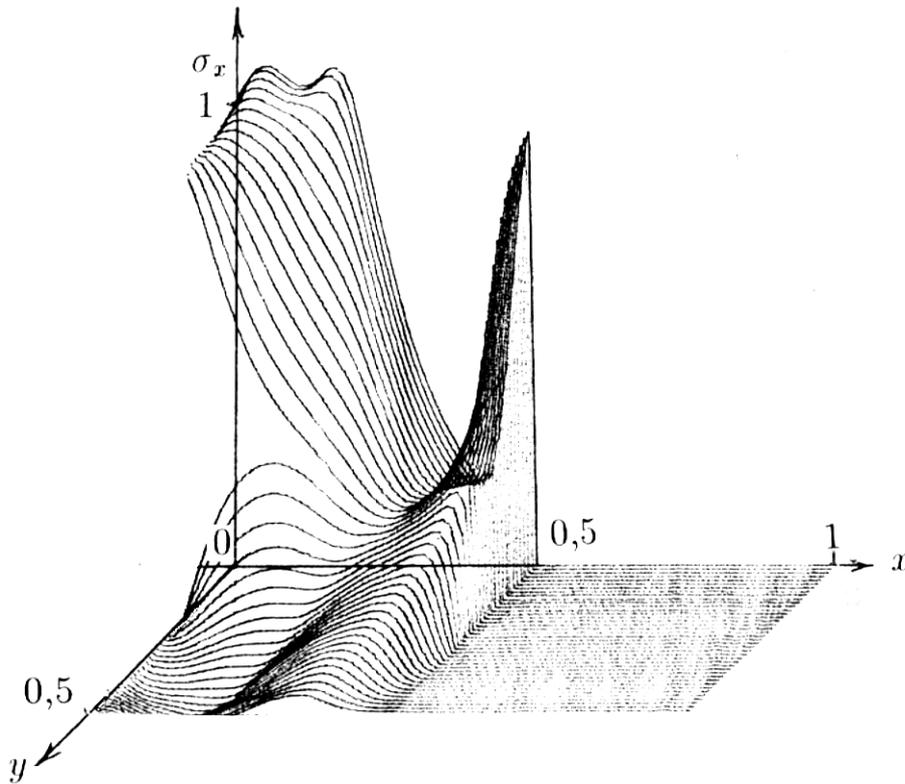


Рис. 3.5. Численное решение задачи для системы уравнений двумерной акустики: однородная упругая среда, нормальное напряжение приложено только на части границы

При тех же значениях параметров получено решение (рис. 3.5) для случая, когда нормальное напряжение прикладывается только на части границы $x = 0$:

$$\sigma_x|_{x=0} = \begin{cases} 1 & |y| \leq a, \\ 0 & |y| > a. \end{cases}$$

Здесь $a = 0,1$ (8 ячеек).

Предложенный алгоритм достаточно эффективен и для задач с внутренними границами. Для примера рассмотрим напряженное состояние, возникающее в однородной упругой пластине с коротким внутренним разрезом (рис. 3.6), в результате действия растягивающей нагрузки ударного типа перпендикулярно к направлению разреза. Задача моделирует эффект разрушения квазислоистого материала ($y = 0$ — линия склейки полос из одного и того же металла) при экспериментах на ударное растяжение при наличии дефекта склейки.

Расчет ведется для одной симметричной половины прямоугольника ($0 \leq x \leq 80h$, $0 \leq y \leq 40h$) на сетке 80×40 . При $y = 0$ вне разреза ($0 \leq x \leq 15h$, $20h \leq x \leq 80h$) выполнены условия симметрии: $v|_{y=0} = \tau_{xy}|_{y=0}$. Считая, что смещения на берегах разреза меньше его ширины, контактное условие заменяем условием на свободной поверхности: $\sigma_y|_{y=0} = \tau_{xy}|_{y=0} = 0$, когда $15h \leq x \leq 20h$.

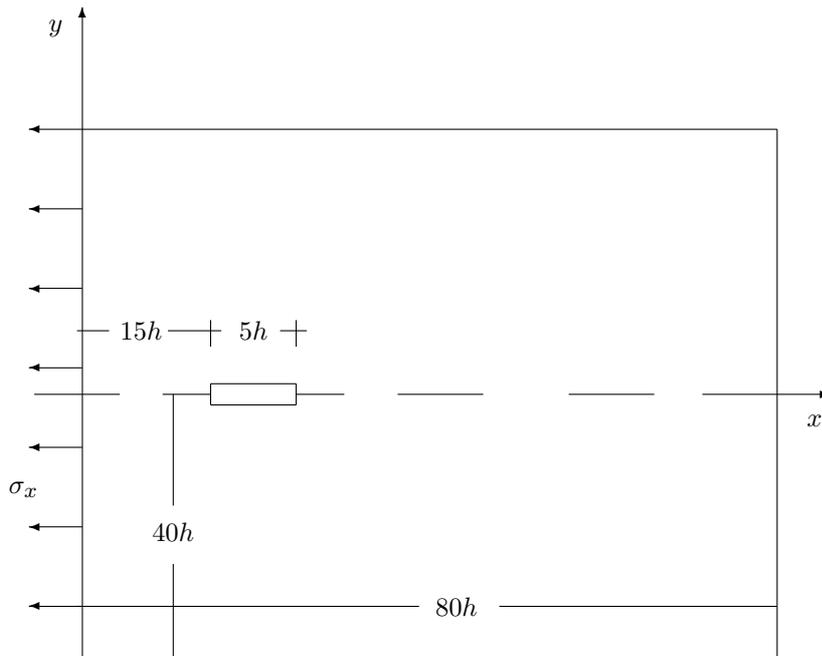


Рис. 3.6. Однородная упругая пластинка с внутренним разрезом

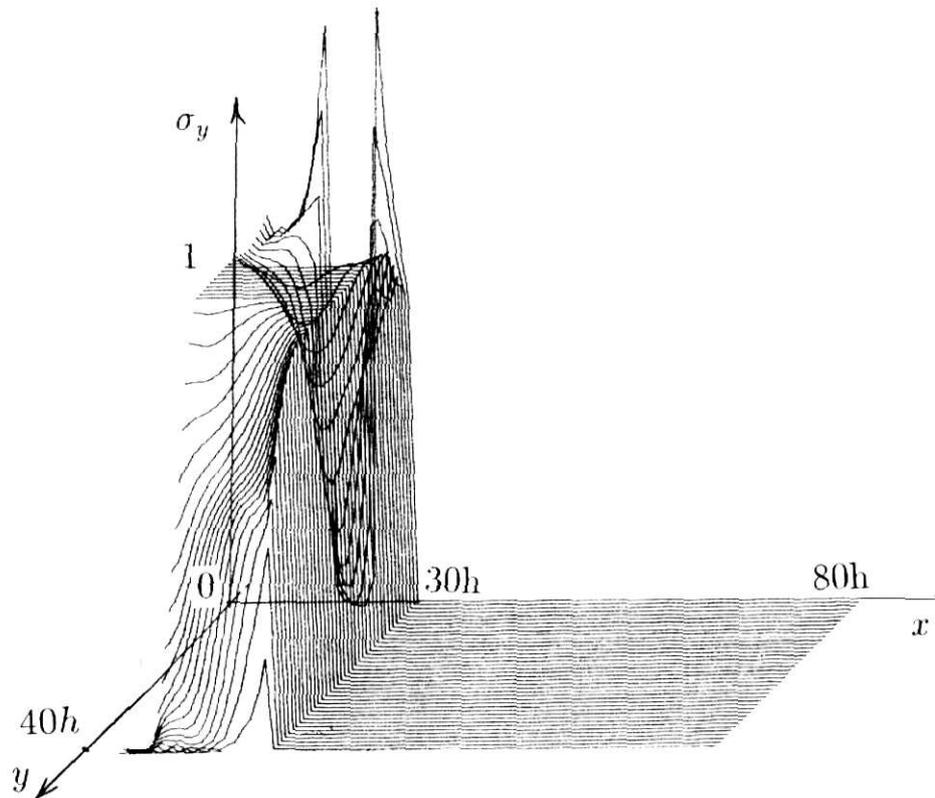


Рис. 3.7. Растягивающее напряжение σ_y в образце при ударном воздействии

На рис. 3.7 приведено растягивающее напряжение σ_y , возникающее в образце, на момент времени $t = 30h$. Параметры схемы приняты такими: $\tau = h$, $\rho = 1$, $c_p = 2c_s = 1$. Следует отметить высокую концентрацию растягивающих напряжений σ_y в окрестности концов разреза, которая несомненно способствует дальнейшему его раскрытию.

Никаких побочных, нефизичных эффектов алгоритм в решение не привносит. В этом можно убедиться, произведя расчет сформулированной задачи по схеме Годунова. Качественно картина деформирования будет в точности такой же, однако пики напряжений вблизи концов трещины значительно размазываются.

3.3. Решение задач для областей, составленных из произвольных четырёхугольников. Диссипативность приближенных решений

Обобщим процедуру последовательных приближений решения одномерных задач на случай областей сложной геометрической формы и получим условия диссипативности алгоритма для области в целом.

Воспользуемся обозначениями, введенными в главе 2. Далее все основные величины \vec{u}_i, \vec{p}_i , относящиеся к решению одномерных задач первого приближения (2.55), будут отмечаться одной звездочкой (*).

Аналогично тому, как это делалось выше, на втором этапе построения дополнительных уравнений для определения полиномов \vec{u}_i, \vec{p}_i с использованием решения уравнений первого приближения (2.55) в качестве одномерных задач второго приближения принимаем:

$$\int_{\omega} \left(\vec{u}_i^{**} - \vec{u}_i^* - \frac{\tau}{2\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \vec{p}_i^{**}}{\partial \xi^i} \right) d\omega = \int_{\omega} \frac{1}{2\rho\sqrt{g}} \left(X_i \frac{\partial \vec{p}_i^{**}}{\partial \xi^i} + \tau \sum_{n \neq i} \frac{\partial \vec{p}_n^*}{\partial \xi^n} \right) d\omega, \quad (3.13)$$

$$\int_{\omega} \left(\vec{p}_i^{**} - \vec{p}_i^* - \frac{\tau}{2} A_i^i \frac{\partial \vec{u}_i^{**}}{\partial \xi^i} \right) d\omega = \int_{\omega} \frac{1}{2} \left(Y_i \frac{\partial \vec{u}_i^{**}}{\partial \xi^i} + \tau \sum_{n \neq i} A_n^i \frac{\partial \vec{u}_n^*}{\partial \xi^n} \right) d\omega,$$

где $i = 1, 2$. В (3.13) и ниже все основные величины, соответствующие второму приближению, отмечены двумя звездочками.

Нетрудно заметить, что в отличие от одномерных задач (2.55), в которых вычисляются значения \vec{u}_1^*, \vec{p}_1^* ($\xi^1 = \pm 1$) и \vec{u}_2^*, \vec{p}_2^* ($\xi^2 = \pm 1$) независимо друг от друга, решение одномерной задачи второго приближения по каждой из координат ξ^i зависит от решения одномерной задачи первого приближения по «противоположной» координате ξ^n ($n \neq i, n = 1, 2$).

Учитывая, что полиномы $\vec{u}_i^{**}, \vec{p}_i^{**}$ удовлетворяют уравнениям (2.51), найдем выражение для величины Q в энергетическом равенстве (2.53) в случае решения одномерных задач второго приближения (3.13):

$$Q^{**} = Q_1^{**} + Q_2^{**} + R, \quad R = R_1 + R_2, \quad (3.14)$$

где

$$Q_1^{**} = \int_{\omega} \frac{1}{2\rho\sqrt{g}} X_i \frac{\partial \vec{p}_i^{**}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{p}_i^{**}}{\partial \xi^i} d\omega, \quad Q_2^{**} = \int_{\omega} \frac{1}{2} Y_i \frac{\partial \vec{u}_i^{**}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{u}_i^{**}}{\partial \xi^i} d\omega, \quad (3.15)$$

$$R_1 = \int_{\omega} \frac{\tau}{2\rho\sqrt{g}} \sum_{n \neq i} \frac{\partial}{\partial \xi^n} (\vec{p}_n^* - \vec{p}_n^{**}) \frac{\partial \vec{p}_i^{**}}{\partial \xi^i} d\omega,$$

$$R_2 = \int_{\omega} \frac{\tau}{2} \sum_{n \neq i} A_n^i \frac{\partial}{\partial \xi^n} (\vec{u}_n^* - \vec{u}_n^{**}) \frac{\partial \vec{u}_i^{**}}{\partial \xi^i} d\omega.$$

Для получения условий диссипативности одномерных задач второго приближения ($Q^{**} \geq 0$) оценим величину R в правой части равенства (3.14). Используя (2.51), (2.55), (3.13), находим, что разности \hat{u}_i , \hat{p}_i между решениями одномерных задач второго и первого приближений удовлетворяют следующему энергетическому равенству:

$$\tilde{K} + \tilde{P} + \tilde{Q} - R = \tilde{A}, \quad (3.16)$$

где

$$\tilde{A} = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\hat{u}_i \hat{p}_i) d\omega, \quad \tilde{K} = \int_{\omega} \frac{\tau}{2\rho\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \xi_2} \right)^2 d\omega,$$

$$\tilde{P} = \int_{\omega} \frac{\tau}{2} \left(A_1^1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_1} - 2 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \xi_1} A_2^1 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_2} + A_2^2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi_2} \right) d\omega, \quad (3.17)$$

$$\tilde{Q} = \int_{\omega} \left(\frac{1}{2\rho\sqrt{g}} X_i \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} Y_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_i} \right) d\omega.$$

Так как полиномы \hat{u}_i , \hat{p}_i удовлетворяют граничным условиям (2.52) с нулевой правой частью, то в силу свойств (2.44) коэффициентов граничных условий B_{ij}^{\pm} справедливо неравенство

$$\tilde{A} \leq 0. \quad (3.18)$$

Учитывая неотрицательную определенность квадратичных форм \tilde{K} и \tilde{P} (что следует из (2.45), (2.48)), из (3.16)–(3.18) находим оценку снизу для величины R в (3.14):

$$R \geq \tilde{Q}. \quad (3.19)$$

В случае выполнения условий

$$\omega_k^i \geq 0, \quad \gamma_k^i \geq 0 \quad (3.20)$$

матрицы констант диссипации X_i , Y_i (2.58) неотрицательно определены, что означает неотрицательную определенность квадратичных форм Q_1^{**} , Q_2^{**} в (3.15) и квадратичной формы \tilde{Q} в (3.17). Таким образом, из (3.14), (3.19) следует, что условия на константы диссипации (3.20) гарантируют диссипативность (устойчивость в энергетической норме) решения одномерных задач второго приближения, так как их выполнение

является достаточным для неотрицательности величины Q^{**} . Если для определения полиномов \vec{u}_i, \vec{p}_i используются только одномерные задачи первого приближения (2.55), требование неотрицательности величин Q_1^*, Q_2^* в (2.56) накладывает более жесткие ограничения (2.59), (2.60) на константы диссипации, чем условия (3.20).

Отметим, что при выводе условий (3.20) неотрицательности диссипации Q^{**} существенным оказался тот факт, что решения одномерных задач как первого, так и второго приближения удовлетворяют одинаковым граничным условиям (2.52). Следовательно, в отличие от алгоритма, рассмотренного в предыдущей главе, в котором условия (2.59), (2.60) гарантировали неотрицательность диссипации в каждом элементе расчетной области, условия (3.20) гарантируют «суммарную» диссипативность приближенного решения (т. е. диссипативность для области в целом). Очевидно, что это обстоятельство несколько не усложняет процедуру доказательства устойчивости и сходимости приближенных решений с использованием энергетической нормы, введенной в главе 2.

Процедура вычисления приближенного решения плоской динамической задачи теории упругости в элементарном четырехугольнике s включает в себя следующие этапы:

- определение полиномов \vec{u}_i^*, \vec{p}_i^* из алгебраических систем уравнений (2.52), (2.55);
- вычисление коэффициентов полиномов $\vec{u}_i^{**}, \vec{p}_i^{**}$ на основе решения одномерных задач второго приближения (3.13) совместно с граничными условиями (2.52);
- определение полиномов (2.49) по уравнениям (2.51) и начальным условиям (2.41).

Остановимся более подробно на втором этапе вычисления приближенного решения. Аналогично задачам первого приближения, решение задач второго приближения (3.13) сводится к решению одномерных задач типа (2.61), в которых правые части $\vec{f}_{k+\frac{1}{2}}, \vec{g}_{k+\frac{1}{2}}$ являются известными функциями начальных данных (основных величин с нижнего слоя по времени) и коэффициентов полиномов \vec{u}_i^*, \vec{p}_i^* , определенных на первом этапе.

В случае выполнения условий (2.63) решения одномерных задач второго приближения находятся по явным формулам. Неравенства

(3.20) и условия (2.63) налагают ограничение на шаг по времени при вычислении одномерных задач (3.13) по явной схеме:

$$\tau \leq \min_{s \in G} \min_{i,k} 2 \sqrt{\frac{\rho \sqrt{g}}{\lambda_k^i}}. \quad (3.21)$$

Таким образом, из сравнения условий (2.64) и (3.21) следует, что использование второго приближения при решении одномерных задач по явной схеме позволяет увеличить максимальное значение шага интегрирования по времени τ в 2 раза.

Для областей, допускающих разбиение на прямоугольные элементы, построенный алгоритм полностью совпадает с изложенным выше симметричным вариантом расщепления, а ограничения (3.21) переходят в условия устойчивости (3.7). Как уже отмечалось, максимальный шаг интегрирования по времени (для случая квадратной сетки), определяемый условиями устойчивости (3.7), соответственно в 2 и в $\sqrt{2}$ раз превышает аналогичные параметры для схемы Годунова и схемы с оптимальным выбором констант диссипации (2.30).

Заметим, что уравнения явной схемы решения задач второго приближения в случае, когда двумерная задача теории упругости вырождается в одномерную, совпадают с уравнениями решения одномерных задач по схеме Годунова. При этом изменение шага τ в области устойчивости, определяемой условием (3.21), гарантирует монотонность численных решений, а использование максимального значения τ позволяет получать решения с нулевой диссипацией.

В заключение кратко остановимся на сравнении эффективности построенного в данном параграфе алгоритма второго приближения и алгоритмов и схем первого приближения, рассмотренных в предыдущей главе. Заметим, что корректное сопоставление различных методов и схем должно быть основано, в первую очередь, на сравнительном анализе приближенных решений, получаемых при одинаковых затратах вычислительных ресурсов. Нетрудно установить, что число арифметических операций, необходимых для вычисления решения в одном элементе сетки (на каждом шаге по времени) при помощи алгоритма второго приближения, не более чем в полтора раза превышает аналогичное число операций для схемы (2.19), (2.22), (2.24) Годунова и для схемы (2.19), (2.22) с оптимальным выбором констант диссипации по формулам (2.30). Однако при этом надо иметь в виду, что максимально допустимый шаг интегрирования по времени (в случае квадратной сетки) для алгоритма второго приближения соответственно в 2 раза и в $\sqrt{2}$

раз больше, чем в указанных схемах первого приближения. Увеличение шага τ не только пропорционально сокращает реальное время расчета, но и приводит к уменьшению величины искусственной диссипации, позволяя получать более качественное описание разрывных решений.

В работе [7] на примере задачи о динамическом деформировании прямоугольной пластины (решение аналогичной задачи см. на рис. 3.4) проведено сравнение приближенных решений, полученных в некоторый фиксированный момент времени при помощи обсуждаемых алгоритмов. Показано, что для построения решения (фронта волны нагружения) по схеме Годунова, качественно соответствующего решению по схеме (2.19), (2.22), (2.30), необходимо увеличить число элементов сетки в 4 раза. Аналогично последовательность решений, полученных путем измельчения сетки по схеме (2.19), (2.22), (2.30), приближается к решению, построенному по алгоритму второго приближения. Затраты времени при построении решений по схеме (2.30) и алгоритму второго приближения примерно в 10 раз меньше по сравнению с затратами на решение по схеме Годунова, полученное на сетке с измельчением в 4 раза.

Приведенные результаты и анализ других численных расчетов показывают, что при равных затратах вычислительных ресурсов построенный в данном параграфе алгоритм второго приближения дает лучшее описание разрывных решений задач динамического деформирования, сохраняя при этом важное свойство монотонности численных решений.

3.4. Двухэтапная процедура решения осесимметричной задачи

Как и в плоском случае, сохраним процедуру построения схемы решения двумерной осесимметричной задачи в точности такой же, что и в разделе 2.3, до момента формулировки одномерных задач.

Запишем эти четыре задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{11}^0 - r\sigma_r^* - \frac{r\tau}{2}\rho c_p^2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} - \frac{\theta\tau}{2}\rho c_p^2 u_r'' &= -\frac{\tau^2\theta}{4r} \frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \\ &+ \frac{r}{2}\gamma\rho c_p^2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\tau^2\theta}{4r}\sigma_\varphi'' + r\theta\tau\rho c_p^2 \nu \frac{\partial \widetilde{u}_{22}}{\partial z}, \\ u_{11}^0 - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial r} + \frac{\tau}{2r\rho}\sigma_\varphi'' - u_r^* &= \frac{\tau^2\theta}{4r} \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{\tau}{r\rho} \nu \frac{\partial \widetilde{t}_{12}}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^* + \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial r} - \frac{\tau}{2r\rho} \sigma_\varphi'' - u_r'' &= -\frac{\tau^2 \theta}{4r} \frac{\partial u_{11}}{\partial r} - \frac{\tau}{r\rho} \nu \frac{\widetilde{\partial t_{12}}}{\partial z}, \\
\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^* - \frac{\theta\tau}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u_{11}}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} \rho c_p^2 u_r'' &= \theta\tau \rho c_p^2 \nu \frac{\widetilde{\partial u_{22}}}{\partial z}, \\
t_{21}^0 - r\tau_{rz}^* - \frac{\tau r}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u_{21}}{\partial r} &= \frac{r\omega}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u_{21}}{\partial r} + r\tau\nu\rho c_s^2 \frac{\widetilde{\partial u_{12}}}{\partial z}, \\
u_{21}^0 - u_z^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{21}}{\partial r} &= \frac{\omega}{2r\rho} \frac{\partial t_{21}}{\partial r} + \frac{\tau}{r\rho} \nu \frac{\widetilde{\partial t_{22}}}{\partial z}, \\
t_{22}^0 - r\sigma_z^* - \frac{\tau r}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u_{22}}{\partial z} &= \frac{r\alpha}{2} \rho c_p^2 \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + r\tau\theta\delta\rho c_p^2 \frac{\widetilde{\partial u_{11}}}{\partial r} + \\
&\quad + \tau\theta\delta\rho c_p^2 u_r'', \\
u_{22}^0 - u_z^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} &= \frac{\alpha}{2r\rho} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} + \frac{\tau}{r\rho} \delta \frac{\widetilde{\partial t_{21}}}{\partial r}, \\
t_{12}^0 - r\tau_{rz}^* - \frac{\tau r}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u_{12}}{\partial z} &= \frac{r\beta}{2} \rho c_s^2 \frac{\partial u_{12}}{\partial z} + r\tau\delta\rho c_s^2 \frac{\widetilde{\partial u_{21}}}{\partial r}, \\
u_{12}^0 - u_r^* - \frac{\tau}{2r\rho} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} &= \frac{\beta}{2r\rho} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} + \frac{\tau}{r\rho} \delta \frac{\widetilde{\partial t_{11}}}{\partial r} - \frac{\tau}{r\rho} \delta \widetilde{\sigma_\varphi''}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

На первом этапе решения одномерных задач (3.22) мы принимаем равными нулю параметры ν и δ (т. е. слагаемые, помеченные тильдой, отсутствуют). Вычисленные в результате решения производные и константы σ_φ'' и u_r'' мы помечаем тильдой и снова решаем четыре задачи (3.22), где значения параметров ν и δ принимаем, как и в случае плоской задачи, равными $1/2$.

Мощность искусственной диссипации схемы в этом случае равна

$$\begin{aligned}
D &= \frac{r}{2} \rho c_p^2 \left\{ \gamma \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau\theta \left[\frac{\partial u_{11}}{\partial r} \frac{\partial u_{22}}{\partial z} - \nu \frac{\partial u_{11}}{\partial r} \left(\frac{\widetilde{\partial u_{22}}}{\partial z} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \left(\frac{\widetilde{\partial u_{11}}}{\partial r} \right) \right] + \alpha \left(\frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2r\rho} \left\{ \beta \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial z} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 2\tau \left[\frac{\partial t_{11}}{\partial r} \frac{\partial t_{12}}{\partial z} - \nu \frac{\partial t_{11}}{\partial r} \left(\frac{\widetilde{\partial t_{12}}}{\partial z} \right) - \delta \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \left(\frac{\widetilde{\partial t_{11}}}{\partial r} \right) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{\tau}{r\rho} \left[\frac{\partial t_{12}}{\partial z} \sigma_\varphi'' - \nu \left(\frac{\widetilde{\partial t_{12}}}{\partial z} \right) \sigma_\varphi'' - \delta \frac{\partial t_{12}}{\partial z} \left(\widetilde{\sigma_\varphi''} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tau\theta\rho c_p^2 \left[\frac{\partial u_{22}}{\partial z} u_r'' - \nu \left(\frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right) u_r'' - \delta \frac{\partial u_{22}}{\partial z} (\widetilde{u_r''}) \right] + \\
& + \frac{r}{2} \rho c_s^2 \left\{ \omega \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right)^2 - 2\tau \left[\frac{\partial u_{21}}{\partial r} \frac{\partial u_{12}}{\partial z} - \nu \frac{\partial u_{21}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \delta \frac{\partial u_{12}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial r} \right) \right] + \beta \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2r\rho} \left\{ \omega \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial r} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2\tau \left[\frac{\partial t_{21}}{\partial r} \frac{\partial t_{22}}{\partial z} - \nu \frac{\partial t_{21}}{\partial r} \left(\frac{\partial t_{22}}{\partial z} \right) - \delta \frac{\partial t_{22}}{\partial z} \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial r} \right) \right] + \alpha \left(\frac{\partial t_{22}}{\partial z} \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

а слагаемые, заключенные в квадратные скобки, в случае, если имеет место сходимость приближенного решения к точному, имеют более высокий порядок малости по h по сравнению с оставшимися квадратами производных в соответствующих фигурных скобках.

Наиболее простой вариант решения задач (3.22) — явная по всем направлениям схема:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{h_r}{c_s} - \tau, \quad \alpha = \frac{h_z}{c_p} - \tau, \quad \beta = \frac{h_z}{c_s} - \tau, \\
\gamma &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{h_r^2}{c_p^2} \left(1 + \frac{c_p^2 \tau^2}{4r^2} \right) - \tau^2 \left(1 + \frac{c_p^2 \tau^2 \theta^2}{4r^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

которая устойчива в случае

$$\tau \leq \frac{h_r}{c_p}, \quad \tau \leq \frac{h_z}{c_s}.$$

После определения производных в результате решения (3.22) неизвестные функции пересчитываются на верхний временной слой по формулам (2.34).

В качестве примера рассмотрим задачу о динамическом деформировании упругого кругового цилиндра длины L и радиуса R . В начальный момент времени ($t = 0$) цилиндр не деформирован и покоится. Боковая поверхность цилиндра и верхний торец свободны от напряжений:

$$\sigma_r = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad \sigma_r = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = L.$$

На торце $z = 0$ в момент времени $t = 0$ задана скорость $u_z = 1$ и поддерживается таковой все время.

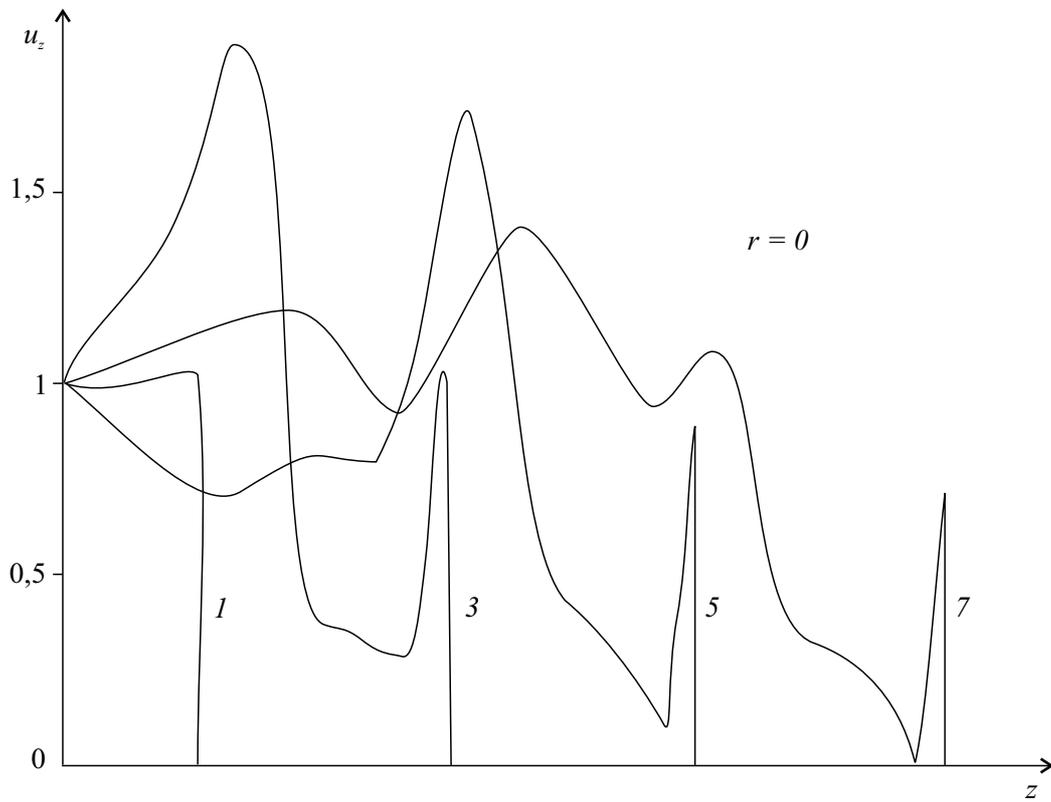


Рис. 3.8. Распространение упругой волны по длинному цилиндру

На рис. 3.8 показано изменение продольной компоненты скорости u_z по z в центре $r = 0$ цилиндра для различных моментов времени t . Сетка выбрана квадратной $h_r = h_z = h$. Радиус разбит на 16 равных частей. Цифры у кривых означают число пробегов продольной упругой волны по радиусу, $c_p = 2c_s$.

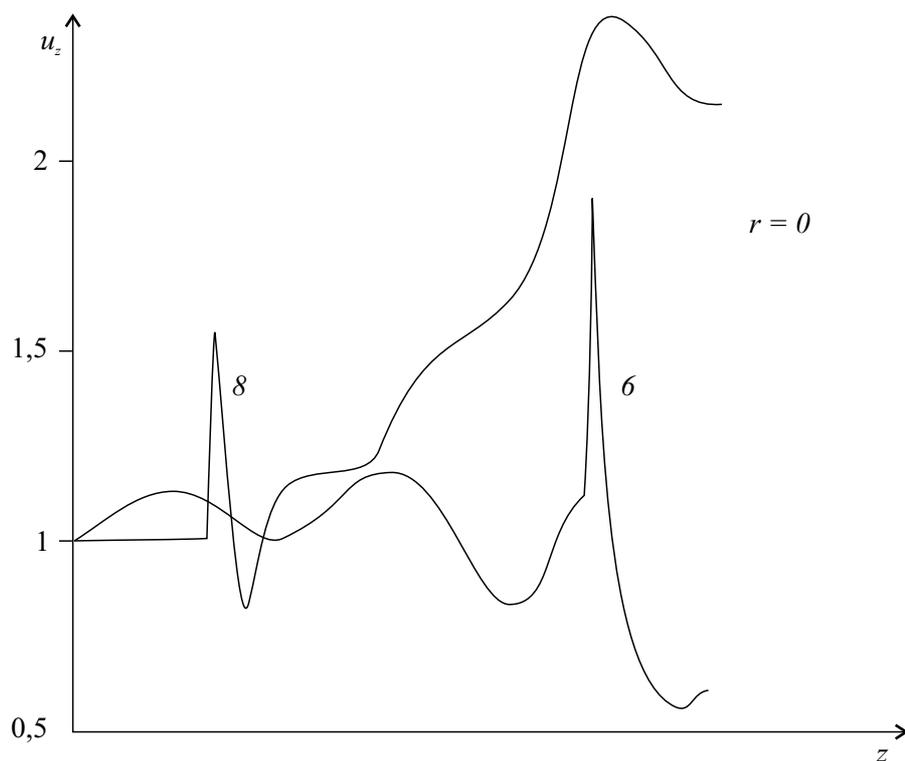


Рис. 3.9. Распространение упругой волны в цилиндре конечной длины

Решение той же задачи для цилиндра конечной длины, равной пяти радиусам, приведено на рис. 3.9. В такой постановке задача рассматривалась В. Н. Кукуджановым [109] и решалась предложенным в работе [107] алгоритмом, основанном на методе характеристик. Следует отметить, что результаты, приведенные в [109] и полученные по предложенной схеме, практически совпадают.

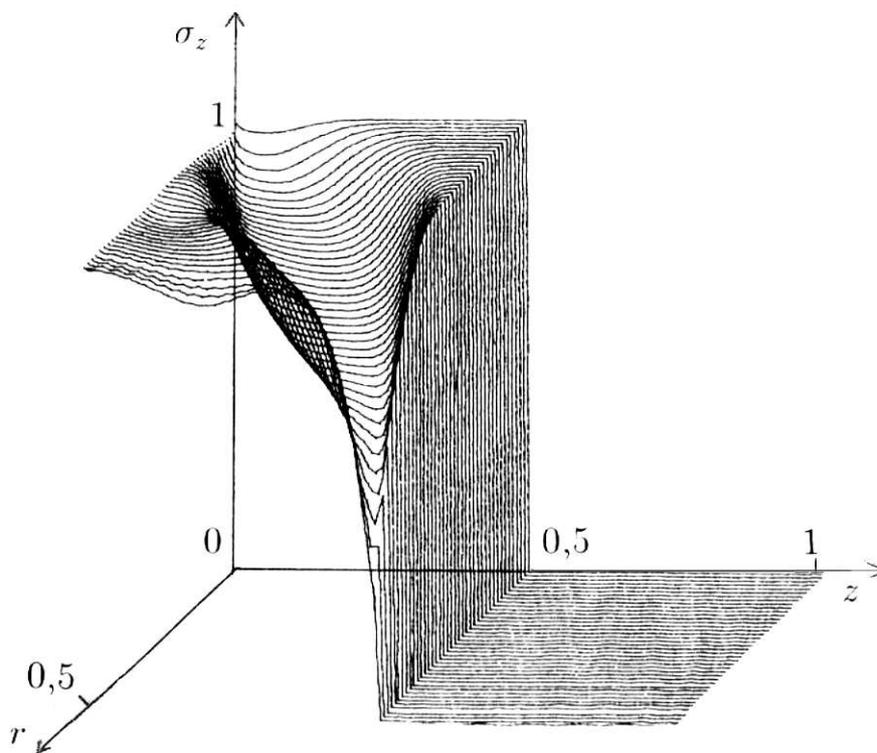


Рис. 3.10. Динамическое деформирование упругого кругового цилиндра: изопроекция поверхности $\sigma_z = \sigma_z(r, z)$

На рис. 3.10 решение той же задачи на момент времени, соответствующий одному пробегу ударной волны, изображено в виде изопроекции поверхности $\sigma_z = \sigma_z(r, z)$.

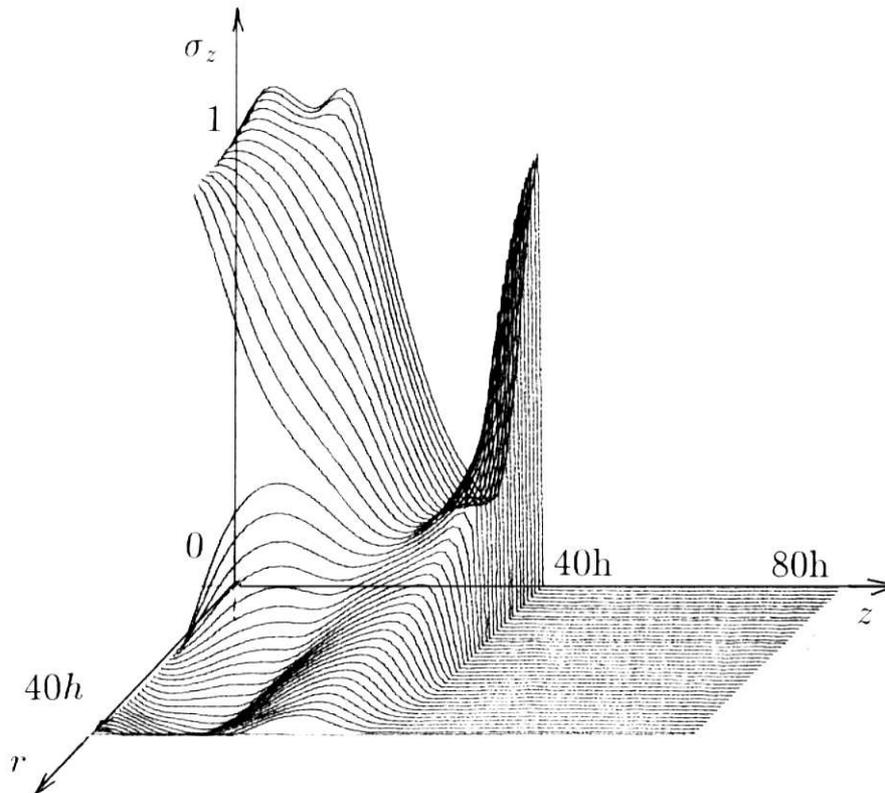


Рис. 3.11. Удар по торцу однородного упругого цилиндра тонким ударником

На рис. 3.11 приведено решение (поверхность $\sigma_z(r, z)$) задачи об ударе по торцу $z = 0$ однородного упругого цилиндра достаточно большого радиуса тонким ударником: $\sigma_z = -1$ при $r \leq R_0$; $\sigma_z = 0$ при $r > R_0$, $\tau_{rz} = 0$ при $z = 0$. По оси z цилиндр разбивался на 80 ячеек, зона удара — 15 ячеек. Сетка выбрана квадратной, $\tau = h/c_p$, $c_p = 2c_s$, жесткость материала ρc_p принята равной единице, решение приведено на момент времени $t = 40\tau$.

3.5. О точности решения двумерных задач

На тестовых примерах, иллюстрирующих работоспособность предложенных алгоритмов, мы увидели их достаточно высокую эффективность, выражающуюся, в первую очередь, в точном описании разрыва решения и в то же время в отсутствии «паразитных», не присущих физическому явлению, эффектов.

Тем не менее, в ряде задач возникают обоснованные сомнения в точности количественного решения. Обращает на себя внимание (см. рис. 3.8, 3.11) затухание амплитуды решения на фронте продольной упругой волны для случая, когда есть ударное воздействие на поверхность тела в достаточно малой области (удар тонким ударником и т. д.). С другой стороны, располагая конечной дискретизацией области и кусочно-постоянной аппроксимацией решения, мы и не можем рассчитывать на полное совпадение решений. Таким образом, возникает вопрос: в каком смысле и насколько близко приближенное решение и точное?

Для ответа на него построим точные решения достаточно простых, но характерных задач об ударе по однородной упругой среде.

3.6. Плоская задача

Рассмотрим плоскую задачу об ударном воздействии на однородное изотропное упругое полупространство $x > 0$ (рис. 3.12), обладающее нулевой сдвиговой жесткостью (акустическая среда).

Использование этой простейшей модели упругой среды вполне оправданно в нашем случае, потому что в первую очередь нас интересует характер решения в окрестности фронта продольной упругой волны, где поперечные волны еще не вносят изменения в акустическое решение.

Для случая плоской деформации среды задача сводится к определению напряжения $\sigma(x, y, t)$ и двух компонент вектора скорости $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$, удовлетворяющих в области $x \geq 0, y \geq 0, t \geq 0$ системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.23)$$

начальным условиям ($t = 0$):

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad \sigma(x, y, 0) = 0 \quad (3.24)$$

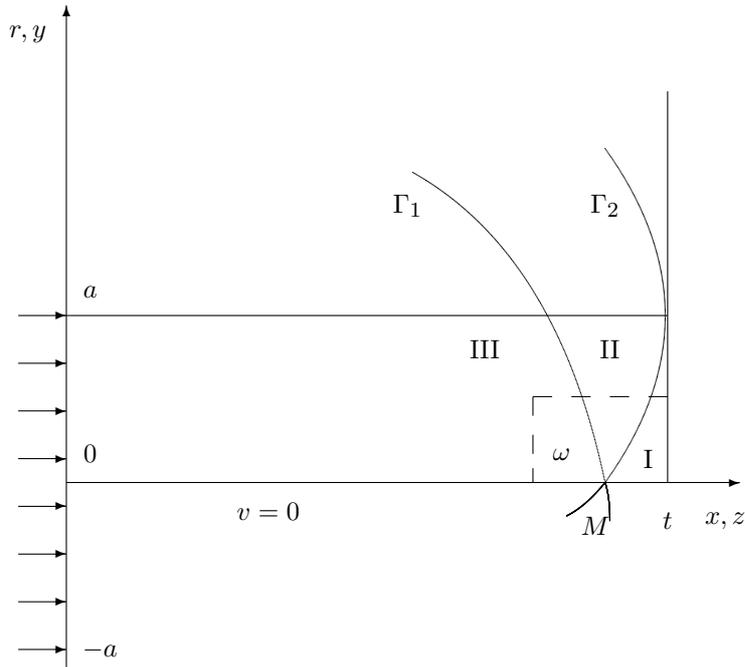


Рис. 3.12. Ударное воздействие на однородное изотропное упругое полупространство

и граничным условиям на поверхности ($x = 0$):

$$\sigma(0, y, t) = \begin{cases} 1, & y < a, \\ 0, & y > a, \end{cases} \quad t \geq 0; \quad (3.25)$$

и на плоскости симметрии ($y = 0$):

$$v(x, 0, t) = 0. \quad (3.26)$$

Считаем, что задача (3.23)—(3.26) необходимым образом безразмерна.

Воспользуемся для системы уравнений преобразованием Лапласа по переменной t , помечая тильдой изображения по Лапласу соответствующих функций. В результате мы приходим к краевой задаче для уравнения второго порядка относительно функции $\tilde{\sigma}(x, y, s) = L(\sigma(x, y, t))$, где s — комплексный параметр в преобразовании Лапласа:

$$s^2 \tilde{\sigma} = \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial y^2}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \tilde{\sigma} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 1/s, & y < a, \\ 0, & y > a. \end{cases}$$

Умножая уравнение в (3.27) на $\cos \lambda y$ и интегрируя по y от 0 до ∞ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\sigma}}{\partial x^2} = (s^2 + \lambda^2) \widehat{\sigma} \quad (3.28)$$

с граничным условием: $\widehat{\sigma}|_{x=0} = \sin \lambda a / s \lambda$, где $\widehat{\sigma}$ — косинус-преобразование Фурье функции $\widetilde{\sigma}$. Ограниченное по x решение (3.28) есть

$$\widehat{\sigma} = \frac{\sin \lambda a}{s \lambda} e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}},$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{s \lambda} e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}} \cos \lambda y d\lambda$$

или

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda b_2}{s \lambda} e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}} d\lambda \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda b_1}{s \lambda} e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}} d\lambda,$$

где $b_2 = a + y > 0$, $b_1 = |a - y|$, а знак перед вторым интегралом соответствует знаку разности $a - y$.

Таким образом, для окончательного решения нам необходимо вычислить оригинал функции

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin b \lambda}{\lambda} \frac{e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}}}{s} d\lambda, \quad b \geq 0.$$

Известно [71], что

$$L^{-1}(e^{-sx} - e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}}) = \begin{cases} 0, & t < x, \\ \frac{\lambda x}{\sqrt{t^2-x^2}} J_1(\lambda\sqrt{t^2-x^2}), & t > x. \end{cases}$$

Тогда

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-x\sqrt{s^2+\lambda^2}}}{s}\right) = \begin{cases} 0, & t < x, \\ 1 - \int_x^t \frac{\lambda x}{\sqrt{\tau^2-x^2}} J_1(\lambda\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau, & t > x. \end{cases} \quad (3.29)$$

При $t < x$ $P = 0$, при $t > x$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin b \lambda}{\lambda} d\lambda - \frac{1}{\pi} \int_x^t \frac{x}{\sqrt{\tau^2-x^2}} \int_0^{\infty} \sin b \lambda J_1(\lambda\sqrt{\tau^2-x^2}) d\lambda d\tau.$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом представляет собой преобразование Ханкеля функции $\sin b \lambda / \lambda$ и после необходимых выкладок

решение принимает вид:

$$\sigma(x, y, t) = \begin{cases} 1, & y < a, \\ 0, & y > a, \end{cases} - \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0, & t^2 \leq b_1^2 + x^2, \\ \arctan\left(\frac{x\sqrt{t^2-x^2-b_1^2}}{b_1 t}\right), & b_1^2 + x^2 \leq t^2 \leq b_2^2 + x^2, \\ \arctan\left(\frac{x\sqrt{t^2-x^2-b_1^2}}{b_1 t}\right) + \\ + \arctan\left(\frac{x\sqrt{t^2-x^2-b_2^2}}{b_2 t}\right), & t^2 \geq b_2^2 + x^2. \end{cases} \quad (3.30)$$

где $b_1 = |a - y|$, $b_2 = a + y$. Разбиение полупространства на подобласти I–III дугами окружностей Γ_1 , Γ_2 , уравнения которых определяются условиями в формулах (3.30) ($\Gamma_2: b_1^2 + x^2 = t^2$, $\Gamma_1: b_2^2 + x^2 = t^2$), приведено на рис. 3.12. Отметим, что независимо от протяженности зоны удара a , значение σ на фронте волны всегда равно 1 для $y < a$.

Пусть при численном решении задачи (3.23)–(3.26) расчетная область разделена на одинаковые квадратные ячейки со стороной h . В нашем алгоритме наибольшую точность мы будем иметь, выбирая шаг по времени равным h . Рассмотрим точное решение (3.30) в момент времени $t = mh$ в центральной, прилегающей к фронту $x = t$, ячейке $\omega = \{(m+1)h \leq x \leq mh, 0 \leq y \leq h\}$.

Примем $a = Nh$, $N \geq 1$ и вычислим значение среднего по ячейке ω напряжения σ^* в зависимости от номера шага по времени m :

$$\sigma^*(m) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_{(m-1)h}^{mh} \sigma(x, y, mh) dx dy.$$

При $m \leq \frac{1+(N-1)^2}{2}$ ячейка ω целиком лежит в области I (верхнее значение второго слагаемого в (3.30)) решения и $\sigma^* = 1$. При $\frac{1+(N-1)^2}{2} \leq m \leq \frac{1+N^2}{2}$ часть ячейки ω будет содержать решение II (средняя строчка в (3.30)), а при $m \geq \frac{1+N^2}{2}$ в ω будут присутствовать все три решения (см. рис. 3.12). Вычисляя интегралы в каждом из трех рассмотренных случаев, получаем:

$$m \leq \frac{1+(N-1)^2}{2}, \quad \sigma^* = 1,$$

$$\frac{1+(N-1)^2}{2} \leq m \leq \frac{1+(N+1)^2}{2}, \quad \sigma^* = 1 - \frac{1}{\pi} I(N-1, M_1, m),$$

$$m \geq \frac{1 + (N + 1)^2}{2}, \quad \sigma^* = 1 - \frac{1}{\pi} [I(N - 1, M_1, m) - I(N + 1, M_1, m)],$$

где

$$\begin{aligned} I(L, M, m) &= \int_L^M \int_z^M \arctan \left(\frac{\sqrt{k^2 - z^2} \sqrt{m^2 - k^2}}{zm} \right) \frac{kdkdz}{\sqrt{m^2 - k^2}} = \\ &= -mL \left(\arctan \frac{\sqrt{M^2 - L^2}}{L} - A \arctan A \frac{\sqrt{M^2 - L^2}}{L} \right) + \\ &\quad + \frac{m\sqrt{M^2 - L^2}}{2} + \frac{m^2 - M^2 - L^2}{4} \ln \left| \frac{m - \sqrt{M^2 - L^2}}{m + \sqrt{M^2 - L^2}} \right|, \\ &\quad A = \frac{m^2 - M^2}{m}, \quad M_1 = \sqrt{2m - 1}. \end{aligned}$$

Для оценки точности алгоритма сравнивались кривые зависимости от времени напряжения σ , рассчитываемого по предложенной схеме, и проекции на сетку точного решения σ^* в самой характерной ячейке ω , прилегающей к фронту ударной волны и оси симметрии. Эксперимент, проведенный для ударников различной ширины, показал, что:

1) после участка, на котором σ и σ^* равны единице, сначала наблюдается уменьшение амплитуды σ , и далее, с ростом времени кривые неограниченно сближаются;

2) максимальное отличие наблюдается в момент возникновения ниспадающего участка у σ^* ($m = \frac{1+(N+1)^2}{2}$) и составляет менее 0,1 % для ударника шириной h ($N = 1$), около 1 % для $N = 2$, около 5 % для $N = 5$ и т. д.

Это позволяет сделать вывод о достаточно хорошем совпадении точного и численного решений.

3.7. Осесимметричная задача

Пусть участок поверхности, на котором к упругому полупространству приложена нагрузка ударного типа, представляет собой круг радиуса a . В этом случае осесимметричная задача в цилиндрической системе координат z, r (см. рис. 3.12) формулируется в виде (3.23)–(3.26), где неизвестные функции удовлетворяют вместо (3.23) системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}v. \quad (3.31)$$

Осуществляя преобразование Лапласа по t задачи (3.31), (3.24)–(3.26), приходим к краевой задаче:

$$s^2 \tilde{\sigma} = \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \tilde{\sigma} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 1/s, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

К (3.32) применим преобразование Ханкеля с функцией Бесселя нулевого порядка по r . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение, решением которого, ограниченным по z и удовлетворяющим граничному условию при $z = 0$, является функция

$$\widehat{\sigma} = \frac{a}{sp} J_1(ap) e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}. \quad (3.33)$$

Следовательно, изображение по Лапласу есть

$$\tilde{\sigma} = \int_0^\infty a J_1(ap) \frac{e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{s} J_0(rp) dp. \quad (3.34)$$

Используя (3.29), получаем, что при $t < z$ $\sigma = 0$, а при $t > z$

$$\sigma = \int_0^\infty a J_1(ap) \left[1 - \int_0^{\sqrt{t^2-z^2}} \frac{px}{\sqrt{x^2+z^2}} J_1(px) dx \right] J_0(rp) dp =$$

$$= \begin{cases} 0, & r > a, \\ 1, & r < a, \end{cases} - \int_0^{\sqrt{t^2-z^2}} \frac{az}{\sqrt{x^2+z^2}} \Phi(a, x, r) dx, \quad (3.35)$$

где

$$\Phi(a, x, r) = \int_0^\infty p J_0(rp) J_1(xp) J_1(ap) dp.$$

Функция $\Phi(a, x, r)$ имеет различный вид в случаях $a > r$ и $a < r$. В частности, если $r < a$:

$$\Phi(a, x, r) = \begin{cases} 0, & x < a - r, \quad x > a + r, \\ \frac{1}{ax\pi} \frac{a^2+x^2-r^2}{\sqrt{4a^2x^2-(a^2+x^2-r^2)^2}}, & a - r < x < a + r. \end{cases}$$

Тогда

$$\sigma = 1 - \frac{z}{\pi} \begin{cases} 0, & \sqrt{t^2-z^2} < a - r, \\ J(\sqrt{t^2-z^2}), & a - r < \sqrt{t^2-z^2} < a + r, \\ J(a+r), & \sqrt{t^2-z^2} > a + r, \end{cases}$$

где

$$J(l) = \int_{-2ar}^{l^2 - a^2 - r^2} \frac{(y + 2a^2)dy}{2(y + a^2 + r^2)\sqrt{y + a^2 + r^2 + z^2}\sqrt{4a^2r^2 - y^2}}.$$

Окончательно (3.35) выражается через эллиптические интегралы первого ($F(\varphi, k)$) и третьего ($\Pi(\varphi, n, k)$) рода:

$$\sigma = 1 - \frac{z}{\pi A} \begin{cases} 0, & t^2 - z^2 < (a - r)^2, \\ \left[1 - \frac{a^2 - r^2}{z^2}\right]F(\varphi, k) + \\ + \frac{b^2(a+r)}{z^2(a-r)}\Pi(\varphi, n, k), & (a - r)^2 < t^2 - z^2 < (a + r)^2, \\ \left[1 - \frac{a^2 - r^2}{z^2}\right]F(\pi/2, k) + \\ + \frac{b^2(a+r)}{z^2(a-r)}\Pi(\pi/2, n, k), & t^2 - z^2 > (a + r)^2. \end{cases} \quad (3.36)$$

Здесь $A^2 = (a + r)^2 + z^2$, $b^2 = (a - r)^2 + z^2$,

$$\varphi = \arcsin \frac{A\sqrt{t^2 - b^2}}{t\sqrt{A^2 - b^2}}, \quad k^2 = \frac{4ar}{A^2}, \quad n = \frac{4arz^2}{A^2(a - r)^2}.$$

Полученное решение существенно упрощается, когда величина r^2/z^2 мала по сравнению с единицей. В этом случае решение можно записать в виде:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & t^2 - z^2 > (a - r)^2, \\ \frac{1}{2\pi}(\Phi_1 + \Phi_2) + 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, & (a - r)^2 < t^2 - z^2 < (a + r)^2, \\ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, & t^2 - z^2 > (a + r)^2, \end{cases} \quad (3.37)$$

где

$$\Phi_1(a, t, r, z) = \arccos \frac{(a^2 + r^2)(t^2 - z^2) - (a^2 - r^2)^2}{2ar(t^2 - z^2)},$$

$$\Phi_2(a, t, r, z) = \arccos \frac{z^2(t^2 - z^2) + 2a^2r^2}{ar(t^2 + z^2)}.$$

Границами раздела решения являются те же окружности Γ_1 и Γ_2 радиуса t с центрами в точке $(0, a)$ и точке $(0, -a)$ (см. рис. 3.12).

Решение вида (3.37) позволяет вычислить σ^{**} — среднее значение σ в ячейке ω . В случае цилиндрической системы координат σ^{**} будет определяться интегралом:

$$\sigma^{**} = \frac{2}{h^2} \int_0^h r \int_{(m-1)h}^{mh} \sigma(r, z, mh) dz dr.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\sigma^{**} \approx \frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

или

$$\sigma^{**} \approx \frac{1}{2m}. \quad (3.38)$$

Отметим, что (3.38), как и (3.37), имеет смысл для $1/m^2 \ll 1$. Сравнение численного решения и проекции точного решения в ω приводит практически к тем же результатам, что и в плоском случае.

Рассмотренные точные решения позволяют сделать следующий вывод: численные решения, получаемые с использованием построенных алгоритмов, на самом деле обладают достаточной точностью, в том смысле, что практически совпадают с проекциями на разностную сетку точных решений.

3.8. Локальная аппроксимация решения полиномами порядка выше первого

При решении одномерных задач для расчета величин с целочисленными индексами (к примеру, (3.10), (3.11)) по явной схеме константы диссипации берутся следующими:

$$\gamma = \frac{h_x}{c_p} - \tau, \quad \omega = \frac{h_x}{c_s} - \tau, \quad \alpha = \frac{h_y}{c_p} - \tau, \quad \beta = \frac{h_y}{c_s} - \tau,$$

а условие их неотрицательности приводит к ограничению на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{h_x}{c_p}, \quad \tau \leq \frac{h_y}{c_p}.$$

В случае, когда в расчетной области выбирается квадратная сетка $h_x = h_y = h$ и предельно допустимое при этом значение $\tau = h/c_p$, мы решаем с практически нулевой диссипацией ($\gamma = 0$, $\alpha = 0$) первую и третью задачи, а $\omega = \beta = \tau(c_p/c_s - 1)$.

Для большинства реальных материалов, с которыми приходится иметь дело при решении конкретных задач, значение c_p/c_s близко к 2. Таким образом, волны сдвига описываются схемой с некоторым размазыванием. Попытаемся по возможности минимальным образом усложнить аппроксимацию решения в элементарной ячейке ω , чтобы иметь возможность одновременно рассчитывать все четыре задачи с почти нулевой диссипацией.

Строя схему решения задачи (2.1)–(2.3), в качестве приближенного решения в ω мы примем функции

$$\begin{aligned}
u &= (u_0^0 + u_0^1\eta) + (u_2^0 + u_2^1\eta)\zeta, & v &= (v_0^0 + v_0^1\eta) + (v_1^0 + v_1^1\eta)\xi, \\
\sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^1\eta, & \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sigma_y^1\eta, \\
\tau_{xy} &= (\tau_0^0 + \tau_0^1\eta) + (\tau_1^0 + \tau_1^1\eta)\xi + (\tau_2^0 + \tau_2^1\eta)\zeta, \\
u' &= u'_0 + u'_1\xi, & \sigma'_x &= \sigma'_{x0} + \sigma'_{x1}\xi, \\
v'' &= v''_0 + v''_1\zeta, & \sigma''_y &= \sigma''_{y0} + \sigma''_{y1}\zeta, \\
\tau'_{xy} &= \tau'_0 + \tau'_1\xi + \tau'_2P_2(\xi), & \tau''_{xy} &= \tau''_0 + \tau''_1\zeta + \tau''_2P_2(\zeta), \\
v' &= v'_0 + v'_1\xi + v'_2P_2(\xi), & u'' &= u''_0 + u''_1\zeta + u''_2P_2(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь $P_2(z)$ — полиномы Лежандра второй степени.

Полиномы (3.39) удовлетворяют системе уравнений (2.1) в виде

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} \right) P_k(\zeta) d\zeta &= 0, \quad k = 0, 1, \\
\int_{-1}^1 \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} \right) P_k(\xi) d\xi &= 0, \quad k = 0, 1, \\
\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \theta \frac{\partial v''}{\partial y} \right), & \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \rho c_p^2 \left(\theta \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right), \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} - \rho c_p^2 \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] P_k(\xi) P_m(\zeta) d\xi d\zeta &= 0, \quad k, m = 0, 1.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Из (3.40) и (3.39) мы получаем формулы для пересчета величин с нижнего слоя (мы будем помечать их чертой в индексе) на верхний слой по времени (соответствующие величины с чертой сверху):

$$\begin{aligned}
\bar{u}^0 &= u_-^0 + \frac{R_p}{A_p}(\sigma'_{xj+1} - \sigma'_{xj}) + \frac{R_p}{A_p}(\tau''_{i+1} - \tau''_i), \\
\bar{v}^0 &= v_-^0 + \frac{R_p}{A_p}(\tau'_{j+1} - \tau'_j) + \frac{R_p}{A_p}(\sigma''_{yi+1} - \sigma''_{yi}), \\
\bar{\sigma}_x &= \sigma_{x-} + R_p A_p (u'_{j+1} - u'_j) + R_p A_p \theta (v''_{i+1} - v''_i), \\
\bar{\sigma}_y &= \sigma_{y-} + R_p A_p \theta (u'_{j+1} - u'_j) + R_p A_p (v''_{i+1} - v''_i), \\
\bar{\tau}^0 &= \tau_-^0 + R_s A_s (v'_{j+1} - v'_j) + R_s A_s (u''_{i+1} - u''_i), \\
\bar{u}^2 &= (1 - 6\delta R_s) u_-^2 + 3\alpha R_s (u''_{i+1} - u''_i),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}^1 &= (1 - 6\delta R_s)v_-^1 + 3\alpha R_s(v'_{j+1} - v'_j), \\ \bar{\tau}^1 &= (1 - 6\delta R_s)\tau_-^1 + 3\alpha R_s(\tau'_{j+1} - \tau'_j), \\ \bar{\tau}^2 &= (1 - 6\delta R_s)\tau_-^2 + 3\alpha R_s(\tau''_{i+1} - \tau''_i).\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}u|_{\eta=-1} &= u_-^0 + u_-^2\zeta, & u|_{\eta=1} &= \bar{u}^0 + \bar{u}^2\zeta, \\ v|_{\eta=-1} &= v_-^0 + v_-^1\xi, & v|_{\eta=1} &= \bar{v}^0 + \bar{v}^1\xi, \\ \tau|_{\eta=-1} &= \tau_-^0 + \tau_-^1\xi + \tau_-^2\zeta, & \dots, \\ \sigma'_x|_{\xi=-1} &= \sigma'_{xj}, & \sigma'_x|_{\xi=1} &= \sigma'_{xj+1}, \quad \dots, \\ \sigma''_y|_{\zeta=-1} &= \sigma''_{yi}, & \sigma''_y|_{\zeta=1} &= \sigma''_{yi+1}, \quad \dots, \\ R_p &= \frac{c_p\tau}{h}, & R_s &= \frac{c_s\tau}{h}, & A_p &= c_p\rho, & A_s &= c_s\rho.\end{aligned}$$

Для простоты записи алгоритма мы рассматриваем случай квадратной сетки.

Последние четыре формулы в (3.41) записаны сразу в виде, который мы получили при решении одномерных задач на основе кусочно-линейной и кусочно-квадратичной аппроксимации (3.40) (см. главу 1).

Для вычисления величин с целочисленными индексами необходимо решить дополнительные уравнения, которые мы, как и прежде, формулируем на основе энергетического тождества, которое справедливо для всех функций (3.39), удовлетворяющих (3.40):

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v''}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] d\omega + \\ + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \left[\frac{\partial(\sigma'_x u' + \tau'_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma''_y v'' + \tau''_{xy} u'')}{\partial y} \right] d\omega,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}D &= (\sigma'_{x0} - \sigma_{x-} - R_p A_p u'_1 - R_p A_p \theta v''_1) u'_1 + (u'_0 - u_-^0 - \frac{R_p}{A_p} \sigma^{1'}_x - \frac{R_p}{A_p} \tau''_1) \sigma^{1'}_x + \\ &+ (\sigma''_{y0} - \sigma_{y-} - R_p A_p v''_1 - R_p A_p \theta u'_1) v''_1 + (v''_0 - v_-^0 - \frac{R_p}{A_p} \sigma^{1''}_y - \frac{R_p}{A_p} \tau'_1) \sigma^{1''}_y + \\ &+ (\tau'_0 - \tau_-^0 - R_s A_s v'_1 - R_s A_s u''_1) v'_1 + (\tau'_1 - \tau_-^1 - 3R_s A_s v'_2) v'_2 + \\ &+ (v'_0 - v_-^0 - \frac{R_s}{A_s} \tau'_1 - \frac{R_p}{A_p} \sigma''_{y1}) \tau'_1 + (v'_1 - v_-^1 - 3\frac{R_s}{A_s} \tau'_2) \tau'_2 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\tau_0'' - \tau_-^0 - R_s A_s u_1'' - R_s A_s v_1') u_1'' + (\tau_1'' - \tau_-^2 - 3R_s A_s u_2'') u_2'' + \\
& + (u_0'' - u_-^0 - \frac{R_s}{A_s} \tau_1'' - \frac{R_p}{A_p} \sigma_{x1}') \tau_1'' + (u_1' - u_-^2 - 3\frac{R_s}{A_s} \tau_2'') \tau_2''. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Дополнительные уравнения сформулируем в виде четырех одномерных задач:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x0}' - \sigma_{x-} - R_p A_p u_1' &= \gamma A_p u_1' + \widetilde{(v_1'')}, \\
u_0' - u_-^0 - \frac{R_p}{A_p} \sigma_x^{1'} &= \frac{\gamma}{A_p} \sigma_x^{1'} + \frac{R_p}{A_p} \widetilde{(\tau_1'')}; \\
\sigma_{y0}'' - \sigma_{y-} - R_p A_p v_1'' &= \gamma A_p v_1'' + \widetilde{(u_1')}, \\
v_0'' - v_-^0 - \frac{R_p}{A_p} \sigma_y^{1''} &= \frac{\gamma}{A_p} \sigma_y^{1''} + \frac{R_p}{A_p} \widetilde{(\tau_1')}; \\
v_0' - v_-^0 - \frac{R_s}{A_s} \tau_1' &= \frac{\gamma_{11}}{A_s} \tau_1' + \gamma_{12} v_2' + \frac{R_p}{A_p} \widetilde{(\sigma_y^{1''})}, \\
\tau_0' - \tau_-^0 - R_s A_s v_1' &= \gamma_{11} A_s v_1' + \gamma_{12} \tau_2' + R_s A_s \widetilde{(u_1')}, \\
v_1' - v_-^1 - 3\frac{R_s}{A_s} \tau_2' &= -\gamma_{12} v_1' + \frac{\gamma_{22}}{A_s} \tau_2', \\
\tau_1' - \tau_-^1 - 3R_s A_s v_2' &= -\gamma_{12} \tau_1' + \gamma_{22} A_s v_2'; \\
u_0'' - u_-^0 - \frac{R_s}{A_s} \tau_1'' &= \frac{\gamma_{11}}{A_s} \tau_1'' + \gamma_{12} u_2'' + \frac{R_p}{A_p} \widetilde{(\sigma_x^{1'})}, \\
\tau_0'' - \tau_-^0 - R_s A_s u_1'' &= \gamma_{11} A_s u_1'' + \gamma_{12} \tau_2'' + R_s A_s \widetilde{(v_1')}, \\
u_1'' - u_-^2 - 3\frac{R_s}{A_s} \tau_2'' &= -\gamma_{12} u_1'' + \frac{\gamma_{22}}{A_s} \tau_2'', \\
\tau_1'' - \tau_-^2 - 3R_s A_s u_2'' &= -\gamma_{12} \tau_1'' + \gamma_{22} A_s u_2''.
\end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь γ , γ_{11} , γ_{12} , γ_{22} — константы диссипации. Мы можем выбирать эти числа такими, чтобы обеспечивалось условие неотрицательности $D \geq 0$. Это, как раньше было показано, гарантирует нам устойчивость схемы в энергетической норме.

Четыре одномерные задачи, как и все предыдущие, изложенные в этой главе, решаются в два этапа. На первом этапе мы отбрасываем слагаемые в правых частях (3.43), помеченные тильдой. Полученные в результате решения величины v_1'' , τ_1'' , u_1' , ... и т. д. помечаем тильдой, включаем в правые части (3.43) и снова решаем эти четыре задачи с измененными правыми частями. Что касается способа их решения, то заметим, что первая и вторая задачи в (3.43) в точности совпадают с

соответствующими задачами в схеме, использующей линейную аппроксимацию решения (см. раздел 3.2), а формулы решения третьей и четвертой задач изложены в главе 1.

Мощность искусственной диссипации D записывается в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
D = & \gamma A_p (u_1')^2 + \gamma A_p (v_1'')^2 - R_p A_p [2u_1' v_1'' - u_1' (\widetilde{v_1''}) - (\widetilde{u_1'}) v_1''] + \\
& + \frac{\gamma}{A_p} (\sigma_x^{1'})^2 + \frac{\gamma_{11}}{A_s} (\tau_1'')^2 - \frac{R_p}{A_p} [2\sigma_x^{1'} \tau_1'' - \sigma_x^{1'} (\widetilde{\tau_1''}) - (\widetilde{\sigma_x^{1'}}) \tau_1''] + \\
& + \frac{\gamma}{A_p} (\sigma_y^{1''})^2 + \frac{\gamma_{11}}{A_s} (\tau_1')^2 - \frac{R_p}{A_p} [2\sigma_y^{1''} \tau_1' - \sigma_y^{1''} (\widetilde{\tau_1'}) - (\widetilde{\sigma_y^{1''}}) \tau_1'] + \\
& + \gamma_{11} A_s (v_1')^2 + \gamma_{11} A_s (u_1'')^2 - R_s A_s [2v_1' u_1'' - v_1' (\widetilde{u_1''}) - (\widetilde{v_1'}) u_1''] + \\
& + \frac{\gamma_{22}}{A_s} (\tau_2')^2 + \frac{\gamma_{22}}{A_s} (\tau_2'')^2 + \gamma_{22} A_s (v_2')^2 + \gamma_{22} A_s (u_2'')^2, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

для неотрицательности которой, как мы обсуждали выше, необходимо потребовать, чтобы

$$\gamma \geq 0, \quad \gamma_{11} \geq 0, \quad \gamma_{22} \geq 0. \quad (3.45)$$

Если в качестве способа решения (3.43) мы выбираем явную во всех направлениях схему, то $\gamma = 1 - R_p$, а выбор γ_{11} , γ_{22} , γ_{12} может быть произвольным. Мы можем выбрать их такими, что $\gamma_{11} = \gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} \geq 0$, и схема в соответствующем направлении будет иметь второй порядок и будет монотонной (схема тогда является нелинейной). Однако в данном случае у нас нет необходимости стремиться к высокому порядку. Для нас гораздо важнее, что существует описанный в главе 1 вариант схемы, когда параметры диссипации имеют вид:

$$\gamma_{11} = 1/2 - R_s, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = \frac{1 - 2R_s}{R_s} \geq 0, \quad R_s \leq 1/2$$

(это соответствует выбору констант $\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\delta = 2/3$) и

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= (1 - R_s)(2R_s - 1) \geq 0, \quad \gamma_{12} = 0, \\
\gamma_{22} &= \frac{2R_s - 1}{6R_s^2} \geq 0, \quad 1/2 \leq R_s \leq 1
\end{aligned}$$

(для $\alpha = (1 - R_s)/\sqrt{3}R_s$, $\delta = 1/6R_s^2$).

Как мы уже отмечали, для значительного числа реальных материалов отношение $c_s/c_p \approx 1/2$, и, следовательно, если вести расчет на квадратной сетке и выбирать шаг по времени $\tau = h/c_p$, то

$$\gamma = 0, \quad R_s \approx 1/2 \quad \text{и} \quad \gamma_{11} \approx 0, \quad \gamma_{22} \approx 0.$$

Не останавливаясь на процедуре вывода схемы, основанной на локальной аппроксимации решения полиномами степени выше первой для осесимметричной задачи, скажем, что способ построения такой схемы не содержит принципиальных трудностей (хотя и является намного более сложным технически) по сравнению с рассмотренным вариантом, а построенная схема обладает аналогичными качествами.

На рис. 3.13 и 3.14 приведено решение задачи о косом ударе по упругой квадратной пластине со стороны, равной единице. В начальный момент времени все компоненты тензора напряжений и вектора скорости равны нулю. При $x = 0$: $\sigma_x = 1$, $\tau_{xy} = 1$, остальные края квадрата свободны от напряжений. Решение (поверхность $\sigma_x(x, y)$) приведено на момент времени t , соответствующий пробегу продольной упругой волны расстояния $l = 0,5$; $h_x = h_y = h$, $\tau = h/c_p$, для расчета выбрана сетка 80×80 . Рис. 3.13 иллюстрирует расчет по схеме (3.10), (3.11), рис. 3.14 — расчет по схеме (3.43). Как и ожидалось, разница решений заметна в окрестности фронта волны сдвига.

3.9. Структура вычислительного алгоритма для неоднородной области. Адаптация сетки

То, что разностные схемы, рассмотренные в предыдущих параграфах, построены для простейшего варианта однородной упругой среды, в большей степени носит методический характер — таким образом в работе удалось наиболее просто технически изложить основные принципы конструирования численного алгоритма.

Однако следует отметить, что предложенные методы являются наиболее эффективными и выгодно отличаются от других известных схем только в случае, когда механические параметры среды и параметры сеточного пространства связаны определенным соотношением, а именно $c_p \tau / h = 1$. При этом элементарная ячейка должна быть квадратной ($h_x = h_y = h$).

Эти условия не составляет труда реализовать в однородных средах. В то же время в задачах, представляющих практический интерес и вполне допускающих двумерную постановку, мы, как правило, имеем дело с неоднородными материалами — вертикально неоднородными массивами горных пород в задачах сейсморазведки и электроразведки, слоистыми плитами из различных металлов и т. д.

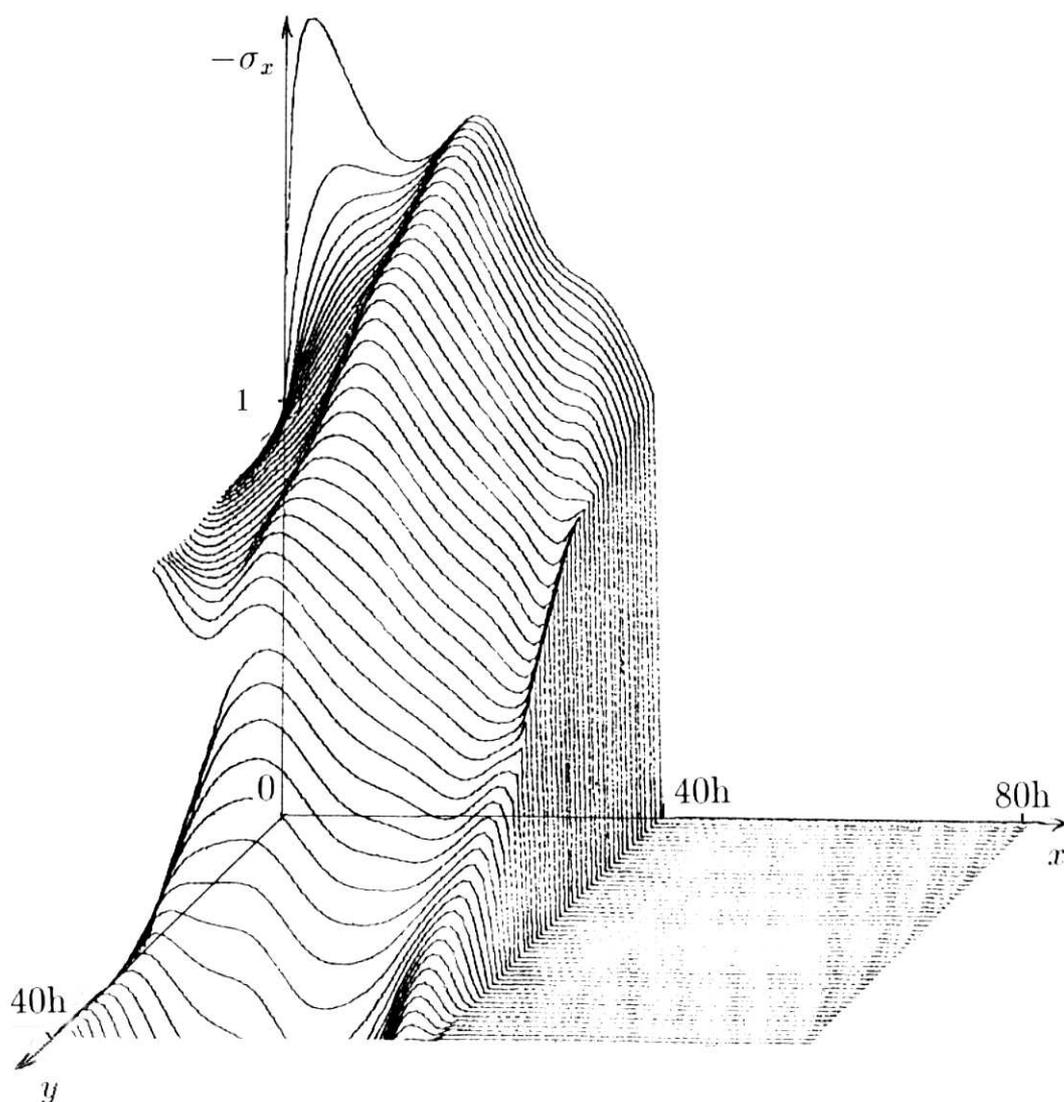


Рис. 3.13. Задача о косом ударе по упругой квадратной пластине: расчет по схеме (3.10)

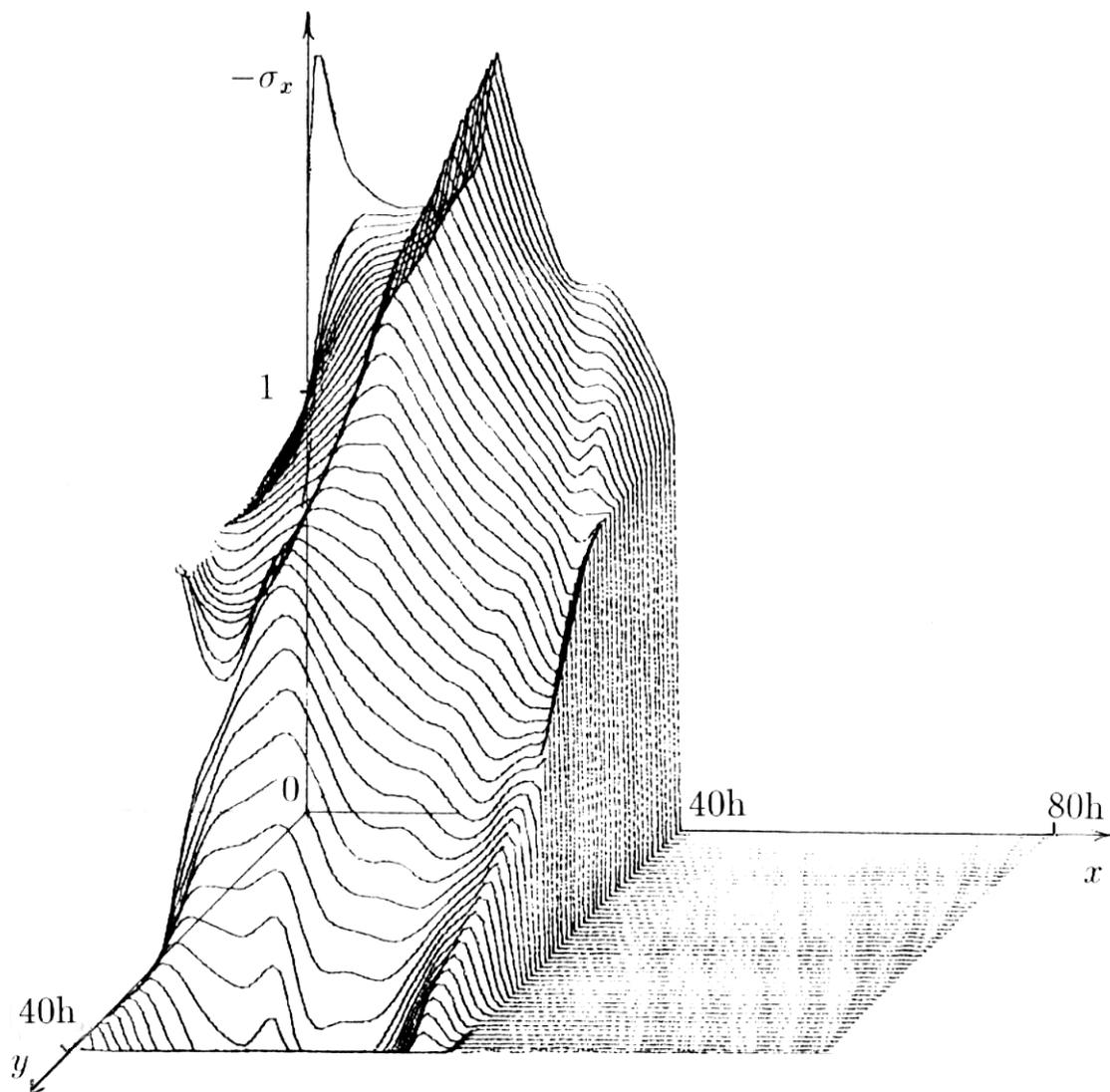


Рис. 3.14. Задача о косом ударе по упругой квадратной пластине: расчет по схеме (3.43)

По-видимому, при численном моделировании процессов распространения возмущения в таких средах мы вполне могли бы удовлетвориться кусочно-однородной моделью. Но если неоднородность носит существенно нерегулярный характер, в настоящее время нет достаточной ясности в способах эффективной реализации построенных схем.

Если же ограничиться классом слоисто-однородных материалов и, даже более того, материалов, допускающих кусочную неоднородность внутри слоя, то здесь можно предложить следующую процедуру вычислений. Заметим сначала, что в одномерном случае вопрос вычисления точного решения задачи (1.1), (1.4), (1.5) для кусочно-однородного стержня можно решить достаточно просто: расчетную область следует разбить на ячейки неравномерно таким образом, чтобы в каждой ячейке отношение локальной скорости звука к ширине ячейки c_{pi}/h_i оставалось постоянным и число Куранта $R = c_{pi}\tau/h_i$ равнялось бы единице по всей области.

При решении двумерных задач для слоисто-однородной среды в каждом однородном слое также можно ввести свою квадратную сетку, согласованную со скоростью продольных упругих волн таким образом, чтобы параметр Куранта был равен единице.

Предположим, что слои расположены перпендикулярно оси y в плоской задаче либо перпендикулярно оси z в осесимметричном случае (рис. 3.15). Тогда расчет одномерных задач в направлении оси x либо r сложностей не вызывает, даже если внутри слоя (по всей толщине) есть участок с другими физическими характеристиками. Но при реше-

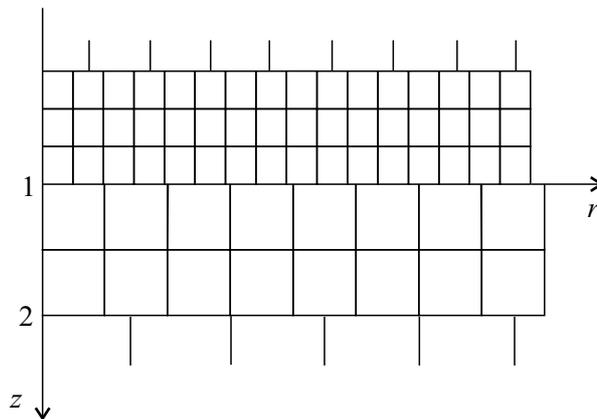


Рис. 3.15. Квадратная сетка для слоисто-однородной среды

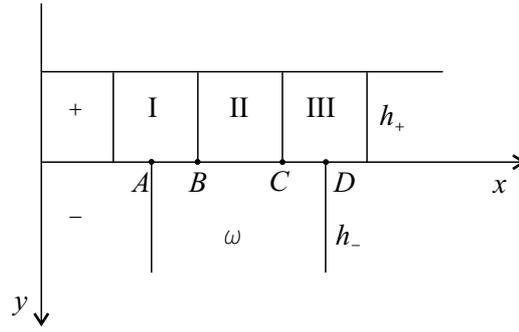


Рис. 3.16. К формулировке условий на границе раздела слоев с различными упругими характеристиками

нии одномерных задач в направлении оси y либо z возникает проблема стыковки — формулировки граничных условий на границах областей с различными характеристиками.

Покажем, что достаточно простая аппроксимация решения в каждом элементарном квадрате приводит к довольно несложному алгоритму такой стыковки. Он заключается в следующем.

Рассмотрим два соседних однородных слоя (слой «+» и слой «-» на рис. 3.16), контактирующих по прямолинейной границе. В зависимости от соотношения между размерами ячеек в области «+» и соседней области «-», к некоторой ячейке ω области «+» могут примыкать от одной до нескольких ячеек области «-», номера которых известны. На рис. 3.16 это три ячейки — I, II, III. Считаем, что на каждом участке границы AB , BC и CD соответствующие значения усилий $(\sigma_{22}^+)_1$ совпадают со значениями усилий $(\sigma_{22}^I)_{L+1}$ на AB , $(\sigma_{22}^{II})_{L+1}$ на BC , $(\sigma_{22}^{III})_{L+1}$ на CD , а также совпадают скорости в направлении y : $(v^+)_1 = (v^I)_{L+1}$ на AB , $(v^+)_1 = (v^{II})_{L+1}$ на BC , $(v^+)_1 = (v^{III})_{L+1}$ на CD .

Граничные условия для ω имеют вид

$$(\sigma_y^+)_1^m - \rho^- c_p^- (v^+)_1^m = \sigma_y^m - \rho^- c_p^- v^m, \quad (3.46)$$

а в зависимости от того, какой участок рассматривается (AB , BC или CD), m принимает значение I, II либо III.

Значениями $(\sigma_y^+)_1$ и $(v^+)_1$ на всей границе AD мы назовем средние по участкам значения $(\sigma_y^+)_1^m$ и $(v^+)_1^m$:

$$\begin{aligned}(\sigma_y^+)_1 &= \frac{AB}{h_+}(\sigma_y^+)_1^I + \frac{BC}{h_+}(\sigma_y^+)_1^{II} + \frac{CD}{h_+}(\sigma_y^+)_1^{III}, \\(v^+)_1 &= \frac{AB}{h_+}(v^+)_1^I + \frac{BC}{h_+}(v^+)_1^{II} + \frac{CD}{h_+}(v^+)_1^{III}.\end{aligned}\quad (3.47)$$

При этом, оказывается, нет необходимости вычислять значения $(\sigma_y^+)_1$ и $(v^+)_1$ на участках границы. Применение усреднения (3.47) к граничным условиям (3.46) непосредственно позволяет вычислить соответствующий инвариант в области «+»:

$$\begin{aligned}(\sigma_y^+)_1 - \rho^- c_p^- (v^+)_1 &= \frac{1}{h_+} [l_1(\sigma_y^-)_1 + \dots + l_N(\sigma_y^-)_N] - \\ &\quad - \frac{1}{h_+} \rho^- c_p^- [l_1(v^-)_1 + \dots + l_N(v^-)_N],\end{aligned}\quad (3.48)$$

где N — число ячеек в слое «-», контактирующих с ячейкой ω в слое «+», l_1, \dots, l_N ($l_1 + \dots + l_N = h_+$) — длины границ этих ячеек, а в правой части (3.48) стоят значения σ_y и v в соответствующих ячейках области «-» на нижнем слое по времени.

Аналогично (3.48) выписывается и второе граничное условие на этой границе

$$\begin{aligned}(\tau_{xy}^+)_1 - \rho^- c_s^- (u^+)_1 &= \frac{1}{h_+} [l_1(\tau_{xy}^-)_1 + \dots + l_N(\tau_{xy}^-)_N] - \\ &\quad - \frac{1}{h_+} \rho^- c_s^- [l_1(u^-)_1 + \dots + l_N(u^-)_N].\end{aligned}\quad (3.49)$$

Не отличаются принципиально от приведенных и граничные условия для осесимметричной задачи.

В виде (3.48) и (3.49) мы можем получить граничные условия и для ячейки слоя «-»:

$$\begin{aligned}(\sigma_y^-)_1 - \rho^+ c_p^+ (v^-)_1 &= \frac{1}{h_-} [l_1(\sigma_y^+)_1 + \dots + l_M(\sigma_y^+)_M] - \\ &\quad - \frac{1}{h_-} \rho^+ c_p^+ [l_1(v^+)_1 + \dots + l_M(v^+)_M],\end{aligned}\quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}(\tau_{xy}^-)_1 - \rho^+ c_s^+ (u^-)_1 &= \frac{1}{h_-} [l_1(\tau_{xy}^+)_1 + \dots + l_M(\tau_{xy}^+)_M] - \\ &\quad - \frac{1}{h_-} \rho^+ c_s^+ [l_1(u^+)_1 + \dots + l_M(u^+)_M].\end{aligned}\quad (3.51)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи в случае слоистой среды сводится к независимому решению в каждой из однородных подобластей. При этом для верхнего и нижнего слоев граничные условия задаются из физической постановки задачи, а для внутренних слоев рассчитываются предварительно из соотношений типа (3.47)–(3.51).

Для апробации работоспособности этого алгоритма, основанного на построении адаптированной к среде сетки, целесообразно рассмотреть следующий тест. Возьмем пластину, которая состоит из двух слоев, выполненных из следующего гипотетического материала: скорости продольных упругих волн для этих материалов и их плотности различны (отличаются в два раза), но жесткости ($\rho^- c_p^-$) и ($\rho^+ c_p^+$) одинаковы. Коэффициент Пуассона всюду равен $1/3$.

Рассмотрим две характерные задачи:

— о движении плоской волны через границу раздела двух слоев (рис. 3.17), здесь пробел в линиях поверхности напряжения — граница раздела слоев;

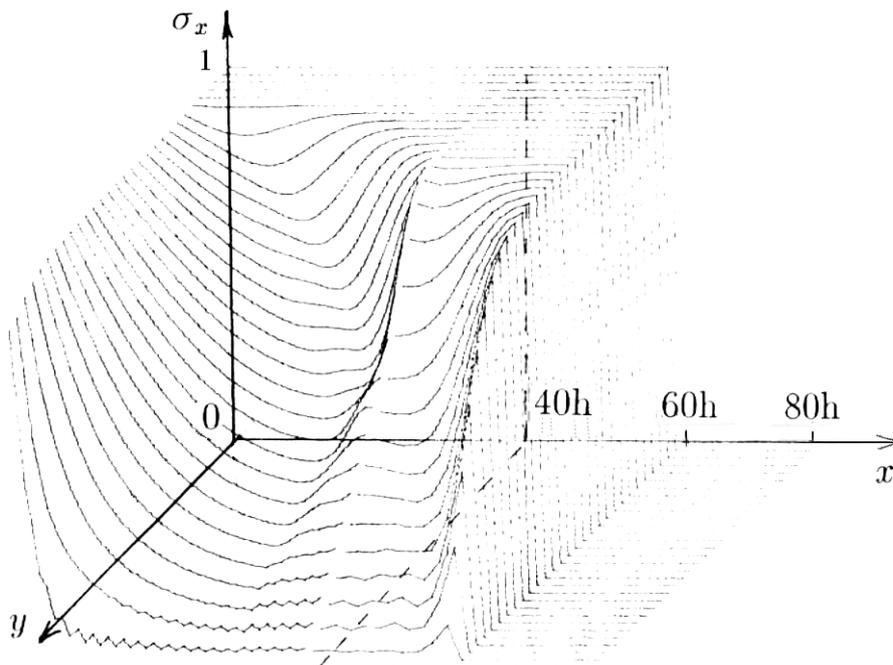


Рис. 3.17. Движение плоской волны через границу раздела двух слоев

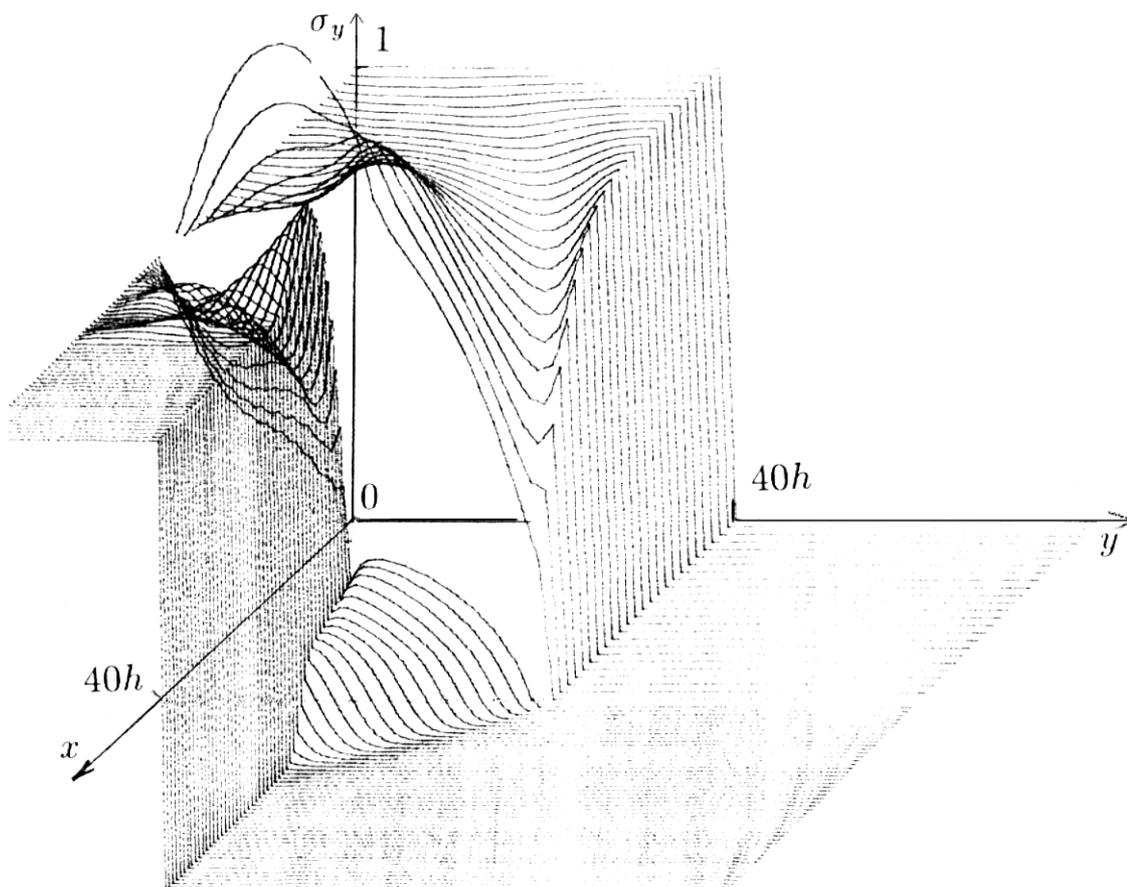


Рис. 3.18. Движение плоской волны вдоль границы раздела: итерационная схема

— о движении плоской волны вдоль границы раздела двух слоев (рис. 3.18).

Для сравнения на рис. 3.19 приведено решение той же задачи, что и на рис. 3.18, полученное на равномерной во всей области сетке. При этом в области, характеризующейся меньшей скоростью продольных упругих волн, расчет производился с параметром Куранта $R = 0,5$, т. е. фактически по схеме Годунова.

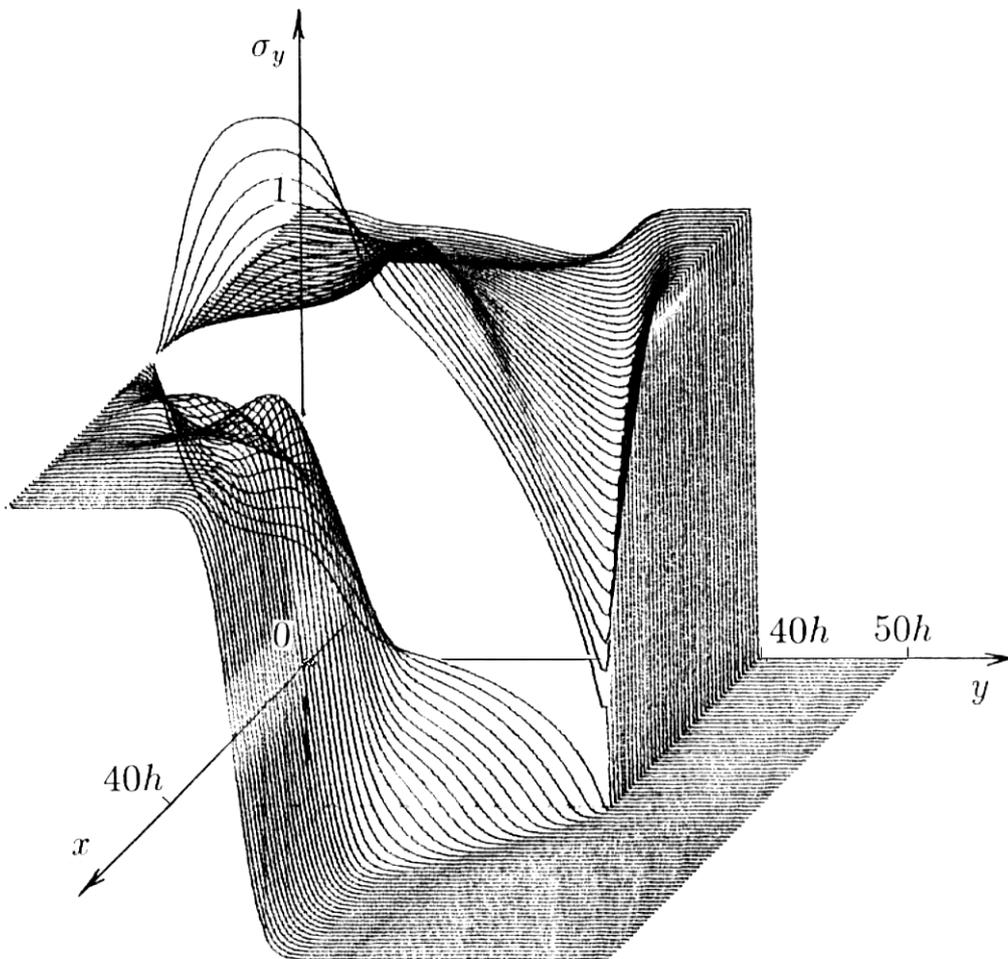


Рис. 3.19. Движение плоской волны вдоль границы раздела: схема Годунова

3.10. Неотражающие условия

Остановимся еще на одной проблеме, часто возникающей при решении задач в областях с большой протяженностью, в то время как возмущение, вызывающее динамический процесс, локализовано в узкой области. В задачах такого вида мы вынуждены ограничиться вычислениями в конечной области, и возникает вопрос формулировки граничных условий на границе этой области — так называемых неотражающих

щих условий, обеспечивающих отсутствие всякого влияния на решение извне.

В одномерном случае, к примеру, для системы уравнений (1.1), рассматриваемой на отрезке $L_1 \leq x \leq L_2$, такие граничные условия можно точно реализовать численно в рамках описанных в главе 1 разностных схем, а именно: граница $x = L_2$ будет неотражающей, если инвариант Римана $R_1 = (\sigma + \rho c u)$, который приносится справа характеристикой $x + ct = \text{const}$, будет равен нулю:

$$(\sigma + \rho c u)|_{x=L_2} = 0.$$

Аналогично, неотражающим условием для левой границы $x = L_1$ будет

$$(\sigma - \rho c u)|_{x=L_1} = 0.$$

В пространственном случае неотражающие условия затруднительно сформулировать и в дифференциальной постановке, а их численная реализация должна быть привязана к конкретному алгоритму решения. Поскольку предложенные алгоритмы основаны на расщеплении двумерной задачи на ряд одномерных, предлагается просто формулировать правые неотражающие условия для соответствующих задач (3.10), (3.11) в виде:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{N+1} + \rho c_p(u)_{N+1} &= 0 \text{ — для первой задачи;} \\ (\tau_{xy})_{N+1} + \rho c_s(v)_{N+1} &= 0 \text{ — для второй задачи;} \\ (\sigma_y)_{M+1} + \rho c_p(v)_{M+1} &= 0 \text{ — для третьей задачи;} \\ (\tau_{xy})_{M+1} + \rho c_s(u)_{M+1} &= 0 \text{ — для четвертой задачи.} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Левые неотражающие условия имеют вид (3.52), где знак «+» необходимо заменить на «-», а целый индекс равен единице.

Ясно, что критерием удовлетворительности такой формулировки может быть только численный эксперимент, и, действительно, как мы увидим дальше, расчеты показывают, что условия (3.52) позволяют достаточно качественно ограничить расчетную область.

Таким образом, для решения двумерных задач динамической теории упругости построен и обоснован численный алгоритм, основанный на последовательных приближениях решения одномерных задач, на которые расщепляется полная задача. Этот алгоритм позволяет для реальных твердых тел при определенном выборе шагов интегрирования на одной и той же сетке получать монотонные решения всех типов волн без размазывания разрывов.

Глава 4

Численное моделирование многомерных процессов распространения волн в неоднородных упругих телах

В этой главе построенные в предыдущих главах численные алгоритмы решения одномерных и двумерных задач динамической теории упругости используется для решения ряда задач, представляющих не только методический, но и практический интерес. Рассматриваемые задачи представляют интерес в первую очередь потому, что их численное решение на основе разностной схемы принципиально возможно только в том случае, если эта схема удовлетворяет некоторым, достаточно жестким требованиям.

4.1. Моделирование процессов распространения электромагнитных волн в слоистых диэлектриках

Изучение процессов распространения волн в слоистых структурах представляет большой практический интерес. Достаточно хорошо изучены процессы распространения электромагнитных волн в слоистых средах с чередованием слоев изотропных материалов [167].

Рассмотрим задачу распространения в направлении оси z плоских электромагнитных волн в слоистых диэлектриках, имеющих структуру, состоящую из чередующихся слоев анизотропного и изотропного материалов. В качестве анизотропного материала рассматривается нематический жидкий кристалл (НЖК), обладающий (по сравнению с обычным кристаллом) сильной анизотропией диэлектрической проницаемости и высокой чувствительностью к внешним полям [24]. Система ко-

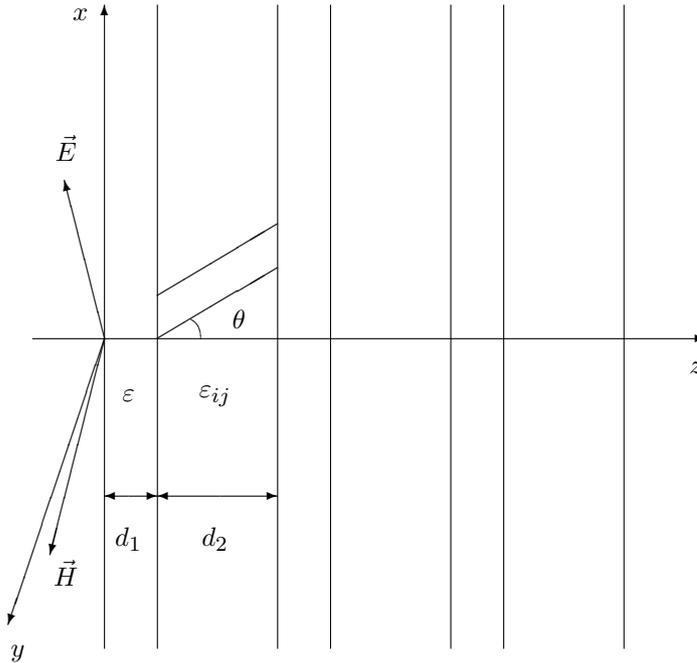


Рис. 4.1. Периодическая слоистая структура

ординат выбирается такой, что длинные оси молекул НЖК (директор) ориентированы в плоскости xz (рис. 4.1).

Известно, что ряд аспектов рассматриваемой проблемы удастся исследовать аналитически [52]. Однако для получения полной картины решения для решетки конечной длины при конкретных конфигурациях задаваемого импульса (к примеру, уединенные импульсы конечной длины и т. д.), численное моделирование процесса является наиболее приемлемым и эффективным методом решения.

4.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим периодическую слоистую среду, состоящую из чередующихся слоев изотропного материала толщины d_1 и анизотропного НЖК толщины d_2 (см. рис. 4.1).

Структурными элементами НЖК являются сильно вытянутые молекулы (поперечное сечение их составляет $\approx 4\text{\AA}$, а длина $\approx 20\text{\AA}$), поэтому с хорошей точностью их моделируют стержнями. В основе большин-

ства специфических для НЖК оптических эффектов лежит переориентация директора, т. е. изменение угла θ под действием внешнего постоянного электрического поля (действием поля напряжением в несколько вольт можно изменить угол ориентации от 0° до 90°). Электрические свойства среды характеризуются значениями диэлектрических проницаемостей. Для изотропной среды диэлектрическая проницаемость является скалярной функцией ε , а для анизотропной среды представляет собой тензор второго ранга $\hat{\varepsilon}$. Тензор диэлектрической проницаемости симметричен ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) и поэтому имеет только шесть независимых компонент. В системе координат x', y', z' , совпадающей с направлением главных осей, тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид [167]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{z'z'} \end{pmatrix}.$$

В системе координат x, y, z компоненты $\hat{\varepsilon}$ будут иметь следующий вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta & 0 & \frac{1}{2} \sin 2\theta (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) & 0 & \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где θ — угол между z и z' ; $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{y'y'}$, $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{z'z'}$.

Магнитные свойства среды характеризуются тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$. В рассматриваемых процессах магнитную проницаемость можно считать величиной постоянной μ .

Распространение электромагнитных волн в диэлектриках (при отсутствии токов) описывается следующими уравнениями Максвелла [47]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

где \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{D} — электрическая индукция; \vec{H} — вектор напряженности магнитного поля; \vec{B} — магнитная индукция; c — скорость света в вакууме ($c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/сек).

Векторные уравнения (4.2) дополняются двумя скалярными уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (4.3)$$

которые являются следствием векторных уравнений (4.2), если они выполнены в начальный момент времени t_0 . К уравнениям (4.2) необходимо добавить следующие материальные уравнения связи между вектора-

ми электрической и магнитной индукции и векторами напряженности электрического и магнитного поля

$$\vec{B} = \hat{\mu}\vec{H}, \quad \vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}. \quad (4.4)$$

В нашем случае $\mu = \text{const}$ и

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \quad (4.5)$$

В силу того, что волна распространяется вдоль оси z , функции \vec{E} и \vec{H} считаем зависимыми только от z и от времени:

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t), \quad \vec{H} = \vec{H}(z, t).$$

Таким образом, уравнения (4.2) в проекциях на оси x , y , z запишутся в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, & -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ 0 &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, & 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а скалярные соотношения (4.3) с учетом (4.5) примут вид

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) следует, что если в начальный момент времени D_z и H_z равны нулю, то они равны нулю в любой момент времени. Будем считать, что $D_z = 0$, $H_z = 0$. Из (4.4), (4.1) следует, что

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xz}E_z, \quad D_y = \varepsilon_{yy}E_y, \quad D_z = \varepsilon_{xz}E_x + \varepsilon_{zz}E_z, \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$E_z = \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}}E_x. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8), (4.9) в (4.6), получаем две независимые гиперболические системы двух уравнений, которые с точностью до обозначений совпадают с системой уравнений одномерной задачи теории упругости (1.1):

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, & -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{a(\theta)}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \text{II)} \quad & \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{\varepsilon_{\perp}}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где коэффициент $a(\theta)$ выражается через ε_{\perp} , ε_{\parallel} и угол наклона директора θ

$$a(\theta) = \frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}\sin^2\theta + \varepsilon_{\parallel}\cos^2\theta}.$$

Неизвестные функции удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} E_x(z, 0) &= E_x^0(z), & E_y(z, 0) &= E_y^0(z), \\ H_x(z, 0) &= H_x^0(z), & H_y(z, 0) &= H_y^0(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

и граничным условиям на концах отрезка $[0, L]$

$$(\alpha_i E_x + \beta_i H_y)|_{z=0,L} = f_i, \quad (\gamma_i E_y + \delta_i H_x)|_{z=0,L} = g_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Таким образом не только уравнения, но и вся задача расщепляется на две самостоятельные задачи, решение которых может быть найдено независимо друг от друга.

4.1.2. Алгоритм решения

Будем искать решение сформулированных задач методом характеристик, основываясь на явной схеме (1.10), (1.11) с выбором неравномерной сетки таким образом, чтобы обеспечить выполнение условий

$$\frac{v_i \tau}{h_i} = 1, \quad i = 1, 2. \quad (4.13)$$

В первой системе уравнений (4.10) скоростью распространения волн является величина $v_1 = \sqrt{\mu/a(\theta)}c$, во второй системе — $v_2 = \sqrt{\mu/\varepsilon_{\perp}}c$.

Для каждой из двух независимых задач адаптированная к среде сетка в случае слоистого материала строится следующим образом.

Пусть количество слоев с различными свойствами на отрезке $[0, L]$ равно N , а их длины равны d_1, d_2, \dots, d_N соответственно и пусть v_1, v_2, \dots, v_N — скорости распространения электромагнитных волн в этих слоях. Из (4.13) следует, что длины ячеек в слоях h_i связаны с v_i соотношениями

$$\frac{v_1}{h_1} = \frac{v_2}{h_2} = \dots = \frac{v_N}{h_N} \quad \text{или} \quad h_i = \frac{v_i}{v_1} h_1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пусть первый отрезок длины d_1 содержит k_1 ячеек, тогда $h_1 = d_1/k_1$ и

$$k_i = \frac{d_i}{h_i} = \frac{d_i v_1}{d_1 v_i} k_1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Суммарное число ячеек M на всем отрезке $[0, L]$ в этом случае будет

$$M = A k_1 = \left(1 + \frac{d_2 v_1}{d_1 v_2} + \dots + \frac{d_N v_1}{d_1 v_N} \right) k_1.$$

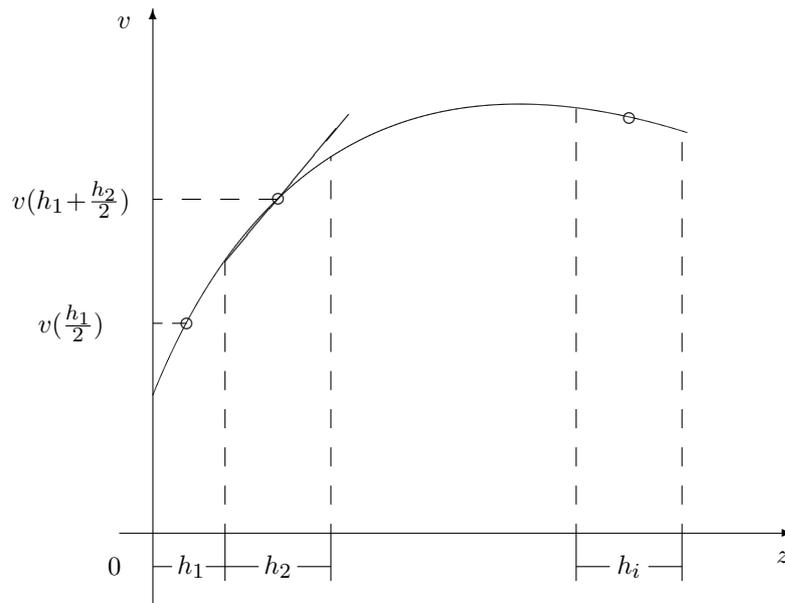


Рис. 4.2. К алгоритму дискретизации расчетной области

Число M , исходя из возможностей имеющейся вычислительной техники, задается, после чего число ячеек в каждой из однородных подобластей определяется из формул

$$k_i = \left[\frac{d_i v_1 M}{d_1 v_i A} \right], \quad i = 1, \dots, N,$$

где $[a]$ — ближайшее целое число к a . При этом ширина каждого слоя не равна d_i и принимает значение $d_i' = h_i k_i$, $i = 1, \dots, N$, но при достаточно большом M разница между d_i и d_i' незначительна.

Несколько сложнее выглядит дискретизация расчетной области в том случае, когда физические свойства среды на отрезке изменяются непрерывно, т. е. $v = v(z)$ — известная непрерывная функция z . Зададим некоторую длину первого интервала h_1 и в качестве v_1 выберем значение $v(h_1/2)$ в центре первой ячейки (рис. 4.2). Если в качестве v_2 выбрать значение $v(z)$ в центре второй ячейки неизвестной пока длины h_2 , то h_2 будет определяться в результате решения нелинейного уравнения $v(h_1/2)/h_1 = v(h_1 + h_2/2)/h_2$. После определения h_2 таким же образом определяется h_3 и т. д., так что значение h_i находится в результате последовательного решения i нелинейных уравнений, последнее из

Условие (4.15) означает, что из пространства, расположенного справа от расчетной области, никакой информации не приносится ($E_x - H_y$ — инвариант Римана, сохраняющий свое значение на приходящей справа характеристике).

Начальные условия для всех неизвестных функций при $t = 0$ — нулевые: $E_x(z, 0) = 0$, $E_y(z, 0) = 0$. Частота ω задавалась в единицах c/L , где c — скорость света в вакууме, а время в единицах L/c . Число периодов было выбрано равным $N = 20$, толщины слоев: изотропного — $d_1 = 0,1$ мкм, анизотропного — $0,9$ мкм. Общая длина образца — 20 мкм. Угол наклона директора $\theta = \pi/2$. Частота падающего на сверхрешетку излучения $\omega = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ лежит в центре самой высокочастотной запрещенной зоны спектра, полученного как решение дисперсионного уравнения для бесконечной периодической решетки [52]. Шаг по времени выбран $\tau = 0,05L/c$. При этом в изотропном слое количество ячеек $k_1 = 3$ ($h_1 = 0,0338$ мкм), в анизотропном слое $k_2 = 36$ ($h_2 = 0,025$ мкм).

При заданных параметрах системы электромагнитная волна практически полностью отражается. Установившийся режим колебаний электрического поля в сверхрешетке подобен колебанию стоячей волны. На рис. 4.3 приведены зависимости E_x от z для двух моментов времени. Зависимость (рис. 4.3, а) соответствует моменту времени t^* , когда значения электрического поля вдоль оси z достигают наибольшего абсолютного значения. Зависимость на рис. 4.3, б соответствует моменту времени $t^* + \pi/(2\omega)$. Частота установившихся колебаний совпадает с частотой падающего на сверхрешетку излучения.

При изменении угла ориентации оптической оси на $\pi/2$ ($\theta = 0$) и неизменных прочих параметрах системы сверхрешетка прозрачна для падающего излучения, т. е. коэффициент пропускания K (отношение квадрата амплитуды прошедшей волны к квадрату амплитуды падающей волны) равен единице. Однако амплитуда волны в системе периодически меняется с удвоенной частотой падающего излучения $2\omega = 3,8 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. На рис. 4.4 приведены два решения, соответствующие установившемуся режиму колебаний электрического поля с интервалом в полпериода. За это время волна проникает из сверхрешетки в вакуум на расстояние волны $\lambda/2$. Известно, что в случае однородного изотропного слоя ($\varepsilon = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel}$) толщины L установившемуся режиму колебаний электрического поля в слое так же соответствует периодическое изменение амплитуды волны с частотой 2ω .

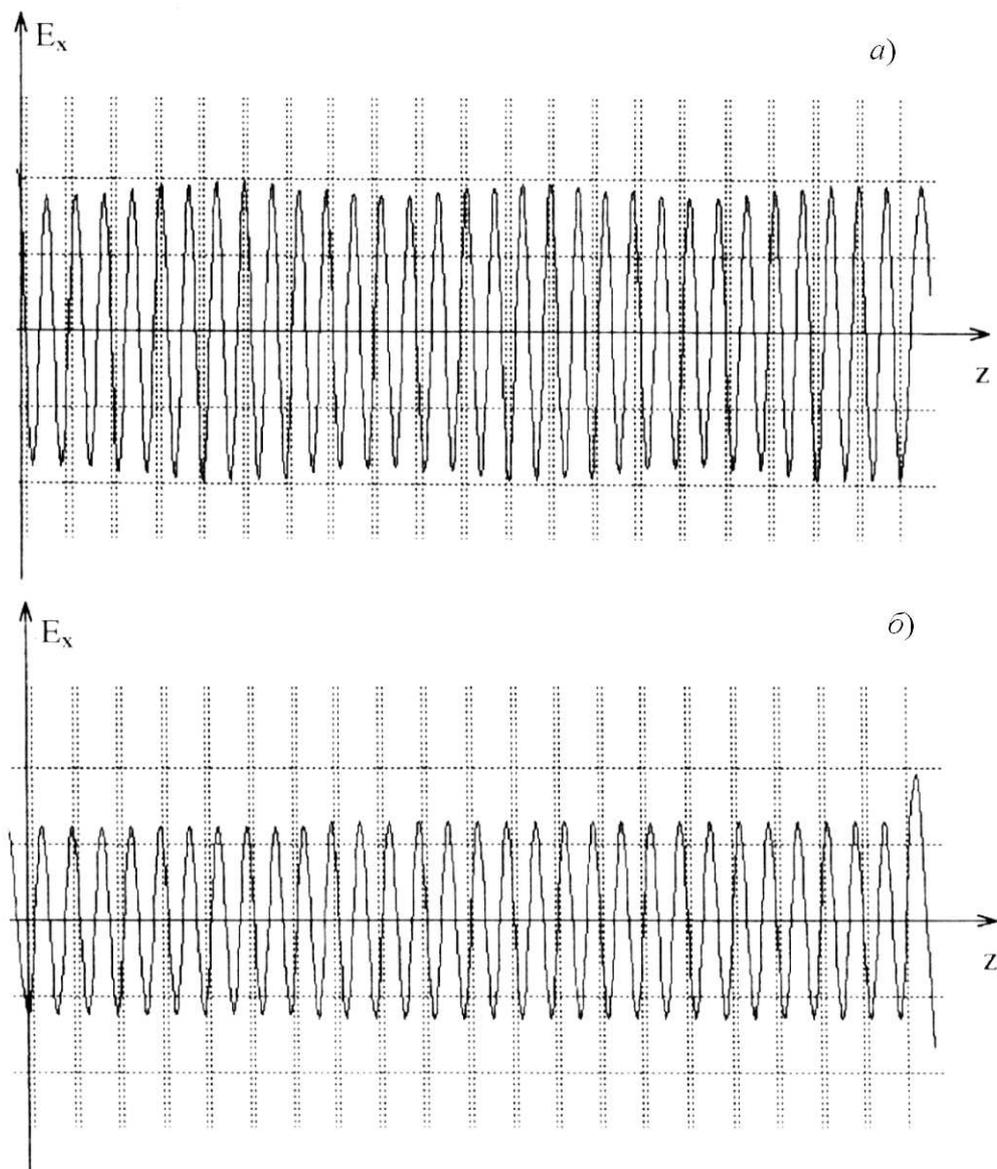


Рис. 4.3. Установившийся режим колебаний электрического поля в «зеркальной» сверхрешетке

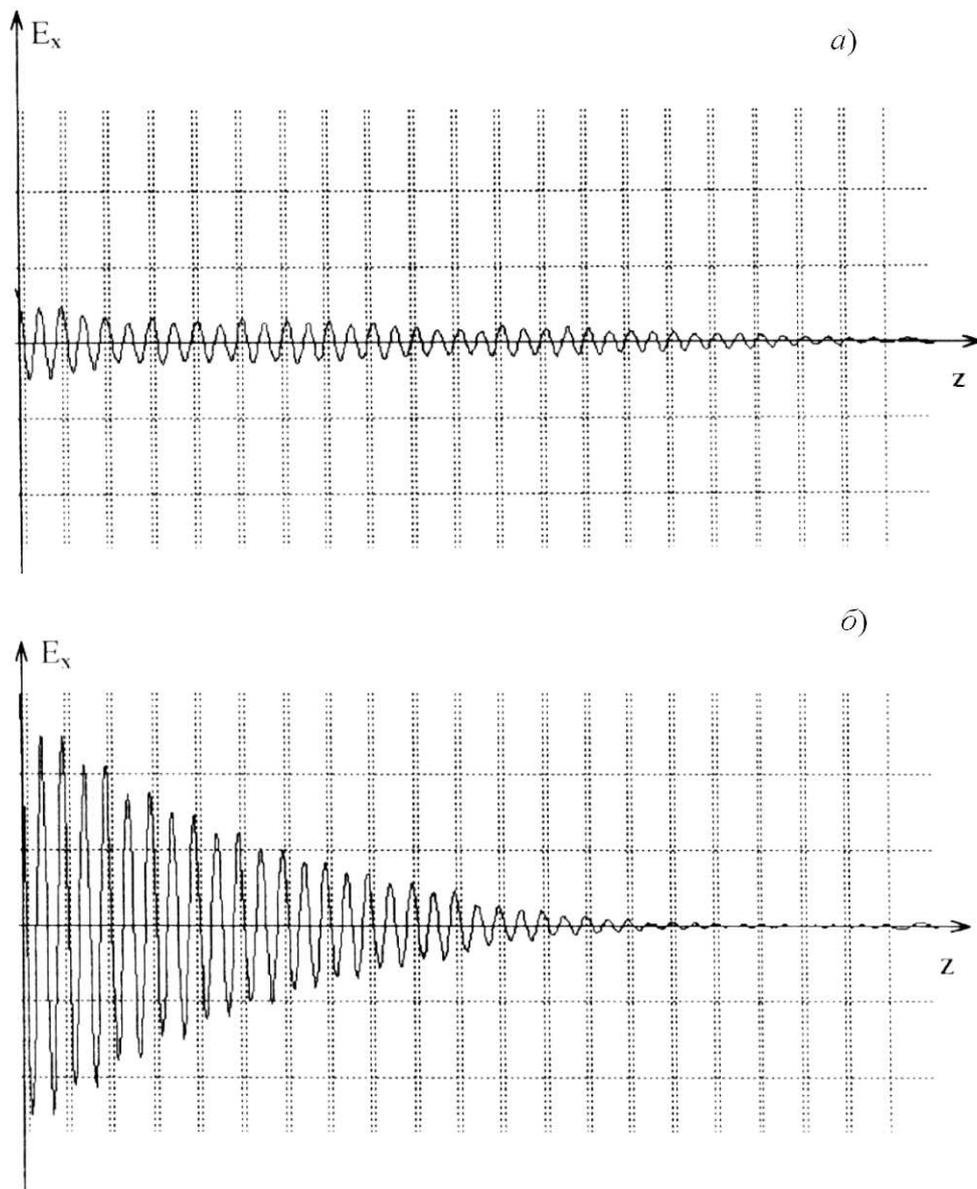


Рис. 4.4. Установившийся режим колебаний электрического поля в «прозрачной» сверхрешетке

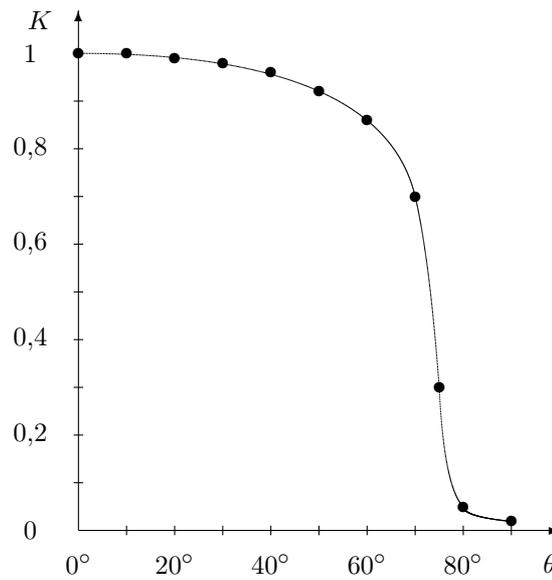


Рис. 4.5. Зависимость коэффициента пропускания от ориентации оптической оси

На рис. 4.5 приведена кривая зависимости коэффициента пропускания K от угла θ , изменяющегося от 0 до $\pi/2$. Видно, что при изменении угла θ режим отражения электромагнитной волны резко меняется на режим пропускания. Это, очевидно, обусловлено тем, что при изменении ориентации директора НЖК радикально перестраивается спектр электромагнитных волн.

При уменьшении угла θ от 90° до 80° частота падающего на сверхрешетку излучения ω лежит в области самой высокочастотной запрещенной зоны [52] и волна отражается от сверхрешетки. При других углах θ частота ω оказывается в разрешенной зоне спектра и поэтому коэффициент пропускания $K \approx 1$. При увеличении периода сверхрешетки в два раза ($d_1 = 0,2$ мкм, $d_2 = 1,8$ мкм) кривая зависимости $K(\theta)$ практически не отличается от приведенной на рис. 4.5. Отмеченные выше особенности имеют место и для волн, частоты которых лежат в других запрещенных зонах спектра. Зонный характер спектра достаточно отчетливо проявляется и при уменьшении числа периодов в среде, вплоть до десяти.

Таким образом, показано, что спектры и структура электромагнитных волн в сплошной среде обладают рядом особенностей, которые

прежде всего обязаны специфике НЖК, являющимся одним из чередующихся слоев сверхрешетки. Среди них следует отметить то обстоятельство, что спектр электромагнитных волн для данной области частот может качественно перестраиваться при изменении ориентации оптической оси НЖК. Кроме того, для реальной модели конечной сверхрешетки установлена сильная зависимость коэффициента пропускания от ориентации директора НЖК. Эти особенности не изучены экспериментально.

4.2. Моделирование распространения плоских ударных волн в анизотропной упругой среде

Данный раздел, как и предыдущий, посвящен численному моделированию нестационарных процессов в неоднородных (слоистых) средах. И хотя физическая природа рассматриваемых здесь механических явлений принципиально отличается от природы электромагнитных процессов, математические постановки тех и других задач чрезвычайно близки, а аналогии в их решении очевидны.

Моделирование распространения плоских волн в анизотропном, неоднородном, упругом теле приводит к необходимости решать смешанную задачу для одномерной системы перевязанных между собой гиперболических уравнений. Алгоритм численного решения таких задач описан в главе 1 и основан на приведении системы к каноническому виду. Однако, в случае системы большой размерности, такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. В этом разделе излагается итерационная процедура, основанная на последовательном решении независимых элементарных одномерных задач типа системы акустики (1.1).

4.2.1. Плоские волны в анизотропном упругом слое

Рассмотрим распространение в направлении оси z плоских волн в слоисто-неоднородном упругом слое $0 \leq z \leq L$, представляющем собой набор из K бесконечных в направлениях x и y упругих слоев постоянной толщины H_i , $i = 1, \dots, K$ (рис. 4.6). Будем считать эти слои трансверсально-изотропными. В каждом из слоев в системе координат x', y', z' , согласованной с кристаллографическими осями материала, закон Гука для случая трансверсально-изотропной среды (гексагональная

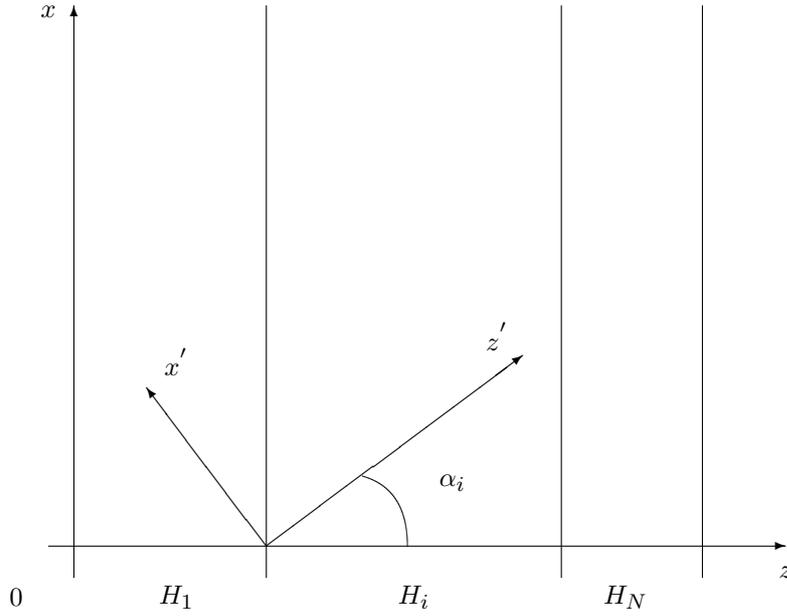


Рис. 4.6. Структура слоисто-неоднородной среды

система) можно записать в следующем виде [162]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, & \tau_{xy} &= 2\mu_1\varepsilon_{xy}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, & \tau_{xz} &= 2\mu_2\varepsilon_{xz}, \\
 \varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E_2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_2}\sigma_z, & \tau_{yz} &= 2\mu_2\varepsilon_{yz}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Константы упругости (модули Юнга E_1 и E_2 , коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 и модули сдвига μ_1 и μ_2), входящие в (4.16), связаны дополнительным соотношением $E_i = 2\mu_i(1 + \nu_i)$, $i = 1, 2$. Таким образом, трансверсально-изотропная среда в каждом слое характеризуется пятью модулями упругости, плотностью и наклоном кристаллографических осей к осям декартовой системы координат x, y, z .

Сделаем некоторые упрощающие предположения. Пусть граничные условия на поверхностях, перпендикулярных оси z ($z = 0$ и $z = L$), а так же начальные напряжения и массовые скорости частиц при $t = 0$ не зависят от координат x и y . Кроме того, предположим, что плоскость z', x' совпадает с плоскостью z, x , так что наклон кристаллографической оси однозначно определяется углом α наклона оси

z' к оси z , а вектор скорости как в начальный момент времени, так и в последующие лежит в плоскости z, x . Задача таким образом рассматривается в одномерной постановке — неизвестные функции являются функциями только пространственной переменной z и времени t .

В качестве неизвестных функций рассматриваются две компоненты вектора массовой скорости u и v — в направлениях z и x соответственно, а так же нормальная σ_z и касательная τ_{zx} компоненты тензора напряжений в системе координат z, x . Эти функции удовлетворяют уравнениям движения

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (4.17)$$

и закону Гука, который после дифференцирования по времени можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial z} + B \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = B \frac{\partial u}{\partial z} + C \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (4.18)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} A &= a \cos^4 \alpha + 2b \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + c \sin^4 \alpha + \mu_2 \sin^2 2\alpha, \\ B &= -\frac{1}{2}(a \cos^2 \alpha - b \cos 2\alpha - c \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha + \mu_2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha, \\ C &= \frac{1}{4}(a - 2b + c) \sin^2 2\alpha + \mu_2 \cos^2 2\alpha, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1 - \nu_1)E_2^2}{E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}, \quad b = \frac{\nu_2 E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}, \\ c &= \frac{E_1(E_2 - \nu_2^2 E_1)}{(1 + \nu_1)E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что матрица коэффициентов при производных по z в правой части (4.18) является положительно определенной. Таким образом для каждого слоя мы имеем одномерную систему четырех уравнений (4.17), (4.18) гиперболического типа [62] для определения четырех неизвестных функций $u, v, \sigma_z, \tau_{zx}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ r\sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ A & B & 0 & 0 \\ B & C & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Скорость распространения возмущений в описанном материале определяется величиной наклона характеристик системы $dz/dt = \pm c_+$, $dz/dt = \pm c_-$. Величины c_+ и c_- вычисляются как собственные числа

матрицы коэффициентов в правой части (4.20)

$$c_+^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2\rho}, \quad c_-^2 = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2\rho}.$$

Заметим, что если $A > C$, то $c_- \leq \sqrt{C}/\rho < \sqrt{A}/\rho \leq c_+$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для системы уравнений (4.17), (4.18). Пусть в начальный момент времени все неизвестные функции заданы:

$$\begin{aligned} u(0, z) &= u^0(z), & v(0, z) &= v^0(z), \\ \sigma_z(0, z) &= \sigma_z^0(z), & \tau_{zx}(0, z) &= \tau_{zx}^0(z), \end{aligned} \quad (4.21)$$

а на поверхностях $z = 0$ и $z = L$ поставлены краевые условия вида

$$(\alpha_1^\pm u + \beta_1^\pm \sigma_z)|_{z=0,L} = f_1^\pm, \quad (\alpha_2^\pm v + \beta_2^\pm \tau_{zx})|_{z=0,L} = f_2^\pm, \quad (4.22)$$

где $\alpha_i^\pm, \beta_i^\pm, f_i^\pm, i = 1, 2$ — известные функции t . Соседние слои жестко сопряжены — векторы напряжений и скорости на их общей границе непрерывны.

4.2.2. Численное решение на основе векторного расщепления

Если рассматриваемые слои отличаются механическими свойствами, решение поставленной задачи можно получить только численно. Заметим, что если материал является изотропным, т. е. $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2, \mu_1 = \mu_2$, или угол наклона α оси z' к оси z равен либо нулю, либо $\pi/2$, то $B = 0$ и задача (4.20)–(4.22) расщепляется на две независимые задачи вида

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (4.23)$$

$$W(0, z) = W^0(z), \quad P(0, z) = p^0(z), \quad (\alpha^\pm W + \beta^\pm P)|_{z=0,L} = f^\pm.$$

В первой системе $W = u, P = \sigma_z, D = A$, во второй $W = v, P = \tau_{zx}, D = C$.

Специальной, согласованной со скоростью распространения возмущений дискретизацией расчетной области можно получить точное решение обеих задач. Если $B \neq 0$, можно воспользоваться способом решения полной задачи, описанном в первой главе в случае равенства нулю младших членов, который практически сводится к процедуре диагонализации матрицы в системе (4.20). Рассмотрим эту процедуру подробнее на примере сформулированной задачи. Для этого запишем систему

уравнений (4.20) в виде

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = D \frac{\partial \vec{W}}{\partial z}, \quad (4.24)$$

где

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемую область на плоскости z, t снова разобьем на элементарные прямоугольники $\omega = \{z_j \leq z \leq z_{j+1}, t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ и в качестве приближенного решения в ω примем линейные по ξ и по η полиномы (1.60), (1.61)

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{W}_1 \eta, \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_1 \eta, \quad \vec{W}' = \vec{W}'_0 + \vec{W}'_1 \xi, \quad \vec{P}' = \vec{P}'_0 + \vec{P}'_1 \xi, \quad (4.25)$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}'}{\partial z}, \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = D \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z}. \quad (4.26)$$

Из (4.25), (4.26) следуют формулы пересчета на верхний по времени слой

$$\vec{W}^{j+\frac{1}{2}} = \vec{W}_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h} (\vec{P}_{j+1} - \vec{P}_j), \quad \vec{P}^{j+\frac{1}{2}} = \vec{P}_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h} D (\vec{W}_{j+1} - \vec{W}_j), \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{W}_{j+\frac{1}{2}} &= \vec{W}|_{\eta=-1}, & \vec{W}^{j+\frac{1}{2}} &= \vec{W}|_{\eta=1}, & \vec{W}_{j+1} &= \vec{W}'|_{\xi=1}, & \vec{W}_j &= \vec{W}'|_{\xi=-1}, \\ \vec{P}_{j+\frac{1}{2}} &= \vec{P}|_{\eta=-1}, & \vec{P}^{j+\frac{1}{2}} &= \vec{P}|_{\eta=1}, & \vec{P}_{j+1} &= \vec{P}'|_{\xi=1}, & \vec{P}_j &= \vec{P}'|_{\xi=-1}. \end{aligned}$$

Дополнительные уравнения для определения величин с целочисленными индексами строятся на основе справедливого для всех полиномов (4.25), удовлетворяющих (4.26), энергетического тождества

$$\iint_{\omega} \rho \vec{W}_0 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} d\omega + \iint_{\omega} \vec{P}_0 \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z} d\omega + \iint_{\omega} Q d\omega = \iint_{\omega} \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z} \vec{P}' d\omega,$$

где Q , с учетом (4.25), (4.26), можно записать в виде

$$Q = \left(\vec{W}'_0 - \vec{W}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \vec{P}'}{\partial z} \right) \frac{\partial \vec{P}'}{\partial z} + \left(\vec{P}'_0 - \vec{P}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} D \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z} \right) \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z}. \quad (4.28)$$

Матрицу D представим в виде

$$D = T \tilde{D} T^{-1}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \rho c_+^2, \quad \alpha_2 = \rho c_-^2,$$

где \tilde{D} — диагональная матрица, а T составлена из нормированных собственных векторов матрицы D , отвечающих собственным числам α_1

и α_2 :

$$T = \begin{pmatrix} -\theta & 1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{1}{1+\theta^2} \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ -1 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{B}{a - \alpha_1}.$$

Дополнительные уравнения сформулируем в виде

$$\begin{aligned} \vec{W}'_0 - \vec{W}'_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}T \begin{pmatrix} \frac{\tau+\omega_1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\tau+\omega_2}{\rho} \end{pmatrix} T^{-1} \frac{\partial \vec{P}'}{\partial z} &= 0, \\ \vec{P}'_0 - \vec{P}'_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}T \begin{pmatrix} (\tau + \gamma_1)\alpha_1 & 0 \\ 0 & (\tau + \gamma_2)\alpha_2 \end{pmatrix} T^{-1} \frac{\partial \vec{W}'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Система уравнений для определения целочисленных величин после этого может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \vec{W}'_{j+1} + \vec{W}'_j \\ \vec{P}'_{j+1} + \vec{P}'_j \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} \vec{W}'_{j+1} - \vec{W}'_j \\ \vec{P}'_{j+1} - \vec{P}'_j \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \vec{W}'_{j+\frac{1}{2}} \\ \vec{P}'_{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где M — матрица размерности 4×4 , содержащая константы диссипации $\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$. В первой главе было показано, что условие неотрицательности $\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$ обеспечивает устойчивость процесса вычисления приближенного решения, а формулы вычисления \vec{W}'_j, \vec{P}'_j будут явными, если собственные числа матрицы M равны либо 1, либо -1 .

Выпишем окончательные явные формулы для вычисления величин с целочисленными индексами

$$\begin{aligned} (\theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx})_j &= (\theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}}, \\ (-d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx})_j &= (-d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}}, \\ (-\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx})_{j+1} &= (-\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}}, \\ (d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx})_{j+1} &= (d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь $d_- = \sqrt{\rho c_-}$, $d_+ = \sqrt{\rho c_+}$. На общих границах между двумя соседними ячейками $u_j, v_j, (\sigma_z)_j, (\tau_{zx})_j$ непрерывны, а для вычисления граничных значений к уравнениям (4.30) следует добавить соответствующее краевое условие из (4.22). Схема устойчива если выполнено ограничение на шаг по времени τ

$$c_+ \tau \leq h.$$

Следует сказать, что даже в случае выполнения равенства в этом неравенстве, схема обладает положительной искусственной диссипацией, пропорциональной величине $(c_+/c_- - 1)$, и во всех случаях, когда

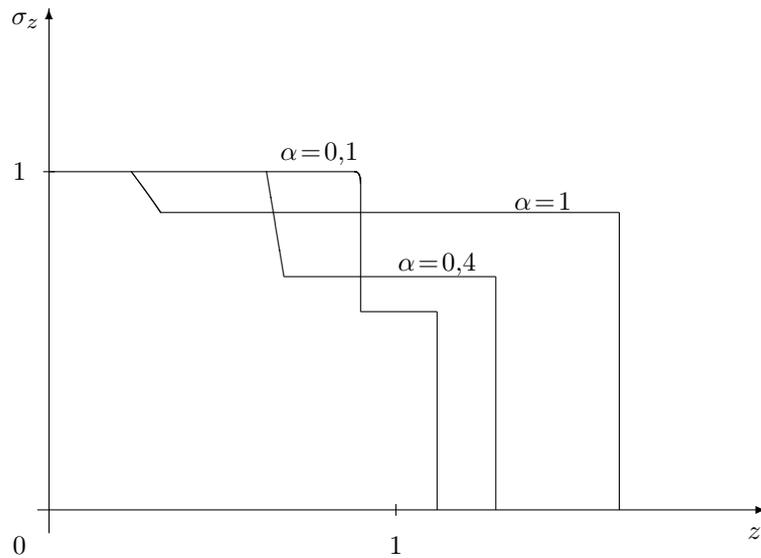


Рис. 4.7. Волна нормального напряжения в анизотропном слое

$c_- < c_+$, на фронте движущейся со скоростью c_- волны будет наблюдаться размазывание разрыва.

На рис. 4.7, 4.8 приведены результаты тестового расчета сформулированной задачи для случая одного анизотропного слоя, когда $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $\mu_1 = 0$, $\lambda_2 = \nu_2 E_2 / (1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2) = \mu_2$. В этом случае

$$A = \mu_2(1 + \sin^2 2\alpha), \quad C = \mu_2 \cos^2 2\alpha, \quad B = \mu_2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha.$$

Графики нормального σ_z и касательного τ_{zx} напряжений приведены для трех значений угла α : $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,4$, $\alpha = 1$. Начальные условия принимались нулевыми, к поверхности $z = 0$ приложено нормальное ударное воздействие: $\sigma_z = 1$. На рисунках приведены результаты решения после 200 шагов по времени. Заметим, что в отличие от случая изотропного материала, даже только при нормальном ударе графики нормального и касательного напряжений содержат два разрыва.

4.2.3. Итерационная процедура решения задачи

В описанном выше алгоритме решения необходимо приведение исходной системы уравнений в каждом из слоев к каноническому виду. Для случая матрицы большой размерности такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. К примеру, отказ от

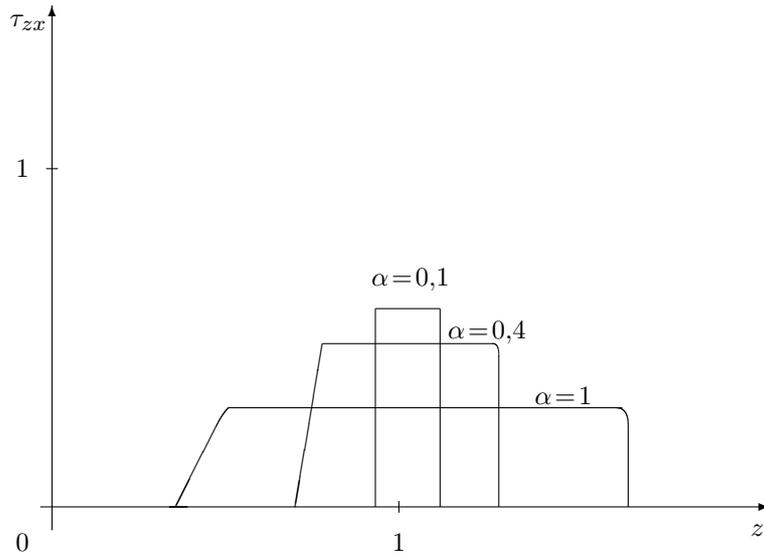


Рис. 4.8. Волна касательного напряжения в анизотропном слое

предположения о плоскопараллельном движении частиц в рассматриваемой задаче привел бы к системе перевязанных между собой шести уравнений. Положение тем более усложняется в двумерном случае.

Ниже предлагается итерационная процедура, основанная на двухэтапном решении одномерных задач, на которые расщепляется двумерная. Она представляет собой некоторую симметричную схему расщепления, и суть ее состоит в учете «мешающих» членов уравнений только на втором этапе в виде «поправочных» слагаемых.

Процедура численного решения системы (4.24) остается прежней вплоть до формулировки дополнительных уравнений. Разбив счетную область на элементарные прямоугольники ω и выбрав в качестве приближенного решения в ω линейные полиномы (4.25), получаем формулы пересчета приближенного решения на верхний слой по времени (4.27):

$$\begin{aligned}
 u^{j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h} (\sigma_{z\ j+1} - \sigma_{z\ j}), \\
 v^{j+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h} (\tau_{zx\ j+1} - \tau_{zx\ j}), \\
 \sigma_z^{j+\frac{1}{2}} &= \sigma_{z\ j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h} A(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h} B(v_{j+1} - v_j), \\
 \tau_{zx}^{j+\frac{1}{2}} &= \tau_{zx\ j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h} B(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h} C(v_{j+1} - v_j).
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Запишем в развернутой форме выражение для мощности искусственной диссипации Q в (4.28)

$$Q = \left(u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \left((\sigma'_z)_0 - (\sigma_z)_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\tau}{2} B \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \frac{\partial u'}{\partial z} + \left(v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} + \left((\tau'_{zx})_0 - (\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\tau}{2} B \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \frac{\partial v'}{\partial z}.$$

Дополнительные уравнения сформулируем в следующем виде:

$$u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}, \quad (4.32)$$

$$(\sigma'_z)_0 - (\sigma_z)_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\gamma}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} + \alpha \tau B \left(\widetilde{\frac{\partial u'}{\partial z}} \right),$$

$$v'_0 - v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} = \frac{\omega}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z}, \quad (4.33)$$

$$(\tau'_{zx})_0 - (\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\omega}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} + \beta \tau B \left(\widetilde{\frac{\partial v'}{\partial z}} \right).$$

На первом этапе следует положить α и β равными нулю и решить две независимые задачи (4.32), (4.33), совпадающие с задачами для случая изотропной среды. На втором этапе снова решаются две независимые задачи (4.32), (4.33), в которых α и β следует принять равными $1/2$, а производные $(\widetilde{\partial u' / \partial z})$ и $(\widetilde{\partial v' / \partial z})$ вычислить по решению, полученному на первом этапе.

Мощность искусственной диссипации при этом равна

$$Q = \frac{\gamma}{2\rho} \left(\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\omega}{2\rho} \left(\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} A \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 - \tau B \left[\frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial v'}{\partial z} - \alpha \frac{\partial u'}{\partial z} \left(\widetilde{\frac{\partial v'}{\partial z}} \right) - \beta \left(\widetilde{\frac{\partial u'}{\partial z}} \right) \frac{\partial v'}{\partial z} \right] + \frac{\omega}{2} C \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2,$$

а решения одномерных задач (4.32), (4.33) будут вычисляться по явным формулам, если

$$\gamma = h / \sqrt{A/\rho} - \tau, \quad \omega = h / \sqrt{C/\rho} - \tau.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве сходимости построенного таким образом приближенного решения к точному. Это доказательство почти полностью совпадает с тем, которое приведено для итерационной процедуры решения двумерных динамических задач в третьей главе. Отметим только, что алгоритм будет корректным, если константы диссипации γ и ω удовлетворяют неравенствам $\gamma \geq 0$, $\omega \geq 0$, откуда следует ограничение на шаг по времени

$$\tau \leq h/\sqrt{\max\{A, C\}/\rho}. \quad (4.34)$$

Таким образом, описанный алгоритм решения полной задачи исключает процедуру приведения матрицы к диагональному виду и сводится к независимому решению необходимого набора гиперболических систем двух уравнений (система уравнений акустики).

Следует сказать, что, как и в алгоритме, основанном на приведении системы к каноническому виду, использование в схеме максимально допустимого по условию (4.34) шага по времени не позволяет получать точное решение задачи, так как одномерные задачи (4.32), (4.33), описывающие распространение возмущений с различными скоростями, решаются хотя и независимо, но на одной и той же сетке, в силу чего мощность искусственной диссипации Q не обращается в нуль, а пропорциональна множителю $\sqrt{\max\{A, C\}/\min\{A, C\}} - 1$.

В результате расчетов по схеме (4.31)–(4.33) сформулированной выше задачи после двухсот шагов по времени получаются графики напряжений σ_z и τ_{zx} и скоростей, совпадающие с приведенными на рис. 4.7, 4.8.

4.2.4. Прохождение волны через многослойную упругую преграду

В качестве другого примера рассмотрим задачу о прохождении волны через многослойную упругую преграду. Хорошо известен факт (см., например, [87]), что с помощью слоистости можно существенно улучшить экранирующие свойства конструкции. Рассмотрим слоистый материал, представляющий собой пакет из двадцати расположенных перпендикулярно оси z пластин одинаковой толщины H , вырезанных из одного и того же трансверсально-изотропного упругого материала таким образом, что кристаллографическая ось z' в каждом слое либо совпадает с осью z ($\alpha = 0$), либо перпендикулярна ей ($\alpha = \pi/2$). Слои чередуются; скорость продольных волн в каждом четном слое в два раза больше, чем в нечетном.

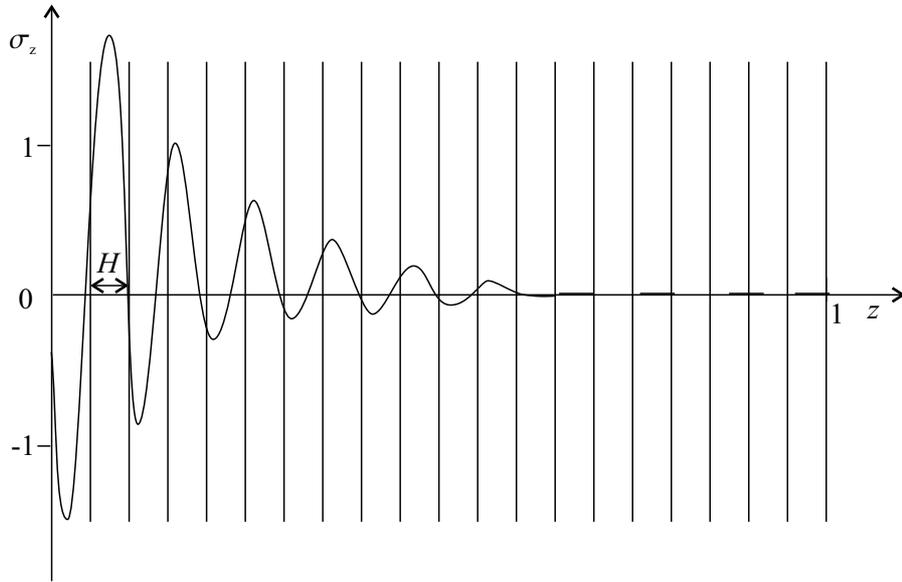


Рис. 4.9. Прохождение волны через многослойную упругую преграду

Пусть на пакет из полупространства $z < 0$ нормально падает плоская продольная монохроматическая волна. Граничные условия при $z = 0$ в этом случае имеют вид

$$(\sigma_z - \rho c_p u)|_{z=0} = \sin(2\pi k c_p t / H), \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0,$$

где k — число волн, укладывающихся в слое толщины H . На правом конце формулируются неотражающие условия, аналогичные рассмотренным в предыдущем параграфе:

$$(\sigma_z + \rho c_p u)|_{z=l} = 0, \quad (\tau_{zx} + \rho c_s v)|_{z=l} = 0.$$

При достаточно длительном счете в конструкции устанавливается некоторый квазистационарный режим. В [87] формулируется задача о проектировании из заданного набора материалов конструкции, максимально гасящей поток волновой энергии, прошедшей в полупространство $z > l$. Рассмотрим более простую задачу: определить число k (т. е. найти частоту падающей волны), при котором поток волновой энергии, характеризуемый квадратом отношения амплитуд прошедшей и падающей волн, будет минимальным. Для вышеописанной конструкции численный эксперимент дает значение $k \approx 0,7$. На рис. 4.9 приведен график σ_z после 2000 шагов по времени (примерно 6,5 пробегов волн по пакету).

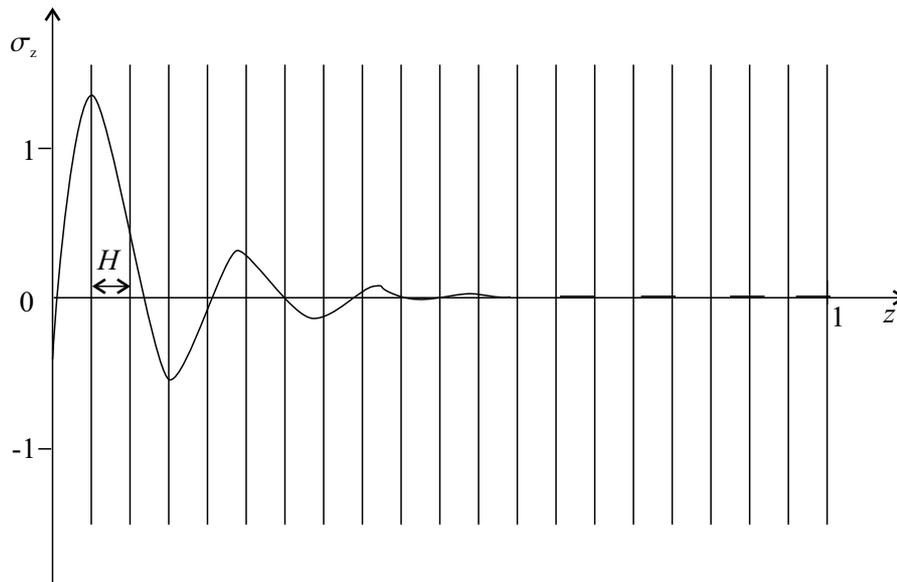


Рис. 4.10. Прохождение волны через многослойную упругую преграду

Эту же задачу, для пакета из такого же количества слоев, рассмотрим для случая, когда нечетные слои имеют нулевой наклон оси z' к оси z , а четные имеют угол наклона $\alpha = \pi/6$. Для упругих констант в слоях примем следующие значения: $\lambda = 2\mu$, $\mu_2 = 2\mu$, тогда в нечетных слоях $A = 4\mu$, $C = 2\mu$, $B = 0$, в четных — $A = 19\mu/4$, $C = 5\mu/4$, $B = \sqrt{3}\mu/4$. Считаем, что монохроматическая волна той же, что и в прошлой задаче, интенсивности падает из полупространства $z < 0$ под углом наклона к пакету равным $\pi/4$. На рис. 4.10 приведен график распределения нормального напряжения σ_z на момент времени, соответствующий 1700 шагам по времени (приблизительно 5,5 пробегов волны по пакету), число k здесь равно 0,35.

4.3. Моделирование множественного ударного воздействия жестких ударников на упругую плиту

Сложность задачи взаимодействия ударников с преградой заключена в существенной трехмерности как пространственных форм ударников, так и взаимодействия волновых полей, инициируемых в преграде ударниками при множественном воздействии. Тем не менее, доста-

точно эффективно исследовать процессы динамического деформирования преграды при невысокой интенсивности воздействия ударников на преграду, взаимодействие волновых полей, ограничиваясь простой реологией преграды. Эта возможность заключается в конструировании решения трехмерной задачи на основе известных (предварительно полученных) двумерных решений. Такое конструирование (суперпозиция решений) возможно при определенной постановке задачи и является достаточно эффективным алгоритмом решения. При этом появляется возможность решения следующих задач:

- вычисления концентрации напряжений в областях между ударниками вплоть до возникновения критической концентрации;
- моделирования (при наличии решений задачи для ударников достаточного малого диаметра) воздействия на преграду телом достаточно сложной пространственной формы путем конструирования (сборки) этой формы;
- задачи оптимизации (как с точки зрения наиболее эффективного воздействия на преграду, так и наиболее эффективной защиты от ударного воздействия), требующей многопараметрических расчетов.

4.3.1. Постановка задачи

Ограничимся рассмотрением процесса взаимодействия ударников с преградой в следующей постановке.

Пусть плита, выполненная из упругого материала, подвергается интенсивному нормальному ударному воздействию со стороны лицевой поверхности несколькими ударниками (рис. 4.11). Будем считать, что ударники имеют форму достаточно протяженных цилиндрических стержней, так что на процессы деформирования не будут влиять эффекты, связанные с отражением волн от тыльной стороны ударников, как следствие, с их отскоком от преграды и т. п. Допускается, что все ударники имеют различные известные скорости подлета U_1, U_2, \dots, U_N , и предполагается, что известны времена налетания, т. е. известны времена запаздывания Δt_i i -го ударника по сравнению с первым.

Будем предполагать, что преграда представляет собой упругую слоистую плиту, слои которой перпендикулярны общей оси, расположенной нормально к лицевой поверхности. Будем считать плиту доста-

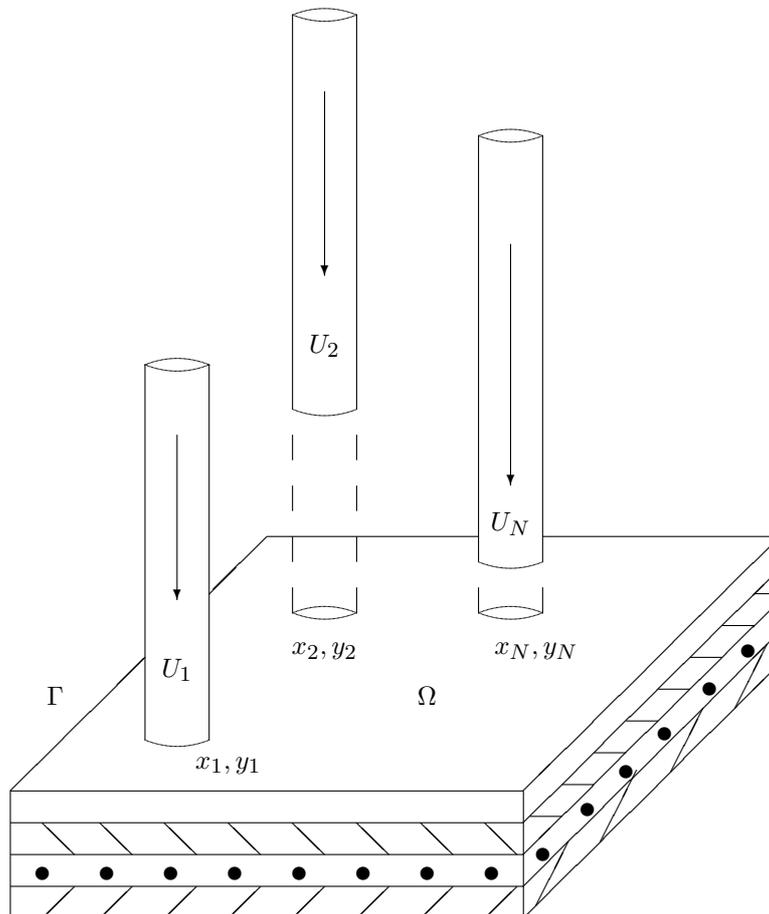


Рис. 4.11. Схема множественного ударного воздействия жестких ударников на упругую плиту

точно протяженной, так что влияние отраженных волн от краев преграды на процесс деформирования незначительно. Это справедливо в том случае, если точки контакта ударников и плиты достаточно удалены от торца пластины. Это характерное расстояние L может быть оценено как

$$L = \min \rho(M_0, \Gamma) \geq 2c_p^1 t^*,$$

где c_p^1 — скорость продольных упругих волн в приповерхностном слое; Γ — граница плиты; t^* — время пробега упругой волны до тыльной поверхности пластины; M_0 — точка контакта.

Такая линейная постановка задачи дает возможность получать решение сформулированной трехмерной задачи в виде суперпозиции решений двумерных осесимметричных задач о нормальном ударе одним центрально-симметричным ударником по слоисто-неоднородной упругой цилиндрической плите. Более того, двумерная осесимметричная задача для плиты определенной структуры и ударника определенного радиуса может быть решена только один раз, после чего ее решение, записанное в виде набора данных, используется при конструировании любой трехмерной задачи описанного класса.

Ясно, что в основе такого моделирования лежит численное решение двумерной упругой задачи и его успех в большой степени определяется тем, насколько качественно и точно удастся получить это решение. Алгоритм решения двумерной осесимметричной задачи изложен в третьей главе, там же приведен пример численного решения задачи, являющейся основным элементом решения трехмерной задачи. Эта элементарная задача формулируется следующим образом.

Внутри слоистого цилиндра радиуса R , длины H при $t > 0$ необходимо определить неизвестные функции $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{rz}, u_r, u_z$, удовлетворяющие системе уравнений (2.5). Начальные условия при $t = 0$ нулевые. Тыльная сторона $z = 0$ свободна от напряжений:

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0.$$

На лицевой поверхности $z = H$ внутри круга радиуса R_0 задана единичная нормальная скорость, вне этого круга поверхность является свободной:

$$u_z|_{z=H} = 1, \quad r \leq R_0, \quad \sigma_z|_{z=H} = 0, \quad r > R_0, \quad \tau_{rz}|_{z=H} = 0,$$

на боковой поверхности цилиндра $r = R$ ставятся неотражающие условия (глава 3). Между однородными слоями выполнены условия сопряжения векторов напряжения и скорости.

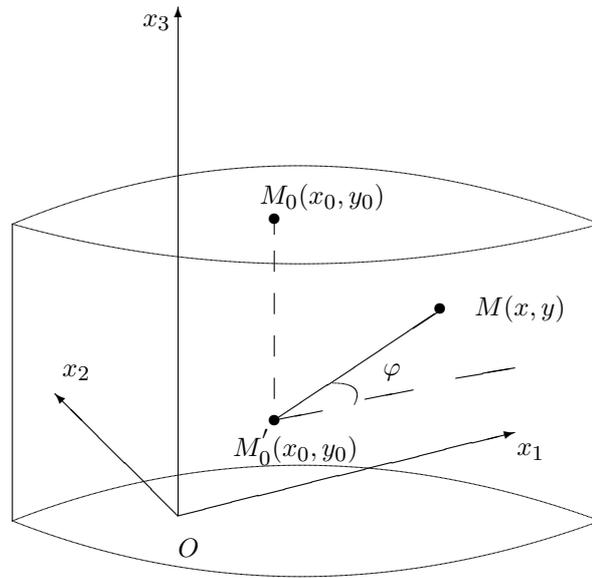


Рис. 4.12. Декартова прямоугольная система координат в пластине

4.3.2. Алгоритм сборки

Важным элементом решения задачи в комплексе является перенос решения осесимметричной элементарной задачи в цилиндрических координатах на трехмерную сетку, образованную декартовыми координатами в рассматриваемой пластине. К этому моменту мы уже имеем вычисленное в каждой ячейке области (r, z) в некоторые достаточно близкие моменты времени t значения компонент тензора напряжений и вектора скорости.

С пластиной свяжем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 4.12), ось x_3 направим вдоль оси z цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Мы хотим вычислить компоненты тензора напряжений T в системе координат (x_1, x_2, x_3) в плоскости $x_3 = x_3^*$ в случае, когда один ударник налетает на плиту в точке $M_0(x_0; y_0)$ с единичной скоростью. Ограничимся случаем вычисления компонент тензора не в произвольной точке плоскости $x_3 = x_3^*$, а в центрах ячеек квадратной сетки на этой плоскости, образованной прямыми, параллельными осям x_1 и x_2 (рис. 4.13). Пусть нас интересует решение в точке M . Зная расстояние $|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и ширину ячейки h , определяем два

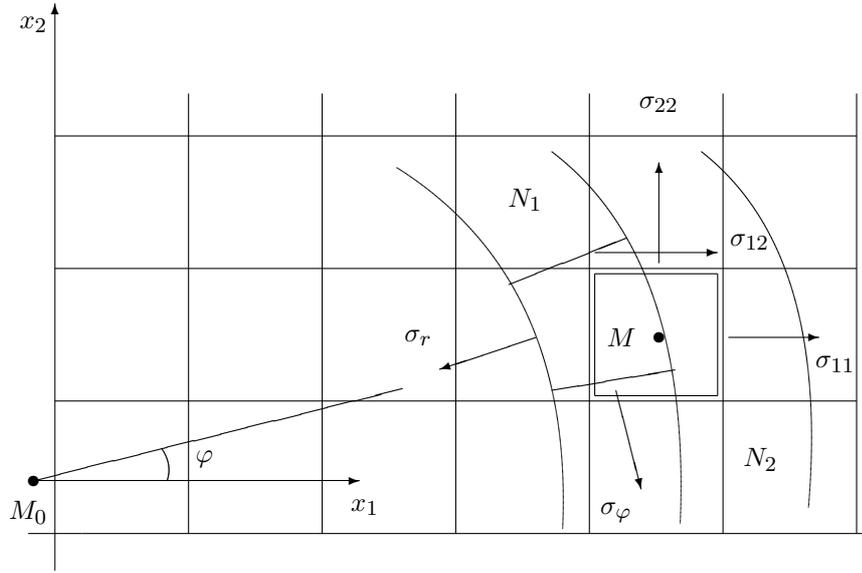


Рис. 4.13. К вычислению компонент тензора напряжений в центрах ячеек квадратной сетки

цилиндрических слоя с номерами N_1 и N_2 , между срединными поверхностями которых лежит точка M . Тогда значения компонент тензора напряжений T в точке M можно получить в результате линейной интерполяции по двум соседним значениям

$$\hat{\sigma}_r = \sigma_r|_{N_1} + \frac{N_1 M}{h} (\sigma_r|_{N_2} - \sigma_r|_{N_1}), \dots$$

$$\hat{\tau}_{rz} = \tau_{rz}|_{N_1} + \frac{N_1 M}{h} (\tau_{rz}|_{N_2} - \tau_{rz}|_{N_1}).$$

Связь между компонентами тензора напряжений в декартовой и цилиндрической системах координат дается формулами

$$\sigma_{11} = \hat{\sigma}_r \cos^2 \varphi + \hat{\sigma}_\varphi \sin^2 \varphi, \quad \sigma_{22} = \hat{\sigma}_r \sin^2 \varphi + \hat{\sigma}_\varphi \cos^2 \varphi,$$

$$\sigma_{33} = \hat{\sigma}_z, \quad \sigma_{12} = (\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_\varphi) \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$\sigma_{13} = \hat{\tau}_{rz} \cos \varphi, \quad \sigma_{23} = \hat{\tau}_{rz} \sin \varphi.$$

Входящие в формулы функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ вычисляются как

$$\sin \varphi = (x - x_0)/|M_0 M|, \quad \cos \varphi = (y - y_0)/|M_0 M|.$$

Таким образом, в центре каждой ячейки плоскости $x_3 = x_3^*$ вычисляются все компоненты тензора напряжений σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

Информативной характеристикой напряженного состояния в точке является интенсивность касательных напряжений. Она вычисляется как

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}.$$

4.3.3. Численная реализация задачи в комплексе

Окончательно алгоритм решения полной задачи представляет собой последовательность следующих этапов:

1. Для упругой однородной либо вертикально-неоднородной пластины решается элементарная задача об ударе налетающим на пластину с единичной скоростью жестким ударником радиуса R_0 . Это самый длительный этап, требующий значительного объема оперативной памяти. Он является автономным и выполняется вне зависимости от решения полной задачи. В результате решения создаются и хранятся файлы данных, содержащие компоненты тензора напряжений и вектора скорости во всех ячейках расчетной области на каждом шаге по времени. Решения для ударников различных радиусов и различных плит составляют банк задачи.

2. Решение самой задачи о множественном ударе не является столь ресурсоемким, так как конструируется из готовых решений, которые могут считываться в оперативную память по частям. Решение начинается с задания входной информации, состоящей из:

- количества налетающих ударников;
- координат центров каждого из них;
- скорости налета каждого из них;
- относительного запаздывания налета по сравнению с первым.

3. В диалоговом режиме принимается решение: в каких сечениях плиты и в какие моменты времени необходимо получить напряженно-деформируемое состояние и поле скоростей.

4. Перебирая все запланированные точки в каждом интересующем нас сечении, с помощью описанного выше алгоритма сборки находим решение. При этом в каждой точке суммируются решения, умноженные соответственно на U_i и сдвинутые по времени на Δt_i , где U_i — скорость подлета i -го ударника, Δt_i — его запаздывание по сравнению с первым.

5. Решение (поле напряжений, интенсивность касательных напряжений и т. д.) в слое выдается в виде набора линий уровня, для построения которых используется интерполяция известных в узлах регулярной сетки значений кубическими сплайнами.

Рассмотрим некоторые численные примеры, иллюстрирующие работоспособность описанного алгоритма и возможности предлагаемого метода. Характерными напряжениями при нормальном подлете ударников будут напряжения σ_z — нормальные к площадкам параллельным сечениям $z = \text{const}$. Во всех рассмотренных далее примерах была выбрана регулярная кубическая сетка $70 \times 70 \times 50$, плита считается однородной. Один шаг по времени соответствует времени прохождения продольной упругой волной одной ячейки. Все линейные размеры будем измерять в количестве расчетных ячеек.

На рис. 4.14 приведены изолинии поля напряжений σ_z и интенсивности напряжений I_2 в задаче об одновременном ударе двумя ударниками, центры которых расположены друг от друга на расстоянии равном трем диаметрам ударников (напряжения отнесены к $\lambda + 2\mu$). Радиусы ударников равны семи ячейкам. Решение приведено на сороковом шаге по времени в сечении 40.

На рис. 4.15 приведены изолинии поля напряжений σ_z и интенсивности напряжений I_2 в задаче об одновременном ударе по однородной плите тремя ударниками диаметром в семь ячеек. Скорости подлета всех ударников одинаковы. Их центры располагаются приблизительно в вершинах правильного треугольника со стороной 40 ячеек. Решение соответствует сороковому шагу по времени, т. е. моменту времени, когда волны напряжений от ударников движутся в глубь слоя.

Смоделируем с помощью узких ударников процесс воздействия на плиту тела достаточно сложной формы. В качестве тестового объекта выберем полый цилиндр, который будем приближать десятью жесткими сплошными цилиндрами диаметром равным 5 ячеек каждый, которые расположим в вершинах правильного десятиугольника так, чтобы обеспечивалось касание их друг с другом. Все элементарные ударники пусть действуют одновременно и с одинаковой скоростью. На рис. 4.16 приведено решение этой задачи для момента времени 80 в двенадцатом слое.

На рис. 4.17 приведено решение задачи, имитирующей «винтовое» воздействие на преграду. Моделируется удар по преграде полым цилиндром, срез которого представляет собой один виток пространственной винтовой линии. Взаимодействие такого тела с преградой описывается

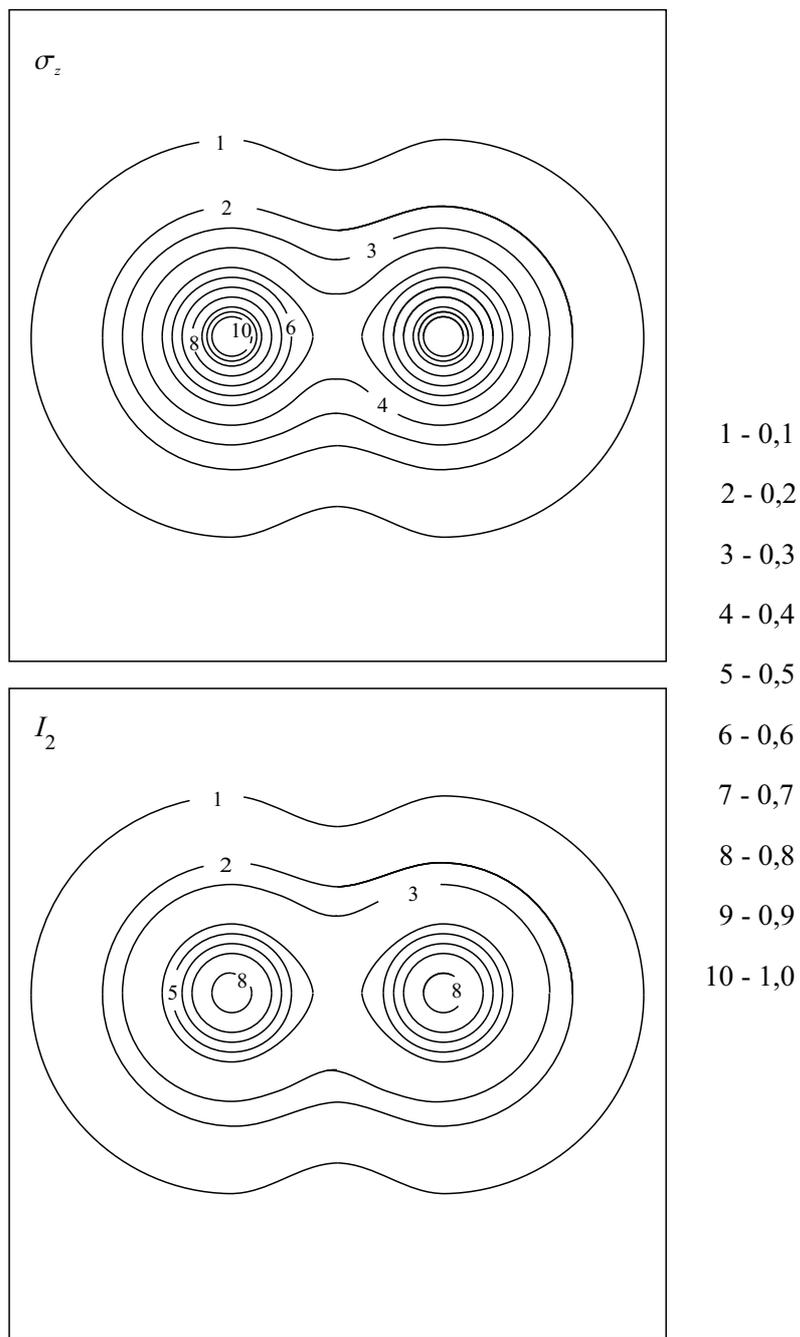


Рис. 4.14. Изолинии поля нормального напряжения и интенсивности напряжений при воздействии на плиту двух ударников ($t = 40\Delta t$)

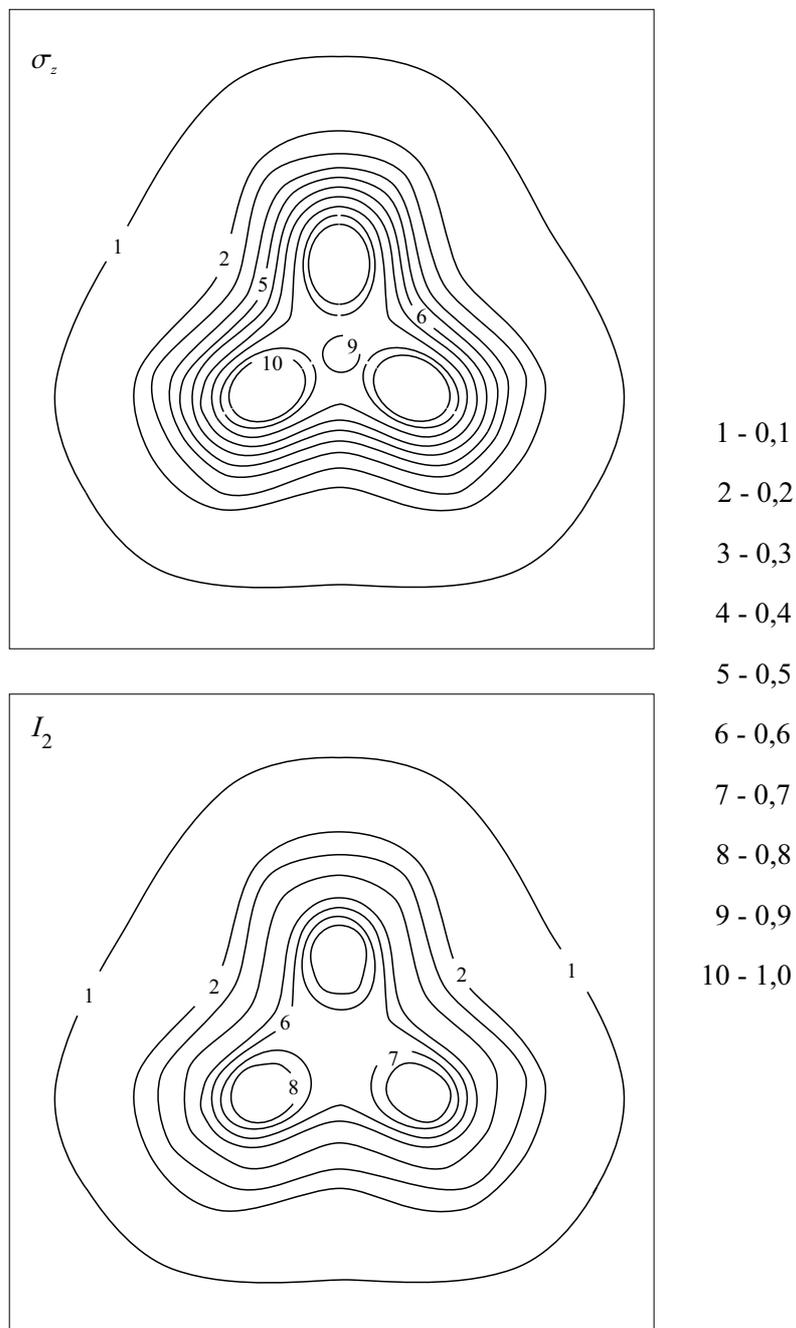


Рис. 4.15. Изолинии поля нормального напряжения и интенсивности напряжений при воздействии на плиту трех ударников ($t = 40\Delta t$)

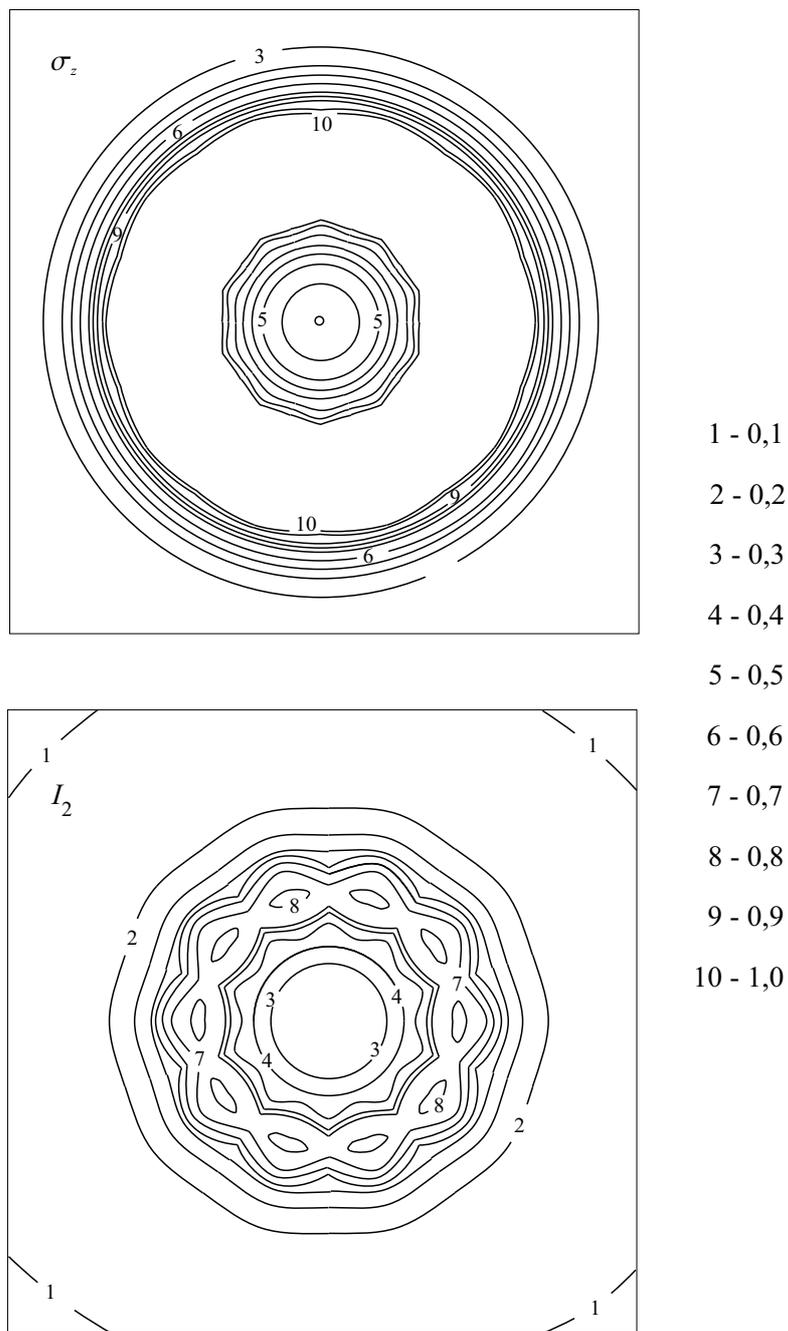
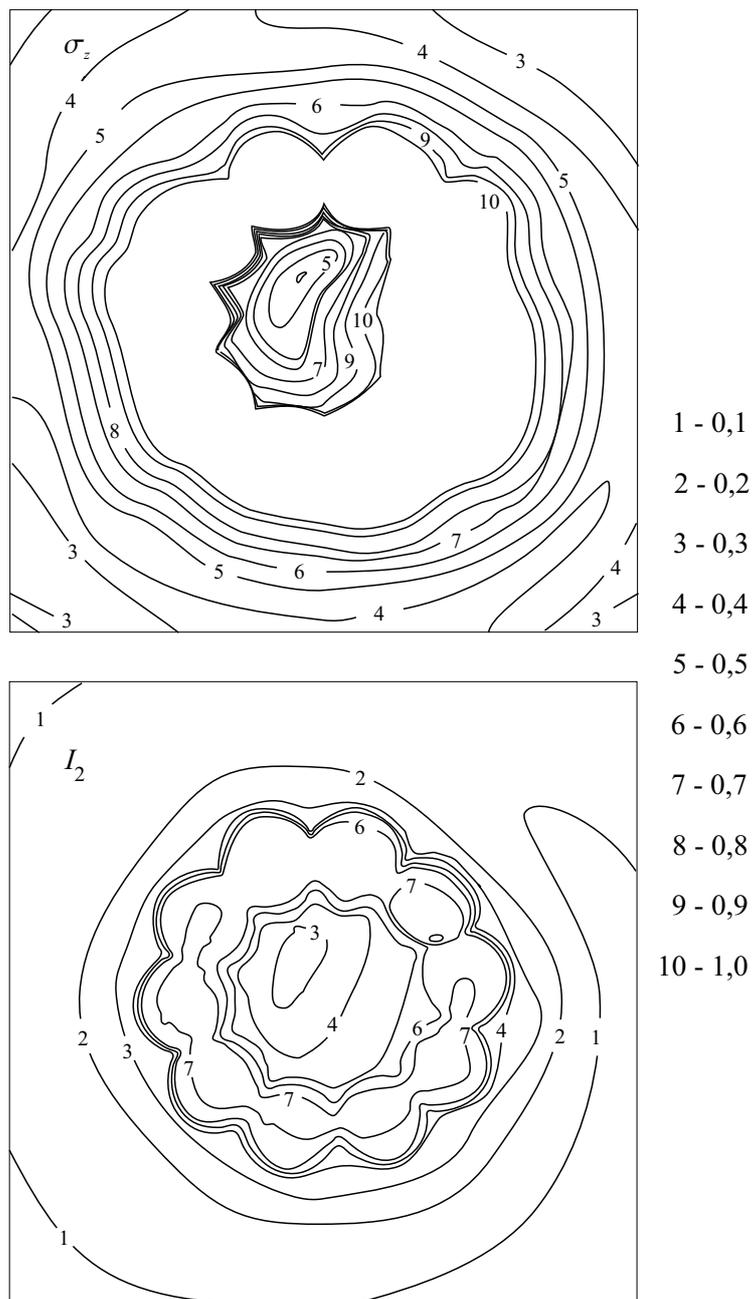


Рис. 4.16. Изолинии поля нормального напряжения и интенсивности напряжений при воздействии на плиту полого цилиндра ($t = 40\Delta t$)

Рис. 4.17. Моделирование «винтового» воздействия на преграду ($t = 40\Delta t$)

следующим образом: считается, что на плиту, как и в предыдущей задаче, действуют несколько (десять в данном случае) ударников, центры которых лежат на окружности, а сами они касаются друг друга; неровность сечения моделируется последовательным запаздыванием времени удара каждого последующего ударника по сравнению с предыдущим. В представленном на рисунках варианте запаздывание идет против часовой стрелки и составляет 5 интервалов по времени. Изолинии напряжений и интенсивности касательных напряжений приведены для момента времени 80 в двенадцатом слое.

4.4. Численное решение задачи распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде

В настоящее время для решения задач, описывающих распространение волн в неоднородных средах хорошо зарекомендовал себя полуаналитический метод, основанный на сведении исходной многомерной задачи к семейству одномерных краевых задач с последующим восстановлением решения [4, 154]. В то же время, задача распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде является классической задачей динамической теории упругости для слоисто-неоднородного тела, эффективный численный алгоритм решения которой был построен в предыдущей главе.

Следует сказать, что рассматриваемая в данном параграфе прямая задача сейсморазведки относится к классу задач, для которых требования к точности решения оказываются достаточно жесткими. Ее характерной особенностью можно считать достаточно малую зону действия источника возмущений по сравнению с масштабами области, в которой необходимо получить решение. Кроме того, сильно осциллирующий характер источника накладывает ограничения на шаг по времени, что, в свою очередь, приводит к необходимости достаточно мелкой дискретизации расчетной области.

Анализ задачи и тестовые расчеты показывают, что ее численное решение на основе разностной схемы принципиально возможно только в случае, если решены следующие проблемы:

- алгоритм дает монотонное решение и, в частности, не искажает его в окрестности оси симметрии;

- схема не обладает искусственной диссипацией на всех типах волн — разрывах решения (наличие даже малой схемной вязкости очень скоро приводит к полному затуханию возмущения);
- алгоритм допускает обобщение на случай существенно неоднородной среды;
- условия на границах выделенного для численного решения объема эффективно обеспечивают неотражение от этих границ.

При построении итерационного численного алгоритма сформулированные требования были в основном выполнены.

4.4.1. Постановка задачи

Прямая задача сейсмологии является классической динамической задачей определения напряженно-деформированного состояния слоистой, вертикально-неоднородной упругой среды, которую можно сформулировать следующим образом.

Рассматривается слоистая упругая среда (рис. 4.18). На рисунке y или z — координата, направленная в глубину среды ($0 \leq y, z \leq K$); x или r — координата на дневной поверхности $z = 0$, $y = 0$ ($0 \leq x, r \leq M$) для двух вариантов постановки — в декартовой системе координат (x, y) или для осесимметричной задачи (r, z) соответственно.

Неизвестными функциями являются: три компоненты тензора напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ в плоском случае и четыре компоненты $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz})$ в осесимметричном варианте; а так же две компоненты вектора скорости $(u_x, u_y$ или $u_r, u_z)$ для двух указанных вариантов соответственно.

Начальные условия задачи, как правило, можно принять нулевыми.

Граничные условия будут различными в зависимости от расположения и характера источника возмущений. К примеру, для случая заглубленного источника их можно сформулировать следующим образом:

1. Поверхность $y = 0$ ($z = 0$) свободна от напряжений:

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad (\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0).$$

2. Ось Oy (Oz) — ось симметрии:

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0 \quad (u_r|_{r=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=0} = 0).$$

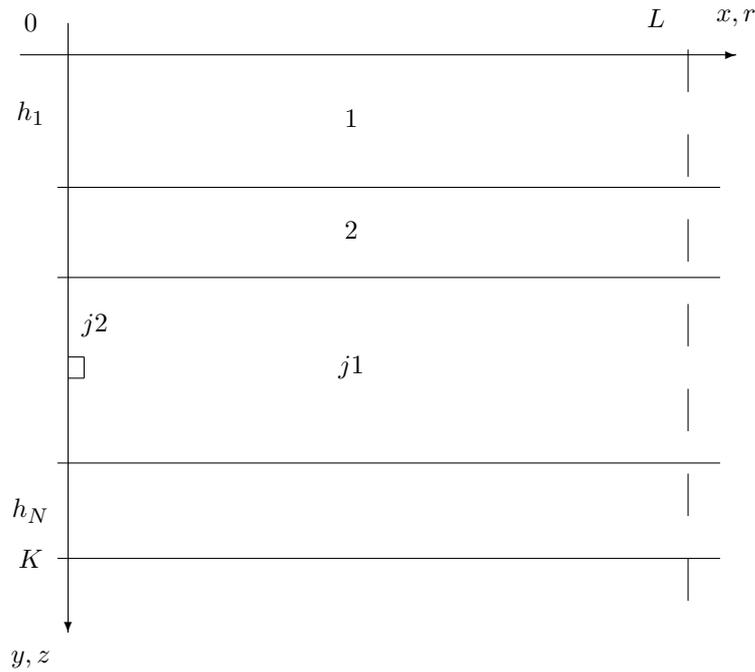


Рис. 4.18. Структура слоистой вертикально-неоднородной упругой среды

3. При $x = L$ ($r = L$) заданы неотражающие условия в виде:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \rho c_p u_x)|_{x=L} = 0, \quad (\tau_{xy} + \rho c_s u_y)|_{x=L} = 0, \\ \{[(r\sigma_r) + L\rho c_p u_r]|_{r=L} = 0, \quad [(r\tau_{rz}) + L\rho c_s u_z]|_{r=L} = 0\}. \end{aligned}$$

4. При $y = K$ ($z = K$) заданы неотражающие условия в виде:

$$\begin{aligned} (\sigma_y + \rho c_p u_y)|_{y=K} = 0, \quad (\tau_{xy} + \rho c_s u_x)|_{y=K} = 0, \\ \{[(r\sigma_z) + r\rho c_p u_z]|_{z=K} = 0, \quad [(r\tau_{rz}) + r\rho c_s u_r]|_{z=K} = 0\}. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность; c_p , c_s — скорость продольных и поперечных волн соответственно. Условия 2 выполнены на оси Oy (Oz) всюду, кроме некоторой достаточно узкой области, в которой расположен источник возмущений. Действие этого источника, размеры которого могут быть, вообще говоря, существенно меньше размеров расчетной ячейки, будем моделировать следующим образом. Зная расположение источника возмущений, мы будем решать одномерную сферически симметричную задачу о распространении упругих волн до тех пор, пока фронт волны не выйдет на какую-либо из границ области. Построенное решение

проектируем на разностную сетку задачи и полученное таким образом решение берем в качестве начальных данных. Для плоской задачи в декартовой системе координат процедура расчета остается такой же, только в качестве начального условия берется решение одномерной осесимметричной задачи.

Иногда источник возмущений можно считать расположенным на поверхности $z = 0$ ($y = 0$). В этом случае его действие моделируется заданием в некоторой малой окрестности нуля поверхности $z = 0$ ($y = 0$) нормального напряжения σ_z (σ_y) либо вертикальной составляющей скорости u_z (u_y), как функций времени. Ясно, что в этом случае радиус зоны действия такого источника не удастся сделать более мелким, чем ширина одной ячейки введенной разностной сетки.

Алгоритм численного решения сформулированной задачи реализован в виде набора программ, написанных на языке FORTRAN Power Station фирмы Microsoft. Разработаны два независимых варианта программы для решения плоской и осесимметричной задач, общей частью которых является только файл данных, содержащий информацию о конкретной модели среды. Комплекс программ решения прямой задачи сейсмологии работает следующим образом.

I. Для задания конкретной модели среды необходимо заполнить файл данных `in.dat`, содержащий всю информацию об области.

В этом файле следует задать:

1. Расстояние OL (м);
2. Количество однородных слоев;
3. Максимальную размерность одного используемого в программе массива;
4. Время длительности счета (с).

II. После этого задаются механические характеристики каждого слоя (существующий вариант позволяет ввести до 50 слоев):

1. Номер слоя;
2. Толщина слоя (м);
3. Плотность (г/см^3);
4. Скорость продольных упругих волн (м/с);
5. Отношение скоростей поперечной и продольной волны (c_s/c_p).

При запуске самой программы решения задачи сейсмологии данные считываются из файла `in.dat`, после чего в ней вычисляется и выдается на экран минимально допустимое ресурсом данной машины значение шага по времени τ_{\min} и предлагается указать значение $\tau \geq \tau_{\min}$, с которым будет работать программа. После задания τ производится

автоматическое разбиение расчетной области на элементарные ячейки, согласованное с моделью среды. Получающуюся при этом разностную сетку можно посмотреть на экране монитора.

После того, как согласованная со скоростями слоев сетка рассчитана, на экран выдается массив значений $N(j)$ и $M(j)$, где $N(j)$ — количество ячеек в j -м слое по оси x (или r), $M(j)$ — количество ячеек в j -м слое по оси y (или z) и суммарная размерность массива неизвестных функций.

Далее предлагается указать номер слоя $j1$ и номер ячейки в нем $j2$ ($j2 \geq 2$), из которой распространяется возмущение, а также тип граничных условий $j3$ ($j3 = 1$ — задана скорость, $j3 = 0$ — задано напряжение). Зависимость напряжения или скорости от времени предварительно задается в файле данных `vnag.dat`. Известно, что вполне можно ограничиться этой зависимостью в виде

$$f(t) = e^{-at} \cos \omega t.$$

Решая задачу для областей с размерами порядка 3 км × 3 км, обладая ресурсом оперативной памяти компьютера 16 Мб, частоту колебаний имеет смысл выбирать не выше 150 Гц, декремент колебаний a может быть любым.

После этого программа начинает работу. В процессе счета, для контроля работы на экран выдается номер текущего шага по времени.

Результатом работы программы может быть значение любой неизвестной функции в любой из ячеек сетки на каждом шаге по времени. Для специалистов в области геофизики представляет интерес массив на каждом шаге по времени значений вертикальной составляющей скорости u_z в 24-х, 48-и или 96-и равномерно распределенных по поверхности $z = 0$ ячейках. В результате создается файл `vix.sct` в формате системы SCS-3, снабженный этикеткой для просмотра его с помощью стандартных средств обработки и анализа геофизической информации (к примеру, пакета ASPIS, PROMAX и т. д.).

4.4.2. Задача о действии заглубленного источника импульсного типа в однородной полубесконечной среде

Чтобы показать как выглядит и какую информацию дает собранный таким образом временной разрез конкретного профиля, рассмотрим простейшую модельную задачу действия заглубленного (на одну ячейку) источника импульсного типа в однородной полубесконечной

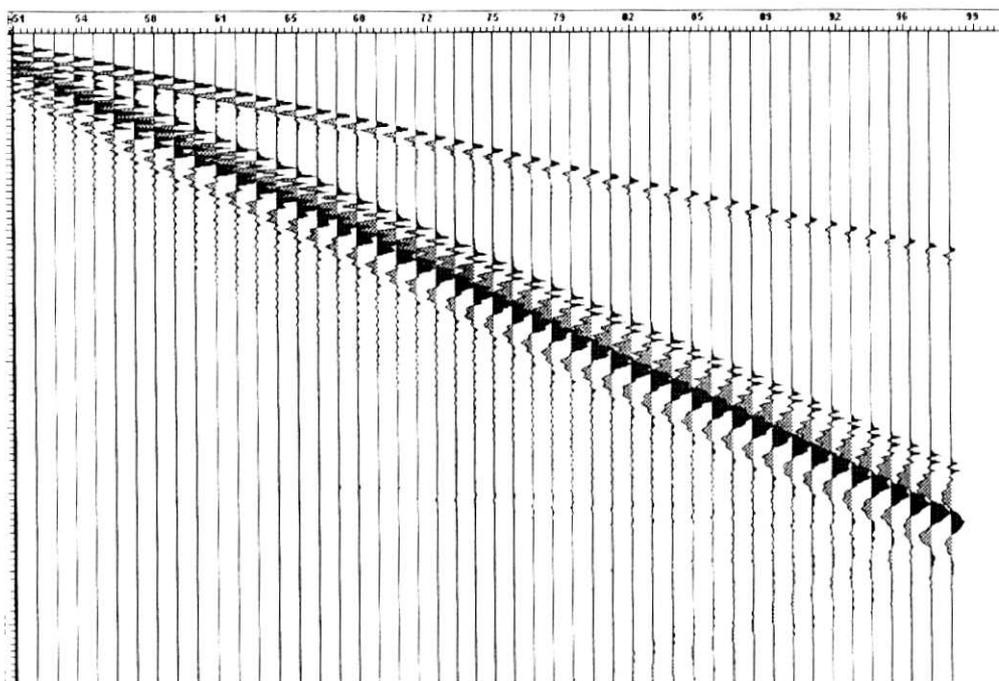


Рис. 4.19. Сейсмограмма сигнала в упругой однородной полубесконечной среде

среде. Плотность среды принята равной единице, скорость продольных упругих волн в два раза превышает скорость поперечных волн и равна 1 км/с. На рис. 4.19 с помощью пакета ASPIS изображены 48 сейсмограмм (трасс) длительностью 0,5 с каждая, расположенных на расстоянии 4 м друг от друга. При численном решении задачи шаг по времени τ выбирался равным 1 мс (0,001 с). На рис. 4.19 на невозмущенном фоне четко видны три «прямые линии», имеющие следующий смысл. Наиболее крутая, расположенная выше других, «прямая» («прямая волна») получается в результате регистрации на каждом из 48-и приемников прихода со скоростью продольных упругих волн сигнала, задаваемого источником возмущения.

Вторая, более пологая, «прямая» (ее наклон к вертикальной оси ровно в два раза меньше) образуется в результате регистрации сдвиговых (поперечных) волн. Немного положе на сейсмограмме расположена «прямая», возникшая в результате регистрации приемниками волны Релея, скорость которой несколько меньше скорости распространения

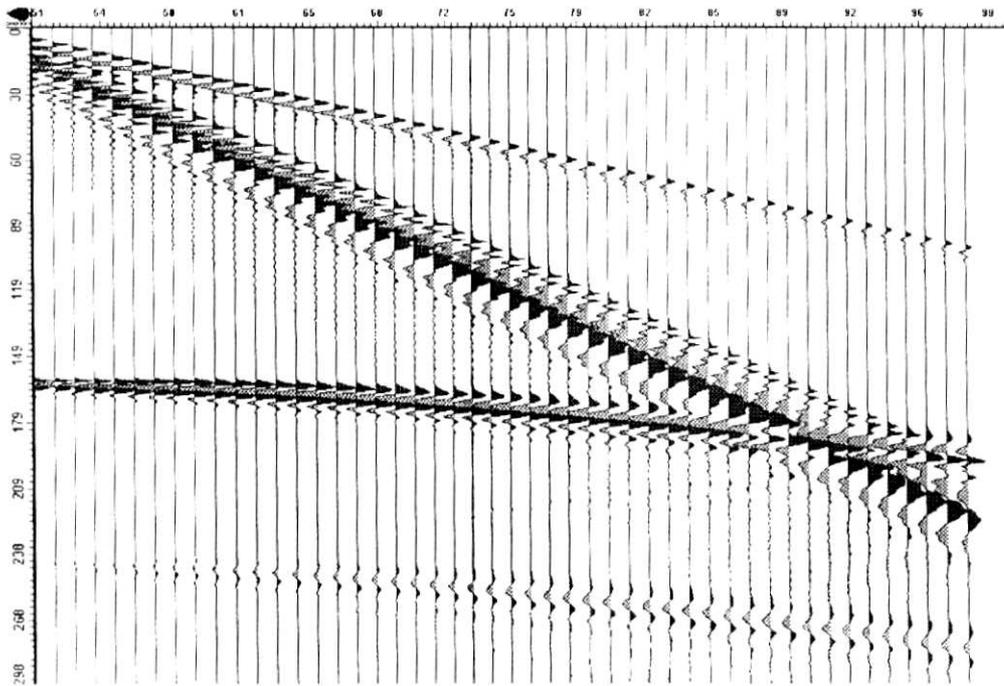


Рис. 4.20. Сейсмограмма сигнала для двухслойной упругой среды

поперечных волн. Если источник удалить от поверхности на достаточную глубину, на сейсмограмме будут четко выделены только продольная и поперечная волны, а взаимодействие возмущения от источника со свободной поверхностью будет регистрироваться очень слабо.

На рис. 4.20 приведена сейсмограмма регистрации сигнала от такого же источника для двухслойной упругой среды. Верхний слой глубиной 50 м имеет те же упругие свойства, что и в предыдущем примере, а второй полубесконечный слой имеет плотность 2 г/см^3 и скорость продольных упругих волн — $2,5 \text{ км/с}$. В результате отражения сигнала от границы раздела двух сред, регистрируемая приемниками картина здесь существенно сложнее.

Для апробации работы программы был рассмотрен конкретный профиль в районе Гольчихинской скважины (п/о Таймыр). Физическая модель глубинного разреза в районе скважины приведена на рис. 4.21. В таблице 2 приведены характеристики слоев.

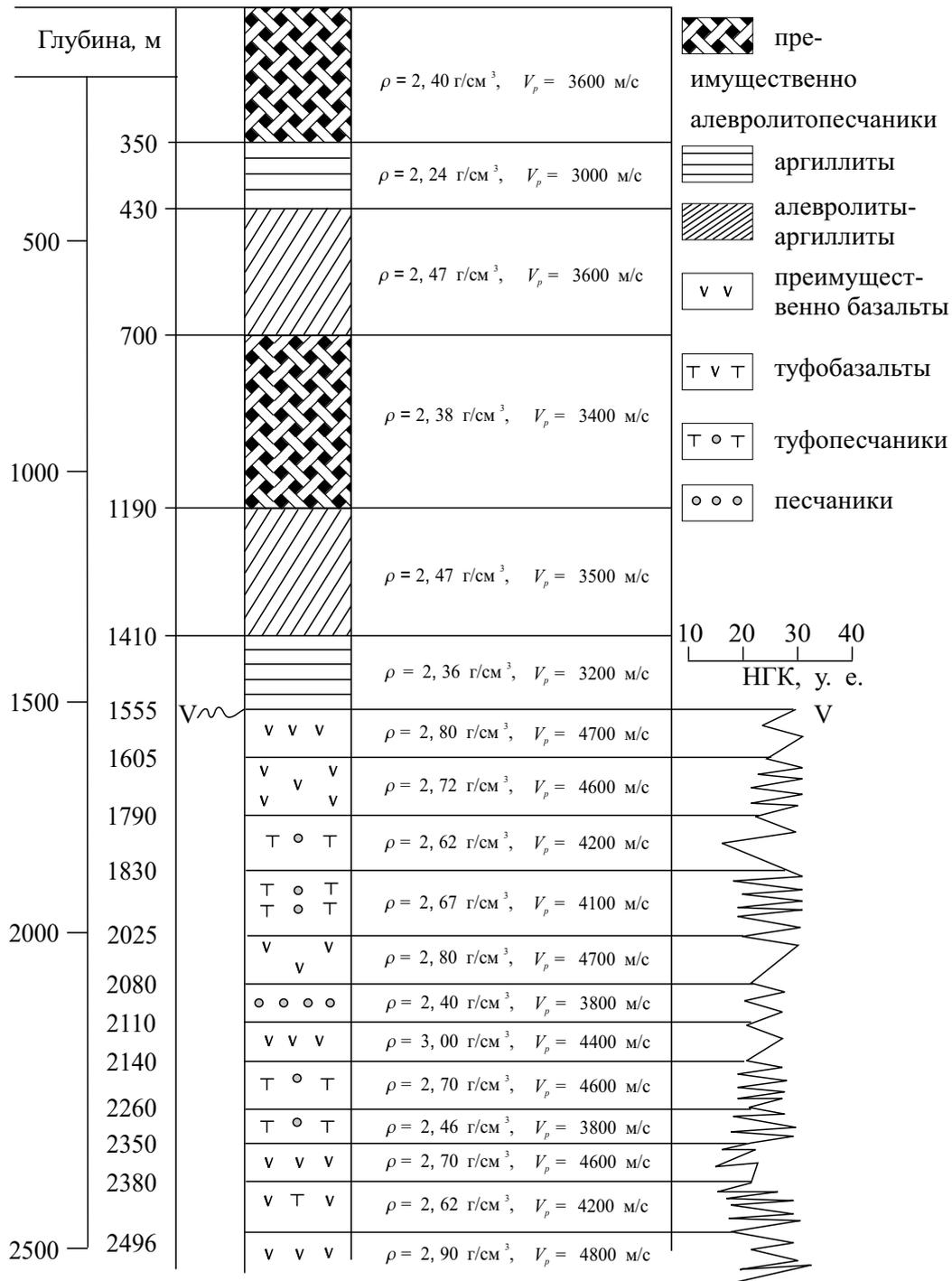


Рис. 4.21. Физическая модель глубинного разреза в районе Гольчихинской скважины

Таблица 2. Характеристики слоев глубинного разреза

Номер слоя	Толщина слоя, м	Плотность ρ , г/см ³	Скорость c_p , м/с	Отношение c_s/c_p
1	350	2,40	3600	0,5
2	84	2,24	3000	0,5
3	250	2,47	3600	0,5
4	480	2,38	3400	0,5
5	220	2,47	3530	0,5
6	90	2,36	3180	0,5
7	65	2,80	4740	0,5
8	160	2,72	4600	0,5
9	30	2,62	4100	0,5
10	170	2,60	4700	0,5
11	65	2,80	4700	0,5
12	26	2,40	3800	0,5
13	34	3,00	3800	0,5
14	34	3,10	3800	0,5
15	79	3,00	3800	0,5
16	32	2,70	4600	0,5
17	120	2,62	4235	0,5

В качестве граничных условий задавалась поверхностная нагрузка, распределенная по одной (первой от оси) ячейке $\sigma_z|_{z=0} = Ae^{-at} \cos(2\pi\omega t)$, где частота ω выбиралась равной ≈ 100 Гц, а декремент a обеспечивал затухание колебаний примерно на порядок на одном периоде. Шаг по времени выбран равным 2 мс; расчетная область при этом содержит примерно 100 000 ячеек. Сигнал снимался на 48 расположенных на поверхности $z = 0$ через каждые 50 метров приемниках, фиксирующих вертикальную составляющую скорости u_z . Сейсмограмма длительностью 2 с приведена на рис. 4.22.

На рис. 4.23 фрагмент рассчитанной сейсмограммы длительностью 1,8 с, после использования стандартной кинематической обработки с помощью пакета PROMAX, приведен в сравнении с реальным суммарным (по шести источникам) временным разрезом в районе скважины (на рис. 4.23 светлая вставка).

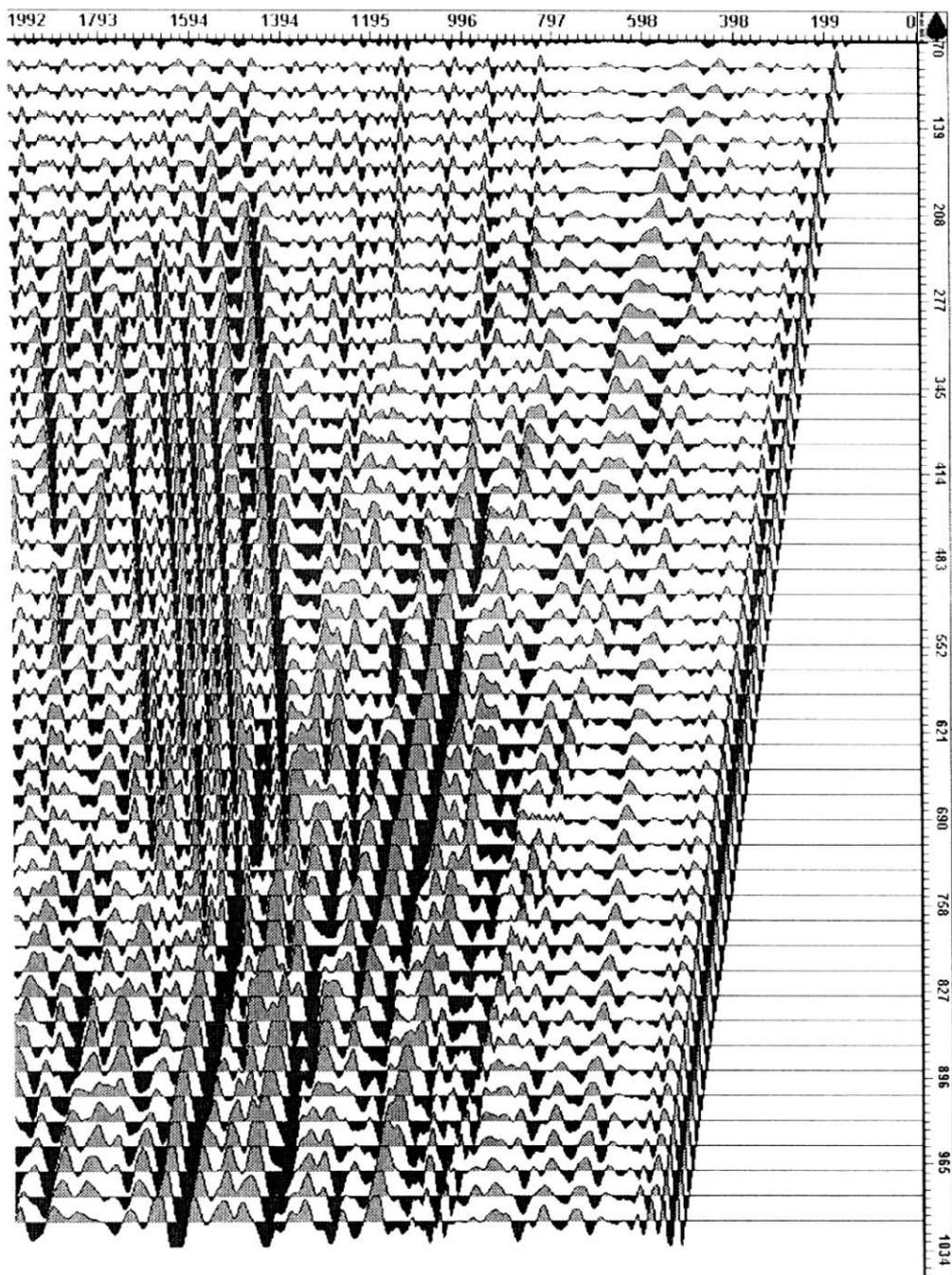


Рис. 4.22. Сейсмограмма длительностью 2 с

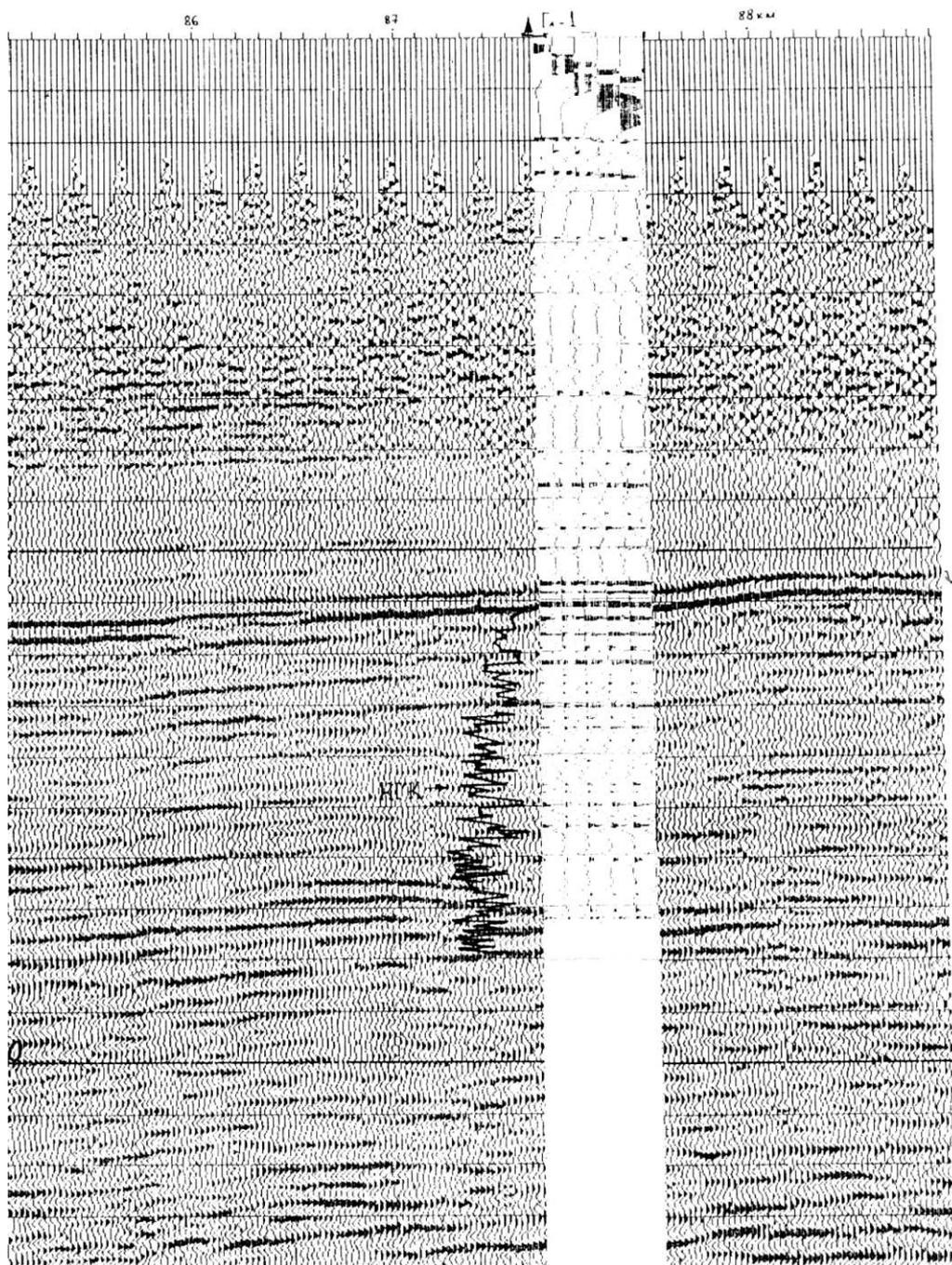


Рис. 4.23. Сейсмограмма длительностью 1,8 с

Следует отметить, что несовпадение в верхней части (0,2–0,3 с) обусловлено тем, что приход головной волны, а также мощные поверхностные волны в реальной сейсмограмме не фиксируются. «Глубины» 0,3–1 с не являлись целью исследования, поэтому физическая модель для этого района выбрана достаточно усредненной, чем и объясняется различие в сейсмограммах. Наибольший интерес представляет структура разреза на «глубинах» 1 с и далее, где присутствуют базальтовые слои, обеспечивающие значительный перепад импедансов. Эти границы фиксируются в расчете вполне удовлетворительно.

4.5. Определение физических и геометрических характеристик слоисто-неоднородной упругой среды

В предыдущих разделах проиллюстрирована хорошая работоспособность и достаточно высокая точность построенных численных алгоритмов при решении прямых задач динамической теории упругости для слоисто-неоднородных сред. Строение расчетной области, а также механические характеристики материала при этом считались заданными, а результатом решения задачи являлось вычисление на каждом шаге по времени и в каждой расчетной ячейке компонентов тензора напряжений и вектора скорости. Представляет интерес решение обратной задачи — задачи определения всех или некоторых механических характеристик (плотности, продольной и поперечной скорости распространения звуковых волн в среде), а также геометрии (в частности, толщин однородных слоев) среды на основе использования известной дополнительной информации о решении. Ограничимся рассмотрением простой слоистой структурной среды, а в качестве основного элемента решения задачи используем изложенный выше алгоритм решения прямых задач.

4.5.1. Постановка задачи

Пусть на основе сейсмоакустического зондирования требуется определить механические характеристики (и, следовательно, оценить прочностные свойства) дна водоема относительно небольшой (5–10 метров) известной глубины. Одна из наиболее простых возможных математических формулировок этой задачи будет следующей.

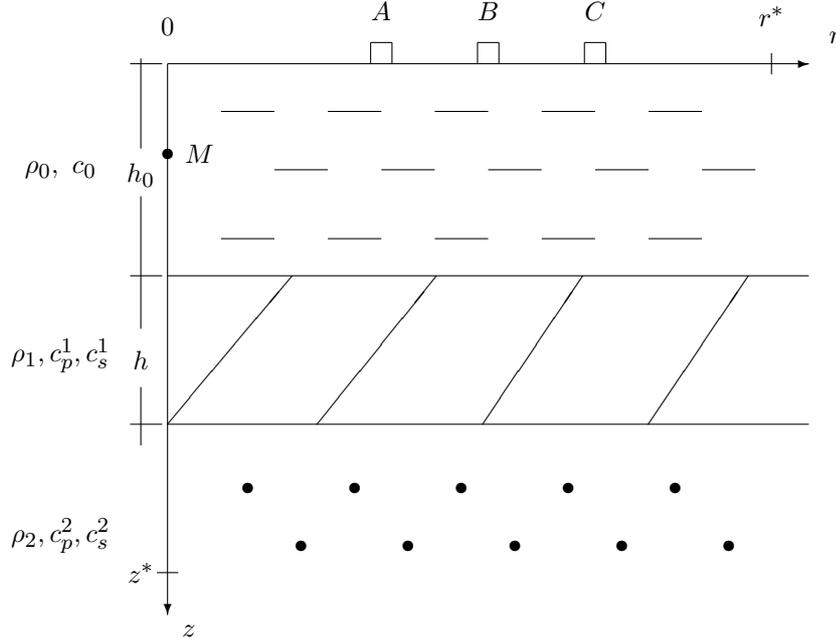


Рис. 4.24. Структура слоистого полупространства бесконечной глубины

Пусть рассматриваемая область представляет собой слоистое полупространство бесконечной глубины, которое имеет следующую структуру (рис. 4.24).

Верхний слой известной глубины h_0 — это слой воды, плотность которой ρ_0 и скорость распространения звуковых волн c_0 известны. Ниже расположен упругий слой неизвестной толщины h . Его плотность ρ_1 , скорости распространения продольной и поперечной упругих волн c_p^1 и c_s^1 соответственно. Еще ниже к нему примыкает полубесконечный упругий слой плотности ρ_2 , скорости распространения упругих волн в котором c_p^2 и c_s^2 соответственно. Считаем, что возмущение в среде возбуждается источником взрывного типа, расположенным в точке M внутри слоя жидкости, а в известных точках A, B, C поверхности $z = 0$ расположены приёмники, фиксирующие изменение во времени вертикальной составляющей вектора скорости u_z .

Задачу будем рассматривать в осесимметричной постановке, т. е. ось Oz является осью симметрии. Поверхность $z = 0$ свободна от напряжений. Для ограничения расчетной области на боковой поверхности рассматриваемого цилиндра $r = r^*$ и на его дне $z = z^*$ будем задавать неотражающие условия. На основе информации, полученной на приём-

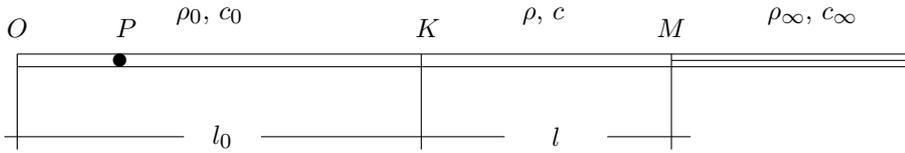


Рис. 4.25. Полубесконечный упругий стержень

никах A , B и C , необходимо определить упругие константы ρ_1 , c_p^1 , c_s^1 , ρ_2 , c_p^2 , c_s^2 и толщину первого упругого слоя h либо, если это окажется затруднительным или невозможным, какие-то комбинации упругих констант, которые, тем не менее, могли бы дать представление о прочностных свойствах упругих слоев.

Последнее требует некоторого пояснения. Для этого наряду со сформулированной двумерной задачей, решение которой может быть найдено только численно, рассмотрим очень близкую к ней одномерную задачу, содержащую все основные элементы и особенности постановки задачи двумерной, но у которой может быть найдено точное решение (прямой задачи), например, методом характеристик.

Рассмотрим полубесконечный упругий стержень (рис. 4.25), состоящий из трех участков. Первый участок OK известной длины l_0 имеет известную плотность ρ_0 и известную скорость распространения упругих волн в стержне c_0 . У второго участка KM неизвестной длины l плотность ρ и скорость звука c неизвестны. Третий полубесконечный участок имеет неизвестные плотность ρ_∞ и скорость звука c_∞ . Возмущение в стержне возбуждается на участке OK и фиксируется в некоторой точке P этого отрезка.

Очевидно, что амплитуда отраженных от границ раздела и прошедших в соседний участок сигналов будет зависеть только от величины импедансов ρc и $\rho_\infty c_\infty$, а не от каждого из параметров ρ , c , ρ_∞ , c_∞ в отдельности. А сдвиг по времени принимаемых в точке P сигналов зависит не от длины второго участка, а только от времени пробега волны по этому участку $T = l/c$. Таким образом, независимо от формы задаваемого в OK возмущения для всех стержней описанной конструкции, имеющих одинаковые импедансы ρc , $\rho_\infty c_\infty$ и одно и то же время пробега волны по участку KM , решение, зарегистрированное в точке P будет одним и тем же. Так что с помощью описанного способа зондирования из пяти неизвестных величин l , ρ , c , ρ_∞ , c_∞ в принципе поддаются определению только три комбинации: ρc , $\rho_\infty c_\infty$, l/c .

Для сформулированной выше двумерной задачи ситуация несколько иная. Теоретически на решение в точках A , B и C влияют все семь введенных констант среды, однако отличие решений для моделей, например, с одним и тем же импедансом $\rho_1 c_p^1$, но различными скоростями c_p^1 и плотностями ρ_1 заметно только в том случае, если приёмники A , B , C достаточно удалены от источника (на 20–40 толщин первого слоя) и расположены на значительном расстоянии друг от друга. В рассматриваемой задаче мы считаем, что приемники расположены от источника на расстоянии не более чем 70–100 метров, поэтому, как показывает вычислительный эксперимент, в такой ситуации отличие в решениях будет величиной порядка ошибки вычислений. С практической точки зрения знание комбинаций $\rho_1 c_p^1$ и $\rho_2 c_p^2$ дает уже немалую информацию о большинстве упругих сред (за исключением, может быть, некоторых экзотических материалов).

Кроме того, с большой степенью достоверности можно считать, что скорости распространения поперечных упругих волн в обоих слоях составляют половину скоростей продольных волн $c_s^1 = c_p^1/2$, $c_s^2 = c_p^2/2$, т. е. коэффициенты Пуассона в одном и другом слое равны $\nu = 1/3$. В этом случае задача сводится к задаче определения в рассматриваемой среде только трех параметров $\rho_1 c_p^1$, $\rho_2 c_p^2$ и времени пробега продольной упругой волны поперек первого упругого слоя $T = h/c_p^1$. В такой постановке сформулированная обратная задача для двумерной среды становится идентичной рассмотренной одномерной задаче.

Сформулированная задача определения констант, характеризующих механические свойства и толщины слоев слоисто-неоднородной упругой среды, является классической динамической обратной задачей сейсмологии. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических систем уравнений были сформулированы и исследованы А. С. Алексеевым [3], А. С. Благовещенским [23], М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым [114, 115]. К настоящему времени в зависимости от методов исследования определилось несколько основных подходов к решению этих задач. Будем решать поставленную задачу на основе конструирования и минимизации целевого функционала, характеризующего отклонение в подходящей норме зарегистрированного поля от рассчитанного для некоторой модели среды.

4.5.2. Выбор целевого функционала

Остановимся на выборе целевого функционала. Предположим, что имеется только один приемник (в точке P для одномерной задачи — рис. 4.25), в котором регистрируется «истинное» решение $f^*(t)$ (напряжение либо скорость), а также решение прямых задач $f(t, g, g_\infty, N)$ для различных параметров среды. Как мы выяснили, такими параметрами являются импедансы $g = \rho c$ и $g_\infty = \rho_\infty c_\infty$ и время пробега волны T . Так как точное решение прямой задачи мы получаем, используя метод Годунова, в котором дискретизация расчетной области согласована с местной скоростью звука таким образом, что $h_0 = \tau c_0$ на отрезке OK ; $h = \tau c$, $h_\infty = \tau c_\infty$ на отрезке KM , где τ — шаг по времени, время пробега волны по отрезку KM равно $T = \tau N$ и поэтому однозначно определяется числом N . В силу того, что решение прямых задач является точным, истинная сейсмограмма $f^*(t)$ совпадает с решением прямой задачи $f(t, g^*, g_\infty^*, N^*)$, когда параметры g, g_∞, N принимают истинные значения g^*, g_∞^*, N^* .

В качестве целевого функционала можно взять квадрат нормы в L_2 разности между $f^*(t)$ и $f(t)$:

$$\Delta_1(g, g_\infty, N) = \int_0^\infty (f - f^*)^2 dt.$$

Однако такой выбор оказывается не очень удачным. При $N = N^*$ зависимость $\Delta_1(g, g_\infty, N^*)$ от g и g_∞ является достаточно гладкой и проблемы вычисления минимума функционала по g и g_∞ не возникает. При $g = g^*$ и $g_\infty = g_\infty^*$ функция $\Delta_1(g^*, g_\infty^*, N)$ принимает значение либо нуль (если $N = N^*$), либо остается постоянной при любом значении $N \neq N^*$ и, следовательно, не характеризует близость N к N^* , а поиск ее минимума по N практически невозможен.

В качестве функционала можно выбрать следующую величину

$$\Delta_2(g, g_\infty, N) = \int_0^\infty (\varphi(x) - \varphi^*(x))^2 dx,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt, \quad \varphi^*(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \int_0^\infty e^{-xt} f^*(t) dt$$

($\varphi(x)$ — Z -преобразование функции $f(t)$).

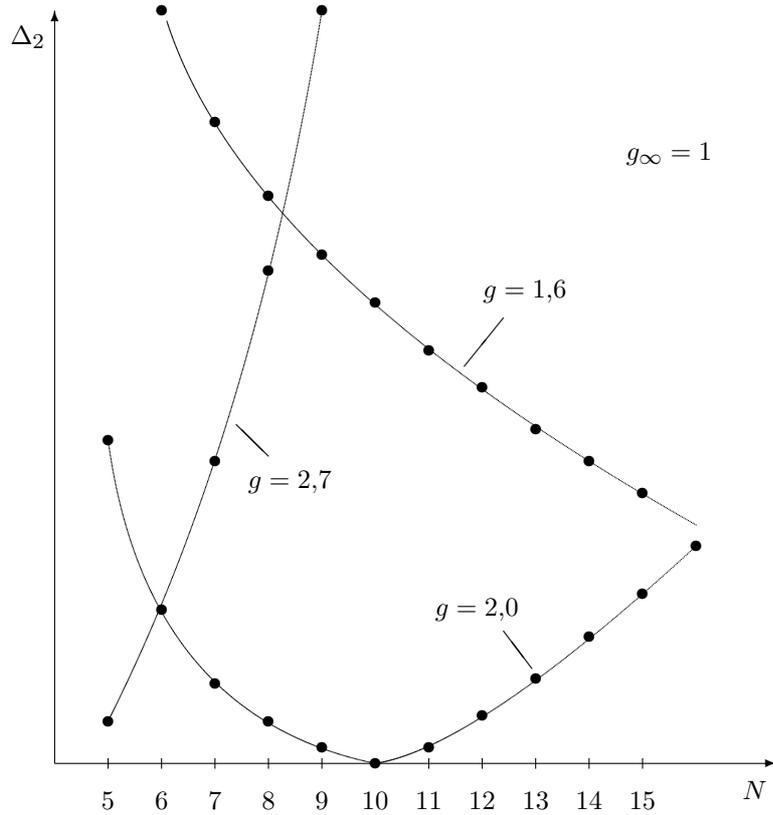


Рис. 4.26. Зависимость целевого функционала Δ_2 от параметра N для различных значений параметра g

В отличие от Δ_1 функция Δ_2 гладко изменяется при удалении N от N^* . На рис. 4.26 приведены зависимости Δ_2 от N для трех значений g : $g = 1,6$; $g = 2,0$; $g = 2,7$. Здесь $g_\infty = g_\infty^* = 1$, $g^* = 2$, $N^* = 10$. Значение N изменяется в диапазоне 5–15. По приведенным графикам видно, что выбор Δ_2 так же нельзя назвать удачным. При отклонении параметра g от истинного значения $g^* = 2$ точка минимума зависимости Δ_2 от N сильно смещается — введенный функционал является существенно овражистым и его минимизация требует привлечения специальных, достаточно трудоемких и не вполне совершенных методов.

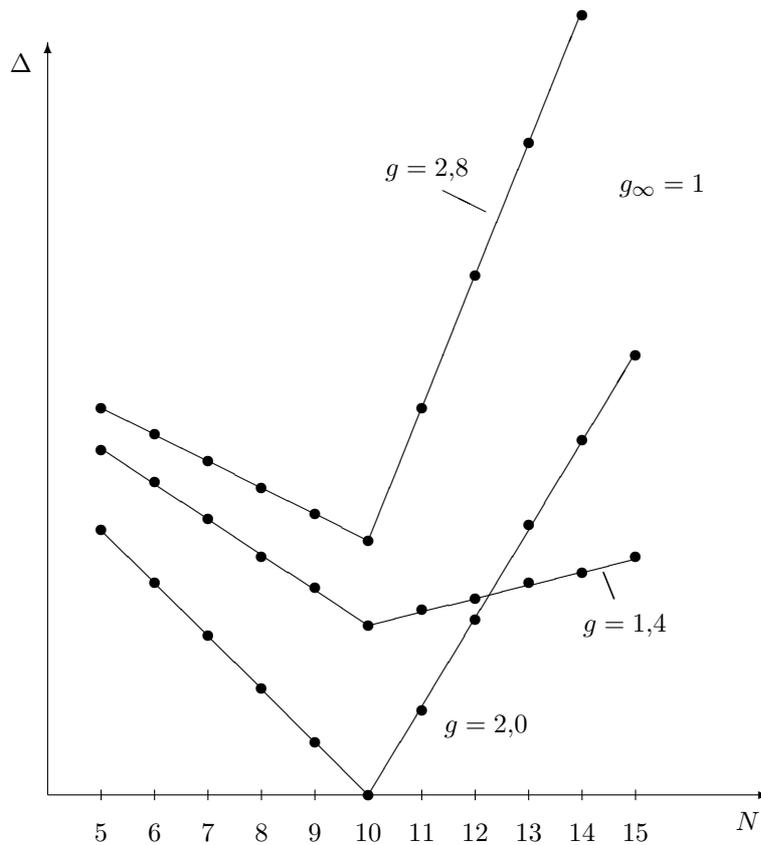


Рис. 4.27. Зависимость целевого функционала Δ от параметра N при различных значениях параметра g

Достаточно удачным для данной задачи оказывается выбор целевого функционала в следующем виде:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\varphi(t) - \varphi^*(t)]^2 dt, \quad (4.35)$$

где $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ являются свертками с единицей функций $f(t)$ и $f^*(t)$ соответственно

$$\varphi(t) = 1 \star f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad \varphi^*(t) = 1 \star f^*(t) = \int_0^t f^*(\tau) d\tau.$$

При численной реализации задачи функции $f(t)$ и $f^*(t)$ являются кусочно-постоянными (ступенчатыми), значение которых на шаге по

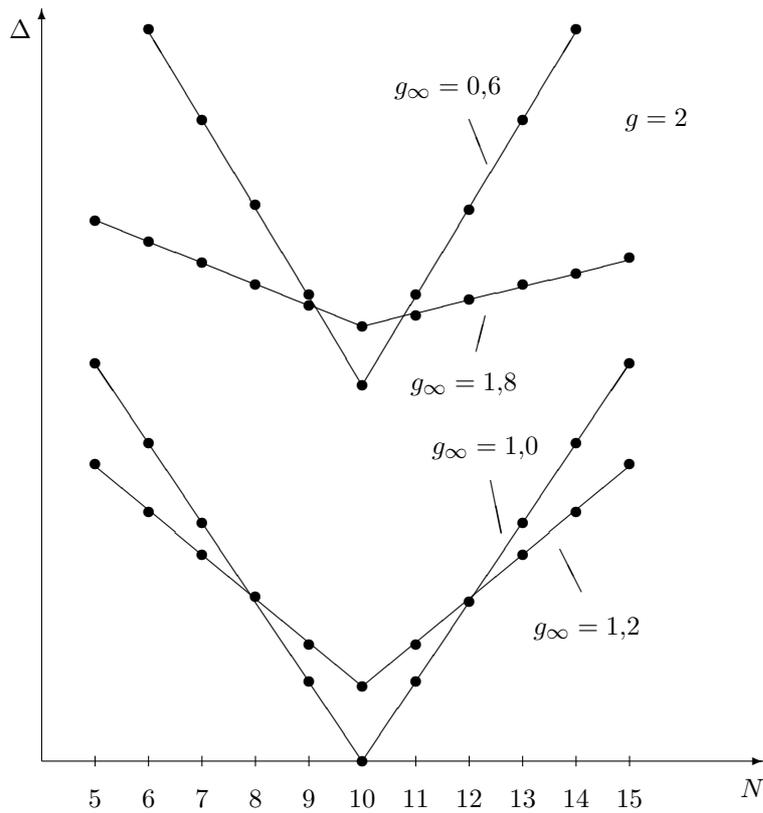


Рис. 4.28. Зависимость целевого функционала Δ от параметра N при различных значениях параметра g_∞

времени с номером i есть f_i и f_i^* соответственно. В этом случае

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i^2 + s_i s_{i-1} + s_{i-1}^2), \quad (4.36)$$

где

$$s_0 = 0, \quad s_i = \sum_{k=1}^i (f_k - f_k^*).$$

На рис. 4.27–4.29 приведены зависимости функционала Δ от различных параметров задачи.

Из приведенных графиков следует, что:

— зависимость Δ от g и g_∞ является гладкой, причем точка минимума не сильно удаляется от истинного значения при различных значениях N ;

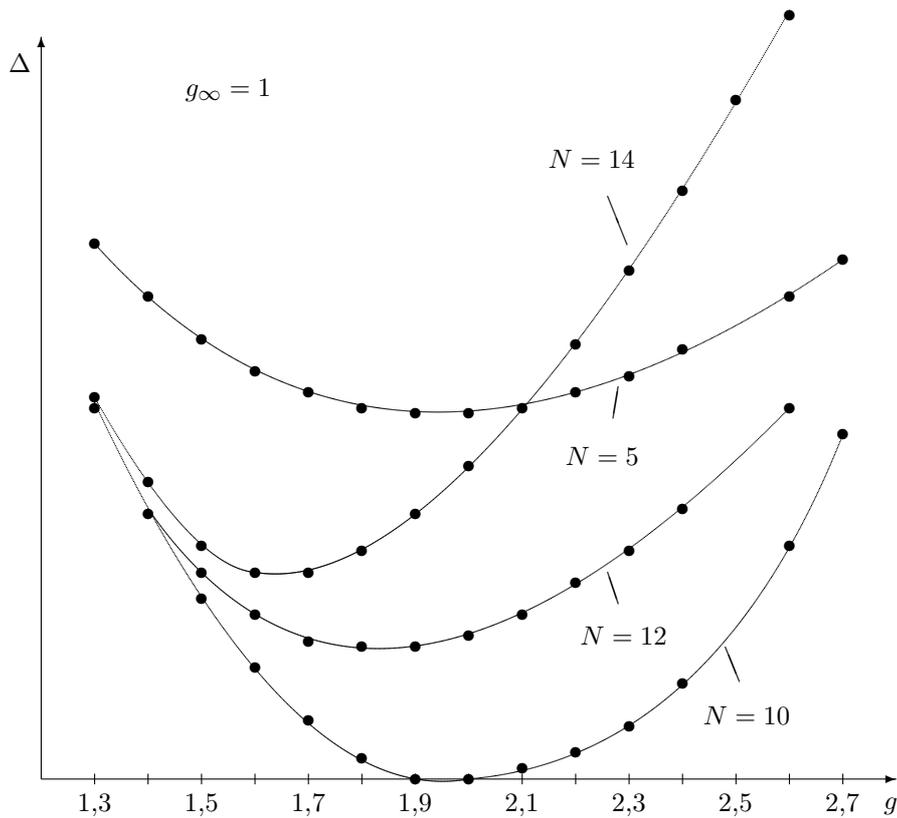


Рис. 4.29. Зависимость целевого функционала Δ от параметра g при различных значениях параметра N при $g_\infty = 1$

— при изменении g и g_∞ в достаточно широком диапазоне точка минимума функционала по N практически остается той же самой.

Отмеченные свойства позволяют говорить о том, что выбор функционала в виде (4.35) сделан удачно.

4.5.3. Поиск минимума

Таким образом, для решения сформулированной обратной задачи необходимо найти минимум выпуклой функции трех переменных $\Delta(g, g_\infty, N)$ на достаточно широком допустимом множестве изменения аргументов. Этот минимум можно искать любым классическим способом, задавшись некоторым, принадлежащим допустимому интервалу, начальным приближением и решая необходимое число раз прямую задачу.

Однако у такого подхода есть и недостатки, которые заключаются в следующем:

- прямые двумерные задачи для слоистой среды, требующие значительного объема оперативной памяти компьютера и большого времени счета, приходится решать непосредственно в процессе решения обратной задачи;
- в силу специфики численного алгоритма решения прямой задачи некоторые входные параметры в процессе счета не могут быть выбраны произвольными, в то время как на каждом этапе спуска к точке минимума предлагается брать их вполне определенными, не совпадающими с допустимыми.

Последнее требует некоторого пояснения. Дискретизация расчетной области в предложенном алгоритме решения прямых задач для кусочно-однородных сред жестко связана с моделью среды. К примеру, в рассмотренной нами одномерной задаче отрезок KM содержит N ячеек, т. е. прямые задачи мы можем решать только при целых числах N . Два других параметра g и g_∞ мы можем выбирать любыми. В двумерных задачах необходимость разбиения плоского прямоугольника на целое число элементарных квадратов определенного размера приводит уже к тому, что и толщина слоя и скорость распространения упругих волн могут принимать только отдельные допустимые значения. Значения этих параметров на очередном шаге поиска минимума могут не совпадать с допустимыми.

Предлагается искать минимум рассмотренной функции, аппроксимируя ее по ее значениям во всем допустимом интервале изменения переменных.

Таким образом, процедура решения обратной задачи состоит из следующих этапов:

1. Из всей области изменения аргументов, по возможности более равномерно, выбираются их некоторые допустимые значения — узлы $g^i, g_\infty^j, N^k, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$. Для каждого набора выбранных значений решается прямая задача и результат ее решения (функция $f(t)$) записывается в файл данных в виде одномерного массива действительных чисел (например, значений вертикальной составляющей вектора скорости в приёмнике на каждом шаге по времени). Размерность этого массива устанавливается экспериментально из соображений, что отброшенные значения изменяют конструируемый функ-

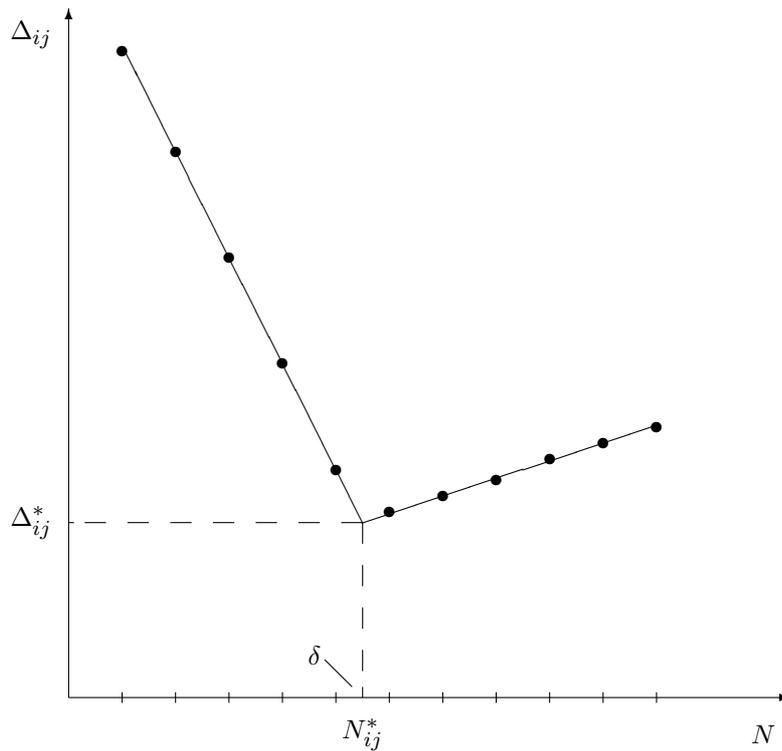


Рис. 4.30. К определению интервала, которому принадлежит точка минимума целевого функционала

ционал только в пределах запланированной ошибки. Таким образом создается файл данных — банк сейсмограмм. Описанный этап является подготовительным и может быть проведен заранее, безотносительно к решению конкретной обратной задачи, а при решении обратной задачи необходимые сейсмограммы только считываются из файла данных.

2. После того, как известна истинная сейсмограмма $f^*(t)$ (одномерный массив значений f_k^*), во всех узлах по формулам (4.35), (4.36) насчитываются значения функционала $\Delta(g^i, g_\infty^j, N^k)$.

3. Для каждого значения $g^i, g_\infty^j, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ находится минимум по N функционала

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij}^*(g^i, g_\infty^j) = \min_N \Delta(g^i, g_\infty^j, N).$$

В силу недифференцируемости функционала Δ по переменной N (см. рис. 4.27, рис. 4.28), этот этап вызывает определенную сложность.

Достаточно точной оказалась следующая процедура вычисления минимума.

Сначала простым перебором по N^k определяется интервал δ (рис. 4.30), которому принадлежит точка минимума N_{ij}^* . Если бы истинное значение N^* было бы целым, этого перебора было бы достаточно. Однако в общем случае это не так. Поэтому по всем точкам справа от N^* и по всем точкам слева от N^* проводятся прямые, минимально (в смысле средних квадратов) отклоняющиеся от этих точек. В качестве N_{ij}^* принимается точка пересечения этих прямых, а в качестве N^* — среднее значение N_{ij}^* по всем $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

4. Как показывают расчеты, зависимость Δ от g и g_∞ является достаточно гладкой, поэтому минимум по g и g_∞ будем искать, основываясь на интерполяции функции двух переменных $\Delta^*(g, g_\infty)$ по значениям Δ_{ij}^* . Двумерную интерполяцию будем проводить следующим образом.

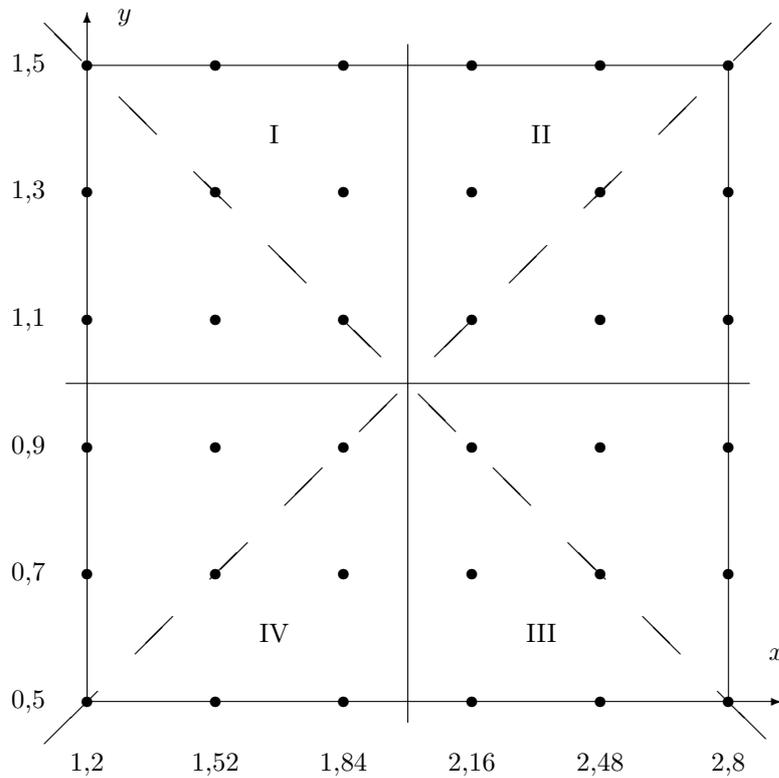


Рис. 4.31. К определению минимума целевого функционала по параметрам g и g_∞

Для упрощения записи обозначим $g = x$, $g_\infty = y$. Пусть известно, что x и y изменяются в интервалах (1,2, 2,8) и (0,5, 1,5) соответственно и пусть для вычисления функционала на каждом из интервалов (включая их концы) равномерно выбраны по шесть узлов (рис. 4.31).

В этих 36-и узлах известны 36 значений Δ_{ij}^* , $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$. Будем искать $\Delta(x, y)$ в виде полинома по x и y пятой степени:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = & a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 + \\ & + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^4 + a_{11}y^4 + \\ & + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y + a_{14}xy^2 + a_{15}y^3 + \\ & + a_{16}x^2 + a_{17}xy + a_{18}y^2 + \\ & + a_{19}x + a_{20}y + \\ & + a_{21}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где 21 коэффициент a_1, \dots, a_{21} определяются из условия равенства $\Delta(x_i, y_j) = \Delta_{ij}^*$ в 21-й точке одного из четырех треугольников, лежащих выше или ниже одной из диагоналей рассматриваемой области (рис. 4.31). Выбор одного из треугольников осуществляется следующим образом. Простым перебором по всем 36-и узлам определяется одной из четвертей прямоугольника, который принадлежит точка минимума (на рисунке они обозначены римскими цифрами), а для интерполяции выбирается тот треугольник, которому целиком принадлежит найденный квадрат.

После определения коэффициентов a_i , $i = 1, \dots, 21$ минимум многочлена (4.37) находится как решение системы уравнений

$$\frac{\partial \Delta(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta(x, y)}{\partial y} = 0,$$

причем в качестве начального приближения выбирается узел грубого минимума.

Таблица 3. Истинные значения параметров, минимизирующие функционал

g^*	g_∞^*	N^*	g	g_∞	N
3.5	1.3	9	3.5101	1.313	9
4.5	1.3	8	4.5060	1.308	8
3.5	2.6	11	3.4871	2.581	11
4.5	2.6	12	4.4881	2.584	12

В таблице 3 приведены истинные значения параметров, минимизирующие функционал и найденные в процессе решения обратной задачи.

Для двумерной задачи использовалась суммарная сейсмограмма, составленная из трех сейсмограмм (зависимостей вертикальной составляющей вектора массовой скорости от времени) в приемниках A , B и C , расположенных на расстоянии 30, 50 и 70 метров соответственно. Рассматривалась область протяженностью 100×100 метров, глубина слоя воды — 10 метров. Источник взрывного типа (источник был выбран в точности таким же, как и в примерах, иллюстрирующих решение прямых задач сейсмологии в предыдущем параграфе) расположен на глубине 5 метров. Шаг по времени выбран равным 1 мс. Из таблицы 3 видно, что решение обратной задачи в предложенной постановке находится с точностью около одного процента.

Глава 5

Динамика упругопластического деформирования

В настоящей главе изложенные в предыдущих главах алгоритмы решения динамических задач упругого деформирования обобщаются на случай решения задач динамики упругопластического деформирования. Существенное отличие этих задач от задач упругого деформирования заключается в том, что коэффициенты, входящие в соотношения, которые связывают напряжения со скоростями деформаций, зависят как от напряжений, так и скоростей деформаций. Вследствие этого даже в случае малых деформаций задачи упругопластического деформирования являются нелинейными. Нелинейными являются также задачи моделирования процессов разрушения в деформируемых телах. Поэтому в данной главе наряду с алгоритмами решения задач динамики упругопластического деформирования также излагаются процедуры аппроксимации уравнений упругопластического течения и итерационные алгоритмы, позволяющие моделировать процессы хрупкого разрушения.

5.1. Уравнения упругопластического деформирования

Примем модель изотропного упругопластического течения. Определяющие соотношения в этой модели при малых по сравнению с единицей удлинениях, сдвигах и углах поворота элементов среды запишем в виде [133]:

$$2\mu e'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \lambda \sigma'_{ij}, \quad \dot{\sigma} = Ke, \quad (5.1)$$

где e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e$, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, $e = \delta_{ij}e_{ij}$,

$$\sigma = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}; \mu - \text{модуль сдвига, } K - \text{модуль объемного расширения;}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 & \text{при } J_2 < J_2^* & \text{ или } J_2 = J_2^*, \quad \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} \leq 0, \\ \lambda &> 0 & \text{при } J_2 = J_2^*, \quad \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$J_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$, $J_2^* = \max\{J_2^p, J_2^m\}$; J_2^p — значение J_2 , при котором элемент среды начинает деформироваться пластически, J_2^m — максимальное за предыдущую историю деформирования элемента среды значение J_2 , точка обозначает дифференцирование по времени, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Множитель λ определяется из условия

$$dA^e = \varkappa dA, \quad (5.3)$$

где $dA^e = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}dt$, $dA = \sigma'_{ij}e'_{ij}dt$. Из (5.1)–(5.3) находим

$$\lambda = \frac{1 - \varkappa}{2\varkappa J_2} \dot{J}_2, \quad \dot{J}_2 = \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}. \quad (5.4)$$

Коэффициент упрочнения \varkappa можно определить из эксперимента на чистый сдвиг или из эксперимента на одноосное растяжение. В первом случае $\varkappa = \mu'/\mu$, во втором $\varkappa = (2(1 + \nu)H)/(3 + (2\nu - 1)H)$, $H = E'/E$, где μ' — касательный модуль диаграммы чистого сдвига; E' — касательный модуль диаграммы одноосного растяжения.

Неотрицательная величина λ , входящая в соотношения (5.1), зависит как от напряжений, так и от их скоростей. При пошаговой процедуре решения динамических задач необходима аппроксимация соотношений (5.1), (5.2), а при использовании неявной схемы решения динамических задач и итерационная процедура вычисления величины λ . Широко используемой в задачах динамики является процедура Уилкинса [153]. В алгоритме Уилкинса напряжения вычисляются по скоростям деформаций с нижнего временного слоя и затем проводится их корректировка в соответствии с условием текучести. Так как в алгоритме Уилкинса напряжения вычисляются по скоростям деформаций с нижнего временного слоя, то итерационной процедуры при вычислении напряжений не требуется.

Алгоритмы решения динамических задач с точки зрения использования в них соотношений упругопластического течения можно условно разделить на два класса:

1) алгоритмы, в которых напряжения и деформации на каждом шаге по времени определяются из независимых систем уравнений. Так в методе Уилкинса [153] скорости деформаций вычисляются из уравнений движения по известным напряжениям с нижнего слоя по времени,

а затем по соотношениям упругопластического деформирования вычисляются напряжения на верхнем временном слое;

2) алгоритмы, в которых скорости и напряжения вычисляются одновременно по уравнениям, которые завязаны между собой.

И в том, и другом случаях необходима аппроксимация уравнений упругопластического деформирования, позволяющая вычислять напряжения по скоростям деформаций.

Аппроксимации соотношений (5.1), (5.2), излагаемые в разделах 5.2–5.4, могут быть использованы и при решении статических задач. В этом случае под временем t понимается некоторый параметр нагружения.

5.2. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 1)

При разработке алгоритмов решения задач динамики упругопластического деформирования нами использовались различные аппроксимации уравнений (5.1), (5.2). Как правило, целесообразность использования той или иной аппроксимации определяется как алгоритмом решения динамической задачи, так и ее механическим содержанием. Поэтому мы сочли целесообразным изложить несколько вариантов аппроксимации уравнений упругопластического течения. Их преимущества и недостатки ниже кратко обсуждаются.

5.2.1. Аппроксимация уравнений упругопластического течения

Аппроксимируя соотношения (5.1) соотношениями

$$2\mu e'_{ij}(t + \frac{\tau}{2}) = \frac{\sigma'_{ij}(t + \tau) - \sigma'_{ij}{}^{\times}}{\tau} + \lambda \frac{\sigma'_{ij}(t + \tau) + \sigma'_{ij}{}^{\times}}{2},$$

$$\sigma(t + \tau) = \sigma(t) + \tau e(t + \frac{\tau}{2}), \quad \sigma'_{ij}{}^{\times} = \sigma'_{ij}(t),$$

получим

$$\sigma'_{ij}(t + \tau) = \tau \frac{2\mu}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} e'_{ij} + \frac{1 - \frac{\tau\lambda}{2}}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} \sigma'_{ij}{}^{\times}$$

или

$$\sigma_{ij}^{\prime 0} = \frac{\sigma'_{ij}{}^{\times}}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} + \tau \frac{\mu}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} e'_{ij}, \quad (5.5)$$

где

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2}[\sigma'_{ij}{}^\times + \sigma'_{ij}(t + \tau)].$$

В случае плоской деформации в системе координат x_1, x_2, x_3 формулы для вычисления напряжений в момент времени $t + \tau/2$ записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2}(a_{11}e_{11} + a_{13}e_{33}) + \sigma_{11}^{\times\times}, \\ \sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2}(a_{33}e_{11} + a_{11}e_{33}) + \sigma_{33}^{\times\times}, \\ \sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2}2a_{13}e_{13} + \sigma_{13}^{\times\times}, \\ \sigma_{22}^0 &= \frac{\tau}{2}a_{33}(e_{11} + e_{33}) + \sigma_{22}^{\times\times},\end{aligned}\tag{5.6}$$

где

$$a_{11} = K + \frac{4}{3}\tilde{\mu}, \quad a_{33} = K - \frac{2}{3}\tilde{\mu}, \quad a_{13} = \tilde{\mu}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}},$$

$$\sigma_{11}^{\times\times} = \sigma^\times + \frac{\sigma'_{11}{}^\times}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}}, \quad \sigma_{33}^{\times\times} = \sigma^\times + \frac{\sigma'_{33}{}^\times}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}},$$

$$\sigma_{13}^{\times\times} = \frac{\sigma'_{13}{}^\times}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}}, \quad \sigma_{22}^{\times\times} = \sigma^\times + \frac{\sigma'_{22}{}^\times}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}}.$$

Коэффициенты a_{11} , a_{33} , a_{13} удовлетворяют неравенствам

$$a_{13} < a_{11}, \quad a_{33} < a_{11}$$

и зависят от λ .

5.2.2. Вычисление λ по напряжениям и скоростям деформаций

Принимая аппроксимацию

$$\dot{J}_2 = [J_2(t + \tau) - J_2(t)]/\tau$$

и учитывая (5.4), получим

$$J_2(t + \tau) - J_2(t) = [A - \frac{\tau\lambda}{2}B(1 + \frac{\tau\lambda}{2})]/(1 + \frac{\tau\lambda}{2}),\tag{5.7}$$

где

$$A = 2\mu\tau\chi_{ij}e'_{ij}, \quad B = 2\chi_{ij}\chi_{ij}, \quad J_2(t) = J_2^\times,$$

$$\chi_{ij} = \mu\tau e'_{ij} + \sigma'_{ij}{}^\times = (1 + \frac{\tau\lambda}{2})\sigma_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2}[\sigma'_{ij}{}^\times + \sigma'_{ij}(t + \tau)].$$

При определении λ рассмотрим следующие возможные случаи.

1. В элементе тела в момент времени t интенсивность касательных напряжений меньше J_2^* и в процессе упругого деформирования от момента времени t до момента времени $t + \tau$ величина J_2 не превосходит J_2^* . В этом случае $\lambda = 0$.

2. В элементе в момент времени t значение J_2 меньше J_2^* и в процессе упругого деформирования от момента времени t до момента времени $t + \tau$ интенсивность касательных напряжений превосходит значение J_2^* . В этом случае λ определяется из условия $J_2(t + \tau) = J_2^*$, которое приводит к квадратному уравнению относительно $t\lambda/2$. Решая это уравнение, получим

$$\frac{\tau\lambda}{2} = \frac{2(A - C)}{B - A + 2C + \sqrt{(B - A)^2 + 4BC}}, \quad C = J_2^* - J_2^\times.$$

3. В момент времени t интенсивность касательных напряжений равна J_2^* и происходит процесс активного нагружения ($A > 0$). Используя (5.4), (5.7), получим

$$\frac{\tau\lambda}{2} = \frac{(1 - \varkappa A)}{B - (1 - \varkappa A)}.$$

Условие положительности λ накладывает в этом случае ограничение на шаг по времени

$$\tau\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad B - (1 - \varkappa A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \tau < \frac{\chi_{ij}\chi_{ij}}{(1 - \varkappa)\mu\chi_{ij}e'_{ij}}.$$

4. В момент времени t интенсивность касательных напряжений равна J_2^* и происходит процесс разгрузки ($A < 0$). В этом случае $\lambda = 0$. Рассмотренные выше случаи приведены в таблице 4.

Таблица 4. Вычисление λ по напряжениям и скоростям деформаций

$J_2^\times \leq J_2^*$	$J_2^\times + A \leq J_2^*$	$\lambda = 0$
	$J_2^\times + A > J_2^*$	$\frac{\tau\lambda}{2} = \frac{2(A - C)}{B - A + 2C + \sqrt{(B - A)^2 + 4BC}}$
$J_2^\times > J_2^*$	$A > 0$	$\frac{\tau\lambda}{2} = \frac{(1 - \varkappa)A}{B - (1 - \varkappa)A}$
	$A \leq 0$	$\lambda = 0$

5.2.3. Итерационная процедура вычисления λ

При использовании явной схемы решения динамической задачи скорости деформаций в каждом из элементов, на которые разбита область, зависят от значений λ в данном элементе и к нему примыкающих. Для вычисления λ в этом случае можно использовать следующую итерационную процедуру.

Обозначим через λ_0 нулевое приближение значений λ в элементах. В качестве нулевого приближения в вычислениях принимаются значения, вычисленные на предыдущем шаге по времени. Далее совершается последовательный обход всех элементов, в процессе которого в каждом из элементов итерациями определяется новое значение λ в соответствии с приведенной выше таблицей. Обозначим через λ_0^i и $\tilde{\mu}_0^i$ значения λ и $\tilde{\mu}$ в некотором элементе на i -ой итерации. Для того, чтобы определить в этом элементе новое значение λ , нужно вычислить скорости деформаций. При этом в том элементе, для которого ведутся вычисления, используется значение λ_0^i , а в примыкающих к нему элементах — значение λ_0 . После того, как вычислены скорости деформаций, вычисляются новые значения λ_0^{i+1} и $\tilde{\mu}_0^{i+1}$. Проверяется неравенство $|\tilde{\mu}_0^{i+1} - \tilde{\mu}_0^i|/\tilde{\mu}_0^i < \varepsilon$. Если неравенство выполняется, полагаем $\lambda_1 = \lambda_0^{i+1}$ и переходим к следующему элементу. В противном случае вычисляем новое приближение для λ . В результате обхода всей области во всех элементах получаем новые значения λ . После того, как закончен первый обход области, начинается новый обход, в котором вместо нулевого приближения для λ используются значения, полученные при первом обходе.

5.3. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 2)

Разрешая соотношения (5.1) относительно скоростей напряжений, получим:

$$\dot{\sigma}_{ij} = a_{ijkl}e_{kl}, \quad (5.8)$$

где

$$a_{ijkl} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - c(1-\nu) \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{2J_2} \right],$$

$$c = 0 \quad \text{при} \quad J_2 < J_2^* \quad \text{или} \quad J_2 = J_2^*, \quad \sigma'_{ij} e'_{ij} \leq 0,$$

$$c = 1 \quad \text{при} \quad J_2 = J_2^*, \quad \sigma'_{ij} e'_{ij} > 0.$$

Из (5.8) следует, что

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} = a_{klji}. \quad (5.9)$$

Так как

$$a_{ijij} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} + \frac{1}{2}(1 + \delta_{jl}) - c(1 - \varkappa) \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2J_2} \right]$$

и $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \leq J_2$ при $i \neq j$; $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \leq 2J_2$ при $i = j$, то при любых $i, j = 1, 2, 3$ выполняются неравенства

$$a_{ijij} > 0. \quad (5.10)$$

Покажем, что при любых $i, j, k, l = 1, 2, 3$ имеют место неравенства

$$a_{ijkl}^2 \leq a_{ijij}a_{klkl}. \quad (5.11)$$

Для доказательства достаточно показать справедливость неравенств (5.11) в следующих случаях: 1) $i = j, k = l, i = k$; 2) $i \neq j, k = l$; 3) $i \neq j, i = l, k \neq j, k \neq l$.

В случае $i = j, k = l, i = k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\mu^2}(a_{ijij}a_{kkkk} - a_{iikk}^2) &= \\ &= \frac{1}{1-2\nu} \left\{ 1 - c \frac{1-\varkappa}{2J_2} \left[\sigma_{ii}'^2 + \sigma_{kk}'^2 - \nu(\sigma_{ii}' + \sigma_{kk}')^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Так как $\sigma_{ii}'^2 + \sigma_{kk}'^2 - \nu(\sigma_{ii}' + \sigma_{kk}')^2 \leq 2J_2$, то из (5.12) следует (5.11).

В случае $i \neq j, k = l$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\mu^2}(a_{ijij}a_{kkkk} - a_{ijkk}^2) &= \\ &= \frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ 1 - \nu - c \frac{1-\varkappa}{2J_2} \left[(1-2\nu)\sigma_{kk}'^2 + 2(1-2\nu)\sigma_{ij}'^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Так как $(1-2\nu)\sigma_{kk}'^2 + 2(1-2\nu)\sigma_{ij}'^2 \leq 2J_2$, при $i \neq j$, то из (5.13) следует (5.11).

В случае $i \neq j, i = l, k \neq j, k = l$

$$\frac{1}{4\mu^2}(a_{ijij}a_{ikik} - a_{ijik}^2) = \frac{1}{4} \left[1 - c \frac{1-\varkappa}{J_2} (\sigma_{ij}'^2 + \sigma_{ik}'^2) \right]. \quad (5.14)$$

Так как $\sigma_{ij}'^2 + \sigma_{ik}'^2 \leq J_2$, при $i \neq j, i = l, k \neq j$, то из (5.14) следует (5.11).

На интервале времени $[t, t + \tau]$ заменим соотношения (5.8) следующими:

$$\sigma_{ik}^0 = \frac{\tau}{2} a_{ijkl} e_{kl} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + \sigma_{ij}^\times, \quad (5.15)$$

где σ_{ij}^\times — напряжения в момент времени t ,

$$a_{ijkl} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - c(1-\kappa) \frac{\sigma_{kl}^\times \sigma_{ij}^\times}{2J_2^\times} \right],$$

$$\sigma_{ij}^{\prime \times} = \sigma_{ij}^\times - \delta_{ij} \sigma^\times, \quad \sigma^\times = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}^\times, \quad J_2^\times = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\prime \times} \sigma_{ij}^{\prime \times},$$

$$c = 0 \quad \text{при} \quad J_2^\times < J_2^* \quad \text{или} \quad J_2^\times = J_2^*, \quad \sigma_{ij}^{\prime \times} e'_{ij} \leq 0,$$

$$c = 0 \quad \text{при} \quad J_2^\times = J_2^*, \quad \sigma_{ij}^{\prime \times} e'_{ij} > 0,$$

$$e'_{ij} = e_{ij}(t + \frac{\tau}{2}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e, \quad e = \delta_{ij} e_{ij}(t + \frac{\tau}{2}).$$

Формулы для вычисления напряжений σ_{ij}^0 в момент времени $t + \tau/2$ по скоростям деформаций в этот же момент времени запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{11} e_{11} + a_{12} e_{22} + a_{13} e_{33} + 2a_{14} e_{13} + \sigma_{11}^\times), \\ \sigma_{22}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{12} e_{11} + a_{22} e_{22} + a_{23} e_{33}) + 2a_{24} e_{13} + \sigma_{22}^\times, \\ \sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{13} e_{11} + a_{23} e_{22} + a_{33} e_{33}) + 2a_{34} e_{13} + \sigma_{33}^\times, \\ \sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{14} e_{11} + a_{24} e_{22} + a_{34} e_{33}) + 2a_{44} e_{13} + \sigma_{33}^\times, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где введены обозначения $a_{ij} = a_{iijj}$, $a_{i4} = a_{ii13}$ ($i, j = 1, 2, 3$), $a_{44} = a_{1313}$.

В этих обозначениях неравенства (5.11) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &\leq a_{11} a_{22}, & a_{13}^2 &\leq a_{11} a_{33}, & a_{14}^2 &\leq a_{11} a_{44}, \\ a_{23}^2 &\leq a_{22} a_{33}, & a_{24}^2 &\leq a_{22} a_{44}, & a_{34}^2 &\leq a_{33} a_{44}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.4. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования (схема 3)

5.4.1. Вычисление напряжений по скоростям деформаций

Пусть при значении параметра нагружения t известны напряжения $\sigma'_{ij}(t) = \sigma'_{ij}^\times$ и средние на промежутке $[t, t + \tau]$ значения скоростей деформаций e_{ij} . Требуется в соответствии с соотношениями (5.1), (5.2) определить напряжения $\sigma_{ij}(t + \tau)$. Соотношения (5.1) аппроксимируем следующим образом

$$2\mu e'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}(t + \tau) - \sigma'_{ij}^\times}{\tau} + \lambda \sigma'_{ij}(t + \tau), \quad \sigma(t + \tau) = \sigma^\times + \tau K e. \quad (5.18)$$

Из (5.18) следует, что компоненты девиатора напряжений в момент $t + \tau$ определяются по формуле

$$\sigma'_{ij}(t + \tau) = \frac{1}{1 + \tau\lambda} \sigma'^e_{ij}, \quad \sigma'^e_{ij} = 2\mu\tau e'_{ij} + \sigma'^{\times}_{ij} \quad (5.19)$$

и, следовательно,

$$J_2(t + \tau) = \frac{1}{(1 + \tau\lambda)^2} J_2^e, \quad J_2^e = \frac{1}{2} \sigma'^e_{ij} \sigma'^e_{ij}. \quad (5.20)$$

Величины σ'^e_{ij} — значения компонент девиатора напряжений в момент времени $t + \tau$, вычисленные в предположении упругого ($\lambda = 0$) деформирования элемента на промежутке $[t, t + \tau]$.

При пластическом деформировании элемента на промежутке $[t, t + \tau]$ множитель $\tau\lambda$ должен быть вычислен в соответствии с условиями (5.2).

Рассмотрим случай упругопластического деформирования с изотропным упрочнением. Пусть $J_2^{\times} = \frac{1}{2} \sigma'^{\times}_{ij} \sigma'^{\times}_{ij} = J_2^*$. Согласно (5.20) $J_2(t + \tau) \leq J_2^e$ при любом неотрицательном значении величины $\tau\lambda$. Поэтому в соответствии с первым из соотношений (5.2) при $J_2^{\times} = J_2^*$ и $J_2^e \leq J_2^*$ полагаем:

$$\sigma'_{ij}(t + \tau) = \sigma'^e_{ij}. \quad (5.21)$$

Если $J_2^e > J_2^*$, то это означает, что деформирование элемента на промежутке $[t, t + \tau]$ сопровождается пластическими деформациями.

В этом случае величина $\tau\lambda$ определяется из уравнения (5.20) и уравнения

$$\tau\lambda = \frac{(1 - \varkappa)[J_2(t + \tau) - J_2^*]}{2\varkappa J_2(t + \tau)}, \quad (5.22)$$

которое является аппроксимацией соотношения (5.4). Исключая из (5.20) и (5.22) величину $J_2(t + \tau)$, решая квадратное уравнение относительно $1/(1 + \tau\lambda)$, получаем

$$\frac{1}{1 + \tau\lambda} = \frac{\varkappa J_2^e + \sqrt{J_2^e [J_2^* (1 - \varkappa^2) + \varkappa^2 J_2^e]}}{(1 + \varkappa) J_2^e}. \quad (5.23)$$

Таким образом,

$$\sigma'_{ij}(t + \tau) = \frac{\sigma'^e_{ij}}{1 + \tau\lambda} \text{ при } J_2^{\times} = J_2^*, \quad J_2^e > J_2^*, \quad (5.24)$$

где величина $1/(1 + \tau\lambda)$ определяется по формуле (5.23).

На рис. 5.1 представлена геометрическая интерпретация приведенной выше аппроксимации на девиаторной плоскости (а) и диаграмме чистого сдвига (б).

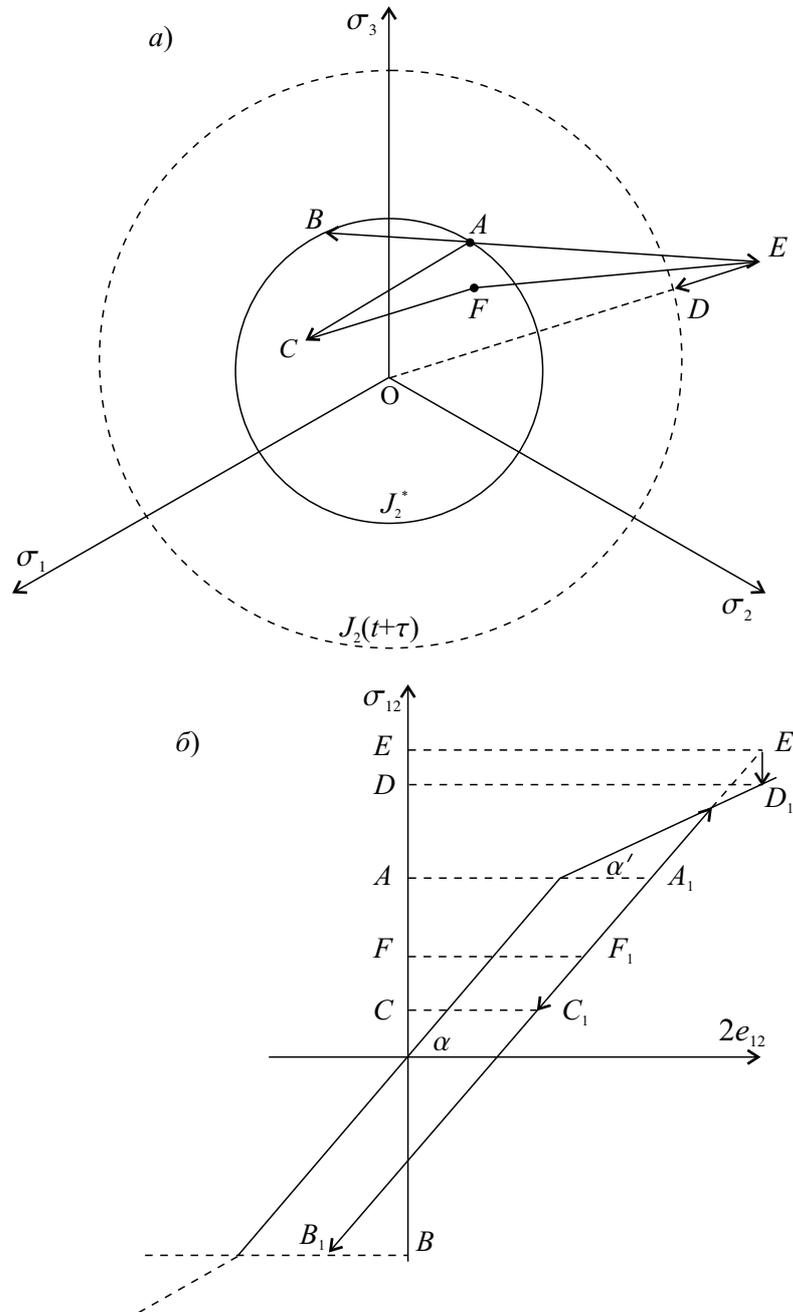


Рис. 5.1. Геометрическая интерпретация аппроксимации уравнений упруго-пластического деформирования

В рассмотренных случаях напряженному состоянию в момент времени t соответствует точка A . В случае (5.21) напряженному состоянию в момент $t + \tau$ соответствует точка B (в случае знака равенства в (5.21)) и точка C (в случае знака неравенства в (5.21)). Переход из точки A в точки B и C соответствует упругому деформированию элемента на промежутке $[t, t + \tau]$. В случае (5.24) напряженному состоянию в момент времени $t + \tau$ соответствует точка D . В этом случае деформирование элемента на промежутке $[t, t + \tau]$ сопровождается пластическими деформациями и может быть интерпретировано как переход из точки A в точку E по закону упругого деформирования с последующей корректировкой напряженного состояния. Корректировка заключается в переходе из точки E в точку D по лучу OE , причем $OE/OD = 1 + \tau\lambda$. Величина $1 + \tau\lambda$ определяется формулой (5.23). Отметим, что положение точки D определяется положением точки E , величиной J_2^* , значением параметра упрочнения \varkappa и не зависит от положения точки A , из которой произошел переход в точку E в результате упругого деформирования элемента. На диаграмме чистого сдвига в этом случае напряженно-деформированное состояние, соответствующее точке E , в результате корректировки переходит в состояние, соответствующее точке D_1 .

Рассмотрим случай, когда $J_2^\times = \frac{1}{2}\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} < J_2^*$. На рис. 5.1 в этом случае напряженному состоянию в момент времени t соответствует точка F . Если $J_2^e < J_2^*$, то происходит упругое деформирование элемента и $\sigma'_{ij}(t + \tau) = \sigma'_{ij}^e$. Если же $J_2^e > J_2^*$, то деформирование сопровождается пластическими деформациями и необходима корректировка величин σ'_{ij}^e . При этом множитель $1 + \tau\lambda$ определяется по формуле (5.23). Таким образом, в этом случае процесс деформирования элемента на промежутке $[t, t + \tau]$ интерпретируется как переход по упругому закону из точки F в точку E с последующим переходом в точку D по лучу OE .

В случае идеальной пластичности приведенная аппроксимация совпадает с процедурой Уилкинса корректировки напряженного состояния. Величина корректирующего множителя в этом случае получается из (5.23) при $\varkappa = 0$:

$$\frac{1}{1 + \tau\lambda} = \sqrt{\frac{J_2^*}{J_2^e}}. \quad (5.25)$$

Таким образом, величина $\tau\lambda$ и компоненты девиатора напряжений в момент времени $t + \tau$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau\lambda = 0, \quad \sigma'_{ij}(t + \tau) &= \sigma'_{ij}{}^e, \quad \text{если } J_2^e \leq J_2^*, \\ \tau\lambda > 0, \quad \sigma'_{ij}(t + \tau) &= \frac{\sigma'_{ij}{}^e}{(1 + \tau\lambda)}, \quad \text{если } J_2^e > J_2^*, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где множитель $1/(1 + \tau\lambda)$ определяется по формуле (5.23). В случае идеальной пластичности нужно положить $\varkappa = 0$.

5.4.2. Итерационная процедура вычисления скоростей деформаций и напряжений

Если при решении задач динамики упругопластического деформирования напряжения и скорости деформаций вычисляются одновременно, то для их вычисления необходима итерационная процедура. Компоненты девиатора напряжений на среднем слое по времени $\sigma'_{ij}{}^0$ будем вычислять по формулам

$$\sigma'_{ij}{}^0 = \sigma'_{ij}{}^\times + \frac{\tau}{2} a_{ijks} e'_{ks}, \quad \sigma'_{ij}{}^0 = (\sigma'_{ij}{}^\times + \sigma'_{ij}(t + \tau))/2, \quad (5.27)$$

где коэффициенты a_{ijks} зависят от напряжений и скоростей деформаций. Квадратичная форма $a_{ijks} e_{ij} e_{ks}$ должна быть положительно определена.

Изложенная выше аппроксимация приводит к соотношениям:

$$\sigma'_{ij}{}^0 = \tilde{\sigma}'_{ij}{}^\times + \frac{\tau}{2} \frac{2\mu}{1 + \tau\lambda} e'_{ij}, \quad (5.28)$$

где $\tilde{\sigma}'_{ij}{}^\times = (2\mu)/(1 + \tau\lambda)\sigma'_{ij}{}^\times$ и, следовательно, квадратичная форма $a_{ijks} e_{ij} e_{ks}$ положительно определена, так как $\tau\lambda > 0$. Итерационный процесс вычисления напряжений и скоростей деформаций начинается с задания нулевого приближения величины $\tau\lambda$ в соотношениях (5.28). После вычисления скоростей деформаций новое значение величины $\tau\lambda$ определяется по соотношениям (5.26).

Применение аппроксимаций, изложенных в разделах 5.2, 5.3, в алгоритмах численного решения динамических задач накладывает ограничение на шаг интегрирования τ . В случае явной схемы такое ограничение не слишком обременительно, так как более сильным ограничением является условие, накладываемое на шаг интегрирования самой разностной схемой. Однако в случае неявных схем более предпочтительной может оказаться аппроксимация уравнений упругопластического течения, изложенная в данном разделе. В этой аппроксимации содержится процедура корректировки напряжений, совпадающая с процедурой Уилкинса в случае идеальной пластичности.

5.5. Уравнения двумерной динамической задачи в криволинейной системе координат

5.5.1. Уравнения движения и соотношения Коши в плоской задаче

Уравнения движения в плоской динамической задаче в ортогональной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3 можно записать в виде [129]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{13}}{\partial x_3} + M_{13} \hat{\sigma}_{31} - M_{31} \hat{\sigma}_{33} + H_1 H_3 \rho \left(f_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{33}}{\partial x_3} + M_{31} \hat{\sigma}_{13} - M_{13} \hat{\sigma}_{11} + H_1 H_3 \rho \left(f_3 - \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где $\hat{\sigma}_{11} = H_3 \sigma_{11}$, $\hat{\sigma}_{13} = H_1 \sigma_{13}$, $\hat{\sigma}_{31} = H_3 \sigma_{13}$, $\hat{\sigma}_{33} = H_1 \sigma_{33}$,

$$M_{13} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3}, \quad M_{31} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1};$$

$\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$ — компоненты тензора напряжений; u_1, u_3 — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; t — время; H_1, H_3 — коэффициенты Ламе; f_1, f_3 — компоненты вектора массовых сил.

Уравнения связи между компонентами e_{ij} ($i, j = 1, 3$) тензора скоростей деформаций и компонентами u_1, u_3 вектора скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + M_{13} u_3 \right), \quad e_{33} = \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + M_{31} u_1 \right), \\ 2e_{13} &= \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - M_{31} u_3 \right) + \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - M_{13} u_1 \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Уравнения (5.1), (5.29), (5.30), граничные и начальные условия образуют замкнутую систему уравнений плоской динамической задачи упругопластического деформирования.

5.5.2. Уравнения движения и соотношения Коши в осесимметричной задаче

Рассмотрим осесимметричную динамическую задачу для упругопластического тела вращения. В качестве системы координат выберем ортогональную криволинейную систему координат x_1, x_2, x_3 , образованную линиями кривизны поверхности вращения и нормалью к ней. Урав-

нения движения в этой системе координат можно записать в виде [73]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{13}}{\partial x_3} + M_{11} \hat{\sigma}_{31} - M_{21} \hat{\sigma}_{22} + H_1 H_2 \rho \left(f_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{33}}{\partial x_3} - M_{11} \hat{\sigma}_{11} - M_{22} \hat{\sigma}_{22} + H_1 H_2 \rho \left(f_3 - \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\hat{\sigma}_{11} = H_2 \sigma_{11}$, $\hat{\sigma}_{13} = H_1 H_2 \sigma_{13}$, $\hat{\sigma}_{31} = H_2 \sigma_{13}$, $\hat{\sigma}_{33} = H_1 H_2 \sigma_{33}$, $\hat{\sigma}_{22} = H_1 \sigma_{22}$,

$$H_1 = A_1 \left(1 + \frac{x_3}{R_1} \right), \quad H_2 = A_2 \left(1 + \frac{x_3}{R_2} \right),$$

$$M_{11} = \frac{A_1}{R_1}, \quad M_{22} = \frac{A_2}{R_2}, \quad M_{21} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1};$$

σ_{11} , σ_{13} , σ_{33} , σ_{22} — компоненты тензора напряжений; u_1 , u_3 — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; t — время; H_1 , H_2 — коэффициенты Ламе; A_1 , A_2 , R_1 , R_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны координатной поверхности $x_3 = 0$; f_1 , f_3 — компоненты вектора массовых сил.

Уравнения связи между компонентами e_{ij} ($i, j = 1, 3$), e_{22} тензора скоростей деформаций и компонентами u_1 , u_3 вектора скорости имеют вид:

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + M_{11} u_3 \right), \quad e_{22} = \frac{1}{H_2} (M_{21} u_1 + M_{22} u_3), \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (5.32)$$

$$2e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - M_{11} u_1 \right), \quad e_{12} = e_{23} = 0.$$

Уравнения (5.1), (5.31), (5.32), граничные и начальные условия образуют замкнутую систему уравнений динамической задачи упругопластического деформирования тел вращения.

5.6. Аппроксимация искомых функций в двумерной задаче

5.6.1. Аппроксимация искомых функций в плоской задаче

Рассматривается случай, когда граница Γ области S , в которой ищется решение задачи, образована отрезками координатных линий x_1 , x_3 ортогональной криволинейной системы координат x_1, x_2, x_3 . Область S разбивается координатными линиями на криволинейные четырехугольные элементы (рис. 5.2). Изложим алгоритм построения решения

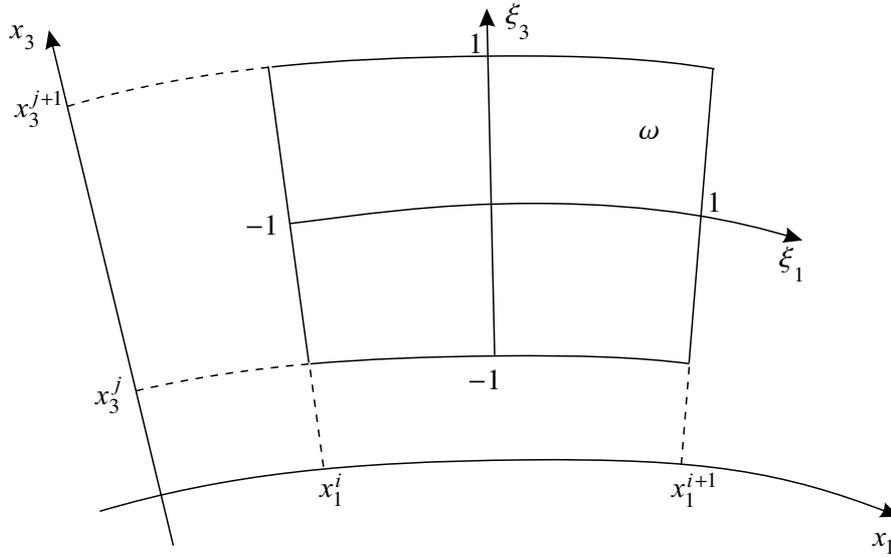


Рис. 5.2. Локальная система координат в криволинейном четырехугольном элементе

для одного четырехугольного элемента с использованием первого способа линеаризации уравнений упругопластического деформирования. Младшие члены в уравнениях задачи аппроксимируются их значениями на среднем слое по времени.

Задача для отдельного элемента $\Omega = \{\xi_1, \xi_3, \eta \in [-1, 1]\}$ ставится следующим образом. Найти функции $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{33}, u_1, u_3$, удовлетворяющие при $\xi_1, \xi_3, \eta \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2}{h_1} \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_1^{i+1} + x_1^i) \right), & h_1 &= x_1^{i+1} - x_1^i > 0, \\ \xi_3 &= \frac{2}{h_3} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_3^{j+1} + x_3^j) \right), & h_3 &= x_3^{j+1} - x_3^j > 0, \\ \eta &= \frac{2}{\tau} \left(t - \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n) \right), & \tau &= t_{n+1} - t_n > 0, \end{aligned}$$

уравнениям (5.1), (5.29), (5.30), граничным условиям

$$\begin{aligned} (a_1^\mp u_1 + b_1^\mp \hat{\sigma}_{11})|_{\xi_1=\mp 1} &= \varphi_1^\mp, & (a_2^\mp u_3 + b_2^\mp \hat{\sigma}_{31})|_{\xi_1=\mp 1} &= \varphi_2^\mp, \\ (a_3^\mp u_1 + b_3^\mp \hat{\sigma}_{13})|_{\xi_3=\mp 1} &= \varphi_3^\mp, & (a_4^\mp u_3 + b_4^\mp \hat{\sigma}_{33})|_{\xi_3=\mp 1} &= \varphi_4^\mp \end{aligned} \quad (5.33)$$

и начальным условиям

$$u_\alpha|_{\eta=-1} = u_\alpha^*, \quad \sigma_{\alpha\alpha}|_{\eta=-1} = \sigma_{\alpha\alpha}^*, \quad \alpha = 1, 3, \quad \sigma_{13}|_{\eta=-1} = \sigma_{13}^*. \quad (5.34)$$

В (5.33) величины a_α^\mp , b_α^\mp , φ_α^\mp ($\alpha = 1, \dots, 4$) — заданные постоянные, причем,

$$a_\alpha^- b_\alpha^- \leq 0, \quad |a_\alpha^-| + |b_\alpha^-| \neq 0, \quad a_\alpha^+ b_\alpha^+ \geq 0, \quad |a_\alpha^+| + |b_\alpha^+| \neq 0, \quad (5.35)$$

правые части в (5.34) — заданные функции ξ_1 , ξ_3 .

Решение этой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + u_1^1 \eta, & u_3 &= u_3^0 + u_3^1 \eta, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha}^0 + \sigma_{\alpha\alpha}^1 \eta \quad (\alpha = 1, 2, 3), & \sigma_{13} &= \sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^1 \eta, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где u_1^α , u_3^α , σ_{11}^α , σ_{33}^α , σ_{13}^α ($\alpha = 0, 1$) — искомые функции ξ_1 , ξ_3 . Потребуем, чтобы функции (5.36) удовлетворяли условиям (5.34) и уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + M_{13} H_3 \sigma_{13}^0 - M_{31} H_1 \sigma_{33}^0 + H_1 H_3 \rho \left(f_1^0 - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + M_{31} H_1 \sigma_{13}^0 - M_{13} H_3 \sigma_{11}^0 + H_1 H_3 \rho \left(f_3^0 - \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{11} e_{11} + a_{33} e_{33}) + \sigma_{11}^{\times \times}, & \sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{33} e_{11} + a_{11} e_{33}) + \sigma_{33}^{\times \times}, \\ \sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2} a_{13} \cdot 2e_{13} + \sigma_{13}^{\times \times}, & \sigma_{22}^0 &= \frac{\tau}{2} a_{33} (e_{11} + e_{33}) + \sigma_{22}^{\times \times}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + M_{13} u_3^0 \right), & e_{33} &= \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} + M_{31} u_1^0 \right), \\ 2e_{13} &= \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} - M_{31} u_3^0 \right) + \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} - M_{13} u_1^0 \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}'_{11} &= \widehat{\sigma}'_{11}{}^0 + \widehat{\sigma}'_{11}{}^1 \xi_1, & \widehat{\sigma}'_{13} &= \widehat{\sigma}'_{13}{}^0 + \widehat{\sigma}'_{13}{}^1 \xi_3, \\ \widehat{\sigma}'_{31} &= \widehat{\sigma}'_{31}{}^0 + \widehat{\sigma}'_{31}{}^1 \xi_1, & \widehat{\sigma}'_{33} &= \widehat{\sigma}'_{33}{}^0 + \widehat{\sigma}'_{33}{}^1 \xi_3, \\ u'_{11} &= u'_{11}{}^0 + u'_{11}{}^1 \xi_1, & u'_{13} &= u'_{13}{}^0 + u'_{13}{}^1 \xi_3, \\ u'_{31} &= u'_{31}{}^0 + u'_{31}{}^1 \xi_1, & u'_{33} &= u'_{33}{}^0 + u'_{33}{}^1 \xi_3 \end{aligned} \quad (5.40)$$

— полиномы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} (a_1^\mp u'_{11} + b_1^\mp \widehat{\sigma}'_{11})|_{\xi_1=\mp 1} &= \varphi_1^\mp, & (a_2^\mp u'_{31} + b_2^\mp \widehat{\sigma}'_{31})|_{\xi_1=\mp 1} &= \varphi_2^\mp, \\ (a_3^\mp u'_{13} + b_3^\mp \widehat{\sigma}'_{13})|_{\xi_3=\mp 1} &= \varphi_3^\mp, & (a_4^\mp u'_{33} + b_4^\mp \widehat{\sigma}'_{33})|_{\xi_3=\mp 1} &= \varphi_4^\mp; \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$f_1^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1 d\eta, \quad f_3^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_3 d\eta.$$

В соотношениях (5.37), аппроксимирующих уравнения движения, младшие члены аппроксимируются их значениями на среднем слое по времени.

Решение на верхнем слое по времени $\eta = 1$ находится по формулам:

$$\begin{aligned} u_\alpha|_{\eta=1} &= 2u_\alpha^0 - u_\alpha^*, & \sigma_{\alpha\alpha}|_{\eta=1} &= 2\sigma_{\alpha\alpha}^0 - \sigma_{\alpha\alpha}^*, & \alpha &= 1, 3, \\ \sigma_{13}|_{\eta=1} &= 2\sigma_{13}^0 - \sigma_{13}^*, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где $u_1^0, u_3^0, \sigma_{11}^0, \sigma_{33}^0, \sigma_{13}^0$ определяются из уравнений (5.37)–(5.39) следующим образом. Используя (5.39), систему уравнений (5.38) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2} \left[S'_{11} + \left(\frac{M_{31}}{H_3} a_{33} u_1^0 + \frac{M_{13}}{H_1} a_{11} u_3^0 \right) \right] + \sigma_{11}^{\times\times}, \\ \sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2} \left[S'_{33} + \left(\frac{M_{31}}{H_3} a_{11} u_1^0 + \frac{M_{13}}{H_1} a_{33} u_3^0 \right) \right] + \sigma_{33}^{\times\times}, \\ \sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2} \left[S'_{13} - \left(\frac{M_{13}}{H_1} a_{13} u_1^0 + \frac{M_{31}}{H_3} a_{13} u_3^0 \right) \right] + \sigma_{13}^{\times\times}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где

$$\begin{aligned} S'_{11} &= \frac{a_{11}}{H_1} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + \frac{a_{33}}{H_3} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3}, \\ S'_{33} &= \frac{a_{33}}{H_1} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + \frac{a_{11}}{H_3} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3}, \\ S'_{13} &= \frac{a_{13}}{H_3} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_1} + \frac{a_{13}}{H_1} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Из (5.34), (5.36), (5.43), (5.37) находим

$$u_1^0 = CL_1 - BL_3, \quad u_3^0 = AL_3 - BL_1, \quad (5.44)$$

где $A = A_0/D, B = B_0/D, C = C_0/D, D = A_0C_0 - B_0^2,$

$$A_0 = H_1H_3\rho + \frac{\tau^2}{4}(a_{13}m_1^2 + a_{11}m_3^2), \quad C_0 = H_1H_3\rho + \frac{\tau^2}{4}(a_{13}m_3^2 + a_{11}m_1^2),$$

$$B_0 = \frac{\tau^2}{4}m_1m_3(a_{13} + a_{33}), \quad m_1 = M_{13}\sqrt{\frac{H_3}{H_1}}, \quad m_3 = M_{31}\sqrt{\frac{H_1}{H_3}},$$

$$L_1 = \frac{\tau}{2}\Sigma'_1 + \frac{\tau^2}{4}L'_1 + L_1^\times, \quad L_3 = \frac{\tau}{2}\Sigma'_3 + \frac{\tau^2}{4}L'_3 + L_3^\times,$$

$$\Sigma'_1 = \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3}, \quad \Sigma'_3 = \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3},$$

$$L'_1 = M_{13}H_3S'_{13} - M_{31}H_1S'_{33}, \quad L'_3 = M_{31}H_1S'_{13} - M_{13}H_3S'_{11},$$

$$L_1^\times = H_1H_3\rho \left(u_1^\times + \frac{\tau}{2}f_1^0 \right) + \frac{\tau}{2}(M_{13}H_3\sigma_{13}^{\times\times} - M_{31}H_1\sigma_{33}^{\times\times}),$$

$$L_3^\times = H_1 H_3 \rho \left(u_3^\times + \frac{\tau}{2} f_3^0 \right) + \frac{\tau}{2} (M_{31} H_1 \sigma_{13}^{\times \times} - M_{13} H_3 \sigma_{11}^{\times \times}).$$

Заметим, что

$$A_0 C_0 - B_0^2 \geq (H_1 H_3 \rho)^2. \quad (5.45)$$

Согласно принятой аппроксимации для построения решения в элементе нужно определить коэффициенты полиномов (5.40). Условий (5.41) для этого недостаточно. Задача о формулировке дополнительных уравнений рассматривается ниже.

5.6.2. Аппроксимация искомых функций в осесимметричной задаче

Меридианальное сечение тела вращения разбивается координатными линиями x_1 , x_3 ортогонально криволинейной системы координат на четырехугольные элементы (рис. 5.2). Используется второй способ линеаризации уравнений упругопластического деформирования. Младшие члены в уравнениях задачи выражаются через значения скоростей и напряжений на нижнем слое по времени.

Задача для отдельного элемента $\Omega = \{\xi_1, \xi_3, \eta \in [-1, 1]\}$ ставится следующим образом. Найти функции σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{13} , u_1 , u_3 , удовлетворяющие при $\xi_1, \xi_3, \eta \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2}{h_1} \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_1^{i+1} + x_1^i) \right), \quad h_1 = x_1^{i+1} - x_1^i > 0, \\ \xi_3 &= \frac{2}{h_3} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_3^{j+1} + x_3^j) \right), \quad h_3 = x_3^{j+1} - x_3^j > 0, \\ \eta &= \frac{2}{\tau} \left(t - \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n) \right), \quad \tau = t_{n+1} - t_n > 0, \end{aligned}$$

уравнениям (5.1), (5.31), (5.32), граничным условиям

$$\begin{aligned} (a_1^\mp u_1 + b_1^\mp \widehat{\sigma}_{11})|_{\xi_1=\mp 1} &= \varphi_1^\mp, \quad (a_2^\mp u_3 + b_2^\mp \widehat{\sigma}_{31})|_{\xi_1=\mp 1} = \varphi_2^\mp, \\ (a_3^\mp u_1 + b_3^\mp \widehat{\sigma}_{13})|_{\xi_3=\mp 1} &= \varphi_3^\mp, \quad (a_4^\mp u_3 + b_4^\mp \widehat{\sigma}_{33})|_{\xi_3=\mp 1} = \varphi_4^\mp, \end{aligned} \quad (5.46)$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} u_\alpha|_{\eta=-1} &= u_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 3), \quad \sigma_{\alpha\alpha}|_{\eta=-1} = \sigma_{\alpha\alpha}^* \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ \sigma_{13}|_{\eta=-1} &= \sigma_{13}^*. \end{aligned} \quad (5.47)$$

В (5.46) величины a_α^\mp , b_α^\mp , φ_α^\mp ($\alpha = 1, \dots, 4$) — заданные постоянные, удовлетворяющие условиям (5.35). Правые части в (5.47) — заданные функции ξ_1 , ξ_3 .

Аналогично тому, как это сделано для плоской задачи, решение задачи для элемента Ω будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + u_1^1 \eta, & u_3 &= u_3^0 + u_3^1 \eta, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha}^0 + \sigma_{\alpha\alpha}^1 \eta \quad (\alpha = 1, 2, 3), & \sigma_{13} &= \sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^1 \eta, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где $u_1^\alpha, u_3^\alpha, \sigma_{11}^\alpha, \sigma_{22}^\alpha, \sigma_{33}^\alpha, \sigma_{13}^\alpha$ ($\alpha = 0, 1$) — искоемые функции ξ_1, ξ_3 . Потребуем, чтобы функции (5.24) удовлетворяли условиям (5.23) и уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{13} - M_{21} H_1 \tilde{\sigma}_{22} + H_1 H_2 \rho \left(f_1^0 - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} - M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{11} - M_{22} H_1 \tilde{\sigma}_{22} + H_1 H_2 \rho \left(f_3^0 - \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{11} e_{11} + a_{12} e_{22} + a_{13} e_{33} + a_{14} e_{13}) + \sigma_{11}^{\times \times}, \\ \sigma_{22}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{12} e_{11} + a_{22} e_{22} + a_{23} e_{33} + a_{24} e_{13}) + \sigma_{22}^{\times \times}, \\ \sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{13} e_{11} + a_{23} e_{22} + a_{33} e_{33} + a_{34} e_{13}) + \sigma_{33}^{\times \times}, \\ \sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{14} e_{11} + a_{24} e_{22} + a_{34} e_{33} + a_{44} e_{13}) + \sigma_{13}^{\times \times}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + M_{11} \tilde{u}_3 \right), & e_{22} &= \frac{1}{H_2} (M_{21} \tilde{u}_1 + M_{22} \tilde{u}_3), \\ e_{33} &= \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3}, & 2e_{13} &= \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} - M_{11} \tilde{u}_1 \right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

где $\hat{\sigma}'_{ij}, u'_{ij}$ ($i, j = 1, 3$) — линейные полиномы (5.40), удовлетворяющие условиям (5.41);

$$\tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_3, \quad \tilde{\sigma}_{13}, \quad \tilde{\sigma}_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{11} \quad (5.52)$$

— искоемые функции ξ_1, ξ_3 , аппроксимирующие младшие члены, как будет показано в дальнейшем, через значения скоростей и напряжений на нижнем слое по времени;

$$f_1^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1 d\eta, \quad f_3^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_3 d\eta.$$

Решение на верхнем слое по времени $\eta = 1$ находится по формулам:

$$\begin{aligned} u_\alpha|_{\eta=1} &= 2u_\alpha^0 - u_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 3), & \sigma_{13}|_{\eta=1} &= 2\sigma_{13}^0 - \sigma_{13}^*, \\ \sigma_{\alpha\alpha}|_{\eta=1} &= 2\sigma_{\alpha\alpha}^0 - \sigma_{\alpha\alpha}^* \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5.53)$$

где $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$ определяются из уравнений (5.50), (5.51), а u_1^0, u_3^0 — из уравнений (5.49), которые, используя (5.42), можно записать так:

$$u_1^0 = \bar{u}_1^\times + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\Sigma'_1 + \tilde{L}_1}{\rho H_1 H_2} \right), \quad u_3^0 = \bar{u}_3^\times + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\Sigma'_3 + \tilde{L}_3}{\rho H_1 H_2} \right), \quad (5.54)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^\times &= u_1^\times + \frac{\tau}{2} f_1^0, & \bar{u}_3^\times &= u_3^\times + \frac{\tau}{2} f_3^0, \\ \Sigma'_1 &= \frac{\partial \tilde{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}'_{13}}{\partial x_3}, & \Sigma'_3 &= \frac{\partial \tilde{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}'_{33}}{\partial x_3}, \\ \tilde{L}_1 &= M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{13} - M_{21} H_1 \tilde{\sigma}_{22}, & \tilde{L}_3 &= -M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{11} - M_{22} H_1 \tilde{\sigma}_{22}. \end{aligned}$$

Согласно принятой аппроксимации, для построения решения в элементе необходимо определить функции (5.52) и коэффициенты полиномов (5.40). Условий (5.41) для этого недостаточно. Задача о формулировке дополнительных уравнений рассматривается ниже. Таким образом, при построении приближенного решения для каждой из искомым функций используется несколько аппроксимаций: аппроксимация по времени (5.48), аппроксимация по пространственным координатам (5.40), аппроксимация младших членов (5.52). Введенные аппроксимации можно интерпретировать так. Для компоненты u_1^* вектора скорости в точном решении были введены следующие аппроксимации: $u_1, \tilde{u}_1, u'_{11}, u'_{13}$. При этом, u_1 — линейная по времени аппроксимация u_1^* , функция \tilde{u}_1 аппроксимирует величину

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_1^* d\eta,$$

полином u'_{11} аппроксимирует величину

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_1^* d\xi_3 d\eta,$$

полином u'_{13} аппроксимирует величину

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_1^* d\xi_1 d\eta.$$

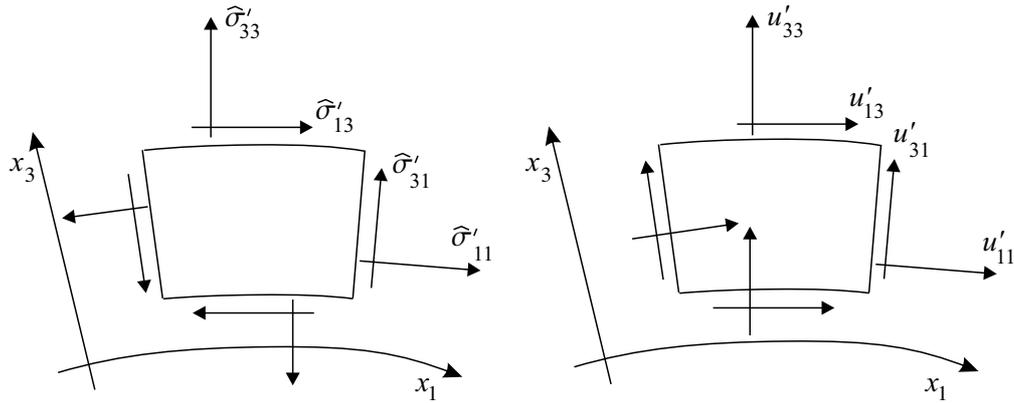


Рис. 5.3. Положительные направления напряжений и скоростей на сторонах криволинейного четырехугольного элемента

Ниже дополнительные уравнения строятся так, что при

$$\tau \rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0, \quad h_3 \rightarrow 0$$

для аппроксимирующих полиномов выполняются равенства:

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega} \tilde{u}_1 d\omega = u'_{11} = u'_{13},$$

где $\omega = \{\xi_1, \xi_3 \in [-1, 1]\}$.

На рис. 5.3 указаны положительные направления напряжений и скоростей на сторонах элемента ω .

5.7. Энергетическое тождество

Прежде чем приступить к формулировке дополнительных уравнений для определения коэффициентов полиномов (5.40) и функций (5.52), получим энергетическое тождество, которое для принятой аппроксимации является аналогом закона сохранения энергии для исходной дифференциальной задачи.

5.7.1. Энергетическое тождество в плоской задаче

Покажем, что для функций (5.36) и полиномов (5.40), удовлетворяющих уравнениям (5.37)–(5.39), имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \left(\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + \sigma_{11} e_{11} + \sigma_{33} e_{33} + 2\sigma_{13} e_{13} \right) d\omega d\eta + \\ & + Q = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{\sigma}'_{11} u'_{11} + \hat{\sigma}'_{31} u'_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\sigma}'_{13} u'_{13} + \hat{\sigma}'_{33} u'_{33}) + \right. \\ & \left. + H_1 H_3 \rho (u_1 f_1^0 + u_3 f_3^0) \right) d\omega d\eta, \quad (5.55) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q = & \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left((u_{11}^0 - \hat{u}_1^0) \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + (u_{31}^0 - \hat{u}_3^0) \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + (u_{13}^0 - \hat{u}_1^0) \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + \right. \\ & + (u_{33}^0 - \hat{u}_3^0) \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}_{11}^0 - \hat{\sigma}_{11}^0) \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + (\hat{\sigma}_{31}^0 - \hat{\sigma}_{31}^0) \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} + \\ & \left. + (\hat{\sigma}_{13}^0 - \hat{\sigma}_{13}^0) \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}_{33}^0 - \hat{\sigma}_{33}^0) \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} \right) d\omega d\eta, \quad (5.56) \end{aligned}$$

$$\hat{u}_1^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u_1^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}_{11}^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \sigma_{11}^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}_{31}^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \sigma_{13}^0 d\omega,$$

$$\hat{u}_3^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u_3^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}_{13}^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \sigma_{13}^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}_{33}^0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \sigma_{33}^0 d\omega.$$

Для этого, умножая первое уравнение системы (5.37) на u_1 , второе — на u_3 , складывая и интегрируя по ω и по η , получим

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left(u_1 \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} - M_{13} H_3 \sigma_{11}^0 u_3 + \right. \\ & + u_3 \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + M_{13} H_3 \sigma_{13}^0 u_1 + u_1 \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + M_{31} H_1 \sigma_{13}^0 u_3 + u_3 \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} - \\ & \left. - M_{31} H_1 \sigma_{33}^0 u_1 + H_1 H_3 \rho (u_1 f_1^0 + u_3 f_3^0) \right) d\omega d\eta. \quad (5.57) \end{aligned}$$

Производя тождественные преобразования в правой части (5.57), интегрируя по частям и используя свойство ортогональности полиномов (5.36) и (5.40), приходим к (5.55).

Рассмотрим более подробно преобразования, приводящие к энергетическому тождеству, на примере первых двух слагаемых в правой части (5.57). Имеем:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left(u_1 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} - M_{13} H_3 \sigma_{11}^0 u_3 \right) d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left(u_1 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} - M_{13} H_3 \sigma_{11}^0 u_3 + H_3 \sigma_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + M_{13} H_3 \sigma_{11} u_3^0 - H_1 H_3 \sigma_{11} e_{11} \right) d\omega d\eta.$$

Так как

$$\int_{-1}^1 (M_{13} H_3 \sigma_{11} u_3^0 - M_{13} H_3 \sigma_{11}^0 u_3) d\eta = 0,$$

то

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left(u_1 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + H_3 \sigma_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} - H_1 H_3 \sigma_{11} e_{11} \right) d\omega d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ u_1 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + H_3 \sigma_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + (u'_{11} - \widehat{u}'_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{11} - \widehat{\sigma}_{11}^0) \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} - \right. \\ &\quad \left. - \left[(u'_{11} - \widehat{u}'_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{11} - \widehat{\sigma}_{11}^0) \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right] - H_1 H_3 \sigma_{11} e_{11} \right\} d\omega d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11}) - \left[(u'_{11} - \widehat{u}'_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{11} - \widehat{\sigma}_{11}^0) \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right] - \right. \\ &\quad \left. - H_1 H_3 \sigma_{11} e_{11} \right\} d\omega d\eta. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано свойство ортогональности полиномов (5.36) и (5.40):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\omega} u_1 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} u_1^0 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \widehat{u}_1^0 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta, \\ \int_{-1}^1 \int_{\omega} u'_{11} \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} u'_{11}{}^0 \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta, \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} H_3 \sigma_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_3 \sigma_{11}^0 \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \widehat{\sigma}_{11}^0 \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta,$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} \widehat{\sigma}'_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \widehat{\sigma}'^0_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega d\eta.$$

5.7.2. Энергетическое тождество в осесимметричной задаче

Аналогичными выкладками нетрудно показать, что для функций (5.52), полиномов (5.48) и (5.40), удовлетворяющих уравнениям (5.49)–(5.51), имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_2 \left[\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + \sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{33} e_{33} + \right. \\ \left. + 2\sigma_{13} e_{13} \right] d\omega d\eta + Q = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11} + \widehat{\sigma}'_{31} u'_{31}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (\widehat{\sigma}'_{13} u'_{13} + \widehat{\sigma}'_{33} u'_{33}) + H_1 H_2 \rho (u_1 f_1^0 + u_3 f_3^0) \right] d\omega d\eta, \quad (5.58)$$

где

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (5.59)$$

$$Q_1 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left((u'^0_{11} - u^0_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} + (u'^0_{31} - u^0_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} + (u'^0_{13} - u^0_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + (u'^0_{33} - u^0_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1^0) \tilde{L}_1 + (\tilde{u}_3 - \tilde{u}_3^0) \tilde{L}_3 \right) d\omega d\eta,$$

$$Q_2 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left((\widehat{\sigma}'^0_{11} - H_2 \sigma_{11}^0) \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'^0_{31} - H_2 \sigma_{13}^0) \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (\widehat{\sigma}'^0_{13} - H_1 H_2 \sigma_{13}^0) \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'^0_{33} - H_1 H_2 \sigma_{33}^0) \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + (L_1^0 - \tilde{L}_1) \tilde{u}_1 + (L_3^0 - \tilde{L}_3) \tilde{u}_3 \right) d\omega d\eta,$$

$$L_1^0 = M_{11} H_2 \sigma_{13}^0 - M_{21} H_1 \sigma_{22}^0, \quad L_3^0 = -M_{11} H_2 \sigma_{11}^0 - M_{22} H_1 \sigma_{22}^0.$$

5.8. Формулировка вспомогательных одномерных задач

5.8.1. Дополнительные уравнения в плоской задаче

Как уже отмечалось в разделах 5.6.1, 5.6.2 для получения замкнутой системы уравнений относительно коэффициентов полиномов (5.40) нужно сформулировать дополнительные уравнения. Число коэффициентов полиномов (5.40) равно шестнадцати, число уравнений (5.41) равно восьми. Следовательно, необходимо сформулировать восемь дополнительных уравнений.

Чтобы пояснить смысл дополнительных уравнений, предположим, что (5.36), (5.40) — соответствующие отрезки разложения в ряды точного решения задачи для четырехугольного элемента. Тогда

$$u'_{11} = u'_{13} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u_1^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}'_{11} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \sigma_{11}^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}'_{31} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \sigma_{13}^0 d\omega, \quad (5.60)$$

$$u'_{31} = u'_{33} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u_3^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}'_{13} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \sigma_{13}^0 d\omega, \quad \hat{\sigma}'_{33} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \sigma_{33}^0 d\omega.$$

Если в качестве дополнительных уравнений взять уравнения (5.60), то получим замкнутую систему уравнений. Из (5.56) следует, что $Q = 0$ в случае выполнения соотношения (5.60) и, следовательно, приближенное решение консервативно (сумма кинетической и потенциальной энергий не изменяется при инерционном движении). Нетрудно заметить, что построение консервативного решения сопряжено с необходимостью решать систему связанных между собою алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов (5.40).

Рассмотрим формулировку дополнительных уравнений, при которой величина Q в (5.55) неотрицательна. Произведем некоторые преобразования равенства (5.56). Из (5.43), (5.44) следует

$$\begin{aligned} \hat{u}'_1 \Sigma'_1 + \hat{u}'_3 \Sigma'_3 + \hat{\sigma}'_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + \hat{\sigma}'_{31} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} + \hat{\sigma}'_{13} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} + \hat{\sigma}'_{33} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} = \\ = \bar{u}'_1 \Sigma'_1 + \bar{u}'_3 \Sigma'_3 + \bar{\sigma}'_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}'_{31} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}'_{13} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} + \bar{\sigma}'_{33} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} + \\ + \frac{\tau}{2\omega} \int_{\omega} \left(C \Sigma_1'^2 - 2B \Sigma_1' \Sigma_3' + A \Sigma_3'^2 + H_3 S'_{11} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} + H_3 S'_{13} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} + \right. \end{aligned}$$

$$+ H_1 S'_{13} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} + H_1 S'_{33} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} \Big) d\omega - \frac{\tau^2}{4} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (CL_1'^2 - 2BL_1' L_3' + AL_3'^2) d\omega, \quad (5.61)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} U_1^\times d\omega, & U_1^\times &= CL_1^\times - BL_3^\times, \\ \bar{u}_3^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} U_3^\times d\omega, & U_3^\times &= AL_3^\times - BL_1^\times, \\ \bar{\sigma}_{11}^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \left(\sigma_{11}^{\times\times} + \frac{\tau}{2} S_{11}^\times \right) d\omega, & \bar{\sigma}_{31}^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 \left(\sigma_{13}^{\times\times} - \frac{\tau}{2} S_{13}^\times \right) d\omega, \\ \bar{\sigma}_{13}^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \left(\sigma_{13}^{\times\times} - \frac{\tau}{2} S_{13}^\times \right) d\omega, & \bar{\sigma}_{33}^\times &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 \left(\sigma_{33}^{\times\times} + \frac{\tau}{2} S_{33}^\times \right) d\omega, \\ S_{11}^\times &= \frac{M_{31}}{H_3} a_{33} U_1^\times + \frac{M_{13}}{H_1} a_{11} U_3^\times, \\ S_{13}^\times &= \frac{M_{13}}{H_1} a_{13} U_1^\times + \frac{M_{31}}{H_3} a_{13} U_3^\times, \\ S_{33}^\times &= \frac{M_{31}}{H_3} a_{11} U_1^\times + \frac{M_{13}}{H_1} a_{33} U_3^\times. \end{aligned}$$

Используя (5.61), выражение (5.56) представим в виде

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (5.62)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left[\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \left(\hat{\sigma}'_{11}{}^0 - \bar{\sigma}_{11}^\times - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 S'_{11} d\omega \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} \left(\hat{\sigma}'_{31}{}^0 - \bar{\sigma}_{31}^\times - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_3 S'_{13} d\omega \right) + \\ &\quad + \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} \left(\hat{\sigma}'_{13}{}^0 - \bar{\sigma}_{13}^\times - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 S'_{13} d\omega \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_1} \left(\hat{\sigma}'_{33}{}^0 - \bar{\sigma}_{33}^\times - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 S'_{33} d\omega \right) \right] d\omega d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left[\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \left(u'_{11}{}^0 - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (C\Sigma'_1 - B\Sigma'_3) d\omega \right) + \right. \\
& + \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \left(u'_{31}{}^0 - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (A\Sigma'_3 - B\Sigma'_1) d\omega \right) + \\
& + \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \left(u'_{13}{}^0 - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (C\Sigma'_1 - B\Sigma'_3) d\omega \right) + \\
& \left. + \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \left(u'_{33}{}^0 - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (A\Sigma'_3 - B\Sigma'_1) d\omega \right) \right] d\omega d\eta, \\
Q_3 = & \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left[\frac{\tau^3}{8} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} (CL_1'^2 - 2BL_1'L_3' + AL_3'^2) d\omega \right] d\omega d\eta.
\end{aligned}$$

Дополнительные уравнения, необходимые для замыкания системы (5.34), (5.37)–(5.39), (5.41) выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) вычисление решения на каждом шаге по времени сводится к решению одномерных задач;
- 2) величина $Q \geq 0$;
- 3) построенное решение сходится к точному при измельчении пространственно-временной сетки.

Выполнение второго условия обеспечивает устойчивость алгоритма, при этом величина Q в (5.55) имеет смысл искусственной диссипации.

В качестве дополнительных уравнений примем:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}'_{11}{}^0 - \bar{\sigma}_{11}^{\times} - \frac{\tau + \gamma_1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} a_{11} \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} d\omega &= 0, \\
u'_{11}{}^0 - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \omega_1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} C \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} d\omega &= 0, \\
\widehat{\sigma}'_{31}{}^0 - \bar{\sigma}_{31}^{\times} - \frac{\tau + \gamma_2}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} a_{13} \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} d\omega &= 0, \\
u'_{31}{}^0 - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_2}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} A \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} d\omega &= 0,
\end{aligned}$$

$$\widehat{\sigma}'_{33}{}^0 - \bar{\sigma}_{33}^\times - \frac{\tau + \gamma_3}{2} \frac{1}{\omega} \int a_{11} \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} d\omega = 0, \quad (5.63)$$

$$u'_{33}{}^0 - \bar{u}_3^\times - \frac{\tau + \omega_3}{2} \frac{1}{\omega} \int A \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} d\omega = 0,$$

$$\widehat{\sigma}'_{13}{}^0 - \bar{\sigma}_{13}^\times - \frac{\tau + \gamma_4}{2} \frac{1}{\omega} \int a_{13} \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} d\omega = 0,$$

$$u'_{13}{}^0 - \bar{u}_1^\times - \frac{\tau + \omega_4}{2} \frac{1}{\omega} \int C \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} d\omega = 0,$$

где $\gamma_\alpha, \omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, 4$ — неотрицательные числа. В дальнейшем эти числа будем называть константами диссипации.

Первые два из уравнений (5.63) и соответствующие им граничные условия (5.41) образуют замкнутую систему относительно коэффициентов полиномов $\widehat{\sigma}'_{11}, u'_{11}$. Чтобы доказать разрешимость этой системы, покажем, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Для этого, умножая первое уравнение системы (5.63) на $\partial u'_{11}/\partial x_1$, второе — на $\partial \widehat{\sigma}'_{11}/\partial x_1$ и складывая, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int \left[\frac{\tau + \gamma_1}{2} a_{11} \frac{H_3}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\tau + \omega_1}{2} C \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\omega = \\ = \frac{1}{\omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11}) - \bar{\sigma}_{11}^\times \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} - \bar{u}_{11}^\times \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Для соответствующей однородной системы правая часть в (5.64) примет вид

$$I = \frac{1}{\omega} \int \frac{\partial}{\partial x_1} (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11}) d\omega = (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11})|_{\xi=+1} - (\widehat{\sigma}'_{11} u'_{11})|_{\xi=-1}.$$

Предположим, для определенности, что в (5.41) $a_1^- \neq 0, b_1^+ \neq 0$. Тогда

$$I = -\frac{a_1^+}{b_1^+} (u'_{11}|_{\xi=+1})^2 + \frac{b_1^-}{a_1^-} (\widehat{\sigma}'_{11}|_{\xi=-1})^2$$

и в силу условий (5.35) $I \leq 0$. Отсюда и из (5.64) следует, что однородная система имеет только нулевое решение и, следовательно, исходная система уравнений однозначно разрешима при любых значениях $\tau + \gamma_1 > 0, \tau + \omega_1 > 0$.

5.8.2. Дополнительные уравнения в осесимметричной задаче

При построении дополнительных уравнений примем:

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} \left(u'_{11} - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_1}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right) d\omega &= 0, \\
\int_{\omega} \left(u'_{31} - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_1}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right) d\omega &= 0, \\
\int_{\omega} \left(u'_{13} - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_2}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right) d\omega &= 0, \\
\int_{\omega} \left(u'_{33} - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_2}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right) d\omega &= 0, \\
\int_{\omega} \left(\tilde{u}_1 - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_3}{2\rho H_1 H_2} \tilde{L}_1 \right) d\omega &= 0, \\
\int_{\omega} \left(\tilde{u}_3 - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_3}{2\rho H_1 H_2} \tilde{L}_3 \right) d\omega &= 0,
\end{aligned} \tag{5.65}$$

где $\gamma_{\alpha}, \omega_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3$ — неотрицательные числа. Тогда величина Q_1 в (5.59) запишется с учетом (5.54) в виде

$$\begin{aligned}
Q_1 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2\rho H_1 H_2} \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma_2 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + \right. \right. \\
+ \omega_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_2 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + \gamma_3 \tilde{L}_1^2 + \omega_3 \tilde{L}_3^2 - \\
\left. \left. - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \tilde{L}_1 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \tilde{L}_3 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \tilde{L}_3 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \tilde{L}_1 \right] \right\} d\omega d\eta. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Запишем уравнения (5.16) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{11}(e_1 + e_2) + a_{12}e_3 + a_{13}e_4 + a_{14}(e_5 + e_6 + e_7)) + \sigma_{11}^{\times \times}, \\
\sigma_{22}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{12}(e_1 + e_2) + a_{22}e_3 + a_{23}e_4 + a_{24}(e_5 + e_6 + e_7)) + \sigma_{22}^{\times \times}, \\
\sigma_{33}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{13}(e_1 + e_2) + a_{23}e_3 + a_{33}e_4 + a_{34}(e_5 + e_6 + e_7)) + \sigma_{33}^{\times \times}, \\
\sigma_{13}^0 &= \frac{\tau}{2} (a_{14}(e_1 + e_2) + a_{24}e_3 + a_{34}e_4 + a_{44}(e_5 + e_6 + e_7)) + \sigma_{13}^{\times \times},
\end{aligned} \tag{5.67}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1}, & e_2 &= \frac{M_{11}}{H_1} \tilde{u}_3, & e_3 &= \frac{M_{21}}{H_1} \tilde{u}_1 + \frac{M_{22}}{H_2} \tilde{u}_3, \\ e_4 &= \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3}, & e_5 &= \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3}, & e_6 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1}, & e_7 &= -\frac{M_{11}}{H_1} \tilde{u}_1. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Выражение для Q_2 в (5.59) с учетом обозначений (5.68) запишем в виде

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} [(\hat{\sigma}'_{11}{}^0 - H_2 \sigma_{11}^0) H_1 e_1 + (\hat{\sigma}'_{31}{}^0 - H_2 \sigma_{13}^0) H_1 e_6 + \\ &+ (\hat{\sigma}'_{13}{}^0 - H_1 H_2 \sigma_{13}^0) e_5 + (\hat{\sigma}'_{33}{}^0 - H_1 H_2 \sigma_{33}^0) e_4 + (\tilde{\sigma}_{11} - \sigma_{11}^0) H_1 H_2 e_2 + \\ &+ (\tilde{\sigma}_{13} - \sigma_{13}^0) H_1 H_2 e_7 + (\tilde{\sigma}_{22} - \sigma_{22}^0) H_1 H_2 e_3] d\omega d\eta. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Если принять

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{11}{}^0 - H_2 \sigma_{11}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_1}{2} a_{11} H_2 e_1 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{31}{}^0 - H_2 \sigma_{13}^{\times} - \frac{\tau + \theta_1}{2} a_{44} H_2 e_6 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{13}{}^0 - H_1 H_2 \sigma_{13}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_2}{2} a_{44} H_1 H_2 e_5 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{33}{}^0 - H_1 H_2 \sigma_{33}^{\times} - \frac{\tau + \theta_2}{2} a_{33} H_1 H_2 e_4 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{11} - \sigma_{11}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_3}{2} a_{11} e_2 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{13} - \sigma_{13}^{\times} - \frac{\tau + \theta_3}{2} a_{44} e_7 \right) d\omega &= 0, \\ \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{22} - \sigma_{22}^{\times} - \frac{\tau + \delta_1}{2} a_{22} e_3 \right) d\omega &= 0, \end{aligned} \quad (5.70)$$

где $\lambda_{\alpha}, \theta_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3, \delta_1$ — неотрицательные числа, то, используя (5.67), выражение (5.69) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
Q_2 = & \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_2 [\lambda_1 a_{11} e_1^2 + \lambda_2 a_{44} e_5^2 + \theta_1 a_{44} e_6^2 + \theta_2 a_{33} e_4^2 + \lambda_3 a_{11} e_2^2 + \\
& + \theta_3 a_{44} e_7^2 + \delta_1 a_{22} e_3^2 - 2\tau(a_{11} e_1 e_2 + a_{12} e_1 e_3 + a_{13} e_1 e_4 + a_{14} e_1(e_5 + e_6 + e_7) + \\
& + a_{12} e_2 e_3 + a_{13} e_2 e_4 + a_{14} e_2(e_5 + e_6 + e_7) + a_{23} e_3 e_4 + a_{24} e_3(e_5 + e_6 + e_7) + \\
& + a_{34} e_4(e_5 + e_6 + e_7) + a_{44} e_5(e_6 + e_7) + a_{44} e_6 e_7)] d\omega d\eta. \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Примем уравнения (5.65), (5.70) в качестве дополнительных уравнений, необходимых для замыкания системы (5.41), (5.47), (5.49)–(5.51). Разобьем их на три группы:

1) уравнения для определения величин $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3, \tilde{\sigma}_{13}, \tilde{\sigma}_{22}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \left(\tilde{u}_1 - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_3}{2\rho H_1 H_2} (M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{13} - M_{21} H_1 \tilde{\sigma}_{22}) \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\tilde{u}_3 - \bar{u}_3^{\times} + \frac{\tau + \omega_3}{2\rho H_1 H_2} (M_{11} H_2 \tilde{\sigma}_{11} + M_{22} H_1 \tilde{\sigma}_{22}) \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{11} - \sigma_{11}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_3}{2H_1} a_{11} M_{11} \tilde{u}_3 \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{13} - \sigma_{13}^{\times} + \frac{\tau + \theta_3}{2H_1} a_{44} M_{11} \tilde{u}_1 \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\tilde{\sigma}_{22} - \sigma_{22}^{\times} - \frac{\tau + \delta_1}{2H_2} a_{22} (M_{21} \tilde{u}_1 + M_{22} \tilde{u}_3) \right) d\omega = 0;
\end{aligned} \quad (5.72)$$

2) уравнения для определения величин $\hat{\sigma}'_{11}, u'_{11}$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{11} - \bar{\sigma}_{11}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_1}{2} a_{11} \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(u'_{11} - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_1}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\hat{\sigma}'_{31} - \bar{\sigma}_{31}^{\times} - \frac{\tau + \theta_1}{2} a_{44} \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(u'_{31} - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_1}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right) d\omega = 0,
\end{aligned} \quad (5.73)$$

где $\bar{\sigma}_{11}^{\times} = H_2 \sigma_{11}^{\times}$, $\bar{\sigma}_{31}^{\times} = H_2 \sigma_{13}^{\times}$;

3) уравнения для определения величин $\widehat{\sigma}'_{13}$, u'_{13} , $\widehat{\sigma}'_{33}$, u'_{33} :

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \left(\widehat{\sigma}'_{13} - \bar{\sigma}_{13}^{\times} - \frac{\tau + \lambda_2}{2} a_{44} H_1 H_2 \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(u'_{13} - \bar{u}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_2}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(\widehat{\sigma}'_{33} - \bar{\sigma}_{33}^{\times} - \frac{\tau + \theta_2}{2} a_{33} H_1 H_2 \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_1} \right) d\omega = 0, \\
& \int_{\omega} \left(u'_{33} - \bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_2}{2\rho H_1 H_2} \frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right) d\omega = 0.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Подставляя третье, четвертое и пятое уравнения системы (5.72) в первые два уравнения этой системы, получим систему уравнений для определения \tilde{u}_1 , \tilde{u}_3 :

$$E\tilde{u}_1 + F\tilde{u}_3 = P, \quad G\tilde{u}_1 + H\tilde{u}_3 = Q, \tag{5.75}$$

где

$$\begin{aligned}
E &= \int_{\omega} \left(1 + \frac{\tau + \gamma_3}{2\rho H_1 H_2} \left(\frac{\tau + \theta_3}{2} \frac{H_2}{H_1} a_{44} M_{11}^2 + \frac{\tau + \delta_1}{2} \frac{H_1}{H_2} a_{22} M_{21}^2 \right) \right) d\omega, \\
H &= \int_{\omega} \left(1 + \frac{\tau + \omega_3}{2\rho H_1 H_2} \left(\frac{\tau + \lambda_3}{2} \frac{H_2}{H_1} a_{11} M_{11}^2 + \frac{\tau + \delta_1}{2} \frac{H_1}{H_2} a_{22} M_{22}^2 \right) \right) d\omega, \\
F &= \int_{\omega} \left(\frac{\tau + \gamma_3}{2\rho H_1 H_2} \frac{\tau + \delta_1}{2} \frac{H_1}{H_2} a_{22} M_{21} M_{22} \right) d\omega, \\
G &= \int_{\omega} \left(\frac{\tau + \omega_3}{2\rho H_1 H_2} \frac{\tau + \delta_1}{2} \frac{H_1}{H_2} a_{22} M_{21} M_{22} \right) d\omega, \\
P &= \int_{\omega} \left(\bar{u}_1^{\times} + \frac{\tau + \gamma_3}{2\rho H_1 H_2} (M_{11} H_2 \sigma_{13}^{\times} - M_{21} H_1 \sigma_{22}^{\times}) \right) d\omega, \\
Q &= \int_{\omega} \left(\bar{u}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_3}{2\rho H_1 H_2} (M_{11} H_2 \sigma_{11}^{\times} + M_{22} H_1 \sigma_{22}^{\times}) \right) d\omega.
\end{aligned}$$

Опуская громоздкие выкладки, отметим, что определитель системы (5.75) отличен от нуля.

Таким образом, система уравнений (5.72) разрешима относительно функций $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3, \tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{13}, \tilde{\sigma}_{22}$, которые вычисляются непосредственно по значениям искомым функций на нижнем слое.

Первые два из уравнений (5.73) и соответствующие им граничные условия (5.41) образуют замкнутую систему относительно коэффициентов полиномов $\hat{\sigma}'_{11}, u'_{11}$. Так как любое решение этой системы обладает энергетическим свойством

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left[\frac{\tau + \lambda_1}{2} a_{11} \frac{H_2}{H_1} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\tau + \gamma_1}{2\rho H_1 H_2} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\omega = \\ = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{\sigma}'_{11} u'_{11}) - \bar{\sigma}_{11}^{\times} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} - \bar{u}_{11}^{\times} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right] d\omega, \end{aligned}$$

аналогичным (5.64), то в силу условий (5.35) она разрешима при любых значениях $\tau + \lambda_1 > 0, \tau + \gamma_1 > 0$.

5.9. Условия неотрицательности диссипации

Сформулируем условия неотрицательности диссипации, обеспечивающие устойчивость алгоритма к ошибкам округления. Неотрицательность диссипации используется в разделе 5.10 для формулировки достаточных условий устойчивости процесса вычислений по явной схеме.

5.9.1. Условия неотрицательности диссипации в плоской задаче

Покажем, что при выполнении условий

$$\gamma_{\alpha} \geq \tau, \quad \omega_{\alpha} \geq 3\tau, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (5.76)$$

величина Q в (5.55) неотрицательна. Для доказательства используем неравенства $a_{13} < a_{11}, a_{13} < a_{33}$ (см. раздел 5.2.1) и неравенства

$$-a^2 - b^2 \leq 2ab \leq a^2 + b^2. \quad (5.77)$$

Величину Q_1 в (5.62), используя (5.63), представим в виде

$$Q_1 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 H_3 \left[\frac{\gamma_1 a_{11}}{H_1^2} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\gamma_3 a_{11}}{H_3^2} \left(\frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\tau}{H_1 H_3} a_{33} \frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} + \frac{\gamma_2 a_{13}}{H_1^2} \left(\frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_4 a_{13}}{H_3^2} \left(\frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 - \frac{2\tau}{H_1 H_3} a_{13} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} \frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} \right] d\omega \right\} d\omega d\eta. \quad (5.78)$$

В силу (5.76), (5.77)

$$Q_1 \geq \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 H_3 \left[\frac{\gamma_1 a_{11} - \tau a_{33}}{H_1^2} \left(\frac{\partial u'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\gamma_2 - \tau) \frac{a_{13}}{H_1^2} \left(\frac{\partial u'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\gamma_3 a_{11} - \tau a_{33}}{H_3^2} \left(\frac{\partial u'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\gamma_4 - \tau) \frac{a_{13}}{H_3^2} \left(\frac{\partial u'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\omega \right\} d\omega d\eta \geq 0.$$

Величину Q_2 в (5.62), используя (5.63), представим в виде

$$Q_2 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left\{ C \left[\omega_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + \omega_4 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + A \left[\omega_2 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + \omega_3 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\tau B \Sigma'_1 \Sigma'_3 \right\} d\omega \right\} d\omega d\eta. \quad (5.79)$$

Так как, согласно (5.45), (5.77), имеет место неравенство

$$2B \Sigma'_1 \Sigma'_3 \geq -C(\Sigma'_1)^2 - A(\Sigma'_3)^2,$$

то, учитывая (5.76), (5.77), получаем

$$Q_2 \geq \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left\{ C \left[\omega_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} + \omega_4 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \tau(\Sigma'_1)^2 \right] + A \left[\omega_2 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} + \right. \right. \\ \left. \left. \omega_3 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 - \tau(\Sigma'_3)^2 \right] \right\} d\omega \right\} d\omega d\eta.$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_3 \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 - \tau(\Sigma'_3)^2 \Big] \Big\} d\omega \Big\} d\omega d\eta \geq \\
& \geq \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left\{ C \left[(\omega_1 - 3\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + (\omega_4 - 3\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + A \left[(\omega_2 - 3\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 + (\omega_3 - 3\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 \right] \right\} d\omega \right\} d\omega d\eta \geq 0.
\end{aligned}$$

В силу неравенства

$$2BL'_1L'_3 \leq C(L'_1)^2 + A(L'_3)^2,$$

которое следует из (5.45), (5.77), величина Q_3 в (5.62) неотрицательна при любых $\gamma_\alpha, \omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, 4$.

Таким образом, условия (5.76) являются достаточными для неотрицательности величины Q в (5.55).

5.9.2. Условия неотрицательности диссипации в осесимметричной задаче

Покажем, что при выполнении условий

$$\gamma_\alpha, \omega_\alpha \geq 2\tau, \quad \lambda_\alpha, \theta_\alpha \geq 6\tau, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \delta_1 \geq 6\tau \quad (5.80)$$

величина Q в (5.58) неотрицательна. Для этого воспользуемся свойствами (5.17) коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ в (5.16) и неравенствами (5.77).

Из (5.66), используя (5.77) и (5.80), находим

$$\begin{aligned}
Q_1 \geq \int_{-1}^1 \int_{\omega} \left\{ \frac{1}{2\rho H_1 H_2} \left[(\gamma_1 - 2\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + (\gamma_2 - 2\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{13}}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \right. \\
\quad \left. \left. + (\gamma_3 - 2\tau) \tilde{L}_1^2 + (\omega_1 - 2\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{31}}{\partial x_1} \right)^2 + (\omega_2 - 2\tau) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}'_{33}}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \right. \\
\quad \left. \left. + (\omega_3 - 2\tau) \tilde{L}_3^2 \right] \right\} d\omega d\eta \geq 0.
\end{aligned}$$

Из (5.71), с учетом (5.17), (5.77), (5.80), находим

$$\begin{aligned}
Q_2 \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_2 \left((\lambda_1 - 6\tau) a_{11} e_1^2 + (\lambda_2 - 6\tau) a_{44} e_5^2 + \right. \\
\quad \left. + (\lambda_3 - 6\tau) a_{11} e_2^2 + (\theta_1 - 6\tau) a_{44} e_6^2 + (\theta_2 - 6\tau) a_{33} e_4^2 + \right. \\
\quad \left. + (\theta_3 - 6\tau) a_{44} e_7^2 + (\delta_1 - 6\tau) a_{22} e_3^2 \right) d\omega d\eta \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, при условиях (5.80) величина Q в (5.58) неотрицательна.

Заметим, что если при построении алгоритма решения осесимметричных задач использовать аппроксимацию младших членов их значениями на среднем слое по времени, то часть слагаемых в выражениях (5.66), (5.71) для Q_1 и Q_2 исчезает, в связи с чем константы диссипации $\gamma_3, \omega_3, \lambda_3, \theta_3, \delta_1$ не входят в формулировку алгоритма, а для оставшихся констант диссипации условия (5.80), обеспечивающие неотрицательность диссипации, имеют вид:

$$\gamma_\alpha, \omega_\alpha, \lambda_\alpha, \theta_\alpha \geq 3\tau, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.81)$$

Если же наряду с этим при построении алгоритма использовать первый способ линеаризации уравнений упругопластического деформирования, то в выражении для Q_2 исчезает еще ряд слагаемых и, вследствие этого, условия (5.81) заменяются условиями

$$\gamma_\alpha, \omega_\alpha, \lambda_\alpha, \theta_\alpha \geq \tau, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.82)$$

Таким образом, использование первого способа линеаризации уравнений упругопластического деформирования и аппроксимации младших членов их значениями на среднем слое повremени приводит к уменьшению числа констант диссипации и ослаблению ограничений на их значения, что дает, как будет показано в разделе 5.10, возможность вести счет по явной схеме с большим шагом по времени и, как следствие этого, уменьшить величину размазывания разрывов. Именно поэтому в работе при проведении численных расчетов использовалась в основном формулировка алгоритмов с первым способом линеаризации уравнений упругопластического деформирования и аппроксимацией младших членов их значениями на среднем слое по времени.

5.10. Построение решения в областях, составленных из четырехугольных элементов

Как было показано в предыдущих разделах, вычисление решения для элементарного четырехугольника состоит из следующих этапов:

а) определение коэффициентов полиномов (5.40) из системы уравнений (5.41), (5.63) в плоском случае и системы уравнений (5.41), (5.73), (5.74) в осесимметричном;

б) вычисление искоемых функций на среднем слое по формулам (5.43), (5.44) в плоском случае и формулам (5.50), (5.51), (5.54), (5.72) в осесимметричном;

в) вычисление решения на верхнем слое по времени по формулам (5.42) в плоском случае и формулам (5.53) в осесимметричном.

Решение задачи для области S , составленной из криволинейных четырехугольных элементов, собирается из решений для каждого из составляющих область S элементов. При этом на сторонах элементов, принадлежащих границе области, формулируются условия типа (5.41), на общих для двух элементов сторонах условия (5.41) заменяются условиями непрерывности полиномов $\hat{\sigma}'_{11}, u'_{11}, \hat{\sigma}'_{31}, u'_{31}$ на сторонах $x_1 = \text{const}$ и условиями непрерывности полиномов $\hat{\sigma}'_{33}, u'_{33}, \hat{\sigma}'_{13}, u'_{13}$ на сторонах $x_3 = \text{const}$.

5.10.1. Вычисление коэффициентов полиномов

Рассмотрим плоскую задачу для области S , составленной из четырехугольных элементов $\omega: x_1^i \leq x_1 \leq x_1^{i+1}, x_3^j \leq x_3 \leq x_3^{j+1}$ (см. рис. 5.2), $i = 0, \dots, N-1, j = 0, \dots, M-1$. В каждом из четырехугольников первые два уравнения системы (5.63) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_{i+1} + p_i - \alpha_{i+1/2}(q_{i+1} - q_i) - 2p_{i+1/2} &= 0, \\ q_{i+1} + q_i - \beta_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - 2q_{i+1/2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где $p_i = \hat{\sigma}'_{11}|_{\xi_1=-1}$; $p_{i+1} = \hat{\sigma}'_{11}|_{\xi_1=1}$; $q_i = u'_{11}|_{\xi_1=-1}$; $q_{i+1} = u'_{11}|_{\xi_1=1}$, $i = 0, \dots, N-1$; $p_{i+1/2} = \bar{\sigma}'_{11}$; $q_{i+1/2} = \bar{u}'_1$,

$$\alpha_{i+1/2} = \frac{\tau + \gamma_1}{h_1} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} a_{11} \frac{H_3}{H_1} d\omega, \quad \beta_{i+1/2} = \frac{\tau + \omega_1}{h_1} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} C d\omega.$$

Для сторон элементов, принадлежащих границе Γ области S , краевые условия (5.41) можно записать в виде:

$$a_0 q_0 + b_0 p_0 = \varphi_0, \quad a_N q_N + b_N p_N = \varphi_N. \quad (5.84)$$

Уравнения (5.83), (5.84) образуют замкнутую систему для определения коэффициентов полиномов $\hat{\sigma}'_{11}$ и u'_{11} . Аналогично строятся системы уравнений для определения коэффициентов полиномов $\hat{\sigma}'_{13}$ и u'_{13} , $\hat{\sigma}'_{31}$ и u'_{31} , $\hat{\sigma}'_{33}$ и u'_{33} .

Таким образом, определение коэффициентов полиномов (5.40) сводится к решению четырех систем вида (5.83), (5.84).

Решение системы уравнений (5.83), (5.84) может быть получено методом прогонки. Из (5.83) находим:

$$p_i = p_{i+1/2} + q_{i+1/2} \beta_{i+1/2}^{-1} - A_{i+1/2} q_i - B_{i+1/2} q_{i+1}, \quad (5.85)$$

$$p_{i+1} = p_{i+1/2} - q_{i+1/2}\beta_{i+1/2}^{-1} + B_{i+1/2}q_i + A_{i+1/2}q_{i+1}, \quad (5.86)$$

где

$$A_{i+1/2} = \frac{1}{2}(1 + \beta_{i+1/2}\alpha_{i+1/2})\beta_{i+1/2}^{-1},$$

$$B_{i+1/2} = \frac{1}{2}(1 - \beta_{i+1/2}\alpha_{i+1/2})\beta_{i+1/2}^{-1}.$$

Уравнение (5.85) при $i = 0$ и первое из уравнений (5.84) можно записать в виде

$$q_0 = D_0q_1 + d_0, \quad p_0 = F_0q_1 + f_0, \quad (5.87)$$

где

$$D_0 = \frac{b_0B_{1/2}}{a_0 - b_0A_{1/2}}, \quad d_0 = \frac{\varphi_0 - b_0(p_{1/2} + q_{1/2}\beta_{1/2})}{a_0 - b_0A_{1/2}},$$

$$F_0 = -(D_0A_{1/2} + B_{1/2}), \quad f_0 = p_{1/2} + q_{1/2}\beta_{1/2}^{-1} - d_0A_{3/2}.$$

Из первого уравнения (5.87) и уравнения (5.86) при $i = 0$ находим

$$p_1 = G_1q_1 + g_1, \quad (5.88)$$

где

$$G_1 = D_0B_{1/2} + A_{1/2}, \quad g_1 = p_{1/2} - q_{1/2}\beta_{1/2}^{-1} + d_0B_{1/2}.$$

Уравнение (5.88) и уравнения (5.85), (5.86) при $i = 1, 2, \dots, N-1$ можно записать в виде

$$p_i = G_iq_i + g_i, \quad q_i = D_iq_{i+1} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.89)$$

$$p_N = G_Nq_N + g_N, \quad (5.90)$$

где

$$D_i = -\frac{B_{i+1/2}}{G_i + A_{i+1/2}}, \quad d_i = \frac{p_{i+1/2} + q_{i+1/2}\beta_{i+1/2}^{-1} - g_i}{G_i + A_{i+1/2}},$$

$$G_{i+1} = D_iB_{i+1/2} + A_{i+1/2}, \quad g_{i+1} = p_{i+1/2} - q_{i+1/2}\beta_{i+1/2}^{-1} + d_iB_{i+1/2}, \quad (5.91)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Из второго уравнения (5.84) и (5.90) находим

$$q_N = \frac{\varphi_N - b_Ng_N}{a_N + b_NG_N}. \quad (5.92)$$

Используя (5.87), (5.89)–(5.92), решение системы (5.93), (5.84) можно вычислять прогонкой.

Заметим, что при прямой прогонке достаточно хранить лишь G_i , g_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, величины же D_i , d_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ можно не

хранить, а вычислять повторно при обратной прогонке одновременно с вычислением q_i .

Так как решение (5.87)–(5.92) обладает энергетическим свойством (5.64), то система (5.83), (5.84) разрешима и ее решение хорошо обусловлено [65] при любых значениях γ_α , ω_α , $\alpha = 1, \dots, 4$, удовлетворяющих условиям (5.76). Отсюда следует, что процесс вычисления прогонкой осуществим и устойчив к ошибкам округления.

Отметим, что систему (5.83), (5.84) можно свести к системе разностных уравнений второго порядка, коэффициенты которой удовлетворяют условиям, обеспечивающим, как показано в [65], ее разрешимость и хорошую обусловленность.

Из (5.87), (5.89)–(5.92) следует, что при

$$\alpha_{i+1/2}\beta_{i+1/2} = 1 \quad (5.93)$$

имеют место равенства

$$G_{i+1} = A_{i+1/2} = \alpha_{i+1/2}, \quad B_{i+1/2} = D_i = F_0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

т. е. значения p_i , q_i не зависят от значений p_{i+1} , q_{i+1} и, соответственно, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{q_{i+1/2} + \beta_{i+1/2}p_{i+1/2} - q_{i-1/2} + \beta_{i-1/2}p_{i-1/2}}{\beta_{i+1/2} + \beta_{i-1/2}}, \\ q_i &= \frac{p_{i+1/2} + \alpha_{i+1/2}q_{i+1/2} - p_{i-1/2} + \alpha_{i-1/2}q_{i-1/2}}{\alpha_{i+1/2} + \alpha_{i-1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ p_0 &= \frac{\varphi_0 - a_0(q_{1/2} + \beta_{1/2}p_{1/2})}{b_0 - \beta_{1/2}a_0}, \quad q_0 = \frac{\varphi_0 - b_0(p_{1/2} + \alpha_{1/2}q_{1/2})}{a_0 - \alpha_{1/2}b_0}, \quad (5.94) \\ p_N &= \frac{\varphi_N - a_N(q_{N-1/2} - \beta_{N-1/2}p_{N-1/2})}{b_N - \beta_{N+1/2}a_N}, \\ q_N &= \frac{\varphi_N - b_N(p_{N-1/2} - \alpha_{N-1/2}q_{N-1/2})}{a_N + \alpha_{N-1/2}b_N}. \end{aligned}$$

Определение полиномов (5.40) по формулам прогонки (5.87)–(5.92) приводит к неявной схеме вычисления решения, а по формулам (5.94) — к явной схеме.

Условие (5.93) совместно с неравенствами (5.76), обеспечивающими неотрицательность диссипации, дает ограничение на шаг τ по времени при вычислении решения по явной схеме:

$$\tau \leq \tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{h_1}{\sqrt{a_{11}r_1}}, \quad (5.95)$$

где

$$r_1 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_3}{H_1} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} C d\omega.$$

Аналогичные ограничения имеют место и для остальных одномерных задач (5.63):

$$\begin{aligned} \tau \leq \tau_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{h_1}{\sqrt{a_{13}r_2}}, & r_2 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_3}{H_1} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} A d\omega, \\ \tau \leq \tau_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{h_3}{\sqrt{a_{11}r_3}}, & r_3 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_1}{H_3} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} A d\omega, \\ \tau \leq \tau_4 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{h_3}{\sqrt{a_{13}r_4}}, & r_4 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_1}{H_3} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} C d\omega. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Таким образом, при вычислении решения по явной схеме условие

$$\tau \leq \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\} \quad (5.97)$$

обеспечивает неотрицательность диссипации. В осесимметричных задачах определение коэффициентов полиномов (5.40) из системы уравнений (5.41), (5.73), (5.74) в области S сводится также к решению вспомогательных задач типа (5.83), (5.84), где, например, для первых двух уравнений (5.73)

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1/2} &= \frac{\tau + \lambda_1}{h_1} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} a_{11} \frac{H_2}{H_1} d\omega, & \beta_{i+1/2} &= \frac{\tau + \gamma_1}{h_1} \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}, \\ p_{i+1/2} &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{\sigma}_{11}^{\times} d\omega, & q_{i+1/2} &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{u}_1^{\times} d\omega, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Величины $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3, \tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{13}, \tilde{\sigma}_{22}$ определяются по значениям скоростей и напряжений на нижнем слое по времени из (5.72).

Из (5.93) и условий (5.80) следует, что для неотрицательности диссипации при вычислении решения по явной схеме достаточно выполнения условия

$$\tau \leq \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}, \quad (5.98)$$

где

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{h_1}{\sqrt{a_{11}r_1}}, & r_1 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_2}{H_1} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}, \\ \tau_2 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{h_1}{\sqrt{a_{44}r_2}}, & r_2 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_2}{H_1} d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}, \\ \tau_3 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{h_3}{\sqrt{a_{33}r_3}}, & r_3 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 H_2 d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}, \\ \tau_4 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{h_3}{\sqrt{a_{33}r_4}}, & r_4 &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} H_1 H_2 d\omega \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}.\end{aligned}$$

В изложенной выше процедуре вычисления полиномов (5.40) используются уравнения, коэффициенты которых в случае неупругого деформирования зависят от скоростей деформаций, следовательно, для их определения требуются итерации.

При первом способе аппроксимации уравнений упругопластического деформирования итерациями вычисляются коэффициенты a_{ij} в соотношениях (5.6). Для вычисления этих коэффициентов необходимо знать величину λ , которая зависит от скоростей деформаций (табл. 5.1).

Итерационная процедура вычисления величины λ на каждом шаге по времени состоит в следующем. В качестве нулевого приближения λ_0 во всех элементах принимается значение этой величины на предыдущем шаге по времени. Затем вычисляются коэффициенты одномерных задач. Из решения одномерных задач определяются полиномы (5.40) и тем самым скорости деформаций. По этим скоростям во всех элементах определяется следующее приближение λ_1 . Процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится неравенство:

$$\left| \frac{\tilde{\mu}_{n+1} - \tilde{\mu}_n}{\tilde{\mu}_n} \right| < \varepsilon,$$

где $\tilde{\mu}_n = \mu(1 + \tau\lambda_n/2)$, λ_n — значение λ на n -й итерации.

После определения полиномов (5.40) вычисление скоростей и напряжений в элементах, составляющих область S , осуществляется в соответствии с этапами б), в), указанными в начале раздела.

5.10.2. Устойчивость процесса вычислений

Исследуем устойчивость процесса вычислений по начальным данным.

Используя энергетическое тождество (5.55) и условия непрерывности скоростей и напряжений на границах элементов, находим, что при отсутствии внешних сил в плоском случае имеет место равенство:

$$\sum_{\omega} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \left[\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{11} e_{11} + \sigma_{33} e_{33} + 2\sigma_{13} e_{13} \right] d\omega d\eta + Q \right\} = 0,$$

где \sum_{ω} означает суммирование по элементам, составляющим область S .

Замечая, что согласно (5.36)

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{\times} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t},$$

и используя первую схему аппроксимации уравнений упругопластического деформирования, находим, что для функций (5.36) и (5.39) имеют место следующие соотношения:

$$e'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{\lambda}{2\mu} \sigma'_{ij}, \quad e = \frac{1}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \sigma_{ij} e_{ij} d\omega d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \left(\frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) d\omega d\eta + \\ + \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \frac{\lambda}{2\mu} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\omega d\eta.$$

В силу определения (5.2) величины λ

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \sigma_{ij} e_{ij} d\omega d\eta \geq \int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \left(\frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) d\omega d\eta,$$

следовательно,

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} H_1 H_3 \left[\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + \frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] d\omega d\eta + Q \leq 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{\omega} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\partial(E_K + E_P)}{\partial t} d\eta + Q \right\} \leq 0,$$

где E_K — кинетическая энергия; E_P — потенциальная энергия упругого деформирования элемента. Так как приближенное решение диссипативно ($Q \geq 0$), то сумма кинетической и потенциальной энергий элементов, составляющих область S , не возрастает при переходе на верхний слой по времени, что обеспечивает устойчивость процесса вычислений по начальным данным.

5.11. Сходимость приближенного решения к точному

Покажем, что при измельчении шагов пространственно-временной сетки приближенное решение сходится к точному.

5.11.1. Сходимость приближенного решения к точному в плоской задаче

Пусть σ_{11}^* , σ_{33}^* , σ_{13}^* , u_1^* , u_3^* — напряжения и скорости, соответствующие точному решению задачи (5.1), (5.29), (5.30) в области S , которая состоит из четырехугольных элементов, на промежутке времени $[0, T]$ при начальных условиях (5.34) и граничных условиях (5.33). Разбивая промежуток времени на конечное число интервалов длительностью τ и используя на каждом из интервалов изложенную выше процедуру, можно построить приближенное решение на всем промежутке времени $[0, T]$. Обозначим через E квадрат энергетической нормы разности между точным и приближенным решениями, соответствующими $t = T$:

$$E = \int_0^T \int_S H_1 H_3 \left\{ \rho \left[(u_1^* - u_1) \frac{\partial(u_1^* - u_1)}{\partial t} + (u_3^* - u_3) \frac{\partial(u_3^* - u_3)}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + (\sigma_{11}^* - \sigma_{11})(e_{11}^* - e_{11}) + (\sigma_{33}^* - \sigma_{33})(e_{33}^* - e_{33}) + \right. \\ \left. + 2(\sigma_{13}^* - \sigma_{13})(e_{13}^* - e_{13}) \right\} dS dt. \quad (5.99)$$

Используя (5.29), (5.30), (5.37), (5.39), находим

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_S H_1 H_3 \rho \left[(u_1^* - u_1) \frac{\partial(u_1^* - u_1)}{\partial t} + (u_3^* - u_3) \frac{\partial(u_3^* - u_3)}{\partial t} \right] dS dt = \\
& = \int_0^T \int_S \left\{ (u_1^* - u'_{11}) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})}{\partial x_1} + (u_3^* - u'_{31}) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\
& \quad + (u_1^* - u'_{13}) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})}{\partial x_3} + (u_3^* - u'_{33}) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})}{\partial x_3} + \\
& \quad + (u'_{11} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})}{\partial x_1} + \\
& \quad + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})}{\partial x_3} + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})}{\partial x_3} + \\
& \quad + (u_1^* - u_1) [M_{13} H_3 (\sigma_{13}^* - \sigma_{13}^0) - M_{31} H_1 (\sigma_{33}^* - \sigma_{33}^0)] + \\
& \quad \left. + (u_3^* - u_3) [M_{31} H_1 (\sigma_{13}^* - \sigma_{13}^0) - M_{13} H_3 (\sigma_{11}^* - \sigma_{11}^0)] \right\} dS d\eta, \quad (5.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_S H_1 H_3 [(\sigma_{11}^* - \sigma_{11})(e_{11}^* - e_{11}) + (\sigma_{33}^* - \sigma_{33})(e_{33}^* - e_{33}) + \\
& \quad + 2(\sigma_{13}^* - \sigma_{13})(e_{13}^* - e_{13})] dS dt = \int_0^T \int_S H_1 H_3 \times \\
& \quad \times \left\{ (\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{11})}{\partial x_1} + (\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\
& \quad + (\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{13})}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{33})}{\partial x_3} + \\
& \quad + (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{11})}{\partial x_1} + (\hat{\sigma}'_{31} - \hat{\sigma}_{31}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{31})}{\partial x_1} + \\
& \quad + (\hat{\sigma}'_{13} - \hat{\sigma}_{13}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{13})}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}'_{33} - \hat{\sigma}_{33}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{33})}{\partial x_3} + \\
& \quad + (u_1^* - u_1^0) [M_{31} H_1 (\sigma_{33}^* - \sigma_{33}) - M_{13} H_3 (\sigma_{13}^* - \sigma_{13})] + \\
& \quad \left. + (u_3^* - u_3^0) [M_{13} H_3 (\sigma_{11}^* - \sigma_{11}) - M_{31} H_1 (\sigma_{13}^* - \sigma_{13})] \right\} dS dt. \quad (5.101)
\end{aligned}$$

Из (5.99)–(5.101) следует

$$E = E_0 + E_1 + E_2, \quad (5.102)$$

где

$$E_0 = \int_0^T \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})(u_1^* - u'_{11}) + (\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})(u_3^* - u'_{31})] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} [(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})(u_1^* - u'_{13}) + (\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})(u_3^* - u'_{33})] \right\} dSdt,$$

$$E_1 = \int_0^T \int_S \left\{ (u_1^0 - u_1)(M_{13}\hat{\sigma}_{31}^* - M_{31}\hat{\sigma}_{33}^*) + u_1^* [M_{13}(\hat{\sigma}_{31} - H_3\sigma_{13}^0) - \right. \\ \left. - M_{31}(\hat{\sigma}_{33} - H_1\sigma_{33}^0)] + (u_3^0 - u_3)(M_{31}\hat{\sigma}_{13}^* - M_{13}\hat{\sigma}_{11}^*) + \right. \\ \left. + u_3^* [M_{31}(\hat{\sigma}_{13} - H_1\sigma_{13}^0) - M_{13}(\hat{\sigma}_{11} - H_3\sigma_{11}^0)] \right\} dSdt,$$

$$E_2 = \int_0^T \int_S \left[(u'_{11} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})}{\partial x_3} + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{11})}{\partial x_1} + (\hat{\sigma}'_{31} - \hat{\sigma}_{31}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (\hat{\sigma}'_{13} - \hat{\sigma}_{13}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{13})}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}'_{33} - \hat{\sigma}_{33}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{33})}{\partial x_3} \right] dSdt.$$

Из граничных условий (5.33) и неравенств (5.35) следует

$$E_0 \leq 0. \quad (5.103)$$

Разложим величины, соответствующие точному решению, в ряд:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} \right)_0 + O(\tau + h_1 + h_3), \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} \right)_0 + O(\tau + h_1 + h_3), \quad (5.104)$$

$$M_{13}\hat{\sigma}_{31}^* - M_{31}\hat{\sigma}_{33}^* = (M_{13}\hat{\sigma}_{31}^* - M_{31}\hat{\sigma}_{33}^*)_0 + O(\tau + h_1 + h_3)$$

и т. д., где обозначено: $(\dots)_0 = (\dots)|_{\xi_1=\xi_3=\eta=0}$; h_1, h_3 — линейные размеры четырехугольного элемента.

Используя (5.104), находим

$$\int_0^T \int_S (u_1^0 - u_1)(M_{13}\hat{\sigma}_{31}^* - M_{31}\hat{\sigma}_{33}^*) dSdt = \int_0^T \int_S (u_1^0 - u_1) O(\tau + h_1 + h_3) dSdt,$$

$$\int_0^T \int_S M_{13}(\widehat{\sigma}_{31} - H_3 \sigma_{13}^0) u_1^* dS dt = \int_0^T \int_S M_{13}(\widehat{\sigma}_{13} - H_3 \sigma_{13}^0) O(\tau + h_1 + h_3) dS dt.$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые в выражении для E_1 . Можно показать, что приближенное решение ограничено равномерно по τ , h_1 , h_3 и, соответственно, ограничены величины $u_1^0 - u_1$, $u_3^0 - u_3$, $\widehat{\sigma}_{31} - H_3 \sigma_{13}^0$, $\widehat{\sigma}_{33} - H_1 \sigma_{33}^0$, $\widehat{\sigma}_{13} - H_1 \sigma_{13}^0$, $\widehat{\sigma}_{11} - H_3 \sigma_{11}^0$. Тогда

$$E_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau, h_1, h_3 \rightarrow 0. \quad (5.105)$$

Используя выражение (5.56), запишем E_2 в (5.102) в виде

$$\begin{aligned} E_2 = \int_0^T \int_S & \left[(u'_{11} - u_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{31}^*}{\partial x_1} + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{13}^*}{\partial x_3} + \right. \\ & + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{33}^*}{\partial x_3} + (\widehat{\sigma}'_{11} - \widehat{\sigma}_{11}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{31} - \widehat{\sigma}_{31}) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} + \\ & \left. + (\widehat{\sigma}'_{13} - \widehat{\sigma}_{13}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} + (\widehat{\sigma}'_{33} - \widehat{\sigma}_{33}) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} \right] dS dt - \sum_{\omega, \tau} Q, \quad (5.106) \end{aligned}$$

где $\sum_{\omega, \tau}$ означает суммирование по элементам области S и интервалам времени τ , составляющим промежуток $[0, T]$. Из (5.102), (5.103), (5.106) находим

$$\begin{aligned} E + \sum_{\omega, \tau} Q \leq E_1 + \int_0^T \int_S & \left[(u'_{11} - u_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{31}^*}{\partial x_1} + \right. \\ & + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{13}^*}{\partial x_3} + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{33}^*}{\partial x_3} + (\widehat{\sigma}'_{11} - \widehat{\sigma}_{11}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \\ & \left. + (\widehat{\sigma}'_{31} - \widehat{\sigma}_{31}) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{13} - \widehat{\sigma}_{13}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} + (\widehat{\sigma}'_{33} - \widehat{\sigma}_{33}) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} \right] dS dt. \quad (5.107) \end{aligned}$$

Используя разложения (5.104), находим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_S (u'_{11} - u_1) \frac{\partial \widehat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} dS dt & = \int_0^T \int_S (u'_{11} - \hat{u}_1^0) \left(\frac{\partial \widehat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} \right)_0 dS dt + \\ & + \int_0^T \int_S (u'_{11} - u_1) O(\tau + h_1 + h_3) dS dt, \quad (5.108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} dS dt &= \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}^0) \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} \right)_0 dS dt + \\ &+ \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) O(\tau + h_1 + h_3) dS dt. \end{aligned}$$

Не приводя громоздких выкладок, заметим, что из (5.44), (5.56), (5.62), (5.63) следуют оценки:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (u'_{11} - \hat{u}_1^0)^2 d\omega &\leq \frac{1}{2} \omega_1 Q_2 \frac{1}{\omega} \int_{\omega} C d\omega, \\ \int_{\omega} (\sigma'_{11} - \hat{\sigma}_{11}^0)^2 d\omega &\leq \frac{1}{2} \gamma_1 Q_1 \frac{1}{\omega} \int_{\omega} a_{11} \frac{H_3}{H_1} d\omega. \end{aligned} \quad (5.109)$$

В случае, когда выполнены неравенства (5.76), можно получить оценки, аналогичные (5.108), (5.109), и для остальных слагаемых в правой части (5.107). Из этих оценок и ограниченности приближенного решения следует, что соответствующее любому фиксированному моменту времени T решение по изложенной выше схеме сходится при $\tau, h, \gamma \rightarrow 0$ к соответствующему этому же T точному решению:

$$E \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau, h, \gamma \rightarrow 0,$$

где h — максимальный линейный размер составляющих область S четырехугольных элементов; γ — максимальное из чисел $\gamma_{\alpha}, \omega_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, 4$.

5.11.2. Сходимость приближенного решения к точному в осесимметричной задаче

Пусть $\sigma_{\alpha\alpha}^*, \alpha = 1, 2, 3; \sigma_{13}^*, u_1^*, u_3^*$ — точное решение задачи (5.1), (5.31), (5.32) в области S , состоящей из четырехугольных элементов, на промежутке времени $[0, T]$ при начальных условиях (5.47) и условиях на границе Γ типа условий (5.46). Разбивая рассматриваемый промежуток времени на конечное число интервалов длительностью τ и используя на каждом из интервалов изложенную выше процедуру, можно построить приближенное решение на всем промежутке времени $[0, T]$. Для разности между точным и приближенным решениями, соответствующими $t = T$, введем энергетическую норму, обозначив квадрат этой нормы

через E :

$$E = \int_0^T \int_S H_1 H_2 \left\{ \rho \left[(u_1^* - u_1) \frac{\partial(u_1^* - u_1)}{\partial t} + (u_3^* - u_3) \frac{\partial(u_3^* - u_3)}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + (\sigma_{11}^* - \sigma_{11})(e_{11}^* - e_{11}) + (\sigma_{22}^* - \sigma_{22})(e_{22}^* - e_{22}) + (\sigma_{33}^* - \sigma_{33})(e_{33}^* - e_{33}) + \right. \\ \left. + 2(\sigma_{13}^* - \sigma_{13})(e_{13}^* - e_{13}) \right\} dS dt. \quad (5.110)$$

В силу неравенств (5.35) имеем

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})(u_1^* - u'_{11}) + (\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})(u_3^* - u'_{31})] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} [(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})(u_1^* - u'_{13}) + (\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})(u_3^* - u'_{33})] \right\} dS \leq 0. \quad (5.111)$$

Используя (5.31), (5.53) и (5.111), получим для величины E в (5.110) оценку

$$E \leq \int_0^T \int_S \left[(u'_{11} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}'_{11})}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{31}^* - \hat{\sigma}'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{13}^* - \hat{\sigma}'_{13})}{\partial x_3} + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{33}^* - \hat{\sigma}'_{33})}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{11})}{\partial x_1} + (\hat{\sigma}'_{31} - \hat{\sigma}_{31}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{31})}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (\hat{\sigma}'_{13} - \hat{\sigma}_{13}) \frac{\partial(u_1^* - u'_{13})}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}'_{33} - \hat{\sigma}_{33}) \frac{\partial(u_3^* - u'_{33})}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + (L_1^* - \tilde{L}_1)(u_1^* - u_1) + (L_3^* - \tilde{L}_3)(u_3^* - u_3) - \right. \\ \left. - (L_1^* - L_1)(u_1^* - \tilde{u}_1) - (L_3^* - L_3)(u_3^* - \tilde{u}_3) \right] dS dt, \quad (5.112)$$

где

$$L_1^* = M_{11} H_2 \sigma_{13}^* - M_{21} H_1 \sigma_{22}^*, \quad L_3^* = -M_{11} H_2 \sigma_{11}^* - M_{22} H_1 \sigma_{22}^*, \\ L_1 = M_{11} H_2 \sigma_{13} - M_{21} H_1 \sigma_{22}, \quad L_3 = -M_{11} H_2 \sigma_{11} - M_{22} H_1 \sigma_{22}.$$

Используя (5.59), запишем (5.112) в виде

$$E + \sum_{\omega, \tau} Q \leq \int_0^T \int_S \left[(u'_{11} - u_1) \frac{\partial \hat{\sigma}_{11}^*}{\partial x_1} + (u'_{31} - u_3) \frac{\partial \hat{\sigma}_{31}^*}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + (u'_{13} - u_1) \frac{\partial \hat{\sigma}_{13}^*}{\partial x_3} + (u'_{33} - u_3) \frac{\partial \hat{\sigma}_{33}^*}{\partial x_3} + (\hat{\sigma}'_{11} - \hat{\sigma}_{11}) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +(\widehat{\sigma}'_{31} - \widehat{\sigma}_{31})\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} + (\widehat{\sigma}'_{13} - \widehat{\sigma}_{13})\frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} + (\widehat{\sigma}'_{33} - \widehat{\sigma}_{33})\frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} + \\
& +(\tilde{u}_1 - u_1)L_1^* + (L_1 - \tilde{L}_1)u_1^* + (\tilde{u}_3 - u_3)L_3^* + (L_3 - \tilde{L}_3)u_3^* \Big] dSdt. \quad (5.113)
\end{aligned}$$

Из (5.53), (5.65), (5.67), (5.70), используя (5.66), (5.71) и (5.80), можно получить оценки

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} (u'_{11} - \hat{u}_1^0)^2 d\omega & \leq \frac{1}{2} \gamma_1 Q_1 \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{d\omega}{\rho H_1 H_2}, \\
\int_{\omega} (\sigma'_{11} - H_2 \widehat{\sigma}_{11}^0)^2 d\omega & \leq \frac{1}{2} \lambda_1 a_{11} Q_2 \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{H_2}{H_1} d\omega.
\end{aligned} \quad (5.114)$$

Оценки, аналогичные (5.114), имеют место и для остальных слагаемых в правой части (5.113).

Из (5.113), (5.108), (5.114) и оценок, аналогичных (5.108), (5.113) для остальных слагаемых в правой части (5.113), следует, что

$$E \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau, h, \gamma \rightarrow 0,$$

где h — максимальный линейный размер четырехугольных элементов, составляющих область; γ — максимальное из чисел $\gamma_\alpha, \omega_\alpha, \lambda_\alpha, \theta_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), δ_1 .

5.12. Алгоритм решения динамической упругопластической задачи для тел вращения при неосесимметричном нагружении

5.12.1. Построение решения для элемента тела вращения

Рассмотрим в плоскости Orz произвольный четырехугольник с вершинами 1, 2, 3, 4 (рис. 5.4). Повернем его вокруг оси Oz на угол $\Delta\varphi$. Получим трехмерный элемент тела вращения, показанный на рис. 5.5.

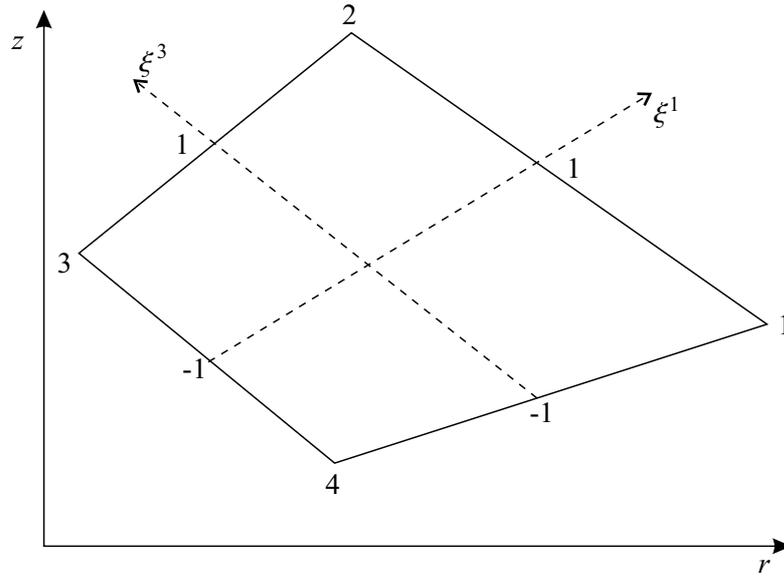


Рис. 5.4. Элементарный четырехугольник

Введем в элементе систему координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 :

$$x = r(\xi^1, \xi^3) \cos \varphi, \quad y = r(\xi^1, \xi^3) \sin \varphi, \quad z = z(\xi^1, \xi^3),$$

$$r = \sum_{i=1}^4 N_i r_i, \quad z = \sum_{i=1}^4 N_i z_i,$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^3), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^3),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^3), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^3),$$

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}\xi^2 + \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}, \quad \Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1},$$

r_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — координаты вершин четырехугольника. Граням элемента соответствуют значения координат $\xi^i = \pm 1$.

Уравнения движения в проекциях на оси цилиндрической системы координат можно записать в следующем виде:

$$\hat{\sigma}_{1i,i} - \frac{\Delta\varphi}{2}\hat{\sigma}_{22} = \Phi_1, \quad \hat{\sigma}_{2i,i} + \frac{\Delta\varphi}{2}\hat{\sigma}_{12} = \Phi_2, \quad \hat{\sigma}_{3i,i} = \Phi_3, \quad (5.115)$$

где

$$\sqrt{g}\hat{\sigma}_{1i} = \alpha\sqrt{G}(\sigma_r z_{,j} - \sigma_{rz} r_{,j}), \quad \hat{\sigma}_{12} = \sqrt{g}\sigma_{r\varphi},$$

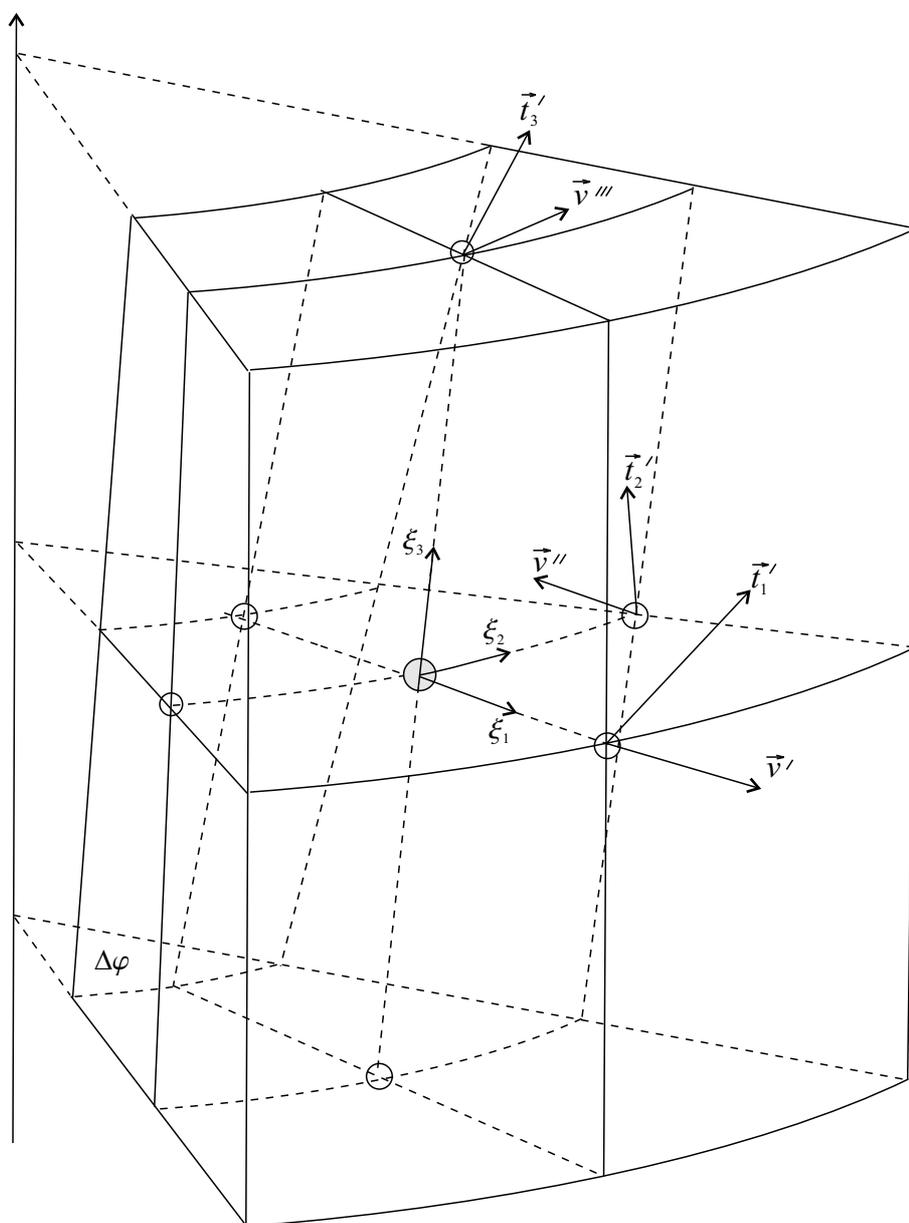


Рис. 5.5. Элемент тела вращения

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\hat{\sigma}_{2i} &= \alpha\sqrt{G}(\sigma_{r\varphi}z_{,j} - \sigma_{z\varphi}r_{,j}), & \hat{\sigma}_{22} &= \sqrt{g}\sigma_{\varphi}, \\ \sqrt{g}\hat{\sigma}_{3i} &= \alpha\sqrt{G}(\sigma_{rz}z_{,j} - \sigma_z r_{,j}), & \hat{\sigma}_{32} &= \sqrt{g}\sigma_{z\varphi},\end{aligned}$$

$i, j = 1, 2, 3$; $\alpha = 1$ при $i = 1, j = 3$; $\alpha = -1$ при $i = 3, j = 1$;

$$\Phi_i = \rho\sqrt{G}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - F_i\right), \quad \sqrt{G} = r\sqrt{g}\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \sqrt{g} = r_{,1}z_{,3} - r_{,3}z_{,1};$$

$v_i, F_i, \sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{rz}$ — компоненты вектора скорости, вектора массовых сил, тензора напряжений в цилиндрической системе координат. Здесь и в дальнейшем выражение, содержащее два и более двух немых индексов означает, если нет специальной оговорки, сумму по этому индексу от 1 до 3. Немым считается индекс, который отсутствует хотя бы в одном из слагаемых уравнения, $(\cdot)_{,i}$ обозначает дифференцирование по ξ^i .

Компоненты тензора скоростей деформаций в цилиндрической системе координат выражаются через скорости по формулам:

$$\begin{aligned}e_r &= \frac{z_{,3}v_{1,1} - z_{,1}v_{1,3}}{\sqrt{g}}, & 2e_{r\varphi} &= \frac{z_{,3}v_{2,1} - z_{,1}v_{2,3}}{\sqrt{g}} + \frac{v_{1,2}}{\sqrt{G}} - \frac{v_2}{r}, \\ e_{\varphi} &= \frac{v_1}{r} + \sqrt{\frac{g}{G}}v_{2,2}, & 2e_{\varphi z} &= \frac{z_{,1}v_{2,3} - z_{,3}v_{2,1}}{\sqrt{g}} + \frac{v_{3,2}}{\sqrt{G}}, \\ e_z &= \frac{r_{,1}v_{3,3} - r_{,3}v_{3,1}}{\sqrt{g}}, & 2e_{rz} &= \frac{r_{,1}v_{1,3} - r_{,3}v_{1,1} + z_{,3}v_{3,1} - z_{,1}v_{3,3}}{\sqrt{g}}.\end{aligned}\quad (5.116)$$

Уравнения упругопластического течения примем в виде

$$e_r = \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_r - \nu(\dot{\sigma}_{\varphi} + \dot{\sigma}_z)] + \lambda(\sigma_r - \sigma), \quad \dots, \quad e_{rz} = \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{rz} + \lambda\sigma_{rz}, \quad (5.117)$$

где E, μ, ν — модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона соответственно; λ — функция скоростей деформаций и напряжений.

Задача о построении решения в элементе на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ ставится следующим образом.

Найти функции $v_i, \sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{rz}$ в области $\Omega: \{\xi^i, \eta[-1, 1], \eta = 2[t - (t_k + t_{k+1})/2]/\tau, \tau = t_{k+1} - t_k\}$, удовлетворяющие уравнениям (5.115)–(5.117), условиям на гранях элемента:

$$\begin{aligned}(a_i^{\pm}v_i + b_i^{\pm}\hat{\sigma}_{i1})_{\xi^1=\pm 1} &= \varphi_i^{\pm}, \\ (c_i^{\pm}v_i + d_i^{\pm}\hat{\sigma}_{i2})_{\xi^2=\pm 1} &= \psi_i^{\pm}, \\ (e_i^{\pm}v_i + f_i^{\pm}\hat{\sigma}_{i3})_{\xi^3=\pm 1} &= \chi_i^{\pm} \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (5.118)$$

и начальным условиям

$$\{v_i, \sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{rz}\}_{\eta=-1} = \{v_i^{\times}, \sigma_r^{\times}, \sigma_z^{\times}, \sigma_{\varphi}^{\times}, \sigma_{r\varphi}^{\times}, \sigma_{\varphi z}^{\times}, \sigma_{rz}^{\times}\}. \quad (5.119)$$

В (5.118) величины $a_i^\pm, b_i^\pm, \dots, \chi_i^\pm$ — заданные постоянные, причем

$$\begin{aligned} a_i^\pm b_i^\pm > 0, \quad c_i^\pm d_i^\pm > 0, \quad e_i^\pm f_i^\pm > 0, \\ |a_i^\pm| + |b_i^\pm| \neq 0, \quad |c_i^\pm| + |d_i^\pm| \neq 0, \quad |e_i^\pm| + |f_i^\pm| \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5.120)$$

При построении решения в элементе принимается линейная аппроксимация по времени для скоростей и напряжений

$$v_i = v_i^\circ + v_i^1 \eta, \quad \sigma_r = \sigma_r^\circ + \sigma_r^1 \eta, \quad \dots, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^\circ + \sigma_{rz}^1 \eta. \quad (5.121)$$

На среднем слое по времени напряжения и скорости вычисляются по формулам:

$$\sigma_r^\circ = \frac{\tau}{2} [ae_r + b(e_\varphi + e_z)] + \tilde{\sigma}_r, \quad \dots, \quad \sigma_z^\circ = \frac{\tau}{2} [ae_z + b(e_\varphi + e_r)] + \tilde{\sigma}_z, \quad (5.122)$$

$$\sigma_{r\varphi}^\circ = \frac{\tau}{2} 2\mu e_{r\varphi} + \tilde{\sigma}_{r\varphi}, \quad \dots, \quad \sigma_{rz}^\circ = \frac{\tau}{2} [2\mu e_{rz} + b(e_\varphi + e_r)] + \tilde{\sigma}_{rz},$$

$$v_i = v_i^\times + \frac{\tau}{2} \frac{\partial v_i}{\partial t},$$

где

$$a = K + \frac{4}{3}\tilde{\mu}, \quad b = K - \frac{2}{3}\tilde{\mu}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{1 + \tau\lambda/2},$$

$$\tilde{\sigma}_r^\times = \sigma_r^\times + \frac{\sigma_r^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2}, \quad \tilde{\sigma}_\phi^\times = \sigma_\phi^\times + \frac{\sigma_\phi^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2}, \quad \tilde{\sigma}_z^\times = \sigma_z^\times + \frac{\sigma_z^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2},$$

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi}^\times = \sigma_{r\varphi}^\times + \frac{\sigma_{r\varphi}^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2}, \quad \tilde{\sigma}_{\varphi z}^\times = \sigma_{\varphi z}^\times + \frac{\sigma_{\varphi z}^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2}, \quad \tilde{\sigma}_{zr}^\times = \sigma_{zr}^\times + \frac{\sigma_{zr}^{\prime\times}}{1 + \tau\lambda/2}.$$

В случае упругого деформирования величины $\tilde{\sigma}_r, \dots, \tilde{\sigma}_{rz}$ — значения соответствующих напряжений на нижнем слое по времени, а коэффициенты a, b, μ не зависят от скоростей деформаций. При пластическом деформировании величины $\tilde{\sigma}_r, \dots, \tilde{\sigma}_{rz}, a, b, \mu$ зависят от скоростей деформаций и для их вычисления применяется итерационная процедура.

В (5.115), (5.122) ускорения и скорости деформаций вычисляются по формулам

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\Sigma'_1 - \frac{\sigma_\varphi^\circ}{\rho r} + F_1^\circ, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\Sigma'_2 - \frac{\sigma_{r\varphi}^\circ}{\rho r} + F_2^\circ, \quad (5.123)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\Sigma'_3 + F_2^\circ, \quad \Sigma'_i = \hat{\sigma}'_{ij,j}, \quad F_i^\circ = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F_i d\eta, \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned}
e_r &= \frac{z_{,3}v_{11,1} - z_{,1}v_{13,3}}{\sqrt{g}}, & 2e_{r\varphi} &= \frac{z_{,3}v_{21,1} - z_{,1}v_{23,3}}{\sqrt{g}} + \frac{v_{12,2}}{\sqrt{G}} - \frac{v_2^\circ}{r}, \\
e_\varphi &= \frac{v_1^\circ}{r} + \sqrt{\frac{g}{G}}v_{22,2}, & 2e_{\varphi z} &= \frac{z_{,1}v_{23,3} - z_{,3}v_{21,1}}{\sqrt{g}} + \frac{v_{32,2}}{\sqrt{G}}, \\
e_z &= \frac{r_{,1}v_{33,3} - r_{,3}v_{31,1}}{\sqrt{g}}, & 2e_{rz} &= \frac{r_{,1}v_{13,3} - r_{,3}v_{11,1} + z_{,3}v_{31,1} - z_{,1}v_{33,3}}{\sqrt{g}}.
\end{aligned}$$

В (5.123), (5.124) величины $\hat{\sigma}'_{ij}$, v_{ij} — линейные полиномы, аппроксимирующие напряжения и скорости на среднем слое по времени

$$\hat{\sigma}'_{ij} = \hat{\sigma}'_{ij}{}^\circ + \hat{\sigma}'_{ij}{}^1 \xi^j, \quad v_{ij} = v_{ij}^\circ + v_{ij}^1 \xi^j, \quad (5.125)$$

удовлетворяющие на гранях элемента условиям (5.118) так, что

$$(a_i^\pm v_{i1} + b_i^\pm \hat{\sigma}'_{i1})_{\xi^1 = \pm 1} = \varphi_i^\pm, \quad \dots, \quad (e_i^\pm v_{i3} + f_i^\pm \hat{\sigma}'_{i3})_{\xi^3 = \pm 1} = \chi_i^\pm. \quad (5.126)$$

Скорости и напряжения на верхнем слое по времени находятся по формулам

$$v_i(t + \tau) = 2v_i^\circ - v_i^\times, \quad \sigma_r(t + \tau) = 2\sigma_r^\circ - \sigma_r^\times, \quad \dots, \quad \sigma_{rz}(t + \tau) = 2\sigma_{rz}^\circ - \sigma_{rz}^\times. \quad (5.127)$$

5.12.2. Энергетическое тождество

Согласно приведенным выше формулам, для построения решения в элементе нужно определить коэффициенты полиномов (5.125). Условий (5.126) для этого недостаточно. Для функций (5.121) и полиномов (5.125) выполняется следующее энергетическое тождество:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} v_i d\Omega + \int_{\Omega} W d\Omega + q_1 + q_2 = \int_{\Omega} F_i^\circ v_i^\circ d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\sigma}'_{ij,j} v_{ij} d\Omega, \quad (5.128)$$

где

$$W = \sigma_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi + \sigma_z e_z + 2(\sigma_{r\varphi} e_{r\varphi} + \sigma_{\varphi z} e_{\varphi z} + \sigma_{rz} e_{rz}),$$

$$q_1 = \int_{\Omega} (v_{ij} - v_i^\circ) \hat{\sigma}'_{ij,j} d\Omega, \quad q_2 = \int_{\Omega} (\hat{\sigma}'_{ij} - \sigma_{ij}^\circ) v_{ij,j} d\Omega,$$

$$v_1^\circ = \tilde{v}_1^\times + \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \Sigma'_1 - \frac{\tau^2}{4\rho r \Delta_1} S'_1, \quad d\Omega = \sqrt{G} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\eta,$$

$$v_2^\circ = \tilde{v}_2^\times + \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \Sigma'_2 - \frac{\tau^2 \mu}{4\rho r \Delta_2} 2e'_{r\varphi}, \quad v_3^\circ = \tilde{v}_3^\times + \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \Sigma'_3,$$

$$S'_1 = a e'_\varphi + b(e'_r + e'_z), \quad \tilde{v}_1^\times = \frac{1}{\Delta_1} (v_1^\times + \frac{\tau}{2} F_1^\circ - \frac{\tau}{2\rho r} \tilde{\sigma}_\varphi),$$

$$\tilde{v}_2^\times = \frac{1}{\Delta_2} (v_2^\times + \frac{\tau}{2} F_2^\circ + \frac{\tau}{2\rho r} \tilde{\sigma}_{r\varphi}), \quad \tilde{v}_3^\times = v_3^\times,$$

$$\Delta_1 = 1 + \frac{\tau^2 a}{4\rho r^2}, \quad \Delta_2 = 1 + \frac{\tau^2 \tilde{\mu}}{4\rho r^2},$$

$$\hat{\sigma}_{11}^\circ = \tilde{\sigma}_{11} + \frac{\tau}{2} E_1 + \frac{\tau}{2} Q_1 e_\varphi^\circ, \quad Q_1 = \frac{r\delta\varphi}{2} z_{,3} b,$$

$$E_1 = \frac{r\delta\varphi}{2} [z_{,3}(ae'_r + be'_\varphi + be'_z) - 2r_{,3}\tilde{\mu}e'_{rz}],$$

$$\hat{\sigma}_{22}^\circ = \tilde{\sigma} + \frac{\tau}{2} E_2 + \frac{\tau}{2} Q_2 e_\varphi^\circ, \quad E_2 = \sqrt{g}(be'_r + ae'_\varphi + be'_z), \quad Q_2 = \sqrt{g}a.$$

Структура выражений для $\hat{\sigma}_{33}^\circ, \dots$, аналогична выше приведенным.

Подставляя выражения для скоростей и напряжений на среднем слое по времени в q_1 и q_2 , получим:

$$\begin{aligned} q = q_1 + q_2 = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} (v_{11}^\circ - \hat{v}_1^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \Sigma'_1) + \right. \\ & + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} (v_{12}^\circ - \hat{v}_1^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \Sigma'_1) + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} (v_{13}^\circ - \hat{v}_1^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \Sigma'_1) + \\ & + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{21}}{\partial \xi_1} (v_{21}^\circ - \hat{v}_2^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \Sigma'_2) + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{22}}{\partial \xi_2} (v_{22}^\circ - \hat{v}_2^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \Sigma'_2) + \\ & + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{23}}{\partial \xi_3} (v_{23}^\circ - \hat{v}_2^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \Sigma'_2) + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial \xi_1} (v_{31}^\circ - \hat{v}_3^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \Sigma'_3) + \\ & + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{32}}{\partial \xi_2} (v_{32}^\circ - \hat{v}_3^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \Sigma'_3) + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial \xi_3} (v_{33}^\circ - \hat{v}_3^\times - \frac{\tau}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \Sigma'_3) + \\ & + \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} (\hat{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}_{11} - \frac{\tau}{2} E_1 - \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} b z_{,3} \tilde{v}_1^\times) + \frac{\partial v_{12}}{\partial \xi_2} (\hat{\sigma}'_{12} - \tilde{\sigma}_{12} - \frac{\tau}{2} E_6 + \frac{\tau}{2} \sqrt{g} \frac{\mu}{r} \tilde{v}_2^\times) + \\ & + \frac{\partial v_{13}}{\partial \xi_3} (\hat{\sigma}'_{13} - \tilde{\sigma}_{13} - \frac{\tau}{2} E_4 + \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} b z_{,1} \tilde{v}_1^\times) + \frac{\partial v_{21}}{\partial \xi_1} (\hat{\sigma}'_{21} - \tilde{\sigma}_{21} - \frac{\tau}{2} E_7 + \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} \tilde{\mu} z_{,3} \tilde{v}_2^\times) + \\ & + \frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} (\hat{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}_{12} - \frac{\tau}{2} E_2 - \frac{\tau}{2} \sqrt{g} \frac{a}{r} \tilde{v}_1^\times) + \frac{\partial v_{23}}{\partial \xi_3} (\hat{\sigma}'_{23} - \tilde{\sigma}_{23} - \frac{\tau}{2} E_8 - \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} \mu z_{,1} \tilde{v}_2^\times) + \\ & + \frac{\partial v_{31}}{\partial \xi_1} (\hat{\sigma}'_{31} - \tilde{\sigma}_{31} - \frac{\tau}{2} E_5 + \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} b r_{,3} \tilde{v}_1^\times) + \frac{\partial v_{33}}{\partial \xi_3} (\hat{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}_{31} - \frac{\tau}{2} E_3 - \frac{\tau}{2} \frac{\delta\varphi}{2} b r_{,1} \tilde{v}_1^\times) + \\ & \left. + \frac{\partial v_{32}}{\partial \xi_2} (\hat{\sigma}'_{32} - \tilde{\sigma}_{32} - \frac{\tau}{2} E_9) \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

5.12.3. Дополнительные уравнения

Недостающие уравнения для определения коэффициентов полиномов (5.125) выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) вычисление решения сводится к решению системы уравнений, расщепленных на ряд независимых систем;

2) $q = q_1 + q_2 \geq 0$ (это обеспечивает устойчивость процесса вычислений, величина q при этом имеет смысл искусственной диссипации);

3) для случая замороженных коэффициентов имеет место сходимость построенного решения к точному.

Покажем, что этим условиям удовлетворяют уравнения

$$\int_{\Omega} \left[v_{11}^{\circ} - \tilde{v}_1^{\times} - \frac{\tau + \gamma_1}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0, \quad (5.129)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}_{11}^{\times} - \frac{\tau + \gamma_1}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} (a z_{,3}^2 + \tilde{\mu} r_{,3}^2) \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{21}^{\circ} - \tilde{v}_2^{\times} - \frac{\tau + \gamma_2}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{21}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0, \quad (5.130)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{21} - \tilde{\sigma}_{21}^{\times} - \frac{\tau + \gamma_2}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} \mu (z_{,3}^2 + r_{,3}^2) \frac{\partial v_{21}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{31}^{\circ} - \tilde{v}_3^{\times} - \frac{\tau + \gamma_3}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{31}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0, \quad (5.131)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{31} - \tilde{\sigma}_{31}^{\times} - \frac{\tau + \gamma_3}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} (a r_{,3}^2 + \mu z_{,3}^2) \frac{\partial v_{31}}{\partial \xi_1} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{12}^{\circ} - \tilde{v}_1^{\times} - \frac{\tau + \omega_1}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0, \quad (5.132)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{12} - \tilde{\sigma}_{12}^{\times} - \frac{(\tau + \omega_1) \tilde{\mu} \sqrt{g}}{\delta \varphi} \frac{\partial v_{12}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{22}^{\circ} - \tilde{v}_2^{\times} - \frac{\tau + \omega_2}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{22}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0, \quad (5.133)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}_{22}^{\times} - \frac{(\tau + \omega_2) \sqrt{g} a}{\delta \varphi} \frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{32}^{\circ} - \tilde{v}_3^{\times} - \frac{\tau + \omega_3}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g}} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{32}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0, \quad (5.134)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{32} - \tilde{\sigma}_{32}^{\times} - \frac{(\tau + \omega_3) \tilde{\mu} \sqrt{g}}{\delta \varphi} \frac{\partial v_{32}}{\partial \xi_2} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{13}^{\circ} - \tilde{v}_1^{\times} - \frac{\tau + \delta_1}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0, \quad (5.135)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{13} - \tilde{\sigma}_{13}^{\times} - \frac{\tau + \delta_1}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} (a z_{,1}^2 + \tilde{\mu} r_{,1}^2) \frac{\partial v_{13}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{23}^{\circ} - \tilde{v}_2^{\times} - \frac{\tau + \delta_2}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{23}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0, \quad (5.136)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{23} - \tilde{\sigma}_{23}^{\times} - \frac{\tau + \delta_2}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} \mu (z_{,1}^2 + r_{,1}^2) \frac{\partial v_{23}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left[v_{33}^{\circ} - \tilde{v}_3^{\times} - \frac{\tau + \delta_3}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0, \quad (5.137)$$

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}_{33}^{\times} - \frac{\tau + \delta_3}{2\sqrt{g}} \frac{\delta \varphi}{2} (a r_{,1}^2 + \tilde{\mu} z_{,1}^2) \frac{\partial v_{33}}{\partial \xi_3} \right] d\Omega = 0;$$

где

$$\tilde{\sigma}_{11}^{\times} = \tilde{\sigma}_{11} + \frac{\tau}{2} \frac{\delta \varphi}{2} b z_{,3} \tilde{v}_1^{\times}, \quad \tilde{\sigma}_{21}^{\times} = \tilde{\sigma}_{21} + \frac{\tau}{2} \frac{\delta \varphi}{2} \tilde{\mu} z_{,3} \tilde{v}_2^{\times}, \quad \dots$$

Выполнение первого условия следует непосредственно из вида уравнений (5.129)–(5.137).

Используя соотношения (5.129)–(5.137), выражение для q можно представить в виде

$$q = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\rho r \delta \varphi \sqrt{g} \Delta_1} \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} + \omega_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} + \delta_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \right] + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma_1 r \delta \varphi}{\sqrt{g}} a z_{,3}^2 \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \right)^2 + 4 \frac{\omega_2 a \sqrt{g}}{r \delta \varphi} \left(\frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\tau z_{,3} b \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} \right] + \dots \right\} d\Omega = 0. \quad (5.138)$$

Остальные слагаемые в (5.138) имеют аналогичный вид и не выписываются ввиду их громоздкости. Рассмотрим выражение, стоящее в первой квадратной скобке подынтегрального выражения. Если $2\tau \leq \gamma_1$, $2\tau \leq \omega_1$, $2\tau \leq \delta_1$ то

$$\gamma_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} + \omega_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} + \\ + \delta_1 \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \right)^2 - 2\tau \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \geq \\ \geq \tau \left[\left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{11}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\sigma}'_{12}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \hat{\sigma}'_{13}}{\partial \xi_3} \right)^2 \right] \geq 0.$$

Так как для реальных материалов $b < a$, то при выполнении неравенств $4\tau \leq \gamma_1$, $4\tau \leq \omega_2$ и вторая квадратная скобка в подынтегральном выражении (5.138) также неотрицательна:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\gamma_1 r \delta \varphi}{\sqrt{g}} a z_{,3}^2 \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \right)^2 + 4 \frac{\omega_2 a \sqrt{g}}{r \delta \varphi} \left(\frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} \right)^2 - 4\tau z_{,3} b \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \frac{\partial v_{22}}{\partial \xi_2} \right] \geq \\ \geq \frac{1}{4} \tau b \left[\sqrt{\frac{r \delta \varphi}{\sqrt{g}}} z_{,3}^2 \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{g}}{r \delta \varphi}} \frac{\partial v_{11}}{\partial \xi_1} \right]^2 \geq 0.$$

Аналогичным образом оцениваются и остальные слагаемые в подынтегральном выражении в (5.138). В результате этих оценок получим, что величина q будет неотрицательной (условие 2) при выполнении

неравенств:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\geq 4\tau, & \omega_1 &\geq 2\tau, & \delta_1 &\geq 4\tau, \\ \gamma_2 &\geq 2\tau, & \omega_2 &\geq 4\tau, & \delta_2 &\geq 2\tau, \\ \gamma_3 &\geq 4\tau, & \omega_3 &\geq 2\tau, & \delta_3 &\geq 4\tau. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Запишем уравнения (5.129)–(5.137) в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [v_{ij}^{\circ} - \tilde{v}_i^{\times} - (\tau + \gamma_{ij})C_{ij}\hat{\sigma}'_{ij,j}]d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} [\hat{\sigma}'_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{\times} - (\tau + \gamma_{ij})D_{ij}v_{ij,j}]d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (5.140)$$

В (5.140) \tilde{v}_i^{\times} , $\tilde{\sigma}_{ij}^{\times}$ зависят от скоростей и напряжений на нижнем слое по времени; C_{ij} , D_{ij} выражаются через функции формы четырехугольника и их производные по ξ^1 , ξ^3 .

Уравнений (5.129)–(5.137) и условий (5.126) достаточно для определения коэффициенты полиномов (5.125) и, следовательно, для построения решения в элементе тела вращения, представленного на рис. 5.4.

Заметим, что система (5.140) — система алгебраических уравнений. Интегралы по Ω оставлены для удобства дальнейших выкладок.

5.12.4. Сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи в энергетической норме

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Каждая из систем (5.140) однозначно разрешима при любых правых частях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим первое из уравнений (5.140) на $\hat{\sigma}'_{ij,j}$, второе — на $v_{ij,j}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{[\hat{\sigma}'_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{\times} - (\tau + \gamma_{ij})D_{ij}v_{ij,j}]v_{ij,j}\}d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \{[v_{ij}^{\circ} - \tilde{v}_i^{\times} - (\tau + \gamma_{ij})C_{ij}\hat{\sigma}'_{ij,j}]\hat{\sigma}'_{ij,j}\}d\Omega = 0 \end{aligned}$$

или

$$(\tau + \gamma_{ij}) \int_{\Omega} (v_{ij,j}^2 D_{ij} + \hat{\sigma}_{ij,j}^{\prime 2} C_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega} [(\hat{\sigma}'_{ij,j})_{,j} - \tilde{\sigma}_{ij}^{\times} v_{ij,j} - \tilde{v}_i^{\times} \hat{\sigma}'_{ij,j}] d\Omega.$$

Так как в силу диссипативности краевых условий $\int_{\Omega} (\hat{\sigma}'_{ij,j})_{,j} d\Omega \leq 0$, то

для соответствующей однородной системы имеем

$$\int_{\Omega} (v_{ij,j}^2 D_{ij} + \hat{\sigma}_{ij,j}^{\prime 2} C_{ij}) d\Omega \leq 0$$

и, следовательно, однородная система имеет только тривиальное решение, а неоднородная система (5.140) имеет единственное решение при любых правых частях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Сумма кинетической и потенциальной энергий при переходе с одного временного слоя на другой не возрастает при отсутствии массовых и поверхностных сил.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — область, которая состоит из четырехугольных элементов типа, приведенных на рис. 5.4. Используя энергетическое тождество (5.128) и условия непрерывности скоростей и напряжений на гранях элементов, при отсутствии массовых и поверхностных сил получим:

$$\sum_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} v_i + W + q \right) d\Omega = 0, \quad (5.141)$$

где \sum_{Ω} означает суммирование по всем элементам Ω , составляющим область S . Используя аппроксимацию уравнений упругопластического течения (разделы 5.10, 5.11), и учитывая, что $\hat{\sigma}_{ij}^{\circ} = \hat{\sigma}_{ij}^{\prime} + (\tau/2)(\partial \hat{\sigma}_{ij}/\partial t)$, можно записать равенство

$$\int_{\Omega} W d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\sigma}{\partial t} \right) d\Omega + \frac{\lambda}{2\mu} \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\Omega. \quad (5.142)$$

В силу неотрицательности величины λ из (5.141) и (5.142) следует неравенство

$$\int_{\Omega} W d\Omega \geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\sigma}{\partial t} \right) d\Omega,$$

из которого, в свою очередь, следует неравенство

$$\sum_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} v_i + \frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \frac{\sigma'_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{K} \sigma \frac{\sigma}{\partial t} \right) d\Omega + \sum_{\Omega} \int_{\Omega} q d\Omega \leq 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial (E_K + E_P)}{\partial t} d\Omega + Q \leq 0 \quad (Q \geq 0). \quad (5.143)$$

Неравенство (5.143) обеспечивает устойчивость вычислений и ограниченность приближенного решения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\hat{\sigma}_{ij}^*$, v_i^* — напряжения и скорости, соответствующие точному решению задачи (5.115)–(5.120) в момент времени T в области S . Разбивая промежуток времени $[0, T]$ на конечное число интервалов длительностью τ , можно на этом интервале построить приближенное решение по изложенной выше процедуре, которое сходится в энергетической норме

$$E = \int_0^T \int_S \left[\rho(v_i^* - v_i) \frac{\partial(v_i^* - v_i)}{\partial t} + (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \frac{\partial(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})}{\partial \xi_j} \right] dS dt \quad (5.144)$$

к точному решению, соответствующему моменту времени T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности напряжений и скоростей на гранях элементов и диссипативности краевых условий (5.118) следует неравенство

$$\int_S (\sigma_{ij}^* - \hat{\sigma}'_{ij})(v_i^* - v_{ij}) dS \leq 0. \quad (5.145)$$

Из (5.115), (5.123) и (5.145) следует

$$E \leq \int_0^T \int_S \left[(v_{ij} - v_i) \frac{\partial(\hat{\sigma}_{ij}^* - \hat{\sigma}'_{ij})}{\partial \xi_j} + (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) \frac{\partial(v_i^* - v_{ij})}{\partial t} \right] dS dt. \quad (5.146)$$

Используя выражение для $q = q_1 + q_2$ и неравенство (5.145), неравенство (5.146) можно привести к виду

$$E + \int_0^T \int_S q ds dt \leq \int_0^T \int_S \left[(v_{ij} - v_i) \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} + (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} \right] dS dt. \quad (5.147)$$

Предполагая точное решение гладким, запишем

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} = \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} \right)_0 + O(\tau + h_1 + h_2), \quad \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} = \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} \right)_0 + O(\tau + h_1 + h_2), \quad (5.148)$$

где индекс «0» означает, что соответствующая величина вычисляется при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \eta = 0$. Тогда выражение в правой части неравенства

(5.147) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_S \left[(v_{ij} - v_i) \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} + (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} \right] dS dt = \\ & = \int_0^T \int_S \left[(v_{ij}^0 - v_i^0) \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} \right)_0 + (\hat{\sigma}'_{ij}{}^0 - \hat{\sigma}'_{ij}) \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} \right)_0 \right] dS dt + \\ & + (v_{ij} - v_i) O(\tau + h_1 + h_2) + (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) O(\tau + h_1 + h_2). \end{aligned} \quad (5.149)$$

Используя уравнения одномерных задач (5.129)–(5.137) и ограничения на шаг по времени (5.139), можно показать, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_S \rho (v_{ij}^0 - v_i^0)^2 dS dt \leq C_1 \int_0^T \int_S q dS dt, \\ & \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{ij}{}^0 - \hat{\sigma}'_{ij})^2 dS dt \leq C_2 \int_0^T \int_S q dS dt, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — постоянные, зависящие от констант диссипации и констант, входящих в уравнения упругопластического деформирования. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_S (v_{ij} - v_i) \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} dS dt \leq \left(\int_0^T \int_S \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^*}{\partial \xi_j} \right)_0^2 dS dt \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\int_0^T \int_S C_1 q dS dt \right)^{1/2} + \int_0^T \int_S (v_{ij} - v_i) O(\tau + h_1 + h_2) dS dt, \end{aligned} \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} dS dt \leq \left(\int_0^T \int_S \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} \right)_0^2 dS dt \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\int_0^T \int_S C_2 q dS dt \right)^{1/2} + \int_0^T \int_S (\hat{\sigma}'_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) O(\tau + h_1 + h_2) dS dt. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Из последних неравенств и ограниченности решения (утверждение 2) следует утверждение 3.

5.12.5. Построение решения для тела вращения

Пусть область, занятая телом вращения, разбита на элементы типа, представленного на рис. 5.5. Пусть $M \times N$ — число четырехугольников, на которое разбито меридианальное сечение, L — количество элементов в окружном направлении при фиксированных значениях r и z . Тогда построение решения во всей области с учетом условий непрерывности полиномов (5.125) на гранях элементов и краевых условий сводится к решению $3 \times (M \times N + L \times N + L \times M)$ систем вида:

$$\begin{aligned} p_i - p_{i-1} - \alpha_{i-1/2}(q_i - q_{i-1}) - 2p_{i-1/2} &= 0, \\ q_i - q_{i-1} - \beta_{i-1/2}(p_i - p_{i-1}) - 2q_{i-1/2} &= 0, \\ a_0 q_0 + b_0 p_0 = \varphi_0, \quad a_k q_k + b_k p_k = \varphi_k. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Эти системы могут быть решены прогонкой. Если для каждого из элементов выполняется условие $\alpha_{i-1/2}\beta_{i-1/2} = 1$, то решение системы (5.152) вычисляется по явным формулам. Последнее условие наряду с неравенствами (5.139) приводит к ограничению на шаг по времени при вычислении решения по явной схеме:

$$\tau \leq \min_{\Omega} \min \left\{ \frac{2\sqrt{g\rho}}{\sqrt{25(az_{,3}^2 + \mu r_{,3}^2) - ga/r^2}}, \frac{2\sqrt{g\rho}}{\sqrt{16(\mu(z_{,3}^2 + r_{,3}^2) - g\mu/4r^2)}}, \right. \\ \left. \frac{2\sqrt{g\rho}}{5\sqrt{\mu z_{,3}^2 + ar_{,3}^2}}, \frac{r\Delta\varphi\sqrt{\rho}}{\sqrt{9\mu - a(\Delta\varphi/2)^2}}, \frac{r\Delta\varphi\sqrt{\rho}}{\sqrt{25a - \mu(\Delta\varphi/2)^2}}, \frac{r\Delta\varphi\sqrt{\rho}}{3\sqrt{\mu}}, \right. \\ \left. \frac{2\sqrt{g\rho}}{5\sqrt{\mu z_{,1}^2 + ar_{,2}^2}}, \frac{2\sqrt{g\rho}}{\sqrt{25(az_{,1}^2 + \mu r_{,1}^2) - ga/r^2}}, \frac{2\sqrt{g\rho}}{\sqrt{16(\mu(z_{,1}^2 + r_{,1}^2) - g\mu/4r^2)}} \right\}. \quad (5.153)$$

5.12.6. Определение скоростей на оси вращения

При отсутствии сосредоточенных сил на оси вращения должно выполняться равенство $\int_0^{2\pi} \hat{\sigma}_{i1} v_{i1} d\varphi = 0$. Выражая в этом равенстве компоненты вектора скорости v_i через компоненты v_x, v_y, v_z в декартовой системе координат и учитывая, что оно должно выполняться при любых значениях v_x, v_y, v_z получим

$$\int_0^{2\pi} (\hat{\sigma}'_{11} \cos \varphi - \hat{\sigma}'_{21} \sin \varphi) d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\hat{\sigma}'_{11} \sin \varphi - \hat{\sigma}'_{21} \cos \varphi) d\varphi = 0, \quad (5.154)$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{\sigma}'_{31} d\varphi = 0.$$

Равенства (5.154) используются для определения скоростей на оси вращения. Поясним процедуру вычисления скоростей для случая, когда плоскость $x = 0$ является плоскостью симметрии. Если ввести обозначения

$$\{\hat{\sigma}'_{k1}, v_{k1}\}_{\xi^1=-1, \varphi=\varphi_{i-1/2}} = \{p_{0,i}^k, q_{0,i}^k\},$$

то

$$q_{0,i}^1 = C_2 \sin \varphi_{i-1/2}, \quad q_{0,i}^2 = C_2 \cos \varphi_{i-1/2}, \quad q_{0,i}^3 = C_3$$

и из соотношений (5.154) в случае явной схемы следует

$$p_{0,i}^1 = -\alpha_{1/2,i}^1 C_2 \sin \varphi_{i-1/2} + f_i^1, \quad p_{0,i}^2 = -\alpha_{1/2,i}^2 C_2 \cos \varphi_{i-1/2} + f_i^2, \quad (5.155)$$

$$p_{0,i}^3 = -\alpha_{1/2,i}^3 C_3, \quad f_i^k = \alpha_{1/2,i}^k q_{1/2,i}^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Заменяя в (5.154) интегрирование суммированием по формуле прямоугольников, с учетом (5.155) получим

$$-C_2 = \frac{\sum_{i=1}^L (f_i^1 \sin \varphi_{i-1/2} + f_i^2 \cos \varphi_{i-1/2})}{\sum_{i=1}^L (\alpha_{1/2,i}^1 \sin^2 \varphi_{i-1/2} + \alpha_{1/2,i}^2 \cos^2 \varphi_{i-1/2})}, \quad -C_3 = \frac{\sum_{i=1}^L f_i^3}{\sum_{i=1}^L \alpha_{1/2,i}^3}.$$

Если решение находится по явной схеме, то для вычисления скоростей на оси вращения используется аналогичная процедура. Но для получения соотношений типа (5.155) нужно во всех сечениях $\varphi = \text{const}$ при фиксированных значениях z выполнить прямую прогонку, начиная с внешней границы по направлению к оси вращения.

5.13. Моделирование процессов хрупкого разрушения

В разработанные алгоритмы решения задач динамики упругопластического деформирования включена процедура моделирования процессов хрупкого разрушения. Поскольку в задачах разрушения условия на внутренних границах формулируются в виде неравенств, то даже в случае упругого деформирования задача становится нелинейной.

При моделировании процесса хрупкого разрушения в рамках построенных алгоритмов предполагается, что разрушение происходит по

границам элементов при достижении нормальными или касательными напряжениями предельных значений.

Рассмотрим два соседних элемента. Величины, которые относятся к элементу, расположенному с правой стороны от границы, отметим знаком «+», величины, относящиеся к элементу, который расположен с левой стороны, — знаком «-». На рис. 5.6 приведены три типа краевых условий на границе между элементами (через σ и τ обозначены нормальные и касательные напряжения на границе между элементами, через u и v — компоненты вектора скорости по нормали и касательной к границе между элементами). Условия 1 соответствуют неразрушенной границе, условия 2 и 3 моделируют разрушение по границам элементов. Если имеют место условия 2, то будем говорить, что по границе между элементами произошел разрыв, если же имеют место условия 3 — произошло расслоение.

Вычисление решения с учетом разрушения на каждом шаге по времени состоит из двух этапов:

1) вычисления соответствующей этому слою времени системы расположения разрывов и расслоений с учетом возможного захлопывания трещин и образования новых;

2) вычисления решения с учетом расположения разрывов и расслоений, найденного на первом этапе.

Замена краевых условий на внутренних границах при вычислении расположения разрывов и расслоений проводится в соответствии со схемой, приведенной на рис. 5.6 (через σ^* и τ^* обозначены предельные значения нормальных и касательных напряжений). Если используется неявная схема вычислений, то необходимы итерации на каждом шаге по времени в силу нелинейного характера условий на внутренних границах.

При вычислении же решения по явной схеме скорости и напряжения на границе между элементами на среднем слое по времени зависят от решения на нижнем слое только в двух примыкающих друг к другу элементах. Кроме того, согласно формулам явной схемы, из неравенства $\sigma \geq \sigma^*$ следует неравенство $u^+ - u^- > 0$. Поэтому расположение разрывов и расслоений однозначно определяется на первой итерации.

Виды краевых условий на внутренних границах

-	+	$\sigma^- = \sigma^+ = 0, \quad u^- = u^+$ $\tau^- = \tau^+ = 0, \quad v^- = v^+$
---	---	--

-	+	$\sigma^- = \sigma^+ = 0$ $\tau^- = \tau^+ = 0$
---	---	--

-	+	$\sigma^- = \sigma^+$ $u^- = u^+$
---	---	--------------------------------------

Смена краевых условий на внутренних границах при вычислении разрывов и расслоений

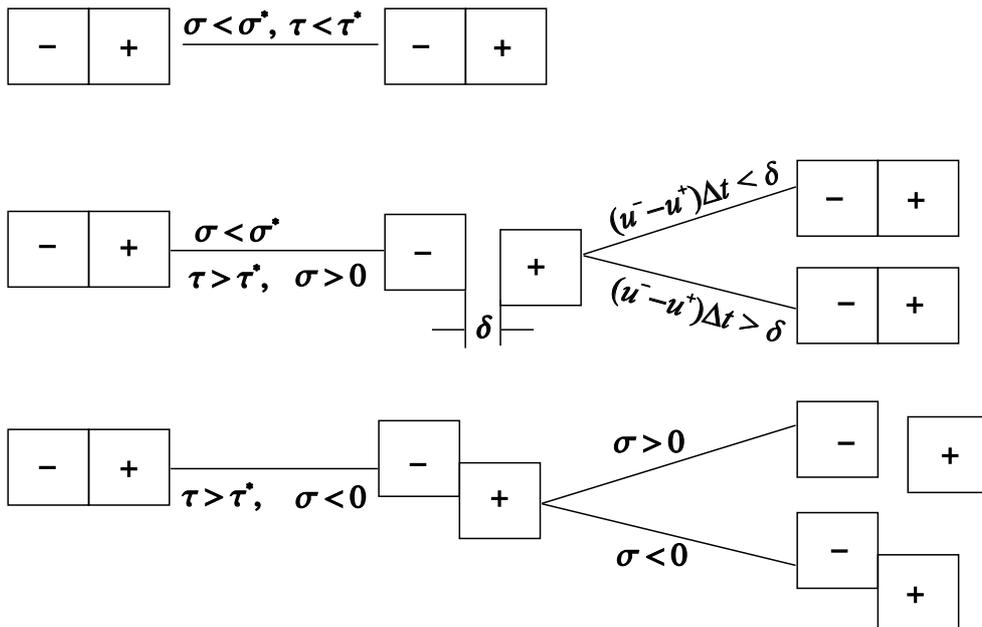


Рис. 5.6. Моделирование процессов хрупкого разрушения

5.14. Примеры численных решений

Одним из способов проверки качества численных схем решения динамических задач может быть сравнение численных результатов с аналитическими, соответствующими установившемуся режиму.

В первых двух подразделах этого раздела решаются тестовые задачи и численное решение сравнивается с аналитическим и численными решениями других авторов.

5.14.1. Упругопластическое деформирование кольца

Рассматривается плоская деформация тонкого кольца под действием внутреннего давления. Радиус кольца $R = 94,1$ см, толщина $H = 1,03$ см. Зависимость давления от времени $p(t) = p_0 \sin(\pi t/t_0)$, $p_0 = 6,89$ МПа, $t_0 = 3,133$ мс, $\sigma_0 = 0,63$ ГПа. Принимается кусочно-линейная диаграмма одноосного растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ с модулем упругости $E = 200$ ГПа и касательным модулем $E'/E = 0,01$; предел текучести материала $\sigma_s = 689$ МПа, плотность $\rho = 2,86$ г/см³. На волновой стадии, когда напряжения и деформации практически постоянны по сечению кольца, можно выписать аналитическое решение как на стадии упругого, так и на стадии пластического деформирования.

На волновой стадии упругого деформирования ($0 \leq t \leq t_*$) движение кольца описывается уравнениями

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + a_e^2 w = \frac{1}{\rho h} (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-), \quad \sigma_{22} = E \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{w}{R}, \quad (5.156)$$

где w — прогиб кольца; σ_{22} — окружное напряжение; ρ — плотность; $a_e^2 = E/(\rho R^2)$; $\sigma_{33}^+ = 0$, $\sigma_{33}^- = p_0 \sin(\pi t/t_0)$. Решение уравнения (5.156) записывается в виде

$$w = \frac{p_0}{\rho h [a_e^2 - (\frac{\pi}{t_0})^2]} \left(\sin \frac{\pi}{t_0} t - \frac{\pi}{a_e t_0} \sin a_e t \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{R} w. \quad (5.157)$$

Момент времени t_* , при котором сечение кольца переходит в пластическое состояние, определяется условием $\sigma_{22}(t_*) = \sigma_s$. Обозначим $\sigma_{22}(t_*) = \sigma_{22}^*$, $w(t_*) = w^*$.

На стадии упругопластического деформирования ($t_* \leq t \leq t_{**}$) уравнения движения кольца имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dt^2} + a_p^2 w &= \frac{p_0}{\rho h} \sin \frac{\pi}{t_0} t + \frac{\sigma_{22}^*}{\rho R} \left(\frac{E'}{E} - 1 \right), \\ \frac{d\sigma_{22}}{dt} &= \frac{E'}{R} \frac{dw}{dt}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^* + \frac{e'}{R} (w - w^*), \end{aligned} \quad (5.158)$$

где $a_p^2 = \frac{E'}{\rho R^2}$. Решение уравнения (5.158) записывается в виде:

$$w = c_1 \sin a_p t + c_2 \cos a_p t + \frac{p_0}{\rho h [a_p^2 - (\frac{\pi}{t_0})^2]} \sin \frac{\pi}{t_0} t + \frac{\sigma_{22}^*}{E'} R \left(\frac{E'}{E} - 1 \right), \quad (5.159)$$

константы c_1, c_2 определяются из условий непрерывности

$$w(t_* + 0) = w(t_* - 0), \quad \frac{dw}{dt}(t_* + 0) = \frac{dw}{dt}(t_* - 0).$$

Момент t_{**} определяется из условия $d\sigma_{22}/dt = 0$ и при $t > t_{**}$ снова начинается упругое деформирование:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + a_e^2 w = \frac{p_0}{\rho h} \sin \frac{\pi}{t_0} t, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E}{R} \frac{dw}{dt}, \quad (5.160)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^{**} + \frac{E}{R} (w - w^{**}), \quad \sigma_{22}^{**} = \sigma_{22}(t_{**}), \quad w^{**} = w(t_{**}),$$

$$w = c_1 \sin a_e t + c_2 \cos a_e t + \frac{p_0}{\rho h [a_e^2 - (\frac{\pi}{t_0})^2]} \sin \frac{\pi}{t_0} t + w^{**} - \frac{R}{E} \sigma^{**}, \quad (5.161)$$

константы c_1, c_2 также определяются из условий непрерывности

$$w(t_{**} + 0) = w(t_{**} - 0), \quad \frac{dw}{dt}(t_{**} + 0) = \frac{dw}{dt}(t_{**} - 0).$$

Для приведенных выше параметров задачи $t_* = 1,634$ мс, $t_{**} = 2,945$ мс.

При численном решении сечение кольца разбивалось на четыре элемента. Для описания интегральных характеристик такого количества элементов оказалось достаточным. Вычисления проводились по явной схеме с шагом $\tau = 10^{-6}$ с, удовлетворяющим неравенствам (5.153).

Из сравнения результатов численного решения с аналитическим (таблица 5) следует, что на установившейся стадии численное решение практически совпадает с аналитическим.

Таблица 5. Сравнение результатов численного решения с аналитическим

$t,$ 10^{-3}с	σ_{22}/σ_0		$wE/R\sigma_0$	
	аналит. реш.	числ. реш.	аналит. реш.	числ. реш.
0,5	0,0493	0,0478	0,0492	0,0489
1,0	0,3454	0,3369	0,3452	0,3410
1,5	0,9233	0,9004	0,9234	0,9107
1,6	1,0551	1,0288	1,0551	1,0408
1,7	1,0951	1,0930	1,1798	1,1700
1,8	1,0963	1,0943	1,3074	1,2966
1,9	1,0976	1,0956	1,4318	1,4200
2,0	1,0988	1,0969	1,5523	1,5395
2,1	1,1000	1,0981	1,6685	1,6541
2,2	1,1011	1,0994	1,7783	1,7627
2,3	1,1021	1,1005	1,8811	1,8640
2,4	1,1030	1,1016	1,9750	1,9562
2,5	1,1039	1,1026	2,0581	2,0378
2,6	1,1046	1,1035	2,1289	2,1067
2,7	1,1051	1,1042	2,1851	2,1610
2,8	1,1055	1,1048	2,2244	2,1985
2,9	1,1057	1,1051	2,2447	2,2170
3,0	1,1023	1,1000	2,2431	2,2141

5.14.2. Деформирование цилиндрической оболочки под действием синусоидальной нагрузки

Ниже приводятся результаты численного решения задачи о деформировании цилиндрической оболочки под действием равномерного внутреннего давления с синусоидальной зависимостью от времени.

Константы материала оболочки и зависимость нагрузки от времени те же, что и в предыдущем примере. Радиус оболочки $R = 91,1$ см, длина $L = 468,4$ см, толщина $H = 1,03$ см. Параметры оболочки выбраны для сравнения результатов счета такие же, как и в [161, 184]. При численном решении поперечное сечение оболочки разбивалось на 49 элементов по длине и 5 по толщине. Шарнирное закрепление торцов оболочки моделировалось условиями: $\sigma_{11} = 0$, $v = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = L$.

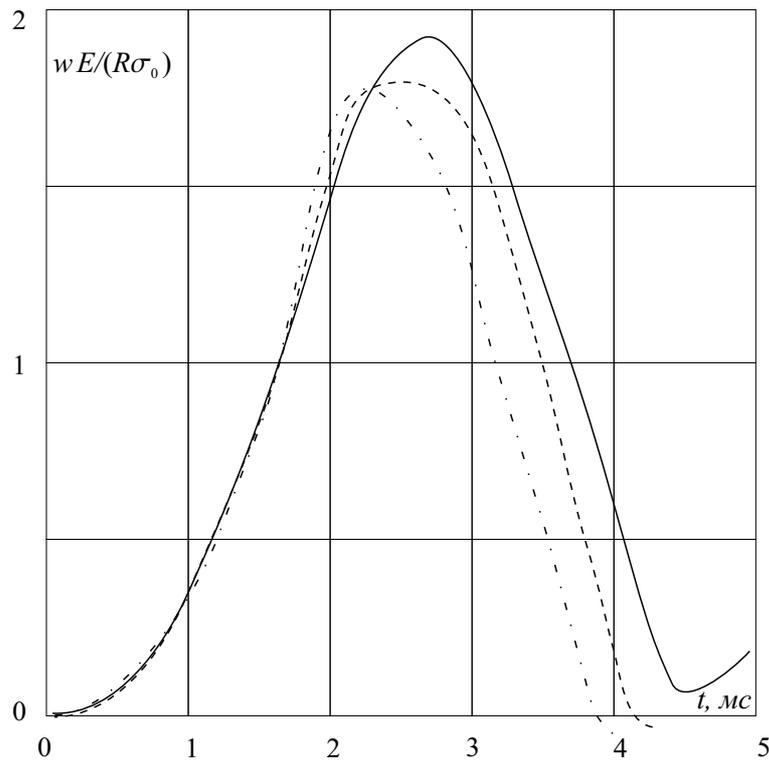


Рис. 5.7. Деформирование цилиндрической оболочки под действием синусоидальной нагрузки

Вычисления проводились по неявной схеме с различными шагами интегрирования по времени. Результаты решения с шагами $\tau = 0,05$ мс и $\tau = 0,01$ мс практически совпадают.

Результаты счета сравнивались с результатами работ [161, 184]. В [161] решение получено в виде рядов по собственным формам колебаний с использованием уравнений оболочек типа Доннелла – Муштари. В [161] максимальный прогиб $w_*E/(R\sigma_0) = 1,79$ достигается в момент времени $\tau = 2,5$ мс. В наших расчетах $w_*E/(R\sigma_0) = 1,72$ при $\tau = 2,5$ мс.

В [184] решение этой же задачи получено численным интегрированием уравнений оболочек методом, предложенным в [176]. Результаты численного счета в этой работе представлены в виде графиков. В масштабе графиков они совпадают с нашими расчетами (рис. 5.7).

Из анализа результатов решения этих двух тестовых задач и ряда других следует, что интегральные характеристики динамического

упругопластического деформирования тонкостенных конструкций достаточно точно воспроизводятся численными решениями, полученными с помощью изложенных выше алгоритмов.

5.14.3. Упругопластическое деформирование круговой арки

При численном решении этой задачи использовался алгоритм решения плоской динамической задачи в ортогональной криволинейной системе координат и первая схема аппроксимация уравнений упругопластического течения.

Зависимость нагрузки от времени и ее распределение по внешней поверхности арки показаны на рис. 5.8. Были приняты следующие характеристики материала арки: модуль упругости $E = 200$ ГПа, касательный модуль $E'/E = 0,01$, предел текучести материала $\sigma_s = 689$ МПа, плотность $\rho = 2,86$ г/см³. Края арки считались заземленными.

Задача решалась по явной схеме. Сечение арки разбивалось на $N \times M$ криволинейных четырехугольников (N — число элементов в радиальном направлении, M — в окружном). Шаг интегрирования по времени τ полагался равным максимальному значению, допускаемому неравенствами (5.97), что обеспечивало минимальную величину искусственной диссипации при заданном разбиении области. На рис. 5.8, 5.9 представлены результаты счета при $N = 36$, $M = 18$ и $N = 54$, $M = 18$. В первом случае шаг $\tau = 1,48 \times 10^{-7}$ с, во втором случае $\tau = 9,87 \times 10^{-8}$ с.

На рис. 5.8 приведено распределение радиального напряжения σ_r в центральном сечении арки для нескольких моментов времени. Сплошные кривые соответствуют разбиению сечения арки на 54×18 элементов, штриховые — разбиению на 36×18 элементов. На рис. 5.9 показано развитие зон пластических деформаций.

5.14.4. Хрупкое разрушение кольца при боковом давлении

Ниже приведены результаты решения задачи о динамическом деформировании однородного и слоистого колец с учетом хрупкого разрушения.

Были приняты следующие характеристики для однородного кольца: модуль Юнга $E = 7 \times 10^5$ кг/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$, плотность $\rho = 2,7 \times 10^{-6}$ кг·с²/см⁴, предел прочности на растяжение $\sigma^* = 3,45 \times 10^3$ кг/см², предел прочности на сдвиг $\tau^* = 3 \times 10^3$ кг/см².

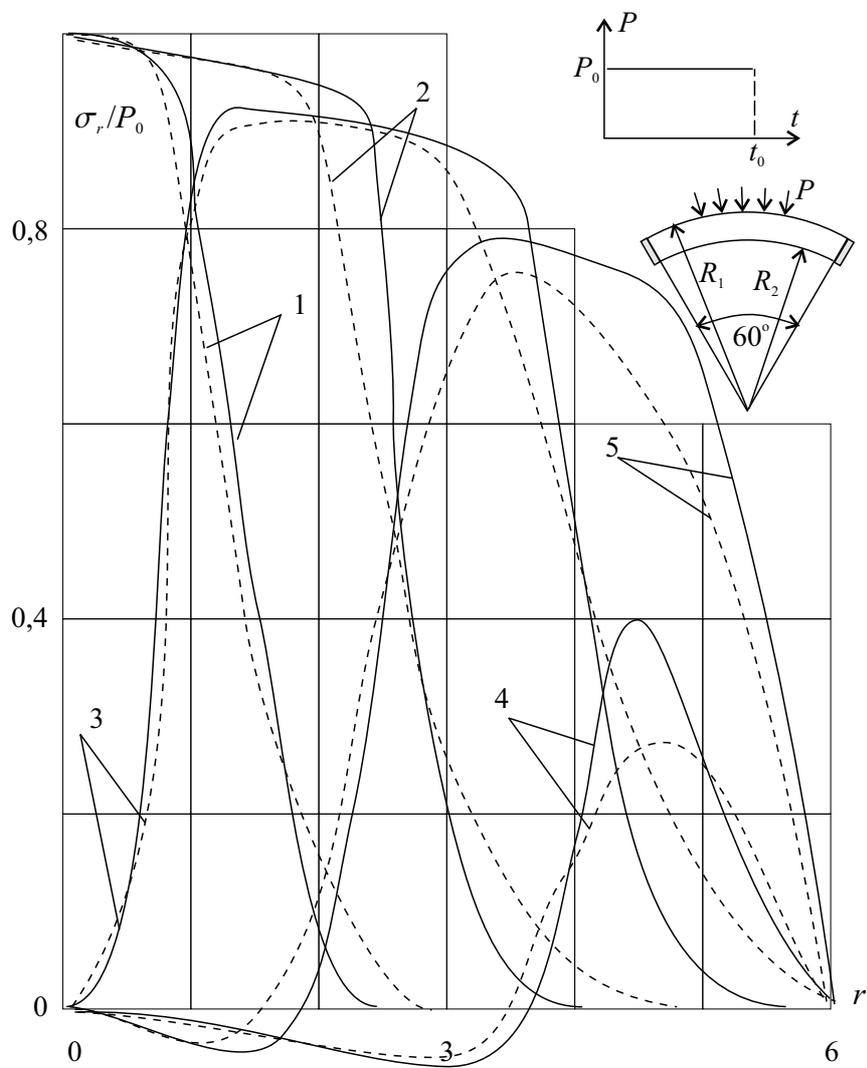


Рис. 5.8. Распределение радиальных напряжений в центральном сечении арки

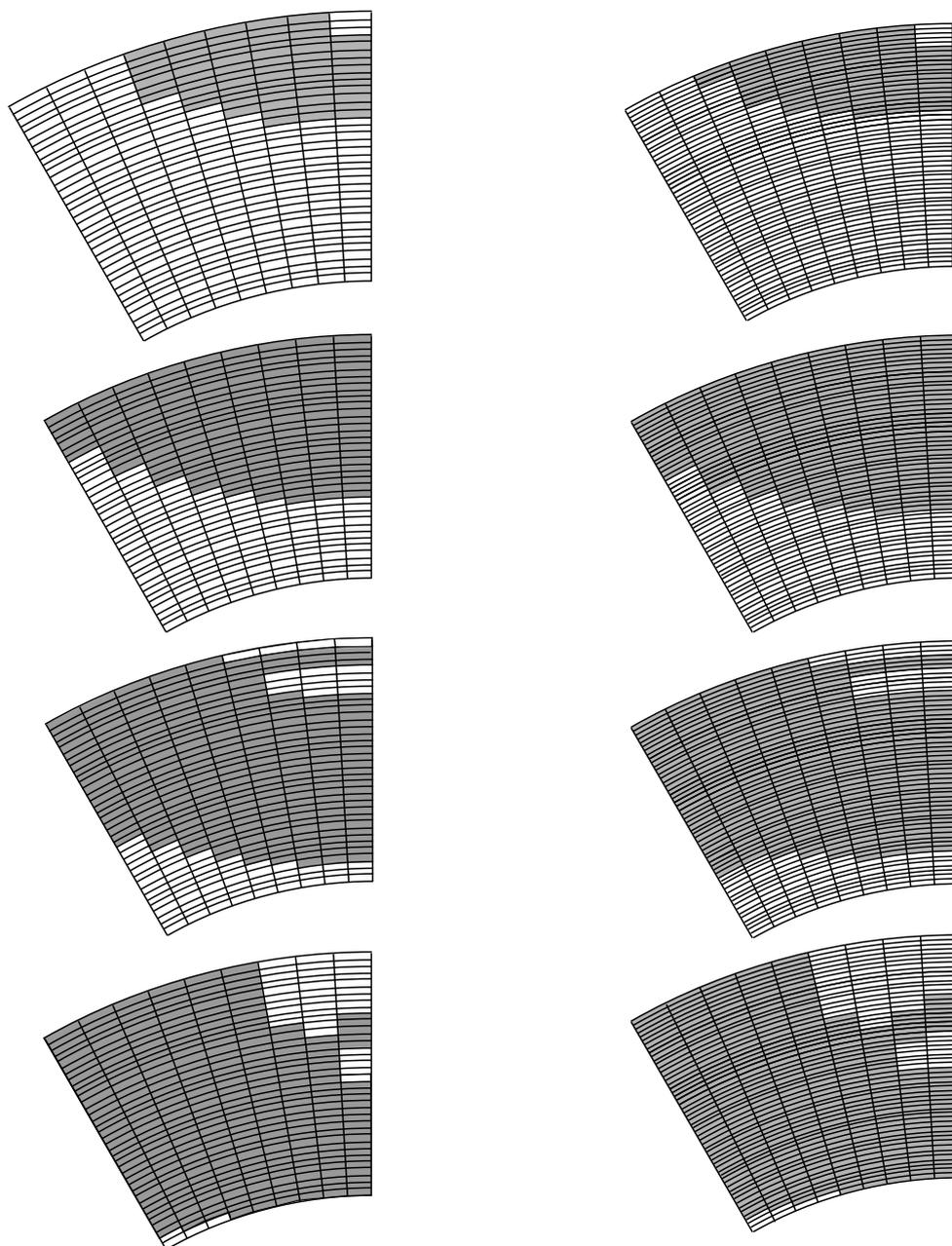


Рис. 5.9. Зоны пластических деформаций в сечении круговой арки

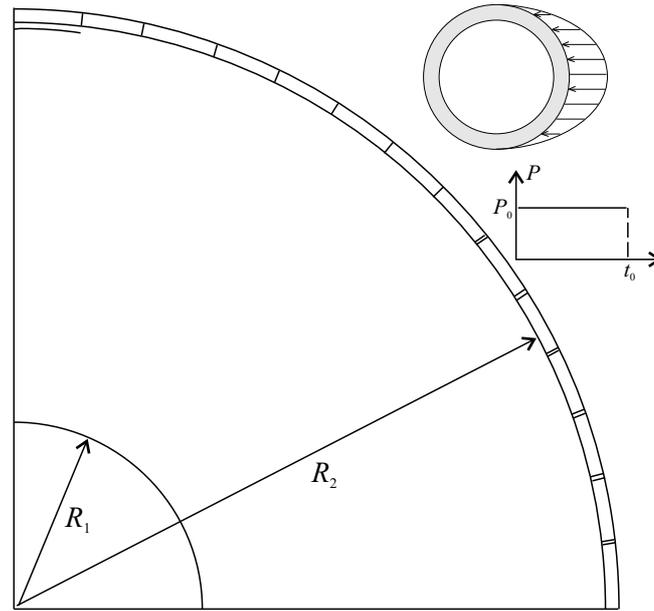


Рис. 5.10. Схема нагружения кольца

Слоистое кольцо состоит из трех слоев. Наружный и внутренний слой — из материала с выше приведенными свойствами, свойства материала среднего слоя следующие: $E = 3 \times 10^4$ кг/см², $\nu = 0,3$, $\sigma^* = 8 \times 10^2$ кг/см², $\tau^* = 6 \times 10^2$ кг/см², $\rho = 1,15 \times 10^{-6}$ кг·с²/см⁴.

Геометрические параметры колец следующие. Для однородного и слоистого колец внутренний радиус $R_1 = 100$ см, внешний радиус $R_2 = 105$ см. Для слоистого кольца толщина внутреннего и наружного слоев $h_1 = h_2 = 1$ см, среднего слоя $h_2 = 3$ см. К внешней поверхности кольца прикладывалось боковое давление, распределенное по закону $p = p(t) \cos \varphi$ (рис. 5.10). Зависимость $p(t)$ показана на рис. 5.10.

Для построения численного решения использовалась явная схема с шагом по времени $\tau = 8 \times 10^{-8}$ с. В силу симметрии задачи решение вычислялось для половины кольца $0 \leq \varphi \leq \pi$. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ ставились условия симметрии напряженного и деформированного состояния.

Разбиение поперечного сечения кольца на элементарные четырехугольники было следующим. В радиальном направлении сечение разбивалось окружностями на 30 равных промежутков. По угловой координате в интервале $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ сечение разбивалось на 14 равных промежутков, в интервале $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ — на 2 равных промежутка.

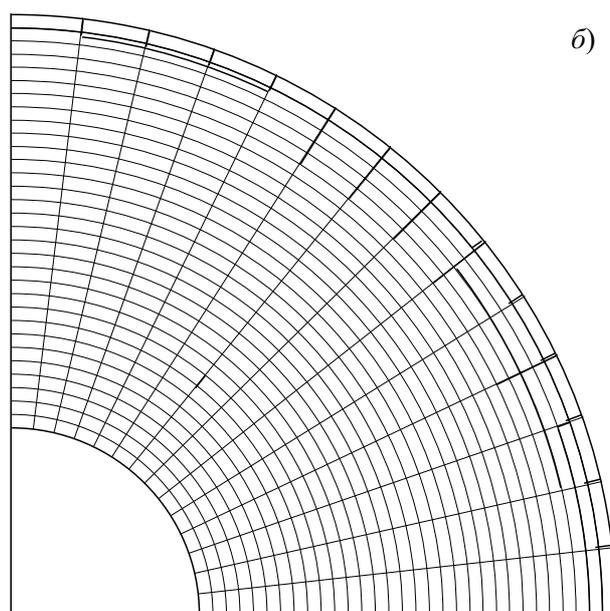
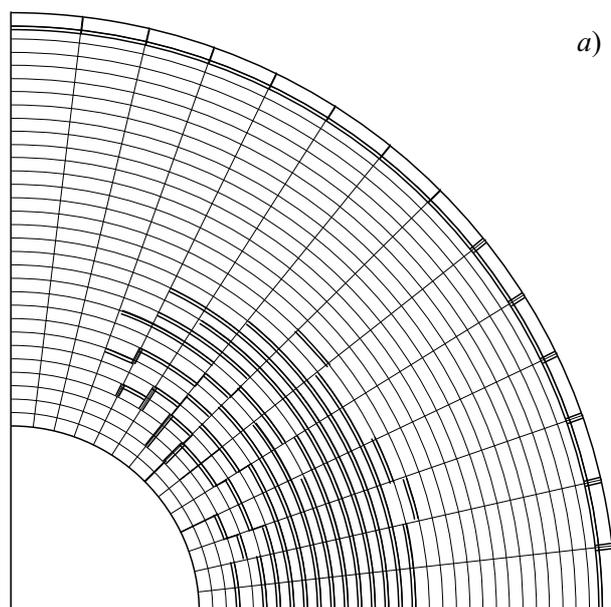


Рис. 5.11. Схема разрушения однородного и слоистого колец

На рис. 5.11 показаны трещины нормального разрыва и расслоений в поперечном сечении однородного и слоистого колец для двух моментов времени. Двойная черта соответствует трещине разрыва, одинарная — трещине расслоения.

И в однородном и сплошном кольцах разрушение начинается с внешней стороны кольца при достижении касательными напряжениями предельных значений (рис. 5.11). В однородном кольце после отражения волн растяжения и сдвига от свободной внутренней поверхности вблизи нее происходит интенсивное разрушение (рис. 5.11, *а*). В слоистом кольце с более «мягким» внутренним слоем трещины сдвига локализуются во внешнем слое (рис. 5.11, *б*).

Численные решения, полученные с шагом интегрирования по времени $\tau = 4 \times 10^{-8}$ с, практически совпадают с приведенными на рис. 5.10, 5.11.

Соответствие результатов численного моделирования реальной картине разрушения в твердых телах зависит не только от качества используемого численного алгоритма, но и от степени достоверности используемых критериев разрушения. Критерии разрушения, использованные в рассмотренном выше примере, безусловно являются простейшими, их можно использовать только для хрупких материалов. В рамках предложенных алгоритмов могут быть встроены и другие критерии разрушения. В частности, можно учесть на силы трения Кулона на контактных поверхностях. В работе [58] изложена процедура вычисления скоростей и напряжений на поверхностях контакта с условиями трения Кулона.

Глава 6

Динамика упругопластического деформирования при больших деформациях

В ряде твердых тел, например в металлических телах, при произвольной величине поворотов и деформаций элементов тела компоненты девиатора упругих деформаций — величины порядка отношения предела текучести на сдвиг к модулю Юнга и, следовательно, малы по сравнению с единицей. Ниже на основе результатов работы [64] формулируются уравнения изотропного упругого и идеального упругопластического деформирования таких тел. Проведено сопоставление полученных уравнений с известными [64, 72, 152, 153]. Для простоты записи уравнений ниже рассматриваются только адиабатические процессы деформирования.

6.1. Уравнения упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций

Обозначим через $\vec{g}_\alpha, \vec{g}^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) базисные векторы лагранжевой системы координат, порождаемой декартовой системой координат x^i с базисными векторами $\vec{e}_i = \vec{e}^i$ ($i = 1, 2, 3$).

Пусть $\hat{\gamma}_{\alpha\beta} \vec{g}^\alpha \vec{g}^\beta = \hat{\gamma}^{\sigma\lambda} \vec{g}_\sigma \vec{g}_\lambda = \gamma_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$ — какой-либо симметричный тензор. Дифференцируя по времени t формулы связи компонент $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \hat{\gamma}^{\sigma\lambda}$ с компонентами γ_{ij} находим

$$\begin{aligned} (d\hat{\gamma}_{\alpha\beta}/dt) \vec{g}^\alpha \vec{g}^\beta &= (D\gamma_{ij}/Dt + \gamma_{sj}e_{si} + \gamma_{si}e_{sj}) \vec{e}^i \vec{e}^j, \\ (d\hat{\gamma}^{\alpha\beta}/dt) \vec{g}_\alpha \vec{g}_\beta &= (D\gamma_{ij}/Dt - \gamma_{sj}e_{si} - \gamma_{si}e_{sj}) \vec{e}^i \vec{e}^j, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $e_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x^j + \partial u_j/\partial x^i)$, u_i — компоненты вектора скорости; $D\gamma_{ij}/Dt$ — производная Яуманна [149]

$$\begin{aligned} D\gamma_{ij}/Dt &= d\gamma_{ij} + \gamma_{ki}\omega_{kj} + \gamma_{kj}\omega_{ki}, \\ \omega_{ij} &= (1/2)(\partial u_i/\partial x^j - \partial u_j/\partial x^i). \end{aligned}$$

Из (6.1), в частности, следует

$$D\varepsilon_{ij}/Dt + \varepsilon_{ki}e_{kj} + \varepsilon_{jk}e_{ki} = e_{ij}, \quad (6.2)$$

где

$$\varepsilon_{ij}\vec{e}^i\vec{e}^j = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\vec{g}_\alpha\vec{g}^\beta, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = (1/2)(\hat{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}), \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta.$$

Очевидно, уравнения (6.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} D\varepsilon_{ij}/Dt + (2/3)\varepsilon e_{ij} &= a_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \\ a_{ij} &= e_{ij} - \varepsilon'_{ik}e_{kj} - \varepsilon'_{jk}e_{ki}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Так как в системе координат x^i , образованной главными осями деформаций,

$$a_{11} = (1 - 2\varepsilon'_{11})e_{11}, \quad a_{11} = (1 + 2\varepsilon'_{33})e_{12}, \quad \dots,$$

то при

$$1 + \varepsilon'_{ij} \approx 1 \quad (6.4)$$

тензор с компонентами a_{ij} эквивалентен тензору скоростей деформаций e_{ij} . Поэтому в случае (6.4) можно вместо (6.3) использовать уравнения

$$D\varepsilon_{ij}/Dt = (1 - (2/3)\varepsilon)e_{ij}. \quad (6.5)$$

Из (6.5) и уравнения неразрывности

$$d\rho/dt + \rho e = 0$$

следует

$$\begin{aligned} D\varepsilon'_{ij}/Dt &= \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)e'_{ij}, \quad d\varepsilon/dt = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)e, \\ e'_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e, \quad e = \delta_{ij}e_{ij}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где ρ_0 — плотность в недеформированном состоянии.

Аналогично находим из (6.1), (6.6), что в случае (6.4) для записи уравнений (6.6) в лагранжевой системе координат можно использовать формулы

$$\begin{aligned} (d\hat{\varepsilon}'_{\alpha\beta}/dt)\vec{g}^\alpha\vec{g}^\beta &= (d\hat{\varepsilon}'^{\gamma\lambda}/dt)\vec{g}_\gamma\vec{g}_\lambda = (D\varepsilon'_{ij}/Dt)\vec{e}^i\vec{e}^j, \\ \hat{\varepsilon}'_{\alpha\beta} &= \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\hat{g}_{\alpha\beta}\varepsilon, \quad \hat{\varepsilon}'^{\gamma\lambda} = \hat{g}^{\gamma s}\hat{g}^{\lambda k}\hat{\varepsilon}'_{sk}, \quad \hat{g}^{\gamma s} = \vec{g}^\gamma \cdot \vec{g}^s. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Полагаем, что при изотропном упругом деформировании внутренняя энергия E — функция энтропии S и инвариантов ε , Γ_2 , Γ_3 тензора деформаций

$$E = E(\varepsilon, \Gamma_2, \Gamma_3, S), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{3}\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj}\varepsilon'_{ij}. \quad (6.8)$$

Из (6.6), (6.8) находим

$$\frac{dE}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \left(e \frac{\partial E}{\partial \Gamma_2} + \varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj} \frac{\partial E}{\partial \Gamma_3}\right) e'_{ij} + T \frac{dS}{dt}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S}. \quad (6.9)$$

Так как упругое деформирование — обратимый процесс, то из закона сохранения энергии

$$\sigma_{ij}e_{ij} = \rho dE/dt \quad (6.10)$$

и (6.6), (6.9) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha \partial E / \partial \varepsilon, \quad \sigma'_{ij} = \beta \varepsilon'_{ij} + \gamma \left(\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj} - \frac{2}{3}\Gamma_2 \delta_{ij} \right), \quad dS/dt = 0, \\ \alpha &= \rho_0 \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{5/2}, \quad \beta = \alpha \partial E / \partial \Gamma_2, \quad \gamma = \alpha \partial E / \partial \Gamma_3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Для того, чтобы уравнения (6.11) были уравнениями упругого деформирования, необходимо, чтобы они однозначно определяли величины деформаций по заданным величинам напряжений. Из (6.11) находим

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}\sigma'_{kj} &= A\varepsilon'_{ij} + B\varepsilon'_{ik}\varepsilon'_{kj} + C\delta_{ij}, \\ A &= \gamma \left(\frac{2}{3}\beta\Gamma_2 + \gamma\Gamma_3 \right), \quad B = \beta^2 - \frac{1}{3}\gamma^2\Gamma_2, \quad C = 2\gamma \left(\beta\Gamma_3 + \frac{2}{9}\Gamma_2^2\gamma \right), \\ J_2 &= \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \beta^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\gamma^2\Gamma_2^2 + 3\beta\gamma\Gamma_3, \\ J_3 &= \frac{1}{3}\sigma'_{ik}\sigma'_{kj}\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}\gamma\Gamma_2 \left(\beta^2\Gamma_2 - \frac{1}{9}\gamma^2\Gamma_2^2 + \frac{3}{2}\gamma\beta\Gamma_3 \right) + (\beta^3 + \gamma^3\Gamma_3)\Gamma_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.11) следует, что в случае

$$\begin{aligned} \partial(\alpha \partial E / \partial \varepsilon) / \partial \varepsilon &\neq 0, \quad \beta^3 - \gamma^2(\beta\Gamma_2 + \gamma\Gamma_3) \neq 0, \\ (\partial J_2 / \partial \Gamma_2)(\partial J_3 / \partial \Gamma_3) - (\partial J_2 / \partial \Gamma_3)(\partial J_3 / \partial \Gamma_2) &\neq 0 \end{aligned}$$

уравнения (6.11) разрешимы относительно ε , ε'_{ij} и их можно записать в виде

$$\varepsilon'_{ij} = a\sigma'_{ij} + bQ'_{ij}, \quad Q'_{ij} = \sigma'_{ik}\sigma'_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, J_2, J_3, S), \quad (6.12)$$

где a , b можно рассматривать как функции ε , J_2 , J_3 , S .

Для того, чтобы уравнения (6.6), (6.12) с заданными функциями a , b , σ были уравнениями упругого деформирования, достаточно, чтобы a , b , σ удовлетворяли условиям разрешимости уравнений (6.12) относительно σ'_{ij} , ε

$$\begin{aligned} \partial\sigma/\partial\varepsilon &\neq 0, \quad a^3 - b^2(aJ_2 + bJ_3) \neq 0, \\ (\partial\Gamma_2/\partial J_2)(\partial\Gamma_3/\partial J_3) - (\partial\Gamma_2/\partial J_3)(\partial\Gamma_3/\partial J_2) &\neq 0, \\ \Gamma_2 &= a^2J_2 + \frac{1}{3}b^2J_2^2 + 3abJ_3, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\Gamma_3 = \frac{2}{3}bJ_2 \left(a^2J_2 - \frac{1}{9}b^2J_2^2 + \frac{3}{2}abJ_3 \right) + J_3(a^3 + b^3J_3)$$

и закону сохранения энергии (6.10) с внутренней энергией E , рассматриваемой как функция ε , J_2 , J_3 , S . Так как по (6.6), (6.12) имеет место

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) e'_{ij} &= D(a\sigma'_{ij} + bQ'_{ij})/Dt, \\ \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \sigma'_{ij} e'_{ij} &= adJ_2/dt + 2bdJ_3/dt + 2J_2da/dt + 3J_3db/dt, \end{aligned} \quad (6.14)$$

то закон сохранения энергии (6.10) при $E = E(\varepsilon, J_2, J_3, S)$ будет выполнен, если

$$\begin{aligned} \alpha\partial E/\partial J_2 &= a + 2J_2\partial a/\partial J_2 + 3J_3\partial b/\partial J_2, \\ \alpha\partial E/\partial J_3 &= 2(b + J_2\partial a/\partial J_3) + 3J_3\partial b/\partial J_3, \\ \alpha\partial E/\partial\varepsilon &= \sigma + 2J_2\partial a/\partial\varepsilon + 3J_3\partial b/\partial\varepsilon \end{aligned}$$

и, следовательно, a , b , σ должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \partial a/\partial J_3 &= \partial b/\partial J_2, \\ a + 2J_2\partial a/\partial J_2 + 3J_3\partial b/\partial J_2 &= \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) (\partial\sigma/\partial J_2 + \partial a/\partial\varepsilon), \\ 2(b + J_2\partial a/\partial J_3) + 3J_3\partial b/\partial J_3 &= \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) (\partial\sigma/\partial J_3 + \partial b/\partial\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Таким образом, уравнения упругого деформирования в случае (6.4) можно строить, задавая a , b , σ как функции ε , J_2 , J_3 , S так, чтобы были выполнены условия (6.13), (6.15). В частности, эти условия будут выполнены при

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\mu\alpha}, \quad \mu = \mu(\varepsilon, S), \quad b = 0, \quad \sigma = \alpha\partial\psi/\partial\varepsilon - J_2d(1/2\mu)/\alpha d\varepsilon, \\ \psi &= \psi(\varepsilon, S), \quad E = J_2/2\mu\alpha^2 + \psi(\varepsilon, S). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Если относительное изменение плотности мало по сравнению с единицей, то величину $1 - (2/3)\varepsilon$ в (6.5), (6.6) и во всех последующих уравнениях можно заменить на единицу.

Если угловые скорости элементов среды и скорости деформаций сдвига — величины одного порядка

$$\omega_{ij} \sim e_{ij} \sim \partial u_i / \partial x^j \quad (i \neq j),$$

то тензор с компонентами

$$e_{ij} - \varepsilon'_{ik} \partial u_k / \partial x^j - \varepsilon'_{jk} \partial u_k / \partial x^i$$

эквивалентен тензору скоростей деформаций. В этом случае производную Яуманна в (6.5)–(6.7), (6.14) можно заменить на производную по времени.

6.1.1. Уравнения упругопластического деформирования при малых компонентах дивергента упругих деформаций

При упругопластическом деформировании наряду с обратимыми (упругими) деформациями имеют место необратимые (пластические) деформации. Обозначим

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (6.17)$$

где e_{ij}^e, e_{ij}^p — скорости упругих и пластических деформаций; $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ — упругие и пластические деформации. Из (6.1), (6.2), (6.17) следует

$$D\varepsilon_{ij}^e / Dt + \varepsilon_{is}^e e_{sj} + \varepsilon_{js}^e e_{si} = e_{ij}^e = e_{ij} - e_{ij}^p. \quad (6.18)$$

Если компоненты дивергента упругих деформаций малы по сравнению с единицей

$$1 + \varepsilon'_{ij} \approx 1, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{ks} \varepsilon_{ks}^e, \quad (6.19)$$

то тензор с компонентами α_{ij}

$$\alpha_{ij} = e_{ij} - \varepsilon'_{is} e_{sj} - \varepsilon'_{ij} e_{si}$$

эквивалентен тензору скоростей деформаций e_{ij} и уравнения (6.18) можно записать в виде

$$D\varepsilon_{ij}^e / Dt + \frac{2}{3} e_{ij} \delta_{ks} \varepsilon_{ks}^e = e_{ij}^e = e_{ij} - e_{ij}^p. \quad (6.20)$$

Полагаем, что объем элемента среды изменяется упруго

$$e = \delta_{ij} e_{ij} = \delta_{ks} \varepsilon_{ks}^e. \quad (6.21)$$

Из (6.20), (6.21) и уравнения неразрывности находим

$$\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) e'_{ij} = D\varepsilon'_{ij} / Dt + \varepsilon'_{ij}^p, \quad (6.22)$$

$$d\varepsilon/dt = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) e, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{3/2}.$$

Если в качестве зависимости $\varepsilon_{ij}'^e$ от σ_{ij} использовать уравнения (6.12), (6.16), а в качестве зависимости $e_{ij}'^p$ от σ_{ij} использовать уравнения идеального пластического течения с условием пластичности Мизеса [88], то получим

$$\varepsilon_{ij}'^e = \sigma_{ij}'/2\mu\alpha, \quad e_{ij}'^p = \lambda\sigma_{ij}', \quad (6.23)$$

$$\sigma = \alpha\partial\psi/\partial\varepsilon - J_2 d(1/2\mu)/\alpha d\varepsilon, \quad \mu = \mu(\varepsilon, S), \quad \alpha = \rho_0 \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)^{5/2},$$

$$\psi = \psi(\varepsilon, S),$$

$$E = \psi(\varepsilon, S) + J_2/2\mu\alpha^2, \quad \alpha T dS/dt = 2\tau^2\lambda, \quad T = \partial E/\partial S;$$

$$\lambda = 0, \text{ если } f < 0 \text{ или } f = 0, \quad df/dt < 0; \quad (6.24)$$

$$\lambda \geq 0, \text{ если } f = 0, \quad df/dt = 0, \quad f = J_2 - \tau^2, \quad \tau = \tau(\varepsilon, S)$$

(τ — предел текучести при сдвиге).

Для среды, удовлетворяющей условию (6.19), уравнения (6.22)–(6.24) образуют систему уравнений упругопластического деформирования, корректную при произвольной величине поворотов и деформаций элементов среды. Уравнения (6.22)–(6.24) совпадают с известными уравнениями [72], [152], [153] в случае, когда $\mu = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, а относительное изменение плотности мало по сравнению с единицей и, следовательно,

$$1 - (2/3)\varepsilon = (\rho/\rho_0)^{(2/3)} \approx 1, \quad \alpha \approx \rho_0, \quad d\varepsilon/dt \approx e.$$

При записи уравнений (6.22)–(6.24) в лагранжевой системе координат зависимость компонент девиатора скоростей деформаций от напряжений можно записать, используя (6.6) в виде

$$\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \dot{e}'_{\alpha\beta} = d\dot{e}'_{\alpha\beta}/dt + \lambda\dot{\sigma}'_{\alpha\beta}, \quad \dot{e}'_{\alpha\beta} = \dot{\sigma}'_{\alpha\beta}/2\alpha,$$

остальные уравнения (6.22)–(6.24) остаются без изменений.

Так как по (6.22), (6.24)

$$\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \sigma'_{ij} e'_{ij} = \frac{1}{2} dJ_2/\mu\alpha dt + J_2 d(1/\mu\alpha)/dt + 2J_2\lambda,$$

то условия (6.24), определяющие функцию λ в (6.23), можно заменить условиями

$$\lambda = \frac{1}{2} c\omega/\tau^2, \quad \omega = \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \sigma'_{ij} e'_{ij} - \tau d(\tau/\mu\alpha)/dt,$$

$$c = 0, \text{ если } f < 0 \text{ или } f = 0, \quad \omega \leq 0;$$

$$c = 1, \text{ если } f = 0, \quad \omega > 0.$$

Для вычисления по скоростям деформаций малых приращений напряжений за малый интервал времени можно вместо уравнений (6.22)–(6.24) использовать предложенную в [153] процедуру корректировки девиатора напряжений. При этом приращения напряжений до корректировки вычисляются по уравнениям (6.11), (6.16).

Используя (6.12), (6.13), (6.15), (6.22), можно для среды с условием (6.19) сформулировать уравнения идеального упругопластического деформирования с более общим, чем в (6.22)–(6.24), законом упругого деформирования.

6.2. Алгоритм решения динамических задач упругопластического деформирования при больших деформациях

6.2.1. Системы координат Эйлера и Лагранжа. Локальная система координат

В качестве системы координат Эйлера примем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 6.1), $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — векторы базиса этой системы координат. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — система координат Лагранжа, связанная с материальными частицами среды, $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ — базисные векторы.

Если \vec{r} — радиус-вектор материальной точки, то справедливы следующие соотношения:

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \equiv \vec{r}_{,1} = x_{i,1} \vec{e}_i, \quad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \equiv \vec{r}_{,2} = x_{i,2} \vec{e}_i, \quad \vec{g}_3 = \vec{e}_3,$$

$$\vec{g}^1 = \frac{\vec{g}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D}} (x_{2,2} \vec{e}_1 - x_{1,2} \vec{e}_2),$$

$$\vec{g}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{g}_1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D}} (-x_{2,1} \vec{e}_1 + x_{1,1} \vec{e}_2),$$

$$\sqrt{D} = (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{e}_3 = x_{1,1} x_{2,2} - x_{1,2} x_{2,1}, \quad (6.25)$$

где \vec{g}^1, \vec{g}^2 — векторы контравариантного базиса лагранжевой системы координат; \sqrt{D} — якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым.

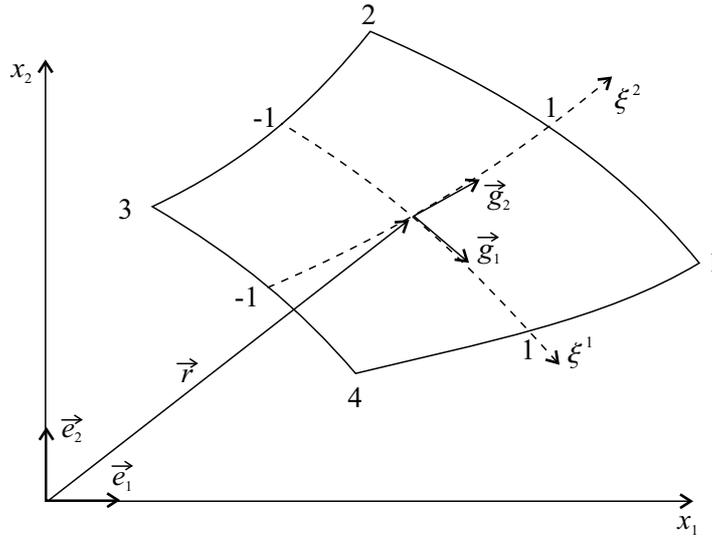


Рис. 6.1. Эйлерова и лагранжева системы координат

В четырехугольнике с вершинами 1, 2, 3, 4 (рис. 6.1) введем локальную систему координат (ξ_1, ξ_2) :

$$x_1 = N_k x_1^k, \quad x_2 = N_k x_2^k, \quad (6.26)$$

где

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2).$$

6.2.2. Уравнения динамической упругопластической задачи с учетом больших перемещений

В лагранжевой системе координат (ξ_1, ξ_2) уравнение неразрывности записывается в виде:

$$\vec{\sigma}_{i,i} - \rho D \vec{v} = 0, \quad (6.27)$$

где $\vec{\sigma}_i = D \sqrt{g^{ii}} \vec{t}_i = D \tau^{ij} \vec{g}_j$, точка обозначает полную производную по времени t ; $\vec{\sigma}_i$ — векторы усилий на гранях $\xi_i = \text{const}$, \vec{t}_i — векторы напряжений на этих же гранях; τ^{ij} — компоненты тензора напряжений в лагранжевом базисе \vec{g}_1, \vec{g}_2 ; \vec{v} — вектор скорости точки среды. Обозначим

через σ_{ij} компоненты тензора напряжений в декартовом базисе \vec{e}_i :

$$\sigma_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \tau^{\alpha\beta}\vec{g}_\alpha\vec{g}_\beta. \quad (6.28)$$

Пусть $\hat{\sigma}_{ij}$ — проекции векторов $\vec{\sigma}_j$ на оси x_i . Из равенства $\vec{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{ij}\vec{e}_j = D\tau^{i\alpha}\vec{g}_\alpha$ с учетом (6.25) получим:

$$\hat{\sigma}_{ij} = D\tau_{j k}\xi_{i,k}. \quad (6.29)$$

Из (6.27) и (6.28) получим связь между $\hat{\sigma}_{ij}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} &= \sigma_{11}x_{2,2} - \sigma_{12}x_{2,2}, & \hat{\sigma}_{21} &= \sigma_{12}x_{2,2} - \sigma_{22}x_{1,2}, \\ \hat{\sigma}_{12} &= \sigma_{12}x_{1,1} - \sigma_{11}x_{2,1}, & \hat{\sigma}_{22} &= \sigma_{22}x_{1,1} - \sigma_{12}x_{2,1}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{D}(\hat{\sigma}_{11}x_{1,1} + \hat{\sigma}_{12}x_{1,2}), & \sigma_{22} &= \frac{1}{D}(\hat{\sigma}_{21}x_{2,1} + \hat{\sigma}_{22}x_{2,2}), \\ \sigma_{21} &= \frac{1}{D}(\hat{\sigma}_{21}x_{1,1} + \hat{\sigma}_{22}x_{1,2}), & \sigma_{12} &= \frac{1}{D}(\hat{\sigma}_{11}x_{2,1} + \hat{\sigma}_{12}x_{2,2}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Умножая (6.29) на \vec{v} и интегрируя по ячейке ω и промежутку времени $[t_1, t_2]$, получим уравнение, выражающее закон сохранения энергии:

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} (\rho\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \sigma_{ij}e_{ij}) D d\xi_1 d\xi_2 d\eta = \int_{-1}^1 \int_{\omega} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{v})_i d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \quad (6.31)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2}{\tau} \left(t - \frac{t_n + t_{n+1}}{2} \right), & \tau &= t_n - t_{n+1}, \\ e_{11} &= \frac{1}{D}(v_{1,1}x_{2,2} - v_{1,2}x_{2,1}), & e_{22} &= \frac{1}{D}(v_{2,2}x_{1,1} - v_{2,1}x_{1,2}), \\ e_{12} &= \frac{1}{2D}(v_{1,2}x_{1,1} - v_{1,1}x_{1,2} + v_{2,1}x_{2,2} - v_{2,2}x_{2,1}), \end{aligned}$$

e_{ij} — декартовы компоненты тензора скоростей деформаций; v_i — декартовы компоненты скорости вектора \vec{v} .

Уравнение неразрывности в лагранжевых переменных можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx_1 dx_2) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho D d\xi_1 d\xi_2) = 0 \quad \text{или} \quad \rho D = \rho_0 D_0, \quad (6.32)$$

где нижним индексом 0 обозначены значения величин при $t = 0$.

6.2.3. Определяющие соотношения

В дальнейшем предполагается, что компоненты девиатора упругих деформаций малы по сравнению с единицей:

$$1 + \gamma'_{ij} \simeq 1. \quad (6.33)$$

В частности, это предположение справедливо для большинства металлов. Считается также, что объем элемента среды деформируется упруго. При этих предположениях кинематические соотношения в случае произвольных деформаций можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ij} &= \alpha e'_{ij} - \gamma'_{jk} \omega_{ki} - \gamma'_{ik} \omega_{kj} - \varphi'_{ij}, \\ \dot{\gamma} &= \alpha e, \quad \rho = \rho_0 \alpha^{3/2}, \quad \alpha = 1 - \frac{2}{3} \gamma, \\ e_{ij} &= e^y_{ij} + \varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij} \delta_{ij} = 0, \quad e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}, \\ \gamma'_{ij} &= \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma \delta_{ij}, \quad e = e_{ij} \delta_{ij}, \quad \gamma = \gamma_{ij} \delta_{ij},\end{aligned}\tag{6.34}$$

где γ_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций; φ_{ij} — компоненты тензора скоростей необратимых (пластических) деформаций,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

— компоненты тензора скоростей поворотов. В плоском случае ненулевыми компонентами будут:

$$\begin{aligned}\omega_{12} = -\omega_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \\ &= \frac{1}{2D} (-v_{1,1} x_{1,2} + v_{1,2} x_{1,1} - v_{2,1} x_{2,2} + v_{2,2} x_{1,1}).\end{aligned}\tag{6.35}$$

Полные деформации ε_{ij} удовлетворяют уравнению:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = e_{ij}.\tag{6.36}$$

При построении определяющих соотношений между напряжениями, деформациями и температурой считаем, что внутренняя энергия U является функцией первого и второго инвариантов тензора упругих деформаций и энтропии S :

$$U = U(\gamma, J_2, S), \quad J_2 = \frac{1}{2} \gamma'_{ij} \gamma'_{ij}.\tag{6.37}$$

Используя закон сохранения энергии

$$\sigma_{ij} e_{ij} = \rho \dot{U}\tag{6.38}$$

и соотношения (6.34), получаем:

$$\sigma e + \sigma'_{ij} e'_{ij} = \rho \alpha e U_\gamma + \rho \gamma'_{ij} (\alpha e'_{ij} - \gamma'_{ki} \omega_{kj} - \gamma'_{kj} \omega_{ki} - \varphi'_{ij}) U_{J_2} + \rho U_S \dot{S}.$$

Из последнего соотношения следует:

$$\sigma = \rho \alpha U_\gamma, \quad \sigma'_{ij} = \rho \alpha \gamma'_{ij} U_{J_2}, \quad \rho U_S \dot{S} = \rho \gamma'_{ij} \varphi'_{ij} U_{J_2}.\tag{6.39}$$

Обозначив $U_S = T$ (T — температура), последнее из соотношений (6.39) перепишем в виде:

$$T\dot{S} = \frac{1}{\alpha\rho}\sigma'_{ij}\varphi'_{ij}. \quad (6.40)$$

Через свободную энергию $\Phi = U - ST$ соотношения (6.39), (6.40) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho\alpha\Phi_\gamma, & \sigma'_{ij} &= \rho\alpha\gamma'_{ij}\Phi_{J_2}, \\ -T\Phi_{TT}\dot{T} &= \frac{1}{\alpha\rho}\sigma'_{ij}\varphi'_{ij} + T\Phi_{\gamma T}\dot{\gamma} + T\Phi_{J_2 T}\dot{J}_2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Величина $-T\Phi_{TT}$ имеет смысл теплоемкости при постоянных деформациях и обозначается через c_V .

Дальнейшая конкретизация уравнений (6.41) зависит от выбора функции Φ и предположения о характере необратимой (пластической) деформации.

Если принять, что теплоемкость c_V не зависит от γ и J_2 , среднее напряжение σ не зависит от J_2 , а зависимость σ'_{ij} линейна по γ'_{ij} , то функцию Φ можно представить в виде:

$$\Phi = \frac{1}{\rho_0}[\psi(\gamma) + T\varphi(\gamma) + 2\mu J_2 + f(T)],$$

где μ — модуль сдвига. При этом уравнения (6.41) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha^{5/2}(\psi_\gamma + T\varphi_\gamma), & \sigma'_{ij} &= 2\mu\alpha^{2/5}\gamma'_{ij}, \\ c_V\dot{T} &= \frac{1}{\alpha\rho}\sigma'_{ij}\varphi'_{ij} + \frac{\alpha}{\rho_0}eT\varphi_\gamma. \end{aligned} \quad (6.42)$$

В модели упругопластического тела примем следующую зависимость от среднего напряжения σ , инварианта упругих деформаций γ и температуры T :

$$\sigma = K\alpha^{5/2}\gamma - c_V\Gamma\rho(T - T_0), \quad (6.43)$$

где $K = E/(3(1 - \nu))$ — коэффициент объемного расширения; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; Γ — коэффициент Грюнайзена; T — абсолютная температура; T_0 — температура, соответствующая нормальным условиям (обычно 300 К).

Уравнение (6.43) соответствует зависимостям:

$$\psi = \frac{1}{2}K\gamma^2 + \frac{3}{2}c_V T_0 \rho_0 \ln \alpha, \quad \varphi_\gamma = -\frac{c_V}{\alpha}\Gamma\rho_0.$$

Следовательно, третье из соотношений (6.42) принимает вид:

$$\dot{T} = \frac{1}{c_V\alpha\rho}\sigma'_{ij}\varphi'_{ij} - \Gamma T e. \quad (6.44)$$

Скорость необратимых деформаций определим соотношениями:

$$\varphi'_{ij} = \lambda \gamma'_{ij}. \quad (6.45)$$

Уравнения (6.43)–(6.45) определяют модель упругопластического тела.

При построении модели сжимаемой жидкости считаем, что внутренняя энергия зависит только от γ и S :

$$U = U(\gamma, S).$$

Пренебрегая в (6.34) компонентами дивергента упругих деформаций, получим

$$\alpha e'_{ij} = \varphi'_{ij}, \quad \dot{\gamma} = \alpha e, \quad \rho = \rho_0 \alpha^{3/2}, \quad \alpha = 1 - \frac{2}{3} \gamma. \quad (6.46)$$

Принимая зависимость (6.43) и полагая $\sigma'_{ij} = 0$ (случай идеальной жидкости), уравнение для температуры запишем в виде:

$$\dot{T} = -\Gamma T e. \quad (6.47)$$

Соотношения (6.46), (6.47) определяют модель сжимаемой идеальной жидкости.

При построении модели политропного газа считаем, что внутренняя энергия зависит только от температуры:

$$U = U(T).$$

Зависимость давления $p = -\sigma$ от плотности и температуры задается уравнением Клапейрона $p = \rho R T$, откуда следует

$$p = A(S) \rho^\theta, \quad A(S) = R \exp \frac{S - S_0}{c_V}, \quad S = -R \ln \rho + c_V \ln T + S_0, \quad (6.48)$$

где $\theta = 1 + R/c_V$ — показатель политропы, R — универсальная газовая постоянная. При этом в (6.42) $\psi_\gamma = 0$, $\varphi_\gamma = -(\rho_0/\alpha)R$, и уравнение для T принимает вид:

$$c_V \dot{T} = -R T e. \quad (6.49)$$

Уравнения (6.48), (6.49) определяют модель политропного газа.

Таким образом, задача сводится к нахождению функций

$$\vec{v}, \quad \gamma_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij}, \quad \rho, \quad T$$

по их начальным значениям при $T = 0$ и граничным условиям:

$$B_{11}^\pm \vec{v} + B_{21}^\pm \vec{\sigma}_1 = \vec{\varphi}_1^\pm \quad \text{при} \quad \xi_1 = \pm 1 \quad (6.50)$$

и

$$B_{12}^\pm \vec{v} + B_{22}^\pm \vec{\sigma}_1 = \vec{\varphi}_2^\pm \quad \text{при} \quad \xi_2 = \pm 1, \quad (6.51)$$

где матрицы B_{ij}^\pm — невырожденные диагональные матрицы с постоянными элементами.

6.2.4. Алгоритм численного решения

Значения величин на нижнем слое t_n интервала $[t_n, t_{n+1}]$ будем обозначать верхним индексом « \times », на среднем слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$ — индексом 0.

Для кинематических соотношений (6.34) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ принимаем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}\gamma^0 - \gamma^\times &= \frac{\tau}{2} \alpha^0 e^0, \quad \rho^0 = \rho_0 (\alpha^0)^{3/2}, \quad \alpha^0 = 1 - \frac{2}{3} \gamma^0, \\ \gamma_{ij}^{\prime 0} - \gamma_{ij}^{\prime \times} &= \frac{\tau}{2} (\alpha^0 e_{ij}^{\prime 0} - \gamma_{ik}^{\prime 0} \omega_{kj}^0 - \gamma_{jk}^{\prime 0} \omega_{ki}^0 - \lambda^0 \gamma_{ij}^{\prime 0}).\end{aligned}\quad (6.52)$$

Разрешая (6.52) относительно компонент девиатора упругих напряжений на среднем слое, получаем:

$$\gamma_{ij}^{\prime 0} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \quad (6.53)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 + \bar{\lambda}) [(1 + \bar{\lambda})^2 + \tau (\omega_{12}^0)^2], \\ \Delta_{11} &= [(1 + \bar{\lambda})^2 + \tau (\omega_{12}^0)^2] \tilde{\gamma}_{11}^{\prime 0} + (1 + \bar{\lambda}) \tau \omega_{12}^0 \tilde{\gamma}_{12}^{\prime 0} + \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \tilde{\gamma}_{22}^{\prime 0}, \\ \Delta_{22} &= \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \tilde{\gamma}_{11}^{\prime 0} - (1 + \bar{\lambda}) \tau \omega_{12}^0 \tilde{\gamma}_{12}^{\prime 0} + [(1 + \bar{\lambda})^2 + \tau (\omega_{12}^0)^2] \tilde{\gamma}_{22}^{\prime 0}, \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = \frac{\tau}{2} \omega_{12}^0 (1 + \bar{\lambda}) (\tilde{\gamma}_{22}^{\prime 0} - \tilde{\gamma}_{11}^{\prime 0}) + (1 + \bar{\lambda})^2 \tilde{\gamma}_{12}^{\prime 0}, \\ \tilde{\gamma}_{ij}^{\prime 0} &= \gamma_{ij}^{\prime \times} + \frac{\tau}{2} \alpha^0 e_{ij}^{\prime 0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\tau}{2} \lambda^0.\end{aligned}$$

Уравнения для полных деформаций (6.36) аппроксимируем уравнениями:

$$\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}^{\prime 0} = \frac{\tau}{2} \left(e_{ij}^0 - \varepsilon_{ki}^0 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{kj}^0 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (6.54)$$

Определяющие соотношения упругопластического тела аппроксимируем соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= K (\alpha^0)^{5/2} \gamma^0 - \Gamma_{cV} \rho^0 (T^0 - T_0), \quad \sigma_{ij}^{\prime 0} = 2\mu (\alpha^0)^{5/2} \gamma_{ij}^{\prime 0}, \\ T^0 - T^\times &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda^0}{c_V \alpha^0 \rho^0} \sigma_{ij}^{\prime 0} \gamma_{ij}^{\prime 0} - \Gamma T^0 e^0 \right).\end{aligned}\quad (6.55)$$

Соотношениями

$$\sigma^0 = K (\alpha^0)^{5/2} \gamma^0 - \Gamma_{cV} \rho^0 (T^0 - T_0), \quad T^0 - T^\times = \frac{\tau}{2} \Gamma T^0 e^0 \quad (6.56)$$

аппроксимируются определяющие уравнения идеальной сжимаемой

жидкости, соотношениями

$$p^0 = p^\times - \frac{\tau}{2} A(S^0) \Theta(\rho^0)^\theta e^0, \quad T^0 - T^\times = \frac{\tau}{2} \Gamma T^0 e^0 \quad (6.57)$$

— уравнения политропного газа.

Векторы скорости и напряжений представляются в виде:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}^0 + \vec{v}^1 \eta = (v_1^0 + v_1^1 \eta) \vec{e}_1 + (v_2^0 + v_2^1 \eta) \vec{e}_2, \\ \vec{\sigma}_i &= \vec{\sigma}_i^0 + \vec{\sigma}_i^1 \eta = (\hat{\sigma}_{1i}^0 + \hat{\sigma}_{1i}^1 \eta) \vec{e}_1 + (\hat{\sigma}_{2i}^0 + \hat{\sigma}_{2i}^1 \eta) \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Уравнение движения аппроксимируем соотношением

$$\vec{v}^0 = \vec{v}^\times + \frac{\tau}{2\rho^0 D} (\vec{p}_{1,1} + \vec{p}_{2,2}), \quad (6.59)$$

где \vec{p}_1, \vec{p}_2 — полиномы, аппроксимирующие векторы напряжений:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= p_{11} \vec{e}_1 + p_{21} \vec{e}_2 = (p_{11}^0 + p_{11}^1 \xi_1) \vec{e}_1 + (p_{21}^0 + p_{21}^1 \xi_1) \vec{e}_2, \\ \vec{p}_2 &= p_{12} \vec{e}_1 + p_{22} \vec{e}_2 = (p_{12}^0 + p_{12}^1 \xi_2) \vec{e}_1 + (p_{22}^0 + p_{22}^1 \xi_2) \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Скорости деформаций аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{D} (u_{11,1} x_{2,2} - u_{12,2} x_{2,1}), \quad e_{22} = \frac{1}{D} (u_{22,2} x_{1,1} - u_{21,1} x_{1,2}), \\ e_{12} &= \frac{1}{2D} (u_{12,2} x_{1,1} - u_{11,1} x_{1,2} + u_{21,1} x_{2,2} - u_{22,2} x_{2,1}), \\ \omega_{12} &= \frac{1}{2D} (u_{12,2} x_{1,1} - u_{11,1} x_{1,2} - u_{21,1} x_{2,2} + u_{22,2} x_{2,1}). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Аппроксимацию определяющих соотношений запишем в матричной форме:

$$\vec{\sigma}_i^0 = \vec{s}_i' + \frac{\tau}{2D} (\tilde{A}_{1i} \vec{u}_{1,1} + \tilde{A}_{2i} \vec{u}_{2,2}), \quad i = 1, 2, \quad (6.62)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{11} \vec{e}_1 + u_{21} \vec{e}_2 = (u_{11}^0 + u_{11}^1 \xi_1) \vec{e}_1 + (u_{21}^0 + u_{21}^1 \xi_1) \vec{e}_2, \\ \vec{u}_2 &= u_{12} \vec{e}_1 + u_{22} \vec{e}_2 = (u_{12}^0 + u_{12}^1 \xi_2) \vec{e}_1 + (u_{22}^0 + u_{22}^1 \xi_2) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Для упругопластического тела:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \left\| \begin{array}{cc} K_1 x_{2,2}^2 + K_2 x_{1,2}^2 & -K_3 x_{1,2} x_{2,2} \\ -K_3 x_{1,2} x_{2,2} & K_1 x_{1,2}^2 + K_2 x_{2,2}^2 \end{array} \right\| + R \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|, \\ \tilde{A}_{21} &= \left\| \begin{array}{cc} -K_1 x_{2,1} x_{2,2} - K_2 x_{1,1} x_{1,2} + RD & -K_3 x_{1,1} x_{2,2} - K_2 D \\ -K_3 x_{2,1} x_{1,2} + K_2 D & -K_1 x_{1,1} x_{1,2} - K_2 x_{2,1} x_{2,2} + RD \end{array} \right\| + \\ &\quad + R g_{12} \left\| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{vmatrix} -K_1 x_{2,1} x_{2,2} - K_2 x_{1,1} x_{1,2} - RD & K_3 x_{1,2} x_{2,1} + K_2 D \\ K_3 x_{1,1} x_{2,2} - K_2 D & -K_1 x_{1,1} x_{1,2} - K_2 x_{2,1} x_{2,2} - RD \end{vmatrix} + \\ + Rg_{12} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{A}_{22} = \begin{vmatrix} K_1 x_{2,1}^2 + K_2 x_{1,1}^2 & -K_3 x_{1,1} x_{2,1} \\ -K_3 x_{1,1} x_{2,1} & K_1 x_{1,1}^2 + K_2 x_{2,1}^2 \end{vmatrix} + Rg_{11} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$K_1 = (\alpha^0)^{7/2} \left\{ K + \frac{4\mu}{3\Delta} \left[(1 + \bar{\lambda})^2 + \frac{\tau^2}{4} (\omega_{12}^0)^2 \right] \right\}, \quad (6.63)$$

$$K_2 = (\alpha^0)^{7/2} \frac{\mu}{\Delta} (1 + \bar{\lambda})^2,$$

$$K_3 = (\alpha^0)^{7/2} \left\{ K + \frac{\mu}{3\Delta} \left[(1 + \bar{\lambda})^2 + \tau^2 (\omega_{12}^0)^2 \right] \right\},$$

$$R = (\alpha^0)^{7/2} \frac{\mu}{\Delta} (1 + \bar{\lambda}) \tau \omega_{12}^0,$$

$$\bar{s}_1^\times = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^\times x_{2,2} - \sigma_{12}^\times x_{1,2} \\ \sigma_{12}^\times x_{2,2} - \sigma_{22}^\times x_{1,2} \end{vmatrix}, \quad \bar{s}_2^\times = \begin{vmatrix} -\sigma_{11}^\times x_{2,1} + \sigma_{12}^\times x_{1,1} \\ -\sigma_{12}^\times x_{2,1} + \sigma_{22}^\times x_{1,1} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_{11}^\times = K(\alpha^0)^{5/2} \gamma^\times - \Gamma_{cV} \rho^0 (T^0 - T_0) + \frac{2\mu}{\Delta} (\alpha^0)^{5/2} \times \\ \times \left\{ \left[(1 + \bar{\lambda})^2 + \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \right] \gamma_{11}^\times + \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \gamma_{22}^\times + (1 + \bar{\lambda}) \tau \omega_{12}^0 \gamma_{12}^\times \right\},$$

$$\sigma_{22}^\times = K(\alpha^0)^{5/2} \gamma^\times - \Gamma_{cV} \rho^0 (T^0 - T_0) + \frac{2\mu}{\Delta} (\alpha^0)^{5/2} \times \\ \times \left\{ \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \gamma_{11}^\times + \left[(1 + \bar{\lambda})^2 + \frac{\tau^2}{2} (\omega_{12}^0)^2 \right] \gamma_{22}^\times - (1 + \bar{\lambda}) \tau \omega_{12}^0 \gamma_{12}^\times \right\},$$

$$\sigma_{12}^\times = \frac{2\mu}{\Delta} (\alpha^0)^{5/2} \left[(1 + \bar{\lambda}) \frac{\tau}{2} \omega_{12}^0 (\gamma_{22}^\times - \gamma_{11}^\times) + (1 + \bar{\lambda})^2 \gamma_{12}^\times \right].$$

Формулы для идеальной несжимаемой жидкости получаются, если в (6.63) положить $\mu = 0$.

Полиномы (6.58) должны удовлетворять начальным условиям, а полиномы (6.60) — краевым условиям:

$$B_{1i}^\pm \vec{u}_i + B_{2i}^\pm \vec{p}_i = \vec{\varphi}_i^\pm, \quad i = 1, 2.$$

**6.2.5. Дополнительные уравнения.
Ограничение на шаг по времени
при вычислении решения по явной схеме**

Для определения коэффициентов полиномов (6.58) и (6.60) уравнений (6.59) и (6.62) недостаточно. Необходимо сформулировать еще четыре дополнительных уравнения. Для полиномов (6.58) и (6.60) имеет место разностный аналог закона сохранения (6.31):

$$\int_{-1}^1 \int_{\omega} (\rho^0 \vec{v}^0 \dot{v} + \vec{\sigma}_i^0 \vec{u}_{i,i}) D d\xi_1 d\xi_2 d\eta + Q = \int_{-1}^1 \int_{\omega} (\vec{p}_i \vec{u}_i)_{,i} d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \quad (6.64)$$

где $Q = Q_1 + Q_2$,

$$Q_1 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} (\vec{u}_i - \vec{v}^0) \vec{p}_{i,i} d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \quad Q_2 = \int_{-1}^1 \int_{\omega} (\vec{p}_i - \vec{\sigma}^0) \vec{u}_{i,i} d\xi_1 d\xi_2 d\eta.$$

Дополнительные уравнения строим так, чтобы расщепить исходную двумерную задачу на две одномерные векторные задачи и чтобы величина Q была неотрицательной.

В качестве дополнительных берутся уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\vec{u}_1^0 - \vec{v}^{\times} - \frac{\tau}{2\rho D} \vec{p}_{1,1}) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{\omega} \frac{1}{2\rho D} M_1 \vec{p}_{1,1} d\xi_1 d\xi_2, \\ \int_{\omega} (\vec{p}_1^0 - \vec{s}_1^{\times} - \frac{\tau}{2D} A_{11} \vec{u}_{1,1}) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{\omega} \frac{1}{2D} C_1 \vec{u}_{1,1} d\xi_1 d\xi_2, \\ \int_{\omega} (\vec{u}_2^0 - \vec{v}^{\times} - \frac{\tau}{2\rho D} \vec{p}_{2,2}) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{\omega} \frac{1}{2\rho D} M_2 \vec{p}_{2,2} d\xi_1 d\xi_2, \\ \int_{\omega} (\vec{p}_2^0 - \vec{s}_2^{\times} - \frac{\tau}{2D} A_{22} \vec{u}_{2,2}) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{\omega} \frac{1}{2D} C_2 \vec{u}_{2,2} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (6.65)$$

где матрицы M_i , C_i выбираются так, чтобы квадратичные формы

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \frac{1}{2\rho D} [(M_1 \vec{p}_{1,1} \cdot \vec{p}_{1,1}) - 2\tau(\vec{p}_{1,1} \cdot \vec{p}_{2,2}) + (M_2 \vec{p}_{2,2} \cdot \vec{p}_{2,2})] d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \\ Q_2 &= \int_{-1}^1 \int_{\omega} \frac{1}{2D} [(C_1 \vec{u}_{1,1} \cdot \vec{u}_{1,1}) - 2\tau(A_{21} \vec{u}_{1,1} \cdot \vec{u}_{2,2}) + (C_2 \vec{u}_{2,2} \cdot \vec{u}_{2,2})] d\xi_1 d\xi_2 d\eta \end{aligned}$$

были неотрицательны.

Матрицы \tilde{A}_{11} , \tilde{A}_{22} представим в виде

$$\tilde{A}_{ii} = A_{ii} \pm Rg_{ii} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Собственными векторами матрицы A_{11} являются векторы \vec{g}^1 и \vec{g}^2 , а матрицы A_{22} векторы \vec{g}_1 и \vec{g}_2 :

$$A_{11}\vec{g}^1 = \lambda_1 g_{22}\vec{g}^1, \quad A_{22}\vec{g}_1 = \lambda_2 g_{11}\vec{g}_1,$$

$$A_{11}\vec{g}^2 = \lambda_2 g_{22}\vec{g}^2, \quad A_{22}\vec{g}_2 = \lambda_1 g_{11}\vec{g}_2,$$

где $\lambda_1 = K_1$, $\lambda_2 = K_2$.

Следовательно, матрицы A_{11} и A_{22} приводятся к диагональному виду невырожденными преобразованиями

$$T_1 = \|\vec{g}^1, \vec{g}^2\| \quad \text{и} \quad T_2 = \|\vec{g}_1, \vec{g}_2\|.$$

Если в качестве матриц M_i взять матрицы

$$M_1 = T_1 \Omega_1 T_1^{-1}, \quad M_2 = T_2 \Omega_2 T_2^{-1}, \quad \Omega_i = \begin{vmatrix} \omega_{1i} & 0 \\ 0 & \omega_{2i} \end{vmatrix},$$

а в качестве матриц C_i — матрицы

$$C_1 = T_1 \Gamma_1 T_1^{-1}, \quad C_2 = T_2 \Gamma_2 T_2^{-1},$$

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 \gamma_{11} g_{22} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \gamma_{21} g_{22} \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} \lambda_2 \gamma_{12} g_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_1 \gamma_{22} g_{11} \end{vmatrix},$$

то одномерные задачи (6.65) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\vec{u}_1^0 - \vec{v}^\times - \frac{1}{2\rho D} X_1 \vec{p}_{1,1}) d\xi_1 d\xi_2 &= 0, \\ \int_{\omega} (\vec{p}_1^0 - \vec{s}_1^\times - \frac{1}{2D} Y_1 \vec{u}_{1,1}) d\xi_1 d\xi_2 &= 0, \\ \int_{\omega} (\vec{u}_2^0 - \vec{v}^\times - \frac{1}{2\rho D} X_2 \vec{p}_{2,2}) d\xi_1 d\xi_2 &= 0, \\ \int_{\omega} (\vec{p}_2^0 - \vec{s}_2^\times - \frac{1}{2D} Y_2 \vec{u}_{2,2}) d\xi_1 d\xi_2 &= 0, \end{aligned} \tag{6.66}$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= T_1 \begin{vmatrix} \tau + \omega_{11} & 0 \\ 0 & \tau + \omega_{21} \end{vmatrix} T_1^{-1}, & X_2 &= T_2 \begin{vmatrix} \tau + \omega_{12} & 0 \\ 0 & \tau + \omega_{22} \end{vmatrix} T_2^{-1}, \\ Y_1 &= T_1 \begin{vmatrix} (\tau + \gamma_{11})\lambda_1 g_{22} & 0 \\ 0 & (\tau + \gamma_{21})\lambda_2 g_{22} \end{vmatrix} T_1^{-1}, \\ Y_2 &= T_2 \begin{vmatrix} (\tau + \gamma_{12})\lambda_2 g_{11} & 0 \\ 0 & (\tau + \gamma_{22})\lambda_1 g_{11} \end{vmatrix} T_2^{-1}. \end{aligned}$$

При таком выборе матриц для неотрицательности квадратичных форм Q_1 и Q_2 достаточно выполнения условий:

$$\omega_{ij} \geq \tau, \quad \gamma_{ij} \geq \tau. \quad (6.67)$$

Уравнения (6.66) вместе с краевыми условиями и условиями сопряжения между элементами, на которые разбита область, образуют алгебраическую систему уравнений, решение которой вычисляется по явным формулам, если в каждом из элементов выполнены равенства:

$$X_1 Y_1 = I, \quad X_2 Y_2 = I. \quad (6.68)$$

Равенства (5.197) эквивалентны равенствам:

$$(\tau + \omega_{ij})(\tau + \gamma_{ij})\lambda_k g_{il} = 4\rho D^2, \quad i, j, l = 1, 2. \quad (6.69)$$

Если положить $\omega_{ij} = \tau$, равенства (6.68) записываются в виде:

$$(\tau + \gamma_{ij})\lambda_k g_{il} = \frac{2}{\tau}\rho D^2, \quad (6.70)$$

а матрицы X_i, Y_i становятся диагональными:

$$\begin{aligned} X_i &= T_i \begin{vmatrix} \tau + \omega_{1i} & 0 \\ 0 & \tau + \omega_{2i} \end{vmatrix} T_i^{-1} = 2\tau I, \\ Y_i &= T_i \begin{vmatrix} (\tau + \gamma_{1i})\lambda_1 g_{jj} & 0 \\ 0 & (\tau + \gamma_{2i})\lambda_2 g_{jj} \end{vmatrix} T_i^{-1} = \frac{2}{\tau}\rho D^2 I. \end{aligned}$$

Неравенства (6.67) и равенства (6.70) дают ограничение на шаг по времени при вычислении решения по явной схеме:

$$\tau \leq \min_{\omega} \min_{i,k} \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_k}} \frac{D}{\sqrt{g_{ii}}} \right\}. \quad (6.71)$$

6.3. Квазиодномерная модель процессов высокоскоростного соударения

Задачи, излагаемые в этом разделе, можно рассматривать как тестовые. С другой стороны, они представляют определенный и практический интерес.

Процесс высокоскоростного соударения представляет собой сложное физическое явление. Точная постановка задачи, учитывающая достаточно полно физико-механические свойства материалов (в том числе их зависимость от температуры и скорости деформирования), а также учет дополнительных явлений, сопровождающих процесс проникания (сильный разогрев материала, плавление, испарение и др.) приводит к сложной нелинейной системе уравнений, решение которых в точной постановке возможно только на быстродействующих ЭВМ. Решение этой задачи трудоемко, требует больших затрат машинного времени и неизбежно ведет к погрешностям, влияние которых на конечный результат оценить затруднительно. Так, например, при решении задачи в лагранжевых переменных требуется многократная перестройка сетки в областях сильного искажения ячеек и экстраполяция решения с прежней сетки на новую, что также ведет к потере точности. При решении в эйлеровых переменных погрешности возникают, в частности, при расчете быстро изменяющихся контактных и свободных поверхностей и при осреднении величин из-за перетекания вещества из одной ячейки в другую. Следует также иметь в виду, что информация о физико-механических свойствах материала, как правило, достаточно приближена. Достаточно эффективные алгоритмы численного решения задач высокоскоростного соударения построены и реализованы в [73, 74, 124].

Тем не менее представляет интерес построение последовательности математических моделей процессов высокоскоростного соударения, сложность которых возрастает вместе с расширением их возможностей в описании качественных и количественных характеристик явлений, возникающих при соударении.

Одной из первых одномерных моделей высокоскоростного соударения является гидродинамическая модель Лаврентьева [113] для оценки глубины проникания цилиндрического стержня в полубесконечную преграду. Согласно этой модели $(l/l_0)/(\rho_{\text{пр}}/\rho_{\text{ст}})^{-1/2} = \text{const}$, где l_0 — исходная длина стержня; l — глубина проникания; $\rho_{\text{пр}}$, $\rho_{\text{ст}}$ — плотность материалов преграды и стержня соответственно.

Существуют различные модификации гидродинамической модели, целью которых является попытка приближенно учесть влияние прочностных свойств материалов ударника и преграды [144]. Однако следует отметить, что введенные при этом поправки имеют скорее характер «подгоночных» коэффициентов. Существуют также одномерные модели, основанные на предположении, что разрушение преграды происходит в виде выбивания «пробки». При этом из всех факторов, определяющих сопротивление преграды прониканию, учитывается лишь влияние касательных напряжений.

Наиболее полно существующие одномерные и двумерные модели высокоскоростного соударения изложены в [144].

Ниже излагаются две схемы процесса соударения, занимающие промежуточное положение между известными одномерными моделями и численными решениями задач динамики упругопластического деформирования в двумерной постановке [54]. Условно их можно назвать квазиодномерными моделями соударения.

В этих моделях расчетная область состоит из одного столбца конечных элементов с краевыми условиями на границе области, моделирующими процесс перетекания вещества. В расчетной области используется модель упругопластического течения при больших деформациях, изложенная в предыдущем разделе. Напряжения и деформации в расчетной области вычисляются по алгоритму также изложенному в предыдущих разделах этой главы.

Схемы различаются видом краевых условий на границе расчетной области, которые формулируются в зависимости от того, какие качественные и количественные характеристики процесса соударения мы хотим оценить. Излагаются две модели: для оценки предельной глубины проникания ударника в преграду и предельной зоны тыльных отколов.

6.3.1. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины проникания ударника в преграду

Ударник рассматривается как абсолютно жесткий цилиндр радиуса R , высоты H и массы M . Преграда — изотропная упругопластическая среда.

Рассмотрим в преграде область D (расчетную область), находящуюся под ударником и ограниченную боковой поверхностью A_1A_2 (рис. 6.2).

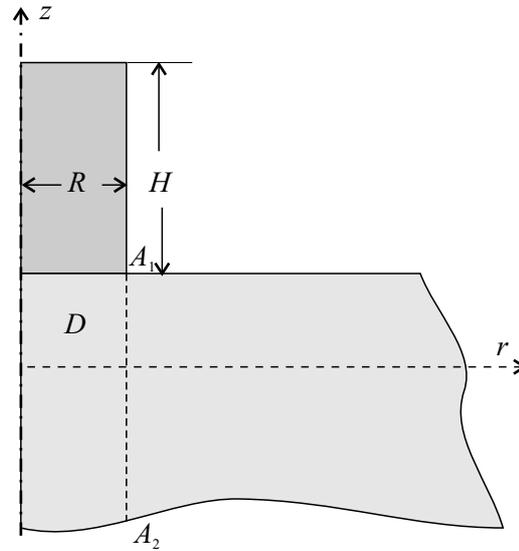


Рис. 6.2. Расчетная область

На боковой поверхности A_1A_2 в процессе соударения действуют касательные и нормальные напряжения σ_{rz} и σ_r , изменяющиеся во времени. Для определения напряженно-деформированного состояния в области D достаточно знать закон изменения этих напряжений во времени и по пространственной координате. Для определения этих напряжений необходимо решать двумерную задачу. При построении квазиодномерной модели воздействие на область D через поверхность A_1A_2 со стороны остальной части преграды будем моделировать краевыми условиями определенного вида.

Для оценки предельной величины проникания условия на поверхности A_1A_2 формулируются следующим образом.

Радиальное напряжение σ_r полагаем равным нулю. Очевидно, что среди всех возможных вариантов краевых условий для σ_r это условие максимально ослабляет сопротивление преграды прониканию ударника. При отсутствии радиальных напряжений на боковой поверхности A_1A_2 появляются скорости в радиальном направлении, которые приводят к истечению части материала из расчетной области. Часть материала, вытекающая через поверхность A_1A_2 , исключается из дальнейших расчетов. Поскольку эта масса обладает скоростью в осевом направлении, то исключение ее из расчета означает, что из системы изымает-

ся некоторое количество движения в осевом направлении, что должно приводить к торможению ударника.

Краевые условия на поверхности A_1A_2 для u_z — скорости в осевом направлении и σ_{rz} — касательного напряжения формулируются следующим образом.

В начале принимается, что u_z на боковой поверхности равно нулю. Если при этом условии $|\sigma_{rz}| < \tau^*$ (τ^* — предел текучести на сдвиг или сопротивление срезу), то решение вычисляется с условием $u_z = 0$ на A_1A_2 . Если же $|\sigma_{rz}| \geq \tau^*$, то решение вычисляется при условии $|\sigma_{rz}| = \pm\tau^*$; при этом знак σ_{rz} принимается тем же, какой был у σ_{rz} при нулевом значении u_z . Заметим, что при вычислении решения не требуется итераций для реализации таких краевых условий (раздел 5.12).

6.3.2. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины зоны тыльных отколов

Одним из основных факторов, определяющих тыльные отколы, является амплитуда давления на фронте ударной волны. Очевидно, что амплитуда давления будет максимальной, если ударник в процессе проникания считать недеформируемым абсолютно жестким телом, а среди вариантов краевых условий для радиальных составляющих скорости и напряжения на поверхности A_1A_2 принять условие $u_r = 0$.

Краевое условие для касательного напряжения σ_{rz} принимается таким же, как и 5.13.

6.3.3. Зависимость глубины проникания от соотношения плотностей материалов ударника и преграды

В этом расчете принимается, что ударник является недеформируемым цилиндром массы M , имеющим начальную скорость соударения V_0 . Затем скорость его принимается равной нормальной скорости на верхней границе конечного элемента расчетной области, соприкасающегося с основанием цилиндра. Поскольку расчетная область состоит из одного столбца конечных элементов, то вычисление решение по изложенному в предыдущих параграфах ведется по конечным формулам.

Исходные данные задачи были следующими: начальная скорость $V_0 = 2$ км/с, радиус ударника $R = 0,5$ см, высота ударника $H = 1,0$ см, $\rho/\rho_0 = 0,4, 0,6, 0,8, 1,0$ (ρ_0 — плотность материала ударника), модуль Юнга $E = 200$ ГПа, касательный модуль $E' = 0$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, предел текучести при сдвиге $\tau_s = 500$ МПа, коэффициент

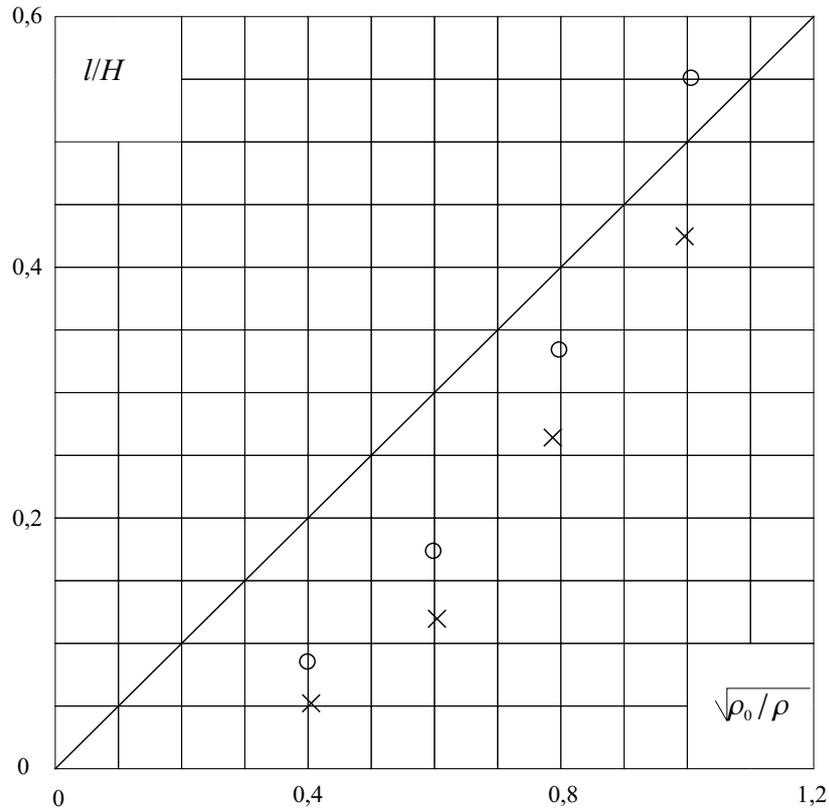


Рис. 6.3. Зависимость глубины проникания от соотношения плотностей материалов ударника и преграды

Грюнайзена $\Gamma = 2,0$, теплоемкость $c_v = 8,96 \times 10^6 \text{ см}^2/(\text{с}^2\text{К})$, начальная температура $T_0 = 300 \text{ К}$, толщина преграды $H = 5 \text{ см}$, число конечных элементов в столбце $N = 50$.

На рис. 6.3 по оси ординат отложена величина l/H (l — глубина проникания ударника), по оси абсцисс — величина $\sqrt{\rho_0/\rho}$. Крестиками отмечены точки, полученные в предположении, что на границе расчетной области радиальная скорость равна нулю, кружочками — точки, полученные в предположении, что на границе расчетной области радиальное напряжение равно нулю. Сплошная кривая соответствует гидродинамической модели Лаврентьева. При указанных входных данных оба предельных варианта условий на границе расчетной области приводят к близким результатам.

6.3.4. Зависимость глубины проникания цилиндрического стержня в преграду от скорости соударения

В [150] приведены экспериментальные данные по скоростному удару цилиндрических стержней из мягкой стали по мишени из того же материала. Там же приведено сравнение экспериментальных данных с расчетами по модифицированной гидродинамической модели [150]. Динамический предел текучести материала $Y_p = 300$ МПа. В модифицированной гидродинамической модели присутствуют два параметра R и Y , характеризующие прочностные свойства ударника и преграды, которые определяются при некоторых предположениях по адиабате Гюгоню и пределу прочности. Их определение весьма условно и отношение R/Y в [150] предлагается выбирать так, чтобы расчетные данные соответ-

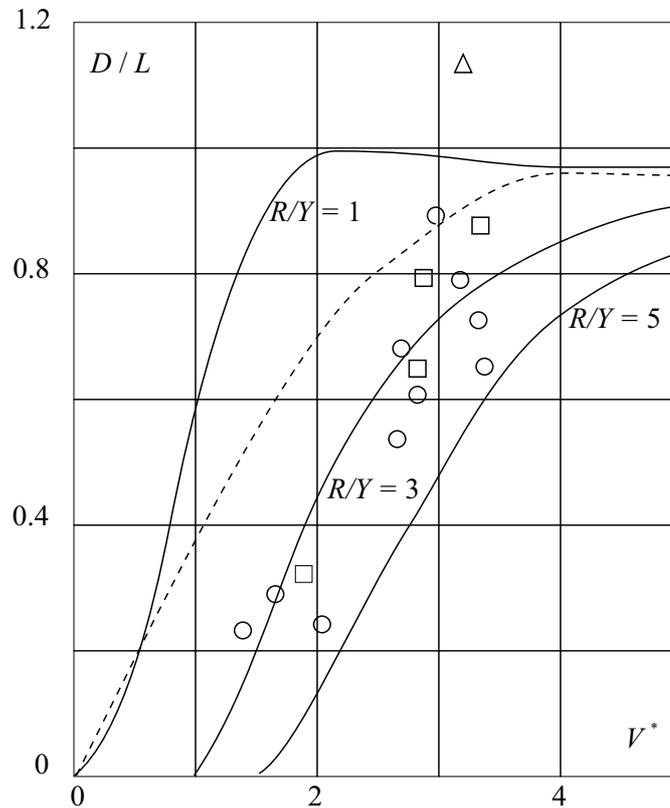


Рис. 6.4. Зависимость глубины проникания от скорости ударника

ствовавали экспериментальным. В [150] расчетные зависимости глубины проникания от скорости ударника приведены для ряда значений R/Y .

На рис. 6.4 представлены зависимости глубины проникания от скорости ударника. Треугольниками, квадратами и кружочками нанесены экспериментальные точки [150]. Треугольники соответствуют отношению длины ударника к его диаметру $l/d = 5$, квадраты — $l/d = 7$, кружочки — $l/d = 10$. Поскольку кривые на рис. 6.4 (за исключением штриховой) взяты из работы [150]), мы сочли целесообразным оставить на нем единицы измерения, принятые в [150]. Сплошные кривые соответствуют расчетам по модифицированной гидродинамической модели [150], штриховая — расчетам по схеме пункта 2 настоящего раздела. Можно считать, что соответствие расчетной кривой экспериментальным данным, учитывая их большой разброс, вполне удовлетворительно.

Рассмотренные примеры свидетельствует о том, что предложенные простые расчетные схемы можно использовать для оценки интегральных характеристик процессов соударения.

6.4. Задача теплопроводности

При математическом моделировании процессов интенсивного термоупругопластического деформирования в большинстве случаев приходится решать задачу теплопроводности в областях, составленных из нерегулярных элементов.

Решению задач теплопроводности в областях, составленных из нерегулярных элементов посвящены, например, работы [66, 103]. В [103] решение строится вариационно-разностным методом, в [66] — методом «факторизованных смещений», аналогичным методу переменных направлений. В этих работах схема вычислений — неявная. В этом разделе излагается алгоритм решения плоских задач теплопроводности в областях из произвольных выпуклых четырехугольных элементов, основанный на аппроксимации температуры несколькими линейными полиномами. Введение нескольких аппроксимаций позволяет обеспечить непрерывность средних величин потоков тепла и температуры на гранях элементов и так же, как и в динамических задачах упругопластического деформирования, произвести расщепление исходной задачи на одномерные, решения которых можно вычислить скалярными прогонками, либо по явной схеме. При этом ограничение на шаг по времени,

обеспечивающее устойчивость вычислений по явной схеме, как правило, слабее того, которое обеспечивает устойчивость решения по явной схеме задач динамического деформирования. Поэтому в задачах термоупругопластического деформирования может оказаться удобным вычислять температуру по явной схеме.

6.4.1. Уравнения теплопроводности для четырехугольного элемента

Задачу теплопроводности на промежутке времени $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ в четырехугольном элементе можно сформулировать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \Phi = 0, \quad \hat{q}^i + c^{ik} \frac{\partial T}{\partial \xi^\alpha} = 0, \\ T|_{t=t_0} = T_0, \quad (\alpha_k^\pm T + \beta_k^\pm \hat{q}^k)_{\xi^k=\pm 1} = \varphi_k^\pm, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.72)$$

где

$$a = \rho c \sqrt{g}, \quad \sqrt{g} = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|, \quad \hat{q}^i = \sqrt{g} \vec{q} \cdot \vec{e}^i, \quad c^{ik} = \varkappa \sqrt{g} \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k;$$

ρ — плотность; c — теплоемкость; \varkappa — коэффициент теплопроводности; \vec{e}^i , \vec{e}_i — базисные векторы косоугольной системы координат ξ^i , в которой четырехугольному элементу соответствует квадрат $\xi^i \in [-1, 1]$; Φ , T_0 , φ_k^\pm , α_k^\pm , β_k^\pm — заданные функции, причем

$$\alpha_k^- \beta_k^- \geq 0, \quad \alpha_k^- \beta_k^+ \geq 0, \quad \beta_k^+ \geq 0, \quad |\alpha_k^\pm + \beta_k^\pm| \neq 0. \quad (6.73)$$

В (6.72) и ниже слагаемое, содержащее два и более одинаковых немых индексов, означает сумму по этому индексу от 1 до 2. Под немым индексом понимается индекс, который отсутствует хотя бы в одном из слагаемых уравнения.

При построении приближенного решения задачи (6.72) примем аппроксимацию температуры и потоков тепла в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}^k}{\partial \xi^k} - \tilde{\Phi} = 0, \quad \hat{q}^i + \tilde{c}^{ik} \frac{\partial T^k}{\partial \xi^k} = 0, \\ T = \overset{0}{T} + \overset{1}{T} \eta, \quad \eta = \frac{2}{\tau} (t - t_0 - \frac{1}{2} \tau), \quad \hat{q}^i = \overset{0}{\hat{q}}^i + \overset{1}{\hat{q}}^i \xi^i, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$T^i = \overset{0}{T}^i + \overset{1}{T}^i \xi^i, \quad \overset{0}{T} - \overset{1}{T} = \lambda_{ik} \frac{\partial \hat{q}^k}{\partial \xi^k}, \quad T|_{\eta=-1} = \tilde{T}_0.$$

$$(\tilde{\alpha}_k^\pm T^k + \tilde{\beta}_k^\pm \hat{q}_k^\pm)_{\xi^k=\pm 1} = \tilde{\varphi}_k^\pm, \quad i, k = 1, 2, \quad (6.75)$$

где $\overset{k}{T}$, $\overset{k}{T}^i$, $\overset{k}{\hat{q}}^i$ ($k = 0, 1$; $i = 1, 2$) — постоянные в пределах элемента величины; \tilde{a} , $\tilde{\Phi}$, \tilde{c}^{ik} , \tilde{T}_0 — осредненные по $\omega = \{\xi^1, \xi^2 \in [-1, 1]\}$ величины

$a, \Phi, c^{ik}, T_0; \tilde{\alpha}_k^\pm, \tilde{\beta}_k^\pm, \tilde{\varphi}_k^\pm$ — осредненные по соответствующей грани элемента и промежутку времени $\eta \in [-1, 1]$ величины $\alpha_k^\pm, \beta_k^\pm, \varphi_k^\pm$; λ_{ik} — параметры, значения которых удовлетворяют условиям:

$$\lambda_{12}^2 \leq \lambda_{11}\lambda_{22}, \quad \lambda_{21}^2 \leq \lambda_{11}\lambda_{22}, \quad \lambda_{11} \geq 0, \quad \lambda_{22} \geq 0, \quad \lambda_{11} + \lambda_{22} \neq 0. \quad (6.76)$$

В (6.74) полином T характеризует осредненную по элементу температуру, полиномы T^i, \hat{q}^i — осредненные по времени $\eta \in [-1, 1]$ средние значения в сечениях $\xi^i = \text{const}$ температуры и потоков тепла.

Из (6.74) следует зависимость между величинами $T^i|_{\xi^i=\pm 1}, \hat{q}_{\xi^i=\pm 1}^i$ — средними значениями температуры и потоков тепла на гранях элемента. Условимся называть эту зависимость уравнениями теплопроводности элемента.

Условия (6.73), (6.76) обеспечивают возможность однозначно определить из уравнений теплопроводности элемента и граничных условий (6.75) коэффициенты полиномов T^i, \hat{q}^i . Температура элемента в момент времени $t_0 + \tau$ вычисляется по формуле

$$T(t_0 + \tau) = \tilde{T}_0 + \tau(\tilde{\Phi} - \frac{\partial \hat{q}^k}{\partial \xi^k}). \quad (6.77)$$

6.4.2. Уравнения теплопроводности для системы элементов

Уравнения теплопроводности для системы элементов состоят из уравнений теплопроводности каждого из элементов, условий непрерывности T^k, \hat{q}^k на общих гранях соседних элементов и условий (6.75) на гранях, составляющих границу системы элементов.

Нетрудно установить, что решение уравнений теплопроводности системы элементов должно обладать энергетическим свойством

$$\sum_0 \int \left[a \frac{\partial T}{\partial t} + c^{ik} \frac{\partial T^i}{\partial \xi^i} \frac{\partial T^k}{\partial \xi^k} + \lambda_{ik} \frac{\partial \hat{q}^i}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \hat{q}^k}{\partial \xi^k} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} (T^i \hat{q}^i) \right] d\omega = 0, \quad (6.78)$$

где знак \sum означает сумму по всем элементам, входящим в состав системы. Из (6.78) следует, что в случае (6.73), (6.76) можно однозначно определить из уравнений теплопроводности для системы элементов коэффициенты полиномов T^i, \hat{q}^i во всех элементах, вычислить по формуле (6.77) температуру элементов в момент времени $T_0 + \tau$ и последующими шагами по времени вычислить температуру в любой момент времени.

Можно показать, что в случае, когда точное решение достаточно гладкое, получаемое по изложенной методике численное решение при

$h, \tau \rightarrow 0$ сходится к точному решению (h — характерный размер элемента).

6.4.3. Итерационное решение уравнений теплопроводности для системы элементов

Полагая (6.74)

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \frac{\tau}{2a} \quad (6.79)$$

и считая величины $\tilde{c}^{12}(\partial T^2/\partial \xi^2)$, $\tilde{c}^{21}(\partial T^1/\partial \xi^1)$ равными их значениям $[\tilde{c}^{12}(\partial T^2/\partial \xi^2)]_*$, $[\tilde{c}^{21}(\partial T^1/\partial \xi^1)]_*$ на предыдущей итерации (на первой итерации $[\tilde{c}^{12}(\partial T^2/\partial \xi^2)]_*$, $[\tilde{c}^{21}(\partial T^1/\partial \xi^1)]_*$ считаются равными нулю), уравнения теплопроводности элемента можно записать в виде:

$$\overset{0}{T^1} - \tilde{T}_0 + \left(\frac{\tau}{2\tilde{a}} + \lambda_{11}\right) \frac{\partial \hat{q}^1}{\partial \xi^1} = 0, \quad \overset{0}{\hat{q}}^1 + \tilde{c}^{11} \frac{\partial T^1}{\partial \xi^1} + \left(\tilde{c}^{12} \frac{\partial T^2}{\partial \xi^2}\right)_* = 0, \quad (6.80)$$

$$\overset{0}{T^2} - \tilde{T}_0 + \left(\frac{\tau}{2\tilde{a}} + \lambda_{22}\right) \frac{\partial \hat{q}^2}{\partial \xi^2} = 0, \quad \overset{0}{\hat{q}}^2 + \tilde{c}^{22} \frac{\partial T^2}{\partial \xi^2} + \left(\tilde{c}^{21} \frac{\partial T^1}{\partial \xi^1}\right)_* = 0. \quad (6.81)$$

Уравнения (6.80) не связаны с уравнениями (6.81), и поэтому итерационное решение уравнений теплопроводности для системы элементов может быть вычислено скалярными прогонками. В случае

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\tilde{c}^{11}} - \frac{\tau}{2\tilde{a}}, \quad \lambda_{22} = \frac{1}{\tilde{c}^{22}} - \frac{\tau}{2\tilde{a}} \quad (6.82)$$

происходит дальнейшее расщепление уравнений. Итерационное решение в этом случае может быть вычислено по явным формулам. Условия (6.76), (6.79), (6.82) налагают ограничение на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{2\tilde{a}}{\tilde{c}^{11} + \tilde{c}^{22}}. \quad (6.83)$$

Ограничение (6.83), как правило, слабее того, которое обеспечивает устойчивость решения по явной схеме задач динамического деформирования.

Можно показать, что итерационный процесс сходится.

Можно также показать, что уравнения второго приближения аппроксимируют исходные уравнения со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым — по времени. Поэтому достаточно вычислять лишь второе приближение. В случае прямоугольных элементов $\tilde{c}^{12} = \tilde{c}^{21} = 0$ и, следовательно, второе приближение вычислять не нужно, так как оно совпадает с первым.

Литература

1. **Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А.** Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1976.
2. **Алексеев А. Е., Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Алгоритм расщепления двумерных задач динамики деформирования тел вращения в случае разбиения меридианального сечения на произвольные четырехугольники // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VIII Всесоюз. конф. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1984. С. 7–14.
3. **Алексеев А. С.** Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических знаний. М., 1967. С. 9–84.
4. **Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.** Метод расчета теоретических сейсмограмм для сложнопостроенных моделей сред // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 5. С. 1062–1065.
5. **Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984.
6. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
7. **Анисимов С. А.** Алгоритм построения монотонных численных решений плоской динамической задачи теории упругости на основе последовательных приближений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1994. Вып. 109. С. 3–17.
8. **Анисимов С. А.** Алгоритм решения двумерных динамических задач теории упругости в областях из произвольных четырехугольников // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1985. Вып. 71. С. 11–23.
9. **Анисимов С. А.** Векторное расщепление плоской динамической задачи теории упругости в областях из произвольных четырехугольников // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1986. Вып. 75. С. 17–26.
10. **Анисимов С. А., Богульский И. О.** Алгоритм независимой аппроксимации недифференциальных членов при численном решении краевых задач для систем гиперболических уравнений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1994. Вып. 109. С. 34–48.

11. **Анисимов С. А., Богульский И. О.** Численное решение задач динамики упругих тел. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1995.
12. **Анисимов С. А., Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Терехов А. В.** Решение задач теплопроводности при моделировании процессов динамического термоупругопластического деформирования // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислит. центр, Ин-т теор. и прикл. механики. Новосибирск, 1990. Т. 4(21), № 4. С. 65–69.
13. **Анисимов С. А., Степаненко С. В.** Метод численного решения осесимметричных задач динамики многослойных тонких оболочек вращения // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислит. центр, Ин-т теор. и прикл. механики. Новосибирск, 1990. Т. 4(21), № 4. С. 59–64.
14. **Анучина Н. Н., Яненко Н. Н.** Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 6. С. 1103–1106.
15. **Афанасьев С. Б., Баженов В. Г.** О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. Вып. 31. С. 59–65.
16. **Афанасьев С. Б., Баженов В. Г., Кочетков А. В. и др.** Пакет прикладных программ «Динамика-1» // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1986. Вып. 33. С. 21–29.
17. **Баженов В. Г., Кречетов В. Л., Чекмарев Д. Т.** Вариационно-разностный метод решения трехмерных нестационарных задач динамики однослойных и многослойных упругопластических оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1983. Вып. 25. С. 87–94.
18. **Бате К., Вильсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.
19. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Мир, 1965.
20. **Белов Н. В., Корнеев А. И., Николаев А. П.** Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок // Прикладная механика и техническая физика. 1983. № 5. С. 119–123.
21. **Белоцерковский О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
22. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
23. **Благовещенский А. С.** Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Тр. Ленингр. ун-та. Л., 1966. Вып. 1. С. 68–81.

24. **Блинов Л. М.** Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978.
25. **Богданович А. Е.** Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987.
26. **Богульский И. О.** Алгоритмы высокой точности решения многомерных задач динамики твердых тел // Математические модели и численные методы механики сплошных сред. Новосибирск, 1996. С. 158–159.
27. **Богульский И. О.** Асимптотическое поведение цилиндрических ударных волн вблизи оси симметрии. Красноярск, 1988. С. 16–20. (Препр. / ВЦ СО АН СССР. № 2).
28. **Богульский И. О.** Монотонная схема второго порядка решения задач динамики упругих тел. М., 1986. Деп. в ВИНТИ, 1986, № 64.
29. **Богульский И. О.** О точности численного решения двумерной задачи динамической теории упругости // Научные исследования на математическом факультете Красноярского госуниверситета. Красноярск, 1995. С. 72–83. М., 1995. Деп. в ВИНТИ, 1995. № 1072.
30. **Богульский И. О.** Об одной схеме расщепления решения двумерной задачи динамики твердого тела. М., 1989. Деп. в ВИНТИ, 1989. № 1816.
31. **Богульский И. О.** Об одном алгоритме решения двумерной динамической задачи механики деформируемого твердого тела // Численные методы механики сплошной среды. Ч. 2. Красноярск, 1989. С. 42–45.
32. **Богульский И. О.** Об одном алгоритме решения двумерной осесимметричной задачи динамики твердого тела. М., 1990. Деп. в ВИНТИ, 1990, № 5234.
33. **Богульский И. О.** Об одном семействе явных монотонных схем решения задач динамики упругих тел // Численный анализ и пакеты прикладных программ. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1986. С. 42–54.
34. **Богульский И. О.** Об одном семействе явных схем решения задач динамики упругих тел на основе аппроксимации линейными полиномами. М., 1985. Деп. в ВИНТИ, 1985. № 68.
35. **Богульский И. О.** Об одном численном алгоритме решения задач распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде // Геология и геофизика, 1997. Т. 38, № 9. С. 1549–1560.
36. **Богульский И. О.** Повышение точности решения плоских динамических задач упругости в рамках аппроксимации линейными полиномами. М., 1986. Деп. в ВИНТИ, 1986, № 65.

37. **Богульский И. О.** Построение монотонной схемы решения задач для гиперболических уравнений. Красноярск, 1982. (Препр. / ВЦ СО АН СССР. № 26).
38. **Богульский И. О.** Схемы повышенной точности решения задач динамики упругих тел: Автореф. канд. диссерт. Новосибирск, 1986.
39. **Богульский И. О.** Схемы решения двумерных задач динамики упругих тел // Доклады VIII Всесоюз. конф. по распространению упругих и упругопластических волн. Новосибирск, 1986. С. 7–12.
40. **Богульский И. О.** Численное моделирование распределенного ударного воздействия на упругую плиту // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1991. Вып. 103. С. 30–35.
41. **Богульский И. О.** Численное моделирование распределенного ударного воздействия цилиндрических ударников на упругую плиту // Доклады II Всесибирской школы по современным проблемам механики деформируемого твердого тела. Новосибирск, 1990. С. 7–9.
42. **Богульский И. О., Ветров С. Я., Шабанов А. В.** Электромагнитные волны в неограниченных и конечных сверхрешетках // Оптика и спектроскопия, 1998. Т. 84. Вып. 1. С. 122–133.
43. **Богульский И. О. и др.** Математическое моделирование, информационные подходы в газодинамике больших скоростей и механике деформируемого твердого тела // Актуальные проблемы информатики, прикладной математики и механики. Ч. II. Математическое моделирование. Красноярск, 1996. С. 157–197.
44. **Богульский И. О. и др.** Математическое моделирование процессов трехмерного проникания. Красноярск, 1983. (Отчет № 1.1.16.1, рег. № 81017684).
45. **Богульский И. О. и др.** Разработка компонентов системы сейсмоакустического мониторинга бурящейся скважины. Красноярск, 1995. (Отчет НИФТИ КГУ, гос. рег. № 16-94-41/1).
46. **Борис Дж. П., Бук Д. Л.** Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков // Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980. С. 92–141.
47. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970.
48. **Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н.** Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ «АСТРА». М., 1988. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 326).
49. **Васильковский С. Н.** Применение метода расщепления к решению основных краевых задач динамической теории упругости в напряжении

- ях // Распространение упругих и упругопластических волн. М.: Наука, 1973. С. 24–31.
50. **Васильковский С. Н.** Численный расчет напряженного состояния и поля скоростей смещений секториального выреза длинной цилиндрической трубы // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1968. № 3. С. 34–48.
51. **Васильковский С. Н.** Численное решение задачи об ударе в упругом приближении // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1970. Вып. 12. С. 124–132.
52. **Ветров С. Я., Шабанов А. В.** Поверхностные электромагнитные волны на границе раздела изотропной среды и сверхрешетки // Журнал экспериментальной и технической физики. 1992. Т. 101. С. 1340–1347.
53. **Войнович П. А., Жмакин А. И., Попов Ф. Д. и др.** О расчете разрывных течений газа. М., 1977. (Препр. / АН СССР. Физико-технический ин-т; № 561).
54. **Волчков Ю. М.** Квазиодномерная модель взаимодействия ударника и преграды // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 5. С. 205–209.
55. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Алгоритм расщепления плоской задачи динамики упругого деформирования с учетом хрупкого разрушения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1983. Вып. 61. С. 36–48.
56. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Алгоритм решения динамической упругопластической задачи для тел вращения при неосесимметричном нагружении // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюзной конференции. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. С. 97–102.
57. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования в задачах динамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1984. Вып. 66. С. 60–68.
58. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Схема численного решения динамических задач с условиями трения Кулона на поверхностях контакта // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах: Сб. науч. тр. / Ин-т горного дела. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1987. С. 80–83.
59. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Численное решение задач динамического упругопластического деформирования на основе

- аппроксимации линейными полиномами // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всесоюзной конференции. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 233–247.
60. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1976.
 61. **Годунов С. К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
 62. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
 63. **Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов Н. Я. и др.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
 64. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // Прикладная механика и техническая физика. 1972. № 6. С. 171–192.
 65. **Годунов С. К., Рябенский В. С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
 66. **Головизнин В. М., Самарская Е. А., Чуданов В. В.** Метод «факторизованных тепловых смещений» для экономичного решения уравнения теплопроводности на неортогональных сетках // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 7. С. 1143–1154.
 67. **Гольденвейзер А. А.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
 68. **Горский Н. М.** О решении динамических задач теории упругости в напряжениях и скоростях смещений // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Т. 3. № 3. С. 24–31.
 69. **Горский Н. М.** Решение динамических задач теории упругости с помощью неявных разностных схем // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974. Т. 5. № 5. С. 48–56.
 70. **Горский Н. М., Коновалов А. Н.** О разностных методах решения динамических задач теории упругости // Тр. III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. I. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974. С. 68–84.
 71. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
 72. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1960. № 6. С. 42–53.
 73. **Гулидов А. И., Шабалин И. И.** Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. С. 21–36. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ; № 12).
 74. **Гулидов А. И., Шабалин И. И.** Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел

- в пространственном случае // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюзной конференции. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988. С. 70–75.
75. **Гурьянов А. А.** Метод коррекции потоков для исследования волновых процессов деформирования пластин // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1984. С. 111–115.
76. **Гурьянов А. А.** Численное решение динамических задач теории оболочек методом коррекции потоков. М., 1985. Деп. в ВИНТИ, 1985, № 2832-85.
77. **Дьяконов Е. Г.** Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 4. С. 549–568.
78. **Жмакин А. И., Фурсенко А. А.** Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 1021–1031.
79. **Зелинский Н. Н., Сапожников В. А.** Метод корректировки для построения разностных схем задач газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1983. Т. 14. № 3. С. 76–88.
80. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
81. **Иванов В. Л.** Метод аппроксимации систем гиперболических уравнений, содержащих большие параметры в недифференциальных членах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 9. С. 1388–1394.
82. **Иванов Г. В.** Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1978. Вып. 37. С. 63–77.
83. **Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Схемы решения одномерных задач динамики неоднородных упругих тел на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1981. Вып. 49. С. 27–44.
84. **Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я.** Исследование свойств разностных схем сквозного счета первого порядка аппроксимации // Численные методы механики сплошных сред. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. Т. 11. № 1. С. 81–110.
85. **Иванов М. Я., Крайко А. Н.** Об аппроксимации разрывных решений при использовании разностных схем сквозного счета // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. № 3. С. 521–532.

86. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
87. **Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989.
88. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
89. **Киреев В. Н., Войновский А. С.** Численное моделирование газодинамических течений. М.: МАИ, 1991.
90. **Колган В. П.** Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. № 5. С. 1340–1345.
91. **Колган В. П.** Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
92. **Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н.** Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями // Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978. С. 85–121.
93. **Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н.** Численное решение неоднородных задач динамики упругопластических сред // Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974. С. 37–54.
94. **Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.** Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 4. С. 132–139.
95. **Кондауров В. И., Петров И. Б.** Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1344–1347.
96. **Коновалов А. Н.** Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 1. С. 240–245.
97. **Коновалов А. Н.** Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 4. С. 760–764.
98. **Коновалов А. Н.** Разностные схемы для численного решения плоских динамических задач теории упругости в напряжениях. Ч. 1 // Численные методы механики сплошной среды. 1973. Т. 4. № 5. С. 41–56.
99. **Коновалов А. Н.** Разностные схемы для численного решения плоских динамических задач теории упругости в напряжениях. Ч. 2 // Численные методы механики сплошной среды. 1974. Т. 5. № 2. С. 30–45.
100. **Коновалов А. Н.** Решение задач теории упругости в напряжениях. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1979.

101. **Корнеев А. И., Николаев А. П., Шиповский И. Е.** Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всесоюзной конференции. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 122–129.
102. **Коробейников С. Н.** Многоцелевая вычислительная программа по решению задач линейной теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1986. Вып. 75. С. 78–89.
103. **Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. и др.** Вариационный подход к построению схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. № 2. С. 401–421.
104. **Косых А. П., Минайлос А. И.** Исследование методов сквозного счета для задач сверхзвуковой аэродинамики // Ученые записки ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 1. С. 9–17.
105. **Кошур В. Д., Мартьянов С. А., Пиманов О. В.** Численное моделирование динамических процессов разрушения в слоистых и композиционных пакетах при импульсном нагружении // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюзной конференции. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988. С. 158–165.
106. **Кошур В. Д., Немировский Ю. В.** Концептуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
107. **Кукуджанов В. Н.** О численном решении задач распространения упруговязкопластических волн // Распространение упругих и упруго-пластических волн: Материалы V Всесоюзного симпозиума. Алма-Ата: Наука, 1973. С. 129–137.
108. **Кукуджанов В. Н.** Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 4. С. 21–65.
109. **Кукуджанов В. Н.** Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Вып. 6. С. 11–37.
110. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. С. 69–118.
111. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 5. М.: Мир, 1975. С. 39–84.

112. **Кукуджанов В. Н.** Численные методы решения неодномерных задач динамики упругопластических сред // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VI Всесоюзной конференции. Ч. 1. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. С. 105–120.
113. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 4. С. 41–56.
114. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г.** О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. С. 1279–1281.
115. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Л.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
116. **Магомедов К. М.** Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9. № 2. С. 313–325.
117. **Магомедов К. М., Холодов А. С.** О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 2. С. 373–386.
118. **Магомедов К. М., Холодов А. С.** Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
119. **Майборода В. П., Кравчук А. С., Холин Н. Н.** Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1986.
120. **Майнчен Дж., Сак С.** Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
121. **Малышев А. П.** Монотонная разностная схема повышенной точности для численного моделирования волновых процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 9. С. 55–158.
122. **Марчук Г. И.** Метод расщепления для решения задач математической физики // Численные методы решения задач механики сплошных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1969. С. 85–121.
123. **Марчук Г. И., Яненко Н. Н.** Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1985. С. 125–142.
124. **Мержиевский Л. А.** Метод расчета течений вязкоупругой среды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1980. Вып. 45. С. 141–151.

125. **Мещеряков Ю. П., Шапеев В. П.** Некоторые геометрические методы построения разностных сеток в областях с криволинейными границами // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 2. С. 23–34.
126. **Минайлос А. И.** О значении монотонности конечно-разностных схем в методах сквозного счета // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17. № 4. С. 1058–1063.
127. **Навал И. К., Римский В. К.** Численный анализ распространения упругих волн в кусочно-однородном слое // Математические методы в механике. Кишинев, 1980. С. 69–76.
128. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
129. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
130. **Петров И. Б.** Численное исследование волновых процессов в слоистой преграде при соударении с жестким телом вращения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 4. С. 125–129.
131. **Петров И. Б., Холодов А. С.** Численное решение некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.
132. **Попов Ю. П., Самарский А. А.** Полностью консервативные разностные схемы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9. № 4. С. 953–958.
133. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
134. **Рахматулин Х. А., Каримбаев Т. Д., Байтелиев Т.** Применение метода пространственных характеристик к решению задач по распространению упругопластических волн // Изв. Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1973, № 1. С. 141–152.
135. **Рикардс Р. Б., Снисаренко С. И.** Деформирование при ударе балок из гибридных материалов // Механика композитных материалов. 1985. № 1. С. 97–103.
136. **Римский В. К.** Сравнительная характеристика численных методов решения контактных задач динамической теории упругости // Математические методы в механике. Кишинев, 1980. С. 98–110.
137. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
138. **Родионов А. В.** Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
139. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

140. **Рузанов А. И.** Численное исследование откольной прочности с учетом микроповреждений // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1984. № 5. С. 109–115.
141. **Русанов В. В.** Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
142. **Сабодаш П. О., Чередниченко Р. А.** Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн // Журнал прикладной механики и технической физики. 1971. № 4. С. 101–109.
143. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Физматлит, 1997.
144. **Сагомоян А. Я.** Проникание. М.: МГУ, 1974.
145. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
146. **Самарский А. А.** Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 4. С. 638–648.
147. **Самарский А. А.** Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5. № 1. С. 34–43.
148. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
149. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1960.
150. **Тейт А.** Теория торможения длинных стержней после удара по мишени // Сб. пер. Механика. 1968. № 5. С. 125–137.
151. **Теоретические основы** и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко. М.: Наука, 1979.
152. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
153. **Уилкинс М. Д.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
154. **Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г.** Метод расчета нестационарных волновых полей и неупругих слоисто-неоднородных сред // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 834–839.
155. **Харлоу Ф. Х.** Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 316–342.

156. **Холодов А. С.** Сеточно-характеристические методы для многомерных задач механики сплошных сред // Школа-семинар соц. стран «Вычислительная аэрогидромеханика»: Сб. тез. докл. М., 1985. С. 110–114.
157. **Хорев И. Е., Горельский В. А., Залепугин С. А. и др.** Исследование деформирования и кинетики разрушения контактируемых тел при несимметричном динамическом воздействии // Физика горения и взрыва. 1983. № 5. С. 119–123.
158. **Чебан В. Г., Руссу И. В.** Численные методы решения задач динамической теории упругости. Кишинев: Штинница, 1976.
159. **Чебан В. Г., Руссу И. В.** Численный метод решения задачи об упругом ударе тонкой прямоугольной пластины о жесткую преграду // Прикладная математика и программирование. Кишинев, 1974. Вып. 4. С. 86–94.
160. **Чушкин П. И.** Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений // Тр. ВЦ АН СССР. М., 1968. Вып. 3. С. 127–134.
161. **Шенг Дж.** Реакция тонкой цилиндрической оболочки на действие нестационарной поверхностной нагрузки // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 4. С. 160–170.
162. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микрооднородных сред. М.: Наука, 1977.
163. **Шокин Ю. И., Яненко Н. Н.** Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.
164. **Шульц У. Д.** Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 9–54.
165. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
166. **Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., Компаниец Л. А. и др.** Классификация разностных схем двумерной газовой динамики методом дифференциального приближения. Новосибирск, 1982. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 19).
167. **Ярив А., Юх П.** Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
168. **Bathe K. J.** Finite element formulation, modeling and solution of nonlinear dynamic problems // Numerical Methods for Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 1979. P. 1–40.
169. **Bathe K. J., Shyder M. D., Cimento A. P., Rolph W. D.** On some current procedures and difficulties in finite element analysis of elastic-plastic response // Computers and Structures. 1980. Vol. 12. P. 607–624.

170. **Bogulskii I. O.** A monotonicity schemes of second-order accuracy for solving of problems of deformable solids dynamics // Modelling & Control, AMSE Press. 1994. Vol. 53. N 2, P. 19–28.
171. **Bogulskii I. O.** On numerical method for solving of two-dimensional problems of deformable solids dynamics // Modelling & Control, AMSE Press. 1993. Vol. 47. N 4. P. 21–40.
172. **Bogulskii I. O.** The testing the scheme for solving two-dimensional problems // Modelling & Control, AMSE Press. 1995. Vol. 60. N 2. P. 21–28.
173. **Bogulskii I. O.** The use of second-order polynomials for local approximation of solution of two-dimensional problem of dynamic elastic theory // Modelling & Control, AMSE Press. 1994. Vol. 53. N 2. P. 29–38.
174. **Boris J. P., Book D. L.** Flux-corrected transport I. SHASTA, fluid transport algorithm that works // Comput. Phys. 1973. Vol. 11. N 1. P. 38–69.
175. **Clifton R. J.** A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. Appl. Math. 1967. Vol. 25. N 1. P. 103–122.
176. **Houbolt J. C.** A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft // J. Aeronautical Sci. 1950. V. 17. № 9. P. 509–515.
177. **Johnson G. R., Coldy D. D., Vavrick D. J.** Three-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1979. Vol. 14. N 12. P. 1865–1871.
178. **Kukudzanov V. N.** A method of characteristics for a solution of multidimensional wave propagation problems in solids // Dynamike osrodkow niesprzystych PAN, 1974. Wroclaw, Warszawa–Krakow.
179. **Lax P. D., Wendroff B.** Systems of conservation laws // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. N 2. P. 217–237.
180. **B. van Leer.** Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection // J. Computational Phis. 1977. Vol. 23. N 3. P. 276–299.
181. **B. van Leer.** Toward the ultimate conservative difference scheme. A second-order sequel to Godunov’s method // J. Computational Phis. 1979. Vol. 32. N 1. P. 101–136.
182. **MacCormac R. W.** The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA. 1969. P. 69–354.
183. **MacCormac R. W., Paullay A. J.** Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators // AIAA. 1972. P. 72–154.
184. **Takezono S., Murase S.** Numerical analysis of dynamic response of axisymmetrical shells to time-dependent loads // Bulletin of JSME. 1975. V. 18. N 119. P. 509–515.

Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics (Novosibirsk)
Institute of Computational Modelling (Krasnoyarsk)

Numerical Solution of Dynamic Elastic-Plastic Problems of Deformable Solids

IVANOV G. V, VOLCHKOV Yu. M., BOGULSKII I.O.,
ANISIMOV S. A., KURGUZOV V. D.

The monograph contains original results of investigations in the area of numerical solution of dynamic problems of solids. The method of construction of numerical algorithms was developed based upon the several local approximations by linear polynomials for every sought-for function of problem. It was initiated by Godunov's method based on solution of one-dimensional problems and introduction in scheme the «great» and «small» qualities. An arbitrariness resulting from several local approximations allows in each step time to split the two- and three-dimensional problems in one-dimensional those with the simultaneous formation of artificial dissipation sufficient for monotony of a numerical solution.

The developed algorithms are applied to a research of the unsteady processes in a mechanics of solids, geophysics, optics and other areas.

The monograph is intended for wide circle specialists, post-graduated students and students in the field of numerical methods of solution of problems in applied mathematics.

Тематический план
выпуска изданий СО РАН
на 2002 г., п. 2

Научное издание

Иванов Геннадий Васильевич
Волчков Юрий Матвеевич
Богульский Игорь Олегович
Анисимов Сергей Александрович
Кургузов Владимир Дмитриевич

Монография

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ
ТЕЛ