Министерство образования и науки Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.Н. ТУПОЛЕВА
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ
КАЗАНСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Р.Г.ЗАРИПОВ

НОВЫЕ МЕРЫ И МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Издательство Казанского государственного
технического университета 2005

УДК 519.53+621.391

Зарипов Р.Г. Новые меры и методы в теории информации. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.

ISBN 5-7579-0815-7

Посвящена новейшим результатам статистической теории информации, выходящим за пределы традиционных выводов. Наряду со статистической моделью Шеннона–Винера приводится систематическое изложение моделей Реньи и Хаврда–Чарват–Дароши с квантовыми обобщениями. На основе нового закона композиции мер с квадратичной нелинейностью осуществляется единый групповой подход к нахождению параметризованных мер информации и приводится их общая классификация. Впервые установлены четыре принципиально различных типа энтропий и информаций различия, зависящих от одного или нескольких параметров. Даются принципы специальной теории информации, основанной на статистических моделях новых мер с геометрическими представлениями.

Предназначено для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, изучающих статистическую теорию информации.

Табл. . Ил. 28 . Библиогр.: 133 назв.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук М.М. Шакирзянов (Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского РАН);
доктор физ.-мат. наук, проф. Р.М. Юльметьев (Казанский государственный педагогический университет)

ISBN 5-7579-0815-7

ЗАРИПОВ Ринат Герфанович

НОВЫЕ МЕРЫ И МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Ответственный за выпуск Б.А. Малкина
Технический редактор С.В. Фокеева
Компьютерная верстка – А.А. Антропова

Подписано к печати 30.06.05.
Формат 70×108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ.л. 22,75. Усл.печ.л. 31,85. Усл.кр.-отт. 31,85. Уч.-изд.л. 17,77.
Тираж 100. Заказ Д60/Е109.

Издательство Казанского государственного технического университета
Типография Издательства Казанского государственного
технического университета
420111 Казань, К. Маркса, 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистическая теория информации, основы которой были заложены в первой половине прошлого столетия, прежде всего, для решения важного вопроса передачи информации по аддитивным каналам связи, претерпела бурное развитие и в настоящее время формируется ее обобщение для неаддитивных объектов. Меры информации в таких случайных объектах зависят от одного или даже двух параметров, отражающих степень неаддитивности. Известны более тридцати обобщающих выражений только для энтропий и количество их непрерывно растет. Дальнейшее развитие теории для неаддитивных объектов немыслимо без основополагающих идей и методов. Возникает необходимость анализа самого фундамента теории информации и ее обобщения, чтобы логически обосновать переход от аддитивных к неаддитивным мерам, провести их адекватную классификацию и определить перспективные направления теории в век высоких информационных технологий. Значительный прогресс по групповой интерпретации свойств мер был впервые достигнут в недавно изданной книге автора «Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах» (Казань: Изд-во АН РТ «Фэн». 2002), ориентированной, на применение отдельных мер обобщенной теории информации для физических ситуаций. Многие новые идеи и результаты в обобщенной теории информации не вошли в указанную книгу и требуют целенаправленного изучения с применением современных математических методов, что и является главной целью настоящего исследования.

Чтобы избежать существенного увеличения объема книги в ущерб целостности изложения в ней по возможности не приводятся доказательства известных теорем и не отражена обширная библиография по рассматриваемым проблемам. Это хорошо дается в фундаментальных трудах по теории информации. Монография отличается от имеющихся книг как по направлению, так и по стилю. Автор ограничил себя центральной идеей группового и функционального подходов в теории информации, неизвестной в научной литературе. Широко применяется вариационный метод для нахождения экстремальных свойств мер информаций.

Содержание книги условно делится на две части. В первой части (главы 1–3) кратко изложены концепции статистических моделей теории информации аддитивных объектов.

В первой главе рассматриваются понятия и подходы в статистической модели Шеннона–Винера, основанной на аксиомах Хинчина, а также на аксиомах Фаддеева и методе информационной функции. Проанализированы свойства нормированных взвешенных средних и логарифмических мер энтропии Шеннона–Винера, неточности Керриджа и информации различия Кульбака–Лейблера. Новым понятием, введенным в данной главе, является взвешенное среднее геометрическое, важная роль которого проявляется при нахождении единственного типа мер, совместимого со свойством аддитивности.

Во второй главе приводятся сведения о квантовых подходах в теории информации. Даются основы первых принципов физической статистики случайных объектов и обсуждаются выражения взвешенных средних. Особенность этой главы состоит в том, что формулируются представления парастатистики, которые являются важным дополнением к традиционным понятиям теории информации. Рассматриваются экстремальные свойства квантовых логарифмических мер энтропий и информаций различия. Вводятся параметризованные квантовые меры и даются различные меры в информационных системах.

В главе 3 приводятся основные понятия и методы статистической модели Реньи, в которой рассматривается вероятностное q-пространство с заданным значением полунормы случайной величины. Энтропия и информация различия Реньи выводятся вариационным методом и подходом с использованием понятия взвешенного среднего Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией. Показывается единственность типа аддитивных мер, зависящих от параметра q. Приводятся различные приложения и обобщения логарифмических мер Реньи, а также их экстремальные свойства.

Вторая часть книги (главы 4–7) содержит результаты известных и новых статистических моделей теории информации неаддитивных объектов.

В главе 4 приводятся понятия и идеи статистической модели, основанной на аксиомах Хаврда–Чарват, а также на методе информационной функции Дароши. Рассматриваются взвешенные ненормированные средние и полунормы. Выводятся неаддитивные энтропия Хаврда–Чарват–Дароши и информация различия Ратье–Каннаппана. Вариационным методом исследуются экстремальные свойства полученных функционалов, которые в настоящее время широко применяются в статистической физике.

В главе 5 излагается теоретико-групповой метод в исследованиях свойств мер информаций. Получен новый закон композиции элементов групп, учитывающий квадратичную нелинейность, и даются представления групп. Впервые приводится общая классификация параметризованных энтропий и информаций различия, установлены четыре принципиально различных типа мер. Даются различные семейства параметризованных мер. Вводятся квантовые полунормы и меры. Кратко изложены основные понятия статистической модели Шарма–Миттала. Изучаются два типа групп случайных мер. Рассматриваются тригонометрические меры информаций.

Глава 6 посвящена принципам специальной теории информации, в которой закон композиции мер имеет геометрическое представление. Вводятся типы плоских и глобально анизотропных метрических пространств Минковского с обобщенными гиперболическими и тригонометрическими функциями. Впервые показано, что матричное представление групп мер отображается движением двумерного нормированного пространства. Анализируются свойства новых мер в псевдоевклидовой и евклидовой геометриях мер информации. Даются геометрические представления мер информации в моделях Хаврда–Чарват–Дароши и Реньи.

В данной книге впервые в мировой научной литературе рассматриваются и широко обсуждаются теоретико-групповые аспекты теории информации и приводятся многочисленные новые меры. До последнего времени классификации мер не уделялось особого внимания, не говоря о применении методов теории групп. Получены интересные результаты, многие положения теории информации рассматриваются с единых позиций и становятся почти очевидными.

Материалы книги подводят итог исследований автора. Книга рассчитана на новичков, не обремененных грузом установившихся в данной области традиций и мнений авторитетов. Все главы книги относительно самостоятельны и могут читаться независимо. Работ по теории информации огромное количество и поэтому предпочтение отдается источникам, непосредственно относящимся к изучаемым проблемам. От читателя предполагается лишь знание теории множеств и меры, теории групп и теории информации, что позволит войти в круг идей, новых и современных подходов в данном развивающемся направлении.

Автор выражает глубокую признательность канд.физ.-мат.наук Л.А. Ткаченко за терпеливый труд и понимание при построении графического материала и наборе электронного варианта рукописи.

Глава 1

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШЕННОНА–ВИНЕРА

Приводятся фундаментальные понятия и представления теории информации, основанной на статистической модели Шеннона–Винера. Обсуждаются логарифмические меры энтропии и информации различия для аддитивных случайных объектов и методы их получения.

Начало статистического подхода в теории информации связано с работами Р. Хартли [77], К. Шеннона [50], Н. Винера [5], В.А. Котельникова [30, 31], А.Н. Колмогорова [27–29] по теории передачи информации по системам связи и Р.А. Фишера [74, 75] по теории параметрического оценивания в математической статистике.

В отличие от традиционного изложения основ теории информации, представленного, например, в монографиях [5, 8, 31, 33, 35, 37, 38, 41, 42, 44, 46, 50, 76], в данной главе наряду с определением взвешенного среднего впервые вводится взвешенное среднее геометрическое для каждой случайной величины. Такой подход позволил статистическим, вариационным и групповым методами определить один тип аддитивной энтропии и информации различия, зависящих от средних геометрических для распределения.

1.1. Вероятность. Взвешенное среднее

Идея количественных мер в информационных представлениях состоит в том, что рассматривается вероятностно-статистическое описание объекта (процесса, системы или сигнала), который имеет дискретные или непрерывные случайные состояния.

Приведем основные определения.

Определение 1. Носителем информации являются два множества: множество всех состояний объекта, описываемых распределением вероятностей $p=\{p_1,\dots, p_m\}$ $(p_i \geq 0, \ \ i=1, 2, \dots, m)$ и множество случайных величин $T=\{T_1,\dots, T_m\}$, характеризующих объект.

Определение 2. Взвешенное среднее каждой случайной величины T в состоянии с распределением p равно

$$\mathbf{E}(T)=\frac{\sum_i^m T_i p_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{1.1.1}$$

где m – число возможных состояний объекта и

$$0<\sum_i^m p_i \leq 1. \tag{1.1.2}$$

Используется условие вероятностной нормировки распределения

$$\sum_i^m p_i = 1, \tag{1.1.3}$$

при выполнении которой взвешенное среднее примет следующий вид

$$\mathbf{E}(T)=\sum_i^m T_i p_i. \tag{1.1.4}$$

Значения p_i в выражениях (1.1.1) и (1.1.4) представляют собой так называемые веса значений T_i. В дальнейшем эти выражения будем называть просто средними, если веса не имеют своего обособленного представления.

Если $p_i = 1$, то выражение (1.1.1) равняется обычному среднему арифметическому

$$\mathbf{E}(T)=\frac{1}{m}\sum_i^m T_i. \tag{1.1.5}$$

Из определения 2 вытекают основные свойства.

1. Однородность. При замене p на ap $(a>0)$ взвешенное среднее является однородным функционалом нулевой степени относительно p, то есть выполняется свойство однородности.

2. Нормированность. Для неслучайной постоянной величины C имеем равенство

$$\mathbf{E}(C) = C, \tag{1.1.6}$$

справедливое при $C = 0$ и $C = \infty$. В частности, при $C = 1$ из (1.1.6) следует $\mathbf{E}(1) = 1$, что означает нормированность взвешенного среднего на единицу.

3. Аддитивность. Пусть случайная величина $T_{12} = T_1 + T_2$ равняется сумме случайных величин двух независимых объектов. Совместное распределение вероятностей значений $T_{ij} = T_i + T_j$ мультипликативно $p_{ij} = p_i p_j$ (теорема умножения) и нормировано $\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1$.
Тогда получим равенство

$$\mathbf{E}(T_{12}) = \mathbf{E}(T_1) + \mathbf{E}(T_2). \tag{1.1.7}$$

Для случая одного объекта со случайной величиной $U = U_1 + U_2$ имеем

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(U_1) + \mathbf{E}(U_2). \tag{1.1.8}$$

Здесь средние значения

$$\mathbf{E}(T_{12}) = \sum_i^m \sum_j^n T_{ij} p_i p_j, \quad \mathbf{E}(U) = \sum_i^m U_i p_i, \tag{1.1.9}$$

$$\mathbf{E}(T_1) = \sum_i^m T_i p_i, \quad \mathbf{E}(T_2) = \sum_j^n T_j p_j, \tag{1.1.10}$$

$$\mathbf{E}(U_1) = \sum_i^m U_{1i} p_i, \quad \mathbf{E}(U_2) = \sum_i^m U_{2i} p_i. \tag{1.1.11}$$

Равенства (1.1.7) и (1.1.8) означают аддитивность наблюдаемых макроскопических величин.

4. Мультипликативность. Среднее значение произведения независимых случайных величин $T_1 T_2$ для одного или двух объектов равно произведению средних значений

$$\mathbf{E}(T_1 T_2) = \mathbf{E}(T_1)\ \mathbf{E}(T_2). \tag{1.1.12}$$

5. f-взвешенное среднее. Функциональное обобщение взвешенного нормированного среднего запишется так

$$\mathbf{E}_f(T)=\frac{\sum\limits_i^m T_i f(p_i)}{\sum\limits_i^m f(p_i)}. \qquad (1.1.13)$$

Если $f(p_i)=p_i$, то f-взвешенное среднее совпадает с выражением (1.1.1)

Определение 3. Отклонение случайной величины T_i от среднего значения есть флуктуация

$$\Delta T_i=T_i-\mathbf{E}(T), \quad \sum\limits_i^m(\Delta T_i)p_i=0. \qquad (1.1.14)$$

Определение 4. Начальные и центральные моменты n-го порядка случайной величины T равны

$$\alpha_n=\sum\limits_i^m T_i^n p_i, \qquad (1.1.15)$$

$$\mu_n=\sum\limits_i^m\left[T_i-\mathbf{E}(T)\right]^n p_i. \qquad (1.1.16)$$

При $n=2$ получим дисперсию

$$\mu_2=\mathbf{D}(T)=\sum\limits_i^m\left[T_i-\mathbf{E}(T)\right]^2 p_i=\sum\limits_i^m T_i^2 p_i-\left(\sum\limits_i^m T_i p_i\right)^2. \qquad (1.1.17)$$

Статистическая зависимость двух величин характеризуется коэффициентом корреляции

$$r(T_1,T_2)=\frac{\mathbf{E}(\Delta T_1\Delta T_2)}{\sigma(T_1)\,\sigma(T_2)}, \qquad (1.1.18)$$

где имеем квадратичные отклонения

$$\sigma(T_1)=\left[\mathbf{D}(T_1)\right]^{1/2}, \quad \sigma(T_2)=\left[\mathbf{D}(T_2)\right]^{1/2}. \qquad (1.1.19)$$

Отдельные моменты имеют существенное значение в статистической теории информации, поскольку являются наблюдаемыми макроскопическими величинами, содержащими количественные информационные свойства о случайном объекте.

Далее рассмотрим вероятностное пространство с непрерывной мерой

$$\Gamma(G)=\int\limits_G p(X)dX, \quad 0<p(X)<\infty, \tag{1.1.20}$$

где $p=p(X)$ есть функция плотности распределения вероятностей по неравновозможным микросостояниям X в области G. В общем случае функция может зависеть от времени t и от некоторого параметра θ. Плотность распределения вероятностей (или, кратко, распределение) является так называемой производной Радона–Никодима $p=d\Gamma(X)/dX$ и всегда положительна [33].

Определение 5. Аналогом взвешенного среднего (1.1.1) каждой непрерывной случайной величины $T=T(X)$ в состоянии p является выражение

$$\mathbf{E}(T)=\frac{1}{\Gamma(G)}\int\limits_G Td\Gamma=\frac{\int\limits_G TpdX}{\int\limits_G pdX}, \tag{1.1.21}$$

где

$$0<\int\limits_G pdX<\infty. \tag{1.1.22}$$

При условии вероятностной нормировки для всего пространства из (1.1.21) вытекает следующее взвешенное среднее по вероятностной мере

$$\mathbf{E}(T)=\int Td\Gamma=\int TpdX, \quad \int pdX=1. \tag{1.1.23}$$

Весовой функцией случайной величины $T(X)$ является распределение $p(X)$.

1.2. Взвешенное среднее геометрическое

Продолжим рассмотрение основных определений.

Определение 6. Каждой случайной величине T соответствует взвешенное среднее геометрическое [4, 47]

$$N(T)=2^{\frac{\sum_i^m(\log_2 T_i)p_i}{\sum_i^m p_i}}=\left(\prod_i^m T_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_i^m p_i}}. \tag{1.2.1}$$

Используется также выражение

$$\log_2 N(T) = \frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (1.2.2)$$

В (1.2.1) и (1.2.2) взвешенное среднее определяется для случайной величины $\log_2 T_i$. Для нормированного распределения имеем среднее геометрическое и ее логарифм

$$N(T) = 2^{\sum_i^m (\log_2 T_i) p_i}, \qquad (1.2.3)$$

$$\log_2 N(T) = \sum_i^m (\log_2 T_i) p_i, \quad \sum_i^m p_i = 1. \qquad (1.2.4)$$

Если $p_i = 1$, то из (1.2.1) вытекает обычное среднее геометрическое

$$N(T) = \sqrt[m]{\prod_i^m T_i}. \qquad (1.2.5)$$

Приведем основные свойства взвешенного среднего геометрического.

1. Однородность и вогнутость. Величина $N(T)$ является однородной относительно замены T на aT

$$N(aT) = aN(T), \ a = \text{const} \qquad (1.2.6)$$

и вогнутой, так как отрицательное значение среднего геометрического есть выпуклая функция.

Если T_1 и T_2 две положительные функции, то справедливо неравенство

$$N(T_1) + N(T_2) < N(T_1 + T_2), \qquad (1.2.7)$$

кроме случаев, когда $bT_1 = cT_2$, где b и c не равны нулю, или $N(T_1 + T_2) = 0$.

В общем случае (1.2.7) запишется так

$$N(T_1) + N(T_2) + \ldots + N(T_n) < N(T_1 + T_2 + \ldots + T_n). \qquad (1.2.8)$$

2. Нормированность. Для неслучайной постоянной величины C имеем равенство:

$$N(C) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 C) p_i}{\sum_i^m p_i}} = C\,, \qquad (1.2.9)$$

из которого вытекает свойство нормированности взвешенного среднего геометрического на единицу

$$N(1) = 1. \qquad (1.2.10)$$

3. Среднее геометрическое и взвешенное среднее. Для взаимосвязи средних геометрических приведем соотношения

$$N(T)\,N\left(T^{-1}\right) = 1\,, \qquad (1.2.11)$$

$$\frac{N(T_1)}{N(T_1+T_2)} = N\left(\frac{T_1}{T_1+T_2}\right) \le \mathbf{E}\left(\frac{T_1}{T_1+T_2}\right), \qquad (1.2.12)$$

$$N\left(T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_n^{\alpha_n}\right) = \left[N(T_1)\right]^{\alpha_1} \left[N(T_2)\right]^{\alpha_2} \ldots \left[N(T_n)\right]^{\alpha_n}. \qquad (1.2.13)$$

Если взвешенное среднее случайной величины T конечно, то справедливо неравенство

$$2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) p_i}{\sum_i^m p_i}} < \frac{\sum_i^m T_i p_i}{\sum_i^m p_i} < 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) T_i p_i}{\sum_i^m T_i p_i}}\,, \qquad (1.2.14)$$

кроме того случая, когда $T = C$, где C – постоянная.

Рассмотрим три случая зависимости T от распределений.

При $T = p$ взвешенное среднее геометрическое распределения является следующим функционалом

$$N(T) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}{\sum_i^m p_i}}\,, \qquad (1.2.15)$$

для которого выполняются свойства 1, 2 и 3 и следующие дополнительные свойства.

4. Мультипликативность. Взвешенное среднее геометрическое произведения $p_{ij} = p_i p_j$ распределений независимых объектов равно произведению их взвешенных средних геометрических

$$N(p_{12}) = N(p_1)N(p_2), \tag{1.2.16}$$

где

$$N(p_{12}) = 2^{\frac{\sum_i^m \sum_j^n (\log_2 p_{ij}) p_{ij}}{\sum_i^m \sum_j^n p_{ij}}}, \tag{1.2.17}$$

$$N(p_1) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}{\sum_i^m p_i}}, \quad N(p_2) = 2^{\frac{\sum_j^n (\log_2 p_j) p_j}{\sum_j^n p_j}}. \tag{1.2.18}$$

5. Взвешенное среднее геометрическое равновероятного распределения. Подставим равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m} \tag{1.2.19}$$

в определение (1.2.1) и получим среднее геометрическое

$$N(p) = \frac{1}{m}, \tag{1.2.20}$$

обратно пропорциональное числу возможных состояний объекта.

Далее примем $T = u$ и $T = p/u$ и определим средние геометрические

$$N(u) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 u_i) p_i}{\sum_i^m p_i}}, \tag{1.2.21}$$

$$N\left(\frac{p}{u}\right) = 2^{\frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}}, \tag{1.2.22}$$

которые имеют все приведенные свойства.

6. Взаимосвязь взвешенных средних геометрических распределений. Используем равенство (1.2.13) и получим следующее соотношение:

$$N\left(\frac{p}{u}\right)=\frac{N(p)}{N(u)}. \tag{1.2.23}$$

Подставив в (1.2.23) равновероятное распределение (1.2.19), получим

$$N\left(\frac{p}{u}\right)=mN(p). \tag{1.2.24}$$

Приведем непрерывные аналоги взвешенных средних геометрических распределений

$$N(p)=2^{\frac{\int_G(\log_2 p)pdX}{\int_G pdX}}, \quad N(u)=2^{\frac{\int_G(\log_2 u)pdX}{\int_G pdX}}, \tag{1.2.25}$$

$$N\left(\frac{p}{p_0}\right)=2^{\frac{\int_G\left(\log_2\frac{p}{p_0}\right)pdX}{\int_G pdX}} \tag{1.2.26}$$

и их логарифмы

$$\log_2 N(p)=\frac{\int_G(\log_2 p)\,pdX}{\int_G pdX}, \quad \log_2 N(u)=\frac{\int_G(\log_2 u)\,pdX}{\int_G pdX}, \tag{1.2.27}$$

$$\log_2 N\left(\frac{p}{u}\right)=\frac{\int_G\left(\log_2\frac{p}{u}\right)pdX}{\int_G pdX}. \tag{1.2.28}$$

Предопределяя дальнейшие результаты, отметим, что функционалы

$$H(p)=-\log_2 N(p), \tag{1.2.29}$$

$$H(p:u)=-\log_2 N(u), \tag{1.2.30}$$

$$I(p:u)=\log_2 N\left(\frac{p}{u}\right) \tag{1.2.31}$$

есть аддитивные выражения энтропии Шеннона–Винера, меры неточности Керриджа и информации различия Кульбака–Лейблера в статистической теории информации.

Взвешенное среднее геометрическое (1.2.1) можно записать в эквивалентном виде [47]

$$N(T) = \exp\left(\frac{\sum_i^m (\ln T_i)\, p_i}{\sum_i^m p_i}\right). \qquad (1.2.32)$$

Тогда функционалы (1.2.29) и (1.2.31) с натуральным логарифмом находят применение в статистической физике [19, 21].

1.3. Принцип минимума среднего геометрического распределения

Рассмотрим экстремум среднего геометрического распределения

$$N(p) = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i} \qquad (1.3.1)$$

при сохранении нормировки

$$\sum_i^m p_i = 1. \qquad (1.3.2)$$

Это позволит найти вероятное распределение, при котором достигается экстремальное значение среднего геометрического. Согласно вариационному принципу, вычислим безусловный экстремум функционала

$$L = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i} - \alpha \sum_i^m p_i\,, \qquad (1.3.3)$$

где α есть множитель Лагранжа.

Приравнивая нулю первую вариацию

$$\delta L = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i} \ln 2 \cdot \sum_i^m \delta p_i \left(\log_2 p_i + \frac{1}{\ln 2}\right) - \alpha \sum_i^m \delta p_i = 0\,, \qquad (1.3.4)$$

получим равенство

$$\gamma\left[(\ln 2)\log_2 p_i + 1\right] - \alpha = 0\,,\ \gamma = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}\,, \qquad (1.3.5)$$

из которого с учетом условия нормировки вытекает равновероят ное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \tag{1.3.6}$$

Подставим (1.3.6) в (1.3.1) и получим экстремальное значение среднего геометрического

$$N(p) = \frac{1}{m}. \tag{1.3.7}$$

Далее рассмотрим вариационный принцип экстремума среднего геометрического распределения при дополнительных условиях заданности среднего значения случайной энтропии $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$ и нормировки

$$H(p) = \sum_i^m h_i p_i, \quad \sum_i^m p_i = 1. \tag{1.3.8}$$

Определим функционал

$$L = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i} + \tau \sum_i^m h_i p_i - \alpha \sum_i^m p_i, \tag{1.3.9}$$

где α и τ есть множители Лагранжа. Используя равенство

$$\delta L = 2^{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i} \ln 2 \cdot \sum_i^m \delta p_i \left(\log_2 p_i + \frac{1}{\ln 2} \right) +$$

$$+ \tau \sum_i^m h_i \delta p_i - \alpha \sum_i^m \delta p_i = 0, \tag{1.3.10}$$

получим

$$\gamma \left[(\ln 2) \log_2 p_i + 1 \right] + \tau h_i - \alpha = 0. \tag{1.3.11}$$

Поскольку α и τ имеют произвольные значения, то примем $\gamma \ln 2 = \alpha = \tau$. Тогда из (1.3.11) следует распределение

$$p_i = 2^{-h_i} \tag{1.3.12}$$

и значение случайной энтропии

$$h_i(p) = -\log_2 p_i. \tag{1.3.13}$$

Усредняя (1.3.13), получим функционал:

$$H(p) = \sum_i^m h(p_i)\, p_i = -\sum_i^m (\log_2 p_i)\, p_i\,, \tag{1.3.14}$$

подстановка которого в (1.3.1) дает экстремальные выражения

$$N(p) = 2^{-H(p)}, \quad H(p) = -\log_2 N(p). \tag{1.3.15}$$

Наконец находим экстремум среднего геометрического от величины p/u

$$N\left(\frac{p}{u}\right) = 2^{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i} \tag{1.3.16}$$

при дополнительных условиях

$$I(p:u) = \sum_i^m I_i p_i, \quad \sum_i^m p_i = 1. \tag{1.3.17}$$

Тогда задача сводится к нахождению безусловного экстремума следующего функционала

$$L = 2^{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i} - \tau \sum_i^m I_i p_i - \alpha \sum_i^m p_i \tag{1.3.18}$$

с множителями Лагранжа α и τ. Из условия $\delta L = 0$ получим

$$\gamma\left[(\ln 2)\log_2 \frac{p_i}{u_i} + 1\right] - \tau I_i - \alpha = 0 \tag{1.3.19}$$

и при $\gamma \ln 2 = \alpha = \tau$ окончательно имеем выражения

$$p_i = u_i 2^{I_i}\,, \tag{1.3.20}$$

$$I_i = I(p_i : u_i) = \log_2 \frac{p_i}{u_i}\,. \tag{1.3.21}$$

Усреднение случайной информации различия (1.3.21) приводит к функционалу

$$I(p:p_0) = \sum_i^m I_i(p:p_0)\, p_i = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{p_{0i}}\right) p_i\,. \tag{1.3.22}$$

Для среднего геометрического получим экстремальное значение:

$$N\left(\frac{p}{p_0}\right)=2^{I(p:p_0)},\ I(p:u)=\log_2 N\left(\frac{p}{u}\right). \qquad (1.3.23)$$

Полученные экстремумы для средних геометрических соответствуют минимуму рассматриваемых функционалов, поскольку выполняются, соответственно, неравенства для второй вариации

$$\delta^2 L=\left[\delta N(p)\right]^2\left[N(p)\right]^{-1}+N(p)\sum_i^m\frac{(\delta p_i)^2}{p_i}\geq 0, \qquad (1.3.24)$$

$$\delta^2 L=\left[\delta N\left(\frac{p}{u}\right)\right]^2\left[N\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-1}+N\left(\frac{p}{u}\right)\sum_i^m\frac{(\delta p_i)^2}{p_i}\geq 0. \qquad (1.3.25)$$

Следовательно, в экстремуме энтропия Шеннона–Винера $H(p)$ и информация различия Кульбака–Лейблера $I(p:u)$ имеют максимум и минимум соответственно.

1.4. Тип аддитивной энтропии, меры неточности и информации различия

Рассмотрим случайный объект, который состоит их двух независимых объектов. Используем свойство мультипликативности среднего геометрического

$$N=N_1N_2, \qquad (1.4.1)$$

для произведения $p_{ij}=p_i p_j$ распределений независимых объектов, где $N=N(p_{12})$, $N_1=N(p_1)$ и $N_2=N(p_2)$ определяются формулами (1.2.17) и (1.2.18).

Далее положим, что выполняется свойство аддитивности для энтропий

$$H=H_1+H_2, \qquad (1.4.2)$$

которые зависят от соответствующих средних геометрических

$$H=H(N),\quad H_1=H_1(N_1),\quad H_2=H_2(N_2). \qquad (1.4.3)$$

Тогда, дифференцируя (1.4.1) и учитывая равенства

$$\frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_1}\frac{dN_1}{dH_1}\frac{dH_1}{dH},\qquad \frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_2}\frac{dN_2}{dH_2}\frac{dH_2}{dH} \qquad (1.4.4)$$

получим уравнение:

$$\frac{d\ln N}{dH}=\frac{d\ln N_1}{dH_1}=\frac{d\ln N_2}{dH_2}=-\lambda\,, \tag{1.4.5}$$

где λ – произвольная постоянная.

Решением уравнения (1.4.5) является физическая безразмерная энтропия с точностью до коэффициента λ^{-1}

$$H^{phys}\left(p\right)=-\lambda^{-1}\ln N\left(p\right). \tag{1.4.6}$$

Используем свойство нормированности энтропии на единицу в теории информации, и получим значение $\lambda=\ln 2$. Энтропия (1.4.6) принимает для всех объектов одинаковый вид

$$H\left(p\right)=-\log_2 N\left(p\right)=-\frac{\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i}{\sum_i^m p_i}. \tag{1.4.7}$$

Далее определим следующие геометрические средние:

$$N=N\left(u_{12}\right),\ \ N_1=N\left(u_1\right),\ \ N_2=N\left(u_2\right), \tag{1.4.8}$$

$$N=N\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right),\ \ N_1=N\left(\frac{p_1}{u_1}\right),\ \ N_2=N\left(\frac{p_2}{u_2}\right), \tag{1.4.9}$$

где $p_{12}=p_1p_2$, $u_{12}=u_1u_2$. Аналогично используем свойства мультипликативности $N=N_1N_2$ для независимых объектов и аддитивности для мер неточности и информаций различия

$$H=H_1+H_2, \tag{1.4.10}$$

$$I=I_1+I_2. \tag{1.4.11}$$

В итоге получим уравнения

$$\frac{d\ln N}{dH}=\frac{d\ln N_1}{dH_1}=\frac{d\ln N_2}{dH_2}=-\lambda\,, \tag{1.4.12}$$

$$\frac{d\ln N}{dI}=\frac{d\ln N_1}{dI_1}=\frac{d\ln N_2}{dI_2}=\lambda\,, \tag{1.4.13}$$

решениями которых при $\lambda=\ln 2$ являются мера неточности и информация различия:

$$H(p:u) = -\log_2 N(u) = -\frac{\sum_i^m (\log_2 u_i) p_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{1.4.14}$$

$$I(p:u) = \log_2 N\left(\frac{p}{u}\right) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}. \tag{1.4.15}$$

Таким образом, используя свойства мультипликативности, аддитивности и нормированности доказали, что существует только один тип энтропии, меры неточности и информации различия.

1.5. Энтропия Шеннона–Винера. Информация и мера Хартли

К статистическим свойствам случайного объекта относится мера информации как мера статистической неопределенности (или случайности) в состояниях, выражаемая некоторым функционалом от распределения. Для аддитивных объектов таким функционалом является энтропия Шеннона–Винера [5, 50]

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}{\sum_i^m p_i}. \tag{1.5.1}$$

При выполнении условия вероятностной нормировки

$$\sum_i^m p_i = 1 \tag{1.5.2}$$

взвешенное среднее (1.5.1) случайной энтропии

$$h(p_i) = -\log_2 p_i \tag{1.5.3}$$

принимает следующий вид:

$$H(p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i. \tag{1.5.4}$$

Приведем основные свойства энтропии Шеннона–Винера.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал, то есть справедливы неравенства

$$H\left(p\right)\ge 0\,, \tag{1.5.5}$$

$$H\left(a_1 p_1 + a_2 p_2\right) \le a_1 H\left(p_1\right) + a_2 H\left(p_2\right). \tag{1.5.6}$$

Здесь $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и энтропии

$$H\left(p_1\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_{1i}\right) p_{1i}\,,\ \ H\left(p_2\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_{2i}\right) p_{2i} \tag{1.5.7}$$

с нормированными распределениями

$$\sum_i^m p_{1i} = \sum_i^m p_{2i} = 1\,. \tag{1.5.8}$$

2. Аддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением $p_{ij} = p_i p_j$, а p_i и p_j относятся к разным независимым объектам. Общая энтропия запишется как

$$H\left(p_{12}\right) = -\sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 p_{ij}\right) p_{ij}\,, \tag{1.5.9}$$

где условия нормировки

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1\,. \tag{1.5.10}$$

Тогда из (1.5.4) вытекает свойство аддитивности для энтропий независимых объектов

$$\begin{gathered} H\left(p_{12}\right) = H\left(p_1\right) + H\left(p_2\right), \\ H\left(p_1\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i, \quad H\left(p_2\right) = -\sum_j^n \left(\log_2 p_j\right) p_j. \end{gathered} \tag{1.5.11}$$

3. Аддитивность для зависимых объектов. В общем случае зависимых объектов для нормированных распределений имеем соотношения

$$p_{ij} = p_i p_{j|i} = p_j p_{i|j} \quad \text{(теорема умножения);} \tag{1.5.12}$$

$$p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \quad \text{(теорема сложения);} \tag{1.5.13}$$

$$p_i = \sum_j^n p_{i|j} p_j, \quad p_j = \sum_i^m p_{j|i} p_i \quad \text{(теорема разложения).} \qquad (1.5.14)$$

Логарифмируя произведение распределений (1.5.12), получим аддитивность случайных энтропий

$$h\left(p_{ij}\right) = h\left(p_i\right) + h\left(p_{j|i}\right). \qquad (1.5.15)$$

Здесь $h\left(p_{j|i}\right) = -\log_2 p_{j|i}$ – случайная условная энтропия с условным распределением $p_{j|i}$. Учитывая условия нормировки

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = 1, \qquad (1.5.16)$$

получим свойство аддитивности для энтропий статистически зависимых объектов

$$H\left(p_{12}\right) = H\left(p_1\right) + H\left(p_2 \middle| p_1\right), \qquad (1.5.17)$$

где условная энтропия объекта с распределением $p_{2|1}$

$$H_i\left(p_{2|1}\right) = -\sum_j^n \left(\log_2 p_{j|i}\right) p_{j|i} \qquad (1.5.18)$$

и ее среднее значение

$$H\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_i^m p_i H_i\left(p_{2|1}\right) \qquad (1.5.19)$$

вычисляются при условии реализации состояния с распределением p_1.

Если реализуется состояние с распределением p_2, то $p_{ij} = p_j p_{i|j}$ и тогда получаем энтропии

$$H\left(p_{12}\right) = H\left(p_2\right) + H\left(p_1 \middle| p_2\right), \qquad (1.5.20)$$

$$H_j\left(p_{1|2}\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_{i|j}\right) p_{i|j}, \qquad (1.5.21)$$

$$H\left(p_1 \middle| p_2\right) = \sum_j^n p_j H_j\left(p_{1|2}\right). \qquad (1.5.22)$$

С учетом (1.5.17) и (1.5.20) имеем равенство:

$$H\left(p_1\right)+H\left(p_2\middle|p_1\right)=H\left(p_2\right)+H\left(p_1\middle|p_2\right). \qquad (1.5.23)$$

В частном случае независимости объектов соотношения (1.5.17) и (1.5.20) переходят в (1.5.11).

Для трех зависимых объектов имеем следующие распределения

$$p_i=\sum_j^n\sum_k^r p_{ijk}, \quad p_{ij}=\sum_k^r p_{ijk}, \quad p_{i|j}=\frac{\sum_k^r p_{ijk}}{\sum_i^m\sum_k^r p_{ijk}}, \qquad (1.5.24)$$

$$p_{i,j|k}=\frac{p_{ijk}}{\sum_i^m\sum_j^n p_{ijk}}, \quad p_{i|j,k}=\frac{p_{ijk}}{\sum_i^m p_{ijk}}, \qquad (1.5.25)$$

для которых справедливы формулы

$$p_{ijk}=p_k p_{i,j|k}=p_{k|i,j}p_{ij}=p_i p_{j|i}p_{k|i,j}, \qquad (1.5.26)$$

$$p_{ij}=p_i p_{j|i}, \quad p_{i|j}=\sum_k^r p_{i,k|j}, \qquad (1.5.27)$$

$$p_{i,j|k}=p_{j|k}p_{i|j,k}=\frac{p_i p_{i|j}p_{i|j,k}}{\sum_i^m p_j p_{i|j}}. \qquad (1.5.28)$$

Вводим соответствующие энтропии

$$H\left(p_{123}\right)=-\sum_i^m\sum_j^n\sum_k^r\left(\log_2 p_{ijk}\right)p_{ijk}, \qquad (1.5.29)$$

$$H\left(p_{12}\right)=-\sum_i^m\sum_j^n\sum_k^r\left(\log_2 p_{ij}\right)p_{ijk}, \qquad (1.5.30)$$

$$H\left(p_1\right)=-\sum_i^m\sum_j^n\sum_k^r\left(\log_2 p_i\right)p_{ijk}, \qquad (1.5.31)$$

$$H\left(p_1\middle|p_2\right)=-\sum_i^m\sum_j^n\sum_k^r\left(\log_2 p_{i|j}\right)p_{ijk}, \qquad (1.5.32)$$

$$H\left(p_1, p_2 \middle| p_3\right) = -\sum_i^m \sum_j^n \sum_k^r \left(\log_2 p_{i,j|k}\right) p_{ijk}\,, \qquad (1.5.33)$$

$$H\left(p_1 \middle| p_2, p_3\right) = -\sum_i^m \sum_j^n \sum_k^r \left(\log_2 p_{i|j,k}\right) p_{ijk} \qquad (1.5.34)$$

и в итоге для них имеем свойство аддитивности в виде

$$H\left(p_{123}\right) = H\left(p_1\right) + H\left(p_2, p_3 \middle| p_1\right) = H\left(p_{12}\right) +$$
$$+ H\left(p_3 \middle| p_1, p_2\right) = H\left(p_1\right) + H\left(p_2 \middle| p_1\right) + H\left(p_3 \middle| p_1, p_2\right). \qquad (1.5.35)$$

4. Флуктуация. Используем выражение флуктуации микроскопической энтропии

$$\Delta h\left(p_i\right) = h\left(p_i\right) - H\left(p\right) \qquad (1.5.36)$$

и запишем распределение в виде

$$p_i = 2^{-\left[H(p) - \Delta h_i(p)\right]}. \qquad (1.5.37)$$

Из условия нормировки получим формулы

$$p_i = \frac{2^{-\Delta h\left(p_i\right)}}{\sum_i^m 2^{-\Delta h\left(p_i\right)}}, \qquad (1.5.38)$$

$$H\left(p\right) = \log_2 \sum_i^m 2^{-\Delta h\left(p_i\right)}, \qquad (1.5.39)$$

позволяющие находить распределение и энтропию с использованием значения флуктуации $\Delta h\left(p_i\right)$.

5. Энтропия равновероятного состояния. Пусть в случайном объекте отсутствуют флуктуации микроскопической энтропии и $\Delta h_i\left(p\right) = 0$. Из (1.5.38) и (1.5.39) вытекает равновероятное распределение и соответствующая энтропия

$$p_i = \frac{1}{m}, \qquad (1.5.40)$$

$$H\left(p\right) = \log_2 m\,. \qquad (1.5.41)$$

6. Неравенства. Энтропия Шеннона–Винера также удовлетворяет основным неравенствам:

$$H\left(p_{12}\right) \leq H\left(p_1\right) + H\left(p_2\right), \tag{1.5.42}$$

$$H\left(p_2\right) \geq H\left(p_1 \middle| p_2\right), \quad H\left(p_1\right) \geq H\left(p_2 \middle| p_1\right), \tag{1.5.43}$$

$$H\left(p\right) \leq \log_2 m, \tag{1.5.44}$$

$$H\left(p_1 \middle| p_2, p_3\right) \leq H\left(p_1 \middle| p_3\right), \tag{1.5.45}$$

$$H\left(p_1, p_2 \middle| p_3\right) \leq H\left(p_1, p_2\right), \tag{1.5.46}$$

$$H\left(p_1 \middle| p_3\right) \leq H\left(p_1 \middle| p_2\right) + H\left(p_2 \middle| p_3\right), \tag{1.5.47}$$

$$\frac{H\left(p_1 \middle| p_3\right)}{H\left(p_1, p_3\right)} \leq \frac{H\left(p_1 \middle| p_2\right)}{H\left(p_1, p_2\right)} + \frac{H\left(p_2 \middle| p_3\right)}{H\left(p_2, p_3\right)}, \tag{1.5.48}$$

которые вытекают из свойства выпуклости информации различия.

7. Энтропийное расстояние. Геометрическая интерпретация энтропии в виде $\delta\left(p_1, p_2\right) = H\left(p_1 \middle| p_2\right) + H\left(p_2 \middle| p_1\right)$ соответствует расстоянию от p_1 до p_2. Выполняется неравенство треугольника

$$\delta\left(p_1, p_3\right) \leq \delta\left(p_1, p_2\right) + \delta\left(p_2, p_3\right), \tag{1.5.49}$$

где $\delta\left(p_1, p_2\right) \geq 0$, $\delta\left(p_1, p_1\right) = 0$ и $\delta\left(p_1, p_2\right) = \delta\left(p_2, p_1\right)$. Рассматривается также выражение

$$\delta'\left(p_1, p_2\right) = \frac{\delta\left(p_1, p_2\right)}{H\left(p_{12}\right)} = 1 - \frac{I\left(p_{12} : p_1 p_2\right)}{H\left(p_{12}\right)}, \tag{1.5.50}$$

которое равняется нулю при $H\left(p_{12}\right) = 0$. Подробно о статистических расстояниях можно ознакомиться в монографиях [71, 91, 125].

8. Нормированность и размерность. В результате эксперимента мера неопределенности состояний становится известной и является информацией объекта о самом объекте. За единицу измерения информации принимается неопределенность, при которой выполняется свойство нормированности энтропии

$$H\left(p\right) = -\sum_{i}^{m} \left(\log_2 p_i\right) p_i = 1. \tag{1.5.51}$$

Выбирая наименьшее число возможных состояний $m = 2$, получим из (1.5.51) значения $p_1 = p_2 = 1/2$. Таким образом, наименьшая единица измерения информации есть двоичная единица энтропии системы, которая имеет название один бит (от binary digit)

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\sum_{i}^{2}\left(\log_2 p_i\right)p_i=1. \tag{1.5.52}$$

В случае десятичного и натурального логарифма в (1.5.4) единица измерения информации называется дитом или натом (от natural digit), соответственно. Для перехода между этими единицами измерения имеем равенство $1\text{дит}=\left(1/\lg 2\right)\text{бит}$ и $1\text{нат}=\left(1/\ln 2\right)$ бит. Для физической теории информации имеем энтропию

$$H^{phys}\left(p\right)=-\sum_{i}^{m}\left(\ln p_i\right)p_i\,. \tag{1.5.53}$$

В статистической физике используется единица измерений, имеющая размерность постоянной Больцмана. Тогда получим размерную физическую энтропию Больцмана–Гиббса $H\left(p\right)=kH^{phys}\left(p\right)$ [1, 6].

Энтропия Шеннона–Винера есть отношение физической энтропии к ее значению при равновероятном состоянии с $m=2$, то есть выполняется равенство

$$H\left(p\right)=\frac{H^{phys}\left(p\right)}{H^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\quad H^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\ln 2\,. \tag{1.5.54}$$

Рассмотрим случай, когда состояния аддитивного объекта являются равновероятными и статистически независимыми при n наблюдениях. Тогда справедливы следующие выражения

$$p_i=\prod_{k}^{n}p_{ik},\quad \sum_{i}^{m}p_i=\sum_{i}^{m}p_{ik}=1, \tag{1.5.55}$$

где $k=1,\ldots,n$ и распределение

$$p_{ik}=\frac{1}{m}\,. \tag{1.5.56}$$

В итоге из (1.5.4) получим меру информации Хартли [77]:

$$H\left(p\right)=-\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right)p_i=n\log_2 m\,. \tag{1.5.57}$$

Из (1.5.57) следует, что информация есть логарифмическая мера от числа равновероятных состояний случайного объекта, пропорциональная числу наблюдений n, и составляет $\log_2 m$ бит.

9. f-энтропия. Функциональные обобщения энтропии определяются выражениями

$$H_f(p)=\sum_i^m f(p_i)\,p_i\,, \tag{1.5.58}$$

$$H_f(p)=\sum_i^m f(p_i), \tag{1.5.59}$$

$$H_f(p)=f\left[N(p)\right], \tag{1.5.60}$$

где f есть выпуклая функция.

При $f=-\log_2 p_i$, $f=-(\log_2 p_i)\,p_i$ и $f=-\log_2 N(p)$ из (1.5.58), (1.5.59) и (1.5.60) следует традиционная мера информации Шеннона–Винера.

Функционал (1.5.58) является средним значением случайной энтропии, выражение (1.5.59) с информационной функцией $f(p)$ рассматривалось в работах [53, 58], а (1.5.60) есть функция от геометрического среднего распределения.

1.6. Аксиомы Хинчина. Аксиомы Фаддеева и метод информационной функции Дароши

Единственность функционала Шеннона–Винера, совместимого с приведенными свойствами, доказал впервые аксиоматическим подходом А.Я. Хинчин [48, 49]. Были сформулированы для дискретного случая распределения $p=\{p_1,\ldots,p_m\}$ основополагающие аксиомы:

1. $H(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ непрерывна относительно $p_1,p_2,\ldots,p_m$ в области $0\le p_i\le 1$ и $\sum_i^m p_i=1$.

2. $H(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ симметрична относительно $p_1,p_2,\ldots,p_m$.

3. $H(p_1,p_2,\ldots,p_m,0)=H(p_1,p_2,\ldots,p_m)$. Это означает, что добавление к множеству состояний невозможного состояния не изменяет неопределенность.

4. $H\left(p_{11},\dots,p_{1n};p_{21},\dots,p_{2n};\dots;p_{m1},\dots,p_{mn}\right)=$

$$=H\left(p_1,p_2,\dots,p_m\right)+\sum_i^m p_i H_i\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\dots,\frac{p_{in}}{p_i}\right), \qquad (1.6.1)$$

где p_{ij} – нормированное совместное распределение статистически зависимых объектов с

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}=1, \quad p_i=\sum_j^n p_{ij} \quad \left(p_{ij}\geq 0\right). \qquad (1.6.2)$$

5. $H\left(p_1,p_2,\dots,p_m\right)\leq H\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$. Это означает, что функционал имеет наибольшее значение при $p_1=p_2=\ldots=p_m=1/m$.

Определяя энтропию аксиомами Хинчина с точностью до постоянного положительного множителя λ^{-1}, получим логарифмическую меру [48, 49]

$$H\left(p_1,p_2,\dots,p_m\right)=-\lambda^{-1}\sum_i^m\left(\log_a p_i\right)p_i. \qquad (1.6.3)$$

При натуральном логарифме и $\lambda=1$ имеем физическую безразмерную энтропию $H^{phys}\left(p\right)=-\sum_i^m\left(\ln p_i\right)p_i$.

6. Условие нормированности. Выбирая двоичную единицу энтропии с $a=2$ и учитывая условие нормированности

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1, \qquad (1.6.4)$$

окончательно получим функционал Шеннона–Винера

$$H\left(p\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i. \qquad (1.6.5)$$

Д.К. Фаддеев [43] упростил систему аксиом Хинчина и предложил следующие аксиомы:

1. $H\left(p_1,p_2\right)=H\left(1-p,p\right)$ непрерывна при $0\leq p\leq 1$ и положительна хотя бы в одной точке.

2. $H\left(p_1,p_2,\dots,p_m\right)$ симметрична относительно $p_1,p_2,\dots,p_m$.

3. При $m\geq 2$

$$H\left(p_1,\ldots,p_{m-1},p_m,p_{m+1}\right)=H\left(p_1,\ldots,p_{m-1},p_m+p_{m+1}\right)+$$
$$+\left(p_m+p_{m+1}\right)H\left(\frac{p_m}{p_m+p_{m+1}},\frac{p_{m+1}}{p_m+p_{m+1}}\right),\quad p_m+p_{m+1}>0. \qquad (1.6.6)$$

Аксиомами Фаддеева энтропия при $m=2$ определяется однозначно с точностью до коэффициента λ^{-1} и имеет вид

$$H\left(p,\ 1-p\right)=-\lambda^{-1}\left[p\log_a p+\left(1-p\right)\log_a\left(1-p\right)\right]. \qquad (1.6.7)$$

Учитывая размерность и условие нормированности (1.5.50), имеем $a=2,\quad \lambda^{-1}=1$, а (1.6.7) запишется так:

$$H\left(p,\ 1-p\right)=-\left[p\log_2 p+\left(1-p\right)\log_2\left(1-p\right)\right]. \qquad (1.6.8)$$

Переход к общему случаю с $m>2$ осуществляется методом математической индукции на основании аксиомы 3.

В работе [43] отмечается, что разница в этих двух системах аксиом заключается в следующем. Во-первых, аксиома 5 (экстремальность) в системе Хинчина заменяется требованием положительности энтропии в одной точке и, во-вторых, аксиомы 3 и 4 заменяются одной аксиомой 3 системы Фаддеева, очень естественной, если рассмотреть энтропию как меру неопределенности состояний случайного объекта.

Далее З. Дароши [52, 53, 72] представил аксиому 3 системы Фаддеева в общем виде с групповым усреднением

$$H\left(p_1,\ldots,p_m\right)=\sum_{k=2}^{m}\left(p_1+p_2+\ldots+p_k\right)f\left(\frac{p_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right). \qquad (1.6.9)$$

Здесь так называемая информационная функция $f\left(x\right)$ при $m=2$ удовлетворяет граничным условиям

$$f\left(0\right)=f\left(1\right),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (1.6.10)$$

и функциональному уравнению

$$f\left(x\right)+\left(1-x\right)f\left(\frac{y}{1-x}\right)=f\left(y\right)+\left(1-y\right)f\left(\frac{x}{1-y}\right) \qquad (1.6.11)$$

для всех $\left(x,y\right)\in D$, где

$$D=\left\{\left(x,y\right):0\le x<1,\quad 0\le y<1,\quad x+y\le 1\right\}. \qquad (1.6.12)$$

Решением уравнения (1.6.11) является информационная функция

Дароши, равная энтропии Шеннона–Винера

$$H(p,\ 1-p) = f(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p). \qquad (1.6.13)$$

Такой подход с информационной функцией при $m=2$, зависящей от двух переменных, позволяет получить информацию различия Кульбака–Лейблера

$$I(1-p, p:1-u, u) = f(p,u) = p\log_2\frac{p}{u} + (1-p)\log_2\frac{1-p}{1-u}, \qquad (1.6.14)$$

которая удовлетворяет условию нормированности $I\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$.

Подробные математические выкладки метода информационной функции приводятся в монографии [53].

1.7. Определение информации в каналах связи. Формула Шеннона

Рассмотрим определение информации как количество снятой меры неопределенности о состояниях случайного сигнала в каналах связи. Пусть переданный сигнал характеризуется распределением $p_i\ (i=1,\ldots,m)$. Количество информации определяется априорной энтропией случайного сигнала [50]

$$H(p_1) = -\sum_i^m(\log_2 p_i)p_i, \quad \sum_i^m p_i = 1. \qquad (1.7.1)$$

Если полученный сигнал не равен переданному, то остается мера неопределенности после приема сигнала, характеризуемая условным распределением $p_{i|j}\ (j=1,\ldots,n)$. Соответствующая условная энтропия равняется

$$H_j\left(p_{1|2}\right) = -\sum_i^m\left(\log_2 p_{i|j}\right)p_{i|j}, \quad \sum_i^m p_{i|j} = 1, \qquad (1.7.2)$$

а ее среднее значение [50]

$$H(p_1|p_2) = -\sum_j^n p_j H_j\left(p_{1|2}\right) = -\sum_i^m\sum_j^n\left(\log_2 p_{i|j}\right)p_{i|j}p_j \qquad (1.7.3)$$

вычисляется по распределению принимаемого сигнала p_j. Выражение (1.7.3) есть апостериорная энтропия случайного сигнала.

Таким образом, информация, полученная после приема сигнала, равняется следующей разности [50]:

$$I = H(p_1) - H(p_1|p_2) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i + \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 p_{i|j}\right) p_{i|j} p_j \qquad (1.7.4)$$

между априорной и апостериорной энтропиями и отражает количество снятой неопределенности о случайном сигнале.

Перепишем (1.7.4) в следующем виде

$$I(p_{12} : p_1 p_2) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i + \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 p_{i|j}\right) p_{ij} =$$

$$= \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{i|j}}{p_i} \right) p_{ij} = \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{ij}}{p_i p_j} \right) p_{ij}, \qquad (1.7.5)$$

где $p_{ij} = p_j p_{i|j}$ есть совместное распределение переданного и полученного сигналов. Так как справедливо равенство $p_{ij} = p_i p_{j|i}$, то для полученной информации имеем также выражение

$$I(p_{12} : p_1 p_2) = H(p_2) - H(p_2|p_1) =$$

$$= -\sum_j^n (\log_2 p_j) p_j + \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 p_{j|i}\right) p_i p_{j|i} =$$

$$= \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{j|i}}{p_j} \right) p_{ij} = \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{ij}}{p_i p_j} \right) p_{ij}. \qquad (1.7.6)$$

В качестве примера из теории связи рассмотрим непрерывный канал с шумом. Источник посылает в канал сигналы с полосой частот $\Delta\nu$ за время t. Пусть x есть переданное сигнальное напряжение, а $x' = x + y$ определяет полученный сигнал при наличии шумового напряжения y. Величины x и y являются независимыми. Ограничимся гауссовыми сигналами и шумом. Тогда запишем непрерывный аналог информации (1.7.5) в натах

$$I = -\int p(x) \ln p(x) dx + \int p(x') \left[\int p(x|x') \ln p(x|x') dx \right] dx' =$$

$$= \iint p(x, x') \ln \frac{p(x, x')}{p(x)\, p(x')} dx dx'. \qquad (1.7.7)$$

Используя выражения совместного нормального распределения:

$$p(x,x') = \frac{1}{\left\{2\pi\mathbf{D}(x')\mathbf{D}(x)\left[1-r^2(x,x')\right]\right\}^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\left[1-r^2(x,x')\right]}\left[\frac{x^2}{\mathbf{D}(x)} - 2r(x,x')\frac{xx'}{\mathbf{D}(x)\mathbf{D}(x')} + \frac{x'^2}{\mathbf{D}(x')}\right]\right\}, \quad (1.7.8)$$

и частных нормальных распределений

$$p(x) = \frac{1}{\left\{2\pi\mathbf{D}(x)\right\}^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{\mathbf{D}(x)}\right], \quad (1.7.9)$$

$$p(x') = \frac{1}{\left\{2\pi\mathbf{D}(x')\right\}^{1/2}} \exp\left[-\frac{x'^2}{\mathbf{D}(x')}\right], \quad (1.7.10)$$

из (1.7.7) вытекает количество информации

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left[1-r^2(x,x')\right]. \quad (1.7.11)$$

Для расхождения имеем выражение

$$J = \frac{r^2(x,x')}{1-r^2(x,x')}. \quad (1.7.12)$$

Здесь дисперсии и коэффициент корреляции равняются

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{E}\left(x^2\right) = \int x^2 p(x)\,dx, \quad \mathbf{D}(x') = \mathbf{E}\left(x'^2\right) = \int x'^2 p(x')\,dx', \quad (1.7.13)$$

$$r(x,x') = \frac{1}{\left[\mathbf{D}(x)\mathbf{D}(x')\right]^{1/2}} \iint xx'p(x,x')\,dxdx'. \quad (1.7.14)$$

Поскольку x и x' зависимы, то принимается

$$p(x,x') = p(x)\,p(x'|x) = p(x)\,p(x'-x), \quad (1.7.15)$$

где условное нормальное распределение

$$p(x'|x) = \frac{1}{\left\{2\pi\mathbf{D}(x')\left[1-r^2(x,x')\right]\right\}^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\mathbf{D}(x')\left[1-r^2(x,x')\right]}\left[x' - xr(x,x')\left(\frac{\mathbf{D}(x')}{\mathbf{D}(x)}\right)^{1/2}\right]^2\right\}. \quad (1.7.16)$$

Учитывая (1.7.15), получим равенства

$$r(x,x')\left(\frac{\mathbf{D}(x')}{\mathbf{D}(x)}\right)^{1/2}=1,\quad r^2(x,x')=\frac{\mathbf{D}(x')}{\mathbf{D}(x)}=\frac{P}{P+N},\qquad (1.7.17)$$

где $P=\mathbf{E}\left(x^2\right)$ и $N=\mathbf{E}\left(y^2\right)$ есть средние значения мощности переданного сигнала и шума. Подставим коэффициент корреляции в (1.7.11) и (1.7.12), в результате имеем выражение для количества информации в полученном сигнале и значение расхождения

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{P}{N}\right),\qquad (1.7.18)$$

$$J=\frac{P}{N}.\qquad (1.7.19)$$

Для определения переданного сигнала необходимо $n=2\Delta\nu t$ независимых наблюдений [30, 31, 50]. Общее количество информации равняется nI и в итоге имеем знаменитую формулу Шеннона для пропускной способности канала

$$C=\frac{nI}{t}=\Delta\nu\ln\left(1+\frac{P}{N}\right).\qquad (1.7.20)$$

Из (1.7.20) следует, что уменьшение величины мощности шума позволяет увеличить количество переданной информации.

Общее количество расхождения равняется

$$nJ=2E/N_0,\qquad (1.7.21)$$

где $E=Pt$ есть полная энергия переданного сигнала, а $N_0=N/\Delta\nu$ – средняя мощность шума на единицу полосы частот.

В случае исчисления информации в битах необходимо разделить (1.7.18) и (1.7.20) на $\ln 2$, что в итоге дает

$$I=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right),\qquad (1.7.22)$$

$$C=\Delta\nu\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right).\qquad (1.7.23)$$

Перейдем к рассмотрению основных свойств информации различия.

1.8. Информация различия Кульбака–Лейблера

К статистическим свойствам объекта относится мера информации в одном состоянии относительно другого состояния, которая выражается функционалом Кульбака–Лейблера [33, 88]. В предыдущем параграфе приводился частный вид информации различия, имеющей важную роль в теории связи. Рассмотрим общий случай.

Пусть статистические наблюдения ведутся с распределением $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$ относительно состояния с $p_0 = \{p_{01}, \ldots, p_{0m}\}$. Тогда наблюдения характеризуются случайной информацией различия в виде разности случайных энтропий

$$I(p_i : u_i) = -\left[h(p_i) - h(u_i)\right] = \log_2 \frac{p_i}{u_i}. \qquad (1.8.1)$$

Взвешенное среднее значение есть информация различия Кульбака-Лейблера [33, 88]

$$I(p : u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i} \qquad (1.8.2)$$

или просто различающая информация.

При выполнении условия вероятностной нормировки

$$\sum_i^m p_i = 1 \qquad (1.8.3)$$

взвешенное среднее (1.8.2) принимает следующий вид

$$I(p : u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i, \qquad \sum_i^m u_i = 1. \qquad (1.8.4)$$

Приведем основные свойства различающей информации.

1. Положительность и выпуклость. Информация различия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал, то есть для произвольных p и u имеем неравенства

$$I(p : u) \geq 0, \qquad (1.8.5)$$

$$I\left((a_1 p_1 + a_2 p_2) : (a_1 u_1 + a_2 u_2)\right) \leq a_1 I(p_1 : u_1) + a_2 I(p_2 : u_2). \qquad (1.8.6)$$

Здесь $a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$ и информации различия с нормированными распределениями

$$I\left(p_1 : u_1\right) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_{1i}}{u_{1i}} \right) p_{1i}, \qquad \sum_i^m p_{1i} = 1, \tag{1.8.7}$$

$$I\left(p_2 : u_2\right) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_{2i}}{u_{2i}} \right) p_{2i}, \qquad \sum_i^m p_{2i} = 1. \tag{1.8.8}$$

Равенство в (1.8.5) достигается тогда и только тогда, когда $p = p_0$. Аналогичные неравенства справедливы для функционала (1.8.2).

2. Аддитивность для независимых объектов. Пусть два состояния объекта описываются нормированными совместными распределениями p_{12} и u_{12}. Информация различия имеет вид

$$I\left(p_{12} : u_{12}\right) = \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{ij}}{u_{ij}} \right) p_{ij}, \tag{1.8.9}$$

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m \sum_j^n u_{ij} = 1. \tag{1.8.10}$$

В случае статистической независимости состояний имеем равенства $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$. Из (1.8.9) следует свойство аддитивности для информации различия

$$I\left(p_{12} : u_{12}\right) = I\left(p_1 : u_1\right) + I\left(p_2 : u_2\right), \tag{1.8.11}$$

где

$$I\left(p_1 : q_1\right) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{q_i} \right) p_i, \quad I\left(p_2 : q_2\right) = \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_j}{q_j} \right) p_j. \tag{1.8.12}$$

3. Аддитивность для зависимых объектов. Рассмотрим переход от состояния с p_{ij} к состоянию с $u_{ij} = p_i p_j$. Тогда свойства аддитивности определяются в терминах условной энтропии. Для этого определим, согласно теоремам сложения и разложения (1.5.10), нормированные распределения:

$$p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \tag{1.8.13}$$

и условные распределения

$$p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{p_j}, \quad p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_i}. \tag{1.8.14}$$

Согласно (1.8.9), получим свойство аддитивности для зависимых систем в виде

$$\begin{aligned} I\left(p_{12} : p_1 p_2\right) &= \sum_i^m \sum_j^n \left(\log_2 \frac{p_{ij}}{p_i p_j} \right) p_{ij} = \\ &= H\left(p_1\right) + H\left(p_2\right) - H\left(p_{12}\right) = \\ &= H\left(p_1\right) - H\left(p_1 \middle| p_2\right) = H\left(p_2\right) - H\left(p_2 \middle| p_1\right), \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

где соответствующие энтропии

$$H\left(p_1\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i, \quad H\left(p_2\right) = -\sum_j^n \left(\log_2 p_j\right) p_j, \tag{1.8.16}$$

$$H_j\left(p_{1|2}\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_{i|j}\right) p_{i|j}, \quad H_i\left(p_{2|1}\right) = -\sum_j^n \left(\log_2 p_{j|i}\right) p_{j|i}, \tag{1.8.17}$$

$$H\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_i^m p_i H_i\left(p_{2|1}\right), \quad H\left(p_1 \middle| p_2\right) = \sum_j^n p_j H_j\left(p_{1|2}\right). \tag{1.8.18}$$

Таким образом, информация различия равняется разности энтропии Шеннона–Винера и средней условной энтропии. В теории связи, как было показано в предыдущем параграфе, эта информация различия характеризует пропускную способность канала. Остановимся подробнее на ее некоторых свойствах, в которых состояние с p_i и $p_{j|i}$ определяют, соответственно, как переданный и полученный сигналы.

Симметричность информации. Из определения функционала (1.8.15) следует равенство

$$I\left(p_{12} : p_1 p_2\right) = I\left(p_{21} : p_2 p_1\right) \geq 0, \tag{1.8.19}$$

которое означает, что положительная информация об объекте, содержащаяся в переданном и принимаемом сигналах, одинакова. Другими словами, неопределенность, снятая при посылке того, какой сигнал будет получен, равна неопределенности снятой при приеме сигнала того, какой сигнал был отправлен.

Информация о самом сигнале. Если $p_{ij} = p_i \delta_{ij}$ (где δ_{ij} – символ Кронекера), то из (1.8.15) вытекает количество информации

$$I = H\left(p\right) = -\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right) p_i \qquad (1.8.20)$$

о переданном сигнале, равное энтропии Шеннона–Винера.

В общем случае из определения положительной различающей информации вытекают известные неравенства для энтропий (1.5.42) и (1.5.43).

Уменьшение информации. Пусть новый переданный сигнал о системе характеризуется распределением $p' = \left\{p'_1, \ldots, p'_m\right\}$. Количество полученной информации не увеличивается, а становится меньше исходной. Доказательство приводится в монографии К. Шеннона [50].

Далее рассмотрим общий случай с совместными распределениями p_{12} и $u_{12} \neq p_1 p_2$. Тогда используя распределения

$$p_i = \sum_{j}^{n} p_{ij}, \quad u_i = \sum_{j}^{n} u_{ij}, \qquad (1.8.21)$$

$$p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_j}, \quad u_{j|i} = \frac{u_{ij}}{u_i}, \qquad (1.8.22)$$

получим следующее свойство аддитивности

$$I\left(p_{12} : u_{12}\right) = I\left(p_1 : u_1\right) + I\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right). \qquad (1.8.23)$$

Первое слагаемое в (1.8.23) есть информация различия в наблюдениях p_1 относительно u_1, а второе – среднее значение по p_1

$$I\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) = \sum_{i}^{m} I_i \left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) p_i \qquad (1.8.24)$$

условной различающей информации:

$$I_i\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right)=\sum_{j}^{n}\left(\log_2\frac{p_{j|i}}{u_{j|i}}\right)p_{j|i}. \tag{1.8.25}$$

При $u_{ij}=p_i p_j$ из (1.8.23) вытекает выражение (1.8.15).

Из (1.8.9) имеем свойство аддитивности в виде

$$I\left(p_{12}:u_{12}\right)=I\left(p_2:u_2\right)+I\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right), \tag{1.8.26}$$

где

$$I\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)=\sum_{j}^{n}I_j\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)p_j, \tag{1.8.27}$$

$$I_j\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_{i|j}}{u_{i|j}}\right)p_{i|j}. \tag{1.8.28}$$

Окончательно получим равенство

$$I\left(p_1:u_1\right)-I\left(p_2:u_2\right)=I\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)-I\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right). \tag{1.8.29}$$

Перейдем к случаю трех зависимых объектов. Учитывая формулы для распределений, энтропий и информаций различия

$$I\left(p_1:p_2\right)=H\left(p_1\right)-H\left(p_1\middle|p_2\right)=\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\left(\log_2\frac{p_{i|j}}{p_i}\right)p_{ij}, \tag{1.8.30}$$

$$I\left(p_1:p_2\middle|p_3\right)=H\left(p_1\middle|p_3\right)-H\left(p_1\middle|p_2,p_3\right)=$$

$$=\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\sum_{k}^{r}\left(\log_2\frac{p_{i,j|k}}{p_{i|k}}\right)p_{ijk}, \tag{1.8.31}$$

$$I\left(p_{12}:p_3\right)=H\left(p_{12}\right)-H\left(p_1,p_1\middle|p_3\right)=$$

$$=\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\sum_{k}^{r}\left(\log_2\frac{p_{i,j|k}}{p_{ij}}\right)p_{ijk}, \tag{1.8.32}$$

получим свойства аддитивности в следующем виде:

$$H\left(p_1\right)+H\left(p_2\right)+H\left(p_1,p_2\middle|p_3\right)=I\left(p_1:p_2\right)+I\left(p_{12}:p_3\right), \tag{1.8.33}$$

$$I\left(p_1:p_3\right)+I\left(p_1:p_2\middle|p_3\right)=I\left(p_1:p_2\right)+I\left(p_1:p_3\middle|p_2\right)=I\left(p_{12}:p_3\right). \quad (1.8.34)$$

4. Флуктуация. Рассмотрим флуктуацию случайной различающей информации

$$\Delta I\left(p_i:u_i\right)=I\left(p_i:u_i\right)-I\left(p:u\right) \quad (1.8.35)$$

и запишем распределение

$$p_i=u_i 2^{\left\{I\left(p_i:u_i\right)+\Delta I\left(p_i:u_i\right)\right\}}. \quad (1.8.36)$$

Используя условие нормировки (1.8.3), получим

$$p_i=\frac{u_i 2^{\Delta I\left(p_i:u_i\right)}}{\sum_i^m u_i 2^{\Delta I\left(p_i:u_i\right)}} \quad (1.8.37)$$

и информацию различия Кульбака–Лейблера

$$I\left(p:p_0\right)=\log_2\sum_i^m p_{0i}2^{\Delta I_i\left(p:p_0\right)}. \quad (1.8.38)$$

Введем флуктуации случайных энтропий

$$\Delta h\left(p_i\right)=-\log_2 p_i-H\left(p\right),\quad \Delta h\left(u_i\right)=-\log_2 u_i-H\left(u\right) \quad (1.8.39)$$

и информации различия

$$\Delta I_i\left(p:p_0\right)=-\left[\Delta h_i\left(p\right)-\Delta h_i\left(p_0\right)\right]+\mathbf{E}\left[\Delta h_i\left(p_0\right)\right], \quad (1.8.40)$$

где среднее значение

$$\mathbf{E}\left[\Delta h\left(u\right)\right]=\sum_i^m\left[\Delta h\left(u_i\right)\right]p_i. \quad (1.8.41)$$

Тогда выражения (1.8.37) и (1.8.38) примут следующий вид

$$p_i=\frac{p_{0i}2^{\left\{-\left[\Delta h_i(p)-\Delta h_i\left(p_0\right)\right]\right\}}}{\sum_i^m p_{0i}2^{\left\{-\left[\Delta h_i(p)-\Delta h_i\left(p_0\right)\right]\right\}}}, \quad (1.8.42)$$

$$I\left(p:u\right)=-\left[H\left(p\right)-H\left(u\right)\right]+\mathbf{E}\left[\Delta h\left(u\right)\right]=$$

$$=\log_2 \frac{\sum_i^m 2^{-\Delta h(u_i)}}{\sum_i^m 2^{-\{\Delta h(u_i)-\Delta I(p_i:u_i)\}}} = \log_2 \frac{\sum_i^m 2^{-\Delta h_i(p_0)}}{\sum_i^m 2^{-\{\Delta h_i(p)-\mathbf{E}(\Delta h_i(p_0))\}}}. \qquad (1.8.43)$$

Если отсутствует флуктуация случайной информации различия, то из (1.8.42) и (1.8.43) вытекают равенства

$$p_i = u_i, \quad I(p:u) = 0. \qquad (1.8.44)$$

Таким образом, задавая значения флуктуаций случайных энтропий и информации различия, можно находить распределение и среднее значение рассматриваемых случайных величин.

5. Информация различия с $u_i = 1/m$. Подставим в информацию различия (1.8.2) распределение равновероятного состояния

$$u_i = 1/m, \qquad (1.8.45)$$

где m – число состояний. Согласно (1.8.5) получим неравенство

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i} = -\frac{\left[H(p) - \log_2 m\right]}{\sum_i^m p_i} \geq 0, \qquad (1.8.46)$$

из которого следует, что энтропия равновероятного состояния больше, чем энтропия Шеннона–Винера произвольного состояния.

6. Неравенства. Информация различия удовлетворяет неравенствам

$$I(p_{12}:u_{12}) \leq I(p_1:u_1) + I(p_2:u_2), \qquad (1.8.47)$$

$$I(p_{12}:p_3) \geq I(p_1:p_3|p_2), \quad I(p_{12}:p_3) > I(p_2:p_3|p_1), \qquad (1.8.48)$$

$$I(p_1:p_3) \geq I(p_1:p_2), \quad I(p_1:p_3) > I(p_2:p_3), \qquad (1.8.49)$$

$$\begin{gathered} I(p_1:p_3) \geq I(p_1:p_3|p_2), \\ I(p_{12}:p_3) > I(p_2:p_3), \quad I(p_{12}:p_3) \geq I(p_1:p_3). \end{gathered} \qquad (1.8.50)$$

7. Негэнтропийный принцип Бриллюэна. Пусть среднее значение случайной энтропии $h(u_i)$ для распределений p_i и u_i одинаковы. Тогда справедливы равенства

$$\mathbf{E}\left[\Delta h(u)\right] = \sum_i^m \left[h(u_i) - H(u)\right] p_i = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) p_i + \sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) \; u_i = 0, \quad (1.8.51)$$

а в итоге получим значение различающей информации

$$I\left(p : p_0\right) = -\left[H(p) - H\left(p_0\right)\right] = \log_2 \frac{\sum_i^m 2^{-\Delta h_i(p_0)}}{\sum_i^m 2^{-\Delta h_i(p)}}. \quad (1.8.52)$$

Из (1.8.52) следует соотношение

$$H(p) = H(u) - I(p : u), \quad (1.8.53)$$

где информация различия представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и поэтому называется негэнтропией. Понятие негэнтропии, то есть изменение энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером [51]. В общем случае выполняется негэнтропийный принцип Бриллюэна [2, 3]

$$I(p : u) + \left[H(p) - H(u)\right] \geq 0, \quad (1.8.54)$$

где знак неравенства соответствует необратимым процессам, происходящим в случайном объекте.

Из (1.8.54) следует, что увеличение энтропии $H(p)$ до значения $H\left(p_0\right)$ происходит совместно с потерей информации различия $I(p : u)$. Н. Винер [5] также записал частный вид информации для равновероятных распределений с $p_i = 1/m$ и $u_j = 1/n$ в виде

$$I(p : u) = -\left[H(p) - H(u)\right] =$$
$$= \left[\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i - \sum_j^n \left(\log_2 u_j\right) u_j\right] = \log_2 \frac{m}{n} \quad (1.8.55)$$

логарифмической меры отношения чисел возможных состояний случайного объекта.

8. Расхождение. Определим количественную меру информации различия в наблюдениях u относительно p [33, 80]:

$$I(u:p)=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{u_i}{p_i}\right)u_i,\quad \sum_{i}^{m}u_i=\sum_{i}^{m}p_i=1 \tag{1.8.56}$$

и запишем следующий функционал

$$J(p:p_0)=I(p:p_0)+I(p_0:p)=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_i}{p_{0i}}\right)(p_i-p_{0i})\geq 0. \tag{1.8.57}$$

Величина $J(p:u)$, введенная в работе [80], называется расхождением и является логарифмической мерой трудности различия в наблюдениях p и u. Отметим некоторые свойства расхождения.

Расхождение обладает свойством симметричности относительно p и u, то есть $J(p:u)=J(u:p)$. Для информаций различия это свойство не выполняется $I(p:u)\neq I(u:p)$ и поэтому $I(p:u)$ и $I(u:p)$ можно рассматривать как направленные расхождения. Также функционал (1.8.57) является выпуклым и аддитивным для независимых объектов.

9. Мера неточности. К информационным свойствам объекта относится мера статистической неточности определения одного состояния случайного объекта относительно другого, которая выражается функционалом при аддитивности мер

$$H(p:u)=H(p)+I(p:u). \tag{1.8.58}$$

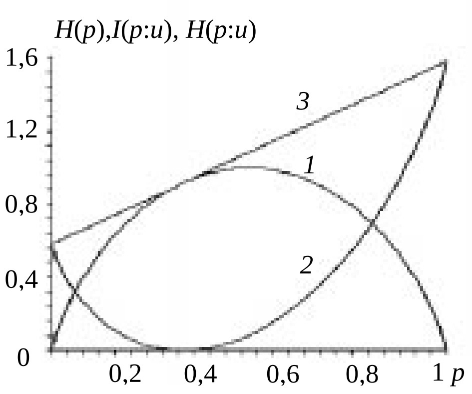
Из (1.8.58) следует, что мера неточности Керриджа [87]

$$H(p:u)=-\sum_{i}^{m}(\log_2 u_i)\,p_i \tag{1.8.59}$$

является средним значением случайной энтропии $h(u_i)=-\log_2 u_i$. Информация различия представляет собой отрицательный вклад в меру неточности и является, таким образом, информацией о снятой мере неточности.

При $u=p$ функционал (1.8.58) совпадает с энтропией Шеннона–Винера, то есть $H(p:p)=H(p)$.

На рис.1.1 представлены зависимости энтропии $H(p)$, информации различия $I(p:u)$ и меры неточности $H(p:u)$ от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$; а) $-u_1=1/3$, б) $-u_1=1/2$.



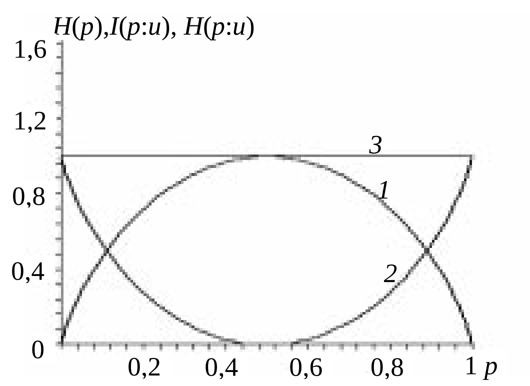


Рис.1.1. Зависимости функционалов модели Шеннона–Винера от распределения: *1* – энтропия $H(p)$, *2* – информация различия $I(p{:}u)$, *3* – мера неточности $H(p{:}u)$

Мера неточности изображается касательной к функции энтропии в точке u_1.

10. Информационный радиус. Геометрическая интерпретация неравенства (1.5.6) при $a_1 = a_2 = 1/2$ дает определение информационного радиуса [108]

$$R(p:u) = H\left(\frac{p+u}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[H(p) + H(u)\right] =$$

$$= \sum_{i}^{m}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\log_2 p_i\right)p_i + \left(\log_2 u_i\right)u_i\right] - \frac{p_i + u_i}{2}\log_2\frac{p_i + u_i}{2}\right\} \geq 0. \qquad (1.8.60)$$

Используя функционал (1.8.60), перепишем расхождение в виде

$$J(p:u) = 4\left[R(p:u) + T(p:u)\right], \qquad (1.8.61)$$

где второе слагаемое

$$T(p:u) = \sum_{i}^{m}\frac{p_i + u_i}{2}\log_2\frac{p_i + u_i}{2p_i^{1/2}u_i^{1/2}} \geq 0 \qquad (1.8.62)$$

введено и изучается в работе [121]. Функционалы (1.8.60) и (1.8.62) задаются также, как полусуммы информаций различия Кульбака–Лейблера [121]:

$$R(p:u)=\frac{1}{2}\left[I\left(p:\frac{p+u}{2}\right)+I\left(u:\frac{p+u}{2}\right)\right], \qquad (1.8.63)$$

$$T(p:u)=\frac{1}{2}\left[I\left(\frac{p+u}{2}:p\right)+I\left(\frac{p+u}{2}:u\right)\right]. \qquad (1.8.64)$$

11. Информационный коэффициент корреляции. Статистическая зависимость случайных объектов определяется информационным коэффициентом корреляции [92]

$$R_{12}=\sqrt{1-2^{-2I(p_{12}:p_1p_2)}}, \qquad (1.8.65)$$

где информация различия $I(p_{12}:p_1p_2)$ выражается формулой (1.8.15). Информационный коэффициент корреляции имеет значение $R_{12}=0$ тогда и только тогда, когда объекты независимы. В этом случае совместное распределение равняется $p_{ij}=p_ip_j$, что приводит к равенству $I(p_{12}:p_1p_2)=0$. В теории передачи информации в системах связи информационный коэффициент корреляции совпадает с коэффициентом корреляции для переданного и полученного сигналов, то есть $R_{12}=r(x,x')$ (см. разд. 1.7).

Информационный коэффициент корреляции также записывается в эквивалентном виде

$$R_{12}=\sqrt{1-N^2\left(\frac{p_{12}}{p_1p_2}\right)} \qquad (1.8.66)$$

или, разрешая (1.8.66) относительно среднего геометрического, получим

$$N\left(\frac{p_{12}}{p_1p_2}\right)=\sqrt{1-R_{12}^2}. \qquad (1.8.67)$$

12. Информационное расстояние. Геометрическая интерпретация информации различия в виде $\delta(p,u)=\frac{1}{2}I^2(p:u)$ соответствует половине несимметричного расстояния от p до u. Тогда неравенство треугольника не выполняется и имеем несимметричный аналог теоремы Пифагора:

$$I(p:u)=I(p:w)+I(w:u). \qquad (1.8.68)$$

Равенство в (1.8.68) достигается тогда и только тогда, когда справедливо условие

$$\sum_i^m \left(\log_2 \frac{w_i}{u_i} \right) p_i = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{w_i}{u_i} \right) w_i \,. \qquad (1.8.69)$$

В рассматриваемой интерпретации имеет место тождество параллелограмма

$$I(p:u) + I(w:u) = I\left(p : \frac{p+w}{2} \right) + I\left(w : \frac{p+w}{2} \right) + 2I\left(\frac{p+w}{2} : u \right). \qquad (1.8.70)$$

Вопрос об информационных расстояниях является частным случаем общей проблемы статистических расстояний [71, 91, 125].

13. Нормированность и размерность. Нормированность информации различия определяется равенством

$$I\left(1,0 : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_i^2 \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i = 1, \qquad (1.8.71)$$

которое выполняется тождественно. Информация различия есть отношение физической различающей информации к значению физической энтропии $H^{phys}(u)$ при равновероятном состоянии с $m = 2$

$$I(p:u) = \frac{I^{phys}(p:u)}{H^{phys}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \qquad (1.8.72)$$

где

$$I^{phys}(p:u) = \sum_i^m \left(\ln \frac{p_i}{u_i} \right) p_i \,, \quad H^{phys}(u) = -\sum_i^2 (\ln u_i) u_i \,, \qquad (1.8.73)$$

$$H^{phys}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I^{phys}\left(1,0 : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \ln 2 \,. \qquad (1.8.74)$$

В статистической физике используется размерная физическая информация различия $I(p:u) = kI^{phys}(p:u)$ [19, 21].

14. f **-информация различия.** Функциональные обобщения информации различия определяются выражениями:

$$I_f(p:u)=\sum_i^m f\left(\frac{u_i}{p_i}\right)p_i\,, \tag{1.8.75}$$

$$I_f(p:u)=\sum_i^m f\left(p_i,u_i\right), \tag{1.8.76}$$

где вводится выпуклая функция f. В частности, в теории передачи информации по каналам связи из (1.8.75) имеем следующую f-информацию различия

$$I_f\left(p_{12}:p_1p_2\right)=\sum_i^m\sum_j^n f\left(\frac{p_{ij}}{p_ip_j}\right)p_{ij}\,. \tag{1.8.77}$$

Для функции $f=-\left[h\left(p_i\right)-h\left(u_i\right)\right]$, являющейся случайной информацией различия, из (1.8.75) вытекает известная мера Кульбака–Лейблера. Функционал (1.8.75) представляет собой среднее значение от выпуклой функции, а функция $f\left(p,u\right)$ в (1.8.76) есть информационная функция. Свойства информаций различия (1.8.75) и (1.8.77) детально исследованы в работах [69 – 71, 125].

В случае трех распределений функционал (1.8.75) запишется так [122]:

$$I_f(p:w:u)=\sum_i^m f\left(\frac{w_i}{u_i}\right)p_i\,. \tag{1.8.78}$$

Если $f=\log_2\left(w_i/u_i\right)$ есть случайная информация различия, то обобщенное выражение [122]

$$\begin{aligned} I(p:w:u)&=\sum_i^m\left(\log_2\frac{w_i}{u_i}\right)p_i=I(p:w)-I(p:u)=\\ &=-\left[H(p:w)-H(p:u)\right] \end{aligned} \tag{1.8.79}$$

представляет собой разность информаций различия либо разность мер неточности.

Определим также f-информации различия:

$$I_f(p:u)=f\left[N\left(\frac{p}{u}\right)\right],\ I_f(p:w:u)=f\left[N\left(\frac{w}{u}\right)\right], \tag{1.8.80}$$

где среднее геометрическое распределение

$$N\left(\frac{w}{u}\right)=2^{\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{w_i}{u_i}\right)p_i}. \tag{1.8.81}$$

Пусть f есть логарифмическая функция, тогда из (1.8.80) следуют выражения (1.8.4) и (1.8.79). При $w=p$ из (1.8.79) и (1.8.80) вытекают, соответственно, информация различия Кульбака–Лейблера и f-информация различия (1.8.75).

1.9. Экстремальные свойства мер информации

Приведем экстремальные свойства мер информации в состояниях объекта, которые позволяют находить наиболее вероятное распределение. Принцип максимума энтропии был сформулирован впервые в статистической механике [6], а принцип минимума различающей информации – в математической статистике [33]. Оба принципа широко используются в теории информации, а автор применил их в теории самоорганизации открытых физических систем [14 – 24, 130, 131].

Рассмотрим случай экстремума энтропии Шеннона–Винера

$$H(p)=-\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right)p_i \tag{1.9.1}$$

при сохранении нормировки

$$\sum_{i}^{m}p_i=1. \tag{1.9.2}$$

Согласно вариационному методу, вычислим безусловный экстремум функционала

$$L=-\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right)p_i-\alpha\sum_{i}^{m}p_i\ , \tag{1.9.3}$$

где α – неопределенный множитель Лагранжа.

Из условия равенства нулю первой вариации функционала

$$\delta L=-\sum_{i}^{m}\delta p_i\left(\log_2 p_i+\frac{1}{\ln 2}\right)-\alpha\sum_{i}^{m}\delta p_i=0 \tag{1.9.4}$$

следует $p_i=\text{const}$. Учитывая условие нормировки, находим равновероятное распределение и соответствующее значение энтропии Хартли:

$$p_i = \frac{1}{m}, \quad H(p) = \log_2 m \,. \tag{1.9.5}$$

Пусть в макроскопическом опыте наблюдается среднее значение

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i^m T_i p_i \tag{1.9.6}$$

случайной величины $T = \{T_1, \ldots, T_m\}$. Тогда имеем дополнительное ограничение на распределение p. Определение этого распределения соответствует задаче на экстремум энтропии при дополнительных условиях нормировки (1.9.2) и равенстве (1.9.6). Находим безусловный экстремум функционала

$$L = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i + \tau \sum_i^m T_i p_i - \alpha \sum_i^m p_i \,, \tag{1.9.7}$$

где α и τ есть множители Лагранжа.

Из условия

$$\delta L = -\sum_i^m \delta p_i \left(\log_2 p_i + \frac{1}{\ln 2} - \tau T_i + \alpha \right) = 0 \tag{1.9.8}$$

вытекает распределение

$$p_i = 2^{\tau T_i} \Gamma^{-1}(\tau), \; \Gamma(\tau) = \sum_i^m 2^{\tau T_i} \tag{1.9.9}$$

с параметром τ, который меняется в пределах допустимых значений. Функция $\Gamma(\tau)$ имеет следующие свойства

$$\frac{\partial \log_2 \Gamma(\tau)}{\partial \tau} = \mathbf{E}(T), \quad \frac{\partial}{\partial (1/\tau)} \left[\frac{1}{\tau} \log_2 \Gamma(\tau) \right] = H(p). \tag{1.9.10}$$

Согласно (1.9.9) и (1.9.10), получим энтропию Шеннона–Винера в экстремуме

$$H(p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i = -\tau \mathbf{E}(T) + \log_2 \Gamma(\tau) \tag{1.9.11}$$

и соответствующее дифференциальное соотношение:

$$dH(p) = -\tau d\mathbf{E}(T) \tag{1.9.12}$$

взаимосвязи со средним значением случайной величины T.

Для флуктуации случайной величины имеем формулу

$$-\frac{\partial h\left(p_i\right)}{\partial\tau}=T_i-\mathbf{E}(T),\ h\left(p_i\right)=-\log_2 p_i, \qquad (1.9.13)$$

использование которой позволяет находить произвольные центральные моменты.

Далее рассмотрим экстремум информации различия Кульбака–Лейблера

$$I(p:u)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i \qquad (1.9.14)$$

для двух выше рассмотренных случаев и получим, соответственно, распределения

$$p_i=u_i, \qquad (1.9.15)$$

$$p_i=u_i 2^{\tau T_i}\Gamma^{-1}(\tau),\quad \Gamma(\tau)=\sum_i^m 2^{\tau T_i}u_i \qquad (1.9.16)$$

и свойства функции $\Gamma(\tau)$

$$\frac{\partial\log_2\Gamma(\tau)}{\partial\tau}=\mathbf{E}(T),\quad -\frac{\partial}{\partial(1/\tau)}\left[\frac{1}{\tau}\log_2\Gamma(\tau)\right]=I(p:u). \qquad (1.9.17)$$

Для производной случайной информации различия имеем соотношение

$$\frac{\partial I\left(p_i:u_i\right)}{\partial\tau}=T_i-\mathbf{E}(T). \qquad (1.9.18)$$

Распределение (1.9.16) дает экстремальные значения информации различия и расхождения

$$I(p:u)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i=\tau\mathbf{E}(T)-\log_2\Gamma(\tau), \qquad (1.9.19)$$

$$I(u:p)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{u_i}{p_i}\right)u_i=-\tau\mathbf{E}_0(T)+\log_2\Gamma(\tau), \qquad (1.9.20)$$

$$J(p:u)=I(p:u)+I(u:p)=\tau\left[\mathbf{E}(T)-\mathbf{E}_0(T)\right]. \qquad (1.9.21)$$

Пусть распределение p произвольное, а распределение u принадлежит параметрическому семейству распределений

$$u_i = 2^{\tau_0 T_i} \Gamma^{-1}(\tau_0), \quad \Gamma(\tau_0) = \sum_i^m 2^{\tau_0 T_i} . \tag{1.9.22}$$

Тогда, используем значения энтропии Шеннона–Винера и среднего значения величины T при усреднении с распределением u

$$H(u) = -\sum_i^m (\log_2 u_i) u_i \quad , \quad \mathbf{E}_0(T) = \sum_i^m T_i u_i \tag{1.9.23}$$

и перепишем информацию различия (1.9.19) в следующем виде:

$$I(p:u) = -\left[H(p) - H(u)\right] - \tau_0 \left[\mathbf{E}(T) - \mathbf{E}_0(T)\right]. \tag{1.9.24}$$

В дифференциальной форме (1.9.24) запишется так:

$$dI(p:u) = -dH(p) - \tau_0 d\mathbf{E}(T). \tag{1.9.25}$$

Отметим некоторые свойства функции $I(p:u)$ и среднего значения $\mathbf{E}(T)$, зависящих от τ.

1. Функция $I(p:u)$ является выпуклой, то есть $I(p:u) \geq 0$. Равенство достигается тогда, когда $\tau = 0$.

2. Функция $I(p:u)$ монотонно возрастает при $\mathbf{E}(T) \geq \mathbf{E}(T)_{\tau=0}$ и монотонно убывает при $\mathbf{E}(T) \leq \mathbf{E}(T)_{\tau=0}$.

Наконец, рассмотрим вторую вариацию функционалов и получим соответствующие неравенства

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2} \sum_i^m \frac{(\delta p_i)^2}{p_i} \leq 0, \tag{1.9.26}$$

$$\delta^2 L = \frac{1}{\ln 2} \sum_i^m \frac{(\delta p_i)^2}{p_{0i} p_i} \geq 0. \tag{1.9.27}$$

Из (1.9.26) следует, что экстремум энтропии Шеннона–Винера достигается в ее максимуме. В случае информации различия Кульбака–Лейблера вторая вариация (1.9.27) является положительной, что указывает на ее минимум. Аналогично минимум достигается и для расхождения.

1.10. Информация Фишера. Неравенство Рао–Крамера

Рассмотрим семейство распределений одного и того же функционального вида, которые различаются значениями одномерного или многомерного параметра θ, характеризующего наблюдение. Пространство параметров есть пространство всех допустимых параметрических точек. Для двух точек $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ и $\theta' = \{\theta'_1, \ldots, \theta'_n\}$ в n-мерном пространстве имеем распределения $p_i(\theta)$ и $p_i(\theta')$, соответственно.

Мера информации в состоянии $p_i(\theta)$ относительно состояния $p_i(\theta')$ выражается информацией различия Кульбака–Лейблера [33]

$$I(\theta:\theta') = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i(\theta)}{p_i(\theta')} \right) p_i(\theta). \tag{1.10.1}$$

При малом отклонении точек θ и $\theta' = \theta + \delta\theta$ пространства имеем распределения $p_i(\theta)$ и $p_i(\theta + \delta\theta)$. Тогда случайная информация различия принимает следующий вид

$$\begin{aligned} &I_i(\theta:\theta+\delta\theta) = -\left[s_i(\theta) - s_i(\theta+\delta\theta) \right] = \\ &= -\sum_k^n \delta\theta_k \frac{\partial \log_2 p_i(\theta)}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \sum_k^n \sum_\ell^n \delta\theta_k \delta\theta_\ell \frac{\partial^2 \log_2 p_i(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

при разложении в ряд Тейлора по θ. Пренебрегая членами выше второго порядка в (1.10.2) и учитывая равенства

$$\frac{\partial \log_2 p_i(\theta)}{\partial \theta_k} = \frac{1}{(\ln 2)\, p_i(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_k}, \tag{1.10.3}$$

$$\frac{\partial^2 \log_2 p_i(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{p_i(\theta)} \frac{\partial^2 p_i(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} - \frac{1}{p_i^2(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_\ell} \right], \tag{1.10.4}$$

получим значение информации различия

$$I(\theta:\theta+\delta\theta) = \frac{1}{2\ln 2} \sum_k^n \sum_\ell^n \Gamma_{k\ell} \delta\theta_k \delta\theta_\ell, \tag{1.10.5}$$

где

$$\Gamma_{k\ell}=\sum_{i}^{m}\left(\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta_k}\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta_\ell}\right)p_i(\theta) \qquad (1.10.6)$$

есть положительно определенная корреляционная матрица. Для расхождения имеем значения

$$J(\theta:\theta+\delta\theta)=2I(\theta,\theta+\delta\theta)=\frac{1}{\ln 2}\sum_{k}^{n}\sum_{\ell}^{n}\Gamma_{k\ell}\delta\theta_k\delta\theta_\ell\,. \qquad (1.10.7)$$

Матрица $\Gamma_{k\ell}$ является фундаментальной информационной матрицей Фишера в математической статистике [32, 33, 39, 74, 75].

Рассмотрим случай изменения одномерного параметра. По определению параметр не испытывает флуктуаций и, следовательно, не имеет статистических характеристик. Однако можно поставить задачу об оценке нефлуктуирующего параметра по результатам наблюдений, подверженных статистическим отклонениям. При этом используются идеи теории параметрического оценивания.

Пусть случайная величина θ_i^*, которая не зависит от θ, выражается через известные дискретные величины, характеризующие случайный объект. Такая величина называется оценкой истинного значения нефлуктуирующего параметра θ. При выборе оценки естественно предположить, что ее среднее значение $\mathbf{E}\left(\theta^*\right)$ было близко к параметру θ. В общем случае оценка имеет смещение $b(\theta)$, зависящее от θ, и выражается так:

$$\mathbf{E}\left(\theta^*\right)=\sum_{i}^{m}\theta_i^* p_i(\theta)=\theta+b(\theta). \qquad (1.10.8)$$

При равенстве $\mathbf{E}\left(\theta^*\right)=\theta$ данная оценка представляет собой несмещенную оценку, при которой отсутствует систематическая ошибка наблюдений, обусловленная величиной $b(\theta)$. Для дисперсии оценки справедливо фундаментальное информационное неравенство Рао–Крамера [32, 39]:

$$\mathbf{D}\left(\theta^*\right) \ge \mathbf{D}\left(\theta^*\right)_{\min} = \frac{\left[1 + \dfrac{\partial b(\theta)}{\partial \theta}\right]^2}{\sum\limits_i^m \left[\dfrac{\partial \ln p_i(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 p_i(\theta)}, \qquad (1.10.9)$$

дающее ее нижнюю грань. Некоторые обобщения для (1.10.9) приводятся в [9-13]. При $b(\theta) = 0$ неравенство (1.10.9) обращается в

$$\mathbf{D}\left(\theta^*\right) \ge \mathbf{D}\left(\theta^*\right)_{\min} = \Gamma_{\theta\theta}^{-1}. \qquad (1.10.10)$$

Величина $\Gamma_{\theta\theta}$ соответствует количеству информации Фишера о величине θ, которая содержится в оценке θ^*. Чем выше информация, тем меньше дисперсия и, соответственно, выше точность наблюдения. Это связано с тем, что дисперсия определяет меру точности статистических наблюдений в случайном объекте.

Мера информации Фишера

$$\Gamma_{\theta\theta} = \sum_i^m \left[\frac{\partial \ln p_i(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 p_i(\theta) \qquad (1.10.11)$$

характеризует предельное значение информации различия

$$I(\theta : \theta + \delta\theta) = \frac{1}{2\ln 2}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2 = \frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m \frac{\partial^2 h\left[p_i(\theta)\right]}{\partial \theta^2} p_i(\theta). \qquad (1.10.12)$$

1.11. Физические приложения

Пусть случайный объект представляет собой частицу в статистической физике, который имеет состояния с распределением вероятностей $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Максимальное значение физической размерной энтропии Больцмана–Гиббса [6]

$$H(p) = -k\sum_i^m \left(\ln p_i\right) p_i = \beta(E - F) \qquad (1.11.1)$$

достигается, согласно (1.9.9), при равновесном каноническом распределении Гиббса:

$$p_i = \exp\left\{-k^{-1}\beta\left(H_i - F\right)\right\}. \qquad (1.11.2)$$

Здесь $\beta = -k\,\tau/\ln 2 = 1/T$ есть обратная абсолютная температура, H_i – дискретные значения энергии частицы, $E = \mathbf{E}(H)$ – средняя энергия частицы. Свободная энергия

$$F = -kT \ln \sum_i^m \exp\left\{-k^{-1}\beta H_i\right\} \qquad (1.11.3)$$

определяется из условия нормировки распределения.

Дифференциальные соотношения равновесной статистической термодинамики замкнутых систем имеют, согласно (1.9.10) и (1.9.12), следующий вид

$$TdH(p) = dE\,, \quad dF = -H(p)\,dT\,. \qquad (1.11.4)$$

Для открытых систем, находящихся в окружении с температурой T_0, физическая размерная информация различия имеет, согласно (1.9.24), значение [12]

$$I(p:p_0) = k\sum_i^m \left(\ln\frac{p_i}{p_{0i}}\right)p_i = -\delta H + \frac{1}{T_0}\delta E =$$
$$= -\left[H(p) - H(p_0)\right] + \frac{1}{T_0}\left(E - E_0\right) \geq 0 \qquad (1.11.5)$$

с равенством тогда и только тогда, когда $p_i = p_{0i}$. Здесь для неравновесной и равновесной энтропий и, соответственно, средних энергий имеем

$$H(p) = -k\sum_i^m \left(\ln p_i\right)p_i\,,\ H(p_0) = -k\sum_i^m \left(\ln p_{0i}\right)p_{0i}\,, \qquad (1.11.6)$$

$$E = \sum_i^m H_i p_i\,,\ E_0 = \sum_i^m H_i p_{0i}\,. \qquad (1.11.7)$$

Состояние полного равновесия с окружением описывается каноническим распределением

$$p_{0i} = \exp\left\{-k^{-1}\beta_0\left(H_i - F_0\right)\right\} \qquad (1.11.8)$$

с обратной температурой $\beta_0 = 1/T_0$ и свободной энергией F_0.

Использование диаграммы энтропия-энергия придает простой и наглядный смысл информации различия. На рис.1.2 приведено геометрическое представление термодинамических величин [12].

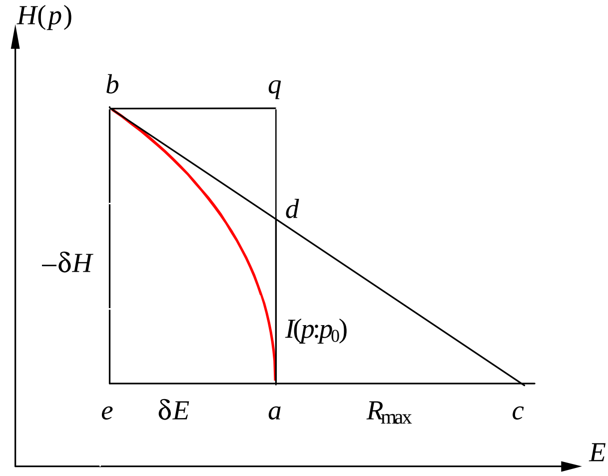


Рис.1.2. Энтропия-энергия для физических систем

Кривая ab изображает изменение функции $H(E)$ от произвольного состояния, соответствующего точке $a=(H,E)$, к полному равновесному в точке $b=(S_0,E_0)$. Из точки b проводится касательная прямая bc. Тогда, согласно (1.11.5), отрезок ad, параллельный оси $H(p)$, есть информация различия Кульбака–Лейблера I. Отрезок ac, параллельный оси E, изображает максимальную работу $R_{\max}$, выполняемую системой над окружением. Минимальная работа $R_{\min}=-R_{\max}$ связана с изменением полной энтропии замкнутой системы (система+окружение) от своего наибольшего значения, если система неравновесна, выражением $\Delta H^{\text{п}}=-R_{\min}/T_0$.

В первом случае сравним значения энтропий произвольного и полного равновесного состояний системы при одинаковых средних значениях энергии, что соответствует условию Гиббса

$$\sum_i^m H_i p_i = \sum_i^m H_i p_{0i}\,. \qquad (1.11.9)$$

Перепишем (1.11.5) в следующем виде

$$I(p:p_0) = -\left[H(p) - H(p_0)\right] \ge 0\,. \qquad (1.11.10)$$

Так как информация различия есть знакоопределенный функционал, то из (1.11.10) следует теорема Гиббса о максимуме энтропии равновесного состояния [6]

$$H(p) \geq H(p_0). \tag{1.11.11}$$

Таким образом, не прибегая к рассмотрению временной эволюции энтропии, можно определить изменения ее при переходах между различными состояниями системы. Причем энтропия приобретает свойства знакоопределенного функционала только при выполнении дополнительного условия постоянства средней энергии (1.11.9)

Принцип максимума энтропии показывает, что при спонтанном переходе от произвольного неравновесного состояния к равновесному степень неопределенности (разупорядоченности) системы увеличивается и при равновесии достигает максимального значения.

Для необратимых информационных физических процессов к равенству (1.11.5) добавляется знак неравенства и в дифференциальном виде имеем [12]

$$dI(p:p_0) \geq -dH(p) + \frac{1}{T_0} dE. \tag{1.11.12}$$

Рассматриваемый случай соответствует такой физической ситуации в термодинамике незамкнутых систем, когда в системе не происходит изменения энергии $(dE = 0)$. Из (1.11.12) вытекает выражение негэнтропийного принципа Бриллюэна [2, 3]

$$dI(p:p_0) + dH(p) \geq 0, \tag{1.11.13}$$

обобщающего принцип Карно–Клаузиуса о возрастании энтропии для замкнутых систем

$$dH(p) \geq 0. \tag{1.11.14}$$

При отсутствии изменения работы $(\delta R = 0)$ выполняется общий принцип уменьшения информации различия [12]

$$dI \leq 0. \tag{1.11.15}$$

Таким образом, взаимное изменение энтропии и физической информации различия сопровождается потерей информации (упорядоченности) состояний системы. Из (1.11.13) следует, что при необратимых явлениях увеличение энтропии $dH(p) > -dI(p:p_0)$ больше, чем уменьшение различающей информации. Следовательно, происходит самораспад неравновесной системы и спонтанные переходы приведут в конце концов к полному равновесному состоянию незамкнутой системы с максимальной неопределенностью (разупорядоченностью) в состояниях.

Согласно Бриллюэну [2, 3], изменение работы для рассматриваемого случая на величину kT_0 соответствует одной натуральной единице измерения количества информации (1 нит) в тепловой среде.

Во втором случае сравниваем значения средних энергий при одинаковых энтропиях

$$H(p) = H(p_0). \tag{1.11.16}$$

Тогда имеем выражение принципа минимума средней энергии в равновесном состоянии

$$R_{\max} = (E - E_0) \geq 0\,. \tag{1.11.17}$$

Диаграмма энтропия-энергия позволяет найти геометрическое представление коэффициенту полезного действия (КПД) преобразования энергии для обратимых процессов. Известно, что КПД преобразования энергии выражается отношением совершенной максимальной работы открытой системы к затраченной энергии в окружении

$$\eta = \frac{R_{\max}}{R_{\max} + \delta E}\,. \tag{1.11.18}$$

Данное равенство представляет собой отношение отрезков ac/ec, которое можно записать в виде $\eta = ad/eb$. Тогда КПД преобразования энергии выражается как отношение информации различия к изменению энтропии при переходе от произвольного состояния к равновесному [12]

$$\eta = \frac{I}{-\delta H} = \frac{I}{H_0 - S} \leq 1\,. \tag{1.11.19}$$

С другой стороны, интерпретация неравенства (1.11.19) на микроскопическом уровне означает, что степень упорядоченности состояний открытой системы при спонтанном переходе системы меньше, чем изменение степени разупорядоченности.

Информация различия Кульбака является знакоопределенной функцией Ляпунова. Поэтому, чтобы состояние полного равновесия было устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства для производной:

$$\frac{dI\left(p:p_0\right)}{dt}=-\frac{d\left(H\left(p\right)-H\left(p_0\right)\right)}{dt}\le 0\,. \qquad (1.11.20)$$

Из (1.11.20) следует закон временной эволюции энтропии (H –теорема Больцмана [1])

$$\frac{dH\left(p\right)}{dt}\ge 0 \qquad (1.11.21)$$

при приближении к состоянию полного равновесия. Происходит самораспад макроскопической системы при спонтанных переходах.

Пусть система находится в локальном (частичном) равновесии с температурой T. Подставляя (1.11.4) в основное уравнение (1.11.12), получим

$$dI\left(p:p_0\right)\ge-\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)dE,, \qquad (1.11.22)$$

где знак неравенства соответствует необратимым информационным процессам при контакте локально равновесной системы с окружением.

Глава 2

КВАНТОВЫЕ МЕРЫ ИНФОРМАЦИИ

Общие понятия и методы статистической модели Шеннона–Винера были представлены в главе 1. Перейдем к изучению важного вопроса обобщения рассматриваемых логарифмических мер энтропии и информации различия на случай проявления квантовых свойств случайных объектов. Прогресс в этом направлении связан с введением квантовых статистик Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака для совокупности частиц в статистической физике, что подробно изложено в монографиях [25, 26, 34, 36].

В данной главе приводится идейная сторона физической статистики случайных объектов, обладающих квантовыми свойствами. Различные приложения можно найти, например, в монографиях [35, 38] по теории передачи информации в физических каналах связи. Также затронут вопрос парастатистики, который отсутствует в традиционных представлениях теории информации.

2.1. Оператор плотности и энтропия Неймана

Идея квантово-статистического описания случайного объекта в теории информации состоит в том, что состояния описываются оператором плотности ρ в гильбертовом пространстве [25, 36]. Случайная величина есть оператор T, взвешенное среднее которого равно

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{Sp}T\rho}{\mathrm{Sp}\rho}. \tag{2.1.1}$$

Квантовый аналог вероятностной нормировки есть

$$\mathrm{Sp}\rho = 1, \quad \rho \geq 1 \tag{2.1.2}$$

и, следовательно, среднее значение оператора запишется так:

$$\mathbf{E}(T) = \mathrm{Sp}T\rho. \tag{2.1.3}$$

Для матричного представления из (2.1.2) и (2.1.3) вытекает формула

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i T_{ii}\rho_{ii} + \sum_i \sum_{j \neq i} T_{ij}\rho_{ji}, \tag{2.1.4}$$

из которой следует, что вероятностная трактовка справедлива когда $\rho_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В этом случае диагональные элементы комплексной эрмитовой квадратной матрицы плотности соответствуют вероятностям возможных значений случайной величины и имеют аналоги средних в статистической модели Шеннона–Винера

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i T_{ii}\rho_{ii}, \quad \sum_i \rho_{ii} = 1. \tag{2.1.5}$$

Недиагональные элементы матрицы плотности отражают чисто квантовые свойства случайного объекта.

Соответственно определяются квантовые аналоги взвешенного среднего геометрического

$$N(T) = 2^{\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 T)\rho}{\mathrm{Sp}\rho}}, \tag{2.1.6}$$

энтропии, информации различия [25, 36]

$$H(\rho) = -\log_2 N(\rho) = -\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho)\rho}{\mathrm{Sp}\rho}, \tag{2.1.7}$$

$$I(\rho:\rho_0) = \log_2 \frac{N(\rho)}{N(\rho_0)} = \frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho - \log_2 \rho_0)\rho}{\mathrm{Sp}\rho} \tag{2.1.8}$$

и меры неточности

$$H(\rho:\rho_0) = -\log_2 N(\rho_0) = -\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho_0)\rho}{\mathrm{Sp}\rho}. \tag{2.1.9}$$

В функционале (2.1.8) выражение в скобках обозначает случайную информацию различия, равную разности случайных энтропий.

Рассмотрим случай экстремума квантовой энтропии Неймана [25, 36]

$$H(\rho) = -\mathrm{Sp}(\log_2 \rho)\rho \tag{2.1.10}$$

при сохранении нормировки оператора плотности и среднего значения случайной величины T. Тогда задача сводится к нахождению безусловного экстремума следующего функционала

$$L = -\mathrm{Sp}\left(\log_2 \rho\right)\rho + \tau\ \ \mathrm{Sp}T\rho + \alpha\ \ \mathrm{Sp}\rho\,, \qquad (2.1.11)$$

где τ и α есть множители Лагранжа.

Согласно вариационному принципу, приравняем нулю первую вариацию функционала

$$\delta L = -\mathrm{Sp}\left[\delta\rho\left(\log_2 \rho + \frac{1}{\ln 2} - \tau T - \alpha\right)\right] = 0 \qquad (2.1.12)$$

и получим оператор плотности

$$\rho = 2^{\tau T}\,\Gamma^{-1}(\tau),\ \Gamma(\tau) = \mathrm{Sp}2^{\tau T}\,. \qquad (2.1.13)$$

Вычислим экстремальное значение энтропии Неймана

$$H(\rho) = -\tau\mathbf{E}\,(T) + \log_2 \Gamma(\tau) \qquad (2.1.14)$$

и, используя равенства

$$\frac{\partial \log_2 \Gamma(\tau)}{\partial\tau} = \mathbf{E}(T), \qquad \frac{\partial}{\partial(1/\tau)}\left[\frac{1}{\tau}\log_2 \Gamma(\tau)\right] = H(\rho), \qquad (2.1.15)$$

запишем дифференциальное соотношение

$$dH(\rho) = -\tau d\mathbf{E}(T)\,. \qquad (2.1.16)$$

Экстремум квантовой энтропии Неймана в рассматриваемой вариационной задаче соответствует ее максимуму, поскольку справедливо неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\mathrm{Sp}\rho^{-1}(\delta\rho)^2 \le 0 \qquad (2.1.17)$$

для второй вариации функционала (2.1.11).

В статистической физике [25, 34] и теории передачи информации по физическим каналам связи [35, 38] используется оператор Гамильтона $T = H$, обратная температура $\beta = -\tau/\ln 2$ и физическая размерная энтропия $H(\rho) = -k\mathrm{Sp}(\ln\rho)\rho$, где k – постоянная Больцмана. В этом случае оператор плотности имеет известный вид [25]

$$\rho = \exp\left\{-k^{-1}\beta H\right\}\Gamma^{-1}(\beta), \quad \Gamma(\beta) = \mathrm{Sp}\exp\left\{-k^{-1}\beta H\right\}, \qquad (2.1.18)$$

а соотношение (2.1.16) представляет собой закон статистической термодинамики

$$dH(\rho)=\beta dE \ , \quad E=\mathbf{E}(H) \tag{2.1.19}$$

для максимального значения энтропии Неймана в равновесном состоянии.

Переход между состояниями с произвольным оператором плотности ρ и равновесным

$$\rho_0=\exp\left\{-k^{-1}\beta_0 H\right\}\mathit{\Gamma}^{-1}\left(\beta_0\right), \quad \mathit{\Gamma}\left(\beta_0\right)=\mathrm{Sp}\exp\left\{-k^{-1}\beta_0 H\right\} \tag{2.1.20}$$

определяется физической размерной информацией различия

$$I\left(\rho:\rho_0\right)=-\left[H(\rho)-H\left(\rho_0\right)\right]+\beta_0\left[E-E_0\right], \tag{2.1.21}$$

где энтропии и энергии квантовой системы

$$H(\rho)=-k\mathrm{Sp}(\ln\rho)\rho\,,\ H\left(\rho_0\right)=-k\mathrm{Sp}\left(\ln\rho_0\right)\rho_0\,, \tag{2.1.22}$$

$$E=\mathrm{Sp}H\rho\,,\ E_0=\mathrm{Sp}H\rho_0\,. \tag{2.1.23}$$

Для дифференциала информации различия имеем соотношение

$$dI\left(\rho:\rho_0\right)=-dH(\rho)+\beta_0 dE\,, \tag{2.1.24}$$

которое описывает неравновесные информационные процессы в открытой квантовой системе [20, 22].

В заключение рассмотрим произвольное квантовое состояние с конечным числом m собственных значений E_i оператора H. Согласно (2.1.13), матрица плотности имеет диагональный вид

$$p_i=\rho_{ii}=\frac{\exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}{\sum\limits_i^m \exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}, \quad \sum_i^m p_i=1 \tag{2.1.25}$$

и имеет вероятностную трактовку.

Пусть собственному значению E_i соответствует конечное число квантовых состояний, имеющее кратность G_i. Тогда распределение вероятностей квантовых состояний запишется так:

$$p_i=\rho_{ii}=\frac{\exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}{\sum\limits_i^m \exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}G_i}, \quad \sum_i^m p_i G_i=1. \tag{2.1.26}$$

Такого рода распределения играют важную роль в статистике случайных объектов теории информации, о чем пойдет речь в следующем параграфе.

2.2. Квантовые состояния и средние

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание совокупности $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$ $(N>>1)$ статистически случайных объектов, которые имеют множество квантовых состояний $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$, где m – число состояний. Объектами могут являться, например, последовательности символов из алфавита и материальные частицы с соответствующими состояниями в виде символов и кратности собственного значения энергии частицы и т.п.

Приведем основные определения.

Определение 1. Носителем информации являются два множества: а) множество всех квантовых состояний $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$ совокупности случайных объектов $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$; б) множество случайных величин $T=\{T_1,\ldots,T_m\}$, характеризующих совокупность объектов.

Определение 2. Взвешенное среднее каждой случайной величины T по распределению объектов

$$\mathbf{E}(T)=\frac{\sum_{i}^{m}T_iN_i}{\sum_{i}^{m}N_i} \tag{2.2.1}$$

или

$$\mathbf{E}(T)=\frac{\mathbf{E}_N(T)}{N},\ N=\sum_{i}^{m}N_i, \tag{2.2.2}$$

где среднее

$$\mathbf{E}_N(T)=\sum_{i}^{m}T_iN_i \tag{2.2.3}$$

представляет собой общее значение величины T по совокупности объектов.

Задача квантовой статистики объектов состоит в нахождении распределения N_i по состояниям G_i. В связи с этим рассмотрим среднее число объектов в i-состоянии:

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} \qquad (2.2.4)$$

и перепишем (2.2.1), (2.2.3) в следующем виде

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\sum_i^m T_i D_i G_i}{\sum_i^m D_i G_i}, \quad \sum_i^m D_i G_i = N, \qquad (2.2.5)$$

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i \,. \qquad (2.2.6)$$

Из (2.2.5) следует, что величины D_i имеют веса G_i. Введем распределение $p_i = D_i / N$ и окончательно получим среднее

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i^m T_i p_i G_i, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1 \qquad (2.2.7)$$

и общее значение величины T

$$\mathbf{E}_N(T) = N \sum_i^m T_i p_i G_i \,, \qquad (2.2.8)$$

которое пропорционально числу случайных объектов в случае, если T_i не зависит от p_i.

Непрерывными аналогами рассматриваемых средних являются функционалы

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\int_G TDdG}{\int_G DdG}, \quad \int_G DdG = N, \qquad (2.2.9)$$

$$\mathbf{E}_N(T) = \int_G TDdG, \qquad (2.2.10)$$

определенные в области G. Если область охватывает все вероятностное пространство и усреднение производится с распределением p, то формулы (2.2.7) и (2.2.8) примут вид

$$\mathbf{E}(T) = \int TpdG, \quad \int pdG = 1, \qquad (2.2.11)$$

$$\mathbf{E}_N(T) = N \int TpdG \,. \qquad (2.2.12)$$

2.3. Статистика Максвелла–Больцмана

Пусть имеется набор из N случайных объектов, квантовые состояния которых равновероятны. Общее количество состояний равняется числу G. Воспользуемся формулой Хартли [77]

$$H(p) = n \log_2 m \tag{2.3.1}$$

для меры информации, определяемой для числа равновероятного распределения состояний одного объекта при n наблюдениях. В рассматриваемой ситуации мера информации для совокупности N объектов имеет аналогичный вид

$$H_N = N \log_2 G. \tag{2.3.2}$$

При рассмотрении статистики случайных объектов используем теорию соединений. В таком подходе формула (2.3.2) запишется так [77]:

$$H_N = \log_2 \Delta\Gamma_N , \tag{2.3.3}$$

где $\Delta\Gamma_N = G^N$ и G^N есть число размещений из G состояний по N объектам, которое дает число возможных макросостояний $\Delta\Gamma_N$. Причем в вычислениях рассматриваются размещения с повторениями, то есть одно и то же равновозможное состояние может реализовываться несколько раз в объектах, записанных в каком-либо порядке. Мера информации (2.3.3) совпадает с мерой Больцмана в статистической физике [1], поэтому будем называть ее мерой Больцмана–Хартли.

Пусть совокупность различимых объектов $N = \{N_1, \ldots, N_m\}$ имеет квантовые состояния $G = \{G_1, \ldots, G_m\}$. Вычислим энтропию по формуле Больцмана–Хартли, определив значение $\Delta\Gamma_N$. Для этого распределим объекты N_i по состояниям G_i так, чтобы имеющие одно состояние были тождественны между собой и отличны от объектов, имеющих другие состояния. Тогда, согласно комбинаторным вычислениям для статистики Больцмана, число возможных макросостояний равняется [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{1}{N_i!} G_i^{N_i} , \tag{2.3.4}$$

где $G_i^{N_i}$ есть число возможных размещений, величина $N_i!$ есть в теории соединений число перестановок из N_i объектов, а произведение чисел $\Delta\Gamma_{N_i}$ означает статистическую независимость для совокупности объектов.

Подставляя (2.3.4) в меру информации Больцмана–Хартли (2.3.3) и используя формулу Стирлинга $N_i! \approx \left(N_i/e\right)^{N_i}$, получим квантовую энтропию Максвелла–Больцмана

$$H_N = -\sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_i}{G_i} \right) N_i \,. \tag{2.3.5}$$

В случае распределений D_i и p_i из (2.3.5) вытекают выражения

$$H_N\left(D\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) D_i G_i \,, \tag{2.3.6}$$

$$H_N\left(p\right) = -N\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i G_i \,, \tag{2.3.7}$$

где число объектов и нормировка

$$\sum_i^m D_i G_i = N \,, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1 \,. \tag{2.3.8}$$

Энтропия есть взвешенное среднее

$$H\left(p\right) = \frac{H_N\left(p\right)}{N} = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i G_i \tag{2.3.9}$$

и определяется с точностью до постоянной.

Если веса имеют одинаковые значения $G_i = 1$, то из (2.3.9) вытекает традиционная мера информации Шеннона–Винера

$$H\left(p\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i, \quad \sum_i^m p_i = 1 \tag{2.3.10}$$

с нормированным распределением. При равновозможном распределении $p_i = 1/G$ из (2.3.9) следует мера информации Больцмана–Хартли

$$H_N\left(p\right) = N \log_2 G, \quad G = \sum_i^m G_i \,. \tag{2.3.11}$$

Далее рассмотрим экстремальные свойства квантовой энтропии (2.3.6) при условии сохранения числа объектов и общего значения (2.2.7) величины T. Согласно вариационному принципу, исследуем безусловный экстремум функционала

$$L = -\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) D_i G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha' \sum_i^m D_i G_i , \tag{2.3.12}$$

для чего введем неопределенные множители Лагранжа τ и α'.

Из условия

$$\delta L = -\sum \left[\delta D_i \left(\log_2 D_i + \frac{1}{\ln 2} - \tau T_i - \alpha' \right) G_i \right] = 0 \tag{2.3.13}$$

получим распределение

$$D_i = 2^{\tau T_i + \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{\ln 2} + \alpha' , \tag{2.3.14}$$

подстановка которого в (2.3.8) дает число случайных объектов

$$N = \sum_i^m 2^{\tau T_i + \alpha} G_i . \tag{2.3.15}$$

Тогда распределение имеет окончательный вид

$$D_i = N \frac{2^{\tau T_i}}{\sum_i^m 2^{\tau T_i} G_i} , \tag{2.3.16}$$

где веса G_i равняются кратности состояния случайной величины T_i.

Экстремальное значение квантовой энтропии и ее дифференциал равняются

$$H_N(D) = -\tau \mathbf{E}_N(T) - \alpha N , \tag{2.3.17}$$

$$dH_N(D) = -\tau \; d\mathbf{E}_N(T) - \alpha \; dN , \tag{2.3.18}$$

где учтено равенство

$$\mathbf{E}_N(T)\, d\tau + N d\alpha = 0 . \tag{2.3.19}$$

Распределение (2.3.16) максимизирует квантовую энтропию, так как справедливо неравенство:

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{(\delta D_i)^2}{D_i} G_i \le 0\,. \qquad (2.3.20)$$

В заключение рассмотрим некоторые статистические свойства исследуемых величин.

Так число возможных макросостояний $\Delta\Gamma_N$ имеет для рассматриваемой статистики прозрачный математический смысл. Выразим квантовую энтропию Шеннона–Винера

$$H(D) = -\log_2 N(D) \qquad (2.3.21)$$

в зависимости от взвешенного среднего геометрического

$$N(D) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 N_i/G_i)N_i}{\sum_i^m N_i}} = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 D_i)D_i G_i}{\sum_i^m D_i G_i}}, \qquad (2.3.22)$$

тогда число возможных макросостояний обратно пропорционально взвешенному среднему геометрическому распределения D, то есть выполняется равенство $\Delta\Gamma_N = 1/N(D)$. В частном случае, если $N_i = 1$, то для $\Delta\Gamma_N$ следует обычное среднее геометрическое для величины G_i

$$N(G) = \sqrt[m]{\prod_i^m G_i}\,. \qquad (2.3.23)$$

С другой стороны, использование величины

$$p(N_1,\ldots,N_m) = \prod_i^m \frac{N!}{G^{N_i}}\Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{N!}{N_i!}\left(\frac{G_i}{G}\right)^{N_i}, \qquad (2.3.24)$$

где $N!/N_i!$ есть в теории соединений число перестановок из N_i объектов с повторениями, дает вероятностную трактовку формулы Больцмана–Хартли для информации, что было показано впервые Больцманом [1] для статистической физики. Вместо (2.3.3) имеем формулу

$$H_N(N_1,\ldots,N_m) = \log_2 p(N_1,\ldots,N_m), \qquad (2.3.25)$$

где для полиномиального распределения вероятностей выполняется условие нормировки:

$$\sum_{N_1+\ldots+N_m=N} p\left(N_1,\ldots,N_m\right)=\left(\sum_i^m \frac{G_i}{G}\right)^N=1. \qquad (2.3.26)$$

Введение случайной энтропии Больцмана–Хартли

$$H_N\left(N_1,\ldots,N_m\right)=-\log_2 p\left(N_1,\ldots,N_m\right) \qquad (2.3.27)$$

и ее усреднение приводит к новому определению информации

$$\begin{aligned}\bar{H}_N &= \mathbf{E}_N\left[H_N\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right]= \\ &=-\sum_{N_1+\ldots+N_m=N}\left[\log_2 p\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right]p\left(N_1,\ldots,N_m\right).\end{aligned} \qquad (2.3.28)$$

Среднее значение произвольной случайной величины $T\left(N_1,\ldots,N_m\right)$ дается равенством

$$\bar{T}_N=\mathbf{E}_N\left[T\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right]=\sum_{N_1+\ldots+N_m=N} T\left(N_1,\ldots,N_m\right)p\left(N_1,\ldots,N_m\right). \qquad (2.3.29)$$

2.4. Статистика Ферми–Дирака

Современная статистика использует принцип неразличимости объектов (частиц). Этот квантомеханический принцип означает, что перестановка объектов не дает нового квантового состояния. Рассмотрим статистику Ферми–Дирака, в которой выполняется принцип Паули. Вследствие этого принципа ни одно состояние не может содержать более одного объекта. Число возможных макросостояний совокупности из N неразличимых объектов [34]

$$\Delta\Gamma_N=\prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i}=\frac{G_i!}{N_i!\left(G_i-N_i\right)!} \qquad (2.4.1)$$

равняется произведению чисел сочетаний из G_i состояний по N_i объектам.

Логарифмическая мера Больцмана–Хартли

$$H_N=\log_2 \Delta\Gamma_N \qquad (2.4.2)$$

дает при больших N_i следующее значение квантовой энтропии Ферми–Дирака:

$$H_N = -\sum_i^m \left[N_i \log_2 N_i - G_i \log_2 G_i + \left(G_i - N_i\right) \log_2 \left(G_i - N_i\right) \right] =$$

$$= -\sum_i^m \left[N_i \log_2 \frac{N_i}{G_i - N_i} - G_i \log_2 \left(1 + \frac{N_i}{G_i - N_i} \right) \right]. \qquad (2.4.3)$$

Переходя к распределениям D_i и p_i, соответственно, получим функционалы

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i + \left(1 - D_i\right) \log_2 \left(1 - D_i\right) \right] G_i, \qquad (2.4.4)$$

$$H_N(p) = -N \sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i + \left(\frac{1}{N} - p_i \right) \log_2 \left(1 - N p_i\right) \right] G_i, \qquad (2.4.5)$$

где

$$\sum_i^m D_i G_i = N, \qquad \sum_i^m p_i G_i = 1. \qquad (2.4.6)$$

Отметим, что взвешенное среднее с точностью до постоянной

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i + \frac{1}{N} \left(1 - N p_i\right) \log_2 \left(1 - N p_i\right) \right] G_i \qquad (2.4.7)$$

зависит от числа объектов N. Причем справедливо условие $N_i < G_i$ (или $N p_i < 1$).

Решение вариационной задачи на экстремум квантовой энтропии Ферми–Дирака соответствует нахождению наиболее вероятного распределения. Учитывая дополнительные условия сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i \qquad (2.4.8)$$

и приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i + \left(1 - D_i\right) \log_2 \left(1 - D_i\right) \right] G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i, \qquad (2.4.9)$$

получим равенство:

$$\log_2 D_i - \log_2\left(1 - D_i\right) - \tau T_i - \alpha = 0 . \tag{2.4.10}$$

Из (2.4.10) вытекает распределение

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \tag{2.4.11}$$

с помощью которого вычисляется число объектов и ненормированное среднее значение

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \qquad \mathbf{E}_N\left(T\right) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1} . \tag{2.4.12}$$

Параметр τ в (2.4.11) меняется в пределах допустимых значений, а значение α определяется из соотношения (2.4.12).

Рассмотрим вторую вариацию функционала (2.4.9) и получим неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2} \sum_i^m \frac{\left(\delta D_i\right)^2}{D_i\left(1 - D_i\right)} G_i \le 0 , \tag{2.4.13}$$

означающее, что экстремум квантовой энтропии достигается в максимуме.

Подставив распределение (2.4.11) в (2.4.4), получим максимальное значение энтропии

$$H_N\left(D\right) = -\tau \mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha N + \tau\Omega . \tag{2.4.14}$$

Здесь вводится выражение для суммы

$$\tau\Omega = -\sum_i^m \left[\log_2\left(1 + 2^{\tau T_i + \alpha}\right)\right] G_i , \tag{2.4.15}$$

которое имеет следующие свойства

$$\frac{\partial\left(\tau\Omega\right)}{\partial\tau} = \sum_i^m T_i D_i G_i = \mathbf{E}_N\left(T\right), \tag{2.4.16}$$

$$\frac{\partial\left(\tau\Omega\right)}{\partial\alpha} = \sum_i^m D_i G_i = N . \tag{2.4.17}$$

Дифференцируем энтропию (2.4.14) и, используя (2.4.16) и (2.4.17), получим соотношение

$$dH_N\left(D\right) = -\tau d\mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha dN , \tag{2.4.18}$$

которое имеет фундаментальное значение в статистической термодинамике, о чем пойдет речь в физических приложениях разд. 2.9.

2.5. Статистика Бозе–Эйнштейна

Рассмотрим статистику Бозе–Эйнштейна, в которой число возможных макросостояний совокупности из N неразличимых объектов [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!(G_i - 1)!} \tag{2.5.1}$$

вытекает из условия, что одно состояние может содержать любое количество объектов. Величина (2.5.1) есть произведение чисел сочетаний из G_i состояний по N_i объектам с повторениями.

Подстановка в логарифмическую меру Больцмана–Хартли (2.3.3) дает при больших N_i квантовую энтропию Бозе–Эйнштейна

$$H_N = -\sum_i^m \left[N_i \log_2 N_i + G_i \log_2 G_i - (G_i + N_i)\log_2 (G_i + N_i) \right] =$$

$$= -\sum_i^m \left[N_i \log_2 \frac{N_i}{G_i + N_i} + G_i \log_2 \left(1 - \frac{N_i}{G_i + N_i} \right) \right], \tag{2.5.2}$$

которая для распределений D_i и p_i принимает вид

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i - (1 + D_i)\log_2 (1 + D_i) \right] G_i, \tag{2.5.3}$$

$$H_N(p) = -N\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \left(\frac{1}{N} + p_i \right) \log_2 (1 + Np_i) \right] G_i, \tag{2.5.4}$$

где число объектов и нормировка

$$\sum_i^m D_i G_i = N, \qquad \sum_i^m p_i G_i = 1. \tag{2.5.5}$$

Взвешенное среднее

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \frac{1}{N}(1 + Np_i)\log_2 (1 + Np_i) \right] G_i \tag{2.5.6}$$

зависит также, как и в статистике Ферми–Дирака, от числа объектов N и определяется с точностью до постоянной.

Далее находим экстремум квантовой энтропии Бозе–Эйнштейна при дополнительных условиях сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i . \tag{2.5.7}$$

Тогда варьируем функционал

$$L = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i - (1 + D_i) \log_2 (1 + D_i) \right] G_i +$$

$$+ \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i \tag{2.5.8}$$

и из условия

$$\delta L = -\sum_i^m \delta D_i \left[\log_2 D_i - \log_2 (1 + D_i) - \tau T_i - \alpha \right] G_i \tag{2.5.9}$$

получим распределение

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} \tag{2.5.10}$$

и, соответственно, число объектов и среднее значение

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}, \qquad \mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} . \tag{2.5.11}$$

Множитель Лагранжа τ меняется в допустимых пределах, α находится из (2.5.11).

Экстремальное значение дается выражением

$$H_N(D) = -\tau \mathbf{E}_N(T) - \alpha N + \tau \Omega , \tag{2.5.12}$$

где величина

$$\tau \Omega = \sum_i^m \left[\log_2 \left(1 - 2^{\tau T_i + \alpha} \right) \right] G_i \tag{2.5.13}$$

имеет свойства (2.4.16) и (2.4.17), которые были определены для статистики Ферми–Дирака. Аналогично вытекает дифференциальное соотношение:

$$dH_N(D) = -\tau d\,\mathbf{E}_N(T) - \alpha dN \tag{2.5.14}$$

для максимального значения квантовой энтропии, так как справедливо следующее неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{(\delta D_i)^2}{D_i(1+D_i)} G_i \le 0\,. \tag{2.5.15}$$

В заключение отметим, что числа возможных макросостояний (2.4.1) и (2.5.1) для квантовых статистик при $N_i << G_i$ переходят в выражение (2.3.4) для классической статистики Максвелла–Больцмана, так как, соответственно, в них используются приближенные значения $G_i! \approx (G_i - N_i)\ !G_i^{N_i}$ и $(G_i + N_i - 1)\ ! \approx (G_i - 1)\ !G_i^{N_i}$.

2.6. Квазиклассическая статистика

В статистике Бозе–Эйнштейна имеется предельный случай, когда выполняется условие $N_i >> G_i$. Число возможных макросостояний совокупности из N объектов в этом приближении равняется [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{N_i^{G_i - 1}}{(G_i - 1)\ !}. \tag{2.6.1}$$

При выводе выражения (2.6.1) используется приближенное значение $(G_i + N_i - 1)\ ! \approx N_i^{G_i - 1} N_i!$.

Из логарифмической меры Больцмана–Хартли (2.3.3) вытекает квантовая энтропия в следующем виде

$$H_N = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_i}{G_i}\right) G_i\,. \tag{2.6.2}$$

Используя распределение $D_i = N_i/G_i$, получим функционалы

$$H_N(D) = \sum_i^m (\log_2 D_i) G_i\,, \tag{2.6.3}$$

$$H(D) = \frac{H_N(D)}{N} = \frac{\sum_i^m (\log_2 D_i) G_i}{\sum_i^m D_i G_i}, \quad N = \sum_i^m D_i G_i\,, \tag{2.6.4}$$

а для $p_i = D_i / N$ имеем энтропию

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = \frac{1}{N}\sum_i^m (\log_2 p_i) G_i, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1, \tag{2.6.5}$$

которая зависит от N и определяется с точностью до постоянной.

Точное значение взвешенного среднего по весам G_i равняется

$$H(D) = \frac{H_N(D)}{G} = \frac{\sum_i^m (\log_2 D_i) G_i}{\sum_i^m G_i}, \quad G = \sum_i^m G_i . \tag{2.6.6}$$

Рассмотрим экстремальные свойства квазиклассической энтропии (2.6.3) при дополнительных условиях сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i . \tag{2.6.7}$$

Приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L = \sum_i^m (\log_2 D_i) G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i , \tag{2.6.8}$$

получим соотношение

$$\delta L = \sum_i^m \delta D_i \left[\frac{1}{D_i \ln 2} + \tau T_i + \alpha \right] G_i , \tag{2.6.9}$$

из которого следует распределение

$$D_i = -\frac{1}{\ln 2 (\tau T_i + \alpha)}, \qquad \tau < 0 . \tag{2.6.10}$$

Подставим (2.6.10) в (2.6.3) и (2.6.7) и получим экстремальные значения

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[\log_2 (-\tau T_i - \alpha) \right] G_i + \text{const} , \tag{2.6.11}$$

$$\mathbf{E}_N(T) = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\frac{T_i}{\tau T_i + \alpha} \right) G_i, \;\; N = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\frac{1}{\tau T_i + \alpha} \right) G_i . \tag{2.6.12}$$

Причем, экстремум квазиклассической энтропии соответствует максимуму, так как справедливо неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{\left(\delta D_i\right)^2}{D_i} G_i \le 0\,. \qquad (2.6.13)$$

Дифференцируя (2.6.11) по τ и α, окончательно имеем соотношение

$$dH_N\left(D\right) = -\tau d\mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha dN\,. \qquad (2.6.14)$$

Интересный случай следует, если положить $\alpha = 0$. Тогда из (2.6.11) и (2.6.12) вытекают соотношения

$$H_N\left(D\right) = -k\sum_i^m \ln\left(-\tau T_i\right) G_i\,, \qquad (2.6.15)$$

$$\mathbf{E}_N\left(T\right) = \frac{\tau}{\ln 2}\sum_i^m G_i, \quad N = \frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\tau T_i\right) G_i\,. \qquad (2.6.16)$$

2.7. Квантовые информации различия и меры неточности

Приведем строгое вероятностно-статистическое обоснование квантовых информаций различия при наблюдениях за состоянием совокупности объектов $N_1 = \left\{N_{11}, \ldots, N_{1m}\right\}$ относительно $N_2 = \left\{N_{21}, \ldots, N_{2m}\right\}$, которое было дано впервые в работах автора [17, 130].

Рассматривая вначале распределения N_{1i} и N_{2i} по состояниям G_i, как независимые, вычислим информацию различия в виде разности квантовых энтропий

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = -\left(H_{N_1} - H_{N_2}\right) = \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_1}}\,, \qquad (2.7.1)$$

где

$$\Delta\Gamma_{N_1} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{1i}}\,,\ \sum_i^m N_{1i} = N_1, \qquad (2.7.2)$$

$$\Delta\Gamma_{N_2} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}}\,,\ \sum_i^m N_{2i} = N_2\,. \qquad (2.7.3)$$

Это обоснованно соответствует определению информации в виде негэнтропии по Бриллюэну. Однако учет различия между двумя группами частиц, характеризующегося числами $K_i = N_{1i} - N_{2i}$ и $K = N_1 - N_2$ дает дополнительное слагаемое $\log_2\left(\Delta\Gamma_{N_2} \big/ \Delta\Gamma_{N_2-K}\right)$. В итоге это приводит к основному соотношению

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_1}} + \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_2-K}}. \tag{2.7.4}$$

Величина $\Delta\Gamma_{N_2-K}$ для рассматриваемых объектов запишется согласно (2.3.4), (2.4.1), (2.5.1) и (2.6.1) следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{N_2-K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}-K_i} = \prod_i^m \frac{G_i^{N_{2i}-K_i}}{\left(N_{2i}-K_i\right)\,!}, \tag{2.7.5}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2-K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}-K_i} = \prod_i^m \frac{G_i\,!}{\left(N_{2i}-K_i\right)!\left[G_i - \left(N_{2i}-K_i\right)\right]!}, \tag{2.7.6}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2-K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}-K_i} = \prod_i^m \frac{\left[G_i + \left(N_{2i}-K_i\right) - 1\right]!}{\left(G_i - 1\right)!\left(N_{2i}-K_i\right)!}, \tag{2.7.7}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2-K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}-K_i} = \prod_i^m \frac{\left(N_{2i}-K_i\right)^{G_i}}{\left(G_i - 1\right)!}. \tag{2.7.8}$$

Далее, используя формулу Стирлинга и приближенное значение

$$\frac{N_{2i}\,!}{\left(N_{2i}-K_i\right)!} \approx N_{2i}^{K_i} \tag{2.7.9}$$

при $K_i << N_{2i}$, получим выражения квантовых информаций различия, расхождений и мер неточности для различных статистик:
а) Максвелла–Больцмана

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}}, \tag{2.7.10}$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i}\right) \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}}, \tag{2.7.11}$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m N_{1i} \log_2 N_{2i}, \tag{2.7.12}$$

б) Ферми–Дирака

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}} + \left(G_i - N_{1i}\right) \log_2 \frac{G_i - N_{1i}}{G_i - N_{2i}} \right], \tag{2.7.13}$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i}\right) \log_2 \frac{N_{1i} \big/ \left(G_i - N_{1i}\right)}{N_{2i} \big/ \left(G_i - N_{2i}\right)}, \tag{2.7.14}$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 N_{2i} + \left(G_i - N_{1i}\right) \log_2 \left(G_i - N_{2i}\right) \right], \tag{2.7.15}$$

в) Бозе–Энштейна

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}} - \left(G_i + N_{1i}\right) \log_2 \frac{G_i + N_{1i}}{G_i + N_{2i}} \right], \tag{2.7.16}$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i}\right) \log_2 \frac{N_{1i} \big/ \left(G_i + N_{1i}\right)}{N_{2i} \big/ \left(G_i + N_{2i}\right)}, \tag{2.7.17}$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 N_{2i} - \left(G_i + N_{1i}\right) \log_2 \left(G_i + N_{2i}\right) \right], \tag{2.7.18}$$

г) квазиклассической

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_{2i}}{N_{1i}} \right) G_i, \tag{2.7.19}$$

$$J_{12} = 0, \; H_{N_2} = \sum_i^m \left(\log_2 N_{2i}\right) G_i, \tag{2.7.20}$$

где опущены константы.

Если перейти к распределениям $D_{1i} = N_{1i} \big/ G_i$ и $D_{2i} = N_{2i} \big/ G_i$, то из (2.7.10) – (2.7.20) вытекают функционалы:

$$I_{N_1}\left(D_1 : D_2\right) = \sum_i^m \left(D_{1i} \log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i}} \right) G_i, \tag{2.7.21}$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.22)$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left(D_{1i}\log_2 D_{2i}\right)G_i\,, \qquad (2.7.23)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}+\left(1-D_{1i}\right)\log_2\frac{1-D_{1i}}{1-D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.24)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}\big/\left(1-D_{1i}\right)}{D_{2i}\big/\left(1-D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \qquad (2.7.25)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}+\left(1-D_{1i}\right)\log_2\frac{1-D_{1i}}{1-D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.26)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}-\left(1+D_{1i}\right)\log_2\frac{1+D_{1i}}{1+D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.27)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}\big/\left(1+D_{1i}\right)}{D_{2i}\big/\left(1+D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \qquad (2.7.28)$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2 D_{2i}-\left(1+D_{1i}\right)\log_2\left(1+D_{2i}\right)\right]G_i\,, \qquad (2.7.29)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{D_{2i}}{D_{1i}}\right)G_i\,, \qquad (2.7.30)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=0,\ I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{D_{2i}}{D_{1i}}\right)G_i\,, \qquad (2.7.31)$$

где мера неточности равняется, согласно (1.8.58), выражению $H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=H_{N_1}\left(D_1\right)+I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)$.

Перейдем к исследованию экстремальных свойств информаций различия при сохранении числа случайных объектов N_1, среднего значения $\mathbf{E}_{N_1}\left(T\right)=\sum_i^m T_i D_{1i} G_i$ и фиксированном числе N_2. Согласно вариационному принципу находим экстремумы соответствующих функционалов, из которых вытекают равенства

$$D_{1i} = 2^{\tau T_i + \alpha} D_{2i}\,, \qquad (2.7.32)$$

$$\frac{D_{1i}}{1 + D_{1i}} = 2^{\tau T_i + \alpha} \frac{D_{2i}}{1 + D_{2i}}\,, \qquad (2.7.33)$$

$$\frac{D_{1i}}{1 - D_{1i}} = 2^{\tau T_i + \alpha} \frac{D_{2i}}{1 - D_{2i}}\,, \qquad (2.7.34)$$

$$D_{1i} = -\frac{1}{\left(\tau T_i + \alpha\right)\ln 2} D_{2i} \qquad (2.7.35)$$

для определения распределений D_{1i}. Подставляя эти распределения в квантовые информации различия, получим экстремальное значение

$$I_{N_1}\left(D_1 : D_2\right) = \tau \mathbf{E}_{N_1}\left(T\right) + \alpha N_1 + \tau\Omega\,, \qquad (2.7.36)$$

где величина $\Omega = 0$ для квазиклассической и классической статистик Максвелла–Больцмана. Для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна имеем, соответственно, выражения

$$\tau\Omega = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i} 2^{\tau T_i + \alpha}} \right) G_i\,, \qquad (2.7.37)$$

$$\tau\Omega = -\sum_i^m \left(\log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i} 2^{\tau T_i + \alpha}} \right) G_i\,. \qquad (2.7.38)$$

Экстремум информаций различия различных статистик соответствует их минимуму, что легко доказывается.

В заключение сравним результаты различных статистик. Так на рис.2.1 представлены зависимости квантовой энтропии $H\left(p\right)$, информации различия $I\left(p : u\right)$ и меры неточности $H\left(p : u\right)$ от распределения для статистики Бозе–Эйнштейна при значениях $N_1 = N_2 = N = 2$, $G_1 = G_2 = 1$, $m = 2$, $p_1 = p$ и а) $u_1 = 1/3$, б) $u_1 = 1/2$.

При вычислении энтропии Бозе–Эйнштейна и меры неточности в выражениях (2.5.6) и (2.7.29) уточняем значение постоянной таким образом, чтобы $H(0{,}1) = H(1{,}0) = 0$. В итоге имеем выражения

$$H(p) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \frac{1}{N}(1 + Np_i)\log_2(1 + Np_i) \right] - \\ -\frac{(1+N)\log_2(1+N)}{N}, \tag{2.7.39}$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 u_i - \frac{1}{N}(1 + Np_i)\log_2(1 + Nu_i) \right] - \\ -\frac{(1+N)\log_2(1+N)}{N}, \tag{2.7.40}$$

$$I(p:u) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 \frac{p_i}{u_i} - \frac{1}{N}(1 + Np_i)\log_2 \frac{(1+Np_i)}{(1+Nu_i)} \right]. \tag{2.7.41}$$

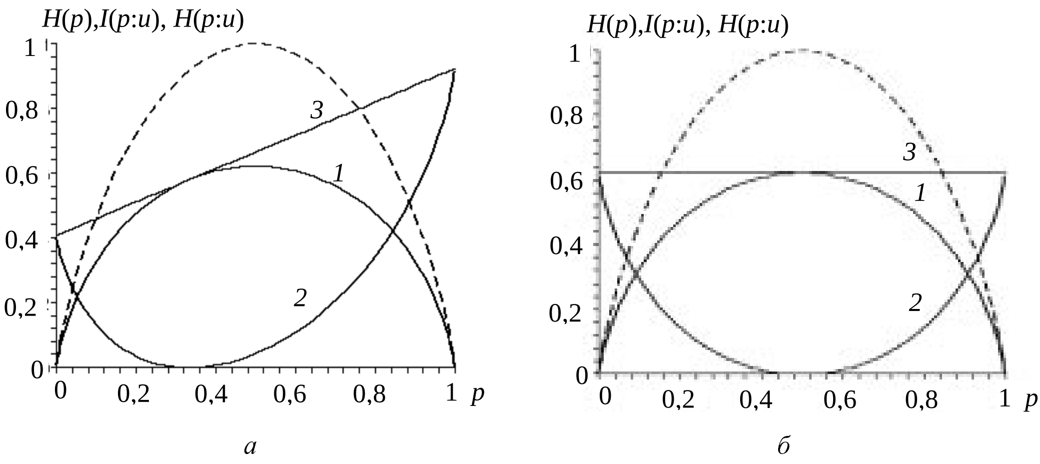


Рис.2.1. Зависимости квантовых функционалов от распределения:
1 – энтропия $H(p)$; *2* – информация различия $I(p:u)$;
3 – мера неточности $H(p:u)$; штриховая линия – энтропия
статистики Максвелла–Больцмана

Квантовая энтропия для статистики Максвелла–Больцмана равняется энтропии Шеннона–Винера

$$H(p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i)\, p_i \tag{2.7.42}$$

и изображена на рис.2.1 штриховой линией. Как видно, учет чисто квантовых эффектов приводит к уменьшению максимального значения энтропии, что нарушает условие нормированности энтропии.

2.8. Парастатистика. Метод квантовых состояний Бозе

Рассмотрим статистику объектов, в которой число возможных макросостояний вытекает из условия, что в каждом состоянии может находиться не более r объектов. Этот случай так называемой парастатистики соответствует статистикам Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна при $r=1$ и $r=\infty$.

Используем метод квантовых состояний Бозе, примененный им впервые для исследования статистики фотонов [62]. Пусть $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$ – совокупность объектов и $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$ есть состояния. Введем новые состояния G_{ik} ($k=0,\ 1,\ \ldots,\ r$), означающие, что в i состоянии находится r объектов. Следовательно, справедливы равенства

$$G_i=\sum_k^r G_{ik}\ , \qquad (2.8.1)$$

$$N_i=\sum_k^r kG_{ik}\ . \qquad (2.8.2)$$

Метод Бозе состоит в том, что исследуется статистика состояния G_{ik}. Из теории соединений находим число возможных макросостояний для совокупности объектов[62]

$$\Delta\Gamma_N=\prod_i^m\prod_k^r\Delta\Gamma_{G_{ik}}=\prod_i^m\prod_k^r\frac{G_i!}{G_{ik}!}. \qquad (2.8.3)$$

Используем меру информации Больцмана–Хартли

$$H_N=\log_2\Delta\Gamma_N=\log_2\prod_i^m\prod_k^r\frac{G_i!}{G_{ik}!} \qquad (2.8.4)$$

и формулу Стирлинга $G_{ik}!\approx\left(G_{ik}/e\right)^{G_{ik}}$. Тогда получим следующий функционал:

$$H_N = -\sum_i^m \left[\sum_k^r G_{ik} \log_2 G_{ik} - G_i \log_2 G_i \right], \qquad (2.8.5)$$

который записывается в эквивалентной формуле так:

$$H_N = -\sum_i^m \sum_k^r G_{ik} \log_2 \frac{G_{ik}}{G_i} = -\sum_i^m \sum_k^r \left(\frac{G_{ik}}{G_i} \log_2 \frac{G_{ik}}{G_i} \right) G_i . \qquad (2.8.6)$$

Для нахождения информации различия воспользуемся основным соотношением (2.7.4), записанным в следующем виде

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \log_2 \frac{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i\,!}{G_{1ik}\,!}}{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i\,!}{G_{2ik}\,!}} + \log_2 \frac{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i\,!}{G_{2ik}\,!}}{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i\,!}{\left(G_{2ik} - K_{ik}\right)\,!}} . \qquad (2.8.7)$$

Здесь числа $K_{ik} = G_{1ik} - G_{2ik}$ характеризуют учет различия между двумя совокупностями состояний, для которых имеем следующие соотношения

$$N_{1i} = \sum_k^r k G_{1ik} \,,\; N_{2i} = \sum_k^r k G_{2ik} \,, \qquad (2.8.8)$$

$$G_i = \sum_k^r G_{1ik} = \sum_k^r G_{2ik} \,,\; N_1 = \sum_i^m N_{1i} \,,\; N_2 = \sum_i^m N_{2i} \,. \qquad (2.8.9)$$

Используем формулу Стирлинга и приближенное соотношение

$$\frac{G_{2ik}\,!}{\left(G_{2ik} - C_{1ik}\right)\,!} \approx G_{2ik}^{K_{ik}} \qquad (2.8.10)$$

при $K_{ik} << G_{2ik}$ и получим из (2.8.7) квантовую информацию различия

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \sum_k^r G_{1ik} \log_2 \frac{G_{1ik}}{G_{2ik}} = \sum_i^m \sum_k^r \left(\frac{G_{1ik}}{G_i} \log_2 \frac{G_{1ik}/G_i}{G_{2ik}/G_i} \right) G_i \qquad (2.8.11)$$

для квантовых состояний Бозе.

Рассмотрим экстремальные свойства функционалов (2.8.6) и (2.8.11). Сначала находим экстремум энтропии (2.8.5) при выполнении дополнительных условий о сохранении ненормированного среднего и числа объектов:

$$\mathbf{E}_N(T)=\sum_i^m T_i N_i=\sum_i^m\sum_k^r kT_i G_{ik}\ , \qquad (2.8.12)$$

$$N=\sum_i^m N_i=\sum_i^m\sum_k^r kG_{ik}\ . \qquad (2.8.13)$$

Это соответствует задаче определения наиболее вероятного распределения N_i по состояниям G_i.

Приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L=-\sum_i^m\sum_k^r G_{ik}\log_2\frac{G_{ik}}{G_i}+\tau\sum_i^m\sum_k^r kT_i G_{ik}+\alpha\sum_i^m\sum_k^r kG_{ik} \qquad (2.8.14)$$

по переменным G_{ik}

$$\delta L=-\sum_i^m\sum_k^r \delta G_{ik}\left[\log_2 G_{ik}-\tau kT_i-\alpha k\right]=0, \qquad (2.8.15)$$

получим число состояний

$$G_{ik}=2^{k(\tau T_i+\alpha)}. \qquad (2.8.16)$$

Подстановка данного числа в формулы (2.8.1) и (2.8.2) дает выражения

$$G_i=\sum_k^r 2^{k(\tau T_i+\alpha)}, \qquad (2.8.17)$$

$$N_i=\sum_k^r k2^{k(\tau T_i+\alpha)}\ . \qquad (2.8.18)$$

Используя (2.8.17) и (2.8.18), получим искомое распределение

$$D_i=\frac{N_i}{G_i}=\frac{\sum_k^r k2^{k(\tau T_i+\alpha)}}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i+\alpha)}}. \qquad (2.8.19)$$

Экстремальное значение квантовой энтропии (2.8.5) и ее дифференциал имеют следующий вид

$$H_N=-\tau\mathbf{E}_N(T)-\alpha N+\tau\Omega, \qquad (2.8.20)$$

$$dH_N = -\tau d\mathbf{E}_N(T) - \alpha dN\ , \tag{2.8.21}$$

где вводится величина

$$\tau\Omega = \sum_i^m \sum_k^r G_{ik} \log_2 \sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)} = \sum_i^m \left[\log_2 \sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)} \right] G_i\ , \tag{2.8.22}$$

которая имеет свойства

$$\mathbf{E}_N(T) = \frac{\partial \tau\Omega}{\partial \tau} = \sum_i^m T_i D_i G_i = \frac{\sum_i^m \sum_k^r k T_i 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_i}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)}}, \tag{2.8.23}$$

$$N = \frac{\partial \tau\Omega}{\partial \alpha} = \sum_i^m D_i G_i = \frac{\sum_i^m \sum_k^r k 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_i}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)}}. \tag{2.8.24}$$

При $r = 1$ и $r = \infty$ из (2.8.19) вытекают, соответственно, распределения для квантовых статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \tag{2.8.25}$$

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}. \tag{2.8.26}$$

Для произвольного значения r имеем распределение для парастатистики [26]

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r+1}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 1}, \tag{2.8.27}$$

где использовалась формула для конечной суммы

$$\sum_{k=0}^r x^k = \frac{x^{r+1} - 1}{x - 1}. \tag{2.8.28}$$

Далее рассмотрим новый случай парастатистики, для которого в каждом состоянии может находиться не менее s и не более r объектов. Тогда сумма $\sum\limits_{k=0}^{r}$ заменяется на сумму $\sum\limits_{k=s}^{r}$ и, проводя вычисления, получим распределение

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} = \frac{\sum\limits_{k=s}^{r} k 2^{k\left(\tau T_i + \alpha\right)}}{\sum\limits_{k=s}^{r} 2^{k\left(\tau T_i + \alpha\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r - s + 1}{2^{(r+1)\left(-\tau T_i - \alpha\right)} - 2^{s\left(-\tau T_i - \alpha\right)}} \qquad (2.8.29)$$

и выражение

$$\tau\Omega = \sum_i^m \left[\log_2 \sum_{k=s}^{r} 2^{k\left(\tau T_i + \alpha\right)}\right] G_i =$$

$$= \sum_i^m \left[\log_2 \frac{2^{(r+1)\left(\tau T_i + \alpha\right)} - 2^{s\left(\tau T_i + \alpha\right)}}{2^{\left(\tau T_i + \alpha\right)} - 1}\right] G_i. \qquad (2.8.30)$$

При $s = 0$ из (2.8.29) и (2.8.30) вытекают формулы традиционной парастатистики (2.8.19) и (2.8.23). Если $s = r - 1$, то имеем распределение

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} + \frac{2}{2^{(r+1)\left(-\tau T_i - \alpha\right)} - 2^{(r-1)\left(-\tau T_i - \alpha\right)}}, \qquad (2.8.31)$$

также зависящее от одного параметра r, как и при $s = 0$.

Выпишем значения чисел объектов для рассматриваемых случаев:

а) статистика Ферми–Дирака ($k = 0,\ \ 1$)

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}; \qquad (2.8.32)$$

б) статистика Бозе–Эйнштейна ($k = 0, \ldots, \infty$)

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}; \qquad (2.8.33)$$

в) парастатистика ($k = 0, \ldots, r$)

$$N = \sum_i^m \left[\frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r + 1}{2^{(r+1)\left(-\tau T_i - \alpha\right)} - 1}\right] G_i; \qquad (2.8.34)$$

г) парастатистика ($k = s, \ldots, r$)

$$N=\sum_i^m\left[\frac{1}{2^{-\tau T_i-\alpha}-1}-\frac{r-s+1}{2^{(r+1)(-\tau T_i-\alpha)}-2^{s(-\tau T_i-\alpha)}}\right]G_i\,; \qquad (2.8.35)$$

д) парастатистика ($k=r-1,r$)

$$N=\sum_i^m\left[\frac{1}{2^{-\tau T_i-\alpha}-1}-\frac{2}{2^{(r+1)(-\tau T_i-\alpha)}-2^{(r-1)(-\tau T_i-\alpha)}}\right]G_i\,. \qquad (2.8.36)$$

Наконец находим экстремум информации различия (2.8.11) при заданности следующих значений

$$\mathbf{E}_{N_1}(T)=\sum_i^m T_i N_{1i}=\sum_i^m\sum_k^r kT_iG_{1ik}\,, \qquad (2.8.37)$$

$$N_1=\sum_i^m N_{1i}=\sum_i^m\sum_k^r kG_{1ik}\,. \qquad (2.8.38)$$

Используя вариационный метод, окончательно получим числа состояний

$$G_{1ik}=2^{k(\tau T_i+\alpha)}G_{2ik}\,, \qquad (2.8.39)$$

$$G_i=\sum_k^r 2^{k(\tau T_i+\alpha)}G_{2ik}\,, \qquad (2.8.40)$$

значения чисел объектов

$$N_{1i}=\sum_k^r k2^{k(\tau T_i+\alpha)}G_{2ik} \qquad (2.8.41)$$

и искомое распределение

$$D_{1i}=\frac{N_{1i}}{G_i}=\frac{\sum_k^r k2^{k(\tau T_i+\alpha)}G_{2ik}}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i+\alpha)}G_{2ik}}\,, \qquad (2.8.42)$$

которое для различных значений r будет соответствовать той или иной рассматриваемой статистике.

2.9. Приложения квантовых мер

Пусть случайными объектами являются частицы, рассматриваемые в статистической физике [34]. Тогда величины $D_i=N_i/G_i$ есть так называемые средние числа заполнения в i-состоянии. Квантовые состояния $G_i = (2\pi\hbar)^{-r} d\vec{r}_i d\vec{p}_i$ равняются безразмерным элементам фазового пространства, где $\hbar$ – постоянная Планка, r – число степеней свободы частицы, $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ есть значения координат и импульсов. При переходе к непрерывным аналогам имеем соответствующие размерные физические квантовые энтропии, информации различия, расхождения и меры неточности в натах:

а) статистика Максвелла–Больцмана

$$H_N(D) = -k\int(\ln D)DdX\ , \tag{2.9.1}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left(\ln\frac{D}{D_0}\right)DdX\ , \tag{2.9.2}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left(\ln\frac{D}{D_0}\right)(D-D_0)dX\ , \tag{2.9.3}$$

$$H_N(D:D_0) = -k\int(\ln D_0)DdX\ , \tag{2.9.4}$$

б) статистика Ферми–Дирака

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \tag{2.9.5}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left[D\ln\frac{D}{D_0} + (1-D)\ln\frac{(1-D)}{(1-D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.6}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left[(D-D_0)\ln\frac{D/(1-D)}{D_0/(1-D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.7}$$

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \tag{2.9.8}$$

в) статистика Бозе–Эйнштейна

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D - (1+D)\ln(1+D)\right]dX\ , \tag{2.9.9}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left[D\ln\frac{D}{D_0} - (1+D)\ln\frac{(1+D)}{(1+D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.10}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left[(D-D_0)\ln\frac{D/(1+D)}{D_0/(1+D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.11}$$

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \qquad (2.9.12)$$

г) квазиклассическая статистика

$$H_N(D) = k\int \ln D dX\ , \qquad (2.9.13)$$

$$I_N(D:D_0) = k\int \ln\frac{D}{D_0}dX\ , \qquad (2.9.14)$$

$$J_N(D:D_0) = 0\ ,\ H_N(D_0) = k\int \ln D_0 dX\ . \qquad (2.9.15)$$

Здесь $dX = (2\pi\hbar)^{-r}\, d\vec{r}d\vec{p}$ и k – фундаментальная постоянная Больцмана. Для распределений имеем

$$\int DdX = N, \quad \int D_0 dX = N_0. \qquad (2.9.16)$$

Для всех статистик имеют место дифференциальные соотношения статистической физики равновесных систем

$$dH_N(D) = \beta\left(dE_N - \mu dN\right) \qquad (2.9.17)$$

и неравновесных открытых систем в окружении

$$dI_N(D:D_0) = -dH_N(D) + \beta_0 dE - \beta_0\mu_0 dN\ , \qquad (2.9.18)$$

где β_0 и μ_0 есть обратная температура и химический потенциал окружения.

Равновесные распределения, максимизирующие энтропию, имеют соответственно для различных статистик следующий вид:

$$D = \exp\left\{-k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}, \qquad (2.9.19)$$

$$D = \frac{1}{\exp\left\{\ k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}+1}, \qquad (2.9.20)$$

$$D = \frac{1}{\exp\left\{\ k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}-1}, \qquad (2.9.21)$$

$$D = \frac{1}{k^{-1}\beta(H-\mu)}, \qquad (2.9.22)$$

где $\beta = 1/T$ – обратная температура, $H = H(X)$ есть энергия частицы, $E_N = \mathbf{E}_N(H)$ – полная энергия системы частиц, μ – химический потенциал.

Рассмотрим некоторые простейшие физические примеры.

1. Идеальный газ. Пренебрегаем взаимодействием частиц в газе, что приводит к определению функции Гамильтона $H(p) = \vec{p}^2 / 2m$ для частицы с массой m. Используя условие (2.9.16), для распределения (2.9.19) получим число частиц

$$N = (2\pi\hbar)^{-r} \int \exp\left\{ -\frac{\vec{p}^2/2m - \mu}{kT} \right\} d\vec{r} d\vec{p} = (2\pi\hbar)^{-r} V \exp\left\{ \frac{\mu}{kT} \right\} (2\pi mT)^{3/2} \quad (2.9.23)$$

и, окончательно, распределение Максвелла

$$D(p_x, p_y, p_z) = \frac{N}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{\vec{p}^2}{2mkT} \right\}, \quad (2.9.24)$$

с нормировкой

$$\int D(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z = \frac{N}{V}. \quad (2.9.25)$$

2. Фотонный газ. Электромагнитное излучение представляет собой идеальный фотонный газ, в котором фотоны не взаимодействуют между собой, и химический потенциал удовлетворяет условию $\mu = 0$. Энергия фотона есть $H = cp = \hbar\omega$, где ω – собственная частота излучения в данном объеме V. Тогда, согласно (2.9.16) и (2.9.21), имеем число фотонов

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (2.9.26)$$

и полную энергию фотонного газа

$$E_N = \int \rho(\omega) d\omega, \quad (2.9.27)$$

где $\rho(\omega)$ определяется по формуле Планка для спектрального распределения энергии

$$\rho(\omega) = \frac{V\hbar\omega^2}{\pi^2 c^3 \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}. \quad (2.9.28)$$

3. Упорядоченность фотонного газа. Произведем оценку упорядоченности состояния электромагнитного излучения с распределением D

относительно D_0 [16]. Открытая система и окружение представляют собой исходное и внешнее поля излучений с частотой ω и температурами T и T_0 соответственно. Тогда переход между состояниями описывается распределениями Планка

$$D = \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) - 1 \right\}^{-1}, \; D_0 = \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_0} \right) - 1 \right\}^{-1}, \tag{2.9.29}$$

$$\int D \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = N, \quad \int D_0 \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = N_0 . \tag{2.9.30}$$

Согласно (2.9.10) запишем информацию различия для Бозе-газа

$$I_N\left(D : D_0\right) = k\int \left[D \ln\frac{D}{D_0} - \left(1+D\right)\ln\frac{\left(1+D\right)}{\left(1+D_0\right)} \right] \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega =$$
$$= -\left(H - H_0\right) + \frac{1}{T_0}\left(E - E_0\right). \tag{2.9.31}$$

Значения энтропии и энергии исходного черного излучения в частичном равновесии находятся по формулам

$$H = H\left(D\right) = -k\int \left[D\ln D - \left(1+D\right)\ln\left(1+D\right) \right] \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = \frac{4}{3} E T^{-1}, \tag{2.9.32}$$

$$E = \int \left(h\omega\right) D \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = \sigma T^4 V , \tag{2.9.33}$$

где σ – постоянная Стефана.

В случае полного равновесия в (2.9.32) функция D заменяется на D_0 и тогда имеем

$$H_0 = \frac{4}{3} E_0 T_0^{-1}, \quad E_0 = \sigma T_0^4 V . \tag{2.9.34}$$

Подставим выражения (2.9.32) – (2.9.34) в (2.9.31) и получим

$$I = \frac{E_0}{T_0}\left(\xi^4 - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3} \right), \left(\xi = \frac{T}{T_0} \right). \tag{2.9.35}$$

При $\xi = 1$ имеем минимальную величину физической информации различия $I=0$. В областях $0<\xi<1$ и $1<\xi<\infty$ упорядоченность исходного черного излучения тем выше, чем ниже величина ξ в первой области и, соответственно, выше во второй относительно значения $\xi=1$. Приближение величины ξ к значению $\xi=1$ в обеих областях приводит к уменьшению упорядоченности.

Таким образом, приведенные результаты позволяют найти условия для поддержания высокого уровня упорядоченности открытой системы, находящейся в поле излучения с температурой T_0 и излучающей с температурой T. Фиксируем температуру T_0 и получаем важный вывод. В области $0<\xi<1$ излучение системы должно быть длинноволновым $(\xi<<1)$, а в области $1<\xi<\infty$ – коротковолновым $(\xi>>1)$. При этом информация различия (2.9.35) имеет, соответственно указанным областям, следующие асимптотические значения:

$$I=\frac{1}{3}E_0T_0^{-1}\ \left(0<\xi<1\right), \tag{2.9.36}$$

$$I=ET_0^{-1}\ \left(1<\xi<\infty\right). \tag{2.9.37}$$

Как видно из асимптотик, высокий уровень упорядоченности существенно зависит от температуры окружения T_0. Он начинает падать в первой области (при $0<T<T_0$) и возрастать во второй с уменьшением T_0. Увеличение же температуры T_0 приводит к обратным явлениям в этих областях.

4. Фононный «газ». Состояние твердого тела определяется квазиклассическим распределением фононов по квантовым состояниям с $\mu=0$. Энергия фонона есть $H=\hbar\omega\left(\vec{k}\right)$, где $\vec{k}$ – волновой вектор, а $dX=\left(dk_xdk_ydk_zdV\right)/\left(2\pi\right)^3$. Для энергии тепловых колебаний в объеме пространства dV имеем равенство $\beta=U\left(\vec{r},\vec{k}\right)$. Число фононов, согласно квазиклассической статистике, равняется [34]

$$N=\int\frac{U\left(\vec{r},\vec{k}\right)}{\hbar\omega\left(\vec{k}\right)}\frac{d\vec{k}d\vec{r}}{\left(2\pi\right)^3}. \tag{2.9.38}$$

Полная энергия и энтропия твердого тела даются следующими выражениями:

$$E_N = \int U\left(\vec{r}, \vec{k}\right) \frac{d\vec{k} d\vec{r}}{\left(2\pi\right)^3}, \tag{2.9.39}$$

$$H_N = k \int \ln\left[\frac{U\left(\vec{r}, \vec{k}\right)}{\hbar\omega\left(\vec{k}\right)}\right] \frac{d\vec{k} d\vec{r}}{\left(2\pi\right)^3}. \tag{2.9.40}$$

2.10. Параметризованные квантовые меры

Рассмотрим параметризованные меры в изучаемых статистиках. Для чего введем параметр ε, ранее представленный в работах [19, 21], и перепишем равенства (2.7.32) – (2.7.35) в виде

$$\frac{D_{1i}}{1 \pm \varepsilon D_{1i}} = \frac{D_{0i}}{1 \pm \varepsilon D_{0i}} \frac{D_{2i}}{1 \pm \varepsilon D_{2i}}, \tag{2.10.1}$$

где распределение

$$D_{0i} = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} \mp \varepsilon} \tag{2.10.2}$$

и параметр $\varepsilon = 0$ для статистики Максвелла–Больцмана. Знак плюс (минус) при $\varepsilon = 1$ соответствует статистике Ферми–Дирака (Бозе–Эйнштейна). В общем случае параметр ε меняется в допустимых пределах.

Распределение (2.10.2) максимизирует параметризованную квантовую энтропию

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i \mp \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \varepsilon D_i\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon D_i\right)\right] G_i =$$

$$= -\sum_i^m \left[D_i \log_2 \frac{D_i}{1 \pm \varepsilon D_i} \mp \frac{1}{\varepsilon} \log_2\left(1 \pm \varepsilon D_i\right)\right] G_i \tag{2.10.3}$$

и проявляется в равенстве (2.10.1) при минимизации обобщенной квантовой информации различия.

Выпишем параметризованную квантовую информацию различия, расхождение и меру неточности:

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)\log_2\frac{1\pm\varepsilon D_{1i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right]G_i=$$

$$=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}/\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1\pm\varepsilon D_{1i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right]G_i=$$

$$=-\left[H_{N_1}\left(D_1\right)-H_{N_2}\left(D_2\right)\right]-\sum_i^m\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\left(\log_2\frac{D_{2i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right)G_i=$$

$$=-\left[H_{N_1}\left(D_1\right)-H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)\right], \tag{2.10.4}$$

$$J_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}/\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \tag{2.10.5}$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2 D_{2i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{2i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)\right]G_i\,. \tag{2.10.6}$$

Переходим в (2.10.3) – (2.10.6) к распределениям вероятностей $p,\ u$ и запишем функционалы

$$H_\varepsilon\left(p\right)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{1\pm\varepsilon p_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\right]G_i, \tag{2.10.7}$$

$$I_\varepsilon\left(p:u\right)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]G_i=$$

$$=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i/\left(1\pm\varepsilon p_i\right)}{u_i/\left(1\pm\varepsilon u_i\right)}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]G_i=$$

$$=-\left[H_\varepsilon\left(p\right)-H_\varepsilon\left(u\right)\right]-\sum_i^m\left(p_i-u_i\right)\left(\log_2\frac{u_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right)G_i=$$

$$=-\left[H_\varepsilon\left(p\right)-H_\varepsilon\left(p:u\right)\right], \tag{2.10.8}$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right]G_i, \qquad (2.10.9)$$

$$H_\varepsilon(p:u)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 u_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{u_i}{1\pm\varepsilon u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]G_i, \qquad (2.10.10)$$

которые вычисляются в рассматриваемых статистиках с точностью до постоянной. При $\varepsilon/N=0,\ -1,\ +1$ имеем ранее приведенные выражения энтропий, информаций различия, расхождений и мер неточности для различных статистик. В функционалах (2.10.7) – (2.10.10) полагается, что число объектов равняется постоянному значению N и, соответственно, переход осуществляется между состояниями с распределениями, нормированными на единицу

$$\sum_i^m p_iG_i=1,\quad \sum_i^m u_iG_i=1. \qquad (2.10.11)$$

Примем одинаковые значения весов $G_i=1$ и, уточняя постоянную, из (2.10.7) – (2.10.10) получим параметризованные меры

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon p_i)\right]\mp$$
$$\mp\frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad (2.10.12)$$

$$I_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right], \qquad (2.10.13)$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right], \qquad (2.10.14)$$

$$H_\varepsilon(p:u) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 u_i - \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon u_i) \right] \mp$$

$$\mp \frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.10.15}$$

Здесь при знаке плюс (минус) параметр меняется в пределах $\varepsilon > 0$ $(0<\varepsilon<1)$. Если $m=2$, то имеем $H_\varepsilon(0,1) = H_\varepsilon(1,0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ из (2.10.12)–(2.10.15) вытекают известные функционалы статистической модели Шеннона–Винера

$$H(p) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i\,, \tag{2.10.16}$$

$$I(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i\,, \tag{2.10.17}$$

$$J(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right)(p_i - u_i), \tag{2.10.18}$$

$$H(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(p:u) = -\sum_i^m (\log_2 u_i) p_i\,. \tag{2.10.19}$$

Пусть состояние случайного объекта описывается совместным распределением вероятностей p_{ij} и, соответственно, параметризованной квантовой энтропией

$$H_\varepsilon(p_{12}) = -\sum_i^m \sum_j^n \left[p_{ij} \log_2 p_{ij} \mp \frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_{ij})\log_2(1\pm\varepsilon p_{ij}) \right] \mp$$

$$\mp \frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.10.20}$$

Совместное распределение вероятностей есть $p_{ij} = p_i p_j$, где p_i и p_j – частные распределения вероятностей независимых объектов. Распределения удовлетворяют вероятностной нормировке

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = 1, \quad \sum_i^m p_i = 1, \quad \sum_j^n p_j = 1\,. \tag{2.10.21}$$

Частные квантовые энтропии представляются соответствующими функционалами

$$H_\varepsilon\left(p_1\right)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\right]\mp$$

$$\mp\frac{\left(1\pm\varepsilon\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon\right)}{\varepsilon},\tag{2.10.22}$$

$$H_\varepsilon\left(p_2\right)=-\sum_j^n\left[p_j\log_2 p_j\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_j\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon p_j\right)\right]\mp$$

$$\mp\frac{\left(1\pm\varepsilon\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon\right)}{\varepsilon}.\tag{2.10.23}$$

Очевидно, что энтропия (2.10.20) является неаддитивным функционалом и имеем соотношение

$$H_\varepsilon\left(p_{12}\right)\neq H_\varepsilon\left(p_1\right)+H_\varepsilon\left(p_2\right)\tag{5.10.24}$$

2.11. Различные меры в информационных системах

Перейдем к рассмотрению случайных объектов в информационных системах. Состояние объектов характеризуется дискретным распределением вероятностей $p=\left\{p_1,\ldots,p_m\right\}$ $\left(p_i\geq 0\right)$. Вместо весов G_i в физических системах, начиная с работы Белиса и Гайза [57], вводятся веса υ_i $(\upsilon_i\geq 0)$, которые задают дискретные значения так называемой полезности.

Приведем меры, соответствующие различным статистикам.

– Для статистики Максвелла–Больцмана, согласно (2.3.9), имеем энтропию [57]

$$H\left(p\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i\upsilon_i,\quad \sum_i^m p_i=1,\tag{2.11.1}$$

где распределение вероятностей нормировано на единицу без весов υ_i. При $\upsilon_i=1$ из (2.11.1) следует традиционная мера информации Шеннона–Винера

$$H\left(p\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i,\tag{2.11.2}$$

а при $\upsilon_i=\upsilon$ эта мера умножается на коэффициент υ. В частности, если

$\upsilon = 0$, то функционал (2.11.1) равен нулю при конечном значении функционала (2.11.2).

Аналогами квантовой информации различия и меры неточности являются [114, 115]

$$I(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i \upsilon_i, \quad \sum_i^m u_i = 1, \tag{2.11.3}$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i \right) p_i \upsilon_i, \tag{2.11.4}$$

которые при $\upsilon_i = 1$ совпадают с мерами

$$I(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i, \tag{2.11.5}$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i \right) p_i. \tag{2.11.6}$$

Квантовые информационные меры, рассматриваемые как взвешенные средние, представляются так:

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i \right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.7}$$

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.8}$$

$$J(p:u) = \frac{\sum_i^m \left[\left(p_i - u_i \right) \log_2 \frac{p_i}{u_i} \right] \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.9}$$

$$H(p:u) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (2.11.10)$$

– Для квазиклассической статистики, согласно (2.6.6), имеем следующие взвешенные средние по весам υ_i

$$H(p) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) \ \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \qquad (2.11.11)$$

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{u_i}{p_i}\right) \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \ J(p:u) = 0. \qquad (2.11.12)$$

В частном случае при $\upsilon_i = 1$ из (2.11.11) с точностью до коэффициента $1/m$ вытекает энтропия Берга [65]

$$H(p) = \sum_i^m \log_2 p_i \ . \qquad (2.11.13)$$

Функционал (2.11.11), взятый с обратным знаком, есть энтропия

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) \ \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \qquad (2.11.14)$$

рассмотренная в работе [98].

– Для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна, согласно (2.10.7)–(2.10.11), имеем параметризованные квантовые информационные меры

$$H_\varepsilon(p) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i \mp \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \varepsilon p_i\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon p_i\right) \right] \upsilon_i, \qquad (2.11.15)$$

$$I_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]\upsilon_i\,, \quad (2.11.16)$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right]\ \upsilon_i\,, \quad (2.11.17)$$

$$H_\varepsilon(p:u)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 u_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]\ \upsilon_i\,. \quad (2.11.18)$$

В работе [84] рассматриваются энтропии с $\upsilon_i=1$ и $\varepsilon>0$ в следующем виде

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)+p_i\right], \quad (2.11.19)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\log_2(1+\varepsilon), \quad (2.11.20)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-\frac{1}{\varepsilon}, \quad (2.11.21)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon)\log_2(1+\varepsilon), \quad (2.11.22)$$

которые также являются некоторыми комбинациями постоянных величин параметризованной меры (2.10.12) и меры, приведенной в работе [73]

$$H_\varepsilon(p)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_i^m\left[(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\log_2(1+\varepsilon). \quad (2.11.23)$$

Глава 3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕНЬИ

Приводятся основные методы и идеи теории информации, построенной на статистической модели Реньи. Выводятся и анализируются логарифмические меры энтропии и информации различия Реньи и их обобщения для аддитивных случайных объектов.

В отличие от подхода Шеннона–Винера, Альфред Реньи впервые ввел меры, зависящие от некоторого параметра q и играющие важную роль не только в теории информации, но и в теории мультифракталов. Результаты работы [103] и монографии [104] явились значительным шагом вперед и способствовали началу развития обобщенной теории информации. Именем Реньи назван Институт математики Венгерской академии наук, первым директором которого он являлся долгое время.

3.1. Взвешенное среднее Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией

Рассмотрим множество всех состояний случайного объекта, описываемых распределением $p=\{p_1,\ldots,p_m\}$ и множество случайных величин $T=\{T_1,\ldots,T_m\}$.

Определение 1. Среднее Колмогорова–Нагумо с весом $p=\{p_1,\ldots,p_m\}$, $p_i>0$ и произвольной функцией $\varphi=\varphi(T)$ имеет вид [81, 94]

$$A_\varphi(T)=\varphi^{-1}\left[\frac{\sum_i^m \varphi(T_i)\,p_i}{\sum_i^m p_i}\right], \qquad (3.1.1)$$

где $\varphi = \varphi(T)$ – непрерывная строго монотонная функция на $\mathbf{R}$, а $\varphi^{-1}(T)$ – функция, обратная $\varphi(T)$.

Если выполняется условие вероятностной нормировки для распределения, то из (3.1.1) следует выражение

$$A_\varphi(T) = \varphi^{-1}\left[\sum_i^m \varphi(T_i)\, p_i\right], \quad \sum_i^m p_i = 1. \tag{3.1.2}$$

Приведем основные свойства взвешенного среднего Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией [47, 63, 81, 94].

1. Нормировка. Для неслучайной величины, имеющей постоянное значение C, справедливо равенство

$$A_\varphi(\mathrm{C}) = \mathrm{C}. \tag{3.1.3}$$

Поскольку при $\mathrm{C} = 1$ из (3.1.3) вытекает $A_\varphi(1) = 1$, то имеем свойство нормированности взвешенного среднего на единицу.

2. Эквивалентные средние. Необходимым и достаточным условием равенства

$$A_\varphi(T) = A_\chi(T) \tag{3.1.4}$$

для всех T и p является условие

$$\chi = \alpha\varphi + \beta, \tag{3.1.5}$$

где α и β – постоянные и $\alpha \neq 0$. Средние с функциями φ и χ называются эквивалентными средними.

3. Однородность. Пусть $\varphi(T)$ непрерывна в открытом интервале $(0, \infty)$ и пусть

$$A_\varphi(aT) = aA_\varphi(T) \tag{3.1.6}$$

для всех положительных T, p и a. Очевидно, что (3.1.6) справедливо, когда $\varphi = T^q$ или $\varphi = \log_2 T$. В общем случае, согласно (3.1.5), для φ имеем функциональное уравнение

$$\varphi(T_1 T_2) = \varphi(T_1) + \varphi(T_2) + \varepsilon\varphi(T_1)\varphi(T_2). \tag{3.1.7}$$

При $\varepsilon = 0$ из (3.1.7) вытекает $\varphi(T) = \lambda \log_2 T$. Если $\varepsilon \neq 0$, то общим решением (3.1.7) является

$$\varphi(T) = \varepsilon^{-1}\left(T^q - 1\right). \tag{3.1.8}$$

4. Сравнимость. Пусть ψ и χ являются непрерывными и строго монотонными функциями. Чтобы $A_\psi(T)$ и $A_\chi(T)$ были сравнимы, то есть для них справедливо неравенство

$$A_\psi(T) \le A_\chi(T) \tag{3.1.9}$$

для всех T и p, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\varphi = \chi\psi^{-1} \tag{3.1.10}$$

удовлетворяла неравенству

$$\varphi\left(\frac{\sum_i^m T_i p_i}{\sum_i^m p_i}\right) \le \frac{\sum_i^m \varphi(T_i)\, p_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{3.1.11}$$

если χ – возрастающая функция; если же χ убывает, то в (3.1.11) имеем обратный знак неравенства.

5. Выпуклость. Если для произвольной непрерывной функции φ справедливо строгое неравенство в (3.1.11), кроме тех случаев, когда $T_i = \mathrm{const}$ или $\varphi(T)$ линейная функция, то эта функция обладает свойством выпуклости. Функция $(-\varphi)$ есть вогнутая и в (3.1.11) имеет обратный знак. Необходимым и достаточным условием выпуклости $\varphi(T)$ в рассматриваемом интервале является неравенство $\varphi''(T) \ge 0$. Класс функций φ исследуется в теории выпуклых функций.

6. Сумма с произвольной функцией. Если $p_i = 1$ или $p_i = 1/m$, то с точностью до постоянной $1/m$ имеем сумму с произвольной функцией

$$A_\varphi(T) = \varphi^{-1}\left[\sum_i^m \varphi(T_i)\right], \tag{3.1.12}$$

которая непрерывна и строго монотонна. При строгом равенстве (3.1.11) с $p_i = 1/m$ выражение (3.1.12) есть среднее Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией для равновероятного состояния.

7. Флуктуация. Рассмотрим отклонение произвольной функции случайной величины T_i от среднего по Колмогорову–Нагумо и введем флуктуацию:

$$\Delta\varphi(T_i) = \varphi(T_i) - A_\varphi(T), \quad \sum_i^m [\Delta\varphi(T_i)] p_i = 0, \tag{3.1.13}$$

начальные и центральные моменты n-го порядка

$$\alpha_n = \sum_i^m \varphi^n(T_i) p_i, \tag{3.1.14}$$

$$\mu_n = \sum_i^m [\varphi(T_i) - A_\varphi(T)]^n p_i. \tag{3.1.15}$$

8. f-взвешенное среднее с произвольной функцией. Функциональное обобщение взвешенного среднего Колмогорова–Нагумо запишется так [63]:

$$A_{\varphi,f}(T) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_i^m \varphi(T_i) f(p_i)}{\sum_i^m f(p_i)}\right]. \tag{3.1.16}$$

Если $f(p_i) = p_i$, то f – взвешенное среднее с произвольной функцией совпадает с выражением (3.1.1).

Определение 2. Аналогом взвешенного среднего произвольной функции каждой непрерывной случайной функции $T = T(X)$ в состоянии $p = p(X)$ является выражение

$$A_\varphi(T) = \varphi^{-1}\left[\frac{\int_G \varphi(T) pdX}{\int_G pdX}\right], \tag{3.1.17}$$

где

$$0 < \int_G pdX < 1. \tag{3.1.18}$$

При условии вероятностной нормировки для всего пространства из (3.1.17) вытекает

$$A_\varphi(T) = \varphi^{-1}\left[\int \varphi(T) pdX\right], \quad \int pdX = 1. \tag{3.1.19}$$

Для квантовой величины T, являющейся эрмитовым оператором, имеем выражение

$$A_\varphi(T) = \varphi^{-1}[\mathrm{Sp}\varphi(T)\cdot\rho], \ \mathrm{Sp}\rho = 1, \tag{3.1.20}$$

где ρ – оператор смешанного состояния случайного объекта.

В заключение рассмотрим различные функции $\varphi(T)$ и получим следующие средние по Колмогорову–Нагумо [47, 63]

$\varphi(T)$:	$A_{\varphi}(T)$:	
T	$\mathbf{E}(T) = \sum_{i}^{m} T_i p_i$,	(3.1.21)
T^{ε}	$N_{\varepsilon}(T) = \left(\sum_{i}^{m} T_i^{\varepsilon} p_i \right)^{1/\varepsilon}$	(3.1.22)
$\log_2 T$	$N(T) = 2^{\sum_{i}^{m} (\log_2 T) p_i}$,	(3.1.23)
$2^{\varepsilon T}$	$H_{\varepsilon}(T) = \frac{1}{\varepsilon} \log_2 \left(\sum_{i}^{m} 2^{\varepsilon T_i} p_i \right)$,	(3.1.24)
$\sin T$	$S(T) = \arcsin \left[\sum_{i}^{m} (\sin T_i) p_i \right]$,	(3.1.25)

некоторые из которых рассматриваются в статистической теории информации.

3.2. Полунормы

Рассмотрим множество всех состояний случайного объекта, описываемых распределением $p = \{p_1, \dots, p_m\}$, и множество случайных величин $T = \{T_1, \dots, T_m\}$. Взвешенное среднее равно

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\sum_{i}^{m} T_i p_i}{\sum_{i}^{m} p_i}, \quad 0 < \sum_{i}^{m} p_i \le 1. \tag{3.2.1}$$

Определение. Каждой случайной величине T и любому числу q, $-\infty < q < \infty$, соответствует функция [4, 47, 63]:

$$N_q(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/q}. \quad (3.2.2)$$

Если веса p_i удовлетворяют условию вероятностной нормировки

$$\sum_i^m p_i = 1, \quad (3.2.3)$$

то выражения (3.2.1) и (3.2.2) примут следующий вид:

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i^m T_i p_i, \quad (3.2.4)$$

$$N_q(T) = \left(\sum_i^m T_i^q p_i \right)^{1/q}. \quad (3.2.5)$$

При $p_i = 1$ из (3.2.2) имеем средние арифметическое и геометрическое

$$\mathbf{E}(T) = N_1(T) = \frac{1}{m} \sum_i^m T_i, \quad M(T) = N_{-1}(T) = \left(\frac{1}{m} \sum_i^m T_i^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.2.6)$$

В зависимости от областей изменения числа q: $q < 0$, $0 < q < 1$, $1 \le q < \infty$ определяется тот или иной тип вероятностного q-пространства.

Приведем основные свойства функции $N_q(T)$ [4, 47, 63].

1. Однородность. При замене p на ap $(a > 0)$ функция (3.2.2) является однородным функционалом нулевой степени относительно p, то есть выполняется свойство однородности.

2. Положительность и нормированность. Для всей области изменения числа $q \in \mathbf{R}$ функция является положительной и неубывающей. Если $q < 0$ $(q > 0)$ и некоторые T_i равны нулю, то $N_q(T) = 0$ $\left(N_q(T) = \infty\right)$.

Для неслучайной постоянной величины C имеем равенство:

$$N_q(C) = \left(\frac{\sum_i^m C^q p_i}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/q} = C, \tag{3.2.7}$$

из которого следует свойство нормированности функции на единицу

$$N_q(1) = 1. \tag{3.2.8}$$

3. Полунормы $N_q(T)$. Для значений $1 \le q < \infty$ число $N_q(T)$ есть полунорма в локально выпуклом пространстве $\mathbf{L}^q$, для которого справедливы соотношения:

$$1)\ N_q(aT) = |a| N_q(T), \tag{3.2.9}$$

$$2)\ N_q(T_1 + T_2) \le N_q(T_1) + N_q(T_2) \text{ (неравенство Минковского)}, \tag{3.2.10}$$

где $a \neq 0$ есть произвольное число. При $0 < q < 1$ неравенство (3.2.10) не выполняется.

4. Невырожденность. Для полунормы допустимо $N_q(T) = 0$ при $T \neq 0$. Этим свойством полунорма отличается от нормы при $q = 2$

$$N_2(T) = \left(\sum_i^m T_i^2 p_i \right)^{1/2}, \tag{3.2.11}$$

для которой $N_2(T) = 0$ при $T = 0$.

5. Неравенство Гельдера. При $0 < q \le \infty$ и $0 < q \le \infty$ выполняется неравенство Гельдера

$$N_r(T_1 T_2) \le N_q(T_1) N_{q'}(T_2), \tag{3.2.12}$$

где для произвольных случайных величин T_1 и T_2 имеем

$$N_q(T_1) = \left(\sum_i^m T_{1i}^q p_i \right)^{1/q},\ N_{q'}(T_2) = \left(\sum_i^m T_{2i}^{q'} p_i \right)^{1/q'},$$

$$N_r(T_1 T_2) = \left[\sum_i^m (T_{1i} T_{2i})^r\, p_i \right]^{1/r}. \tag{3.2.13}$$

Конечные числа q и q' есть так называемые сопряженные показатели, которые удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{r}, \quad 0<r<q. \tag{3.2.14}$$

Знак равенства в (3.2.12) достигается тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$T_{1i}^{q}=bT_{2i}^{q'}, \tag{3.2.15}$$

где положительный коэффициент

$$b=\left[N_q\left(T_1\right)\right]^{q}\left[N_{q'}\left(T_2\right)\right]^{-q'}. \tag{3.2.16}$$

При $1\le q<\infty$ пространство $\mathbf{L}^{q'}$ есть сопряженное пространству $\mathbf{L}^{q}$ и величины T_1 и T_2 принадлежат, соответственно, этим пространствам. Для всякого $0<T<1$ имеется сопряженная величина $T'=1-T$.

Пусть $T_1=T$ и $T_2=1$, тогда из (3.2.12) вытекает следствие, что

$$N_r\left(T\right)\le N_q\left(T\right) \tag{3.2.17}$$

при любом $q>0$, где $0<r<q$, то есть $N_q\left(T\right)$ – возрастающая функция при увеличении значения q.

При $r=1$ из (3.2.17) получим важное неравенство

$$\mathbf{E}\left(T\right)\le N_q\left(T\right). \tag{3.2.18}$$

Полунорма больше среднего значения случайной величины.

6. Выпуклость функций $\boldsymbol{N_q\left(T\right)}$ и $\mathbf{log}_2\boldsymbol{N_q\left(T\right)}$. Рассмотрим неравенство Минковского (3.2.10) при $T=aT_1+\left(1-a\right)T_2$ $\left(0\le a\le 1\right)$. Тогда получим свойство выпуклости для $N_q\left(T\right)$ в виде

$$N_q\left(T\right)\le aN_q\left(T_1\right)+\left(1-a\right)N_q\left(T_2\right). \tag{3.2.19}$$

При значениях $q>0$, для которых $N_q\left(T\right)$ конечно, функция $\ln N_q\left(T\right)$ является строго выпуклой от $1/q$. Для любых $0<a<1$ имеет место неравенство

$$\log N_q\left(T\right)\le a\log_2 N_r\left(T\right)+\left(1-a\right)\log_2 N_\nu\left(T\right), \tag{3.2.20}$$

где $r>0$, $\nu>0$, а числа r, q и ν удовлетворяют равенству:

$$\frac{1}{q}=\frac{a}{r}+\frac{1-a}{\nu}. \quad (3.2.21)$$

7. Дифференцируемость функций $N_q(T)$ и $\log_2 N_q(T)$. Функции $N_q(T)$ и $\log_2 N_q(T)$ бесконечно дифференцируемы в каждой точке интервала, в котором они конечны. Функция $\left[N_q(T)\right]^q=\sum_i^m T_i^q p_i$ имеет предел

$$\lim_{q\to 0}\sum_i^m T_i^q p_i=1, \quad (3.2.22)$$

когда q стремится к 0, и имеет в этой точке первую производную,

$$\frac{d}{dq}\sum_i^m T_i^q p_i=\lim_{q\to 0+0}\sum_i^m\left(2^{q\log_2 T_i}\right)p_i=\ln 2\sum_i^m\left(\log_2 T_i\right)p_i. \quad (3.2.23)$$

При этом $N_q(T)$ и $\ln N_q(T)$ имеют пределы

$$\lim_{q\to 0}N_q(T)=N(T)=2^{\sum_i^m(\log_2 T_i)p_i}, \quad (3.2.24)$$

$$\lim_{q\to 0}\log_2 N_q(T)=\sum_i^m\left(\log_2 T_i\right)p_i. \quad (3.2.25)$$

Если T^q и $\ln T$ интегрируемы, то

$$N(T)\le N_q(T), \quad (3.2.26)$$

причем равенство достигается лишь в том случае, когда T постоянна почти всюду.

Величина $N(T)$ есть среднее геометрическое функции T.

8. Взаимосвязь полунорм. Неравенства. Используем приведенные свойства и дадим дополнительно формулы взаимосвязи полунорм

$$N_q(T)N_{-q}\left(T^{-1}\right)=1, \quad (3.2.27)$$

$$N_{q\nu}(T)=\left[N_q\left(T^{\nu}\right)\right]^{1/\nu} \quad (3.2.28)$$

и неравенства

$$N_r\left(T_1T_2\ldots T_n\right)\le N_{q_1}\left(T_1\right)N_{q_2}\left(T_2\right)\ldots N_{q_n}\left(T_n\right), \quad (3.2.29)$$

$$N_r\left(T_1+T_2+\ldots+T_n\right)\le N_{q_1}\left(T_1\right)+N_{q_2}\left(T_2\right)+\ldots+N_{q_n}\left(T_n\right). \quad (3.2.30)$$

В обобщенном неравенстве Гельдера (3.2.29) имеем

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}=\frac{1}{r},\ 0<q_i<\infty. \quad (3.2.31)$$

Неравенство (3.2.30) представляет собой обобщенное неравенство Минковского для $1\le q_i<\infty$.

Если $0<r<q<\nu$, то находим неравенство

$$\left[N_q\left(T\right)\right]^q<\left\{\left[N_r\left(T\right)\right]^r\right\}^{\frac{\nu-q}{\nu-r}}\left\{\left[N_\nu\left(T\right)\right]^\nu\right\}^{\frac{q-r}{\nu-r}}, \quad (3.2.32)$$

которое при $q=ra+\nu\left(1-a\right)$ и $0<a<1$ запишется так:

$$\sum_i^m T_i^q p_i<\left(\sum_i^m T_i^r p_i\right)^a\left(\sum_i^m T_i^\nu p_i\right)^{1-a}. \quad (3.2.33)$$

9. Взвешенное обратно-гармоническое среднее. Определим для каждой случайной величины T и любого числа q, $-\infty<q<\infty$, взвешенное обратно-гармоническое среднее [63]

$$M_q\left(T\right)=\left[\frac{N_q\left(T\right)}{N_{q-1}\left(T\right)}\right]^{q-1}N_q\left(T\right)=\frac{\sum_i^m T_i^q p_i}{\sum_i^m T_i^{q-1}p_i}. \quad (3.2.34)$$

При $q=1$ и $q=0$ из (3.2.24) вытекают взвешенное среднее и взвешенное гармоническое среднее. Если $p_i=1$, то они совпадают с соответствующими значениями (3.2.6).

Функционал (3.2.34) вытекает как частный случай при $s=q-1$ от выражения $[63]$

$$T_q^s\left(T\right)=\left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i}{\sum_i^m T_i^s p_i}\right)^{1/(q-s)}, \quad (3.2.35)$$

имеющего важную роль при определении статистического состояния в обобщенной теории информации $[66]$.

В заключение приведем аналог функции (3.2.2) каждой непрерывной величины $T=T(X)$ в состоянии p

$$N_q(T)=\left(\frac{1}{\Gamma(G)}\int_G T^q d\Gamma\right)^{1/q}=\left(\frac{\int_G T^q p dX}{\int_G p dX}\right)^{1/q}, \tag{3.2.36}$$

где для весовой функции имеем неравенство

$$0<\int_G p dX<\infty. \tag{3.2.37}$$

При условии вероятностной нормировки для всего пространства из (3.2.36) следует

$$N_q(T)=\left(\int T^q d\Gamma\right)^{1/q}=\left(\int T^q p dX\right)^{1/q},\ \int p dX=1. \tag{3.2.38}$$

Для квантовой величины T, представляемой эрмитовым оператором, определяем

$$N_q(T)=\left(\mathrm{Sp}T^q\rho\right)^{1/q},\ \mathrm{Sp}\,\rho=1, \tag{3.2.39}$$

где ρ – оператор смешенного состояния случайного объекта.

3.3. Полунормы распределений

Рассмотрим определение полунормы распределения

$$N_q(p)=\left(\frac{\sum_i^m p_i^{q+1}}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/q}, \tag{3.3.1}$$

которая при условии вероятностной нормировки имеет вид

$$N_q(p)=\left(\sum_i^m p_i^{q+1}\right)^{1/q}. \tag{3.3.2}$$

Согласно свойствам 3, 4, 6 и 7, рассмотренным в предыдущем разделе, полунорма распределения является невырожденной, выпуклой и дифференцируемой функцией по аргументу q. Причем из (3.2.24) и (3.2.25) вытекают следующие равенства:

$$\lim_{q\to 0} N_q(p)=2^{\sum_i^m(\log_2 p_i)p_i}, \tag{3.3.3}$$

$$\lim_{q\to 0}\log_2 N_q(p)=\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i\ . \qquad (3.3.4)$$

Отметим некоторые дополнительные свойства $N_q(p)$.

1. Мультипликативность. Для совместного распределения p_{12} независимых объектов с распределениями p_1 и p_2 имеем равенство

$$N_q(p_{12})=N_q(p_1)N_q(p_2), \qquad (3.3.5)$$

где полунормы

$$N_q(p_1)=\left(\sum_i^m p_{1i}^{q+1}\right)^{1/q},\ N_q(p_2)=\left(\sum_i^m p_{2i}^{q+1}\right)^{1/q}, \qquad (3.3.6)$$

$$N_q(p_{12})=\left(\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^{q+1}\right)^{1/q} \qquad (3.3.7)$$

и $p_{ij}=p_i p_j$. Произведение полунорм в (3.3.5) определяет свойство мультипликативности.

2. Полунормы равновероятного распределения. Подставим в выражение (3.3.2) распределение равновероятного состояния

$$p_i=\frac{1}{m} \qquad (3.3.8)$$

и получим, что полунорма

$$N_q(p)=\frac{1}{m} \qquad (3.3.9)$$

не зависит от числа q и совпадает с распределением (3.3.8).

3. Полунорма частного распределения. При $q>0$ справедливо неравенство

$$\left[\sum_i^m\left(\sum_j^n p_{ij}\right)^q\right]^{1/q}\le\sum_j^n\left(\sum_{ij}^m p_{ij}^q\right)^{1/q} \qquad (3.3.10)$$

для совместного распределения p_{ij}. Знак равенства достигается при $p_{ij}=p_i p_j$ для независимых объектов с распределениями вероятностей p_i и p_j.

Используем выражение полунормы частного распределения

$$N_{q-1}\left(p_1\right)=\left(\sum_i^m p_{1i}^q\right)^{1/(q-1)},\ p_i=\sum_j^n p_{ij} \tag{3.3.11}$$

и из (3.3.10) получим

$$\left[N_{q-1}\left(p_1\right)\right]^{1/q'}\le\sum_j^n\left[N_{q-1,j}\left(p_{12}\right)\right]^{1/q'}, \tag{3.3.12}$$

где

$$N_{q-1,j}\left(p_{12}\right)=\left(\sum_i^m p_{ij}^q\right)^{1/(q-1)}. \tag{3.3.13}$$

Далее примем $T=p/u$ и определим, согласно (3.2.5), полунорму

$$N_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left[\sum_i^m\left(\frac{p_i}{u_i}\right)^q p_i\right]^{1/q}, \tag{3.3.14}$$

которая обладает всеми перечисленными свойствами для $N_q\left(p\right)$.

При значении $q=0$ из (3.2.24) и (3.2.25) следуют пределы

$$\lim_{q\to0}N_q\left(\frac{p}{u}\right)=2^{\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i}, \tag{3.3.15}$$

$$\lim_{q\to0}\log_2 N_q\left(\frac{p}{u}\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i. \tag{3.3.16}$$

Предопределяя дальнейшие результаты, отметим, что функционалы $H_q\left(p\right)=-\log_2 N_{q-1}\left(p\right)$ и $I_q\left(p:u\right)=\log_2 N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$ есть аддитивные q-энтропия и q-информация различия Реньи [105, 106].

Приведем наглядную иллюстрацию рассматриваемых свойств функционалов.

На рис.3.1 представлены зависимости полунорм распределений $N_{q-1}\left(p\right)$ и $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$ от числа q при значениях $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$. Видно монотонное возрастание положительных функций при увеличении значения q.

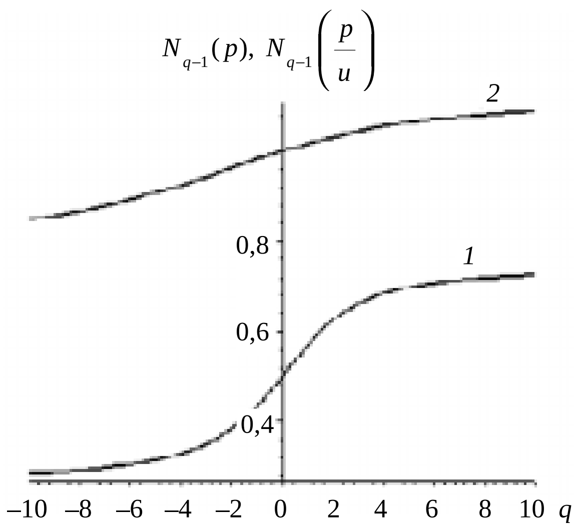


Рис. 3.1. Зависимости полунорм распределений от числа q:

$1 - N_{q-1}(p)$, $2 - N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$

Выпуклость полунорм распределений видна из рис.3.2 и рис.3.3, где даются зависимости их от распределения при значениях $m = 2$, $p_1 = 1/4$, $u_1 = 1/3$ и $q = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3$.

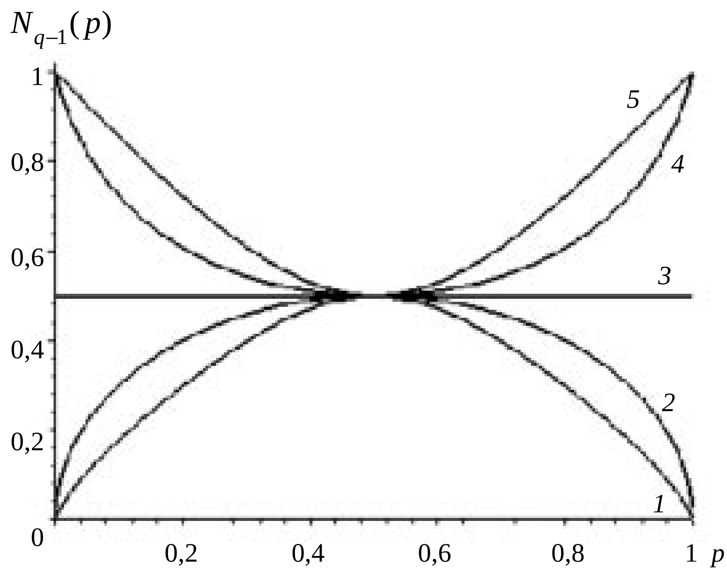


Рис. 3.2. Зависимость полунормы $N_{q-1}(p)$ от распределения:

$1-(q=-3)$, $2-(q=-1)$, $3-(q=0)$, $4-(q=1)$, $5-(q=3)$

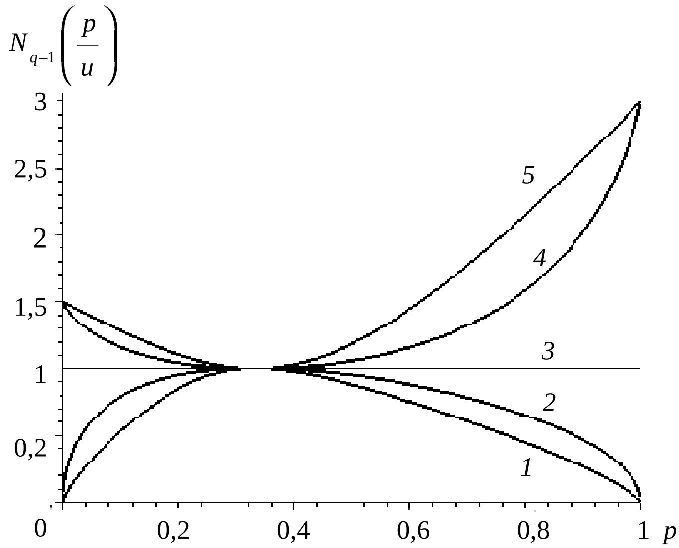


Рис. 3.3. Зависимость полунормы $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$ от распределения:
1 – ($q=-3$), *2* – ($q=-1$), *3* – ($q=0$), *4* – ($q=1$), *5* – ($q=3$).

Для распределения и случайной величины T имеет место функция

$$N_q^*(T)=\left(\frac{\sum_i^m T_i^q u_i}{\sum_i^m u_i}\right)^{1/q}, \qquad (3.3.17)$$

которая при вероятностной нормировке

$$\sum_i^m u_i = 1 \qquad (3.3.18)$$

запишется так

$$N_q^*(T)=\left(\sum_i^m T_i^q u_i\right)^{1/q}. \qquad (3.3.19)$$

При $T=u/p$ из (3.3.19) вытекает выражение полунормы распределения

$$N_q^*\left(\frac{u}{p}\right)=\left(\sum_i^m\left(\frac{u_i}{p_i}\right)^q u_i\right)^{1/q}. \qquad (3.3.20)$$

4. Взаимосвязь полунорм. Подставим в (3.3.14) распределение равновероятного состояния $u_i = 1/m$ и получим следующее равенство

$$N_q\left(\frac{p}{u}\right) = \frac{N_q(p)}{N_q(u)} = m^{\frac{q+1}{q}} N_q(p), \quad q \neq 0. \tag{3.3.21}$$

Для произвольных распределений оно не выполняется, за исключением случая $q = 0$, при котором полунормы становятся средними геометрическими распределений.

Взаимосвязь функционалов (3.3.14) и (3.3.20) определяется соотношениями

$$\begin{gathered}\left[N_q\left(\frac{p}{u}\right)\right]^q = \left[N^*_{-1-q}\left(\frac{u}{p}\right)\right]^{-1-q}, \\ \left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{1/q} = \left[N^*_{-q}\left(\frac{u}{p}\right)\right]^{1/(1-q)}.\end{gathered} \tag{3.3.22}$$

Наконец выпишем выражения полунорм в других важных случаях

$$N_q(p) = \left(\frac{\int_G p^{q+1} dX}{\int_G p dX}\right), \; N_q(\rho) = \left(\mathrm{Sp}\rho^{q+1}\right)^{1/q}, \tag{3.3.23}$$

$$N_q\left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{\int_G \left(\frac{p}{u}\right)^{q+1} dX}{\int_G p dX}\right), \; N_q\left(\rho u^{-1}\right) = \left(\mathrm{Sp}\rho^{q+1} u^{-1}\right)^{1/q}. \tag{3.3.24}$$

3.4. Аксиомы и меры информации Реньи

А. Реньи [103, 104] для вывода энтропий упростил систему аксиом Фадеева (см. главу 1) и предложил следующие аксиомы.

1. $H(p_1, p_2) = H(1-p, p)$ непрерывна при $0 \le p \le 1$ и положительна хотя бы в одной точке.

2. $H(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ симметрична относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

$$3.\ H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1. \qquad (3.4.1)$$

4. Для независимых объектов с распределениями $p_1=\{p_{11},\ldots,p_{1m}\}$ и $p_2=\{p_{21},\ldots,p_{2m}\}$ имеем свойство аддитивности общей энтропии

$$H\left(p_{12}\right)=H\left(p_1\right)+H\left(p_2\right). \qquad (3.4.2)$$

5. Если $\sum_i^m p_{1i}+\sum_j^n p_{2j}\le 1$, то справедливо равенство

$$H\left(p_{11},\ldots,p_{1m},p_{21},\ldots,p_{2n}\right)=$$
$$=\frac{\sum_i^m p_{1i}H\left(p_{11},\ldots,p_{1m}\right)+\sum_j^n p_{2j}H\left(p_{21},\ldots,p_{2n}\right)}{\sum_i^m p_{1i}+\sum_j^n p_{2j}} \qquad (3.4.3)$$

для всех p_{1i} и p_{2j}.

Согласно аксиомам, находится выражение энтропии Шеннона–Винера

$$H\left(p\right)=-\frac{\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (3.4.4)$$

Далее А. Реньи изменил аксиому 5 и сформулировал ее так:

$5'$. Если $\sum_i^m p_{1i}+\sum_j^n p_{2j}\le 1$, то справедливо равенство

$$H\left(p_{11},\ldots,p_{1m},p_{21},\ldots,p_{2n}\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left\{\frac{\sum_i^m p_{1i}\varphi\left[H\left(p_{11},\ldots,p_{1m}\right)\right]+\sum_j^n p_{2j}\varphi\left[H\left(p_{21},\ldots,p_{2n}\right)\right]}{\sum_i^m p_{1i}+\sum_j^n p_{2j}}\right\}, \qquad (3.4.5)$$

где φ есть функция Колмогорова–Нагумо. Принимая $\varphi\left(T\right)=aT+b$ с $a\neq 0$, постулат $5'$ преобразуется в постулат 5. Использовалась функция:

$$\varphi(T)=2^{(q-1)T},\quad T=\log_2 p\,, \qquad (3.4.6)$$

что в итоге дает энтропию Реньи

$$H_q(p)=\frac{1}{1-q}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)\ (q\neq 1), \qquad (3.4.7)$$

зависящую от параметра q.

В пределе $q\to 1$ функционал (3.4.7) равняется энтропии Шеннона–Винера

$$H(p)=\lim_{q\to 1}H_q(p)=-\frac{\sum_i^m(\log_2 p_i)\,p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (3.4.8)$$

Такой подход к функции $T=\log_2(p/u)$ позволил А. Реньи получить также информацию различия

$$I_q(p:u)=\frac{1}{q-1}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)\ (q\neq 1), \qquad (3.4.9)$$

которая удовлетворяет условию нормированности $I_q\left(1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ (соответствующая аксиома 3). При $q=1$ функционал (3.4.9) совпадает с информацией различия Кульбака–Лейблера

$$I(p:u)=\lim_{q\to 1}I_q(p:u)=\frac{\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (3.4.10)$$

3.5. Параметризованное распределение. Энтропия Реньи

Рассмотрим экстремальные свойства энтропии Шеннона–Винера и информации различия Кульбака–Лейблера:

$$H(f) = -\sum_i^m (\log_2 f_i) f_i, \qquad (3.5.1)$$

$$I(f:p) = -\sum_i^m \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} \right) f_i \qquad (3.5.2)$$

при дополнительных условиях, чтобы экстремум достигался при сохранении меры неточности $H(f:p)$ с фиксированным распределением вероятностей $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$ и нормировки для $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$

$$H(f:p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) f_i, \quad \sum_i^m f_i = 1. \qquad (3.5.3)$$

Согласно вариационному принципу, находим безусловные экстремумы функционалов

$$L = -\sum_i^m (\log_2 f_i) f_i + q \sum_i^m (\log_2 p_i) f_i - \alpha \sum_i^m f_i, \qquad (3.5.4)$$

$$L = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} \right) f_i + (1-q) \sum_i^m (\log_2 p_i) f_i + \alpha \sum_i^m f_i, \qquad (3.5.5)$$

где $(1-q)$ и α есть лагранжевы множители.

Из условия равенства нулю первой вариации

$$\delta L = -\sum_i^m \delta f_i \left(\log_2 f_i + \frac{1}{\ln 2} - q \log_2 p_i + \alpha \right) = 0, \qquad (3.5.6)$$

$$\delta L = \sum_i^m \delta f_i \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} + \frac{1}{\ln 2} + (1-q) \log_2 p_i + \alpha \right) = 0 \qquad (3.5.7)$$

получим параметризованное распределение

$$f_i = p_i^q \Gamma_q^{-1}(p), \ \Gamma_q(p) = \sum p_i^q, \qquad (3.5.8)$$

которое использовалось в теории самоорганизации физических [18–21] и термодинамических хаотических систем [56].

Распределение (3.5.8) дает максимальное значение энтропии Шеннона–Винера и минимальное для информации различия Кульбака–Лейблера:

$$H(f)=qH(f:p)+\log_2\Gamma_q(p), \qquad (3.5.9)$$

$$I(f:p)=(1-q)H(f:p)-\log_2\Gamma_q(p). \qquad (3.5.10)$$

Добавим к (3.5.9) и (3.5.10) информацию различия и расхождение

$$I(p:f)=-(1-q)H(p)+\log_2\Gamma_q(p), \qquad (3.5.11)$$

$$J(f:p)=I(f:p)+I(p:f)=(1-q)\left[H(f:p)-H(p)\right]. \qquad (3.5.12)$$

Взаимосвязь рассматриваемых функционалов определяется следующими соотношениями [20, 21]

$$\frac{q}{q-1}I(f:p)=-\left[H(f)-H_q(p)\right],\quad \frac{1}{q-1}I(p:f)=-\left[H_q(p)-H(p)\right], \qquad (3.5.13)$$

$$\frac{q}{q-1}I(f:p)+\frac{1}{q-1}I(p:f)=-\left[H(f)-H(p)\right]. \qquad (3.5.14)$$

Здесь введена энтропия Реньи

$$H_q(p)=\frac{1}{1-q}\log_2\Gamma_q(p)=\frac{1}{1-q}\log_2\sum_i^m p_i^q, \qquad (3.5.15)$$

которая вместе с энтропией

$$H(f)=-\sum_i^m\left[\log_2\left(p_i^q\Big/\sum_i^m p_i^q\right)\right]p_i^q\Big/\sum_i^m p_i^q \qquad (3.5.16)$$

и мерой неточности

$$H(f:p)=H(f)+I(f:p)=-\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i^q\Big/\sum_i^m p_i^q \qquad (3.5.17)$$

зависит от действительного параметра q, изменяющегося в области допустимых значений. Если пределы изменения q не обозначены, то полагаем, что $q\in\mathbf{R}$. В пределе $q\to 1$ имеем равенство функционалов (3.5.15)–(3.5.17) с энтропией Шеннона–Винера

$$H(p)=\lim_{q\to 1}\left[H_q(p),H(f),H(f:p)\right]=-\sum_i^m\left(\log_2 p_i\right)p_i. \qquad (3.5.18)$$

Отметим, что мера неточности (3.5.17) и мера $2^{q-1}\sum_i^m p_i^q H(f:p)$

рассматривались, соответственно, в работах [52] и [112] как выражения, обобщающие меру Шеннона–Винера.

Рассмотрим основные свойства энтропии Реньи.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал с максимумом (минимумом) при $q > 0$ $(q < 0)$. Справедливы неравенства

$$H_q(p) \geq 0, \tag{3.5.19}$$

$$H_q(a_1 p_1 + a_2 p_2) \leq a_1 H_q(p_1) + a_2 H_q(p_2), \tag{3.5.20}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и энтропии

$$H_q(p_1) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_{1i}^q, \; H_q(p_2) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_{2i}^q \tag{3.5.21}$$

с нормированными распределениями

$$\sum_i^m p_{1i} = \sum_i^m p_{2i} = 1. \tag{3.5.22}$$

Неравенство (3.5.20) есть неравенство Иенсена в теории выпуклых функций [47]. При $q = 0$ имеем $H_0(p) = \log_2 m$.

На рис. 3.4 представлена зависимость энтропии Реньи $H_q(p)$ от распределения p при значениях $m = 2$, $p_1 p$ и $q = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3$.

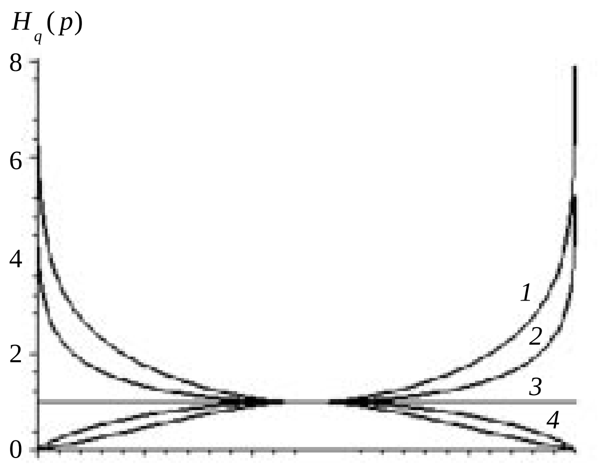


Рис. 3.4. Зависимость энтропии Реньи от распределения:
1 – (q = –3), *2* – (q = –1), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 3)

2. Аддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением вероятностей $p_{ij} = p_i p_j$, p_i и p_j относятся к разным независимым объектам. Запишем общую энтропию

$$H_q\left(p_{12}\right) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_{ij}^q \tag{3.5.23}$$

с условиями нормировки для распределений

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1. \tag{3.5.24}$$

Тогда из (3.5.23) получим свойство аддитивности для энтропий независимых объектов

$$H_q\left(p_{12}\right) = H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2\right), \tag{3.5.25}$$

где

$$H_q\left(p_1\right) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_i^q, \ H_q\left(p_2\right) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_j^n p_j^q. \tag{3.5.26}$$

3. Равенство для зависимых объектов. В общем случае зависимых объектов используется теорема разложения $p_{ij} = p_i p_{j|i}$. Рассмотрим два подхода к нахождению условия аддитивности для зависимых объектов. В первом случае исходим из соотношений для параметризованного распределения

$$f_{ij} = f_i f_{j|i}, \quad \sum_i^m \sum_j^n f_{ij} = \sum_i^m f_i = 1, \tag{3.5.27}$$

$$f_{ij} = \frac{p_i^q p_{j|i}^q}{\sum_i^m \sum_j^n p_i^q p_{j|i}^q}, \quad f_i = \frac{p_i^q}{\sum_i^m p_i^q}, \tag{3.5.28}$$

$$f_{j|i} = \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m \sum_j^n p_i^q p_{j|i}^q} p_{j|i}^q = \frac{p_{j|i}^q}{\sum_i^m f_i \sum_j^n p_{j|i}^q}. \tag{3.5.29}$$

Используем тождество для случайных энтропий $h\left(f_{ij}\right) - h\left(f_i\right) - h\left(f_{j|i}\right) = 0$ и получим равенство для зависимых объектов

$$H_q\left(p_{12}\right) = H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2 \middle| p_1\right), \tag{3.5.30}$$

где функционал [110]

$$H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m f_i \sum_j^n p_{j|i}^q = \frac{1}{1-q} \log_2 \frac{\sum_i^m \sum_j^n p_{ij}^q}{\sum_i^m p_i^q}. \tag{3.5.31}$$

Условие аддитивности (3.5.30) по форме совпадает с соответствующим условием (1.5.17) в статистической модели Шеннона–Винера.

Во втором случае введем параметризованное распределение

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_{j|i}, \ \sum_i^m \sum_j^n \varphi_{ij} = \sum_i^m \varphi_i = 1, \tag{3.5.32}$$

где

$$\varphi_{ij} = \frac{p_i^q p_{j|i}^q}{\sum_i^m p_i^q \sum_j^n p_{j|i}^q}, \quad \varphi_i = \frac{p_i^q}{\sum_i^m p_i^q}, \tag{3.5.33}$$

$$\varphi_{j|i} = \frac{\varphi_{ij}}{\varphi_i} = \frac{p_{j|i}^q}{\sum_j^n p_{j|i}^q}, \quad \sum_j^n \varphi_{j|i} = 1. \tag{3.5.34}$$

Запишем случайные энтропии

$$h\left(f_{ij}\right) = qh\left(p_{ij}\right) + (1-q) H_q\left(p_{12}\right), \tag{3.5.35}$$

$$h\left(\varphi_i\right) = qh\left(p_i\right) + (1-q) H_q\left(p_1\right), \tag{3.5.36}$$

$$h\left(\varphi_{j|i}\right) = qh\left(p_{j|i}\right) + (1-q)H_{qi}\left(p_{2|1}\right). \qquad (3.5.37)$$

В (3.5.37) имеем условную энтропию

$$H_{qi}\left(p_{2|1}\right) = \frac{1}{1-q}\log_2 \sum_{j}^{n} p_{j|i}^{q}\ . \qquad (3.5.38)$$

После усреднения разности между случайными энтропиями $h\left(f_{ij}\right) - h\left(\varphi_i\right) - h\left(\varphi_{j|i}\right)$ получим условие аддитивности

$$H_q\left(p_{12}\right) = H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) - \frac{1}{1-q}\left[H\left(\psi : f_{12}\right) - H\left(\psi : \varphi_{12}\right)\right]. \qquad (3.5.39)$$

Равенство содержит, в отличие от (3.5.30), дополнительное слагаемое, которое назовем дефектом энтропии. Указанный дефект энтропии зависит от разности мер неточности.

При $\psi_i = f_i$ и $\psi = p_i$ средние условные энтропии имеют следующий вид

$$H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_{i}^{m} H_{qi}\left(p_2 \middle| p_1\right) f_i =$$

$$= \frac{1}{1-q}\sum_{i}^{m} f_i \log_2 \sum_{j}^{n} p_{j|i}^{q} = \frac{\sum_{i}^{m} p_i^q \log_2 \sum_{j}^{n} p_{j|i}^{q}}{(1-q)\sum_{i}^{m} p_i^q}, \qquad (3.5.40)$$

$$H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_{i}^{m} H_{qi}\left(p_2 \middle| p_1\right) p_i = \frac{1}{1-q}\sum_{i}^{m} p_i \log_2 \sum_{j}^{n} p_{j|i}^{q}\ . \qquad (3.5.41)$$

В пределе $q \to 1$ дефект энтропии равен нулю и (3.5.39) совпадает с формулой (1.5.17). Функционалы (3.5.31), (3.5.40) и (3.5.41) принимают значение средней условной энтропии (1.5.10) статистической модели Шеннона–Винера. Выражение (3.5.41) рассматривается в работе [59].

4. Случайное отклонение. Рассмотрим случайные энтропии $h\left(f_i\right) = -\log_2 f_i$ и $h\left(p_i\right) = -\log_2 p_i$. Логарифмируя распределение (3.5.8), имеем

$$h\left(f_i\right) - H_q(p) = q\left[h\left(p_i\right) - H_q(p)\right], \qquad (3.5.42)$$

где ясно проявляется линейная зависимость между случайными отклонениями величин $h(f_i)$ и $h(p_i)$ от энтропии Реньи. Энтропия Реньи не имеет аналога случайной энтропии.

В геометрической интерпретации равенство (3.5.42) представляет собой уравнение пучка прямых, проходящих через точку A плоскости $\{h(f_i), h(p_i)\}$. Параметр q есть угловой коэффициент рассматриваемой прямой $(q = \operatorname{tg}\alpha)$, а точка $A = \{H_q(p), H_q(p)\}$ – центр пучка.

Распределения можно записать в эквивалентных формах

$$p_i = f_i^{1/q} \Big/ \sum_i^m f_i^{1/q}, \quad f_i = p_i^q 2^{(q-1)H_q(p)}. \tag{3.5.43}$$

5. Энтропия равновероятного состояния. Находим экстремум энтропии Реньи при условии сохранения нормировки распределения p. Варьируем функционал

$$L = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_i^q - \alpha \sum_i^m p_i \tag{3.5.44}$$

и из равенства $\delta L = 0$ получим $p_i = \text{const}$. Из условия нормировки вытекает равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \tag{3.5.45}$$

Экстремальное значение энтропии Реньи

$$H_q(p) = H(p) = \log_2 m \tag{3.5.46}$$

не зависит от параметра q и совпадает с соответствующим значением энтропии Шеннона–Винера (1.5.41).

6. Неравенства. Энтропия Реньи удовлетворяет следующим неравенствам:

$$H_q(p_{12}) \le H(p_1) + H(p_2), \tag{3.5.47}$$

$$H_q(p) \le \log_2 m, \quad (q > 0), \tag{3.5.48}$$

$$H_q(p) \ge \log_2 m, \quad (q < 0), \tag{3.5.49}$$

$$H(f) > H_q(p) > H(p)\ , \quad (0 < q < 1), \tag{3.5.50}$$

$$H(f) < H_q(p) < H(p)\ , \quad (q > 1), \tag{3.5.51}$$

$$H_q(p) > H(f) \text{ и } H_q(p) > H(p)\ , \quad (q < 0), \tag{3.5.52}$$

$$H_q(p_{12}) \geq H_q(p_1),\ H_q(p_{12}) \geq H_q(p_2), \tag{3.5.53}$$

$$H_q(p_2 | p_1) \geq 0,\ H_q(p_1 | p_2) \geq 0. \tag{3.5.54}$$

7. Нормированность и размерность. Выбираем наименьшее число возможных состояний $m = 2$ с равновозможными значениями распределения $p_1 = p_2 = 1/2$. Тогда для энтропии Реньи выполняется свойство нормированности

$$H_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^2 p_i^q = 1. \tag{3.5.55}$$

Единицей измерения информации в статистической модели Реньи, как следует из (3.5.55), является один бит.

Для физической теории информации имеем энтропию

$$H_q^{phys}(p) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i^m p_i^q\ . \tag{3.5.56}$$

В статистической физике используется энтропия Реньи, имеющая размерность постоянной Больцмана $H_q(p) = kH_q^{phys}(p)$ и совпадающая в пределе $q \to 1$ с энтропией Больцмана–Гиббса [1,6]

$$H(p) = \lim_{q \to 1} H_q^{phys}(p) = -k \sum_i^m (\ln p_i) p_i\ . \tag{3.5.57}$$

Энтропия Реньи есть отношение физической безразмерной энтропии (3.5.56) к ее значению при равновероятном состоянии с $m = 2$. Таким образом, имеет место равенство

$$H_q(p) = \frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \quad H_q^{phys}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \ln 2. \tag{3.5.58}$$

8. Дифференциальные соотношения. Дифференцируем информацию различия $I(f:p)$ в равенстве (3.5.13) и получим соотношение [20, 21]:

$$dI(f:p) = -\left(\frac{q-1}{q}\right) dH(f), \tag{3.5.59}$$

которое после преобразования Лежандра примет следующий вид

$$dH_q(p) = I(f:p)\, d\left(\frac{q}{q-1}\right). \tag{3.5.60}$$

Дифференциальные соотношения (3.5.59) и (3.5.60) определяют взаимосвязь информации различия Кульбака–Лейблера с энтропией Шеннона–Винера и энтропией Реньи, соответственно, в случае непрерывных значений параметра q.

9. f-энтропия. Функциональным обобщением энтропии Реньи (3.5.15) является единственное выражение

$$H_f(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right], \tag{3.5.61}$$

где f – выпуклая функция от полунормы распределения.

При $f = -\log_2 N_{q-1}(p)$ из (3.5.61) вытекает энтропия Реньи

$$H_q(p) = -\log_2 N_{q-1}(p). \tag{3.5.62}$$

Здесь аргументом логарифмической функции является полунорма распределения

$$N_{q-1}(p) = \left(\sum_i^m p_i^q\right)^{1/(q-1)}. \tag{3.5.63}$$

3.6. Информация различия Реньи и мера неточности. Мера Чернова

Рассмотрим минимум информации различия Кульбака–Лейблера

$$I(f:p) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i}\right) f_i \tag{3.6.1}$$

при заданности разности мер неточности $H(f:p)$ и $H(f:u)$ с фиксированными распределениями вероятности $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ и сохранении нормировки для $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$:

$$H(f:p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i) f_i,$$
$$H(f:u) = -\sum_i^m (\log_2 u_i) f_i \;, \quad \sum_i^m f_i = 1. \tag{3.6.2}$$

Согласно вариационному принципу, находим безусловный экстремум функционала

$$L = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} \right) f_i + (1-q) \left[\sum_i^m (\log_2 p_i) f_i - \right.$$
$$\left. - \sum_i^m (\log_2 u_i) f_i \right] + \alpha \sum_i^m f_i, \tag{3.6.3}$$

где $(1-q)$ и α есть множители Лагранжа. Используя равенство

$$\delta L = \sum_i^m \delta f_i \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} + \frac{1}{\ln 2} + (1-q)\log_2 \frac{p_i}{u_i} + \alpha \right) = 0, \tag{3.6.4}$$

получим параметризованное распределение

$$f_i = p_i^q u_i^{1-q} \Gamma_q^{-1}(p:u), \; \Gamma(p:u) = \sum p_i^q u_i^{1-q}, \tag{3.6.5}$$

рассматриваемое в теории самоорганизации физических систем [19 – 22] и теории информации [33].

Распределение (3.6.5) максимизирует энтропию Шеннона–Винера при вышеприведенных дополнительных условиях. Подставляя его в (3.5.1) и (3.6.1), имеем экстремальные значения энтропии и информации различия

$$H(f) = qH(f:p) + (1-q)H(f:u) + \log_2 \Gamma_q(p:u), \tag{3.6.6}$$

$$I(f:p) = (1-q)\left[H(f:p) - H(f:u)\right] - \log_2 \Gamma_q(p:u). \tag{3.6.7}$$

Аналогично находим следующие информацию различия и расхождение

$$I(p:f) = -(1-q)\left[H(p) - H(p:u)\right] + \log_2 \Gamma_q(p:u), \tag{3.6.8}$$

$$J(f:p) = I(f:p) + I(p:f) =$$
$$= (1-q)\left[H(f:p) - H(f:u) + H(p:u) - H(p)\right] \tag{3.6.9}$$

и с учетом (3.6.7) получим соотношения [20, 21]

$$\frac{q}{q-1} I(f:p) = I(f:u) - I_q(p:u), \qquad (3.6.10)$$

$$\frac{1}{q-1} I(p:f) = I_q(p:u) - I(p:u), \qquad (3.6.11)$$

$$\frac{q}{q-1} I(f:p) + \frac{1}{q-1} I(p:f) = I(f:u) - I(p:u) \qquad (3.6.12)$$

для взаимосвязи рассматриваемых функционалов.

Здесь введена информация различия Реньи

$$I_q(p:u) = \frac{1}{q-1} \log_2 \Gamma_q(p:u) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}. \qquad (3.6.13)$$

Не выписывая функционалы в явном виде, отметим, что в пределе $q \to 1$ имеем информацию различия Кульбака–Лейблера

$$I(p:u) = \lim_{q \to 1} \left[I_q(p:u), I(f:u), H(f:u) \right] = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i, \qquad (3.6.14)$$

энтропию Шеннона–Винера

$$H(p) = \lim_{q \to 1} H(f:p) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i \right) p_i \qquad (3.6.15)$$

и меру неточности Керриджа

$$H(p:u) = \lim_{q \to 1} H(f:u) = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i \right) p_i. \qquad (3.6.16)$$

Рассмотрим основные свойства информации различия Реньи.

1. Выпуклость. Информация различия есть вещественный, выпуклый и положительный (отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q > 0$ $(q < 0)$.

Имеют место следующие неравенства

$$I_q(p:u) > 0, \ (q > 0), \qquad (3.6.17)$$

$$I_q(p:u) < 0, \ (q < 0), \qquad (3.6.18)$$

$$I_q\left[\left(a_1 p_2 + a_2 p_2\right):u\right] \le a_1 I_q\left(p_1 : u\right) + a_2 I_q\left(p_2 : u\right), \tag{3.6.19}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и информации различия

$$I_q\left(p_1 : u\right) = \frac{1}{q-1}\log_2 \sum_i^m p_{1i}^q u_i^{1-q}\ , \tag{3.6.20}$$

$$I_q\left(p_2 : u\right) = \frac{1}{q-1}\log_2 \sum_i^m p_{2i}^q u_i^{1-q}\ . \tag{3.6.21}$$

Равенства $q = 0$ или $p = u$ дают значение $I_q\left(p : u\right) = 0$.

На рис.3.5 приводятся зависимости энтропии и информации различия Реньи от числа q при значениях $m = 2$, $p_1 = 1/4$, $u_1 = 1/3$, где видно убывание $H_q\left(p\right)$ и возрастание $I_q\left(p : u\right)$ с увеличением q.

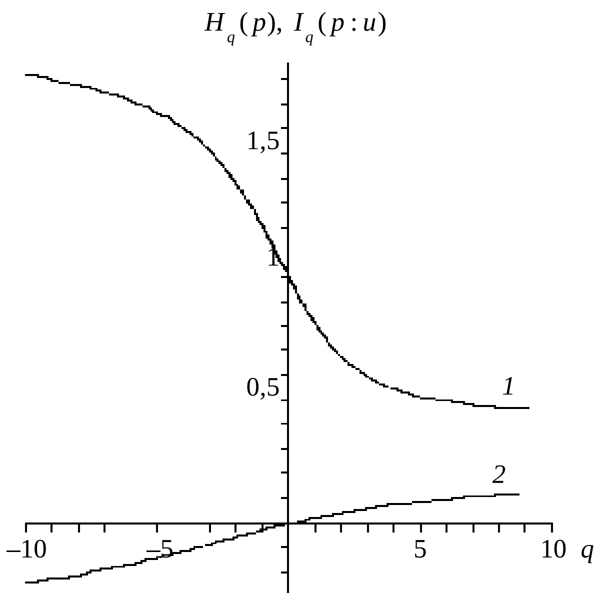


Рис. 3.5. Зависимости функционалов модели Реньи от числа q:
1 – $H_q\left(p\right)$, *2* – $I_q\left(p : u\right)$

На рис.3.6 представлена зависимость информации различия Реньи $I_q\left(p : u\right)$ от распределения при значениях $m = 2$, $p_1 = p$, $u_1 = 1/3$ и $q = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3$.

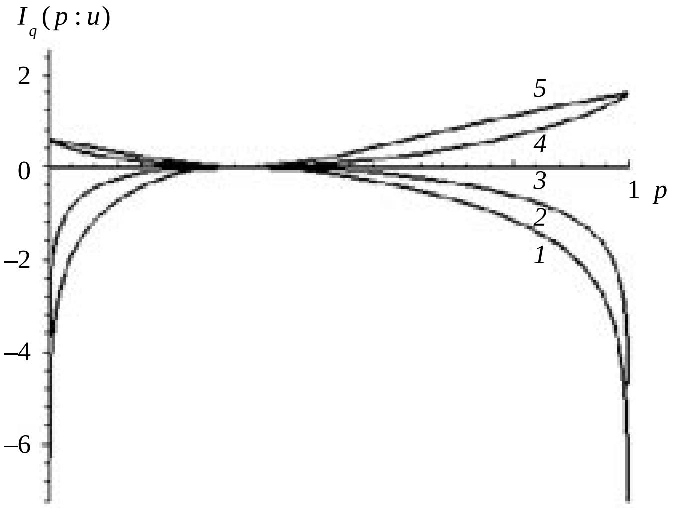


Рис. 3.6. Зависимость информации различия Реньи от распределения:
1 – (q = –3), *2* – (q = –1), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 3)

2. Аддитивность для независимых объектов. Пусть состояния случайного объекта описываются нормированными совместными распределениями p_{12} и u_{12}. Информация различия запишется так:

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}\ . \tag{3.6.22}$$

В случае статистической независимости состояний имеем равенства $p_{ij}=p_ip_j$ и $u_{ij}=u_iu_j$. Тогда из (3.6.22) вытекает свойство аддитивности

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_2:u_2\right) \tag{3.6.23}$$

для информации различия независимых объектов

$$I_q\left(p_1:u_1\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\ , \tag{3.6.24}$$

$$I_q\left(p_2:u_2\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_j^n p_j^q u_j^{1-q}\ . \tag{3.6.25}$$

3. Равенство для зависимых объектов. В общем случае зависимых объектов рассмотрим совместные распределения $p_{ij}=p_ip_{j|i}$ и $u_{ij}=u_iu_{j|i}$ при реализации состояния с p_i и u_i. Приведем два подхода к нахождению условия аддитивности для зависимых объектов. В первом случае запишем параметризованное распределение

$$f_{ij} = f_i f_{j|i}, \quad \sum_i^m \sum_j^n f_{ij} = \sum_i^m f_i = 1, \tag{3.6.26}$$

где

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}}{\sum_i^m \sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}}, \quad f_i = \frac{p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}, \tag{3.6.27}$$

$$f_{j|i} = \frac{\sum_i^m \sum_j^n p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m \sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}} p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q} = \frac{p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}{\sum_i^m f_i \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}. \tag{3.6.28}$$

Используем значения случайных информаций различия и после вычислений имеем равенство для зависимых объектов

$$I_q\left(p_{12} : u_{12}\right) = I_q\left(p_1 : u_1\right) + I_q\left(p_{2|1} : u_{2|1}\right), \tag{3.6.29}$$

где функционал

$$I_q\left(p_{2|1} : u_{2|1}\right) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m f_i \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q} =$$

$$= \frac{1}{q-1} \log_2 \frac{\sum_i^m \sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}}{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}. \tag{3.6.30}$$

Условие аддитивности для зависимых объектов (3.6.29) по форме совпадает с соответствующим условием в статистической модели Шеннона–Винера.

Во втором случае введем равенства для другого параметризованного распределения

$$\varphi_{ij} = \frac{p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}}{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}, \quad \varphi_i = \frac{p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}, \tag{3.6.31}$$

$$\varphi_{j|i} = \frac{\varphi_{ij}}{\varphi_i} = \frac{p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}{\sum\limits_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}, \quad \sum_j^n \varphi_{j|i} = 1, \tag{3.6.32}$$

случайные информации различия

$$I\left(f_{ij} : u_{ij}\right) = qI\left(p_{ij} : u_{ij}\right) - (q-1) I_q\left(p_{12} : u_{12}\right), \tag{3.6.33}$$

$$I\left(\varphi_i : u_i\right) = qI\left(p_i : u_i\right) - (q-1) I_q\left(p_1 : u_1\right), \tag{3.6.34}$$

$$I\left(\varphi_{j|i} : u_{j|i}\right) = qI\left(p_{j|i} : u_{j|i}\right) - (q-1) I_{qi}\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right). \tag{3.6.35}$$

и условную информацию различия

$$I_{qi}\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q} . \tag{3.6.36}$$

После усреднения разности между случайными информациями различия $I\left(f_{ij} : u_{ij}\right) - I\left(\varphi_i : u_i\right) - I\left(\varphi_{j|i} : u_{j|i}\right)$ получим условие аддитивности

$$I_q\left(p_{12} : u_{12}\right) = I_q\left(p_1 : u_1\right) + I_q\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) - \\ - \frac{1}{q-1}\left[I\left(\psi : f_{12}\right) - I\left(\psi : \varphi_{12}\right)\right] . \tag{3.6.37}$$

Здесь дефект информации различия зависит от разности информации различия.

При $\psi_i = f_i$ и $\psi = p_i$ средние условные информации различия имеют следующий вид

$$I_q\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) = \sum_i^m I_{qi}\left(p_{2|1} \middle| u_{2|1}\right) f_i = \\ = \frac{1}{q-1} \sum_i^m f_i \log_2 \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q} = \frac{\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \log_2 \sum\limits_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}}{(q-1)\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}}, \tag{3.6.38}$$

$$I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right)=\sum_i^m I_{qi}\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right)p_i =$$

$$=\frac{1}{q-1}\sum_i^m p_i \log_2 \sum_j^n p_{j|i}^q u_{j|i}^{1-q}. \qquad (3.6.39)$$

В пределе $q \to 1$ дефект информации различия равен нулю и условие аддитивности (3.6.37) совпадает с формулой (1.8.23). Функционалы (3.6.30), (3.6.38) и (3.6.39) принимают значение средней условной информации различия (1.8.25) статистической модели Шеннона–Винера.

4. Случайное отклонение. Рассмотрим случайные информации различия $I\left(f_i:u_i\right)=-\left[h\left(f_i\right)-h\left(u_i\right)\right]=\log_2\left(f_i/u_i\right)$ и $I\left(p_i:u_i\right)=-\left[h\left(p_i\right)-h\left(u_i\right)\right]=$ $=\log_2\left(p_i/u_i\right)$, которые равняются разностям случайных энтропий. После логарифмирования распределения (3.6.5) получим связь случайных отклонений этих величин от информации различия Реньи

$$I\left(f_i:u_i\right)-I_q\left(p:u\right)=q\left[I\left(p_i:u_i\right)-I_q\left(p:u\right)\right], \qquad (3.6.40)$$

которая не имеет аналога случайной информации различия.

Равенство (3.6.40) есть уравнение пучка прямых в плоскости $\left\{I\left(f_i:u_i\right),I\left(p_i:u_i\right)\right\}$ с центром в точке $A=\left\{I_q\left(p:u\right),I_q\left(p:u\right)\right\}$.

Распределение (3.6.5) можно представить в эквивалентной форме

$$f_i = p_i^q u_i^{1-q} 2^{-(q-1)I_q(p:u)}. \qquad (3.6.41)$$

5. Информация различия с $u_i = 1/m$. Подставим равновероятное распределение $u_i = 1/m$ в (3.6.13) и получим равенство

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q\left(\frac{1}{m}\right)^{1-q}=-\left[H_q\left(p\right)-\log_2 m\right]. \qquad (3.6.42)$$

Из условий выпуклости информации различия Реньи, определяемых неравенствами (3.6.17) и (3.6.18), следует, что энтропия меньше (больше) энтропии равновероятного состояния при $q>0$ $\left(q<0\right)$.

6. Неравенства. Для информации различия имеем следующие неравенства:

$$I_q(p_{12}:u_{12}) \le I_q(p_1:u_1) + I_q(p_2:u_2), \tag{3.6.43}$$

$$I(f:u) > I_q(p:u) > I(p:u),\ (0<q<1), \tag{3.6.44}$$

$$I(f:u) < I_q(p:u) < I(p:u),\ (q>0), \tag{3.6.45}$$

$$I_q(p:u) > I(f:u) \text{ и } I_q(p:u) > I(p:u),\ (q<0). \tag{3.6.46}$$

7. Расхождение. Определим количественную меру информации различия в наблюдениях u относительно p

$$I_q(u:p) = \frac{1}{q-1}\log_2 \sum_i^m u_i^q p_i^{1-q} \tag{3.6.47}$$

и рассмотрим сумму

$$J_q(p:u) = I_q(p:u) + I_q(u:p) =$$
$$= \frac{1}{q-1}\left(\log_2 \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} + \log_2 \sum_i^m u_i^q p_i^{1-q}\right), \tag{3.6.48}$$

которая является расхождением. Расхождение есть симметричная функция $J_q(p:u) = J_q(u:p)$ относительно распределений p и u. В пределе $q \to 1$ из (3.6.48) следует известная мера

$$J(p:u) = \lim_{q\to 1} J_q(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right)(p_i - u_i). \tag{3.6.49}$$

Функционал (3.6.48) является выпуклым и аддитивным для независимых объектов.

В работе [117] рассматривается расхождение в следующем виде

$$J_q(p:u) = \frac{2}{q-1}\left(\log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} + \sum_i^m u_i^q p_i^{1-q}}{2}\right), \tag{3.6.50}$$

которое при $q \to 1$ также имеет предел (3.6.49). Для сравнения функционалов (3.6.48) и (3.6.50) учитываем неравенство:

$$\frac{1}{2}\left(\log_2\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}+\log_2\sum_i^m u_i^q p_i^{1-q}\right)\leq$$

$$\leq\log_2\left[\sum_i^m\frac{p_i^q u_i^{1-q}+u_i^q p_i^{1-q}}{2}\right], \qquad (3.6.51)$$

которое вытекает из свойства выпуклости логарифмической функции.

После деления (3.6.51) на $(q-1)$ получим следствие, что функционал (3.6.48) меньше (больше), чем функционал (3.6.32) при $q>0$ $(0<q<1)$.

8. Мера неточности. Мера статистической неточности определяется функционалом при аддитивности мер

$$H_q(p:u)=H_q(p)+I_q(p:u)=$$

$$=-\log_2\frac{N_{q-1}(p)}{N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)}=\frac{1}{1-q}\log_2\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m\left(\frac{p_i}{u_i}\right)^{q-1}p_i}, \qquad (3.6.52)$$

который был введен в работе [96]. Другие выражения для меры неточности

$$H_q(p:u)=-\log_2 N_{q-1}(u)=\frac{1}{1-q}\log_2\sum_i^m u_i^{q-1}p_i, \qquad (3.6.53)$$

$$H_q(p:u)=-\log_2\left[N_{q-1}\left(\frac{1}{u^q}\right)\right]^q=\frac{q}{1-q}\log_2\sum_i^m u_i^{(q-1)/q}p_1, \qquad (3.6.54)$$

не являющиеся суммой энтропии и информации различия, приводятся, соответственно, в работах [95] и [126]. В пределе $q\to 1$ из (3.6.52)-(3.6.54) вытекает мера неточности Керриджа

$$H(p:u)=\lim_{q\to 1}H_q(p:u)=-\sum_i^m(\log_2 u_i)p_i\,. \qquad (3.6.55)$$

На рис. 3.7 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$, информации различия $I_q(p:u)$ и меры неточности $H_q(p:u)$ в виде (3.6.52) от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

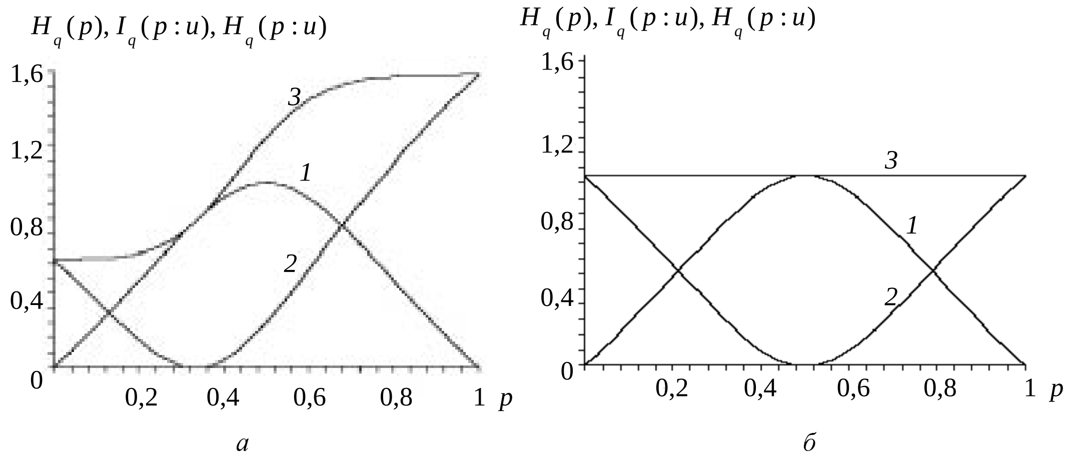


Рис. 3.7. Зависимости функционалов модели Реньи от распределения:
1 – энтропия $H_q(p)$, *2* – информация различия $I_q(p:u)$,
3 – мера неточности $H_q(p:u)$

9. Информационный радиус. Геометрическая интерпретация неравенства (3.5.20) при $a_1 = a_2 = 1/2$ дает формулу для информационного радиуса [99]

$$R_q(p:u) = H_q\left(\frac{p+u}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[H_q(p) + H_q(u)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_q\left(p:\frac{p+u}{2}\right) + I_q\left(u:\frac{p+u}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-q}\log_2\left[\sum_i^m\left(\frac{p_i+u_i}{2}\right)^q \Bigg/ \sqrt{\left(\sum_i^m p_i^q\right)\left(\sum_i^m u_i^q\right)}\right], \qquad (3.6.56)$$

которая при $q \to 1$ совпадает с функционалом (1.8.60) статистической теории Шеннона–Винера. Другие выражения для $R_q(p:u)$ приводятся в обзорах [120, 121].

10. Мера Чернова. Информация различия Реньи включает в себя меру Чернова [67]

$$\Gamma_q(p:u) = \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \qquad (3.6.57)$$

для различия распределений p и u. В интервале $0 \le q \le 1$ функция $\Gamma_q(p:u)$ является аналитической, конечной и неотрицательной. На концах интервала имеем равенства $f = u$ $(f = p)$ при $q = 0$ $(q = 1)$ и $\Gamma_0(p:u) = \Gamma_1(p:u) = 1$.

11. Информационное расстояние. Для геометрической интерпретации информации различия в виде половины несимметричного расстояния $\delta(p,u) = \frac{1}{2} I_q^2(p:u)$ от p до u не выполняется неравенство треугольника. Имеет место несимметричный аналог теоремы Пифагора

$$I_q(p:u) = I_q(p:w) + I_q(w:u), \tag{3.6.58}$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда справедливо условие

$$\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} = \sum_i^m p_i^q w_i^{1-q} \sum_i^m w_i^q u_i^{1-q}. \tag{3.6.59}$$

При $q = 1$ из (3.6.58) и (3.6.59) следуют соотношения (1.8.68) и (1.8.69) в статистической модели Шеннона–Винера.

12. Нормированность и размерность. Информация различия Реньи удовлетворяет условию нормированности

$$I_q\left(1, 0 : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^2 p_i^q u_i^{1-q} = 1, \tag{3.6.60}$$

а также равняется отношению физической безразмерной различающей информации на значение физической энтропии $H_q^{phys}(u)$ при равновероятном состоянии с $m = 2$. Выполняется следующее равенство

$$I_q(p:u) = \frac{I_q^{phys}(p:u)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \tag{3.6.61}$$

где

$$I_q^{phys}(p:u) = \frac{1}{q-1} \ln \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}, \; H_q^{phys}(u) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i^2 u_i^q, \tag{3.6.62}$$

$$H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\ln 2\,. \qquad (3.6.63)$$

В статистической физике используется физическая размерная информация различия $I_q(p:u)=kI_q^{phys}(p:u)$ [23].

13. Дифференциальные соотношения. Дифференцируя информацию различия $I(f:p)$ в равенстве (3.6.10), получим [20, 21]:

$$dI(f:u)=\frac{q}{q-1}dI(f:p)\,. \qquad (3.6.64)$$

Используем преобразование Лежандра и из (3.6.64) имеем дифференциальное соотношение

$$dI_q(p:u)=-I(f:p)d\left(\frac{q}{q-1}\right) \qquad (3.6.65)$$

взаимосвязи информации различия Реньи с информацией различия Кульбака–Лейблера для непрерывных значений параметра q.

14. Информация Фишера. Рассмотрим параметрические распределения $p_i(\theta)$ и $p_i(\theta+\delta\theta)$, соответствующие малому изменению одномерного параметра $\delta\theta$. Предельные значения меры Чернова и информации различия Реньи имеют вид

$$\Gamma_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)=$$

$$=1+\frac{q(q-1)}{2\ln 2}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2\,, \qquad (3.6.66)$$

$$I_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)=$$

$$=\frac{q}{2\ln 2}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2\,, \qquad (3.6.67)$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \qquad (3.6.68)$$

есть мера информации Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

Различные аспекты вопроса об информации Фишера можно найти, например, в работах [106, 119].

15. f-информация различия. Функциональным обобщением информации различия Реньи

$$I_q(p:u) = \log_2 N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) \tag{3.6.69}$$

определим выражение

$$I_f(p:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right], \tag{3.6.70}$$

которое представляет собой функцию полунормы распределения.

В случае трех распределений имеем полунорму

$$N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right) = \left[\sum_i^m \left(\frac{w_i}{u_i}\right)^{q-1} p_i\right]^{1/(q-1)} \tag{3.6.71}$$

и f-информацию различия

$$I_f(p:w:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)\right], \tag{3.6.72}$$

обобщающую функционал (3.6.70). Если f есть логарифмическая функция, то из (3.6.72) получим следующий функционал [95]

$$I_f(p:w:u) = \frac{1}{q-1}\log_2 \sum_i^m \left(\frac{w_i}{u_i}\right)^{q-1} p_i\,. \tag{3.6.73}$$

При $w = p$ из (3.6.72) и (3.6.73) следуют, соответственно, f-информация различия (3.6.70) и информация различия Реньи (3.6.69).

3.7. Обобщенные полунормы и меры

Рассмотрим основополагающие обобщения полунорм произвольной случайной величины

$$N_q(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/q} \tag{3.7.1}$$

и распределения

$$N_q\left(p\right)=\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^{q+1}}{\sum\limits_i^m p_i}\right)^{1/q}, \qquad (3.7.2)$$

которые определяются способом усреднения.

Нормированная *f*-полунорма. Функциональным обобщением являются взвешенные нормированные f-полунормы

$$N_{q,f}\left(T\right)=\left(\frac{\sum\limits_i^m T_i^q f\left(p_i\right)}{\sum\limits_i^m f\left(p_i\right)}\right)^{1/q}, \qquad (3.7.3)$$

$$N_{q,f}\left(p\right)=\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q f\left(p_i\right)}{\sum\limits_i^m f\left(p_i\right)}\right)^{1/q}, \qquad (3.7.4)$$

где функция от распределения обладает свойством мультипликативности $f\left(p_i p_j\right)=f\left(p_i\right)f\left(p_j\right)$.

Энтропия и информация различия представляются выражениями

$$H_{q,f}\left(p\right)=-\log_2 N_{q-1,f}\left(p\right)=\frac{1}{1-q}\log_2\left[\frac{\sum\limits_i^m p_i^{q-1} f\left(p_i\right)}{\sum\limits_i^m f\left(p_i\right)}\right], \qquad (3.7.5)$$

$$I_{q,f}\left(p:u\right)=\log_2 N_{q-1,f}\left(\frac{p}{u}\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\left[\frac{\sum\limits_i^m p_i^{q-1} u_i^{1-q} f\left(p_i\right)}{\sum\limits_i^m f\left(p_i\right)}\right], \qquad (3.7.6)$$

которые имеют предельные значения:

$$H_f(p) = \lim_{q\to 1} H_q(p) = -\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) f(p_i)}{\sum_i^m f(p_i)}, \qquad (3.7.7)$$

$$I_f(p:u) = \lim_{q\to 1} I_q(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) f(p_i)}{\sum_i^m f(p_i)}, \qquad (3.7.8)$$

обобщающие энтропию Шеннона–Винера и информацию различия Кульбака–Лейблера.

В качестве примера приведем случай усреднения при помощи распределения

$$f(p_i) = \frac{p_i^{s_i}}{\sum_i^m p_i^{s_i}}, \qquad (3.7.9)$$

что дает, согласно (3.7.5), следующую энтропию [100]

$$H_q(p) = \frac{1}{1-q}\log_2\left[\frac{\sum_i^m p_i^{q+s_i-1}}{\sum_i^m p_i^{s_i}}\right], \qquad (3.7.10)$$

где $s_i \geq 1$, $q \neq 1$ и $q > 0$.

При $s_i = s$ из (3.7.10) вытекает функционал

$$H_q^s(p) = \frac{1}{1-q}\log_2\left[\frac{\sum_i^m p_i^{q+s-1}}{\sum_i^m p_i^{s}}\right] \qquad (3.7.11)$$

с $s \geq 1$, $q \neq 1$ и $q > 0$, который изучался в работах [52, 83].

Мера статистического расстояния. Если в (3.7.11) положить $1-q = s-r$, а при $s=1$ сделать замену q на $q-r+1$, то получим соответствующие энтропии:

$$H_r^s(p) = -\log_2 T_r^s(p) = \frac{1}{s-r}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^r}{\sum_i^m p_i^s}\right) \qquad (3.7.12)$$

с $r \neq q$, $r > 0$ и $s > 0$ [52] и

$$H_q^r(p) = \frac{1}{r-q}\log_2 \sum_i^m p_i^{q-r+1} \qquad (3.7.13)$$

с $r-1 < q < r$, $r \geq 1$ [128]. Функционал (3.7.12) является обобщенной мерой статистического расстояния $T_r^s(p)$ между p^r и p^s [63, 66].

$(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\varphi})$**-энтропия.** Определим для каждой случайной величины T и любых чисел q и s функцию

$$G_q^s(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i}{\sum_i^m p_i}\right)^s, \qquad (3.7.14)$$

которая при выполнении вероятностной нормировки имеет вид

$$G_q^s(T) = \left(\sum_i^m T_i^q p_i\right)^s. \qquad (3.7.15)$$

Функция (3.7.14) является взвешенным средним по Колмогорову–Нагумо при $s = 1/q$.

Выражение (3.7.15) для распределения

$$G_{q-1}^s(p) = \left(\sum_i^m p_i^q\right)^s \qquad (3.7.16)$$

и его свойства рассматривались в работах [60, 66, 125, 127], а соответствующая энтропия

$$H_q^s(p) = -\log_2 G_{q-1}^s(p) = -s\log_2 \sum_i^m p_i^q \qquad (3.7.17)$$

представляет собой (h,ϕ)-энтропию [105]:

$$H_{\phi}^{h}(p)=h\left[\sum_{i}^{m}\phi(p_i)\right] \qquad (3.7.18)$$

при функциях степенной $\phi(p)=p^q$ и логарифмической $h(G)=-\log_2 G$.

Рассмотренные двухпараметрические энтропии и информация различия имеют логарифмическую меру и исследовались в соответствующих работах как обобщающие выражения для энтропии и информации различия Реньи.

3.8. Двух- и *k*-параметрическая информация различия. Мера Хаусдорфа

Получим двухпараметрический аналог информации различия Реньи. Для чего рассмотрим минимум информации различия Кульбака-Лейблера

$$I(f:p)=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{f_i}{p_i}\right)f_i \qquad (3.8.1)$$

при фиксированных распределениях $p=\{p_1,\ldots,p_m\}$ и $u=\{u_1,\ldots,u_m\}$ с условием сохранения нормировки для $f=\{f_1,\ldots,f_m\}$ и двух мер неточности

$$H(f:p)=-\sum_{i}^{m}(\log_2 p_i)f_i, \quad H(f:u)=-\sum_{i}^{m}(\log_2 u_i)f_i. \qquad (3.8.2)$$

Введем неопределенные множители Лагранжа $(1-q)$, τ, α и, согласно вариационному принципу, исследуем безусловный экстремум функционала [21]

$$L=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{f_i}{p_i}\right)p_i+(1-q)\sum_{i}^{m}(\log_2 p_i)f_i+$$
$$+\tau\sum_{i}^{m}(\log_2 u_i)f_i+\alpha\sum_{i}^{m}f_i. \qquad (3.8.3)$$

Варьируя функционал и используя равенство

$$\delta L=\sum_{i}^{m}\delta f_i\left[\log_2\frac{f_i}{p_i}+\frac{1}{\ln 2}+(1-q)\log_2 p_i+\right.$$
$$\left.+\tau\log_2 u_i+\alpha\right]=0, \qquad (3.8.4)$$

получим нормированное распределение

$$f_i = p_i^q u_i^{-\tau} \Gamma^{-1}(q,\tau). \tag{3.8.5}$$

Здесь определена обобщенная мера

$$\Gamma(q,\tau) = \sum_i^m p_i^q u_i^{-\tau} = \sum_i^m p_i \left(\frac{p_i}{u_i^{D_q}} \right)^{q-1} \tag{3.8.6}$$

и величина

$$D_q = \frac{\tau}{q-1}, \tag{3.8.7}$$

в которых q и τ есть действительные числа, меняющиеся в пределах допустимых значений.

Подставим распределение (3.8.5) в выражения информаций различия и расхождения

$$I(f:p) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{f_i}{p_i} \right) f_i =$$
$$= (q-1) \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i^{D_i}} \right) f_i - \log_2 \Gamma(q,\tau), \tag{3.8.8}$$

$$I(p:f) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{f_i} \right) p_i =$$
$$= (q-1) \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i^{D_i}} \right) p_i + \log_2 \Gamma(q,\tau), \tag{3.8.9}$$

$$J(f:p) = I(f:p) + I(p:f) =$$
$$= (q-1) \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i^{D_i}} \right) (f_i - p_i) \tag{3.8.10}$$

и после преобразований имеем следующие соотношения [21]

$$\frac{q}{q-1} I(f:p) = I_{D_q}(f:u) - I_{q,\tau}(p:u), \tag{3.8.11}$$

$$\frac{1}{q-1}I(p:f)=I_{q,\tau}(p:u)-I_{D_q}(p:u), \tag{3.8.12}$$

$$\frac{q}{q-1}I(f:p)+\frac{1}{q-1}I(p:f)=I_{D_q}(f:u)-I_{D_q}(p:u). \tag{3.8.13}$$

В (3.8.11) – (3.8.13) введены нестандартные информации различия

$$I_{D_q}(f:u)=-\sum_i^m\left[h(f_i)-D_q h(u_i)\right]f_i=$$
$$=\sum_i^m\left(\log_2\frac{f_i}{u_i^{D_q}}\right)f_i=-\left[H(f)-D_q H(f:u)\right], \tag{3.8.14}$$

$$I_{D_q}(p:u)=-\sum_i^m\left[h(p_i)-D_q h(u_i)\right]p_i=$$
$$=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i^{D_q}}\right)p_i=-\left[H(p)-D_q H(p:u)\right] \tag{3.8.15}$$

и двухпараметрический аналог информации различия Реньи

$$I_{q,D_q}(p:u)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}=$$
$$=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m\left(\frac{p_i}{u_i^{D_q}}\right)^{q-1}p_i=\log_2 N_{q-1}\left(\frac{p}{u^{D_q}}\right). \tag{3.8.16}$$

При $D_q=1$ из (3.8.14)–(3.8.16) вытекает информация различия Кульбака-Лейблера и Реньи

$$I(p:u)=I_1(p:u)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i,$$
$$I_q(p:u)=I_{q,1}(p:u)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}. \tag{3.8.17}$$

Не рассматривая все свойства функционалов, отметим лишь некоторые из них.

1. Выпуклость и аддитивность. Информация различия (3.8.16) есть выпуклый, аддитивный функционал для независимых объектов:

$$I_{q,D_q}\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_{q,D_q}\left(p_1:u_1\right)+I_{q,D_q}\left(p_2:u_2\right). \tag{3.8.18}$$

При $D_q>1$ и $q>0$ ($D_q<1$ и $q<0$) он имеет положительное (отрицательное) значение. Если $q=0$, то справедливы равенства

$$I_{0,1}\left(p:u\right)=0, \quad I_{0,D_q}\left(p:u\right)=-\log_2\sum_i^m u_i^{D_q}, \tag{3.8.19}$$

а при $p=u$ имеем ненулевые значения

$$I_{q,D_q}\left(p:p\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^{1+\left(1-D_q\right)(q-1)}=$$
$$=-\left(1-D_q\right)H_{1+\left(1-D_q\right)(q-1)}\left(p\right), \tag{3.8.20}$$

$$I_{1,D_q}\left(p:p\right)=-\left(1-D_q\right)H\left(p\right). \tag{3.8.21}$$

2. Информация различия с $u_i=1/m$. При равновероятном распределении $u_i=1/m$ из (3.8.16) получим функционал

$$I_{q,D_q}\left(p:u\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\sum_i^m p_i^q\left(\frac{1}{m}\right)^{D_q(1-q)}=$$
$$=-\left[H_q\left(p\right)-D_q\log_2 m\right]. \tag{3.8.22}$$

Из условий выпуклости вытекает, что энтропия Реньи меньше (больше) выражения $D_q\log_2 m$ при $q>0$ и $D_q>1$ ($q<0$ и $D_q<1$).

3. Расхождение. Количественная мера расхождения определяется следующими выражениями

$$J_{D_q}\left(p:u\right)=I_{D_q}\left(p:u\right)+I_{D_q}\left(u:p\right)=$$
$$=-\left[H\left(p\right)+H\left(u\right)\right]+D_q\left[H\left(p:u\right)+H\left(u:p\right)\right], \tag{3.8.23}$$

$$J_{q,D_q}\left(p:u\right)=I_{q,D_q}\left(p:u\right)+I_{q,D_q}\left(u:p\right)=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[\log_2\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}+\log_2\sum_i^m u_i^q p_i^{D_q(1-q)}\right]. \tag{3.8.24}$$

4. Мера неточности. Мера статистической неточности определения одного состояния случайного объекта относительно другого определяется функционалами

$$H_{D_q}(p:u) = H(p) + I_{D_q}(p:u) =$$

$$= -D_q H(p:u) = -D_q \sum_i^m (\log_2 u_i) p_i, \qquad (3.8.25)$$

$$H_{q,D_q}(p:u) = H_q(p) + I_{q,D_q}(p:u) =$$

$$= -\log_2 \frac{N_{q-1}(p)}{N_{q-1}\left(\dfrac{p}{u^{D_q}}\right)} = \frac{1}{1-q} \log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}}. \qquad (3.8.26)$$

5. Мера Хаусдорфа. Обобщенная мера $\Gamma(q,\tau)$ рассматривалась в теории информации [116]. Отметим взаимосвязь ее с мерой Хаусдорфа в теории мультифракталов. Для этого рассмотрим множество ω, которое разложим на счетное число подмножеств ω_i с диаметрами $\ell_i < \ell$ $(\ell > 0)$. Подмножества имеют размерность $(-\tau)$. Вероятность, что элемент множества ω находится в ω_i есть p_i. Тогда в теории мультифракталов вводится так называемая статистическая сумма [56]

$$\Gamma(q, \tau, \{\omega_i\}, \ell) = \sum_i^{m=m(\ell)} p_i^q \ell_i^{-\tau}, \qquad (3.8.27)$$

где число состояний $m \approx c\ell^{-r}$.

Обобщение меры Хаусдорфа на случай мультифракталов есть величина [56]

$$\overline{\Gamma}(q,\tau) = \lim_{\ell \to 0} \sum_i^{m(\ell)} p_i^q \ell_i^{-\tau}. \qquad (3.8.28)$$

Для каждого q существует одно значение $\tau = \tau(q)$ и мера имеет конечное значение в пределах $0 < \overline{\Gamma}(q,\tau) < \infty$. Тогда вводится обобщенная размерность Реньи

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \geq 0, \qquad (3.8.29)$$

которая при $\tau = 0$ имеет значение $D_q = 0$, а при $q = 0$ и $\tau(0) = 1$ совпадает с размерностью Хаусдорфа $D_0 = -r$. В итоге мера $\overline{\Gamma}(0,1)$ представляет собой известную D_0-мерную меру Хаусдорфа множества ω

$$\overline{\Gamma}(q,\tau) = \lim_{\ell \to 0} \sum_{i}^{m(\ell)} p_i^q \ell_i^{-\tau} . \tag{3.8.30}$$

Эти сведения из теории мультифракталов показывают, что обобщенная мера Хаусдорфа (3.8.28) связана с обобщенной мерой (3.8.6) следующей зависимостью

$$\overline{\Gamma}(q,\tau) = \lim_{\ell \to 0} \ell^{-\tau} \Gamma(q,\tau) \tag{3.8.31}$$

при $u_i = \ell_i / \ell$.

6. Нормированность и размерность. Двухпараметрический аналог информации различия Реньи (3.8.16) не удовлетворяет условию нормированности на единицу. Справедливо соотношение

$$I_{q,D_q}\left(1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = D_q . \tag{3.8.32}$$

Физическая безразмерная информация различия имеет следующий вид

$$I_{q,D_q}^{phys}(p:u) = \frac{1}{q-1} \ln \sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{D_q(1-q)} . \tag{3.8.33}$$

Функционал (3.8.16) есть отношение выражения (3.8.33) к значению физической энтропии $H_q^{phys}(u)$ при равновероятном состоянии с $m = 2$, то есть выполняется равенство

$$I_{q,D_q}(p:u) = \frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \quad H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \ln 2 . \tag{3.8.34}$$

Для второго двухпараметрического аналога информации различия Реньи имеем выражение:

$$I_{q,D_q}(p:u) = \frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{D_q(q-1)} \log_2 \sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}, \quad (3.8.35)$$

которое удовлетворяет условию нормированности

$$I_{q,D_q}\left(1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (3.8.36)$$

При $D_q = 1$ оба аналога совпадают с информацией различия Реньи.

7. *k*-параметрическая информация различия. Находим безусловный экстремум энтропии Шеннона–Винера при заданности k мер неточности $H(f:p_r)$ с фиксированными распределениями $p_r = \{p_{r1}, p_{r2}, \dots, p_{rm}\}$ $(r = 1, \dots, k)$ и сохранении нормировки для $f = \{f_1, \dots, f_m\}$. Из равенства нулю первой вариации функционала

$$L = -\sum_i^m (\log_2 f_i) f_i + \sum_r^k \alpha_r \sum_i^m (\log_2 p_{ri}) f_i + \alpha \sum_i^m f_i, \quad (3.8.37)$$

где α_k – множители Лагранжа, получим нормированное распределение

$$f_i = \frac{p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \dots p_{ki}^{\alpha_k}}{\sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \dots p_{ki}^{\alpha_k}}, \quad \sum_i^m p_{ri} = 1. \quad (3.8.38)$$

После подстановки (3.8.38) в энтропию получим ее максимальное значение

$$H(f) = \sum_r^k \alpha_r H(f:p_r) - \log_2 \sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \dots p_{ri}^{\alpha_k}, \quad (3.8.39)$$

которое после деления на произведение $\prod_r^k \alpha_r$ примет вид:

$$\frac{1}{\prod_r^k \alpha_r} H(f) = \frac{1}{\prod_r^k \alpha_r} \sum_r^k \alpha_r H(f : p_r) +$$

$$+ I_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(p_1 : p_2 : \ldots : p_k). \qquad (3.8.40)$$

Здесь введена k-параметрическая информация различия

$$I_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(p_1 : p_2 : \ldots : p_k) =$$

$$= -\log_2 \left[\sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \ldots p_{ki}^{\alpha_k} \right]^{1/(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \log_2 \sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \ldots p_{ki}^{\alpha_k}. \qquad (3.8.41)$$

Рассмотрим пример с двумя распределениями $p_{1i} = p_i$ и $p_{2i} = u_i$. Пусть справедливо равенство $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ с $\alpha_1 = q$ и $\alpha_2 = 1 - q$. Тогда из (3.8.41) вытекает q-информация различия [125]

$$I_{q,1-q}(p : u) = -\frac{1}{q(1-q)} \log_2 \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} =$$

$$= \log_2 \left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) \right]^{1/q} = \log_2 \left[N_{-q}^{*}\left(\frac{u}{p}\right) \right]^{1/(1-q)}. \qquad (3.8.42)$$

При $q = 0$ и $q = 1$ имеем, соответственно, выражения информаций различия Кульбака–Лейблера

$$I_{0,1}(p : u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{u_i}{p_i} \right) u_i, \qquad (3.8.43)$$

$$I_{1,0}(p : u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i} \right) p_i. \qquad (3.8.44)$$

3.9. Тип аддитивной *q*-энтропии и *q*-информации различия

Рассмотрим состояние случайного объекта, которое описывается мультипликативным распределением $p_{ij} = p_i p_j$, а p_i и p_j есть распределения двух независимых объектов. Тогда выполняется свойство мультипликативности полунормы

$$N = N_1 N_2, \tag{3.9.1}$$

где $N = N_{q-1}(p_{12})$, $N_1 = N_{q-1}(p_1)$ и $N_2 = N_{q-1}(p_2)$.

Пусть выполняется свойство аддитивности для энтропии в виде равенства

$$H = H_1 + H_2, \tag{3.9.2}$$

в котором $H = H(N)$, $H_1 = H(N_1)$ и $H_2 = H(N_2)$.

В этом случае получим дифференциальное уравнение [21,23]

$$\frac{d\ln N}{dH} = \frac{d\ln N_1}{dH_1} = \frac{d\ln N_2}{dH_2} = -\lambda, \tag{3.9.3}$$

решением которого является физическая безразмерная энтропия

$$H_q^{phys}(p) = -\lambda^{-1} \ln N_{q-1}(p) \tag{3.9.4}$$

с точностью до коэффициента λ^{-1}.

Учитывая условие нормированности энтропии в теории информации, получим $\lambda = \ln 2$ и окончательно имеем энтропию Реньи

$$H_q(p) = -\log_2 N_{q-1}(p) = \frac{1}{1-q}\log_2\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right). \tag{3.9.5}$$

Аналогично используем полунормы

$$N = N_{q-1}\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right),\ N_1 = N_{q-1}\left(\frac{p_1}{u_1}\right),\ N_2 = N_{q-1}\left(\frac{p_2}{u_2}\right), \tag{3.9.6}$$

удовлетворяющие условию мультипликативности (3.9.1), и закон аддитивности для информаций различия

$$I = I_1 + I_2 \tag{3.9.7}$$

После вычислений имеем уравнение

$$\frac{d\ln N}{dI} = \frac{d\ln N_1}{dI_1} = \frac{d\ln N_2}{dI_2} = \lambda, \tag{3.9.8}$$

выражение физической безразмерной информации различия:

$$I_q^{phys}(p:u)=\lambda^{-1}\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) \tag{3.9.9}$$

и функционал Реньи

$$I_q(p:u)=\log_2 N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\frac{1}{q-1}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right). \tag{3.9.10}$$

Например, при использовании обобщенной полунормы (3.7.5) имеем следующие значения функционалов

$$H_q(p)=\frac{1}{1-q}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^{q-1} f(p_i)}{\sum_i^m f(p_i)}\right), \tag{3.9.11}$$

$$I_q(p:u)=\frac{1}{q-1}\log_2\left(\frac{\sum_i^m p_i^{q-1}u_i^{1-q} f(p_i)}{\sum_i^m f(p_i)}\right). \tag{3.9.12}$$

При этом должно выполняться свойство мультипликативности функции $f(p_i p_j)=f(p_i)f(p_j)$, с помощью которой производится усреднение в соответствующих полунормах.

Таким образом, имеем один тип логарифмической зависимости от рассматриваемых полунорм, соответствующий свойству аддитивности энтропии и информации различия.

3.10. Экстремум энтропии Реньи и приложения

Исследуем экстремальные свойства мер Реньи, позволяющие находить наиболее вероятное распределение в случае заданности среднего значения произвольной случайной величины.

Приведем основные определения.

Определение 1. Взвешенное среднее каждой случайной величины $T=\{T_1,\dots,T_m\}$ в состоянии с параметризованным распределением $f=\{f_1,\dots,f_m\}$ равно:

$$\mathbf{E}_q(T)=\sum_i^m T_i f_i=\frac{\sum_i^m T_i p_i^q}{\sum_i^m p_i^q}, \quad \sum_i^m p_i=1. \tag{3.10.1}$$

Если $p_i=1$ или $p_i=1/m$, то выражение (3.10.1) равняется обычному среднему арифметическому

$$\mathbf{E}_q(T)=\frac{1}{m}\sum_i^m T_i . \tag{3.10.2}$$

Из определения 1 вытекают следующие свойства:

1. Однородность и нормированность. При замене p на λp $(a>0)$, выражение (3.10.1) является однородным функционалом нулевой степени относительно p, что означает его однородность.

Нормированность на единицу означает выполнимость равенства

$$\mathbf{E}_q(1)=1. \tag{3.10.3}$$

2. Аддитивность и мультипликативность. Пусть случайная величина $T_{12}=T_1+T_2$ или $T_{12}=T_1T_2$ равняется, соответственно, сумме случайных величин или произведению одного или двух независимых объектов. Тогда получим равенства

$$\mathbf{E}_q(T_{12})=\mathbf{E}_q(T_1)+\mathbf{E}_q(T_2), \tag{3.10.4}$$

$$\mathbf{E}_q(T_{12})=\mathbf{E}_q(T_1)\mathbf{E}_q(T_2), \tag{3.10.5}$$

означающие аддитивность и мультипликативность наблюдаемых макроскопических величин.

Определение 2. Начальные и центральные моменты n-го порядка случайной величины T равны

$$\alpha_n=\sum_i^m T_i^n f_i , \tag{3.10.6}$$

$$\mu_n=\sum_i^m \left[T_i-\mathbf{E}_q(T)\right]^n f_i , \tag{3.10.7}$$

где $\Delta T_i=T_i-\mathbf{E}_q(T)$ есть флуктуация, среднее значение которой равняется нулю.

Вначале рассмотрим экстремум энтропии Реньи

$$H_q(p) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_i^q \qquad (3.10.8)$$

при дополнительных условиях заданности среднего значения произвольной случайной величины $T = \{T_1, \ldots, T_m\}$ и нормировки распределения

$$\mathbf{E}_q(T) = \sum_i^m T_i f_i, \quad \sum_i^m p_i = 1. \qquad (3.10.9)$$

Варьируем следующий функционал

$$L = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i^m p_i^q + \tau \sum_i^m T_i f_i - \alpha \sum_i^m p_i \qquad (3.10.10)$$

и из условия

$$\delta L = \delta H_q(p) - \alpha \sum_i^m \delta p_i +$$

$$+ \frac{q\tau}{\sum_i^m p_i^q} \left[\sum_i^m T_i p_i^{q-1} \delta p_i - \frac{\sum_i^m T_i p_i^q}{\sum_i^m p_i^q} \sum_i^m p_i^{q-1} \delta p_i \right] = 0, \qquad (3.10.11)$$

где первая вариация энтропии Реньи и среднего значения

$$\delta H_q(p) = \frac{q \sum_i^m f_i \delta(\ln p_i)}{(1-q)\ln 2} = \frac{q \sum_i^m p_i^{q-1} \delta p_i}{(1-q)\ln 2 \sum_i^m p_i^q}, \qquad (3.10.12)$$

$$\delta \mathbf{E}_q(T) = q \sum_i^m f_i (\Delta T_i) \delta(\ln p_i) = \frac{q}{\sum_i^m p_i^q} \sum_i^m p_i^{q-1} (\Delta T_i) \delta p_i, \qquad (3.10.13)$$

получим равенство

$$\frac{q p_i^{q-1}}{(1-q)\ln 2 \sum_i^m p_i^q} \left\{ 1 + (1-q)\tau \ln 2 \left[T_i - \mathbf{E}_q(T) \right] \right\} - \alpha = 0. \qquad (3.10.14)$$

Из (3.10.14) следует нормированное распределение

$$p_i = \left\{ 1+(1-q)\tau \ln 2\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right]\right\}^{1/(1-q)} \Gamma_q^{-1}(\tau). \qquad (3.10.15)$$

Здесь функция

$$\Gamma_q(\tau) = \sum_i^m \left\{ 1+(1-q)\tau \ln 2\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right]\right\}^{1/(1-q)} \qquad (3.10.16)$$

зависит от q и τ, которые меняются в пределах допустимых значений. При $1+(1-q)\tau \ln 2\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right] < 0$ имеем $p_i = 0$, а при $q = 1$ из (3.10.15) получим распределение (1.9.9) статистической модели Шеннона–Винера

$$p_i = 2^{\tau T_i}\Gamma^{-1}(\tau),\ \Gamma(\tau) = \sum_i^m 2^{\tau T_i}\,. \qquad (3.10.17)$$

Подставляя (3.10.15) в (3.10.8), получим

$$H_q(p) = \frac{1}{1-q}\log_2 \sum_i^m p_i^q =$$

$$= \frac{1}{1-q}\log_2 \sum_i^m \left\{ \frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)\, p_i}{1+(1-q)\tau \ln 2\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right]} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-q}\log_2 \left\{ \Gamma_q^{1-q}(\tau) - \sum_i^m \frac{(1-q)\tau \ln 2\,\Gamma_q^{1-q}(\tau)\, p_i\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right]}{1+(1-q)\tau \ln 2\left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right]} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-q}\log_2 \left\{ \Gamma_q^{1-q}(\tau) - (1-q)\tau \ln 2 \left(\sum_i^m p_i^q\right)\left(\sum_i^m \left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\right] f_i\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-q}\log_2 \Gamma_q^{1-q}(\tau) = \log_2 \Gamma_q(\tau). \qquad (3.10.18)$$

Согласно (3.10.18), вытекает равенство

$$\Gamma_q(\tau) = \left(\sum_i^m p_i^q\right)^{1/(1-q)} = \left[N_{q-1}(p)\right]^{-1} \qquad (3.10.19)$$

и дифференциальное соотношение

$$dH_q(p) = -\tau d\mathbf{E}_q(T) \qquad (3.10.20)$$

между энтропией Реньи и средним значением случайной величины T.

Далее положим, что распределение p произвольное, а распределение u имеет вид

$$u_i = \left\{ 1 + (1-q)\tau_0 \ln 2 \left[T_i - \mathbf{E}_{0q}(T) \right] \right\}^{1/(1-q)} \mathit{\Gamma}_q^{-1}(\tau_0), \qquad (3.10.21)$$

где

$$\mathit{\Gamma}_q(\tau_0) = \sum_i^m \left\{ 1 + (1-q)\tau_0 \ln 2 \left[T_i - \mathbf{E}_{0q}(T) \right] \right\}^{1/(1-q)}, \qquad (3.10.22)$$

$$\mathbf{E}_{0q}(T) = \frac{\sum_i^m T_i u_i^q}{\sum_i^m u_i^q}. \qquad (3.10.23)$$

Находим информацию различия Реньи [23]

$$I_q(p:u) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1-q} \log_2 \left(\sum_i^m f_i u_i^{1-q} \sum_i^m p_i^q \right) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m p_i^q +$$

$$+ \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m f_i \left\{ 1 + (1-q)\tau_0 \ln 2 \left[T_i - \mathbf{E}_{0q}(T) \right] \right\} \mathit{\Gamma}_q^{q-1}(\tau_0) =$$

$$= \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m p_i^q - \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_i^m u_i^q +$$

$$+ \frac{1}{q-1} \log_2 \left\{ 1 + (1-q)\tau_0 \ln 2 \left[\mathbf{E}_q(T) - \mathbf{E}_{0q}(T) \right] \right\} =$$

$$= -\left[H_q(p) - H_q(u) \right] + \frac{1}{q-1} \log_2 \left\{ 1 + (1-q)\tau_0 \ln 2 \left[\mathbf{E}_q(T) - \mathbf{E}_{0q}(T) \right] \right\}. \quad (3.10.24)$$

При $q = 1$ из (3.10.24) следует значение информации различия Кульбака–Лейблера (1.9.24) статистической модели Шеннона–Винера:

$$I(p:u)=\lim_{q\to 1} I_q(p:u)=$$
$$=-\left[H_q(p)-H_q(u)\right]-\tau_0\left[\mathbf{E}_q(T)-\mathbf{E}_{0q}(T)\right]\ . \qquad (3.10.25)$$

Пусть случайными объектами являются частицы, рассматриваемые в статистической физике. Положим, что $\beta=-k\tau\ln 2$ есть обратная температура, H_i – дискретные значения энергии частицы и $E_q=\mathbf{E}_q(H)$ – средняя энергия частицы. Тогда экстремум физической энтропии Реньи

$$H_q(p)=\frac{k}{1-q}\ln\sum_i^m p_i^q=k\ln\Gamma_q(\beta)=\beta\left(E_q-F_q\right) \qquad (3.10.26)$$

достигается, согласно (3.10.15), при равновесном распределении

$$p_i=\left\{\ 1+(1-q)k^{-1}\beta\left(H_i-E_q\right)\right\}^{1/(1-q)}\Gamma_q^{-1}(\beta), \qquad (3.10.27)$$

где F_q – свободная энергия. Дифференциальные соотношения

$$TdH_q(p)=dE_q,\ dF_q=-H_q(p)dT \qquad (3.10.28)$$

соответствуют соотношениям равновесной статистической термодинамики замкнутых систем [6].

Открытые системы, находящиеся в окружении с температурой T_0, характеризуются, согласно (3.10.24), физической информацией различия Реньи [23]

$$I_q(p:p_0)=\frac{1}{q-1}\ln\sum_i^m p_i^q p_{0i}^{1-q}=-\left[H_q(p)-H_q(p_0)\right]+$$
$$+\frac{k}{q-1}\ln\left[1-(1-q)k^{-1}\beta_0\left(E_q-E_{0q}\right)\right] \qquad (3.10.29)$$

с равенством $I_q(p:p_0)=0$ при распределении

$$p_i=p_{0i}=\left\{\ 1+(1-q)k^{-1}\beta_0\left(H_i-E_{0q}\right)\right\}^{1/(1-q)}\Gamma_q^{-1}(\beta_0), \qquad (3.10.30)$$

где $\beta_0=1/T_0$ и $E_{0q}=\mathbf{E}_{0q}(H)$.

Дифференцируя (3.10.29) по времени, получим следующее соотношение для открытых систем:

$$dI_q\left(p:p_0\right)\geq -dH_q\left(p\right)+\frac{dE_q}{T_0\left[\ 1-\left(1-q\right)k^{-1}\beta_0\left(E_q-E_{0q}\right)\right]},\qquad(3.10.31)$$

которое отличается от (1.11.12) наличием разности средних энергий частицы. Знак неравенства достигается для случая необратимых процессов.

При $q=1$ из распределений (3.10.27) и (3.10.30) вытекают канонические распределения Гиббса [6]

$$p_i=\exp\left\{-k^{-1}\beta\left(H_i-F\right)\right\},\ p_{0i}=\exp\left\{-k^{-1}\beta_0\left(H_i-F_0\right)\right\}\qquad(3.10.32)$$

а дифференциальные соотношения (3.10.28) и (3.10.31) совпадают с соотношениями статистической теории Гиббса [19]

$$TdH\left(p\right)=dE\ ,\ dF=-H\left(p\right)dT\ ,\qquad(3.10.33)$$

$$dI\left(p:p_0\right)\geq -dH\left(p\right)+\frac{1}{T_0}dE\ .\qquad(3.10.34)$$

В заключение отметим, что в рассматриваемой вариационной задаче остается открытым вопрос о знакоопределенности второй вариации $\delta^2 L$, что осложняет дальнейшую интерпретацию термодинамического соотношения (3.10.28). Другие трудности, связанные с усреднением при помощи распределения f, рассматриваются в монографии [21]. К ним можно отнести нелинейный характер информации различия (3.10.29) относительно изменения средней энергии.

Глава 4

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХАВРДА–ЧАРВАТ–ДАРОШИ

Приводятся фундаментальные понятия и методы теории информации, основанной на статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши. Вводятся и обсуждаются нелогарифмические меры энтропии и информации различия для неаддитивных случайных объектов с взвешенными ненормированными средними.

Результаты работ [72, 78, 101] и монография [53] заложили основы статистической модели обобщенной теории информации с неаддитивными мерами, зависящими от некоторого параметра q. Именно этой модели посвящено большое количество работ, среди которых отметим монографии [22, 55, 71, 85, 86, 93, 125] и обзоры [120, 121].

4.1. Взвешенные ненормированные средние и полунормы

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание случайного объекта с усреднением, отличным от рассмотренных в предыдущих главах.

Приведем основные определения.

Определение 1. Взвешенное ненормированное среднее Хаврда–Чарват каждой случайной величины $T=\{T_1,\dots,T_m\}$ в состоянии с распределением $p=\{p_1,\dots,p_m\}$ равно

$$\mathbf{E}_q(T)=\sum_i^m T_i p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\,, \quad 0<\sum_i^m p_i \le 1, \tag{4.1.1}$$

где m – число возможных состояний объекта, $q\in\mathbf{R}$ и изменяется в допустимых пределах.

Если веса p_i удовлетворяют условию вероятностной нормировки

$$\sum_{i}^{m} p_i = 1, \tag{4.1.2}$$

то выражение (4.1.1) примет следующий вид

$$\mathbf{E}_q\left(T\right) = \sum_{i}^{m} T_i p_i^q . \tag{4.1.3}$$

При $p_i = 1$ из (4.1.1) имеем обычное среднее арифметическое

$$\mathbf{E}_q\left(T\right) = \frac{1}{m}\sum_{i}^{m} T_i . \tag{4.1.4}$$

Из определения 1 вытекают основные свойства.

1. Однородность. При замене p на ap $(a > 0)$ взвешенное среднее является однородным функционалом степени $q-1$ относительно p, то есть выполняется свойство однородности.

2. Ненормированность. Для неслучайной постоянной величины имеем равенство

$$\mathbf{E}_q\left(\mathrm{C}\right) = \mathrm{C}\frac{\sum_{i}^{m} p_i^q}{\sum_{i}^{m} p_i}. \tag{4.1.5}$$

При $\mathrm{C} = 1$ следует $\mathbf{E}_q\left(1\right) \neq 1$, что означает ненормированность взвешенного среднего на единицу.

3. Неаддитивность. Пусть закон сложения случайных величин $T_{12} = T_1 + T_2$ выражается в виде суммы для двух независимых объектов. Тогда, согласно условию мультипликативности $p_{ij} = p_i p_j$, получим равенство

$$\mathbf{E}_q\left(T_{12}\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\frac{\sum_{j}^{n} p_j^q}{\sum_{j}^{n} p_j} + \mathbf{E}_q\left(T_2\right)\frac{\sum_{i}^{m} p_i^q}{\sum_{i}^{m} p_i}. \tag{4.1.6}$$

Далее положим, что случайная величина является неаддитивной согласно следующему закону

$$T_{12} = T_1 + T_2 - \varepsilon T_1 T_2, \tag{4.1.7}$$

где ε – постоянный множитель. После усреднения имеем другое равенство

$$\mathbf{E}_q\left(T_{12}\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\frac{\sum_j^n p_j^q}{\sum_j^n p_j} + \mathbf{E}_q\left(T_2\right)\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} - \varepsilon\mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \tag{4.1.8}$$

Таким образом, для двух случаев вытекает неаддитивность средних величин вне зависимости от закона сложения случайных величин.

4. Мультипликативность. Среднее значение произведения независимых случайных величин T_1T_2 для одного или двух объектов равно произведению средних значений

$$\mathbf{E}_q\left(T_1T_2\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \tag{4.1.9}$$

5. Взвешенное ненормированное *f*-среднее. Функциональным обобщением выражения (4.1.1) является взвешенное ненормированное f-среднее

$$\mathbf{E}_f\left(T\right) = \frac{\sum_i^m T_i f\left(p_i\right)}{\sum_i^m p_i}, \tag{4.1.10}$$

где $f\left(p\right)$ имеет свойство мультипликативности $f\left(p_{ij}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right)$.

Если $f\left(p_i\right) = p_i^q$, то выражение (4.1.10) равняется взвешенному ненормированному среднему (4.1.1). При $f\left(p_i\right) = p_i^{s_i}$ имеем

$$\mathbf{E}\left(T\right) = \frac{\sum_i^m T_i p_i^{s_i}}{\sum_i^m p_i}. \tag{4.1.11}$$

Определение 2. Отклонение случайной величины от значения

$\mathbf{E}_q(T)\,p_i^{1-q}$ есть флуктуация

$$\Delta_q T_i = T_i - \mathbf{E}_q(T)\,p_i^{1-q}, \quad \sum_i^m \left(\Delta_q T_i\right) p_i^q = 0. \tag{4.1.12}$$

Определение 3. Начальные и центральные моменты n-го порядка случайной величины T равны

$$\alpha_{n,q} = \sum_i^m T_i^n p_i^q, \tag{4.1.13}$$

$$\mu_{n,q} = \sum_i^m \left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\,p_i^{1-q}\right]^n p_i^q. \tag{4.1.14}$$

При $n = 2$ получим дисперсию

$$\mu_{2,q} = \mathbf{D}_q(T) = \sum_i^m \left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\,p_i^{1-q}\right]^2 p_i^q =$$

$$= \sum_i^m T_i^2 p_i^q - 2\mathbf{E}_q(T)\mathbf{E}(T) + \left[\mathbf{E}_q(T)\right]^2 \sum_i^m p_i^{2-q}. \tag{4.1.15}$$

Статистический коэффициент корреляции величин двух объектов дается выражением

$$r_q(T_1, T_2) = \frac{\mathbf{E}_q\left(\Delta_q T_1 \Delta_q T_2\right)}{\sigma_q(T_1)\sigma_q(T_2)}, \tag{4.1.16}$$

где квадратичные отклонения

$$\sigma_q(T_1) = \left[\mathbf{D}_q(T_1)\right]^{1/2}, \quad \sigma_q(T_2) = \left[\mathbf{D}_q(T_2)\right]^{1/2}. \tag{4.1.17}$$

6. Полунорма и среднее значение. Используя величины

$$T_1 = T, \; T_2 = p^{q/q'} = p^{q-1} \tag{4.1.18}$$

и неравенства Гельдера (3.2.12) при $r = 1$

$$N_1(T_1 T_2) \le N_q(T_1)\,N_{q'}(T_2) \tag{4.1.19}$$

получим

$$\mathbf{E}_q(T) \le N_q(T)\left[N_q(p)\right]^{q-1}. \tag{4.1.20}$$

Минимальное среднее значение случайной величины

$$\mathbf{E}_q(T)_{\min} = \left[N_q(p)\right]^q \tag{4.1.21}$$

определяется при $T = p$ и $b = 1$ в соотношении (3.2.15), что в итоге дает выражение

$$N_q(p) = \left[\mathbf{E}_q(p)\right]^{1/q}. \tag{4.1.22}$$

Определение 4. Каждой случайной величине T и любым числам q и s, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ соответствует взвешенная ненормированная полунорма

$$N_q^s(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i^s}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/q}. \tag{4.1.23}$$

Если веса p_i удовлетворяют условию вероятностной нормировки (4.1.2), то выражение (4.1.23) примет вид

$$N_q^s(T) = \left(\sum_i^m T_i^q p_i^s \right)^{1/q}. \tag{4.1.24}$$

7. Ненормированная *f*-полунорма. Функциональным обобщением выражения (4.1.23) является взвешенная ненормированная полунорма

$$N_{q,f}(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q f(p_i)}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/q}. \tag{4.1.25}$$

При $f(p_i) = p_i^s$ выражение (4.1.25) совпадает с (4.1.23). Если $f(p_i) = p_i^{s_i}$, то имеем следующий функционал

$$N_q(T,s) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i^{s_i}}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/q}. \tag{4.1.26}$$

В пределе $q \to 1$ из (4.1.25) вытекает функционал и его логарифм

$$N_f(T) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) f(p_i)}{\sum_i^m p_i}} = \left(\prod_i^m T_i^{f(p_i)}\right)^{\frac{1}{\sum_i^m p_i}}, \tag{4.1.27}$$

$$\log_2 N_f(T) = \frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) f(p_i)}{\sum_i^m p_i}, \tag{4.1.28}$$

которые обобщают формулы (1.2.1) и (1.2.2).

Определение 5. Среднее взвешенное ненормированное с произвольной функцией $\varphi = \varphi(T)$ есть

$$A_{q,\varphi}(T) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_i^m \varphi(T_i) p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \tag{4.1.29}$$

где φ – непрерывная строго монотонная функция на $\mathbf{R}$, а φ^{-1} есть функция, обратная $\varphi(T)$. При степенной функции среднее (4.1.29) совпадает с полунормой (4.1.23). При $q = 1$ функционал (4.1.29) равняется взвешенному среднему Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией.

Здесь дается идейная сторона обобщений и поэтому не будем приводить свойства функционалов (4.1.23), (4.1.25) и (4.1.29). Это представляет отдельный интерес и требует более детального рассмотрения.

Наконец выпишем взвешенные ненормированные средние в других важных случаях

$$\mathbf{E}_q(T) = \frac{\int_G T p^q dX}{\int_G p dX}, \quad \mathbf{E}_q(T) = \frac{\mathrm{Sp} T \rho^q}{\mathrm{Sp}\rho}. \tag{4.1.30}$$

При условии вероятностной нормировки

$$\int p dX = 1, \quad \mathrm{Sp}\rho = 1 \tag{4.1.31}$$

из (4.1.30) следуют формулы:

$$\mathbf{E}_q(T) = \int Tp^q dX\ ,\ \mathbf{E}_q(T) = \mathrm{Sp} T\rho^q, \tag{4.1.32}$$

где $p = p(X)$ – непрерывное распределение и ρ – оператор плотности в гильбертовом пространстве.

4.2. Аксиомы Хаврда–Чарвата и метод Дароши

Я. Хаврда, Ф. Чарват [78] и З. Дароши [72] впервые аксиоматическим подходом доказали единственность новой q-энтропии, совместимой с определением взвешенного ненормированного среднего. В работе [78] для вывода q-энтропии были сформулированы аксиомы:

1. $H_q(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ непрерывна относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ в области $0 \le p_i \le 1$ и $\sum_i^m p_i = 1,\ q > 0$.

2. $H_q(1) = 0,\ H_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

3. $H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \ldots, p_m) = H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m)$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

4. $H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i1}, p_{i2}, p_{i+1}, \ldots, p_m) =$

$= H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m) + \alpha p_i^q H_q\left(\frac{p_{i1}}{p_i}, \frac{p_{i2}}{p_i}\right)$ для всех $p_{i1} + p_{i2} = p_i > 0,\ i = 1, \ldots, m,\ q > 0$.

Из аксиомы 4 вытекает, согласно аксиоме 2, равенство $\alpha = 1$. Также данная аксиома приводит к модифицированной аксиоме 4 (см. главу 1) системы Хинчина

$$H_q(p_{11}, \ldots, p_{1n}; p_{21}, \ldots, p_{2n}; \ldots; p_{m1}, \ldots, p_{mn}) =$$
$$= H_q(p_1, p_2, \ldots, p_m) + \sum_i^m p_i^q H_i\left(\frac{p_{i1}}{p_i}, \ldots, \frac{p_{in}}{p_i}\right), \tag{4.2.1}$$

где p_{ij} – нормированное совместное распределение статистически зависимых объектов с

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = 1, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_{ij} \ge 0\,. \tag{4.2.2}$$

Аксиомами Хаврда–Чарвата q-энтропия определяется с точностью до функции $\lambda(q)$, зависящей от параметра q, и имеет следующий вид

$$H_q(p_1,\ldots,p_m)=\lambda^{-1}(q)\left(1-\sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.2.3}$$

Условие нормированности q-энтропии, выраженное аксиомой 2, приводит (4.2.3) к функционалу

$$H_q(p)=\frac{1}{1-2^{1-q}}\left(1-\sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.2.4}$$

При $q=1$ из (4.2.4) следует энтропия Шеннона–Винера

$$H(p)=\lim_{q\to 1} H_q(p)=-\sum_i^m(\log_2 p_i)\,p_i\,. \tag{4.2.5}$$

З. Дароши [72] использовал при выводе q-энтропии (4.2.4) систему аксиом Фадеева (см. главу 1) с модифицированным групповым усреднением

$$H_q(p_1,\ldots,p_m)=$$

$$=\sum_{k=2}^m(p_1+p_2+\ldots+p_k)^q\ f\left(\frac{p_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right), \tag{4.2.6}$$

где информационная функция $f(X)$ при $m=2$ удовлетворяет граничным условиям

$$f(0)=f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \tag{4.2.7}$$

и функциональному уравнению

$$f(x)+(1-x)^q\ f\left(\frac{y}{1-x}\right)=f(y)+(1-y)^q\ f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{4.2.8}$$

для всех $(x,y)\in D$, где

$$D=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y=1\}. \tag{4.2.9}$$

Решением уравнения (4.2.8) является информационная функция

$$H_q(1-p,p)=f(p)=\frac{1}{1-2^{1-q}}\left[1-p^q-(1-p)^q\right], \tag{4.2.10}$$

которая при $q=1$ совпадает с энтропией Шеннона–Винера

$$H(1-p,p)=\lim_{q\to 1} H_q(1-p,p)=$$
$$=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p). \qquad (4.2.11)$$

Детальное исследование функционала (4.2.10), его вывод и свойства приводятся в монографии [53].

Таким образом, q-энтропия (4.2.4) по праву называется энтропией Хаврда–Чарват–Дароши.

4.3. Неравенство Гёльдера. Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

Развиваемая статистическая модель позволяет на основе определения полунормы случайной величины дать статистический вывод энтропии Хаврда–Чарват–Дароши [21]. Итак, запишем неравенство Гельдера

$$N_r(T_1T_2)\le N_q(T_1)N_{q'}(T_2) \qquad (4.3.1)$$

для конечных значений полунорм

$$N_q(T_1)=\left(\sum_i^m T_{1i}^q p_i\right)^{1/q},\ N_{q'}(T_2)=\left(\sum_i^m T_{2i}^{q'} p_i\right)^{1/q'},$$
$$N_r(T_1T_2)=\left(\sum_i^m (T_{1i}T_{2i})^r\ p_i\right)^{1/r}. \qquad (4.3.2)$$

Здесь T_1 и T_2 – произвольные случайные величины, а сопряженные показатели q и q' удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{r},\quad 0<r<q. \qquad (4.3.3)$$

Знак равенства соответствует минимальному состоянию в (4.3.1) и достигается при выполнении условия

$$T_{1i}^q=bT_{2i}^{q'}, \qquad (4.3.4)$$

где значение коэффициента

$$b=\left(\sum_i^m T_{1i}^q p_i\right)\left(\sum_i^m T_{2i}^{q'} p_i\right)^{-1}. \qquad (4.3.5)$$

С учетом (4.3.5) условие (4.3.4) примет следующий вид

$$\frac{T_{1i}^{q}}{\sum_{i}^{m} T_{1i}^{q}} = \frac{T_{2i}^{q'}}{\sum_{i}^{m} T_{2i}^{q'}}. \tag{4.3.6}$$

Пусть величины T_1 и T_2, соответственно принадлежащие пространствам $\mathbf{L}^{q}$ и $\mathbf{L}^{q'}$, равняются

$$T_{1i} = p_i, \quad T_{2i} = \left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]^{-1}. \tag{4.3.7}$$

Тогда, используя (4.3.4), получим

$$p_i^{q} = b\left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]^{-q'}. \tag{4.3.8}$$

Из (4.3.8) следует соотношение

$$p_i^{1-\frac{q}{r}} = b^{-\frac{1}{q'}}\left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]. \tag{4.3.9}$$

Рассмотрим случай с $b=1$ и положим, что $h_{q/r}(p_i)$ есть случайная энтропия. Тогда из (4.3.9) вытекает

$$h_{q/r}(p_i) = -\lambda^{-1}(q/r)\left(1-p_i^{1-q/r}\right). \tag{4.3.10}$$

Среднее значение величины (4.3.10) запишется так

$$H_{q/r}(p) = \mathbf{E}_{q/r}\left[h_{q/r}(p)\right] = \sum_{i}^{m} h_{q/r}(p_i)\, p_i^{q/r} =$$

$$= \lambda^{-1}(q/r)\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q/r}\right). \tag{4.3.11}$$

Учитывая условие нормированности энтропии на единицу при $m=2$ и из (4.3.11), получим [21]

$$H_{q/r}(p) = \frac{1}{1-2^{1-q/r}}\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q/r}\right). \tag{4.3.12}$$

При $r=1$ функционал (4.3.12) совпадает с энтропией Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_{q}(p) = \frac{1}{1-2^{1-q}}\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q}\right). \tag{4.3.13}$$

Рассмотрим основные свойства энтропии Хаврда–Чарват–Дароши.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал с максимумом (минимумом) при $q>0$ $(q<0)$

$$H_q(p)>0, \tag{4.3.14}$$

$$H_q(a_1p_1+a_2p_2)\le a_1H_q(p_1)+a_2H_q(p_2), \tag{4.3.15}$$

где $a_1+a_2=1$, $a_1>0$, $a_2>0$. Неравенство (4.3.15) есть неравенство Иенсена в теории выпуклых функций [47]. При $q=0$ из (4.3.13) вытекает равенство $H_0(p)=m-1$.

На рис.4.1 представлена зависимость энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q(p)$ от распределения p при значениях $m=2$, $p_1=p$ и $q=-1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 10$.

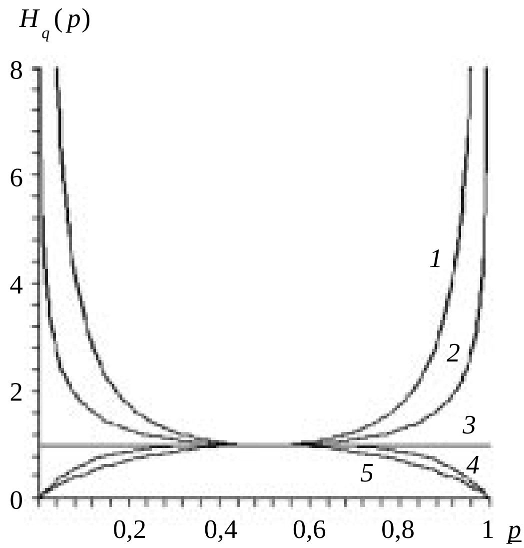


Рис. 4.1. Зависимость энтропии
Хаврда–Чарват–Дароши от распределения:
1 – (q = –1), *2* – (q = 1/2), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 10)

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением $p_{ij}=p_ip_j$, а p_i и p_j относятся к двум независимым объектам. Общая энтропия дается выражением:

$$H_q(p_{12}) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q\right), \tag{4.3.16}$$

где условие нормировки

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1. \tag{4.3.17}$$

После подстановки распределения p_{ij} в (4.3.16) получим свойство неаддитивности для энтропии двух независимых объектов

$$H_q(p_{12}) = H_q(p_1) + H_q(p_2) + \left(2^{1-q}-1\right)H_q(p_1)H_q(p_2), \tag{4.3.18}$$

где

$$H_q(p_1) = \frac{\left(1-\sum_i^m p_i^q\right)}{\left(1-2^{1-q}\right)}, \quad H_q(p_2) = \frac{\left(1-\sum_j^n p_j^q\right)}{\left(1-2^{1-q}\right)}. \tag{4.3.19}$$

Для случая $k \geq 2$ независимых объектов формула (4.3.18) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} H_q(p_{12\ldots k}) &= \sum_{r=1}^k H_q(p_r) + \left(2^{1-q}-1\right)\sum_{r=1}^{k-1} H_q(p_r)H_q(p_k) + \\ &+ \left(2^{1-q}-1\right)^2\sum_{r=1}^{k-2} H_q(p_r)H_q(p_{k-1})H_q(p_k) + \ldots + \\ &+ \left(2^{1-q}-1\right)^{k-1} H_q(p_1)H_q(p_2)\ldots H_q(p_k) \ . \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Положим, что свойство неаддитивности для случайных энтропий

$$h_q(p_{ij}) = h_q(p_i) + h_q(p_j) - \left(2^{1-q}-1\right)h_q(p_i)h_q(p_j) \tag{4.3.21}$$

справедливо для произвольных независимых случайных объектов. Тогда, сравнивая равенства (4.1.7) и (4.3.21), получим значение множителя $\varepsilon = \left(2^{1-q}-1\right)$.

В итоге неаддитивность для случайных и их средних выражается соотношениями:

$$T_{12} = T_1 + T_2 - \left(2^{1-q} - 1\right) T_1 T_2, \qquad (4.3.22)$$

$$\mathbf{E}_q\left(T_{12}\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\left[1 + \left(2^{1-q} - 1\right) H_q\left(p_2\right)\right] +$$
$$+\mathbf{E}_q\left(T_2\right)\left[1 + \left(2^{1-q} - 1\right) H_q\left(p_1\right)\right] - \left(2^{1-q} - 1\right)\mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \qquad (4.3.23)$$

Для энтропий из (4.3.22) и (4.3.23) вытекают выражения (4.3.18) и (4.3.21).

3. Равенство для зависимых объектов. В общем случае зависимых объектов имеем соотношения для распределений

$$p_{ij} = p_i p_{j|i} = p_j p_{i|j}, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \qquad (4.3.24)$$

и равенство

$$h_q\left(p_{ij}\right) = h_q\left(p_i\right) + h_q\left(p_{j|i}\right) - \left(2^{1-q} - 1\right) h_q\left(p_i\right) h_q\left(p_{j|i}\right), \qquad (4.3.25)$$

где случайные энтропии

$$h_q\left(p_{j|i}\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_{j|i}^{1-q}\right), \qquad (4.3.26)$$

$$h_q\left(p_i\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_i^{1-q}\right), \; h_q\left(p_j\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_j^{1-q}\right). \qquad (4.3.27)$$

После усреднения (4.3.25) получим равенство для энтропий зависимых объектов

$$H_q\left(p_{12}\right) = H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2 \middle| p_1\right). \qquad (4.3.28)$$

Условная энтропия с распределением $p_{2|1}$ определяется следующим образом

$$H_{qi}\left(p_{2|1}\right) = \sum_j^n h_q\left(p_{j|i}\right) p_{j|i}^q \qquad (4.3.29)$$

и ее среднее значение в (4.3.28) равно

$$H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_i^m p_i^q H_{qi}\left(p_{2|1}\right). \qquad (4.3.30)$$

Если $p_{2|1} = p_2$, то из (4.3.28) следует свойство неаддитивности (4.3.18). При реализации состояния с распределением p_2 получим энтропии:

$$H_q\left(p_{12}\right)=H_q\left(p_2\right)+H_q\left(p_1\middle|p_2\right), \tag{4.3.31}$$

$$H_{qj}\left(p_{2|1}\right)=\sum_j^n h_q\left(p_{i|j}\right)p_{i|j}^q\,, \tag{4.3.32}$$

$$H_q\left(p_1\middle|p_2\right)=\sum_j^n p_j^q H_{qj}\left(p_{2|1}\right). \tag{4.3.33}$$

Приравнивая выражения (4.3.28) и (4.3.31), окончательно имеем равенство

$$H_q\left(p_1\right)+H_q\left(p_2\middle|p_1\right)=H_q\left(p_2\right)+H_q\left(p_1\middle|p_2\right), \tag{4.3.34}$$

которое по форме совпадает с равенством (1.5.23) статистической модели Шеннона–Винера.

4. Флуктуация. Запишем, согласно (4.1.8), флуктуацию случайной энтропии

$$\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]=h_q\left(p_i\right)-H_q\left(p\right)p_i^{1-q}. \tag{4.3.35}$$

Выразим значение p_i^{1-q} через случайную энтропию $h_q\left(p_i\right)$ и получим равенство

$$\begin{gathered}\left[1-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)\right]\ \left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(p\right)\right]=\\ =\left\{\ 1-\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]\right\},\end{gathered} \tag{4.3.36}$$

в котором взаимосвязаны случайная и средняя энтропии с флуктуацией случайной энтропии. Из (4.3.36) вытекает следующее соотношение для среднего значения

$$\begin{gathered}\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(p\right)\right]^{1/(1-q)}=\\ =\sum_i^m\left\{\ 1-\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]\right\}^{1/(1-q)}.\end{gathered} \tag{4.3.37}$$

При $q=1$ из (4.3.37) имеем формулу

$$H\left(p\right)=\log_2\sum_i^m 2^{-\Delta h\left(p_i\right)}\,, \tag{4.3.38}$$

которая совпадает с известным выражением (1.5.39) для энтропии Шеннона–Винера.

Для произвольной случайной величины T и ее флуктуации

$$\Delta_q T_i = T_i - \mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q} \tag{4.3.39}$$

справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{E}_q(T) - \mathbf{E}(T) = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1} \mathbf{E}_q\left[T h_q(p)\right], \tag{4.3.40}$$

$$\left\{ 1 - \left(2^{1-q} - 1\right)\Delta_q T_i \right\} = \left[\frac{1 + \left(2^{1-q} - 1\right)\mathbf{E}_q(T)}{1 + \left(2^{1-q} - 1\right)H_q(p)} \right] \times$$
$$\left\{ 1 - \left(2^{1-q} - 1\right)\Delta_q\left[h_q(p_i)\right] \right\} + \left(2^{1-q} - 1\right)\left[h_q(p_i) - T_i\right]. \tag{4.3.41}$$

5. Энтропия равновероятного состояния. Находим экстремум энтропии Хаврда–Чарват–Дароши при условии сохранения нормировки распределения p. В результате имеем равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m} \tag{4.3.42}$$

и экстремальное значение энтропии

$$H_q(p) = \frac{1 - m^{1-q}}{1 - 2^{1-q}}, \tag{4.3.43}$$

зависящее от параметра q. При $q = 1$ из (4.3.43) следует известное выражение

$$H(p) = \lim_{q \to 1} H_q(p) = \log_2 m \tag{4.3.44}$$

статистической модели Шеннона–Винера.

6. Неравенства. Энтропия удовлетворяет следующим неравенствам

$$H_q(p_{12}) \le H_q(p_1) + H_q(p_2), \tag{4.3.45}$$

$$H_q(p_2) \ge H_q\left(p_1 \middle| p_2\right),\ H_q(p_1) \ge H_q\left(p_2 \middle| p_1\right)\ (q \ge 1), \tag{4.3.46}$$

$$H_q(p) \le \frac{1 - m^{1-q}}{1 - 2^{1-q}}\ (q > 0), \tag{4.3.47}$$

$$H_q(p) \geq \frac{1-m^{1-q}}{1-2^{1-q}} \ (q<0), \tag{4.3.48}$$

$$H_q(p_1|p_2, p_3) \leq H(p_1|p_3) \ (q>0), \tag{4.3.49}$$

$$H_q(p_1, p_2|p_3) \leq H(p_1|p_2) \ (q>0), \tag{4.3.50}$$

$$H_q(p_1|p_3) \leq H_q(p_1|p_2) + H_q(p_2|p_1) \ (q \geq 1), \tag{4.3.51}$$

$$\frac{H_q(p_1|p_3)}{H_q(p_1, p_3)} \leq \frac{H_q(p_1|p_2)}{H_q(p_1, p_2)} + \frac{H_q(p_2|p_3)}{H_q(p_2, p_3)} \ (q \geq 1) \tag{4.3.52}$$

и другим, которые рассматриваются в обзорах [120, 121].

7. Мера статистического расстояния. Рассмотрим ненормированное среднее значение случайной энтропии $h_q(p_i)$

$$\mathbf{E}_s\left[h_q(p)\right] = \sum_i^m h_q(p_i) p_i^s = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1} \sum_i^m \left(p_i^s - p_i^{1-q+s}\right). \tag{4.3.53}$$

Если в (4.3.53) положить $1-q=r-s$, то получим соответствующую энтропию [112, 113]

$$H_s^r(p) = -2^{1-r}\mathbf{E}_s\left[h_q(p)\right] = \left(2^{1-s}-2^{1-r}\right)^{-1} \sum_i^m \left(p_i^s - p_i^r\right), \tag{4.3.54}$$

которая является мерой статистического расстояния между p_i^s и p_i^r. Другие средние и меры приводятся в [63].

8. Нормированность и размерность. При $m=2$ и равновероятными значениями распределения $p_1 = p_2 = 1/2$ энтропия удовлетворяет свойству нормированности

$$H_q(p) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^q - \left(\frac{1}{2}\right)^q\right] = 1 \tag{4.3.55}$$

и, следовательно, единицей измерения в статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши является один бит. Функционал (4.2.3) с $\lambda = q-1$ является физической безразмерной энтропией

$$H_q^{phys}(p) = \frac{1}{q-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.3.56}$$

Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши в виде (4.3.56) впервые была приведена в работе [129] и находит широкое применение в статистической физике как физическая размерная энтропия $H_q(p) = kH_q^{phys}(p)$, которая при $q=1$ совпадает с энтропией Больцмана–Гиббса

$$H(p) = \lim_{q\to 1} kH_q^{phys}(p) = -k\sum_i^m (\ln p_i)\, p_i\,. \qquad (4.3.57)$$

И. Вайда [123] рассматривал квадратичную энтропию $H_2^{phys}(p) = 1 - \sum_i^m p_i^2$, а также исследовал аксиомы для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши [124].

На основе (4.3.56) автор разрабатывал теорию самоорганизации и необратимости неэкстенсивных систем [20–23]. Взаимосвязь рассматриваемых энтропий дается равенствами

$$H_q(p) = \frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q-1}\left(1-2^{1-q}\right). \qquad (4.3.58)$$

Таким образом, энтропия Хаврда–Чарват–Дароши есть отношение безразмерной физической энтропии (4.3.56) к ее значению при равновероятном состоянии $m=2$.

9. *f*-энтропия. Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши представляет собой f-энтропии

$$H_f(p) = \sum_i^m f(p_i)\, p_i^q\,,\ f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-p_i^{q-1}\right), \qquad (4.3.59)$$

$$H_f(p) = \sum_i^m f(p_i),\ f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(p_i - p_i^q\right), \qquad (4.3.60)$$

$$H_f(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right]\,,\ f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{q-1}\right\}. \qquad (4.3.61)$$

Выражение (4.3.59) совпадает со средним значением случайной энтропии, функция $f(p)$ в (4.3.60) является информационной, а (4.3.61) есть функция полунормы распределения.

4.4. Аксиомы и информация различия Ратье–Каннаппана. Ненормированная информация различия

Дальнейшее развитие статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши состояло в нахождении информаций различия. П.Н. Ратье и П. Каннаппан сформулировали следующие аксиомы [101]

1. При $m \geq 2$

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_m : u_1,\ldots,u_m\right) =$$
$$= I_q\left(p_1+p_2, p_3,\ldots,p_m : u_1+u_2, u_3,\ldots,u_m\right) +$$
$$+\left(p_1+p_2\right)^q \left(u_1+u_2\right)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2} : \frac{u_1}{u_1+u_2}, \frac{u_2}{u_1+u_2}\right), \qquad (4.4.1)$$

где $p_1+p_2>0$, $u_1+u_2>0$.

2. $I_q\left(p_1,\ldots,p_m : u_1,\ldots,u_m\right)$ симметрична относительно $p_1,\ldots,p_m$ и $u_1,\ldots,u_m$.

3. $I_q\left(1,0 : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ – условие нормированности. (4.4.2)

Таким образом, используются аксиомы Фаддеева с модифицированным выражением (4.4.1). Далее применяется метод информационной функции Дароши, которая удовлетворяет граничным условиям

$$f\left(0,0\right) = f\left(1,1\right) = 0, \quad f\left(0,\frac{1}{2}\right) = f\left(1,\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad (4.4.3)$$

и функциональному уравнению

$$f\left(x,y\right) + \left(1-x\right)^q \left(1-y\right)^{1-q} f\left(\frac{z}{1-x}, \frac{t}{1-y}\right) =$$
$$= f\left(z,t\right) + \left(1-z\right)^q \left(1-t\right)^{1-q} f\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-t}\right) \qquad (4.4.4)$$

для всех $\left(x,y,z,t\right) \in \left[0,1\right)$, где $x+z \leq 1$, $y+t \leq 1$.

В итоге решением уравнения (4.4.4) с условиями (4.4.3) является функция, равная информации различия Ратье–Каннаппана:

$$I_q(1-p, p:1-u, u) =$$
$$= \left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left[1-p^q u^{1-q}-(1-p)^q (1-u)^{1-q}\right]. \qquad (4.4.5)$$

Используя аксиому 2, функционал (4.4.5) представляется в общем виде

$$I_q(p:u) = \left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.6)$$

Групповое усреднение по Дароши запишется так

$$I_q(p:u) = \sum_{k=2}^m \left(p_1+p_2+\ldots+p_k\right)^q \left(u_1+u_2+\ldots+u_k\right)^{1-q} \times$$
$$\times f_q\left(\frac{p_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}, \frac{u_k}{u_1+u_2+\ldots+u_k}\right). \qquad (4.4.7)$$

Если использовать систему аксиом Хинчина, то аксиома для совместного распределения статистически зависимых объектов принимает вид [101]

$$I_q\left(p_{11},\ldots,p_{mn}:u_{11},\ldots,u_{mn}\right) = I_q\left(p_1,\ldots,p_m:u_1,\ldots,u_m\right) +$$
$$+\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} I_i\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\ldots,\frac{p_{im}}{p_i}:\frac{u_{i1}}{u_i},\ldots,\frac{u_{im}}{u_i}\right), \qquad (4.4.8)$$

где p_{ij} и u_{ij} есть нормированные распределения с

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m \sum_j^n u_{ij} = 1, \; p_i = \sum_j^n p_{ij}, \; u_i = \sum_j^n u_{ij}. \qquad (4.4.9)$$

В (4.4.7) используется взвешенное ненормированное среднее

$$\mathbf{E}_q(T) = \frac{\sum_i^m T_i p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i} \qquad (4.4.10)$$

с весом $p_i^q u_i^{1-q}$ и нормировками $\sum_i^m p_i = \sum_i^m u_i = 1$.

Такая система аксиом дает функционал [116]:

$$I_q(p:u) = \lambda^{-1}(q)\left(1 - \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \tag{4.4.11}$$

где $\lambda(q)$ есть нормировочный множитель. При выполнении нормированности (4.4.2) из (4.4.11) вытекает значение $\lambda(q) = \left(1 - 2^{q-1}\right)$. В пределе $q \to 1$ информация различия Ратье–Каннаппана совпадает с информацией различия Кульбака–Лейблера.

На рис.4.2 приведены зависимости информации различия Ратье–Каннаппана $I_q(p:u)$: а) от распределения при значениях $m = 2$, $p_1 = p$, $u_1 = 1/3$ и $q = -1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 2$ и б) от числа q при $m = 2$, $p_1 = 1/4$ и $u_1 = 1/3$.

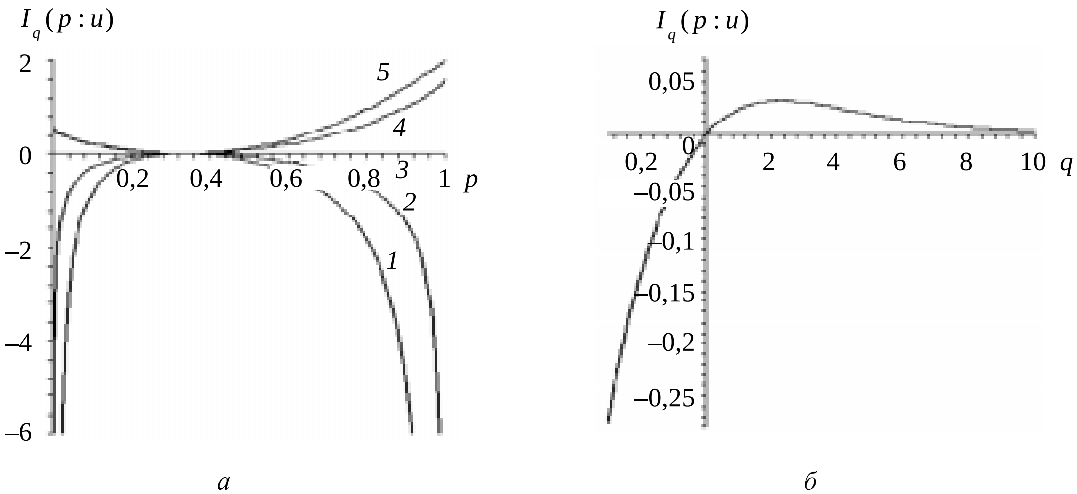


Рис. 4.2. Зависимости информации различия Ратье–Каннаппана:
а – от распределения: *1* – (q = –1), *2* – (q = –1/2), *3* – (q = 0),
4 – (q = 1), *5* – (q = 2) и *б* от числа q

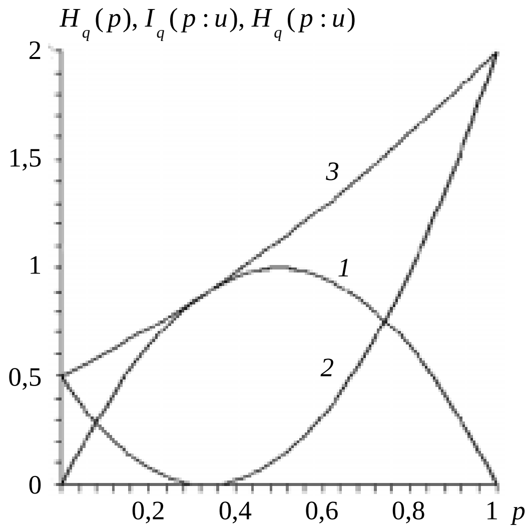
Введем меру статистической неточности известной формулой (1.8.58) взаимосвязи с энтропией и информацией различия

$$H_q(p:u) = H_q(p) + I_q(p:u) =$$
$$= \left(1 - 2^{q-1}\right)^{-1}\left[\sum_i^m p_i^q - \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right] + \left(1 - \sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.4.12}$$

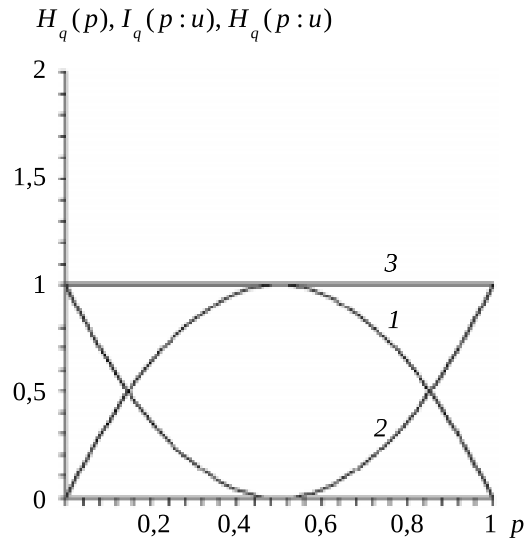
При $q = 1$ из (4.4.12) вытекает мера неточности Керриджа:

$$H\left(p:u\right)=\lim_{q\to 1}H_q\left(p:u\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i\ . \qquad (4.4.13)$$

На рис.4.3 приведены зависимости энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q\left(p\right)$, информации различия Ратье–Каннаппана $I_q\left(p:u\right)$ и меры неточности $H_q\left(p:u\right)$ в виде (4.4.12) от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.



а



б

Рис.4.3. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от распределения: *1* – энтропия $H_q\left(p\right)$, *2* – информация различия Ратье–Каннаппана $I_q\left(p:u\right)$, *3* – мера неточности $H_q\left(p:u\right)$

Выполнение условий нормированности для энтропии Харвда–Чарват–Дароши и информации различия Ратье–Каннаппана дает одинаковый характер зависимостей функционалов от распределения рассматриваемой модели с моделями Шеннона–Винера и Реньи. Однако в этой модели, согласно (4.4.12), мера неточности не является средним значением от случайной энтропии $h_q\left(u_i\right)$.

Рассмотрим другую модель, когда мера неточности записывается в виде взвешенного ненормированного среднего

$$H_q\left(p:u\right)=\sum_i^m h_q\left(u_i\right)p_i^q\ ,\ h_q\left(u_i\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-u_i^{1-q}\right). \qquad (4.4.14)$$

Тогда для информации различия получим выражение:

$$I_q(p:u) = H_q(p:u) - H_q(u) = \sum_i^m I_q(p_i:u_i)\, p_i^q =$$

$$= \left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \qquad (4.4.15)$$

отличающееся от функционала (4.4.6). При $q \to 1$ имеем предел, который равняется информации различия Кульбака–Лейблера. Случайная информация различия есть разность между случайными энтропиями

$$I_q(p_i:u_i) = -\left[h_q(p_i) - h_q(u_i)\right], \qquad (4.4.16)$$

что согласуется с представлениями статистической модели Шеннона–Винера. В данной модели не выполняется аксиома 3 системы Ратье–Каннаппана. Для информации различия справедливо равенство

$$I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2^{q-1}. \qquad (4.4.17)$$

Поэтому функционал (4.4.15) назовем ненормированной информацией различия.

Статистический вывод двух информаций различия состоит в использовании неравенства Гельдера для полунорм [23]

$$N_q(T_1T_2) \le N_q(T_1)\, N_{q'}(T_2), \qquad (4.4.18)$$

где сопряженные показатели q и q' удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r}. \qquad (4.4.19)$$

Величины T_1 и T_2 равняются

$$T_{1i} = p_i,\ T_{2i} = \left\{1 - \lambda_1^{-1}(q/r)\left[\lambda_2(q/r)\, h_{q/r}(u_i) - I_q(p_i:u_i)\right]\right\}^{-1}, \qquad (4.4.20)$$

где случайная энтропия

$$h_{q/r}(u_i) = \left(2^{1-q/r}-1\right)^{-1}\left(1 - p_i^{1-q/r}\right), \qquad (4.4.21)$$

а коэффициенты $\lambda_1(q/r)$, $\lambda_2(q/r)$ определяются ниже.

Минимальное состояние в (4.4.18) достигается при выполнении условия:

$$T_{1i}^{q} = bT_{2i}^{q'}, \tag{4.4.22}$$

где положим $b = 1$. Тогда из (4.4.22) имеем соотношение

$$p_i^{1-q/r} = 1 - \lambda_1^{-1}(q/r)\left[\lambda_2(q/r)h_{q/r}(u_i) - I_q(p_i : u_i)\right], \tag{4.4.23}$$

из которого вытекает значение случайной информации различия

$$I_{q/r}(p_i : u_i) = -\left[\lambda_1(q/r)\left(1 - p_i^{1-q/r}\right) - \lambda_2(q/r)h_{q/r}(u_i)\right]. \tag{4.4.24}$$

Рассмотрим два случая. В первом случае принимаем $\lambda_1(q/r) = \left(1 - 2^{q/r-1}\right)^{-1}$, $\lambda_2(q/r) = 2^{q/r-1}$ и из (4.4.24) имеем

$$I_{q/r}(p_i : u_i) = -2^{1-q}\left[h_q(p_i) - h_q(u_i)\right]. \tag{4.4.25}$$

Усредняя случайную информацию различия (4.4.25), получим функционал

$$\begin{aligned} I_{q/r}(p : u) &= \sum_i^m I_{q/r}(p_i : u_i)\, p_i^{q/r} = \\ &= \left(1 - 2^{q-1}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^{q/r} u_i^{1-q/r}\right), \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

который при $r = 1$ равняется информации различия Ратье–Каннаппана.

Во втором случае случайная информация различия равняется разности случайных энтропий. Из (4.4.24) следуют значения коэффициентов $\lambda_1(q/r) = \left(2^{1-q/r} - 1\right)^{-1}$, $\lambda_2(q/r) = 1$. Находим взвешенное ненормированное среднее

$$\begin{aligned} I_{q/r}(p : u) &= \sum_i^m I_{q/r}(p_i : u_i)\, p_i^{q/r} = \\ &= \left(2^{1-q/r} - 1\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^{q/r} u_i^{1-q/r}\right), \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

которое при $r = 1$ совпадает с информацией различия (4.4.15), используемой в обобщенной теории информации [120, 121].

Рассмотрим основные свойства ненормированной различающей информации (4.4.15).

1. Выпуклость. Информация различия есть вещественный, выпуклый и положительный (отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q>0$ $(q<0)$.

Справедливы следующие неравенства

$$I_q(p:u)\geq 0 \quad (q>0), \tag{4.4.28}$$

$$I_q(p:u)\leq 0 \quad (q<0), \tag{4.4.29}$$

$$I_q\left[(a_1p_1+a_2p_2):u\right]\leq a_1I_q(p_1:u)+a_2I_q(p_2:u), \tag{4.4.30}$$

где $a_1+a_2=1$ и $a_1>0$, $a_2>0$. При $p=u$ имеем равенство $I_q(p:p)=0$.

На рис.4.4 приведены зависимости энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q(p)$ и ненормированной информации различия $I_q(p:u)$ от числа q при значениях $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.

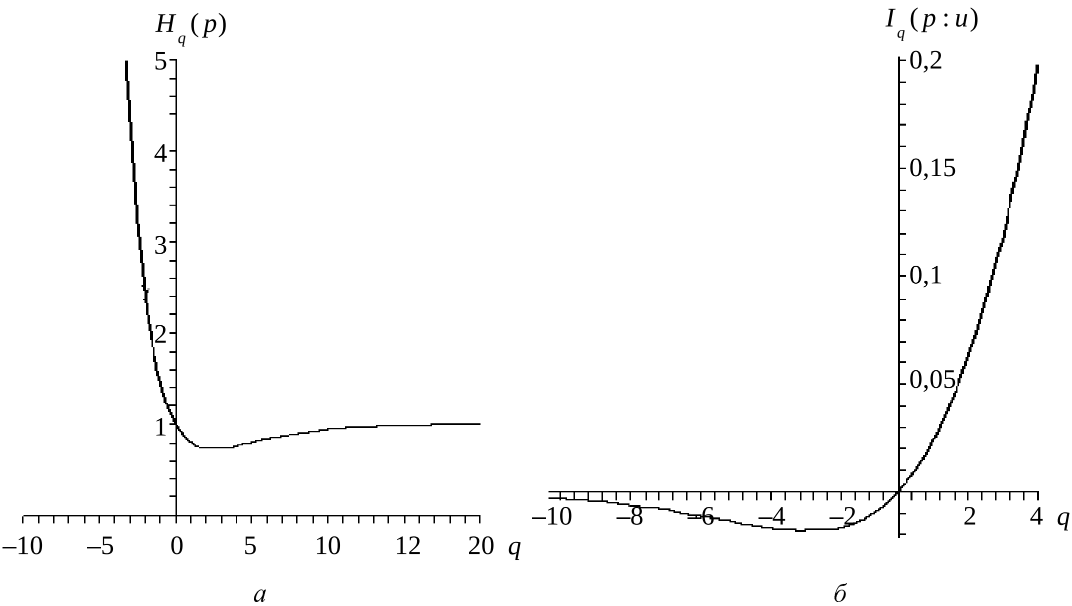


Рис. 4.4. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от числа q:
$а$ – $H_q(p)$, $б$ – $I_q(p:u)$

На рис.4.5 даются зависимости ненормированной информации различия от распределения при значениях $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$ и $q=-1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 2$.

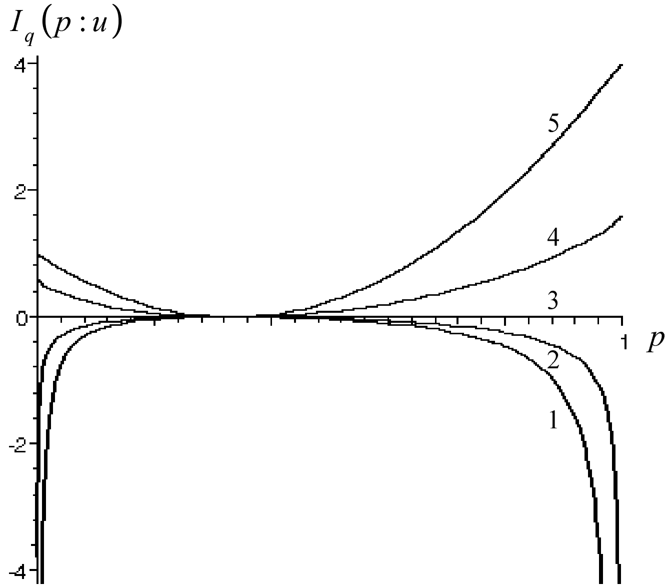


Рис. 4.5. Зависимость ненормированной
информации различия от распределения:
1 – (q = –1), *2* – (q = –1/2), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 2)

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Информации различия определяются выражениями

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}\right), \tag{4.4.31}$$

$$I_q\left(p_1:u_1\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \tag{4.4.32}$$

$$I_q\left(p_2:u_2\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_j^n p_j^q u_j^{1-q}\right), \tag{4.4.33}$$

для которых имеем свойство неаддитивности

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_2:u_2\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)I_q\left(p_1:u_1\right)I_q\left(p_2:u_2\right)\ , \tag{4.4.34}$$

где параметр q характеризует степень неаддитивности информаций различия. При $q=1$ из (4.4.34) следует аддитивность для информаций различия Кульбака–Лейблера.

В случае $m \geq 2$ имеем равенство

$$I_q\left(p_{12\ldots m}:u_{12\ldots m}\right)=\sum_{i=1}^{m} I_q\left(p_i:u_i\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)\sum_{i=1}^{m-1} I_q\left(p_i:u_i\right)I_q\left(p_m:u_m\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)^2\sum_{i=1}^{m-1} I_q\left(p_i:u_i\right)I_q\left(p_{m-1}:u_{m-1}\right)I_q\left(p_m:u_m\right)+$$
$$+\ldots+\left(1-2^{1-q}\right)^{m-1} I_q\left(p_1:u_1\right)I_q\left(p_2:u_2\right)\ldots I_q\left(p_m:u_m\right)\ . \qquad (4.4.35)$$

3. Равенство для зависимых объектов. В случае зависимых объектов для распределений имеем соотношения

$$p_{ij}=p_i p_{j|i}\,,\ u_{ij}=u_i u_{j|i}\,, \qquad (4.4.36)$$

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}=\sum_i^m\sum_j^n u_{ij}=1\,,\ \sum_i^m p_i=\sum_i^m u_i=1 \qquad (4.4.37)$$

и соответствующие случайные энтропии и информации различия

$$h_q\left(p_{ij}\right)=h_q\left(p_i\right)+h_q\left(p_{j|i}\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)h_q\left(p_{j|i}\right), \qquad (4.4.38)$$

$$h_q\left(u_{ij}\right)=h_q\left(u_i\right)+h_q\left(u_{j|i}\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(u_i\right)h_q\left(u_{j|i}\right), \qquad (4.4.39)$$

$$I_q\left(p_{ij}:u_{ij}\right)=-\left[h_q\left(p_{ij}\right)-h_q\left(u_{ij}\right)\right]\ . \qquad (4.4.40)$$

Информация различия дается равенством

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right), \qquad (4.4.41)$$

где второе слагаемое

$$I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right)=\sum_i^m I_{qi}\left(p_{2|1}:u_{2|1}\right)p_i^q u_i^{1-q} \qquad (4.4.42)$$

есть взвешенное ненормированное среднее (4.4.10) для условной информации различия:

$$I_{qi}\left(p_{2|1}:u_{2|1}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_{j}^{n}p_{j|i}^{q}u_{j|i}^{1-q}\right). \qquad (4.4.43)$$

При $p_{2|1}=p_2$ и $u_{2|1}=u_2$ из (4.4.41) следует свойство неаддитивности (4.4.34).

Соотношение (4.4.41) представляется также в виде

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_2:u_2\right)+I_q\left(p_{1|2}\left|u_{1|2}\right.\right), \qquad (4.4.44)$$

где

$$I_q\left(p_{1|2}\left|u_{1|2}\right.\right)=\sum_{j}^{n}I_{qj}\left(p_{1|2}:u_{1|2}\right)p_j^q u_j^{1-q}, \qquad (4.4.45)$$

$$I_{qi}\left(p_{1|2}:u_{1|2}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m}p_{i|j}^{q}u_{i|j}^{1-q}\right). \qquad (4.4.46)$$

В итоге справедливо следующее равенство

$$I_q\left(p_1:u_1\right)-I_q\left(p_2:u_2\right)=I_q\left(p_{1|2}\left|u_{1|2}\right.\right)-I_q\left(p_{2|1}\left|u_{2|1}\right.\right). \qquad (4.4.47)$$

Для зависимых объектов с распределениями

$$p_{12}=p_1p_{2|1},\; u_{12}=u_1u_{2|1} \qquad (4.4.48)$$

получим меру информации

$$I_q\left(p_{12}:p_{12}\right)=-H_q\left(p_{12}\right)+$$

$$+\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\left[h_q\left(p_i\right)+h_q\left(p_j\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)h_q\left(p_j\right)\right]p_{ij}^{q}=$$

$$=H_q\left(p_2\right)-\sum_{i}^{m}H_{qi}\left(p_{2|1}\right)p_i^q, \qquad (4.4.49)$$

где

$$H_{qi}\left(p_{2|1}\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{j}^{n}p_{j|i}^{q}\right). \qquad (4.4.50)$$

Выражение (4.4.49) было определено феноменологическим путем в работах [79, 90] и использовалось в теории передачи сигнала по каналам связи.

4. Флуктуация. Рассмотрим флуктуацию случайной информации различия

$$\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]=I_q\left(p_i:u_i\right)-I_q\left(p:u\right)p_i^{1-q} \qquad (4.4.51)$$

и после преобразований получим равенство

$$\left[u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\;\left[1-\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)\right]\;=$$
$$=\left\{u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\right\}, \qquad (4.4.52)$$

из которого вытекает искомое соотношение для среднего значения

$$\left[1-\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)\right]^{1/(1-q)}=$$
$$=\sum_i^m\left\{u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\right\}^{1/(1-q)}. \qquad (4.4.53)$$

При $q=1$ из (4.4.53) получим известное выражение информации различия Кульбака–Лейблера

$$I\left(p:u\right)=\log_2\sum_i^m u_i 2^{\Delta I\left(p_i:u_i\right)}. \qquad (4.4.54)$$

Выразим информацию различия через флуктуацию случайной энтропии $\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]$ и энтропию Хаврда–Чарват–Дароши в общем виде. Для чего перепишем случайную информацию различия следующим образом

$$I_q\left(p_i:u_i\right)=-\left[h_q\left(p_i\right)-h_q\left(u_i\right)\right]\;=$$
$$=-\left[h_q\left(p_i\right)-H_q\left(u\right)u_i^{1-q}\right]+\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]. \qquad (4.4.55)$$

Усредняя (4.4.55), получим выражение

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{-\left[H_q\left(p\right)-H_q\left(u\right)\right]+\sum_i^m\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]p_i^q}{1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(u\right)}, \qquad (4.4.56)$$

которое отличается от соответствующей формулы (1.8.49) статистической модели Шеннона–Винера дополнительным множителем $\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(u\right)\right]$, зависящим от энтропии Хаврда–Чарват–Дароши для распределения u.

Наконец, находим значение флуктуации случайной информации различия

$$\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]=-\left\{\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]-\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]\right\} +$$

$$+\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)H_q\left(u\right)-\sum_i^m\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]p_i^q \ , \qquad (4.4.57)$$

где в отличие от значения (1.8.47) имеем дополнительное слагаемое в виде произведения информации различия Ратье–Каннаппана и энтропии Хаврда–Чарват–Дароши.

Информация различия, записанная в общем виде (4.4.56), использовалась автором для физических приложений [23].

5. Информация различия с $u_i=1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i=1/m$ имеет вид

$$I_q\left(p:u\right)=\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)=$$

$$=-m^{q-1}\left\{H_q\left(p\right)-\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right)\right\} \ . \qquad (4.4.58)$$

Согласно неравенствам (4.4.28) и (4.4.29) из (4.4.58) вытекает

$$H_q\left(p\right)<\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right) \text{ при } q>0,$$

$$H_q\left(p\right)>\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right) \text{ при } q<0. \qquad (4.4.59)$$

Таким образом, энтропия Хаврда–Чарват–Дароши меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $\left(q<0\right)$.

6. Неравенства. Информация различия удовлетворяет неравенствам

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)\le I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_2:u_2\right), \qquad (4.4.60)$$

$$I_q\left(p:u\right)\ge I\left(p:u\right),\ \left(q>0\right), \qquad (4.4.61)$$

$$I_q\left(p:u\right)\le I\left(p:u\right),\ \left(q<0\right), \qquad (4.4.62)$$

$$I_q\left[p\left(w\right):u\left(w\right)\right]\le I_q\left(p:u\right), \qquad (4.4.63)$$

$$p_i\left(w\right)=\sum_k^n p_k w_{ki}\ ,\ u_i\left(w\right)=\sum_k^n u_k w_{ki}\ ,\ \sum_i^m w_{ki}=1. \qquad (4.4.64)$$

Подробные сведения о неравенствах приводятся в обзорах [120, 121].

7. Негэнтропийный принцип. Пусть среднее значение флуктуации случайной энтропии $h(u_i)$ для распределения p_i удовлетворяет равенству

$$\mathbf{E}_q\left\{\Delta_q\left[h_q(u)\right]\right\} = \sum_i^m \left[h_q(u_i) - H_q(u)\, p^{1-q}\right] p_i^q =$$

$$= \sum_i^m h_q(u_i)\, p_i^q - \sum_i^m h_q(u_i)\, u_i^q = 0 \ , \qquad (4.4.65)$$

что приводит, согласно (4.4.56), к выражению информации различия

$$I_q(p:u) = -\frac{\left[H_q(p) - H_q(u)\right]}{1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)} . \qquad (4.4.66)$$

Из (4.4.66) вытекает соотношение

$$H_q(p) = H_q(u) - I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right] \ , \qquad (4.4.67)$$

где информация различия с точностью до множителя представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и поэтому называется негэнтропией. Соотношение (4.4.67) представляется также в следующем виде

$$\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(p)\right] =$$

$$= \left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right]\ \left[1-\left(1-2^{1-q}\right)I_q(p:u)\right] \ . \qquad (4.4.68)$$

В общем случае выполняется негэнтропийный принцип

$$I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right] + \left[H_q(p) - H_q(u)\right] > 0,\ q > 0,$$

$$I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right] + \left[H_q(p) - H_q(u)\right] < 0,\ q < 0. \qquad (4.4.69)$$

Знак неравенства соответствует необратимым процессам, происходящим в случайном объекте.

8. Расхождение. Сумма информаций различия $I_q(p:u)$ и $I_q(u:p)$ определяет выражение расхождения [64, 102]

$$J_q(p:u) = I_q(p:u) + I_q(u:p) =$$

$$= 2\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\left(p_i^q u_i^{1-q}+u_i^q p_i^{1-q}\right)\right], \qquad (4.4.70)$$

которое симметрично при замене распределения p на u. Функционал (4.4.70) является выпуклым и неаддитивным для независимых объектов.

9. Мера неточности. Мера статистической неточности определяется известной формулой (1.8.58) при аддитивности мер

$$H_q(p:u) = H_q(p) + I_q(p:u) =$$
$$= \sum_{i}^{m} h_q(u_i)\, p_i^q = \left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[\sum_{i}^{m} p_i^q - \sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.71)$$

В пределе $q \to 1$ из (4.4.71) вытекает мера неточности Керриджа

$$H(p:u) = \lim_{q\to 1} H_q(p:u) = -\sum_{i}^{m}\left(\log_2 u_i\right) p_i. \qquad (4.4.72)$$

Следующие выражения для меры неточности

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m} u_i^{q-1} p_i\right), \qquad (4.4.73)$$

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m} u_i^{(q-1)/q} p_i\right), \qquad (4.4.74)$$

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_{i}^{m} p_i^q}{\sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}}\right) \qquad (4.4.75)$$

и другие, имеющие также предельное значение (4.4.72), приводятся в обзорах [120, 121].

Точное выражение меры статистической неточности дается формулой для неаддитивных мер

$$H_q(p:u) = H_q(p) + I_q(p:u) - \left(1-2^{1-q}\right) H_q(p)\, I_q(p:u) =$$
$$= \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-2\sum_{i}^{m} p_i^q + \sum_{i}^{m} p_i^q \sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.76)$$

На рис.4.6 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$, ненормированной информации различия $I_q(p:u)$ и меры неточности $H_q(p:u)$ в виде (4.4.61) (кривая *3*) и в виде (4.4.76) (кривая *4*) от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

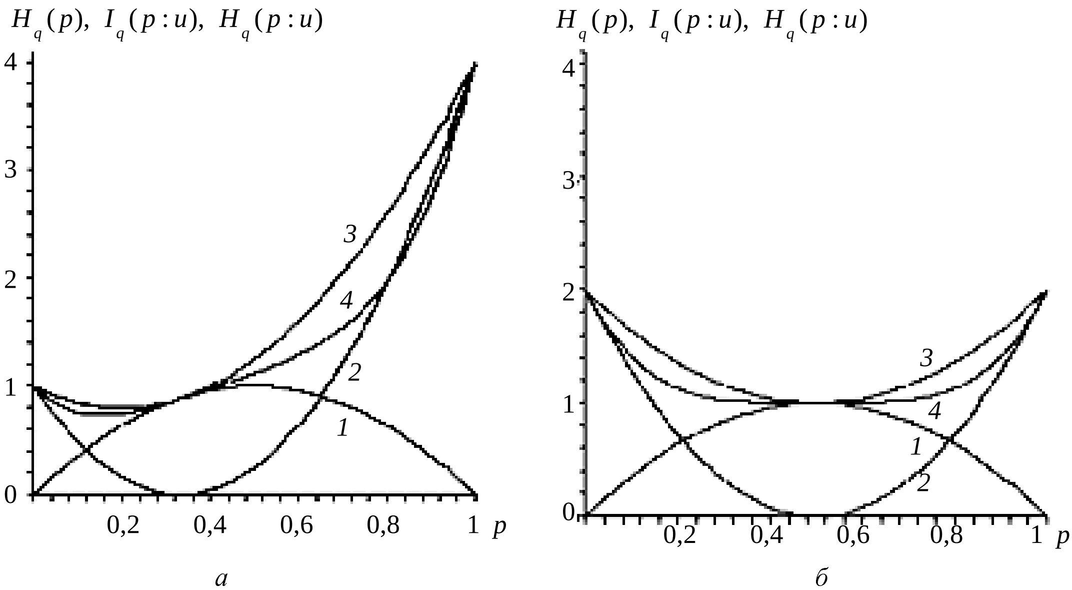


Рис.4.6. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от распределения:
1 – энтропия $H_q(p)$, *2* – ненормированная информация различия $I_q(p:u)$, *3* и *4* – мера неточности $H_q(p:u)$

В отличие от моделей Шеннона–Винера, Реньи и Ратье–Каннаппана мера неточности при $u_1=1/2$ не представляется в виде прямой линии, что связано с ненормированностью рассматриваемой информации различия.

10. Информационный радиус. Используя неравенство (4.3.15) при $a_1=a_2=1/2$, имеем выражения информационного радиуса [63]

$$R_q(p:u)=H_q\left(\frac{p+u}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[H_q(p)+H_q(u)\right]=$$

$$=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\sum_i^m\left[\frac{p_i^q+u_i^q}{2}-\left(\frac{p_i+u_i}{2}\right)^q\right]\ . \qquad (4.4.77)$$

При $q \to 1$ из (4.4.77) следует выражение (1.8.60) статистической модели Шеннона–Винера. Известно другое значение информационного радиуса [120, 121]

$$R_q(p:u) = \frac{1}{2}\left[I_q\left(p:\frac{p+u}{2}\right) + I_q\left(u:\frac{p+u}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\sum_i^m\left[\frac{p_i^q+u_i^q}{2}\left(\frac{p_i+u_i}{2}\right)^{1-q}-1\right], \qquad (4.4.78)$$

которое является обобщением функционала (1.8.63).

11. Информационное расстояние. Пусть $\delta(p,u) = \frac{1}{2}I_q^2(p:u)$ есть несимметричный аналог расстояния от распределения p до u. Для такого информационного расстояния не выполняется неравенство треугольника, а имеется несимметричный аналог теоремы Пифагора

$$I_q(p:u) = I_q(p:w) + I_q(w:u), \qquad (4.4.79)$$

если выполняется равенство

$$\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} + \sum_i^m p_i^q w_i^{1-q} = \sum_i^m w_i^q u_i^{1-q}. \qquad (4.4.80)$$

12. Нормированность и размерность. Функционал (4.4.11) с $\lambda = 1-q$ является физической безразмерной информацией различия

$$I_q^{phys}(p:u) = \frac{1}{1-q}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right). \qquad (4.4.81)$$

Информацию различия Ратье–Каннаппана в виде физической размерной информации различия $I_q(p:u) = kI_q^{phys}(p:u)$ использовал автор при исследовании процессов самоорганизации и необратимости в неэкстенсивных системах [20 – 23].

Рассматриваемая информация различия не удовлетворяет условию нормированности на единицу и равняется отношению физической безразмерной информации различия на значение физической энтропии $H_q^{phys}(u)$ при равновероятном состоянии с $m = 2$. Выполняется следующее равенство:

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \qquad (4.4.82)$$

где

$$H_q^{phys}(u)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_i^2 u_i^q\right),\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\left(1-2^{1-q}\right). \qquad (4.4.83)$$

Для информации различия Ратье–Каннаппана имеем

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\left(1-2^{q-1}\right). \qquad (4.4.84)$$

Таким образом, отличие двух функционалов (4.4.6) и (4.4.15) состоит в разных значениях нормировочных множителей у физической безразмерной информации. В статистических моделях Шеннона–Винера и Реньи множитель имеет одинаковое значение, равное $\ln 2$.

13. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i(\theta)$ и $u_i(\theta)=p_i(\theta+\delta\theta)$ имеет вид

$$I_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\frac{1}{2^{1-q}-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right]=$$

$$=\frac{q(1-q)}{2\ln 2\left(2^{1-q}-1\right)}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2=\frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 h_q\left[p_i(\theta)\right]}{\partial\theta^2}\,p_i^q(\theta), \qquad (4.4.85)$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial \ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \qquad (4.4.86)$$

представляет собой меру Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

14. Двух и k-параметрическая информация различия. Рассмотрим взвешенное ненормированное усреднение с весом $p_i^q u_i^{-r}$. Тогда, учитывая выражение:

$$\mathbf{E}_q(T)=\frac{\sum_i^m T_i p_i^q u_i^{-r}}{\sum_i^m p_i} \tag{4.4.87}$$

и, используя аксиомы раздела 4.4, получим двухпараметрическую информацию различия

$$I_{q,D_q}(p:u)=\lambda\left(q,D_q\right)\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \tag{4.4.88}$$

где $\lambda\left(q,D_q\right)$ – нормировочный множитель и

$$D_q=\frac{\tau}{q-1}. \tag{4.4.89}$$

Физическая безразмерная информация различия имеет вид [21]

$$I_{q,D_q}^{phys}(p:u)=\frac{1}{q-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right]. \tag{4.4.90}$$

Для нахождения $\lambda\left(q,D_q\right)$ запишем равенства

$$I_{q,D_q}(p:u)=\frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}(u)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_i^2 u_i^q\right), \tag{4.4.91}$$

$$I_{q,D_q}(p:u)=\frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{I_{q,D_q}^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}. \tag{4.4.92}$$

Согласно (4.4.90) – (4.4.92) получим два функционала

$$I_{q,D_q}(p:u)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \tag{4.4.93}$$

$$I_{q,D_q}(p:u)=\left(1-2^{D_q(q-1)}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \tag{4.4.94}$$

которые при $D_q=1$ совпадают, соответственно, с функционалами (4.4.15) и (4.4.6).

Отметим, что полученные информации различия обладают всеми приведенными свойствами, для них можно ввести значения информационного радиуса, расстояния, меры расхождения, неточности и т.п.

Определим k-параметрическую физическую безразмерную информацию различия

$$I_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}\left(p_1 : p_2 : \ldots : p_k\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}\left(1-\sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \ldots p_{ki}^{\alpha_k}\right), \quad \sum_i^m p_{ri} = 1, \qquad (4.4.95)$$

которая является выпуклым, неаддитивным функционалом для независимых объектов.

При $r = 1,\ 2$ положим $p_{1i} = p_i$ и $p_{2i} = u_i$, а также $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ с $\alpha_1 = q$ и $\alpha_2 = 1 - q$. В итоге из (4.4.95) вытекает следующая информация различия [68, 91, 125]

$$I_{q,1-q}\left(p : u\right) = \frac{1}{q\left(1-q\right)}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right) \qquad (4.4.96)$$

с предельными значениями при $q = 0$ и $q = 1$

$$I_{0,1}\left(p : u\right) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{u_i}{p_i}\right) u_i\,, \qquad (4.4.97)$$

$$I_{1,0}\left(p : u\right) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i\,. \qquad (4.4.98)$$

15. *f*-информация различия. Информация различия представляет собой f - информации различия

$$I_f\left(p : u\right) = \sum_i^m f\left(\frac{u_i}{p_i}\right) p_i\,, \quad f = \frac{1-\left(\frac{u_i}{p_i}\right)^{1-q}}{\left(2^{1-q}-1\right)}, \qquad (4.4.99)$$

$$I_f\left(p : u\right) = \sum_i^m f\left(p_i, u_i\right), \quad f = \frac{\left(p_i - p_i^q u_i^{1-q}\right)}{\left(2^{1-q}-1\right)}, \qquad (4.4.100)$$

$$I_f(p:u)=f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right],\ f=\frac{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}}{\left(2^{1-q}-1\right)}. \tag{4.4.101}$$

Функция $f(p,u)$ в (4.4.100) есть информационная функция, а выражение (4.4.101) – функция от полунормы распределения.

В случае трех распределений функционалы (4.4.99), (4.4.101) примут вид

$$I_f(p:w:u)=\sum_i^m f\left(\frac{w_i}{u_i}\right)p_i, \tag{4.4.102}$$

$$I_f(p:w:u)=f\left[N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)\right], \tag{4.4.103}$$

где полунорма распределения

$$N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)=\sum_i^m w_i^{q-1}u_i^{1-q}p_i\ . \tag{4.4.104}$$

Для информации различия Ратье–Каннаппана коэффициент $\left(2^{1-q}-1\right)$ заменяется на $\left(1-2^{q-1}\right)$. Если функциональная зависимость в (4.4.103) имеет вид

$$f=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}, \tag{4.4.105}$$

то получим выражение

$$I_f(p:w:u)=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m w_i^{q-1}u_i^{1-q}p_i\right), \tag{4.4.106}$$

рассматриваемое в работе [82].

16. Квантовые информационные меры. Для квазиклассической статистики рассматривается взвешенное среднее по весам υ_i

$$H_q(p)=\frac{1}{\left(1-2^{1-q}\right)}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^{q-1}\upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}\right), \tag{4.4.107}$$

которое при $q\to 1$ совпадает с энтропией (2.11.14).

Квантовые информационные меры для статистики Максвелла–Больцмана имеют вид [97]

$$H_q\left(p:u\right)=\frac{1}{\left(1-2^{-q}\right)}\left(\sum_{i}^{m}p_i\upsilon_i-\sum_{i}^{m}p_i^q u_i^{1-q}\upsilon_i\right), \tag{4.4.108}$$

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{1}{\left(1-2^{q-1}\right)}\left(\sum_{i}^{m}p_i\upsilon_i-\sum_{i}^{m}p_i^q u_i^{1-q}\upsilon_i\right). \tag{4.4.109}$$

В пределе $q\to 1$ из (4.4.108) и (4.4.109) вытекает информация различия (2.11.3) и мера неточности [114, 115].

4.5. Тип неаддитивной *q*-энтропии и *q* -информации различия

Пусть случайный объект состоит из двух независимых случайных объектов. Для значений полунорм распределений

$$N=N_{q-1}\left(p_{12}\right),\ N_1=N_{q-1}\left(p_1\right),\ N_2=N_{q-1}\left(p_2\right) \tag{4.5.1}$$

справедливо свойство мультипликативности

$$N=N_1N_2. \tag{4.5.2}$$

Совместное распределение есть $p_{ij}=p_ip_j$, а p_i и p_j относятся к независимым объектам.

Используем свойство неаддитивности для q-энтропии

$$H=H_1+H_2+\left(2^{1-q}-1\right)H_1H_2, \tag{4.5.3}$$

где $H=H\left(N\right)$, $H_1=H\left(N_1\right)$ и $H_2=H\left(N_2\right)$.

После дифференцирования (4.5.2) с использованием (4.5.3) получим уравнение [22]

$$\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H\right]\frac{d\ln N}{dH}=\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_1\right]\frac{d\ln N_1}{dH_1}=$$

$$=\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_2\right]\frac{d\ln N_2}{dH_2}=\lambda, \tag{4.5.4}$$

где λ – произвольная постоянная, зависящая от q.

Интегрируем (4.5.4) и имеем q-энтропию

$$H_q\left(p\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{\left[N_{q-1}\left(p\right)\right]^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}. \tag{4.5.5}$$

Учитывая условие нормированности энтропии $H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ при $m=2$ и $p_1=p_2=1/2$ получим равенство

$$\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{\;2^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}=1, \tag{4.5.6}$$

из которого находим значение постоянной

$$\lambda=\frac{1-2^{1-q}}{1-q}\,. \tag{4.5.7}$$

В итоге из (4.5.5) вытекает энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q\left(p\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{\;1-\left[N_{q-1}\left(p\right)\right]^{q-1}\right\}=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right). \tag{4.5.8}$$

Аналогично, используя полунормы

$$N=N_{q-1}\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right),\; N_1=N_{q-1}\left(\frac{p_1}{u_1}\right),\; N_2=N_{q-1}\left(\frac{p_2}{u_2}\right) \tag{4.5.9}$$

и свойство неаддитивности для q-информации различия

$$I=I_1+I_2+\left(2^{q-1}-1\right)I_1I_2, \tag{4.5.10}$$

получим уравнение

$$\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I\right]\frac{d\ln N}{dI}=\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I_1\right]\frac{d\ln N_1}{dI_1}=$$

$$=\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I_2\right]\frac{d\ln N_2}{dI_2}=\lambda\;\;. \tag{4.5.11}$$

Решением (4.5.11) является q-информация различия

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left\{\;\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}, \tag{4.5.12}$$

которая с учетом условия нормированности $I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ приводит к равенству:

$$\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left\{2^{\left(1-2^{q-1}\right)/\lambda}-1\right\}=1. \qquad (4.5.13)$$

Из (4.5.13) получим

$$\lambda=\frac{1-2^{q-1}}{q-1} \qquad (4.5.14)$$

и в итоге из (4.5.12) вытекает информация различия Ратье–Каннаппана

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}=$$

$$=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right). \qquad (4.5.15)$$

При использовании свойства неаддитивности в виде

$$I=I_1+I_2+\left(1-2^{1-q}\right)I_1I_2 \qquad (4.5.16)$$

и после вычислений находим

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{\left(2^{1-q}-1\right)/\lambda}-1\right\}. \qquad (4.5.17)$$

При значении постоянной

$$\lambda=\frac{2^{1-q}-1}{q-1} \qquad (4.5.18)$$

из (4.5.17) следует ненормированная информация различия

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right). \qquad (4.5.19)$$

При $\sum_{i}^{m} p_i = 1$ функционалы (4.5.15) и (4.5.19) совпадают с выражениями (4.4.6) и (4.4.15).

4.6. Экстремум полунормы распределения

Рассмотрим экстремум полунормы распределения [21]

$$N_{q-1}(p) = \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{1/(q-1)} \qquad (4.6.1)$$

при сохранении нормировки

$$\sum_{i}^{m} p_i = 1. \qquad (4.6.2)$$

Для этого вычислим безусловный экстремум функционала

$$L = \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{1/(q-1)} - \alpha \sum_{i}^{m} p_i, \qquad (4.6.3)$$

где α есть множитель Лагранжа. Используя равенство

$$\delta L = \frac{q}{q-1} \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{(2-q)/(q-1)} \sum_{i}^{m} p_i^{q-1} \delta p_i - \alpha \sum_{i}^{m} \delta p_i = 0, \qquad (4.6.4)$$

получим

$$q\gamma p_i^{q-1} - \alpha = 0, \; \gamma = \frac{1}{q-1} \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{(2-q)/(q-1)}. \qquad (4.6.5)$$

Учитывая условие нормировки (4.6.2), из (4.6.5) вытекает равновероятное распределение $p_i = 1/m$ и экстремальное значение полунормы распределения $N(p) = 1/m$.

Далее рассмотрим вариационный принцип экстремума полунормы распределения при заданности ненормированного среднего значения случайной величины $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$ и нормировки

$$H(p) = \sum_{i}^{m} h_i p_i^q, \; \sum_{i}^{m} p_i = 1. \qquad (4.6.6)$$

Согласно вариационному принципу, определим функционал:

$$L=\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{1/(q-1)}+\tau\sum_i^m h_i p_i^q-\alpha\sum_i^m p_i\ . \qquad (4.6.7)$$

Приравнивая нулю первую вариацию

$$\delta L=\frac{q}{q-1}\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{(2-q)/(q-1)}\sum_i^m p_i^{q-1}\delta p_i+$$

$$+\tau q\sum_i^m h_i p_i^{q-1}\delta p_i-\alpha\sum_i^m \delta p_i=0 \qquad (4.6.8)$$

получим

$$q\left(\gamma-\tau h_i\right)p_i^{q-1}-\alpha=0\,. \qquad (4.6.9)$$

Поскольку τ и α имеют произвольные значения, то $\tau=-\gamma\lambda=-\alpha q^{-1}\lambda$. Тогда из (4.6.9) вытекает распределение

$$p_i=\left(1+\lambda h_i\right)^{1/(1-q)} \qquad (4.6.10)$$

и выражение случайной энтропии

$$h_i=h\left(p_i\right)=-\lambda^{-1}\left(1-p_i^{1-q}\right). \qquad (4.6.11)$$

Усредняя (4.6.11) получим q-энтропию

$$H_q\left(p\right)=\sum_i^m h\left(p_i\right)p_i^q=-\lambda^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q\right), \qquad (4.6.12)$$

которая при выполнении условия нормированности $H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ при $m=2$ и $p_1=p_2=1/2$ приводит к равенству

$$\lambda=\left(1-2^{1-q}\right). \qquad (4.6.13)$$

Подставляя значение коэффициента (4.6.13) в (4.6.12) имеем энтропию Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q\left(p\right)=\left(1-2^{1-q}\right)\left(1-\sum_i^m p_i^q\right). \qquad (4.6.14)$$

Аналогично, находим экстремум полунормы распределения

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{1/(q-1)} \qquad (4.6.15)$$

при дополнительных условиях заданности ненормированного среднего значения величины $I=\{I_1,\ldots,I_m\}$ и сохранения нормировки

$$I_q(p:u)=\sum_i^m I_i p_i^q\,,\ \sum_i^m p_i=1. \qquad (4.6.16)$$

Определим функционал

$$L=\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{1/(q-1)}-\tau\sum_i^m I_i p_i^q-\alpha\sum_i^m p_i \qquad (4.6.17)$$

и приравняем его первую вариацию нулю. Тогда из равенства

$$\delta L=\frac{q}{q-1}\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{(2-q)/(q-1)}\sum_i^m p_i^{q-1}u_i^{1-q}-$$
$$-\tau q\sum_i^m h_i p_i^{q-1}\delta p_i-\alpha\sum_i^m \delta p_i=0 \qquad (4.6.18)$$

получим

$$q\left(\gamma u_i^{1-q}-\tau I_i\right)p_i^{q-1}-\alpha=0\,,\ \gamma=\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{q-1}\right)^{(2-q)/(q-1)}. \qquad (4.6.19)$$

Полагая $\tau=\gamma\lambda=\alpha q^{-1}\lambda$, из (4.6.19) имеем выражение случайной информации различия

$$I_i=I(p_i:u_i)=\lambda^{-1}\left(p_i^{1-q}-u_i^{1-q}\right). \qquad (4.6.20)$$

Среднее ее значение дает функционал

$$I_q(p:u)=\sum_i^m I(p_i:u_i)p_i^q=\lambda^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \qquad (4.6.21)$$

который при выполнении условия нормированности $I_q\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ совпадает с информацией различия Ратье–Каннаппана

$$I_q(p:u)=\left(1-2^{q-1}\right)\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right). \qquad (4.6.22)$$

Если выполняется условие:

$$I\left(p_i : u_i\right) = -\left[h\left(p_i\right) - h\left(u_i\right)\right] \,, \tag{4.6.23}$$

то для λ имеем равенство (4.6.13) и в итоге из (4.6.21) следует ненормированная информация различия

$$I_q\left(p : u\right) = \left(2^{1-q} - 1\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right). \tag{4.6.24}$$

4.7. Вариационный принцип для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши и термодинамические соотношения

Рассмотрим экстремум энтропии Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q\left(p\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right) \tag{4.7.1}$$

при заданном значении произвольной случайной величины $T = \left\{T_1, \ldots, T_m\right\}$ и сохранении нормировки

$$\mathbf{E}_q\left(T\right) = \sum_i^m T_i p_i^q \,, \ \sum_i^m p_i = 1. \tag{4.7.2}$$

Для нахождения вероятного распределения вычислим безусловный экстремум функционала

$$L = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right) + \tau \sum_i^m T_i p_i^q - \alpha \sum_i^m p_i \,, \tag{4.7.3}$$

где τ и α есть множители Лагранжа. Из условия

$$\delta L = -q\left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1} \sum_i^m p_i^{q-1} \delta p_i + $$

$$+ \tau q \sum_i^m T_i p_i^{q-1} \delta p_i - \alpha \sum_i^m \delta p_i = 0 \tag{4.7.4}$$

следует равенство

$$q\left(2^{1-q} - 1\right) p_i^{q-1}\left[1 + \left(1 - q\right)\lambda \tau T_i\right] - \alpha = 0 \,, \ \lambda = \frac{2^{1-q} - 1}{1 - q}. \tag{4.7.5}$$

Из (4.7.5) получим нормированное распределение с параметрами q и τ

$$p_i = \left[1 + \left(1 - q\right)\lambda \tau T_i\right]^{1/(1-q)} \Gamma_q^{-1}\left(\tau\right), \tag{4.7.6}$$

где функция

$$\Gamma_q(\tau) = \sum_i^m \left[1 + (1-q)\lambda\tau T_i\right]^{1/(1-q)}. \tag{4.7.7}$$

При условии $1 + (1-q)\lambda\tau T_i > 0$ и $q = 1$ из (4.7.6) и (4.7.7) вытекает распределение (1.9.9) статистической модели Шеннона–Винера

$$p_i = 2^{\tau T_i} \Gamma^{-1}(\tau),\ \Gamma(\tau) = \sum_i^m 2^{\tau T_i}. \tag{4.7.8}$$

Для экстремального значения энтропии имеем выражение

$$\begin{aligned} H_q(p) &= \frac{1}{\lambda(q-1)}\left[1 - \sum_i^m \frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)\, p_i}{1 + (1-q)\lambda\tau T_i}\right] = \\ &= -\tau\left\{\frac{\left[1 - \Gamma_q^{1-q}(\tau)\right]}{\lambda\tau(1-q)} + \sum_i^m \frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)\, p_i T_i}{1 + (1-q)\lambda\tau T_i}\right\} = \\ &= -\tau\left\{\frac{\left[1 - \Gamma_q^{1-q}(\tau)\right]}{\lambda\tau(1-q)} + \sum_i^m T_i p_i^q\right\} = -\lambda\tau\left[\mathbf{E}_q(T) - F_q\right], \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

где

$$F_q = \frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau) - 1}{\lambda\tau(1-q)}. \tag{4.7.10}$$

Используя (4.7.9) и (4.7.10), перепишем распределение (4.7.7) в виде

$$p_i = \left[\frac{1 + (1-q)\lambda\tau T_i}{1 + (1-q)\lambda\tau F_q}\right]^{1/(1-q)} \tag{4.7.11}$$

и получим дифференциальное соотношение

$$dH_q(p) = -\lambda\tau d\mathbf{E}(T). \tag{4.7.12}$$

Затем находим вторую вариацию функционала (4.7.3)

$$\delta^2 L = -q(q-1)\left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1} \sum_i^m \left[\left(1 + (1-q)\lambda\tau T_i\right) p_i^{q-2}\right](\delta p)^2. \tag{4.7.13}$$

Из (4.7.13) следует, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $q>0$ $\left(\delta^2 L<0\right)$ и $q<0$ $\left(\delta^2 L>0\right)$. Таким образом, распределение (4.7.11) максимизирует и минимизирует энтропию Хаврда–Чарват–Дароши.

Используем значение случайной энтропии и получим формулу

$$-\frac{\partial h_q\left(p_i\right)}{\partial(\lambda\tau)}=\frac{1}{1+(1-q)\lambda\tau F_q}\Delta_q\left(T_i\right) \tag{4.7.14}$$

с флуктуацией случайной величины T, что позволяет использовать ее при вычислении произвольных центральных моментов.

Пусть распределение p_i является произвольным, а u_i имеет вид

$$u_i=\left[\frac{1+(1-q)\lambda\tau_0 T_i}{1+(1-q)\lambda\tau_0 F_{0q}}\right]^{1/(1-q)}. \tag{4.7.15}$$

Для этих распределений ненормированная информация различия имеет значение

$$I_q(p:u)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\sum_i^m\left[1+(1-q)\lambda\tau_0 T_i\right]p_i^q\right]=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\sum_i^m p_i^q-(1-q)\lambda\tau_0\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\mathbf{E}_q(T)\right]. \tag{4.7.16}$$

Запишем разность энтропий

$$H_q(p)-h_q(u)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(\sum_i^m u_i^q-\sum_i^m p_i^q\right)=$$

$$=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{1-(1-q)\lambda\tau_0\left[\mathbf{E}_{0q}(T)-F_{0q}\right]-\sum_i^m p_i^q\right\} \tag{4.7.17}$$

и после вычислений окончательно получим формулу

$$I_q(p:u)=\left[1+(1-q)\lambda\tau_0 F_{0q}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{-\left[H_q(p)-H_q(u)\right]-\lambda\tau\left[\mathbf{E}_q(T)-\mathbf{E}_{0q}(T)\right]\right\}, \qquad (4.7.18)$$

которая при $q=1$ совпадает с информацией различия Кульбака–Лейблера (1.9.24) статистической модели Шеннона–Винера

$$I(p:u)=\lim_{q\to 1} I_q(p:u)=$$

$$=-\left[H_q(p)-H_q(u)\right]-\tau_0\left[\mathbf{E}_q(T)-\mathbf{E}_{0q}(T)\right], \qquad (4.7.19)$$

$$\mathbf{E}_{0q}(T)=\sum_i^m T_i u_i^q.$$

В статистической физике случайными объектами являются частицы. В этом случае положим, что $\beta=-k\tau\lambda$ есть обратная температура, H_i – дискретные значения энергии частицы и $E_q=\mathbf{E}_q(H)$ – средняя энергия частицы. Экстремальное значение физической размерной энтропии

$$H_q(p)=\frac{k}{q-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q\right)=\beta\left(E_q-F_q\right) \qquad (4.7.20)$$

совпадает с соответствующим выражением в статистической модели Больцмана–Гиббса. Равновесное распределение имеет вид

$$p_i=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta H_i}{1-k^{-1}(1-q)\beta F_q}\right]^{1/(1-q)}, \qquad (4.7.21)$$

где F_q – свободная энергия. Формула (4.7.12) соответствует дифференциальному соотношению

$$TdH_q(p)=dE_q \qquad (4.7.22)$$

равновесной статистической термодинамики замкнутых систем [6].

Для открытых неравновесных систем, которые находятся в окружении с температурой T_0, имеем физическую размерную информацию различия в виде

$$I_q(p:p_0)=\frac{k}{1-q}\left(1-\sum_i^m p_i^q p_{0i}^{1-q}\right)=$$

$$= \frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}} \left\{ -\left[H_q(p) - H_q(p_0) \right] + \frac{1}{T_0}\left[E_q - E_{0q} \right] \right\}, \quad (4.7.23)$$

где $\beta_0 = 1/T_0$ и $E_{0q} = \mathbf{E}_{0q}(H)$ для распределения

$$p_{0i} = \left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 H_i}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}} \right]^{1/(1-q)}. \quad (4.7.24)$$

Введем неравновесный потенциал Максвелла-–Гюи [7, 12]

$$\Phi_q = E_q - T_0 H_q(p). \quad (4.7.25)$$

Тогда информация различия

$$I_q(p:p_0) = \frac{\beta_0\left(\Phi_q - \Phi_{0q}\right)}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 \Phi_{0q}} \quad (4.7.26)$$

зависит от двух потенциалов, где $\Phi_{0q} = E_{0q} - T_0 H_q(p_0)$. В полном равновесии их значения совпадают $\Phi_q = \Phi_{0q}$ и $I(p:p_0) = 0$.

Неравновесный потенциал представляется, согласно (4.7.26), в следующем виде

$$\beta\Phi_q = \beta\Phi_{0q} + I_q(p:p_0) + k^{-1}(q-1)\beta\Phi_{0q} I_q(p:p_0), \quad (4.7.27)$$

где явно проявляется неаддитивность рассматриваемых величин.

Дифференцируя (4.7.23) по времени, получим дифференциальное соотношение для открытых систем

$$dI_q(p:p_0) \geq \frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}} \left[-dH_q(p) + \frac{1}{T_0} dE_q \right], \quad (4.7.28)$$

где в отличие от (1.11.12) имеем множитель, зависящий от свободной энергии F_{0q}. Знак неравенства соответствует случаю необратимых процессов в открытой системе.

В заключение отметим, что использование нормированного среднего (3.10.1) в рассматриваемой вариационной задаче приводит к неустранимым трудностям (неопределенность в знаках второй вариации $\delta^2 L$, нелинейный характер зависимости флуктуации случайной энтропии от флуктуации случайной величины и т.п. [21]), что ограничивает термодинамическую интерпретацию полученных результатов.

Глава 5

ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕР ИНФОРМАЦИЙ

Излагается основной метод, использующий групповые свойства мер информаций. Исследуются типы энтропий и информаций различия, которые вытекают из закона композиции элементов группы, учитывающего квадратичную нелинейность. Первые результаты в этом направлении были даны в монографии [21] и статьях [22-24] автора и способствовали развитию групповых методов в обобщенной теории информации. Приводится общая классификация мер информаций, доведенная до естественных границ. Изучаются представления рассматриваемых групп мер. Внесены важные идеи и получены новые глубокие результаты.

5.1. Группы и представления групп

Рассмотрим общие сведения о группах, необходимые для задач обобщенной теории информации.

Пусть имеется непустое множество элементов для независимых статистических объектов. В зависимости от приложений оно представляет совокупность энтропий, информаций различия, полунорм распределений и других величин.

Определение 1. Группой G называется множество элементов группы, если выполняются следующие условия (групповые аксиомы):

1. Определен закон композиции, то есть бинарная алгебраическая операция, которая каждой упорядоченной паре элементов A и B из G единственным образом сопоставляется определенный элемент $C = A \circ B$ из G. В общем случае $A \circ B$ и $B \circ A$ являются различными и операция, называемая произведением элементов, не обладает переместительным, или коммутативным, свойством.

2. Операция ассоциативна, то есть $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$ для произвольных A, B и C из G.

3. В группе G имеется единичный элемент, то есть такой элемент E, что $A \circ E = E \circ A = A$ для произвольного A из G.

4. В группе G имеется обратный элемент, то есть для произвольного A из G существует такой элемент, обозначаемый в виде A^{-1}, что $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$.

Аксиомы 3 и 4 равносильны одной аксиоме $3'$: Для двух произвольных элементов A и B из G всегда существуют такие элементы X и Y, которые называются левым частным и правым частным при делении B на A, что $A \circ X = B$ и $Y \circ A = B$.

Из групповых аксиом следует, что в группе имеется только один единичный элемент, для каждого элемента из G существует только один обратный элемент. Если $C = A \circ B$, то $C^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$ в силу ассоциативности закона композиции в группе. Всегда справедливо $A \circ B \neq A \circ C$ и , если $B \neq C$.

При выполнении коммутативности закона композиции $A \circ B \neq A \circ C$ для произвольных A и B из G имеем абелеву группу

Определение 2. Группы называются изоморфными, если каждому элементу из G взаимно однозначно поставлен в соответствие определенный элемент из $\tilde{\mathrm{G}}$ таким образом, что бинарная операция $C = A \circ B$ из G соответствует бинарной операции $\tilde{C} = \tilde{A} \circ \tilde{B}$ соответствующих элементов из $\tilde{\mathrm{G}}$.

Определение 3. Элемент A' называется сопряженным с элементом A, если справедливо равенство $A' = C^{-1} \circ A \circ C$ для A, A' и C из G.

Из приведенного определения следует, что элемент A также является сопряженным с элементом A'. Элемент, обратный элементу, сопряженному с A, является сопряженным с элементом A^{-1}, так как справедливо равенство $(A')^{-1} = C^{-1} \circ A^{-1} \circ C$. Если $A' = A$ для любого элемента C из G, то A называется самосопряженным элементом.

Определение 4. Элемент $A^{(n)} = A \circ A \circ ... \circ A$, являющийся композицией n элементов, есть n-я степень элемента A. Справедливо $A^{(n)} \circ A^{(m)} = A^{(n+m)}$, $A^{(n)} \circ A^{(-m)} = A^{(n-m)}$, $\left[A^{(n)}\right]^{(m)} = A^{(nm)}$ и $\left[A^{(-n)}\right]^{(-1)} = A^{(n)}$

с $A^{(-m)} = A^{-1} \circ A^{-1} \circ \ldots \circ A^{-1}$. В частности, $A^{(n)} \circ A^{(-n)} = A^{(0)} = E$ и при $n = 1$ имеем $A^{(1)} = A$ и $A^{(-1)} = A^{-1}$

Определение 5. Всякое непустое подмножество M группы G, которое само по себе является группой относительно бинарной операции, называется подгруппой группы G.

Поскольку к M принадлежит единица группы G, то оставшаяся часть группы G не образует группу. Сама группа G является своей подгруппой и содержит единичную подгруппу, состоящую только из элемента E. Эти подгруппы называются несобственными, а остальные подгруппы – собственными.

Определение 6. Всякая группа M конечных квадратных матриц $\mathbf{A}$, с не равным нулю определителем, на которую может быть взаимно однозначно отображена группа G, называется точным представлением группы G. Порядок n матриц из M называется степенью, или размерностью, представления.

Из определения 6 вытекает, что бинарной операции $A \circ B$ из G соответствует обычная операция умножения матриц $\mathbf{A}(A)\mathbf{A}(B) = \mathbf{A}(A \circ B)$ из M.

Наряду с представлением в виде матриц имеют место и другие представления группы G, например в виде функций $\varphi(A)$. Для них выполняется бинарная операция как обычная операция умножения $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(A \circ B)$ из группы F.

При выборе аддитивной записи для элементов группы G элемент E соответствует нулю группы, обозначаемому в виде 0. Для обратного элемента имеем противоположный элемент $(-a)$. Тогда групповые аксиомы запишутся так: $C = A + B,\quad (A+B)+C = A+(B+C),\quad A+0 = 0+A = A$ и $A+(-A) = (-A)+A = 0$.

5.2. Закон композиции элементов групп мер

Рассмотрим абелеву группу энтропий с коммутативным законом композиции элементов $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Положим, что в закон композиции входят только H_1, H_2 и их произведение $H_1 H_2$, определяющее квадратичную нелинейность. Приведем простой абстрактный вывод явного вида закона композиции элементов энтропий и его свойства.

Запишем закон в следующем виде:

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 \psi(H_1)}{1 + H_2 f(H_1)}. \qquad (5.2.1)$$

Используем условие коммутативности в (5.2.1) и получим соотношение

$$\frac{H_1 + H_2 \psi(H_1)}{1 + H_2 f(H_1)} = \frac{H_2 + H_1 \psi(H_2)}{1 + H_1 f(H_2)}, \qquad (5.2.2)$$

накладывающее ограничения на функции

$$\frac{\psi(H_1) - 1}{H_1} = \frac{\psi(H_2) - 1}{H_2} = \varepsilon, \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{f(H_1)}{H_1} = \frac{f(H_2)}{H_2} = \omega. \qquad (5.2.4)$$

Здесь введены параметры ε и ω, независящие от энтропии. Подставляя функции $\psi(H_1)$ и $f(H_1)$ в (5.2.1), получим закон композиции [21, 23]

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1 + \omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.5)$$

в котором степень неаддитивности характеризуется значениями параметров ε и ω.

Рассмотрим основные свойства определения (5.2.5).

1. Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 выполняется свойство ассоциативности

$$H_1 \circ H_2 \circ H_3 = (H_1 \circ H_2) \circ H_3 = H_1 \circ (H_2 \circ H_3) =$$

$$= \frac{H_1 + H_2 + H_3 + \varepsilon(H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1) + (\omega + \varepsilon^2) H_1 H_2 H_3}{1 + \omega(H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1) + \varepsilon\omega H_1 H_2 H_3}. \qquad (5.2.6)$$

2. Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 единичный элемент группы находим из формулы

$$H \circ E = \frac{H + E + \varepsilon H E}{1 + \omega H E} = H, \qquad (5.2.7)$$

которая дает значение $E = 0$. Таким образом, единичный элемент соответствует нулевому значению энтропии $H = 0$.

3. Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 из формулы:

$$H \circ H^{-1} = \frac{H + H^{-1} + \varepsilon H H^{-1}}{1 + \omega H H^{-1}} = 0 \qquad (5.2.8)$$

вытекает выражение для обратного элемента

$$H^{-1} = -\frac{H}{1+\varepsilon H}, \ \left(1 + \omega H H^{-1} \neq 0\right). \qquad (5.2.9)$$

4. Сопряженный элемент. Подставим в определение сопряженного элемента

$$H' = C^{-1} \circ H \circ C \qquad (5.2.10)$$

значение $C^{-1} = -C\left(1+\varepsilon C\right)^{-1}$ и получим

$$H' = H \ . \qquad (5.2.11)$$

Эта формула означает, что элементы группы энтропий являются самосопряженными.

5. Равенства. Используя закон композиции и приведенные свойства, находим следующие равенства

$$\frac{1}{(-H)} - \frac{1}{H^{-1}} = \varepsilon, \quad \left(1+\varepsilon H\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \qquad (5.2.12)$$

$$\frac{1}{1+\omega H H^{-1}} = \frac{1+\varepsilon H}{1+\varepsilon H - \omega H^2} = \frac{1+\varepsilon H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1} - \omega\left(H^{-1}\right)^2}, \qquad (5.2.13)$$

$$\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right) = \frac{\left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1{}^2\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2{}^2\right)}{\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2}, \qquad (5.2.14)$$

$$\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}}, \qquad (5.2.15)$$

$$1+\varepsilon H_1 - \omega H_1 H = \frac{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.16)$$

$$1+\varepsilon H_2 - \omega H_2 H = \frac{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.17)$$

$$1+\varepsilon H - \omega H^2 = \left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1 H\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2 H\right), \qquad (5.2.18)$$

$$\frac{1+\varepsilon H_1-\omega H_1 H}{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}=\frac{1+\varepsilon H_2-\omega H_2 H}{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}. \qquad (5.2.19)$$

Для трех энтропий имеем

$$\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)^2\right]$$

$$=\frac{\left(1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2\right)\left(1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2\right)\left(1+\varepsilon H_3-\omega H_3^2\right)}{\left[1+\omega\left(H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\varepsilon H_1H_2H_3\right)\right]^2}. \qquad (5.2.20)$$

Если $H_3=H^{-1}=\left(H_1\circ H_2\right)^{-1}$, то из (5.2.20) и (5.2.6), соответственно, получим

$$\left[1+\omega\left(H_1H_2+H_2H^{-1}+H^{-1}H_1+\varepsilon H_1H_2H^{-1}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2\right)\left(1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}-\omega\left(H^{-1}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.2.21)$$

$$\left(H_1+H_2+H^{-1}\right)+\varepsilon\left(H_1H_2+H_2H^{-1}+H^{-1}H_1\right)+$$

$$+\left(\omega+\varepsilon^2\right)H_1H_2H^{-1}=0. \qquad (5.2.22)$$

Четыре энтропии удовлетворяют тождеству

$$\left(1+\omega H_1H_2\right)\left(1+\omega H_3H_4\right)\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)\left(H_3\circ H_4\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_2H_3\right)\left(1+\omega H_4H_1\right)\left[1+\omega\left(H_2\circ H_3\right)\left(H_4\circ H_1\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_3H_1\right)\left(1+\omega H_4H_2\right)\left[1+\omega\left(H_3\circ H_1\right)\left(H_4\circ H_2\right)\right]. \qquad (5.2.23)$$

В частности, при $H_1=H_3,\quad H_2=H_4$ тождество (5.2.23) принимает вид

$$\left(1+\omega H_1^2\right)\left(1+\omega H_2^2\right)\left[1+\omega\left(H_1\circ H_1\right)\left(H_2\circ H_2\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_1H_2\right)^2\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)^2\right]. \qquad (5.2.24)$$

Из (5.2.5) следует закон композиции энтропии H с H_2^{-1} и с H_1^{-1}:

$$H_1 = H \circ H_2^{-1} = \frac{H - H_2}{1 + \varepsilon H_2 - \omega H H_2}, \tag{5.2.25}$$

$$H_2 = H_1^{-1} \circ H = \frac{H - H_1}{1 + \varepsilon H_1 - \omega H H_1}. \tag{5.2.26}$$

Для обратных элементов имеем

$$\left(H_1 \circ H_2\right)^{-1} = H_2^{-1} H_1^{-1}, \quad \left(H_1 \circ H_2 \circ H_3\right)^{-1} = H_3^{-1} \circ H_2^{-1} \circ H_1^{-1}, \tag{5.2.27}$$

$$\frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1} = -\varepsilon, \tag{5.2.28}$$

$$\frac{1}{H_1 \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1^{-1}} = \frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1}. \tag{5.2.29}$$

Определение 4 из разд. 5.1 позволяет получить квадрат элемента

$$H^{(2)} = H \circ H = \frac{2H + \varepsilon H^2}{1 + \omega H^2}. \tag{5.2.30}$$

Решая уравнение (5.2.30) относительно H, находим «квадратный корень» из элемента $H \circ H$

$$H = \frac{H^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right) - \omega\left(H^{(2)}\right)^2}}. \tag{5.2.31}$$

Взаимосвязь этих элементов определяется соотношением

$$\sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right) - \omega\left(H^{(2)}\right)^2} = \frac{1 + \varepsilon H - \omega H^2}{1 + \omega H^2}. \tag{5.2.32}$$

Используя закон композиции $H = H_1 \circ H_2$, находим закон композиции квадратов элементов

$$H^{(2)} = \left(H_1 \circ H_2\right) \circ \left(H_1 \circ H_2\right) = H_1^{(2)} \circ H_2^{(2)} =$$

$$= \frac{H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \varepsilon H_1^{(2)} H_2^{(2)}}{1 + \omega H_1^{(2)} H_2^{(2)}}. \tag{5.2.33}$$

В общем случае получим:

$$H^{(2n)} = H_1^{(n)} \circ H_2^{(n)} = \frac{H_1^{(n)} + H_2^{(n)} + \varepsilon H_1^{(n)} H_2^{(n)}}{1 + \omega H_1^{(n)} H_2^{(n)}}. \qquad (5.2.34)$$

Из (5.2.12) следует, что параметр ε отражает отличие обратного элемента H^{-1} от противоположного $(-H)$.

Абелева группа информаций различия определяется аналогично группе энтропий. Закон композиции информаций различия имеет вид

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{1 + \omega I_1 I_2} \qquad (5.2.35)$$

и задается заменой $H \to -I$ в законе композиции энтропий.

Определение (5.2.35) удовлетворяет свойству ассоциативности

$$I_1 \circ I_2 \circ I_3 = (I_1 \circ I_2) \circ I_3 = I_1 \circ (I_2 \circ I_3) =$$

$$= \frac{I_1 + I_2 + I_3 - \varepsilon(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1) + (\omega + \varepsilon^2) I_1 I_2 I_3}{1 + \omega(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1) - \varepsilon\omega I_1 I_2 I_3}. \qquad (5.2.36)$$

Единичному элементу группы $E = 0$ соответствует нулевое значение информации различия $I = 0$. Обратный элемент определяется выражением $I^{-1} = -I(1 - \varepsilon I)^{-1}$. Элементы группы являются самосопряженными, то есть $I' = I$.

По аналогии с равенствами для энтропий находим следующие равенства для информаций различия

$$\frac{1}{(-I)} - \frac{1}{I^{-1}} = -\varepsilon, \quad (1 - \varepsilon I)(1 - \varepsilon I^{-1}) = 1, \qquad (5.2.37)$$

$$\frac{1}{1 + \omega I I^{-1}} = \frac{1 - \varepsilon I}{1 - \varepsilon I - \omega I^2} = \frac{1 - \varepsilon I^{-1}}{1 - \varepsilon I^{-1} - \omega (I^{-1})^2}, \qquad (5.2.38)$$

$$(1 - \varepsilon I - \omega I^2) = \frac{(1 - \varepsilon I_1 - \omega I_1{}^2)(1 - \varepsilon I_2 - \omega I_2{}^2)}{(1 + \omega I_1 I_2)^2}, \qquad (5.2.39)$$

$$\frac{I}{\sqrt{1 - \varepsilon I - \omega I^2}} = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{\sqrt{1 - \varepsilon I_1 - \omega I_1^2}\sqrt{1 - \varepsilon I_2 - \omega I_2^2}}, \qquad (5.2.40)$$

$$1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I=\frac{1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2}{1+\omega I_1 I_2}, \tag{5.2.41}$$

$$1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I=\frac{1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2}{1+\omega I_1 I_2}, \tag{5.2.42}$$

$$1-\varepsilon I-\omega I^2=\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I\right), \tag{5.2.43}$$

$$\frac{1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I}{1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2}=\frac{1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I}{1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2}. \tag{5.2.44}$$

$$1-\varepsilon\left(I_1\circ I_2\circ I_3\right)-\omega\left(I_1\circ I_2\circ I_3\right)^2=$$

$$=\frac{\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2\right)\left(1-\varepsilon I_3-\omega I_3^2\right)}{\left[1+\omega\left(I_1 I_2+I_2 I_3+I_3 I_1-\varepsilon I_1 I_2 I_3\right)\right]^2}, \tag{5.2.45}$$

$$\left[1+\omega\left(I_1 I_2+I_2 I^{-1}+I^{-1} I_1-\varepsilon I_1 I_2 I^{-1}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2\right)\left(1-\varepsilon I^{-1}-\omega\left(I^{-1}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2.46}$$

$$\left(I_1+I_2+I^{-1}\right)-\varepsilon\left(I_1 I_2+I_2 I^{-1}+I^{-1} I_1\right)+$$

$$+\left(\omega+\varepsilon^2\right) I_1 I_2 I^{-1}=0, \tag{5.2.47}$$

$$\left(1+\omega I_1 I_2\right)\left(1+\omega I_3 I_4\right)\left[1+\omega\left(I_1\circ I_2\right)\left(I_3\circ I_4\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_2 I_3\right)\left(1+\omega I_4 I_1\right)\left[1+\omega\left(I_2\circ I_3\right)\left(I_4\circ I_1\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_3 I_1\right)\left(1+\omega I_4 I_2\right)\left[1+\omega\left(I_3\circ I_1\right)\left(I_4\circ I_2\right)\right], \tag{5.2.48}$$

$$\left(1+\omega I_1^2\right)\left(1+\omega I_2^2\right)\left[1+\omega\left(I_1\circ I_1\right)\left(I_2\circ I_2\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_1 I_2\right)^2\left[1+\omega\left(I_1\circ I_2\right)^2\right], \tag{5.2.49}$$

$$I_1=I\circ I_2^{-1}=\frac{I-I_2}{1-\varepsilon I_2-\omega I I_2}, \tag{5.2.50}$$

$$I_2 = I_1^{-1} \circ I = \frac{I - I_1}{1 - \varepsilon I_1 - \omega I I_1}, \qquad (5.2.51)$$

$$\left(I_1 \circ I_2\right)^{-1} = I_2^{-1} I_1^{-1}, \quad \left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right)^{-1} = I_3^{-1} \circ I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \qquad (5.2.52)$$

$$\frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1} = \varepsilon, \qquad (5.2.53)$$

$$\frac{1}{I_1 \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1^{-1}} = \frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1}, \qquad (5.2.54)$$

$$I^{(2)} = I \circ I = \frac{2I - \varepsilon I^2}{1 + \omega I^2}, \quad I = \frac{I^{(2)}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon\left(I^{(2)}\right) - \omega\left(I^{(2)}\right)^2}}, \qquad (5.2.55)$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon\left(I^{(2)}\right) - \omega\left(I^{(2)}\right)^2} = \frac{1 - \varepsilon I - \omega I^2}{1 + \omega I^2}. \qquad (5.2.56)$$

$$I^{(2n)} = I_1^{(n)} \circ I_2^{(n)} = \frac{I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \varepsilon I_1^{(n)} I_2^{(n)}}{1 + \omega I_1^{(n)} I_2^{(n)}} \quad \left(I = I_1 \circ I_2\right) \qquad (5.2.57)$$

5.3. Группы функций мер

Представим абелевую группу энтропий мультипликативной группе функций, которые находятся в определенном соответствии с элементами энтропий. Это соответствие в виде $H \to \varphi(H)$ характеризуется следующими свойствами:

$$\varphi(H) = \varphi\left(H_1 \circ H_2\right) = \varphi\left(H_1\right)\varphi\left(H_2\right), \qquad (5.3.1)$$

$$\varphi(0) = 1, \qquad (5.3.2)$$

где единичный элемент группы функций есть постоянное значение, равное единице, при нулевом значении энтропии. Для обратной функции имеем равенство $\varphi^{-1}(H) = \varphi(H^{-1})$, вытекающее из формулы $\varphi(H)\varphi(H^{-1}) = 1$.

Покажем, что для закона композиции (5.2.5) имеют место четыре принципиально различные группы функций энтропий.

Тип I $(\omega \geq 0)$**.** Пусть уравнение $1 + \varepsilon H - \omega H^2 = 0$ имеет неравные вещественные корни, то есть для дискриминанта имеем условие $D=\varepsilon^2+4\omega>0$. Тогда справедливо равенство $\left(1+\varepsilon H-\omega H^2\right)=$ $=\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)$, выполняемое и при $\omega=0$. Получим значения параметров и дискриминанта

$$\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \omega=\varepsilon_1\varepsilon_2,\ D=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2, \tag{5.3.3}$$

из которых следуют величины $\varepsilon_1=\left(\varepsilon+\sqrt{D}\right)/2$ и $\varepsilon_2=-\left(\varepsilon-\sqrt{D}\right)/2$.

Закон композиции (5.2.5) запишется так

$$H=\left(H_1\circ H_2\right)=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_1H_2}. \tag{5.3.4}$$

Из него следует, что для всех независимых объектов сохраняется неравенство $\left(-1/\varepsilon_1\right)<H<\left(1/\varepsilon_2\right)$. Значения энтропий $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ не являются элементами группы, так как обратные элементы от этих значений остаются неопределенными ввиду нарушения дополнительного условия в определении (5.2.9). Однако для них выполняются формальные соотношения

$$H\circ\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\ \text{при}\ H\neq\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

$$H\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\ \text{при}\ H\neq\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{5.3.5}$$

Из (5.3.5) вытекает, что величины $\left(-1/\varepsilon_1\right)$и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ являются инвариантными для всех независимых объектов. Следовательно, инвариантными являются также параметры ε и ω. Из соотношения (5.3.5) вытекают следующие формальные равенства

$$\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{(2)}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right),\quad \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{(2)}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right), \tag{5.3.6}$$

к которым добавляются еще четыре

$$\left(1+\varepsilon_1 H\right)=\frac{\left(1+\varepsilon_1 H_1\right)\left(1+\varepsilon_1 H_2\right)}{1+\omega H_1H_2},\ \frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)}{\left(1-\varepsilon_2 H^{-1}\right)}=-\frac{H}{H^{-1}}, \tag{5.3.7}$$

$$\left(1-\varepsilon_2 H\right)=\frac{\left(1-\varepsilon_2 H_1\right)\left(1-\varepsilon_2 H_2\right)}{1+\omega H_1 H_2},\ \frac{\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{\left(1+\varepsilon_1 H^{-1}\right)}=-\frac{H}{H^{-1}}. \qquad (5.3.8)$$

После деления равенства (5.3.7) на (5.3.8) получим тождество

$$\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_1}{1+\varepsilon_1 H_1}\right)\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_2}{1+\varepsilon_1 H_2}\right). \qquad (5.3.9)$$

Сопоставляя (5.3.1) и (5.3.9), находим искомую функцию

$$\varphi\left(H\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.10)$$

порождающую группу. Она является степенной зависимостью от дробно-линейной функции. Здесь в степени используется функция $a=a\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$, зависящая от параметров. Из (5.3.10) следует свойство $\varphi(0)=1$.

Подставим обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{\left[1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H\right]} \qquad (5.3.11)$$

в (5.3.10) и получим функцию

$$\varphi^{-1}\left(H\right)=\varphi\left(H^{-1}\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H^{-1}}{1+\varepsilon_1 H^{-1}}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.12)$$

которая является обратной функции для $\varphi\left(H\right)$.

Элементы группы функций энтропий являются самосопряженными в силу выполнения равенства

$$\varphi\left(H'\right)=\varphi\left(C^{-1}\right)\varphi\left(H\right)\varphi\left(C\right)=\varphi\left(H\right). \qquad (5.3.13)$$

Для определения функции $a=a\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ рассмотрим мультипликативную группу функций энтропий, когда каждый независимый объект имеет свое значение рассматриваемых параметров. Тогда запишем следующие функции

$$\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(H_1\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_1}{1+\varepsilon_1 H_1}\right)^{\frac{1}{a}},\quad \varphi_{\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2}\left(H_2\right)=\left(\frac{1-\tilde{\varepsilon}_2 H_2}{1+\tilde{\varepsilon}_1 H_2}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.14)$$

$$\varphi_{\varepsilon_1',\varepsilon_2'}(H)=\left(\frac{1-\varepsilon_2'H}{1+\varepsilon_1'H}\right)^{\frac{1}{a}}. \qquad (5.3.15)$$

Свойство мультипликативности

$$\varphi_{\varepsilon_1',\varepsilon_2'}(H)=\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(H_1)\varphi_{\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2}(H_2) \qquad (5.3.16)$$

дает равенство

$$\left(\frac{1-\varepsilon_2'H}{1+\varepsilon_1'H}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1-\varepsilon_2H_1}{1+\varepsilon_1H_1}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1-\tilde{\varepsilon}_2H_2}{1+\tilde{\varepsilon}_1H_2}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.17)$$

из которого вытекает закон композиции

$$H=H_1\circ H_2=$$

$$=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)H_1+(\tilde{\varepsilon}_1+\tilde{\varepsilon}_2)H_2+(\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1-\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2)H_1H_2}{(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')+(\varepsilon_2'\varepsilon_1-\varepsilon_1'\varepsilon_2)H_1+(\varepsilon_2'\tilde{\varepsilon}_1-\varepsilon_1'\tilde{\varepsilon}_2)H_2+(\varepsilon_1'\tilde{\varepsilon}_2\varepsilon_2+\varepsilon_2'\tilde{\varepsilon}_1\varepsilon_1)H_1H_2}. \qquad (5.3.18)$$

Теорема 1. Если группа энтропий абелева, то $\varepsilon=\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'$ и $\omega=\tilde{\omega}=\omega'$.

Для доказательства используем условия коммутативности $H=H_1\circ H_2=H_2\circ H_1$ и свойства группы, что приводит, согласно (5.3.18), к соотношениям

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\tilde{\varepsilon}_1+\tilde{\varepsilon}_2=\varepsilon_1'+\varepsilon_2', \qquad (5.3.19)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}_2}=\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'}. \qquad (5.3.20)$$

Из (5.3.19) и (5.3.20) вытекают искомые равенства $\varepsilon_1=\tilde{\varepsilon}_1=\varepsilon_1'$ и $\varepsilon_2=\tilde{\varepsilon}_2=\varepsilon_2'$, которые доказывают теорему. В итоге выполняется свойство (5.3.1) для функции (5.3.10). Соотношение (5.3.19) в рассматриваемой теореме позволяет положить

$$a=-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda} \qquad (5.3.21)$$

и, следовательно, из (5.3.10) получим:

$$\varphi(H) = \left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \qquad (5.3.22)$$

где λ есть произвольный параметр.

Тип II $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0)$**.** Пусть уравнение $1+\varepsilon H - \omega H^2 = 0$ имеет равные вещественные корни, то есть для дискриминанта выполняется условие $D = 0$. Таким образом, справедливо разложение $1+\varepsilon H - \omega H^2 = (1+\varepsilon_1 H)^2$ и получим значения параметров

$$\varepsilon = 2\varepsilon_1, \quad \omega = -\varepsilon_1^2, \qquad (5.3.23)$$

закон композиции

$$H = (H_1 \circ H_2) = \frac{H_1 + H_2 + 2\varepsilon_1 H_1 H_2}{1 - \varepsilon_1^2 H_1 H_2} \qquad (5.3.24)$$

и равенство

$$(1+\varepsilon_1 H) = \frac{(1+\varepsilon_1 H_1)(1+\varepsilon_1 H_2)}{1 - \varepsilon_1^2 H_1 H_2}. \qquad (5.3.25)$$

После деления равенства (5.3.25) на (5.3.24) вытекает соотношение

$$\frac{H}{1+\varepsilon_1 H} = \frac{H_1}{1+\varepsilon_1 H_1} + \frac{H_2}{1+\varepsilon_1 H_2}. \qquad (5.3.26)$$

Из закона композиции следует неравенство $H > (-1/\varepsilon_1)$. Значение энтропии, равное $(-1/\varepsilon_1)$ является инвариантным элементом для всех независимых объектов, так как выполняется формальное соотношение

$$H \circ \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \quad \text{при } H \neq \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right). \qquad (5.3.27)$$

Однако обратный элемент от значения $(-1/\varepsilon_1)$ остается неопределенным, так как нарушается дополнительное условие в определении (5.2.9).

Сопоставляя (5.3.1) и (5.3.26), находим искомую функцию

$$\varphi(H)=\exp\left(-\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \tag{5.3.28}$$

порождающую группу, где λ есть произвольный параметр. Из (5.3.28) вытекает свойство $\varphi(0)=1$. Элементы группы функции энтропий являются самосопряженными.

Подставив обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{1+2\varepsilon_1 H} \tag{5.3.29}$$

в (5.3.28), получим функцию

$$\varphi^{-1}(H)=\varphi(H^{-1})=\exp\left(-\frac{\lambda H^{-1}}{1+\varepsilon_1 H^{-1}}\right)=\exp\left(\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \tag{5.3.30}$$

которая является обратной функцией для $\varphi(H)$.

Тип III $(\omega<0)$**.** Пусть уравнение $1+\varepsilon H-\omega H^2=0$ не имеет вещественных корней, то есть для дискриминанта выполняется условие $D=\varepsilon^2+4\omega<0$. Представим трехчлен в виде произведения

$$1+\varepsilon H-\omega H^2=f\,\overline{f}, \tag{5.3.31}$$

где комплексное выражение $f=(1+\mathrm{i}K)/(1-\mathrm{i}b)$ содержит функции

$$K=\frac{-\omega H+\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}},\ b=-\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}. \tag{5.3.32}$$

Делим комплексное выражение на ее сопряженное значение

$$\frac{f}{\overline{f}}=\frac{1+\mathrm{i}K}{1-\mathrm{i}b}\frac{1+\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}K}=\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F} \tag{5.3.33}$$

и определяем функцию

$$F=\frac{K+b}{1-Kb}=\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}. \tag{5.3.34}$$

Справедливы следующие равенства

$$(1+\mathrm{i}F)=\frac{(1+\mathrm{i}F_1)(1+\mathrm{i}F_2)}{1-F_1F_2}, \tag{5.3.35}$$

$$\left(1-\mathrm{i}F\right)=\frac{\left(1-\mathrm{i}F_1\right)\left(1-\mathrm{i}F_2\right)}{1-F_1F_2}, \tag{5.3.36}$$

$$\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F}=\frac{\left(1+\mathrm{i}F_1\right)\left(1+\mathrm{i}F_2\right)}{\left(1-\mathrm{i}F_1\right)\left(1-\mathrm{i}F_2\right)}. \tag{5.3.37}$$

Из них вытекает закон композиции для функции F

$$F=F_1\circ F_2=\frac{F_1+F_2}{1-F_1F_2}, \tag{5.3.38}$$

который дает исходный закон композиции энтропий

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1H_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 H_1H_2}. \tag{5.3.39}$$

Используя тождество

$$\mathrm{arctg}F=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F} \tag{5.3.40}$$

и учитывая (5.3.37), находим искомую функцию

$$\varphi(H)=\exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\mathrm{arctg}\left(F\right)\right]=$$

$$=\exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\mathrm{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right], \tag{5.3.41}$$

которая порождает рассматриваемую группу энтропий. Здесь λ есть произвольный параметр. Из (5.3.41) следует свойство $\varphi(0)=1$. Элементы группы функции энтропий являются самосопряженными.

Подставим обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{1+\varepsilon H} \tag{5.3.42}$$

в (5.3.41) и получим функцию:

$$\varphi^{-1}(H) = \varphi\left(H^{-1}\right) =$$

$$= \exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4}} \operatorname{arctg}\left(\frac{H^{-1}\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4}}{1 + H^{-1}\varepsilon/2}\right)\right] = \qquad (5.3.43)$$

$$= \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4}} \operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4}}{1 + H\varepsilon/2}\right)\right],$$

которая является обратной функцией для $\varphi(H)$.

Далее, представляя трехчлен в виде $1 + \varepsilon H - \omega H^2 = = (1/2)\left[\left(1 + \varepsilon_1 H\right)^2 + \left(1 - \varepsilon_2 H\right)^2\right]$, получим значения параметров и дискриминанта

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \; \omega = -\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}, \; D = -\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2, \qquad (5.3.44)$$

из которых следуют величины $\varepsilon_1 = \left(\varepsilon + \sqrt{-D}\right)/2$ и $\varepsilon_2 = -\left(\varepsilon - \sqrt{-D}\right)/2$.

Закон композиции (5.3.39), в виде

$$H = \left(H_1 \circ H_2\right) = \frac{H_1 + H_2 + \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) H_1 H_2}{1 - \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right) H_1 H_2 / 2} \qquad (5.3.45)$$

вытекает, согласно (5.3.38), из соотношения

$$\frac{H}{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/2} = \frac{\dfrac{H_1}{1 + H_1\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/2} + \dfrac{H_2}{1 + H_2\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/2}}{1 - \dfrac{H_1 H_2 \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2/4}{\left[1 + H_1\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/2\right]\left[1 + H_2\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/2\right]}}. \qquad (5.3.46)$$

Справедливы равенства

$$H_+ = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \circ H = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon_2 H}{1 + \varepsilon_1 H + \left(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2\right) H / 2\varepsilon_1}\right), \qquad (5.3.47)$$

$$H_- = \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right) \circ H = \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1 + \varepsilon_1 H}{1 - \varepsilon_2 H + \left(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2\right) H / 2\varepsilon_2}\right), \qquad (5.3.48)$$

$$\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right),\ \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right),\ \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=E, \qquad (5.3.49)$$

$$H_+\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\circ H_-=H, \qquad (5.3.50)$$

$$H_+\circ\left(H_-\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{(2)},\ H_-\circ\left(H_+\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{(2)}, \qquad (5.3.51)$$

которые означают, что в данной группе значения $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ являются ее элементами.

Элементы (5.3.47) и (5.3.48) удовлетворяют тождествам

$$-\left(\frac{1+k^2\varepsilon_1 H_+}{1-k^{-2}\varepsilon_2 H_-}\right)=k^2\frac{H_+}{H_-},\ \frac{1}{H_-}-\frac{1}{\left(-1/\varepsilon_1\right)}=-\frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{H_+}-\frac{1}{\left(1/\varepsilon_2\right)}\right], \qquad (5.3.52)$$

где введен коэффициент

$$k=\sqrt{\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}}. \qquad (5.3.53)$$

Тип IV. Рассмотрим специальный тип группы, в которой сопоставим функциям (5.3.22), (5.3.28) и (5.3.41) аддитивную энтропию

$$H^R=-\ln\varphi(H)=-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \qquad (5.3.54)$$

$$H^R=-\ln\varphi(H)=\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}, \qquad (5.3.55)$$

$$H^R=-\ln\varphi(H)=-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right). \qquad (5.3.56)$$

Тогда такое отображение является изоморфизмом групп неаддитивных энтропий на группу аддитивных энтропий.

Бинарная операция элементов есть

$$H^R=H_1^R\circ H_2^R=H_1^R+H_2^R. \qquad (5.3.57)$$

Для аддитивных энтропий H^R выполняются групповые свойства

а) ассоциативность

$$\left(H_1^R + H_2^R\right) + H_3^R = H_1^R + \left(H_2^R + H_3^R\right), \tag{5.3.58}$$

б) наличие единичного элемента

$$H^R + 0 = 0 + H^R = H^R, \tag{5.3.59}$$

в) наличие обратного элемента

$$H^R + \left(-H^R\right) = \left(-H^R\right) + H^R = 0. \tag{5.3.60}$$

Функция, порождающая группу аддитивных энтропий, имеет вид

$$\varphi(H) = \exp\left(\lambda H^R\right), \tag{5.3.61}$$

где λ есть произвольный параметр. Она имеет свойство $\varphi(0) = 1$ и элементы группы функции энтропий являются самосопряженными. Подставим обратный элемент $\left(-H^R\right)$ в (5.3.61) и получим обратную функцию

$$\varphi^{-1}\left(H^R\right) = \varphi\left(-H^R\right) = \exp\left(-\lambda H^R\right). \tag{5.3.62}$$

В заключение определим группы функций информаций различия. При замене $H \to -I$ имеем три типа групп:

$$\textbf{Тип I:}\ \varphi(I) = \left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \tag{5.3.63}$$

$$\textbf{Тип II:}\ \varphi(I) = \exp\left(\frac{\lambda I}{1-\varepsilon_1 I}\right), \tag{5.3.64}$$

$$\textbf{Тип III:}\ \varphi(I) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right]. \tag{5.3.65}$$

Изоморфизмом этих групп неаддитивных информаций различия на группу аддитивных информаций различия является мера

$$I^R = -\lambda^{-1}\varphi(I), \tag{5.3.66}$$

которая соответствует четвертому типу групп функций:

$$\textbf{Тип IV:}\ \varphi(I) = \exp\left(-\lambda I^R\right). \qquad (5.3.67)$$

Здесь не будем рассматривать свойства элементов групп информаций различия и групп их функций, так как это легко сделать по аналогии с рассмотрением свойств энтропии.

5.4. Матричное представление групп мер

Представим абелевую группу энтропий мультипликативной группе невырожденных матриц второго порядка [21]. Каждой энтропии H из множества энтропий G сопоставляется матрица $\mathbf{A}(H)$ из множества матриц M. Все матрицы, сопоставляемые различным энтропиям, различны и, следовательно, группа матриц изоморфна представляемой группе. Матрицы образуют абелеву группу по бинарной операции умножения, которая есть обычная операция умножения матриц

$$\mathbf{A}(H) = \mathbf{A}(H_1 \circ H_2) = \mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2). \qquad (5.4.1)$$

Умножение коммутативно

$$\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2) = \mathbf{A}(H_2)\mathbf{A}(H_1) \qquad (5.4.2)$$

и ассоциативно

$$\left[\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2)\right]\mathbf{A}(H_3) = \mathbf{A}(H_1)\left[\mathbf{A}(H_2)\mathbf{A}(H_3)\right], \qquad (5.4.3)$$

согласно свойствам матриц.

Единичным элементом в условии

$$\mathbf{A}(H)\mathbf{A}\left(H^{-1}\right) = \mathbf{A}\left(H^{-1}\right)\mathbf{A}(H) = \mathbf{E} \quad \left(\det \mathbf{A}(H) \det \mathbf{A}(H^{-1}) = 1\right) \qquad (5.4.4)$$

является единичная матрица

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.4.5)$$

а обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1}(H) = \mathbf{A}\left(H^{-1}\right) \quad \left(\mathbf{A}(H)\mathbf{A}^{-1}(H) = \mathbf{E}\right). \qquad (5.4.6)$$

Исходя из условий (5.4.1) – (5.4.6), определим явный вид матрицы, порождающей группу и, соответственно, бинарную операцию для энтропий. Выбор матриц второго порядка обусловлен тем, что закон композиции должен содержать только H_1, H_2 и квадратичную нелинейность в виде произведения $H_1 H_2$. Итак, запишем матрицу в общем виде:

$$\mathbf{A}(H)=\begin{pmatrix} a(H) & b(H) \\ c(H) & d(H) \end{pmatrix}, \tag{5.4.7}$$

где функции $a=a(H),\quad b=b(H),\quad c=c(H),\quad d=d(H)$ зависят от энтропии. Матрица является неособенной, то есть ее определитель удовлетворяет условию $\det \mathbf{A}(H)\neq 0$.

Используем условие коммутативности (5.4.1) для умножения

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.8}$$

Здесь функции с индексами 1 и 2 зависят, соответственно, от энтропий H_1 и H_2. В результате получим систему из функциональных уравнений

$$a_1a_2+b_1c_2=a_2a_1+b_2c_1, \tag{5.4.9}$$

$$c_1b_2+d_1d_2=c_2b_1+d_2d_1, \tag{5.4.10}$$

$$a_1b_2+b_1d_2=a_2b_1+b_2d_1, \tag{5.4.11}$$

$$c_1a_2+d_1c_2=c_2a_1+d_2c_1. \tag{5.4.12}$$

Уравнения (5.4.9) и (5.4.10) накладывают следующие ограничения на функции

$$\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\omega, \tag{5.4.13}$$

а из уравнений (5.4.11) и (5.4.12) имеем

$$\frac{a_1-d_1}{c_1}=\frac{a_2-d_2}{c_2}=\varepsilon. \tag{5.4.14}$$

Здесь введены параметры ε и ω, которые не зависят от энтропии.

Используя соотношения (5.4.13), (5.4.14), получим

$$\mathbf{A}(H)=\begin{pmatrix} d+\varepsilon c & \omega c \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{5.4.15}$$

Поскольку в закон композиции входят H_1, H_2 и H_1H_2, то имеем функциональную зависимость

$$c(H)=Hd(H). \tag{5.4.16}$$

При подстановке (5.4.16) в (5.4.15) вытекает исходная матрица

$$\mathbf{A}(H) = d(H)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H & \omega H \\ H & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.4.17)$$

в виде произведения неизвестной функции $d(H)$ на матрицу, элементы которой линейно зависят от энтропии H. Определитель полученной матрицы равняется

$$\det \mathbf{A}(H) = d^2(H)\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right). \qquad (5.4.18)$$

Можно использовать другой вариант исходной матрицы. Так, при замене $\omega \to 1/\omega$ и $\varepsilon \to \varepsilon/\omega$ в (5.4.13) и (5.4.14), соответственно, а также с учетом $b(H) = Hd(H)$, получим матрицу

$$\mathbf{A}^T(H) = d(H)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H & H \\ \omega H & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.4.19)$$

которая является транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{A}(H)$.

Далее умножим матрицу $\mathbf{A}(H_1)$ на матрицу $\mathbf{A}(H_2)$

$$\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2) = d(H_1)d(H_2)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H_1 & \omega H_1 \\ H_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H_2 & \omega H_2 \\ H_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= d(H_1)d(H_2)\left(1+\omega H_1 H_2\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} & \omega\dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} \\ \dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.4.20)$$

приравняем результат матрице $\mathbf{A}(H)$ и получим закон композиции

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.4.21)$$

а также равенство для функций

$$d(H) = d(H_1)d(H_2)\left(1+\omega H_1 H_2\right). \qquad (5.4.22)$$

Из закона композиции для определителей:

$$\det \mathbf{A}(H) = \det \mathbf{A}(H_1) \det \mathbf{A}(H_2) \tag{5.4.23}$$

вытекает известное соотношение

$$\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right) = \frac{\left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1{}^2\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2{}^2\right)}{\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2}. \tag{5.4.24}$$

С учетом значения определителя (5.4.18) вычислим обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1}(H) = \frac{1}{d(H)(1+\varepsilon H - \omega H^2)}\begin{pmatrix} 1 & -\omega H \\ -H & 1+\varepsilon H \end{pmatrix} \tag{5.4.25}$$

и, согласно (5.4.6), преобразуем ее к виду

$$\mathbf{A}(H^{-1}) = d(H^{-1})\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H^{-1} & \omega H^{-1} \\ H^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.26}$$

Здесь взаимосвязь между энтропией H и ее обратным элементом H^{-1} дается равенствами

$$\left(1+\varepsilon H\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \tag{5.4.27}$$

$$d(H)d(H^{-1})\left(1+\omega H H^{-1}\right) = 1, \tag{5.4.28}$$

из которых вытекают известные соотношения

$$H = -\frac{H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1}}, \quad H^{-1} = -\frac{H}{1+\varepsilon H}, \tag{5.4.29}$$

$$\frac{1}{1+\omega H H^{-1}} = \frac{1+\varepsilon H}{1+\varepsilon H - \omega H^2} = \frac{1+\varepsilon H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1} - \omega\left(H^{-1}\right)^2}. \tag{5.4.30}$$

Итак, представление абелевой группы энтропий группе матриц показывает, что для коммутативной бинарной операции $H_1 \circ H_2$ выполняется ассоциативность $\left(H_1 \circ H_2\right) \circ H_3 = H_1 \circ \left(H_2 \circ H_3\right)$. Единичному элементу в условии $H \circ E = E \circ H = E$ соответствует нулевая энтропия $H = 0$. Обратный элемент в условии $H \circ H^{-1} = H^{-1} \circ H = E$ равняется $H^{-1} = -H\left(1+\varepsilon H\right)^{-1}$.

В абелевой группе матриц остается неопределенной функция $d(H)$, для которой выполняется равенство (5.4.22). Используем (5.4.18) и перепишем матрицу (5.4.17) и ее обратную (5.4.26) следующим образом

$$\mathbf{A}(H)=\left(\frac{\det\mathbf{A}(H)}{1+\varepsilon H-\omega H^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon H & \omega H\\ H & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.31}$$

$$\mathbf{A}(H^{-1})=\left(\frac{\det\mathbf{A}(H^{-1})}{1+\varepsilon H^{-1}-\omega\left(H^{-1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon H^{-1} & \omega H^{-1}\\ H^{-1} & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.32}$$

где неопределенная функция $\det\mathbf{A}(H)$ удовлетворяет групповому свойству (5.4.23). Таким образом, эта функция порождает группу функций энтропий.

Введем матрицу

$$\mathbf{B}(H)=\begin{pmatrix}1+\varepsilon H & \omega H\\ H & 1\end{pmatrix},\quad \det\mathbf{B}(H)=1+\varepsilon H-\omega H^2 \tag{5.4.33}$$

и получим равенство

$$\mathbf{C}(H)=\frac{\mathbf{A}(H)}{\left[\det\mathbf{A}(H)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathbf{B}(H)}{\left[\det\mathbf{B}(H)\right]^{\frac{1}{2}}},\quad \det\mathbf{C}(H)=1, \tag{5.4.34}$$

где $\mathbf{C}(H)$ есть унимодулярная матрица.

Опуская вычисления, аналогично находим матричное представление группы информаций различия и в результате имеем следующую матрицу

$$\mathbf{A}(I)=\left(\frac{\det\mathbf{A}(I)}{1-\varepsilon I-\omega I^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1-\varepsilon I & -\omega I\\ -I & 1\end{pmatrix}. \tag{5.4.35}$$

и ее обратную

$$\mathbf{A}(I^{-1})=\left(\frac{\det\mathbf{A}(I^{-1})}{1-\varepsilon I^{-1}-\omega\left(I^{-1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1-\varepsilon I^{-1} & -\omega I^{-1}\\ -I^{-1} & 1\end{pmatrix}. \tag{5.4.36}$$

Для определения зависимостей определителей матриц от энтропии и информации различия используем равенства

$$\det\mathbf{A}(H)=\varphi^{2\nu}(H),\quad \det\mathbf{A}(I)=\varphi^{2\nu}(I), \tag{5.4.37}$$

$$\det \mathbf{A}(H^{-1}) = \varphi^{2\nu}(H^{-1}), \quad \det \mathbf{A}(I^{-1}) = \varphi^{2\nu}(I^{-1}), \tag{5.4.38}$$

означающие изоморфные отображения групп функций мер на группу определителей. В итоге матрицы (5.4.31) и (5.4.35) с произвольным параметром ν преобразуются к виду

$$\mathbf{A}(H) = \varphi^{\nu}\left(H\right)\begin{pmatrix} \dfrac{1+\varepsilon H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} & \dfrac{\omega H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} \\ \dfrac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} \end{pmatrix}, \tag{5.4.39}$$

$$\mathbf{A}(I) = \varphi^{\nu}\left(I\right)\begin{pmatrix} \dfrac{1-\varepsilon I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} & -\dfrac{\omega I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} \\ -\dfrac{I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} \end{pmatrix}. \tag{5.4.40}$$

Используя четыре типа групп функций мер и делая замену $\lambda\nu \to \nu$, получим четыре типа матриц.

Тип I:

$$\mathbf{A}(H) = \left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H}{\sqrt{\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)}} & \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 H}{\sqrt{\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)}} \\ \dfrac{H}{\sqrt{\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)}} & \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)}} \end{pmatrix}, \tag{5.4.41}$$

$$\mathbf{A}(I) = \left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{1-\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)I}{\sqrt{\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right)}} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 I}{\sqrt{\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right)}} \\ -\dfrac{I}{\sqrt{\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right)}} & \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right)}} \end{pmatrix}. \tag{5.4.42}$$

Тип II:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left(-\frac{\nu H}{1+\varepsilon_1 H}\right)\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+2\varepsilon_1 H}{1+\varepsilon_1 H} & -\dfrac{\varepsilon_1^2 H}{1+\varepsilon_1 H}\\ \dfrac{H}{1+\varepsilon_1 H} & \dfrac{1}{1+\varepsilon_1 H}\end{pmatrix}, \tag{5.4.43}$$

$$\mathbf{A}(I)=\exp\left(\frac{\nu I}{1-\varepsilon_1 I}\right)\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-2\varepsilon_1 I}{1-\varepsilon_1 I} & \dfrac{\varepsilon_1^2 I}{1-\varepsilon_1 I}\\ -\dfrac{I}{1-\varepsilon_1 I} & \dfrac{1}{1-\varepsilon_1 I}\end{pmatrix}. \tag{5.4.44}$$

Тип III:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left[\frac{\nu}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right]\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+\varepsilon H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}} & \dfrac{\omega H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\\ \dfrac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\end{pmatrix}, \tag{5.4.45}$$

$$\mathbf{A}(I)=\exp\left[-\frac{\nu}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right]\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-\varepsilon I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}} & -\dfrac{\omega I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\\ -\dfrac{I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\end{pmatrix}. \tag{5.4.46}$$

Тип IV:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left(-\nu H^R\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ H^R & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.47}$$

$$\mathbf{A}(I) = \exp\left(\nu I^R\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ -I^R & 1\end{pmatrix}. \qquad (5.4.48)$$

5.5. Классификация параметризованных энтропий и информаций различия

Исследуем статистическую структуру параметризованных мер информаций, используя их групповые свойства. Для чего рассмотрим группы полунорм

$$N_{q-1}(p) = \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/(q-1)}, \quad N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/(q-1)}, \qquad (5.5.1)$$

являющихся функционалами распределений.

Вначале приведем закон композиции для $N_{q-1}(p)$ в виде обычного умножения

$$N_{q-1}(p_{12}) = N_{q-1}(p_1)\circ N_{q-1}(p_2) = N_{q-1}(p_1)N_{q-1}(p_2), \qquad (5.5.2)$$

что определяется свойством мультипликативности полунормы. Значения полунорм

$$N = N_{q-1}(p_{12}) = \left(\frac{\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q}{\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}}\right)^{1/(q-1)}, \qquad (5.5.3)$$

$$N_1 = N_{q-1}(p_1) = \left(\frac{\sum_i^m p_{1i}^q}{\sum_i^m p_{1i}}\right)^{1/(q-1)}, \quad N_2 = N_{q-1}(p_2) = \left(\frac{\sum_j^n p_{2j}^q}{\sum_i^n p_{2j}}\right)^{1/(q-1)} \qquad (5.5.4)$$

зависят от совместного распределения общего объекта $p_{ij} = p_i p_j$ и распределений независимых объектов p_i и p_j.

Приведем основные свойства закона композиции.

1.Коммутативность. Выполняется свойство коммутативности:

$$N_{q-1}(p_1)N_{q-1}(p_2)=N_{q-1}(p_2)N_{q-1}(p_1), \qquad (5.5.5)$$

следовательно, группа является абелевой.

2.Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 (раздел 5.1) выполняется свойство ассоциативности

$$\left[N_{q-1}\left(p_1\right)N_{q-1}\left(p_2\right)\right]N_{q-1}\left(p_3\right)=$$
$$=N_{q-1}\left(p_1\right)\left[N_{q-1}\left(p_2\right)N_{q-1}\left(p_3\right)\right]=N_{q-1}\left(p_1p_2p_3\right). \qquad (5.5.6)$$

3.Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 (раздел 5.1) единичный элемент группы есть постоянное значение полунормы

$$N_{q-1}(1)=1, \qquad (5.5.7)$$

равное единице при $p_i=1$. Это следует из нормированности полунормы на единицу (свойство 3, раздел 3.2).

4.Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 (раздел 5.1) из формулы взаимосвязи

$$N_{q-1}(p)N_{-q+1}\left(p^{-1}\right)=1 \qquad (5.5.8)$$

вытекает выражение обратного элемента группы полунорм

$$\left[N_{q-1}(p)\right]^{-1}=N_{-q+1}\left(p^{-1}\right). \qquad (5.5.9)$$

Энтропия каждого объекта является функцией полунормы этого объекта, то есть имеем зависимости

$$H=H(N),\quad H_1=H_1(N_1),\quad H_2=H_2(N_2). \qquad (5.5.10)$$

Для энтропий имеем известный закон композиции

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1H_2}{1+\omega H_1H_2}, \qquad (5.5.11)$$

где параметры ε и ω не зависят от энтропий.

Дифференцируем (5.5.2) и с учетом равенств

$$\frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_1}\frac{dN_1}{dH_1}\frac{dH_1}{dH},\quad \frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_2}\frac{dN_2}{dH_2}\frac{dH_2}{dH} \qquad (5.5.12)$$

получим исходное уравнение [23]

$$\left(1+\varepsilon H-\omega H^2\right)\frac{d\left[\ln N_{q-1}(p)\right]}{dH}=\lambda, \qquad (5.5.13)$$

имеющее одинаковый вид для всех рассматриваемых объектов. Здесь λ есть произвольная постоянная интегрирования, которая может зависеть от ε и ω.

Далее аналогично находим исходное уравнение для информации различия

$$\left(1-\varepsilon I-\omega I^2\right)\frac{d\left[\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]}{dI}=-\lambda\,. \tag{5.5.14}$$

При выводе (5.5.14) используются законы композиций

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2-\varepsilon I_1 I_2}{1+\omega I_1 I_2}\,, \tag{5.5.15}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right)=N_{q-1}\left(\frac{p_1}{u_1}\right)N_{q-1}\left(\frac{p_2}{u_2}\right) \tag{5.5.16}$$

для независимых объектов.

Интегрируя уравнения (5.5.13) и (5.5.14) с условиями $N_{q-1}\left(p\right)=1$ при $H=0$ и $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=1$ при $I=0$, различаем четыре типа решений в зависимости от значения дискриминанта $D=\varepsilon^2+4\omega$. Первые три типа следуют, если уравнения $1+\varepsilon H-\omega H^2=0$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2=0$ имеют вещественные и различные корни, включая случай $\omega=0$, два вещественных и равных, комплексные корни. Четвертый тип соответствует аддитивным законам композиций $H=H_1\circ H_2=H_1+H_2$ и $I=I_1\circ I_2=I_1+I_2$. Формально для этого типа можно в (5.5.13) и (5.5.14) принять равенство $\varepsilon=\omega=0$.

Решения рассматриваемых уравнений дают взаимосвязь $H=H\left[N_{q-1}(p)\right]$ и $I=I\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]$.

Рассмотрим соответствующие типы мер информаций.

Тип I. Пусть трехчлены при равенстве нулю имеют вещественные и различные корни, включая случай $\omega=0$. Запишем для трехчленов используемые ранее разложения на множители:

$$1+\varepsilon H-\omega H^2=\left[\frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)+\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{2}\right]^2-$$

$$-\left[\frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)-\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{2}\right]^2=\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right), \qquad (5.5.17)$$

$$1-\varepsilon I-\omega I^2=\left[\frac{\left(1-\varepsilon_1 I\right)+\left(1+\varepsilon_2 I\right)}{2}\right]^2-$$

$$-\left[\frac{\left(1-\varepsilon_1 I\right)-\left(1+\varepsilon_2 I\right)}{2}\right]^2=\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right)\quad . \qquad (5.5.18)$$

С учетом равенств $\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \omega=\varepsilon_1\varepsilon_2$ и $D=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2>0$, законы композиций мер информаций имеют вид

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2 H_1H_2}, \qquad (5.5.19)$$

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2-\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)I_1I_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2 I_1I_2}. \qquad (5.5.20)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14), являются следующие полунормы и меры информаций

$$N_{q-1}(p)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}},\quad H=\frac{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}{\varepsilon_2+\varepsilon_1\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}, \qquad (5.5.21)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}},\quad I=\frac{\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}-1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}. \qquad (5.5.22)$$

Учитывая условие нормированности энтропии

$$H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (5.5.23)$$

при $m = 2$, получим равенство

$$2^{\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}} = \frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \qquad (5.5.24)$$

для определения постоянной λ в (5.5.21).

Нормированная информация различия удовлетворяет условию

$$I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (5.5.25)$$

и, соответственно, постоянная λ в (5.5.22) находится из равенства

$$2^{\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}} = \frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}. \qquad (5.5.26)$$

Рассмотрим частные случаи мер информаций.

Тип IA ($\varepsilon_2 = 0$). Пусть трехчлен с $\omega = 0$ вырождается в двучлен $1+\varepsilon_1 H$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 + \varepsilon_1 H_1 H_2, \qquad (5.5.27)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 - \varepsilon_1 I_1 I_2. \qquad (5.5.28)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ из (5.5.24) и (5.5.26) вытекают значения $\varepsilon_1 = 2^{1-q}-1$ для энтропии и $\varepsilon_1 = 1-2^{q-1}$ для информации различия. Если $\varepsilon_1/\lambda = r-1$, то имеют другие значения $\varepsilon_1 = 2^{1-r}-1$ и $\varepsilon_1 = 1-2^{r-1}$. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1}{1-2^{1-q}}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (5.5.29)$$

$$H_{q,r} = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right] \qquad (5.5.30)$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1}{1-2^{q-1}}\left[1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right], \tag{5.5.31}$$

$$I_{q,r} = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right]. \tag{5.5.32}$$

Однопараметрические меры совпадают с энтропией Хаврда–Чарват–Дароши [78] и информацией различия Ратье–Каннаппана [101]. Двухпараметрические меры являются энтропией и информацией различия Шарма–Миттала, впервые введенные в работах [110] и [111], соответственно. Ненормированные информации различия равняются [120, 121]

$$I_q = \frac{1}{2^{1-q}-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), \tag{5.5.33}$$

$$I_{q,r} = \frac{1}{2^{1-r}-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right] \tag{5.5.34}$$

и рассматриваются в обзорах [120, 121].

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = 1-q$ и $\varepsilon_1 = 1-r$, то имеем физические безразмерные меры информаций:

$$H_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), H_{q,r}^{phys}=\frac{1}{r-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right], \qquad (5.5.35)$$

$$I_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), I_{q,r}^{phys}=\frac{1}{1-r}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right], \qquad (5.5.36)$$

где однопараметрическая энтропия Вейрля впервые введена в работе [129].

3. При $\varepsilon_1/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем $\varepsilon_1=1-2^{\beta-1}$ для энтропии и $\varepsilon_1=1-2^{1-\beta}$ для информации различия, что дает из (5.5.21) и (5.5.22) нормированные меры информаций

$$H_\beta=\frac{1}{1-2^{\beta-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \qquad (5.5.37)$$

$$I_\beta=\frac{1}{1-2^{1-\beta}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \qquad (5.5.38)$$

Если $\lambda=-1$, $\varepsilon_1=\beta-1$ и $q=1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys}=\frac{1}{1-\beta}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \qquad (5.5.39)$$

$$I_{\beta}^{phys} = \frac{1}{\beta - 1}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\beta}\right]. \tag{5.5.40}$$

Однопараметрическая энтропия Аримото (5.5.39) впервые введена в работе [54], а свойства мер изучены в [61, 120, 121].

Тип IB ($\varepsilon_1 = 0$). Пусть трехчлен с $\omega = 0$ вырождается в двучлен $1 - \varepsilon_2 H$. Запишем законы композиции мер информации

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 - \varepsilon_2 H_1 H_2 , \tag{5.5.41}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 + \varepsilon_2 I_1 I_2 . \tag{5.5.42}$$

1. При $\varepsilon_2 / \lambda = q - 1$ из (5.5.24) и (5.5.26) вытекают значения $\varepsilon_2 = 1 - 2^{q-1}$ для энтропии и $\varepsilon_2 = 2^{1-q} - 1$ для информации различия, соответственно. Если $\varepsilon_1 / \lambda = r - 1$, то имеем другие значения $\varepsilon_2 = 1 - 2^{r-1}$ и $\varepsilon_2 = 2^{1-r} - 1$. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1}{1 - 2^{q-1}}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], \tag{5.5.43}$$

$$H_{q,r} = \frac{1}{1 - 2^{r-1}}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right] \tag{5.5.44}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1}{2^{q-1} - 1}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], \tag{5.5.45}$$

$$I_{q,r} = \frac{1}{2^{r-1}-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right]. \qquad (5.5.46)$$

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_2 = 1-q$ и $\varepsilon_2 = 1-r$, то из (5.5.21) и (5.5.22) следуют физические безразмерные меры информаций

$$H_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right], \qquad (5.5.47)$$

$$I_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right]. \qquad (5.5.48)$$

Однопараметрическая энтропия Ландсберга–Ведрала (5.5.47) впервые введена в работах [89, 90], где дается классификация мер, проведенная феноменологическим путем. Остальные меры информаций впервые вводятся в работах автора [21, 23].

3. При $\varepsilon_2 / \lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем $\varepsilon_2 = 1-2^{1-\beta}$ для энтропии и $\varepsilon_2 = 1-2^{\beta-1}$ для информации различия, что дает из (5.5.21) и (5.5.22) нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1}{1-2^{1-\beta}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right], \qquad (5.5.49)$$

$$I_\beta = \frac{1}{1-2^{\beta-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right]. \qquad (5.5.50)$$

Если $\lambda = -1$, $\varepsilon_2 = \beta - 1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right], \qquad (5.5.51)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right]. \qquad (5.5.52)$$

Тип IC ($\varepsilon = 0$). Пусть трехчлен вырождается в двучлен $1-\omega H^2$, который при равенстве нулю имеет два противоположных корня и, следовательно, справедливы равенства $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\omega = \varepsilon_1^2$. Законы композиции меры информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2}{1+\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.53)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2}{1+\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.54)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-q$ и $\varepsilon_1/\lambda = 1-r$ из (5.5.24) вытекают, соответственно, значения параметров для энтропии

$$\varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-q)}}{1+2^{2(1-q)}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-r)}}{1+2^{2(1-r)}}. \qquad (5.5.55)$$

Для информации различия имеем, согласно (5.5.26), значения параметров, совпадающие с (5.5.55). В итоге из (5.5.21) и (5.5.22) вытекают одно- и двухпараметрические энтропии:

$$H_q = \frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2} \right], \tag{5.5.56}$$

$$H_{q,r} = \frac{1+2^{2(1-r)}}{1-2^{2(1-r)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}} \right] \tag{5.5.57}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2} \right] \tag{5.5.58}$$

$$I_{q,r} = \frac{2^{2(1-r)}+1}{2^{2(1-r)}-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}} \right]. \tag{5.5.59}$$

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = q-1$ и $\varepsilon_1 = r-1$, то из (5.5.21) и (5.5.22) следуют физические безразмерные энтропии

$$H_q^{phys} = \frac{1}{q-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2} \right], \tag{5.5.60}$$

$$H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right] \tag{5.5.61}$$

и информации различия

$$I_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right], \tag{5.5.62}$$

$$I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.63}$$

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем из (5.5.24) значение параметра для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-\beta)}}{1+2^{2(1-\beta)}}, \tag{5.5.64}$$

а из (5.5.21) и (5.5.22) вытекают нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1+2^{2(1-\beta)}}{1-2^{2(1-\beta)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}\right], \tag{5.5.65}$$

$$I_\beta = \frac{1+2^{2(\beta-1)}}{1-2^{2(\beta-1)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}\right]. \qquad (5.5.66)$$

Если $\lambda=-1$, $\varepsilon_1=\beta-1$ и $q=1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры информации

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}\right], \qquad (5.5.67)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}\right]. \qquad (5.5.68)$$

Тип ID ($\varepsilon_2=\gamma\varepsilon_1$). Пусть трехчлены равняются $1+\varepsilon H-\omega H^2 = =\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\gamma\varepsilon_1 H\right)$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2=\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\gamma\varepsilon_1 I\right)$, то есть при равенстве их нулю имеем пропорциональные корни. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1\circ H_2 = \frac{H_1+H_2+\left(1-\gamma\right)\varepsilon_1 H_1 H_2}{1+\gamma\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.69)$$

$$I = I_1\circ I_2 = \frac{I_1+I_2-\left(1-\gamma\right)\varepsilon_1 I_1 I_2}{1+\gamma\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.70)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda=q-1$ из (5.5.24) и (5.5.26) следуют, соответственно, значения параметров для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = -\frac{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{2^{(1+\gamma)(1-q)}-1}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}. \qquad (5.5.71)$$

Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{q,\gamma}=\frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right] \qquad (5.5.72)$$

и информацию различия

$$I_{q,\gamma}=\frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{2^{(1+\gamma)(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right]. \qquad (5.5.73)$$

2. Если $\lambda=-1$ и $\varepsilon_1=1-q$, то имеем физические безразмерные меры информаций

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right], \qquad (5.5.74)$$

$$I_{q,\gamma}^{phys}=\frac{1}{1-q}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right]. \qquad (5.5.75)$$

3. При $\varepsilon_1/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем из (5.5.24) и (5.5.26) значения параметров

$$\varepsilon_1=-\frac{1-2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}, \quad \varepsilon_1=-\frac{1-2^{(1+\gamma)(1-\beta)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-\beta)}} \qquad (5.5.76)$$

для энтропии и информации различия, соответственно. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{\beta,\gamma}=\frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}{1-2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{(1+\gamma)\beta}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{(1+\gamma)\beta}}\right] \qquad (5.5.77)$$

и информацию различия

$$I_{\beta,\gamma}=\frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-\beta)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-\beta)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{(1+\gamma)\beta}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{(1+\gamma)\beta}}\right]. \qquad (5.5.78)$$

Тип ID обобщает **Тип IA** и **Тип IC**, так как они соответствуют значениям параметра $\gamma=0$ и $\gamma=1$, соответственно.

Тип II. Пусть трехчлены при равенстве нулю имеют два вещественных и равных корня. Запишем для трехчленов используемые ранее разложения на множители $1+\varepsilon H-\omega H^2=\left(1+\varepsilon_1 H\right)^2$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2=\left(1-\varepsilon_1 I\right)^2$. С учетом равенств $\omega=-\varepsilon_1^2$, $D=0$, $\varepsilon=2\varepsilon_1$ для энтропии и $\varepsilon=-2\varepsilon_1$ для информации различия законы композиций мер информаций имеют вид:

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2-2\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.79)$$

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2+2\varepsilon_1 I_1 I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.80)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются следующие полунормы и меры информаций

$$N_{q-1}(p)=\exp\left(-\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \quad H=-\frac{\lambda^{-1}\ln N_{q-1}(p)}{1+\varepsilon_1\lambda^{-1}\ln N_{q-1}(p)}, \qquad (5.5.81)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\exp\left(\frac{\lambda I}{1-\varepsilon_1 I}\right), \quad I=\frac{\lambda^{-1}\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)}{1+\varepsilon_1\lambda^{-1}\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)}. \qquad (5.5.82)$$

Учитывая условия нормированности энтропии (5.5.23) и информации различия (5.5.25), получим равенства

$$\ln 2 = \frac{\lambda}{1+\varepsilon_1}, \quad \ln 2 = \frac{\lambda}{1-\varepsilon_1} \tag{5.5.83}$$

для определения значения λ в выражениях (5.5.81) и (5.5.82), соответственно.

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ и $\varepsilon_1/\lambda = r-1$ из (5.5.83) вытекают соответствующие значения ε_1 для энтропии и для информации различия. Согласно (5.5.81) и (5.5.82) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1+(1-q)\ln 2}{(1-q)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.84}$$

$$H_{q,r} = \frac{1+(1-r)\ln 2}{(1-q)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right] \tag{5.5.85}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1+(q-1)\ln 2}{(q-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.86}$$

$$I_{q,r} = \frac{1+(r-1)\ln 2}{(q-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.87}$$

2. Если $\lambda = 1$, а также $\varepsilon_1 = q-1$ и $\varepsilon_1 = r-1$, то из (5.5.81) и (5.5.82)

следуют физические безразмерные энтропии

$$H_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.88}$$

$$H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-q}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right] \tag{5.5.89}$$

и информации различия

$$I_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.90}$$

$$I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{q-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.91}$$

Одно- и двухпараметрические энтропии впервые введены автором в работе [23].

3. При $\varepsilon_1 = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем соответствующие значения λ для энтропии и информации различия, что дает из (5.5.81) и (5.5.82) нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1+(\beta-1)\ln 2}{(\beta-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right], \tag{5.5.92}$$

$$I_\beta = \frac{1+(1-\beta)\ln 2}{(1-\beta)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right]. \qquad (5.5.93)$$

Если $\lambda = 1$, $\varepsilon_1 = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right], \qquad (5.5.94)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right]. \qquad (5.5.95)$$

Тип III. Пусть трехчлены при равенстве нулю не имеют вещественных корней, то есть справедливо условие $D < 0$. Законы композиций мер информаций имеют вид

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.96)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.97)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются полунормы

$$N_{q-1}(p) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2-\omega H}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right], \tag{5.5.98}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2+\omega I}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right] \tag{5.5.99}$$

и меры информаций

$$H = \frac{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4} - \frac{\varepsilon}{2}\left\{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}\right\}}, \tag{5.5.100}$$

$$I = \frac{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4} + \frac{\varepsilon}{2}\left\{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}\right\}}. \tag{5.5.101}$$

Учитывая условия нормированности энтропии и информации различия(5.5.23) и (5.5.25), получим соответствующие значения постоянных

$$\lambda = -\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}\quad \ln 2}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+\varepsilon/2}\right)}, \tag{5.5.102}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}\quad \ln 2}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-\varepsilon/2}\right)}. \tag{5.5.103}$$

Запишем для трехчленов используемые ранее выражения

$$1+\varepsilon H-\omega H^2=\left[\frac{(1+\varepsilon_1 H)+(1-\varepsilon_2 H)}{2}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{(1+\varepsilon_1 H)-(1-\varepsilon_2 H)}{2}\right]^2=\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_1 H)^2+(1-\varepsilon_2 H)^2\right], \tag{5.5.104}$$

$$1-\varepsilon I-\omega I^2=\left[\frac{(1-\varepsilon_1 I)+(1+\varepsilon_2 I)}{2}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{(1-\varepsilon_1 I)-(1+\varepsilon_2 I)}{2}\right]^2=\frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_1 I)^2+(1+\varepsilon_2 I)^2\right]. \tag{5.5.105}$$

С учетом равенств

$$\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \omega=-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2},\quad D=\varepsilon^2+4\omega=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 \tag{5.5.106}$$

законы композиций мер информаций имеют вид:

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H_1H_2}{1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)H_1H_2/2}, \tag{5.5.107}$$

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)I_1I_2}{1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)I_1I_2/2}. \tag{5.5.108}$$

Из (5.5.98)–(5.5.101) вытекают полунормы, энтропия и информация различия

$$N_{q-1}(p)=\exp\left\{\frac{2\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left[\frac{H(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}{1+H(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}\right]\right\}, \tag{5.5.109}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\exp\left\{-\frac{2\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left[\frac{I(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}{1-I(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}\right]\right\}, \tag{5.5.110}$$

$$H = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}, \quad (5.5.111)$$

$$I = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[-\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}. \quad (5.5.112)$$

Значения постоянных в нормированных энтропии и информации различия равняются

$$\lambda = -\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ln 2}{2\,\mathrm{arctg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/(2+\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right]}, \quad (5.5.113)$$

$$\lambda = -\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ln 2}{2\,\mathrm{arctg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/(2-\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]}. \quad (5.5.114)$$

Рассмотрим частные случаи мер информаций.

Тип IIIA ($\varepsilon_2 = 0$). Пусть трехчлены равняются $1+\varepsilon H-\omega H^2 = \frac{1}{2}\left[1+(1+\varepsilon_1 H)^2\right]$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2 = \frac{1}{2}\left[1+(1-\varepsilon_1 I)^2\right]$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1+H_2+\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2/2}, \quad (5.5.115)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1+I_2-\varepsilon_1 I_1 I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2/2}. \quad (5.5.116)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ из (5.5.113) и (5.5.114) вытекают значения параметров

$$\varepsilon_1 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}{1-\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}{1+\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]} \quad (5.5.117)$$

для энтропии и информации различия, соответственно. Если $\varepsilon_1/\lambda = r-1$, то в (5.5.117) следует сделать замену q на r. Таким образом, из (5.5.111) и (5.5.112) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q=\frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\},\qquad(5.5.118)$$

$$H_{q,r}=\frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-r)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-r)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}\qquad(5.5.119)$$

и информации различия

$$I_q=\frac{1+\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\},\qquad(5.5.120)$$

$$I_{q,r}=\frac{1+\mathrm{tg}\left[(r-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(r-1)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}\ .\qquad(5.5.121)$$

2. Если $\lambda=-1$, а также $\varepsilon_1=1-q$ и $\varepsilon_1=1-r$, то имеем физические безразмерные меры информаций

$$H_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\},\qquad(5.5.122)$$

$$H_{q,r}^{phys}=\frac{1}{1-r}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \qquad (5.5.123)$$

$$I_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \qquad (5.5.124)$$

$$I_{q,r}^{phys}=\frac{1}{r-1}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}\;. \qquad (5.5.125)$$

3. При $\varepsilon_1/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем соответствующие значения постоянных для энтропии и информации различия и в итоге из (5.5.111) и (5.5.112) получим

$$H_\beta=\frac{1-\mathrm{tg}\left[(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}, \qquad (5.5.126)$$

$$I_\beta=\frac{1+\mathrm{tg}\left[(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}\;. \qquad (5.5.127)$$

Если $\lambda=-1$, $\varepsilon_1=\beta-1$ и $q=1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры:

$$H_\beta^{phys} = \frac{2}{\beta-1}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}, \tag{5.5.128}$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{2}{1-\beta}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}. \tag{5.5.129}$$

Тип IIIB ($\varepsilon = 0$). Пусть трехчлены с $\omega = -\varepsilon_1^2$ вырождаются в двучлены $1-\omega H^2$ и $1-\omega I^2$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \tag{5.5.130}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \tag{5.5.131}$$

При значениях энтропий, равных $H_1 = \left(-1\big/\sqrt{-\omega}\right)$ и $H_2 = \left(1/\varepsilon_1\right)$, из закона композиции (5.5.130) получим энтропии

$$H_+ = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \circ H = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cdot \frac{1-\varepsilon_1 H}{1+\varepsilon_1 H}, \tag{5.5.132}$$

$$H_- = H \circ \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cdot \frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_1 H}. \tag{5.5.133}$$

Из (5.5.132) и (5.5.133) вытекает, что в данной группе значения энтропий не имеют инвариантных выражений для независимых объектов. Однако для обычного произведения H_+ на H_- выполняется инвариантное соотношение

$$H_+ H_- = -\frac{1}{\varepsilon_1^2}, \tag{5.5.134}$$

а для произведения элементов группы имеем

$$H_+ \circ H_- = \frac{2H}{1-\varepsilon_1^2 H}. \qquad (5.5.135)$$

Аналогичные выводы справедливы для информации различия.

Из (5.5.98) – (5.5.101) вытекают полунормы

$$N_{q-1}(p) = \exp\left[\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\operatorname{arctg}\left(\varepsilon_1 H\right)\right], \qquad (5.5.136)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\operatorname{arctg}\left(\varepsilon_1 I\right)\right] \qquad (5.5.137)$$

и меры информации

$$H = \frac{1}{\varepsilon_1}\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_1/\lambda}, \qquad (5.5.138)$$

$$I = \frac{1}{\varepsilon_1}\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1/\lambda}. \qquad (5.5.139)$$

Согласно (5.5.102) или (5.5.103), имеем значение постоянной

$$\lambda = -\frac{\varepsilon_1 \ln 2}{\operatorname{arctg}\varepsilon_1}. \qquad (5.5.140)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ и $\varepsilon_1/\lambda = r-1$ с учетом (5.5.140) из (5.5.138), (5.5.139) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[\left(1-q\right)\ln 2\right]}, \qquad (5.5.141)$$

$$H_{q,r} = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[\left(1-r\right)\ln 2\right]} \qquad (5.5.142)$$

и информации различия:

$$I_q = \frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}, \tag{5.5.143}$$

$$I_{q,r} = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}. \tag{5.5.144}$$

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = 1-q$ и $\varepsilon_1 = 1-r$, то из (5.5.138), (5.5.139) получим физические безразмерные меры информации

$$H_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \quad H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\operatorname{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \tag{5.5.145}$$

$$I_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\operatorname{tg}\left[\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right], \quad I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\operatorname{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right]. \tag{5.5.146}$$

Одно- и двухпараметрические энтропии (5.5.145) и информации различия (5.5.146) впервые введены автором в работе [23].

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ из (5.5.138) и (5.5.139) вытекают нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[(\beta-1)\ln 2\right]}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \tag{5.5.147}$$

$$I_\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[(1-\beta)\ln 2\right]}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \tag{5.5.148}$$

Если $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$, $\lambda = -1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры информации:

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \qquad (5.5.149)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \qquad (5.5.150)$$

Тип IIIC $\left(\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1\right)$**.** Пусть трехчлены равняются

$$1+\varepsilon H - \omega H^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1+\varepsilon_1 H\right)^2 + \left(1-\gamma\varepsilon_1 H\right)^2\right], \qquad (5.5.151)$$

$$1-\varepsilon I - \omega I^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1-\varepsilon_1 I\right)^2 + \left(1+\gamma\varepsilon_1 I\right)^2\right]. \qquad (5.5.152)$$

Тогда, согласно (5.5.107) и (5.5.108), законы композиции мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + (1-\gamma)\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\left(1+\gamma^2\right)\varepsilon_1^2 H_1 H_2 / 2}, \qquad (5.5.153)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - (1-\gamma)\varepsilon_1 I_1 I_2}{1-\left(1+\gamma^2\right)\varepsilon_1^2 I_1 I_2 / 2}. \qquad (5.5.154)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-q$ из (5.5.113) и (5.5.114) вытекают, соответственно, значения параметров для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = \frac{2\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}, \qquad (5.5.155)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}. \qquad (5.5.156)$$

Согласно (5.5.11) и (5.5.112) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\ , \qquad (5.5.157)$$

$$I_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\ . \qquad (5.5.158)$$

2. Если $\lambda=-1$ и $\varepsilon_1=1-q$, то имеем физические безразмерные меры информации

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1-q)\left\{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]\right\}}\ , \qquad (5.5.159)$$

$$I_{q,\gamma}^{phys}=\frac{2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(q-1)\left\{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]\right\}}\ . \qquad (5.5.160)$$

3. При $\varepsilon_2/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем из (5.5.111) и (5.5.112) двухпараметрическую энтропию:

$$H_{\beta,\gamma} = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]}{\varepsilon_2\left\{(1+\gamma)-(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]\right\}} \qquad (5.5.161)$$

и информацию различия

$$I_{\beta,\gamma} = -\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]}{\varepsilon_2\left\{(1+\gamma)+(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]\right\}} \qquad (5.5.162)$$

с соответствующими значениями параметров

$$\varepsilon_2 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}, \qquad (5.5.163)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)+(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}. \qquad (5.5.164)$$

Тип IIIC обобщает **тип IA** и **тип IB**, так как они соответствуют значениям параметра $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$.

Тип IV ($\varepsilon = \omega = 0$). Пусть трехчлен вырождается в единицу, то есть параметры равняются нулю. Законы композиции запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2, \qquad (5.5.165)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2. \qquad (5.5.166)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются следующие полунормы и физические безразмерные меры информаций

$$N_{q-1}(p) = \exp(\lambda H), \quad H = \lambda^{-1} \ln N_{q-1}(p), \qquad (5.5.167)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\exp(-\lambda I), \quad I=\lambda^{-1}\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right). \qquad (5.5.168)$$

1. Учитывая условия нормированности энтропии (5.5.23) и информации различия (5.5.25), получим равенство

$$\lambda=-\ln 2. \qquad (5.5.169)$$

В итоге из (5.5.167) и (5.5.168) имеем однопараметрические меры Реньи [103, 104]

$$H_q=\frac{1}{1-q}\log_2\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}, \quad I_q=\frac{1}{q-1}\log_2\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.170)$$

2. Если $\lambda=-1$, то имеем известные физические безразмерные меры

$$H_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}, \quad I_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.171)$$

3. При $\lambda=-1$ и $q=1/\beta$ получим физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys}=\frac{1}{\beta-1}\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta, \qquad (5.5.172)$$

$$I_\beta^{phys}=\frac{1}{1-\beta}\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta. \qquad (5.5.173)$$

В заключение отметим, что в пределах из рассматриваемых нормированных мер вытекают энтропия Шеннона–Винера и информация различия Кульбака–Лейблера

$$H(p)=\lim_{q\to 1}H_q=\lim_{\substack{q\to 1\\ r\to 1}}H_{q,r}=\lim_{\beta\to 1}H_\beta=\lim_{\substack{\beta\to 1\\ \gamma\to 1}}H_{\beta,\gamma}=\lim_{\substack{\beta\to 1\\ \gamma\to 0}}H_{\beta,\gamma}=$$

$$= \lim_{\substack{q\to1\\ \gamma\to1}} H_{q,\gamma} = \lim_{\substack{q\to1\\ \gamma\to0}} H_{q,\gamma} = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.5.174)$$

$$I\left(p:u\right) = \lim_{q\to1} I_q = \lim_{\substack{q\to1\\ r\to1}} I_{q,r} = \lim_{\beta\to1} I_\beta = \lim_{\substack{\beta\to1\\ \gamma\to1}} I_{\beta,\gamma} = \lim_{\substack{\beta\to1\\ \gamma\to0}} I_{\beta,\gamma} =$$

$$= \lim_{\substack{q\to1\\ \gamma\to1}} I_{q,\gamma} = \lim_{\substack{q\to1\\ \gamma\to0}} I_{q,\gamma} = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.175)$$

Таким образом, рассматриваемым законам композиций соответствуют только четыре принципиально различных типа мер информаций. Первые три содержат в законах композиций квадратичную нелинейность, а четвертый отражает аддитивные параметризованные меры. Причем рассматриваемые типы могут содержать и другие частные случаи мер информаций.

5.6. Предельные однопараметрические меры

Рассмотрим предельные выражения двухпараметрических мер информаций $H_{q,r}(p)$ и $I_{q,r}\left(\frac{p}{u}\right)$ при $r=1$ и $q=1$. Для всех нормированных типов мер информаций при $r=1$ получим предельные однопараметрические меры

$$\lim_{r\to1} H_{q,r} = \frac{1}{1-q}\log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.6.1)$$

$$\lim_{r\to1} I_{q,r} = \frac{1}{q-1}\log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.6.2)$$

совпадающие с энтропией и информацией различия Реньи.

Если $q=1$, то используем известные соотношения:

$$\lim_{q\to 1} N_{q-1}(p) = N(p) = 2^{-H(p)} = e^{-H^{phys}(p)}, \qquad (5.6.3)$$

$$\lim_{q\to 1} N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = N\left(\frac{p}{u}\right) = 2^{I(p:u)} = e^{I^{phys}(p:u)} \qquad (5.6.4)$$

при нахождении мер

$$H_r = \lim_{q\to 1} H_{q,r}, \quad I_r = \lim_{q\to 1} I_{q,r}. \qquad (5.6.5)$$

Здесь энтропия Шеннона–Винера и информация различия Кульбака–Лейблера есть функционалы

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}{\sum_i^m p_i}, \quad I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.6.6)$$

В случае физических безразмерных мер используемый логарифм меняется на натуральный.

Свойства средних геометрических $N_{q-1}(p)$ и $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$ даются в разделе 1.3.

Приведем соответствующие типы мер информаций, вытекающие при $q=1$ из результатов предыдущего раздела.

Тип IA.

1. $H_r = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left[1-2^{(1-r)H(p)}\right],\ I_r = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-2^{(r-1)I(p:u)}\right], \qquad (5.6.7)$

2. $H_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-e^{(1-r)H^{phys}(p)}\right],\ I_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-e^{(r-1)I^{phys}(p:u)}\right]. \qquad (5.6.8)$

Тип IB.

1. $H_r = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-2^{(r-1)H(p)}\right], \quad I_r = \frac{1}{2^{r-1}-1}\left[1-2^{(1-r)I(p:u)}\right], \qquad (5.6.9)$

2. $H_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-e^{(r-1)H^{phys}(p)}\right], \quad I_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-e^{(1-r)I^{phys}(p:u)}\right]. \quad (5.6.10)$

Тип IC.

$$1:\ H_r=\frac{1+2^{2(1-r)}}{1-2^{2(1-r)}}\left[\frac{1-2^{2(1-r)H(p)}}{1+2^{2(1-r)H(p)}}\right],$$

$$I_r=\frac{2^{2(1-r)}+1}{2^{2(1-r)}-1}\left[\frac{1-2^{2(r-1)I(p:u)}}{1+2^{2(r-1)I(p:u)}}\right]. \qquad (5.6.11)$$

$$2:\ H_r^{phys}=\frac{1}{r-1}\left[\frac{1-e^{2(1-r)H^{phys}(p)}}{1+e^{2(1-r)H^{phys}(p)}}\right],$$

$$I_r^{phys}=\frac{1}{1-r}\left[\frac{1-e^{2(r-1)I^{phys}(p:u)}}{1+e^{2(r-1)I^{phys}(p:u)}}\right]. \qquad (5.6.12)$$

Тип II.

$$1.\ H_r=\frac{\left[1+(1-r)\ln 2\right]H(p)}{1+2^{(1-r)H(p)}},\quad I_r=\frac{\left[1+(r-1)\ln 2\right]I(p:u)}{1+2^{(r-1)I(p:u)}}, \qquad (5.6.13)$$

$$2.\ H_r^{phys}=\frac{H(p)}{1+2^{(1-r)H(p)}},\quad I_r^{phys}=\frac{I(p:u)}{1+2^{(r-1)I(p:u)}}. \qquad (5.6.14)$$

Тип IIIA.

$$1:\ H_r=\frac{1-\operatorname{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}{1-\operatorname{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}\right\},$$

$$I_r=\frac{1+\operatorname{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}{\operatorname{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}{1+\operatorname{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}\right\}. \qquad (5.6.15)$$

$$2:\ H_r^{phys}=\frac{1}{1-r}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[(1-r)H^{phys}(p)\right]}{1-\operatorname{tg}\left[(1-r)H^{phys}(p)\right]}\right\},$$

$$I_r^{phys}=\frac{1}{r-1}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]}{1+\operatorname{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]}\right\}. \qquad (5.6.16)$$

Тип IIIB.

$$1:\ H_r=\frac{\operatorname{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}{\operatorname{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]},$$

$$I_r = \frac{\mathrm{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}{\mathrm{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}. \qquad (5.6.17)$$

$$2:\ H_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\mathrm{tg}\left[\left(1-r\right)H^{phys}(p)\right],$$

$$I_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\mathrm{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]. \qquad (5.6.18)$$

Отметим, что меры информаций, рассмотренные в разделе 3.5, можно представить в формах (5.6.7) – (5.6.18) при замене $H(p)$ и $I(p:u)$ на энтропию и информацию различия Реньи.

5.7. Закон композиции элементов группы случайных мер

Переходим к исследованию абелевой группы случайных энтропий $h = h(p)$ с коммутативным законом композиции элементов $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$, в который входят только $h_1 = h(p_1)$, $h_2 = h(p_2)$ и их произведения $h_1 h_2$. Приведем абстрактный вывод явного вида закона композиции элементов и его свойства. Для чего запишем закон в следующем виде

$$h = h_1 \circ h_2 = a\left[h_1 + h_2\psi(h_1)\right]. \qquad (5.7.1)$$

Здесь коэффициент a не зависит от h_1 и h_2. В противном случае не будет соответствия с группой средних энтропий. Однако он может зависеть от средних энтропий, определяемых в общем случае взвешенным f-средним

$$H = \sum_i^m h(p_i) f(p_i). \qquad (5.7.2)$$

Используя условие коммутативности в (5.7.1), найдем соотношения

$$a\left[h_1 + h_2\psi(h_1)\right] = a\left[h_2 + h_1\psi(h_2)\right], \qquad (5.7.3)$$

из которых получим ограничения на функцию

$$\frac{1-\psi(h_1)}{h_1} = \frac{1-\psi(h_2)}{h_2} = \varepsilon. \qquad (5.7.4)$$

Параметр ε не зависит от случайных энтропий. Подстановка (5.7.4) в (5.7.3) дает закон композиции [21]

$$h = h_1 \circ h_2 = a\left(h_1 + h_2 - \varepsilon h_1 h_2\right). \qquad (5.7.5)$$

Поскольку справедливо условие мультипликативности $f\left(p_{ij}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right)$ для независимых объектов, то после усреднения (5.7.5) получим

$$H = a\left(H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) - \varepsilon H_1 H_2\right), \qquad (5.7.6)$$

где средние энтропии

$$H_1 = \sum_i^m h\left(p_i\right) f\left(p_i\right), \quad H_2 = \sum_j^n h\left(p_j\right) f\left(p_j\right), \qquad (5.7.7)$$

$$H = \sum_i^m \sum_j^n h\left(p_{ij}\right) f\left(p_{ij}\right). \qquad (5.7.8)$$

Рассмотрим основные свойства определения (5.7.5)

1. Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 выполняется свойство ассоциативности

$$\left(h_1 \circ h_2\right) \circ h_3 = h_1 \circ \left(h_2 \circ h_3\right) =$$
$$= \alpha\left[\alpha\left(h_1 + h_2\right) + h_3 - \varepsilon\alpha\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3\right] =$$
$$= \alpha\left[h_1 + \alpha\left(h_2 + h_3\right) - \varepsilon\alpha\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3\right], \qquad (5.7.9)$$

из которого вытекает равенство $a = 1$.

В итоге имеем закон композиции

$$h = h_1 \circ h_2 = h_1 + h_2 - \varepsilon h_1 h_2 \qquad (5.7.10)$$

и свойство ассоциативности

$$\left(h_1 \circ h_2\right) \circ h_3 = h_1 \circ \left(h_2 \circ h_3\right) =$$
$$= h_1 + h_2 + h_3 - \varepsilon\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3. \qquad (5.7.11)$$

2. Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 единичный элемент группы находим из формулы

$$h_1 \circ E = h + E - \varepsilon h E = h, \qquad (5.7.12)$$

которая дает значение $E = 0$. Таким образом, единичный элемент соответствует нулевому значению случайной энтропии $h=0$.

3. Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 из формулы

$$h \circ h^{-1} = h + h^{-1} - \varepsilon h h^{-1} = 0 \tag{5.7.13}$$

вытекает выражение для обратного элемента

$$h^{-1} = -\frac{h}{1-\varepsilon h}. \tag{5.7.14}$$

4. Сопряженный элемент. Подставим в определение сопряженного элемента

$$h' = c^{-1} \circ h \circ c \tag{5.7.15}$$

значение $c^{-1} = -c\left(1-\varepsilon c\right)^{-1}$ и получим равенство

$$h' = h, \tag{5.7.16}$$

которое означает сопряженность элементов группы случайных энтропий.

5. Равенства. Используя закон композиции и его свойства, находим следующие равенства

$$\frac{1}{(-h)} - \frac{1}{h^{-1}} = -\varepsilon, \quad (1-\varepsilon h)\left(1-\varepsilon h^{-1}\right) = 1, \tag{5.7.17}$$

$$(1-\varepsilon h) = \left(1-\varepsilon h_1\right)\left(1-\varepsilon h_2\right), \tag{5.7.18}$$

$$1-\varepsilon\left(h_1 \circ h_2 \circ h_3\right) = \left(1-\varepsilon h_1\right)\left(1-\varepsilon h_2\right)\left(1-\varepsilon h_3\right), \tag{5.7.19}$$

$$\left(1-\varepsilon h_1\right)\left(1-\varepsilon h_2\right)\left(1-\varepsilon h^{-1}\right) = 1, \tag{5.7.20}$$

$$\left(h_1 + h_2 + h^{-1}\right) - \varepsilon\left(h_1 h_2 + h_2 h^{-1} + h^{-1} h_1\right) +$$

$$+\varepsilon^2 h_1 h_2 h^{-1} = 0, \tag{5.7.21}$$

в) $$h_1 = h \circ h_2^{-1} = \frac{h-h_2}{1-\varepsilon h_2}, \quad h_1 = h_1^{-1} \circ h = \frac{h-h_1}{1-\varepsilon h_1}, \tag{5.7.22}$$

$$\left(h_1 \circ h_2\right)^{-1} = h_2^{-1} \circ h_1^{-1}, \quad \left(h_1 \circ h_2 \circ h_3\right)^{-1} = h_3^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1}, \tag{5.7.23}$$

$$\frac{1}{h_1^{-1} \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1} = \varepsilon, \tag{5.7.24}$$

$$\frac{1}{h_1 \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1^{-1}} = \frac{1}{h_1^{-1} \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1}, \qquad (5.7.25)$$

$$h^{(2)} = h \circ h = 2h - \varepsilon h^2, \quad h = \frac{h^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(h^{(2)}\right)}}, \qquad (5.7.26)$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon\left(h^{(2)}\right)} = 1 - \varepsilon h, \qquad (5.7.27)$$

$$h^{(2n)} = h_1^{(n)} \circ h_2^{(n)} = h_1^{(n)} + h_2^{(n)} - \varepsilon h_1^{(n)} h_2^{(n)}, \quad \left(h = h_1 \circ h_2\right). \qquad (5.7.28)$$

Абелева группа случайных информаций различия определяется аналогично приведенной группе. Закон композиции случайных информаций различия имеет вид

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 + \varepsilon I_1 I_2 \qquad (5.7.29)$$

и задается заменой $h \to -I$ в законе композиций случайных энтропий. Определение (5.7.29) с $I_1 = I\left(p_{1i} : u_{1i}\right)$ и $I_2 = I\left(p_{2i} : u_{2i}\right)$ удовлетворяет свойству ассоциативности. Единичному элементу группы $E = 0$ соответствует нулевое значение случайной информации различия $I = 0$. Обратный элемент определяется выражением $I^{-1} = -I\left(1 + \varepsilon I\right)^{-1}$. Элементы группы являются самосопряженными, то есть $I' = I$.

По аналогии с равенствами для случайных энтропий находим следующие равенства для случайных информаций различия

$$\frac{1}{(-I)} - \frac{1}{I^{-1}} = \varepsilon, \quad \left(1 + \varepsilon I\right)\left(1 + \varepsilon I^{-1}\right) = 1, \qquad (5.7.30)$$

$$\left(1 + \varepsilon I\right) = \left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 + \varepsilon I_2\right), \qquad (5.7.31)$$

$$1 + \varepsilon\left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right) = \left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 - \varepsilon I_2\right)\left(1 - \varepsilon I_3\right), \qquad (5.7.32)$$

$$\left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 + \varepsilon I_2\right)\left(1 + \varepsilon I^{-1}\right) = 1, \qquad (5.7.33)$$

$$\left(I_1 + I_2 + I^{-1}\right) + \varepsilon\left(I_1 I_2 + I_2 I^{-1} + I^{-1} I_1\right) + \varepsilon^2 I_1 I_2 I^{-1} = 0, \qquad (5.7.34)$$

$$I_1 = I \circ I_2^{-1} = \frac{I - I_2}{1+\varepsilon I_2}, \quad I_1 = I_1^{-1} \circ I = \frac{I - I_1}{1+\varepsilon I_1}, \tag{5.7.35}$$

$$\left(I_1 \circ I_2\right)^{-1} = I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \quad \left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right)^{-1} = I_3^{-1} \circ I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \tag{5.7.36}$$

$$\frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1} = -\varepsilon, \quad \frac{1}{I_1 \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1^{-1}} = \frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1}, \tag{5.7.37}$$

$$I^{(2)} = I \circ I = 2I + \varepsilon I^2, \quad I = \frac{I^{(2)}}{1+\sqrt{1-\varepsilon I^{(2)}}}, \tag{5.7.38}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon I^{(2)}} = 1 + \varepsilon I, \tag{5.7.39}$$

$$I^{(2n)} = I_1^{(n)} \circ I_2^{(n)} = I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + \varepsilon I_1^{(n)} I_2^{(n)}, \quad \left(I = I_1 \circ I_2\right). \tag{5.7.40}$$

Усредняя (5.7.10), получим закон композиции средних энтропий

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) - \varepsilon H_1 H_2 \tag{5.7.41}$$

и свойство ассоциативности

$$H = \left(H_1 \circ H_2\right) \circ H_3 = H_1 \circ \left(H_2 \circ H_3\right) =$$

$$= H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_3 \sum_i^m f\left(p_i\right) \sum_j^n f\left(p_j\right) -$$

$$-\varepsilon \left[H_1 H_2 \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_2 H_3 \sum_i^m f\left(p_i\right) + H_3 H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + \varepsilon^2 H_1 H_2 H_3 \right]. \tag{5.7.42}$$

Здесь имеем $f\left(p_{ijk}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right) f\left(p_k\right)$ и энтропию

$$H_3 = \sum_k^l h\left(p_k\right) f\left(p_k\right). \tag{5.7.43}$$

Определим функцию в общем виде:

$$f\left(p_i\right)=\frac{\left[N_{q-1}(p)\right]^a p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}, \qquad (5.7.44)$$

которая удовлетворяет свойству мультипликативности. Тогда закон композиции (5.7.41) примет следующий вид

$$H=H_1\circ H_2=$$

$$=\frac{H_1\left[N_{q-1}\left(p_2\right)\right]^a\sum\limits_j^n p_j^b}{\sum\limits_j^n p_j}+\frac{H_2\left[N_{q-1}\left(p_1\right)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-\varepsilon H_1 H_2 \qquad (5.7.45)$$

Рассмотрим типы случайных энтропий.

Тип а). Используя известный закон (5.2.5) с $\omega=0$

$$H=H_1\circ H_2=H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2 \qquad (5.7.46)$$

приравняем его к определению (5.7.45),записанному в виде

$$H=H_1\circ H_2=H_1\left\{\frac{\left[N_{q-1}\left(p_2\right)\right]^a\sum\limits_j^n p_j^b}{\sum\limits_j^n p_j}-\varepsilon H_2\right\}+$$

$$+H_2\left\{\frac{\left[N_{q-1}\left(p_1\right)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-\varepsilon H_1\right\}+\varepsilon H_1 H_2. \qquad (5.7.47)$$

В итоге получим полунорму и энтропию

$$N_{q-1}\left(p\right)=\left[\frac{\left(1+\varepsilon H\right)\sum\limits_i^m p_i}{\sum\limits_i^m p_i^b}\right]^{\frac{1}{a}}, \quad H=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\left[N_{q-1}\left(p\right)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-1\right\}, \qquad (5.7.48)$$

имеющие одинаковую форму для всех объектов.

Примем значения $a=0,\ b=q$ и получим функцию

$f(p_i) = p_i^q \Big/ \left(\sum_i^m p_i \right)$. Из выражения энтропии (5.7.48), записанного в виде усреднения

$$H_q(p) = \frac{\sum_i^m h(p_i)\, p_i^q}{\sum_i^m p_i} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} \right), \qquad (5.7.49)$$

вытекает значение микроскопической энтропии

$$h_q(p_i) = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - p_i^{1-q}\right) \qquad (5.7.50)$$

статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши. При $\varepsilon = 1-q$ и $\varepsilon = 2^{1-q} - 1$ имеем из (5.7.49) физическую безразмерную и нормированную энтропию, соответственно.

Далее примем значения $a = 1-q$, $b = q$ и получим функцию $f(p_i) = \sum_i^m p_i^q / \left(\sum_i^m p_i^q \right)$. Закон композиции энтропий (5.7.45) запишется так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 - \varepsilon H_1 H_2 \qquad (5.7.51)$$

и равняется определению (5.5.41).

Из выражения энтропии

$$H_q(p) = \frac{\sum_i^m h_q(p_i)\, p_i^q}{\sum_i^m p_i^q} = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} \right)^{-1} \right] \qquad (5.7.52)$$

имеем значение случайной энтропии, совпадающее с (5.7.49). В данной статистической модели Ландсберга–Вергала получим из (5.7.52) при $\varepsilon = 1-q$ и $\varepsilon = 1 - 2^{q-1}$ физическую безразмерную и нормированную энтропию.

Полученные результаты показывают, что **Тип a)** определяется случайной энтропией (5.7.50). Законы композиций (5.7.46) и (5.7.51) для энтропий из **Типа 1А** и **Типа 1В** являются взвешенными ненормированным и нормированным средними, соответственно. Значения параметров a и b, отличные от указанных, приводят к энтропии $H_q(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right]$, которая не является результатом усреднения какой-либо случайной энтропии.

Аналогичные результаты имеем для закона композиции случайных информаций различия (5.7.29). Случайная информация различия определяется в виде

$$I_q\left(p_i : u_i\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - p_i^{1-q} u_i^{q-1}\right). \tag{5.7.53}$$

Усреднение ее с $f(p_i, u_i) = p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \left(\sum_i^m p_i\right)$ или $f(p_i, u_i) = $ $= p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)$ дает информации различия

$$I_q\left(p : u\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), \tag{5.7.54}$$

$$I_q\left(p : u\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right] \tag{5.7.55}$$

Типа 1A и **Типа 1B**, соответственно. Параметр ε определяется нормировкой функционалов.

Тип b). Пусть $\varepsilon = 0$ и закон композиций энтропии и информаций различия имеют вид

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2, \tag{5.7.56}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2. \tag{5.7.57}$$

Тогда при $\varepsilon = 2^{1-q} - 1$ или $\varepsilon = 1 - q$ из (5.7.50) и (5.7.53) имеем микроскопические меры

$$h\left(p_i\right) = -\log_2 p_i, \tag{5.7.58}$$

$$h\left(p_i : u_i\right) = -\log_2 \frac{p_i}{u_i} \tag{5.7.59}$$

и соответствующие средние значения

$$H(p)=\sum_{i}^{m}h\left(p_i\right)p_i=-\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right)p_i\,, \tag{5.7.60}$$

$$I(p:u)=\sum_{i}^{m}I\left(p_i:u_i\right)p_i=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i \tag{5.7.61}$$

статистической модели Шеннона–Винера.

Таким образом, имеем два принципиально различных типа групп случайных энтропий и информаций различия. Причем функционалы (5.7.58) и (5.7.59) являются изоморфизмами случайных неаддитивных мер на группу аддитивных мер модели Шеннона–Винера

$$h\left(p_i\right)=-\log_2 p_i=\frac{1}{q-1}\log_2\left[1+\varepsilon h_q\left(p_i\right)\right], \tag{5.7.62}$$

$$I\left(p_i:u_i\right)=\log_2\frac{p_i}{u_i}=\frac{1}{1-q}\log_2\left[1-\varepsilon I_q\left(p_i:u_i\right)\right]. \tag{5.7.63}$$

5.8. Квантовые полунормы и меры информации

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание совокупности $N=\left\{N_1,\ldots,N_m\right\}$ случайных объектов, которые имеют множество квантовых состояний $G=\left\{G_1,\ldots,G_m\right\}$, где m – число состояний.

Выпишем квантовые физические безразмерные энтропии статистической модели Шеннона–Винера, приведенные в главе 2, для различных статистик:

а) Максвелла–Больцмана

$$H_N=-\sum_{i}^{m}\left(\ln N_i\right)N_i+\sum_{i}^{m}\left(\ln G_i\right)N_i\,, \tag{5.8.1}$$

б) Ферми–Дирака

$$H_N=-\sum_{i}^{m}\left(\ln N_i\right)N_i-\sum_{i}^{m}\left[\ln\left(G_i-N_i\right)\right]\left(G_i-N_i\right)+\sum_{i}^{m}\left(\ln G_i\right)G_i\,, \tag{5.8.2}$$

в) Бозе–Эйнштейна

$$H_N = -\sum_i^m \left(\ln N_i\right) N_i - \sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i + \sum_i^m \left[\ln\left(G_i + N_i\right)\right]\left(G_i + N_i\right), \quad (5.8.3)$$

г) квазиклассическая статистика

$$H_N = -\sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i + \sum_i^m \left(\ln N_i\right) G_i \,. \qquad (5.8.4)$$

Общее значение случайной величины $T = \left\{T_1, \ldots, T_m\right\}$ по совокупности объектов равняется

$$\mathbf{E}_N\left(T\right) = \sum_i^m T_i N_i \quad \left(N = \sum_i^m N_i\right). \qquad (5.8.5)$$

При $N_i << G_i$ из (5.8.2) и (5.8.3) имеем выражение (5.8.1) для статистики Максвелла–Больцмана, а при $N_i >> G_i$ из (5.8.3) вытекает выражение (5.8.4) для квазиклассической статистики. Поэтому в общем случае остановимся на статистиках Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

Квантовые энтропии запишем так

$$H_N = H_N\left(N\right) + H_N\left(G - N\right) - H_N\left(G\right) > 0\,, \qquad (5.8.6)$$

$$H_N = H_N\left(N\right) + H_N\left(G\right) - H_N\left(G + N\right) > 0\,, \qquad (5.8.7)$$

где меры

$$H_N\left(N\right) = -\sum_i^m \left(\ln N_i\right) N_i\,,\ H_N\left(G\right) = -\sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i\,, \qquad (5.8.8)$$

$$H_N\left(G \pm N\right) = -\sum_i^m \left[\ln\left(G_i \pm N_i\right)\right]\left(G_i \pm N_i\right) \qquad (5.8.9)$$

в геометрической интерпретации удовлетворяют неравенству треугольника (или неравенству Минковского).

Для других статистических моделей теории информации неравенство треугольника дает квантовые энтропии

$$H_{q,N} = H_q\left(N\right) + H_q\left(G - N\right) - H_q\left(G\right) > 0\,, \qquad (5.8.10)$$

$$H_{q,N} = H_N\left(N\right) + H_q\left(G\right) - H_q\left(G + N\right) > 0\,, \qquad (5.8.11)$$

зависящие от параметра q. Ясно, что приведенное неравенство справедливо и для двухпараметрических квантовых энтропий.

Квантовые энтропии (5.8.10) и (5.8.11) соответствующих статистик зависят от квантовых полунорм распределений

$$N_{q,N}(N)=\left(\sum_i^m N_i^{q+1}\right)^{1/q},\ N_{q,N}(G)=\left(\sum_i^m G_i^{q+1}\right)^{1/q},$$

$$N_{q,N}(G\pm N)=\left[\sum_i^m (G_i\pm N_i)^{q+1}\right]^{1/q}. \qquad (5.8.12)$$

Рассмотрим, в частности, квантовые обобщения физических безразмерных энтропий для статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши, соответствующей **Типу IA** классификации мер и играющей важную роль в современной статистической теории неаддитивных систем. Согласно (5.8.10) и (5.8.11), получим функционалы

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right)+$$
$$+\frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m (G_i-N_i)-\sum_i^m (G_i-N_i)^q\right]-\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i-\sum_i^m G_i^q\right)=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[-\sum_i^m N_i^q-\sum_i^m (G_i-N_i)^q+\sum_i^m G_i^q\right], \qquad (5.8.13)$$

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right)+$$
$$+\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i-\sum_i^m G_i^q\right)-\frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m (G_i+N_i)-\sum_i^m (G_i+N_i)^q\right]=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[-\sum_i^m N_i^q-\sum_i^m G_i^q+\sum_i^m (G_i+N_i)^q\right]. \qquad (5.8.14)$$

Из (5.8.13) и (5.8.1) вытекает при $N_i \ll G_i$ энтропия

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right) \qquad (5.8.15)$$

для статистики Максвелла–Больцмана, а при $N_i \gg G_i$ из (5.8.14) следует энтропия для квазиклассической статистики:

$$H_{q,N} = \frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i - \sum_i^m G_i^q\right) - \frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i^q - \sum_i^m N_i^{1-q} G_i^q\right) =$$
$$= \frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m G_i - 2\sum_i^m G_i^q + \sum_i^m N_i^{1-q} G_i^q\right] \ . \tag{5.8.16}$$

В качестве примера найдем экстремумы квантовой энтропии для рассматриваемых статистик при заданном общем значении случайной величины T и квантовой полунормы

$$\mathbf{E}_{q,N}(T) = \sum_i^m T_i N_i^q, \ N_{q,N} = \sum_i^m N_i^q \ . \tag{5.8.17}$$

Варьируем функционал

$$\delta L = \delta H_{q,N} + (q-1)\tau \sum_i^m T_i \delta N_i^q + (q-1)\alpha \sum_i^m \delta N_i^q \tag{5.8.18}$$

и, согласно (5.8.13) и (5.8.14), имеем условия

$$\delta L = \frac{q}{q-1}\left\{\sum_i^m \left[-N_i^{q-1} + (G_i - N_i)^{q-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (q-1)\tau N_i^{q-1} T_i + (q-1)\alpha N_i^{q-1}\right]\delta N_i\right\} = 0 \ , \tag{5.8.19}$$

$$\delta L = \frac{q}{q-1}\left\{\sum_i^m \left[-N_i^{q-1} + (G_i + N_i)^{q-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (q-1)\tau N_i^{q-1} T_i + (q-1)\alpha N_i^{q-1}\right]\delta N_i\right\} = 0 \ , \tag{5.8.20}$$

из которых вытекают равенства

$$\left(\frac{N_i}{G_i - N_i}\right)^{q-1} \left[1 + (1-q)(\tau T_i + \alpha)\right] = 1, \tag{5.8.21}$$

$$\left(\frac{N_i}{G_i + N_i}\right)^{q-1} \left[1 + (1-q)(\tau T_i + \alpha)\right] = 1. \tag{5.8.22}$$

В итоге получим распределения N_i по состояниям G_i:

$$N_i = \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}+1}, \qquad (5.8.23)$$

$$N_i = \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}-1}, \qquad (5.8.24)$$

и числа объектов

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}+1}, \qquad (5.8.25)$$

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}-1}. \qquad (5.8.26)$$

Учитывая (5.8.21) – (5.8.24), а также общие значения случайной величины

$$\mathbf{E}_{q,N}(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}+1}, \qquad (5.8.27)$$

$$\mathbf{E}_{q,N}(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right]^{1/(q-1)}-1}, \qquad (5.8.28)$$

находим экстремальные значения квантовых энтропий

$$H_{q,N} = \frac{1}{q-1}\Bigg\{-\sum_i^m N_i^q - \sum_i^m N_i^{q-1}(G_i - N_i)\times$$
$$\times\left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right] + \sum_i^m G_i^q\Bigg\} = \frac{1}{q-1}\Bigg\{\sum_i^m (1-q) N_i^q (\tau T_i+\alpha) -$$
$$-\sum_i^m N_i^{q-1} G_i \left[1+(1-q)(\tau T_i+\alpha)\right] + \sum_i^m G_i^q\Bigg\} =$$
$$= -\tau \mathbf{E}_{q,N}(T) - \alpha \sum_i^m N_i^q + \frac{1}{q-1}\sum_i^m \left[G_i^{q-1} - (G_i - N_i)^{q-1}\right] G_i \quad , \qquad (5.8.29)$$

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left\{-\sum_i^m N_i^q+\sum_i^m N_i^{q-1}\left(G_i+N_i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+(1-q)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]-\sum_i^m G_i^q\right\}=\frac{1}{q-1}\left\{\sum_i^m(1-q)N_i^q\left(\tau T_i+\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_i^m N_i^{q-1}G_i\left[1+(1-q)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]-\sum_i^m G_i^q\right\}=$$

$$=-\tau\mathbf{E}_{q,N}(T)-\alpha\sum_i^m N_i^q+\frac{1}{q-1}\sum_i^m\left[\left(G_i+N_i\right)^{q-1}-G_i^{q-1}\right]G_i\quad. \qquad (5.8.30)$$

Определим потенциалы

$$\Omega^{\Phi-Д}=\frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m\left[G_i^{q-1}-\left(G_i-N_i\right)^{q-1}\right]G_i=$$

$$=\frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m\left\{1-\left(\frac{N_i}{G_i}\right)^{q-1}\left[1+(1-q)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]\right\}G_i, \qquad (5.8.31)$$

$$\Omega^{Б-Э}=\frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m\left[\left(G_i+N_i\right)^{q-1}-G_i^{q-1}\right]G_i=$$

$$=\frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m\left\{\left(\frac{N_i}{G_i}\right)^{q-1}\left[1+(1-q)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]-1\right\}G_i, \qquad (5.8.32)$$

которые при $q\to 1$ совпадают с выражениями (2.4.15) и (2.5.13). Тогда из (5.8.29) и (5.8.30) вытекает выражение для энтропии

$$H_{q,N}=-\tau\mathbf{E}_{q,N}(T)-\alpha\sum_i^m N_i^q+\tau\Omega, \qquad (5.8.33)$$

которое определено для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна в главе 2 с соответствующими значениями потенциала (5.8.31) и (5.8.32).

Производные потенциала равняются

$$\frac{\partial(\tau\Omega)}{\partial\tau}=\mathbf{E}_{q,N}(T),\ \frac{\partial(\tau\Omega)}{\partial\alpha}=\sum_i^m N_i^q\ , \qquad (5.8.34)$$

что приводит к дифференциальному соотношению:

$$dH_{q,N} = -\tau d\mathbf{E}_{q,N}(T) - \alpha d\left(\sum_i^m N_i^q\right). \tag{5.8.35}$$

Распределения (5.8.23) и (5.8.24) имеют фундаментальное значение при построении квантовой статистической термодинамики равновесных неаддитивных систем для статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши.

В случае модели Реньи, соответствующей **Типу IV** общей классификации мер информации, из (5.8.10) и (5.8.11) получим квантовые меры

$$H_{q,N} = \frac{1}{1-q}\ln\left(\frac{\sum_i^m N_i^q \sum_i^m (G_i - N_i)^q}{\sum_i^m G_i^q}\right), \tag{5.8.36}$$

$$H_{q,N} = \frac{1}{1-q}\ln\left(\frac{\sum_i^m N_i^q \sum_i^m G_i^q}{\sum_i^m (G_i + N_i)^q}\right) \tag{5.8.37}$$

для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна, соответственно. Аналогично находятся квантовые меры для других **типов**.

В заключение выпишем физические безразмерные квантовые информации различия статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши для квантовых статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

$$\begin{aligned}
(I_{12})_{q,N_1} &= \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i} - \sum_i^m N_{1i}^q\right) + \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}^q - \sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right) + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m (G_i - N_{1i}) - \sum_i^m (G_i - N_{1i})^q\right] + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m (G_i - N_{1i})^q - \sum_i^m (G_i - N_{1i})^q (G_i - N_{2i})^{1-q}\right] = \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i} - \sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right) + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m (G_i - N_{1i}) - \sum_i^m (G_i - N_{1i})^q (G_i - N_{2i})^{1-q}\right],
\end{aligned} \tag{5.8.38}$$

$$\left(I_{12}\right)_{q,N_1}=\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}-\sum_i^m N_{1i}^q\right)+\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}^q-\sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right)-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\right]-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\left(G_i+N_{2i}\right)^{1-q}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}-\sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right)-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\left(G_i+N_{2i}\right)^{1-q}\right], \qquad (5.8.39)$$

которые при $q\to 1$ совпадают с функционалами (2.7.13) и (2.7.16) статистической модели Шеннона–Винера. Квантовые меры неточности задаются соотношениями при аддитивности или неаддитивности энтропии и информации различия, как это было определено формулами (4.4.7) и (4.4.76) в статистической модели Шеннона–Винера.

5.9. Аксиомы и меры Шарма–Миттала

Б. Шарма и Д. Миттал в работах [110,111] развили статистическую модель с нормированными двухпараметрическими мерами информаций **Типа 1А**. Были сформулированы следующие аксиомы для энтропии [110].

1. $H_{q,r}\left(p_1,p_2,...,p_m\right)$ непрерывна и симметрична относительно $p_1,p_2,...,p_m$ в области $0\le p_i\le 1$.

2. $H_{q,r}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$.

3. $H_{q,r}\left(p_1,...,p_{i-1},0,p_{i+1},...,p_m\right)=H_{q,r}\left(p_1,...,p_{i-1},p_{i+1},...,p_m\right)$ для всех $i=1,...m$.

4. $H_{q,r}\left(p_{11}p_{21},...,p_{11}p_{2n},p_{12}p_{21},...,p_{12}p_{2n},...,p_{1m}p_{21},...,p_{1m}p_{2n},...\right)=$

$$=H_{q,r}\left(p_{11},...,p_{1m}\right)+H_{q,r}\left(p_{21},...,p_{2n}\right)+$$

$$+\lambda H_{q,r}\left(p_{11},...,p_{1m}\right)H_{q,r}\left(p_{21},...,p_{2n}\right),\quad \lambda\ne 0. \qquad (5.9.1)$$

5.Справедливо равенство:

$$H_{q,r}\left(p_1,p_2,...,p_m\right)=\varphi^{-1}\left\{\frac{\sum\limits_i^m p_i\varphi\left[f\left(p_i\right)\right]}{\sum\limits_i^m p_i}\right\}, \tag{5.9.2}$$

где φ есть непрерывная строго монотонная функция на $\mathbf{R}$, а φ^{-1}– функция обратная φ. Функция $f\left(p_i\right)$ удовлетворяет аксиомам

1. $f\left(p_i\right)$ непрерывна от $p_i, \quad 0\le p_i\le 1$.
2. $f\left(p_i p_j\right)=f\left(p_i\right)+f\left(p_j\right)+\lambda f\left(p_i\right)f\left(p_j\right), \quad \lambda\ne 0$.
3. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Согласно этим аксиомам, получим энтропию Шарма–Миттала

$$H_{q,r}\left(p\right)=\frac{1}{1-2^{1-r}}\left\{1-\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q}{\sum\limits_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right\}. \tag{5.9.3}$$

Используя аналогичные аксиомы для информаций различия [111], имеем функционал

$$I_{q,r}\left(p:u\right)=\frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum\limits_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right]. \tag{5.9.4}$$

Рассмотрим основные свойства Шарма–Миттала.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный функционал

$$H_{q,r}\left(p\right)>0, \tag{5.9.5}$$

который является вогнутым при $q>0$ с $r>q$ и $r\ge 2-1/q$. Энтропия монотонно убывает с возрастанием q при фиксированном значении r.

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением вероятностей $p_{ij} = p_i p_j$, p_i и p_j относятся к разным независимым объектам. Общая энтропия дается выражением

$$H_{q,r}\left(p_{12}\right) = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left\{1-\left(\sum_i^m \sum_j^n p_i^q p_j^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right\}, \qquad (5.9.6)$$

где условие нормировки

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1. \qquad (5.9.7)$$

Тогда из (5.9.6) получим свойство неаддитивности для энтропий независимых объектов

$$H_{q,r}\left(p_{12}\right) = H_{q,r}\left(p_1\right) + H_{q,r}\left(p_2\right) + \left(2^{1-r}-1\right) H_{q,r}\left(p_1\right) H_{q,r}\left(p_2\right), \quad (5.9.8)$$

где

$$H_{q,r}\left(p_1\right) = \frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}{1-2^{1-r}}, \quad H_{q,r}\left(p_2\right) = \frac{1-\left(\sum_j^n p_j^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}{1-2^{1-r}}. \qquad (5.9.9)$$

В случае $k \geq 2$ независимых объектов справедливо равенство

$$H_{q,r}\left(p_{12\ldots k}\right) = \sum_{l=1}^{k} H_{q,r}\left(p_l\right) + \left(2^{1-r}-1\right) \sum_{l=1}^{k-1} H_{q,r}\left(p_l\right) H_{q,r}\left(p_k\right) +$$

$$+\left(2^{1-r}-1\right) \sum_{l=1}^{k-2} H_{q,r}\left(p_l\right) H_{q,r}\left(p_{k-1}\right) H_{q,r}\left(p_k\right) + \ldots +$$

$$+\left(2^{1-r}-1\right) H_{q,r}\left(p_1\right) H_{q,r}\left(p_2\right) \ldots H_{q,r}\left(p_k\right). \qquad (5.9.10)$$

Неаддитивность для предельных значений определяется формулой

$$H_{1,r}\left(p_{12}\right) = H_{1,r}\left(p_1\right) + H_{1,r}\left(p_2\right) + \left(2^{1-r}-1\right) H_{1,r}\left(p_1\right) H_{1,r}\left(p_2\right). \quad (5.9.11)$$

3. Равенство для зависимых объектов. В случае зависимых объектов имеем соотношения для распределений:

$$p_{ij} = p_i p_{j|i} = p_j p_{i|j}, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \qquad (5.9.12)$$

и соответствующие функционалы

$$H_{\theta,\rho}(\pi_1 | \pi_2) = \frac{1-\left(\sum_\tau^\mu \sum_\varphi^\nu \pi_\varphi \pi_{\tau|\varphi}^\theta\right)^{\frac{\rho-1}{\theta-1}}}{1-2^{1-\rho}}, \qquad (5.9.13)$$

. (5.9.14)

Предельные выражения равняются

, (5.9.15)

, (5.9.16)

, (5.9.17)

, (5.9.18)

, (5.9.19)

, (5.9.20)

где и есть средние значения условной энтропии в статистической модели Шеннона–Винера.

Справедливо следующее равенство для энтропий зависимых объектов

$$. \tag{5.9.21}$$

4. Энтропия равновероятного состояния. Экстремальное значение энтропии Шарма–Миттала при условии сохранения нормировки распределения дает равновероятное распределение

$$. \tag{5.9.22}$$

Значение энтропии при (5.9.22) имеет вид

$$. \tag{5.9.23}$$

Если $r = 1$, то из (5.9.23) следует известное выражение

$$\tag{5.9.24}$$

статистической модели Шеннона–Винера.

5. Неравенства. Энтропия Шарма–Миттала также удовлетворяет основным неравенствам

$$, \tag{5.9.25}$$

$$H_{1,r}(P_{12}) \le H_{1,r}(P_1) + H_{1,r}(P_2) + (2^{1-r} - 1) H_{1,r}(P_1) H_{1,r}(P_2), \tag{5.9.26}$$

$$, \tag{5.9.27}$$

$$, \tag{5.9.28}$$

$$, \tag{5.9.29}$$

$$, \tag{5.9.30}$$

$$, \tag{5.9.31}$$

$$, \tag{5.9.32}$$

$$, \tag{5.9.33}$$

$$\quad . \qquad (5.9.34)$$

6. Нормированность и размерность. Из определения энтропии (5.9.3) имеем свойство нормированности

$$\qquad (5.9.35)$$

при и . Единица измерения информации есть один бит.

Энтропия Шарма–Миттала есть отношение физической безразмерной энтропии

$$\qquad (5.9.36)$$

на ее значение при равновероятном состоянии с . Таким образом, имеют место равенства

$$\quad . \qquad (5.9.37)$$

7. *f*-энтропия. Энтропия Шарма–Миттала представляет собой *f*-энтропию

$$\quad , \qquad (5.9.38)$$

где функция

$$\qquad (5.9.39)$$

зависит от полунормы распределения.

Здесь не выписаны другие свойства энтропии, основные свойства информации различия и меры неточности, а также различные функционалы, использующие рассматриваемые меры. Эти вопросы подробно изложены в различных работах (см. например [109, 117, 118, 120, 121]).

5.10. Тригонометрические меры информаций

Известны также тригонометрические меры информации, рассматриваемые в обобщенной теории информации. В одном методе используется закон композиции [107]

. (5.10.1)

Здесь энтропия и функция

, (5.10.2)

выражаются через функции и , заданные в пределах [0,1]. Определяется энтропия в виде

(5.10.3)

и функция

. (5.10.4)

В другом методе рассматриваются энтропии [107]

, (5.10.5)

, (5.10.6)

где функции h и f заданы в пределах [0,1] и находятся из уравнений

, (5.10.7)

(5.10.8)

при граничных условиях и .

В итоге получаются решения

, (5.10.9)

(5.10.10)

и, соответственно, имеем энтропии

, (5.10.11)

, (5.10.12)

, (5.10.13)

. (5.10.14)

В пределах вытекают энтропия Шеннона–Винера

(5.10.15)

и информация различия Кульбака–Лейблера

(5.10.16)

Недостатком рассматриваемых методов является то, что закон композиции энтропий не имеет в основе групповых операций, так в нем должны быть только и . Таких выражений не имеется.

В заключение выпишем, дополнительно к приведенным функциям еще две тригонометрические меры

$$,$$

$$, \qquad (5.10.17)$$

$$,$$

$$, \qquad (5.10.18)$$

зависящие от параметра и рассмотренные в работах [53] и [112, 113], соответственно.

Глава 6

ПРИНЦИПЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Специальной теорией информации является теория, основанная на законе композиции мер информации с $\omega \neq 0$ и имеющая геометрическое представление. Изучаются два типа геометрий двумерных глобальных анизотропных метрических пространств Минковского мер информации с $\omega > 0$ и $\omega < 0$, соответствующие **Типам I** и **III** общей классификации мер информации, и вводятся обобщенные гиперболические и тригонометрические меры. Эта глава излагается без каких-либо претензий на полноту. Предлагаются только те вопросы, которые играют центральную роль в геометрическом представлении теории информации. Путь автора в рассматриваемой проблеме связан с аналогичным подходом в теории, обобщающей специальную теорию относительности [24, 132, 133] на основе закона композиции скоростей, который по форме совпадает с законом композиции энтропий.

Двумерным метрическим пространством Минковского называется пространство, в котором радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}} = \{\eta, \xi\}$ имеет длину [40]

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi). \tag{6.0.1}$$

Здесь метрическая функция F задает метрику в плоском и глобально анизотропном пространстве и удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(a\eta, a\xi) = aF(\eta, \xi)$, $a > 0$,

$$F(-\eta, -\xi) = F(\eta, \xi); \tag{6.02}$$

$$2.\ F(\eta,\xi) > 0;$$

$$3.\ F(\eta_1+\eta_2, \xi_1+\xi_2) \le F(\eta_1,\xi_1) + F(\eta_2,\xi_2). \qquad (6.0.2)$$

Плоское или искривленное локально анизотропное пространство называется в дифференциальной геометрии пространством Финслера и характеризуется метрической функцией

$$d\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(x, dx). \qquad (6.0.3)$$

В этой главе исследуются свойства новых энтропий и информаций различия в псевдоевклидовой и евклидовой геометриях мер информации. В рассматриваемой теории пространство Минковского со свойствами (6.0.1) и (6.0.2) формируется на мерах информаций, где координаты η и ξ есть функции мер. Начало исследований было положено в монографии [21] и в статьях автора [22 – 24].

6.1. Законы композиции функций энтропии

Выпишем соотношения, вытекающие из закона композиции энтропий

$$H = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1 + \omega H_1 H_2}. \qquad (6.1.1)$$

Для этого преобразуем равенство (5.2.15) следующим образом

$$\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} =$$

$$= \frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} +$$

$$+ \frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} +$$

$$+\varepsilon \frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} \cdot \frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}}, \qquad (6.1.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}+$$

$$+\omega\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}} \tag{6.1.3}$$

и, используя выражения

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}=\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2}\right], \tag{6.1.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}=\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2}\right], \tag{6.1.5}$$

окончательно получим законы композиции функций энтропии

$$\left(\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\right)=\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)\circ\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)=$$

$$=\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2}\right]+\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\times$$

$$\times\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2}\,\right]+$$

$$+\varepsilon\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}, \tag{6.1.6}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)\circ\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}+\frac{1}{\omega}\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2-\omega}\,\right]\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2-\omega}\,\right]. \tag{6.1.7}$$

Энтропия и введенные функции, обладающие групповыми свойствами, являются основой для использования соответствующих геометрических представлений с обобщенными гиперболическими и тригонометрическими функциями.

6.2. Обобщенные гиперболические функции мер информации

Для наглядности рассмотрим физические безразмерные меры информаций различных типов и, следовательно, имеем $\lambda=-1$ в формулах (5.5.13) и (5.5.14). Используем изоморфное отображение группы полунорм распределений на группу тригонометрических углов:

$$\alpha_q = -\ln N_{q-1}(p), \quad N_{q-1}(p) = \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/(q-1)}, \qquad (6.2.1)$$

$$\alpha'_q = \ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right), \quad N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i} \right)^{1/(q-1)}. \qquad (6.2.2)$$

При $q=1$ полунормы преобразуются в средние геометрические распределений и тогда получим

$$\alpha = -\ln N(p), \quad N(p) = \exp\left[\frac{\sum_i^m (\ln p_i) p_i}{\sum_i^m p_i} \right], \qquad (6.2.3)$$

$$\alpha' = \ln N\left(\frac{p}{u}\right), \quad N\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left[\frac{\sum_i^m \left(\ln \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i} \right]. \qquad (6.2.4)$$

Законы композиции тригонометрических углов выражаются в виде обычного сложения

$$\alpha_q = \alpha_{q1} \circ \alpha_{q2} = \alpha_{q1} + \alpha_{q2}, \; \alpha'_q = \alpha'_{q1} \circ \alpha'_{q2} = \alpha'_{q1} + \alpha'_{q2}, \qquad (6.2.5)$$

где α_q, α_{q1} и α_{q2} соответствуют распределениям $p_{ij} = p_i p_j$, p_i и p_j и имеют групповые свойства коммутативности, а также ассоциативности. Единичными элементами групп являются нулевые значения, а обратными – противоположные значения $(-\alpha_q)$ и $(-\alpha'_q)$.

Рассмотрим отображение функций энтропии в **Типе I** общей классификации мер информаций. Из (6.1.1) – (6.1.5) следуют выражения обобщенных гиперболических функций:

$$\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\sqrt{\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\ \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \tag{6.2.6}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}=\sqrt{\omega}H\ , \tag{6.2.7}$$

$$\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}=\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}. \tag{6.2.8}$$

Используя исходный закон композиции энтропий (6.1.1), а также соотношения (6.1.6) и (6.1.7), получим формулы.

1. Теоремы сложения аргументов:

$$\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\operatorname{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+$$

$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right), \tag{6.2.9}$$

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\operatorname{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right). \tag{6.2.10}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\operatorname{Tgh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{1+\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}, \tag{6.2.11}$$

$$\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\operatorname{Ctgh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+1}{\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}. \tag{6.2.12}$$

2. Соотношения между функциями:

$$\operatorname{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\sinh\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\operatorname{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=1, \tag{6.2.13}$$

$$\operatorname{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\operatorname{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \tag{6.2.14}$$

$$\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}. \quad (6.2.15)$$

3. Функции двойного аргумента:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=2\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \quad (6.2.16)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\mathrm{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \quad (6.2.17)$$

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\frac{2\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{1+\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \quad (6.2.18)$$

$$\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Ctgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+1}{2\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}. \quad (6.2.19)$$

4. Сумма функций:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$
$$=2\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \quad (6.2.20)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$
$$=2\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \quad (6.2.21)$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}, \qquad (6.2.22)$$

$$\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}. \qquad (6.2.23)$$

5. Обратные функции:

$$\operatorname{Arc}\operatorname{Sinh} x=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[x\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}\right], \qquad (6.2.24)$$

$$\operatorname{ArcCosh} x=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[x\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}\right], \qquad (6.2.25)$$

$$\operatorname{ArcTgh} x=\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[\frac{1+x\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}-\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}{1-x\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}\right], \qquad (6.2.26)$$

$$\operatorname{ArcCtgh} x=\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[\frac{x+1\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}-\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}{x-1\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}\right], \qquad (6.2.27)$$

6. Суммы обратных функций:

$$\operatorname{ArcSinh} x+\operatorname{ArcSinh} y=$$

$$=\operatorname{ArcSinh}\left[\ x\sqrt{y^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}+y\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}\right], \qquad (6.2.28)$$

$$\operatorname{ArcCosh} x+\operatorname{ArcCosh} y=$$

$$=\operatorname{ArcCosh}\left\{\ xy+\left[\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}+x\varepsilon/2\sqrt{\omega}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sqrt{y^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}+y\varepsilon/2\sqrt{\omega}\right]\right\}, \qquad (6.2.29)$$

$$\operatorname{ArcCtgh} x+\operatorname{ArcCtgh} y=\operatorname{ArcCtgh}\left(\frac{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)xy}{1+xy}\right), \qquad (6.2.30)$$

$$\operatorname{ArcCtgh} x + \operatorname{ArcCtgh} y = \operatorname{ArcCtgh}\left(\frac{xy+1}{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}\right). \qquad (6.2.31)$$

7. Производные:

$$\frac{d\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q} = \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \qquad (6.2.32)$$

$$\frac{d\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q} = \operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right) - \left(\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \qquad (6.2.33)$$

$$\frac{d\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q} = \frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \qquad (6.2.34)$$

$$\frac{d\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q} = -\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \qquad (6.2.35)$$

$$\frac{d\operatorname{Arc}\operatorname{Sinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)}}, \qquad (6.2.36)$$

$$\frac{d\operatorname{ArcCos}\operatorname{h} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}}, \qquad (6.2.37)$$

$$\frac{d\operatorname{Arc}\operatorname{Tgh} x}{dx} = \frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)x-x^2}, \quad x<1, \qquad (6.2.38)$$

$$\frac{d\operatorname{ArcCtgh} x}{dx} = -\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)x-x^2}. \qquad (6.2.39)$$

Формулы n-кратного и половинного аргумента, а также другие соотношения легко выводятся из (6.2.6) – (6.2.39).

В случае информации различия имеем обобщенные гиперболические функции

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right) = -\sqrt{\omega}I, \ \operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right) = \frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)}, \qquad (6.2.40)$$

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q'\right)=-\frac{\sqrt{\omega}I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}},\quad \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q'\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}. \quad (6.2.41)$$

В заключение введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1(H_1\circ H_2)=\varphi_1(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_2)\varphi_2(H_1)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2)\ , \quad (6.2.42)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2(H_1\circ H_2)=\varphi_2(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2). \quad (6.2.43)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству

$$\varphi_2^2(H)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\varphi_1(H)\varphi_2(H)-\varphi_1^2(H)=1. \quad (6.2.44)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.1.1) однозначно вытекают выражения

$$\varphi_1(H)=\frac{\sqrt{\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \quad (6.2.45)$$

равные обобщенным гиперболическим функциям (6.2.6).

6.3. Геометрическое представление с псевдоевклидовым и галилеевым пределом для метрической функции

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий (6.1.1) так

$$H=\left(H_1\circ H_2\right)=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_1H_2}. \quad (6.3.1)$$

Подставляя в обобщенные гиперболические функции значение энтропии (5.5.21) с $\lambda=-1$ для закона композиции (6.3.1) в виде

$$H=\frac{\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1}-\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1}+\varepsilon_1\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_2}}=$$
$$=\frac{e^{\varepsilon_1\alpha_q}-e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\varepsilon_2e^{\varepsilon_1\alpha_q}+\varepsilon_1e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}=\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}-e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\varepsilon_2e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}+\varepsilon_1e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}\ , \quad (6.3.2)$$

с известными значениями параметров $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\omega = \varepsilon_1\varepsilon_2$ и $D > 0$, получим формулы

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2} - e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\varepsilon_2 e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2} + \varepsilon_1 e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}\quad, \qquad (6.3.3)$$

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{\varepsilon_1\alpha_q} - e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\alpha_q/2}} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2} - e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\quad, \qquad (6.3.4)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = \frac{\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1\alpha_q} + \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\alpha_q/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_2 e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2} + \varepsilon_1 e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\quad, \qquad (6.3.5)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}, \qquad (6.3.6)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}. \qquad (6.3.7)$$

В (6.3.2) энтропия имеет конечный интервал значений $\left(-1/\varepsilon_1\right) < H < \left(1/\varepsilon_2\right)$.

При умножении соотношения (6.3.6) на (6.3.7) вытекает формула (6.2.13), а при делении – экспоненциальная функция

$$e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q} = \frac{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}. \qquad (6.3.8)$$

Взаимосвязь обобщенных гиперболических функций с обычными гиперболическими функциями дается соотношениями

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\sinh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)\ , \qquad (6.3.9)$$

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\cosh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)-$$

$$-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\sinh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right), \tag{6.3.10}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\operatorname{tgh}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)}\right), \tag{6.3.11}$$

из которых вытекают равенства

$$\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\operatorname{Sinh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=0 \;, \tag{6.3.12}$$

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)-\operatorname{Cosh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right), \tag{6.3.13}$$

$$\frac{1+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}, \tag{6.3.14}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}+\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right), \tag{6.3.15}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=-\frac{\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right)\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}, \tag{6.3.16}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\frac{\operatorname{Sinh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{\operatorname{Cosh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}\;. \tag{6.3.17}$$

Функции $\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)$ и $\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)$ не являются симметричными относительно замены α_q на $\left(-\alpha_q\right)$.

Учитывая формулы обобщенных гиперболических функций, из

(5.4.39) и (5.4.40) вытекает соответствующее матричное представление групп мер информаций в тригонометрическом виде

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+ \\ +\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \end{bmatrix} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) & \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \end{pmatrix}, \quad (6.3.18)$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha'_q\right)=e^{\nu\alpha'_q}\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right)+ \\ +\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right) \end{bmatrix} & -\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right) & \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right) \end{pmatrix}. \quad (6.3.19)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}}=(\eta,\xi)$, определяется расстоянием или длиной $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\eta=e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right),\ \xi=e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right). \quad (6.3.20)$$

Тогда получим выражение

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\left(\frac{\eta+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\xi}{\eta-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\xi}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\sqrt{\eta^2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\eta\xi-\xi^2} \quad (6.3.21)$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=\eta\left(\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H-\varepsilon_1\varepsilon_2H^2}=$$
$$=\eta\left\{\exp\left[2\nu\mathrm{ArcTgh}\left(\sqrt{\omega}H\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}\ , \quad (6.3.22)$$

где $\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\xi/\eta=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H$.

Преобразование координат

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \\ \eta'\end{pmatrix}=e^{-\nu\alpha_q}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\\ +\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\end{bmatrix} & \operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\\ \operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) & \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \\ \eta\end{pmatrix} \qquad (6.3.23)$$

при повороте исходной системы координат на угол α_q оставляет форм-инвариантным значение расстояния (6.3.21).

Для рассматриваемой системы координат имеем вместо матрицы (5.4.41) следующее матричное представление

$$\mathbf{A}(H)=\left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}H}{1+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}H}\right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-H^2}} & \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-H^2}}\\ \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}-H^2}}\end{pmatrix}, \qquad (6.3.24)$$

которое и дает преобразование координат (6.3.23). В итоге соотношения (6.3.20) запишутся так

$$\frac{\eta}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H-\varepsilon_1\varepsilon_2 H^2}}, \qquad (6.3.25)$$

$$\frac{\xi}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H-\varepsilon_1\varepsilon_2 H^2}}, \qquad (6.3.26)$$

а преобразования величин $\left(\eta/\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\ ,\ \xi/\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\right)$ посредством матрицы (6.3.24) дают новые значения энтропии, удовлетворяющей закону (5.3.4).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассмотрим случай с $\nu=\nu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и запишем (6.3.21) так:

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=\left(\eta-\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\xi\right)^{\left(\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\frac{1}{2}\right)}\left(\eta+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\xi\right)^{\left(\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (6.3.27)$$

При малых углах α_q имеем $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\approx\eta$ и из (6.3.27) вытекает значение параметра

$$\nu=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}, \qquad (6.3.28)$$

которое в силу исходного уравнения (5.5.13) удовлетворяет условию $\nu\neq 0$.

Длина радиус-вектора примет вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\left(\eta-\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\xi\right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\left(\eta+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\xi\right)^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}=$$

$$=\left(\frac{\eta-\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\xi}{\eta+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\xi}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)}\sqrt{\eta^2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\eta\xi-\xi^2}. \qquad (6.3.29)$$

Рассматриваемые двумерные геометрии мер информации есть геометрии плоских и глобально анизотропных метрических пространств Минковского [40] с метрической функцией (6.3.21) и (6.3.29). Анизотропия пространств характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.3.23) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского при условиях $\nu=r(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $\varepsilon_2=\gamma\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1=1-q$ имеет следующий вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\left(\frac{\eta-\left(1/\sqrt{\gamma}\right)\xi}{\eta+\sqrt{\gamma}\xi}\right)^{r/2}\sqrt{\eta^2+\frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\eta\xi-\xi^2} \qquad (6.3.30)$$

для физической безразмерной энтропии в **Типе ID**

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q\Big/\sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q\Big/\sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right]. \qquad (6.3.31)$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi)=1, \tag{6.3.32}$$

которая представляет собой в двумерном пространстве кривую линию. Радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}}$ пересекает эту линию в одной, и только одной, точке.

На рис. 6.1 приведены индикатрисы для случаев а) $r=0$ и б) $r=1/2$. Линии *1* и *2* соответствуют $\gamma=1$ и $\gamma=1/2$.

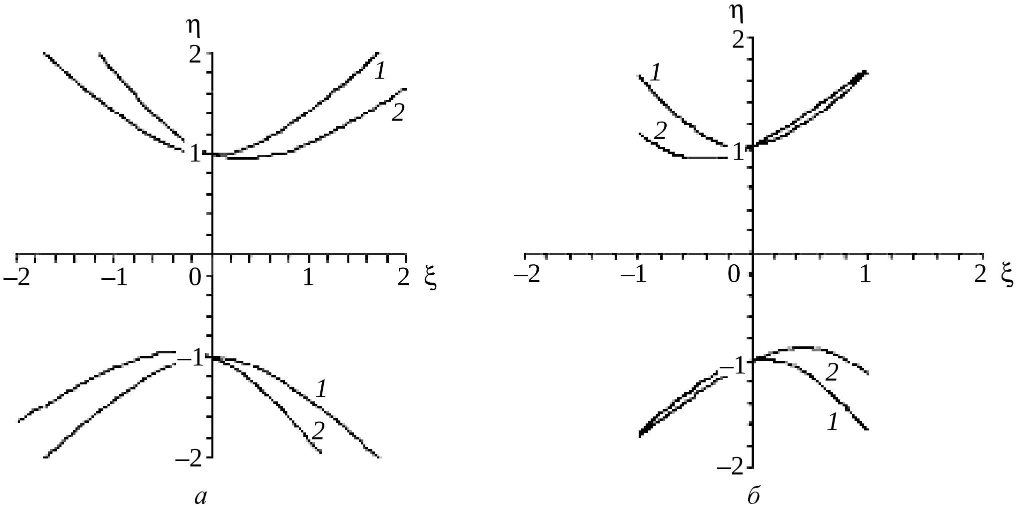


Рис. 6.1. Индикатрисы для **Типа ID**:
1 – $(\gamma=1)$, *2* – $(\gamma=1/2)$

Если $r=0$ и $\gamma=1$, то индикатрисы являются единичными гиперболами. Из (6.3.30) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в изотропной псевдоевклидовой геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\sqrt{\eta^2-\xi^2}, \tag{6.3.33}$$

а из (6.3.31) получим выражение энтропии в **Типе IC**

$$H_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right]. \tag{6.3.34}$$

В этом случае обобщенные гиперболические функции совпадают с обычными гиперболическими функциями и из (6.2.6) – (6.2.8) имеем формулы

$$\sinh\left[(1-q)\alpha_q\right]=\frac{(1-q)H}{\sqrt{1-(1-q)^2H^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}-\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right], \qquad (6.3.35)$$

$$\cosh\left[(1-q)\alpha_q\right]=\frac{1}{\sqrt{1-(1-q)^2H^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}+\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right], \qquad (6.3.36)$$

$$\mathrm{tgh}\left[(1-q)\alpha_q\right]=(1-q)H=$$

$$=\frac{\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}-\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}+\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}, \qquad (6.3.37)$$

$$\mathrm{ctgh}\left[(1-q)\alpha_q\right]=\frac{1}{(1-q)H}=$$

$$=\frac{\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}+\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{\left[\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{-1}-\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}. \qquad (6.3.38)$$

В теории информации используются нормированные меры. Поэтому для них и рассмотрим отличительные свойства энтропий в анизотропном и изотропном случаях геометрий. На рис. 6.2 представлены зависимости нормированной энтропии в **Типе ID**

$$H_{q,\gamma} = \frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}} \left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q\right)^{1+\gamma}} \right] \qquad (6.3.39)$$

от распределения при $m=2$, $q=3/2$ и $p_1=p$. Линии *1*, *2* и *3* соответствуют значениям $\gamma=-7$, $\gamma=0$ и $\gamma=5/2$.

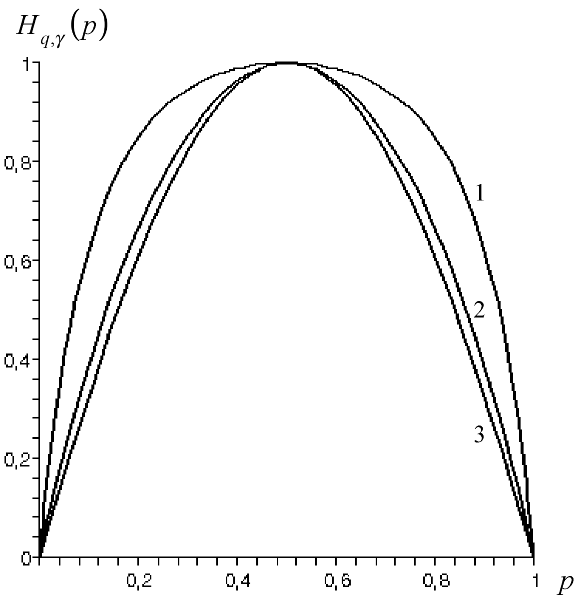


Рис. 6.2. Зависимость энтропии от распределения:
$1-(\gamma=-7)$, $2-(\gamma=0)$, $3-(\gamma=5/2)$

6.4. Энтропия и информация различия в псевдоевклидовой геометрии мер информации

Рассмотрим некоторые свойства нормированной энтропии и информации различия

$$H_q(p) = \frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}} \left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q\right)^2}{1+\left(\sum\limits_i^m p_i^q\right)^2} \right], \ \sum_i^m p_i = 1, \qquad (6.4.1)$$

$$I_q(p:u)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}{1+\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}\right],\ \sum_i^m u_i=1 \tag{6.4.2}$$

в случае изотропной псевдоевклидовой геометрии мер информации с метрической функцией (6.3.33).

1. Выпуклость и знакоопределенность. Энтропия и информация различия есть вещественные и выпуклые функционалы. Справедливы неравенства

$$H_q(p)>0, \tag{6.4.3}$$

$$I_q(p:u)>0 \quad (q>0),\ I_q(p:u)<0 \quad (q<0), \tag{6.4.4}$$

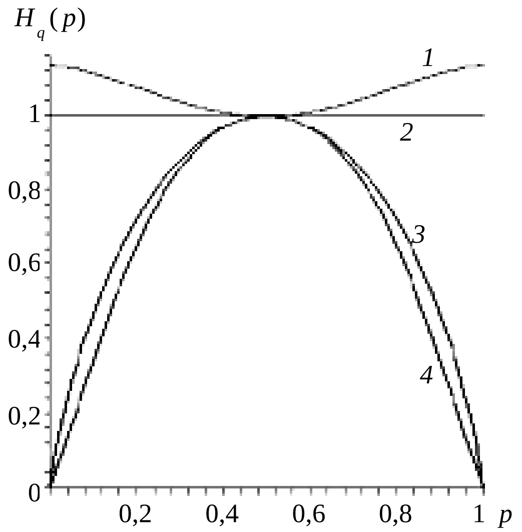
$$H_q(a_1p_1+a_2p_2)\le a_1H_q(p_1)+a_2H_q(p_2),\ \sum_i^m p_{1i}=\sum_i^m p_{2i}=1, \tag{6.4.5}$$

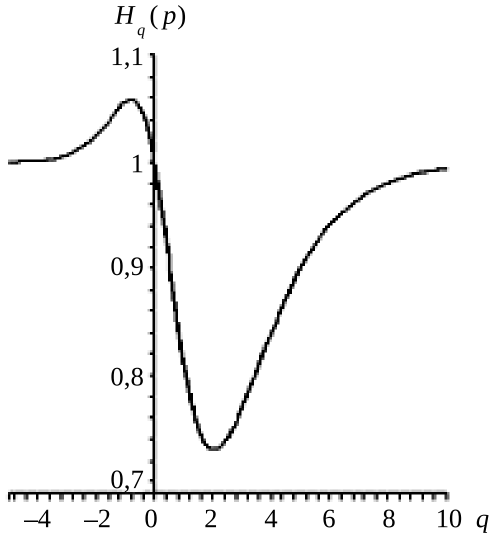
$$I_q\left[(a_1p_1+a_2p_2):u\right]\le a_1I_q(p_1:u)+a_2I_q(p_2:u), \tag{6.4.6}$$

где $a_1+a_2=1$, $a_1>0$ и $a_2>0$. При $q=0$ из (6.4.1) вытекает равенство

$$H_0(p)=\frac{5}{3}\left[\frac{m^2-1}{m^2+1}\right]. \tag{6.4.7}$$

На рис. 6.3 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$: а) от распределения p при значениях $m=2$, $p_1=p$, $q=-1;\ 0;\ 1;\ 3$ и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$.

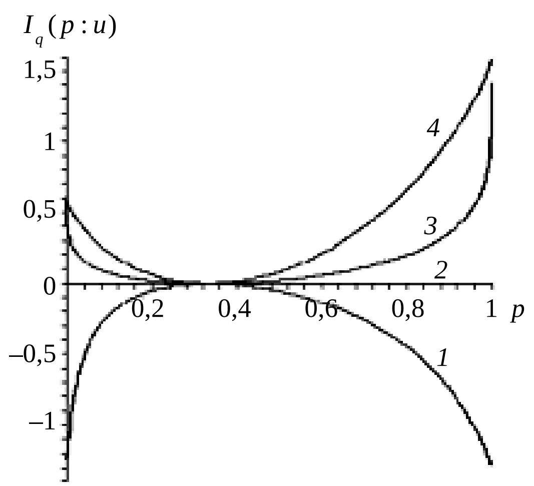


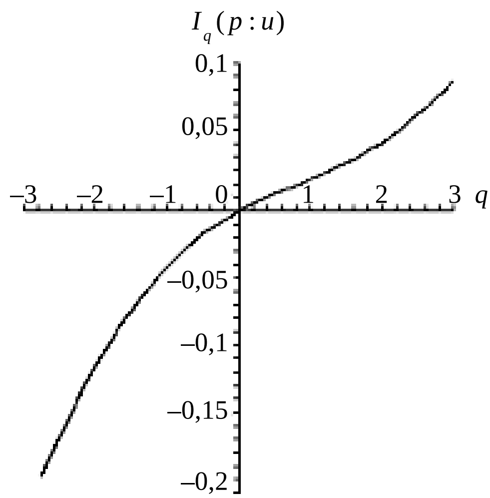


а *б*

Рис. 6.3. Зависимость энтропии:
а – от распределения: *1* – (q = –1); *2* – (q = 0);
3 – (q = 1); *4* – (q = 3) и *б* – от числа q

На рис. 6.4 приведены зависимости информации различия $I_q\left(p:u\right)$: а) от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$, $u_1=1/3$ и $q=-1/2$; 0; $1/2$; 1 и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.





а *б*

Рис. 6.4. Зависимость информации различия:
а – от распределения: *1* – (q = –1/2); *2* – (q = 0);
3 – (q = 1/2); *4* – (q = 1) и *б* – от числа q

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть совместное состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Имеет место свойство неаддитивности мер информации

$$H_q\left(p_{12}\right) = \frac{H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2\right)}{1 + \varepsilon_1^2 H_q\left(p_1\right) H_q\left(p_2\right)}, \qquad (6.4.8)$$

$$I_q\left(p_{12} : u_{12}\right) = \frac{I_q\left(p_1 : u_1\right) + I_q\left(p_2 : u_2\right)}{1 + \varepsilon_1^2 I_q\left(p_1 : u_1\right) I_q\left(p_2 : u_2\right)}, \qquad (6.4.9)$$

где квадрат параметра имеет значение

$$\varepsilon_1^2 = \left[\frac{1 - 2^{2(1-q)}}{1 + 2^{2(1-q)}}\right]^2. \qquad (6.4.10)$$

При $q = 1$ из (6.4.8) и (6.4.9) следует аддитивность для энтропии Шеннона–Винера и информации различия Кульбака–Лейблера.

3. Энтропия равновероятного состояния. Экстремум энтропии при условии сохранения нормировки распределения p дает равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \qquad (6.4.11)$$

Экстремальное значение энтропии при равновероятном состоянии

$$H_q\left(p\right)_{ext} = \frac{1 + 2^{2(1-q)}}{1 - 2^{2(1-q)}}\left[\frac{1 - m^{2(1-q)}}{1 + m^{2(1-q)}}\right] \qquad (6.4.12)$$

зависит от параметра q. При $q = 1$ из (6.4.12) следует известное выражение

$$H_1\left(p\right)_{ext} = \lim_{q \to 1} H_q\left(p\right)_{ext} = \log_2 m. \qquad (6.4.13)$$

4. Информация различия с $u_i = 1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i = 1/m$ равняется:

$$I_q(p:u)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)^2}\right]. \quad (6.4.14)$$

Взаимосвязь между функционалами (6.4.1), (6.4.12) и (6.4.14) отражена в равенствах

$$\frac{1+\varepsilon_1 H_q(p)_{ext}}{1-\varepsilon_1 H_q(p)_{ext}}=\left[\frac{1+\varepsilon_1 I_q(p:u)}{1-\varepsilon_1 I_q(p:u)}\right]\left[\frac{1+\varepsilon_1 H_q(p)}{1-\varepsilon_1 H_q(p)}\right], \quad (6.4.15)$$

$$I_q(p:u)=\frac{H_q(p)_{ext}-H_q(p)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)_{ext}H_q(p)}. \quad (6.4.16)$$

Согласно неравенствам (6.4.4) из (6.4.16) вытекает

$$H_q(p)<H_q(p)_{ext} \text{ при } q>0, \quad (6.4.17)$$

$$H_q(p)>H_q(p)_{ext} \text{ при } q<0. \quad (4.4.18)$$

Следовательно, энтропия меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $(q<0)$.

5. Мера неточности. Меру статистической неточности определим функционалом

$$H_q(p:u)=\frac{H_q(p)+I_q(p:u)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)I_q(p:u)}, \quad (6.4.19)$$

который соответствует закону композиции мер информации в тригонометрическом виде

$$\operatorname{tgh}\left[\varepsilon_1\left(\alpha_q+\alpha_q'\right)\right]=\frac{\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q'\right)}{1+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q'\right)} \quad (6.4.20)$$

при сложении углов α_q и α_q'.

В пределе $q\to 1$ из (6.4.19) вытекает мера неточности Керриджа

$$H(p:u)=\lim_{q\to 1}H_q(p:u)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i. \quad (6.4.21)$$

На рис. 6.5 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$, информации различия $I_q(p:u)$ и меры неточности $H_q(p:u)$ от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

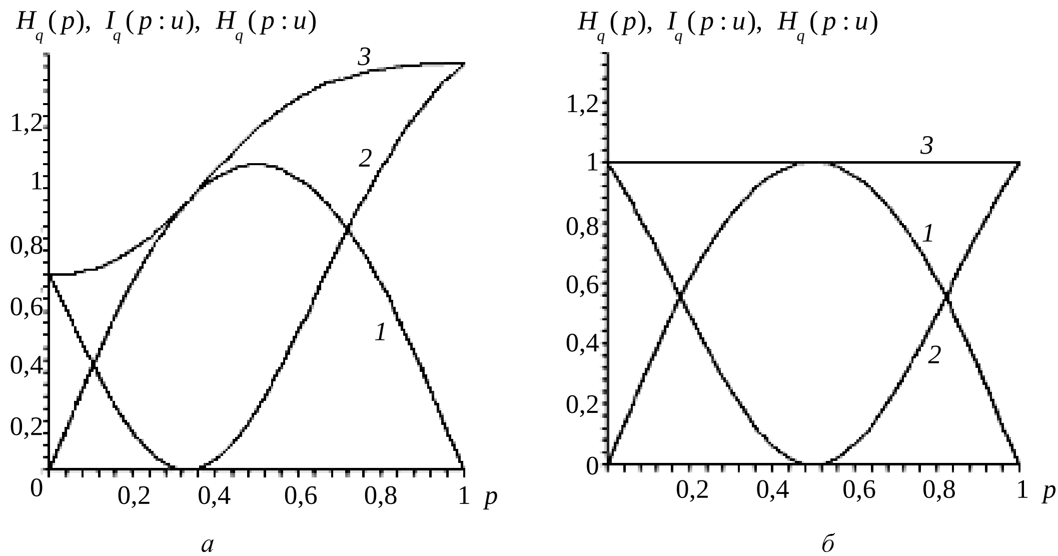


Рис. 6.5. Зависимости функционалов от распределения:
1 – энтропия $H_q(p)$, *2* – информация различия $I_q(p{:}u)$,
3 – мера неточности $H_q(p{:}u)$

6. Нормированность и размерность. Определяя нормированность энтропии на единицу при $m=2$ и $p_1=p_2=1/2$, тем самым задается единица измерения в данной модели одним битом.

Связь между рассматриваемыми нормированными и физическими безразмерными мерами информации

$$H_q^{phys}(p)=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}\right], \tag{6.4.22}$$

$$I_q^{phys}(p:u)=\frac{1}{1-q}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}\right] \tag{6.4.23}$$

дается равенствами:

$$H_q(p)=\frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\; H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-2^{2(1-q)}}{1+2^{2(1-q)}}\right], \quad (6.4.24)$$

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\; I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\left[\frac{2^{2(1-q)}-1}{2^{2(1-q)}+1}\right]. \quad (6.4.25)$$

7. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i(\theta)$ и $u_i(\theta)=p_i(\theta+\delta\theta)$ имеет вид

$$I_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)^2}\right]=$$

$$=-\left[\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\right]\frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 p^{1-q}(\theta)}{\partial\theta^2}\,p_i^q(\theta)=$$

$$=\frac{q(1-q)}{2}\left[\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\right]\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2, \quad (6.4.26)$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \quad (6.4.27)$$

есть информация Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

8. *f*-энтропия и *f* -информация различия. Энтропия и информация различия представляют собой функции полунормы распределений

$$H_f(p)=f\left[N_{q-1}(p)\right],\quad f=\frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}}\left\{\frac{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{2(q-1)}}{1+\left[N_{q-1}(p)\right]^{2(q-1)}}\right\}, \quad (6.4.28)$$

$$I_f(p:u)=f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right],\quad f=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left\{\frac{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{2(q-1)}}{1+\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{2(q-1)}}\right\}. \qquad (6.4.29)$$

6.5. Обобщенные тригонометрические функции

Рассмотрим отображение функций энтропии в **Типе III** общей классификации мер информаций. Из (6.1.1) – (6.1.5) следуют выражения обобщенных тригонометрических функций

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\sqrt{-\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \qquad (6.5.1)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \qquad (6.5.2)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}=\sqrt{-\omega}H, \qquad (6.5.3)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}=\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}. \qquad (6.5.4)$$

Используя исходный закон композиции энтропий (6.1.1), а также соотношения (6.1.6) и (6.1.7), получим формулы.

1. Теоремы сложения аргументов:

$$\begin{gathered}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=\\ =\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\\ +\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right),\end{gathered} \qquad (6.5.5)$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=\\ =\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right).\end{gathered} \qquad (6.5.6)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Tg}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{1-\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)},\quad(6.5.7)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Ctg}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)-1}{\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}.\quad(6.5.8)$$

2. Соотношения между функциями:

$$\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+$$

$$+\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=1,\quad(6.5.9)$$

$$\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad(6.5.10)$$

$$\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}.\quad(6.5.11)$$

3. Функции двойного аргумента:

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right)=2\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right),\quad(6.5.12)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right)=\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right).\quad(6.5.13)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right)=\frac{2\,\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{1-\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad(6.5.14)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Ctg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)-1}{2\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}.\quad(6.5.15)$$

4. Сумма функций:

$$\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=2\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\operatorname{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\omega}}\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \qquad (6.5.16)$$

$$\operatorname{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=-2\operatorname{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\operatorname{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\omega}}\operatorname{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \qquad (6.5.17)$$

$$\operatorname{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}, \qquad (6.5.18)$$

$$\operatorname{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\operatorname{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}. \qquad (6.5.19)$$

5. Обратные функции:

$$\operatorname{ArcSin}x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\arcsin\left[x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}\right], \qquad (6.5.20)$$

$$\operatorname{ArcCos}x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\arccos\left[x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}\right], \qquad (6.5.21)$$

$$\operatorname{ArcTg}x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}{1+x\varepsilon/2\sqrt{-\omega}}\right), \qquad (6.5.22)$$

$$\mathrm{ArcCtg}x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\,\mathrm{arcctg}\left(\frac{x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}{x+\varepsilon/2\sqrt{-\omega}}\right),\quad (6.5.23)$$

6. Суммы обратных функций:

$$\mathrm{ArcSin}x+\mathrm{ArcSin}y=\mathrm{ArcSin}\left\{x\sqrt{1-\left[\ 1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]y^2}\ +\right.$$

$$\left.+\,y\sqrt{1-\left[\ 1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]x^2}\right\},\qquad (6.5.24)$$

$$\mathrm{Arc\,Cos}x+\mathrm{Arc\,Cos}y=\mathrm{Arc\,Cos}\left\{xy-\left[\sqrt{1-\left[1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]x^2}\ +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x\varepsilon}{2\sqrt{-\omega}}\right]\times\left[\sqrt{1-\left[1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]y^2}+\frac{y\varepsilon}{2\sqrt{-\omega}}\right]\right\},\qquad (6.5.25)$$

$$\mathrm{ArcTg}\,x+\mathrm{ArcTg}\,y=\mathrm{ArcTg}\left(\frac{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)xy}{1-xy}\right),\qquad (6.5.26)$$

$$\mathrm{ArcCtg}\,x+\mathrm{ArcCtg}\,y=\mathrm{Arc\,Ctg}\left(\frac{xy-1}{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}\right).\qquad (6.5.27)$$

7. Производные:

$$\frac{d\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-4\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right),\quad (6.5.28)$$

$$\frac{d\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)-\left(\varepsilon/\sqrt{-4\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right),\quad (6.5.29)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad (6.5.30)$$

$$\frac{d\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=-\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad (6.5.31)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arc\,Sin}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2\left[1-\varepsilon^2\big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]}}, \qquad (6.5.32)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcCos}\,x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2\left[1-\varepsilon^2\big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]}}, \qquad (6.5.33)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcTg}x}{dx}=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)x+x^2}, \qquad (6.5.34)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcCtg}\,x}{dx}=-\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)x+x^2}. \qquad (6.5.35)$$

Формулы n-кратного и половинного аргумента, а также другие соотношения легко выводятся из (6.5.1) – (6.5.35).

В случае информации различия имеем обобщенные тригонометрические функции

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=-\sqrt{-\omega}I,\ \mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)}, \qquad (6.5.36)$$

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=-\frac{\sqrt{-\omega}I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}},\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}. \qquad (6.5.37)$$

В заключение введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1(H_1\circ H_2)=\varphi_1(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_2)\varphi_2(H_1)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2)\ , \qquad (6.5.38)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2(H_1\circ H_2)=\varphi_2(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2). \quad (6.5.39)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\varphi_2^2(H)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\varphi_1(H)\varphi_2(H)+\varphi_1^2(H)=1. \qquad (6.5.40)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.1.1) однозначно вытекают выражения:

$$\varphi_1(H)=\frac{\sqrt{-\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \tag{6.5.41}$$

равные обобщенным тригонометрическим функциям (6.5.1).

6.6. Геометрическое представление с евклидовым пределом для метрической функции

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий (6.1.1) так

$$H=(H_1\circ H_2)=\frac{H_1+H_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H_1H_2}{1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)H_1H_2/2} \tag{6.6.1}$$

и, подставляя в обобщенные тригонометрические функции значение энтропии (5.5.112) с $\lambda=-1$ для закона композиции (6.6.1) в виде

$$H=\frac{\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2-\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2\right]\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]} \tag{6.6.2}$$

с известными значениями параметров $\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\omega=-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2$ и $D<0$, получим формулы взаимосвязи с тригонометрическими (круговыми) функциями

$$\mathrm{Tg}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\times$$
$$\times\frac{\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2-\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2\right]\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}\ , \tag{6.6.3}$$

$$\mathrm{Sin}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\left(\frac{\sin\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}\right), \tag{6.6.4}$$

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=$$
$$=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\ , \tag{6.6.5}$$

$$\operatorname{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\operatorname{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]=$$

$$=\cos\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]+\sin\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]\ , \qquad (6.6.6)$$

$$\operatorname{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\operatorname{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]=$$

$$=\cos\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]-\sin\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]\ , \qquad (6.6.7)$$

а также тождество

$$\left\{\operatorname{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\operatorname{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]\right\}^2+$$

$$+\left\{\operatorname{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\operatorname{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right]\right\}^2=1\ . \qquad (6.6.8)$$

Из (6.6.3) – (6.6.5) вытекают равенства

$$\operatorname{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)+\operatorname{Sin}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)=0\ , \qquad (6.6.9)$$

$$\operatorname{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)-\operatorname{Cos}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\operatorname{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)\ , \qquad (6.6.10)$$

$$\frac{1+\varepsilon_1/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\operatorname{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)}{1-\varepsilon_2/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\operatorname{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)}=$$

$$=\frac{1-\varepsilon_2/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\operatorname{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)}{1+\varepsilon_1/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\operatorname{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad\alpha_q\right)}\ , \qquad (6.6.11)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}+\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right), \tag{6.6.12}$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)=$$

$$=-\frac{\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}, \tag{6.6.13}$$

$$\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Sin}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}, \tag{6.6.14}$$

из которых следует, что функции $\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)$ и $\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\alpha_q\right)$ не являются симметричными относительно замены α_q на $\left(-\alpha_q\right)$.

Учитывая формулы обобщенных тригонометрических функций, из (5.4.45) и (5.4.46) вытекают соответствующие матричные представления групп мер информаций

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left[\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)+\\ +\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{array}\right] & \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) \\ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{pmatrix}, \tag{6.6.15}$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q'\right) = e^{-\nu\alpha_q'} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q'\right) - \\ -\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q'\right) \end{bmatrix} & -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q'\right) \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q'\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q'\right) \end{pmatrix}. \quad (6.6.16)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}} = (\eta, \xi)$, определяется расстоянием или длиной $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\begin{aligned} \eta &= e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \alpha_q\right), \\ \xi &= e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \alpha_q\right). \end{aligned} \qquad (6.6.17)$$

Тогда получим выражение

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\eta+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)\xi/2\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\eta^2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\eta\xi+\xi^2}, \qquad (6.6.18)$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \eta\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\mathrm{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2}{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H/2}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H+\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)H^2/2} =$$

$$=\eta\left\{\exp\left[2\nu\,\mathrm{ArcTg}\left(\sqrt{-\omega}H\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}\ , \qquad (6.6.19)$$

где $\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \ \alpha_q\right)=\xi/\eta=\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \ H$.

Преобразование координат (6.6.17) при повороте системы координат на угол α_q

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \\ \eta'\end{pmatrix}=e^{-\nu\alpha_q}\begin{pmatrix}\left[\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)+\\ +\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\ \mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{array}\right] & \mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\\ \mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \\ \eta\end{pmatrix}\qquad(6.6.20)$$

оставляет форм-инвариантным выражение (6.6.18).

Для рассматриваемой системы координат имеем вместо матрицы (5.4.41) следующее матричное представление

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left[-\frac{2\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\mathrm{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2}{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2}\right)\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}} & \dfrac{H\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}}\\ \dfrac{H\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}}\end{pmatrix},\qquad(6.6.21)$$

которое и дает преобразование координат (6.6.20). В итоге соотношения (6.6.17) запишутся так:

$$\frac{\eta}{\|\vec{\mathbf{R}}\|}=\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{H(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H/2}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)H^2/2}}\ , \qquad (6.6.22)$$

$$\frac{\xi}{\|\vec{\mathbf{R}}\|}=\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{H(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H/2}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ H}{\sqrt{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)H^2/2}}\ , \qquad (6.6.23)$$

а преобразования величин $\left(\eta/\|\vec{\mathbf{R}}\|\ ,\ \xi/\|\vec{\mathbf{R}}\|\right)$ посредством матрицы (6.6.21) дают новые значения энтропии, удовлетворяющей закону (5.3.4).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассматриваемая двумерная геометрия мер информации есть геометрия плоского и глобально анизотропного метрического пространства Минковского [40] с метрической функцией (6.6.18). Анизотропия пространства характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.6.20) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского при условиях $\nu=r(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $\varepsilon_2=\gamma\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1=1-q$ имеет следующий вид

$$\|\vec{\mathbf{R}}\|=F(\eta,\xi)=\exp\left[\frac{r}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi(1+\gamma)/2\sqrt{(1+\gamma^2)/2}}{\eta+\xi(1-\gamma)/2\sqrt{(1+\gamma^2)/2}}\right)\right]\times$$
$$\times\sqrt{\eta^2+\frac{1-\gamma}{\sqrt{(1+\gamma^2)/2}}\eta\xi+\xi^2} \qquad (6.6.24)$$

для физической безразмерной энтропии в **Типе IIIC:**

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{1}{1-q}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_{i}^{m}p_i^q\Big/\sum_{i}^{m}p_i\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}\right]}{\left[\frac{1+\gamma}{2}-\frac{1-\gamma}{2}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_{i}^{m}p_i^q\Big/\sum_{i}^{m}p_i\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}\right]\right]}\right\}. \qquad (6.6.25)$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi)=1, \qquad (6.6.26)$$

которая представляет собой в двумерном пространстве выпуклую и замкнутую кривую. Радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}}$ пересекает эту линию в одной, и только одной, точке.

На рис. 6.6 приведены индикатрисы при $r=0$. Линии *1* и *2* соответствуют $\gamma=1$ и $\gamma=1/2$. Как видно, изменение формы от окружности существенно зависит от параметра γ. Изменение параметра r приводит лишь к растяжению-сжатию исходной зависимости.

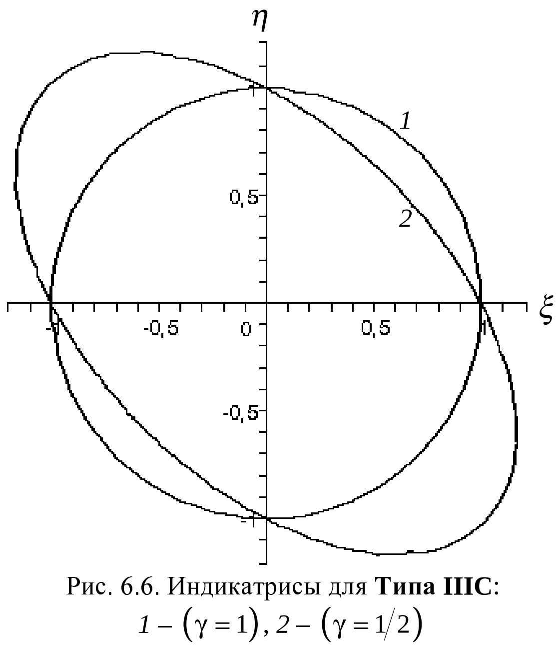


Рис. 6.6. Индикатрисы для **Типа IIIC**:
1 – $(\gamma=1)$, *2* – $(\gamma=1/2)$

Если $r=0$ и $\gamma=1$, то индикатриса является единичной окружностью. Из (6.6.24) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в изотропной псевдоевклидовой геометрии:

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi) = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}\ , \qquad (6.6.27)$$

а из (6.6.25) получим выражение энтропии в **Типе IIIB**

$$H_{q,\gamma}^{phys} = \frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]. \qquad (6.6.28)$$

В этом случае обобщенные тригонометрические функции совпадают с тригонометрическими (круговыми) функциями и из (6.5.1) – (6.5.4) имеем формулы

$$\sin\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{(1-q)H}{\sqrt{1+(1-q)^2 H^2}} = \sin\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.29)$$

$$\cos\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{\sqrt{1+(1-q)^2 H^2}} = \cos\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.30)$$

$$\operatorname{tg}\left[(1-q)\alpha_q\right] = (1-q)H = \operatorname{tg}\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.31)$$

$$\operatorname{ctg}\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{(1-q)H} = \operatorname{ctg}\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right). \qquad (6.6.32)$$

В теории информации используются нормированные меры. Поэтому для них и рассмотрим отличительные свойства энтропий в анизотропном и изотропном случаях геометрий. На рис. 6.7 представлены зависимости нормированной энтропии в **Типе IIIC:**

$$H_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}\ ,\quad \sum_i^m p_i=1 \qquad (6.6.33)$$

от распределения при $m=2$, $q=2$ и $p_1=p$. Линии *1, 2* и *3* соответствуют значениям $\gamma=-4$, $\gamma=0$ и $\gamma=5/2$.

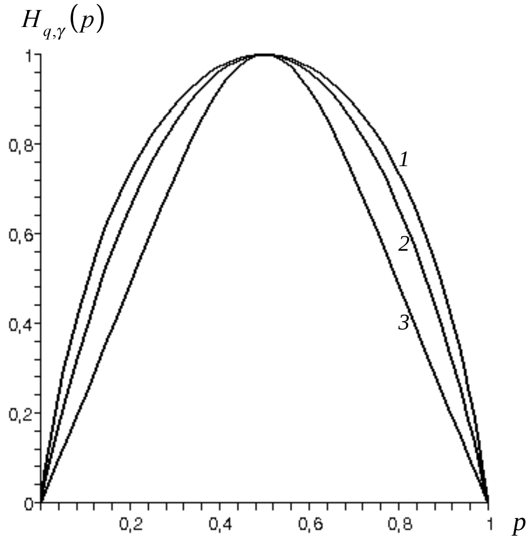


Рис. 6.7. Зависимости энтропии от распределения:
1 – $(\gamma=-4)$, *2* – $(\gamma=0)$, *3* – $(\gamma=5/2)$

6.7. Энтропия и информация различия в евклидовой геометрии мер информации

Рассмотрим некоторые свойства нормированной энтропии и информации различия

$$H_q(p)=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln 2\right]},\ \sum_i^m p_i=1, \qquad (6.7.1)$$

$$I_q(p:u)=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]},\ \sum_i^m u_i=1 \qquad (6.7.2)$$

в случае изотропной псевдоевклидовой геометрии мер информации.

1. Выпуклость и знакоопределенность. Энтропия и информация различия есть вещественные и выпуклые функционалы. Имеют место неравенства

$$H_q(p) > 0, \tag{6.7.3}$$

$$I_q(p:u) > 0 \quad (q>0),\; I_q(p:u) < 0 \quad (q<0), \tag{6.7.4}$$

$$H_q(a_1 p_1 + a_2 p_2) \le a_1 H_q(p_1) + a_2 H_q(p_2),\; \sum_i^m p_{1i} = \sum_i^m p_{2i} = 1, \tag{6.7.5}$$

$$I_q\left[(a_1 p_1 + a_2 p_2):u\right] \le a_1 I_q(p_1:u) + a_2 I_q(p_2:u), \tag{6.7.6}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. При $q = 0$ из (6.7.1) получим равенство

$$H_0(p) = \frac{\operatorname{tg}(\ln m)}{\operatorname{tg}(\ln 2)}. \tag{6.7.7}$$

На рис. 6.8 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$: а) от распределения p при значениях $m = 2$, $p_1 = p$, $q = -1/9;\ 0;\ 1;\ 3/2$ и б) от числа q при $m = 2$, $p_1 = 1/4$.

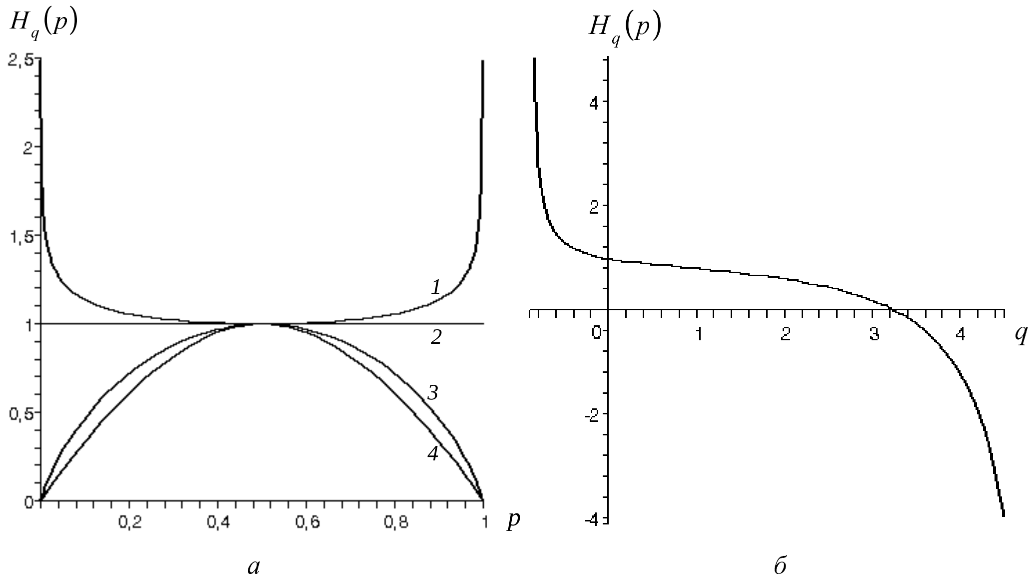
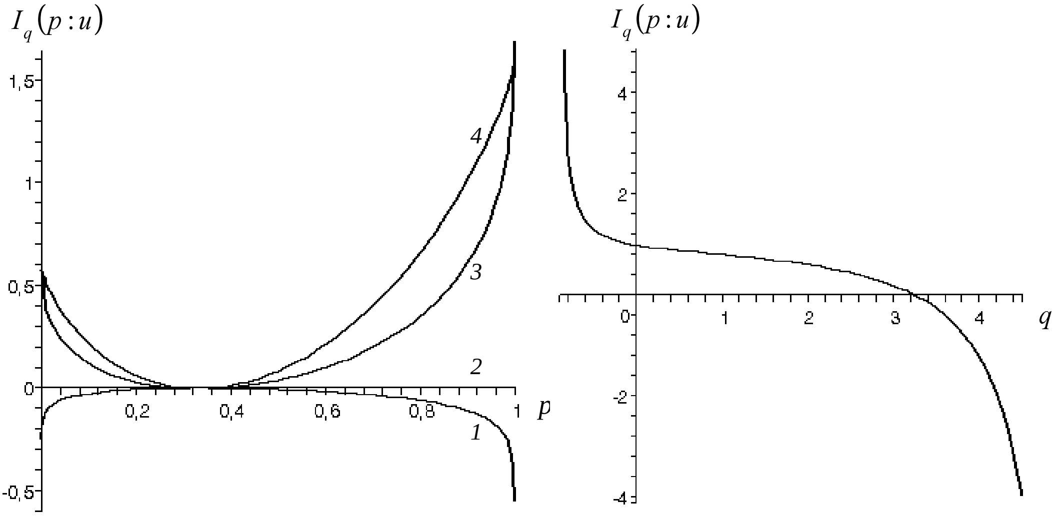


Рис. 6.8. Зависимость энтропии: *а* – от распределения:
1 – (q = –1/9); *2* – (q = 0); *3* – (q = 1); *4* – (q = 3/2) и *б* – от числа q

На рис. 6.9 приведены зависимости информации различия $I_q(p:u)$: а) от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$, $u_1=1/3$, $q=-1/10$; 0; $1/2$; 1 и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.



а *б*

Рис. 6.9. Зависимость информации различия:
а – от распределения: *1* – ($q = -1/10$); *2* – ($q = 0$); *3* – ($q = 1/2$);
4 – ($q = 1$) и *б* – от числа q

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть совместное состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Имеет место свойство неаддитивности мер информации

$$H_q(p_{12}) = \frac{H_q(p_1) + H_q(p_2)}{1 - \varepsilon_1^2 H_q(p_1) H_q(p_2)}, \tag{6.7.8}$$

$$I_q(p_{12}:u_{12}) = \frac{I_q(p_1:u_1) + I_q(p_2:u_2)}{1 - \varepsilon_1^2 I_q(p_1:u_1) I_q(p_2:u_2)}, \tag{6.7.9}$$

где квадрат параметра имеет значение $\varepsilon_1^2 = (1-q)^2$.

При $q=1$ из (6.7.8) и (6.7.9) следует аддитивность для энтропии Шеннона–Винера и информации различия Кульбака–Лейблера.

3. Энтропия равновероятного состояния. Экстремум энтропии при условии сохранения нормировки распределения p дает равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \tag{6.7.10}$$

Экстремальное значение энтропии при равновероятном состоянии

$$H_q(p)_{ext} = \frac{\mathrm{tg}\left[(1-q)\ln m\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-q)\ln 2\right]} \tag{6.7.11}$$

зависит от параметра q. При $q=1$ из (6.7.11) следует известное выражение

$$H_1(p)_{ext} = \lim_{q\to 1} H_q(p)_{ext} = \log_2 m. \tag{6.7.12}$$

4. Информация различия с $u_i = 1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i = 1/m$ равняется

$$I_q(p:u) = \frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q m_i^{q-1}\right)\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}. \tag{6.7.13}$$

Взаимосвязь между функционалами (6.7.1), (6.7.11) и (6.7.13) отражена в равенстве

$$I_q(p:u) = \frac{H_q(p)_{ext} - H_q(p)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)_{ext} H_q(p)}. \tag{6.7.14}$$

Согласно неравенствам (6.7.4) из (6.7.14) вытекает

$$H_q(p) < H_q(p)_{ext} \quad \text{при } q>0, \tag{6.7.15}$$

$$H_q(p) > H_q(p)_{ext} \quad \text{при } q<0. \tag{6.7.16}$$

Следовательно, энтропия меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $(q<0)$.

5. Мера неточности. Меру статистической неточности определим функционалом

$$H_q(p:u) = \frac{H_q(p) + I_q(p:u)}{1-\varepsilon_1^2 H_q(p) I_q(p:u)}, \tag{6.7.17}$$

который соответствует закону композиции мер информации в тригонометрическом виде

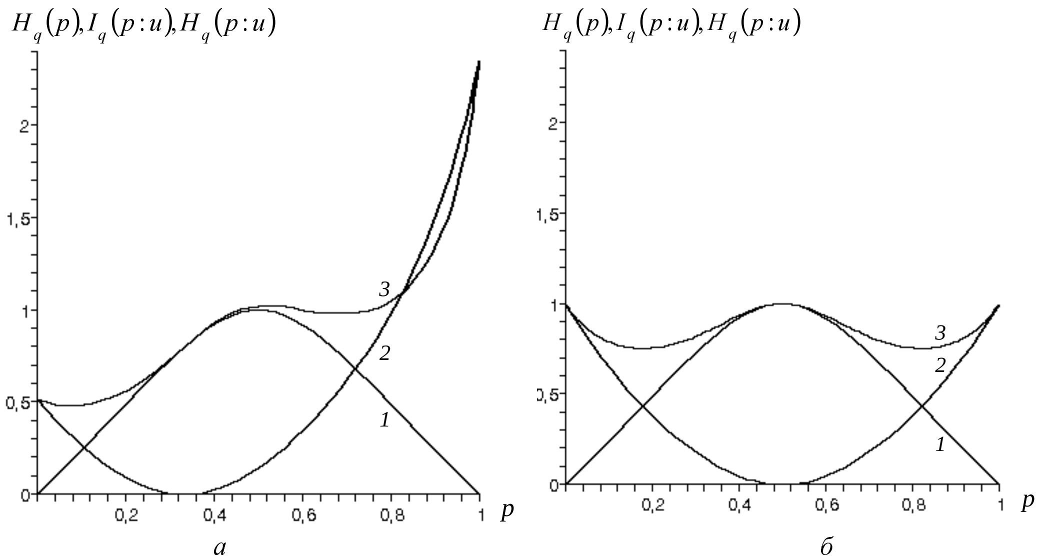
$$\operatorname{tg}\left[\varepsilon_1\left(\alpha_q+\alpha'_q\right)\right]=\frac{\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)+\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)} \qquad (6.7.18)$$

при сложении углов α_q и α'_q.

В пределе $q\to 1$ из (6.7.17) вытекает мера плотности Керриджа

$$H\left(p:u\right)=\lim_{q\to 1}H_q\left(p:u\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i\,. \qquad (6.7.19)$$

На рис. 6.10 представлены зависимости энтропии $H_q\left(p\right)$, информации различия $I_q\left(p:u\right)$ и меры неточности $H_q\left(p:u\right)$ от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.



а *б*

Рис. 6.10. Зависимости функционалов от распределения:
1 – энтропия $H_q\left(p\right)$, *2* – информация различия $I_q\left(p:u\right)$,
3 – мера неточности $H_q\left(p:u\right)$

6. Нормированность и размерность. Единица измерения информации в данной модели определяется одним битом. Связь между рассматриваемыми нормированными и физическими безразмерными мерами информации

$$H_q^{phys}(p)=\frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right], \tag{6.7.20}$$

$$I_q^{phys}(p:u)=\frac{1}{q-1}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)\right] \tag{6.7.21}$$

дается равенствами

$$H_q(p)=\frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln 2\right], \tag{6.7.22}$$

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1{,}0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ I_q^{phys}\left(1{,}0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]. \tag{6.7.23}$$

7. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i(\theta)$ и $u_i(\theta)=p_i(\theta+\delta\theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned}I_q(\theta:\theta+\delta\theta)&=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}=\\&=-\frac{1}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}\frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 p^{1-q}(\theta)}{\partial\theta^2}p_i^q(\theta)=\\&=\frac{q(1-q)}{2\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2,\end{aligned} \tag{6.7.24}$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \tag{6.7.25}$$

есть информация Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

8. *f*-энтропия и *f* -информация различия. Энтропия и информация различия представляют собой функции полунорм распределений:

$$H_f(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right],\ f = \frac{\operatorname{tg}\left\{\ \ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{q-1}\right\}}{\operatorname{tg}\left\{\ (1-q)\ln 2\right\}}, \qquad (6.7.26)$$

$$I_f(p:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right],\ f = \frac{\operatorname{tg}\left\{\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}}{\operatorname{tg}\left\{(q-1)\ln 2\right\}}. \qquad (6.7.27)$$

6.8. Геометрические представления мер информации в моделях Хаврда–Чарват–Дароши и Реньи

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий Хаврда–Чарват–Дароши в **Типе IA**

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2, \qquad (6.8.1)$$

где в (5.3.4) принимается $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1-q$ для физической безразмерной энтропии. Для независимых объектов справедливо неравенство $-1/\varepsilon < H < \infty$. Значение $(-1/\varepsilon)$ не является элементом группы, так как обратный элемент от этого значения остается неопределенным ввиду нарушения дополнительного условия в определении (5.2.9). Однако выполняется формальное соотношение

$$H \circ \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } H \neq -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad (6.8.2)$$

из которого следует, что величина $(-1/\varepsilon)$ есть инвариант для всех независимых объектов. Из (5.2.12) – (5.2.33) имеем равенства

$$\frac{1}{(-H)} - \frac{1}{H^{-1}} = \varepsilon, \quad (1+\varepsilon H)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \qquad (6.8.3)$$

$$1+\varepsilon H = \left(1+\varepsilon H_1\right)\left(1+\varepsilon H_2\right), \qquad (6.8.4)$$

$$1+\varepsilon\left(H_1 \circ H_2 \circ H_3\right) = \left(1+\varepsilon H_1\right)\left(1+\varepsilon H_2\right)\left(1+\varepsilon H_3\right), \qquad (6.8.5)$$

$$H_1 = H \circ H_2^{-1} = \frac{H - H_2}{1+\varepsilon H_2}, \qquad (6.8.6)$$

$$H_2 = H_1^{-1} \circ H = \frac{H - H_1}{1 + \varepsilon H_1}, \qquad (6.8.7)$$

$$\frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1} = -\varepsilon, \; H^{(2)} = H \circ H = 2H + \varepsilon H^2, \qquad (6.8.8)$$

$$H = \frac{H^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right)}}, \; \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right)} = 1 + \varepsilon H, \qquad (6.8.9)$$

$$H^{(2)} = \left(H_1 \circ H_2\right) \circ \left(H_1 \circ H_2\right) = H_1^{(2)} \circ H_2^{(2)} =$$
$$= H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \varepsilon H_1^{(2)} H_2^{(2)} \quad . \qquad (6.8.10)$$

Используем выражения полунормы (6.2.1) и представим энтропию Хаврда–Чарват–Дароши в виде

$$H = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon} - 1\right\} = \frac{1}{(\varepsilon/2)} e^{\varepsilon\alpha_q/2} \sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right), \qquad (6.8.11)$$

что, в итоге приведет к выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} = e^{-\varepsilon\alpha_q/2}, \; \frac{H}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} = \frac{1}{(\varepsilon/2)} \sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right). \qquad (6.8.12)$$

Из (5.4.41) и (5.4.42) имеем матричное представление групп мер информации

$$\mathbf{A}(H) = \left(1 + \varepsilon H\right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon H} & 0 \\ \dfrac{H}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} \end{pmatrix}, \qquad (6.8.13)$$

$$\mathbf{A}(I) = \left(1 - \varepsilon I\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon I} & 0 \\ \dfrac{I}{\sqrt{1 - \varepsilon I}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon I}} \end{pmatrix}, \qquad (6.8.14)$$

которое представим в тригонометрической форме:

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\\ +\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha_q/2} & 0 \\ \frac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)-\\ -\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha_q/2}\end{pmatrix}, \quad (6.8.15)$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha'_q\right)=e^{\nu\alpha'_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)+\\ +\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha'_q/2} & 0 \\ -\frac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)-\\ -\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha'_q/2}\end{pmatrix}. \quad (6.8.16)$$

Введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1\left(H_1\circ H_2\right)=\varphi_1\left(H_1\right)\varphi_2\left(H_2\right)+\varphi_1\left(H_2\right)\varphi_2\left(H_1\right), \quad (6.8.17)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2\left(H_1\circ H_2\right)=\varphi_2\left(H_1\right)\varphi_2\left(H_2\right). \quad (6.8.18)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству

$$\varphi_2^2(H)+\varepsilon\varphi_1(H)\varphi_2(H)=1. \quad (6.8.19)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.8.1) однозначно вытекают выражения

$$\varphi_1(H)=\frac{\varepsilon H/2}{\sqrt{1+\varepsilon H}},\ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H}}, \quad (6.8.20)$$

равные гиперболической и показательной функциям (6.8.12).

Для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши имеем функцию

$$H=\frac{\varphi_1(H)}{(\varepsilon/2)\varphi_2(H)}=\frac{1}{(\varepsilon/2)}\frac{\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)}{1-\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)}, \quad (6.8.21)$$

где гиперболический тангенс при сложении аргументов равняется

$$\mathrm{tgh}\left[\varepsilon\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)/2\right]=\frac{\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q1}/2\right)+\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q2}/2\right)}{1+\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q1}/2\right)\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q2}/2\right)}. \qquad (6.8.22)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}}=(\eta,\xi)$, определяется расстоянием или длиной $\|\vec{\mathbf{R}}\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\eta=e^{-\nu\alpha_q}\|\vec{\mathbf{R}}\|\left[\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\right], \qquad (6.8.23)$$

$$\xi=e^{-\nu\alpha_q}\|\vec{\mathbf{R}}\|\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right). \qquad (6.8.24)$$

Тогда получим выражение

$$\|\vec{\mathbf{R}}\|=F(\eta,\xi)=\left(\frac{\eta+\varepsilon\xi}{\eta}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi} \qquad (6.8.25)$$

с эквивалентной формой

$$\left|\vec{\mathbf{R}}\right|=\eta\left(1+\varepsilon H\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\sqrt{1+\varepsilon H}=$$
$$=\eta\left\{\exp\left[\nu\,\mathrm{arctgh}\left(\frac{\varepsilon H/2}{1+\varepsilon H/2}\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H}\ , \qquad (6.8.26)$$

где $\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\Big/\left[1-\mathrm{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\right]=\xi/\eta=\varepsilon H/2$.

Преобразование координат

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=e^{-\nu\alpha_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\\+\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha_q/2} & 0\\ \frac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)-\\-\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha_q/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (6.8.27)$$

при повороте исходной системы координат на угол α_q оставляют форм-инвариантным значение расстояния (6.8.25).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассматриваемые двумерные геометрии мер информации есть геометрии плоских и глобально анизотропных метрических пространств Минковского [40] с метрической функцией (6.8.25). Анизотропия пространств характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.8.27) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского для модели Хаврда–Чарват–Дароши при условии $\nu = r\varepsilon/2$ имеет следующий вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \left(\frac{\eta+\varepsilon\xi}{\eta}\right)^{r/2} \sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi}\,. \tag{6.8.28}$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi) = 1\,. \tag{6.8.29}$$

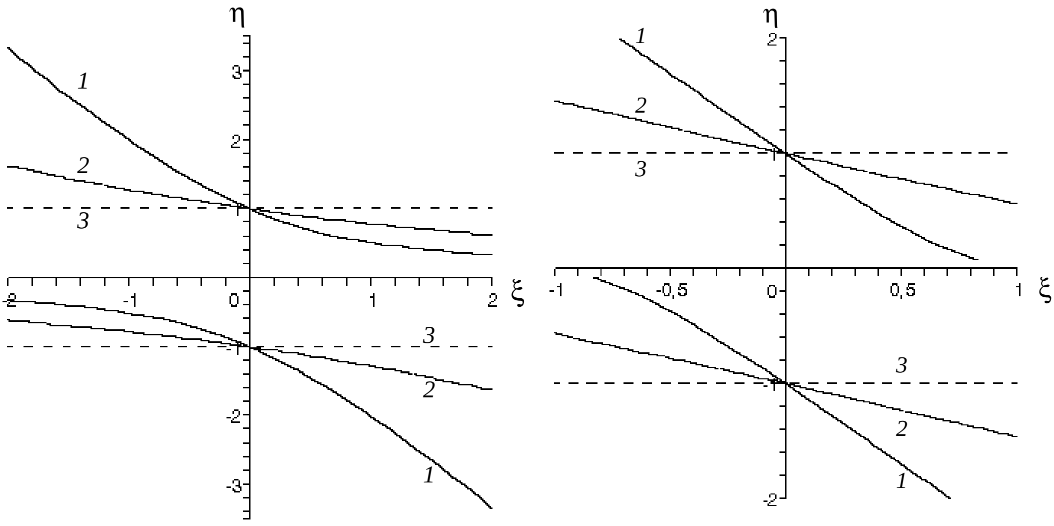
Если $r=0$, то индикатриса исследуемой геометрии является кривой, уравнение которой есть

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right). \tag{6.8.30}$$

Из (6.8.28) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в анизотропной геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi}\,. \tag{6.8.31}$$

На рис. 6.11 приведены индикатрисы для а) $r=0$ и б) $r=4/5$. Линии *1*, *2* и *3* соответствуют $q=-1/2;\ \ 1/2$ и 1.



а *б*

Рис. 6.11. Индикатрисы для **Типа IA**:
1 – (q = –1/2), *2* – (q = 1/2), *3* – (q = 1)

Геометрическое представление групп мер информации Реньи в **Типе IV** отображается равенствами

$$H = \alpha_q, \ I = -\alpha'_q. \tag{6.8.32}$$

Длина радиус-вектора в плоской и глобально анизотропной геометрии мер информации определяется метрической функцией

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi) = \sqrt{\eta^2} \exp\left(\frac{r}{2}\frac{\xi}{\eta}\right) \tag{6.8.33}$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = \sqrt{\eta^2} \exp\left(\frac{rH}{2}\right), \tag{6.8.34}$$

где $\alpha_q = \xi/\eta$ и $\nu = r/2$.

Согласно (5.4.41), имеем преобразования координат

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = e^{-\nu\alpha_q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{6.8.35}$$

в геометрии Минковского. Преобразования реализуют движение пространства, а при $r = 0$ рассматриваемая метрическая функция совпадает с длиной радиус-вектора в галилеевой геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = \sqrt{\eta^2}. \tag{6.8.36}$$

На рис. 6.12 приведена индикатрисы при $r = -2/3;\ 0;\ 1/3$.

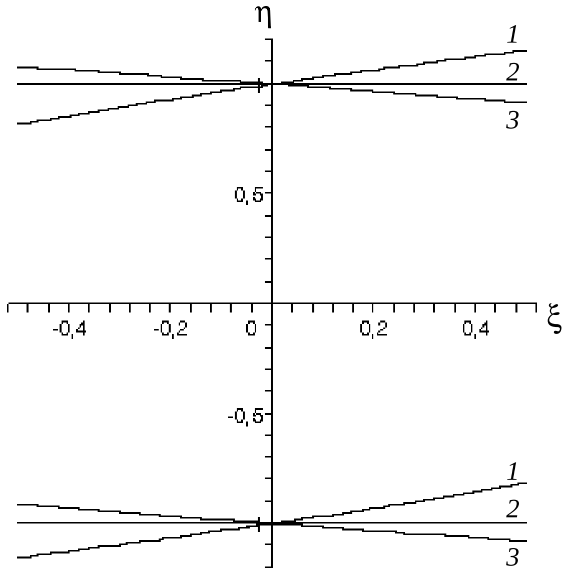


Рис. 6.12. Индикатрисы для **Типа IV**:
1 – (r = –2/3), *2* – (r = 0), *3* – (r = 1/3)

Тип II общей классификации мер информации здесь не рассматриваем, поскольку дискриминант трёхчлена $1+\varepsilon H - \omega H^2$ (или определитель квадратичной формы) равняется нулю и имеем вырожденный случай, не представляющий интереса для физических приложений.

Приведенные геометрические представления для рассматриваемых **Типов** мер информации совпадают с двумерными пространствами Минковского в обобщениях специальной теории относительности [24, 132, 133], если величины $\eta = ct$ и $\xi = x$ характеризуют физическое время и одномерное расстояние. Закон композиции энтропий имеет одинаковую форму с законом композиции одномерных однонаправленных анизотропных скоростей в псевдоевклидовой, евклидовой и галилеевой геометриях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книге впервые в мировой научной литературе изложена общая классификация мер информации с единых позиций и приводятся принципы специальной теории информации. До настоящего времени не было последовательной теории, описывающей всё многообразие свойств и типов функционалов, которые зависят от одного и нескольких параметров. Становилось всё более ясно, что построение классификации требует изменения фундаментальных принципов, лежащих в основе теории информации Шеннона–Винера. Исходной основой является групповой подход, который позволил определить четыре принципиально различных типа мер информации для нового закона композиции с квадратичной нелинейностью. Впервые показано, что такой закон композиции имеет точное геометрическое представление в двумерных плоских и глобально анизотропных метрических пространствах Минковского.

Представлено много интересных результатов, принадлежащих автору, например, законы композиции и классификация мер информации, функционалы специальной теории информации, квантовые меры и т.п. В книгах по теории информации обычно включены такие прикладные аспекты, как кодирование и передача информации по каналам связи. Проблема эта слишком обширная, здесь не было возможности остановиться на ней подробно. Однако это можно сделать на основе развиваемых подходов, что и будет следующим шагом в работах автора. Приведенная теория представляет собой теорию с довольно прозрачной математической основой и геометрической структурой, которая привлечет внимание также других исследователей.

СПИСОК ОСНОВНЫХ МЕР

Рассматриваемые однопараметрические энтропии, информации различия и меры неточности удовлетворяют законам композиции

$$H(p) = H(p_1) \circ H(p_2) = \frac{H(p_1) + H(p_2) + \varepsilon H(p_1) H(p_2)}{1 + \omega H(p_1) H(p_2)},$$

$$I(p:u) = I(p_1 : u_1) \circ I(p_2 : u_2) =$$
$$= \frac{I(p_1 : u_1) + I(p_2 : u_2) - \varepsilon I(p_1 : u_1) I(p_2 : u_2)}{1 + \omega I(p_1 : u_1) I(p_2 : u_2)},$$

$$H(p:u) = H(p) \circ I(p:u) = \frac{H(p) + I(p:u) - \varepsilon H(p) I(p:u)}{1 + \omega H(p) I(p:u)}.$$

Выпишем основные, принципиально различные нормированные меры информации

1. $\varepsilon = \omega = 0, \quad q = 1$

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m (\log_2 p_i) p_i}{\sum_i^m p_i}$$ (Шеннон К. [50], Винер Н. [5]),

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}$$ (Kullback S., Leibler R.A. [88]),

2. $\varepsilon = \omega = 0$

$$H_q(p) = \frac{1}{1-q} \log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}$$ (Renyi A. [103]),

$$I_q(p:u) = \frac{1}{q-1} \log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}$$ (Renyi A. [103]).

3. $\omega = 0$

$$H_q(p) = \frac{1}{1-2^{1-q}} \left(1 - \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} \right)$$ (Havrda J., Charvat F. [78], Daroczy. Z. [72]),

$$I_q(p:u) = \frac{1}{1-2^{q-1}} \left[1 - \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i} \right]$$ (Rathie P.N., Kannappan P. [101]).

4. $\omega = 0, \quad \varepsilon \to -\varepsilon$

$$H_q(p) = \frac{1}{1-2^{q-1}} \left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} \right)^{-1} \right]$$ (Landsberg P.T., Vedral V. [90]),

$$I_q(p:u) = \frac{1}{2^{q-1}-1} \left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i} \right)^{-1} \right]$$ (Зарипов Р.Г. [21]).

5. $\varepsilon = 0, \quad \omega > 0$

$$H_q(p) = \frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}} \left[\frac{1 - \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2}{1 + \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^2} \right]$$ (Зарипов Р.Г. [21]),

$$I_q(p:u)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)^2}\right]$$ (Зарипов Р.Г. [21]).

6. $\varepsilon^2+4\omega=0,\quad \omega<0$

$$H_q(p)=\frac{1+(1-q)\ln 2}{(1-q)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)}\right]$$ (данная книга),

$$I_q(p:u)=\frac{1+(q-1)\ln 2}{(q-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)}\right]$$ (данная книга).

7. $\varepsilon^2+4\omega<0,\quad \omega<0$

$$H_q(p)=\frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}$$ (данная книга),

$$I_q(p:u)=\frac{1+\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}$$ (данная книга).

8. $\varepsilon=0,\quad \omega<0$

$$H_q(p)=\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-q)\ln 2\right]}$$ (данная книга),

$$I_q(p:u)=\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}$$ (данная книга).

Другие известные выражения мер образуются линейными зависимостями приведенных мер и различаются условиями нормировки или усреднения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* Молекулярно-кинетическая теория газов, термодинамика, статистическая механика: Избранные труды. М.: Наука, 1984. 592 с.

2. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. М.: ИЛ, 1960. 392 с.

3. *Бриллюэн Л.* Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966. 272 с.

4. *Бурбаки Н.* Интегрирование (меры, интегрирование мер). М.: Наука, 1967. 396 с.

5. *Винер Н.* Кибернетика. М.: Сов. радио, 1968. 344 с.

6. *Гиббс Дж.* В. Термодинамика. Статистическая механика: Избранные труды. М.: Наука, 1982. 584 с.

7. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.

8. *Гольдман С.* Теория информации. М.: ИЛ, 1957. 241 с.

9. *Зарипов Р.Г.* К статистической механике классических систем // Физика. 1980. №6. С.6-11. (Изв. высш. учеб. заведений).

10. *Зарипов Р.Г.* К теории флуктуаций в статистической механике // Укр. физ. журн. 1983. Т.28. №10. С.1581-1583.

11. *Зарипов Р.Г.* О флуктуациях измеряемых величин в статистической механике // Укр. физ. журн. 1985. Т.30. №9. С.1429-1432.

12. *Зарипов Р.Г.* О потенциале Максвелла–Гюи в статистической механике // Физика. 1987. №7. С.29-33. (Изв. высш. учеб. заведений).

13. *Зарипов Р.Г.* К статистической теории флуктуаций, устойчивости и эволюции макроскопических систем // Укр. физ. журн. 1988. Т.33. №12. С.1867-1873.

14. *Зарипов Р.Г.* Изменение информации различия Кульбака в процессе самоорганизации. *I*-теорема // Журн. техн. физики. 1988. Т.58. Вып.11. С.2247-2249.

15. *Зарипов Р.Г.* К термодинамике необратимых процессов в открытых системах // Физика. 1990. №1. С.57-62. (Изв. высш. учеб. заведений).

16. *Зарипов Р.Г.* О переходах между стационарными состояниями в процессе самоорганизации открытых квантовых систем // Физика. 1990. №9. С.87-94. (Изв. высш. учеб. заведений).

17. *Зарипов Р.Г.* Эволюция информации различия в процессе самоорганизации Ферми- и Бозе- газов // Физика. 1991. №9. С.10-13. (Изв. высш. учеб. заведений).

18. *Зарипов Р.Г.* Изменение информации различия Кульбака при эволюции в пространстве управляющих параметров // Физика. 1995. №2. С.90-94. (Изв. высш. учеб. заведений).

19. *Зарипов Р.Г.* Информация различия и переходы беспорядок-порядок. Казань: Изд-во КГТУ, 1999. 155 с.

20. *Зарипов Р.Г.* Изменения энтропии и информации различия Тсаллиса в процессахствараспада и самоорганизации неэкстенсивных систем // Физика. 2001. №11. С.24-29. (Изв. высш. учеб. заведений)

21. *Зарипов Р.Г.* Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: "Фэн", 2002. 251 с.

22. *Зарипов Р.Г.* Изменение информации различия при эволюции неэкстенсивных систем в пространстве управляющих параметров // Физика. 2004. № 6. С. 67-73. (Изв. высш. учеб. заведений)

23. *Зарипов Р.Г.* Эволюция энтропии и информации различия Реньи при самоорганизации открытых аддитивных систем // Физика. 2005. №3. С.42-47. (Изв. высш. учеб. заведений)

24. *Зарипов Р.Г.* Синхронизация часов и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // В сб.: Новейшие проблемы теории поля. Т.5. Казань, 2005. Труды 16 международ. школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. С.31-42.

25. *Зубарев Д.П.* Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971. 416 с.

26. *Исихара А.* Статистическая физика. М.: Мир, 1973. 472 с.

27. *Колмогоров А.Н.* Теория передачи информации // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С.66-99.

28. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия "количество информации" // Проблемы передачи информации. 1965. Т.1. №1. Вып.1. С.3-11.

29. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. 536 с.

30. *Котельников В.*А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Матер. к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Изд-во ред. упр. связи, 1933. С.1-19.

31. *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. 114 с.

32. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Наука, 1964. 648 с.

33. *Кульбак С.* Теория информации и статистика М.: Наука, 1967. 408с.

34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.

35. *Митюгов В.В.* Физические основы теории информации. М.: Сов. радио, 1976. 217 с.

36. *Нейман Н.И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.

37. *Пинскер М.С.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 204 с.

38. *Поплавский Р.П.* Термодинамика информационных процессов. М.: Наука, 1981. 256 с.

39. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.

40. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. 504 с.

41. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Сов.радио, 1975. 211с.

42. *Файнстейн А.* Основы теории информации. М.: ИЛ, 1960. 140 с.

43. *Фаддеев Д.К.* К понятию энтропии конечной вероятностной схемы // Усп. мат. наук. 1956. Т.11. Вып.1(67). С.227-231.

44. *Фано Р.М.* Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965. 201 с.

45. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

46. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. М.: Наука, 1965. 185 с.

47. *Хартли Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Гос. изд-во ИЛ, 1948. 456 с.

48. *Хинчин А.Я.* Понятие энтропии в теории вероятностей // Усп. мат. наук. 1953. Т.8. Вып.3(55). С.3-20.

49. *Хинчин А.Я.* Об основных теоремах теории информации // Усп. мат. наук. 1956. Т.11. Вып.1(67). С.17-75.

50. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. 829 с.

51. *Шредингер Э.* Что такое жизнь с точки зрения физики. М.: ИЛ, 1947. 147с.

52. *Aczel J.D., Daroczy Z.* Uber Verallegmeinerte quasilineare Mittelwerte die mit Gewichtsfunktionnen Gebildet sind // Publications Mathematicae. 1963. Vol.10. P.171-190.

53. *Aczel J., Daroczy Z.* On measure of information and their characterizations. New York: Acad. Press. 1975. 233 p.

54. *Arimoto S.* Information-Theoretic Considerations on Estimation Problems // Information and Control. 1971. Vol.19. P.181-190.

55. *Behara M.* Additive and nonadditive measures of entropy. New York: Wiley. 1990. 210 p.

56. *Beck C., Schlögl F.* Thermodynamics of chaotic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 286 p.

57. *Belis M., Guiasu S.* Qualitative-Quantitative Measure of Information in Cybernetic System // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1968. IT-14. P.591-592.

58. *Ben Bassat B.* f-entropies, probability of error and feature selection // Information and Control. 1978. Vol.39. P.227-242.

59. *Ben Bassat B., Raviv J.* Renyi's Entropy and Probability of Error // IEEE Trans. of Inform. Theory. 1978. Vol.IT-24. P.324-331.

60. *Boekee D.E., Van Der Lubbe J.C.A.* Some Aspects of Error Bounds in Feature Selection // Pattern Recognition. 1979. Vol.11. P.353-360.

61. *Boekee D.E., Van Der Lubbe J.C.A.* The R-Norm Information Measure // Inform. and Contr. 1980. Vol.45. P.136-155.

62. *Bose S.N.* Abhandlung "Plancks Gezetz und Lichtquantenhypothese" // Zs. Physik. 1924. Vol.26. P.181-184.

63. *Bullen P.S., Mitrinowich D.S., Vasic P.M.* Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1988.459p.

64. *Burbea J., Rao C.R.* On the convexity of some divergence measures based on entropy functions // IEEE Trans. of Inform. Theory. 1982. Vol.IT-28. P.489-495.

65. *Burg J.P.* The Relationship Between Maximum Entropy Spectra and Maximum Like-lihood Spectra (short note) // Geophysics. 1972. Vol.37. P.375-376.

66. *Capocelli R.M., Gargano L., Vacarro U., Taneja I.J.* Generalized Distance Measures and Error Bounds // Proc. IEEE Intern. Conf. on Syst. Man. and Cybern. Arizona. U.S.A., 12-15 November 1985. P.78-82.

67. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for test of a hypothesis based of the sum of observations // Ann. Math. Statist. 1952. Vol.23. P.493-507.

68. *Cressie N., Read T.R.C.* Multinomial goodness-of-fit tests // J. Royal Stat. Soc. Serie B. 1984. Vol.46. P.440-464.

69. *Csiszar I.* Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations // Studia Math. Hungaria. 1967. Vol.2. P.299-318.

70. *Csiszar I.* On topological properties of f-divergence // Studia Math. Hungaria. 1967. Vol.2. P.329-339.

71. *Csiszar I., Korner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. New York: Academic Press. 1981. 452 p.

72. *Daroczy. Z.* Generalized information function //Inform. and Contr. 1970. Vol.16. P.36-51.

73. *Ferreri C.* Hypoentropy and Related Hetrogeneity Divergency and Information Measures // Statistica. 1980. Vol.XL. P.155-168.

74. *Fisher R.A.* Theory of statistical estimation // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1925. Vol.22.P. 700-725.

75. *Fisher R.A.* Statistical Methods and Scientific Inference. London: Oliver& Boyd. 1956. 241 p.

76. *Gray R.M.* Entropy and Information Theory. New York: Springer Verlag, 1990. 285 p.

77. *Hartley R.V.L.* Transmission of information // Bell. System Tech. J. 1928. Vol.7. №3. P.535-563.

78. *Havrda J., Charvat F.* Quantification Method of Classification Processes //Kybernetika. 1967. Vol.3. P.30-35.

79. *Yamano T.* Source coding theorem based on a nonadditive information content // Physica A. 2002. Vol.305. P.190-195.

80. *Jeffreys H.* An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems // Proc. Roy. Soc. Lon., Ser. A. 1946. Vol.186. P.453-461.

81. *Kolmogoroff A.* Sur notion de la moyenne // Atti Rend. Accad. Naz. Lincei. 1930. Vol.12. P.388-391.

82. *Kannappan P., Rathie P.N.* An Application of a Functional Equation to Information Theory // Ann. Polon. Math. 1972. Vol.26. P.95-101.

83. *Kapur J.N.* Generalized Entropy of Order α and Type β // The Math. Seminar. 1967. Vol. 4. P.78-94.

84. *Kapur J.N.* Four Families of Measures of Entropy // Indian J. Pure and Math. 1986. Vol.17(4). P.429-449.

85. *Kapur J.N.* Measures of Information and Their Application. New York: John Wiley & Sons, 1994.

86. *Kapur J.N., Kesavan H.K.* Entropy Optimization Principles with Applications. New York: Academic Press, 1992.

87. *Kerridge D.F.* Inaccuracy and Inference // J. Royal Statist. Society. 1961. Ser. B. Vol.23. P.184-194

88. *Kullback S., Leibler R.A.* On information and sufficiency //Ann. Math. Statist. 1951. Vol.22. P.79-86.

89. *Landsberg P.T.* Entropies Galore! //Brazilian J. Phys. 1999. Vol.29. №1. P.46-49.

90. *Landsberg P.T., Vedral V.* Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. Vol.247. P.211-217.

91. *Liese F., Vaida I.* Convex Statistical Distance. Leipzig: Teubner, 1987.

92. *Linfoot E.H.* An Informational Measures of Correlation // Inform. and Control. 1957. Vol.1. P.85-89.

93. *Mathai A.M., Rathie P.N*. Basic Concepts in Information Theory and Statistics. New York: Wiley, 1975.

94. *Nagumo M.* Uber eine Klasse der Mittelwerte // Japan J. Math. 1930. Vol.7. P.71-79.

95. *Nath P.* On Measures of Error in Information // J. Math. Sci. 1968. Vol.3. P.1-16.

96. *Nath P.* On Coding Theorem Connected with Rényi's Entropy // Inform. and Contr. 1975. Vol. 29. P.234-242.

97. *Parkash O.* On weighted parametric information measure // Математички весник. 1997. Vol. 49. P. 93-97.

98. *Picard C.F.* Weighted Probabilistic Information Measures // J. Inform. and Syst. Sci. 1979. Vol. 4. P.343-356.

99. *Rao C.R.* Diversity and dissimilarity coefficients: A unified approach // Theor. Popul. Biology. 1982. Vol.21. P.24-43.

100. *Rathie P.N.* On a Generalized Entropy and a Coding Theorem // J. Appl. Probl. 1970. Vol. 7. P.124-133.

101. *Rathie P.N., Kannappan P.* A Directed-Divergence Function of Type β // Inform. and Contr. 1972. Vol.20. P.38-45.

102. *Rathie P.N., Sheng L.T.* The *j*-divergence of order α // J. Comb. Inform. Syst. 1981. Vol.6. P.197-205.

103. *Renyi A.* On Measures of Entropy and Information // Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability. 1960. Vol.1. Berkeley, Los Angeles: University of California Press. 1961. P.547-561.

104. *Renyi A.* Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1970. 573 p.

105. *Salicru M., Menendes D., Morales D., Pablo L.* Asymptotic distribution of (h, ϕ) entropies // Communications in Statistics; Theory and Methods. 1993. Vol.22. P.2015-2031.

106. *Salicru M., Taneja I.J.* Connections of Generalized Divergence Measures with Fisher Information Matrix // Information Sciences. 1993. Vol.72. P.251-269.

107. *Sant'anna A.P., Taneja I.J.* Trigonometric Entropies, Jensen Difference Divergence Measures and Error Bounds // Information Sciences. 1985. Vol. 35. P.145-155.

108. *Sibson R.* Information Radius // Z. Wahrs. und verw. Geb. 1969. Vol.14. P.149-160.

109. *Sharma B.D., Gupta H.C.* On Non-Additive Measures of Inaccuracy // Czech Math. J. 1976. Vol.26. P.584-595.

110. *Sharma B.D., Mittal D.P.* New Non-additive Measures of Entropy for Discrete Probability Distribution // J. Math. Sci. 1975. Vol.10. P.28-40.

111. *Sharma B.D., Mittal D.P.* New Nonadditive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. Vol.2. P.122-133.

112. *Sharma B.D., Taneja I.J.* Entropy of Type (α, β) and Other Generalized Additive Measures in Information Theory // Metrika. 1975. Vol.22. P.205-215.

113. *Sharma B.D., Taneja I.J.* Three Generalized Additive Measures of Entropy // Elec. Inform. Kybern. 1977. Vol.13. P.419-433.

114. *Taneja H.C., Tuteja R.K.* Characterization of a Qualitative-Quantitative Measure of Relative Information // Information Sciences. 1984. Vol. 33. P.217-222.

115. *Taneja H.C., Tuteja R.K.* Characterization of a Qualitative-Quantitative Measure of Inaccuracy // Kybernetica. 1986. Vol.22. P.393-402.

116. *Taneja I.J.* On Measures of Information and Inaccuracy // J. Statistical Physics. 1976. Vol.14. P.203-270.

117. *Taneja I.J.* On Characterizations of *j*-Divergence and Its Generalizations // J. Inform. and Syst. Sci. 1983. Vol.8. P.206-212.

118. *Taneja I.J.* On Characterization of Generalized Information Measures // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1984. Vol.9. P.169-174.

119. *Taneja I.J.* Statistical Aspects of Divergence Measures // J. Statistical Planning and Inference. 1987. Vol.16. P.137-145.

120. *Taneja I.J.* On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, Ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1989. Vol.76. P.327-413.

121. *Taneja I.J.* New Developments in Generalized Information Measures. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, Ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1995. Vol.91. P.37-135. (см. также http://www.mtm.ufsc.br/~taneja/book/)

122. *Theil A.H.* Economics and Information Theory. Amsterdam: North Holland, 1967.

123. *Vaida I.* Bounds on the minimal error probability in checking a finite or countable number of hypotheses // Inf. Transm. Problems. 1968. Vol.4. P.9-17.

124. *Vaida I.* Axiomy *a*-entropie zobecneneho pravdepodobnostniho schematy // Kybernetika. 1968. Vol.4. P.105-111. (in Czech).

125. *Vaida I.* Theory of Statistical Inference and Information. London: Kluwer Academic Press, 1989.

126. *Van Der Lubbe J.C.A.* On Certain Coding Theorems for the Information of Order α and of Type β // Proc. 8th Prague Conf. 1978. P.253-266.

127.*Van Der Lubbe J.C.A., Boxma Y., Boekee D.E.* A Generalized Class of Certainty and Information Measures // Information Sciences. 1984. Vol.32. P.187-215.

128.*Varma R.S.* Generalizations of Rényi's Entropy of Order α // J. Math. Sci. 1966. Vol.1. P.34-48.

129.*Wehrl A.* General properties of entropy // Rev. Mod. Phys. 1978. Vol.50. P.221-260.

130.*Zaripov R.G. I*-Theorem //Czechoslovak. J. Phys. 1991. Vol.41. N9. P.793-798.

131.*Zaripov R.G. I*-Theorem for Fermi and Bose gases //Czechoslovak. J.Phys.-1993. Vol.43. №2. P.105-110.

132.*Zaripov R.G.* Clock Synchronization and Finsler Structure of a Flat Anisotropic Space-Time // Proc. Int. Sci. Meeting PIAT-2003 “Physical Interpretations of Relativity Theory”. 2003. Moscow, Liverpool, Sunderland. P.241-248.

133.*Zaripov R.G.* The Law of a Composition of Speeds in Anisotropic Local Finsler Space-Time// Proc. Int. Sci. Meeting PIAT-2005 “Physical Interpretations of Relativity Theory”. 2005. Moscow, Liverpool, Sunderland. P.137-145.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

R.G. *Zaripov*. **New Measures and Methods in Information Theory.** Kazan: Kazan A.N. Tupolev State Technical University Press, 2005, 364 p., (in Russian)

ISBN 5-7579-0815-7

SUMMARY: This book is devoted to the newest results of the statistical theory of the information, preternatural traditional conclusions. Along with Shannon-Wiener statistical model the regular statement of models Renyi and Havrda & Charvat- Daróczy with quantum generalizations is resulted. On the basis of the new law of a composition of measures with square-law nonlinearity the group approach to a determination of the parameterized measures of the information is carried out and their general classification is reduced. For the first time essentially various four types entropies and the discrimination information dependent on one or several parameters are derived. Principles of the special theory of the information based on statistical models of new measures with geometrical representations are given.

For researchers, under- and postgraduate students learning statistical theory of information.

THE AUTHOR: Rinat G. Zaripov (b. 1947), graduated from Kazan State University in 1970. Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor at Kazan A.N.Tupolev State Technical University and Kazan State University, Deputy Director and Laboratory Head of Continuum Mechanics. Institute of Mechanics & Engineering the Russian Academy of Sciences, Kazan Science Center, Russian Acad. of Sci., 2/31, Lobachevsky Str., Kazan, 420111, Russia. E-mail: zaripov@mail.knc.ru