Г. И. ЗАПОРОЖЕЦ

# РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание восьмое,
стереотипное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2014

ББК 22.161я73
З 33

**Запорожец Г. И.**

**З 33** Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. — 8-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0912-9**

«Руководство» содержит задачи по темам: производная и дифференциал функции, исследование функций и построение их графиков, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции многих переменных, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля, ряды, дифференциальные уравнения.

Приведены подробные примерные решения типичных задач, а также необходимые теоретические сведения. Особенность данного задачника — изложение материала, позволяющее использовать его для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических и технологических направлений подготовки и специальностей вузов.

ББК 22.161я73

Оформление обложки
*А. ЛАПШИН*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

«Руководство» предназначено для студентов высших технических учебных заведений и особенно для тех, кто самостоятельно, без повседневной квалифицированной помощи преподавателя, изучает математический анализ и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

В начале каждого раздела помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач; затем приводятся подробные примерные решения типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждого раздела содержится достаточное количество методически подобранных задач для самостоятельного решения с ответами к ним и необходимыми разъяснениями.

Содержание этого пособия соответствует программе по математическому анализу для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей. Это пособие вполне пригодно также и для студентов технологических специальностей, которые могут опустить те разделы и задачи, которые не входят в их программу по курсу математического анализа.

Задачи, отмеченные звездочкой, не входят в обязательный минимум, необходимый для усвоения курса. Они предназначены для студентов, желающих глубже изучить предмет, но не превышают требований программы.

*ГЛАВА I*

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними.

Понятия о функции и о пределе переменной величины составляют основу математического анализа.

## § 1. Переменные величины и функции, их обозначение

Интервалом от $a$ до $b$ называется совокупность всех чисел $x$, удовлетворяющих одному из следующих двойных неравенств:

1) $a \leqslant x \leqslant b$; 2) $a < x < b$; 3) $a \leqslant x < b$; 4) $a < x \leqslant b$.

Закрытый интервал 1 называется отрезком и обозначается $[a, b]$; открытый интервал 2 обозначается $(a, b)$; полуоткрытые интервалы 3 и 4 обозначаются соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$.

*Переменной называется величина, принимающая различные числовые значения.*

*Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений.* Она может состоять из одного или нескольких интервалов и из отдельных точек.

Взаимосвязанное изменение переменных называется функциональной зависимостью.

При изучении функциональной зависимости между двумя переменными полагают, что одна из них является независимой переменной, которой можно придавать произвольные значения из области ее изменения, а другая — зависимой от нее. Независимая переменная называется аргументом, а зависимая — функцией.

Н. И. Лобачевскому принадлежит следующее определение понятия функции: *переменная $y$ называется функцией переменной $x$, если каждому значению $x$, из области ее изменения, соответствует определенное значение $y$.*

Для сокращения записей употребляется символическое обозначение функций: $y = f(x)$, $S = \varphi(t)$, $u = F(v), \ldots$

Если функция от $x$ обозначена символом $P(x)$, то $P(a)$ обозначает частное значение этой функции при $x = a$.

Так, если $P(x) = x^2 + 2x - 5$, то

$$P(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10; \; P(0) = -5; \; P(a) = a^2 + 2a - 5.$$

Основными элементарными функциями называются: 1) степенная функция $y = x^n$; 2) показательная функция $y = a^x$, $a > 0$; 3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$; 4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$; 5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

Функции, заданные одной формулой посредством конечного числа арифметических действий и операций, определяемых основными элементарными функциями, называются элементарными. Например:

$$y = 5x^3 \sin 2x; \; y = \lg \frac{1 + \operatorname{tg} \sqrt{x}}{x - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Все остальные функции называются неэлементарными. Например, неэлементарной является функция, определяемая несколькими различными формулами для различных интервалов изменения аргумента:

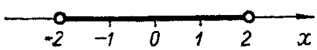
$$y = \begin{cases} x^3 \text{ при } x \leqslant 0 \\ x + 2 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x) = f(-x)$, называется *четной*, например $x^2$, $\cos x$, а обладающая свойством $f(x) = -f(-x)$, называется *нечетной*, например $x^3$, $\sin x$. Многие функции не являются ни четными, ни нечетными, например $a^x$, $\sqrt{x}$.

**1.** Определить и построить на числовой оси области изменения переменных $x$, $t$ и $\alpha$, заданные следующими неравенствами:

$$1) \; x^2 \leqslant 4; \quad 2) \; |t - 2| > 3; \quad 3) \; -9 \leqslant 1 - 2\alpha < 5.$$

Решение. 1) Извлекая квадратный корень из обеих частей первого неравенства, получим $|x| \leqslant 2$. Отсюда следует, что $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Эти неравенства и определяют собой область изменения переменной $x$, т. е. совокупность принимаемых ею числовых значений. Она представляет закрытый интервал или отрезок $[-2; 2]$. Построим этот отрезок на числовой оси $Ox$ (черт. 1); он будет симметричен относительно начальной точки $x = 0$.




Черт. 1


Черт. 2

2) Избавляясь от знака абсолютной величины в неравенстве, содержащем $t$, получим два неравенства: $t-2<-3$ и $t-2>3$. Разрешая их относительно $t$, найдем $t<-1$ и $t>5$. Следовательно, область изменения переменной $t$ (черт. 2) состоит из двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty;\ -1)$ и $(5;\ +\infty)$.

3) Решаем неравенства, содержащие $\alpha$. Вычитая из всех частей неравенств по единице и затем деля их на $-2$, получим

$$-10\leqslant-2\alpha<4,\quad -2<\alpha\leqslant 5.$$

Следовательно, область изменения переменной $\alpha$ (черт. 3) представляет полуоткрытый интервал $(-2;\ 5)$.


Черт. 3

2. Вычислить частное значение функции:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$
а) при $x=0$; б) при $x=a+1$;

2) $\varphi(x)=2\arcsin x+\operatorname{arc\,tg} 2x$ при $x=-\frac{1}{2}$;

3) $y=x^2\arccos\frac{x}{2}-3x\operatorname{arc\,ctg} x$ при $x=-1$.

Решение. 1а) Подставляя значение $x=0$, получим соответствующее частное значение функции $f(x)$:

$$f(0)=\sqrt{0^2-5\cdot 0+4}=\sqrt{4}=2.$$

Здесь взято арифметическое значение корня, а не $\pm 2$. Вообще *в математическом анализе рассматриваются только однозначные функции, которые могут иметь только одно значение при каждом значении аргумента.*

1б) При $x=a+1$ частное значение функции $f(x)$ будет

$$f(a+1)=\sqrt{(a+1)^2-5(a+1)+4}=\sqrt{a^2-3a}.$$

2) Частное значение функции $\varphi(x)$ при $x=-\frac{1}{2}$:

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(-1)=2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{7}{12}\pi.$$

Здесь учтено, что $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$*. При $x>0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x<0$ — в четвертой.

---

* $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$.

3) При $x=-1$ частное значение функции $y$ будет

$$y(-1)=(-1)^2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-3(-1)\operatorname{arcctg}(-1)=$$
$$=\frac{2}{3}\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{35}{12}\pi,$$

так как $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся от 0 до $\pi$*. При $x>0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x<0$ — во второй.

3. Найти корни $x_1$ и $x_2$ функции $F(x)=x^2+10x+9$ и вычислить ее частные значения при $x$, равном среднему арифметическому и среднему геометрическому этих корней.

Решение. *Корнями функции называются значения аргумента, которые обращают ее в нуль.*

Определим корни функции $F(x)$, приравняв ее нулю:

$$x^2+10x+9=0, \text{ откуда } x_1=-9,\ x_2=-1.$$

Среднее арифметическое корней $x_1$ и $x_2$ равно их полусумме $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-9-1}{2}=-5$, а среднее геометрическое — квадратному корню из их произведения $\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{9}=3$. Искомые частные значения функции $F(x)$ будут:

$$F(-5)=(-5)^2+10(-5)+9=-16;$$
$$F(3)=3^2+10\cdot 3+9=48.$$

4. Дана функция $P(x)=x^2-2x+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$. Показать, что $P\left(\frac{1}{x}\right)=P(x)$.

Решение. Найдем $P\left(\frac{1}{x}\right)$, подставляя $\frac{1}{x}$ вместо $x$ в данное аналитическое выражение функции $P(x)$,

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{2}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+x^2-2x.$$

Следовательно, $P\left(\frac{1}{x}\right)=P(x)$ при любом значении $x$. Например,

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=P(2)=-\frac{3}{4};\ P(-10)=P(-0,\ 1)=120{,}21.$$

---

* $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$; $0<\operatorname{arcctg} x<\pi$.

**5.** Определить, какая из данных функций является четной, нечетной или не четной и не нечетной:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{\sin 2x};\quad 2)\ \varphi(x)=4-2x^4+\sin^2 x;$$

$$3)\ u(x)=x^3+2x-1;\quad 4)\ y(x)=\frac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}.$$

Решение. *Чтобы определить, будет ли некоторая функция $Q(x)$ четной или нечетной, необходимо найти $Q(-x)$.*

Заменяя $x$ через $-x$, получим:

$$1)\ f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sin 2(-x)}=\frac{x^2}{-\sin 2x}=-\frac{x^2}{\sin 2x},$$

т. е. $f(-x)=-f(x)$, значит, функция $f(x)$ нечетная;

$$2)\ \varphi(-x)=4-2(-x)^4+\sin^2(-x)=4-2x^4+\sin^2 x,$$

т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, следовательно, функция $\varphi(x)$ четная;

$$3)\ u(-x)=(-x)^3+2(-x)-1=-x^3-2x-1,$$

здесь $u(-x)\neq u(x)$ и $u(-x)\neq -u(x)$, поэтому функция $u(x)$ не четная и не нечетная;

$$4)\ y(-x)=\frac{1+a^{-kx}}{1-a^{-kx}}=\frac{a^{kx}+1}{a^{kx}-1}$$

(числитель и знаменатель первой дроби умножены на $a^{kx}$), т. е. $y(-x)=-y(x)$, следовательно, функция $y(x)$ нечетная.

**6.** Построить на числовой оси области изменения переменных, заданные следующими неравенствами:

1) $|x|<4$; 2) $(y-1)^2\geqslant 9$; 3) $-3<z+1\leqslant 4$; 4) $2|x|+3>5$.

**7.** $f(x)=x^2+3x-1$; вычислить: $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

**8.** $F(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$; найти $F(0)$, $F(2)$, $F\left(\frac{a}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{F(x)}$, $F(b)-F(1)+7F(-1)$.

**9.** $\varphi(t)=t^2$; найти: 1) $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$; 2) $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a-h)}{2h}$.

**10.** $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$; показать, что $f[\varphi(2)]=\varphi[f(2)]$; $\varphi[1+f(1)]=2f[1+\varphi(1)]$.

**11.** Определить, какая из данных функций четная, нечетная или не четная и не нечетная:

1) $y=3x-2\sqrt[3]{x}$; 2) $z=5x\sin 3x$; 3) $u=|t|-t^3$;

4) $v=|x|\operatorname{ctg}^2 x$; 5) $w=\alpha^2+|\alpha+2|$; 6) $x=\frac{a^{2\varphi}-1}{a^{\varphi}}$.

## § 2. Область определения (существования) функции

*Областью определения функции называется совокупность всех точек числовой оси, в которых она имеет определенные действительные значения.*

Очевидно, для многих функций областью определения будет не вся числовая ось, а только некоторая ее часть. Так, для функции $y=\sqrt{x}$ областью определения является полуоткрытый интервал $0 \leqslant x < +\infty$; для функции $z=\frac{1}{x-1}$ область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Основные элементарные функции имеют следующие области определения:

*степенная функция* $y=x^n$ с рациональным положительным показателем $n=\frac{\alpha}{\beta}$ при нечетном $\beta$ определена на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, а при четном $\beta$ определена в интервале $0 \leqslant x < +\infty$ *;

*показательная функция* $y=a^x$, $a>0$ определена на всей числовой оси;

*логарифмическая функция* $y=\log_a x$, $a>0$ определена в интервале $0 < x < +\infty$;

*тригонометрические функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены на всей числовой оси; $y=\operatorname{tg} x$, $y=\sec x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\operatorname{cosec} x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=k\pi$;

*обратные тригонометрические функции* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой оси.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой $y=f(x)$, нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на радикалы четной степени — функция будет определена только для тех значений $x$, при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

2) на знаменатели дробных выражений — функция будет определена только для тех значений $x$, при которых знаменатели отличны от нуля;

3) на трансцендентные функции $\log v$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{ctg} v$, $\sec v$, $\operatorname{cosec} v$, $\arcsin v$, $\arccos v$, которые определены не всюду, а только при указанных выше значениях своего аргумента $v$.

Если эти перечисленные элементы отсутствуют в формуле $y=f(x)$, то областью определения функции $y$ будет вся число-

---

* При $\beta=1$ показатель $n$ будет целым числом.

вая ось (исключая те случаи, когда область определения функции ограничивается специальными условиями задачи).

12. Найти область определения каждой из следующих функций:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $u=\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x+1}$;

3) $v=\arccos\frac{1-2x}{3}$; 4) $p=\frac{x}{\sin x}$; 5) $q=\log_2(x^2-9)$.

Решение. 1) Поскольку аргумент $x$ содержится под радикалом четной степени, то функция $y$ будет иметь вещественные значения только при тех значениях $x$, при которых подкоренное выражение будет неотрицательно, т. е. $1-x^2\geqslant 0$. Решая это неравенство, получим

$$x^2\leqslant 1;\quad |x|\leqslant 1;\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Следовательно, область определения функции $y$ есть отрезок $[-1;\ 1]$.

2) Здесь аргумент $x$ содержится в знаменателе дроби. Поэтому $x$ не может иметь тех значений, которые обращают знаменатель в нуль, так как деление на нуль не имеет смысла. Приравняв знаменатель нулю, найдем эти значения $x$:

$$x^2-5x+6=0;\qquad x_1=2;\qquad x_2=3.$$

Второе слагаемое в выражении функции $u$ не накладывает никаких ограничений на значения $x$, поскольку показатель радикала нечетный. Следовательно, областью определения функции $u$ является вся числовая ось, кроме точек $x=2$ и $x=3$.

3) Функция $v$ будет определена только для тех значений $x$, для которых $-1\leqslant\frac{1-2x}{3}\leqslant 1$. Решив эти неравенства, получим

$$-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{2}{3}x\leqslant\frac{2}{3};\quad -1\leqslant x\leqslant 2.$$

Отрезок $[-1;\ 2]$ и является областью определения функции $v$.

4) Найдем значения $x$, которые обращают знаменатель функции $p$ в нуль: $\sin x=0$; $x_k=k\pi$; $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

При этих значениях $x$ функция $p$ не имеет никаких значений. Областью определения функции $p$ является вся числовая ось, кроме точек $x_k$.

5) Логарифмическая функция $q$ определена только для положительных значений своего аргумента (логарифмируемого выражения), поэтому $x^2-9>0$.

Решая это неравенство, получим $|x|>3$, откуда следует, что $-\infty<x<-3$ и $3<x<+\infty$, т. е. область определения функции $q$ состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty;\ -3)$ и $(3;\ +\infty)$.

**13.** Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

1) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$;  2) $z=\sqrt{1+t}-2\sqrt[4]{5-t}$;

3) $u=\frac{\alpha^2+1}{1+\sqrt{\alpha^2-9}}$;  4) $r=\sqrt{\sin\varphi}$;

5) $v=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$;  6) $v=\lg(x-1)+\arcsin\frac{x}{2}$.

## § 3. Построение графика функции по точкам

Наглядное графическое изображение функциональной зависимости между двумя переменными $x$ и $y$ можно получить, рассматривая значения этих переменных как координаты точек на плоскости.

*Графиком функции, заданной уравнением $y=f(x)$, называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Обычно график функции представляет некоторую плоскую линию.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) по данному аналитическому выражению функции составляется таблица соответствующих друг другу значений переменных;

2) выбирается система координат с подходящими единицами масштаба для каждой переменной.

Обычно применяется прямоугольная система координат и одна общая единица масштаба для обеих координатных осей;

3) строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения аргумента и функции, содержащиеся в таблице;

4) полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. *График четной функции симметричен относительно оси $Oy$; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.*

**14.** Построить графики функций:

1) $y=x^2-2x-1$ на отрезке $[-2;\ 4]$;

2) $y=-\frac{4x}{x^2+1}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

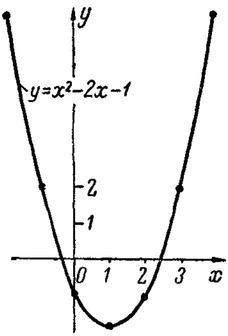
3) $y=7x^2-100\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $|x|\leqslant 7$;

4) $y = x^2 - 4|x-1| + 1$ на отрезке $[-6; 5]$;

5) $y = \frac{16}{x^2} - 1$ между точками пересечения с осью $Ox$.

Решение. 1) В условии задачи указано, что независимой переменной $x$ можно придавать только значения, заключенные на отрезке $[-2; 4]$. Учитывая это, составим следующую таблицу, беря для простоты только целые значения $x$ и вычисляя из данного уравнения соответствующие значения $y$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-2$ | 7 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | $-1$ |
| 1 | $-2$ |
| 2 | $-1$ |
| 3 | 2 |
| 4 | 7 |




Черт. 4

Введем прямоугольную систему координат, как показано на черт. 4, с одинаковыми единицами масштаба, которые указаны числовыми пометками на координатных осях.

Построим точки, откладывая содержащиеся в таблице значения аргумента $x$ по оси абсцисс, а значения функции $y$ по оси ординат. Соединим полученные точки плавной кривой, которая и будет графиком данной функции. Эта кривая называется параболой.

Вообще *графиком всякой квадратной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *является парабола, ось симметрии которой параллельна оси* $Oy$.

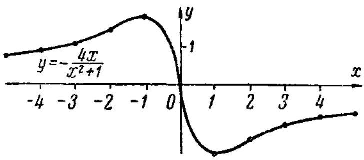
2) Функция $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ — нечетная, так как для нее $y(-x) = -y(x)$. Для значений аргумента, отличающихся только по знаку, значения нечетной функции будут также отличаться только по знаку. Поэтому при составлении таблицы здесь достаточно вычислить из данного уравнения значения функции только для положительных значений аргумента. Значения функции для отрицательных значений аргумента получим путем простой перемены знаков.

Выберем систему координат с одинаковыми масштабами на координатных осях (черт. 5).

Построим точки для каждой пары числовых значений $x$ и $y$, которые содержатся в строках таблицы. Соединяя эти точки плавной кривой, получим график, симметричный относительно начала координат.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\pm 1$ | $\mp 2$ |
| $\pm 2$ | $\mp \frac{8}{5}$ |
| $\pm 3$ | $\mp \frac{6}{5}$ |
| $\pm 4$ | $\mp \frac{16}{17}$ |
| $\pm 5$ | $\mp \frac{10}{3}$ |

3) Функция $y = 7x^2 - 100\sqrt{1+x^2}$ является четной, так как при перемене знака у любого значения аргумента значение этой функции не изменяется, $y(-x) = y(x)$. Поэтому здесь при составлении таблицы достаточно вычислить значения функции только для положительных значений аргумента; значения функции

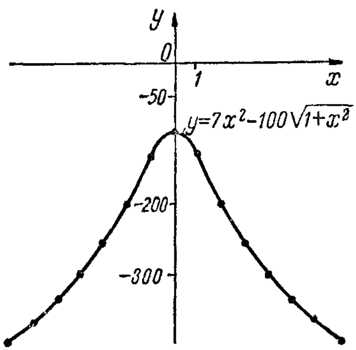


Черт. 5

для отрицательных значений аргумента будут те же.

Составив таблицу, замечаем, что значения аргумента есть числа 1-го порядка, тогда как значения функции — числа 3-го порядка. Поэтому для построения соответствующих точек берем разные масшта-

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-100$ |
| $\pm 1$ | $7-100\sqrt{2} \approx -134$ |
| $\pm 2$ | $28-100\sqrt{5} \approx -195$ |
| $\pm 3$ | $63-100\sqrt{10} \approx -253$ |
| $\pm 4$ | $112-100\sqrt{17} \approx -300$ |
| $\pm 5$ | $175-100\sqrt{26} \approx -335$ |
| $\pm 6$ | $252-100\sqrt{37} \approx -356$ |
| $\pm 7$ | $343-100\sqrt{50} \approx -364$ |



Черт. 6

бы абсцисс и ординат; они показаны числовыми пометками на координатных осях* (черт. 6).

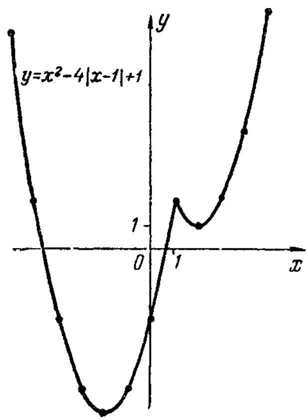
График данной четной функции симметричен относительно оси ординат.

4) Составим таблицу значений функции $y=x^2-4|x-1|+1$ для значений аргумента $x$, заключенных на отрезке $[-6; 5]$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| —6 | 9 |
| —5 | 2 |
| —4 | —3 |
| —3 | —6 |
| —2 | 7 |
| —1 | —6 |
| 0 | —3 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 10 |

Затем строим точки и, соединяя их сплошной линией, получим искомый график (черт. 7).

Данная функция не является четной или нечетной. Поэтому ее график не симметричен ни относительно оси $Oy$, ни относительно начала координат.




Черт. 7

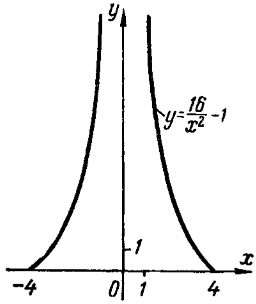
5) Абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью $Ox$ найдем из данного уравнения, зная, что в этих точках ордината $y=0$. При $y=0$, $16-x^2=0$, откуда $x=\pm 4$. Далее составляем таблицу значений данной четной функции на отрезке $[-4; 4]$ и строим ее график (черт. 8).

Когда $x$ приближается к нулю слева или справа, значения функции и ординаты ее графика неограниченно возрастают. При $x=0$ функция не имеет никакого числового значения, ее график состоит из двух отдельных бесконечных ветвей.

* Порядком числа $|N| \geqslant 1$ называется число его цифр до запятой, а порядком числа $|N| < 1$ называется число нулей после запятой до первой значащей цифры, взятое со знаком минус.

**15.** Построить на одном чертеже графики функций $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x$ и $y_2 = \sin x$. Путем сложения ординат полученных линий построить график функции $y = 1 + \frac{1}{2}x + \sin x$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $\pm 0{,}5$ | 63 |
| $\pm 1$ | 15 |
| $\pm 2$ | 3 |
| $\pm 4$ | 0 |



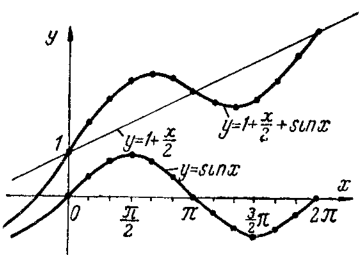

Черт. 8

Решение. *График всякой линейной функции есть прямая линия.* Поэтому для построения графика первой данной функции, которая является линейной, достаточно иметь две пары соответствующих друг другу значений переменных, т. е. две точки.

Для построения графика второй данной функции берем значения $x$ в радианах, а значения $y_2$ из тригонометрических таб-

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 2 |

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | 0 | 0,5 | 0,9 | 1 | 0,9 | 0,5 | 0 | −0,5 | −0,9 | −1 | −0,9 | −0,5 | 0 |

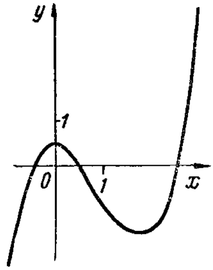



Черт. 9

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −1 | −2,1 |
| 0 | 0,5 |
| 1 | −0,9 |
| 2 | −1,5 |
| 3 | 3,5 |

лиц. Учитываем также периодичность этой функции: построив ее график на протяжении одного периода $[0;\ 2\pi]$, затем повторяем его. Алгебраически складывая ординаты точек линий $y_1$ и $y_2$, имеющих одинаковые абсциссы $x$, получим искомый график функции $y=y_1+y_2$ (черт. 9).

**16.** Найти приближенные значения корней функции $y=0{,}8x^3-2x^2-0{,}2x+0{,}5$, построив ее график на отрезке $[-1;\ 3]$.



Черт. 10

Решение. Корни функции, т. е. значения аргумента, обращающие ее в нуль, можно найти как абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс, так как в этих точках $y=0$.

Составив таблицу числовых значений переменных $x$ и $y$, построим график данной функции (черт. 10). Из чертежа находим искомые приближенные значения корней функции: $x_1\approx-0{,}4$; $x_2\approx 0{,}5$; $x_3\approx 2{,}6$.

**17.** Построить по точкам на отрезке $[-3;\ 3]$ графики следующих функций:

1) $y=\frac{x^3-12x}{3}$; 2) $y=1-2^x$; 3) $y=1-|x^2-1|$;

4) $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } x\leqslant 0 \\ 1+\sqrt{3x} & \text{при } x>0. \end{cases}$

**18.** Найти области определения функций и построить их графики:

1) $y=2\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$; 2) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

3)* $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{16-x^2}$; 4)* $y=4\sqrt{|x|}-\sqrt{x^3}$.

**19.** Построить графики функций между точками пересечения с осью $Ox$:

1) $y=6x-x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}(x^3-12x^2+36x)$;

3) $y=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$; 4)* $y=|x-2|-3$.

**20.** Построить графики функций между точками пересечения с осями $Oy$ и $Ox$:

1) $y=2-\sqrt[3]{2x-8}$; 2) $y=\frac{x-8}{x-4}$; 3)* $y=|x^2-6x|$;

4)* $y=\begin{cases} 10-x & \text{при } x<5 \\ 14x-x^2-40 & \text{при } x\geqslant 5. \end{cases}$

## § 4. Построение графика функции путем сдвига и деформации известного графика другой функции

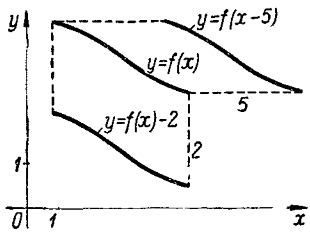
Зная график какой-либо функции, можно построить графики многих других более сложных функций чисто геометрическим путем, без составления таблицы числовых значений переменных.

Так, *исходя из графика функции* $y=f(x)$, *можно посредством его сдвига или деформации построить графики для функций вида*

$$y=f(x-a),\quad y=f(x)+b,\quad y=Af(x),$$
$$y=f(kx),\quad y=Af[k(x-a)]+b.$$

График функции $y=f(x-a)$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси абсцисс на $a$ масштабных единиц этой оси, вправо при $a>0$ и влево при $a<0$ (черт. 11).

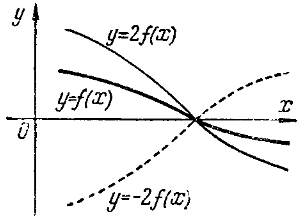
График функции $y=f(x)+b$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси ординат на $b$ масштабных единиц этой оси, вверх при $b>0$ и вниз при $b<0$ (черт. 11).



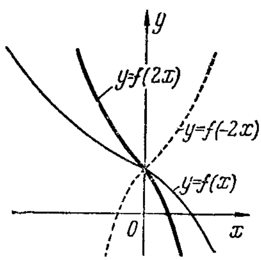

Черт. 11

График функции $y=Af(x)$ получается из исходного путем умножения ординат его точек на коэффициент $A$. При этом, если $|A|>1$, то ординаты всех точек исходного графика увеличиваются по абсолютной величине в $|A|$ раз, если $|A|<1$, то они уменьшаются по абсолютной величине в $\frac{1}{|A|}$ раз, если $A<0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y=Af(x)$ при $A<0$ будет симметричен графику функции $y=|A|f(x)$ относительно оси абсцисс (черт. 12).

График функции $y=f(kx)$ получается из исходного графика путем деления абсцисс его точек на коэффициент $k$. При этом, если $|k|>1$, то абсциссы всех точек исходного графика уменьшаются по абсолютной величине в $|k|$ раз; если $|k|<1$, то они




Черт. 12




Черт. 13

увеличиваются по абсолютной величине в $\frac{1}{|k|}$ раз; если $k<0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y=f(kx)$, при $k<0$, симметричен графику функции $y=f(|k|x)$ относительно оси ординат (черт. 13).

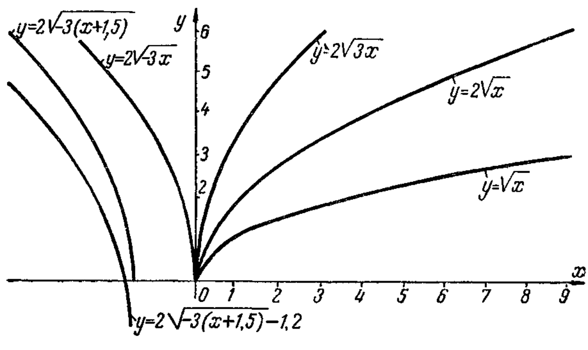
Выполняя указанные сдвиги и деформации графика функции $y=f(x)$ в последовательном порядке, одно вслед за другим, можно строить графики и для функций более сложного вида:

$$y=Af[k(x-a)]+b. \qquad (1)$$

**21.** Построить по точкам график функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке [0; 9] и затем, исходя из этого графика, путем последовательных деформаций его и сдвигов, построить график функции $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}-1{,}2$.

Решение. Составим таблицу соответственных значений переменных $x$ и $y$ для функции $y=\sqrt{x}$ и построим ее график (черт. 14).

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1,0 | 1,4 | 1,7 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 |




Черт. 14

Обозначим функцию $\sqrt{u}$ символом $f(u)$. Тогда данная функция преобразуется к виду

$$y=2f[-3(x+1{,}5)]-1{,}2.$$

Сопоставляя ее с выражением (1), находим следующие значения параметров: $A=2$; $k=-3$; $a=-1{,}5$; $b=-1{,}2$.

Далее, согласно общим указаниям, строим искомый график следующим путем:

увеличивая в 2 раза ординаты точек графика функции $y=\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их абсциссы, строим график функции $y=2\sqrt{x}$;

уменьшая в 3 раза абсциссы точек графика функции $y=2\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{3x}$;

меняя знаки у абсцисс точек графика функции $y=2\sqrt{3x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{-3x}$ (графики функций $y=2\sqrt{3x}$ и $y=2\sqrt{-3x}$ симметричны относительно оси ординат);

перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3x}$ в направлении оси абсцисс на 1,5 единицы масштаба этой оси влево, строим график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$; перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$ в направлении оси ординат на 1,2 единицы масштаба этой оси вниз, строим искомый график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2$.

22. Исходя из графика функции $y=\sin x$, путем его деформаций и сдвигов построить график функции $y=-3\sin(2x+8)$.

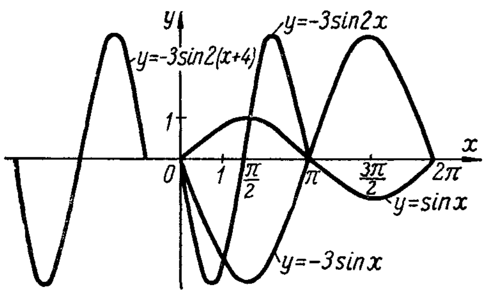
Решение. Заменяя в выражении (1) символ произвольной функции $f$ символом тригонометрической функции sin, получим

$$y=A\sin k(x-a)+b. \qquad (2)$$

Преобразуем данную функцию:

$$y=-3\sin(2x+8)=-3\sin 2(x+4)$$

и, сопоставляя ее с выражением (2), определим следующие значения параметров: $A=-3$; $k=2$; $a=-4$; $b=0$.




Черт. 15

Построение искомого графика выполняем, руководствуясь общими указаниями:

увеличивая в 3 раза ординаты точек графика функции $y=\sin x$ по абсолютной величине, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы, строим график функции $y=-3\sin x$ (черт. 15);

уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -3\sin x$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y = -3\sin 2x$;

перенося точки графика функции $y = -3\sin 2x$ в направлении оси абсцисс на 4 единицы масштаба этой оси влево, строим искомый график функции $y = -3\sin 2(x+4)$.

Пользуясь периодичностью данной функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

**23.** Построить по точкам на отрезке $[-4; 4]$ график функции $y = x^2$ и затем путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 5$; 2) $y = 3 - \frac{x^2}{2}$; 3) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$.

**24.** Исходя из графика функции $y = \sqrt{x}$ (черт. 14), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 1 + \sqrt{2x}$; 2) $y = 3\sqrt{-2x} - 2$;

3) $y = 2 - 3\sqrt{x+5}$; 4)* $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x-6} - 5$.

**25.** Зная график функции $y = \sin x$ (черт. 9), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 2\sin(x+1)$; 2) $y = 1 + 3\sin 2x$;

3) $y = -2\sin 3(x-1)$; 4)* $y = 2 - \sin\frac{4-x}{2}$.

**26.** Зная график функции $y = \cos x$ *, путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики функций:

1) $y = 1 - \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = 2{,}3 + 4\cos(1{,}4 - x)$;

3) $y = -4\cos(2x+3)$; 4)* $y = 4{,}2 - 3\cos\frac{2{,}7-x}{3}$.

## § 5. Переменная как упорядоченное числовое множество. Предел переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции

Переменная величина определяется не только множеством тех числовых значений, которые она принимает, но и тем порядком, в котором они следуют друг за другом. Поэтому *в математическом анализе переменная рассматривается как множество чисел, расположенных в известной последовательности, т. е. как упорядоченное числовое множество.*

---

* Его можно взять из учебника.

Простейшим частным случаем переменной является такая величина $v$, последовательные значения которой могут быть перенумерованы: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$

Такое простейшего вида упорядоченное числовое множество называется *числовой последовательностью.*

I. *Число $a$ называется пределом переменной $x$, если абсолютное значение их разности $a-x$ для всех значений $x$, следующих за некоторым значением $x_0$, будет меньше любого заранее данного положительного числа $\varepsilon$, как бы мало оно ни было.*

II. *Переменная $\alpha$ называется бесконечно малой, если все ее значения, следующие за некоторым значением $\alpha_0$, по абсолютному значению будут меньше любого заранее данного положительного числа $\varepsilon$, как бы мало оно ни было.*

III. *Переменная $z$ называется бесконечно большой, если все ее значения, следующие за некоторым значением $z_0$, по абсолютному значению будут больше любого заранее данного положительного числа $N$, как бы велико оно ни было.*

Если число $a$ есть предел переменной $x$, то говорят, что $x$ стремится к $a$ и пишут: $\lim x = a$, или $x \to a$.

Бесконечно большая величина $z$ не имеет предела, однако для сокращения речи и записей условно говорят, что $z$ стремится к бесконечности, или предел $z$ равен бесконечности, и пишут $z \to \infty$, или $\lim z = \infty$.

Говорят и пишут также, что $z \to +\infty$, $\lim z = +\infty$, или $z \to -\infty$, $\lim z = -\infty$, если все значения бесконечно большой $z$, следующие за некоторым значением $z_0$, сохраняют положительный или отрицательный знак.

Из определений предела переменной, бесконечно малой и бесконечно большой величин следует:

1) *предел бесконечно малой равен нулю* (т. е. если $\alpha$ бесконечно малая, то $\lim \alpha = 0$, или $\alpha \to 0$);

2) *разность между переменной и ее пределом есть величина бесконечно малая* (т. е. если $\lim x = a$, то $x - a = \alpha$);

3) *величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая* $\left(\text{т. е. если } z \to \infty, \text{ то } \frac{1}{z} \to 0\right)$;

4) *величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая* $\left(\text{т. е. если } \alpha \to 0, \text{ то } \frac{1}{\alpha} \to \infty\right)$.

*Если $f(x) \to b$, когда $x \to a$ не совпадая с $a$, то число $b$ называется пределом функции $f(x)$* в точке $a$.

Предел функции можно определить иначе, не ссылаясь на определение предела переменной: *Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (в точке $a$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b|$ будет меньше $\varepsilon$, когда $|x - a|$, при $x \neq a$, меньше $\delta$.*

Если число $b$ есть предел функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, то пишут:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, когда $x$ стремится к $a$ произвольным способом;

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$, когда $x$ стремится к $a$ слева, оставаясь меньше $a$;

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$, когда $x$ стремится к $a$ справа, оставаясь больше $a$ *.

При этом, если существует предел функции, когда $x \to a$ произвольным способом, то существуют и будут с ним одинаковы односторонние пределы функции, когда $x \to a$ только слева или только справа, т. е.

$$\text{если } \lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \text{то } \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Если же односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \to a$ произвольным способом, т. е.

$$\text{если } \lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \text{то } \lim_{x \to a} f(x) \text{ не существует.}$$

**27.** Полагая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу значений переменных

$$x = 1 + 0{,}1^n; \quad y = -0{,}1^{-n}, \quad z = (-0{,}1)^n, \quad u = (-1)^n + 0{,}1^n$$

и определить характер их изменения при неограниченном увеличении $n$, т. е. при $n \to +\infty$.

Решение. Вычисляя значения заданных переменных при указанных значениях $n$, получим следующую таблицу:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0; | 1; | 2; | 3; | 4; | 5; | $\ldots$; $n \to +\infty$ |
| $x$ | 2; | 1,1; | 1,01; | 1,001; | 1,0001; | 1,00001; | $\ldots$; $x \to 1+0$ |
| $y$ | —1; | —10; | —100; | —1000; | —10000; | —100000; | $\ldots$; $y \to -\infty$ |
| $z$ | 1; | —0,1; | 0,01; | —0,001; | 0,0001 | —0,00001; | $\ldots$; $z \to 0$ |
| $u$ | 2; | —0,9; | 1,01; | —0,999; | 0,0001; | —0,99999; | $\ldots$ |

Из рассмотрения этой таблицы можно заключить:

1) С увеличением $n$ последовательные значения переменной $x$ приближаются к единице так, что при достаточно большом $n$

* Если $a = 0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ $(-0)$.

абсолютное значение их разности $|x-1|$ будет меньше любого заранее данного положительного числа $\varepsilon$, как бы мало оно ни было.

Это же можно и доказать. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Полагая $|x-1| = 0{,}1^n < \varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|x-1|$ будет меньше $\varepsilon$, как только $n$ станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению I переменная $x$ имеет предел, равный единице, $\lim\limits_{n\to+\infty} x = 1$, к которому она стремится справа, оставаясь больше его, т. е. монотонно (неизменно) убывая.

2) Последовательные значения переменной $y$ с увеличением $n$ неограниченно убывают так, что при достаточно большом $n$ они по абсолютному значению будут больше любого заданного положительного числа $N$, как бы велико оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $N > 0$. Полагая $|y| = 0{,}1^{-n} > N$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n > \lg N$, т. е. $|y|$ будет больше $N$, как только $n$ станет больше $\lg N$. Следовательно, согласно определению III, переменная $y$ есть бесконечно большая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} y = -\infty$.

3) С увеличением $n$ последовательные значения переменной $z$ приближаются к нулю так, что при достаточно большом $n$ они по абсолютному значению будут меньше любого заданного положительного числа $\varepsilon$, как бы мало оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Полагая $|z| = 0{,}1^n < \varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|z|$ будет меньше $\varepsilon$, как только $n$ станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению II переменная $z$ есть бесконечно малая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} z = 0$. Она стремится к своему пределу — нулю, колеблясь около него, т. е. не монотонно.

4) Последовательные значения переменной $u$ с увеличением $n$ не приближаются ни к какому определенному числу. Поэтому переменная $u$ не имеет предела. Она не является и бесконечно большой, так как ее значения не растут безгранично вместе с $n$. Переменная $u$ — ограниченная величина.

**28.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < a < 1 \\ +\infty, & \text{если } a > 1. \end{cases}$

Решение. 1) Пусть постоянная $a$ есть правильная положительная дробь $0 < a < 1$. Тогда с увеличением $n$ переменная $f(n) = a^n$ будет монотонно убывать, т. е. каждое следующее ее значение будет меньше предыдущего. Докажем, что, начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции $a^n$ будут меньше любого заданного положительного числа $\varepsilon$.

Полагая $a^{n_0} < \varepsilon$, найдем искомое значение $n_0$. Логарифмируя обе части неравенства, получим $n_0 \lg a < \lg \varepsilon$, откуда найдем $n_0 > \frac{\lg \varepsilon}{\lg a}$ (знак неравенства изменился, так как при $0 < a < 1$ $\lg a < 0$).

Следовательно, значение функции $a^n$ при $n = n_0$ и все последующие ее значения при $n > n_0$ будут меньше $\varepsilon$, как бы мало оно ни было, т. е. доказано, что при $0 < a < 1$ и при $n \to +\infty$ функция $a^n$ является бесконечно малой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

2) Пусть $a > 1$. Тогда с увеличением $n$ переменная $a^n$ будет монотонно возрастать. Докажем, что, начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции $a^n$ будут больше любого заданного положительного числа $N$.

Полагая $a^{n_0} > N$, найдем $n_0 > \frac{\lg N}{\lg a}$.

Следовательно, для всех значений $n \geqslant n_0$ значения функции $a^n$ будут больше $N$, как бы велико оно ни было, т. е. доказано, что при $a > 1$ и при $n \to +\infty$ функция $a^n$ является положительной бесконечно большой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

**29.** Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

Решение. 1) Составим разность $\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} = \frac{1}{x}$. При $x \to \infty$ эта разность является бесконечно малой, как величина, обратная бесконечно большой. А если переменная $\frac{2x+3}{3x}$ отличается от постоянной $\frac{2}{3}$ на величину бесконечно малую, то постоянная является пределом переменной. Следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

2) Положим $x = 3 + \alpha$ и составим разность: $(2x+1) - 7 = [2(3+\alpha)+1] - 7 = 2\alpha$. При $x \to 3$ переменная $\alpha \to 0$ и разность между функцией $2x+1$ и числом 7, т. е. $2\alpha$, будет бесконечно малой. Из этого следует, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

**30.** Найти пределы функции $y = \frac{5}{2-x}$: 1) при $x \to 2-0$ и 2) при $x \to 2+0$. Пояснить решение таблицами.

Решение. 1) Если $x$ будет стремиться к 2 слева, оставаясь меньше 2, то $2-x$ будет положительная бесконечно малая, а $\frac{5}{2-x}$ будет положительная бесконечно большая, т. е. если $x \to 2-0$, то $(2-x) \to +0$, а $\frac{5}{2-x} \to +\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$.

Указанное поведение переменных $x$, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ поясняется следующей таблицей:

| $x$ | 1; | 1,9; | 1,99; | 1,999; | 1,9999; | 1,99999; | 1,999999; | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | 1; | 0,1; | 0,01; | 0,001; | 0,0001; | 0,00001; | 0,000001; | ... |
| $\frac{5}{2-x}$ | 5; | 50; | 500; | 5000; | 50000; | 500000; | 5000000; | ... |

2) Если $x \to 2+0$, то $(2-x) \to -0$, а $\frac{5}{2-x} \to -\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{5}{2-x} = -\infty$.

Таблица соответствующих значений переменных $x$, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ наглядно показывает их поведение:

| $x$ | 3; | 2,1; | 2,01; | 2,001; | 2,0001; | 2,00001; | 2,000001; | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | —1; | —0,1; | —0,01; | —0,001; | —0,0001; | —0,00001; | —0,000001; | ... |
| $\frac{5}{2-x}$ | —5; | —50; | —500; | —5000; | —50000; | —500000; | —5000000; | ... |

График функции $y = \frac{5}{2-x}$ изображен на черт. 16.

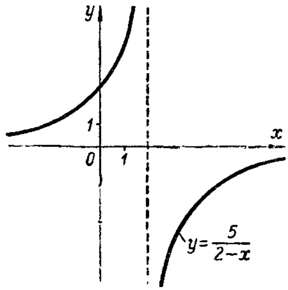
**31.** Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x$, стремящемся к нулю: 1) слева, 2) справа и 3) произвольным способом.

Решение. 1) Если переменная $x$ будет стремиться к нулю слева, оставаясь отрицательной, т. е. если $x$ будет отрицательной бесконечно малой, то $\frac{1}{x}$ будет отрицательной бесконечно большой и $\lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$, что следует из решения задачи 28 (1).

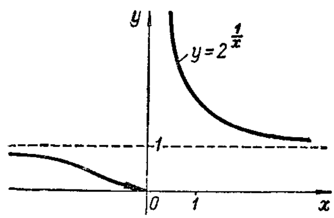
2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$.

3) Если $x$ будет стремиться к нулю произвольным способом, не оставаясь с одной стороны от него (например, как $z$ в задаче 27), то $\frac{1}{x}$ будет стремиться к бесконечности, принимая значения разных знаков. Вследствие этого при $x \to 0$ функция $2^{\frac{1}{x}}$ не имеет предела, не будучи при этом и бесконечно большой величиной $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\infty}$ — не существует.

График функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ показан на черт. 17.




**Черт. 16**




**Черт. 17**

32. Найти пределы функции $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$: 1) при $x \to -0$; 2) при $x \to +0$ и 3) при $x \to 0$.

Решение. 1) Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

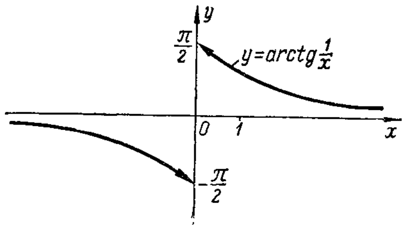
3) Если $x \to 0$, то $\frac{1}{x} \to \infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ не стремится ни к какому значению, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} \infty$ не существует.

График этой функции показан на черт. 18.

33. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу соответствующих значений переменных: $\alpha_1 = 2^n$; $\alpha_2 = -2^n$; $\alpha_3 = (-2)^n$;

$\alpha_4=2^{-n}$; $\alpha_5=-2^{-n}$; $\alpha_6=(-2)^{-n}$ и определить характер их изменения при $n\to+\infty$.

**34.** Полагая $n=1, 2, 3, \ldots$, написать последовательности значений переменных: $x=\frac{n}{n+1}$; $y=(-1)^n\frac{n}{n+1}$; $z=\frac{(-1)^n+3n}{n+2}$; $u=\frac{3n\cos n\pi}{n+3}$; $v=2^{-n}\sin\frac{n\pi}{2}$ и определить, у какой из этих переменных существует предел при $n\to+\infty$ и чему он равен.




Черт. 18

**35.** Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1$;

2) $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+3)=7$;

3) $\lim\limits_{x\to3}(x^2-3x)=0$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{2x}=\frac{3}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3-x^2}=-2$.

**36.** Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to3-0}\frac{1}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to3+0}\frac{1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1-0}3^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1+0}3^{\frac{1}{x+1}}$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}3^{\frac{1}{x+1}}$.

Пояснить решение таблицами.

**37.** Отрезок $AB$ длины $l$ разделен на $n$ равных частей (черт. 19) и на каждой из них, кроме крайних, построены правильные треугольники. Как будет изменяться площадь $S_n$ и периметр $P_n$ полученной зубчатой фигуры, когда $n\to+\infty$?


Черт. 19

## § 6. Теоремы о бесконечно малых и о пределах

I. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.*

II. *Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть также бесконечно малая.*

III. *Предел постоянной равен самой постоянной.*

IV. *Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:*

$$\lim(u+v-w)=\lim u+\lim v-\lim w.$$

V. *Предел произведения конечного числа множителей равен произведению их пределов:*

$$\lim (u\,v\,w) = \lim u \cdot \lim v \cdot \lim w.$$

VI. *Предел частного равен частному пределов делимого и делителя, если предел делителя отличен от нуля:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \qquad \lim v \neq 0.$$

**38.** Найти пределы следующих функций:

1) $f(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$ при $x \to 1$;

2) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2}$ при $x \to -1$;

3) $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. Пользуясь указанными теоремами, последовательно находим:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2x - 3 - \frac{1}{x}\right) = \lim 2 \cdot \lim x - \lim 3 - \frac{\lim 1}{\lim x} =$
$= 2 \cdot 1 - 3 - \frac{1}{1} = -2;$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2} = \frac{(\lim x)^3 - 3(\lim x)^2 + 2\lim x - 5}{(\lim x)^2 + 2} =$
$= \frac{(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5}{(-1)^2 + 2} = \frac{-1 - 3 - 2 - 5}{3} = -\frac{11}{3};$

3) при $x \to 0$ аргумент $\frac{1}{x} \to \infty$, а множитель $\sin \frac{1}{x}$ будет при этом колебаться между $-1$ и $+1$, не стремясь ни к какому определенному числу, т. е. этот множитель не имеет предела, но является величиной ограниченной, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$. Поэтому согласно теореме II данная функция, представляющая произведение бесконечно малой $x$ на величину, ограниченную $\sin \frac{1}{x}$, есть бесконечно малая величина, а ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

**39.** При $n \to +\infty$ найти пределы следующих функций:

1) $S_1(n) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}$;

2) $S_2(n) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

3) $S_3(n) = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \ldots + \frac{n-1}{n^3}$.

Решение. Каждая из данных функций представляет сумму $n-1$ членов арифметической прогрессии. Разность первой прогрессии $\frac{1}{n}$, второй $\frac{1}{n^2}$ и третьей $\frac{1}{n^3}$.

Выполняя сложение и переходя к пределу, найдем:

1) $S_1=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_1=\frac{1}{2}(\lim n-1)=+\infty.$$

2) $S_2=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lim n}\right)=\frac{1}{2}.$$

3) $S_3=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{n-1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lim n}-\frac{1}{(\lim n)^2}\right]=0.$$

В этой задаче, при $n\longrightarrow+\infty$ функции $S_1$, $S_2$ и $S_3$ являются суммами бесконечно малых величин, число которых неограниченно возрастает вместе с $n$. Полученные результаты показывают, что $S_1$ есть величина бесконечно большая, $S_2$ — величина, стремящаяся к $\frac{1}{2}$, $S_3$ — величина бесконечно малая.

Следовательно, решение этой задачи показывает: *если число слагаемых бесконечно малых неограниченно возрастает, их сумма может оказаться любой величиной.*

**40.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ при любом значении $x$.*

Решение. Каково бы ни было значение $x$, всегда найдутся такие два последовательных целых положительных числа $k$ и $k+1$, между которыми заключается $|x|$, т. е. $k<|x|<k+1$. Исходя из этого, получим очевидное неравенство:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdots\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}.$$

Первый множитель $M_1=\left|\frac{x^k}{k!}\right|$ не зависит от $n$ и при любом данном значении $x$ является постоянным; второй множитель $M_2=\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$ при $n\longrightarrow+\infty$ будет величиной бесконечно малой, ибо $\left|\frac{x}{k+1}\right|<1$. (См. решение задачи 28.)

*) $n!$ ($n$ — факториал) есть произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$; $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$.

Поэтому $M_1 \cdot M_2$, как произведение постоянной величины на бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.

Вследствие этого функция $\frac{x^n}{n!}$ также будет величиной бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при любом значении $x$.

Найти следующие пределы:

**41.** $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5x + 6)$. **42.** $\lim\limits_{t \to 1} \frac{t^3 + 3^t}{\sqrt{t+3}}$.

**43.** $\lim\limits_{y \to 0} \frac{(2x-y)^3 - \sin y}{x^2 + y^2 + \operatorname{tg} 2y}$. **44.** $\lim\limits_{x \to \pi} 5 \sin \frac{3x}{x - \pi}$.

**45.** 1) $\lim\limits_{x \to -0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$.

**46.** Как изменяются внутренний угол $\alpha_n$ и апофема $h_n$ правильного многоугольника, когда число его сторон $n$ неограниченно возрастает?

## § 7. Вычисление пределов

*Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет.* Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

а) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо *предел элементарной функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к значению $a$, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т. е.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

**47.** Найти предел функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to -3$;

2) $\varphi(t) = t\sqrt{t^2 - 20} - \lg(t + \sqrt{t^2 - 20})$ при $t \to 6$.

Решение. Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

1) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4 = -74$;

2) $\lim\limits_{t \to 6} \varphi(t) = \varphi(6) = 6\sqrt{6^2 - 20} - \lg(6 + \sqrt{6^2 - 20}) = 23$.

Найти следующие пределы:

48. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$.  49. $\lim\limits_{x\to -1}(x^5-5^{x+1}+3)$.

50. $\lim\limits_{x\to -2}\lg(2+2x+x^2-x^3)$.  51. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x\sin 2x\sin 3x$.

б) Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

В простейших из этих случаев можно найти предел функции путем рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в решениях задач § 5 и 6.

Путем таких рассуждений, основанных на свойствах пределов, получены следующие часто встречающиеся пределы:

(постоянная $a>0$)

1. $\lim\limits_{x\to\infty} ax=\infty$.  2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{a}=\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to -0}\frac{a}{x}=-\infty$.  4. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{a}{x}=+\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty$.  6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x=\begin{cases} 0, & \text{если } |a|<1\\ +\infty, & \text{если } a>1\\ \infty, & \text{если } a<-1^*.\end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x=\begin{cases} 0, & \text{если } |a|>1\\ +\infty, & \text{если } 0<a<1\\ \infty, & \text{если } -1<a<0^*.\end{cases}$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x=\begin{cases} +\infty, & \text{если } a>1\\ -\infty, & \text{если } 0<a<1.\end{cases}$

10. $\lim\limits_{x\to +0}\log_a x=\begin{cases} -\infty, & \text{если } a>1\\ +\infty, & \text{если } 0<a<1.\end{cases}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ($x$ есть радианная мера угла).

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828$.

Этими простейшими пределами можно пользоваться как формулами.

---

* При $a<0$ переменная $x$ может принимать только целочисленные значения; для всех значений $x$ при $a<0$ функция $a^x$ не определена.

Более сложные случаи нахождения предела функции: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^\infty$ рассматриваются далее каждый в отдельности.

I. *Случай, когда при* $x\to a$ или $x\to\infty$ *функция* $f(x)$ *представляет отношение двух бесконечно малых величин* $\left(\textit{случай } \frac{0}{0}\right)$.

Этот случай нахождения предела функции имеет особенно важное значение. Как будет выяснено впоследствии, нахождение предела отношения бесконечно малого изменения функции к бесконечно малому изменению аргумента является одним из основных средств для изучения функций.

Найти следующие пределы:

**52.** 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Решение. Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$; затем делаем преобразования, чтобы сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

1) Разлагаем знаменатель на множители и сокращаем дробь на $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Здесь нет сокращения на нуль, что никогда недопустимо. Согласно определению предела функции аргумент $x$ стремится к своему предельному значению 2, никогда с ним не совпадая. Поэтому здесь $x-2\neq 0$.

Вообще, *если ищется предел функции при* $x\to a$, *то необходимо помнить, что* $x$ *не принимает значения* $a$, *т. е. что* $x\neq a$ *и* $x-a\neq 0$.

2) Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_1$ и $x_2$ — корни трехчлена. Затем сокращаем дробь на $x-5$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}.$$

3) Сократим дробь, разделив на $x+2$ числитель и знаменатель в отдельности:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=\lim \frac{x^4+x-5}{x^3+3x-1}=-\frac{3}{5}.$$

Вообще, *если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке* $x=a$, *то* согласно теореме Безу оба многочлена разделятся без остатка на $x-a$, т. е. *такую дробь всегда можно сократить на* $x-a$.

4) Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на $1+\cos x$:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\lim \frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

**53.** 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Выяснив вначале, что при указанном изменении аргумента данная функция представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$, преобразуем затем дробь так, чтобы сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

1) уничтожаем иррациональность в числителе путем умножения числителя и знаменателя на $1+\sqrt{x+1}$, затем сокращаем дробь на $x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2};$$

2) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})$$

и затем сокращаем дробь на $4-x$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=\lim\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})}=\frac{3}{4};$$

3) умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ и сокращаем дробь на $\operatorname{tg} x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}=\lim\frac{\operatorname{tg} x(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}{1-1-\operatorname{tg} x}=$$

$$=-\lim(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})=-2;$$

4) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}),$$

затем сокращаем дробь на $1-x$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Иначе можно решить эту задачу путем замены переменной. Полагая $x=t^6$, получим $t\to 1$, когда $x\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=\lim\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

**54.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}$.

Решение. Устанавливаем, что данная функция не определена в предельной точке, что при заданном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$. После этого подвергаем функцию преобразованиям с тем, чтобы использовать 1-*й замечательный предел:*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \quad (\alpha \text{— радианная мера угла}).$$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

2) Применяем тригонометрическую формулу $1-\cos x=$ $=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\left(\lim\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

3) Здесь, чтобы использовать 1-й замечательный предел, сделаем замену переменной: $1-x=t$. Тогда при $x\to 1$ будет $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

4) Полагая $\operatorname{arc\,tg}(x+2)=v$, получим $x+2=\operatorname{tg} v$, $v\to 0$, когда $x\to -2$, и

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-2)^2-4}{v}=\lim\frac{(\operatorname{tg} v-4)\operatorname{tg} v}{v}=$$

$$=\lim\frac{\operatorname{tg} v-4}{\cos v}\cdot\lim\frac{\sin v}{v}=-4\cdot 1=-4.$$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}$.

56. $\lim\limits_{x\to -a}\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}$.

57. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

58. $\lim\limits_{t\to 1}\frac{3t^2-t-2}{2t^2+5t-7}$.

59. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{2y^2+5y+2}{2y^3+7y^2+6y}$.

60. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi-\cos\varphi}$.

61. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-3^{2\alpha}}{3^\alpha-1}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

63. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

64. $\lim\limits_{p\to -1}\frac{p+1}{1-\sqrt{1+p+p^2}}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

66. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sin(x-a)}$.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

69*. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

70*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$.

II. *Случай, когда при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$ *функция* $f(x)$ *представляет отношение двух бесконечно больших величин* $\left(\textit{случай}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Найти пределы:

71. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$;

2) $\lim\limits_{n\to -\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$;

4) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$;

6)* $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям.

1) Деля числитель и знаменатель дроби на $x^2$ (наивысшая здесь степень $x$), находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5},$$

так как при $x \to \infty$ величины $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми. Эту задачу можно решить иначе, посредством замены переменной. Полагая $x = \frac{1}{\alpha}$, получим: $\alpha \to 0$, когда $x \to \infty$ и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{3}{\alpha^2} - 1}{\frac{5}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}} = \lim \frac{3 - \alpha^2}{5 + 2\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Вообще, *предельный переход при* $x \to \infty$ *всегда может быть заменен предельным переходом при* $\alpha \to 0$, *если за новую независимую переменную принять величину, обратную первоначальной переменной*, т. е. если положить $\alpha = \frac{1}{x}$.

2) Эту задачу можно решить теми же двумя способами, что и предыдущую.

Деля числитель и знаменатель на $n$, получим

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{-1} = -1,$$

или, полагая $n = \frac{1}{\alpha}$, найдем $\alpha \to -0$ при $n \to -\infty$, и

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{\alpha \to -0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \alpha^2}} = -1.$$

Здесь появляется минус вследствие внесения под знак квадратного радикала (в первом решении) или вынесения за этот знак (во втором решении) отрицательного делителя, ибо если $a < 0$, то

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}.$$

Из этого решения следует, что при $n \to +\infty$ предел данной функции будет равен единице, а при $n \to \infty$ предел этой функции не существует.

3) Умножая числитель и знаменатель дроби на $7^{-n}$, получим

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \lim \frac{7^{-n} + 7^2}{3 \cdot 7^{-n} - 1} = \frac{0 + 49}{0 - 1} = -49,$$

так как $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^{-n} = 7^{-\infty} = 0$.

4) Здесь числитель дроби есть сумма $n$ членов арифметической прогрессии, а знаменатель есть сумма $n + 1$ членов другой арифметической прогрессии. Преобразуя их по известной формуле,

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{\frac{2+2n}{2}n}{\frac{1+2n+1}{2}(n+1)}=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

5) Тождественно преобразуем дробь так, чтобы затем сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\frac{\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\lim\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2}.$$

6)* Преобразуя знаменатель с помощью формулы для суммы квадратов натурального ряда чисел:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}=\lim\frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{6}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=3.$$

**72.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$. **73.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3}$.

**74.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$. **75.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}$.

**76.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$. **77.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{1+2+3+\ldots+n}$.

III. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$).*

Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух рассмотренных случаев, т. е. к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Найти пределы:

78. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{arc\,ctg} x$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} x\right)$.

Решение. Установив, что при указанном изменении аргумента функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$), преобразуем ее к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности.

$$1)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=1\cdot\lim\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь можно было решать другим путем, заменив переменную.

Полагая $1-x=\alpha$, получим

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\lim\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}=$$

$$=\lim\frac{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\lim\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=1\cdot\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

2) Полагая $\frac{\pi}{4}-x=t$, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)=\lim_{t\to 0}t\operatorname{cosec}(\pi-t)=\lim\frac{t}{\sin t}=1.$$

3) Полагая $\operatorname{arc\,ctg} x=\alpha$, имеем $x=\operatorname{ctg}\alpha$ и

$$\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arc\,ctg}x=\lim_{\alpha\to+0}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\lim\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\lim\cos\alpha\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Положим $\operatorname{arc\,tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{tg} z$ и

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x\right) = \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + z\right) \operatorname{tg} z = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} + z\right)\sin z}{\cos z} =$$

$$= \lim \sin z \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\cos z} = -1 \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = -1 \cdot 1 = -1.$$

**79.** $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 2x$.

**80.** $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 2x \operatorname{ctg} x$.

**81.** $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \frac{x}{n}$.

**82.** $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^{-n}$.

IV. *Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).*

Этот случай нахождения предела функции можно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

Найти пределы:

**83.** 1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

3) $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0} (\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Анализируя условие задачи, заключаем, что при указанном поведении аргумента функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).

После этого преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тем самым данный случай нахождения предела функции $\infty - \infty$ сводится к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Производим вычитание дробей и полученную в результате дробь сокращаем на $x-2$:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \lim \frac{x-2}{x^2-4} = \lim \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

2) Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавимся от иррациональности в числителе и затем разделим числитель и знаменатель дроби

на $x$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

3) Как и в предыдущей задаче, переводим иррациональность в знаменатель, затем умножаем числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0}(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}-\operatorname{tg}\alpha)=\lim\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

4) Тождественно преобразуем данную функцию к виду дроби, затем сокращаем дробь на $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0}(2\operatorname{cosec}2x-\operatorname{ctg}x)=\lim\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim\frac{2-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim\operatorname{tg}x=0.$$

**84.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$. **85.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$.

**86.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$. **87.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)$.

V. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (случай $1^\infty$).*

В этом случае для нахождения предела функции используется 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Число $e$ — иррациональное; $e=2{,}7182818\ldots$ *Логарифмы с основанием $e$ называются натуральными* и обозначаются ln. Натуральные и десятичные логарифмы чисел связаны формулами:

$$\lg x=M\ln x,\qquad \ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

где $M=\lg e=0{,}43429\ldots$, $\frac{1}{M}=\ln 10=2{,}30258\ldots$

Найти пределы:

**88.** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (случай $1^\infty$), далее преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел.

1) Полагая $n=ax$, получим $x\to\infty$, когда $n\to\infty$, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=$$
$$=\left[\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a.$$

Возможно и другое решение без замены переменной:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=\left[\lim_{\frac{n}{a}\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=e^a.$$

2) Полагая $-2x=\alpha$, найдем $\alpha\to 0$, когда $x\to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=\left[\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

3) Исключив целую часть из дроби, полагаем $-\frac{5}{t+2}=x$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3}=$$
$$=\left[\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-10}\cdot\lim(1+x)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

4) Полагая $\operatorname{tg} x=1+\alpha$, получим $\alpha\to 0$, когда $x\to\frac{\pi}{4}$, и

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}}=e^{-1},$$

так как

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}=1.$$

**89.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

**90.** $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^t$.

**91.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

**92.** $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

## § 8. Смешанные задачи на нахождение пределов

Найти пределы:

**93.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

**94.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$.

**95.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

**96.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$.

**97.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

**98.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$.

**99.** $\lim\limits_{u\to-2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$.

**100.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$.

**101.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

**102.** $\lim\limits_{t\to 1-0}\frac{\arccos t}{t-1}$.

**103.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

**104.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$.

**105.** $\lim\limits_{p\to 2}\frac{p^5-2p^4+p^2-3p+2}{p^3-2p^2+3p-6}$.

**106.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

**107.** $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\operatorname{ctg} 5x$.

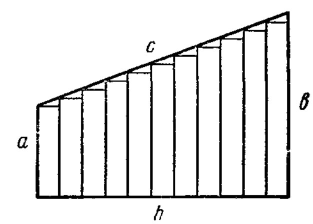
**108.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

**109*.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

**110*.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

**111.** Как изменяются корни $x_1$ и $x_2$ полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда коэффициент $a\to 0$? ($b\neq 0$ и $c$ — постоянные).

**112.** Прямоугольная трапеция разделена прямыми, параллельными ее основаниям, на $n$ равных по высоте малых трапеций, и в каждую из них вписан прямоугольник (черт. 20). Как будут изменяться площадь $S_n$ и периметр $P_n$ полученной ступенчатой фигуры, когда $n\to+\infty$?




Черт. 20

## § 9. Сравнение бесконечно малых

Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины $\alpha$ и $\beta$, находят предел их отношения. При этом:

1) *если* $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, *то* $\alpha$ *называется бесконечно малой высшего порядка, чем* $\beta$;

2) *если* $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, *то* $\alpha$ *называется бесконечно малой низшего порядка, чем* $\beta$;

3) *если* $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A\,(A \neq 0$ и $A \neq \infty)$, *то* $\alpha$ *называется бесконечно малой того же порядка, что и* $\beta$;

4) *если* $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, *то* $\alpha$ *и* $\beta$ *называются эквивалентными бесконечно малыми*. Эквивалентность бесконечно малых $\alpha$ и $\beta$ обозначается знаком приближенного равенства: $\alpha \approx \beta$.

Эквивалентные бесконечно малые обладают следующими свойствами:

I. Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждая из них.

II. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую (или только одну) из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т. е. если $\alpha \approx \alpha_1$ и $\beta \approx \beta_1$, то

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

**113.** Если $x \to 0$, то какие из следующих бесконечно малых:

1) $10x$; 2) $x^3$; 3) $\sqrt{3x}$; 4) $\operatorname{tg} \frac{x}{5}$; 5) $\lg(1+x)$ имеют порядок высший, чем $x$, низший, чем $x$, и тот же, что $x$?

Решение. Находим предел отношения каждой данной бесконечно малой к бесконечно малой $x$:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{10x}{x} = 10.$

Следовательно, $10x$ есть бесконечно малая того же порядка, что $x$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim x^2 = 0;$

$x^3$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $x$;

3) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sqrt{3x}}{x} = \lim \sqrt{\frac{3}{x}} = +\infty;$

$\sqrt{3x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $x$;

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}{x}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x\cos\frac{x}{5}}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}\cdot\lim\frac{1}{\cos\frac{x}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5};$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ есть бесконечно малая того же порядка, что $x$;

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x}=\lim\lg(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lg e;$$

$\lg(1+x)$ есть бесконечно малая того же порядка, что $x$.

**114.** Доказать, что при $x\to 0$:

1) $\sin ax\approx ax$; 2) $\operatorname{tg} ax\approx ax$; 3) $\arcsin ax\approx ax$;

4) $\operatorname{arctg} ax\approx ax$; 5) $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x$.

Решение. Чтобы доказать эквивалентность двух бесконечно малых, нужно найти предел их отношения. Если этот предел окажется равным единице, то бесконечно малые эквивалентны.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{ax}=\lim\frac{\sin ax}{ax\cos ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\frac{1}{\cos ax}=1\cdot 1=1.$$

3) Полагая $\arcsin ax=\alpha$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{ax}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Полагая $\operatorname{arctg} ax=z$, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{ax}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=\lim\frac{z}{\sin z}\lim\cos z=1.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

**115.** Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми (свойство II), найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$; 4)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\frac{2}{n^3}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\frac{5}{n}}$.

Решение. Пользуясь тем, что $\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha\approx\arcsin\alpha\approx\approx\operatorname{arc\,tg}\alpha\approx\alpha$ при $\alpha\to 0$, что следует из решения задачи 114, и применяя указанное свойство эквивалентных бесконечно малых, получим:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}=\lim\frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}=36$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}=\lim\frac{x}{5x}\cdot\frac{2x}{5x}=\frac{2}{25}$;

4)* $$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\frac{2}{n^3}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\frac{5}{n}}=\lim\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{5}{n}}=$$

$$=\lim\frac{3n^4\sqrt{n}}{10n^4\sqrt{n}}=0{,}3.$$

**116.** Доказать, что при $x\to 0$:

1) $\sqrt{6x+1}-1\approx 3x$; 2) $\sin x+\operatorname{tg} x\approx 2x$;

3) $\sqrt[3]{x+8}-2\approx\frac{x}{12}$; 4) $1-\cos\frac{x}{m}\approx\frac{x^2}{2m^2}$.

**117.** Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{2x}-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2\varphi\arcsin 3\varphi}{\sin 3\varphi\operatorname{arctg} 2\varphi}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$.

## § 10. Непрерывность и точки разрыва функции

*Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x-x_0=\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y-y_0=\Delta y$,* т. е. если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Этому определению равносильно следующее:

*Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т. е. если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку $x_0$ (т. е. в самой точке $x_0$ и вблизи этой точки)*;

2) *функция должна иметь одинаковые односторонние пределы* $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) *эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$.*

*Функция $f(x)$ называется разрывной в точке $x_0$, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке $x_0$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.*

Разрыв функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется конечным, или 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Все другие случаи разрыва функции называются разрывами 2-го рода; в частности, если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то и разрыв функции называется бесконечным.

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва $x_0$ называется разность ее односторонних пределов $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, если они различны.

Если точка $x_0$ является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом:

1) если граничная точка $x_0$ входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции при $x \to x_0$ изнутри ее области определения равен или не равен $f(x_0)$;

2) если граничная точка $x_0$ не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.

*Функция называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.*

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.

2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, *если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение* *.

**118.** Показать, что элементарные функции: 1) $y=2x^2-1$; 2) $v=\operatorname{cosec} x$ непрерывны во всей своей области определения.

Р е ш е н и е. Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

1) Областью определения функции $y$ является вся числовая ось. Далее, придадим аргументу $x$ произвольное приращение $\Delta x$ и, подставив в данное выражение функции вместо $x$ наращенное значение $x+\Delta x$, найдем наращенное значение функции:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1.$$

Вычитая из этого наращенного значения функции ее первоначальное значение, найдем приращение функции:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1-(2x^2-1)=4x\Delta x+2\Delta x^2.$$

Пусть теперь $\Delta x \longrightarrow 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y=0$ при любом значении $x$. Следовательно, согласно определению непрерывности, функция $y$ будет непрерывна при любом значении $x$, т. е. во всей своей области определения.

2) Тригонометрическая функция $\operatorname{cosec} x$ определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Повторяя указанные выше рассуждения, найдем приращение функции $\Delta v$ и затем его предел при $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\Delta v=\operatorname{cosec}(x+\Delta x)-\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin x-\sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v=\lim\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}\cdot\lim\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{2\cos x}{\sin^2 x}\cdot 0=0$$

при всех значениях $x$, кроме $x=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

* Неэлементарные функции могут иметь весьма сложную структуру и могут быть определены и вместе с тем разрывны в каждой точке числовой оси.

Следовательно, область непрерывности и область определения элементарной функции $\operatorname{cosec} x$ полностью совпадают.

**119.** Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f_1(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 2) $f_2(x)=\frac{3x-5}{x^2+2x+10}$;

3) $f_3(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 4) $f_4(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$; 5) $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$.

Решение. 1) Функция $f_1(x)$ определена, т. е. может быть вычислена при всех значениях $x$, кроме $x=\pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty<x<-2$, $-2<x<2$, $2<x<+\infty$. Она не определена в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках $x_1$ и $x_2$ имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных ее точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента $x$ к точкам разрыва слева и справа:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to-2-0$ величина $x^2-4$ является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой;

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to-2+0$ величина $x^2-4$ является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв (черт. 21).

$$\text{б)}\ \lim_{x\to2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to2-0$ величина $x^2-4$ есть отрицательная бесконечно малая, а обратная ей величина есть отрицательная бесконечно большая;

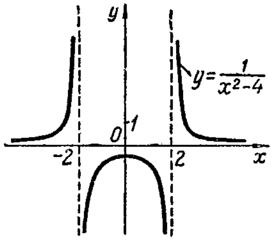
$$\lim_{x\to2+0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to2+0$ величина $x^2-4$ есть положительная бесконечно малая, а обратная ей величина есть положительная бесконечно большая.

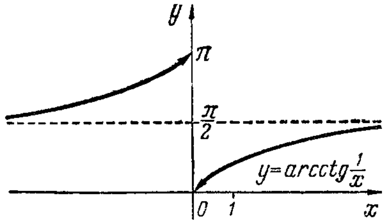
Следовательно, и в точке $x=2$ разрыв функции бесконечный.

2) Элементарная функция $f_2(x)$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные). Поэтому она и непрерывна на всей числовой оси, т. е. не имеет точек разрыва.

3) Элементарная функция $f_3(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. В точке $x=0$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.




Черт. 21




Черт. 22

Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

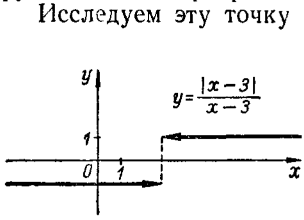
$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0.$$

Следовательно, разрыв функции конечный (черт. 22); при $x=0$ она имеет конечный скачок

$$\lim_{x \to +0} f_3(x) - \lim_{x \to -0} f_3(x) = 0 - \pi = -\pi.$$

4) Функция $f_4(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Из этого следует, что в точке $x=3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:




Черт. 23

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = -1,$$

так как при всяком значении $x < 3$ эта функция равна $-1$;

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = 1,$$

так как при всяком значении $x > 3$ эта функция равна $+1$.

Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет конечный разрыв (черт. 23); ее скачок в этой точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 3+0} f_4(x) - \lim_{x\to 3-0} f_4(x) = 1-(-1) = 2.$$

5) Логарифмическая функция $y=\lg u$ определена только для положительных значений своего аргумента $u$. Поэтому элементарная функция $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$ будет определена и непрерывна для значений $x$, удовлетворяющих неравенству $x^2+3x>0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции,— она будет состоять из двух интервалов числовой оси:

$$-\infty < x < -3 \text{ и } 0 < x < +\infty.$$

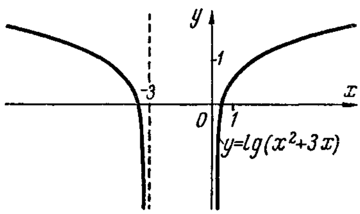
Во всех точках отрезка $-3 \leqslant x \leqslant 0$ данная функция не определена, однако точками ее разрыва являются только граничные точки $x=-3$ и $x=0$. В этих граничных точках функция не определена, но она определена в сколь угодно близких точках слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=0$. Все остальные внутренние точки отрезка $[-3;\ 0]$, в которых функция также не определена, как и в точках $x=-3$ и $x=0$, не являются точками разрыва потому, что вблизи этих внутренних точек функция не определена.

*Точка, в которой функция не определена, будет точкой разрыва функции лишь при условии, если функция определена, хотя бы с одной стороны вблизи этой точки.*

Найдя односторонние пределы функции при стремлении $x$ к точкам разрыва изнутри области определения функции

$$\lim_{x\to -3-0} \lg(x^2+3x) = \lg 0 = -\infty; \quad \lim_{x\to +0} \lg(x^2+3x) = \lg 0 = -\infty,$$

заключаем, что в точках $x=-3$ и $x=0$ функция имеет бесконечные разрывы (черт. 24).




Черт. 24

**120.** Для каждой из следующих функций найти точки разрыва, если они существуют, найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график:

1) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x\leqslant 2 \\ x & \text{при } x>2; \end{cases}$

2) $\varphi(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-2x & \text{при } 1<x<2{,}5 \\ 2x-7 & \text{при } 2{,}5\leqslant x<+\infty; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{при } -\infty<x<-1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$

Решение. 1) *Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная*; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента $x$ и может иметь разрыв в точке $x=2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x=2$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

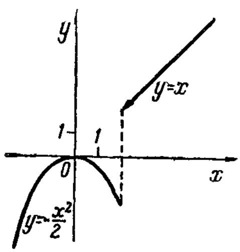
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2,$$

так как слева от точки $x=2$ функция $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$;

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim x=2,$$

так как справа от точки $x=2$ функция $f(x)=x$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x=2$ функция имеет разрыв (конечный).



Черт. 25

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)-\lim_{x\to 2-0} f(x)=2-(-2)=4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.

График этой функции показан на черт. 25.

2) Неэлементарная функция $\varphi(x)$ определена для всех значений $x\geqslant 0$. Она может иметь разрыв в точках $x=1$ и $x=2{,}5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $\varphi(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет

собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента $x$.

Исследуем точки $x=1$ и $x=2{,}5$:

а) $\lim\limits_{x\to 1-0} \varphi(x)=\lim 2\sqrt{x}=2;\quad \lim\limits_{x\to 1+0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=2.$

Согласно условию значение функции $\varphi(x)$ в точке $x=1$ определяется первой формулой

$$\varphi(1)=2\sqrt{1}=2.$$

Следовательно, в точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=1$ и

$$\lim_{x\to 1-0} \varphi(x)=\lim_{x\to 1+0} \varphi(x)=\varphi(1).$$

Поэтому в точке $x=1$ функция $\varphi(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x\to 2,5-0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=-1;\quad \lim\limits_{x\to 2,5+0} \varphi(x)=\lim(2x-7)=-2.$

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т. е. не выполняется 2-е условие непрерывности. Поэтому в точке $x=2{,}5$ функция имеет разрыв (конечный), черт. 26.

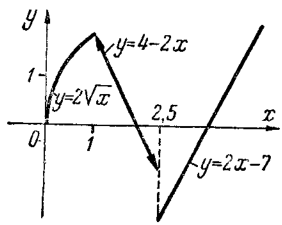
Скачок функции в точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 2,5+0} \varphi(x)-\lim_{x\to 2,5-0} \varphi(x)=-2-(-1)=-1.$$

3) Неэлементарная функция $F(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Это значит, что в точке $x=0$ функция разрывна. Исследуем эту точку:

$$\lim_{x\to -0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=+\infty.$$




Черт. 26

Следовательно, в точке $x=0$ функция $F(x)$ имеет бесконечный разрыв.

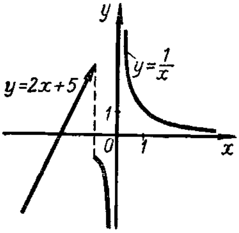
Исследуем далее точку $x=-1$. Поскольку функция $F(x)$ неэлементарная, она может иметь разрыв в этой точке, где меняется ее аналитическое выражение:

$$\lim_{x\to -1-0} F(x)=\lim(2x+5)=3,\qquad \lim_{x\to -1+0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечные, но различные. Поэтому в точке $x=-1$ функция имеет конечный разрыв; ее конечный скачок в этой точке равен

$$\lim_{x \to -1+0} F(x) - \lim_{x \to -1-0} F(x) = -4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $F(x)$ непрерывна; ее график показан на черт. 27.




Черт. 27

**121.** Для следующих элементарных функций: 1) $y = x^3 - 2x$; 2) $z = \sqrt{x}$; 3) $u = \frac{1}{x^2 - 9}$; 4) $v = \cos 2x$ проверить, что область непрерывности функции совпадает с областью ее определения.

**122.** Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$; 2) $y = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}$; 3) $y = \lg(2x + 1)$;

4) $y = \arcsin \frac{1}{x}$; 5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 6)* $y = \frac{x}{\cos x}$.

**123.** Для каждой из следующих функций:

1) $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $y = x + \frac{x+2}{|x+2|}$;

3) $y = \frac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$; 4) $y = \sqrt[x]{2} - 1$;

5) $y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leqslant -1 \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x > -1; \end{cases}$ 6)* $y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{при } x > 2 \end{cases}$

найти точки разрыва, скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.

*ГЛАВА II*

# ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

## § 1. Производная функции и ее геометрическое значение Непосредственное нахождение производной

*Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения ее приращения $\Delta y$ к соответствующему приращению $\Delta x$ независимой переменной, когда $\Delta x \to 0$:*

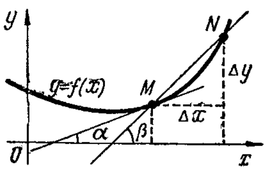
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Производная обозначается $y'$ или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$.

Нахождение производной называется **дифференцированием**.

Геометрически производная $y'$ функции $y=f(x)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику этой функции (черт. 28):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\beta;\quad y'=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\beta \to \alpha}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha.$$



Черт. 28

Функция называется дифференцируемой в некоторой точке $x$, если в этой точке она имеет определенную производную, т. е. если предел (*) существует и имеет одно и то же значение при $\Delta x \to 0$ любым способом; при этом функция будет и непрерывной в этой точке.

*Непрерывность функции есть необходимое (но недостаточное) условие дифференцируемости функции.* Функция, непрерывная в некоторой точке $x$, может быть и недифференцируемой в этой точке.

Простейшие случаи недифференцируемости непрерывной функции $y=f(x)$ изображены на черт. 29.

В точке $a$ при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела, но имеет различные односторонние пределы при $\Delta x \to -0$ и $\Delta x \to +0$, которые называются односторонними (левой и правой) производными:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}$$

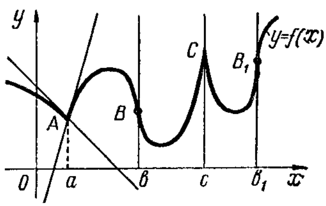
В соответствующей точке графика функции нет определенной касательной, но есть две различные односторонние касательные с угловыми коэффициентами:

$k_1 = y'_{(-)}$ и $k_2 = y'_{(+)}$ (угловая точка).

В точках $b$ и $b_1$ при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является знакопостоянной бесконечно большой величиной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \text{ (или } +\infty).$$

В этом случае говорят, что функция имеет бесконечную производную. В соответствующих точках график функции имеет вертикальную касательную (точки перегиба с вертикальной касательной).




Черт. 29

В точке $c$ односторонние производные являются бесконечно большими величинами разных знаков. В соответствующей точке график функции имеет две слившиеся вертикальные касательные (точка возврата с вертикальной касательной, частный случай угловой точки).

В точках $a$, $b$, $b_1$ и $c$ функция $y = f(x)$ *непрерывна, но не дифференцируема.*

Для непосредственного нахождения производной $y'$ от функции $y = f(x)$ служит следующее общее правило.

I. Придаем аргументу $x$ произвольное приращение $\Delta x$ и, подставляя в данное выражение функции вместо $x$ наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Делим приращение функции на приращение аргумента, т. е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Ищем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Этот предел и даст искомую производную $y'$ от функции $y=f(x)$.

**124.** Путем вычисления предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные следующих функций:

1) $y=3x^2-4x$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\cos 3x$.

Решение: Руководствуясь указанным общим правилом для непосредственного нахождения производной, последовательно находим:

1) Для функции $y=3x^2-4x$:

$$\text{I)}\ y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)=3x^2+6x\Delta x+ \\ +3\Delta x^2-4x-4\Delta x;$$

$$\text{II)}\ \Delta y=(3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-4x-4\Delta x)-(3x^2-4x)= \\ =6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x;$$

$$\text{III)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=6x+3\Delta x-4;$$

$$\text{IV)}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim(6x+3\Delta x-4)=6x-4.$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\frac{d(3x^2-4x)}{dx}=6x-4$.

2) Для функции $y=\frac{1}{x}$:

$$\text{I)}\ y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x};$$

$$\text{II)}\ \Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)};$$

$$\text{III)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)};$$

$$\text{IV)}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

3) Для функции $y=\sqrt{x}$:

$$\text{I)}\ y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x};$$

$$\text{II)}\ \Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};$$

$$\text{III)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x};$$

$$\text{IV)}\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}= \\ =\lim\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4) Для функции $y=\cos 3x$:

I) $y+\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)$;

II) $\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)-\cos 3x=$

$$=-2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x;$$

III) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}$;

IV) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-2\lim\sin\left(3x+\dfrac{3}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\dfrac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=$

$$=-2\sin 3x\cdot\lim\frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=-2\sin 3x\cdot\frac{3}{2}=-3\sin 3x. *$$

**125.** Исходя из определения $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+5x-1$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y=\sqrt{4x+1}$; 5) $y=\sin 3x$; 6)* $y=\operatorname{tg} 2x$.

## § 2. Производные простейших алгебраических и тригонометрических функций

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач, однако нет надобности каждый раз находить производную путем предельного перехода, посредством тех четырех операций, которые указаны в общем правиле дифференцирования функций.

Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования, как это разъясняется в последующих задачах.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)'=0$; 2) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

3) $(uv)'=u'v+v'u$; 3а) $(cu)'=cu'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$; 4а) $\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$;

4б) $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2}$; 5) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\cos x)'=-\sin x$;

8) $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$; 9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$.

---

* Здесь при отыскании предела отношения двух бесконечно малых одна из них заменена другой, ей эквивалентной: $\sin\frac{3}{2}\Delta x\approx\frac{3}{2}\Delta x$. См. свойства эквивалентных бесконечно малых в гл. I, § 8.

Здесь обозначено: $c$ — постоянная; $x$ — независимая переменная; $u$, $v$, $w$ — функции от $x$.

**126.** Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = x^2 - 5x + 4$;  2) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$;

3) $z = x^5\left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right)$;  4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

5) $\varphi(t) = \frac{10}{a \sin t - b \cos t}$;  6) $R(a) = \frac{\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{1 + 2 \operatorname{tg} c}$.

Решение. 1) $y' = (x^2 - 5x + 4)' = (x^2)' - (5x)' + (4)'$ (по формуле 2);

$y' = 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 2x - 5$ (по формулам 5, 3а и 1).

2) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

Применяя формулы 2, 5 и 3а, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} - (-2)x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)\cdot x^{-4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

3) *1-й способ.* Пользуясь формулой 3, получим

$$z' = (x^5)'\left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right) + x^5\left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right)' =$$

$$= 5x^4\left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right) + x^5\left(-\frac{1}{3} + 6x\right) = 10x^4 - 2x^5 + 21x^6.$$

*2-й способ.* Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем, как сумму:

$$z = 2x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 3x^7; \quad z' = 10x^4 - 2x^5 + 21x^6.$$

Этот способ предпочтительнее, так как быстрее приводит к цели.

Следует иметь в виду, что вообще *не обязательно дифференцировать заданную функцию сразу. Можно предварительно подвергнуть ее тождественным преобразованиям* (если это целесообразно, т. е. ведет к упрощению дифференцирования).

4) Пользуясь формулой 4, получим

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2+1)'x^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

5) $$\varphi'(t)=\left(\frac{10}{a\sin t-b\cos t}\right)'=-\frac{10(a\sin t-b\cos t)'}{(a\sin t-b\cos t)^2}=$$

$$=-\frac{10(a\cos t+b\sin t)}{(a\sin t-b\cos t)^2}.$$

Здесь применена формула 4б (постоянный числитель), а не формула 4, что целесообразнее.

6) Пользуясь формулой 4а (постоянный знаменатель), получим

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{(\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha)'}{1+2\operatorname{tg}c}=\frac{-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha(-\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}=$$

$$=-\frac{\cos\alpha(1+\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}.$$

**127.** Найти производную данной функции и затем вычислить ее частное значение при указанном значении аргумента:

1) $F(x)=\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$, $x=0{,}01$; 2) $z=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$, $t=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $y=\dfrac{a+b}{3-2x}+\dfrac{5x^4-1}{a-b}$, $x=0$.

Решение. 1) Вначале раскрываем скобки и производим деление, затем дифференцируем:

$$F(x)=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1=x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}+1;$$

$$F'(x)=-x^{-2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Подставляя значение $x=0{,}01$, получим

$$F'(0{,}01)=-\frac{1}{0{,}01^2}+\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}=-100^2+10^3=-9\,000.$$

2) По формуле 4 найдем

$$z'=\frac{(\cos t)'(1-\sin t)-\cos t(1-\sin t)'}{(1-\sin t)^2}=$$

$$=\frac{-\sin t(1-\sin t)-\cos t(-\cos t)}{(1-\sin t)^2}=\frac{-\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\frac{1}{1-\sin t}.$$

Полагая $t=\dfrac{\pi}{6}$, получим $z'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{1-0{,}5}=2$.

3) Применяя формулы 4б и 4а, получим

$$y'=-\frac{(a+b)(3-2x)'}{(3-2x)^2}+\frac{(5x^4-1)'}{a-b}=\frac{2(a+b)}{(3-2x)^2}+\frac{20x^3}{a-b}.$$

При $x=0$ найдем $y'(0)=\frac{2}{9}(a+b)$.

По формулам дифференцирования найти производные следующих функций:

**128.** $y=x+3x^2-\frac{x^3}{3}$.

**129.** $y=x-2\sqrt{x}$.

**130.** $y=(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$.

**131.** $s=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$.

**132.** $z=3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x^3}+4$.

**133.** $u=\frac{2t}{t+3}$.

**134.** $v=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

**135.** $y=x^2\sin x$.

**136.** $r=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

**137.** $y=-3\cos t\operatorname{ctg} t$.

**138.** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

**139.** $F(t)=\frac{m}{t}+\frac{t}{m}$; вычислить $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=m}$.

**140.** $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$; вычислить $r'(\pi)$.

**141.** $z=(y^2-2y)\operatorname{tg} y$; вычислить $z'(0)$.

**142.** $u(r)=\frac{r^2}{2x^2}-\frac{2x^2}{r^2}$; вычислить $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=x}$.

## § 3. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т. е. если $y$ зависит от $x$ через посредство промежуточного аргумента $u$, то $y$ называется сложной функцией от $x$.

*Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной*:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Так, если $u=\varphi(x)$, то формулы 5, 6, 7, 8 и 9 предыдущего параграфа будут иметь следующий общий вид:

5) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

6) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

7) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$;

9) $(\operatorname{ctg} u)'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$.

Полезно запомнить словесные выражения формул дифференцирования:

*производная степени равна показателю, умноженному на то же основание с показателем на единицу меньше и на производную основания*;

*производная синуса равна косинусу того же аргумента, умноженному на производную от аргумента.*

Выразить словесно остальные формулы дифференцирования рекомендуется студенту самостоятельно.

Найти производные следующих функций:

**143.** 1) $y=(1+5x)^3$; 2) $y=\sin 5x$; 3) $y=\cos^2 x$;

4) $y=\sin x^2$; 5) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$.

Решение. 1) Полагая $y=u^3$, где $u=1+5x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{dy}{du}=3u^2;\quad \frac{du}{dx}=5;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 5=15(1+5x)^2.$$

Легко проверить правильность этого результата: возведя в куб и дифференцируя полученный многочлен, приходим к тому же ответу.

2) Полагая $5x=u$ и пользуясь формулами 6 и 3а, найдем

$$y'=(\sin 5x)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=5\cos 5x.$$

3) Полагая $\cos x=u$ и применяя формулы 5 и 7, получим

$$y'=(\cos^2 x)'=(u^2)'=2u\cdot u'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

4) При $x^2=u$ по формулам 6 и 5 найдем

$$(\sin x^2)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=2x\cos x^2.$$

5) Полагаем $2+x^4=u$, и, пользуясь формулой 5, имеем

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=(\sqrt[3]{u})'=\left(u^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u'=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=\left[(2+x^4)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}(2+x^4)'=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Второй способ записи без особого обозначения промежуточного аргумента значительно проще. Этому способу записи и следует научиться при дифференцировании сложных функций.

**144.** 1) $z=(3ax-x^2)^k$; $z'$? 2) $\beta=2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}$; $\frac{d\beta}{d\alpha}$?

3) $s=\left(\frac{t}{2t+1}\right)^{10}$, вычислить $s'(-1)$.

4) $r=\sin^3 2\varphi-\cos^3 2\varphi$, вычислить $r'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. 1) Применяя формулы 5 и 2, найдем

$$z' = k(3ax - x^2)^{k-1} \cdot (3ax - x^2)' = k(3a - 2x)(3ax - x^2)^{k-1}.$$

2) Используем формулы 5 и 6:

$$\beta' = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)' = \left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha}{3} \cdot \left(\frac{\alpha}{3}\right)' =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{3\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}}.$$

3) Применяем формулы 5 и 4:

$$s' = 10\left(\frac{t}{2t+1}\right)^9 \cdot \frac{1\cdot(2t+1) - 2\cdot t}{(2t+1)^2} = \frac{10t^9}{(2t+1)^{11}}.$$

При $t = -1$ получим $s'(-1) = 10$.

4) Сначала запишем данную функцию в виде

$$r = (\sin 2\varphi)^3 - (\cos 2\varphi)^3,$$

что всегда полезно при дифференцировании степеней **тригонометрических** функций.

Пользуясь формулами 2, 5, 6 и 7, получим

$$r' = 3(\sin 2\varphi)^2(\sin 2\varphi)' - 3(\cos 2\varphi)^2(\cos 2\varphi)' =$$

$$= 3\sin^2 2\varphi \cdot 2\cos 2\varphi - 3\cos^2 2\varphi \cdot (-2\sin 2\varphi) =$$

$$= 3\sin 4\varphi(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi).$$

При $\varphi = \frac{\pi}{8}$ найдем $r'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}.$

Найти производные следующих функций:

**145.** $y = (2 + 3x)^5$. **146.** $y = \sin(2x - 1)$.

**147.** $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$. **148.** $z = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

**149.** $u = \sin at \cos\frac{t}{a}$. **150.** $r = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

**151.** $v = \frac{1}{(1 + \sin 4y)^3}$. **152.** $s = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z - \operatorname{tg} z + z$.

**153.** $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}$. **154.** $r = \frac{\operatorname{tg} a\varphi - b}{\sec a\varphi}$.

**155.** $y = \sin^2 x + \sin x^2$; вычислить $y'(0)$.

**156.** $y = \cos\frac{x}{a} + \cos\frac{a}{x}$; вычислить $y'(a)$.

**157*.** $z = \sqrt[4]{1 + \cos x^4}$; вычислить $z'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}\right)$.

## § 4. Производные показательных и логарифмических функций

Общие формулы и их частные виды:

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e$;

10а) $(e^u)' = e^u u'$; 11а) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

10б) $(a^x)' = a^x \ln a$; 11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e$;

10в) $(e^x)' = e^x$; 11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Для дифференцирования логарифмической функции с основанием $a \neq e$ можно предварительно преобразовать ее в логарифмическую функцию с основанием $e$ по формуле

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u.$$

**158.** Найти производные следующих функций:

1) $y = x^3 3^x$. 2) $f(x) = \sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

3) $y = \ln \cos 3x$. 4) $r = a^\varphi b^\varphi c^\varphi + \lg(5\varphi) - 4 \lg \sqrt{\varphi}$.

5) $y = \ln \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$. 6) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$; вычислить $y'(0)$.

Решение. 1) Дифференцируем как произведение и по формулам 5 и 10б:

$$y' = (x^3)' 3^x + x^3 (3^x)' = 3x^2 3^x + x^3 3^x \ln 3 = x^2 3^x (3 + x \ln 3).$$

2) Вводим дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем как сумму и по формуле 10:

$$f'(x) = \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+ 2^{-5x} \ln 2 \cdot (-5x)' + 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 - 5 \cdot 2^{-5x} \ln 2 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6.$$

Полагая $x = 1$, найдем $f'(1) = -3 \ln 3 - \frac{5 \ln 2}{32} + 3 \ln 6 = \frac{91}{32} \ln 2$.

3) Согласно формулам 11а и 7а имеем

$$y' = (\ln \cos 3x)' = \frac{(\cos 3x)'}{\cos 3x} = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = -3 \operatorname{tg} 3x.$$

4) Здесь предварительно тождественно преобразуем данную функцию:

$$r = (abc)^\varphi + \lg 5 + \lg \varphi - 4 \cdot \frac{1}{2} \lg \varphi = (abc)^\varphi + \lg 5 - \lg e \cdot \ln \varphi.$$

Затем дифференцируем по формулам 10б и 11б:

$$\frac{dr}{d\varphi}=(abc)^{\varphi}\ln(abc)-\frac{\lg e}{\varphi}.$$

5) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln(a^2-x^2)-\ln(a^2+x^2).$$

Согласно формуле 11а найдем

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{4a^2x}{x^4-a^4}.$$

6) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\frac{1}{2}[\ln e^{3x}-\ln(1+e^{3x})]=\frac{1}{2}[3x-\ln(1+e^{3x})];$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{3}{2(1+e^{3x})};\quad y'(0)=\frac{3}{4}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, на основании свойств логарифмов данная логарифмическая функция преобразована сначала к более удобному для дифференцирования виду.

И вообще, *если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию* (произведение, частное, степень, корень), *то полезно сначала выполнить логарифмирование.*

Найти производные следующих функций:

**159.** $y=2^x+2^{3x}$. **160.** $y=a^{x^2}-e^{-x^2}$.

**161.** $z=3\sqrt{x}e^{-x}$ **162.** $x=e^{a\varphi}\sin b\varphi$.

**163.** $s=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. **164.** $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

**165.** $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$. **166.** $z=x(1-\ln x)$.

**167.** $u=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$. **168.** $v=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

**169.** $r=\ln\frac{2e^{\varphi}}{e^{\varphi}+1}$; вычислить $r'(0)$.

## § 5. Производные обратных тригонометрических функций

Общие формулы и их частные виды:

12) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 12а) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 13а) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$; 14а) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$; 15а) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

**170.** Найти производные следующих функций:

1) $y=5\arcsin kx+3\arccos kx$; 2) $y=\arcsin\frac{a}{x}-\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$;

3) $r=\operatorname{arctg}\frac{m}{\varphi}+\operatorname{arcctg}(m\operatorname{ctg}\varphi)$; $r'(0)$?, $r'(\pi)$?

Решение. 1) По формулам 12 и 13 найдем

$$y'=5\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}+3\left[-\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}\right]=\frac{5k}{\sqrt{1-k^2x^2}}-$$

$$-\frac{3k}{\sqrt{1-k^2x^2}}=\frac{2k}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

2) Используя формулы 12 и 15, имеем

$$y'=\frac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}-\left[-\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right]=$$

$$=\frac{-\frac{a}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}}+\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\frac{a}{a^2+x^2}-\frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}},$$

так как $\sqrt{x^2}$ равен не $x$, а $|x|$ и $x\neq 0$.

3) Применяем формулы 14 и 15:

$$r'=\frac{\left(\frac{m}{\varphi}\right)'}{1+\frac{m^2}{\varphi^2}}-\frac{(m\operatorname{ctg}\varphi)'}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=\frac{-\frac{m}{\varphi^2}}{\frac{\varphi^2+m^2}{\varphi^2}}-\frac{-m\operatorname{cosec}^2\varphi}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=$$

$$=-\frac{m}{\varphi^2+m^2}+\frac{m}{\sin^2\varphi+m^2\cos^2\varphi}.$$

Подставляя вместо $\varphi$ заданные значения 0 и $\pi$, найдем

$$r'(0)=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=0;\quad r'(\pi)=-\frac{m}{\pi^2+m^2}+\frac{1}{m}=\frac{\pi^2}{m(\pi^2+m^2)}.$$

Найти производные следующих функций:

**171.** $y=\arcsin\sqrt{x}$. **172.** $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

**173.** $z=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. **174.** $r=\arccos\frac{1}{\varphi^2}$.

**175.** $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. **176.** $v=\arccos\frac{1}{2x}$.

**177.** $x=\varphi\operatorname{arctg}\varphi-\ln\sqrt{1+\varphi^2}$; вычислить $x'(-1)$.

**178.** $y=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; вычислить $y'(0)$.

**179.** $Q=\operatorname{arctg}\frac{a+z}{1-az}$; вычислить $Q'(0)$ и $Q'(-1)$.

## § 6. Смешанные задачи на дифференцирование

Найти производные следующих функций:

**180.** 1) $y=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x-\cos x)$; 2) $r=\ln\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}}$;

3) $s=x^2(1+m\sqrt[x]{e})$; показать, что эта функция удовлетворяет уравнению $x^2(s'-1)=(2x-1)s$.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 3, 10, 2, 6 и 7, получим

$$y'=\frac{1}{1+a^2}[(e^{ax})'(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\sin x-\cos x)']=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}[ae^{ax}(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\cos x+\sin x)]=$$
$$=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a^2\sin x+\sin x)=e^{ax}\sin x.$$

2) Вначале преобразуем данную функцию согласно свойствам логарифмов, затем дифференцируем по формулам 8 и 11:

$$r=\frac{1}{4}[\ln(1+\operatorname{tg}\varphi)-\ln(1-\operatorname{tg}\varphi)];$$
$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{4}\left[\frac{(1+\operatorname{tg}\varphi)'}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{(1-\operatorname{tg}\varphi)'}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\sec^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{-\sec^2\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)=$$
$$=\frac{\sec^2\varphi(1-\operatorname{tg}\varphi+1+\operatorname{tg}\varphi)}{4(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}=\frac{1}{2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}=\frac{1}{2}\sec 2\varphi.$$

3) Заменим радикал дробным показателем и дифференцируем по формулам 3, 5 и 10:

$$s=x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\quad s'=2x\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right)+$$
$$+x^2me^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1).$$

Подставив $s$ и $s'$ в данное уравнение, получим тождество

$$x^2\left[2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1)-1\right]=(2x-1)x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\quad 0=0.$$

**181.** 1) $y=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $y'$? 2) $y=\arcsin(\cos x)$; $y'$?

3) $r=\varphi^2\arccos\frac{2}{\varphi}-2\sqrt{\varphi^2-4}$; вычислить $r'(2)$ и $r'(-2)$.

4)* $y=|1-x^2|$; найти $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'(-2)$ и точки, где функция не дифференцируема.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 2, 4, 7, 5, 6, 11 и 14, получим

$$y' = -\frac{(\cos x)' \sin^2 x - \cos x (\sin^2 x)'}{\sin^4 x} + \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} +$$

$$+ \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

2) Пользуясь формулами 12 и 7, найдем

$$y' = \frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

Смысл этого результата таков: в точках $x$, где $\sin x > 0$, $y' = -1$; в точках, где $\sin x < 0$, $y' = 1$; в точках, где $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, данная функция не дифференцируема (черт. 30).

3) Заменив радикал дробным показателем и применяя формулы 2, 3, 5, 13 и 4, имеем

$$r' = (\varphi^2)' \arccos\frac{2}{\varphi} + \varphi^2 \left(\arccos\frac{2}{\varphi}\right)' - 2\left[(\varphi^2-4)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= 2\varphi \arccos\frac{2}{\varphi} - \varphi^2 \frac{-\frac{2}{\varphi^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{\varphi^2}}} - 2\cdot\frac{1}{2}(\varphi^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\varphi =$$

$$= 2\left(\varphi \arccos\frac{2}{\varphi} + \frac{|\varphi|}{\sqrt{\varphi^2-4}} - \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right), \text{ так как } \sqrt{\varphi^2} = |\varphi|.$$

При $\varphi > 0$: $r' = 2\varphi \arccos\frac{2}{\varphi}$; $r'(2) = 4\arccos 1 = 0$.

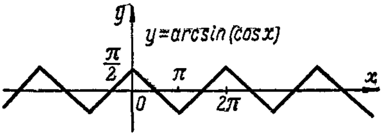
При $\varphi < 0$: $r' = 2\left(\varphi \arccos\frac{2}{\varphi} - \frac{2\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right)$; $r'(-2) = +\infty$.

4)* а) При $1 - x^2 > 0$, т. е. в интервале $-1 < x < 1$, $y' = (1-x^2)' = -2x$, поэтому $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$;

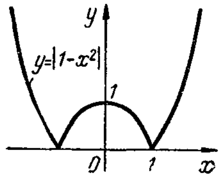
б) при $1 - x^2 < 0$, т. е. в интервалах $-\infty < x < -1$, и $1 < x < +\infty$, $y' = -(1-x^2)' = 2x$, поэтому $y'(-2) = -4$;

в) при $1 - x^2 = 0$, т. е. в точках $x = \pm 1$; данная непрерывная функция не дифференцируема; в этих точках производная $y'$ не существует, но существуют две различные (по знаку) левая и правая производные: $y'_{(-)} = -2$ и $y'_{(+)} = 2$.

В соответствующих точках график функции (черт. 31) имеет по две различных односторонних касательных с угловыми коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_2 = 2$ (угловые точки).



**Черт. 30**



**Черт. 31**

Найти производные следующих функций:

182. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.
183. $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
184. $y=\frac{1}{(1-x^2)^3}$.
185. $x=\sqrt{\cos 4\alpha}$.
186. $s=\sin^4 t+\cos^4 t$.
187. $r=\varphi \sec^2 a\varphi$.
188. $x=2e^t \sin t \cos^2 t$.
189. $y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$.
190. $u=e^{2v}\ln \operatorname{tg}\frac{v}{2}$.
191. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.
192. $x=\ln\frac{t}{\sqrt{t^4-1}}$.
193. $u=\ln\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.
194. $x=t(\cos\ln t-\sin\ln t)$.
195. $y=\frac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}$.
196. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.
197. $y=\arccos(\cos x)$.
198. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$; вычислить $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
199. $u=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}$; вычислить $u'(2)+u'(0)$.
200*. $y=ae^{-\sin x}+\sin x-1$; показать, что $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.
201*. $y=2|\cos x|+\cos x$; найти $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ и угловые точки графика функции.
202*. $y=|x|e^x$; вычислить $y'(-1)$, $y'(1)$ и односторонние производные для угловой точки графика функции.

## § 7. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти $y'$ из уравнения $y=f(x)$, то можно:
а) логарифмировать обе части уравнения (по основанию $e$)

$$\ln y=\ln f(x)=\varphi(x);$$

б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от $x$,

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x) \text{ (согласно формуле 11);}$$

в) заменить $y$ его выражением через $x$ и определить $y'$:

$$y'=y\varphi'(x)=f(x)\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y=u^v$, где $u$ и $v$ — функции от $x$.

203. Найти производные следующих функций:

1) $y=x^x$; 2) $r=(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$;

3) $s=\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$; 4) $R=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

1) а) $\ln y=x\ln x$;

б) $\frac{y'}{y}=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$;

в) $y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$.

2) а) $\ln r=\sin 2\alpha\ln\cos\alpha$;

б) $\frac{r'}{r}=(\sin 2\alpha)'\ln\cos\alpha+\sin 2\alpha(\ln\cos\alpha)'=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha+$

$+\sin 2\alpha\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-2\sin^2\alpha$;

в) $r'=2(\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-\sin^2\alpha)(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$.

3) а) $\ln s=\ln 2+\ln t-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$;

б) $\frac{s'}{s}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}=\frac{1}{t}+\frac{t}{1-t^2}=\frac{1}{t(1-t^2)}$;

в) $s'=\frac{s}{t(1-t^2)}=\frac{2t}{t(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

4) а) $\ln R=\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-2)$;

б) $\frac{R'}{R}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x-2)}=\frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}$;

в) $R'=\frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}=\frac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$.

Найти производные следующих функций:

204. $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}$.

205. $y=\sqrt[x]{x}$.

206. $r=(\sin\varphi)^{\varphi}$.

207. $y=\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

208. $u=\frac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$.

209. $y=\sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

210. $s=\varphi^{e^{\varphi}}$.

211*. $v=x^{x^x}$.

## § 8. Производные высших порядков

Если $y'$ есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от $y'$ называется второй производной, или производной второго порядка от первоначальной функции $y$, и обозначается $y''$, или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')'=y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$;

производная четвертого порядка $(y''')'=y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$;

производная $n$-го порядка $(y^{(n-1)})'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Для произведения двух функций можно получить производную любого $n$-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

212. Для данных функций найти производные указанного порядка:

1) $y=x^5-7x^3+2$; $y'''$? 2) $y=\ln x$; $y^{(5)}$? 3) $s=\operatorname{arctg}2x$; $s''(-1)$? 4) $y=e^{-\varphi}\sin\varphi$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y''+2y'+2y=0$. 5) $y=e^x(x^2-1)$; $y^{(24)}$? 6) $y=x^m$; $y^{(k)}$?

Решение. 1) Дифференцируя функцию $y$, получим

$$(y)'=y'=5x^4-21x^2.$$

Дифференцируя производную $y'$, получим

$$(y')'=y''=20x^3-42x.$$

Дифференцируя вторую производную $y''$, получим

$$(y'')' = y''' = 60x^2 - 42.$$

$$2)\ y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Для нахождения следующих производных здесь полезно ввести отрицательный показатель степени:

$$y'' = -x^{-2};\ y''' = 2x^{-3};\ y^{(4)} = -6x^{-4};\ y^{(5)} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}.$$

3) $s' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$;

$$s'' = -\frac{2(1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}.$$

При $x = -1$ найдем $s''(-1) = \frac{16}{25}$.

4) Найдем $y'$ и $y''$:

$$y' = (e^{-\varphi})' \sin\varphi + e^{-\varphi}(\sin\varphi)' = -e^{-\varphi}\sin\varphi + e^{-\varphi}\cos\varphi = e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi);$$

$$y'' = -e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + e^{-\varphi}(-\sin\varphi - \cos\varphi) = -2e^{-\varphi}\cos\varphi.$$

Подставляя $y$, $y'$ и $y''$ в данное уравнение, получим тождество:

$$-2e^{-\varphi}\cos\varphi + 2e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + 2e^{-\varphi}\sin\varphi = 0;\quad 0 = 0.$$

5) Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(24)} = [e^x(x^2-1)]^{(24)} = (e^x)^{(24)}(x^2-1) + 24(e^x)^{(23)}(x^2-1)' + \frac{24\cdot 23}{2}(e^x)^{(22)}(x^2-1)''.$$

Все следующие слагаемые равны нулю, ибо все высшие производные от функции $x^2-1$, начиная с третьей, тождественно равны нулю;

$$y^{(24)} = e^x(x^2-1) + 24e^x\cdot 2x + 12\cdot 23e^x\cdot 2 = e^x(x^2+48x+551)$$

(так как производная любого порядка от $e^x$ есть $e^x$).

6) Дифференцируя $k$ раз, получим:

$$y = x^m;\ y' = mx^{m-1};\ y'' = m(m-1)x^{m-2};\ \ldots;$$
$$y^{(k)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)x^{m-k}.$$

В частности, если $m$ — целое положительное число, то

$$y^{(m)} = m! \text{ и } y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \ \ldots\ = 0.$$

**213.** $z = t^2 + \sin 5t$; $z'''$? **214.** $v = \alpha^5 \ln\alpha$; $v'''$?

**215.** $x = (2p-1)^5$; $x^{(4)}(3)$? **216.** $y = x^2e^{3x}$; $y''$?

**217.** $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^x$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

218. $y=a^{2x}$; $y^{(n)}$?  219. $y=(1+x)^m$; $\frac{d^ky}{dx^k}$?

220. $y=x\sin x$; $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$? 221*. $y=x^{n-1}\ln x$; $y^{(n)}(1)$?

## § 9. Производные неявной функции

Если $y$ есть неявная функция от $x$, т. е. задана уравнением $f(x, y)=0$, не разрешенным относительно $y$, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по $x$ обе части равенства, помня, что $y$ есть функция от $x$, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от $x$ и $y$; $\frac{dy}{dx}=\varphi(x, y)$.

Вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной $x$ и помня при этом, что $y$ есть функция от $x$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x, y)}{dx}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Заменяя здесь $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x, y)$, получим выражение второй производной через $x$ и $y$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x, y, \varphi(x, y)]=\psi(x, y).$$

Совершенно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить только через $x$ и $y$: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\varphi(x, y)$.

К тому же результату приводит последовательное дифференцирование равенства $f(x, y)=0$ с последующим исключением из полученной системы всех производных низшего порядка.

Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

222. 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{dy}{dx}$? 2) $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-2=0$; $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}$?

3) $x^y=y^x$; $\frac{dx}{dy}$?  4) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; $y'_{x=6}$?

Каков геометрический смысл решения этой задачи?

5) $t-s+\operatorname{arc\,tg} s=0$; $s''$? $y=x+\ln y$; $y''$?; $x''$?

Решение. 1) Дифференцируем по $x$ обе части равенства, где $y$ есть функция от $x$, получим

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0. \text{ Отсюда найдем } y'=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

2) Дифференцируя по $\varphi$ и считая $r$ функцией $\varphi$, найдем

$$e^{\varphi-2}+\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r-3\frac{dr}{d\varphi}=0.$$

Из этого равенства определяем $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{e^{\varphi-2}+r}{3-\varphi}$.

Подставляя данное по условию значение $\varphi=2$ в исходное уравнение, найдем соответствующее значение $r_{\varphi=2}=-1$.

Искомое частное значение производной $\frac{dr}{d\varphi}$ при $\varphi=2$ будет

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=\frac{e^{0}-1}{3-2}=0.$$

3) Логарифмируем обе части данного уравнения (по основанию $e$), затем дифференцируем по $y$, рассматривая $x$ как функцию $y$:

$$y\ln x=x\ln y;\quad y'\ln x+y(\ln x)'=x'\ln y+x(\ln y)';$$

$$1\cdot\ln x+y\frac{x'}{x}=x'\ln y+x\frac{1}{y}.$$

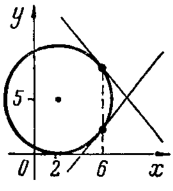
Отсюда найдем:

$$x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x;\quad x'=\frac{dx}{dy}=\frac{x(x-y\ln x)}{y(y-x\ln y)}.$$

4) Дифференцируя по $x$, получим $2x+2yy'-4-10y'=0$.

Отсюда имеем $y'=\frac{x-2}{5-y}$.

Подставляя заданное значение $x=6$ в исходное уравнение, найдем два соответствующих ему значения $y$: $y_1=2$; $y_2=8$.



Черт. 32

Поэтому при $x=6$ и производная $y'$ имеет два значения:

$$y'_{x=6,\ y=2}=\frac{4}{3};\quad y'_{x=6,\ y=8}=-\frac{4}{3}.$$

Геометрически, в прямоугольной системе координат, заданное в условии задачи уравнение определяет окружность, у которой абсциссу $x=6$ имеют две точки: (6; 2) и (6; 8). Найденные значения производной представляют угловые коэффициенты касательных к этой окружности в той и другой точке (черт. 32).

5) *1-й способ*. Дифференцируем по $t$ и находим $s'$:

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0; \quad s'=\frac{s^2+1}{s^2}=1+s^{-2}.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по $t$ и находим $s''$:

$$s''=-2s^{-3}s'=-\frac{2s'}{s^3}.$$

Заменяя здесь $s'$ через $\frac{s^2+1}{s^2}$, окончательно получим

$$s''=-\frac{2(s^2+1)}{s^5}.$$

*2-й способ*. Данное равенство последовательно дифференцируем по $t$ два раза:

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0; \qquad (а)$$

$$-s''+\frac{s''(1+s^2)-2ss's'}{(1+s^2)^2}=0. \qquad (б)$$

Из уравнения (а) определяем $s'$ и, подставляя в уравнение (б), получаем соотношение между $t$, $s$ и $s''$, из которого и выражаем $s''$ через $t$ и $s$. Результат будет тот же, что и при решении 1-м способом.

6) а. Дифференцируем по $x$ и определяем $y'$:

$$y'=1+\frac{y'}{y}; \quad y'=\frac{y}{y-1}.$$

Дифференцируем последнее равенство по $x$ и определяем $y''$

$$y''=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо $y'$ его значение, имеем $y''=-\frac{y}{(y-1)^3}$.

б. Дифференцируем данное равенство по $y$ и определяем $x'$:

$$1=x'+\frac{1}{y}; \quad x'=\frac{y-1}{y}.$$

Дифференцируем полученное равенство по $y$ и определяем $x''$:

$$x''=\frac{1\cdot y-1(y-1)}{y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

**223.** $5x^2+3xy-2y^2+2=0$; $\frac{dy}{dx}$? **224.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $y'_{x=a}$?

**225.** $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; $\frac{dx}{dy}$? **226.** $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$; $\frac{dy}{dx}$?

**227.** $x^3+y^3-3axy=0$; $y''$? **228.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; $y''$?

**229*.** $e^x-e^y=y-x$; $y''$? **230*.** $x+y=e^{x-y}$; $y''$?

**231.** $y+c_1\ln y=x+c_2$; показать, что $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

## § 10. Производные от функции, заданной параметрически

Если функция $y$ от независимой переменной $x$ задана через посредство вспомогательной переменной (параметра) $t$:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

то производные от $y$ по $x$ определятся формулами:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \ldots \qquad \text{(A)}$$

Все эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины $z$ по независимой переменной $x$ равна отношению производных от $z$ и от $x$, взятых по параметру $t$.

Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

**232.** 1) $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}? \end{cases}$

Каков геометрический смысл результата?

2) $\begin{cases} x = \alpha^2 + 2\alpha \\ y = \ln(\alpha + 1); \quad \frac{d^2y}{dx^2}? \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 + e^{a\varphi} \\ y = a\varphi + e^{-a\varphi}; \quad \frac{d^3y}{dx^3}? \end{cases}$

Решение. 1) Находим производные от $x$ и от $y$ по параметру $t$

$$\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt; \quad \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt.$$

Искомая производная от $y$ по $x$ находится как отношение производных от $y$ и от $x$ по $t$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k(\sin t + \sin kt)}{k(\cos t + \cos kt)} = -\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$$

При $t = 0$ получим $\frac{dy}{dx} = 0$. Согласно геометрическому значению производной (§ 1) в точке $(0;\ k+1)$, где $t = 0$, касательная к графику данной функции параллельна оси $Ox$.

2) Находим производные от $x$ и от $y$ по параметру $\alpha$:

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2\alpha + 2; \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

и искомую производную от $y$ по $x$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}(\alpha + 1)^{-2}.$$

Далее находим производную от $y'$ по $\alpha$, а затем искомую вторую производную от $y$ по $x$ как отношение производных от $y'$ и от $x$ по $\alpha$:

$$\frac{dy'}{d\alpha}=-(\alpha+1)^{-3};\quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\alpha}:\frac{dx}{d\alpha}=\frac{-(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)}=-\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

3) Пользуясь общими формулами (А) для производных от функции, заданной параметрически, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{a-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=e^{-a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-6ae^{-3a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-6e^{-4a\varphi}.$$

233. $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3; \ \dfrac{dy}{dx}? \end{cases}$

234. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \ \dfrac{dy}{dx}? \end{cases}$

235. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}? \end{cases}$

236. $\begin{cases} p=\cos\alpha+\alpha\sin\alpha \\ q=\sin\alpha-\alpha\cos\alpha; \ \dfrac{d^2q}{dp^2}? \end{cases}$

237. $\begin{cases} x=z^2 \\ y=z^3+z; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{z=1}? \end{cases}$

238. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\frac{\pi}{6}}? \end{cases}$

## § 11. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между двумя кривыми

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат (черт. 33), то уравнения касательной и нормали к ней в точке $M(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0);\quad y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0), \tag{1}$$

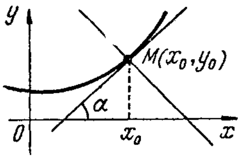
где $y_0'$ — значение в точке $x_0$ производной $\frac{dy}{dx}$ из уравнения кривой.

*Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке.* Угол между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между двумя прямыми, касательными к кривым в точке их пересечения (черт. 34) по формуле

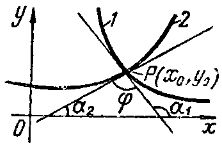
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}, \tag{2}$$

где $k_1$ и $k_2$ — угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения $P(x_0, y_0)$, т. е. частные значения в точке $x_0$ производных от $y$ по $x$ из уравнений этих кривых:

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=x_0};\ k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=x_0}.$$



Черт. 33



Черт. 34

**239.** Составить уравнения касательной и нормали:

1) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где $x = 1$;

2) к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью $Ox$;

3) к циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$;

4) * к кривой $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке.

Решение. 1) Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу точки касания $x = 1$, найдем ее ординату $y = -3$.

Для определения углового коэффициента касательной $y'_0$ находим производную от $y$ по $x$ из уравнения параболы и вычисляем ее частное значение в точке $x = 1$:

$$y' = 2x - 4;\ y'_0 = y'(1) = -2.$$

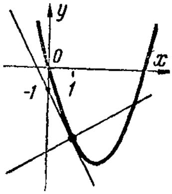
Подставляя значения $x_0$, $y_0$ и $y'_0$ в общие уравнения (1), получим уравнение касательной

$$y + 3 = -2(x - 1) \text{ или } 2x + y + 1 = 0$$

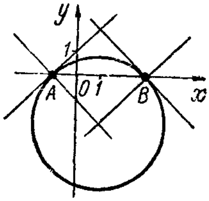
и уравнение нормали

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ или } x - 2y - 7 = 0.$$

Парабола, касательная и нормаль построены на черт. 35.



Черт. 35



Черт. 36

2) Решая совместно заданное уравнение окружности и уравнение оси $Ox$, $y=0$, находим точки их пересечения: $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ черт. 36. Дифференцируя по $x$ уравнение окружности $2x+2yy'-2+4y'=0$, находим производную $y'=\frac{1-x}{2+y}$ и вычисляем ее значения для точек $A$ и $B$: $y'_A=1$, $y'_B=-1$. Подставляя в общие уравнения (1), получим искомые уравнения касательной и нормали:
для точки $A$ соответственно $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$;
для точки $B$ $x+y-3=0$ и $x-y-3=0$.

3) Подставляя в уравнения циклоиды $t=\frac{\pi}{2}$, находим координаты точки касания: $x=\frac{\pi}{2}-1$; $y=1$.

Затем определяем производную от $y$ по $x$ из уравнений циклоиды, как от функции, заданной параметрически

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

и вычисляем ее значение для точки касания $y'_0=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Подставляя $x_0$, $y_0$ и $y'_0$ в уравнения (1), получим уравнение касательной $2x-2y-\pi+4=0$ и уравнение нормали $2x+2y-\pi=0$.

4)* Найдем производную $y'$ и затем угловую точку данной кривой из условия, что для этой точки производная $y'$ не существует, но существуют различные односторонние производные:

$$y'=|x^3-1|'=\pm 3x^2,$$

где плюс соответствует интервалу $x>1$, в котором $x^3-1>0$, а минус — интервалу $x<1$, где $x^3-1<0$.

Отсюда заключаем, что точка, где $x=1$, является угловой; в этой точке кривая имеет две односторонние касательные с угловыми коэффициентами

$$k_1=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(-)}(1)=-3 \text{ и } k_2=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(+)}(1)=3.$$

Пользуясь общими уравнениями (1), получим уравнения касательных $3x-y-3=0$ и $3x+y-3=0$ и уравнения нормалей $x+3y-1=0$ и $x-3y-1=0$ (черт. 37).

**240.** Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии:

1) прямая $x+y-4=0$ и парабола $2y=8-x^2$;
2) эллипс $x^2+4y^2=4$ и парабола $4y=4-5x^2$;
3) синусоида $y=\sin x$ и косинусоида $y=\cos x$.

Решение. 1) Совместно решая уравнения параболы и прямой, находим, что они пересекаются в двух точках: $A(0;\ 4)$ и $B(2;\ 2)$, черт. 38.

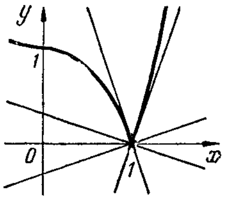
Далее находим производную от $y$ по $x$ из уравнения параболы: $2y' = -2x$, $y' = -x$ и определяем угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $A$ и $B$, как частные значения этой производной:

$$y'_A = k_A = 0;\quad y'_B = k_B = -2.$$

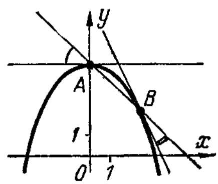
Угловой коэффициент прямой один и тот же во всех ее точках; у данной прямой он равен $-1$.

Согласно формуле (2) получим

$$\operatorname{tg} A = 1,\quad A = 45^\circ;\quad \operatorname{tg} B = \frac{-1+2}{1+2} = \frac{1}{3},\quad B \approx 18{,}5^\circ.$$



Черт. 37



Черт. 38

2) Решая совместно уравнения кривых, находим их общие точки: $A(1{,}2;\ -0{,}8)$, $B(0;\ 1)$ и $C(-1{,}2;\ -0{,}8)$, черт. 39. Затем определяем угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$ касательных в любой точке эллипса и параболы как производные от $y$ по $x$ из их уравнений

$$k_1 = -\frac{x}{4y} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{5}{2}x.$$

Подставляя координаты точки $A$, получим $k_1 = \frac{3}{8}$ и $k_2 = -3$.

Следовательно, в точке $A$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{8}+3}{1-\frac{9}{8}} = -27;\quad \varphi \approx 92^\circ.$$

Под таким же углом кривые пересекаются и в точке $C$ вследствие их симметричности относительно оси $Oy$.

В точке $B$ имеем: $k_1 = k_2 = 0$, следовательно, в точке $B$ кривые имеют общую касательную, т. е. касаются друг друга. В этой точке угол между кривыми равен нулю.

3) Абсциссы точек пересечения кривых (черт. 40) определяются уравнением $\sin x = \cos x$, решая которое, получим

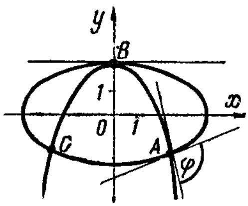
$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \, (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots).$$

Дифференцированием находим угловые коэффициенты касательных к синусоиде и косинусоиде: $k_1 = \cos x$; $k_2 = -\sin x$.

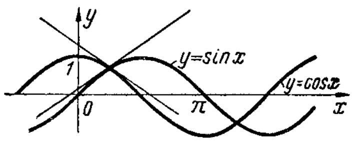
Искомый угол между кривыми определяем по общей формуле (2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \sin x} = \pm \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Положительному знаку соответствует острый угол $\varphi \approx 70{,}5^\circ$, отрицательному — тупой, смежный с ним угол $\varphi_1 \approx 109{,}5^\circ$.



Черт. 39



Черт. 40

**241.** В каких точках кривой $x = t - 1$, $y = t^3 - 12t + 1$ касательная параллельна: 1) оси $Ox$; 2) прямой $9x + y + 3 = 0$?

Решение. Используем здесь условие параллельности прямых, заключающееся в равенстве их угловых коэффициентов.

Найдем производную от $y$ по $x$ из уравнений кривой:

$$y' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 12}{1} = 3t^2 - 12.$$

Эта производная представляет угловой коэффициент касательной к данной кривой в любой ее точке.

1) Приравнивая $y'$ угловому коэффициенту оси $Ox$, который равен нулю, получим $3t^2 - 12 = 0$; $t^2 = 4$; $t = \pm 2$.

Подставляя эти значения параметра $t$ в данные уравнения кривой, найдем координаты тех ее точек, где касательная параллельна оси $Ox$: $(1; -15)$; $(-3; 17)$.

2) Приравнивая $y'$ угловому коэффициенту данной прямой, который равен $-9$, получим $3t^2 - 12 = -9$; $t^2 = 1$; $t = \pm 1$.

По найденным значениям параметра $t$ из уравнений кривой определяем координаты искомых точек, где касательная к кривой параллельна данной прямой: $(0; -10)$, $(-2; 12)$.

**242***. Составить уравнения касательных к параболе $y=x^2-4x+1$, проходящих через не лежащую на ней точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $A(1; 1)$.

Решение. Уравнение касательной к данной параболе имеет общий вид

$$y-y_0=(x^2-4x+1)'_0(x-x_0),$$

или

$$y-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(x-x_0),$$

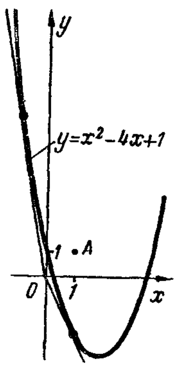
где $(x, y)$ — текущая точка на касательной;

$(x_0, y_0)$ — неизвестная точка касания.

1) Так как касательная проходит через точку $O$, то

$$0-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(0-x_0).$$

Решая это квадратное уравнение, находим для абсциссы точки касания $x_0$ два значения: $x_0=\pm 1$, а отсюда и уравнения двух касательных: $2x+y=0$ и $6x+y=0$.



Черт. 41

2) Для точки $A$ те же рассуждения приводят к квадратному уравнению $x_0^2-2x_0+4=0$, корни которого комплексные. Поэтому через точку $A$ нельзя провести к данной параболе ни одной касательной.

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл: из каждой точки, принадлежащей внешней области параболы, можно провести к ней две касательные, а из точки, принадлежащей ее внутренней области, — ни одной (черт. 41).

В общем случае задача о проведении касательных к кривой $y=f(x)$ через точку $(a, b)$, не лежащую на этой кривой, решается этим же способом, исходя из общего уравнения касательной

$$y-y_0=y'_0(x-x_0).$$

Эта задача имеет столько же решений, сколько вещественных корней имеет уравнение

$$b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0).$$

В задачах 243—248 найти уравнения касательных и нормалей к данным кривым в указанных точках и построить кривые, касательные и нормали.

243. К параболе $y=4-x^2$ в точке, где $x=-1$.

244. К гиперболе $y^2-2x^2=1$ в точках, где $x=2$.

245. К эллипсу $x=2\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sin t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{6}$.

246. К астроиде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{4}$.

247*. К кривой $y = |\sin x|$ в ее угловой точке, где $x = \pi$.

248*. К кривой $y = |2x - x^2|$ в ее угловых точках.

В задачах 249—254 найти углы, под которыми пересекаются данные линии, и построить эти линии и углы.

249. $9y = x^3$; $x - y = 0$.

250. $y = \cos x$; $2y = 1$.

251*. $y^2 = 2ax + a^2$; $y^2 = b^2 - 2bx$.

252. $y = e^x$; $y = e^{3x}$.

253. $x^2 - y^2 = 6$; $x^2 + 4y^2 = 16$.

254. $y = \sin x$; $y = \sin 2x$.

255. Зная, что касательная к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в ее вершине параллельна оси $Ox$, найти вершины следующих парабол:

1) $y = x^2 + 2x - 1$; 2) $y = 1 + 8x - 2x^2$, 3) $2y = 2x - x^2$ и построить их.

256. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки, где касательная параллельна прямой $3x + 4y - 12 = 0$. Построить окружность, прямую и касательные.

257. На каждой из следующих кривых:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; 2) $y = x + \sqrt{x}$;
3) $x = t^2 + 1$, $y = 3 - t^2$; 4) $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$

найти такие точки, где касательная параллельна оси $Ox$.

258. Найти угол между касательными к эллипсу $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, в точках, где $t = \frac{\pi}{6}$ и $t = \frac{\pi}{3}$. Построить эллипс и касательные.

259*. Построить на отрезке $[-2; 2]$ график функции $y = |x^3 + x|$ и найти угол между касательными в его угловой точке.

260. Построить и найти углы, образуемые параболой $y = 2x - x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4.

261*. Определить угол между касательными к параболе $y = x^2 - 3x + 1$, проведенными из точки (4; 1). Построить параболу и касательные.

## § 12. Скорость изменения переменной величины. Скорость и ускорение прямолинейного движения

Если величина $z$ изменяется с течением времени $t$, то скорость ее изменения определяется производной $\frac{dz}{dt}$.

Зная зависимость между двумя переменными $x$ и $y$, можно найти зависимость между скоростями их изменения по формуле производной сложной функции

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Если точка движется прямолинейно, то ее скорость $v$ и ускорение $w$ определяются первой и второй производными от пути $s$ по времени $t$:

$$v=\frac{ds}{dt}; \quad w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

**262.** Точка движется по кубической параболе $12y=x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Считая в уравнении параболы $y$ сложной функцией от времени $t$ и дифференцируя его по $t$, получим

$$12\frac{dy}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда найдем отношение скоростей изменения ординаты и абсциссы:

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{4}.$$

При $|x|<2$ это отношение будет меньше единицы, при $|x|=2$ — равно единице и при $|x|>2$ оно будет больше единицы. Следовательно:

1) при $-2<x<2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;

2) при $x=\pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы:

3) при $x<-2$ и $x>2$ ордината изменяется быстрее абсциссы.

**263.** Резервуар, имеющий форму полушара с внутренним радиусом $R$ (*м*), наполняется водой со скоростью $Q$ (*л*) в секунду. Определить скорость повышения уровня воды в резервуаре в момент, когда он будет равен $0{,}5R$.

Решение. Обозначим через $h$ уровень воды в *м* и через $v$ ее объем в *м*$^3$. Найдем зависимость между переменными $h$ и $v$, пользуясь формулой для объема шарового сегмента

$$v=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Дифференцируя это равенство по времени $t$, найдем зависимость между скоростями изменения переменных $h$ и $v$:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\left[2h\left(R-\frac{h}{3}\right)-\frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt}=\pi\left(2Rh-h^2\right)\frac{dh}{dt}.$$

Полагая, согласно условию, $\frac{dv}{dt}=0{,}001\,Q\left(\frac{м^3}{сек}\right)$,

получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}001\,Q}{\pi h(2R-h)}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

При $h=\frac{R}{2}$ получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}004\,Q}{3\pi R^2}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

**264.** Скорость прямолинейного движения тела пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как, например, при свободном падении). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютона сила $F$, вызывающая движение, пропорциональна ускорению

$$F = k\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Согласно условию $\frac{ds}{dt} = \lambda\sqrt{s}$. Дифференцируя это равенство, найдем

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}}\cdot\lambda\sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно, действующая сила $F = \frac{k\lambda^2}{2}$ (const).

**265.** Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Показать, что ускорение движения пропорционально отклонению $x$.

Решение. Найдем скорость $v$ и ускорение $w$ движения в любой момент времени $t$:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

При $t = \frac{2\pi}{\omega}$, $v = A\omega$, $w = 0$.

Сравнивая выражения для ускорения $w$ и для отклонения $x$, видим, что первое отличается от второго только постоянным множителем: $w = -\omega^2 x$.

**266.** Зависимость количества $Q$ вещества, получаемого в химической реакции, от времени $t$ определяется формулой $Q = a(1 + be^{-mt})$. Определить скорость реакции.

267. Точка движется по параболе $y = 5 - x^2$ так, что ее абсцисса $x$ изменяется с течением времени $t$ по закону $x = at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки?

268. Радиус шара $r$ равномерно возрастает со скоростью 2 *см/сек*. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Каковы будут эти скорости в момент, когда $r$ достигнет 10 *см*?

**269.** Движение точки по оси $Ox$ определяется формулой $x = (t-2)^2 e^{-t}$. Определить скорость и ускорение движения и те моменты времени, когда точка меняет направление движения.

**270.** Точка массы $m$ колеблется по оси $Ox$ так, что в момент времени $t$ ее отклонение $x$ от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки и действующую на нее силу.

## § 13. Дифференциал функции

Из определений производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и предела переменной следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ или $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. что приращение функции можно разбить на две части.

*Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется дифференциалом функции* и обозначается знаком $d$:

$$dy = y'\,\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной $x$ равен ее приращению, $dx = \Delta x$. Поэтому

$$dy = y'\,dx, \tag{a}$$

т. е. *дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной.*

Для всякой данной функции $y = f(x)$ производная $y'$ зависит только от одной переменной $x$, тогда как ее дифференциал $dy$ зависит от двух независимых друг от друга переменных: $x$ и $\Delta x$.

Нахождение дифференциала функции называется дифференцированием, так же как и нахождение производной, так как согласно формуле (а), чтобы найти дифференциал какой-либо функции, надо найти производную этой функции и умножить ее на дифференциал независимой переменной.

Формула (а) верна и в случае, если $y$ есть сложная функция, т. е. если $x$ есть функция переменной $t$.

При достаточно малых значениях $|dx|$ приращение функции может быть заменено ее дифференциалом с как угодно малой относительной ошибкой:

$$\Delta y \approx dy.*$$

Это приближенное равенство применяется для приближенных вычислений, так как вычисление дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее приращения.

**271.** Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^3 - 3^x$; 2) $F(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}$;

3) $z = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arcctg} e^{5x}$; вычислить $dz|_{x=0;\ dx=0,1}$

Решение. Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим

---

* Исключая точки, где $y' = 0$.

искомый дифференциал данной функции:

1) $dy = y'\,dx = (x^3 - 3^x)'\,dx = (3x^2 - 3^x \ln 3)\,dx;$

2) $dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$

$$= \left[-\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos\frac{3}{\varphi}\cdot\left(\frac{3}{\varphi}\right)'\right] d\varphi = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2}\cos\frac{3}{\varphi}\right) d\varphi;$$

3) $dz = \left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right] dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right) dx =$

$$= \frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}\,dx.$$

Полагая $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим $dz = 0{,}25$.

**272.** Вычислить приближенное значение: 1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $\operatorname{arc\,tg} 0{,}98$; 3) $\sin 29°$.

Решение. Если требуется вычислить $f(x_1)$ и если проще вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютному значению разности $x_1 - x_0 = dx$ можно заменить приращение функции ее дифференциалом $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx$ и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx. \tag{б}$$

1) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. Пусть $x_0 = 16$, тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}, \quad dx = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя в формулу (б), получим

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

2) Пусть $\operatorname{arctg} 0{,}98$ есть частное значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0{,}98 = x_1$. Пусть $x_0 = 1$, тогда $y(x_0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(x_0) =$

$$= \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad dx = x_1 - x_0 = -0{,}02.$$

Пользуясь формулой (б), найдем:

$$\operatorname{arctg} 0{,}98 \approx y(x_0) + y'(x_0)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$$

3) Полагая, что $\sin 29^\circ$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x=\frac{\pi}{180}\cdot 29=x_1$ и что $x_0=\frac{\pi}{180}\cdot 30=\frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\quad y'(x_0)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx=x_1-x_0=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0{,}4848.$$

Найти дифференциалы функций:

**273.** $y=(a+bx)^m$. **274.** $z=e^{-t}(2-2t-t^2)$.

**275.** $u=\frac{x^n}{n^2}(1-n\ln x)$. **276.** $v=(1-\ln\sin\varphi)\sin\varphi$.

Вычислить с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

**277.** $y=x(1+x)(1-x)$ при $x=-10$ и $dx=0{,}1$.

**278.** $z=x\sqrt{x^2+5}$ при $x=2$ и $dx=\frac{1}{5}$.

**279.** $r=\varphi+(\varphi^2+1)\operatorname{arcctg}\varphi$ при $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ и $d\varphi=0{,}2$.

**280.** $v=\frac{2\sin 2x-3\cos 2x}{e^{3x}}$ при $x=0$ и $dx=-0{,}03$.

**281.** Вычислить приближенное значение функции $y=x^7-3x^4+4x^3-2$ при $x=1{,}002$, исходя из ее значения при $x=1$ и заменяя приращение функции дифференциалом *.

**282.** Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$, исходя из значения функции $y=\operatorname{tg} x$ при $x=45^\circ$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

**283.** Найти приближенное значение $\arccos 0{,}4993$, исходя из значения функции $y=\arccos x$ при $x=0{,}5$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

**284.** Найти приближенное значение $\ln 1{,}01$.*

**285.** Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.*

## § 14. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование. Касательная к пространственной кривой

*Переменный вектор $\bar{r}$ называется вектор-функцией скалярного аргумента $t$, если каждому рассматриваемому числовому значению $t$ соответствует определенное значение $\bar{r}$* (т. е. определенный модуль и определенное направление вектора $\bar{r}$).

---

* Все вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.

Если начало переменного вектора $\bar{r}=\bar{r}(t)$ неизменно помещается в начале координат $O$, т. е. если $\bar{r}(t)$ есть радиус-вектор $\overline{OM}$, то при изменении скаляра $t$ его подвижный конец $M$ описывает некоторую линию, которая называется **годографом** этого вектора.

При разложении радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ по ортам $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ его проекции $r_x=x(t)$, $r_y=y(t)$, $r_z=z(t)$ совпадают с координатами его конца $M(x, y, z)$, а система $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ представляет параметрические уравнения его годографа.

**Производной** вектор-функции $\bar{r}(t)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$; она обозначается $\frac{d\bar{r}}{dt}$, или $\dot{\bar{r}}$, или $\bar{r}'$.

Правила дифференцирования (нахождения производной) вектор-функции $\bar{r}(t)$ аналогичны правилам дифференцирования скалярных функций:

$$\bar{c}'=0, \text{ если } \bar{c} \text{ — постоянный вектор.}$$

$$(\bar{r}_1\pm\bar{r}_2)'=\bar{r}'_1\pm\bar{r}'_2;\quad (\bar{r}u)'=\bar{r}'u+\bar{r}u'.$$

Если $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, то $\dot{\bar{r}}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}$. Вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к годографу вектора $\bar{r}$.

*Если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по направлению, то его годограф представляет линию, расположенную на сфере радиуса $R=|\bar{r}|$ с центром в начале координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ перпендикулярен к годографу вектора $\bar{r}$; если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по модулю, то его годограф представляет луч, исходящий из начала координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по этому лучу.*

Всякую кривую можно рассматривать как годограф радиуса-вектора ее текущей точки $M(x, y, z)$. Поэтому, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — параметрические уравнения кривой и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой кривой, то касательная прямая к этой кривой в точке $M_0$ определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}, \tag{1}$$

а нормальная плоскость (перпендикулярная к касательной) определяется уравнением

$$(x-x_0)\dot{x}_0+(y-y_0)\dot{y}_0+(z-z_0)\dot{z}_0=0. \tag{2}$$

**286.** Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

1) $x=t^3$, $y=t^2$, $z=t$ в точке, где $t=-1$;

2) $x=y^2$, $y=z^2$ в точке, где $z=2$.

Решение. 1) Определяем координаты точки касания: $x=-1$, $y=1$, $z=-1$ (подставляя $t=-1$ в данные уравнения). Находим производные от $x$, $y$ и $z$ по $t$ и вычисляем их значения в точке касания: $\dot{x}=3t^2$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(-1)=3$, $\dot{y}(-1)=-2$, $\dot{z}(-1)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2) координаты точки касания и вычисленные значения производных, получим уравнения касательной прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ и уравнение нормальной плоскости $3(x+1)-2(y-1)+z+1=0$ или $3x-2y+$ $+z+6=0$.

2) Здесь кривая определена как пересечение двух поверхностей. Вначале преобразуем уравнения кривой к параметрическому виду. Полагая $z=t$, получим $y=t^2$, $x=t^4$.*

Далее определяем координаты точки касания: $x=16$, $y=4$, $z=2$ и значения производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в этой точке: $\dot{x}=4t^3$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(2)=32$, $\dot{y}(2)=4$, $\dot{z}(2)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2), получим уравнения касательной

$$\frac{x-16}{32}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-2}{1}$$

и уравнение нормальной плоскости

$$32(x-16)+4(y-4)+z-2=0 \quad \text{или} \quad 32x+4y+z-530=0.$$

**287.** Найти уравнения касательной к винтовой линии $y=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в точке, где $t=t_0$, и угол, образуемый ею с осью $Oz$.

Решение. Обозначив координаты точки касания $(x_0, y_0, z_0)$ и пользуясь общими уравнениями (1), получим следующие уравнения касательной:

$$\frac{x-x_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-y_0}{a\cos t_0}=\frac{z-z_0}{b}.$$

Отсюда направляющий косинус угла, образованного касательной с осью $Oz$:

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t_0+a^2\cos^2 t_0+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Этот результат показывает, что все касательные к винтовой линии образуют с осью $Oz$ один и тот же угол.

* Можно получить и другие параметрические уравнения данной линии. Вообще, если линия задана уравнениями $f(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$, то для нее можно получить бесчисленное множество различных параметрических уравнений вида $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$.

В задачах 288—290 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

**288.** $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в точке, где $t=1$.

**289.** $x=\cos^2\frac{t}{2}$, $y=\sin t$, $z=\sin\frac{t}{2}$ в точке, где $t=\pi$.

**290.** $y=x$, $z=x^2-y^2$ в начале координат.

**291.*** Найти направляющие косинусы касательного вектора к кривой $y^2=2x$, $z^2=8x$ в точках, где $x=2$.

## § 15. Скорость и ускорение криволинейного движения

Если в любой момент времени $t$ положение движущейся точки $M$ определяется ее радиусом-вектором $\overline{OM}=r(t)$, то $\dot{\bar{r}}$ есть вектор скорости, $\ddot{r}$ есть вектор ускорения, а годограф вектора $\bar{r}$ есть траектория движения точки $M$.

Вектор скорости $\dot{r}$ направлен по касательной к траектории, а его модуль равен производной от пути по времени $|\dot{r}|=\frac{ds}{dt}$.

**292.** Зная уравнение движения точки, определить (назвать), какую линию представляет ее траектория и найти скорость и ускорение этой точки:

1) $\bar{r}=(3t-2)\bar{i}-4tj$;  2) $\bar{r}=2\cos t\cdot\bar{i}+\sin t\cdot\bar{k}$;

3) $\bar{r}=(2t^2-3)\bar{i}-3t^2\bar{j}+(4t^2-5)\bar{k}$;

4) $\bar{r}=a\sin\omega t\cdot\bar{i}+a\cos\omega t\cdot j+bt\bar{k}$.

Решение. 1) Траектория точки есть годограф ее радиуса-вектора $\bar{r}\{3t-2;\ -4t\}$, т. е. линия, определяемая параметрическими уравнениями $x=3t-2$, $y=-4t$. Исключая из них параметр (время) $t$, получим прямую $4x+3y+8=0$, расположенную в плоскости $xOy$.

Скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{w}$ движения точки найдем как первую и вторую производные от $\bar{r}$ по $t$:

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=3\bar{i}-4\bar{j};\quad \bar{w}=\ddot{\bar{r}}=0.$$

Следовательно, точка движется прямолинейно с постоянной скоростью, модуль которой $|v|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

2) Здесь траектория точки есть эллипс, определяемый параметрическими уравнениями $x=2\cos t$, $z=\sin t$ или уравнением $\frac{x^2}{4}+z^2=1$, который расположен в плоскости $xOz$.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-2\sin t\cdot\bar{i}+\cos t\cdot k$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=-2\cos t\cdot\bar{i}-\sin t\cdot\bar{k}$.

3) Параметрические уравнения траектории точки $x=2t^2-3$, $y=-3t^2$, $z=4t^2-5$ после исключения параметра $t$ преобразуются в канонические уравнения прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+5}{4}$.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=4t\bar{i}-6t\bar{j}+8t\bar{k}$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=4\bar{i}-6\bar{j}+8\bar{k}$ — постоянно (не зависит от времени $t$).

Здесь движение точки является прямолинейным и равномерно-переменным.

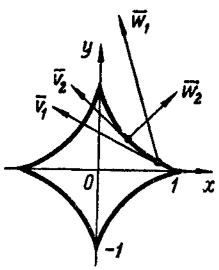
4) Траектория точки есть цилиндрическая винтовая линия $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos\omega t$, $z=bt$.

Скорость точки $v=\dot{\bar{r}}=a\omega\cos\omega t\cdot\bar{i}-a\omega\sin\omega t\cdot\bar{j}+b\bar{k}$,

ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=-a\omega^2\sin\omega t\cdot\bar{i}-a\omega^2\cos\omega t\cdot\bar{j}$.

Здесь движение точки является равномерным, так как модуль скорости $|\bar{v}|=\sqrt{a^2\omega^2+b^2}$ остается неизменным.

**293.** Зная уравнение движения точки $\bar{r}=\cos^3 t\cdot\bar{i}+\sin^3 t\cdot\bar{j}$, построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t_1=\frac{\pi}{6}$ и $t_2=\frac{\pi}{4}$.



Черт. 42

Решение. Траектория точки или годограф вектора $\bar{r}$ есть астроида $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

В любой момент времени $t$ скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-3\cos^2 t\sin t\cdot\bar{i}+3\sin^2 t\cos t\cdot\bar{j}$,

а ее ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=3\cos t\,(3\sin^2 t-1)\,\bar{i}+3\sin t\,(3\cos^2 t-1)\,\bar{j}$.

В момент $t_1=\frac{\pi}{6}$, $\bar{v}_1=-\frac{9}{8}\bar{i}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{j}$, $\bar{w}_1=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{i}+\frac{15}{8}\bar{j}$.

В момент $t_2=\frac{\pi}{4}$, $v_2=\frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{j}-\bar{i})$, $\bar{w}_2=\frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{j})$.

Траектория точки и найденные векторы ее скорости и ускорения в моменты $t_1=\frac{\pi}{6}$ и $t_2=\frac{\pi}{4}$ построены на черт. 42.*

В задачах 294—296 по данному векторному уравнению движения точки построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t=0$ и $t=1$.

**294.** $\bar{r}=a\cos t\cdot\bar{i}+a\sin t\cdot\bar{j}$. **295.** $\bar{r}=3t\bar{j}+(4t-t^2)\bar{k}$.

**296.** $\bar{r}=3(t-\sin t)\bar{i}+3(1-\cos t)\bar{j}$.

---

* Координаты $x$, $y$ начала каждого вектора определяются из уравнений траектории по данным значениям $t$.

*ГЛАВА III*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

## § 1. Теорема (формула) Тейлора

Многочисленные применения дифференциального исчисления в естествознании и технике основываются на теоремах Ролля, Лагранжа, Коши и Тейлора. В каждой из этих теорем утверждается существование некоторого среднего значения аргумента $x=c$, вследствие чего все они называются теоремами о среднем.

**Теорема Тейлора.** *Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку $a$, может быть представлена в виде суммы многочлена $n$-й степени и остаточного члена $R_n$:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n), \qquad \text{(T)}$$
$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c$ — некоторое среднее значение между $a$ и $x$,

$$c=a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1.$$

Эта теорема является самой общей теоремой о среднем, из которой вытекают все остальные.

Формула Тейлора ($T$) позволяет приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (*)$$

(называемого многочленом Тейлора) и вместе с тем позволяет оценить возникающую при этом погрешность $R_n$, которая во многих случаях может быть сделана как угодно малой. Поэтому она является одной из важнейших формул математического анализа, которая широко применяется и как тонкий инструмент теоретического исследования и как средство решения многих практических задач.

Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a=0$ принято называть формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n;\quad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (M)$$

Она дает разложение функции по степеням самой независимой переменной.

Однако для многих функций эта простейшая формула Тейлора неприменима, ибо при $x=0$ многие функции или их производные не существуют $\left(\text{например: } \ln x;\ \sqrt{x};\ \operatorname{ctg} x;\ \frac{1}{x}\right)$.

**297.** Каждую из данных функций аппроксимировать многочленом $n$-й степени относительно $x$, оценить погрешность и установить, при каких значениях $x$ она может быть сделана сколь угодно малой.

1) $e^x$; 2) $\sin x$; 3) $\cos x$.

Решение. Чтобы получить приближенное выражение данной функции $f(x)$ в виде многочлена относительно независимой переменной $x$, следует написать для этой функции многочлен Маклорена. Затем для оценки той погрешности, которая возникает в результате замены данной функции ее многочленом Маклорена, следует найти остаточный член $R_n$ формулы Маклорена, применяя его общую формулу к данной функции, и, наконец, для определения тех значений $x$, при которых погрешность может быть сделана сколь угодно малой, необходимо исследовать поведение остаточного члена при $n\to+\infty$ и при различных значениях $x$. Погрешность может быть сделана сколь угодно малой только при тех значениях $x$, при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$.

1) Вычислив значения данной функции и ее производных при $x=0$:

$$f(x)=e^x;\quad f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots=f^{(k)}(x)=e^x;$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1$$

и пользуясь многочленом Маклорена (*), получим искомое приближенное выражение данной трансцендентной функции в виде многочлена $n$-й степени:

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Погрешность этого приближенного равенства определяется остаточным членом формулы Маклорена. Для функции $e^x$

получим

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x},\quad 0<\Theta<1.$$

Очевидно, что величина погрешности $R_n$ зависит как от степени $n$ аппроксимирующего многочлена, так и от значений переменной $x$.

При неограниченном возрастании $n$ и при любом значении $x$ величина $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ является бесконечно малой, что было установлено в решении задачи 40, а величина $e^{\Theta x}$ является ограниченной. Поэтому при любом значении $x$ и при $n\to+\infty$ остаточный член в разложении функции $e^x$ неограниченно убывает, стремясь к нулю:

$$\lim_{n\to+\infty}R_n=\lim\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}=0.$$

Из этого следует, что при любом значении $x$ можно аппроксимировать трансцендентную функцию $e^x$ ее многочленом Маклорена с любой желаемой точностью и что последовательное повышение степени аппроксимирующего многочлена дает и последовательное повышение точности аппроксимации.

Полагая $n=1$, 2, 3, получим приближенные формулы

$$e^x\approx 1+x,$$

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2},$$

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},$$

которые расположены в порядке возрастающей точности.

2) Вычисляем значения функции $\sin x$ и ее производных при $x=0$:

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sin x, && f(0)=0,\\
&f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), && f'(0)=1,\\
&f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), && f''(0)=0,\\
&f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), && f'''(0)=-1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right), && f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Здесь при $x=0$ все производные четного порядка равны нулю. Поэтому аппроксимирующий эту функцию многочлен Маклорена будет содержать только нечетные степени $x$:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\pm\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\qquad(2)$$

($x$ — радианная мера угла).

Это приближенное равенство отчетливо выражает **нечетность** функции $\sin x$, т. е. что $\sin(-x) = -\sin x$.

Погрешность этого приближенного равенства определим по общей формуле остаточного члена $R_n$ формулы Маклорена.

Для функции $\sin x$ погрешность

$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left[\Theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \Theta < 1.^*$$

Используя очевидное неравенство $|\sin\alpha| \leqslant 1$, избавимся от неизвестной величины $\Theta$ и получим простое выражение для оценки погрешности, возникающей при замене функции $\sin x$ многочленом (2)

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Как было доказано в задаче 40 при $n \to +\infty$ и при любом значении $x$ величина $\frac{x^n}{n!}$ стремится к нулю. Вследствие этого при $m \to +\infty$ и остаточный член $R_{2m}$ формулы Маклорена для функции $\sin x$ также стремится к нулю при любом значении $x$, т. е.

$$\lim_{m \to +\infty} R_{2m} = 0.$$

Следовательно, при любом значении $x$ можно заменить функцию $\sin x$ ее многочленом Маклорена с любой сколь угодно малой погрешностью. При этом последовательное уменьшение погрешности достигается путем последовательного увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (2).

Полагая $m = 1$, 2, 3, получим простейшие приближенные выражения для $\sin x$:

$$\sin x \approx x, \qquad |R_2| \leqslant \frac{|x|^3}{3!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad |R_4| \leqslant \frac{|x|^5}{5!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \qquad |R_6| \leqslant \frac{|x|^7}{7!}.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

3) При $x = 0$ значения функции $\cos x$ и ее производных будут:

$$f(x) = \cos x, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2}.$$

---

* $R_{2m}$ соответствует многочлену Маклорена $2m$-й степени, который для функции $\sin x$ тождествен многочлену $(2m-1)$-й степени.

Здесь значения всех производных нечетного порядка равны нулю. Поэтому многочлен Маклорена, аппроксимирующий функцию $\cos x$, содержит только четные степени $x$:

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \pm \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \qquad (3)$$

Эта приближенная формула отчетливо выражает четность функции $\cos x$, т. е. что $\cos(-x)=\cos x$.

Погрешность этой приближенной формулы будет

$$R_{2m+1}=\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left[\Theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0<\Theta<1.$$

Избавляясь от неизвестной $\Theta$, в силу неравенства $|\cos\alpha|\leqslant 1$, получим неравенство

$$|R_{2m+1}|\leqslant\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

которое позволяет легко оценить погрешность при замене функции $\cos x$ многочленом (3).

Исследуя поведение погрешности $R_{2m+1}$ при различных значениях $x$ и при $m\to+\infty$, посредством таких же рассуждений, как и в двух предыдущих задачах, приходим к выводу:

При любом значении $x$ и при $m\to+\infty$ остаточный член $R_{2m+1}$ формулы Маклорена для функции $\cos x$ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{m\to+\infty} R_{2m+1}=0.$$

Из этого следует, что при любом значении $x$ функцию $\cos x$ можно аппроксимировать ее многочленом Маклорена с любой заданной точностью, причем последовательное повышение точности аппроксимации достигается путем простого увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (3).

Полагая $m=1, 2, 3$, получим простейшие приближенные формулы для $\cos x$:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}, \qquad |R_3|\leqslant\frac{x^4}{4!},$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \qquad |R_5|\leqslant\frac{x^6}{6!},$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}, \qquad |R_7|\leqslant\frac{x^8}{8!},$$

которые расположены в порядке повышающейся точности.

**298.** Аппроксимировать функции: 1) $x^m$ и 2) $\ln x$ многочленами $n$-й степени относительно двучлена $x-1$ и оценить погрешность. Затем, полагая $x-1=t$, получить разложения функций по степеням $t$.

Решение. Чтобы аппроксимировать данную функцию $f(x)$ многочленом относительно двучлена $x-1$, следует написать для нее многочлен Тейлора, полагая $a=1$. Погрешность, возникающая при замене данной функции ее многочленом Тейлора, определяется величиной остаточного члена $R_n$ формулы Тейлора.

1) Для функции $x^m$, где $m$ — любое вещественное число, имеем:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^m, && f(1) = 1,\\
&f'(x) = mx^{m-1}, && f'(1) = m,\\
&f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, && f''(1) = m(m-1),\\
&f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, && f'''(1) = m(m-1)(m-2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots && f^{(k)}(1) = m(m-1)(m-2)\dots\\
&\qquad\dots(m-k+1)x^{m-k}, && \qquad\dots(m-k+1).
\end{aligned}$$

Пользуясь многочленом Тейлора (*), получим

$$x^m \approx 1 + \frac{m}{1!}(x-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n.$$

Погрешность этого приближенного равенства найдем по общей формуле остаточного члена $R_n$ формулы Тейлора, полагая $f(x) = x^m$ и $a = 1$:

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}[1+\Theta(x-1)]^{m-n-1}, \quad 0<\Theta<1.$$

Полагая $x-1=t$, получим

$$(1+t)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \dots + \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}t^n, \qquad (4)$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}t^{n+1}(1+\Theta t)^{m-n-1}.$$

Последняя формула представляет обобщение бинома Ньютона для любого показателя $m$. В частности, когда показатель $m$ — целое положительное число, то $R_m$ обращается в нуль, а равенство (4) обращается в элементарную формулу бинома Ньютона. Если $m$ не будет целым положительным числом, то равенство (4) дает приближенное выражение бинома в виде многочлена с биномиальными коэффициентами, которые составлены по тому же закону, что и в элементарной формуле бинома Ньютона.

Как доказывается в теории рядов, погрешность $R_n$ биномиальной формулы (4) может быть сделана сколь угодно малой величиной, т. е. стремится к нулю с возрастанием $n$ только для тех значений $t$, которые по абсолютному значению меньше единицы:

$$-1<t<1.$$

Полагая $n=1, 2, 3$, получим простейшие приближенные биномиальные формулы:

$$(1+t)^m \approx 1+mt,$$
$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2,$$
$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

2) Для функции $\ln x$ получим:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x, & f(1) = 0, \\ f'(x) = x^{-1}, & f'(1) = 1, \\ f''(x) = -1\cdot x^{-2}, & f''(1) = -1, \\ f'''(x) = 1\cdot 2\cdot x^{-3}, & f'''(1) = 2! \\ f^{(4)}(x) = -1\cdot 2\cdot 3x^{-4}, & f^{(4)}(1) = -3! \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$
$$\ln x \approx \frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность этой приближенной формулы

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{x-1}{1+\Theta(x-1)}\right]^{n+1}, \quad 0<\Theta<1.$$

Полагая $x-1=t$, получим

$$\ln(1+t) \approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}; \tag{5}$$
$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{t}{1+\Theta t}\right)^{n+1}.$$

Здесь $R_n \to 0$ с возрастанием $n$ при $-1<t\leqslant 1$, т. е. погрешность вычисления логарифмов по формуле (5) можно довести до любой сколь угодно малой величины только для значений $t$ из указанного полуоткрытого интервала.

При $n=1, 2, 3$ получим приближенные формулы

$$\ln(1+t) \approx t,$$
$$\ln(1+t) \approx t-\frac{t^2}{2},$$
$$\ln(1+t) \approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3},$$

которые следуют в порядке возрастающей точности.

Аналогичным образом, как в задачах 297 и 298, *многие другие трансцендентные и сложные алгебраические функции можно аппроксимировать посредством формулы Тейлора простейшими алгебраическими функциями — степенными многочленами с любой* *заданной точностью*, что имеет огромное теоретическое и практическое значение.

**299.** Вычислить с точностью до $10^{-6}$ приближенное значение: 1) $\cos 5°$; 2) $\sin 49°$; 3) $\sqrt[4]{83}$; 4) $\sqrt[3]{121}$.

Решение. 1) Воспользуемся приближенной формулой для $\cos x$, полученной в решении задачи 297.

Подставляя в эту формулу радианную меру угла 5°, получим

$$\cos 5° = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!\,36^2} + \frac{\pi^4}{4!\,36^4} - \ldots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)!\,36^{2n}}.$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этой формулы для получения заданной точности вычисления, оценим величины последовательных остаточных членов $R_{2m+1}$:

$$|R_1| \leqslant \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2!\,36^2} < 0{,}004,$$

$$|R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4!\,36^4} < 0{,}000003,$$

$$|R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!\,36^6} < 0{,}00000003.$$

Величина $|R_5| < 10^{-6}$. Поэтому для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена формулы, предшествующих $R_5$:

$$\cos 5° \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24\cdot 36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx 0{,}96195.$$

Здесь для обеспечения заданной точности значения числа $\pi$ и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с точностью до $10^{-7}$ ($\pi \approx 3{,}1415917$).

2) Чтобы вычислить $\sin 49°$, напишем формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}\sin\left(a + 2\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\sin\left(a + n\frac{\pi}{2}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ так как } |\sin\alpha| \leqslant 1.$$

По этой формуле можно вычислять значения $\sin x$ при любых значениях $x$ и $a$ и с любой желаемой точностью, так как по мере увеличения числа членов в ней погрешность $R_n$ неограниченно убывает, стремясь к нулю. При этом чем меньше будет величина разности $|x-a|$, тем меньше потребуется брать первых членов этой формулы для достижения какой-либо заданной точности вычисления.

Полагая $x=\frac{\pi}{180}\cdot 49$ и $a=\frac{\pi}{180}\cdot 45$, получим

$$x-a=\frac{\pi}{180}(49-45)=\frac{\pi}{45},$$

$$\sin 49^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{1!\,45}-\frac{\pi^2}{2!\,45^2}-\frac{\pi^3}{3!\,45^3}+\ldots\pm\frac{\pi^n}{n!\,45^n}\right)+R_n,$$

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!\,45^{n+1}}.$$

Для определения числа первых членов этой формулы, обеспечивающих заданную точность вычисления, оцениваем величины последовательных остаточных членов $R_n$:

$$|R_1|\leqslant\frac{\pi^2}{2!\,45^2}<0{,}003,$$

$$|R_2|\leqslant\frac{\pi^3}{3!\,45^3}<0{,}00006,$$

$$|R_3|\leqslant\frac{\pi^4}{4!\,45^4}<0{,}0000009<10^{-6}.$$

Следовательно, заданная точность вычисления будет достигнута, если взять четыре первых члена формулы, предшествующих $R_3$:

$$\sin 49^\circ\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{45}-\frac{\pi^2}{2\cdot 45^2}-\frac{\pi^3}{6\cdot 45^3}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}7071068(1+0{,}0698131-0{,}0024369-0{,}0000567)\approx 0{,}754709.$$

(Значения $\pi$, $\sqrt{2}$ и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с семью десятичными знаками.)

Иначе можно было вычислить $\sin 49^\circ$ по формуле Маклорена для функции $\sin x$, однако при этом для достижения заданной точности пришлось бы взять очень много членов этой формулы.

3) Преобразуем заданный корень

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и применим обобщенную формулу бинома (4), полученную в решении задачи 298.

Полагая $t=\frac{2}{81}$ и $m=\frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{83}=3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot 108}+\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486}-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54}+\ldots+R_n\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим:

$$3|R_1| < \frac{3}{162\cdot 108} < 0{,}0002,$$

$$3|R_2| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486} < 0{,}000003,$$

$$3|R_3| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54} < 0{,}00000006.$$

Следовательно, для получения заданной точности вычисления достаточно взять сумму четырех членов биномиальной формулы, которые предшествуют остатку $R_3$:

$$\sqrt[4]{83} \approx 3(1+0{,}0061728-0{,}0000572+0{,}0000008) \approx 3{,}018349.$$

4) Преобразуя данный корень

$$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125-4} = 5\left(1-\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

и подставляя в биномиальную формулу $t=-\frac{4}{125}=-0{,}032$ и $m=\frac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{121} = 5\left(1-\frac{0{,}032}{3}-\frac{0{,}032^2}{9}-\frac{5\cdot 0{,}032^3}{81}-\frac{10\cdot 0{,}032^4}{243}-\ldots+R_n\right).$$

Путем последовательных испытаний величины погрешности $5|R_n|$ находим

$$5|R_3| = \frac{5\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\right|}{4!}\times$$

$$\times 0{,}032^4(1-0{,}032\Theta)^{\frac{1}{3}-3-1} < 10^{-6},$$

т. е. находим, что заданная точность вычисления обеспечивается четырьмя первыми членами биномиальной формулы, предшествующими $R_3$:

$$\sqrt[3]{121} \approx 5(1-0{,}0106667-0{,}0001138-0{,}0000020) \approx 4{,}946088.$$

Подобным образом *с помощью формулы Тейлора можно находить числовые значения всех других* трансцендентных и сложных алгебраических *функций*. Именно таким путем составлены все таблицы числовых значений для логарифмических, показательных, тригонометрических функций, для квадратных и кубических корней и для многих других функций.

**300.** Для каждой из следующих функций:

1) $3^x$, 2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 3) $xe^x$

найти приближенное выражение в виде многочлена $n$-й степени относительно $x$, определить возникающую при этом погрешность и установить, при каких значениях $x$ она может быть сделана сколь угодно малой.

301. Найти приближенные выражения в виде многочленов 3-й степени относительно $x$ для следующих функций:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $x \cos x$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

302. Аппроксимировать функции: 1) $e^{\frac{x}{a}}$ и 2) $\cos x$ многочленами $n$-й степени относительно двучлена $x-a$ и оценить возникающую при этом погрешность.

303. Аппроксимировать многочленами 4-й степени относительно двучлена $x-a$ функции: 1) $\sqrt[3]{x}$ при $a=-1$; 2) $\sin 3x$ при $a=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

304. Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\sin 18°$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\sqrt{70}$; 4) $\sqrt[5]{245}$.

305. Вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 10°$; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) $\sqrt[7]{129}$; 4) $\sin 36°$.

## § 2. Правило Лопиталя и применение его к нахождению предела функции

В задачах § 7 гл. I были разъяснены элементарные способы нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Кроме этих элементарных способов, весьма эффективным средством для нахождения предела функции в указанных особых случаях является следующее правило Лопиталя: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных* (если последний предел существует или равен бесконечности).

*а) Случаи нахождения предела:*

1) $\frac{0}{0}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно малых величин;

2) $\frac{\infty}{\infty}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно больших величин.

Согласно правилу Лопиталя в этих случаях можно заменять отношение величин отношением их производных, т. е. если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to a$ или $x \to \infty$, то

$$\lim \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}.$$

Если последний предел существует или равен бесконечности, то он будет равен искомому пределу. Если же отношение производных также будет представлять случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно снова и снова применять правило Лопиталя, если это полезно, до получения результата.

Найти пределы:

**306.** 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; 2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n}$, где $k>0$, $n$ — натуральное число;

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяем затем правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16} = \lim \frac{4x^3}{3x^2+10x-6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \lim \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = \lim \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim \frac{a \sin ax}{b \sin bx} = \lim \frac{a^2 \cos ax}{b^2 \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$.

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = \lim \frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}} = \lim \frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-2}} =$

$$= \ldots = \lim \frac{k^n e^{kx}}{n!} = +\infty.$$

Здесь правило Лопиталя применено $n$ раз.

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim \frac{\sec^2 x}{\sec x \operatorname{tg} x} = \lim \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \ldots$

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно. Предел легко найти без этого правила путем элементарного преобразования:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim \frac{\sin x \cos x}{\cos x} = \lim \sin x = 1.$$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно, ибо отношение производных $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ не имеет предела при $x\to\infty$.

Искомый предел можно найти элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1, \text{ так как } |\sin x|\leqslant 1.$$

Это не противоречит теореме Лопиталя, ибо в ней утверждается лишь то, что *если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.*

**307.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$.

**308.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

**309.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

**310.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

**311.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

**312.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

**313.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

**314.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{\arcsin 5x}$.

б) *Случаи нахождения предела*:

3) $0\cdot\infty$ — когда функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую;

4) $\infty-\infty$ — когда функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

**315.** Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$;

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)$.

Решение. Установив, что имеет место случай $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$, преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применяем правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x=\lim\frac{x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x}\ln x = \lim \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}} = -3\lim \sqrt[3]{x} = 0;$

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\varphi - \sec\varphi) = \lim \dfrac{\sin\varphi - 1}{\cos\varphi} = \lim \dfrac{\cos\varphi}{-\sin\varphi} = 0;$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right) = \lim \dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim \dfrac{-\ln x}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} =$

$$= -\lim \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} = -\lim \frac{1+\ln x}{2+\ln x} = -\frac{1}{2};$$

здесь правило Лопиталя применено дважды;

5) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}\right) = \lim \dfrac{t-\sin t}{t\sin t} = \lim \dfrac{1-\cos t}{\sin t + t\cos t} =$

$$= \lim \frac{\sin t}{2\cos t - t\sin t} = 0;$$

здесь правило Лопиталя применено дважды.

**316.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x.$

**317.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3} - \operatorname{cosec}\dfrac{x}{3}\right).$

**318.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\sqrt{x}}.$

**319.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x\cdot\ln(x+e^x).$

**320.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{7}{x^7-1}\right).$

**321.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x.$

**322.** $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\operatorname{ctg}\varphi - \dfrac{1}{\varphi}\right).$

**323.*** $\lim\limits_{t\to 0}(\operatorname{cosec}^2 t - 4\operatorname{cosec}^2 2t).$

*в) Случаи нахождения предела*:

5) $1^\infty$ — когда функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности;

6) $\infty^0$ — когда функция представляет степень, основание которой стремится к бесконечности, а показатель — к нулю;

7) $0^0$ — когда функция представляет степень, основание и показатель которой стремятся к нулю.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $0\cdot\infty$ $\left(\text{а затем к случаю } \dfrac{0}{0} \text{ или } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

**324.** Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$.

Решение. 1) Сначала устанавливаем, что имеет место случай $1^\infty$. Затем логарифмируем функцию и ищем предел ее логарифма:

$$a = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\ln a = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \lim \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\ln a = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} : (-2\operatorname{cosec}^2 2x)\right] = -1.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{-1}$.

2) Установив, что имеет место случай $\infty^0$, делаем преобразования:

$$a = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}};\quad \ln a = \lim_{x\to+\infty} \ln (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\ln(\ln x)}{x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x\ln x} : 1\right) = 0,$$

откуда следует, что искомый предел $a = e^0 = 1$.

3) Убедившись, что имеет место случай $0^0$, преобразовываем:

$$a = \lim_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}};\quad \ln a = \lim_{x\to+0} \ln x^{\frac{6}{1+2\ln x}} = \lim \frac{6\ln x}{1+2\ln x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a = 6\lim_{x\to+0} \left(\frac{1}{x} : \frac{2}{x}\right) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3.$$

Следовательно, искомый предел $a = e^3$.

4) Установив, что имеет место случай $1^\infty$, преобразовываем:

$$a = \lim_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}; \quad \ln a = \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{m}{x^2-1}} = \lim \frac{m \ln x}{x^2-1};$$

получили случай $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a = m \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x} : 2x\right) = \frac{m}{2}.$$

Следовательно,

$$a = e^{\frac{m}{2}} = \sqrt{e^m}.$$

**325.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x)^{\frac{1}{x}}$. **326.** $\lim\limits_{x\to 1+0} (x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

**327.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x$. **328.** $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

**329.** $\lim\limits_{\alpha\to 0} (\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}$. **330.** $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

**331.** Доказать, что при $x \to 0$:

1) $e^{2x} - e^x \approx x$; 2) $x - \operatorname{arctg} x \approx \frac{x^3}{3}$;

3) $\arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$; 4) $4x - \ln(4x+1) \approx 8x^2$;

5) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \approx \frac{x}{n}$; 6) $e^{4x} - 4x - 1 \approx 8x^2$.

## § 3. Возрастание и убывание функции

При изучении поведения функции в зависимости от изменения независимой переменной обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. что каждое следующее ее значение больше предыдущего.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают, то и функция называется возрастающей, а если они убывают, то и функция называется убывающей.

Некоторые функции во всей своей области определения изменяются монотонно—только возрастают или только убывают (например $2^x$, $\operatorname{arcctg} x$).

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других интервалах убывают (например, $\sin x$, $\cos x$).

*Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной $y'$: если в некотором интервале $y' > 0$,* *то функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает в этом интервале.**

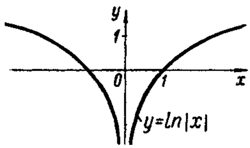
**332.** Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1) $p=\ln(1-x^2)$; 2) $z=x(1+2\sqrt{x})$; 3)* $y=\ln|x|$.

Решение. 1) Производная $p'=-\frac{2x}{1-x^2}$ положительна при $-1<x<0$ и $x>1$ и отрицательна при $0<x<1$ и при $x<-1$. Учитывая, что область определения функции $p$ есть интервал $-1<x<1$, заключаем: в интервале $(-1; 0)$ функция $p$ возрастает, а в интервале $(0; 1)$ она убывает.

2) Функция $z$ определена в полуоткрытом интервале $0\leqslant x<+\infty$; ее производная $z'=1+3\sqrt{x}>0$ — во всем этом интервале. Поэтому функция $z$ монотонная, она возрастает во всей своей области определения.

3)* Функция $y$ определена на всей числовой оси, исключая точку $x=0$; ее производная $y'=(\ln|x|)'=\frac{|x|'}{|x|}=\pm\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$; $y'>0$ при $x>0$; $y'<0$ при $x<0$. Отсюда следует, что функция $y$ убывает в интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. График этой четной функции приведен на черт. 43.



Черт. 43

**333.** Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

1) $y=x^3+3x^2+3x$; 2) $y=x^3-3x+5$; 3) $y=e^{kx}$;
4) $y=\sqrt{(x^2-9)^3}$; 5) $y=\cos x-x$; 6)* $y=x|x|$.

## § 4. Максимум и минимум (экстремум) функции

*Значение функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от $x_0$.*

*Функция может иметь экстремум* (максимум или минимум) *только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует***. Такие точки называются **критическими**. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна

---

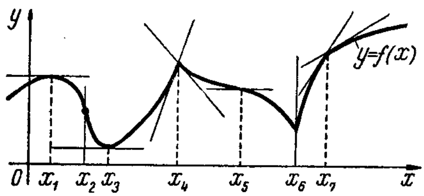
* В интервале возрастания (убывания) функции могут быть отдельные точки, в которых $y'=0$.

** Это необходимые условия экстремума, но недостаточные; они могут выполняться и в точках, где нет экстремума, например в точках $x_2$, $x_5$, $x_7$, черт. 44.

оси абсцисс ($y'=0$), или оси ординат ($y'=\infty$) или нет определенной касательной (например, как в угловой точке).

На графике функции (черт. 44) отчетливо видно, что *точками экстремума являются все точки, где функция меняет свое поведение и непрерывна.*

Точки $x_1$ и $x_4$, при переходе через которые аргумента $x$ возрастание функции сменяется на убывание, являются точками максимума, а точки $x_3$ и $x_6$, при переходе через которые аргумента $x$ убывание функции сменяется на возрастание, являются точками минимума.




**Черт. 44**

Поскольку поведение функции характеризуется знаком ее производной, то *функция будет иметь экстремум в тех точках, где ее производная меняет свой знак, а сама функция непрерывна**.

Отсюда вытекает следующее правило исследования функции на экстремум.

Чтобы найти точки экстремума функции $y=f(x)$, в которых она непрерывна, нужно:

I. Найти производную $y'$ и критические точки, в которых $y'=0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции.

IIа. Определить знак $y'$ слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента $x$ через критическую точку $x_0$:

1) $y'$ меняет знак с $+$ на $-$, то $x_0$ есть точка максимума;

2) $y'$ меняет знак с $-$ на $+$, то $x_0$ есть точка минимума;

3) $y'$ не меняет знака, то в точке $x_0$ нет экстремума.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y'=0$, по знаку второй производной, — вместо правила IIа можно пользоваться следующим правилом:

IIб. Найти вторую производную $y''$ и определить ее знак в каждой критической точке.

---

* Это достаточные условия экстремума (если они выполнены в какой-либо точке, то она обязательно будет точкой экстремума).

Если в критической точке $x_0$, где $y'=0$:

1) $y''>0$, то $x_0$ есть точка минимума;

2) $y''<0$, то $x_0$ есть точка максимума;

3) $y''=0$, то вопрос о наличии экстремума в точке $x_0$ остается открытым. Такую критическую точку, как и всякую другую, можно исследовать по правилу IIa.

Далее следует найти экстремумы функции, т. е. вычислить значения функции в найденных точках экстремума.

При исследовании на экстремум некоторых типов функций возможны существенные упрощения. Например, если функция представляет дробь с постоянным числителем или корень с целым положительным показателем.

Характер упрощений, возможных при исследовании на экстремум указанных функций, разъясняется в решении задачи 335.

**334.** Исследовать на максимум и минимум функции:

1) $y=(1-x^2)^3$; 2) $u=x\sqrt{1-x^2}$;

3) $v=2\sqrt[3]{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}+1$; 4) $p=x^3-12x$;

5) $q=x^2+\sqrt{x^5}$; 6) $r=\sin^2 x$;

7)* $s=1+|\operatorname{arctg}(x-1)|$.

Решение. 1) Согласно правилу исследования функции на экстремум:

I. Находим производную: $y'=3(1-x^2)^2(-2x)=-6x(1-x^2)^2$ и критические точки. Полагая $y'=0$, получим $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Функция $y$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому точки $x_1$, $x_2$ и $x_3$ являются критическими.

Других критических точек нет, так как производная $y'$ существует всюду.

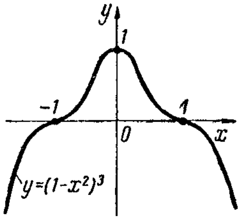
II. Исследуем критические точки, определяя знак $y'$ слева и справа от каждой этой точки (по правилу IIa). Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записать в виде следующей таблицы:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | возр. | нет экстр. | возр. | max | убыв | нет экстр | убыв. |

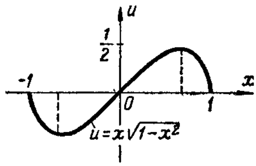
В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси; между ними вставлены промежуточные точки, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в указанных промежуточных точках, т. е. знаки $y'(-2)$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $y'(2)$. В третьей строке — заключение о поведении функции. Исследуемая функция имеет одну точку экстремума — точку максимума $x=0$, где $y_{\max}=y(0)=1$. До этой точки в интервале $(-\infty, 0)$ функция неизменно возрастает, а после нее в интервале $(0; +\infty)$ она неизменно убывает (черт. 45).

2) I. Ищем критические точки. Производная $u'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ обращается в нуль при $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и не существует (разрывна) при $x_{3,4}=\pm 1$. Однако критическими точками являются только точки $x_1$ и $x_2$: они лежат внутри области определения функции $u$,




Черт. 45




Черт. 46

которая представляет отрезок $[-1; 1]$, и в них эта функция непрерывна. Точки $x_3$ и $x_4$ не являются критическими, так как они лежат не внутри области определения функции $u$, а на ее границах.

II. Исследуем критические точки по знаку производной $u'$ в соседних с ними точках. Составим следующую таблицу:

| $x$ | $-0{,}9$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $u$ | убыв. | min | возр. | max | убыв. |

Согласно этой таблице функция $u$ имеет две точки экстремума: точку минимума $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{\min}=u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$, и точку максимума $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{\max}=u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$ (черт. 46).

3). I. Находим производную

$$v'=2\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

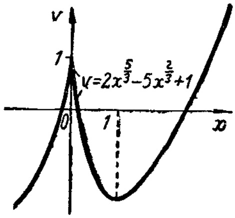
и критические точки: $v' = 0$ при $x = 1$; $v'$ не существует (равна $\infty$) при $x = 0$. Функция $v$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому обе найденные точки являются критическими.

II. Исследуем критические точки по знаку производной $v'$ в соседних с ними точках. Составим таблицу:

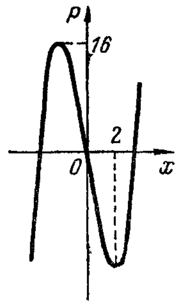
| $x$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'$ | $+$ | $\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $v$ | возр. | max | убыв. | min | возр. |

Из таблицы следует, что функция $v$ имеет две точки экстремума: точку максимума $x = 0$, где $v_{\max} = v(0) = 1$, и точку минимума $x = 1$, где $v_{\min} = v(1) = -2$ (черт. 47).

4) I. Найдем критические точки. Производная $p' = 3x^2 - 12$ равна нулю в точках $x = \pm 2$. Эти точки являются критическими, так как функция $p$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная $p'$ существует всюду. Поэтому других критических точек функция $p$ не имеет.




Черт. 47




Черт. 48

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной $p''$ в самих этих точках (по правилу II б): $p'' = 6x$; $p''(-2) = -12 < 0$, следовательно, критическая точка $x = -2$ есть точка максимума, где $p_{\max} = p(-2) = 16$; $p''(2) = 12 > 0$, поэтому критическая точка $x = 2$ есть точка минимума, где $p_{\min} = p(2) = -16$ (черт. 48).

5) I. Ищем производную $q' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2x$ и критические точки: $q'$ обращается в нуль в точке $x = 0$. В этой точке функция $q$ непрерывна, но она не лежит внутри области определения функции $q$, которая представляет интервал $0 \leqslant x < +\infty$. Поэтому точка $x = 0$ не является критической; $q'$ не обращается в нуль в других точках и существует во всей области определения

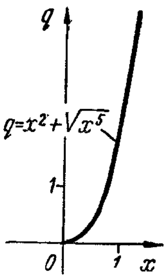
функции. Поэтому функция $q$, как не имеющая ни одной критической точки, не имеет экстремума. Во всей своей области определения она неизменно (монотонно) возрастает, ибо $q' \geqslant 0$ во всей этой области (черт. 49).

Если не учесть, что точка $x=0$ не лежит внутри области определения функции $q$, то, применяя правило IIб, $q'' = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} + 2$, $q''(0) = 2 > 0$, приходим к ошибочному заключению, что в этой точке функция $q$ имеет минимум.

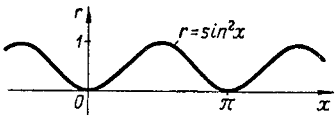
6) I. Находим критические точки: $r' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$; $r' = 0$ при $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Все точки $x_k$ являются критическими, так как функция $r$ определена и непрерывна на всей числовой оси; $r'$ существует всюду, поэтому других критических точек нет.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках: $r'' = 2\cos 2x$; $r''(x_k) = 2\cos k\pi$. При четном $k$, $r''(x_k) = 2 > 0$, точки $x_k$ являются точками минимума, где $r_{\min} = 0$; при нечетном $k$, $r''(x_k) = -2 < 0$, точки $x_k$ являются точками максимума, где $r_{\max} = 1$ (черт. 50).




Черт. 49




Черт. 50

Здесь оказалось, что у функции $r$ максимумы и минимумы строго чередуются. То же будет и у любой непрерывной функции, имеющей несколько экстремумов.

7)* I. Находим критические точки: $s' = \pm \frac{1}{1+(x-1)^2}$, где знак плюс соответствует интервалу $1 < x < +\infty$, а минус — интервалу $-\infty < x < 1$. Производная $s'$ нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x = 1$. Эта точка является критической, так как функция $s$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

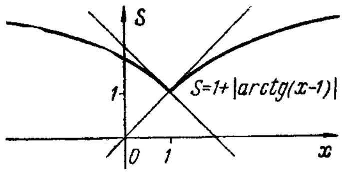
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $s'$ | $-$ | не сущ. | $+$ |
| $s$ | убыв | Y min | возр. |

II. Исследуем критическую точку $x=1$ по знаку производной $s'$ слева и справа от этой точки. Составив таблицу, заключаем, что $x=1$ есть точка минимума, где $s_{\min} = s(1) = 1$. На графике функции (черт. 51) это будет угловая точка с двумя различными односторонними касательными, угловые коэффициенты которых равны $-1$ и $+1$.

**335*.** Найти экстремумы функций:

1) $y = \frac{30}{12 - 36x^2 + 20x^3 - 3x^4}$;

2) $u = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.




Черт. 51

1) *Дробь с постоянным положительным числителем имеет экстремумы в тех же точках, что и ее знаменатель, но они будут противоположного смысла: там, где знаменатель имеет максимум, эта дробь имеет минимум, и наоборот.* (Из этого общего положения исключается случай, когда экстремум знаменателя равен нулю.)

Используя это свойство, найдем точки экстремума знаменателя, т. е. вспомогательной функции $y_1 = 12 - 36x^2 + 20x^3 - 3x^4$.

I. Найдем критические точки. $y_1' = -72x + 60x^2 - 12x^3$; $y_1' = 0$ в точках $x = 0$, $x = 2$ и $x = 3$. Все они являются критическими, поскольку функция $y_1$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Других критических точек нет, ибо производная $y_1'$ всюду существует.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках (по правилу IIб); $y_1'' = -72 + 120x - 36x^2$; $y_1''(0) = -72 < 0$, следовательно, критическая точка $x = 0$ есть точка максимума; $y_1''(2) > 0$, следовательно, точка $x = 2$ есть точка минимума; $y_1''(3) < 0$, следовательно, точка $x = 3$ есть точка максимума функции $y_1$.

Для заданной функции $y$ найденные точки экстремума функции $y_1$ будут иметь противоположный смысл: для функции $y$ точка $x = 0$ есть точка минимума, где $y_{\min} = y(0) = 2{,}5$; $x = 2$ есть точка максимума, где $y_{\max} = y(2) = -1{,}5$; $x = 3$ есть точка минимума, где $y_{\min} = y(3) = -2$.

2) *Точки экстремума сложной функции $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$, при целом положительном $n$, совпадают с точками экстремума подкоренной функции $\varphi(x)$, лежащими внутри области определения функции $y$.*

Воспользуемся этим свойством и найдем точки экстремума подкоренной функции $u_1 = e^{x^2} - 1$.

I. Ищем критические точки: $u_1' = 2xe^{x^2}$, $u_1' = 0$ в точке $x = 0$, которая является критической, так как функция $u_1$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная $u_1'$ существует всюду, поэтому других критических точек функция $u_1$ не имеет.

II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку второй производной в этой точке. $u_1''=2e^{x^2}(1+2x^2)$; $u_1''(0)=2>0$, поэтому точка $x=0$ есть точка минимума функции $u_1$.

Согласно указанному здесь свойству точка $x=0$, как лежащая внутри области определения функции $u$, будет также точкой минимума и для функции $u$. При $x=0$, $u_{\min}=0$.

Без использования указанного свойства решение этой задачи было бы затруднительно. (Найденная точка является угловой точкой графика функции $u$, где $u'$ не существует.)

Исследовать на экстремум следующие функции:

**336.** $y=x^2(x-6)$. **337.** $y=3-2x^2-x^4$.

**338.** $y=x^3-3x^2+3x$. **339.** $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

**340.** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$. **341.** $y=3-2\sqrt[3]{x^2}$.

**342*.** $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$. **343*.** $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$.

**344.** $y=e^{-x}+e^{2x}$. **345.** $y=3x+\operatorname{tg} x$.

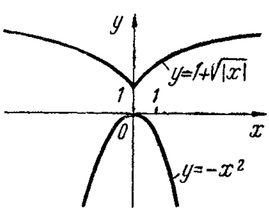
**346.** $y=x^2e^{-x}$. **347.** $y=\frac{x}{\ln x}$.

**348.** $y=\sin x+\cos x$. **349*.** $y=|x^3-3x^2|$.

## § 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

*Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим значением — самое меньшее из всех ее значений.*

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем. Например, во всей своей области определения функция $\sin x$ имеет наибольшее значение, равное единице, и наименьшее значение, равное минус единице; функции $\operatorname{tg} x$ и $x^3$ не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений; функция $-x^2$ имеет наибольшее значение, равное нулю, но не имеет наименьшего значения; функция $1+\sqrt{|x|}$ имеет наименьшее значение, равное единице, но не имеет наибольшего значения (черт. 52).



Черт. 52

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

1) *Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.*

Отсюда вытекает практическое правило для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна:

I. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

II. Вычислить значения функций на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$.

III. Сравнить полученные значения функции: самое большее из них будет наибольшим значением, а самое меньшее — наименьшим значением функции на всем данном отрезке.

**350.** Найти наибольшее и наименьшее значения каждой из следующих функций:

1) $u = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке $[-4; 4]$;

2) $p = x^2 \ln x$ на отрезке $[1, e]$;

3) $r = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

4) $y = \operatorname{arc\,tg} x^2$.

Решение. Согласно практическому правилу:

1) I. Найдем критические точки функции $u$, лежащие внутри отрезка $[-4; 4]$, и вычислим ее значения в этих точках: $u' = 3x^2 - 6x - 9$; $u' = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 3$. Эти точки лежат внутри отрезка $[-4; 4]$ и являются критическими. Других критических точек нет, так как производная $u'$ существует всюду. Значения функции $u$ в критических точках: $u(-1) = 40$; $u(3) = 8$.

II. Вычислим значения функции на концах отрезка $[-4; 4]$: $u(-4) = -41$; $u(4) = 15$.

III. Сравнивая все вычисленные значения функции во внутренних критических точках и на концах отрезка, заключаем: наибольшее значение функции $u$ на отрезке $[-4; 4]$ равно 40 и достигается ею во внутренней критической точке $x = -1$, а ее наименьшее значение равно $-41$ и достигается на левой границе отрезка $x = -4$ (черт. 53).

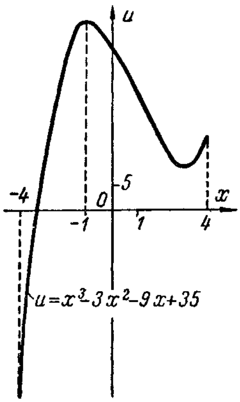
2) I. Ищем критические точки: $p' = x(1 + 2\ln x)$; $p' = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$. Точка $x_1$ лежит вне области определения данной функции $0 < x < +\infty$; точка $x_2$ лежит вне заданного

отрезка $[1; e]$. Производная $p'$ существует во всем интервале определения функции $p$. Поэтому внутри заданного отрезка нет критических точек.

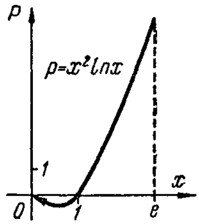
II. Вычислим значения функции $p$ на концах отрезка: $p(1) = 0$; $p(e) = e^2$

III. Поскольку внутри отрезка $[1, e]$ нет критических точек, то функция изменяется на этом отрезке монотонно и ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке достигаются на концах отрезка: $p_{нм} = p(1) = 0$, $p_{нб} = p(e) = e^2$ (черт. 54).

3) I. Найдем критические точки: $r' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cdot 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$; $r' = 0$ при $\cos\frac{3x}{2} = 0$ и $\cos\frac{x}{2} = 0$; корни первого уравнения $x_k = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, корни второго уравнения $x_k = \pi(2k+1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$




Черт. 53




Черт. 54

Из них внутри заданного отрезка $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ лежат критические точки $x_{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{3}$ и $x_{\mathrm{II}} = \pi$. Производная $r'$ существует всюду, поэтому других критических точек функция $r$ не имеет. Значения функции в найденных внутренних критических точках $x_{\mathrm{I}}$ и $x_{\mathrm{II}}$:

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad r(\pi) = 0.$$

II. Вычислим значения функции на концах отрезка: $r(0) = 0$; $r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

III. Сравнение вычисленных значений функции во внутренних критических точках и на концах отрезка показывает, что ее наибольшее значение на этом отрезке $r_{нб} = r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а наименьшее значение $r_{нм} = r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

4) Здесь изменение аргумента $x$ не ограничено каким-либо отрезком, а функция определена на всей числовой оси. Поэтому следует рассмотреть все значения функции, принимаемые ею при изменении $x$ от $-\infty$ до $+\infty$.

I. Найдем критические точки: $y' = \frac{2x}{1+x^4}$; $y' = 0$ в точке $x = 0$. Эта точка является критической, так как функция всюду определена и непрерывна. Других критических точек нет, так как производная $y'$ существует всюду.

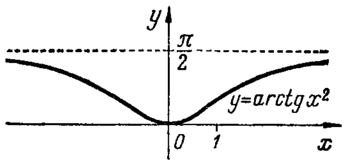
II. Исследуем критическую точку $x = 0$ по знаку первой производной слева и справа от этой точки (см. табл.). Это исследование показывает, что точка $x = 0$ есть точка минимума, где $y_{\min} = 0$.

III. Основываясь на указанном выше свойстве 1 непрерывных функций, заключаем: функция $y$, как имеющая единственный экстремум — минимум и не имеющая точек разрыва, имеет наименьшее значение, совпадающее с ее минимумом,

$$y_{нм} = y_{\min} = 0,$$

но не имеет наибольшего значения, хотя она не растет неограниченно. При $x \to \pm\infty$ она асимптотически приближается к значению $\frac{\pi}{2}$ (черт. 55).

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | убыв. | $\overset{\frown}{\min}$ | возр. |




Черт. 55

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

**351.** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке $[0;\ 3]$.

**352.** $u = x - 2\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.

**353.** $v = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

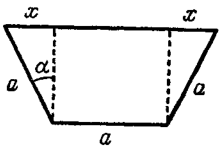
**354.** $y = e^{-x^2}$. **355.** $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

## § 6. Задачи о наибольших или наименьших значениях величин

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Широкая распространенность и большое значение этих задач послужили одним из главных поводов к развитию математического анализа.

Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значение полученной функции. При этом интервал изменения независимой переменной, который может быть конечным или бесконечным, также определяется из условия задачи.



Черт. 56

**356.** Из трех одинаковых тонких досок изготовить желоб с наибольшим поперечным сечением.

Решение. Поперечное сечение желоба будет представлять равнобочную трапецию (черт. 56), площадь которой $s$ зависит от наклона боковых сторон. Выберем за независимую переменную угол $\alpha$ между боковой стороной и высотой трапеции и выразим через эту переменную исследуемую площадь $s$:

$$x = a\sin\alpha,\quad h = a\cos\alpha \quad \text{и} \quad s = h(a + x)$$

или

$$s = a^2(1 + \sin\alpha)\cos\alpha,$$

где по смыслу задачи $\alpha$ может изменяться на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Далее найдем наибольшее значение функции $s(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем критические точки функции $s$, лежащие внутри этого отрезка:

$$s' = a^2[\cos^2\alpha - (1 + \sin\alpha)\sin\alpha] = a^2(1 - \sin\alpha - 2\sin^2\alpha).$$

Приравнивая производную $s'$ нулю, получим уравнение:

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,$$

решая которое, как квадратное, найдем

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = -1.$$

Из всех точек $\alpha$, определяемых этими двумя уравнениями, внутри отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна точка $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Эта точка является критической, в ней выполняются все необходимые для этого условия. Производная $s'$ существует всюду, поэтому других критических точек нет.

Вычислим значения функции $s$ в найденной внутренней критической точке и на концах отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2;\quad s(0) = a^2;\quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Сравнивая эти значения, заключаем: наибольшее значение функции $s$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается во внутренней точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таким образом, желоб из трех одинаковых досок будет иметь наибольшее поперечное сечение, когда это сечение представляет равнобочную трапецию, верхнее основание которой вдвое больше нижнего.

**357.** Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом $v$ и с наименьшей полной поверхностью.

Решение. Обозначив радиус и высоту цилиндра через $r$ и $h$, а его полную поверхность через $s$, получим

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Здесь переменные $r$ и $h$ не являются независимыми, а связаны между собой равенством $v = \pi r^2 h$, так как согласно условию цилиндр должен иметь заданный объем $v$. Определяя из этого равенства $h$ и подставляя в выражение полной поверхности, получим

$$s = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right),$$

где $r$ изменяется в интервале $0 < r < +\infty$.

Выразив таким образом исследуемую полную поверхность цилиндра $s$ через одну переменную $r$, найдем теперь ее наименьшее значение при изменении $r$ в интервале $(0; +\infty)$.

Найдем критические точки; $s' = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right) = 2\frac{2\pi r^3 - v}{r^2}$; $s' = 0$ в единственной точке $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, которая лежит в рассматриваемом интервале. Эта точка является критической, так как в ней выполняются все необходимые для этого условия. Других критических точек в интервале $(0; +\infty)$ функция $s$ не имеет, так как ее производная $s'$ существует во всем этом интервале.

Исследуем найденную критическую точку по знаку второй производной в этой точке:

$$s'' = 4\left(\pi + \frac{v}{r^3}\right); \quad s''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0,$$

откуда следует, что критическая точка $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ есть точка минимума.

Функция $s(r)$ непрерывна в интервале $(0; +\infty)$. Поэтому согласно свойству 1 непрерывных функций единственный минимум функции $s$ в интервале $(0; +\infty)$ совпадает с ее наименьшим значением в этом интервале.

При $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ получим $h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r$.

Следовательно, цилиндрическая закрытая цистерна, имеющая любой заданный объем, будет иметь наименьшую полную поверхность, когда ее осевое сечение представляет квадрат.

**358.** Из куска жести, форма и размеры которого (в *дм*) показаны на черт. 57, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. Обозначим стороны вырезаемого прямоугольника через $x$ и $y$. Тогда его площадь $S=xy$. Выразим $y$ через $x$, исходя из подобия треугольников $BDC$ и $AEC$:

$$BD=11-x; \quad DC=y-6; \quad AE=8; \quad EC=4.$$

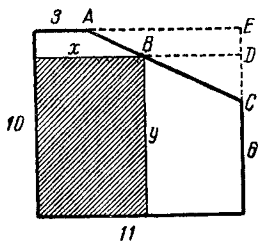
Подставляя в пропорцию $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{EC}$, получим $\frac{11-x}{y-6}=\frac{8}{4}$, откуда $y=\frac{23-x}{2}$. Заменяя $y$ в выражении площади, имеем

$$S=\frac{1}{2}(23x-x^2),$$

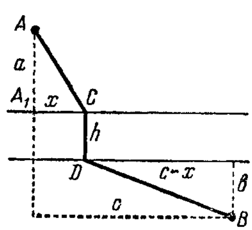
где $x$ согласно условию задачи изменяется на отрезке $[3;\ 11]$.

Ищем далее наибольшее значение функции $S(x)$ на указанном отрезке. $S'=\frac{1}{2}(23-2x)$; $S'=0$ в точке $x=\frac{23}{2}$, но эта точка лежит вне рассматриваемого отрезка; $S'$ существует всюду, поэтому на отрезке $[3;\ 11]$ нет ни одной критической точки. При изменении $x$ от 3 до 11 производная $S'>0$, а функция $S$ неизменно возрастает и достигает наибольшего значения на правом конце отрезка $x=11$.

Итак, прямоугольник, вырезанный из данного куска жести, будет иметь наибольшую площадь, когда точка $B$ совпадает с точкой $C$; $S_{нб}=S(11)=66$ *дм*$^2$.



Черт. 57



Черт. 58

**359.** Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

Решение. Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (черт. 58). Расстояния $a$, $b$, $c$ и $h$

согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном в плане месте, то длина дороги между пунктами $A$ и $B$

$$l = AC + h + DB.$$

Выбрав за независимую переменную $x$ расстояние $A_1C$, получим

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

и

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (x-c)^2},$$

где $x$ изменяется на отрезке $[0; c]$, что очевидно.

Теперь найдем наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0; c]$.

Найдем производную $l'$ и критические точки, лежащие внутри отрезка $[0; c]$:

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{(a^2+x^2)\,[b^2+(x-c^2)]}};$$

$$l' = 0, \text{ когда } x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$x^2\,[b^2 + (x-c)^2] = (x-c)^2\,(a^2+x^2); \quad b^2x^2 = a^2\,(x-c)^2;$$

$$x_1 = \frac{ac}{a-b} \text{ и } x_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Точка $x_1$ лежит вне отрезка $0 \leqslant x \leqslant c$: при $a > b$, $x_1 > c$; при $a < b$, $x_1 < 0$. Точка $x_2$ лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях $a$, $b$ и $c$, так как при этом $x_2 > 0$ и $\frac{a}{a+b} < 1$, т. е. $x_2 < c$.

| $x$ | 0 | $x_2$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $l'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $l$ | убыв. | min. | возр. |

Производная $l'$ существует всюду, поэтому функция $l$ других критических точек не имеет.

Внутри отрезка $[0; c]$ функция $l$ имеет одну критическую точку $x_2$. Исследуя эту критическую точку по знаку производной $l'$ слева и справа от нее, как это показано в таблице, убеждаемся, что точка $x_2$ есть точка минимума.

Согласно свойству 1 непрерывных функций, в этой единственной на отрезке $[0; c]$ точке минимума непрерывная функция $l$ имеет и наименьшее значение из всех ее значений на этом отрезке.

Следовательно, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.

**360.** Из куска проволоки длиной $l$ согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.

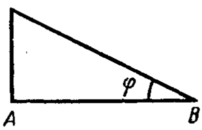
**361.** Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 $м^2$, а длина забора была наименьшая?

**362.** В прямоугольном листе картона длиной 48 *см* и шириной 30 *см* вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

**363.** На прямой между двумя источниками света силы $F$ и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 *м*. (Освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.)

**364.** Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объемом.

**365.** Завод $A$ расположен на расстоянии $a$ *км* от железной дороги, идущей в город $B$, и на расстоянии $b$ *км* от города $B$. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе с завода $A$, чтобы доставка грузов из $A$ в $B$ была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в $k$ раз дороже, чем по железной дороге?




Черт. 59

**366.** Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершенного конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте и должна иметь заданный объем. Показать, что количество материала для постройки цистерны потребуется наименьшее, если угол при вершине осевого сечения конуса будет равен $2\arccos\frac{2}{3} \approx 96°$.

**367.** Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобочная трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими, т. е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?

**368*.** От канала шириной 4 *м* отходит под прямым углом другой канал шириной 2 *м*. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен)?

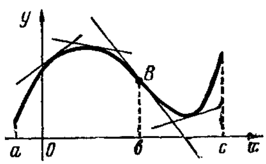
**369*.** Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями $v_1$ и $v_2$. В какой момент расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения (—3; 0) и (0; 5)?

**370*.** Шар свободно скатывается по наклонной плоскости (черт. 59). Если основание $AB$ остается неизменным, то каков должен быть угол наклона $\varphi$, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

## § 7. Направление выпуклости кривой и точки перегиба

*Если в некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то она называется выпуклой вверх, а если она расположена выше любой своей касательной, то называется выпуклой вниз в этом интервале.*

*Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление ее выпуклости.*




Черт. 60

На черт. 60 в интервале $(a, b)$ кривая выпукла вверх, в интервале $(b, c)$ она выпукла вниз, а точка $B$ есть точка перегиба.

*Направление выпуклости кривой $y = f(x)$ характеризуется знаком второй производной $y''$: если в некотором интервале $y'' > 0$, то кривая выпукла вниз, а если $y'' < 0$, то кривая выпукла вверх в этом интервале.*

Абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$, или графика функции $f(x)$, являются точками, в которых меняется поведение производной $y'$. Поэтому их можно найти по следующему правилу:

I. Найти $y''$ и точки $x$, в которых $y'' = 0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области ее расположения.

II. Определить знак $y''$ слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка $x$ будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее $y''$ имеет разные знаки.

Интервалы, где кривая выпукла вверх и где она выпукла вниз, определяются из условия, что их границами могут быть только абсциссы точек перегиба, точки разрыва и граничные точки области расположения кривой.

**371.** Определить направление выпуклости и точки перегиба кривых:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$;  2) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$;  4) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$;

5)* $y = 2 - |x^5 - 1|$.

Решение. Находим точки перегиба кривой, руководствуясь указанным правилом.

1) I. Ищем точки $x$, в которых $y''=0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области расположения кривой:

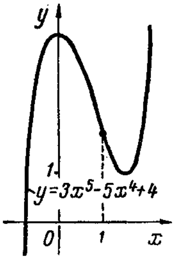
$$y'=15x^4-20x^3;\quad y''=60x^3-60x^2=60x^2(x-1).$$

$y''=0$ в точках $x=0$ и $x=1$. Эти точки являются искомыми, так как область расположения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек $x$, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как $y''$ существует всюду.

II. Исследуем найденные точки, определяя знак $y''$ слева и справа от каждой из них. Запишем это исследование в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума:

| $x$ | $-1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | в. вверх | нет перегиба | в. вверх | перегиб | в. вниз |

Из таблицы следует, что $x=1$ есть абсцисса точки перегиба кривой: $y(1)=2$. Поскольку эта кривая непрерывная, то во всем интервале $(-\infty, 1)$ она выпукла вверх, а во всем интервале $(1, +\infty)$ — выпукла вниз (черт. 61).



Черт. 61

2) I. Находим вторую производную:

$$y'=-\frac{7}{5}(x+2)^{-\frac{2}{5}};$$

$$y''=-\frac{14}{25}(x+2)^{-\frac{3}{5}}=-\frac{14}{25\sqrt[5]{(x+2)^3}}.$$

Здесь $y''$ нигде не обращается в нуль, а при $x=-2$ она не существует.

При $x=-2$ кривая может иметь перегиб, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

II. Исследуем значение $x=-2$ по знаку $y''$ при значениях $x$, меньших и больших его. Согласно таблице $x=-2$ есть абсцисса точки перегиба.

| $x$ | $-10$ | $-2$ | 0 |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $\infty$ | $-$ |
| $y$ | в. вниз | перегиб | в. вверх |

Слева от нее во всем интервале $(-\infty, -2)$ данная непрерывная кривая выпукла вниз, а справа, в интервале $(-2, +\infty)$, она выпукла вверх; $y(-2)=3$.

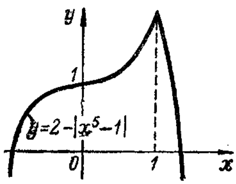
3) I. $y' = 10(x-1)^{\frac{3}{2}} + 30(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

$$y'' = 15(x-1)^{\frac{1}{2}} + 15(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}.$$

Здесь $y''$ обращается в нуль при $x=0$ и не существует (равна $+\infty$) при $x=1$. Но ни одно из этих значений $x$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как областью расположения кривой является интервал $1 \leqslant x < +\infty$; $x=0$ лежит вне этой области, а $x=1$ есть граница этой области, т. е. лежит не внутри ее. Кривая не имеет точек перегиба; во всей области своего расположения она выпукла вниз, так как во всей этой области $y'' > 0$.

4) I. $y' = -\frac{3}{(x+1)^4}$; $\quad y'' = \frac{12}{(x+1)^5}$.

Здесь $y''$ не может обратиться в нуль, а при $x=-1$ она не существует. Однако $x=-1$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке кривая разрывна. При $x<-1$, $y''<0$; при $x>-1$, $y''>0$. Поэтому в интервале $(-\infty, -1)$ кривая выпукла вверх, а в интервале $(-1, +\infty)$ она выпукла вниз. *Не имея точек перегиба, эта кривая меняет направление выпуклости при переходе $x$ через точку разрыва $x=-1$.*



Черт. 62

5)* I. $y' = \pm 5x^4$; $y'' = \pm 20x^3$, где знак плюс соответствует значениям $x$ из интервала $(-\infty, 1)$, в котором $x^5-1<0$, а знак минус соответствует значениям $x$ из интервала $(1, +\infty)$, в котором $x^5-1>0$. $y''$ не существует при $x=1$; $y''=0$ при $x=0$. Эти значения $x$ могут быть абсциссами точек перегиба данной кривой, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

| $x$ | $-10$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | не сущ. | $-$ |
| $y$ | в. вверх | перегиб | в. вниз | перегиб | в. вверх |

II. Определяя знак $y''$ слева и справа от точек $x=0$ и $x=1$, заключаем, что $x=0$ и $x=1$ — абсциссы точек перегиба. Левее точки $x=0$ кривая выпукла вверх, между точками $x=0$ и $x=1$ она выпукла вниз и правее точки $x=1$ выпукла вверх (черт. 62). Ординаты точек перегиба определяются из уравнения кривой по известным их абсциссам: $y(0)=1$; $y(1)=2$. Здесь точка перегиба $(1; 2)$ совпадает с угловой точкой кривой, в которой она имеет максимальное значение ординаты и две различные односторонние касательные $y-2=\pm 5(x-1)$.

Найти точки перегиба и исследовать направление выпуклости кривых:

**372.** $y=x^3-3x^2-9x+9$. **373.** $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

**374.** $y=1-\ln(x^2-4)$. **375.** $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

**376.** $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$. **377.** $y=\frac{1}{x^2-4}$.

**378*.** $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **379*.** $y=1-|x^2-2|$.

## § 8. Асимптоты

*Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.*

Кривая может приближаться к своей асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты, как, например, в задаче 380 (1) или с разных сторон, бесчисленное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую, как, например, в задаче 380 (3).

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

а) если при $x=a$ кривая $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. если при $x\to a-0$ или при $x\to a+0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x=a$ является ее вертикальной асимптотой;

б) невертикальные асимптоты кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y=kx+b$, где параметры $k$ и $b$ определяются формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

при одинаковом в обеих формулах поведении $x$, т. е. в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

**380.** Найти асимптоты кривых:

1) $y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$; 2) $y=xe^x$; 3) $y=x+\frac{\sin x}{x}$; 4) $y=x\operatorname{arcctg}x$;

5) $y=\ln(4-x^2)$; 6)* $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Решение. 1) (а) При $x=3$ данная кривая имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x=3$ есть ее вертикальная асимптота;

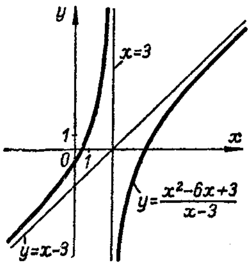
(б) далее ищем невертикальные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=\lim\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1;$$

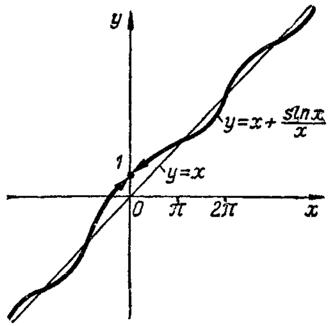
$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=$$

$$=\lim\frac{3-3x}{x-3}=\lim\frac{\frac{3}{x}-3}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Подставляя найденные значения $k$ и $b$ в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение невертикальной асимптоты: $y=x-3$. Других невертикальных асимптот кривая не имеет, так как при




Черт. 63




Черт. 64

$x\to-\infty$ значения $k$ и $b$ будут те же самые. Кривая (гипербола) изображена на черт. 63.

2) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

(б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=+\infty,$

т. е. при $x\to+\infty$ угловой коэффициент асимптоты не существует, вследствие чего при $x\to+\infty$ кривая не имеет асимптоты;

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim xe^x=\lim\frac{x}{e^{-x}}=\lim\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

(Здесь применено правило Лопиталя.)

Следовательно, при $x\to-\infty$ кривая имеет невертикальную асимптоту $y=0$ (ось $Ox$).

3) (а) Кривая $y = x + \frac{\sin x}{x}$ не имеет бесконечных разрывов, поэтому не имеет и вертикальных асимптот;

(б) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$, так как $|\sin x| \leqslant 1$;

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim \frac{\sin x}{x} = 0.$$

При $x \to -\infty$ параметры асимптоты имеют те же значения. Следовательно, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = x$. Эта кривая бесчисленное множество раз пересекает свою асимптоту, переходя с одной ее стороны на другую (черт. 64).

*Способ приближения кривой к своей невертикальной асимптоте определяется путем исследования знака разности ординат кривой и асимптоты.* Здесь эта разность $y_{кр} - y_{ас} = \frac{\sin x}{x}$ бесчисленное множество раз меняет свой знак в точках, где

$$x = k\pi, \quad k = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

4) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

$$(б) \quad k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim x \operatorname{arcctg} x = \lim \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}}.$$

Применяя правило Лопиталя дважды, получим

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = \lim \frac{2x}{2x} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет асимптоту $y = 1$;

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

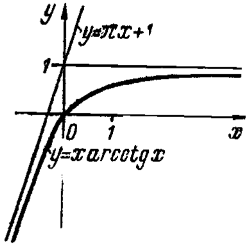
$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = \lim (x \operatorname{arcctg} x - \pi x) = \lim x (\operatorname{arcctg} x - \pi) =$$

$$= \lim \frac{\operatorname{arcctg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

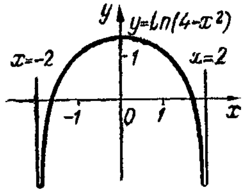
Следовательно, при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = \pi x + 1$ (черт. 65).

5) (а) Кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$, так как при $x = \pm 2$ она имеет бесконечные разрывы;

(б) невертикальных асимптот кривая не имеет, ибо ее областью расположения является интервал $-2 < x < 2$ и поэтому $x$ не может стремиться к бесконечности (черт. 66).




Черт. 65




Черт. 66

6)* (а) Вертикальных асимптот кривая не имеет;

$$(б)\ k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} = 1,$$

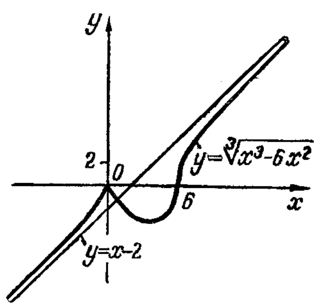
$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x\right).$$

Заменяя $x$ через $\frac{1}{\alpha}$ и применяя затем правило Лопиталя, **получим**

$$b = \lim_{\alpha \to +0} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^3} - \frac{6}{\alpha^2}} - \frac{1}{\alpha}\right) = \lim \frac{\sqrt[3]{1 - 6\alpha} - 1}{\alpha} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{3}(1 - 6\alpha)^{-\frac{2}{3}}(-6)}{1} = -2.$$

При $x \to -\infty$ значения параметров $k$ и $b$ асимптоты будут те же самые. Следовательно, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ данная кривая имеет асимптоту $y = x - 2$. Эта непрерывная кривая пересекает свою асимптоту в точке, где $x = \frac{2}{3}$, и неограниченно приближается к ней при $x \to -\infty$ сверху, а при $x \to +\infty$ снизу (черт. 67).




Черт. 67

Найти асимптоты кривых:

**381.** $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$. **382.** $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

**383.** $y = xe^{-x}$. **384.** $y = x \operatorname{arctg} x$.

**385*.** $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$. **386*.** $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

## § 9. Общая схема исследования функций и построения их графиков

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

I. Найти область определения функции.

II. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках.

III. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.

IV. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции[1].

V. Найти асимптоты графика функции: а) вертикальные и б) невертикальные.

VI. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

VII. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вверх и вниз.

VIII. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения. Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования.

**387.** Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$; 2) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$;

3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

5) $y=x^2\sqrt[x]{e}$; 6) $y=x+2\operatorname{arcctg} x$; 7)* $y=|e^x-1|$.

Решение. Руководствуясь указанной общей схемой, последовательно находим:

1) I. Областью определения данной функции, как и всякого многочлена, является вся числовая ось.

II. Функция не имеет точек разрыва. Как у всякой элементарной функции, ее область непрерывности совпадает с областью определения.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. При $x=0$ из данного уравнения найдем $y=0$, а при $y=0$ найдем $x=0$ и $x=4$. Это значит, что график функции пересекает координатные оси в точках (0; 0) и (4; 0).

---

[1] Выполнение этого пункта исследования требует решения уравнения $f(x)=0$ и может быть опущено в задачах этого параграфа, если это решение нельзя получить элементарным путем. Общий метод решения уравнений разъясняется в следующем § 10.

*Интервалы, где функция сохраняет знак, определяются из условия, что их границами могут быть только точки пересечения графика функции с осью Ох, точки разрыва и границы области определения функции.*

Для исследуемой функции такими точками являются точки $x=0$ и $x=4$. Определяя знак функции при каком-либо значении $x$ из интервала $(-\infty, 0)$, например $y(-1)<0$, заключаем, что во всем этом интервале функция имеет отрицательные значения; во всем интервале $(0; 4)$ функция имеет положительные значения, ибо $y(1)>0$; во всем интервале $(4, +\infty)$ функция имеет отрицательные значения, так как $y(10)<0$.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{5}\lim x^2(4-x)=-\infty.$

При $x\to-\infty$ угловой коэффициент $k$ асимптоты также не существует. Поэтому невертикальных асимптот график функции также не имеет.

VI. $y'=\frac{1}{5}(12x^2-4x^3)=\frac{4}{5}x^2(3-x)$;

$y'=0$ в точках $x=0$ и $x=3$, которые являются критическими, так как они удовлетворяют всем необходимым для этого условиям. Других критических точек нет, поскольку производная $y'$ существует всюду.

Исследуем критические точки по знаку $y'$ слева и справа от каждой из этих точек:

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + | 0 | — |
| $y$ | возр. | нет экстр. | возр. | $\overset{\frown}{\max}$ | убыв. |

Следовательно, $x=3$ есть точка максимума: $y_{\max}=y(3)=5{,}4$.

*Интервалы возрастания и убывания функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки экстремума, точки разрыва и границы области определения функции.*

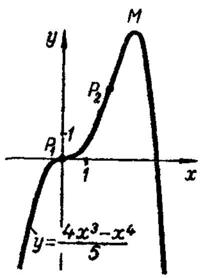
Исследуемая функция всюду непрерывна и имеет единственную точку максимума $x=3$. Поэтому в интервале $(-\infty, 3)$ она возрастает, а в интервале $(3, +\infty)$ — убывает.

VII. $y''=\frac{12}{5}x\,(2-x)$ всюду существует и обращается в нуль при $x=0$ и $x=2$. Эти значения $x$ могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуем их, определяя знак $y''$ слева и справа:

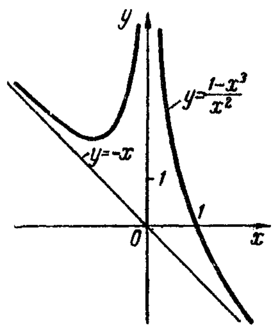
| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | в вверх | перегиб | в. вниз | перегиб | в. вверх |

Следовательно, график функции имеет две точки перегиба (0; 0) и (2; 3,2) (их ординаты найдены из данного уравнения).

Так как исследуемая функция непрерывна на всей числовой оси, то, согласно таблице, в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ ее график обращен выпуклостью вверх, а в интервале (0; 2) он обращен выпуклостью вниз.




Черт. 68




Черт. 69

VIII. Учитывая все полученные результаты исследования строим график функции (черт. 68).

2) I. Функция $y=\frac{1-x^3}{x^2}$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$.

II. В точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв: при $x \to -0$ и при $x \to +0$ $\lim y = +\infty$. Во всех других точках числовой оси функция непрерывна.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. График функции пересекает ось $Ox$ в точке (1; 0) и не пересекает оси $Oy$.

Слева от точки разрыва, при $-\infty < x < 0$, $y > 0$; между точкой разрыва и точкой пересечения с осью $Ox$, при $0 < x < 1$, $y > 0$; справа от точки пересечения с осью $Ox$, при $1 < x < +\infty$, $y < 0$.

V. а) Прямая $x=0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой графика функции, ибо при $x=0$ она имеет бесконечный разрыв;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{1-x^3}{x^3}=-1;$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left(\frac{1-x^3}{x^2}+x\right)=\lim\frac{1}{x^2}=0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ есть невертикальная асимптота. При $x\to-\infty$ параметры $k$ и $b$ имеют те же значения, поэтому других асимптот нет.

VI. $y'=-\frac{x^3+2}{x^3}$; $y'=0$ в точке $x=-\sqrt[3]{2}$, которая является критической; $y'$ не существует в точке $x=0$, но эта точка не является критической, так как она есть точка разрыва.

Исследуем критическую точку по знаку $y''$:

$$y''=\frac{6}{x^4};\ y''(-\sqrt[3]{2})>0,$$

следовательно, $x=-\sqrt[3]{2}$ есть точка минимума:

$$y_{\min}=y(-\sqrt[3]{2})=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Слева от точки минимума при $-\infty<x<-\sqrt[3]{2}$, $y'<0$ функция убывает; между точкой минимума и точкой разрыва при $-\sqrt[3]{2}<x<0$, $y'>0$ функция возрастает; справа от точки разрыва при $0<x<+\infty$, $y'<0$ функция убывает.

VII. $y''=\frac{6}{x^4}$; $y''\neq0$; $y''$ не существует при $x=0$, но это значение $x$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как оно является точкой разрыва. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.

Во всей области определения функции $y''>0$, поэтому ее график всюду обращен выпуклостью вниз.

VIII. Используя все полученные данные, строим график функции (черт. 69).

3) I, II. Функция $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция нечетная, ибо $y(-x)=-y(x)$; ее график будет симметричен относительно начала координат.

IV. График функции пересекается с осями координат только в начале координат.

При $x<0$ значения $y<0$; при $x>0$ значения $y>0$.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=$

$=\lim\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)=0;$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=$

$=\lim\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=0.$

Подставляя найденные значения $k=b=0$ в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение невертикальной асимптоты: $y=0$. Тот же результат получится и при $x\to-\infty$.

VI. $y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}};$

$y'$ нигде не обращается в нуль; $y'$ не существует в точках $x=\pm1$, которые являются критическими. Исследуя критические точки по знаку $y'$ в соседних с ними точках слева и справа:

| $x$ | $-5$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $\infty$ | $+$ | $\infty$ | $-$ |
| $y$ | убыв. | $\vee$ min | возр. | $\wedge$ max | убыв. |

заключаем, что $x=-1$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(-1)=-\sqrt[3]{4}$, а $x=1$ есть точка максимума, где $y_{\max}=y(1)=\sqrt[3]{4}$.

Слева от точки минимума в интервале $(-\infty, -1)$ и справа от точки максимума в интервале $(1, +\infty)$, где $y'<0$, функция убывает, а между точками минимума и максимума в интервале $(-1;\ 1)$, где $y'>0$, функция возрастает.

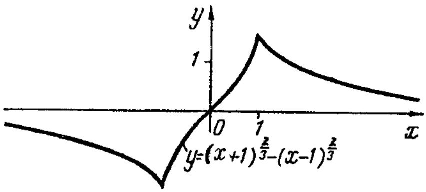
VII. $y''=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}}+\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}};$

$y''=0$ в точке $x=0$; $y''$ не существует в точках $x=\pm1$. Эти точки оси $Ox$ могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуя их по знаку $y''$ в соседних с ними точках слева и справа:

| $x$ | $-5$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ | $+$ |
| $y$ | в. вверх | нет перегиба | в. вверх | перегиб | в. вниз | нет перегиба | в. вниз |

заключаем, что $x=0$ есть абсцисса точки перегиба; $y(0)=0$.

Слева от точки перегиба, в интервале $(-\infty, 0)$, где $y''<0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа от точки перегиба, в интервале $(0, +\infty)$, где $y''>0$, график функции обращен выпуклостью вниз.




**Черт. 70**

VIII. Основываясь на полученных результатах исследования, строим график функции (черт. 70).

4) I, II. Функция $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция является четной, так как $y(-x)=y(x)$, и периодической, так как $y(x)=y\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, с периодом $\frac{\pi}{2}$. Достаточно исследовать поведение этой функции и построить ее график в интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; в остальных точках числовой оси поведение функции и ее график будут повторяться.

IV. При $x=0$, $y=1$; $y\neq 0$. График функции пересекает ось $Oy$ в точке $(0; 1)$ и не пересекает ось $Ox$. При любом значении $x$ функция имеет положительное значение.

V. а) График функции не имеет вертикальных асимптот, поскольку она непрерывна на всей числовой оси;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{x}=0;$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim(\sin^4 x+\cos^4 x)$ — не существует.

При $x\to-\infty$ невертикальной асимптоты также не существует.

График функции не имеет никаких асимптот.

VI. $y'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=$
$$=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x;$$

$y'$ обращается в нуль в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ в точках $x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$, которые являются критическими. Других критических точек в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ нет, так как $y'$ существует всюду. Исследуем критические точки по знаку $y''$ (по правилу IIб): $y'' = -4\cos 4x$; $y''(0) = -4 < 0$, следовательно, $x = 0$ есть точка максимума, где $y_{\max} = y(0) = 1$; $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$, поэтому $x = \frac{\pi}{4}$ есть точка минимума, где $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

В интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, где $y' < 0$, функция убывает, а в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, где $y' > 0$, функция возрастает.

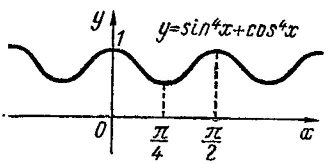
VII. $y'' = -4\cos 4x$; $y''$ существует всюду и обращается в нуль в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ при $x = \frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{3\pi}{8}$. Эти точки оси $Ox$ могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуя их по знаку $y''$ в соседних точках:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | в. вверх | перегиб | в. вниз | перегиб | в. вверх |

заключаем, что в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ график функции имеет две точки перегиба: $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

Ординаты этих точек вычислены из данного уравнения.

В интервалах $\left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$, где $y'' < 0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а в интервале $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$, где $y'' > 0$, он обращен выпуклостью вниз.



Черт. 71

VIII. Согласно полученным результатам исследования строим график функции в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна периоду данной функции, и затем повторяем его влево и вправо по периодическому закону (черт. 71).

5) I. Функция $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$.

II. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв: она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке

$$\lim_{x \to -0} y = 0, \text{ ибо } \lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

При $x \to +0$ имеет место случай нахождения предела $0 \cdot \infty$. Преобразуя функцию к виду дроби и дважды применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to +0} y = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} =$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \frac{e^{+\infty}}{2} = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x=0$ разрыв функции бесконечный. В остальных точках числовой оси она непрерывна.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. С осями координат график функции не пересекается; согласно п. II исследования начало координат является предельной точкой левой ветви графика.

Определяя знак функции в какой-либо точке слева от точки разрыва, например $y(-2) > 0$, и в какой-либо точке справа от нее, например $y(2) > 0$, заключаем, что функция имеет положительные значения во всей своей области определения.

V. а) Вертикальной асимптотой графика функции является прямая $x=0$, ибо при $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв;

б) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

При $x \to -\infty$ угловой коэффициент невертикальной асимптоты также не существует, т. е. таких асимптот график функции не имеет.

VI. $y' = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$; $y'=0$ в точке $x=\frac{1}{2}$, которая является критической; $y'$ не существует в точке $x=0$, но она не является критической, так как это точка разрыва.

Исследуя критическую точку по знаку $y''$ в этой точке:

$$y'' = \frac{2x^2-2x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}; \quad y''\left(\frac{1}{2}\right) > 0,$$

заключаем, что $x=\frac{1}{2}$ есть точка минимума: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$.

Определяя знак $y'$ в интервалах, границами которых являются точки разрыва и экстремума, заключаем: в интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, где $y' < 0$, функция убывает, а в интервале $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, где $y' > 0$, она возрастает.

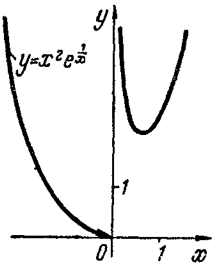
VII. $y'' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ нигде не обращается в нуль и существует во всей области определения функции. Поэтому график функции не имеет точек перегиба.

Определяя знак $y''$ в какой-либо точке слева от точки разрыва, например $y''(-2) > 0$, и в какой-либо точке справа от нее, например $y''(3) > 0$, заключаем, что график функции всюду обращен выпуклостью вниз.

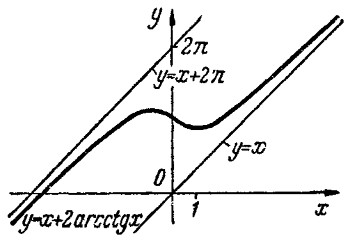
VIII. Ввиду недостаточности полученных данных находим дополнительно несколько точек графика, беря подходящие значения $x$ и определяя соответствующие значения $y$ из данного уравнения:

$$\left(-2, \frac{4}{\sqrt{e}}\right), \quad \left(-1, \frac{1}{e}\right), \quad (1, e).$$

Наконец, строим график функции (черт. 72).




Черт. 72




Черт. 73

6) I, II. Функция $y = x + 2 \operatorname{arcctg} x$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

V. а) Вертикальных асимптот нет;

$$\text{б) } k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim \left(1 + \frac{2 \operatorname{arcctg} x}{x}\right) = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim 2 \operatorname{arcctg} x = 2 \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = \lim 2 \operatorname{arcctg} x = 2 \operatorname{arcctg}(-\infty) = 2\pi.$$

Следовательно, график функции имеет две невертикальные асимптоты: $y = x$ и $y = x + 2\pi$.

VI. $y' = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ существует всюду и обращается в нуль в точках $x = \pm 1$, которые являются критическими. Исследуем эти точки по знаку второй производной:

$$y'' = \frac{4x}{(1 + x^2)^2}; \quad y''(-1) < 0; \quad y''(1) > 0.$$

Следовательно, $x=-1$ есть точка максимума, а $x=1$ есть точка минимума: $y_{\max}=y(-1)=\frac{3\pi}{2}-1$; $y_{\min}=y(1)=\frac{\pi}{2}+1$.

В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, где $y'>0$, функция возрастает, а в интервале $(-1; 1)$, где $y'<0$, функция убывает.

VII. $y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ всюду существует и обращается в нуль в точке $x=0$. Определяя знак $y''$ слева и справа от этой точки: $y''(-1)<0$ и $y''(1)>0$, заключаем, что при $x=0$ график функции имеет точку перегиба. Слева от нее, в интервале $(-\infty, 0)$, где $y''<0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа, в интервале $(0, +\infty)$, где $y''>0$, он обращен выпуклостью вниз; $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

VIII. Согласно результатам исследования строим график функции (черт. 73).

7)* I, II. Функция $y=|e^x-1|$ определена и непрерывна на всей числовой оси.

III. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

IV. Функция всюду неотрицательна; ее график проходит через начало координат.

V. а) Вертикальных асимптот график функции не имеет.

б) При $x\geqslant 0$, $y=e^x-1$; при $x<0$, $y=1-e^x$,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{e^x-1}{x}=\lim\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

т. е. при $x\to+\infty$ асимптоты нет;

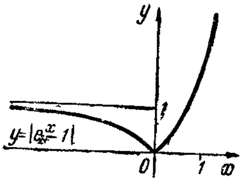
$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{1-e^x}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim(1-e^x)=1,$$

т. е. при $x\to-\infty$ график функции имеет невертикальную асимптоту $y=1$.

VI. $y'=\pm e^x$, где знак плюс соответствует значениям $x$ из интервала $(0, +\infty)$, где $e^x-1>0$, а знак минус соответствует значениям $x$ из интервала $(-\infty, 0)$, где $e^x-1<0$; $y'$ нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x=0$, которая является критической. Слева от этой точки, где $y'=-e^x<0$, функция убывает, а справа от нее, где $y'=e^x>0$, функция возрастает. Это значит, что $x=0$ есть точка минимума: $y_{\min}=y(0)=0$.

VII. $y''=\pm e^x$, где как и у $y'$ знак плюс соответствует значениям $x>0$, а знак минус соответствует значениям $x<0$; $y''$ нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x=0$. Слева от этой точки, где $y''=-e^x<0$, график функции обращен выпуклостью вверх, а справа от нее, где $y''=e^x>0$, график функции обращен выпуклостью вниз. Следовательно, $x=0$ есть абсцисса точки перегиба; $y(0)=0$.




Черт. 74

Здесь точка перегиба совпала с угловой точкой, в которой график функции имеет две различные односторонние касательные: $y=-x$, $y=x$ и минимальное значение ординаты.

VIII. Для построения графика функции дополнительно найдем несколько его точек, например $(1;\ e-1)$, $(-1;\ 1-e^{-1})$, $(-2;\ 1-e^{-2})$ и определим угловые коэффициенты касательных (левую и правую производные) в угловой точке $(0;\ 0)$:

$$k_1=y'_{(-)}(0)=-1, \quad k_2=y'_{(+)}(0)=1.$$

Согласно полученным данным график функции изображен на черт. 74.

Исследовать функции и построить их графики:

**388.** $y=x^3+3x^2$. **389.** $y=16x(x-1)^3$.

**390.** $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$. **391.** $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$.

**392.** $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. **393.** $y=(x-3)\sqrt{x}$.

**394.** $y=2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$. **395.** $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

**396.** $y=\sin x-\cos x$. **397.** $y=x-2\operatorname{arc\,tg} x$.

**398*.** $y=x-|\sin x|$. **399*.** $y=\arcsin|x|$.

## § 10. Приближенное решение уравнений

1) *Графический метод. Отделение корней.* Действительные корни уравнения $f(x)=0$ являются абсциссами точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью $Ox$, а если это уравнение преобразуется к виду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, то его действительные корни будут абсциссами точек пересечения кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$.

Пользуясь этим, как было показано в решении задачи 16, можно находить приближенные значения действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений путем построения соответствующих кривых.

Однако этим графическим методом можно получить лишь грубо приближенные значения корней уравнения, но нельзя их вычислить с наперед заданной большой точностью.

Поэтому графический метод обычно применяется лишь как вспомогательное средство для определения числа действительных корней уравнения и для их о т д е л е н и я, т. е. для нахождения таких отрезков оси $Ox$, внутри которых содержится только по одному корню. Затем, после такого отделения корней, каждый из них может быть вычислен с любой желаемой точностью посредством аналитических методов.

2) *Уточнение корней уравнения методом хорд и касательных.* Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ сохраняет знак и если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится только один действительный корень функции $f(x)$ или уравнения $f(x) = 0$.

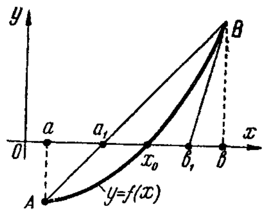
Если, кроме того, на этом отрезке $f''(x)$ также сохраняет знак, то можно найти границы $a_1$ и $b_1$ более узкого отрезка, содержащего тот же корень, по формулам

$$a_1 = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad b_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \qquad (*)$$

где $\beta$ — тот конец отрезка $[a, b]$, в котором $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$.

Геометрически (черт. 75) границы нового отрезка $a_1$ и $b_1$ представляют абсциссы точек пересечения с осью $Ox$ хорды $AB$ и касательной $Bb_1$, которые будут ближе к искомому корню $x_0$, чем границы исходного отрезка $[a, b]$.

Далее, исходя из полученного суженного отрезка, по тем же формулам (*) можно найти границы $a_2$ и $b_2$ еще более узкого отрезка, содержащего в себе корень $x_0$.



Черт. 75

Повторяя этот процесс последовательного сужения отрезка, содержащего корень $x_0$, т. е. повторяя применение формул (*), можно найти приближенное значение корня $x_0$ с любой заданной точностью*.

Чтобы найти $x_0$ с точностью до $\delta$, следует вести вычисление $a_n$ и $b_n$ до тех пор, когда впервые окажется

$$|a_n - b_n| < \delta \text{ или } \delta < |a_n - b_n| < 2\delta. \qquad (**)$$

Тогда, с точностью до $\delta$, в первом случае $x_0 \approx a_n$ (или $x_0 \approx b_n$), а во втором случае $x_0 \approx \frac{a_n + b_n}{2}$.

**400.** Отделить действительные корни следующих уравнений: 1) $x^2 - \cos x = 0$; 2) $2x^3 + x + 1 = 0$; 3) $x - \operatorname{ctg} x = 0$.

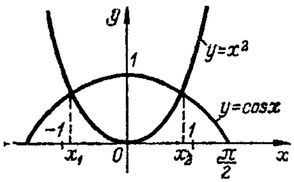
---

* 1) Здесь возможно $a_n \lesseqgtr b_n$. Если, как всегда $a < b$, то при $\beta = b$ будет $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ..., а при $\beta = a$ будет $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, ...

2) При повторном применении формул (*) во вторую из них (формулу касательных) всегда подставляется новая граница $b_n$, вычисленная по этой второй формуле.

Решение. Чтобы отделить действительные корни данного уравнения, т. е. чтобы каждый из них заключить внутри особого небольшого отрезка, воспользуемся графическим методом.

1) Преобразуем данное уравнение к виду $x^2=\cos x$ и построим кривые $y=x^2$ и $y=\cos x$, в одних и тех же координатных осях и при одной и той же единице масштаба (черт. 76).



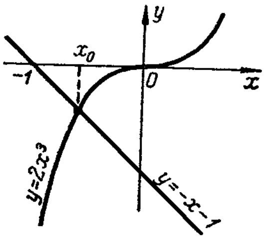

Черт. 76

Число точек пересечения этих кривых равно числу действительных корней данного уравнения, а их абсциссы являются этими корнями.

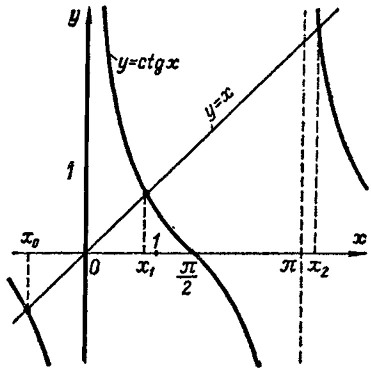
Согласно этому положению из чертежа находим: данное трансцендентное уравнение $x^2-\cos x=0$ имеет два действительных корня, один из которых $x_1$ содержится на отрезке $[-1; -0,8]$, а другой $x_2$ на отрезке $[0,8;\ 1]$.

2) Преобразуя уравнение $2x^3+x+1=0$ к виду $2x^3=-x-1$ и построив кривые $y=2x^3$ и $y=-x-1$ в одних координатных осях (черт. 77), заключаем: данное алгебраическое уравнение имеет только один действительный корень, содержащийся на отрезке $[-0,6;\ -0,5]$.

3) Приводим уравнение $x-\operatorname{ctg} x=0$ к виду $x=\operatorname{ctg} x$ и построим кривые $y=x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ (черт. 78). Котангенсоида имеет




Черт. 77



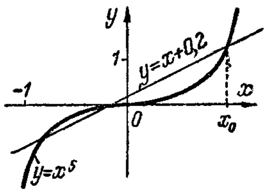

Черт. 78

бесчисленное множество бесконечных ветвей, каждая из которых пересекает прямую $y=x$. Поэтому данное уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней. Наименьший положительный корень $x_1$ этого уравнения содержится на отрезке $[0,8;\ 0,9]$.

**401.** Вычислить с точностью до 0,0001 наибольший корень уравнения

$$x^5 - x - 0{,}2 = 0.$$

Решение. Вначале отделим искомый корень графическим методом. Преобразуя уравнение к виду $x^5 = x + 0{,}2$ и построив кривые $y = x^5$ и $y = x + 0{,}2$ в одних координатных осях (черт. 79), при указанных неодинаковых по осям, но одинаковых для обеих кривых единицах масштаба, заключаем, что искомый наибольший корень содержится на отрезке [1; 1,1].




Черт. 79

Далее вычислим приближенное значение корня с заданной точностью, пользуясь методом хорд и касательных, т. е. применяя формулы (*), сужающие отрезок, заключающий в себе этот корень.

Однако, прежде чем применять эти формулы, следует убедиться в том, что функция $f(x) = x^5 - x - 0{,}2$ и найденный отрезок [1; 1,1] удовлетворяют необходимым условиям, т. е. что:

а) значения функции $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки и что

б) первая и вторая производные от функции на этом отрезке сохраняют каждая свой знак:

$$\text{а) } f(1) = -0{,}2 < 0; \quad f(1{,}1) = 0{,}31051 > 0;$$
$$\text{б) } f'(x) = 5x^4 - 1 > 0 \text{ и } f''(x) = 20x^3 > 0$$

для всех значений $x$ на отрезке [1; 1,1].

Так как $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$ при $x = 1{,}1$, то, обозначив концы отрезка $a = 1$, $b = 1{,}1 = \beta$ и применяя формулы (*), получим:

$$a_1 = 1 - \frac{(1{,}1-1)f(1)}{f(1{,}1) - f(1)} = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}51051} = 1{,}039;$$
$$b_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} = 1{,}1 - \frac{0{,}31051}{6{,}3205} = 1{,}051.$$

К полученным новым границам $a_1$ и $b_1$ более узкого отрезка, содержащего искомый корень, применяем те же формулы (*):

$$a_2 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1) f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} = 1{,}04469;$$
$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} = 1{,}04487.$$

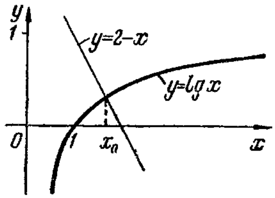
Длина полученного отрезка $[a_2, b_2]$ меньше $2\delta$, но больше $\delta$:

$$0{,}0001 < |a_2 - b_2| = 0{,}00018 < 0{,}0002.$$

Поэтому искомое приближенное значение наибольшего корня данного уравнения с точностью до 0,0001 будет

$$x_0 \approx \frac{a_2+b_2}{2} = 1,0448.$$

**402.** Вычислить с точностью до 0,000001 действительный корень уравнения $2-x-\lg x=0$.




**Черт. 80**

Решение. Чтобы отделить искомый корень, преобразуем уравнение к виду $\lg x=2-x$ и построим кривые $y=\lg x$ и $y=2-x$ (черт. 80). По чертежу определяем, что искомый корень содержится внутри отрезка [1,6; 1,8].

Для проверки условий, соблюдение которых необходимо при пользовании методом хорд и касательных, вычисляем значения функции $f(x)=2-$ $-x-\lg x$ на концах найденного отрезка и находим производные $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f(1,6)=2-1,6-0,2041=0,1959>0;$$
$$f(1,8)=2-1,8-0,2553=-0,0553<0;$$
$$f'(x)=-1-\frac{1}{x}\lg e; \quad f''(x)=\frac{1}{x^2}\lg e;$$
$$f'(x)<0, \; f''(x)>0 \text{ на всем отрезке } [1,6;\; 1,8].$$

Убедившись, что на концах отрезка функция $f(x)$ имеет разные знаки и что на всем этом отрезке производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак, обозначаем концы отрезка: $a=1,6=\beta$; $b=1,8$ и применяем уточняющие формулы (*):

$$a_1=1,6-\frac{(1,8-1,6)\,f(1,6)}{f(1,8)-f(1,6)}=1,6+0,1559=1,7559;$$

$$b_1=1,6-\frac{f(1,6)}{f'(1,6)}=1,6+0,1540=1,7540.$$

Повторно применяем формулы (*) до тех пор, пока не получим отрезок $[b_n, a_n]$, длина которого будет удовлетворять одному из условий (**):

$$a_2=1,7559-\frac{(1,7540-1,7559)\,f(1,7559)}{f(1,7540)-f(1,7559)}=1,75558;$$

$$b_2=1,7540-\frac{f(1,7540)}{f'(1,7540)}=1,75557;$$

$$a_3=1,7555816; \quad b_3=1,7555807.$$

Здесь длина отрезка $[b_3, a_3]$ менее 0,000001; $a_3-b_3=$ $=0,0000009$. Поэтому искомое приближенное значение корня данного уравнения с точностью до 0,000001

$$x_0 \approx b_3 = 1,755581.$$

В задачах 403—406 определить число действительных корней уравнения и вычислить наибольший из них с точностью до 0,01.

**403.** $x^3-9x-5=0$. **404.** $x^4-x-10=0$.

**405.** $x-\sin 2x=0$. **406.** $x-2+e^x=0$.

В задачах 407—410 найти приближенные значения действительных корней уравнения с точностью до 0,01.

**407.** $x^3-6x+3=0$. **408.** $x^4+10x-100=0$.

**409.** $(x-1)^2-2\sin x=0$. **410.** $e^x-2(1-x)^2=0$.

## § 11. Кривизна плоской кривой

Если плоская линия отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$ или уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то ее кривизна $K$ в любой точке определяется формулой

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

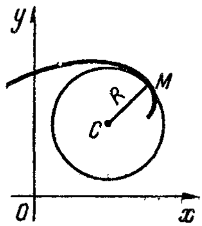
где $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ — первая и вторая производные от $x$ и $y$ по параметру $t$.

*Кривизна линии в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке.*

Из всех плоских линий *постоянную кривизну имеют только прямая и окружность*. У всех других линий кривизна меняется от точки к точке. *Кривизна прямой всюду равна нулю*; у других линий кривизна может равняться нулю только в отдельных точках. *Кривизна окружности радиуса $R$ всюду равна $\frac{1}{R}$*.

*Величина $R$, обратная кривизне кривой в некоторой ее точке, $R=\frac{1}{K}$, называется радиусом кривизны кривой в этой точке.*

*Кругом кривизны кривой в ее точке $M$ называется окружность с радиусом, равным радиусу кривизны кривой в точке $M$, центр которой $C$ лежит на нормали к кривой в точке $M$ со стороны ее вогнутости* (черт. 81).



Черт. 81

Координаты $(X, Y)$ центра кривизны (центра круга кривизны) кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются формулами

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y}=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y',$$

$$Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x}=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{2}$$

*Геометрическое место центров кривизны $C(X, Y)$ линии называется эволютой этой линии.* Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями эволюты.

Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

**411.** Найти кривизну кривой: 1) $x=t^2$, $y=2t^3$ в точке, где $t=1$; 2) $y=\cos 2x$ в точке, где $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) Находим производные $\dot{x}=2t$, $\ddot{x}=2$, $\dot{y}=6t^2$, $\ddot{y}=12t$, вычисляем их значения в точке, где $t=1$:

$$\dot{x}=2,\ \ddot{x}=2,\ \dot{y}=6,\ \ddot{y}=12$$

и, подставляя в формулу (1), получим

$$K=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 12-6\cdot 2}{(2^2+6^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{20\sqrt{10}}.$$

2) Из данного уравнения находим первую и вторую производные от $y$ по $x$:

$$y'=-2\sin 2x,\ y''=-4\cos 2x,$$

вычисляем их значения в данной точке: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ и, подставляя в формулу (1), получим $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=4$.

**412.** Определить радиусы кривизны в вершинах эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Решение. Найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и определим радиус кривизны эллипса в любой его точке:

$$R(t)=\frac{1}{K(t)}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Для вершин эллипса, лежащих на его оси $2a$, параметр $t$ равен 0 или $\pi$. Поэтому радиус кривизны эллипса в этих вершинах $R(0)=R(\pi)=\frac{b^2}{a}$.

В двух других вершинах эллипса, лежащих на оси $2b$, $t=\frac{\pi}{2}$ или $t=\frac{3\pi}{2}$. В этих вершинах радиус кривизны эллипса $R\left(\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{a^2}{b}$.

**413.** Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1) $y=4x-x^2$ в ее вершине;

2) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{2}$.

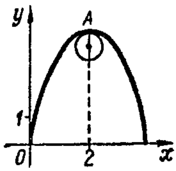
Решение. 1) Данное уравнение определяет параболу, ось которой параллельна оси $Oy$. Найдем ее вершину как точку, где касательная параллельна оси $Ox$, т. е. где $y'=0$:

$$y'=4-2x;\ y'=0 \text{ при } x=2;\ y(2)=4.$$

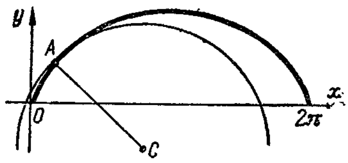
Далее по формулам (2) находим координаты центра кривизны $C$ данной параболы в ее вершине (2; 4)

$$X=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=2;\quad Y=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=\frac{7}{2}$$

и строим параболу и круг кривизны в ее вершине (черт. 82).




Черт. 82




Черт. 83

2) Находим производные $\dot{x}=1-\cos t$, $\ddot{x}=\sin t$, $\dot{y}=\sin t$, $\ddot{y}=\cos t$, их значения при $t=\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

и по формулам (2) координаты центра кривизны

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y}=\frac{\pi}{2}+1;\quad Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x}=-1.$$

Затем строим данную циклоиду, ее точку $A\left(\frac{\pi}{2}-1;\ 1\right)$, где $t=\frac{\pi}{2}$, найденный центр кривизны $C\left(\frac{\pi}{2}+1;\ -1\right)$ и круг кривизны (черт. 83).

**414.** В каких точках параболы $y=\sqrt{2}x^2$ радиус кривизны равен единице?

Решение. Находим производные $y'=2\sqrt{2}x$, $y''=2\sqrt{2}$ и по формуле (1) радиус кривизны параболы в любой ее точке с абсциссой $x$:

$$R(x)=\frac{(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

Полагая $R(x)=1$, получим абсциссы искомых точек

$$2\sqrt{2}=(1+8x^2)^{\frac{3}{2}};\ (2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}=1+8x^2;\ 8x^2=1;\ x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**415.** В какой точке кривая $y=e^x$ имеет наибольшую кривизну?

Решение. Находим производные $y'=y''=e^x$ и кривизну данной кривой в любой точке:

$$K(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}.$$

Далее ищем наибольшее значение функции $K(x)$, которая определена и непрерывна на всей числовой оси:

$$K'(x)=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}};\quad K'(x)=0 \text{ при } 1-2e^{2x}=0,$$

т. е. в единственной точке $x_0=-\frac{\ln 2}{2}$. Определяя знаки $K'(x)$ слева и справа от этой критической точки: $K'(-10)>0$, $K'(0)<0$, устанавливаем, что она является точкой максимума функции $K(x)$. Поскольку $x_0$ есть единственная точка экстремума непрерывной функции $K(x)$ во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, то в этой точке она достигает и своего наибольшего значения. Следовательно, искомая точка есть $\left(-\frac{\ln 2}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Ордината этой точки вычислена из данного уравнения кривой по известной ее абсциссе.)

**416.** Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1) $x^2=2(1-y)$; 2) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Решение. 1) Из данного уравнения параболы находим производные: $y'=-x$, $y''=-1$ и по формулам (2) находим координаты любой точки на ее эволюте:

$$\begin{aligned} X&=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=x-\frac{1+x^2}{-1}(-x); \\ Y&=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1+x^2}{-1}; \end{aligned}\qquad \left\{\begin{aligned} X&=-x^3, \\ Y&=-\frac{3}{2}x^2. \end{aligned}\right.$$

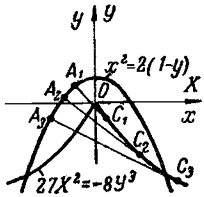
Это параметрические уравнения эволюты. Исключая из них параметр $x$, получим $27X^2=-8Y^3$ — уравнение полукубической параболы. Данная парабола и найденная ее эволюта изображены на черт. 84.

2) Из уравнений эллипса найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и по формулам (2) получим,

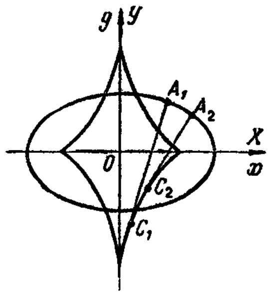
после упрощений, параметрические уравнения эволюты эллипса

$$X=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad Y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad \text{где } c^2=a^2-b^2.$$

Эллипс и его эволюта построены на черт. 85.




Черт. 84




Черт. 85

Найти радиус кривизны кривой:

**417.** $xy=4$ в точке (2; 2) и в точке, где $x=8$.

**418.** $y=e^{-x^2}$ в точке пересечения с осью $Oy$.

**419.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ в точке, где $t=\pi$.

**420.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в любой ее точке.

Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

**421.** $3y=x^3$ в точке, где $x=-1$.

**422.** $y^3=x^2$ в точке, где $y=1$.

**423.** $y=\ln x$ в точке пересечения с осью $Ox$.

**424.** $y=e^x$ в точке пересечения с осью $Oy$.

Найти точки кривых с наименьшим радиусом кривизны:

**425.** $y=\ln x$. **426.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

**427.** $y^2-2x=0$. **428.** $x^2-y^2=a^2$.

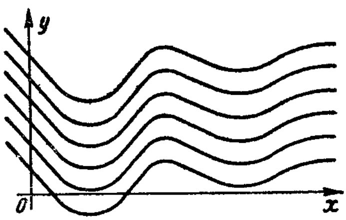
**429.** $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

*ГЛАВА IV*

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования

*Отыскание функции* $F(x)$ *по известному ее дифференциалу* $dF(x)=f(x)\,dx$ [*или по известной ее производной* $F'(x)=f(x)$], т. е. действие обратное дифференцированию, *называется интегрированием*, а искомая функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией от функции $f(x)$.




Черт. 86

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым: если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, т. е. если $F'(x)=f(x)$, то и $F(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная, есть также первообразная от $f(x)$, ибо $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

*Общее выражение* $F(x)+C$ *совокупности всех первообразных от функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом от этой функции* и обозначается знаком $\int$:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \quad \text{если} \quad d[F(x)+C]=f(x)\,dx.$$

Геометрически, в системе координат $xOy$, графики всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ представляют семейство кривых, зависящее от одного параметра $C$, которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси $Oy$ (черт. 86).

Свойства неопределенного интеграла.

I. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)$ или $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx.$

II. $\int F'(x)\,dx=F(x)+C$ или $\int dF(x)=F(x)+C.$

III. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$, т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

IV. $\int [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx-\int f_3(x)\,dx,$

т. е. *интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.*

Основные формулы интегрирования:

1. $\int u^a\,du=\frac{u^{a+1}}{a+1}+C,\ a\neq-1.$
2. $\int u^{-1}\,du=\int\frac{du}{u}=\int\frac{u'}{u}\,dx=$ $=\ln|u|+C.$
3. $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C;\ \int e^u\,du=$ $=e^u+C.$
4. $\int \sin u\,du=-\cos u+C.$
5. $\int \cos u\,du=\sin u+C.$
6. $\int \sec^2 u\,du=\operatorname{tg} u+C.$
7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du=-\operatorname{ctg} u+C.$
8. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$
9. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$
10. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$
11. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a}}=$ $=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|+C.$

В этих формулах $a$ — постоянная, $u$ — независимая переменная или любая (дифференцируемая) функция от независимой переменной. Например:

Интеграл $I_1=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ представляет формулу 1 при $u=x,\ a=\frac{1}{2}$. Согласно этой формуле $I_1=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$

Интеграл $I_2=\int 3^x\,dx$ представляет формулу 3 при $u=x$, $a=3$. Согласно этой формуле $I_2=\frac{3^x}{\ln 3}+C.$

Интеграл $I_3=\int\frac{dt}{t^2+3}$ представляет формулу 8 при $u=t$, $a=\sqrt{3}$. По этой формуле $I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C.$

Интеграл $I_4=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-5}}$ представляет формулу 11 при $u=\varphi$, $a=-5$. По этой формуле $I_4=\ln|\varphi+\sqrt{\varphi^2-5}|+C$.

Интеграл $I_5=\int\frac{2x}{x^2+7}dx=\int\frac{(x^2+7)'}{x^2+7}dx=\int\frac{d\,(x^2+7)}{x^2+7}$ представляет формулу 2 при $u=x^2+7$, так как $(x^2+7)'=2x$. По этой формуле $I_5=\ln(x^2+7)+C$. Здесь опущен знак абсолютной величины, ибо всегда $x^2+7>0$.

Вообще, *в формулах* 2, 9, 11 *следует писать знак абсолютной величины только в тех случаях, когда логарифмируемое выражение может иметь отрицательные значения.*

Интеграл $I_6=\int 5\sin 5t\,dt=\int\sin 5t\,d(5t)$ представляет формулу 4 при $u=5t$. Поэтому $I_6=-\cos 5t+C$.

Интеграл $I_7=\int e^{\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=\int e^{\sin\varphi}d\sin\varphi$, так как $\cos\varphi\,d\varphi=$ $=d\sin\varphi$. По формуле 3 при $u=\sin\varphi$ получим: $I_7=e^{\sin\varphi}+C$.

Интеграл $I_8=\int\frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1}=\int\frac{de^x}{(e^x)^2-1}$, так как $e^x\,dx=de^x$. По формуле 9 при $u=e^x$, $a=1$, получим $I_8=\frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C$.

*Справедливость формул интегрирования, а также и каждый результат интегрирования можно проверить путем дифференцирования, ибо, как было упомянуто, интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.*

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул интегрирования, задача интегрирования сводится к простому применению этой формулы.

Во всех других случаях задача интегрирования состоит в том, чтобы путем подходящих преобразований привести данный интеграл к одной или нескольким формулам интегрирования (если это возможно).

**430.** Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

1) $\int\frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$; 3) $\int 3^t\,5^t\,dt$; 4) $\int\sqrt{y+1}\,dy$; 5) $\int\frac{dx}{2x^2-6}$.

Решение: 1) $\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=C-\frac{1}{2x^2}$, по формуле 1, при $u=x$, $a=-3$.

*Проверка.* Находим дифференциал полученной функции и убеждаемся, что он равен подынтегральному выражению:

$$d\left(C-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{1}{2}(x^{-2})'\,dx=x^{-3}\,dx=\frac{dx}{x^3}.$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$, по формуле 10, при $u=x$, $a=\sqrt{2}$.

*Проверка.* $d\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C\right)=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'dx=$

$$=\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$$

3) $\int 3^t 5^t\,dt=\int 15^t\,dt=\frac{15^t}{\ln 15}+C$, по формуле 3, при $u=t$, $a=15$.

*Проверка.* $d\left(\frac{15^t}{\ln 15}+C\right)=\frac{1}{\ln 15}\cdot 15^t\ln 15\,dt=15^t\,dt.$

4) $\int\sqrt{y+1}\,dy=\int(y+1)^{\frac{1}{2}}d(y+1)=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+C=$ $=\frac{2}{3}\sqrt{(y+1)^3}+C$, по формуле 1, при $u=y+1$, $a=\frac{1}{2}$, так как $d(y+1)=dy$.

*Проверка.* $d\left[\frac{2}{3}\sqrt{(y+1)^3}+C\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}dy=\sqrt{y+1}\,dy.$

5) $\int\frac{dx}{2x^2-6}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$ согласно свойству III и по формуле 9, при $u=x$, $a=\sqrt{3}$.

*Проверка.* $d\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\ln|x-\sqrt{3}|-$ $-\ln|x+\sqrt{3}|)'dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dx=\frac{dx}{2(x^2-3)}.$

Здесь для нахождения производных $(\ln|x-\sqrt{3}|)'$ и $(\ln|x+$ $+\sqrt{3}|)'$ применена формула $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$.

**431.** Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$; 2) $\int\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}$; 3) $\int\cos 3\varphi\,d\varphi$;

4) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$; 5) $\int\sin(ax+b)\,dx$; 6) $\int\frac{1}{5x+4}dx$.

Решение. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=$ $=\frac{3}{2\sqrt[3]{5}}\sqrt[3]{x^2}+C$, согласно свойству III и по формуле 1, при $u=x$, $a=-\frac{1}{3}$.

2) $\int\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{\sqrt{3-(2t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$, согласно свойству III и по формуле 10, при $u=2t$, $a=\sqrt{3}$.

3) Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла (согласно свойству III), затем под знак дифференциала:

$$\int \cos 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\int \cos 3\varphi\, d\,(3\varphi) = \frac{1}{3}\sin 3\varphi + C,$$

по формуле 5, при $u = 3\varphi$.

4) Умножим и разделим интеграл на —2 и внесем делитель —2 под знаки интеграла и дифференциала:

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2\int e^{-\frac{x}{2}}\, d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}} + C,$$

по формуле 3, при $u = -\frac{x}{2}$.

5) Умножая и деля на $a$ и замечая, что $a dx = d(ax+b)$, получим

$$\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\, d(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C,$$

по формуле 4, при $u = ax+b$.

6) Умножая и деля на 5, получим:

$$\int \frac{1}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C,$$

по формуле 2, при $u = 5x+4$; $u' = 5$.

Этот интеграл можно найти иначе:

$$\int \frac{1}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+\frac{4}{5}}\, dx = \frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{4}{5}\right| + C,$$

по формуле 2, при $u = x + \frac{4}{5}$, $u' = 1$.

Полученные результаты оба правильные, в чем можно убедиться путем их дифференцирования.

**432.** Найти интегралы

1) $\int (3-2x)^7 dx$; 2) $\int \sec^2(m-nx)\, dx$; 3) $\int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi$.

Решение. 1) Умножаем и делим на —2, вносим множитель —2 под знак интеграла, согласно свойству III, и заменяя $-2dx$ через $d(3-2x)$, что одно и то же, получим:

$$\int (3-2x)^7 dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7(-2dx) = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7 d(3-2x) = $$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8} + C,$$

по формуле 1, при $u = 3-2x$, $a = 7$.

2) Умножая и деля на $-n$ и используя равенство $-ndx = d(m-nx)$, найдем:

$$\int \sec^2(m-nx)\, dx = -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\cdot(-n\, dx) =$$
$$= -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\, d(m-nx) = -\frac{1}{n}\operatorname{tg}(m-nx) + C,$$

по формуле 6, при $u = m-nx$.

3) Заменяя $\operatorname{tg}\varphi$ через $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, получим:

$$\int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} =$$
$$= -\ln|\cos\varphi| + C,$$

по формуле 2, при $u = \cos\varphi$ ($u' = -\sin\varphi$, $du = -\sin\varphi\, d\varphi$).

Полезно запомнить словесное выражение формулы 2: интеграл от дроби, числитель которой является дифференциалом знаменателя, равен логарифму абсолютной величины знаменателя.

Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

(Для сокращения записей в ответах к задачам этой главы произвольная постоянная $C$ опущена.)

**433.** $\int x^4\, dx$. **434.** $\int \sqrt[5]{t^2}\, dt$.

**435.** $\int \frac{dy}{3y^2}$. **436.** $\int \frac{dx}{x+3}$.

**437.** $\int (\alpha-5)^8\, d\alpha$. **438.** $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

**439.** $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+7}}$. **440.** $\int \frac{dz}{2z^2-4}$.

**441.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **442.** $\int \sin\frac{x}{3} dx$.

**443.** $\int \operatorname{cosec}^2 2\varphi\, d\varphi$. **444.** $\int e^{4x}\, dx$.

**445.** $\int \frac{3dt}{5^{2t}}$. **446.** $\int \frac{dx}{2x+5}$.

**447.** $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$. **448.** $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

## § 2. Интегрирование посредством разложения подынтегральной функции на слагаемые

Если подынтегральная функция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то, согласно свойству IV, можно интегрировать каждое слагаемое отдельно.

Пользуясь этим, можно многие интегралы привести к сумме более простых интегралов.

**449.** Найти интегралы:

1) $\int (3x^2-2x+5)\, dx$; 2) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3} dx$; 3) $\int (1+e^x)^2\, dx$;

4) $\int \frac{2x+3}{x^2-5} dx$; 5) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$; 6) $\int \operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi$.

Решение. 1) Интегрируя каждое слагаемое отдельно, получим:

$$\int (3x^2-2x+5)\,dx=\int 3x^2\,dx-\int 2x\,dx+\int 5dx=3\int x^2\,dx-$$
$$-2\int x\,dx+5\int dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5x+C=x^3-x^2+5x+C,$$

по формуле 1.

2) Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int\frac{2x^2+x-1}{x^3}\,dx=2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}\,dx-\int x^{-3}\,dx=2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C,$$

по формулам 2, 1.

3) Возводим в квадрат и, интегрируя каждое слагаемое, получим

$$\int (1+e^x)^2\,dx=\int (1+2e^x+e^{2x})\,dx=$$
$$=\int dx+2\int e^x\,dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x)=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

4) Разложим подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, затем интегрируем по формулам 2 и 9:

$$\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx=\int\frac{2x\,dx}{x^2-5}+3\int\frac{dx}{x^2-5}=\ln|x^2-5|+\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$$

5) Деля числитель на знаменатель, исключим из неправильной подынтегральной дроби целую часть*, затем интегрируем:

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

6) Пользуясь тригонометрической формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$, имеем:

$$\int \operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi=\int(\sec^2\varphi-1)d\varphi=\int\sec^2\varphi\,d\varphi-\int d\varphi=\operatorname{tg}\varphi-\varphi+C.$$

Найти интегралы:

**450.** $\int (2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x}+5)\,dx.$

**451.** $\int (\sin\varphi-\cos\varphi)^2\,d\varphi.$

**452.** $\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx$**.

**453.** $\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

**454.** $\int\frac{x^3}{x^2+6}dx$**.

**455.** $\int (\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,dx.$

**456.** $\int (e^x-e^{-x})^3\,dx.$

**457.** $\int\frac{x^2-2}{x+2}dx$*.

* Алгебраическая рациональная дробь называется неправильной, если степень многочлена-числителя выше или равна степени многочлена-знаменателя.

** Здесь, как в решении 449(5), из подынтегральной неправильной дроби нужно исключить целую часть.

## § 3. Интегрирование посредством замены переменной

Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной интегрирования, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)\,dx$ можно заменить переменную $x$ новой переменной $t$, связанной с $x$ подходящей формулой $x=\varphi(t)$. Определив из этой формулы $dx=\varphi'(t)\,dt$ и подставляя, получим

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,dt.$$

Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования $t$ будет найден, то преобразовав результат к переменной $x$, пользуясь исходной формулой $x=\varphi(t)$, получим искомое выражение заданного интеграла.

Например, чтобы найти интеграл $J=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, положим $x=t^2$. Тогда $dx=2t\,dt$ и

$$J=\int\frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int dt-$$
$$-2\int\frac{dt}{t+1}=2t-2\ln(t+1)+C=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

Или иначе: пусть $t=1+\sqrt{x}$. Отсюда $x=(t-1)^2$, $dx=2(t-1)\,dt$ и
$$J=\int\frac{2(t-1)\,dt}{t}=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=2t-2\ln t+C=$$
$$=2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

Полученные результаты отличаются постоянным слагаемым 2; оба они правильные, в чем можно убедиться путем их дифференцирования.

Как показано в этом примере, при замене переменной можно брать как формулу $x=\varphi(t)$, выражающую $x$ через $t$, так и формулу $t=\psi(x)$, выражающую $t$ через $x$.

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются ниже.

458. Найти интегралы:

1) $\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}$; 2) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; 3) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$;

4) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; 5) $\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}$; 6) $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

Решение. 1) Полагаем $x^2=t$; дифференцируем $2x\,dx=dt$, подставляем в подынтегральное выражение, находим полученный новый интеграл и возвращаемся к заданной переменной $x$:

$$\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Положим $1+2\cos x=t$. Тогда $-2\sin x\,dx=dt$ и

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=$$
$$=C-\sqrt{t}=C-\sqrt{1+2\cos x}.$$

3) Беря подстановку $x^2+a=z$, имеем $2x\,dx=dz$ и

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{3}}dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}+C=$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2}+C.$$

4) Подстановка $1+\ln x=v$ дает $\frac{dx}{x}=dv$ и

$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int\sqrt{v}\,dv=\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$$

5) Берем подстановку $e^y+1=t^2$, дифференцируем $e^y dy=2t\,dt$, определяем $dy=\frac{2t\,dt}{e^y}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$, подставляем в подынтегральное выражение, интегрируем и возвращаемся к переменной $y$:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}=\int\frac{2t\,dt}{t(t^2-1)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C=$$
$$=\ln\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}+C.$$

6) Полагая $t=\sin\varphi$, получим $dt=\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}=\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi+C=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+C=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C.$$

Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

**459.** $\int\frac{x^2dx}{5-x^6}$. Подстановка $t=x^3$.

**460.** $\int\frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. Подстановка $z=3+4e^x$.

**461.** $\int\operatorname{tg}^3\varphi\,d\varphi$. Подстановка $\varphi=\operatorname{arc\,tg}t$.

**462.** $\int x^3\sqrt{a-x^2}\,dx$. Подстановка $\sqrt{a-x^2}=z$.

**463.** $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$. Подстановка $x-2=t$.

**464.** $\int x\sqrt{a-x}\,dx$. Подстановка $a-x=t^2$.

**465*.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Подстановка $x=\frac{1}{t}$.

**466*.** $\int \frac{dx}{\sin 2x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x=z$.

Найти интегралы:

**467.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

**468.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

**469.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}$.

**470.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

**471.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$.

**472.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$.

**473*.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

**474*.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

## § 4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv)=u\,dv+v\,du$ интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (*)$$

По этой формуле отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)\,dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представить в виде произведения двух множителей: $u$ и $dv$; за $dv$ всегда выбирается такое выражение, содержащее $dx$, из которого посредством интегрирования можно найти $v$; за $u$ в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} 3x$, $\ln x$, $x^3$).

**475.** Найти интегралы:

1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; 3) $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

4) $\int \arcsin x\,dx$; 5) $\int x^2e^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. 1) Положив $u=x$, $dv=\cos x\,dx$, найдем: $du=dx$, $v=\int \cos x\,dx=\sin x$. Подставляя в формулу $(*)$, получим

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

2) Пусть $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^3}$, тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int\frac{dx}{x^3}=$ $=\int x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2x^2}$. Подставляя в формулу (*), найдем

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C=C-\frac{1+2\ln x}{4x^2}.$$

3) Пусть $u=\operatorname{arctg}x$, $dv=x\,dx$, тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=\int x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}$. По формуле (*), получим

$$I=\int x\operatorname{arc\,tg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx. \tag{1}$$

Последний интеграл находим отдельно:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arc\,tg}x.$$

Подставляя этот результат в равенство (1), имеем

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C=C-\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

4) Полагая $u=\arcsin x$, $dv=dx$, найдем: $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\int dx=x$. По формуле (*) получим

$$J=\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

Последний интеграл найдем, преобразуя его к формуле 1:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя в равенство (2), имеем

$$J=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

5) Положим $u=x^2$, $dv=e^{3x}\,dx$, тогда $du=2x\,dx$, $v=\int e^{3x}dx=$ $=\frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле (*) найдем

$$I=\int x^2e^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx. \tag{3}$$

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{3x}\,dx$, тогда $du=dx$, $v=\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле (*) получим

$$\int xe^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}.$$

Подставляя в (3), имеем

$$I=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right)+C=\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C.$$

Здесь понадобилось применить формулу (*) дважды. Очевидно, если бы под интегралом вместо $x^2$ было $x^3$, то пришлось бы эту формулу применить три раза. Вообще, для нахождения интеграла $\int x^n e^x\,dx$, а также и интегралов $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$ ($n$—целое положительное число) требуется применить интегрирование по частям $n$ раз.

6) Пусть $u=e^{-x}$, $dv=\cos\frac{x}{2}\,dx$, тогда $du=-e^{-x}\,dx$, $v=\int\cos\frac{x}{2}dx=2\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}$. По формуле (*) имеем

$$I=\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx. \qquad (4)$$

К полученному интегралу $I_1$ снова применяем интегрирование по частям. Полагая $u=e^{-x}$, $dv=\sin\frac{x}{2}dx$, получим $du=-e^{-x}\,dx$, $v=\int\sin\frac{x}{2}dx=2\int\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2\cos\frac{x}{2}$,

$$I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=$$
$$=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I.$$

Подставляя этот результат в (4), получим уравнение с неизвестным интегралом $I$:

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I\right),$$

из которого находим

$$5I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2},\qquad I=\frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Если при отыскании $I_1$ выбрать $u$ и $dv$ иначе: $u=\sin\frac{x}{2}$, $dv=e^{-x}dx$, то получим $du=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $v=-e^{-x}$,

$$I_1=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I.$$

Подставляя $I_1$ в равенство (4), получим бесполезное тождество

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I\right);\quad 0=0.$$

Это решение показывает, что повторное интегрирование по частям может привести к исходному интегралу $I$. В таком случае получается или уравнение, из которого легко найти $I$, или, при неудачном выборе $u$ и $dv$ в повторном интегрировании, бесполезное тождество.

Найти интегралы:

**476.** $\int x \sin x\, dx$.

**477.** $\int x^2 \ln x\, dx$.

**478.** $\int \ln(x^n)\, dx$.

**479.** $\int (x^2+1) e^{-2x}\, dx$.

**480.** $\int x \sec^2 x\, dx$.

**481.** $\int x \ln(x-1)\, dx$.

**482.** $\int \operatorname{arcctg} t\, dt$.

**483.** $\int \ln(1+x^2)\, dx$.

**484.** $\int e^{ax} \sin bx\, dx$.

**485*.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$.

**486*.** $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}$.

**487*.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx$.

## § 5. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx; \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx; \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$$

Для отыскания указанных интегралов от функций, содержащих квадратный трехчлен, для преобразования их к формулам интегрирования следует вначале выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего он преобразуется в квадратный двучлен $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$.

В дальнейшем интегралы указанных видов можно свести к формулам интегрирования посредством преобразований, применяемых в решении следующих задач.

**488.** Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 2) $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\, dx$;

3) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}\, dx$; 4) $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}\, dx$.

Решение. 1) Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, записав $d(x+2)$ вместо $dx$ и интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C,$$

по формуле 8, при $u=x+2$, $a=2$.

2) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат

$$2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right] = $$
$$= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

и заменим переменную $x$, полагая $x-\frac{3}{4}=t$. Тогда получим: $dx=dt$,

$$I=\int\frac{(7-8x)\,dx}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}\,dt.$$

Далее разложим полученный интеграл на два слагаемых интеграла, соответственно двум слагаемым в числителе, и находим их по формулам:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}-2\int\frac{2t\,dt}{t^2-\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|-2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right|+C.^*$$

Возвращаясь к переменной $x$, окончательно получим

$$I=\ln\left|\frac{x-1}{x-0{,}5}\right|-2\ln|x^2-1{,}5x+0{,}5|+C.$$

3) Выделяем полный квадрат $x^2+6x+9=(x+3)^2$, вводим новую переменную $t=x+3$; тогда получим $dx=dt$ и

$$\int\frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+9}=\int\frac{3t-11}{t^2}\,dt=\int\left(\frac{3}{t}+\frac{11}{t^2}\right)dt=3\int\frac{dt}{t}-11\int t^{-2}\,dt=$$

$$=3\ln|t|+11t^{-1}+C=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C.$$

4) Вначале выделяем из подынтегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}=-2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2},$$

затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$J=\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}\,dx=-2\int x\,dx+\int dx+\int\frac{(x-1)\,dx}{2x-3x^2}=$$

$$=-x^2+x+J_1.$$

Интеграл $J_1$ преобразуем к формулам 2 и 9:

$$J_1=-\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2-\frac{2}{3}x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right|.$$

---

* Первый интеграл по формуле 9 при $u=t$, $a=\frac{1}{4}$, второй интеграл по формуле 2 при $u=t^2-\frac{1}{16}$.

Окончательно получим

$$J=C-x^2+x+\frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|-\frac{1}{2}\ln|x|.$$

**489.** Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; 2) $\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

Решение. 1) Выделив из трехчлена полный квадрат $x^2-4x-3=(x-2)^2-7$, записав $d(x-2)$ вместо $dx$ и интегрируя, найдем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C$$

(по формуле 11, при $u=x-2$, $a=-7$).

2) Выделяем из квадратного трехчлена полный квадрат $9+6x-3x^2=-3(x^2-2x-3)=-3[(x-1)^2-4]=3[4-(x-1)^2]$ и вводим новую временную $z=x-1$. Тогда получим: $dx=dz$,

$$I=\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}}\,dz.$$

Разложив полученный интеграл на два интеграла,

$$I=\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\sqrt{3}\,I_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\,I_2,$$

находим каждый из них отдельно.

Первый интеграл преобразуем к формуле 1, умножая и деля его на $-2$ и заменяя $-2z\,dz$ через $d(4-z^2)$:

$$I_1=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}}=-\frac{1}{2}\int(4-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-2z\,dz)=$$
$$=-\frac{1}{2}\int(4-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(4-z^2)=-(4-z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Второй интеграл находим по формуле 10, при $u=z$, $a=2$:

$$I_2=\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\arcsin\frac{z}{2}.$$

Подставляя найденные интегралы $I_1$ и $I_2$ и возвращаясь к переменной $x$, получим

$$I=C-\sqrt{3(4-z^2)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{z}{2}=C-\sqrt{9+6x-3x^2}-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}.$$

**490.** Посредством формулы интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ (§ 4) найти интегралы:

A) $\int\sqrt{t^2+b}\,dt$ и Б) $\sqrt{a^2-t^2}\,dt$.

Затем, пользуясь полученными результатами как формулами, найти интегралы:

1) $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$; 3) $\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx$.

Решение. А) Полагая в формуле интегрирования по частям $u=\sqrt{t^2+b}$, $dv=dt$, получим $du=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}$, $v=t$ и

$$I=\int \sqrt{t^2+b}\,dt=t\sqrt{t^2+b}-\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+b}}\,dt.$$

Прибавив и вычтя постоянную $b$ в числителе подынтегральной функции последнего интеграла, разложим его на два интеграла:

$$I=t\sqrt{t^2+b}-I+b\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}.$$

Далее, перенося искомый интеграл $I$ из правой части равенства в левую и заменяя интеграл, оставшийся в правой части равенства, по формуле 11, получим

$$2I=t\sqrt{t^2+b}+b\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}},$$

$$I=\int \sqrt{t^2+b}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right|+C. \qquad (А)$$

Б) Пусть $u=\sqrt{a^2-t^2}$, $dv=dt$, тогда $du=\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt$, $v=t$ и по формуле интегрирования по частям

$$J=\int \sqrt{a^2-t^2}\,dt=t\sqrt{a^2-t^2}-\int \frac{-t^2}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt.$$

Последний интеграл разложим на два интеграла, прибавляя и вычитая постоянную $a^2$ в числителе его подынтегральной функции:

$$J=t\sqrt{a^2-t^2}-J+a^2\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

откуда получим

$$2J=t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

$$J=\int \sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C. \qquad (Б)$$

1) Пользуясь равенством (А) как формулой, при $t=x$, $b=-3$, получим

$$\int \sqrt{x^2-3}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.$$

2) Выделяем полный квадрат в подкоренном выражении $x^2+2x+6=(x+1)^2+5$, затем применяем формулу (А), полагая

в ней $t=x+1$, $b=5$:

$$\int\sqrt{x^2+2x+6}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+5}\,d(x+1)=$$
$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right]+C.$$

3) Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении $3+4x-x^2=-(x^2-4x-3)=-[(x-2)^2-7]=7-(x-2)^2$ и применяя формулу (Б), при $t=x-2$, $a^2=7$, получим

$$\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{7-(x-2)^2}\,d(x-2)=$$
$$=\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$$

Найти интегралы:

**491.** $\int\frac{dx}{x^2-x-6}$.

**492.** $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$.

**493.** $\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}$.

**494.** $\int\frac{(4x-3)\,dx}{x^2+3x+4}$.

**495.** $\int\frac{(3x+4)\,dx}{x^2+5x}$.

**496.** $\int\frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}\,dx$.

**497.** $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}\,dx$.

**498.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

**499.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

**500.** $\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

**501.** $\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+6x}}$.

**502*.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

**503.** $\int\sqrt{x^2+4x}\,dx$.

**504.** $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

## § 6. Интегрирование тригонометрических функций

Часто встречающиеся интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

$$\text{I.}\ \int\sin^n x\,dx,\quad \int\cos^n x\,dx,\qquad \text{II.}\ \int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$
$$\text{III.}\ \int\operatorname{tg}^n x\,dx,\qquad \int\operatorname{ctg}^n x\,dx,$$

где $m$ и $n$ — целые положительные числа.

$$\text{IV.}\ \int\sin ax\cos bx\,dx,\qquad \int\sin ax\sin bx\,dx,\qquad \int\cos ax\cos bx\,dx$$

можно свести к формулам интегрирования, а следовательно, и найти, руководствуясь следующими правилами:

1. Интегралы от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени (вдвое) по формулам:

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}(1-\cos 2u);\quad \cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u);\quad \sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u.$$

2. Интегралы от нечетной степени синуса или косинуса можно найти путем отделения от нее одного множителя и замены кофункции новой переменной.

3. Интегралы вида II можно найти по правилу 1, если $m$ и $n$ оба четные, или по правилу 2, если $m$ или $n$ (или и $m$ и $n$) нечетно.

4. Интегралы вида III можно найти путем замены $\operatorname{tg} x$, или соответственно, $\operatorname{ctg} x$ новой переменной.

5. Интегралы вида IV можно найти путем разложения на слагаемые по формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

**505.** Найти интегралы:

1) $\int \sin^2 3x\,dx$; 2) $\int \cos^4 x\,dx$; 3) $\int \sin^5 x\,dx$;

4) $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$; 5) $\int \sin^6 kx \cos^3 kx\,dx$; 6) $\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx$.

Решение. 1) Согласно правилу 1 имеем

$$\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x) =$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

2) Применяя правило 1, получим

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\int dx + \int \cos 2x\,d(2x) + \int \cos^2 2x\,dx\right].$$

Первые два интеграла представляют формулы, последний интеграл находим отдельно, по правилу 1:

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,d(4x) =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3) По правилу 2 отделяем от нечетной степени один множитель $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$ и заменяем кофункцию новой переменной, т. е. полагаем $\cos x = z$. Тогда получим $-\sin x\,dx = dz$.

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-z^2)^2(-dz) =$$
$$= -\int (1-2z^2+z^4)\,dz = -z + \frac{2z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C =$$
$$= C - \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x.$$

4) Применяя правило 3 (1), получим

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x(\sin x \cos x)^2\,dx =$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4}\,dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx - \int \sin^2 2x \cos 2x\,dx\right).$$

Первый интеграл находим по правилу 1:

$$\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,d(4x) =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Второй интеграл находим по правилу 3 (2), полагая $\sin 2x = z$. Тогда $2\cos 2x\,dx = dz$,

$$\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int z^2\,dz = \frac{z^3}{6} = \frac{1}{6}\sin^3 2x.$$

Подставляя эти результаты, имеем

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

5) Согласно правилу 3(2) отделяем от нечетной степени один множитель $\cos^3 kx = \cos^2 kx \cos kx$ и заменяем кофункцию новой переменной, т. е. полагаем $\sin kx = z$. Тогда имеем $k \cos kx\,dx = dz$,

$$\int \sin^6 kx \cos^3 kx\,dx = \int \sin^6 kx(1-\sin^2 kx)\cos kx\,dx =$$
$$= \frac{1}{k}\int z^6(1-z^2)\,dz = \frac{1}{k}\left(\int z^6\,dz - \int z^8\,dz\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{7k}\sin^7 kx - \frac{1}{9k}\sin^9 kx + C.$$

6) Применяем правило 3(2): отделяем от одной из нечетных степеней (низшей) один множитель $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x$ и заменяем $\cos x$ через $z$; тогда найдем: $-\sin x\,dx = dz$ и

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^5 x \sin x\,dx = -\int (1-z^2)z^5\,dz =$$
$$= -\int z^5\,dz + \int z^7\,dz = \frac{1}{8}z^8 - \frac{1}{6}z^6 + C = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

**506.** Найти интегралы: 1) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$; 2) $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$.

Решение: 1) Применяя правило 4, полагаем $\operatorname{tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$,

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \frac{z^4}{z^2+1}\,dz = \int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = \int z^2\,dz - \int dz + \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2) Применяем правило 5; разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, пользуясь тригонометрической формулой, затем интегрируем:

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin 8x + \sin(-2x)]\,dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x\,d(8x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Найти интегралы:

**507.** $\int \cos^2 5x\,dx$. **508.** $\int \cos^5 x\,dx$.

**509.** $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$. **510.** $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

**511.** $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$. **512.** $\int \sin^4 x\,dx$.

**513.** $\int \operatorname{ctg}^4 y\,dy$. **514.** $\int \cos \frac{4}{3}x \cos 3x\,dx$.

**515.** $\int \sin 5x \sin 6x\,dx$. **516.** $\int \sin at \cos bt\,dt$.

**517*.** $\int \sin 3x \sin 4x \sin 5x\,dx$. **518*.** $\int (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^3\,dz$.

## § 7. Интегрирование рациональных функций

*Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.*

Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\,dx = \frac{a_0}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{a_1}{n}\,x^n + \ldots + a_n x + C.$$

Интеграл от дробной рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, можно найти (выразить через элементарные функции) путем разложения на слагаемые, которые всегда преобразуются к формулам интегрирования.

Неправильную рациональную дробь, у которой степень числителя выше или равна степени знаменателя, можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Правильную рациональную дробь можно разложить на элементарные, всегда интегрируемые слагаемые дроби следующих двух видов:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $m$ и $n$ — целые положительные числа.

Для разложения правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$ на элементарные слагаемые дроби нужно:

а) Разложить знаменатель $Q(x)$ на простейшие действительные множители.

В общем случае, согласно основной теореме алгебры, это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q(x)=a_0(x-a)^m \dots (x-b)^k \cdot (x^2+px+q)^n \dots (x^2+cx+d)^r.$$

б) Написать схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые дроби в следующем виде:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\dots$$
$$\dots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}+\dots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\dots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},$$

где $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ — некоторые постоянные. В эту схему для каждого множителя в разложении знаменателя $Q(x)$ вписывается столько элементарных слагаемых дробей, какова его кратность ($m$, $k$, $n$, $r$, ...).

Знаменателями элементарных дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении $Q(x)$, начиная с первой степени и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении $Q(x)$.

Числителями элементарных дробей служат либо постоянные $A_1, A_2, \dots$ либо линейные функции $M_1x+N_1, \dots$ смотря по тому, является ли знаменатель дроби некоторой степенью линейной или квадратной функции.

в) Освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на $Q(x)$.

г) Составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях полученного тождества. (Число этих уравнений должно быть равно числу неизвестных $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1 \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$).

д) Решить систему и подставить найденные значения $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots$ в схему разложения.

После разложения на элементарные слагаемые дроби интегрирование всякой правильной рациональной дроби сводится к нахождению интегралов вида

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-a)^m} \quad \text{и} \quad I_2=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

Интеграл $I_1$ при $m\neq 1$ представляет формулу 1:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int(x-a)^{-m}\,d(x-a)=\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C,$$

а при $m=1$ представляет формулу 2:

$$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C.$$

Интеграл $I_2$ при $n=1$ можно найти по правилу, указанному в § 5, а при $n=2, 3, 4, \ldots$ путем преобразований, показанных в решении следующей задачи.

**519.** Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{(x^3-3)\,dx}{x^4+10x^2+25}$.

Решение. 1) Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби. Согласно указанному правилу:

а) разложим знаменатель на простейшие действительные множители: $x^3+4x^2+4x=x(x^2+4x+4)=x(x+2)^2$;

б) напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2};$$

в) освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x+2)^2$:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx=$$
$$=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A;$$

г) составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях полученного тождества

$$A+B=3,\quad 4A+2B+C=0,\quad 4A=8;$$

д) решим эту систему: $A=2$, $B=1$, $C=-10$ и подставим найденные значения постоянных $A$, $B$, $C$ в схему разложения

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем

$$\int\frac{(3x^2+8)\,dx}{x^3+4x^2+4x}=\int\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right]dx=$$
$$=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int(x+2)^{-2}\,d(x+2)=$$
$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C.$$

2) Выделим из подынтегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)$;

б) $\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$;

в) $1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2=$
$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+3Ax+3B$;

г) $A+C=0;\quad B+D=0;\quad 3A=0;\quad 3B=1$;

д) $A=0;\quad B=\frac{1}{3};\quad C=0;\quad D=-\frac{1}{3}$;

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Подставляя под интеграл и интегрируя, получим

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx=$$
$$=\int\left[2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right]dx=2\int x\,dx+\frac{1}{3}\int x^{-2}\,dx-$$
$$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

3) Разложим подынтегральную правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$;

б) $\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$;

в) $x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+$
$+(Cx+D)(x^2+x)=(A+B+C)x^3+(C+D-B)x^2+(B+D)x+A$;

г) $A+B+C=1;\quad C+D-B=4;\quad B+D=-2;\quad A=1$;

д) $A=1;\quad B=-2;\quad C=2;\quad D=0$;

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}.$$

Подставляя под интеграл и интегрируя, получим

$$I=\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1}=$$
$$=\ln|x|-2\ln|x+1|+2I_1.$$

Последний интеграл $I_1$ находим отдельно, по правилу, указанному в § 5. Выделяем полный квадрат в знаменателе $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ и полагаем $x-\frac{1}{2}=t$. Тогда $dx=dt$,

$$I_1=\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, найдем

$$I=\ln\frac{|x|(x^2-x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

4) Разложим подынтегральную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

б) $\dfrac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+5}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$;

в) $x^3-3=(Ax+B)(x^2+5)+Cx+D=$
$=Ax^3+Bx^2+(5A+C)x+(5B+D)$;

г) $A=1;\quad B=0;\quad 5A+C=0;\quad 5B+D=-3$;

д) $A=1;\quad B=0;\quad C=-5;\quad D=-3$;

$$\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$

Интегрируя, имеем

$$I=\int\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}dx=\int\frac{x\,dx}{x^2+5}-5\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}-3\int\frac{dx}{(x^2+5)^2}.$$

Первый интеграл преобразуем к формуле 2:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+5).$$

Второй интеграл преобразуем к формуле 1:

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+5)^{-2}\,d(x^2+5)=\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2(x^2+5)}.$$

В третьем интеграле заменяем переменную $x=\sqrt{5}\operatorname{tg}z$; тогда $dx=\sqrt{5}\sec^2 z\,dz$,

$$\int\frac{dx}{(x^2+5)^2}=\int\frac{\sqrt{5}\sec^2 z\,dz}{25\sec^4 z}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\int\cos^2 z\,dz=$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\int(1+\cos 2z)\,dz=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)=$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right).$$

Окончательно имеем:

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{25-3x}{10(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Найти интегралы:

**520.** $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

**521.** $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

**522.** $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$.

**523.** $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-3x^2+3x-1}$.

**524.** $\int\frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$.

**525.** $\int\frac{2t^5-2t+1}{1-t^4}\,dt$.

**526.** $\int\frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+4}$.

**527.** $\int\frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1}$.

**528*.** $\int\frac{(x+1)\,dx}{x^4+4x^2+4}$.

**529*.** $\int\frac{1-x^4}{1+x^4}\,dx$.

## § 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные (и трансцендентные) функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Наиболее употребительны следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные функции:

I. Интеграл $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)\,dx$, где $R$ — рациональная функция, $\alpha=\frac{m_1}{n_1}$, $\beta=\frac{m_2}{n_2}$, … — рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции, и, следовательно, выражается в элементарных функциях с помощью подстановки $x=t^k$, где $k$ — общий знаменатель всех дробных показателей у $x$.

Интегралы более общего вида $\int R[x,(ax+b)^\alpha,(ax+b)^\beta,\ldots]\,dx$ или $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta,\ldots\right]dx$ находятся (приводятся к рациональному виду) с помощью аналогичных подстановок: $ax+b=t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$.

II. К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sin t$;

$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\operatorname{tg} t$;

$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sec t$.

III. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях: *

1) когда $p$ — целое число, — разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона,

2) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число, — подстановкой $a+bx^n=z^r$,

3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, — подстановкой $a+bx^n=x^n z^r$,

где $r$ — знаменатель дроби $p$.

IV. Интеграл $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx$, где $P_n(x)$ — многочлен $n$-й степени, $v=ax^2+bx+c$, можно найти по формуле

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx = (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n)\sqrt{v} + B\int \frac{dx}{\sqrt{v}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, B$ — постоянные, определяемые путем дифференцирования этого равенства, умножения его на $\sqrt{v}$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $x$.

Подобным путем можно найти и интеграл

$$\int P_n(x)\sqrt{v}\,dx = \int \frac{vP_n(x)}{\sqrt{v}} dx =$$
$$= (A_1 x^{n+1} + A_2 x^n + \ldots + A_{n+2})\sqrt{v} + B\int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

V. Интеграл $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно найти подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

**530.** Найти интегралы:

1) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$;

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$; 5) $\int \frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}} dx$; 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. 1) Положив $x=t^4$, согласно правилу I, получим $dx=4t^3dt$ и

$$I=\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt =$$
$$=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\left(\int dt + \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$
$$=4t+2\ln(t^2+1)-4\operatorname{arc\,tg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, имеем

$$I=4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{x}+C.$$

* Это доказано П. Л. Чебышевым.

2) Применяя правило I, берем подстановку $\frac{1+x}{x}=t^2$, откуда найдем $x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$,

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\int(t^2-1)^2t\cdot\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}=-2\int t^2\,dt=$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+C=C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

3) Применяя подстановку $x=2\sin t$, получим $dx=2\cos t\,dt$ и

$$\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\int\frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{ctg}^4\,t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{4}\int\mathrm{ctg}^4\,t\,d\,\mathrm{ctg}\,t=-\frac{1}{20}\mathrm{ctg}^5\,t+C=C-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

4) Это интеграл от дифференциального бинома:

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}=\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx,$$

где $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$.

Здесь $\frac{m+1}{n}+p=-2$ — целое число.

Поэтому согласно правилу III полагаем $1+x^3=x^3z^3$. Тогда

$$x^3=\frac{1}{z^3-1};\quad 1+x^3=\frac{z^3}{z^3-1};\quad x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}};$$

$$dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz;$$

$$I=-\int(z^3-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}}z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz=\int\frac{1-z^3}{z^3}dz=$$

$$=\int z^{-3}dz-\int dz=\frac{z^{-2}}{-2}-z+C=C-\frac{1+2z^3}{2z^2}=C-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

5) Согласно правилу IV применяем следующую схему интегрирования:

$$I=\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x}+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Для определения постоянных $A$, $B$, $D$ дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на $\sqrt{x^2-2x}$:

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+(Ax+B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2-x-5=A(x^2-2x)+(Ax+B)(x-1)+D=$$

$$=2Ax^2+(B-3A)x+(D-B).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$2A=2;\quad B-3A=-1;\quad D-B=-5.$$

Решим эту систему: $A=1$, $B=2$, $D=-3$ и подставим значения $A$, $B$, $D$ в схему интегрирования:

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Последний интеграл преобразуем к формуле 11:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-1}\right|.$$

Подставляя в предыдущее равенство, окончательно получим

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.$$

6) Согласно правилу V применяем подстановку $x-1=\frac{1}{t}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}.$$

Здесь учтено, что $\sqrt{t^2}=|t|$, что подынтегральная функция определена в интервале $-1<x<1$, вследствие чего $x-1<0$ и $t<0$ и что поэтому $|t|=-t$.

Далее преобразуем интеграл к формуле 1:

$$I=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=$$

$$=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}}=C-\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Найти интегралы:

**531.** $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

**532.** $\int x\sqrt{3-x}\,dx$.

**533.** $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$.

**534.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

**535.** $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

**536.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

**537*.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

**538*.** $\int\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}\,dx$.

**539*.** $\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^3}}$.

**540.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

**541.** $\int\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

**542*.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

## § 9. Интегрирование некоторых трансцендентных (неалгебраических) функций

К интегралам от рациональных функций сводятся следующие интегралы, где $R$ — рациональная функция:

I. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ — подстановкой $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

При этом $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=\frac{2\,dz}{1+z^2}$.

II. $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ — подстановкой $\operatorname{tg} x=z$.

При этом $x=\operatorname{arctg} z$, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$.

III. $\int R(e^x)\,dx$ — подстановкой $e^x=z$. При этом $x=\ln z$, $dx=\frac{dz}{z}$.

**543.** Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$; 2) $\int\frac{dx}{5+4\cos ax}$;

3) $\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1-\operatorname{ctg}^2 x}$; 4) $\int\frac{e^{3x}\,dx}{e^{2x}+1}$.

Решение. 1) Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ и заменяя $\sin x$, $\cos x$ и $dx$ указанными их выражениями через $z$, вытекающими из этой подстановки, получим

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\int\frac{2\,dz}{z^2+4z-1}=2\int\frac{d(z+2)}{(z+2)^2-5}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

2) Полагая $\operatorname{tg}\frac{ax}{2}=z$, согласно правилу I имеем

$$\cos ax=\frac{1-z^2}{1+z^2},\quad dx=\frac{2dz}{a(1+z^2)},$$

$$\int\frac{dx}{5+4\cos ax}=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2+9}=\frac{2}{3a}\operatorname{arctg}\frac{z}{3}+C=\frac{2}{3a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C.$$

3) Полагая $\operatorname{tg} x=z$, согласно правилу II получим

$$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1-\operatorname{ctg}^2 x}=\int\frac{z^3\,dz}{z^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{d(z^4-1)}{z^4-1}=\frac{1}{4}\ln|z^4-1|+$$

$$+C=\frac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}^4 x-1|+C.$$

4) Применяя подстановку $e^x=z$, получим $dx=\frac{dz}{z}$ и

$$\int\frac{e^{3x}\,dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{z^3\,dz}{(z^2+1)\,z}=\int\frac{z^2\,dz}{z^2+1}=\int\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=\int dz-\int\frac{dz}{z^2+1}=z-\operatorname{arctg} z+C=e^x-\operatorname{arctg} e^x+C.$$

Найти интегралы:

544. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

545. $\int \frac{dx}{\sin kx}$.

546. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

547. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

548. $\int \mathrm{tg}^5 3x\,dx$.

549. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}\,x}$.

550. $\int \frac{e^{2t}-2e^t}{1+e^{2t}}\,dt$.

551. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$.

552*. $\int \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sin 2x}\,dx$.

553*. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{(2+e^x+e^{-x})^2}$.

## § 10. Смешанные задачи на интегрирование

В предыдущих параграфах указывались способы отыскания заданных интегралов. Здесь студент должен самостоятельно избирать тот или другой способ для отыскания каждого из следующих интегралов:

554. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$.

555. $\int x\cos^2 x\,dx$.

556. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

557. $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$.

558. $\int \frac{dz}{9\sin^2 z+\cos^2 z}$.

559. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

560. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

561. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

562. $\int \arccos x\,dx$.

563*. $\int \frac{dr}{\sqrt{r}\sqrt{1+\sqrt{r}}}$.

564. $\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt$.

565. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

566. $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+10x}}\,dx$.

567. $\int (x^2+x+1)e^x\,dx$.

568. $\int (1-\ln x)^2\,dx$.

569. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$.

570. $\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x^4}\,dx$.

571. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(4x+1)^5}}$.

572. $\int \mathrm{arc\,tg}\sqrt{v}\,dv$.

573. $\int \frac{2x-3}{(2x+3)^4}\,dx$.

574. $\int \frac{12x^2+21x+14}{\sqrt{3x^2+3x+4}}\,dx$.

575. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$.

576. $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

577*. $\int \frac{dx}{4+3\,\mathrm{tg}\,x}$.

578. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

579. $\int x\arcsin x\,dx$.

580*. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$.

581*. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$.

*ГЛАВА V*

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его свойства и связь с неопределенным интегралом

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если: 1) разделить этот отрезок произвольным способом на $n$ частичных отрезков длиною $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, $\Delta x_3$, ..., $\Delta x_n$, 2) выбрать в каждом частичном отрезке по одной произвольной точке $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, 3) вычислить значения функции $f(x)$ в выбранных точках и 4) составить сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

По-разному деля отрезок $[a, b]$ на $n$ частичных отрезков и по-разному выбирая в них по одной точке $\xi_i$, можно для всякой заданной функции $f(x)$ и всякого заданного отрезка $[a, b]$ составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом оказывается, что все эти различные интегральные суммы при неограниченном возрастании $n$ и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков, имеют один общий предел. Этот *общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется определенным интегралом от $f(x)$ в пределах от $a$ до $b$* и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Простейшие свойства определенного интеграла:

1. *При перестановке пределов изменяется знак интеграла*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю*: $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

5. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (*)$$

*— определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

**582.** Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx; \quad 2)\ \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx;$$

$$3)\ \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}; \quad 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\,dx.$$

Решение. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (*) и свойства определенного интеграла, получим:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx = 3\int_2^3 x^2\,dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19.$$

$$2)\ \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx = \int_0^4 dx + 4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = x + 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

$$3)\ \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^7 (3t+4)^{-\frac{1}{2}}\,d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^7 =$$

$$= \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}.$$

4) Здесь для нахождения неопределенного интеграла применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Полагая $u=x+3$, $dv=\sin ax\,dx$, получим $du=dx$,

$$v=\int \sin ax\,dx=\frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(x+3)\sin ax\,dx=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\int\cos ax\,dx\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=$$

$$=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

Вычислить интегралы:

**583.** $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$. **584.** $\int_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}$.

**585.** $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$. **586.** $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx$.

**587.** $\int_{-a}^a x\cos\frac{x}{a}dx$. **588.** $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$.

**589*.** $\int_{-\pi}^\pi x\sin x\cos x\,dx$. **590.** $\int_1^e (1+\ln y)^2dy$.

## § 2. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменять переменную интегрирования. При этом, если определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ [или $t=\psi(x)$] в другой интеграл, с новой переменной интегрирования $t$, то *заданные пределы* $x_1=a$ *и* $x_2=b$ *заменяются новыми пределами* $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$, которые определяются из исходной подстановки, т. е. из уравнений $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ [или $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$]. Если $\varphi'(t)$ и $f[\varphi(t)]$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta F(t)\,dt.$$

**591.** Вычислить интегралы:

1) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; 2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. 1) Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x}=t$. Отсюда находим $x=\frac{t^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}t\,dt$ и новые пределы интеграла: $t_1=1$ при $x_1=0$, $t_2=4$ при $x_2=5$. Подставляя, получим

$$\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=$$
$$=\frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right)=4.$$

2) Полагая $e^x=t$, имеем $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$; $t_1=2$ при $x_1=\ln 2$; $t_2=3$ при $x_2=\ln 3$ и

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3 \frac{dt}{t\,(t-t^{-1})}=\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln 1{,}5}{2}.$$

3) Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t_1=\frac{\pi}{6}$ при $x_1=1$; $t_2=\frac{\pi}{3}$ при $x_2=\sqrt{3}$;

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\sin^3 t+1}{4\sin^2 t}dt=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t\,dt+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t}=$$
$$=-2\cos t-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

4) Заменяя переменную при помощи подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, найдем $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ (см. гл. IV, § 9); $z_1=0$ при $x_1=0$; $z_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}=2\int_0^1 \frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**592.** Доказать, что для четной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

а для нечетной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Решение. Разделив отрезок интегрирования $[-a, a]$ точкой $x=0$ на две части, согласно свойству 3 получим тождество

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$

Заменив переменную в последнем интеграле по формуле $x = -z$, имеем $dx = -dz$; $z_1 = a$ при $x_1 = -a$; $z_2 = 0$ при $x_2 = 0$;

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

так как *значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования*. Следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx.$$

Для четной функции $f(-x) = f(x)$, а для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$, поэтому

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пользуясь доказанными положениями, можно упрощать вычисление некоторых определенных интегралов. Например:

1) без вычислений, заключаем:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (3x - 2x^5)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x\,dx = 0, \quad \int_{3}^{-3} t^8 \arcsin t\,dt = 0$$

вследствие нечетности подынтегральной функции;

$$2)\quad \int_{-2}^{2} \frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{7x^4 - 5x^2 - 2}{x^3 + x}\,dx +$$

$$+ \int_{-2}^{2} \frac{x^5 + x^3}{x^3 + x}\,dx = 0 + 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{16}{3},$$

вследствие того, что под знаком первого интеграла функция нечетная, а под знаком второго — четная.

Вычислить интегралы:

**593.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. Подстановка $x+1=z$.

**594.** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. Подстановка $\sqrt{e^x-1}=t$.

**595.** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. Подстановка $z=x^2+1$.

**596.** $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,dx$. Подстановка $t=1+\ln x$.

**597.** $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. Подстановка $x=3\cos\varphi$.

**598.** $\int\limits_5^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{5+4t}}$.

**599.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}{1+\mathrm{tg}\,\varphi}\,d\varphi$.

**600.** $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

**601.** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

**602*.** $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$.

**603*.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

## § 3. Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры

Понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Для вычисления некоторой величины $u$ при помощи определенного интеграла можно руководствоваться следующей общей схемой (I):

1. Разбить $u$ на большое число $n$ малых слагаемых элементов $\Delta u_i$:

$$u=\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i.$$

2. Найти приближенное значение каждого элемента $\Delta u_i$ в виде произведения $\Delta u_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x$ и затем приближенное значение $u$ в виде интегральной суммы

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x, \qquad (*)$$

где $x$ — один из параметров величины $u$, который по условию задачи изменяется в известном интервале $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ — данная или определяемая из условия задачи функция от $x$; $x_0 = a$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n = b$ — точки интервала $[a, b]$, которые при разбиении $u$ на $n$ элементов разбивают этот интервал на $n$ равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Здесь при нахождении приближенного значения малого элемента $\Delta u_i$ используются различные допущения. Например, здесь допустимо малые криволинейные отрезки заменять стягивающими их хордами; переменную силу (или скорость) на малых участках пути здесь можно заменять постоянной силой (или скоростью),— допуская, что она неизменно сохраняет на всем малом участке пути ту величину и то направление, которые она имела в начальной или конечной точке этого малого участка; переменную температуру непрерывно нагреваемого или охлаждаемого тела в течение малых промежутков времени здесь можно считать постоянной, допуская, что в течение каждого малого промежутка времени она неизменно сохраняет то значение, которое имела в начале или в конце этого промежутка.

3. Если из условия задачи следует, что при $n \to +\infty$ погрешность приближенного равенства $(*)$ стремится к нулю, то искомая величина $u$ будет численно равна определенному интегралу $u = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Многие величины можно выразить посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой (II):

1. Полагаем, что некоторая часть искомой величины $U$ есть неизвестная функция $u(x)$, где $x$ — один из параметров величины $U$, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Найдем дифференциал $du$ функции $u(x)$, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения $\Delta u$ при изменении $x$ на малую величину $dx$ в виде произведения $du = f(x)\,dx$, где $f(x)$ данная или определяемая из условия задачи функция от $x$.

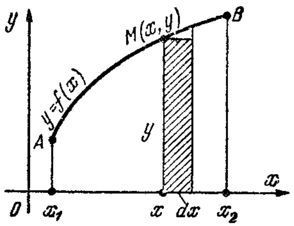
При этом здесь также используются различные допущения, которые в общем сводятся к тому, что при изменении аргумента $x$ на малую величину $dx$ изменение функции $u(x)$ считается пропорциональным $dx$.

3. Убедившись, что дифференциал $du$ найден верно, что при $dx \to 0$ бесконечно малые $\Delta u$ и $du$ будут эквивалентны, найдем искомую величину $U$, интегрируя $du$ в пределах от $x=a$ до $x=b$:

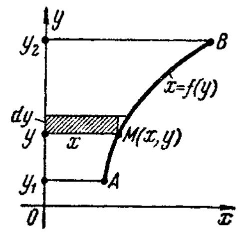
$$U = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Так, согласно схеме II:

а) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Ox$, черт. 87, дифференциал переменной площади $S(x) = S_{x_1AMx}$ есть площадь прямоугольника со сторонами $y$ и $dx$, т. е. $dS = y\,dx$.




Черт. 87




Черт. 88

Площадь $S_{x_1ABx_2}$, если вся трапеция расположена над осью $Ox$, выражается интегралом

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx. \tag{1}$$

б) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Oy$, черт. 88, дифференциал переменной площади $S(y) = S_{y_1AMy}$ есть площадь прямоугольника со сторонами $x$ и $dy$, т. е. $dS = x\,dy$.

Площадь $S_{y_1ABy_2}$, если вся трапеция расположена справа от оси $Oy$, выражается интегралом

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x\,dy. \tag{2}$$

В частности каждая из параллельных сторон трапеции а) или б) может свестись к точке.

*Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или к оси Oy.*

в) Дифференциал переменной площади $S(\varphi) = S_{OAM}$, черт. 89, есть площадь кругового сектора с центральным углом $d\varphi$ и радиусом $\rho$, т. е. $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$.

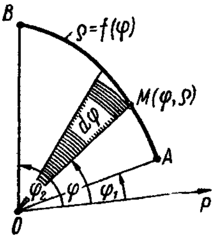
Площадь криволинейного сектора $OAB$ выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \qquad (3)$$

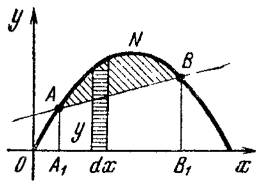
В частности точка $A$ или $B$ или обе они могут совпасть с полюсом $O$.

*Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к полярной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных секторов.*

**604.** Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:
1) параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x + 6$;
2) параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$;
3) кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$;
4) эллипсом $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;
5) кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
6) окружностями $\rho = 2\sqrt{3}\,a\cos\varphi$ и $\rho = 2a\sin\varphi$.




Черт. 89




Черт. 90

Решение. 1) Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь, $A\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$, $B(6;\ 3)$. Построив эти точки и проходящие через них данные линии, черт. 90, видим, что искомая площадь $ANB$ равна разности площадей $S_1 = A_1ANBB_1$ и $S_2 = A_1ABB_1$.

Площадь $S_1$ согласно формуле (1) выражается интегралом

$$S_1 = \int_1^6 y\,dx = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x - x^2)\,dx = \frac{1}{4}\left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^6 = \frac{205}{12}.$$

Площадь $S_2$ трапеции $A_1ABB_1$ равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S_2 = \frac{A_1A + B_1B}{2}\cdot A_1B_1 = \frac{95}{8}.$$

Следовательно, искомая площадь $S = S_1 - S_2 = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\frac{5}{24}$.

Если за единицу длины принят дециметр, то $S=5\frac{5}{24}$ *кв. дм.*

2) Определив точки пересечения парабол $A\,(-1;\ 3)$ и $B\,(2;\ 0)$ и построив эти точки и параболы, черт. 91, видим, что искомую площадь $S$ можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций: $S=S_{A_1ACB}+S_{OBD}-S_{A_1AO}$.

$$S_{A_1ACB}=\int_{-1}^{2}(4-x^2)\,dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=8-\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}=9.$$

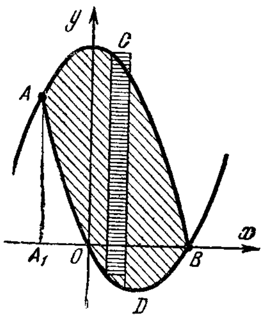
$$S_{OBD}=\int_{2}^{0}(x^2-2x)\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{2}^{0}=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}.$$

Площадь $OBD$ расположена под осью $Ox$, поэтому, чтобы получить ее величину с положительным знаком, пределы интегрирования взяты справа налево.

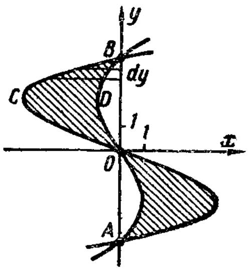
$$S_{A_1AO}=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

Следовательно, $S=9+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=9.$

Площадь $S$ можно найти иначе, определив ее дифференциал $ds$ как площадь прямоугольника, у которого высота есть разность




Черт. 91




Черт. 92

ординат данных парабол, а основание $dx$, черт. 91:

$$ds=(y_1-y_2)\,dx=[(4-x^2)-(x^2-2x)]\,dx=(4+2x-2x^2)\,dx.$$

Отсюда $S=\int_{-1}^{2}(4+2x-2x^2)\,dx=4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}=9.$

3) Находим три точки пересечения данных парабол: $O\,(0,\ 0)$, $A\,(0;\ -4)$, $B\,(0;\ 4)$, затем строим эти точки и параболы, черт. 92.

Искомая площадь $S$ состоит из двух одинаковых частей; половину ее можно найти как разность площадей криволинейных трапеций $OCB$ и $ODB$, прилежащих к оси $Oy$. Согласно формуле (2) имеем

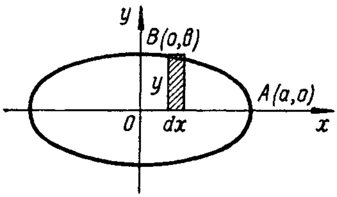
$$S_{OCB}=\int_4^0 x_1\,dy=\frac{1}{6}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S_{ODB}=\int_4^0 x_2 dy=\frac{1}{24}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S=2\,(S_{OCB}-S_{ODB})=2\int_4^0 (x_1-x_2)\,dy=\frac{1}{4}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}-8y^2\right)\Bigg|_4^0=\frac{1}{4}(-64+128)=16.$$

4) Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса (черт. 93), и поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади $S$, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Ox$:




Черт. 93

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx.$$

Пользуясь данными параметрическими уравнениями эллипса, преобразуем интеграл к переменной $t$; $y=b\sin t$, $dx=-a\sin t\,dt$; когда $x=0$, то $t=\frac{\pi}{2}$; когда $x=a$, то $t=0$;

$$S=4\int_0^a y\,dx=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

Отсюда при $a=b$ получается формула для площади круга: $S=\pi a^2$.

5) Кардиоида симметрична относительно полярной оси (черт. 94). Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади

криволинейного сектора $OAB$. Дуга $ABO$ описывается концом полярного радиуса $\rho$ при изменении полярного угла $\varphi$ от 0 до $\pi$.

Поэтому согласно формуле (3)

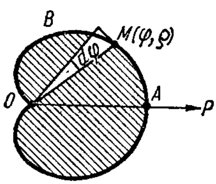
$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 \, d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

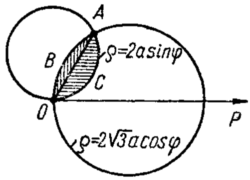
$$= a^2 \left[ \int d\varphi + 2 \int \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi \right] \Big|_0^\pi =$$

$$= a^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + 2 \sin\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

6) Решив совместно данные уравнения, найдем точку пересечения окружностей $A\left(\frac{\pi}{3},\ a\sqrt{3}\right)$. Построив окружности,




**Черт. 94**




**Черт. 95**

черт. 95, видим, что искомая площадь $S$ равна сумме площадей криволинейных секторов $OBA$ и $OCA$.

Дуга $ABO$ описывается концом полярного радиуса $\rho$ большей окружности при изменении полярного угла $\varphi$ от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\varphi = 6a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = 3a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= 3a^2 \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 3a^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Дуга $OCA$ описывается концом полярного радиуса $\rho$ меньшей окружности при изменении полярного угла от 0 до $\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^2\,d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Следовательно, $S=S_{OBA}+S_{OCA}=a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}89.$

Найти площадь, ограниченную линиями:

**605.** Параболой $y=6x-x^2$ и осью $Ox$.

**606.** Полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямыми $x=0$, $y=4$.

**607.** Астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

**608.** Одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью $Ox$.

**609.** Параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

**610.** Цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=0$, $x=a$.

**611.** Гиперболой $xy=6$ и прямой $y=7-x$.

**612.** Кубической параболой $y=x^3$ и прямыми $y=x$, $y=2x$.

**613.** Окружностью $x^2+y^2=4x$ и параболой $y^2=2x$.

**614.** Лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

**615.** Первым завитком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью.

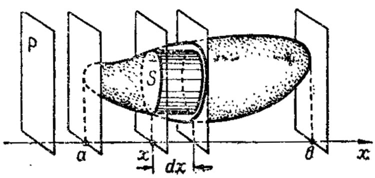
**616.** Трехлепестковой розой $\rho=a\cos 3\varphi$.

**617.** Кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$.

**618*.** Эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

## § 4. Объем тела по площадям его параллельных сечений

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, параллельной некоторой плоскости $P$, где $x$ — расстояние сечения от плоскости $P$, черт. 96, то при изменении $x$ на величину $dx$ дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой $dx$ и площадью основания $S(x)$, т. е. $dv=S(x)\,dx$, а объем всего тела выражается интегралом,



Черт. 96

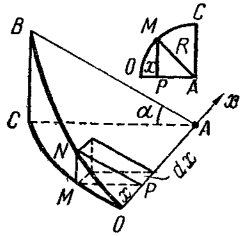
$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx, \qquad (*)$$

где $a$ и $b$ — левая и правая границы изменения $x$.

**619.** Найти объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом $\alpha$ к плоскости основания.

Решение. Изобразив половину данного тела, черт. 97, замечаем, что всякое сечение его плоскостью, параллельной плоскости $ABC$, представляет прямоугольный треугольник.

Найдем площадь сечения, отстоящего от точки $O$ на расстоянии $OP=x$. Из прямоугольного треугольника $AMP$ имеем $MP^2=R^2-(R-x)^2$. Из прямоугольного треугольника $PNM$ имеем $MN=MP\operatorname{tg}\alpha$.



Черт. 97

Площадь сечения $S(x)$, как прямоугольного треугольника с катетами $MP$ и $MN$:

$$S(x)=\frac{1}{2}MP\cdot MN=\frac{1}{2}MP^2\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}[R^2-(R-x)^2]\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

При изменении $x$ на величину $dx$ объем $v$ изменится на величину $\Delta v$, эквивалентную объему прямого цилиндра (призмы) с высотой $dx$ и площадью основания $S(x)$:

$$\Delta v\approx dv=S(x)\,dx=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha\,dx.$$

Всему искомому объему соответствует изменение $x$ от 0 до $2R$, поэтому

$$V=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\int\limits_0^{2R}(2Rx-x^2)\,dx=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\left(Rx^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2R}=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha.$$

**620.** Найти объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Плоское сечение эллипсоида, параллельное плоскости $xOz$ и отстоящее от нее на расстоянии $y=h$, черт. 98, представляет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},\quad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

с полуосями

$$a_1=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}\ \text{ и }\ c_1=\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}.$$

Площадь этого сечения, как площадь эллипса, найдем по формуле, полученной в решении задачи 604 (4),

$$S(h)=\pi a_1c_1=\frac{\pi ac}{b^2}(b^2-h^2).$$

Подставляя в формулу (*), получим объем всего эллипсоида

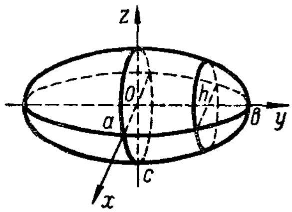
$$V=\frac{2\pi ac}{b^2}\int_0^b (b^2-h^2)\,dh=\frac{2\pi ac}{b^2}\left(b^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4}{3}\pi abc.$$

При $a=b=c$ полученная формула для объема эллипсоида преобразуется в формулу для объема шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

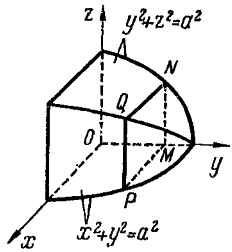
**621.** Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2+y^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$ (ограниченный данными цилиндрическими поверхностями).

Решение. Построим восьмую часть тела, расположенную в первом октанте, черт. 99.

Любое сечение тела плоскостью, параллельной плоскости $xOz$, представляет квадрат. Площадь сечения $PQNM$, отстоящего от




Черт. 98




Черт. 99

плоскости $xOz$ на расстоянии $OM=h$, найдем как площадь квадрата со стороной

$$MP=MN=\sqrt{a^2-h^2};$$

$$S(h)=a^2-h^2,\quad 0\leqslant h\leqslant a.$$

Весь искомый объем, согласно формуле (*), выразится интегралом

$$V=8\int_0^a (a^2-h^2)\,dh=8\left(a^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{16}{3}a^3.$$

**622.** Найти объем тела, отсекаемого от эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $z=k$ $(k>0)$.

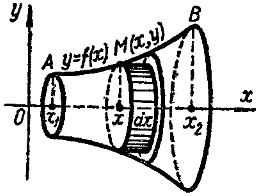
**623.** Найти объем, общий двум эллиптическим цилиндрам $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

**624*.** Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=4-y^2$, плоскостями координат и плоскостью $x=a$.

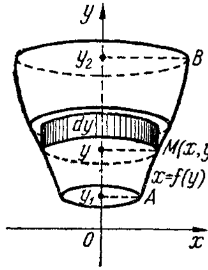
## § 5. Объем тела вращения

Если тело образуется при вращении вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $x_1ABx_2$ (черт. 100), то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси $Ox$, будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y=f(x)$.

Площадь сечения $S(x)$, соответствующего абсциссе $x$, как площадь круга, равна $\pi y^2$.




Черт. 100




Черт. 101

Дифференциал объема тела, соответствующий приращению $dx$, будет $dv=\pi y^2 dx$, а весь объем тела вращения определяется формулой

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \quad (x_1<x_2). \qquad (A)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции $y_1ABy_2$, прилежащей к оси $Oy$, черт. 101, то $dv=\pi x^2\,dy$,

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy \quad (y_1<y_2). \qquad (B)$$

**625.** Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=2px,\ x=a$ вокруг оси $Ox$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $Oy$;

3) $2y=x^2,\ 2x+2y-3=0$ вокруг оси $Ox$;

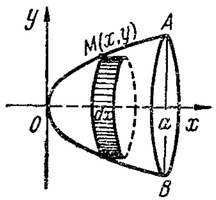
4) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ вокруг оси $Ox$;

5) $y=4-x^2,\ y=0$ вокруг прямой $x=3$.

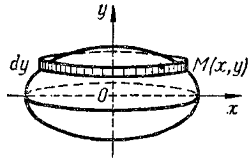
Решение. 1) Построив параболу $y^2=2px$ и прямую $x=a$, получим параболический сегмент $OAB$, черт. 102. При вращении его вокруг оси $Ox$ образуется сегмент параболоида вращения. Объем этого тела, согласно общим указаниям, найдем по формуле (А):

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int_0^a 2px\,dx=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2.$$

2) Если у данного эллипса $b<a$, то при вращении его вокруг малой оси получается сжатый эллипсоид вращения,




Черт. 102



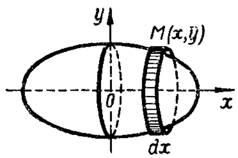

Черт. 103

черт. 103. Вычислим объем $V_1$ этого тела по формуле (В):

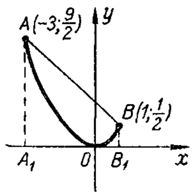
$$V_1=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

При вращении эллипса вокруг его большой оси получается удлиненный эллипсоид вращения, черт. 104, объем которого $V_2=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Очевидно, $V_1>V_2$.

3) Ограниченная данными линиями фигура $OAB$, черт. 105, при вращении вокруг оси $Ox$ образует тело, объем которого




Черт. 104




Черт. 105

можно найти как разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси $Ox$ трапеций $A_1ABB_1$ и $A_1AOBB_1$.

Объем $V_1$, образованный вращением трапеции $A_1ABB_1$, можно найти по формуле (А):

$$V_1=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int_{-3}^{1}(1{,}5-x)^2\,dx=$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}(x-1{,}5)^2 d(x-1{,}5)=\frac{\pi(x-1{,}5)^3}{3}\Big|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}\pi$$

или как объем усеченного конуса по формуле элементарной геометрии.

Объем $V_2$, образованный вращением криволинейной трапеции $A_1AOBB_1$, найдем по формуле (А):

$$V_2=\frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1}x^4dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{1}=\frac{\pi}{20}(1+243)=\frac{61}{5}\pi.$$

Искомый объем $V=V_1-V_2=18\frac{2}{15}\pi$.

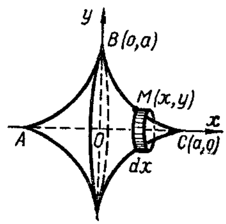
4) Фигура, ограниченная астроидой, черт. 106, при вращении вокруг оси $Ox$ образует тело вращения, объем которого определяется формулой (А):

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx=2\pi\int_{0}^{a}y^2\,dx.$$

Исходя из данных параметрических уравнений астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, преобразуем последний интеграл к переменной $t$: $y^2=a^2\sin^6 t; dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$;

$t=\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=0$ при $x=a$;

$$V=2\pi\int_{0}^{a}y^2\,dx=-6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cos^2 t\sin t\,dt.$$



Черт. 106

Далее тождественно преобразуем подынтегральное выражение и, применяя формулу интегрирования степени, получим

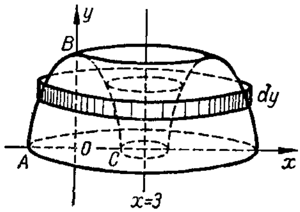
$$V=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t(-\sin t)\,dt=$$

$$=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\,d\cos t=$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

5) Параболический сегмент $ABC$, ограниченный параболой $y=4-x^2$ и осью $Ox$, черт. 107, при вращении вокруг прямой $x=3$ образует тело, любое сечение которого плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, представляет круговое кольцо,

ограниченное концентрическими окружностями. Площадь такого сечения, отстоящего от начала координат на расстоянии $y$, $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi[(3+x)^2-(3-x)^2]=12\pi x=12\pi\sqrt{4-y}$, так как $x$ есть абсцисса точки, лежащей на данной параболе, т. е. $x=\sqrt{4-y}$.




Черт. 107

При изменении $y$ на величину $dy$ дифференциал объема тела будет $dv=S(y)\,dy=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$.

Весь искомый объем получается при изменении $y$ от 0 до 4. Поэтому, интегрируя $dv$ в этих пределах, получим

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=$$

$$=-12\pi\int_0^4(4-y)^{\frac{1}{2}}d(4-y)=8\pi(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^0=64\pi.$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

**626.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $y=b$ вокруг оси $Oy$.

**627.** $y=\sin x$ (одной волной), $y=0$ вокруг оси $Ox$.

**628.** $y^2+x-4=0$, $x=0$ вокруг оси $Oy$.

**629.** $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ вокруг оси $Ox$.

**630.** $y^2=(x+4)^3$, $x=0$ вокруг оси $Oy$.

**631*.** $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=-2$.

**632.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси $Oy$.

**633*.** Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ $(a<b)$ вокруг оси $Ox$.

**634.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью $Ox$.

## § 6. Длина дуги плоской кривой

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$, или $x=F(y)$ или параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то дифференциал $dl$ длины ее дуги, черт. 108, выражается формулой

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

а длина дуги $AB$ определяется формулой

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)} dl=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+(x')^2}\,dy=$$

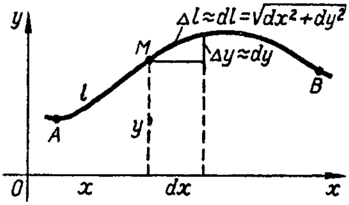
$$=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \qquad (1)$$

$$(x_A<x_B;\ y_A<y_B;\ t_A<t_B).$$

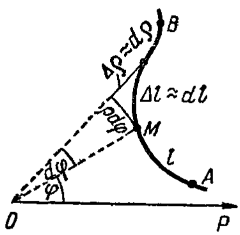
Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho=f(\varphi)$ (черт. 109), то $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$,

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)} dl=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.\ (\varphi_A<\varphi_B). \qquad (2)$$

**635.** Вычислить длину дуги: 1) полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2;\ -1)$ и $B(5;\ -8)$; 2) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; 3) кривой $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.




Черт. 108




Черт. 109

Решение. 1) Разрешаем данное уравнение относительно $y$ и находим $y'$:

$$y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}};\quad y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

(Знаки $\pm$ в выражении $y$ указывают, что кривая симметрична оси $Ox$; точки $A$ и $B$, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси $Ox$.)

Подставляя в формулу (1), получим

$$L_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5\approx 7{,}63.$$

2) Дифференцируем по $t$ параметрические уравнения циклоиды

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t);\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}=a\sin t$$

и находим дифференциал ее дуги

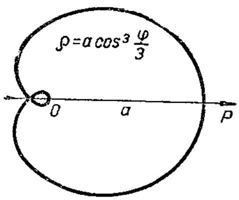
$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$
$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Одна арка циклоиды (черт. 83) получается при изменении параметра $t$ от 0 до $2\pi$, поэтому

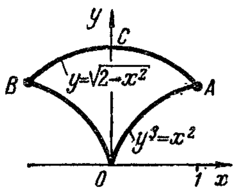
$$L=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3) Из данного уравнения кривой $\rho=\cos^3\frac{\varphi}{3}$ находим производную $\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$ и дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$




Черт. 110




Черт. 111

Половина этой кривой, черт. 110, описывается концом полярного радиуса при изменении $\varphi$ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому согласно формуле (2) длина всей кривой

$$L=2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$$
$$=a\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{3}{2}a\pi.$$

**636.** Найти периметр фигуры, ограниченной кривыми $y^3=x^2$ и $y=\sqrt{2-x^2}$.

Решение. Совместно решая уравнения кривых, определим две точки их пересечения $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$. Построив эти точки и проходящие через них данные кривые, получим фигуру, симметричную оси $Oy$ (черт. 111). Периметр этой фигуры $L=$ $=2(L_{\smile OA}+L_{\smile AC})$.

Пользуясь формулой (1), найдем:

$$L_{\smile OA}=\int\limits_{y_O}^{y_A}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy=$$

$$=\frac{4}{9}\int\limits_0^1\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}y\right)=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right);$$

$$L_{\smile AC}=\int\limits_{x_C}^{x_A}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx=\sqrt{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=$$

$$=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

(Это восьмая часть длины окружности, радиус которой $\sqrt{2}$.)

Следовательно, искомый периметр фигуры

$$L=2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)\approx 5{,}102.$$

Вычислить длину дуги кривой:

**637.** $9y^2=4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью $Oy$.

**638.** Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

**639.** Цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между прямыми $x=-a$ и $x=0$.

**640.** $2y=x^2-2$ между точками пересечения с осью $Ox$.

**641*.** $y=\ln x$ между прямыми $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$.

**642.** Кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

**643.** Первого завитка спирали Архимеда $\rho=a\varphi$.

**644*.** Эволюты эллипса $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$.

**645.** Найти периметр фигуры, ограниченной линиями:
1) $x^2=(y+1)^3$ и $y=4$; 2) $y^2=2px$ и $2x=p$.

## § 7. Площадь поверхности вращения

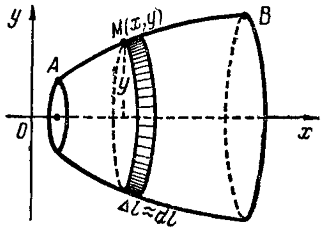
Если поверхность образуется при вращении дуги $AM$ плоской кривой вокруг оси $Ox$ (черт. 112), то дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного круглого конуса с образующей $dl$ и радиусами оснований $y$ и $y+dy$:

$$ds=\frac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}dl=\pi(2y+dy)\,dl\approx 2\pi y\,dl,$$

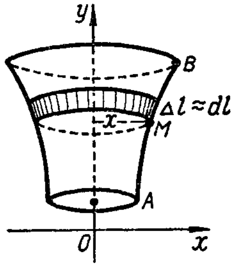
а площадь поверхности, образованной вращением дуги $AB$, определяется формулой

$$S=\int\limits_{(A)}^{(B)} ds=2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)} y\,dl, \tag{1}$$

где $(A)$ и $(B)$ обозначают значения в точках $A$ и $B$ выбранной переменной интегрирования, $dl$—дифференциал дуги кривой.



Черт. 112

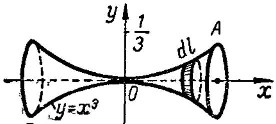


Черт. 113

При вращении дуги $AB$ кривой вокруг оси $Oy$ (черт. 113)

$$ds\approx 2\pi x dl;\quad S=\int\limits_{(A)}^{(B)} ds=2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)} x\,dl. \tag{2}$$

**646.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$: 1) дуги кубической параболы $y=x^3$, заключенной между прямыми $x=-\frac{2}{3}$ и $x=\frac{2}{3}$; 2) астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; 3) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.



Черт. 114

Решение. 1) Построив дугу параболы между точками $A\left(\frac{2}{3};\frac{8}{27}\right)$ и $B\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{27}\right)$ (черт. 114), замечаем, что поверхность, образуемая вращением этой дуги вокруг оси $Ox$, состоит из двух одинаковых частей. Поэтому и согласно формуле (1), имеем

$$S=2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{2}{3}} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int\limits_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

Для вычисления интеграла полагаем $1+9x^4=z$, тогда $36x^3\,dx=dz$; $z_1=1$ при $x=0$; $z_2=\frac{25}{9}$ при $x=\frac{2}{3}$;

$$S=4\pi\int_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{t}\,\frac{dt}{36}=\frac{\pi}{9}\int_1^{\frac{25}{9}}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{\pi}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{25}{9}}=\frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)\approx 0{,}845.$$

2) Применяя формулу (1), преобразуя ее к переменной $t$, исходя из уравнений астроиды, получим

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d\sin t=$$

$$=\frac{12}{5}a^2\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

(Четвертая часть астроиды, расположенная в первом квадранте (черт. 106) получается при изменении $t$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.)

3) Дифференцируя по $x$ обе части уравнения эллипса $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, $yy'=-\frac{b^2x}{a^2}$ и подставляя в формулу (1), находим

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int_0^a\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx=$$

$$=4\pi\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}\,dx=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

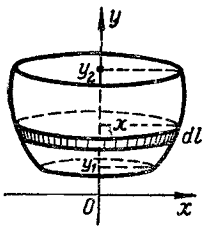
Полагая $\varepsilon x = a \sin t$, получим $\varepsilon\, dx = a \cos t\, dt$; $t_1 = 0$ при $x = 0$; $t_2 = \arcsin \varepsilon$ при $x = a$;

$$S = \frac{4\pi b}{a} \int_0^{t_2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \frac{a}{\varepsilon} \cos t\, dt = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} \cos^2 t\, dt =$$

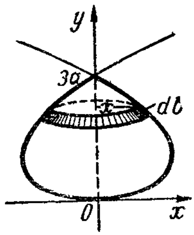
$$= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)\Bigg|_0^{t_2} = 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получается площадь поверхности шара $S = 4\pi a^2$.

**647.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$: 1) дуги окружности $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ между ее точками, где $y = y_1$ и $y = y_2$; 2) петли кривой $9ax^2 = y(3a - y)^2$.




Черт. 115




Черт. 116

Решение. 1) Если дуга данной окружности не пересекает оси $Oy$ (своего диаметра), то при вращении ее вокруг этой оси образуется поверхность, называемая сферическим поясом (черт. 115). Дифференцируя по $y$ обе части уравнения окружности $2xx' + 2(y - b) = 0$, $xx' = -(y - b)$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x')^2}\, dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{R^2 - (y - b)^2 + (y - b)^2}\, dy =$$

$$= 2\pi R \int_{y_1}^{y_2} dy = 2\pi R (y_2 - y_1) = 2\pi RH,$$

где $H$ — высота пояса. При $H = 2R$ получим формулу площади сферы $S = 4\pi R^2$.

2) Петля данной кривой (черт. 116) описывается текущей точкой при изменении $y$ от 0 до $3a$. Поэтому, дифференцируя по $y$

обе части ее уравнения: $18axx' = (3a-y)^2 - 2y(3a-y) = 3(3a-y)(a-y)$, $xx' = \frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a} + \frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} \frac{3a-y}{6a} \sqrt{a^2 + 2ay + y^2}\, dy = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a^2 + 2ay - y^2)\, dy = 3\pi a^2.$$

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$:

**648.** Окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

**649.** Дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$.

**650.** Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**651.** Одной волны синусоиды $y = \sin x$.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$:

**652.** Дуги полукубической параболы $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ между точками пересечения с осями координат.

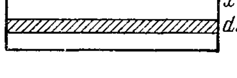
**653.** Эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

**654.** Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $y = b$, $b > a$.

## § 8. Физические задачи

**655.** Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м* и высотой 6 *м*.

Решение. Величина $p$ давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения $x$, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $p = \delta a x$; $\delta$ — удельный вес жидкости, $a$ — площадь площадки.



Черт. 117

Руководствуясь общей схемой (II) применения определенного интеграла к вычислению величин, разделим шлюз на глубине $x$ горизонтальной прямой (черт. 117). Тогда давление воды на верхнюю часть шлюза будет некоторой функцией $p(x)$. Найдем дифференциал $dp$ этой функции, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения $\Delta p$ при изменении глубины $x$ на малую величину $dx$.

Допустим, ввиду малости $dx$, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине $x$, т. е. что она расположена на глубине $x$ в горизонтальной плоскости. Тогда приближенная величина давления воды на эту полоску будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, и высотой — глубину $x$:

$\Delta p \approx dp = 18\delta x\,dx = 18x\,dx$. (Удельный вес воды $\delta = 1$*.)

Согласно условию задачи глубина $x$ изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 6$. Поэтому искомое давление $P$ на весь шлюз найдем, интегрируя $dp$ в пределах от 0 до 6:

$$P = 18\int_0^6 x\,dx = 9x^2\Big|_0^6 = 324T \approx 324000 \cdot 9{,}81\,н \approx 3178440\,н^{**} \approx 3{,}18\,Мн.$$

**656.** При условиях предыдущей задачи найти, на какой глубине $x = c$ надо разделить шлюз горизонтальной прямой, чтобы давление воды на верхнюю и нижнюю части шлюза было одинаково.

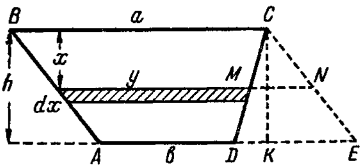
Решение. Определим давление воды на каждую часть шлюза, интегрируя $dp$ в пределах от 0 до $c$ и в пределах от $c$ до 6, затем приравниваем интегралы друг другу:

$$18\int_0^c x\,dx = 18\int_c^6 x\,dx; \qquad x^2\Big|_0^c = x^2\Big|_c^6; \quad c^2 = 36 - c^2.$$

Решая полученное уравнение, найдем $c = 3\sqrt{2} \approx 4{,}23$ *м*.

**657.** Определить давление воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, размеры которой указаны на черт. 118.

Решение. Допуская, что заштрихованная полоска расположена на глубине $x$ в горизонтальной плоскости и что она является прямоугольником со сторонами $y$ и $dx$, найдем приближенную величину давления воды на эту полоску $\Delta p \approx xy\,dx = dp$ и затем давление воды на всю плотину:



Черт. 118

$$P = \int_0^h xy\,dx.$$

Для вычисления интеграла выразим переменную $y$ через переменную $x$. Проведя вспомогательную прямую $CE$ параллельно $BA$, из подобия треугольников $DCE$ и $MCN$ имеем пропорцию

$$(a-b):(a-y) = h:x,$$

из которой находим $y = a - \frac{x}{h}(a-b)$.

* Здесь и далее удельный вес задается в $Г/см^3$.

** *н* (*ньютон*) — единица силы (веса) в Международной системе единиц СИ; $1\,н \approx 0{,}102\,кГ$; $1\,кГ \approx 9{,}81\,н$.

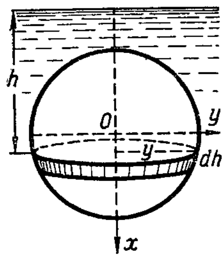
Подставляя в подынтегральное выражение и интегрируя, получим

$$P=\int_0^h x\left[a-\frac{x}{h}(a-b)\right]dx=a\int x\,dx-\frac{a-b}{h}\int x^2\,dx\,\Big|_0^h=\frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

**658.** Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 *м*, если его центр находится на глубине 3 *м* от поверхности воды.

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат $xOy$, как показано на черт. 119.

Рассечем шар на глубине $h$ горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $p(h)$.




Черт. 119

При изменении $h$ на величину $dh$ площадь $S$ отсеченной части поверхности шара, как площадь поверхности вращения вокруг оси $Ox$, изменится на величину $\Delta s\approx 2\pi y\,dl=ds$, где $dl$ — дифференциал дуги окружности, а давление $p(h)$ изменится на величину $\Delta p\approx 2\pi hy\,dl=dp$.

Выразив $dp$ через одну переменную $x$ и интегрируя в пределах от $x=-2$ до $x=2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2+y^2=4$ найдем

$$y'=-\frac{x}{y}\quad\text{и затем}\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\frac{2}{y}\,dx;$$ из

чертежа находим $h=3+x$. Следовательно,

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,y\,\frac{2}{y}\,dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,dx=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{2}=$$
$$=48\pi(T)\approx 470880\pi(н)\approx 0{,}471\pi(Мн).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя $dp$ в пределах от $-2$ до 0:

$$P_1=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{0}=16\pi\,(T)\approx 156960\pi(н)\approx 0{,}157\pi(Мн).$$

Давление на нижнюю половину поверхности шара будет

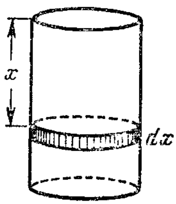
$$P_2=2\pi(3+x)^2\Big|_0^2=32\pi\,(T)\approx 313920\pi(н)\approx 0{,}314\pi(Мн).$$

**659.** Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H=6$ *м* и радиусом основания $R=2$ *м*. Удельный вес масла $\delta=0{,}9$.

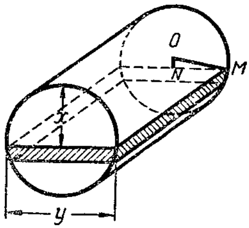
Решение. Величина работы $q$, затрачиваемой на поднятие некоторого тела, зависит от высоты $x$ его подъема: $q=Px$, $P$— вес тела.

Допустим, что работа, затраченная на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною $x$, черт. 120, есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении $x$ на величину $dx$ объем $v$ слоя масла увеличится на величину $\Delta v=\pi R^2\,dx$, его вес $p$ увеличится на вели-




Черт. 120




Черт. 121

чину $\Delta p=\pi\delta R^2\,dx$, а затраченная работа $q$ увеличится на величину $\Delta q\approx\pi\delta R^2\,x\,dx=dq$.

Всю искомую работу $Q$ получим при изменении $x$ от 0 до $H$. Поэтому

$$Q=\pi\delta R^2\int_0^H x\,dx=\pi\delta R^2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H=\frac{\pi\delta R^2H^2}{2}\approx 64800\pi\,(кГм)\approx$$

$$\approx 64800\cdot 9{,}81\pi\,(дж)\approx 635688\pi\,(дж).^*$$

**660.** При условиях предыдущей задачи вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара, если его ось имеет горизонтальное направление.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, полагаем, что работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною $x$ (черт. 121), есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении $x$ на величину $dx$ объем $v$ слоя масла увеличится на величину $\Delta v\approx H\,y\,dx=dv$, его вес $p$ увеличится на величину $\Delta p\approx\delta\,Hy\,dx=dp$, а затраченная работа $q$ увеличится на величину $\Delta q\approx\delta\,Hyx\,dx=dq$.

Вся искомая работа $Q$ выразится интегралом от $dq$ в пре-

---

* *дж* (*джоуль*)—единица работы в Международной системе единиц СИ; 1 *дж* $\approx 0{,}102$ *кГм*; 1 *кГм* $\approx 9{,}81$ *дж*.

делах от $x=0$ до $x=2R$:

$$Q=\delta H\int_0^{2R} xy\,dx=2\delta H\int_0^{2R} x\sqrt{R^2-(x-R)^2}\,dx,$$

где переменная $y$ выражена через переменную $x$ из прямоугольного треугольника $ONM$.

Для вычисления этого интеграла полагаем $x-R=R\sin t$. Тогда $dx=R\cos t\,dt$; $t=-\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=R$;

$$Q=2\delta H\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R+R\sin t)R^2\cos^2 t\,dt=2\delta HR^3\left(\int\cos^2 t\,dt+\right.$$

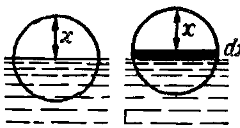
$$\left.+\int\cos^2 t\sin t\,dt\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\delta HR^3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi\delta HR^3=43200\pi\ (\text{кГм})\approx 423792\pi\ (\text{дж}).$$

**661.** Шар лежит на дне бассейна глубиной $H=14$ *дм*. Определить работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус $R=3$ *дм*, а удельный вес $\delta=2$.

Решение. При подъеме шара до поверхности воды сила $P_1$, совершающая работу, постоянна и равна разности между весом шара и весом вытесняемой им воды:

$$P_1=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1).$$




Черт. 122

Поэтому работа $Q_1$, необходимая для поднятия шара до поверхности воды, определяется элементарным путем как произведение силы $P_1$ на высоту подъема $H-2R$:

$$Q_1=P_1(H-2R)=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1)(H-2R).$$

При дальнейшем подъеме шара сила $p$, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от высоты $x$ надводной части шара (черт. 122):

$$p(x)=P_ш-p_в,$$

где $P_ш$ — вес шара, $p_в$ — вес воды, вытесняемой подводной частью шара, численно равный объему шарового сегмента с высотой $h=2R-x$:

$$p_в=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi}{3}(2R-x)^2(R+x)=\frac{\pi}{3}(x^3-3Rx^2+4R^3).$$

Очевидно, и работа, совершаемая силой $p(x)$, будет некоторой функцией $q(x)$. Допуская, что при подъеме шара еще на малую высоту $dx$ сила $p(x)$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx p(x)\,dx = (P_{ш} - p_{в})\,dx = \frac{\pi}{3}[4R^3(\delta - 1) - x^3 + 3Rx^2]\,dx = dq.$$

Интегрируя $dq$ в пределах от $x=0$ до $x=2R$, найдем работу $Q_2$, которую надо совершить, чтобы шар, поднятый со дна бассейна до поверхности воды, полностью извлечь из воды:

$$Q_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}[4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2]\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1)\,x - \frac{x^4}{4} + Rx^3\right]\Bigg|_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\delta - 1).$$

Вся искомая работа $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{4}{3}\pi R^3[R + (\delta - 1)H] = 61{,}2\pi$ (*кГм*) $\approx 600{,}4\pi$ (*дж*).

**662.** Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 1{,}5$ *Т* с поверхности земли на высоту $H = 2000$ *км*.

Решение. Сила $F$ притяжения тела землей или вес тела зависит от его расстояния $x$ до центра земли: $F(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, где $\lambda$ — постоянная.

Если $P$ есть вес тела, когда оно находится на поверхности земли, т. е. на расстоянии земного радиуса $R$ от центра земли, то $P = \frac{\lambda}{R^2}$, $\lambda = PR^2$ и сила $F$, преодолеваемая двигателем поднимающейся ракеты в момент, когда она находится на расстоянии $x$ от центра земли, является известной функцией от $x$:

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Полагая, что работа, совершаемая двигателем ракеты при подъеме ее на высоту $x$, есть некоторая функция $q(x)$ и допуская, что при дальнейшем подъеме ракеты на малую высоту $dx$ сила $F$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}\,dx = dq.$$

При подъеме ракеты с поверхности земли на высоту $H$ переменная $x$ изменяется от $R$ до $R+H$. Поэтому искомая работа $Q$ выражается интегралом

$$Q = \int_R^{R+H} F(x)\,dx = PR^2\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}.$$

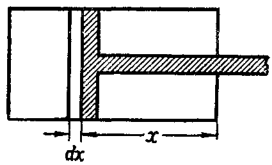
При $P=1{,}5T$, $H=2000$ *км*, $R=6400$ *км* $Q\approx 2\,285\,714\,000$ *кГм* $\approx$ $\approx 22\,422\,854\,340$ *дж*.

Работу, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения, можно определить как предел работы $Q(H)$ при неограниченном возрастании $H$:

$$\lim_{H\to\infty} Q(H)=\lim \frac{PRH}{R+H}=\lim\left[PR:\left(\frac{R}{H}+1\right)\right]=PR.$$

При указанных значениях $P$ и $R$ эта работа составит $9\,600\,000\,000$ *кГм* $\approx 94\,176\,000\,000$ *дж*.

**663.** Цилиндр высотой $H=1{,}5$ *м* и радиусом $R=0{,}4$ *м*, наполненный газом под атмосферным давлением ($10\,330$ *кГ/м²*), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние $h=1{,}2$ *м* внутрь цилиндра.




Черт. 123

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом $v$ и давлением $p$ газа выражается формулой $pv=c=\text{const}$. (Закон Бойля — Мариотта.)

Поэтому, если поршень будет вдвинут на $x$ *м* внутрь цилиндра (черт. 123), то давление $p(x)$ газа на единицу площади поршня будет $p(x)=\frac{c}{v(x)}=\frac{c}{S(H-x)}$, а давление на всю площадь $S$ поршня будет $P(x)=Sp(x)=\frac{c}{H-x}$.

Полагая, что работа, затрачиваемая при вдвижении поршня на $x$ *м*, есть некоторая функция $q(x)$, и допуская, что при дальнейшем вдвижении поршня на малое расстояние $dx$ испытываемое им давление $P(x)$ остается неизменным, найдем приближенную величину приращения (дифференциал) функции $q(x)$:

$$\Delta q\approx P(x)\,dx=\frac{c}{H-x}\,dx=dq.$$

Всей искомой работе $Q$ соответствует изменение $x$ от 0 до $h$, поэтому

$$Q=c\int_0^h \frac{dx}{H-x}=-c\ln(H-x)\Big|_0^h=c\ln\frac{H}{H-h}.$$

При $H=1{,}5$ *м*, $R=0{,}4$ *м*, $h=1{,}2$ *м*, $p_0=10\,330$ *кГ/м²* найдем $v_0=\pi R^2H=0{,}24\pi$ *м³*; $c=p_0v_0=2479{,}2\pi$; $Q\approx 12533{,}3$ *кГм* $\approx$ $\approx 122951{,}7$ *дж*.

**664.** При условиях предыдущей задачи определить работу адиабатического сжатия газа *, при котором его объем $v$ и давление $p$ связаны соотношением $pv^k = c = \text{const}$ (закон Пуассона), где $k$ — постоянная для данного газа величина, большая единицы. (Для воздуха $k \approx 1{,}4$.)

Решение. Повторяя те же рассуждения и употребляя те же обозначения, как и в решении предыдущей задачи, найдем следующее выражение для дифференциала работы:

$$dq(x) = \frac{c\,dx}{S^{k-1}(H-x)^k}.$$

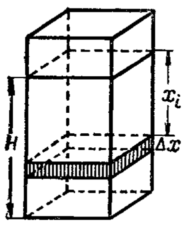
Интегрируя в пределах от $x=0$ до $x=h$, получим всю искомую работу

$$Q = \frac{c}{S^{k-1}} \int_0^h \frac{dx}{(H-x)^k} = \frac{c}{S^{k-1}} \int_h^0 (H-x)^{-k}\, d(H-x) =$$
$$= \frac{c}{S^{k-1}} \left. \frac{(H-x)^{1-k}}{1-k} \right|_h^0 = \frac{p_0 v_0{}^k}{S^{k-1}(k-1)} \left[ \frac{1}{(H-h)^{k-1}} - \frac{1}{H^{k-1}} \right] =$$
$$= \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[ \left( \frac{H}{H-h} \right)^{k-1} - 1 \right].$$

Полагая $H = 1{,}5$ *м*, $k = 1{,}4$, найдем

$$Q \approx \frac{2479{,}2\pi}{0{,}4} \left[ \left( \frac{1{,}5}{0{,}3} \right)^{0{,}4} - 1 \right] \approx 17593{,}4 \text{ кГм} \approx 172591{,}3 \text{ дж}.$$

Сравнение этого результата с предыдущими показывает, что работа, затрачиваемая при адиабатическом сжатии газа, больше, чем при изотермическом.



Черт. 124

**665.** Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6$ *м*² наполнен водой до высоты $H = 5$ *м*. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $s = 0{,}01$ *м*², если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $h$ — высота уровня воды над отверстием, $g$ — ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме (I) разобьем искомое время $T$ на большое число $n$ малых промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$, и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$ (черт. 124).

* В адиабатическом процессе температура газа меняется: при увеличении объема она понижается, а при уменьшении объема повышается.

Если допустить, что в течение каждого малого промежутка времени $\Delta t_i$ скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0,6\sqrt{2g(H-x_i)}$, то, приравняв объем воды, вытекшей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток $\Delta t_i$, объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара, получим приближенное равенство

$$0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}\,\Delta t_i \approx S\Delta x,$$

откуда

$$\Delta t_i \approx \frac{S\,\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}}.$$

Приближенное значение всего искомого времени $T$ будет равно сумме

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\,\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}}, \qquad (*)$$

где по условию задачи точки $x_i$ заключены на отрезке $[0, H]$.

Убедившись, что с возрастанием $n$ погрешность полученного приближенного значения $T$ стремится к нулю, найдем точное значение $T$ как предел интегральной суммы $(*)$ при $n\to+\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл

$$T=\frac{S}{0,6s\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2S}{0,6s\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0=\frac{S}{0,6s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя числовые значения параметров, получим $T\approx$ $\approx 1010$ *сек* $\approx 16,83$ *мин.*

Если бы убыль воды в резервуаре постоянно возмещалась, т. е. если бы уровень воды в нем оставался неизменным, то и скорость истечения воды была бы постоянной, равной $0,6\sqrt{2gH}$. В этом случае в каждую секунду через отверстие в дне резервуара будет вытекать объем воды $0,6s\sqrt{2gH}$, равный объему прямого цилиндра с площадью основания $s$ и высотой $0,6\sqrt{2gH}$. Поэтому при указанном предположении объем воды, вмещающейся в резервуаре, вытечет из него за время

$$T_1=\frac{SH}{0,6s\sqrt{2gH}}=\frac{1}{2}\,\frac{S}{0,6\,s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения $T$, без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения $T_1$, при постоянном возмещении убыли воды; $T=2T_1$.

**666.** При условиях предыдущей задачи определить, за какое время уровень воды в резервуаре изменится на $h$ *м*, если сверху в него непрерывно будет протекать $V$ *м*$^3$ воды в секунду?

Решение. В этом случае за малый промежуток времени $\Delta t$ объем воды в резервуаре изменится на величину

$$S\,\Delta x \approx [0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V]\,\Delta t,$$

откуда

$$\Delta t \approx \frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V}=dt.$$

Интегрируя $dt$ в пределах от $x=0$ до $x=h$, найдем искомое время $T_2$, за которое уровень воды в резервуаре изменится на $h$ (*м*):

$$T_2=a\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{H-x}-b},$$

где

$$a=\frac{S}{0{,}6s\sqrt{2g}},\qquad b=\frac{V}{0{,}6s\sqrt{2g}}.$$

Применяя подстановку $\sqrt{H-x}=z$, получим $dx=-2z\,dz$; $z_1=\sqrt{H}$ при $x=0$; $z_2=\sqrt{H-h}$ при $x=h$;

$$T_2=a\int_{z_1}^{z_2}\frac{-2z\,dz}{z-b}=2a\int_{z_2}^{z_1}\left(1+\frac{b}{z-b}\right)dz=2a\,(z+b\ln|z-b|)\Big|_{\sqrt{H-h}}^{\sqrt{H}}=$$

$$=2a\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-h}+b\ln\left|\frac{\sqrt{H}-b}{\sqrt{H-h}-b}\right|\right).$$

Здесь изменение уровня воды в резервуаре может быть двояким.

Если в начальный момент при $h=0$ скорость притока воды $V$ будет меньше скорости ее убывания из резервуара $0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды будет понижаться до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. После этого вода будет оставаться на постоянном уровне, меньшем первоначального уровня $H$ на величину $h_1$, определяемую из уравнения $0{,}6s\sqrt{2g(H-h_1)}=V$.

Если же в начале процесса $V>0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре будет подниматься до тех пор, пока не превысит первоначальный уровень $H$ на величину $h_2$, определяемую из уравнения

$$0{,}6s\sqrt{2g(H+h_2)}=V,$$

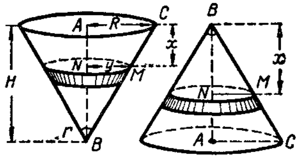
после чего уровень воды в резервуаре будет оставаться неизменным.

**667.** Два одинаковых сосуда имеют форму прямого круглого конуса с вертикальной осью; их расположение и размеры показаны на черт. 125. Оба сосуда наполнены водой и затем опорожняются через небольшие одинаковые круглые отверстия внизу.

Определить время опорожнения каждого сосуда и в какой момент времени вода в обоих сосудах будет на одном уровне, если их опорожнение началось одновременно.

Решение. Полагаем, что время $t$, за которое уровень воды в первом или во втором сосуде понизится на величину $x$, есть некоторая функция $t(x)$ и найдем ее дифференциал $dt$ при изменении $x$ на величину $dx$.

Пусть понижению уровня воды в сосуде на малую величину $dx$ соответствует малое приращение времени $\Delta t$. Тогда, допуская, что в течение этого малого промежутка времени вода вытекает из сосуда с постоянной скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}$, найдем, что объем воды, вытекшей за время $\Delta t$ через отверстие в дне площадью $\pi r^2$, будет $\Delta v \approx 0{,}6\pi r^2\sqrt{2g(H-x)}\,\Delta t$.




Черт. 125

За это же время $\Delta t$ объем воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta v_1 \approx \pi y^2\,dx$, которая должна быть равна объему вытекшей воды $\Delta v$. Отсюда, из равенства $\Delta v = \Delta v_1$, получим

$$\Delta t \approx \frac{y^2\,dx}{0{,}6r^2\sqrt{2g(H-x)}} = dt.$$

Время $T$ полного опорожнения первого или второго сосуда получим, интегрируя $dt$ в пределах от $x=0$ до $x=H$:

$$T = \frac{1}{0{,}6r^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{y^2\,dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Для вычисления этого интеграла выразим переменную $y$ через переменную $x$.

Из подобия треугольников $ABC$ и $NBM$* имеем:

а) для первого сосуда $\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}$, $\quad y = \frac{R}{H}(H-x)$;

б) для второго сосуда $\frac{H}{R} = \frac{x}{y}$; $\quad y = \frac{R}{H}x$.

Поэтому время $T_1$ полного опорожнения первого сосуда будет

$$T_1 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{(H-x)^2}{\sqrt{H-x}}\,dx = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{2(H-x)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_H^0 =$$

$$= \frac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

* Здесь вследствие малости $r$ по сравнению с другими размерами сосуда и для упрощения вычислений допускается, что осевое сечение сосуда представляет треугольник, а не трапецию.

Время $T_2$ полного опорожнения второго сосуда выражается интегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{H-x}}\, dx.$$

Вводя новую переменную $z = H - x$, имеем: $dx = -dz$; $z_1 = H$ при $x = 0$; $z_2 = 0$ при $x = H$;

$$\int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = -\int_H^0 \frac{(H-z)^2}{\sqrt{z}}\, dz = \int_0^H (H^2 z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}})\, dz = \frac{16}{15} H^{\frac{5}{2}}.$$

Подставляя найденное значение интеграла, получим $T_2 = \frac{16R^2}{9r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Сопоставив $T_2$ и $T_1$, взяв их отношение $\frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{3}$, заключаем, что первый сосуд опорожняется значительно (почти в три раза) быстрее второго. При этом, если опорожнение сосудов начинается одновременно, то в начале процесса уровень воды в первом сосуде будет выше, чем во втором, затем наступит момент, когда уровни воды в обоих сосудах сравняются, после чего уровень воды в первом сосуде будет неизменно и все более ниже, чем во втором.

Для определения времени, спустя которое после начала одновременного опорожнения сосудов вода в них будет на одном уровне, найдем зависимость времени $t$ истечения воды от величины $x$ понижения ее уровня для каждого сосуда.

Интегрируя $dt$ в пределах от $x = 0$ до $x = x$, получим:

а) для первого сосуда

$$t = b\int_0^x (H-x)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{5} b\, (H-x)^{\frac{5}{2}} \Big|_x^0 = \frac{2}{5} b \left[ H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}} \right],$$

где

$$b = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}};$$

б) для второго сосуда

$$t = b\int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = b\int_{H-x}^H \left( H^2 z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \right) dz =$$

$$= b\left( 2H^2 z^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} Hz^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{H-x}^H =$$

$$= b\left\{ 2H^2 \left[ H^{\frac{1}{2}} - (H-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{4}{3} H \left[ H^{\frac{3}{2}} - (H-x)^{\frac{3}{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \left[ H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}} \right] \right\}.$$

Рассматривая полученные зависимости $t$ от $x$ для первого и второго сосудов как уравнения с искомыми неизвестными $t$ и $x$ и решая их как систему (исключая $t$), найдем:

$$\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right]=2H^2\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-$$

$$-\frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right];$$

$$H\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{2}{3}\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]=0;$$

$$\sqrt{H-x}\,(H+2x)=\sqrt{H^3};\quad 3H^2-4x^2=0;\quad x=\frac{H\sqrt{3}}{2}.$$

По найденному значению $x$ из первого (или второго) уравнения определяем $t$:

$$t=\frac{2}{5}bH^{\frac{5}{2}}\left[1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

По истечении этого промежутка времени $t$ после начала одновременного опорожнения обоих сосудов вода в них будет на одном уровне

$$h=H-x=H\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0{,}15H.$$

**668.** Определить массу шара радиуса $r$, если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

Решение. Пусть масса шара произвольного радиуса $x$ есть некоторая функция $m(x)$.

При увеличении $x$ на малую величину $dx$ объем $v$ этого шара увеличится на величину $\Delta v$, равную разности объемов шаров с радиусами $x$ и $x+dx$:

$$\Delta v=\frac{4}{3}\pi\left[(x+dx)^3-x^3\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3\right)\approx 4\pi x^2\,dx=dv.$$

Допуская, что во всех точках малого объема $dv$ плотность остается неизменной и равной $kx$, найдем приближенную величину его массы $dm=kx\,dv=4k\pi x^3\,dx$.

Искомую массу $M$ шара радиуса $r$ получим, интегрируя $dm$ в пределах от $x=0$ до $x=r$:

$$M=4k\pi\int_0^r x^3\,dx=k\pi x^4\Big|_0^r=k\pi r^4.$$

**669.** Квадрат со стороною 8 *м* вертикально погружен в воду так, что одна из его сторон лежит на поверхности воды. Определить давление воды на весь квадрат и на каждую из частей, на которые он разделяется диагональю.

**670.** Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью и радиусом 3 *дм* наполовину наполнен ртутью (удельный вес 13,6). Определить давление ртути на каждую из плоских вертикальных стенок резервуара.

**671.** Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полусферы с радиусом 2 *м*.

**672.** Цилиндрический сосуд объемом в 0,1 $м^3$ наполнен атмосферным воздухом, который, изотермически расширяясь, выталкивает поршень (в пустоту). Найти работу, совершаемую воздухом при увеличении его объема до 0,3; 0,4; 0,5 $м^3$. (Атм. давление 10330 $кГ/м^2$.)

**673.** При условиях предыдущей задачи найти работу адиабатического расширения воздуха.

**674.** Прямой круглый конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения конуса из воды, если его высота 10 *дм*, диаметр основания 20 *дм*, а удельный вес 3.

**675.** Деревянная прямоугольная балка плавает в воде. Вычислить работу, необходимую для извлечения балки из воды, если известны ее размеры $a = 6$ *м*, $b = 0{,}3$ *м*, $c = 0{,}2$ *м* и удельный вес $\delta = 0{,}8$.

**676.** Зная, что растяжение (удлинение) пружины пропорционально растягивающей силе, найти работу, затрачиваемую при растяжении пружины на 4 *см*, если для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 3 *кГ*.

**677.** Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью, имеющая высоту $H$ и радиус основания $R$, заполнена водой.

Определить, за какое время через отверстие в дне площадью $S$ опорожнится:

1) верхняя половина цистерны и 2) нижняя половина цистерны. *

**678.** Определить количество воды, протекающей за 1 секунду через прямоугольный водослив вертикальной плотины, если его глубина $h$, а ширина $a$*.

**679.** Определить массу прямого круглого конуса, высота которого равна $H$, а угол между высотой и образующей $\alpha$, если плотность в каждой точке конуса пропорциональна расстоянию ее от плоскости, проходящей через его вершину параллельно основанию.

---

* См. указание к задаче 665.

## § 9. Координаты центра тяжести

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги $AB$ плоской кривой прямоугольные координаты центра тяжести $C$ определяются формулами

$$x_C = \frac{m_y}{m} = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta x\, dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\, dl}, \qquad y_C = \frac{m_x}{m} = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\, dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\, dl}, \qquad (1)$$

где $m$ — масса дуги $AB$; $m_x$ и $m_y$ — статические моменты этой дуги относительно осей $Ox$ и $Oy$; $\delta(M)$ — линейная плотность распределения массы в точке $M(x, y)$ дуги; $dl$ — дифференциал дуги; $(A)$ и $(B)$ обозначают значения выбранной переменной интегрирования в точках $A$ и $B$.

Если материальная дуга является однородной, то формулы (1) упрощаются: постоянная $\delta$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Ox$ (см. черт. 87),

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b xy\, dx}{\int\limits_a^b y\, dx}; \qquad y_C = \frac{\int\limits_a^b y^2\, dx}{2\int\limits_a^b y\, dx}. \qquad (2)$$

*Центр тяжести однородной материальной линии или фигуры, имеющей ось симметрии, лежит на этой оси.*

**680.** Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадранте, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение. Из уравнения окружности найдем $y'$, затем $dl$:

$$2x + 2yy' = 0; \quad y' = -\frac{x}{y};$$

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx = \frac{a}{y}\, dx.$$

Далее вычислим интегралы, содержащиеся в формулах (1), полагая, согласно условию, $\delta = kxy$:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta x\, dl = \int\limits_0^a kxy \cdot x \cdot \frac{a}{y}\, dx = ka \int\limits_0^a x^2 dx = \frac{ka}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\, dl = ka \int\limits_0^a xy\, dx = ka \int\limits_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{ka}{2} \int\limits_a^0 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = \frac{ka}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^0 = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\, dl = ka \int\limits_0^a x\, dx = \frac{ka}{2} x^2 \Big|_0^a = \frac{ka^3}{2}.$$

Подставляя значения интегралов в формулы (1), получим

$$x_C = y_C = \frac{2}{3} a.$$

Очевидно, найденная точка не лежит на данной дуге, а расположена ниже ее.

**681.** Найти центр тяжести однородной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{черт. } 126.$$

Решение. Данная однородная дуга симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому центр тяжести дуги лежит на этой прямой, т. е. $x_C = \pi a$. Для определения $y_C$ найдем дифференциал дуги циклоиды

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$$

и вычислим интегралы, содержащиеся во второй из формул (1):

$$I_1 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\, dl = 2\delta a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 2\delta a^2 \left( \int \sin \frac{t}{2}\, dt - \int \cos t \sin \frac{t}{2}\, dt \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\delta a^2 \left\{ 2 \int \sin \frac{t}{2}\, d\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \int \left[ \sin \frac{3}{2} t + \sin\left(-\frac{t}{2}\right) \right] dt \right\} \Big|_0^{2\pi} =$$

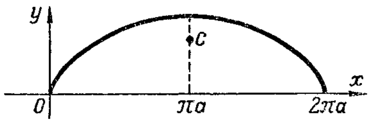
$$= 2\delta a^2 \left( -3 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2} t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3} \delta a^2.$$

$$I_2 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\, dl = 2\delta a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4\delta a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8\delta a.$$

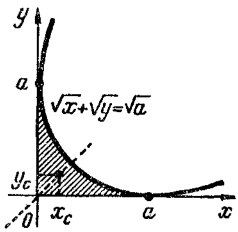
По формуле (1), $y_C = \frac{4}{3} a$.

682. Найти центр тяжести однородной фигуры (пластинки), ограниченной параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Решение. Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла (черт. 127), поэтому $x_C = y_C$.




Черт. 126




Черт. 127

Вычислим интегралы, содержащиеся в первой из формул (2):

$$I_1=\int_a^b xy\,dx=\int_0^a x\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(ax-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{30}.$$

$$I_2=\int_a^b y\,dx=\int_0^a\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(a-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx=\frac{a^2}{6}.$$

Следовательно, $x_C=y_C=\frac{I_1}{I_2}=\frac{a}{5}$.

683. Найти центр тяжести однородной дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной под осью $Ox$.

684. Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2+y^2\leqslant a^2$, расположенного над осью $Ox$.

685. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ и координатными осями, расположенной в первом квадранте.

686. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболами $x^2=20y$ и $y^2=20x$.

687. Найти центр тяжести однородной дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной правее оси $Oy$.

688. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

## § 10. Несобственные интегралы

*Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются несобственными.*

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_c^{\beta} f(x)\,dx, \tag{3}$$

где $c$ — произвольное вещественное число.

II. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода:

если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащий отрезку $[a, b]$, и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ изменяются независимо друг от друга.

*Несобственные интегралы называются сходящимися или расходящимися, смотря по тому, существуют или нет определяющие их пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.*

**689.** Найти следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Пояснить решение геометрически.

Решение. 1) Пользуясь равенством (1), имеем

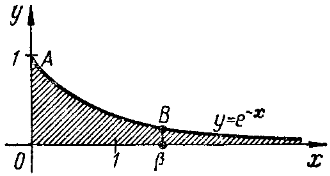
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-x}dx = \lim(-e^{-x})\Big|_0^{\beta} = \lim(e^0 - e^{-\beta}) = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

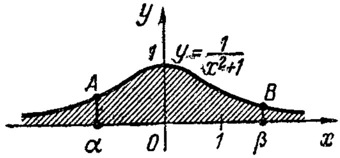
*Геометрически, в прямоугольной системе координат, всякий определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *дает алгебраическую сумму площадей, ограниченных кривой $y=f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ и осью $Ox$.* Поэтому, построив кривую $y=e^{-x}$ и ее ординаты в точках $x=0$ и $x=\beta$ (черт. 128), получим криволинейную трапецию $OAB\beta$, площадь которой

$$S(\beta)=\int_0^{\beta} e^{-x}\,dx=1-e^{-\beta}.$$

При $\beta \to +\infty$ получим трапецию с бесконечным основанием, которая имеет конечную площадь $S(+\infty)=\lim\limits_{\beta\to+\infty} S(\beta)=1$.




Черт. 128




Черт. 129

2) Пользуясь определением (3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{dx}{x^2+1}=\lim \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{\alpha}^{0}+$$
$$+\lim \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{0}^{\beta}=-\operatorname{arc\,tg}(-\infty)+\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=$$
$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Геометрически (черт. 129) интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ в пределах от $\alpha$ до $\beta$ выражает площадь криволинейной трапеции $\alpha AB\beta$, а данный несобственный сходящийся интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, которая неограниченно простирается влево и вправо и вместе с тем имеет конечную величину $\pi$.

3) Здесь при $x=0$ подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв. Согласно определению (4)

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim(\ln 1-\ln\varepsilon)=-\ln 0=+\infty,$$

т. е. этот несобственный интеграл расходится.

Геометрически (черт. 130) полученный результат указывает, что площадь криволинейной трапеции $\varepsilon ABb$

$$S(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=-\ln\varepsilon$$

при $\varepsilon\to+0$ неограниченно возрастает.

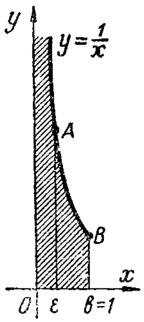
4) Здесь подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;\ 2]$. Поэтому, согласно определению (4),

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

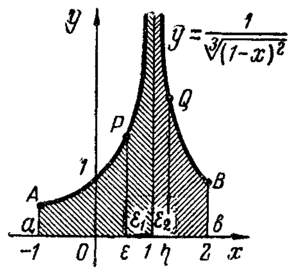
$$=\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1}+\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2}=3\lim(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2})+$$

$$+3\lim(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2})=3(\sqrt[3]{2}+1).$$

Для графика подынтегральной функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (черт. 131) прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Ин-




Черт. 130




Черт. 131

тегралы от этой функции в пределах от $-1$ до $1-\varepsilon_1$ и от $1+\varepsilon_2$ до 2 выражают площади криволинейных трапеций $aAP\varepsilon$ и $\eta QBb$. При $\varepsilon_1\to+0$ и $\varepsilon_2\to+0$ эти трапеции неограниченно простираются вверх и вместе с тем имеют конечные площади, сумма которых равна найденному значению данного несобственного сходящегося интеграла.

**690.** Найти несобственные интегралы:

$$1)\ \int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}};\quad 2)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx.$$

Решение.

1) Преобразуем интеграл к новой переменной. Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t=0$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=2$;

$$\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}\,dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=8\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 t)\,d\cos t=$$

$$=8\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{16}{3}.$$

Здесь *в результате замены переменной данный несобственный интеграл* (от функции, имеющей бесконечный разрыв в правом конце интервала интегрирования) *преобразовался в собственный интеграл* от непрерывной функции и с конечным интервалом интегрирования, который вычислен обычным путем без применения предельного перехода.

Возможно и обратное. *При замене переменной собственный интеграл может перейти в несобственный.*

2) Согласно определению (1)

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^3}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{\ln x\,dx}{x^3}.$$

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$. Полагая $u=\ln x$, $dv=x^{-3}dx$, получим $du=\frac{dx}{x}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$ и

$$\int_1^{\beta}\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}-\frac{1}{4\beta^2}+\frac{1}{4}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, имеем:

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\beta^2}-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\frac{\ln\beta}{\beta^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\left(\frac{1}{\beta}:2\beta\right)=\frac{1}{4}.$$

Здесь для нахождения предела последнего слагаемого применено правило Лопиталя.

Найти несобственные интегралы:

**691.** $\int\limits_{-\infty}^{1} e^t\,dt.$ **692.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

**693.** $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$ **694.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

**695.** $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx.$ **696.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$

**697.** $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$ **698.** $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}.$

**699.** Найти площадь, заключенную между кривой $y=e^{-\frac{x}{3}}$ и осями координат (при $x \geqslant 0$).

**700.** Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ (при $x \geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

## § 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

Для приближенного вычисления определенных интегралов имеется несколько способов. Если функция $f(x)$ задана формулой или таблицей, то приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно найти следующим путем:

1) разделить интервал интегрирования $[a, b]$ точками $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_{n-1}$ на $n$ равных частей $h=\frac{b-a}{n}$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления $y_0=f(a)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ..., $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(b)$;

3) воспользоваться одной из приближенных формул.

Наиболее употребительны следующие приближенные формулы, основанные на геометрическом представлении определенного интеграла в виде площади криволинейной трапеции.

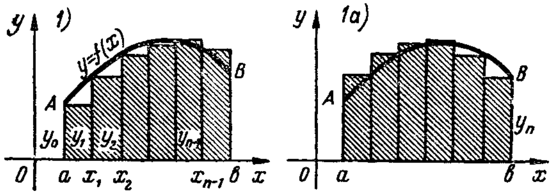
*I. Формула прямоугольников*

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \tag{1}$$

или

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{1a}$$

Геометрически (черт. 132) по этой формуле площадь криволинейной трапеции $aABb$, которая соответствует интегралу $\int\limits_a^b y\,dx$, заменяется суммой площадей заштрихованных прямоугольников.




Черт. 132

Погрешность формулы прямоугольников

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} y'_{НБ},$$

где $y'_{НБ}$ — наибольшее значение $|y'|$ в интервале $[a, b]$.

*II. Формула трапеций*

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \tag{2}$$

Геометрически (черт. 133) по этой формуле площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей заштрихованных трапеций.

Погрешность формулы трапеций

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} y''_{НБ},$$

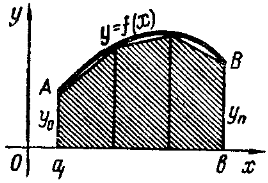
где $y''_{НБ}$ — наибольшее значение $|y''|$ в интервале $[a, b]$.

*III. Формула параболических трапеций* (Симпсона); $n$ — число четное.

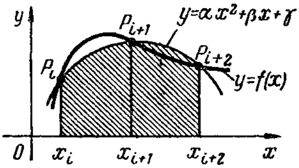
$$\int\limits_a^b y dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]. \tag{3}$$

Геометрически (черт. 134) по этой формуле площадь каждой пары вертикальных полосок $x_i P_i P_{i+2} x_{i+2}$ заменяется площадью одноименной параболической трапеции, получаемой при замене соответствующего участка кривой $y=f(x)$ дугой параболы $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (с вертикальной осью), проходящей через три точки кривой с абсциссами $x_i$, $x_{i+1}=x_i+h$ и $x_{i+2}=x_i+2h$.




Черт. 133




Черт. 134

Погрешность формулы Симпсона

$$\delta(n)\leqslant\frac{(b-a)^5}{180n^4}\,y^{(4)}_{НБ},$$

где $y^{(4)}_{НБ}$ — наибольшее значение $|y^{(4)}|$ в интервале $[a, b]$.

Очевидно, все указанные приближенные формулы будут тем точнее, чем больше взято $n$, т. е. при достаточно большом значении $n$ посредством каждой из этих формул можно вычислить приближенное значение определенного интеграла с любой желаемой точностью.

При одном и том же значении $n$ обычно вторая формула точнее первой, а третья точнее второй.

**701.** Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 8 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница

$$I=\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx=\frac{1}{6}\int\limits_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(6x-5)=\frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=38.$$

Далее делим интервал интегрирования $[1; 9]$ на 8 равных частей, находим длину одной части $h=1$, точки деления $x_i$, значения $y_i$ подынтегральной функции $y=\sqrt{6x-5}$ в этих точках:

$$\begin{array}{ll} x_0=1 & y_0=\sqrt{1}=1{,}0000 \\ x_1=2 & y_1=\sqrt{7}=2{,}6458 \\ x_2=3 & y_2=\sqrt{13}=3{,}6056 \\ x_3=4 & y_3=\sqrt{19}=4{,}3589 \\ x_4=5 & y_4=\sqrt{25}=5{,}0000 \\ x_5=6 & y_5=\sqrt{31}=5{,}5678 \\ x_6=7 & y_6=\sqrt{37}=6{,}0828 \\ x_7=8 & y_7=\sqrt{43}=6{,}5574 \\ x_8=9 & y_8=\sqrt{49}=7{,}0000 \end{array}$$

и вычисляем интеграл по приближенным формулам.

По формуле прямоугольников (1) $I \approx \sum_{i=0}^{7} y_i = 34{,}8183$.

Абсолютная ошибка этого приближенного значения (по недостатку) равна $38-34{,}8183=3{,}1817$, а относительная (процентная) ошибка равна $\frac{3{,}1817\cdot 100}{38} \approx 8{,}37\%$.

По формуле прямоугольников (1*а*) $I \approx \sum_{i=1}^{8} y_i = 40{,}8183$.

Здесь абсолютная ошибка (по избытку) равна 2,8183, а относительная $\frac{2{,}8183\cdot 100}{38} \approx 7{,}42\%$.

По формуле трапеций $I \approx 4 + \sum_{i=1}^{7} y_i = 37{,}8183$.

Абсолютная ошибка этого результата составляет 0,1817, а относительная $\frac{0{,}1817\cdot 100}{38} \approx 0{,}48\%$.

По формуле Симпсона

$$I \approx \frac{1}{3}(8 + 4\cdot 19{,}1299 + 2\cdot 14{,}6884) \approx 37{,}9655.$$

Абсолютная ошибка составляет всего 0,0345, а относительная $\frac{0{,}0345\cdot 100}{38} \approx 0{,}09\%$.

**702.** По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ с точностью до 0,00001.

Р е ш е н и е. Вначале определим, на какое число $n$ частей следует разделить интервал интегрирования $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, чтобы получить заданную точность вычисления.

Полагая погрешность $\delta(n)$ формулы Симпсона меньше $10^{-5}$, имеем

$$\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,y_{НБ}^{(4)} < 10^{-5}.$$

Подставляя $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, $y_{НБ}^{(4)}=1$ $\left(\text{наибольшее значение } |y^{(4)}| = |\cos x| \text{ в интервале } \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, получим

$$\frac{\pi^5}{2^5\,180\,n^4} < 10^{-5}; \quad n > 5\pi\sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} = 8{,}5.$$

Далее, полагая $n=10$ (ближайшее четное число, большее 8,5) определяем точки деления $x_i$ и соответствующие им значения $y_i$ подынтегральной функции $y=\cos x$ (с одним лишним десятичным знаком, $\pi \approx 3{,}141592$):

| | |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}000000$ | $y_0 = 1{,}000000$ |
| $x_1 = 0{,}157080$ | $y_1 = 0{,}987688$ |
| $x_2 = 0{,}314159$ | $y_2 = 0{,}951057$ |
| $x_3 = 0{,}471239$ | $y_3 = 0{,}891007$ |
| $x_4 = 0{,}628318$ | $y_4 = 0{,}809017$ |
| $x_5 = 0{,}785398$ | $y_5 = 0{,}707107$ |
| $x_6 = 0{,}942478$ | $y_6 = 0{,}587785$ |
| $x_7 = 1{,}099557$ | $y_7 = 0{,}453991$ |
| $x_8 = 1{,}256637$ | $y_8 = 0{,}309017$ |
| $x_9 = 1{,}413716$ | $y_9 = 0{,}156435$ |
| $x_{10} = 1{,}570796$ | $y_{10} = 0{,}000000$ |

Подставляя в формулу Симпсона, получим искомое значение интеграла с точностью до $10^{-5}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \approx 0{,}0523599\,(1+4\cdot 3{,}196228+2\cdot 2{,}656876) \approx 1{,}00000.$$

В решении этой задачи показано, что для вычисления интеграла с заданной точностью, когда известно аналитическое выражение интегрируемой функции, можно, исходя из указанных неравенств для оценки погрешности приближенных формул, заранее определить необходимое число делений интервала интегрирования, которое бы обеспечило заданную точность.

Однако во многих случаях аналитическое выражение интегрируемой функции таково, что трудно найти наибольшее значение во всем интервале интегрирования для производных первого, второго или четвертого порядков, которые содержатся в неравенствах, определяющих погрешности формул прямоугольников, трапеций или Симпсона. Поэтому в вычислительной практике вместо указанных неравенств для оценки погрешности приближенного вычисления интегралов часто применяют другие критерии, с которыми можно ознакомиться в специальных пособиях по приближенным вычислениям.

**703.** Следующие интегралы вычислить по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 10 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам. (Все вычисления делать с четырьмя десятичными знаками.)

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x}; \qquad 2) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

**704*.** На сколько частей следует разделить интервал интегрирования интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, чтобы вычислить его с точностью до $10^{-2}$ по приближенным формулам: 1) прямоугольников, 2) трапеций и 3) Симпсона.

**705.** По формуле Симпсона вычислить интегралы $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ и $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\,dx$, разделив интервал интегрирования на 10 равных частей.*

**706*.** Найти длину дуги эллипса $x = 10\cos t$, $y = 6\sin t$, применив к интегралу, определяющему четверть всей дуги, формулу Симпсона.*

---

* Все вычисления выполнять с тремя десятичными знаками.

*ГЛАВА VI*

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Функции многих переменных, их обозначение и область определения

*Переменная $u$ называется функцией $n$ переменных (аргументов) $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений $x, y, z, \ldots, t$, из области их изменения, соответствует определенное значение $u$.*

Функциональная зависимость $u$ от $x, y, z, \ldots, t$ символически обозначается: $u=f(x, y, z, \ldots, t)$, где после символа функции (которым может быть не только буква $f$, но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z, \ldots, t)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$, $\ldots$, $t=l$ обозначается $P(a, b, c, \ldots, l)$. Например, если $F(x, y, z)=\frac{3x}{y-\lg z}$, то $F(-2; 3; 10)=\frac{-6}{3-1}=-3$.

*Геометрически каждая система значений двух переменных $x$, $y$ изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z=f(x, y)$ — некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных $x$, $y$, $z$ изображается точкой в пространстве.* (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и апликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, в целях общности, для упрощения записей и рассуждений, *систему значений любого числа $n$ переменных $x, y, z, \ldots, t$ называют точкой $n$-мерного пространства $M(x, y, z, \ldots, t)$, а функцию $u$, зависящую от $n$ переменных, называют функцией точки $n$-мерного пространства $u=f(x, y, z, \ldots, t)=f(M)$.*

*Областью определения (существования) функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.*

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность точек плоскости, а для функции трех переменных $u=F(x, y, z)$ — некоторую совокупность точек пространства.

**707.** Вычислить частное значение функции:

1) $f(x, y)=\sqrt{x^2-y^2}$ при $x=5$, $y=-3$;

2) $u=\ln\frac{x+z}{2y-z}$ в точке $A(6; 2; -1)$.

Решение. 1) $f(5; -3)=\sqrt{5^2-(-3)^2}=4$;

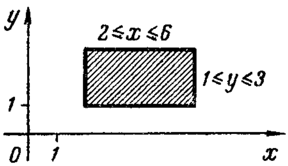
2) $u(A)=\ln\frac{6-1}{4+1}=0$.

**708.** Построить область $D$ изменения переменных $x$ и $y$, заданную следующими неравенствами:

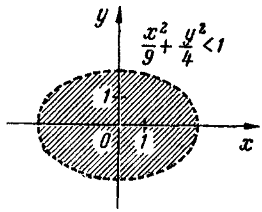
1) $2\leqslant x\leqslant 6$, $1\leqslant y\leqslant 3$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1$;

3) $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$; 4) $0<y<x$.

Решение. 1) Данным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, находящейся внутри и на границе прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x=2$, $x=6$, $y=1$ и $y=3$. Этот прямоугольник и есть область $D$ изменения




Черт .135




Черт. 136

переменных $x$ и $y$ (черт. 135). Такая область, в которую входит и ее граница, называется замкнутой.

2) Здесь область $D$ есть совокупность всех точек, лежащих внутри эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, так как все эти точки, и только они, удовлетворяют данному неравенству (черт. 136). Такая область, в которую не входит ее граница, называется открытой.

3) Здесь область $D$ есть круговое кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=9$ с общим центром в начале координат и радиусами $r_1=2$ и $r_2=3$, черт. 137 (замкнутая область).

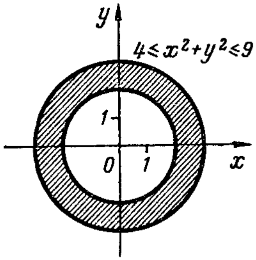
4) Здесь область $D$ (открытая) ограничена биссектрисой первого координатного угла и осью абсцисс (черт. 138).

**709.** Найти области определения следующих функций:

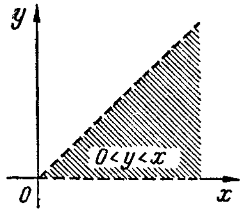
1) $z=4-x-2y$;  2) $p=\frac{3}{x^2+y^2}$;  3) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

4) $q=\frac{1}{\sqrt{xy}}$;  5) $u=\frac{x^2y}{2x+y}$;  6) $v=\arcsin(x+y)$.

Решение. Руководствуясь указаниями § 2, гл. I, последовательно находим:




Черт. 137




Черт. 138

1) Функция $z$, как и всякая целая рациональная функция, определена (может быть вычислена) при любых значениях $x$ и $y$, т. е. область определения функции $z$ есть вся числовая плоскость $xOy$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$. Геометрическое изображение (график) этой функции есть плоскость, пересекающая координатные оси в точках $A(4; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ и $C(0; 0; 4)$.

2) Функция $p$ определена при любой системе значений $x$, $y$, кроме системы $x=0$, $y=0$, при которой ее знаменатель обращается в нуль. Поэтому областью определения функции $p$ является вся числовая плоскость, кроме точки $(0; 0)$.

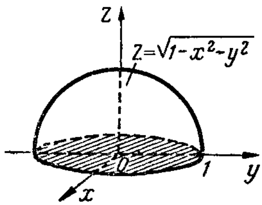
3) Область определения функции $z$ есть круг с центром в начале координат и радиусом $r=1$, включая и его границу — окружность $x^2+y^2=1$ (замкнутая область). Внутри круга подкоренное выражение положительно, на его границе — равно нулю, а вне круга — отрицательно. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью $xOy$ (черт. 139).

4) Функция $q$ определена в тех и только в тех точках плоскости $xOy$, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy>0$. Все эти точки лежат внутри первого и третьего квадрантов (открытая область).

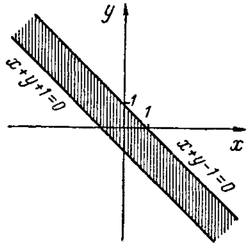
5) Областью определения функции $u$ является вся плоскость $xOy$, за исключением прямой $2x+y=0$, в точках которой знаменатель функции $u$ обращается в нуль.

6) Область определения функции $v$ есть совокупность систем значений $x$ и $y$, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x+y \leqslant 1$. На плоскости $xOy$ эта область представляет полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$ (черт. 140).

**710.** $\varphi(x, y)=\frac{2x-y}{x-2y}$; вычислить $\varphi(1; 2)$, $\varphi(3; 1)$, $\varphi(a; 2a)$, $\varphi(2b, -b)$.




Черт. 139




Черт. 140

**711.** $F(x, y) = 3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$; показать, что $F(tx, ty)= = t^3F(x, y)$.

**712.** Построить области изменения переменных $x$ и $y$, заданные неравенствами:

1) $-1<x<1$, $-1<y<1$; 2) $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \leqslant 0$;
3) $x^2+2y^2<4$, $x>0$, $y>0$; 4) $1 \leqslant x-y \leqslant 3$.

**713.** Найти области определения функций:

1) $z=a^2-x^2-2y^2$; 2) $u=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$;
3) $v=\frac{1}{x^2-y^2}$; 4) $w=\sqrt{3x}-\frac{5}{\sqrt{y}}$;
5) $p=\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$; 6) $q=\arccos(x^2+y^2)$.

## § 2. Предел функции многих переменных. Непрерывность

*Число $A$ называется пределом функции $f(M)$ в точке $M_0$:*

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=A,$$

*если абсолютное значение разности $f(M)-f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа $\varepsilon$, когда расстояние $MM_0$ меньше некоторого положительного числа $\delta$ (зависящего от $\varepsilon$).*

*Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке $M_0$, если*

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0).$$

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке $M_0$ необходимо выполнение следующих условий:

1) $f(M)$ должна быть определена в точке $M_0$ и вблизи этой точки;

2) $f(M)$ должна иметь предел, когда точка $M \longrightarrow M_0$ произвольным способом;

3) этот предел должен быть равен $f(M_0)$.

*Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке некоторой области $D$, называется непрерывной в этой области.*

**714.** Найти пределы:

$$1)\ \lim_{\substack{x \to 3\\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}; \qquad 2)\ \lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} \frac{x}{x+y}.$$

Решение. Убедившись, что функция не определена в предельной точке, делаем преобразования, руководствуясь указаниями § 7, гл. I:

$$1)\ \lim_{\substack{x \to 3\\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ так как } \lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

$$2)\ \lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} \frac{x}{x+y} = \lim \frac{1}{1+\frac{y}{x}} \text{ — не существует, ибо отношение } \frac{y}{x}$$

не имеет предела при произвольном стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(0; 0)$. Так, если $M \longrightarrow M_0$ вдоль различных прямых $y = kx$, то $\frac{y}{x} = k$, т. е. зависит от углового коэффициента прямой, по которой движется точка $M$.

**715.** В каких случаях функция многих переменных $f(M)$ будет разрывна в точке $M_0$? Пояснить их примерами.

Решение. 1) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке $M_0$, если она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке $M_0$.

Например, функция $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ определена на всей плоскости $xOy$, но не определена в точке $M_0(0; 0)$, поэтому в этой точке функция разрывна. Во всех других точках числовой плоскости она непрерывна.

2) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке $M_0$, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но не имеет предела, когда точка $M \longrightarrow M_0$.

Например, функция

$$u = \begin{cases} \sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 3 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(0;\ 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости $xOy$), но не имеет предела при $M \to M_0$. В остальных точках плоскости $xOy$ она непрерывна.

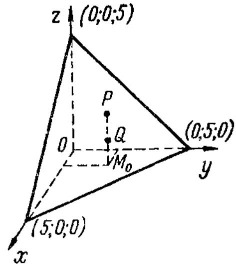
3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке $M_0$, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z = \begin{cases} 5 - x - y & \text{при } x \neq 1,\ y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(1;\ 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \to M_0$ не совпадает с частным значением в точке $M_0$; $\lim\limits_{M \to M_0} z = 2 \neq z(M_0) = 1$.

Графиком этой функции является вся плоскость $z = 5 - x - y$ без точки $P(1;\ 2;\ 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1;\ 2;\ 1)$ (черт. 141).




Черт. 141

*Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.*

Например, функция $z = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 1$. Эта окружность есть линия разрыва данной функции.

**716.** Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$.

**717.** Указать точки или линии разрыва функций:

1) $z = \dfrac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$; 2) $z = \dfrac{3y}{2x - y}$; 3) $z = \dfrac{x^2}{x^2 - 2y^2 - 4}$.

## § 3. Частные производные функции многих переменных

Функцию $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

*Производная от функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ по $x$, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y, z, \ldots, t$ являются постоянными, называется частной производной от $u$ по $x$*

и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $u'_x$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)-f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции $u$ по каждому из остальных ее аргументов.

Частные производные функции многих переменных находятся по известным правилам дифференцирования функции одной независимой переменной (гл. II).

**718.** Найти частные производные от функций:

1) $z=x^3+5xy^2-y^3$; 2) $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$; 3) $v=\sqrt[x]{e^y}$.

Решение. 1) Считая $z$ функцией только одного аргумента $x$, по формулам гл. II, находим $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+5y^2$.

Аналогично, считая $z$ функцией только $y$, получим $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=10xy-3y^2$.

2) Считая $u$ функцией только $x$, затем только $y$ и только $z$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}+\frac{z}{x^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}.$$

3) Заменяя корень степенью с дробным показателем и затем дифференцируя по каждой из двух переменных, получим:

$$v=e^{\frac{y}{x}};\quad v'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}};\quad v'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}.$$

**719.** Вычислить значения частных производных данных функций при указанных значениях аргументов:

1) $f(\alpha,\ \beta)=\cos(m\alpha-n\beta)$; $\alpha=\frac{\pi}{2m}$, $\beta=0$;

2) $z=\ln(x^2-y^2)$; $x=2$, $y=-1$.

Решение. 1) По формулам дифференцирования (гл. II) находим частные производные:

$$f'_\alpha=-m\sin(m\alpha-n\beta);\qquad f'_\beta=n\sin(m\alpha-n\beta).$$

Полагая $\alpha=\frac{\pi}{2m}$, $\beta=0$, получим $f'_\alpha\left(\frac{\pi}{2m},0\right)=-m$; $f'_\beta\left(\frac{\pi}{2m},0\right)=n$.

2) Находим производные, затем вычисляем их частные значения в указанной точке:

$$z'_x=\frac{2x}{x^2-y^2};\quad z'_y=-\frac{2y}{x^2-y^2};\quad z'_x(2;\ -1)=\frac{4}{3};\quad z'_y(2;\ -1)=\frac{2}{3}.$$

**720.** Проверить, что функция $z=x\ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Решение. Тождественно преобразуем данную функцию и находим ее частные производные по $x$ и по $y$:

$$z=x(\ln y-\ln x);\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\ln y-\ln x-1=\ln\frac{y}{x}-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Подставляя $z$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, получим тождество $x\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}$; $0=0$. Это значит, что данная функция удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Найти частные производные от функций:

**721.** $z=(5x^3y^2+1)^3$. **722.** $r=\sqrt{ax^2-by^2}$.

**723.** $v=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **724.** $p=\arcsin\frac{x}{t}$.

**725.** $f(m, n)=(2m)^{3n}$; вычислить $f'_m$ и $f'_n$ в точке $A\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

**726.** $p(x, y, z)=\sin^2(3x+2y-z)$; вычислить $p'_x(1;\ -1;\ 1)$, $p'_y(1;\ 1;\ 4)$, $p'_z\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$.

**727.** Проверить, что функция $v=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial v}{\partial y}=2v$.

**728.** Проверить, что функция $w=x+\frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$.

## § 4. Дифференциалы функции многих переменных

*Частным дифференциалом функции* $u=f(x, y, \ldots, t)$ *по* $x$ *называется главная часть соответствующего частного приращения* $\Delta_x u=f(x+\Delta x, y, \ldots, t)-f(x, y, \ldots, t)$, *линейная относительно приращения* $\Delta x$ (или, что то же, дифференциала $dx$).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции $u$ по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции $u$ по $x$, по $y$, $\ldots$, по $t$ обозначаются, соответственно, $d_x u$, $d_y u$, $\ldots$, $d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}dx;\quad d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad \ldots;\quad d_t u=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

*Полным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ называется главная часть ее полного приращения*

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots,\ t+\Delta t)-f(x,\ y,\ \ldots,\ t),$$

*линейная относительно приращений* $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$ (или, что то же, дифференциалов $dx, dy, \ldots, dt$).

*Полный дифференциал $du$ функции $u$ (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов*

$$du=d_x u+d_y u+\ldots+d_t u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

*Функция $u(x, y, \ldots, t)$ называется дифференцируемой в точке $(x, y, \ldots, t)$, если в этой точке она имеет полный дифференциал.*

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta u \approx du.^*$$

Вычисление полного дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее полного приращения. Поэтому указанное приближенное равенство используется для приближенных вычислений, простейшие из которых разъясняются в задаче 731.

**729.** Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=3x^2y^5$; 2) $u=2x^{yz}$; 3)* $p=\arccos\frac{1}{uv}$.

Решение.

1) а. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^5; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=15x^2y^4.$$

б. Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы функции:

$$d_x z=6xy^5\,dx; \quad d_y z=15x^2y^4\,dy.$$

в. Искомый полный дифференциал функции найдем как сумму ее частных дифференциалов: $dz=d_x z+d_y z=6xy^5\,dx+15x^2y^4\,dy$.

2) Следуя указанному плану, последовательно находим:

а) $u'_x=2yzx^{yz-1}$; $u'_y=2zx^{yz}\ln x$; $u'_z=2yx^{yz}\ln x$;

б) $d_x u=2yzx^{yz-1}\,dx$; $d_y u=2zx^{yz}\ln x\,dy$; $d_z u=2yx^{yz}\ln x\,dz$;

в) $du=2x^{yz}\left(\frac{yz}{x}dx+z\ln x\,dy+y\ln x\,dz\right)$.

3)* а) $\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{|uv|}{u^2v\sqrt{u^2v^2-1}}$; $\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{|uv|}{uv^2\sqrt{u^2v^2-1}}$;

---

* Исключая точки, где $u'_x=u'_y=\ldots=u'_t=0$.

б) $d_u p = \frac{|v|\,du}{v|u|\sqrt{u^2v^2-1}}$; $d_v p = \frac{|u|\,dv}{u|v|\sqrt{u^2v^2-1}}$;

в) $dp = \frac{1}{\sqrt{u^2v^2-1}}\left(\frac{|v|\,du}{v|u|} + \frac{|u|\,dv}{u|v|}\right)$.

**730.** Вычислить значение полного дифференциала функции $z = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$ при $x=1$, $y=3$, $dx=0{,}01$, $dy=-0{,}05$.

Решение. Находим частные производные, затем частные дифференциалы и полный дифференциал данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Подставляя заданные значения независимых переменных $x$, $y$, $dx$ и $dy$, функцией которых является полный дифференциал $dz$, получим

$$dz = \frac{1\cdot(-0{,}05) - 3\cdot 0{,}01}{1+9} = -0{,}008.$$

**731.** Вычислить приближенное значение:

1) $1{,}08^{3{,}96}$; 2) $\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arctg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$.

Решение. Если требуется вычислить значение функции $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $M_1(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ и если проще вычислить значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $x_1 - x_0 = dx$, $y_1 - y_0 = dy$, ..., $t_1 - t_0 = dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt,$$

*и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле*

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt. \quad (a)$$

1) Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке $M_1$ (1,08; 3,96) и что вспомогательная точка будет $M_0(1; 4)$, получим

$$f(M_0) = 1^4 = 1; \quad f'_x(M_0) = yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 4; \quad f'_y(M_0) = x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 0;$$

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0{,}08; \quad dy = 3{,}96 - 4 = -0{,}04.$$

Подставляя в формулу ($a$), найдем

$$1{,}08^{3{,}96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy = 1 + 4\cdot 0{,}08 = 1{,}32.$$

2) Пусть $\frac{\sin 1{,}49\cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arc\,tg} z$ в точке $M_1(-2{,}95;\ 1{,}49;\ 0{,}07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Тогда $dx = -2{,}95-(-3) = 0{,}05$; $dy = 1{,}49 - 1{,}57 = -0{,}08$; $dz = 0{,}07$;

$\varphi(M_0) = 2^{-3}\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$; $\varphi'_x(M_0) = 2^x \ln 2\cdot \sin y \operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0} = 0$;

$$\varphi'_y(M_0) = 2^x \cos y \operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0} = 0;\quad \varphi'_z(M_0) = \left.\frac{2^x \sin y}{1+z^2}\right|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Подставляя в формулу ($a$), получим

$$\frac{\sin 1{,}49\cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}} \approx 2^{-3}\cdot 0{,}07 \approx 0{,}01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

**732.** $z = y \ln 2x$.

**733.** $u = \sin^2 t \cos^2 x$.

**734.** $v = \frac{xy}{z}$.

**735.** $f(m, n, p) = e^{am}\cos\frac{bn}{p}$.

**736.** Вычислить значение полного дифференциала функции:

1) $z = \frac{x}{x-y}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = -\frac{1}{3}$, $dy = \frac{1}{2}$;

2) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при перемещении точки $M(x, y, z)$ из положения $M_0(10;\ -10;\ 5)$ в положение $M_1(9;\ -11;\ 6)$.

**737.** Найти приближенное значение $1{,}94^2 e^{0{,}12}$, исходя из значения функции $f(x, y) = x^2 e^y$ в точке $M_0(2;\ 0)$ и заменяя ее полное приращение полным дифференциалом *.

**738.** Найти приближенное значение $\sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09$, исходя из значения функции $z = \sin x \operatorname{tg} y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

**739.** Найти приближенное значение $2{,}68^{\sin 0{,}05}$, исходя из значения функции $z = x^{\sin y}$ в точке $M_0(e,\ 0)$ и заменяя ее приращение дифференциалом.*

## § 5. Дифференцирование сложных функций

*Переменная $z$ называется сложной функцией от независимых переменных $x$, $y$, ..., $t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u$, $v$, ..., $w$:*

$$z = F(u, v, \ldots, w),$$

* Все вычисления выполнять с точностью до 0,01.

где

$u=f(x, y, \ldots, t), \quad v=\varphi(x, y, \ldots, t), \ldots, \quad w=\psi(x, y, \ldots, t).$

*Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (*)$$

Если, в частности, все аргументы $u, v, \ldots, w$ будут функциями от одной независимой переменной $x$, то и $z$ будет сложной функцией только от $x$. Производная такой сложной функции (от одной независимой переменной) называется полной производной и определяется формулой

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (**)$$

(Она получается из формулы для полного дифференциала функции $z(u, v, \ldots, w)$ путем деления на $dx$.)

**740.** Найти производные сложных функций:

1) $y=u^2e^v$, $u=\sin x$, $v=\cos x$; 2) $p=u^v$, $u=\ln(x-y)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$;

3) $z=x\sin v\cos w$, $v=\ln(x^2+1)$, $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. 1) Здесь $y$ есть сложная функция одной независимой переменной $x$. Пользуясь формулой $(**)$, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}=2ue^v\cos x+u^2e^v(-\sin x).$$

2) $p$ есть сложная функция двух переменных $x$ и $y$. По общим формулам $(*)$, найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{x-y}+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}};$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{y-x}+u^v\ln u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right).$$

3) $z$ есть сложная функция одной переменной $x$ вида: $z=F(x, v, w)$, $v=f(x)$, $w=\varphi(x)$. Формулу для полной производной такой функции получим, полагая $u=x$ в формуле $(**)$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Согласно этой формуле, найдем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**741.** $u=e^{z-2y}$, $z=\sin x$, $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$?

**742.** $z=\ln(e^x+e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^3$.

**743.** $p=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$; $\frac{\partial p}{\partial x}$? $\frac{\partial p}{\partial y}$?

**744.** $f(x)=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{df}{dx}$?

## § 6. Дифференцирование неявных функций

*Переменная u называется неявной функцией от независимых переменных x, y, ..., t, если она задана уравнением $f(x, y, ..., t, u)=0$, которое не разрешено относительно u.* При этом, если функция $f(x, y, \ldots, t, u)$ и ее частные производные $f'_x$, $f'_y$, ..., $f'_t$, $f'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0)=0$, а $f'_u(M_0)\neq 0$, то уравнение $f(x, y, \ldots, t, u)=0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ и в самой этой точке определяет $u$ как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, \ldots, t$.

Производные неявной функции $u$, заданной уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_u};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_u};\quad \ldots;\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{f'_t}{f'_u}. \qquad (\text{A})$$

В частности, если $y$ есть неявная функция одной переменной $x$, заданная уравнением $f(x, y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad (\text{Б})$$

**745.** Найти производную неявной функции $y$, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+2x-6y+2=0$; 2) $x^y=y^x$, и вычислить ее значение при $x=1$.

Решение. 1) Обозначив левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные $f'_x=2x+2$, $f'_y=2y-6$ и, подставив их в формулу (Б), получим $y'=\frac{x+1}{3-y}$.

Далее, подставляя в исходное уравнение $x=1$, найдем два соответствующих значения функции $y_1=1$ и $y_2=5$. Поэтому при $x=1$ и производная имеет два значения: $y'_1(1)=1$, $y'_2(1)=-1$.

2) Преобразовав данное уравнение к виду $x^y - y^x = 0$, согласно формуле (Б), получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^y - y^x)'_x}{(x^y - y^x)'_y} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

При $x=1$ из данного уравнения определяем $y=1$. Искомое значение $y'(1)=1$.

**746.** Найти частные производные неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+z^2-z=0$; 2) $ax+by-cz = k\cos(ax+by-cz)$.

Решение. 1) Обозначив левую часть уравнения через $\varphi(x, y, z)$ и пользуясь формулами (А), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z} = -\frac{2x}{2z-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z} = -\frac{2y}{2z-1}.$$

2) Преобразуя уравнение к виду $ax+by-cz-k\cos(ax+by-cz)=0$ и обозначая его левую часть через $F(x, y, z)$ по формулам (А) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{a+ak\sin(ax+by-cz)}{-c-ck\sin(ax+by-cz)} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{b+bk\sin(ax+by-cz)}{-c-ck\sin(ax+by-cz)} = \frac{b}{c}.$$

Найти производные неявных функций:

**747.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? **748.** $uv = -\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

**749.** $y^2 = \frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$? **750.** $x\sin y + \cos 2y = \cos y$; $y'\Big|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

**751.** $x^2+y^2+z^2+2xz=1$; $z'_x$? $z'_y$? **752.** $e^u = \cos v \cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

**753.** Проверить, что функция $4\sin(3x+2y+5z)=3x+2y+5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$.

## § 7. Частные производные высших порядков

Функцию многих аргументов $u=f(x, y, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.

*Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка.* Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u''_{xy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=u''_{yx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}\,;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка.* Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=f'''_{xxx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=f'''_{xxy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}=f'''_{xyy}\,; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=f'''_{xyx}\,.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого, пятого и других высших порядков.

*Частные производные высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны.* Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\,.$$

Согласно этому положению, функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет три различных частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

четыре различных частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n+1$ различных частных производных $n$-го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной (гл. II).

**754.** Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z=x^3-2x^2y+3y^2$; 2) $u\ (x,\,y,\,t)=e^{xyt}$.

Р е ш е н и е. 1) Сначала находим частные производные первого порядка, затем искомые частные производные второго порядка:

$$z'_x=3x^2-4xy; \quad z'_y=-2x^2+6y;$$

$$z''_{xx}=6x-4y; \quad z''_{xy}=z''_{yx}=-4x; \quad z''_{yy}=6.$$

2) Последовательно дифференцируя, находим

$$u'_x = yte^{xyt}; \quad u'_y = xte^{xyt}; \quad u'_t = xye^{xyt}; \quad u''_{xx} = y^2t^2e^{xyt};$$
$$u''_{xy} = u''_{yx} = t(1+xyt)e^{xyt}; \quad u''_{xt} = u''_{tx} = y(1+xyt)e^{xyt};$$
$$u''_{yt} = u''_{ty} = x(1+xyt)e^{xyt}; \quad u''_{yy} = x^2t^2e^{xyt}; \quad u''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}.$$

**755.** Проверить, что $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функций: 1) $z = \cos(ax - by)$, 2) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Решение. 1) Дифференцируя $z$ по $x$, найдем $z'_x = -a\sin(ax - by)$; дифференцируя $z'_x$ по $y$, найдем $(z'_x)'_y = z''_{xy} = ab\cos(ax - by)$.

Дифференцируем в другом порядке: сначала найдем производную от $z$ по $y$, $z'_y = b\sin(ax - by)$, затем производную от $z'_y$ по $x$, $(z'_y)'_x = z''_{yx} = ab\cos(ax - b)\cdot$

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что для данной функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2) Последовательно дифференцируя, находим $z''_{xy}$, затем $z''_{yx}$:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}; \quad z''_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2};$$
$$z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}; \quad z''_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Следовательно, и для этой функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

**756.** Проверить, что функция $z = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Решение. Найдем частные производные второго порядка, содержащиеся в данном уравнении:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right)\cdot\left[-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\cos(2y - x).$$

Подставляя их в данное уравнение, получим тождество: $0 = 0$.

**757.** Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z = \frac{x^2}{2y - 3}$; 2) $u = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

**758.** Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, если $u = \ln(x + y)$.

**759.** Найти $u'''_{xyy}$, если $u = \sin(xy)$.

**760.** Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если $u = 2^{xyz}$.

**761.** Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функций:

1) $z = \ln\frac{x}{y}$; 2) $z = \operatorname{arcctg}(x + 2y)$.

**762.** Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$ для функции $v=\frac{t}{xyz}$.

**763.** Проверить, что функция $p=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$.

**764.** Проверить, что функция $u=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$.

## § 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z)=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на ней, то:

касательная плоскость к поверхности в точке $M_0$ определяется уравнением

$$(x-x_0)F'_x(M_0)+(y-y_0)F'_y(M_0)+(z-z_0)F'_z(M_0)=0; \qquad (\mathrm{I})$$

нормаль к поверхности в точке $M_0$ (прямая, проходящая через точку $M_0$ перпендикулярно к касательной плоскости) определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (\mathrm{II})$$

Точки поверхности $F(x, y, z)=0$, где одновременно обращаются в нуль все частные производные первого порядка $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$, называются особыми. В таких точках поверхность не имеет ни касательной плоскости, ни нормали.

**765.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z=2x^2+y^2$ в точке А $(1;\ -1;\ 3)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $2x^2+y^2-z=0$ и, обозначив его левую часть через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, вычислим их числовые значения в данной точке $F'_x(A)=4$, $F'_y(A)=-2$, $F'_z(A)=-1$ и, подставляя в общие уравнения (I) и (II), получим:

уравнение касательной плоскости $4(x-1)-2(x+1)-(z-3)=0$ или $4x-2y-z-3=0$;

уравнения нормали $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.

**766.** На сфере $x^2+y^2+z^2=676$ найти точки, где касательная плоскость параллельна плоскости $3x-12y+4z=0$.

Решение. Пользуясь общим уравнением (I), составим уравнение касательной плоскости к данной сфере в ее точке $(x_0, y_0, z_0)$:

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$

или

$$x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=676.$$

Согласно условию параллельности двух плоскостей, чтобы касательная плоскость была параллельна данной плоскости, в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах должны быть пропорциональны: $\frac{x_0}{3}=\frac{y_0}{-12}=\frac{z_0}{4}=\lambda$.

Определив отсюда $x_0=3\lambda$, $y_0=-12\lambda$, $z_0=4\lambda$ и подставляя в уравнение сферы, находим два значения коэффициента пропорциональности: $\lambda=\pm 2$ и две искомых точки на сфере (6; —24; 8) и (—6; 24; —8), в которых касательная плоскость параллельна данной плоскости.

**767.** Показать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=m^3$ образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Решение. Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ будет $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$. Она отсекает на осях координат отрезки $a=3x_0$, $b=3y_0$, $c=3z_0$. Эти отрезки являются взаимно перпендикулярными ребрами тетраэдра, образованного касательной плоскостью и плоскостями координат. Приняв одно из этих ребер за высоту тетраэдра, найдем, что его объем $V=\frac{1}{6}abc=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}m^3$ (так как точка $P$ лежит на данной поверхности) не зависит от координат точки касания $P$. Из этого следует, что различные касательные плоскости к данной поверхности образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного (одинакового) объема.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

**768.** $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке (1; —1; 1).

**769.** $2z=x^2-y^2$ в точке (3; 1; 4).

**770.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в точках $(x_0, y_0, z_0)$ и $(a, b, c)$.

**771.** Найти касательные плоскости к эллипсоиду $4x^2+4y^2+z^2=4$, параллельные плоскости $12x-3y+2z=0$.

**772.** Найти уравнения касательных плоскостей к параболоиду $4z=x^2+y^2$ в точках пересечения его с прямой $x=y=z$.

**773.** Проверить, что поверхности $x^2-xy-8x+z+5=0$ и $4+x+2y=\ln z$ касаются друг друга, т. е. имеют общую касательную плоскость, в точке (2; —3; 1).

## § 9. Экстремум функции многих переменных

*Значение функции $f(M)$ в точке $M_0$ называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках.*

*Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют* *. Такие точки называются критическими.

Критическая точка $M_0$ будет точкой экстремума функции $f(M)$, если для всех точек $M$, достаточно близких к $M_0$ (в окрестности $M_0$), приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если $\Delta f$ сохраняет положительный знак, то $M_0$ есть точка минимума, а если $\Delta f$ сохраняет отрицательный знак, то $M_0$ есть точка максимума функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака $\Delta f$ можно исследовать каждую критическую точку $M_0$, в которой функция дважды дифференцируема, по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0).$$

При этом:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0$ есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0$ нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке $M_0$ требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения $\Delta f$ вблизи этой точки.

Условия 1) и 2) являются достаточными условиями наличия или отсутствия экстремума.

**774.** Найти экстремумы функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; 2) $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$;

3) $v = (x - y)^2 + (y - 1)^3$; 4) $w = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Находим частные производные 1-го порядка $z'_x$ и $z'_y$ и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют и которые лежат внутри области опре-

* Это необходимые условия экстремума (но недостаточные, они могут выполняться и в точках, где нет экстремума).

деления функции: $z'_x=3x^2-6y$; $z'_y=24y^2-6x$. Решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, найдем две точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Обе точки являются критическими, так как функция $z$ определена на всей плоскости $xOy$. Других критических точек нет, так как $z'_x$ и $z'_y$ существуют при любых значениях $x$ и $y$.

Далее исследуем критические точки $M_1$ и $M_2$ по знаку определителя $\Delta$, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx}=A=6x$; $z''_{xy}=B=-6$; $z''_{yy}=C=48y$.

Для точки $M_1$ получим $A=0$, $B=-6$, $C=0$ и $\Delta(M_1)=AC-B^2<0$. Следовательно, согласно достаточному условию 2), в точке $M_1$ нет экстремума.

Для точки $M_2$ имеем $A=6$, $B=-6$, $C=24$ и $\Delta(M_2)>0$. Согласно достаточному условию 1), $M_2$ есть точка минимума. $z_{\min}=z(M_2)=4$.

2) Ищем критические точки $u'_x=3x^2-3$; $u'_y=2y+2\sqrt{y^3}$. Из системы уравнений $u'_x=0$, $u'_y=0$ найдем точки $P_1(1; 0)$ и $P_2(-1; 0)$. Эти точки принадлежат области определения исследуемой функции: $-\infty<x<+\infty$, $0\leqslant y<+\infty$ (которая представляет половину плоскости $xOy$, лежащую выше оси $Ox$, включая и ось $Ox$), но они расположены не внутри этой области, а на ее границе $y=0$. Поэтому точки $P_1$ и $P_2$ не являются критическими. Частные производные $u'_x$ и $u'_y$ существуют во всей области определения функции $u$. Поэтому данная функция, как не имеющая критических точек, не имеет экстремума. (Если не учесть, что граничные точки не могут быть точками экстремума, то, определив знак $\Delta$ в точке $P_1$, придем к ошибочному заключению, что она есть точка минимума.)

3) Ищем критические точки $v'_x=2(x-y)$; $v'_y=-2(x-y)+3(y-1)^2$.

Решая систему уравнений $v'_x=0$, $v'_y=0$, найдем единственную точку $M_0(1; 1)$, которая является единственной критической точкой функции $v$.

Далее, чтобы установить, будет ли экстремум в точке $M_0$, вычисляем значение $\Delta$ в этой точке: $v''_{xx}=2$, $v''_{xy}=-2$, $v''_{yy}=2+6(y-1)$; $\Delta(M_0)=0$.

Здесь оказалось, что $\Delta(M_0)$ не имеет знака (случай 3). Чтобы установить, имеет ли экстремум функция $v$ в критической точке $M_0$, исследуем знак ее приращения $\Delta v=v(M)-v(M_0)=(x-y)^2+(y-1)^3$ вблизи точки $M_0$.

Пусть точка $M$ лежит на биссектрисе $y=x$. Тогда $\Delta v=(y-1)^3$. Если $M$ будет ниже $M_0$, т. е. если $y_M<1$, то $\Delta v<0$, а если $M$ будет выше $M_0$, т. е. если $y_M>1$, то $\Delta v>0$. Здесь оказалось, что вблизи $M_0$ разность $\Delta v$ не сохраняет знака, вследствие чего в точке $M_0$ нет экстремума.

4) Ищем критические точки $w'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $w'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$; $w'_z = \frac{2}{3\sqrt[3]{z}}$.

Эти частные производные не обращаются в нуль ни при каких значениях $x$, $y$, $z$; они не существуют (обращаются в бесконечность) в точке $P_0(0; 0; 0)$. Точка $P_0$ лежит внутри области определения функции $w$, которая представляет совокупность всех точек $(x, y, z)$ пространства. Поэтому $P_0$ критическая точка.

Исследуя знак разности $w(P) - w(P_0) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$ вблизи точки $P_0$, убеждаемся, что при любых отличных от нуля значениях $x$, $y$, $z$ она сохраняет положительный знак. Поэтому $P_0$ есть точка минимума, $w_{\min} = w(P_0) = 0$.

Исследовать на экстремум функции:

**775.** $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **776.** $v = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

**777.** $p = 2xy - 2x - 4y$. **778.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

**779.** $\varphi = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$. **780.** $q = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

**781.***. $z = 2 + (x-1)^4(y+1)^6$. **782***. $u = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{4}{5}}$.

## § 10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

*Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции*, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

*Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области $D$, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области $D$, или в точках, лежащих на границе области.*

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области $D$, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области $D$, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области $D$.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области $D$.

**783.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $z=x^2-y^2+2a^2$ в круге $x^2+y^2\leqslant a^2$;

2) $v=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.

Решение. 1) Согласно указанному правилу:

А. Найдем критические точки функции $z$, лежащие внутри круга, и вычислим ее значения в этих точках: $z'_x=2x$, $z'_y=-2y$; решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, найдем критическую точку $K(0;\ 0)$, которая лежит внутри круга. Других критических точек нет. Значение функции в этой точке $z(K)=2a^2$.

Б. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области — на окружности $x^2+y^2=a^2$. Уравнение окружности связывает между собой переменные $x$ и $y$. Определяя из этого уравнения одну переменную через другую, например $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, и подставляя в выражение функции $z$, преобразуем ее в функцию одной переменной: $z(x)=2x^2+a^2$, где $x$ изменяется на отрезке $[-a,\ a]$.

Далее ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на отрезке $[-a,\ a]$, которые и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции $z(x,\ y)$ на границе заданной области — на окружности.

Согласно правилу, указанному в гл. III, § 5:

I. Ищем критические точки функции $z(x)$, лежащие внутри отрезка $[-a,\ a]$, и вычисляем ее значения в этих точках: $z'(x)=4x$; $z'(x)=0$ в точке $x=0$. Эта единственная критическая точка лежит внутри данного отрезка. Значение $z(x)$ в этой точке $z(0)=a^2$.

II. Вычисляем значения $z(x)$ на концах данного отрезка: $z(-a)=z(a)=3a^2$.

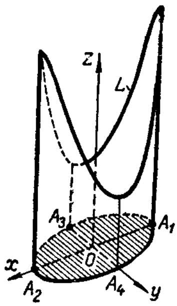
III. Сравнивая вычисленные значения $z(x)$ во внутренней критической точке $x=0$ и на концах отрезка $x=-a$ и $x=a$, заключаем: наибольшее значение функции $z(x)$ на отрезке $[-a, a]$ [или что то же, функции $z(x,\ y)$ на границе данной области — на окружности $x^2+y^2=a^2$] равно $3a^2$, а наименьшее значение $z(x)$ на данном отрезке [или, что то же, $z(x,\ y)$ на данной границе] равно $a^2$.

В. Сравнивая значение $z$ во внутренней критической точке $K$ с ее наибольшим и наименьшим значениями на окружности, заключаем: наибольшее значение функции $z$ в данной замкнутой области — круге равно $3a^2$ и достигается ею в граничных точках $A_1(-a,\ 0)$ и $A_2(a,\ 0)$, а ее наименьшее значение в этой области равно $a^2$ и достигается в граничных точках $A_3(0,\ -a)$ и $A_4(0,\ a)$, (черт. 142). Ординаты точек $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, которые лежат на окружности, вычислены из уравнения окружности по известным их абсциссам.

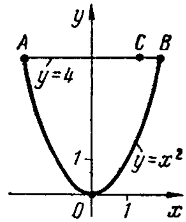
2) Руководствуясь указанным правилом:

А. Ищем критические точки функции $v$, лежащие внутри заданной области (черт. 143) $v'_x = 6x^2 + 8x - 2y$; $v'_y = 2y - 2x$; решая систему уравнений $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, найдем две критические точки $(0;\ 0)$ и $(-1;\ -1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Других критических точек функция $v$ не имеет.

Б. Ищем наибольшее и наименьшее значения $v$ на границе заданной области. Она состоит из двух участков $AOB$ и $AB$, имеющих различные уравнения. Поэтому вначале найдем наибольшее и наименьшее значения $v$ на каждом из этих участ-



Черт. 142



Черт. 143

ков, затем, сопоставляя их, найдем наибольшее и наименьшее значения $v$ на всей границе.

На участке $AOB$ имеем $y = x^2$, $v_1(x) = x^4 + 4x^2$, где $x$ изменяется на отрезке $[-2;\ 2]$.

Согласно правилу гл. III, § 5, ищем наибольшее и наименьшее значения $v_1$ на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_1 = 4x^3 + 8x$; $v'_1 = 0$ при $x = 0$; $v_1(0) = 0$.

II. $v_1(-2) = v_1(2) = 32$.

III. Сравнивая значения $v_1$ во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -2$, $x = 2$, заключаем: наибольшее значение $v_1$ на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение $v_1$ на этом отрезке равно нулю (в точке $x = 0$).

На участке $AB$ имеем $y = 4$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения $v_2$ на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_2 = 6x^2 + 8x - 8$; внутри данного отрезка $v'_2 = 0$ при $x = \frac{2}{3}$ (в точке $C$); $v_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$.

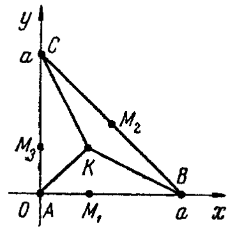
II. $v_2(-2) = v_2(2) = 32$.

III. Наибольшее значение $v_2$ на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x=\pm 2$), а наименьшее значение $v_2$ на этом отрезке равно $16\frac{22}{27}$ $\left(\text{в точке } x=\frac{2}{3}\right)$.

Сопоставляя значения $v$ на участках $AOB$ и $AB$, приходим к выводу: на всей границе $AOBA$ наибольшее значение функции $v$ равно 32 (в точках $A$ и $B$), а ее наименьшее значение равно нулю (в точке $O$).

В. Внутри заданной замкнутой области функция $v$ не имеет точек экстремума, ее наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках, лежащих на границе этой области. В граничных точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$ функция $v$ имеет наибольшее значение, $v_{нб}=v(A)=v(B)=32$, а в граничной точке $O(0,\ 0)$ она имеет наименьшее значение, $v_{нм}=v(O)=0$.

**784.** Найти такую точку равнобедренного прямоугольного треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшая.




**Черт. 144**

Решение. Выберем прямоугольную систему координат $xOy$, как показано на черт. 144, тогда координаты вершин треугольника будут $A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$, $C(0,\ a)$. Возьмем произвольную точку треугольника $M(x,y)$ и определим сумму квадратов расстояний ее до вершин треугольника $u=MA^2+MB^2+MC^2=3x^2+3y^2-2ay-2ax+2a^2$. Она зависит от двух переменных $x$ и $y$, которые согласно условию могут принимать любые значения из замкнутой области треугольника $ABC$.

Далее,согласно правилу, указанному в начале этого параграфа, найдем наименьшее значение функции $u(x,\ y)$ в треугольнике $ABC$:

А. $u'_x=6x-2a$; $u'_y=6y-2a$.

Из системы уравнений $u'_x=0$, $u'_y=0$ найдем единственную критическую точку $K\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$, лежащую внутри треугольника $ABC$. Значение $u$ в этой точке $u(K)=\frac{4}{3}a^2$.

Б. На стороне $AB$ имеем: $y=0$, $u(x,\ 0)=u_1=3x^2-2ax+2a^2$, где $0\leqslant x\leqslant a$.

I. $u'_1=6x-2a$; $u'_1=0$ при $x=\frac{a}{3}$ (в точке $M_1$); $u_1\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_1(0)=2a^2$; $u_1(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_1(x)$ на отрезке $[0,\ a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

На стороне $BC$ имеем: $x=a-y$ (из уравнения прямой $BC$); $u(a-y,\ y)=u_2=6y^2-6ay+3a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u'_2=12y-6a$; $u'_2=0$ при $y=\frac{a}{2}$ (в точке $M_2$); $u_2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2$.

II. $u_2(0)=u_2(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_2(y)$ на отрезке $[0, a]$ равно $\frac{3}{2}a^2$.

На стороне $CA$ имеем: $x=0$; $u(0, y)=u_3=3y^2-2ay+2a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u_3'=6y-2a$; $u_3'=0$ при $y=\frac{a}{3}$ (в точке $M_3$); $u_3\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_3(0)=2a^2$; $u_3(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_3(y)$ на отрезке $[0, a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

Сравнивая значения $u$ на сторонах $AB$, $BC$, $CA$, заключаем: наименьшее значение $u$ на всей границе $ABCA$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

В. Сопоставляя значение $u$ во внутренней критической точке $K$ с ее наименьшим значением на границе области, приходим к выводу, что среди всех значений $u$ в различных точках треугольника $ABC$ наименьшим является ее значение в точке $K\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Легко убедиться, что точка $K$ является центром тяжести данного треугольника.

Эту задачу можно решить и для любого треугольника; искомая точка также будет его центром тяжести.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

**785.** $\varphi=x^3+y^3-9xy+27$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 4$

**786.** $r=3xy$ в круге $x^2+y^2\leqslant 2$.

**787.** Найти наибольшее значение функции $v=xy(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=1$, $y=0$, $x+y=6$.

**788*.** Найти наименьшее значение функции $u=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1{,}5\pi$, $0\leqslant y\leqslant 1{,}5\pi$.

**789.** Найти точку треугольника $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наибольшее значение.

**790.** Какой треугольник с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь? (Использовать формулу для площади треугольника по трем его сторонам.)

**791.** Найти точку четырехугольника $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, a)$, $(0, 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

**792.** Из куска проволоки длиной $l$ сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом.

**793.** Определить размеры открытого прямоугольного ящика с данным объемом $V$ и с наименьшей поверхностью.

*ГЛАВА VII*

# КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кратные (двойные, тройные), криволинейные и поверхностные интегралы, как и обыкновенные (однократные) определенные интегралы, служат для вычисления различных величин.

В главе V «Определенный интеграл» разъяснен общий метод вычисления различных величин как пределов соответствующих интегральных сумм. Суть его заключается в следующем:

1. Искомая величина разбивается на большое число малых элементов.

2. Вычисляется приближенное значение (главная часть) каждого элемента и путем их суммирования находится приближенное значение всей искомой величины в виде интегральной суммы.

3. Находится предел этой интегральной суммы, который и дает точное значение искомой величины.

В простейших задачах, приведенных в главе V, вычисление величины сводилось к вычислению предела интегральной суммы, распространяющейся на прямолинейный отрезок изменения одной переменной, который называется простым или обыкновенным определенным интегралом.

В более сложных задачах, рассматриваемых в этой главе, вычисление величины сводится к вычислению предела интегральной суммы, распространяющейся или на плоскую область изменения двух переменных, или на пространственную область изменения трех переменных, или вдоль дуги некоторой кривой, или по некоторой поверхности, которые и называются соответственно двойным, тройным, криволинейным и поверхностным интегралами.

Все указанные определенные интегралы определяются вполне аналогично и отличаются друг от друга в основном лишь областью интегрирования.

## § 1. Двойной интеграл, его вычисление двукратным интегрированием

Если функция $f(M)$ непрерывна в некоторой замкнутой плоской области $D$ и если разбить эту область произвольным способом на $n$ частичных областей с площадями $\Delta s_1$, $\Delta s_2$, ..., $\Delta s_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\,\Delta s_1 + f(M_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области $D$.

Очевидно интегральная сумма зависит как от способа разбиения области $D$ на $n$ частичных областей, так и от выбора в них точек $M_i$, т. е. для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной замкнутой области $D$ можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм.

Однако при неограниченном увеличении $n$ и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров* частичных областей все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется двойным интегралом от функции $f(M)$ по области $D$ и обозначается $\iint\limits_D f(M)\,ds$.

Двойной интеграл обладает всеми основными свойствами обыкновенного определенного интеграла: *область интегрирования двойного интеграла можно разбивать на части, двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от всех слагаемых, постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла*.

Вычисление двойного интеграла $\iint\limits_D f(M)\,ds$ сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов вида

$$I_1 = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha, \beta)\,d\beta\right] d\alpha = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha, \beta)\,d\beta$$

или

$$I_2 = \int\limits_{\beta_I}^{\beta_{II}} \left[\int\limits_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha, \beta)\,d\alpha\right] d\beta = \int\limits_{\beta_I}^{\beta_{II}} d\beta \int\limits_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha, \beta)\,d\alpha,$$

каждый из которых есть результат последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов.

---

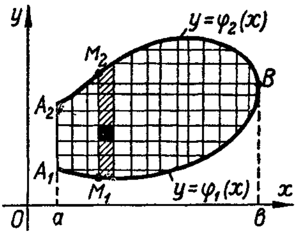
* Диаметром области называется наибольшая из ее хорд.

В двукратном интеграле $I_1$ вначале функция $F(\alpha, \beta)$ интегрируется по $\beta$, причем $\alpha$ рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по $\alpha$.

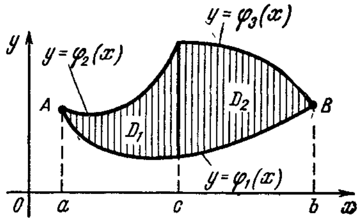
В двукратном интеграле $I_2$ интегрирование выполняется в обратном порядке: вначале по $\alpha$, причем $\beta$ рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по $\beta$.

*Как правило пределы при первом интегрировании являются переменными, зависят от той переменной, которая при этом рассматривается как постоянная. Пределы при втором интегрировании всегда постоянны.*

Если область интегрирования $D$ отнесена к прямоугольной системе координат $xOy$ и если она разбивается на частичные




Черт. 145




Черт. 146

области сетью прямых, параллельных осям координат (черт. 145), то площадь частичной области $ds = dx\,dy$ (как площадь прямоугольника со сторонами $dx$ и $dy$) и

$$\iint\limits_D f(M)\,ds = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Если при этом область $D$ такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси $Oy$, пересекает ее границу в двух точках (черт. 145), то она определяется неравенствами вида

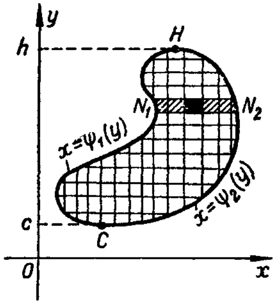
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$—уравнения нижней $(A_1M_1B)$ и верхней $(A_2M_2B)$ линий границы; $a$ и $b$—абсциссы крайних слева и справа точек области $D$. В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

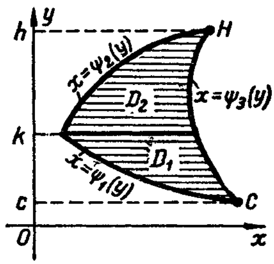
$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy. \qquad (1)$$

По этой формуле интегрирование выполняется вначале по $y$— в пределах от $y_1 = \varphi_1(x)$ до $y_2 = \varphi_2(x)$, которые указывают границы изменения $y$ при постоянном, но произвольном значении $x$, а потом по $x$, — в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = b$, которые являются крайними (наименьшим и наибольшим) значениями $x$ во всей области $D$.

В этом случае, если окажется, что нижняя или верхняя линия границы состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область $D$ следует разбить прямыми, параллельными оси $Oy$, на части, в каждой из которых нижняя и верхняя линии границы определялись бы каждая одним уравнением.




Черт, 147




Черт. 148

Так, для области $D$, изображенной на черт. 146, вычисление двойного интеграла приводится к вычислению двух двукратных интегралов:

$$\iint\limits_D u\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} u\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} u\,dx\,dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} u\,dy.$$

Если граница области $D$ пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области параллельно оси $Ox$ (черт. 147), то она определяется неравенствами вида

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant h,$$

где $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ — уравнения левой ($CN_1H$) и правой ($CN_2H$) линий границы,

$c$ и $h$ — ординаты крайних снизу и сверху точек области $D$

В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_c^h dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \tag{2}$$

Здесь интегрирование выполняется в другом порядке: вначале по $x$, затем по $y$. Пределы внутреннего интеграла указывают границы изменения $x$ при постоянном, но произвольном значении $y$;

пределы внешнего интеграла указывают границы, в которых может изменяться $y$ во всей области $D$.

В этом случае, если левая или правая линия границы будет состоять из нескольких участков с различными уравнениями, то область $D$ следует разбить прямыми, параллельными оси $Ox$, на части, где левая и правая линии границы определялись бы каждая одним уравнением.

Согласно этому положению, двойной интеграл по области $D$, изображенной на черт. 148, сводится к двум двукратным интегралам

$$\iint\limits_{D} u\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} u\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} u\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{k} dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_3(y)} u\,dx+$$
$$+\int\limits_{k}^{h} dy\int\limits_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} u\,dx.$$

Пределы внешнего интеграла всегда постоянны. Пределы внутреннего интеграла, как правило, являются переменными и зависят от той переменной, которая рассматривается как постоянная; *оба они будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.*

**794.** Вычислить двукратные интегралы:

$$1)\ I_1=\int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{x}^{2x}(x-y+1)\,dy;\qquad 2)\ I_2=\int\limits_{2}^{4} dy\int\limits_{0}^{y}\frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx.$$

Решение. 1) Сначала вычисляем внутренний интеграл, где $y$ является переменной, а $x$ постоянной:

$$\int\limits_{x}^{2x}(x-y+1)\,dy=xy-\frac{y^2}{2}+y\,\Big|_{y=x}^{y=2x}=x-\frac{x^2}{2}.$$

Далее вычисляем внешний интеграл, — полученный результат интегрируем по $x$:

$$I_1=\int\limits_{0}^{1}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\,\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}.$$

2) Здесь интегрируем сначала по $x$, считая $y$ постоянной, затем по $y$:

$$\int\limits_{0}^{y}\frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx=y^3\int\limits_{0}^{y}\frac{dx}{x^2+y^2}=y^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\,\Big|_{x=0}^{x=y}=\frac{\pi y^2}{4};$$

$$I_2=\int\limits_{2}^{4}\frac{\pi y^2}{4}\,dy=\frac{\pi}{12}y^3\,\Big|_{2}^{4}=\frac{14}{3}\pi.$$

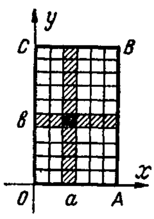
Вычисление можно записывать короче:

$$I_2=\int_2^4 dy\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx=\int_2^4 y^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=y}dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_2^4 y^2\,dy=\frac{\pi}{12}y^3\Big|_2^4=\frac{14}{3}\pi.$$

**795.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, если область $D$:

1) прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$;



Черт. 149

2) эллипс $4x^2+y^2\leqslant 4$;

3) ограничена прямой $y=x-4$ и параболой $y^2=2x$.

Решение. 1) Построив данные прямые (черт. 149), получим прямоугольник $OABC$ со сторонами, параллельными осям координат. При такой простейшей области интегрирования безразлично, вычислять ли двойной интеграл по формуле (1) или по формуле (2).

Интегрируя вначале по $y$, затем по $x$ [по формуле (1)], получим

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^a x\,dx\int_0^b y\,dy=\int_0^a\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^b\right)x\,dx=$$

$$=\frac{b^2}{2}\int_0^a x\,dx=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{a^2b^2}{4}.$$

Интегрируя в другом порядке—вначале по $x$, затем по $y$ [по формуле (2)], получим тот же результат:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^b y\,dy\int_0^a x\,dx=\int_0^b\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^a\right)y\,dy=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^b y\,dy=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^b=\frac{a^2b^2}{4}.$$

2) Построив область $D$ (черт. 150), будем сначала интегрировать по $x$, а затем по $y$ [по формуле (2)].

Разрешая уравнение границы области $D$ (эллипса) относительно $x$, найдем пределы внутреннего интеграла (с переменной $x$):

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\quad\text{и}\quad x=\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}.$$

Пределы внешнего интеграла (с переменной $y$) найдем как ординаты самой нижней и самой верхней точек области $D$ (или как наименьшее и наибольшее значения $y$ во всей области $D$): $y=-2$ и $y=2$.

Подставляя найденные пределы и интегрируя, получим

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{2} y\,dy \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} x\,dx=\int\limits_{-2}^{2} y\,dy\cdot 0=0,$$

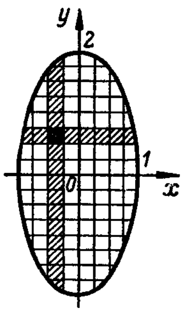
так как пределы внутреннего интеграла отличаются только по знаку, а его подынтегральная функция нечетная (см. гл. V, зад. 592).

Тот же результат получим, интегрируя сначала по $y$, а затем по $x$:

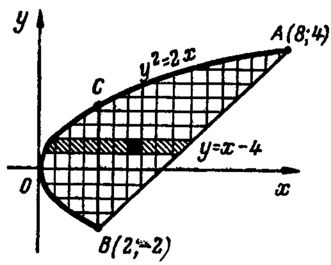
$$\iint\limits_{4x^2+y^2\leqslant 4} xy\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1} x\,dx \int\limits_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} y\,dy=0.$$

Здесь границы изменения $y$ (пределы внутреннего интеграла) найдены из уравнения эллипса путем решения его относительно $y$; границы изменения $x$ (пределы внешнего интеграла) найдены как наименьшее и наибольшее значения $x$ во всей области $D$.

3) Построив данные линии между точками их пересечения $(2; -2)$ и $(8; 4)$, получим параболический сегмент $AOB$ (черт. 151).




Черт. 150




Черт. 151

Если вначале интегрировать по $x$, а затем по $y$, то двойной интеграл по этой области выражается одним двукратным интегралом

$$I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{4} y\,dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} x\,dx,$$

так как точки $A$ и $B$ (с наибольшей и наименьшей ординатами) разбивают границу области на левую ($AOB$) и правую ($AB$) линии, каждая из которых определяется одним уравнением: $x=\frac{y^2}{2}$ и $x=y+4$.

Пределы внутреннего интеграла (по $x$) можно найти иначе: рассматривая область интегрирования как заключенную в горизонтальной полосе между прямыми $y=-2$, $y=4$ и ограниченную линиями $AOB$ (слева) и $BA$ (справа), получим пределы внутреннего интеграла, разрешая уравнения этих линий относительно $x$.

Вычисляя двукратный интеграл, получим

$$I=\int_{-2}^{4}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} y\,dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+4)^2-\frac{y^4}{4}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90.$$

Если интегрировать в другом порядке—сначала по $y$, а затем по $x$, то согласно замечанию к формуле (1) необходимо разбить область интегрирования прямой $BC$, параллельной оси $Oy$, на две части, так как здесь нижняя линия границы состоит из двух участков, которые имеют различные уравнения: $y=-\sqrt{2x}$ ($OB$) и $y=x-4$ ($BA$).

Вследствие этого вычисления несколько усложняются:

$$I=\iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} xy\,dx\,dy=\int_{0}^{2} x\,dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y\,dy+$$

$$+\int_{2}^{8} x\,dx\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y\,dy=\int_{0}^{2} x\,dx\cdot 0+\int_{2}^{8}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-4}^{\sqrt{2x}} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{8}(10x^2-x^3-16x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-8x^2\right)\Bigg|_{2}^{8}=90.$$

Иначе пределы внутренних интегралов (по $y$) можно найти, рассматривая область интегрирования как заключенную в вертикальной полосе между прямыми $x=0$, $x=8$ и ограниченную линиями $OB$ и $BA$ (снизу) и $OA$ (сверху), путем решения уравнений этих линий относительно $y$.

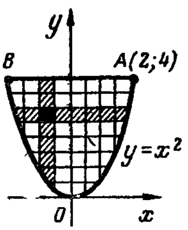
В решении этой задачи оказалось, что при любом порядке интегрирования каждый двойной интеграл имеет одно и то же значение. Это не случайно, ибо вообще *значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования*. Однако для экономии вычислительной работы следует, если это возможно, выбирать такой порядок интегрирования, при котором нет надобности разбивать область интегрирования на части.

**796.** Изменить порядок интегрирования в интеграле:

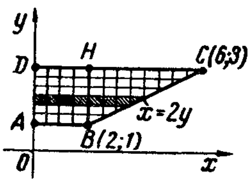
1) $I_1 = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y)\,dy$; 2) $I_2 = \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} u\,dx$.

3) $I_3 = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} v\,dy$.

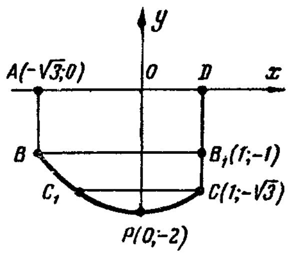
Решение. 1) Вначале по пределам интегрирования определяем область интегрирования. Полагая $x$ равным пределам интеграла с переменной $x$, а $y$ равным пределам интеграла с переменной $y$, получим уравнения линий, ограничивающих эту область: $x = -2$, $x = 2$, $y = x^2$, $y = 4$.




Черт. 152




Черт. 153




Черт. 154

Построив эти линии на черт. 152, получим параболический сегмент $OAB$, симметричный оси $Oy$.

Интегрируем в другом порядке — вначале по $x$, затем по $y$. Пределы внутреннего интеграла находим, разрешая относительно $x$ уравнение параболы $x = -\sqrt{y}$ и $x = \sqrt{y}$. Пределы внешнего интеграла $y = 0$ и $y = 4$ находим как наименьшее и наибольшее значения $y$ во всей области $OAB$. Следовательно,

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y)\,dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

2) Здесь область интегрирования ограничена прямыми $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$, $x = 2y$. На черт. 153 она представляет трапецию $ABCD$.

При интегрировании в другом порядке, вначале по $y$, необходимо разбить область $ABCD$ прямой $BH$, параллельной оси $Oy$, на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей $AB$ и $BC$, которые имеют различные уравнения: $y=1$ и $y=\frac{x}{2}$.

Вследствие этого и интеграл $I_2$ при изменении порядка интегрирования будет равен сумме двух интегралов:

$$I_2=\int_0^2 dx\int_1^3 u\,dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{2}}^3 u\,dy.$$

3) Написав уравнения линий, ограничивающих область интегрирования: $x=-\sqrt{3}$, $x=1$, $y=-\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ и построив их на черт. 154, получим криволинейную трапецию $ABCD$.

Если интегрировать в другом порядке, сначала по $x$, то область $ABCD$ необходимо разбить прямыми $BB_1$ и $CC_1$, параллельными оси $Ox$, на три области, в каждой из которых левая и правая линии границы определяются каждая одним уравнением.

В области $C_1PC$, заключенной в горизонтальной полосе между прямыми $y=-2$, $y=-\sqrt{3}$, левая линия границы $C_1P$ имеет уравнение $x=-\sqrt{4-y^2}$, а правая $PC$—уравнение $x=\sqrt{4-y^2}$.

В области $BC_1CB_1$, которая заключена в горизонтальной полосе между прямыми $y=-\sqrt{3}$, $y=-1$, левая линия границы определяется уравнением $x=-\sqrt{4-y^2}$, а правая—уравнением $x=1$.

В области $ABB_1D$, заключенной в горизонтальной полосе между прямыми $y=-1$, $y=0$, уравнение левой линии границы $x=-\sqrt{3}$, а уравнение правой линии границы $x=1$.

Следовательно, при новом порядке интегрирования интеграл $I_3$ будет равен следующей сумме трех интегралов:

$$I_3=\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} v\,dx+\int_{-\sqrt{3}}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1} v\,dx+\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{3}}^{1} v\,dx.$$

**797.** Вычислить двукратные интегралы:

1) $\int_0^2 dx\int_0^3 (x^2+2xy)\,dy$; 2) $\int_2^0 dy\int_0^{y^2} (x+2y)\,dx$;

3) $\int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}\,du$; 4) $\int_0^5 dx\int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,dy$.

**798.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, где область $D$—треугольник, ограниченный прямыми:

1) $x=0$, $y=0$, $x+y=3$; 2) $x=a$, $y=0$, $y=x$.

**799.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, если область $D$ ограничена:

1) прямыми $x=2$, $y=x$, $x=2y$;

2) параболой $2y=x^2$ и прямой $y=x$.

**800.** Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$; $y=0$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$;

2) $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$; $y=0$, $y=x$, $x+y=\frac{\pi}{2}$;

3) $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dx\,dy$; $x=y^2$, $y=x^2$.

**801.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q (2x+3y+1)\,dx\,dy$ по области, ограниченной треугольником с вершинами $(1;\ 3)$, $(-1;\ -1)$, $(2;\ -4)$.

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

**802.** $\int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 f(x,\ y)\,dx$. **803.** $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} u\,dy$.

**804.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} q\,dy$. **805.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} z\,dx$.

**806.** $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^4 dx$. **807*.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^2 dy$.

## § 2. Двойной интеграл в полярных координатах

Если область интегрирования двойного интеграла отнесена к системе полярных координат $\varphi$, $\rho$ и если она разбивается на частичные области лучами $\varphi=\varphi_i=\text{const}$, исходящими из полюса, и концентрическими окружностями $\rho=\rho_i=\text{const}$ с центром в полюсе (черт. 155), то $ds=\rho\,d\varphi\,d\rho$ (как площадь прямоугольника со сторонами $\rho\,d\varphi$ и $d\rho$) и

$$\iint\limits_D f(M)\,ds=\iint\limits_D f(\varphi,\ \rho)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\iint\limits_D F(\varphi,\ \rho)\,d\varphi\,d\rho.$$

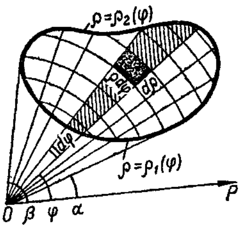
Обычно двойные интегралы в полярных координатах выражаются через двукратные интегралы вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\varphi, \rho)\, d\rho,$$

где первое (внутреннее) интегрирование выполняется по $\rho$, считая $\varphi$ постоянной, а второе (внешнее) интегрирование выполняется по $\varphi$.

Пределы интегрирования по $\rho$ указывают границы изменения $\rho$ при постоянном, но произвольном значении $\varphi$. Пределы интегрирования по $\varphi$ являются наименьшим и наибольшим значениями $\varphi$ во всей области $D$.

*Как правило, пределы внутреннего интеграла (по $\rho$) зависят от $\varphi$; они оба будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет круговой сектор или разность круговых секторов с центром в полюсе. Пределы внешнего интеграла (по $\varphi$) всегда постоянны.*



Черт. 155

В приложениях двойных интегралов к геометрическим и физическим задачам обычно искомая величина выражается посредством двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, а затем во многих случаях для упрощения вычислений полученный интеграл преобразуется к полярным координатам с помощью следующего правила:

*Для преобразования двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, в двойной интеграл в полярных координатах нужно в подынтегральном выражении прямоугольные координаты заменить полярными: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а вместо $dxdy$ подставить $\rho\, d\varphi\, d\rho$.*

При этом уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к полярным координатам (посредством указанных формул перехода от прямоугольных координат к полярным).

808. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \rho\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$, если область $D$:

1) круговой сектор, ограниченный линиями $\rho = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$;

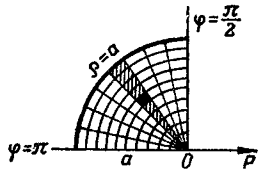
2) полукруг $\rho \leqslant 2a\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$;

3) заключена между линиями $\rho = 2 + \cos\varphi$ и $\rho = 1$.

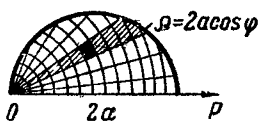
Решение. 1) Построив окружность $\rho = a$ и лучи, образующие с полярной осью углы $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$, получим круговой сектор $OAB$ с центром в полюсе $O$ (черт. 156).

Интегрируя вначале по $\rho$, затем по $\varphi$, получим

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a \sin\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$




Черт. 156




Черт. 157

2) Построив область $D$, черт. 157, интегрируем, как обычно принято в полярных координатах, сначала по $\rho$, затем по $\varphi$:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = -2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^2 \, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3} a^2 \cos^3\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} a^2.$$

3) Построив область $D$ (черт. 158) и интегрируя, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_1^{2+\cos\varphi} \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{2+\cos\varphi} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(2+\cos\varphi)^2 - 1] \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{0} (3 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\cos\varphi =$$

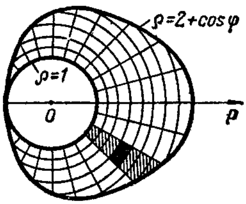
$$= \frac{1}{2}\left(3\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_{2\pi}^{0} = 0.$$

**809.** Преобразовать к полярным координатам и затем вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $D$ — круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (т. е. $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$), черт. 159.

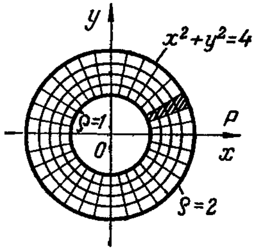
Решение. Пользуясь указанным правилом, получим:

$$I = \iint\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant 2} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi}} = \iint\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant 2} d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 d\rho = 2\pi.$$

$\rho=1$ и $\rho=2$ — полярные уравнения данных окружностей.




Черт. 158




Черт. 159

**810.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q \rho^2 d\varphi\, d\rho$, если область $Q$ ограничена:

1) окружностями $\rho=a$, $\rho=2a$;
2) первым завитком спирали $\rho=a\varphi$ и полярной осью;
3) кривой $\rho=a\sin 2\varphi$.

**811.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$ по области, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$ и полярной осью, если

а) $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и б) $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

**812.** Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_R xy^2\, dx\, dy$, если область $R$ ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

2) $\iint\limits_P e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$, если область $P$ — круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

## § 3. Вычисление площади посредством двойного интеграла

Площадь $S$ плоской области $D$ равна двойному интегралу от $ds$, распространенному на область $D$:

$$S = \iint\limits_D ds.$$

В прямоугольных координатах $ds = dx\,dy$ и

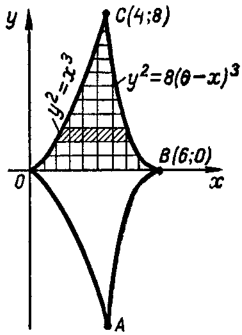
$$S = \iint_D dx\,dy. \tag{1}$$

В полярных координатах $ds = \rho\,d\varphi\,d\rho$ и

$$S = \iint_D \rho\,d\varphi\,d\rho. \tag{2}$$

813. Найти площадь области, ограниченной линиями:

1) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$;
2) $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$, $y = 4$;
3) $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $b > a > 0$;
4) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.




Черт. 160

Решение. 1) Построив данные полукубические параболы (черт. 160), получим криволинейный четырехугольник $OABC$. Точки $A$ и $C$ пересечения кривых найдены путем совместного решения их уравнений.

Вследствие симметричности фигуры относительно оси $Ox$ ее площадь $S$ равна удвоенной площади криволинейного треугольника $OBC$, расположенного в первом квадранте.

Согласно формуле (1) площадь области $OBC$ равна двойному интегралу от $dx\,dy$, распространенному на эту область:

$$S = 2\iint_{OBC} dx\,dy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{\frac{2}{3}}}^{6-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}} dx = 2\int_0^8 x\Big|_{y^{\frac{2}{3}}}^{6-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}} dy =$$

$$= 2\int_0^8 \left(6 - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\right)dy = 2\left(6y - \frac{9}{10}y^{\frac{5}{3}}\right)\Big|_0^8 = 2\left(48 - \frac{9}{10}\cdot 32\right) = 38\frac{2}{5}.$$

Если интегрировать в другом порядке, то необходимо разбить область $OBC$ прямой, проходящей через точку $C$, параллельно оси $Oy$ на две части. При этом

$$S = 2\left(\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x^3}} dy + \int_4^6 dx \int_0^{\sqrt{8(6-x)^3}} dy\right).$$

Разумеется, результат будет тот же самый.

2) Данные линии ограничивают криволинейный треугольник $ABC$ (черт. 161).

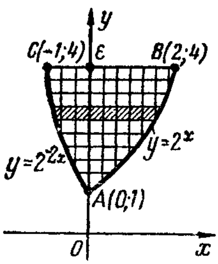
Согласно формуле (1) искомая площадь

$$S=\iint\limits_{ABC} dx\,dy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_{-\frac{\ln y}{2\ln 2}}^{\frac{\ln y}{\ln 2}} dx=\int\limits_1^4\left(\frac{\ln y}{\ln 2}+\frac{\ln y}{2\ln 2}\right)dy=\frac{3}{2\ln 2}\int\limits_1^4 \ln y\,dy.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$S=\frac{3}{2\ln 2}(y\ln y-y)\Big|_1^4=\frac{3}{2\ln 2}(4\ln 4-3)=12-\frac{9}{\ln 4}\approx 5{,}507.$$

И здесь при другом порядке интегрирования необходимо разбить область $ABC$ на две области $AEC$ и $ABE$, вследствие чего площадь $S$ будет равна сумме двух двойных интегралов:



Черт. 161

$$S=\iint\limits_{ABC} dx\,dy=\iint\limits_{AEC} dx\,dy+\iint\limits_{ABE} dx\,dy=$$
$$=\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_{2^{-2x}}^{4} dy+\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2^x}^{4} dy.$$

3) Построив данные окружности в полярной системе координат (черт. 162), находим площадь $S$ ограниченной ими области $D$ по формуле (2):

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\varphi\,d\rho=2\iint\limits_{ABO}\rho\,d\varphi\,d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}\rho\,d\rho=$$

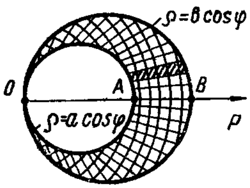
$$=(b^2-a^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{b^2-a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2).$$

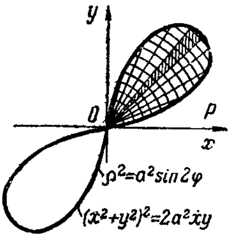
Здесь учтено, что обе окружности симметричны относительно полярной оси и что верхняя половина каждой из них получается при изменении угла $\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

4) Площадь фигуры, ограниченной данной замкнутой кривой (лемнискатой), проще вычислить, перейдя к полярным координатам.

Полагая в данном уравнении кривой $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим после упрощений полярное уравнение этой кривой $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$.




Черт. 162




Черт. 163

Построив кривую (черт. 163) и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении $\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка $(\varphi, \rho)$ опишет половину кривой, расположенную выше полярной оси, по формуле (2) найдем

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

**814.** $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$.

**815.** $xy = 4$, $x + y = 5$.

**816.** $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

**817.** $\rho = a\cos 2\varphi$.

**818.** $x + y = 1$, $x + 3y = 1$, $x = y$, $x = 2y$.

**819.** $\rho = 4\sin\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$.

**820.** $\rho = a\sin 3\varphi$.

**821.** $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

**822.** $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

$\Big\}$ Перейти к полярным координатам.

## § 4. Вычисление объема тела

Объем вертикального цилиндрического тела, имеющего своим основанием область $D$ на плоскости $xOy$ и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (черт 164), выражается двойным интегралом

$$V = \iint\limits_D z\, dx\, dy. \qquad \text{(a)}$$

Вычисление объемов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы объемов нескольких вертикальных цилиндрических тел (с образующими, параллельными оси $Oz$).

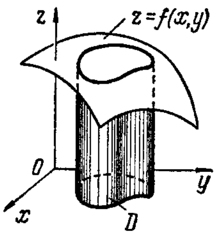
**823.** Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

1) $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

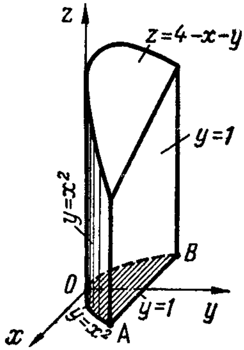
2) $z=y^2-x^2$, $z=0$, $y=\pm 2$.

3) $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.

4) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=a$, $z=b$; $R>b>a>0$.




**Черт. 164**




**Черт. 165**

Решение. 1) Данное тело (черт. 165) представляет вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z=4-x-y$, а снизу — частью плоскости $xOy$, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$.

Согласно формуле (а) объем этого тела

$$V=\iint\limits_{OAB} z\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(4-x-y)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}dy=2\int\limits_0^1(4-y)\sqrt{y}\,dy=\frac{68}{15}.$$

При интегрировании в другом порядке

$$V=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(4-x-y)\,dy=\ldots=\frac{68}{15}.$$

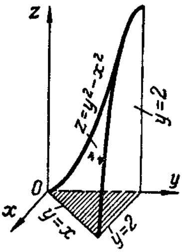
2) Гиперболический параболоид $z=y^2-x^2$ пересекает плоскость $xOy$ ($z=0$) по двум прямым $y=\pm x$. Вместе с плоскостями $z=0$, $y=\pm 2$ он ограничивает тело, симметричное отно-

сительно плоскостей $xOz$ и $yOz$. Согласно формуле (а) объем четвертой части тела, расположенной в первом октанте (черт. 166),

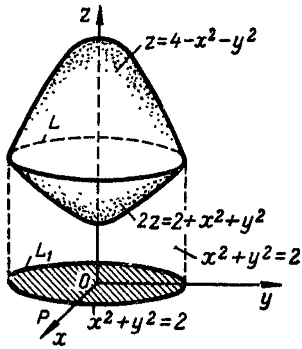
$$\frac{1}{4}V=\iint\limits_{OAB} z\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^y (y^2-x^2)\,dx=\int_0^2\left(y^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=y} dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2 y^3\,dy=\frac{2}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^2=\frac{8}{3};\quad V=\frac{32}{3}.$$

3) Тело, ограниченное данными параболоидами вращения, изображено на черт. 167. Его объем можно найти как разность объемов двух вертикальных цилиндрических тел, которые имеют




Черт 166




Черт. 167

общее нижнее основание $D$ на плоскости $xOy$, а сверху ограничены данными поверхностями.

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy-\iint\limits_D \frac{1}{2}(2+x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{3}{2}\iint\limits_D (2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Линия $L$ пересечения данных поверхностей определяется системой из их уравнений: $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.

Исключая из этой системы $z$, получим $x^2+y^2=2$—уравнение вертикальной цилиндрической поверхности, которая проходит через линию $L$ и проектирует ее на плоскость $xOy$. Полученное уравнение будет и уравнением проекции линии $L$ на плоскость $xOy$—окружности $L_1$, ограничивающей область $D$.

Чтобы упростить вычисление интеграла, преобразуем его к полярным координатам. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dy$ через $\rho\,d\varphi\,d\rho$, получим

$$V=\frac{3}{2}\iint_{\rho\leqslant\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi$$

($\rho=\sqrt{2}$ есть полярное уравнение окружности $x^2+y^2=2$).

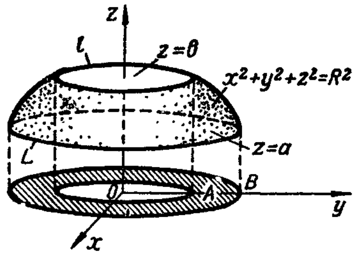
4) Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскости $z=a$ и $z=b$ ограничивают шаровой слой (черт. 168). Его объем $V=V_1+V_2-V_3$, где $V_1$, $V_2$ и $V_3$ — объемы вертикальных цилиндрических тел:

$$V_1=\pi OA^2b;\quad V_3=\pi OB^2a;$$

$$V_2=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где $D$ — круговое кольцо

$$OA^2\leqslant x^2+y^2\leqslant OB^2.$$



Черт. 168

Радиусы $r_1=OA$ и $r_2=OB$ определяются из уравнений вертикальных цилиндров, проектирующих окружности $l$ и $L$ на плоскость $xOy$.

Исключая $z$ из уравнений сферы и плоскости $z=b$, получим уравнение $x^2+y^2=R^2-b^2$, откуда $OA=\sqrt{R^2-b^2}$. Аналогичным путем из уравнений сферы и плоскости $z=a$ получим уравнение $x^2+y^2=R^2-a^2$, откуда $OB=\sqrt{R^2-a^2}$.

Следовательно, $V_1=\pi b(R^2-b^2)$, $V_3=\pi a(R^2-a^2)$.

Для вычисления двойного интеграла, определяющего $V_2$, перейдем к полярным координатам:

$$V_2=\iint_{r_1\leqslant\rho\leqslant r_2}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\frac{4}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r_1}^{r_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3).$$

Искомый объем шарового слоя $V=\pi b(R^2-b^2)+\frac{3}{2}\pi(b^3-a^3)-$ $-\pi a(R^2-a^2)=\frac{\pi}{3}[3R^2(b-a)+a^3-b^3]=\frac{\pi(b-a)}{3}(3R^2-a^2-ab-b^2)$.

При $a=0$, $b=R$ получаем объем полушара $V=\frac{2}{3}\pi R^3$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

**824.** Цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $x+y+z=2a$, $z=0$.

**825.** Плоскостями $x+y+z=2$, $3x+y=2$, $3x+2y=4$, $y=0$, $z=0$.

**826.** Эллиптическим параболоидом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и плоскостями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

**827.** Плоскостями $y+z=0$, $z=0$ и цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**828.** Сферой $x^2+y^2+z^2=2a^2$ и цилиндром $x^2+y^2=a^2$ *.

**829.** Плоскостями $y+z=2$, $y-z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=4$ *.

**830.** Конусом $x^2+y^2=z^2$, цилиндром $x^2+y^2=2y$ и плоскостью $z=0$ *.

## § 5. Масса, центр тяжести и моменты инерции

Если $\delta(M)$ есть поверхностная плотность ** в точке $M(x, y)$ плоской фигуры (материальной пластинки), занимающей область $D$, то ее масса $m$, координаты центра тяжести $C$ и моменты инерции $I_x$, $I_y$, $I_0$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ и начала координат $O$ выражаются формулами:

$$1)\quad m=\iint_D \delta(M)\,dx\,dy; \tag{1}$$

$$2)\quad x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\iint_D x\delta\,dx\,dy}{m};\quad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\iint_D y\delta\,dx\,dy}{m}, \tag{2}$$

где $m_x$ и $m_y$ — статические моменты пластинки относительно осей $Ox$ и $Oy$.

Если пластинка однородна, то $\delta=\mathrm{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается;

$$3)\quad I_x=\iint_D y^2\delta\,dx\,dy;\quad I_y=\iint_D x^2\delta\,dx\,dy; \tag{3}$$

$$I_0=I_x+I_y=\iint_D (x^2+y^2)\,\delta\,dx\,dy. \tag{4}$$

---

* В этой задаче для вычисления двойного интеграла полезно перейти к полярным координатам

** Поверхностной плотностью распределения массы в точке $M$ пластинки называется предел отношения массы площадки, содержащей точку $M$ к ее площади, когда эта площадка стягивается к точке $M$.

Для однородного вертикального цилиндрического тела (с образующей, параллельной оси $Oz$), имеющего своим основанием область $D$ на плоскости $xOy$ и ограниченного поверхностью $z=f(x, y)$ (черт. 164),

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xz\,dx\,dy}{\iint\limits_D z\,dx\,dy}; \quad y_c=\frac{\iint\limits_D yz\,dx\,dy}{\iint\limits_D z\,dx\,dy}; \quad z_c=\frac{\iint\limits_D z^2\,dx\,dy}{2\iint\limits_D z\,dx\,dy}. \qquad (5)$$

**831.** Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через $r_1$ и $r_2$ $(r_1<r_2)$, и поместим полюс полярной системы координат в центре кольца; тогда уравнения окружностей будут $\rho=r_1$ и $\rho=r_2$, а поверхностная плотность в точке $M(\varphi, \rho)$ кольца $\delta(M)=\frac{k}{\rho^2}$.

Массу всего кольца найдем по формуле (1), преобразуя ее к полярным координатам:

$$m=\iint\limits_D \delta\rho\,d\varphi\,d\rho=\iint\limits_{r_1\leqslant\rho\leqslant r_2}\frac{k}{\rho}\,d\varphi\,d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\rho}{\rho}=k\int\limits_0^{2\pi}\ln\rho\,\Big|_{r_1}^{r_2}d\varphi=$$

$$=k\ln\frac{r_2}{r_1}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2k\pi\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

**832.** Найти массу пластинки, имеющей форму эллипса, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна ее расстоянию $r$ от малой оси эллипса и при $r=1$ она равна $\lambda$.

Решение. Обозначим полуоси эллипса через $a$ и $b$ $(a>b)$ и выберем оси $Ox$ и $Oy$ прямоугольной системы координат так, чтобы они совпали с осями эллипса, тогда уравнение эллипса будет $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Согласно условию задачи в точке $M(x, y)$ пластинки плотность $\delta(M)=\lambda|x|$.

По формуле (1) масса правой половины пластинки

$$\frac{1}{2}m=\iint\limits_D \lambda x\,dx\,dy=\lambda\int\limits_{-b}^{b}dy\int\limits_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}x\,dx=\frac{\lambda a^2}{2b^2}\int\limits_{-b}^{b}(b^2-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{\lambda a^2}{2b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-b}^{b}=\frac{2}{3}a^2b\lambda.$$

Следовательно, масса всей пластинки $m=\frac{4}{3}a^2b\lambda$.

**833.** Найти центр тяжести равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике $ABC$ гипотенуза $AB = 2a$. Тогда относительно системы координат, изображенной на черт. 169, уравнения катетов $AC$ и $BC$ будут $y = x + a$ и $y = a - x$.

Согласно условию задачи в точке $(x, y)$ треугольника плотность $\delta = ky$.

Далее, пользуясь формулами (2), вычислим величины $m_x$, $m_y$ и $m$ для данного треугольника:

$$m_x = \iint\limits_{ABC} ky^2\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y^2\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a-y)\,dy =$$

$$= 2k\left(a\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^a = \frac{ka^4}{6}.$$

$$m_y = \iint\limits_{ABC} kxy\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{-(a-y)}^{a-y} x\,dx = k\int\limits_0^a y\,dy \cdot 0 = 0.$$

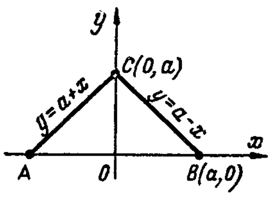
$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y(a-y)\,dy = \frac{ka^3}{3}.$$

Следовательно, $x_c = \frac{m_y}{m} = 0$, $y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{a}{2}$.

Если бы по всей области треугольника масса была распределена равномерно, то его центр тяжести помещался бы в точке пересечения медиан $\left(0, \frac{a}{3}\right)$.

**834.** Найти момент инерции треугольника, данного в условии предыдущей задачи, относительно его гипотенузы.

Решение. Относительно указанной на черт. 169 системы координат искомый момент инерции есть $I_x$. Поэтому, пользуясь формулой (3), найдем




Черт. 169

$$I_x = \iint\limits_{ABC} ky^3\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y^3\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx =$$

$$= 2k\int\limits_0^a y^3(a-y)\,dy = \frac{ka^5}{10}.$$

**835.** Однородная пластинка ограничена двумя концентрическими эллипсами с совпадающими линиями осей (эллиптическое кольцо). Найти моменты инерции этой пластинки относительно ее осей.

Решение. Пусть внешний эллипс имеет полуоси $a_1$ и $b_1$, а внутренний — полуоси $a_2$ и $b_2$ и пусть оси прямоугольной системы координат направлены по осям симметрии пластинки. Тогда уравнения эллипсов будут

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1,$$

а искомые моменты инерции будут $I_x$ и $I_y$. Применяя формулы (3) и используя симметричность пластинки ($D$) относительно осей координат, получим

$$I_x=\iint\limits_D y^2\delta\,dx\,dy=4\delta\left(\iint\limits_{D_1} y^2\,dx\,dy-\iint\limits_{D_2} y^2\,dx\,dy\right),$$

где $D_1$ и $D_2$ — расположенные в первом квадранте части областей, ограниченных соответственно внешним и внутренним эллипсами.

Интегрируем вначале по $y$, затем по $x$:

$$I_x=4\delta\left(\int\limits_0^{a_1}dx\int\limits_0^{y_1}y^2\,dy-\int\limits_0^{a_2}dx\int\limits_0^{y_2}y^2\,dy\right)=\frac{4}{3}\,\delta\left(\int\limits_0^{a_1}y_1^3\,dx-\int\limits_0^{a_2}y_2^3\,dx\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\,\delta\left[\frac{b_1^3}{a_1^3}\int\limits_0^{a_1}(a_1^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx-\frac{b_2^3}{a_2^3}\int\limits_0^{a_2}(a_2^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\right].$$

Для вычисления интегралов заменяем переменную. В первом интеграле — по формуле $x=a_1\sin t$, во втором — по формуле $x=a_2\sin t$;

$$I_x=\frac{4}{3}\,\delta\left(a_1b_1^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-a_2b_2^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\,\delta\left(a_1b_1^3-a_2b_2^3\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt.$$

Согласно решению задачи 505 последний интеграл равен $\frac{3\pi}{16}$. Следовательно,

$$I_x=\frac{1}{4}\,\pi\delta\left(a_1b_1^3-a_2b_2^3\right).$$

Аналогично применяя вторую из формул (3), найдем

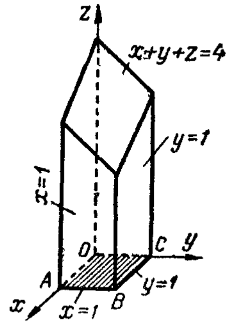
$$I_y=\frac{1}{4}\,\pi\delta\left(b_1a_1^3-b_2a_2^3\right).$$

Отсюда при $a_2=b_2=0$ получаем моменты инерции полного эллипса:

$$I_x=\frac{1}{4}\pi\delta a_1 b_1^3; \quad I_y=\frac{1}{4}\pi\delta b_1 a_1^3.$$

При $b_1=a_1$ и $b_2=a_2$ получаем момент инерции кругового кольца: $I=\frac{1}{4}\pi\delta\left(a_1^4-a_2^4\right)$, взятый относительно любого его диаметра.

Для круга радиуса $a$ момент инерции относительно любого диаметра $I=\frac{1}{4}\pi\delta a^4$.



Черт. 170

**836.** Найти центр тяжести однородной усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $x+y+z=4$, $x=1$, $y=1$.

Решение. Построив данные плоскости (черт. 170), замечаем, что ограниченная ими усеченная призма симметрична относительно плоскости $x=y$. Вследствие этого $x_c=y_c$.

Далее вычисляем интегралы, содержащиеся в формулах (5),

$$I_1=\iint\limits_D xz\,dx\,dy=\iint\limits_{OABC} x(4-x-y)\,dx\,dy=$$

$$=-\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^1(4-x-y)\,d(4-x-y)=-\int\limits_0^1\frac{(4-x-y)^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^0(2x^2-7x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2\right)\Bigg|_1^0=\frac{17}{12};$$

$$I_2=\iint\limits_D z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{OABC}(4-x-y)^2\,dx\,dy=$$

$$=-\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1(4-x-y)^2\,d(4-x-y)=-\int\limits_0^1\frac{(4-x-y)^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^0[(3-x)^3-(4-x)^3]\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{(x-3)^4}{4}-\frac{(x-4)^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=\frac{55}{6};$$

$$I_3=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1(4-x-y)\,dy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(4-x-y)^2\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1[(3-x)^2-(4-x)^2]\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-3)^3}{3}-\frac{(x-4)^3}{3}\right]\Bigg|_1^0=3.$$

Подставляя в формулы (5) найденные значения интегралов, получим:

$$x_c = y_c = \frac{I_1}{I_3} = \frac{17}{36}; \quad z_c = \frac{I_2}{2I_3} = \frac{55}{36}.$$

**837.** Найти массу круглой пластинки, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки.

**838.** Найти массу квадратной пластинки, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей пластинки.

**839.** Пластинка ограничена параболой $y^2 = 2px$ и ее хордой, проходящей через фокус перпендикулярно к оси параболы. Найти массу пластинки, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна расстоянию точки до директрисы параболы.

**840.** Найти массу прямоугольника со сторонами $a$ и $b$, в каждой точке которого поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от одной данной его вершины.

В задачах 841—843 найти моменты инерции однородных плоских фигур:

**841.** Прямоугольника со сторонами $a$ и $b$: 1) относительно стороны $a$; 2) относительно одной из его вершин; 3) относительно точки пересечения диагоналей.

**842.** Прямоугольного треугольника с катетами $a$ и $b$: 1) относительно вершины прямого угла; 2) относительно катета $a$.

**843.** Круга радиуса $R$: 1) относительно касательной; 2) относительно точки на окружности.

**844.** Найти центр тяжести прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a$ и $b$, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от вершины прямого угла.

**845.** Найти центр тяжести расположенной в первом квадранте части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (пластинки), если в точке $(x, y)$ поверхностная плотность $\delta = kxy$, где $k$ — постоянная.

Найти центры тяжести следующих однородных тел:

**846.** Полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$.

**847.** Тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + 2y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

**848.** Шарового слоя, заключенного между сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскостями $x = a$, $x = b$.

## § 6. Тройной интеграл, его вычисление трехкратным интегрированием

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке $M$ некоторой замкнутой пространственной области $G$ и если разбить эту область произвольным способом на $n$ частичных областей с объемами $\Delta v_1$,

$\Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta v_1 + f(M_2)\Delta v_2 + \ldots + f(M_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области $G$.

При составлении интегральной суммы можно различными способами разбивать область $G$ на $n$ частичных областей и в каждой из них можно произвольно выбирать одну точку $M_i$. Поэтому для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной области $G$ можно составить сколько угодно различных интегральных сумм. И все эти интегральные суммы при неограниченном возрастании $n$ и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей имеют один общий предел, который называется тройным интегралом от функции $f(M)$ по области $G$ и обозначается $\iiint\limits_G f(M)\,dv$.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного и обыкновенного определенных интегралов: *область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию, т. е. к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

Если область интегрирования $G$ отнесена к прямоугольной системе координат $Oxyz$ и если она разбивается на частичные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то объем частичной области $dv = dx\,dy\,dz$ (как объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами $dx$, $dy$ и $dz$) и тройной интеграл преобразуется к виду

$$\iiint\limits_G f(M)\,dv = \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

При этом, если область $G$ такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси $Oz$, пересекает ее границу (ограничивающую ее замкнутую поверхность) в двух точках* (черт. 171), то тройной интеграл можно вычислить по

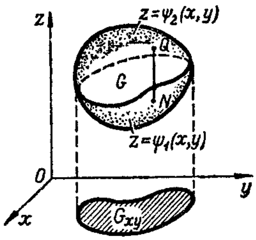
* Если область $G$ имеет более сложный вид, то ее следует разбить на части указанного простого вида и затем вычислить данный интеграл как сумму интегралов по составляющим областям.

формуле

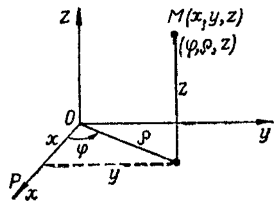
$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z=\psi_1(x, y)}^{z=\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (*)$$

где $G_{xy}$ — проекция области $G$ на плоскость $xOy$; $z=\psi_1(x, y)$ и $z=\psi_2(x, y)$ — уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область $G$ *.

По этой формуле вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного (однократного) определенного интеграла с переменной $z$, причем $x$ и $y$ рассматриваются как постоянные, и двойного интеграла с переменными $x$ и $y$ по области $G_{xy}$, расположенной в плоскости $xOy$.




Черт. 171




Черт. 172

*Как правило, пределы внутреннего обыкновенного интеграла являются переменными; они зависят от тех двух переменных, которые в этом интеграле рассматриваются как постоянные. Оба они будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования $G$ есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси $Oz$, а основания расположены в плоскостях, параллельных плоскости $xOy$.*

Меняя ролями переменные $x$, $y$ и $z$ в формуле $(*)$, можно получить и другие аналогичные формулы для вычисления тройного интеграла посредством последовательного вычисления обыкновенного и двойного интегралов.

При вычислении тройного интеграла указанным путем после вычисления внутреннего обыкновенного интеграла иногда целесообразно бывает затем, для вычисления двойного интеграла, перейти от прямоугольных координат к полярным, как это разъясняется в § 2. Такой способ вычисления тройного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, называется вычислением его посредством преобразования к **цилиндрическим координатам**, ибо, как показано на черт. 172, переменные $\varphi$, $\rho$ и $z$ являются цилиндрическими координатами точки $M(x, y, z)$.

* Иначе, $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ — апликаты точек $N$ и $Q$ пересечения поверхности, ограничивающей область $G$, с прямой, проходящей через произвольную внутреннюю точку области $G$ параллельно оси $Oz$.

Тройной интеграл можно вычислять и иначе, как обыкновенный интеграл от двойного.

**849.** Вычислить трехкратный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)\,dz$ и построить его область интегрирования.

Решение. Последовательно вычисляем три обыкновенных (однократных) определенных интеграла, начиная с внутреннего:

$$I_1=\int\limits_0^2(4+z)\,dz=\left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_0^2=\frac{36-16}{2}=10;$$

$$I_2=\int\limits_{x^2}^{1}I_1\,dy=10\int\limits_{x^2}^{1}dy=10y\Big|_{x^2}^{1}=10(1-x^2);$$

$$I_3=I=\int\limits_{-1}^{1}I_2\,dx=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

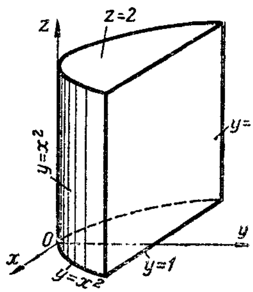
Здесь, как и при вычислении двукратного интеграла, можно пользоваться более краткой записью:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_0^2dy=10\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=$$
$$=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования данного трехкратного интеграла пишем вначале уравнения поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения:

$x=-1,\ x=1,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0,\ z=2.$

Построив в системе координат $Oxyz$ поверхности, соответствующие этим уравнениям (черт. 173), видим, что ограниченная ими область есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси $Oz$.



Черт. 173

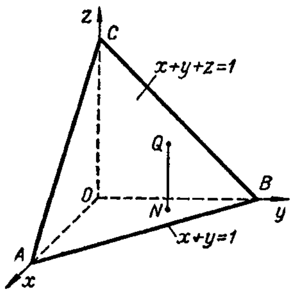
**850.** Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_G\frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, если область $G$ ограничена плоскостями:

1) $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

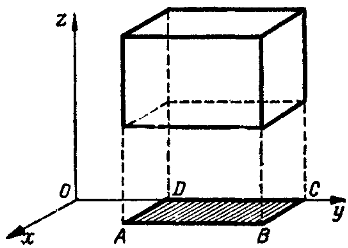
2) $x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=5,\ z=2,\ z=4.$

Решение. 1) Построим данные плоскости. Ограниченная ими область $G$ есть тетраэдр $OABC$ (черт. 174). Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси $Oz$, пересекает его границу (поверхность) в двух точках. Поэтому, согласно формуле (*), вычисление данного тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного интеграла с переменной $z$ и двойного интеграла с переменными $x$ и $y$. Пределами однократного интеграла будут значения $z=z_N=0$ (из уравнения плоскости $ABO$) и $z=z_Q=1-x-y$ (из уравнения плоскости $ABC$); областью интегрирования двойного интеграла будет треугольник $ABO$ (проекция тетраэдра на плоскость $xOy$). Следовательно,

$$I_1=\iint\limits_{ABO}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\int\limits_0^{1-x-y}dz.$$




Черт. 174




Черт. 175

Вычисляя внутренний однократный интеграл, а затем двойной интеграл, получим:

$$I_1=\iint\limits_{ABO}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)=\iint\limits_{ABO}dx\,dy=S_{ABO}=\frac{AO\cdot BO}{2}=\frac{1}{2}.$$

2) Данные плоскости ограничивают прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат (черт. 175). При такой простейшей области интегрирования пределы всех трех однократных интегралов, к вычислению которых сводится вычисление тройного интеграла, будут постоянные.

Интегрируя вначале по $z$, затем по $x$ и по $y$, получим:

$$I_2=\iint\limits_{ABCD}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\int\limits_2^4 dz=\int\limits_2^5 dy\int\limits_0^1 z\Big|_2^4\frac{dx}{1-x-y}=$$

$$=2\int\limits_5^2\ln|1-x-y|\Big|_{x=0}^{x=1}dy=2\int\limits_5^2(\ln|y|-\ln|y-1|)\,dy=$$

$$=2\left[y\ln|y|-(y-1)\ln|y-1|\right]\Big|_5^2=10\ln\frac{4}{5}.\ ^*$$

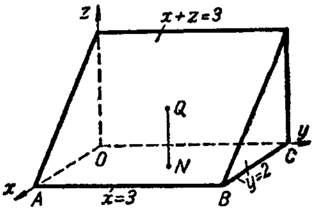
* Последний интеграл (с переменной $y$) найден по формуле интегрирования по частям, гл. IV, § 4.

851. Вычислить следующие тройные интегралы:

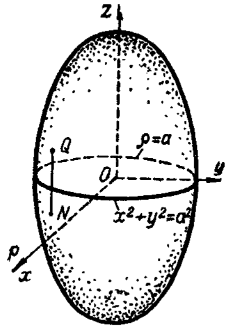
1) $I=\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, где область $G$ ограничена плоскостями $x+z=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $J=\iiint\limits_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где область $W$ ограничена поверхностью $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$;

3) $K=\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz$, где область $T$ ограничена поверхностями $y=\sqrt{x^2+z^2}$ и $y=h$, $h>0$.




Черт. 176




Черт. 177

Решение. 1) Построив данные плоскости, получим треугольную призму (черт. 176). Пользуясь формулой (*), имеем:

$$I=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_N=0}^{z_Q=3-x} (x+y+z+1)^{-3}\,dz=$$

$$=\iint\limits_{ABCO} \left.\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right|_{z=0}^{z=3-x} dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 [(x+y+1)^{-2}-(y+4)^{-2}]\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(\frac{1}{y+4}-\frac{1}{x+y+1}\Bigg|_{y=0}^{y=2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{12}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-\frac{x}{12}\right)\Bigg|_0^3=\frac{4\ln 2-1}{8}.$$

2) Область $W$, ограниченная данной поверхностью, есть эллипсоид вращения (черт. 177). Его проекция $W_{xy}$ на плоскость $xOy$

есть круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$. Применяя формулу (*), получим:

$$J=\iint\limits_{W_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z=z_N}^{z=z_Q} (x^2+y^2+z^2)\,dz,$$

где $z_N$ и $z_Q$ — значения $z$ из данного уравнения эллипсоида, $z_{N,\,Q}=\mp\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}$.

Вычисляя внутренний однократный интеграл с переменной $z$, найдем:

$$J=\iint\limits_{W_{xy}} \left[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z_N}^{z_Q} dx\,dy=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Далее, чтобы упростить вычисление полученного двойного интеграла, преобразуем его к полярным координатам. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dy$ через $\rho d\varphi d\rho$, получим:

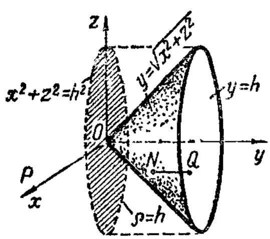
$$J=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{\rho\leqslant a}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_a^0(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(a^2-\rho^2)=a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_a^0 d\varphi=$$

$$=\frac{2a^5\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}}$$

($\rho=a$ есть полярное уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$).

3) Ограниченная данными поверхностями область $T$ есть конус, изображенный на черт. 178. Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку конуса параллельно оси $Oy$, пересекает его границу в двух точках, а проекция $T_{xz}$ этого конуса на плоскость $xOz$ есть круг $x^2+z^2\leqslant h^2$. Поэтому, меняя ролями переменные $z$ и $y$ в формуле (*), получим



Черт. 178

$$K=\iint\limits_{T_{xz}}dx\,dz\int\limits_{y=y_N}^{y=y_Q}y\,dy,$$

где $y_N=\sqrt{x^2+z^2}$, $y_Q=h$.

Вычисляем однократный интеграл

$$K=\iint\limits_{T_{xz}}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y_N}^{h}dx\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant h^2}(h^2-x^2-z^2)\,dx\,dz,$$

а полученный двойной интеграл преобразуем к полярным координатам (полагая $x = \rho \cos\varphi$, $z = \rho \sin\varphi$ и заменяя $dx\,dz$ через $\rho d\varphi d\rho$):

$$K = \frac{1}{2} \iint\limits_{\rho \leqslant h} (h^2 - \rho^2)\, \rho\, d\varphi\, d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h (h^2\rho - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{h^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_0^h d\varphi = \frac{h^4}{8} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^4}{4}$$

($\rho = h$ есть полярное уравнение окружности $x^2 + z^2 = h^2$).

**852.** Вычислить трехкратные интегралы:

1) $\int\limits_0^c dz \int\limits_0^b dy \int\limits_0^a (x^2 + y^2 + z^2)\, dx$; 2) $\int\limits_0^a y\, dy \int\limits_0^h dx \int\limits_0^{a-y} dz$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\, dy \int\limits_{1-x}^{2-2x} dz$; 4) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^2 x\, dx \int\limits_0^3 z^2\, dz$

и построить их области интегрирования.

Вычислить тройные интегралы:

**853.** $\iiint\limits_G (2x + 3y - z)\, dx\, dy\, dz$, где $G$ — призма, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$, $x + y = 2$.

**854.** $\iiint\limits_G (1 - x)^2 \sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy\, dz$, где $G$ — куб, ограниченный плоскостями $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

**855.** $\iiint\limits_G \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz$, где область $G$ расположена в первом октанте и ограничена конусом $4z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

**856.** $\iiint\limits_G dx\, dy\, dz$, где $G$ — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 3$.

## § 7. Вычисление величин посредством тройного интеграла

1. Объем пространственной области $G$

$$V = \iiint\limits_G dv = \iiint\limits_G dx\, dy\, dz. \qquad (1)$$

2. Масса тела, занимающего область $G$,

$$m=\iiint_G \delta(M)\,dv=\iiint_G \delta(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (2)$$

где $\delta(M)$ — объемная плотность распределения массы в точке $M(x,\ y,\ z)$ тела.

3. Координаты центра тяжести $C$ тела

$$x_C=\frac{m_{yz}}{m},\quad y_C=\frac{m_{xz}}{m},\quad z_C=\frac{m_{xy}}{m}, \qquad (3)$$

где $m_{yz}$, $m_{xz}$ и $m_{xy}$ — статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$m_{yz}=\iiint_G x\delta\,dx\,dy\,dz,\quad m_{xz}=\iiint_G y\delta\,dx\,dy\,dz,\quad m_{xy}=\iiint_G z\delta\,dx\,dy\,dz.$$

Для однородного тела $\delta=\text{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

4. Моменты инерции тела относительно осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ и начала координат $O$

$$I_x=\iiint_G (y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz,\quad I_y=\iiint_G (x^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint_G (x^2+y^2)\,\delta dx\,dy\,dz,\quad I_0=\iiint_G (x^2+y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz. \qquad (4)$$

**857.** Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями:

1) $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

2) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z^2;$

3) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4.$

Решение. 1) Данные плоскости ограничивают шестигранник $G$ (черт. 179). Согласно формуле (1) его объем

$$V=\iiint_G dx\,dy\,dz=\iint_{G_{xy}} dx\,dy\int_0^{4-x-y} dz=\iint_{OABCD}(4-x-y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^3 (4-x-y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{4-y}(4-x-y)\,dx=$$

$$=\int_0^1\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3} dy+\int_1^2\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=4-y} dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\frac{1}{2}\int_1^2 (4-y)^2\,dy=$$

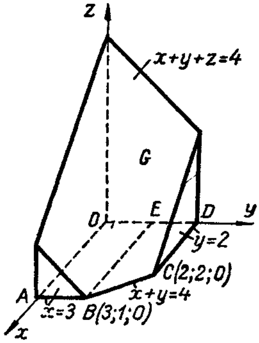
$$=\frac{15}{2}y-\frac{3}{2}y^2\Bigg|_0^1+\frac{1}{6}(y-4)^3\Bigg|_1^2=\frac{55}{6}.$$

Здесь при вычислении двойного интеграла по области $OABCD$ пришлось разбить ее прямой $BE$, параллельной оси $Ox$, на две части.

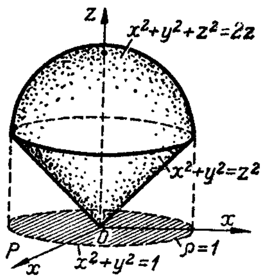
2) Тело, ограниченное сферой $x^2+y^2+z^2=2z$ [с центром в точке (0; 0; 1)] и конусом $x^2+y^2=z^2$, изображено на черт. 180. Его объем

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{z=z_k}^{z=z_c} dz=\iint\limits_{G_{xy}}(z_c-z_k)\,dx\,dy,$$

где $G$—область, занимаемая данным телом; $G_{xy}$—ее проекция на плоскость $xOy$; $z_k$—положительное значение $z$ из уравнения конуса, $z_k=\sqrt{x^2+y^2}$; $z_c$—большее значение $z$ из уравнения сферы, $z_c=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Линия, ограничивающая плоскую




Черт. 179




Черт. 180

область $G_{xy}$, есть окружность $x^2+y^2=1$; ее уравнение получается путем исключения $z$ из данных уравнений сферы и конуса.

Переходя к полярным координатам, найдем:

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(z_c-z_k)\,dx\,dy=\iint\limits_{\rho\leqslant 1}(1+\sqrt{1-\rho^2}-\rho)\,\rho d\varphi\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^2+\rho\sqrt{1-\rho^2})\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}-\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\pi.$$

3) Параболоид вращения $2z=x^2+y^2$ и плоскость $y+z=4$ (параллельная оси $Ox$) ограничивают тело, изображенное на черт. 181.

По формуле (1) объем этого тела

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{z_1}^{z_2} dz=\iint\limits_{G_{xy}}(z_2-z_1)\,dx\,dy,$$

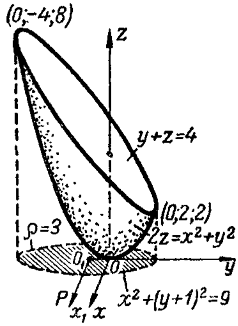
где $G$ — область, занимаемая телом; $G_{xy}$ — круг $x^2+(y+1)^2\leqslant 9$*; $z_1=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$; $z_2=4-y$.

Чтобы упростить вычисление двойного интеграла, перенесем начало координат в центр указанного круга — в точку (0; —1), а затем перейдем к полярным координатам. При этом переменные $x$ и $y$ заменяются по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=-1+\rho\sin\varphi$, произведение $dx\,dy$ заменяется произведением $\rho d\varphi d\rho$ и двойной интеграл преобразуется к простому виду:

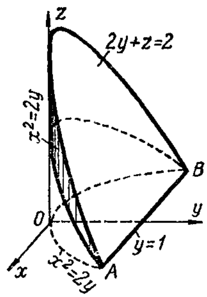
$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant 3}(9-\rho^2)\,\rho d\varphi\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3(9\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi=\frac{81}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{81}{4}\pi$$

($\rho=3$ полярное уравнение окружности $x^2+(y+1)^2=9$).




Черт. 181




Черт. 182

858. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

Решение. Согласно условию в точке $M(x,\ y,\ z)$ тела объемная плотность $\delta(M)=y$. По формуле (2) масса этого тела

$$m=\iiint\limits_G\delta(M)\,dv=\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz,$$

где $G$ — область, занимаемая данным телом (черт. 182).

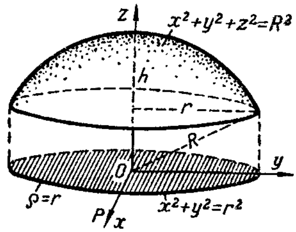
* Уравнение окружности $x^2+(y+1)^2=9$ получено путем исключения $z$ из двух данных уравнений.

Вычисляя тройной интеграл по формуле (*), получим:

$$m=\iint\limits_{G_{xy}} y\,dx\,dy\int\limits_{1-y}^{2(1-y)}dz=\iint\limits_{AOB}y(1-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1(y-y^2)\,dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=$$

$$=\int\limits_0^1(y-y^2)\,2\sqrt{2y}\,dy=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

**859.** Найти центр тяжести сегмента шара, если в каждой его точке объемная плотность пропорциональна ее расстоянию от основания сегмента.



Черт. 183

Решение. Обозначим радиус шара через $R$, высоту сегмента через $h$; поместим начало прямоугольной системы координат в центре шара и направим ось аппликат по оси сегмента (черт. 183). Уравнения сферы и плоскости, которые ограничивают сегмент $(G)$, будут, соответственно, $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $z=$ $=R-h$; объемная плотность в точке $M(x, y, z)$ сегмента выразится формулой $\delta=k\ (z-R+h)$. Любое сечение данного неоднородного сегмента плоскостью, параллельной его основанию, есть однородный круг, центр тяжести которого лежит в его центре. Поэтому центр тяжести данного сегмента помещается на его оси, т. е. $x_c=y_c=0$.

Для нахождения аппликаты центра тяжести применим формулу (3). Вычислим: 1) статический момент $I_{xy}$ и 2) массу $m$ сегмента.

$$1)\ I_{xy}=\iiint\limits_G z\delta\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_G(z-a)\,z\,dx\,dy\,dz,\quad a=R-h.$$

Преобразуем тройной интеграл в двойной от простого:

$$I_{xy}=k\iint\limits_{G_{xy}}dx\,dy\int\limits_a^{z_1}(z^2-az)\,dz,$$

где $G_{xy}$—круг $x^2+y^2\leqslant r^2$, $r^2=R^2-a^2$; $z_1=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Вычисляем внутренний простой интеграл:

$$I_1=\frac{z^3}{3}-\frac{az^2}{2}\Bigg|_a^{z_1}=\frac{1}{3}\left[(R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]-\frac{a}{2}(R^2-x^2-y^2-a^2).$$

Подставляем этот результат в предыдущее равенство и вычисляем полученный двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$I_{xy}=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} I_1\,dx\,dy=k\iint\limits_{\rho\leqslant r}\left[\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{a^3}{6}-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{2}(R^2-\rho^2)\right]\rho d\varphi\,d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{a^3\rho^2}{12}-\frac{1}{15}(R^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{8}(R^2-\rho^2)^2\right]\Bigg|_0^r d\varphi=2k\pi\left\{\frac{a^3r^2}{12}+\frac{1}{15}\left[R^5-(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{8}[(R^2-r^2)^2-R^4]\right\}.$$

Исключая вспомогательные постоянные $r$ и $a$, после упрощений, получим

$$I_{xy}=\frac{k\pi h^3}{60}(20R^2-15Rh+3h^2).$$

$$2)\quad m=\iiint\limits_G \delta\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_G (z-a)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=k\iint\limits_{G_{xy}}dx\,dy\int\limits_a^{z_1}(z-a)\,dz=\frac{k}{2}\iint\limits_{G_{xy}}(z-a)^2\Big|_a^{z_1}dx\,dy=$$

$$=\frac{k}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-a)^2\,dx\,dy=\frac{k}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant r}(\sqrt{R^2-\rho^2}-a)^2\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^r\left[R^2-\rho^2-2a(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}+a^2\right]\rho d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}(R^2+a^2)-\frac{\rho^4}{4}+\frac{2a}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^r=\frac{k\pi h^3(4R-h)}{12}.$$

Согласно формуле (3) искомая апликата центра тяжести данного сегмента

$$z_C=\frac{I_{xy}}{m}=\frac{20R^2-15Rh+3h^2}{5(4R-h)}.$$

Для полушара при $h=R$ имеем

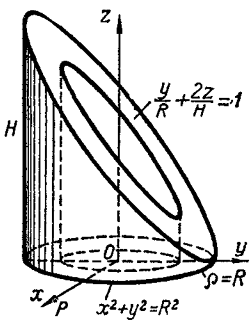
$$I_{xy}=\frac{2k\pi R^5}{15};\quad m=\frac{k\pi R^4}{4};\quad z_C=\frac{8R}{15}.$$

**860.** Найти центр тяжести однородного полого усеченного цилиндра (черт. 184) и момент инерции этого цилиндра относительно его оси.

Решение. Обозначим внешний и внутренний радиусы цилиндра через $R$ и $r$, а его высоту через $H$. Тогда относительно указанной на черт. 184 прямоугольной системы координат уравнения цилиндрических поверхностей и плоскостей, ограничивающих цилиндр $(G)$, будут

$$x^2+y^2=R^2; \quad x^2+y^2=r^2; \quad z=0; \quad Hy+2Rz=HR.$$

Абсцисса центра тяжести данного однородного цилиндра равна нулю, поскольку он симметричен относительно плоскости $yOz$. Ординату и аппликату центра тяжести найдем по формулам (3), полагая в них $\delta=1$,



Черт. 184

$$1) \ I_{xz}=\iiint\limits_{G} y\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} y\,dx\,dy\int\limits_{0}^{z_п} dz,$$

где $G_{xy}$ — круговое кольцо $r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$; $z_п=\frac{H}{2}\left(1-\frac{y}{R}\right)$.

Последовательно вычисляя внутренний простой интеграл, затем двойной (с переходом к полярным координатам), получим:

$$I_{xz}=\frac{H}{2}\iint\limits_{r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2} y\left(1-\frac{y}{R}\right)dx\,dy=\frac{H}{2}\iint\limits_{r\leqslant\rho\leqslant R}\rho\sin\varphi\left(1-\frac{\rho\sin\varphi}{R}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{H}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_{r}^{R}\left(\rho^2-\frac{\rho^3\sin\varphi}{R}\right)d\rho=$$

$$=\frac{H}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{R^3-r^3}{3}-\frac{R^4-r^4}{4R}\sin\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi=\frac{H}{2}\left[\frac{r^3-R^3}{3}\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{R^4-r^4}{4R}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi H\,(r^4-R^4)}{8R}.$$

$$2) \ I_{xy}=\iiint\limits_{G} z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{0}^{z_п} z\,dz=$$

$$=\frac{H^2}{8}\iint\limits_{r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2}\left(1-\frac{y}{R}\right)^2 dx\,dy=\frac{H^2}{8}\iint\limits_{r\leqslant\rho\leqslant R}\left(1-\frac{\rho\sin\varphi}{R}\right)^2\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{H^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r}^{R}\left(\rho-\frac{2\rho^2\sin\varphi}{R}+\frac{\rho^3\sin^2\varphi}{R^2}\right)d\rho=\frac{H^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(R^3-r^3)\sin\varphi}{3R}+\frac{(R^4-r^4)\sin^2\varphi}{4R^2}\right]d\varphi=\frac{\pi H^2\,(R^2-r^2)\,(3R^2-r^2)}{32\,R^2}.$$

3) Масса $m$ данного полого усеченного цилиндра в предположении, что его плотность $\delta=1$, численно равна объему $V$ этого

цилиндра. Его можно найти или по формуле (1) или элементарным путем как половину объема полого неусеченного цилиндра:

$$m = V = \frac{\pi H\,(R^2 - r^2)}{2}.$$

Подставляя значения $I_{xz}$, $I_{xy}$ и $m$ в формулы (3), получим:

$$y_C = \frac{I_{xz}}{m} = -\frac{R^2 + r^2}{4R}; \quad z_C = \frac{I_{xy}}{m} = \frac{H\,(3R^2 - r^2)}{16R^2}.$$

Момент инерции данного цилиндра относительно его оси находим по формуле (4):

$$I_z = \iiint\limits_G \delta\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \delta \iint\limits_{G_{xy}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy \int\limits_0^{z_\Pi} dz =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \iint\limits_{r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2} (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{y}{R}\right) dx\,dy =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \iint\limits_{r \leqslant \rho \leqslant R} \rho^2 \left(1 - \frac{\rho \sin\varphi}{R}\right) \rho\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^R \left(\rho^3 - \frac{\rho^4 \sin\varphi}{R}\right) d\rho = \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5 \sin\varphi}{5R}\Bigg|_{\rho = r}^{\rho = R}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^4 - r^4}{4} - \frac{R^5 - r^5}{5R} \sin\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi\delta H\,(R^4 - r^4)}{4}.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

**861.** Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$.

**862.** Цилиндрами $x^2 = y$, $x^2 = 4 - 3y$ и плоскостями $z = 0$, $z = 9$.

**863.** Конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 6 - z$; $z \geqslant 0$.

**864.** Цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**865.** Части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $bx + ay = ab$.

**866.** Найти массу куба, если в каждой его точке объемная плотность численно равна сумме ее расстояний до трех граней этого куба, проходящих через одну данную его вершину.

**867.** Найти массу цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и его момент инерции относительно диаметра основания, если объемная плотность в каждой точке цилиндра пропорциональна квадрату расстояния ее от его оси.

**868.** Найти массу вещества, заполняющего общую часть двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, если его плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию ее до плоскости $xOy$.

**869.** Найти центр тяжести:

1) однородного тела, ограниченного параболоидом $c(x^2+y^2)=2a^2z$ и конусом $c^2(x^2+y^2)=a^2z^2$;

2) восьмой части однородного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$, расположенной в первом октанте;

3) полушара $0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, у которого объемная плотность в каждой точке численно равна ее расстоянию от центра его основания.

**870.** Неоднородное тело ограничено плоскостями $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ и цилиндром $z^2=6x$. Объемная плотность вещества в каждой его точке пропорциональна ее расстоянию от плоскости $xOy$. Найти момент инерции этого тела относительно оси $Oz$.

**871.** Найти полярный момент инерции (относительно начала координат) однородного тела, ограниченного конусом $z^2=x^2-y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.

## § 8. Криволинейные интегралы, их вычисление и условие независимости от линии интегрирования

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке $M$ дуги $AB$ и если разбить эту дугу произвольным способом на $n$ частичных дуг длиною $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta l_1+f(M_2)\Delta l_2+\ldots+f(M_n)\Delta l_n=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta l_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по дуге $AB$.

Очевидно при этом, что для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной дуги $AB$ можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм,—если по-разному делить эту дугу на $n$ частичных дуг и по-разному выбирать на каждой из них по одной точке $M_i$.

Но при неограниченном увеличении $n$ и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется криволинейным интегралом от функции $f(M)$ по длине дуги $AB$ и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)\,dl$.

Криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(M)\,dx$, $\int\limits_{AB} Q(M)\,dy$ или $\int\limits_{AB} R(M)\,dz$ по координатам $x$, $y$ или $z$ определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(M)$, $Q(M)$ или $R(M)$, взятых по дуге $AB$, с той лишь разницей, что при составлении этих сумм значения функции в точках $M_i$ умножаются не на длины частичных дуг $\Delta l_i$, а на их проекции $\Delta x_i$, $\Delta y_i$ или $\Delta z_i$ на координатные оси.

Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ обозначает сумму криволинейных интегралов указанных видов.

Криволинейный интеграл по замкнутой плоской линии $l$ при положительном направлении ее обхода (против движения часовой стрелки) обозначается $\oint\limits_{+l}$, а при отрицательном направлении обхода обозначается $\oint\limits_{-l}$.

Обыкновенный (прямолинейный) определенный интеграл является частным случаем криволинейного интеграла, у которого линией интегрирования служит прямолинейный отрезок оси координат.

*При перемене направления на кривой интегрирования криволинейный интеграл (по координатам) изменяет свой знак:* $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.

Кривую интегрирования можно разбивать на части:

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$$

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}$ сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла: исходя из уравнения (или уравнений) линии интегрирования $AB$ подынтегральное выражение криволинейного интеграла преобразуется к одной переменной, значения которой в начале и в конце дуги $AB$ будут пределами полученного обыкновенного интеграла.

*Обычно криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB}$ *зависит от линии интегрирования. Взятый вдоль разных линий, соединяющих точки* $A$ *и* $B$, *он будет иметь различные значения.*

*Но если в некоторой односвязной* области* $D$ *выражение* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *является полным дифференциалом, то криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ *не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки* $A$ *и* $B$, *а взятый по любой замкнутой линии, пролегающей в области* $D$, *равен нулю.*

---

* Плоская область называется односвязной, если любая замкнутая линия, лежащая в этой области, может быть стянута в точку, оставаясь в этой области.

Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x, y)$ в некоторой односвязной области $D$, если $P'_y = Q'_x$ и если $P$, $Q$, $P'_y$, $Q'_x$ непрерывны в этой области.

**872.** Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_L (xy - 1)\,dx + x^2y\,dy$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$:

1) по прямой $2x + y = 2$;

2) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$;

3) по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ (черт. 185).

Решение. 1) Пользуясь данным уравнением линии интегрирования, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный определенный интеграл с переменной $x$, затем вычисляем его:

$$y = 2 - 2x, \quad dy = -2dx,$$

$$I_1 = \int\limits_{x_A}^{x_B} [x(2-2x) - 1]\,dx + x^2(2-2x)(-2dx) =$$

$$= \int\limits_1^0 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\,dx = x^4 - 2x^3 + x^2 - x \Big|_1^0 = 1.$$

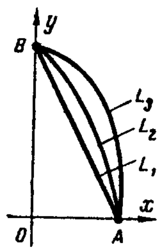
2) Здесь удобно преобразовать криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной $y$:

$$x = 1 - \frac{y^2}{4},\ dx = -\frac{y}{2}\,dy,$$

$$I_2 = \int\limits_{y_A=0}^{y_B=2} \left[\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)y - 1\right]\left(-\frac{y}{2}\,dy\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 y\,dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4}\Big|_0^2 = -\frac{1}{5}.$$



Черт. 185

3) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной $t$, затем вычисляем его: $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$; $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t\,dt$:

$$I_3 = \int\limits_{t_A=0}^{t_B=\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot 2\sin t - 1)(-\sin t\,dt) + \cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 t \sin t + \sin t - 2\sin^2 t \cos t)\,dt = -4\int \cos^3 t\,d\cos t +$$

$$+ \int \sin t\,dt - 2\int \sin^2 t\,d\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(Значения параметра $t$ в точках $A$ и $B$ найдены из данных параметрических уравнений эллипса по известным координатам этих точек.)

**873.** Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})\,dl$ между точками $E(-1;\ 0)$ и $H(0;\ 1)$:

1) по прямой $EH$;

2) по дуге астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

Решение. 1) Вначале составляем уравнение линии интегрирования — прямой $EH$, как уравнение прямой, проходящей через две известные точки: $y-x=1$.

Пользуясь этим уравнением и известной формулой для дифференциала дуги плоской кривой (гл. V, § 6), преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной $x$ и вычисляем его:

$$y=x+1,\quad y'=1;\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx;$$

$$I_1=\int\limits_{x_E=-1}^{x_H=0}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\left[4\int x^{\frac{1}{3}}dx-\right.$$

$$\left.-3\int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)\right]\Big|_{-1}^{0}=\sqrt{2}\left[3x^{\frac{4}{3}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-1}^{0}=-5\sqrt{2}.$$

2) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной $t$, затем вычисляем:

$$x=\cos^3 t,\quad dx=-3\cos^2 t\sin t\,dt;\quad y=\sin^3 t,\quad dy=3\sin^2 t\cos t\,dt;$$

$$dl=\sqrt{dy^2+dx^2}=3\,|\sin t\cos t\,|\,dt=-3\sin t\cos t\,dt,\ \text{ибо}\ \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \pi;$$

$$I_2=\int\limits_{t_E=\pi}^{t_H=\frac{\pi}{2}}(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t})\ 3\sin t\cos t\,dt=-12\int\cos^2 t\,d\cos t-$$

$$-9\int\sin^{\frac{5}{2}}t\,d\sin t\ \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-4\cos^3 t-\frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}}t\ \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{46}{7}.$$

**874.** Даны точки $A(3;\,-6;\ 0)$ и $B(-2;\ 4;\ 5)$. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_C xy^2\,dx+yz^2\,dy-zx^2\,dz$:

1) по прямолинейному отрезку $OB$ и

2) по дуге $AB$ окружности, заданной уравнениями $x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$.

Решение. 1) Вначале составляем уравнения линии интегрирования — прямой $OB$. Пользуясь общими уравнениями прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, получим $\frac{x}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$. Приравнивая эти равные отношения параметру $t$, преобразуем полученные канонические уравнения прямой $OB$ к параметрическому виду: $x=-2t$, $y=4t$, $z=5t$.

Далее, пользуясь этими уравнениями, преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной $t$, затем вычисляем его

$$I_1=\int_{t_0=0}^{t_B=1} -2t(4t)^2(-2dt)+4t(5t)^2\,4dt-5t(-2t)^2\,5dt=$$

$$=364\int_0^1 t^3\,dt=91.$$

2) Преобразуем данные уравнения окружности к параметрическому виду. Полагая $x=t$, получим $y=-2t$ (из второго данного уравнения), $z=\sqrt{45-5t^2}$ (из первого уравнения). Отсюда $dx=dt$, $dy=-2dt$, $dz=-\frac{5t\,dt}{\sqrt{45-5t^2}}$ и

$$I_2=\int_{t_A=3}^{t_B=-2} t(-2t)^2\,dt+(-2t)(45-5t^2)(-2dt)-$$

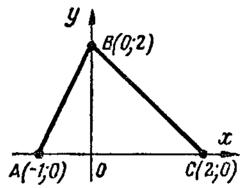
$$-\sqrt{45-5t^2}\,t^2\left(-\frac{5t\,dt}{\sqrt{45-5t^2}}\right)=\int_3^{-2}(180t-17t^3)\,dt=-173\frac{3}{4}.$$

**875.** Вычислить криволинейные интегралы:

$$1)\ \oint_{-l} 2x\,dx-(x+2y)\,dy \quad \text{и} \quad 2)\ \oint_{+l} y\cos x\,dx+\sin x\,dy$$

вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ и $C(2;\ 0)$.

Решение. 1) Здесь (черт. 186) линия интегрирования (замкнутая) состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых (с различными уравнениями). Соответственно этому криволинейный интеграл по ломаной $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам $AB$, $BC$ и $CA$.



Черт. 186

Составив уравнение прямой $AB$, $y-2x=2$, и исходя из этого уравнения, преобразуем криволинейный интеграл на отрезке $AB$ в обыкновенный интеграл с переменной $x$:

$$y=2x+2,\quad dy=2dx,\quad \int_{AB}=-8\int_{x_A=-1}^{x_B=0}(x+1)\,dx=$$

$$=-4(x+1)^2\Big|_{-1}^{0}=-4.$$

Аналогичным путем вычисляя криволинейный интеграл на отрезках $BC$ и $CA$, получим

$$x=2-y,\ dx=-dy,\quad \int\limits_{BC}=\int\limits_{y_B=2}^{y_C=0}(y-6)\,dy=\frac{(y-6)^2}{2}\Big|_2^0=10;$$

$$y=0,\quad dy=0,\quad \int\limits_{CA}=2\int\limits_{x_C=2}^{x_A=-1}x\,dx=x^2\Big|_2^{-1}=-3.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{ABCA}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=-4+10-3=3.$$

2) Здесь подынтегральное выражение есть полный дифференциал функции двух переменных, ибо $(y\cos x)'_y=(\sin x)'_x=\cos x$. Вследствие этого данный криволинейный интеграл, взятый по периметру данного треугольника, равен нулю. Он будет равен нулю и по любому другому замкнутому контуру.

Вычислить криволинейные интегралы:

**876.** $\int\limits_{OA} y(x-y)\,dx+x\,dy$ по линиям: 1) $y=2x$; 2) $y=2x^2$; 3) $y^2=4x$; $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2)$.

**877.** $\oint\limits_{+C}(x^2-y)\,dx$ вдоль периметра прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

**878.** $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой $x-2y=4$; $A(0;\ -2)$, $B(4;\ 0)$.

**879.** $\int\limits_{OC} y\,dx+z\,dy+x\,dz$: 1) по отрезку прямой $OC$ и 2) по ломаной $OABC$; $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ 1)$.

**880.** $\oint\limits_{-C}(x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**881.** $\int\limits_{MN} 2y\sin 2x\,dx-\cos 2x\,dy$ по любой линии; $M\left(\frac{\pi}{4};\ 2\right)$, $N\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$.

**882.** $\int\limits_{AB}(yx\,e^x\,dx+(x-1)\,e^x\,dy$ по любой линии; $A(0;\ 2)$, $B(1;\ 2)$.

**883.** $\oint\limits_{+G} 2x(y-1)\,dx+x^2\,dy$ по контуру фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=9$.

## § 9. Вычисление величин посредством криволинейных интегралов

Криволинейные интегралы, как и все другие определенные интегралы, служат для вычисления различных геометрических и физических величин.

Наиболее просто посредством криволинейных интегралов вычисляются следующие величины:

1) Длина дуги $AB$ плоской или пространственной линии

$$L_{AB}=\int\limits_{AB} dl. \tag{1}$$

2) Площадь фигуры, расположенной в плоскости $xOy$ и ограниченной замкнутой линией $C$,

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{+C} x\,dy-y\,dx. \tag{2}$$

3) Масса материальной дуги $AB$

$$m=\int\limits_{AB}\delta(M)\,dl, \tag{3}$$

где $\delta(M)$ — линейная плотность вещества в точке $M$ дуги.

4) Координаты центра тяжести $C$ дуги $AB$

$$x_C=\frac{\int\limits_{AB} x\,\delta(M)\,dl}{m};\quad y_C=\frac{\int\limits_{AB} y\,\delta(M)\,dl}{m};\quad z_C=\frac{\int\limits_{AB} z\,\delta(M)\,dl}{m}. \tag{4}$$

(В случае равномерного распределения массы $\delta=\mathrm{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.)

5) Работа, совершаемая силой $\overline{F}\{P, Q, R\}$, действующей на точку при перемещении ее по дуге $AB$,

$$E=\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{5}$$

**884.** Найти длину кардиоиды $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

Решение. Применяем формулу (1); исходя из данных параметрических уравнений кардиоиды и формулы для дифференциала дуги плоской кривой (гл. 5, § 6), преобразуем криволинейный интеграл формулы (1) в обыкновенный интеграл с переменной $t$.

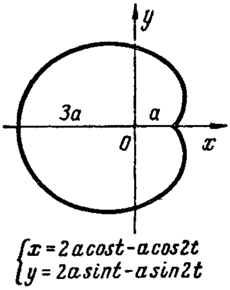
$$\dot{x}=-2a\sin t+2a\sin 2t,\qquad \dot{y}=2a\cos t-2a\cos 2t,$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=4a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

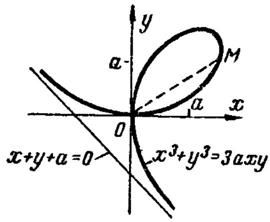
Вся кардиоида (черт. 187) получается при изменении $t$ от 0 до $2\pi$. Поэтому

$$L=4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=16a.$$

**885.** Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой:
1) эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t$;
2) петлей декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$.



**Черт. 187**



**Черт. 188**

Решение. 1) Применяем формулу (2). Исходя из данных параметрических уравнений эллипса, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной $t$ и вычисляем его:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{+C}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}a\cos t\,d(b\sin t)-b\sin t\,d(a\cos t)=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

2) Вначале преобразуем данное уравнение к параметрическому виду. Полагая $y=xt$, получим $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

Геометрически параметр $t=\frac{y}{x}$ есть угловой коэффициент полярного радиуса $OM$ (черт. 188); точка $M(x, y)$ опишет всю петлю кривой при изменении $t$ от 0 до $+\infty$.

Преобразуя криволинейный интеграл формулы (2) в обыкновенный интеграл с переменной $t$, получим

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{+C}x\,dy-y\,dx=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^{\beta}(1+t^3)^{-2}d(1+t^3)=\frac{3a^2}{2}\lim\frac{1}{1+t^3}\Big|_\beta^0=\frac{3a^2}{2}.$$

**886.** Найти массу дуги $AB$ кривой $y = \ln x$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки; $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Решение. Применяем формулу (3). Исходя из данного уравнения кривой, преобразуем криволинейный интеграл формулы (3) в обыкновенный с переменной $x$:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx, \quad \delta = kx^2;$$

$$m = \int_{AB} \delta\, dl = k \int_1^3 x^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \frac{k}{2} \int_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x^2+1) =$$

$$= \frac{k}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{k}{3} \left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right) \approx 9{,}6\ k.$$

**887.** Найти координаты центра тяжести дуги $AB$ винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна апликате этой точки; $t_A = 0$, $t_B = \pi$.

Решение. Применяем формулы (4). Вычислим криволинейные интегралы, содержащиеся в этих формулах, преобразуя их в обыкновенные интегралы с переменной $t$:

$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \dot{y} = a\cos t, \quad \dot{z} = b; \quad dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, dt;$$

$$I_1 = \int_{AB} x\delta\, dl = \int_0^\pi a\cos t \cdot kbt \sqrt{a^2+b^2}\, dt =$$

$$= akb\sqrt{a^2+b^2}\,(t\sin t + \cos t)\Big|_0^\pi = -2abk\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_2 = \int_{AB} \delta\, dl = \int_0^\pi kbt\sqrt{a^2+b^2}\, dt = kb\sqrt{a^2+b^2}\, \frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{bk\pi^2}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_3 = \int_{AB} y\delta\, dl = \int_0^\pi a\sin t \cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\, dt =$$

$$= abk\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin t - t\cos t)\Big|_0^\pi = abk\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_4 = \int_{AB} z\delta\, dl = \int_0^\pi btkbt\sqrt{a^2+b^2}\, dt = \frac{kb^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $x_C = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{4a}{\pi^2}$; $y_C = \frac{I_3}{I_2} = \frac{2a}{\pi}$; $z_C = \frac{I_4}{I_2} = \frac{2}{3}b\pi$.

**888.** Вычислить работу, совершаемую силой тяжести при перемещении точки массы $m$ по дуге $AB$ некоторой кривой.

Решение. Если выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы направление оси $Oz$ совпало с направлением силы тяжести, то действующая на точку сила $\overline{F}=mg\overline{k}$, а ее проекции на оси координат $F_x=P=0$, $F_y=Q=0$, $F_z=R=mg$.

Согласно формуле (5) искомая работа

$$E=\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{AB} mg\,dz=mg\int_{z_A}^{z_B} dz=mg\,(z_B-z_A).$$

Она зависит только от разности аппликат начала и конца пути, но не зависит от формы пути.

**889.** Найти работу силового поля, в каждой точке $(x, y)$ которого напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\overline{p}=(x+y)\overline{i}-x\overline{j}$, когда точка массы $m$ описывает окружность $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, двигаясь по ходу часовой стрелки.

Решение. Подставляя в формулу (5) проекции силы $\overline{F}=m\overline{p}$, действующей на точку: $F_x=m\,(x+y)$, $F_y=-mx$, и преобразуя криволинейный интеграл в обыкновенный с переменной $t$, получим

$$E=\oint_{-C} P\,dx+Q\,dy=\oint_{-C} m\,(x+y)\,dx-mx\,dy=$$

$$=\int_0^{-2\pi} m\,(a\cos t+a\sin t)\,d\,(a\cos t)-ma\cos t\,d\,(a\sin t)=$$

$$=-ma^2\int_0^{-2\pi}(1+\sin t\cos t)\,dt=-ma^2\left(t+\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{-2\pi}=2\pi ma^2.$$

**890.** Найти длину дуги кривой $x=2-\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^6}{6}$ между точками пересечения ее с осями координат.

**891.** Найти длину дуги $AB$ кривой $e^{2y}(e^{2x}-1)=e^{2x}+1$; $x_A=1$, $x_B=2$.

**892.** Найти площадь, ограниченную кривой:

1) кардиоидой $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$;

2) астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

**893*.** Найти площадь: 1) ограниченную кривой $y^2=x^2-x^4$; 2) петли кривой $y^2=x^2+x^3$. (Перейти к параметрическим уравнениям, полагая $y=xt$.)

**894.** Найти массу дуги $OA$ кривой:

1) $3y=2x\sqrt{x}$, если в каждой ее точке $M$ линейная плотность пропорциональна длине дуги $OM$, $O\,(0;\ 0)$, $A\left(4;\ \frac{16}{3}\right)$;

2) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, если линейная плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки, $x_0=0$, $x_A=a$.

**895.** Найти центр тяжести однородной дуги $AB$ винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=mt$; $t_A=0$, $t_B=2\pi$.

**896.** Найти центр тяжести дуги $NP$ астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки; $N(0,\ a)$, $P(a,\ 0)$.

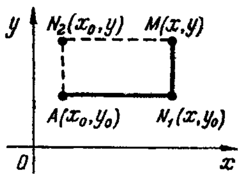
**897.** Найти работу силового поля при перемещении точки массы $m$ вдоль периметра квадрата, образованного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm a$, если в каждой точке $(x,\ y)$ поля напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\overline{p}=(x-y)\overline{i}+x\overline{j}$.

**898*.** Точка массы $m$ перемещается в силовом поле по дуге $AB$ кривой $f(x,\ y)=0$. Найти работу поля, если в каждой его точке $(x,\ y)$ сила, действующая на единицу массы, направлена к началу координат и по модулю равна расстоянию точки от начала координат.

## § 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Если известен полный дифференциал функции двух переменных $du=P\,dx+Q\,dy$, где $P'_y=Q'_x$, то ее можно найти, интегрируя $du$ по любой линии между произвольной фиксированной точкой $A(x_0,\ y_0)$ и переменной точкой $M(x,\ y)$:

$$u=\int\limits_{AM}P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy+C. \qquad (*)$$



Черт. 189

Обычно в качестве линии интегрирования $AM$ берется ломаная $AN_1M$ или $AN_2M$ со звеньями, параллельными осям координат (черт. 189). При этом криволинейный интеграл $\int\limits_{AM}$ наиболее просто выражается через обыкновенные интегралы, и формула $(*)$ преобразуется к виду

$$u=\int\limits_{AM}du+C=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}P(x,\ y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,\ y)\,dy+C & (1)\\[2ex] \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}P(x,\ y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,\ y)\,dy+C. & (2)\end{cases}$$

Во многих случаях можно найти функцию $u$ по ее полному дифференциалу $du=P\,dx+Q\,dy$ иначе.

Поскольку полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du=d_xu+d_yu$, $d_xu=P\,dx$, $d_yu=Q\,dy$, то интегрируя каждый из них отдельно, найдем два выражения искомой функции $u$:

а) $u=\int P\,dx+\varphi(y)$, считая $y$ постоянной;

б) $u=\int Q\,dy+\psi(x)$, считая $x$ постоянной,

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — неизвестные функции.

Беря все известные члены из первого выражения и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от $y$, из второго выражения получим функцию $u$.

Решение такой задачи легко проверить: если функция $u$ найдена верно, то ее полный дифференциал, найденный по формуле $du=u'_x dx+u'_y dy$, должен быть тождествен данному полному дифференциалу $P\,dx+Q\,dy$.

**899.** Проверить, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, и найти $u$:

1) $(2x-3y^2+1)\,dx+(2-6xy)\,dy$; 2) $(e^{xy}+5)(x\,dy+y\,dx)$;

3) $(1-\sin 2x)\,dy-(3+2y\cos 2x)\,dx$.

Решение. 1) Обозначим коэффициенты при дифференциалах $P=2x-3y^2+1$, $Q=2-6xy$ и найдем $P'_y=-6y$ и $Q'_x=-6y$. Так как здесь $P'_y=Q'_x$ и $P$, $Q$, $P'_y$, $Q'_x$ непрерывны, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u$.

Найдем эту функцию по формуле (1), выбрав точку $A$ в начале координат $O(0, 0)$

$$u=\int_0^x (2x+1)\,dx+\int_0^y (2-6xy)\,dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

2) Преобразуем заданное дифференциальное выражение к виду $P\,dx+Q\,dy$ и найдем $P'_y$ и $Q'_x$:

$$y(e^{xy}+5)\,dx+x(e^{xy}+5)\,dy;\quad P'_y=5+e^{xy}(1+xy)=Q'_x.$$

Условие $P'_y=Q'_x$ выполнено. Заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Найдем эту функцию по формуле (2):

$$u=\int_{x_0}^x y(e^{xy}+5)\,dx+\int_{y_0}^y x_0(e^{x_0y}+5)\,dy+C=e^{xy}+5xy\Big|_{x_0}^{x}+$$

$$+e^{x_0y}+5x_0y\Big|_{y_0}^{y}+C=e^{xy}+5xy-e^{x_0y_0}-5x_0y_0+C=e^{xy}+5xy+C_1,$$

где $C_1=C-e^{x_0y_0}-5x_0y_0$.

3) Вначале находим частные производные

$$P'_y = -(3+2y\cos 2x)'_y = -2\cos 2x,$$
$$Q'_x = (1-\sin 2x)'_x = -2\cos 2x$$

и убеждаемся, что они тождественно равны и что заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Затем найдем эту функцию вторым способом, интегрируя каждый частный дифференциал $P\,dx$ и $Q\,dy$ отдельно.

а) $u = -\int (3+2y\cos 2x)\,dx = -3x - y\sin 2x + \varphi(y)$, считая $y$ постоянной;

б) $u = \int (1-\sin 2x)\,dy = y - y\sin 2x + \psi(x)$, считая $x$ постоянной.

Объединяя эти два выражения — дописав к известным членам первого выражения недостающий член, зависящий только от $y$, из второго выражения получим одну из первообразных функций, а прибавив к ней произвольную постоянную $C$, получим общее выражение первообразной функции для заданного полного дифференциала $u = y - 3x - y\sin 2x + C$.

В задачах 900—905 проверить, что данное дифференциальное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ и затем найти $u$:

**900.** $(3x^2y+1)\,dx + (x^3-1)\,dy$.

**901.** $\cos x\cos y\,dx - \sin y(\sin x + 4\cos y)\,dy$.

**902.** $[1+\cos(xy)](y\,dx + x\,dy)$.

**903.** $(y^2e^{xy}-3)\,dx + e^{xy}(1+xy)\,dy$.

**904.** $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. **905.** $\dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

## § 11. Интегралы по поверхности, их вычисление сведением к двойным интегралам

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке $M$ гладкой* поверхности $\sigma$ и если разбить эту поверхность произвольным способом на $n$ частичных поверхностей с площадями $\Delta s_1$, $\Delta s_2$, ..., $\Delta s_n$, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\,\Delta s_1 + f(M_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по площади поверхности $\sigma$.

Поскольку в описанном процессе составления интегральной суммы можно по-разному разбивать поверхность $\sigma$ на $n$ частич-

* Гладкая поверхность в каждой своей точке имеет определенную касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется вместе с точкой касания.

ных поверхностей и на каждой из них можно по-разному выбирать по одной точке $M_i$, то для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной поверхности $\sigma$ можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом, если $n$ будет неограниченно возрастать, а наибольший из диаметров частичных поверхностей будет стремиться к нулю, то все эти интегральные суммы будут иметь один общий предел, который называется поверхностным интегралом от функции $f(M)$ по площади поверхности $\sigma$ и обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(M)\,ds$.

Поверхностные интегралы по координатам $x$ и $y$, $x$ и $z$ или $y$ и $z$

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)\,dx\,dy, \quad \iint\limits_{\sigma} Q(M)\,dx\,dz \quad \text{или} \quad \iint\limits_{\sigma} R(M)\,dy\,dz \qquad (*)$$

определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(M)$, $Q(M)$ или $R(M)$, взятых по поверхности $\sigma$, с той лишь разницей, что при составлении этих сумм значения функции в точках $M_i$ умножаются не на площади частичных поверхностей $\Delta s_i$, а на их проекции на координатные плоскости $xOy$, $xOz$ или $yOz$.

Поверхностный интеграл по координатам общего вида

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)\,dx\,dy + Q(M)\,dx\,dz + R(M)\,dy\,dz$$

представляет сумму поверхностных интегралов по координатам вида (*).

Вычисление поверхностных интегралов обоих типов сводится к вычислению двойных интегралов: исходя из уравнения поверхности $\sigma$ подынтегральное выражение поверхностного интеграла преобразуется к двум переменным, областью изменения которых будет проекция $\sigma$ на соответствующую (этим переменным) координатную плоскость.

Если область интегрирования поверхностного интеграла — поверхность $\sigma$ имеет уравнение $z=\varphi(x, y)$, то поверхностный интеграл первого типа (по площади поверхности) преобразуется в двойной интеграл (и затем вычисляется) по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,ds = \iint\limits_{\sigma_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dx\,dy, \qquad (1)$$

где $\sigma_{xy}$ — проекция области $\sigma$ на плоскость $xOy$,
а поверхностный интеграл второго типа (по координатам) — по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dx\,dy, \qquad (2)$$

где двойной знак соответствует двум различным сторонам поверхности $\sigma$: плюс соответствует интегрированию по верхней стороне поверхности $\sigma$ (обращенной в сторону положительного направления оси $Oz$), а минус — интегрированию по нижней стороне поверхности $\sigma$ (обращенной в сторону отрицательного направления оси $Oz$).

Если для всей поверхности $\sigma$ нельзя $z$ выразить однозначной функцией от $x$ и $y$, то ее следует разбить на части, для которых это возможно, и затем вычислить данный интеграл как сумму интегралов по составляющим частям.

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы первого и второго типов, когда поверхность $\sigma$ имеет уравнение вида $y=\varphi_1(x, z)$ или $x=\varphi_2(y, z)$.

При этом для поверхностного интеграла второго типа, как и в правой части формулы (2), перед двойным интегралом выбирается знак плюс или минус, смотря по тому, берется ли поверхностный интеграл по стороне поверхности $\sigma$, которая обращена в сторону положительного или отрицательного направления соответствующей координатной оси (перпендикулярной к координатной плоскости расположения области интегрирования двойного интеграла).

*Поверхностный интеграл по координатам $x$, $y$, взятый по куску цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $Oz$, равен нулю.* В аналогичных случаях равны нулю и поверхностные интегралы по координатам $x$, $z$ или $y$, $z$.

Если $\sigma$ замкнутая поверхность, то интеграл по внешней ее стороне обозначается $\oiint\limits_{+\sigma}$, а по внутренней стороне $\oiint\limits_{-\sigma}$.

Интеграл по замкнутой поверхности $\sigma$ можно преобразовать в тройной интеграл по области $G$, ограниченной этой поверхностью, и, наоборот, по формуле Остроградского—Гаусса:

$$\oiint\limits_{+\sigma} P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy=\iiint\limits_{G}(P'_x+Q'_y+R'_z)\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в области $G$.

Интеграл по незамкнутой поверхности $\sigma$ связан с криволинейным интегралом по контуру $l$, ограничивающему эту поверхность, по формуле Стокса:

$$\iint\limits_{\sigma}(R'_y-Q'_z)\,dy\,dz+(P'_z-R'_x)\,dx\,dz+(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=$$
$$=\oint\limits_{l} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{4}$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в некоторой области $G$, содержащей $\sigma$.

Направление обхода контура $l$ и сторона поверхности $\sigma$ согласуются по следующему правилу: *с той стороны поверхности $\sigma$, по которой ведется интегрирование, обход контура $l$ должен быть направлен против часовой стрелки* *.

Если по этой формуле криволинейный интеграл по замкнутому контуру $l$ преобразуется в поверхностный интеграл, то $\sigma$ может быть любая (кусочно-гладкая) поверхность, «натянутая» на $l$ и содержащаяся в области $G$.

В случае, когда $\sigma$ есть плоская область $D$ на плоскости $xOy$ ($z=0$), формула (4) упрощается:

$$\iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \oint\limits_{+l} P\,dx + Q\,dy. \qquad (5)$$

Этот частный вид формулы Стокса принято называть формулой Грина.

**906.** Вычислить поверхностные интегралы первого типа (по площади поверхности):

1) $I = \iint\limits_\sigma (6x + 4y + 3z)\,ds$, где $\sigma$ — часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте.

2) $K = \iint\limits_W (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})\,ds$, где $W$ — поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=h$.

Решение. 1) Поверхность интегрирования $\sigma$ есть треугольник $ABC$ (черт. 190). Пользуясь ее уравнением и формулой (1), преобразуем данный поверхностный интеграл в двойной интеграл с переменными $x$ и $y$:

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y),\quad ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy,$$

$$I = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}} (5x + 2y + 6)\,dx\,dy,$$

где $\sigma_{xy}$ — треугольник $ABO$, являющийся проекцией $\sigma$ на плоскость $xOy$.

---

* Точнее: При обходе контура $l$ по стороне интегрирования поверхности $\sigma$ прилежащая к нему часть $\sigma$ должна быть слева.

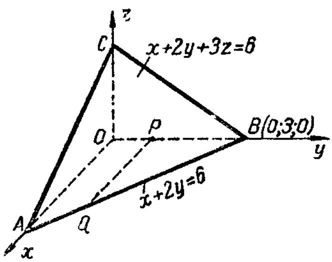
Полученный двойной интеграл вычисляем двукратным интегрированием:

$$I=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_{y_O=0}^{y_B=3}dy\int\limits_{x_P=0}^{x_Q=6-2y}(5x+2y+6)\,dx=$$

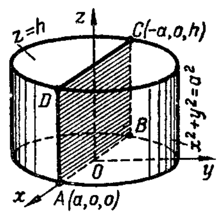
$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\Big|_{x=0}^{x=6-2y}\right)dy=2\sqrt{14}\int\limits_0^3(y^2-10y+21)\,dy=$$

$$=2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y\right)\Big|_0^3=54\sqrt{14}.$$

2) Здесь для всей поверхности $W$ нельзя выразить одну из координат однозначной функцией от двух других координат. Части цилиндрической поверхности, расположенные по разные




Черт. 190




Черт. 191

стороны от вертикальных координатных плоскостей (черт. 191), имеют различные явные уравнения: часть $W_1$, расположенная слева от плоскости $xOz$, имеет уравнение $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, а часть $W_2$, расположенная справа от этой плоскости, имеет уравнение $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Поэтому вычисляем данный интеграл $K$ по поверхности $W$ как сумму интегралов $K_1$ и $K_2$ по составляющим ее частям $W_1$ и $W_2$.

Преобразуя поверхностные интегралы $K_1$ и $K_2$ в двойные интегралы с переменными $x$ и $z$, получим:

$$ds=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dx\,dz=\frac{a\,dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$K_1=a\iint\limits_{(W_1)_{xz}}\frac{z\,dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}},\qquad K_2=a\iint\limits_{(W_2)_{xz}}\left(2+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\,dz.$$

Следовательно,

$$K=K_1+K_2=2a\iint\limits_{ABCD}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\,dz,$$

так как прямоугольник $ABCD$ есть общая проекция поверхностей $W_1$ и $W_2$ на плоскость $xOz$.

Вычисляя полученный двойной интеграл, найдем:

$$K = 2a\int_0^h dz \int_{-a}^{a}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = 2a\int_0^h \left(x + z\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{x=-a}^{x=a}\right)dz =$$

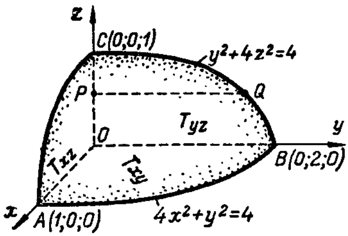
$$= 2a\int_0^h (2a+\pi z)\,dz = 2a\left(2az+\frac{\pi z^2}{2}\right)\Big|_0^h = ah(4a+\pi h).$$

**907.** Вычислить поверхностные интегралы второго типа (по координатам):

1) $I=\iint\limits_{\sigma}\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где $\sigma$ — нижняя сторона круга $x^2+y^2\leqslant a^2$.

2) $J=\iint\limits_{T} 2\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2z\,dy\,dz$, где $T$ — внешняя сторона части эллипсоида $4x^2+y^2+4z^2=4$, расположенной в первом октанте.

3) $K=\oiint\limits_{-W} y\,dx\,dz$, где $W$ — поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.




Черт. 192

Решение. 1) Поверхность $\sigma$ совпадает со своей проекцией $\sigma_{xy}$ на плоскость $xOy$. Поэтому и согласно формуле (2), учитывая, что интегрирование распространяется на нижнюю сторону круга, получим:

$$I = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{\rho\leqslant a}\sqrt{\rho}\,\rho\,d\varphi\,d\rho = -\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \rho^{\frac{3}{2}}\,d\rho = \int_{2\pi}^{0}\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a d\varphi = -\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}.$$

Здесь выполнен переход от прямоугольных координат к полярным.

2) Расчленяем данный поверхностный интеграл по координатам общего вида на три слагаемых интеграла

$$J = 2\iint\limits_{T}dx\,dy + \iint\limits_{T}y\,dx\,dz - \iint\limits_{T}x^2z\,dy\,dz$$

и, пользуясь уравнением поверхности $T$ и формулой (2), преобразуем каждый из них в двойной интеграл:

$J_1=\iint\limits_T dx\,dy=\iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy$, где $T_{xy}$ — проекция $T$ на плоскость $xOy$ — часть $OAB$ эллипса $4x^2+y^2\leqslant 4$ (черт. 192);

$J_2=\iint\limits_T y\,dx\,dz=2\iint\limits_{T_{xz}}\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz$, где $T_{xz}$ — часть $OAC$ круга $x^2+z^2\leqslant 1$;

$$J_3=\iint\limits_T x^2z\,dy\,dz=\iint\limits_{T_{yz}} z\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy\,dz,$$

где $T_{yz}$ — часть $OBC$ эллипса $y^2+4z^2\leqslant 4$.

Первый интеграл численно равен площади области $T_{xy}$ — четверти площади эллипса с полуосями $a=1$, $b=2$, т. е. $J_1=\frac{\pi ab}{4}=\frac{\pi}{2}$ (см. задачу 604 (4), стр. 196).

Второй интеграл вычислим, переходя к полярным координатам:

$$J_2=2\iint\limits_{OAC}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(1-\rho^2)=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{\pi}{3};$$

$$J_3=\int_0^1 z\,dz\int_{y_P}^{y_Q}\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy=\int_0^1 z\left(y-\frac{y^3}{12}-z^2y\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{1-z^2}}\right)dz=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}dz=\frac{2}{3}\,\frac{2(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_1^0=\frac{4}{15}.$$

Следовательно, $J=2J_1+J_2-J_3=\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{15}$.

3) Замкнутая поверхность $W$ состоит из четырех частей — треугольников $ABC$, $BCO$, $ACO$, $ABO$, расположенных в различных плоскостях (см. черт. 174). Соответственно этому вычисляем данный интеграл как сумму четырех интегралов.

Преобразуя поверхностный интеграл по внутренней (обращенной к началу координат) стороне треугольника $ABC$ в двойной интеграл и вычисляя его, получим:

$$\iint\limits_{ABC} y\,dx\,dz = -\iint\limits_{ACO}(1-x-z)\,dx\,dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+z-1)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(x+z-1)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^0 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{6};$$

$\iint\limits_{BCO} y\,dx\,dz = \iint\limits_{ABO} y\,dx\,dz = 0$, так как плоскости $BCO$ и $ABO$ перпендикулярны плоскости $xOz$ (см. стр. 315);

$$\iint\limits_{ACO} y\,dx\,dz = \iint\limits_{ACO} 0\,dx\,dz = 0.$$

Следовательно, $K = -\frac{1}{6}$.

**908.** По формуле Остроградского—Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \oiint\limits_{+\sigma} 4x^3\,dy\,dz + 4y^3\,dx\,dz - 6z^4\,dx\,dy$, где $\sigma$ — полная поверхность цилиндра, черт. 191, данного в задаче 906 (2).

Решение. Путем сопоставления данного интеграла с левой частью формулы (3) определяем: $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$. Затем находим производные: $P'_x = 12x^2$, $Q'_y = 12y^2$, $R'_z = -24z^3$, подставляем их в правую часть формулы (3) и таким образом вместо данного поверхностного интеграла по замкнутой поверхности $\sigma$ получим тройной интеграл по области $G$, ограниченной этой поверхностью:

$$I = 12\iiint\limits_G (x^2 + y^2 - 2z^3)\,dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя вначале по $z$, а затем переходя к полярным координатам, найдем

$$I = 12\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_0^h (x^2+y^2-2z^3)\,dz = 12\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[(x^2+y^2)z - \right.$$

$$\left. -\frac{z^4}{2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=h} dx\,dy = 12\iint\limits_{\rho\leqslant a}\left(\rho^2 h - \frac{h^4}{2}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= 12h\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a\left(\rho^3 - \frac{h^3}{2}\rho\right)d\rho = 6\pi a^2 h\,(a^2 - h^3).$$

**909.** Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $K = \oint\limits_l e^x\,dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy + yz^3\,dz$, где $l$ — замкнутая линия $OCBAO$ (черт. 193) пересечения поверхностей $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

Решение. Сопоставляя $K$ с формулой (4), определяем: $P=e^x$, $Q=z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, $R=yz^3$.

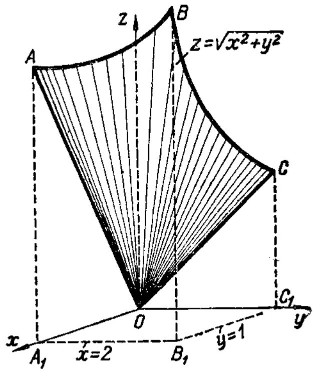
Находим производные:

$$P'_y=P'_z=0,\ Q'_x=3xz\sqrt{x^2+z^2},\ Q'_z=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\ R'_x=0,$$
$$R'_y=z^3$$

и подставляя их в формулу Стокса, получим

$$K=3\iint\limits_{\sigma} xz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Здесь $\sigma$ может быть любая (гладкая или кусочно-гладкая) поверхность, «натянутая» на данный контур $l$. Пользуясь этим, выберем в качестве $\sigma$ часть данной конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченную контуром $l$.



Черт. 193

Тогда, интегрируя по нижней стороне указанной поверхности, на которой заданный обход контура $l$ направлен против часовой стрелки, найдем:

$$K=-3\iint\limits_{\sigma_{xy}} x(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$
$$=-\int_0^1 dy\int_0^2 (x^3+xy^2)\,dx=-14$$

($\sigma_{xy}$—прямоугольник $OA_1B_1C_1$).

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

**910.** $\iint\limits_{\sigma} ds$, где $\sigma$—часть плоскости $x+y+z=a$, расположенная в первом октанте.

**911.** $\iint\limits_{T} x\,ds$, где $T$—полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

**912.** $\iint\limits_{W} (x^2+y^2)\,ds$, где $W$—поверхность, отсекаемая от параболоида $x^2+y^2=2z$ плоскостью $z=1$.

**913.** $\iint\limits_{\sigma} (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\,ds$, где $\sigma$—поверхность, отсекаемая от полости конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ цилиндром $x^2+y^2=2x$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

**914.** $\iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\, dy\, dz$, где $\sigma$ — внешняя сторона части параболоида $x=a^2-y^2-z^2$, отсеченной плоскостью $yOz$.

**915.** $\oiint\limits_{-\sigma} z^2\, dx\, dy$, где $\sigma$ — эллипсоид $x^2+y^2+2z^2=2$.

**916.** $\oiint\limits_{-\sigma} z\, dx\, dy+y\, dx\, dz+x\, dy\, dz$, где $\sigma$ — поверхность куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

**917.** $\oiint\limits_{+W} (z+1)\, dx\, dy$, где $W$ — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

**918.** Пользуясь формулой Остроградского — Гаусса, решить задачи 915, 916, 917.

**919.** Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_{-L} (2x+y)\, dx-2y\, dy$, где $L$ — периметр треугольника $A(0; -1)$, $B(0, 2)$; $C(2; 0)$. За поверхность $\sigma$ принять данный треугольник;

2) $\oint\limits_{l} 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\, dx+xy^3\, dy+\sin z\, dz$, где $l$ — замкнутый контур $ACBA$ (черт. 192), данный в задаче 907(2). В качестве поверхности $\sigma$ взять часть данного эллипсоида.

## § 12. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов

1) Площадь $S$ поверхности $\sigma$

$$S=\iint\limits_{\sigma} ds. \tag{1}$$

2) Масса материальной поверхности $\sigma$

$$m=\iint\limits_{\sigma} \delta(M)\, ds, \tag{2}$$

где $\delta(M)$ — поверхностная плотность распределения массы в точке $M(x, y, z)$ поверхности $\sigma$.

3) Координаты центра тяжести $C$ поверхности $\sigma$

$$x_C=\frac{m_{yz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\delta\, ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\, ds}; \quad y_C=\frac{m_{xz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\delta\, ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\, ds}; \quad z_C=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} z\delta\, ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\, ds}, \tag{3}$$

где $m_{yz}$, $m_{xz}$, $m_{xy}$ — статические моменты поверхности $\sigma$ относительно плоскостей координат.

Для однородной поверхности $\delta=\text{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Другие применения поверхностных интегралов указываются в следующей главе.

**920.** Найти площадь части поверхности:

1) конуса $z^2=2xy$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x=2$, $y=4$;

2) сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=Rx$;

3) цилиндра $x^2+y^2=Rx$, расположенной внутри сферы $x^2+$ $+y^2+z^2=R^2$.

Решение. 1) Применяем формулу (1). Пользуясь уравнением конуса, преобразуем поверхностный интеграл в двойной интеграл с переменными $x$ и $y$:

$$S=\iint\limits_{\sigma} ds=\iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\, dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx\,dy,$$

где $\sigma_{xy}$ — проекция $\sigma$ на плоскость $xOy$ — прямоугольник $OABC$ (черт. 194).

Вычисляя двойной интеграл, получим

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 dx\int_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}}\right)dx=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^2=16.$$

2) Данная поверхность * симметрична относительно плоскостей $xOy$ и $xOz$; в первом октанте помещается ее четвертая часть ($\sigma$) (черт. 195), для которой апликата $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому согласно формуле (1) искомая площадь

$$S=4\iint\limits_{\sigma} ds=4\iint\limits_{\sigma_1}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=4R\iint\limits_{\sigma_1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

где $\sigma_1$ — полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=Rx$ и осью $Ox$ $(x^2+y^2\leqslant Rx,\ y\geqslant 0)$.

* Верхнее и нижнее основания «тела Вивиани», вырезаемого цилиндром из шара. На черт. 195 изображена половина этого тела, расположенная над плоскостью $xOy$.

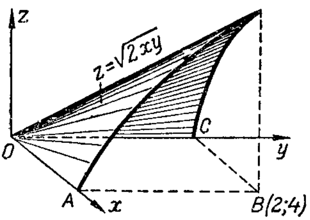
Переходя к полярным координатам и интегрируя, имеем:

$$0 \leqslant \rho \leqslant R\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

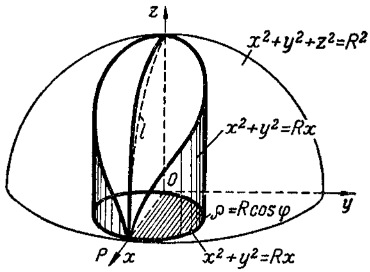
$$S = 4R \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = -2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} (R^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(R^2-\rho^2) =$$

$$= 2R \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[2(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right] \Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\, d\varphi = 2R^2(\pi-2)$$

($\rho = R\cos\varphi$ — полярное уравнение окружности $x^2+y^2=Rx$).




Черт. 194




Черт. 195

3) Данная поверхность * (черт. 195) также симметрична относительно плоскостей $xOy$ и $xOz$; в первом октанте помещается ее четвертая часть ($T$), для которой ордината $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Поэтому, преобразуя поверхностный интеграл формулы (1) в двойной интеграл с переменными $x$ и $z$, получим

$$S = 4 \iint\limits_{T_{xz}} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz = 2R \iint\limits_{T_{xz}} \frac{dx\, dz}{\sqrt{Rx-x^2}},$$

где $T_{xz}$ — плоская область, ограниченная осями $Ox$ и $Oz$ и параболой $l$, уравнение которой $z^2=R^2-Rx$ получается путем исключения $y$ из данных уравнений. (Эта парабола является проекцией на плоскость $xOz$ линии пересечения цилиндра и сферы.)

Интегрируя, найдем

$$S = 2R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-Rx}} dz = 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R\sqrt{Rx}\,\Big|_0^R = 4R^2.$$

---

* Боковая поверхность «тела Вивиани».

**921.** Найти массу полусферы, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

Решение. Поместим начало прямоугольной системы координат в центре основания полусферы и направим ось аппликат перпендикулярно этому основанию. Тогда уравнение полусферы будет $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, где $R$—радиус полусферы; поверхностная плотность в точке $M(x, y, z)$ полусферы будет $\delta(M)=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$; $ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Подставляя в формулу (2), получим:

$$m=\iint_{\sigma}\delta\,ds=R\iint_{\sigma_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \text{где } \sigma_{xy}\text{—круг } x^2+y^2\leqslant R^2.$$

Переходя к полярным координатам, найдем

$$m=R\iint_{\rho\leqslant R}\frac{\rho^2\,d\varphi\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi^2R^3}{2}.$$

(Внутренний интеграл вычисляется посредством замены переменной по формуле $\rho=R\sin t$.)

**922.** Найти центр тяжести полусферы, данной в условии предыдущей задачи.

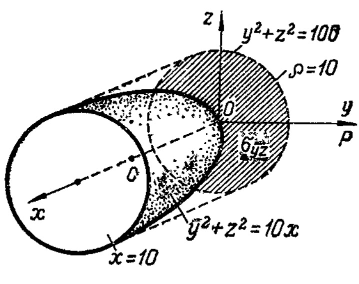
Решение. При том же расположении системы координат вследствие симметричного расположения данной поверхности и распределенной на ней массы относительно оси аппликат $x_C=y_C=0$.

Для определения аппликаты центра тяжести вычислим статический момент

$$m_{xy}=\iint_{\sigma}z\delta\,ds=R\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=R\iint_{\rho\leqslant R}\rho^2 d\varphi\,d\rho=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

Масса полусферы найдена в решении предыдущей задачи.

Согласно формуле (3) $z_C=$ $=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{4R}{3\pi}$.



Черт. 196

**923.** Найти центр тяжести однородной поверхности параболоида $y^2+z^2=10x$, отсеченной плоскостью $x=10$.

Решение. Данная однородная поверхность ($\sigma$) симметрична относительно оси абсцисс (черт. 196). Поэтому $y_C=z_C=0$.

Чтобы найти абсциссу центра тяжести, вычислим: 1) статический момент $m_{yz}$ и 2) массу $m$ данной поверхности:

$$1)\ m_{yz}=\iint\limits_{\sigma} x\delta\,ds=\delta\iint\limits_{\sigma_{yz}} x\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 100}(y^2+z^2)\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint\limits_{\rho\leqslant 10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{\delta}{50}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{50}{3}\pi\delta\,(1+25\sqrt{5}).$$

Здесь после перехода к полярным координатам внутренний интеграл вычисляется с помощью подстановки $\sqrt{25+\rho^2}=t$.

$$2)\ m=\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds=\frac{\delta}{5}\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 100}\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{5}\iint\limits_{\rho\leqslant 10}\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{\delta}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{10}(25+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(25+\rho^2)=$$

$$=\frac{\delta}{10}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}(25+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}d\varphi=\frac{50}{3}\pi\delta\,(5\sqrt{5}-1).$$

По формуле (3) $x_C=\dfrac{m_{yz}}{m}=\dfrac{25\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}-1}$.

Найти площадь части поверхности:

**924.** $2x+2y+z=8a$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

**925.** Цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $y+z=0$ и $z=0$.

**926.** Цилиндра $y^2+z^2=R^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

**927.** Параболоида $x^2+y^2=6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=27$.

**928.** Сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$, заключенной внутри параболоида $x^2+y^2=2az$.

**929.** Найти массу цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=H$, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

**930.** Найти массу поверхности куба, ребро которого равно единице, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна произведению расстояний этой точки до трех граней куба, проходящих через одну данную его вершину.

**931.** Найти центр тяжести полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если в каждой ее точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

**932.** Найти центр тяжести однородной поверхности конуса $a^2z^2=b^2(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant b$.

*ГЛАВА VIII*

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

## § 1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

*Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой $M$ которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $u = u(M)$.* Задание поля скалярной величины $u$ равносильно заданию скалярной (числовой) функции $u(M)$.

Функция $u(M)$, определяющая плоское скалярное поле, как функция точки $M(x, y)$, зависит от двух переменных $u = u(x, y)$, а функция, определяющая пространственное скалярное поле, как функция точки $M(x, y, z)$, зависит от трех переменных $u = u(x, y, z)$.

*Линией уровня плоского скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения.* Линия уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y)$ имеет одно и то же значение $C$, определяется уравнением $u(x, y) = C$; различным постоянным значениям $C_1, C_2, C_3, \ldots$ функции поля соответствуют различные линии уровня: $u(x, y) = C_1$, $u(x, y) = C_2$, $u(x, y) = C_3, \ldots$

*Поверхностью уровня пространственного скалярного поля называется совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения.* Поверхность уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y, z)$ имеет одно и то же значение $C$, определяется уравнением $u(x, y, z) = C$.

Через каждую точку проходит только одна поверхность (линия) уровня; они заполняют всю рассматриваемую область и не пересекаются между собой.

*Производной функции $u(M)$ по направлению $\overline{MP}$ называется предел отношения разности $u(M_1) - u(M)$ к величине направленного отрезка $MM_1$, когда точка $M_1$ стремится к точке $M$, оставаясь на прямой $MP$.*

Производная функции $u$ по направлению $\bar{l}$ обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$

или $u'_l$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=u'_l=\lim_{M_1\to M}\frac{u(M_1)-u(M)}{MM_1}$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\overline{N}\cdot\overline{l^0}, \qquad (a)$$

где $\overline{N}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$—нормальный вектор к поверхности уровня, $l^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$—единичный вектор направления $\overline{l}$.

Производная $u'_l$ определяет величину скорости изменения функции $u(M)$ при перемещении точки $M$ по направлению $\overline{l}$.

*В каждой точке, где функция дифференцируема, она имеет производную по любому направлению.*

Производные функции $u(x, y, z)$ по положительным направлениям осей координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ равны ее частным производным $u'_x$, $u'_y$ и $u'_z$.

Производные по прямо противоположным направлениям отличаются только по знаку.

*Производная функции $u(x, y)$ по направлению линии уровня* (касательному к линии уровня) *и производная функции $u(x, y, z)$ по направлению любой линии, лежащей на поверхности уровня* (по любому направлению, касательному к поверхности уровня), *равны нулю.*

*Градиентом функции (поля) $u(M)$ называется вектор*

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \qquad (б)$$

Направление вектора $\operatorname{grad} u$ в каждой точке $M$ совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

Из всех производных функции $u(M)$, взятых по различным направлениям, наибольшее значение всегда имеет производная по направлению градиента функции

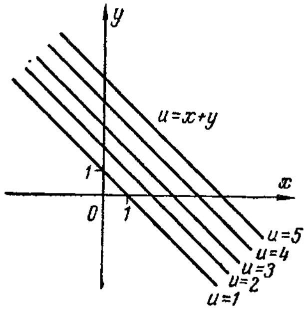
$$\frac{\partial u}{\partial l_{gr}}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Градиент есть вектор скорости наибыстрейшего возрастания функции.

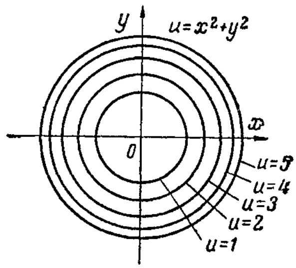
**933.** Построить линии уровня плоских скалярных полей:

1) $u=x+y$, 2) $u=x^2+y^2$, 3) $u=\frac{2y}{x^2}$, соответствующие значениям $u=1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. 1) Полагая $u=1, 2, 3, 4, 5$, получим уравнения соответствующих линий уровня: $x+y=1$; $x+y=2$; $x+y=3$; $x+y=4$; $x+y=5$. Построив эти линии в прямоугольной системе координат $xOy$, получим прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов (черт. 197).

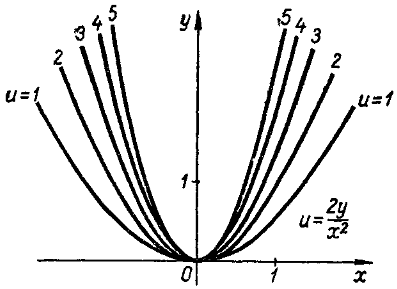



Черт. 197




Черт. 198

2) Написав уравнения линий уровня: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=5$ и построив их в плоскости $xOy$, получим концентрические окружности с центром в начале координат (черт. 198).




Черт. 199

3) Линии уровня $2y=x^2$, $y=x^2$, $2y=3x^2$, $y=2x^2$, $2y=5x^2$ представляют параболы, симметричные оси $Oy$ с общей вершиной в начале координат (черт. 199).

**934.** Найти производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(3; 4)$:

1) по направлению биссектрисы первого координатного угла;

2) по направлению радиуса-вектора точки $A$;

3) по направлению вектора $\overline{q}\{4; -3\}$.

Решение. Находим частные производные функции $u$ и вычисляем их значения в точке $A$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\frac{3}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу ($a$), найдем производную функции $u$ в точке $A$ по любому направлению $\overline{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = \frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\cos\beta.$$

Находим далее косинусы углов $\alpha$ и $\beta$, образованных заданным направлением дифференцирования с осями координат, и производную функции $u$ по заданному направлению:

1) Для биссектрисы первого координатного угла: $\alpha=\beta=45°$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l_1}\right|_A = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2) Для вектора $\overline{OA}\{3;\ 4\}$: $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial l_2}\right|_A=\frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2}=1.$

3) Для вектора $\overline{q}\{4;\ -3\}$: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_A=0.$

**935.** Найти производную функции $u=xy+yz+1$ по направлению вектора $\overline{l}\{12;\ -3;\ -4\}$ в любой точке и в точках $A(0;\ -2;\ -1)$ и $B(3;\ 3;\ 5)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u$ и направляющие косинусы вектора $\overline{l}$:

$$u'_x=y;\quad u'_y=x+z;\quad u'_z=y;$$
$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\ \cos\beta=-\frac{3}{13};\ \cos\gamma=-\frac{4}{13}.$$

Подставляя в формулу ($a$), найдем производную функции $u$ по направлению $\overline{l}$ в любой точке:

$$u'_l=\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}(x+z)-\frac{4}{13}y=\frac{8y-3(x+z)}{13}.$$

Подставляя координаты точек $A$ и $B$, получим $u'_l(A)=-1$; $u'_l(B)=0$.

**936.** С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u(M)=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(-1;\ 2;\ -2)$? В каком направлении должна двигаться точка $M$ при переходе через точку $M_1(2;\ 0;\ 1)$, чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью?

Решение. *Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения* (возрастания или убывания) *функции* $u(M)$ *при переходе точки* $M$ *через точку* $P$ *численно равна модулю градиента функции в точке* $P$. При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка $M$ при переходе через точку $P$ двигаться по направлению градиента функции в точке $P$ или по прямо противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции $u$ и по формуле (б) — ее градиент в любой точке:

$$\operatorname{grad} u = -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Далее находим: 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{5}(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$; его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции $u(M)$ при переходе $M$ через $M_0$, будет $|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.

2) $\operatorname{grad} u(M_1) = -\frac{10}{9}\bar{i} - \frac{5}{9}\bar{k}$; искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление, будет $-\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{10}{9}\bar{i} + \frac{5}{9}\bar{k}$. Чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку $M_1$ точка $M$ должна двигаться в направлении вектора $-\operatorname{grad} u(M_1)$.

**937.** Найти точки, в которых функция $z = e^x(x-y^3+3y)$ стационарна (т. е. точки, в которых производная по любому направлению равна нулю).

Решение. *Чтобы в некоторой точке $P$ производная функции по любому направлению была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль.* [Согласно формуле (а).]

Поэтому, найдя частные производные: $z'_x = e^x(x-y^3+3y+1)$, $z'_y = 3e^x(1-y^2)$ и решая систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, получим две точки: $(-3;\ 1)$ и $(1;\ -1)$, в которых функция стационарна.

**938.** Построить линии уровня скалярных полей:

1) $z = x^2+2y$, 2) $z = \frac{4x}{x^2+y^2}$,

соответствующие значениям $z = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти и построить градиент каждого поля в точках $A(1;\ -1)$ и $B(-2;\ -2)$.

**939.** Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{l} = 3\bar{i}+4\bar{j}$ в любой точке и в точках $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ 1)$. Построить линии уровня соответствующего скалярного поля, проходящие через точки $A$ и $B$, и его градиент в этих точках.

**940.** Найти производную функции $u = xyz$ в точке $Q(1;\ -2;\ 2)$ по любому направлению и по направлению радиуса-вектора точки $Q$.

**941.** По какому направлению должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1;\ 1;\ -1)$, чтобы функция $F(M) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

**942.** С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u(M) = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ при переходе точки $M(x, y, z)$ через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$?

**943.** Показать, что в точке $A(4;\ -12)$ производная функции $z = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$ по любому направлению равна нулю (функция стационарна).

**944.** Найти точки, в которых функция $\varphi(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ стационарна.

## § 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля

*Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой $M$ которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\bar{a} = \bar{a}(M)$.*

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\bar{a}$ будет векторной функцией, а его проекции $a_x$, $a_y$, $a_z$ на оси координат будут скалярными функциями от переменных $x$, $y$ и $z$:

$$\bar{a}(M) = \bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Поэтому задание поля векторной величины $\bar{a}$ равносильно заданию трех скалярных (числовых) функций $a_x$, $a_y$, $a_z$.

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке $M$ совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ через поверхность $\sigma$ называется поверхностный интеграл (скаляр)

$$K = \iint_{\sigma} a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл $K$ выражает количество жидкости, протекающей через поверхность $\sigma$ за единицу времени. При этом если $\sigma$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область $G$, и если интеграл (1) берется по внешней стороне $\sigma$, то величина $K$ называется потоком вектора $\bar{a}$ изнутри поверхности $\sigma$; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области $G$ и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может свободно протекать через поверхность $\sigma$).

При $K > 0$ из области $G$ вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $K<0$ из области $G$ вытекает жидкости меньше, чем втекает, что означает наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $K=0$ из области $G$ вытекает жидкости столько же, сколько в нее и втекает.

Дивергенцией векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется скаляр

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{2}$$

Если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)>0$, то точка $M_0$ называется источником, а если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)<0$, то точка $M_0$ называется стоком, ибо в первом случае в любой бесконечно малой области, окружающей точку $M_0$, жидкость возникает, а во втором случае она исчезает.

Абсолютная величина $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно формуле Остроградского—Гаусса (гл. VII, § 11) поток и дивергенция векторного поля связаны между собой равенством

$$\oiint\limits_{+\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy=$$
$$=\iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

которое имеет следующий смысл: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* ($\sigma$) *равен тройному интегралу по области* ($G$), *ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.*

**945.** Найти поток векторного поля $\bar{p}=x\bar{i}-y^2\bar{j}+(x^2+z^2-1)\bar{k}$ через поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид) изнутри этой поверхности.

Решение. Согласно формуле (1)

$$K=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz-y^2\,dx\,dz+(x^2+z^2-1)\,dx\,dy.$$

Расчленяем этот поверхностный интеграл (II типа) на три слагаемых интеграла и, пользуясь данным уравнением эллипсоида ($\sigma$), сводим их вычисление к вычислению двойных интегралов.

1) $K_1=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz=\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz+\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz,$

где $\sigma_1$ и $\sigma_2$—части данного эллипсоида, расположенные по разные стороны от плоскости $yOz$ (см. черт. 98), которые имеют различные явные уравнения:

$$x_{\sigma_1} = -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad x_{\sigma_2} = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя эти поверхностные интегралы в двойные (по формуле, указанной в § 11 предыдущей главы), получим:

$$\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz = -\iint\limits_{(\sigma_1)_{yz}} -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность $\sigma_1$ обращена в сторону отрицательного направления оси $Ox$;

$$\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz = \iint\limits_{(\sigma_2)_{yz}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность $\sigma_2$ обращена в сторону положительного направления оси $Ox$.

Проекции $(\sigma_1)_{yz}$ и $(\sigma_2)_{yz}$ поверхностей $\sigma_1$ и $\sigma_2$ на плоскость $yOz$ представляют один и тот же эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. Поэтому

$$K_1 = 2a\iint\limits_{(\sigma_1)_{yz}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz =$$

$$= 2a\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{-z_1}^{z_1} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz,$$

где $z_1$ — положительное значение $z$ из уравнения эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Вычисляя двукратный интеграл, найдем $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$. $\Bigl($Внутренний интеграл легко найти по формуле (Б), гл. IV, § 5, полагая $a=\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $t=\frac{z}{c}$.$\Bigr)$

$$2)\ K_2 = \mathop{\iint\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc}\limits_{+\sigma} y^2\,dx\,dz = \iint\limits_{\sigma_3} y^2\,dx\,dz + \iint\limits_{\sigma_4} y^2\,dx\,dz,$$

где $\sigma_3$ и $\sigma_4$ — части поверхности $\sigma$, расположенные по разные стороны от плоскости $xOz$, уравнения которых

$$y_{\sigma_3} = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad y_{\sigma_4} = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в двойные, получим

$$K_2 = -\iint\limits_{(\sigma_3)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz + \\ + \iint\limits_{(\sigma_4)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz = 0,$$

так как проекции $(\sigma_3)_{xz}$ и $(\sigma_4)_{xz}$ поверхностей $\sigma_3$ и $\sigma_4$ на плоскость $xOz$ одинаковы.

3) По аналогичной причине вследствие четности подынтегральной функции поверхностного интеграла $K_3$ и симметричности поверхности $\sigma$ относительно плоскости $xOy$

$$K_3 = \oiint\limits_{+\sigma} (x^2+z^2-1)\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно, $K = K_1 - K_2 + K_3 = \frac{4}{3}\pi abc$.

По формуле Остроградского—Гаусса эта задача решается проще: находим дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\bar{p} = (x)'_x + (-y^2)'_y + (x^2+z^2-1)'_z = 1-2y+2z$$

и подставляем в формулу (3):

$$K = \iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{p}\,dv = \iiint\limits_G (1-2y+2z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область $G$ — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Полученный тройной интеграл расчленяем:

$$K = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz - 2\iint\limits_{G_{xz}} dx\,dz \int\limits_{-y_1}^{y_1} y\,dy + 2\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{-z_1}^{z_1} z\,dz,$$

где

$$y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}, \quad z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Первый интеграл равен объему области $G$, т. е. объему эллипсоида $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$ (гл. V, § 4).

Второй и третий интегралы равны нулю,. ибо равны нулю их указанные внутренние простые интегралы, как интегралы от нечетной функции (гл. V, § 2).

Следовательно, как и в первом решении, $K = \frac{4}{3}\pi abc$.

**946.** Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$; 2) $\bar{p}=\dfrac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\bar{q}=e^{xy}(y\bar{j}-x\bar{i}+xy\bar{k})$.

Решение. Применяем формулу (2):

1) $\operatorname{div}\bar{r}(M)=\dfrac{\partial r_x}{\partial x}+\dfrac{\partial r_y}{\partial y}+\dfrac{\partial r_z}{\partial z}=1+1+1=3.$

2) $p_x=p_y=p_z=(x+y+z)^{-\frac{2}{3}}$;

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}=\frac{\partial p_y}{\partial y}=\frac{\partial p_z}{\partial z}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+y+z)^5}};$$

$$\operatorname{div}\bar{p}(M)=-2(x+y+z)^{-\frac{5}{3}}=f(M)$$

3) $q_x=-xe^{xy}$; $q_y=ye^{xy}$; $q_z=xye^{xy}$;

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}=-e^{xy}(1+xy)=-\frac{\partial q_y}{\partial y};\quad \frac{\partial q_z}{\partial z}=0;\quad \operatorname{div}\bar{q}(M)=0.$$

Полученные результаты имеют следующий смысл:

1. Каждая точка поля радиус-вектора $\bar{r}$ является источником постоянной мощности.

2. Точка $M$ поля вектора $\bar{p}$ в зависимости от ее координат может быть или источником, или стоком. Например, точка $M_1(0;\ 0;\ 1)$, в которой $\operatorname{div}\bar{p}=-2$, является стоком; точка $M_2(-1;\ 0;\ 0)$, в которой $\operatorname{div}\bar{p}=2$, является источником.

3. В поле вектора $\bar{q}$ нет ни источников, ни стоков. Поток этого соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

**947.** Найти поток радиус-вектора $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$: 1) через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2\leqslant R^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$ в сторону ее внешней нормали; 2) через боковую поверхность конуса $x^2+y^2\leqslant 4z^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$ в сторону ее внутренней нормали; 3) через полную поверхность куба $-a\leqslant x\leqslant a$, $-a\leqslant y\leqslant a$, $-a\leqslant z\leqslant a$ изнутри этой поверхности.

**948.** Найти поток векторного поля: 1) $\bar{p}=xy\bar{i}+yz\bar{j}+xz\bar{k}$ через расположенную в первом октанте часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, в сторону ее внешней нормали; 2) $\bar{q}=x^3\bar{i}+y^3\bar{j}+z^3\bar{k}$ через полную поверхность конуса $x^2+y^2\leqslant z^2$, $0\leqslant z\leqslant H$ изнутри этой поверхности.

**949.** Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{a}=xy^2\bar{i}+x^2y\bar{j}+z^3\bar{k}$ в точке $A(1;\ -1;\ 3)$;

2) градиента функции $u=xy^2z^3$.

**950.** Проверить, что векторное поле $\bar{p}=yz(4x\bar{i}-y\bar{j}-z\bar{k})$ является соленоидальным.

**951.** Решить задачи 947 (3) и 948 (2), пользуясь формулой Остроградского — Гаусса.

## § 3. Циркуляция и вихрь векторного поля

Линейным интегралом вектора $\bar{a}$ вдоль линии $l$ называется криволинейный интеграл

$$C=\int_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz. \tag{1}$$

В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии $l$ (см. гл. VII, § 9).

В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора $\bar{a}$ по контуру $l$. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре $l$.

Вихрем (или ротором) векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}. \tag{2}$$

Если через точку $M$ поля $\bar{a}$ провести плоскость $P$, определяемую единичным нормальным вектором $\bar{n}$, то скалярное произведение $\operatorname{rot}\bar{a}(M)\cdot\bar{n}$ характеризует вращательную способность этого поля в точке $M$. Она зависит как от координат точки $M$, так и от направления плоскости $P$ и достигает наибольшей величины, равной $|\operatorname{rot}\bar{a}(M)|$, когда плоскость $P$ перпендикулярна вектору $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$.

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым). В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

*Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.*

Согласно формуле Стокса (гл. VII, § 11) циркуляция и вихревой вектор поля связаны между собой равенством

$$\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$

$$=\iint_\sigma(\operatorname{rot}\bar{a})_x\,dy\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_y\,dx\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_z\,dx\,dy, \tag{3}$$

смысл которого заключается в следующем: *циркуляция вектора по замкнутому контуру* ($l$) *равна потоку вихря вектора через поверхность* ($\sigma$), *ограниченную этим контуром.*

**952.** Вычислить циркуляцию поля вектора:

1) $\overline{r}=x\overline{j}$ вдоль окружности $x=a\cos t,\ y=a\sin t$;

2) $\overline{p}=(x-2)\overline{i}+(x+y)\overline{j}-2z\overline{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$;

3) $\overline{q}\{xz,\ -yz^2,\ xy\}$ вдоль замкнутой линии $(L)\ z=x^2-y^2+2a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (см. черт. 142, стр. 258) и вихревой вектор этого поля в точке $A(0,\ -a,\ a^2)$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

$$1)\ C=\oint\limits_L x\,dy=a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.^*$$

$$2)\ C=\oint\limits_{ABCA}(x-2)\,dx+(x+y)\,dy-2z\,dz.$$

Периметр $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков, которые лежат на прямых, имеющих различные уравнения. Поэтому криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов по отрезкам $AB$, $BC$ и $CA$.

Составив уравнения прямой $AB$: $x+y=1,\ z=0$ и исходя из этих уравнений, преобразуем криволинейный интеграл по отрезку $AB$ в обыкновенный интеграл с переменной $x$:

$$\int\limits_{AB}=\int\limits_1^0(x-3)\,dx=\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_1^0=\frac{5}{2}.$$

Для отрезка $BC$: $y+z=1,\ x=0$; $\displaystyle\int\limits_{BC}=\int\limits_1^0(2-y)\,dy=-\frac{3}{2}.$

Для отрезка $CA$: $x+z=1,\ y=0$; $\displaystyle\int\limits_{CA}=-\int\limits_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}.$

Следовательно, $\displaystyle C=\oint\limits_{ABCA}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=\frac{1}{2}.$

$$3)\ C=\oint\limits_L xz\,dx-yz^2\,dy+xy\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла преобразуем данные уравнения кривой $L$ в параметрические: полагая $x=a\cos t$, получим $y=a\sin t,\ z=a^2(2+\cos 2t)$.

* Если выбрать другое направление обхода данного контура, то результат будет иметь противоположный знак.

Пользуясь этими уравнениями, преобразуем криволинейный интеграл $C$ в обыкновенный интеграл с переменной $t$, затем вычисляем его:

$$C=-\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)\sin 2t\,dt-\frac{a^6}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)^2\sin 2t\,dt-$$

$$-a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4(2+\cos 2t)^2}{8}+\frac{a^6(2+\cos 2t)^3}{12}-$$

$$-\frac{a^4}{2}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\pi a^4.$$

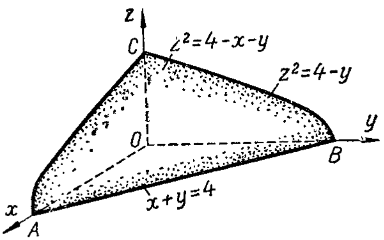
Вихревой вектор данного поля в любой его точке $M(x, y, z)$ находим по формуле (2):

$$\operatorname{rot}\bar{q}(M)=(x+2yz)\bar{i}+(x-y)\bar{j}.$$

В данной точке $A(0, -a, a^2)$, $\operatorname{rot}\bar{q}=a\bar{j}-2a^3\bar{i}$.

**953.** Пользуясь формулой Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}+xz\bar{j}+z\bar{k}$ по контуру $ACBA$ (черт. 200), образованному пересечением поверхности $z^2=4-x-y$ с плоскостями координат.

Решение. По формуле (2) найдем вихревой вектор данного поля: $\operatorname{rot}\bar{a}=z\bar{k}-x\bar{i}$. Подставляя его проекции в формулу (3), получим:




Черт. 200

$$C=\iint_\sigma z\,dx\,dy-x\,dy\,dz=$$

$$=\iint_\sigma z\,dx\,dy-\iint_\sigma x\,dy\,dz.$$

В качестве поверхности $\sigma$, ограниченной данным контуром, возьмем расположенную в первом октанте часть данной поверхности. Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностные интегралы в двойные, учитывая при этом, что согласно формуле Стокса $\sigma$ есть внутренняя сторона (обращенная к началу координат) указанной поверхности, на которой заданный обход контура $ACBA$ направлен против часовой стрелки:

$$C_1=\iint_\sigma z\,dx\,dy=-\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{4-x-y}\,dx\,dy=$$

$$=\int_4^0 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\int_0^4(4-x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_4^0(4-x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=-\frac{128}{15}$$

($\sigma_{xy}$ есть треугольник $OAB$);

$$C_2=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz=-\iint\limits_{\sigma_{yz}}(4-y-z^2)\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_4^0 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y}}(4-y-z^2)\,dz=\int\limits_4^0\left[(4-y)\,z-\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{4-y}}dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_4^0(4-y)^{\frac{3}{2}}\,dy=\frac{4}{15}\,(4-y)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4=-\frac{128}{15}$$

($\sigma_{yz}$ есть криволинейный треугольник $OBC$).

Следовательно, искомая циркуляция $C=C_1-C_2=0$.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Но поле вектора $\bar{a}$ не потенциальное; его циркуляция по данному контуру равна нулю, а, например, по контуру окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$ она равна не нулю, а $\pm\pi$.

**954.** Вычислить циркуляцию векторного поля:

1) $\bar{p}=x^2y^3\bar{i}+\bar{j}+z\bar{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

2) $\bar{q}=(x-2z)\,\bar{i}+(x+3y+z)\bar{j}+(5x+y)\,\bar{k}$ вдоль периметра треугольника $ACB$, данного в условии задачи 952 (2).

**955.** Найти вихревой вектор в любой точке векторного поля:

1) $\bar{p}=x\bar{i}-z^2\bar{j}+y^2\bar{k}$; 2) $\bar{q}=yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$.

**956.** Проверить, что векторное поле градиента функции $u=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$ является потенциальным.

**957.** Проверить, что векторное поле вектора $\bar{a}=\dfrac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ является гармоническим.

**958.** Решить задачи 954 (1, 2), пользуясь формулой Стокса.

*ГЛАВА IX*

# РЯДЫ

Решение многих задач сводится к вычислению значений функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций (гл. X).

Однако точное выполнение указанных математических операций во многих случаях оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение многих задач с любой желаемой точностью при помощи рядов.

Ряды представляют простой и весьма совершенный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

## § 1. Числовые ряды сходящиеся и расходящиеся. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Числовым рядом называется выражение

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{1}$$

где числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ..., называемые членами ряда, образуют известную числовую последовательность.

*Числовой ряд* (1) *называется сходящимся, если сумма* $n$ *первых его членов* $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ *при* $n\to+\infty$ *имеет предел.* Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

*Если же* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *не существует, то ряд называется расходящимся.*

*Ряд может сходиться лишь при условии, когда общий член ряда* $a_n$, *при неограниченном увеличении его номера* $n$, *стремится к нулю*: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. (Это необходимый, но недостаточный признак сходимости для всякого ряда.)

*Если же* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *то ряд расходится.* (Это достаточный признак расходимости для всякого ряда.)

Для числовых рядов с положительными членами ($a_n > 0$), при исследовании их сходимости, употребительны следующие достаточные признаки сходимости:

Интегральный признак Коши. *Ряд с положительными убывающими членами* $a_n = f(n)$ *сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная убывающая функция *.

Этим признаком можно пользоваться, когда выражение общего члена $a_n = f(n)$ имеет смысл не только для целых положительных значений $n$, но и для всех $n$, больших некоторого положительного числа $m$.

Признак Даламбера. *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, *то при* $\rho < 1$ *ряд сходится, а при* $\rho > 1$ *расходится. При* $\rho = 1$ *вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.*

Признак сравнения. *Если ряд с положительными членами*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (a)$$

*сравнить с другим рядом с положительными членами*

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (b)$$

*сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера* $n$:

1) $a_n \leqslant b_n$ *и ряд* $(b)$ *сходится, то и ряд* $(a)$ *также сходится;*

2) $a_n \geqslant b_n$ *и ряд* $(b)$ *расходится, то и ряд* $(a)$ *также расходится.*

При использовании этого признака исследуемый ряд часто сравнивается или с бесконечной геометрической прогрессией

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad q > 0, \qquad (*)$$

которая при $q < 1$ сходится, а при $q \geqslant 1$ расходится, или с расходящимся гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

---

* Нижним пределом интеграла может быть любое положительное число из области определения $f(x)$.

**959.** Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда:

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\ldots;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=$$
$$=1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ldots$$

Решение. Ищем предел общего члена $a_n$ данного ряда при неограниченном увеличении его номера $n$:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ для первого ряда не выполняется. Поэтому этот ряд расходится. Для второго ряда необходимый признак выполняется, вследствие чего он может быть или сходящимся или расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования (см. следующую задачу).

**960.** Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1};\quad 2)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^3 n};\quad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}};\quad 4)\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{n^4-9}.$$

Решение. Заменяем в заданном выражении общего члена ряда $a_n=f(n)$ номер $n$ непрерывной переменной $x$ и убеждаемся, что полученная функция $f(x)$ является непрерывной и убывающей во всем бесконечном интервале изменения $x$. Затем находим несобственный интеграл от $f(x)$ с бесконечным верхним пределом

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\lim\ln(x^2+1)\Big|_1^{\beta}=$$
$$=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty.$$

Здесь несобственный интеграл расходится. Следовательно, согласно интегральному признаку и данный ряд также расходится.

$$2)\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\,dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_2^{\beta}(\ln x)^{-3}\,d(\ln x)=\lim\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Big|_2^{\beta}=$$
$$=\lim\left(\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln^2\beta}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\, dx = \frac{1}{4} \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{0}^{\beta} (4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(4x+1) =$

$$= \frac{1}{4} \lim 2\sqrt{4x+1}\, \Big|_0^{\beta} = \frac{1}{2} \lim (\sqrt{4\beta+1} - 1) = +\infty.$$

4) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x}{x^4-9}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{3}^{\beta} \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-9} = \frac{1}{12} \lim \ln \frac{x^2-3}{x^2+3} \Big|_3^{\beta} =$

$$= \frac{1}{12} \lim \left( \ln \frac{\beta^2-3}{\beta^2+3} - \ln \frac{6}{12} \right) = \frac{1}{12} \left( \lim \ln \frac{1-\frac{3}{\beta^2}}{1+\frac{3}{\beta^2}} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \ln 2.$$

Несобственные интегралы 2) и 4) сходятся, а интеграл 3) расходится. Поэтому согласно интегральному признаку и ряды 2) и 4) сходятся, а ряд 3) расходится.

**961.** Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$.

Решение. Зная $n$-й член ряда, находим следующий за ним $(n+1)$-й член, заменяя в выражении $n$-го члена $n$ через $n+1$. Затем ищем предел отношения последующего члена $a_{n+1}$ к предыдущему $a_n$ при неограниченном возрастании $n$:

1) $a_n = \frac{n^5}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{2} \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^5 = \frac{1}{2}.$$

Здесь $\rho < 1$. Поэтому согласно признаку Даламбера данный ряд сходится.

2) $a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; $a_{n+1} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{2n+3}\, 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\, 3^{2n+1}} = \frac{9}{8} > 1.$$

3) $a_n = \frac{n!}{5^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\, 5^n}{5^{n+1}\, n!} = \lim \frac{n+1}{5} = +\infty.$$

4) $a_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$; $a_{n+1} = \frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{7^{3n+3}\, (2n-5)!}{(2n-3)!\, 7^{3n}} = \lim \frac{7^3}{(2n-4)(2n-3)} = 0 < 1.$$

Согласно признаку Даламбера ряды 2) и 3) расходятся, а ряд 4) сходится.

**962.** Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,3^n}$.

Решение. 1) Сравним данный ряд с гармоническим рядом (**). Каждый член $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{n}$ гармонического ряда: $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, и так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, данный ряд также расходится.

2) Каждый член $a_n = \frac{1}{n^n}$ данного ряда, начиная с третьего, меньше соответствующего члена $b_n$ бесконечной геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$, которая представляет сходящийся ряд, ибо ее знаменатель $q = \frac{1}{2} < 1$. Поэтому, согласно признаку сравнения, исследуемый ряд также сходится.

3) Каждый член $a_n$ данного ряда больше соответствующего члена $b_n$ расходящегося гармонического ряда (**): $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд расходится.

4) Каждый член $a_n = \frac{1}{(n+1)\,3^n}$ данного ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{3^n}$ бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = \frac{1}{3} < 1$. Эта бесконечно убывающая геометрическая прогрессия есть ряд сходящийся. Поэтому согласно признаку сравнения данный ряд сходится.

В задачах 963—966 написать пять первых членов ряда и проверить, выполняется ли для него необходимый признак сходимости.

**963.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$. **964.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

**965.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$. **966.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3^n}$.

Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

**967.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.  **968.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

**969.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.  **970.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

**971.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.  **972.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

**973.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.  **974.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

**975.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.  **976.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}$.

**977.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$.  **978*.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Исследовать сходимость ряда:

**979.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$.  **980.** $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

**981.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.  **982.** $1+\frac{3}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{3^3}{4!}+\ldots$

**983.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.  **984.** $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\ldots$

**985.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.  **986*.** $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$

## § 2. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда

Знакопеременный ряд (с членами разных знаков)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{1}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \qquad (2)$$

Знакопеременный сходящийся ряд (1) называется неабсолютно сходящимся, если ряд (2) расходится.

*Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.*

*Знакочередующийся ряд* (знаки членов которого строго чередуются) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,\ a_n > 0$ *сходится, если его члены убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю, т. е. если* $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. (Признак Лейбница.)

При практическом использовании рядов (сходящихся) обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Допускаемая при этом ошибка (остаток ряда) наиболее просто оценивается для знакочередующихся рядов:

*Ошибка при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда* суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.*

987. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. (Определить, является ли он абсолютно сходящимся, неабсолютно сходящимся или расходящимся.)

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};\quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n};\quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)};\quad 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Решение. 1) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю:

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \text{ и } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или неабсолютно, исследуем ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim \ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim \ln(2\beta - 1) = +\infty,$$

заключаем, что ряд с положительными членами расходится.

* С убывающими по абсолютному значению членами.

Следовательно, данный ряд 1) сходится неабсолютно.

2) Заменим члены данного знакопеременного ряда, где $\alpha$ — любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum \frac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Поэтому согласно признаку сравнения ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд 2) сходится абсолютно.

3) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} > \ldots$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Поэтому согласно признаку Лейбница он сходится. Ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, также сходится согласно интегральному признаку

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim \ln \frac{x}{x+1}\Big|_1^{\beta} = \ln 2.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

4) Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim \sin \frac{n\pi}{3}$ — не существует [см. решение задачи 38 (3)]. Вследствие этого он расходится.

988. Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены убывают по абсолютному значению и что $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = \lim \frac{1}{n^3+1} = 0$.

Далее вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{9}; \quad a_3 = -\frac{1}{28}; \quad a_4 = \frac{1}{65}; \quad a_5 = -\frac{1}{126}.$$

Согласно указанному выше свойству знакочередующихся сходящихся рядов для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65} \approx -0,41.$$

В задачах 989—992 написать шесть первых членов ряда и исследовать его сходимость:

989. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

990. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

991. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}$.

992. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin an}{n!}$.

Исследовать сходимость ряда:

993. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 4}+\frac{1}{3\ln 6}-\frac{1}{4\ln 8}+\ldots$

994*. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

995. $\cos 1+\frac{\cos 2}{4}+\frac{\cos 3}{9}+\frac{\cos 4}{16}+\ldots$

996*. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

Проверить, что данный знакочередующийся ряд сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01:

997. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$

998. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

## § 3. Функциональные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$, члены которого являются функциями от переменной $x$, называется функциональным.

При различных значениях $x$ из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

*Совокупность значений $x$, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.*

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots \tag{1}$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \tag{2}$$

*Областью сходимости всякого степенного ряда является один интервал числовой оси*, симметричный относительно точки $x=0$ (для ряда 1) или $x=x_0$ (для ряда 2), который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

*Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения $x$, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда* ($\rho=1$), *исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов.*

**999.** Определить интервал сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$.

Решение. 1) По известному члену ряда $u_n$, заменяя в нем $n$ через $n+1$, находим следующий за ним член $u_{n+1}$:

$$u_n=\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}; \quad u_{n+1}=\frac{(-x)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}.$$

Далее, используя признак Даламбера, ищем предел

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{x^{n+1}3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\sqrt{n+1}\,x^n}\right|=\frac{|x|}{3}\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{|x|}{3}$$

и определяем, при каких значениях $x$ этот предел будет меньше единицы, т. е. решаем неравенство $\frac{|x|}{3}<1$; $|x|<3$; $-3<x<3$.

Согласно признаку Даламбера, при любом значении $x$ из найденного интервала данный ряд сходится (абсолютно), а при $|x|>3$ расходится.

Граничные точки $x=\pm 3$ этого интервала, для которых $\rho=1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x=-3$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum\frac{3}{\sqrt{n}}$, который расходится, что следует из сравнения его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\frac{1}{n}$. (Каждый член исследуемого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда.)

При $x=3$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum(-1)^n\frac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится согласно признаку Лейбница. (Члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю.)

Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда является полуоткрытый интервал $-3 < x \leqslant 3$.

2) Здесь $u_n = \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$; $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} x^{2n+2}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \frac{2(n+1)x^2}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= 2x^2 \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} = 0 < 1,$$

т. е. для данного ряда $\rho < 1$ при любом значении $x$.

Следовательно, согласно признаку Даламбера этот ряд сходится при любом значении $x$; его интервал сходимости есть вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$.

3) Здесь $u_n = \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$; $u_{n+1} = \frac{(x+8)^{3n+3}}{(n+1)^2}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \left|\frac{n^2(x+8)^3}{(n+1)^2}\right| = |x+8|^3 \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x+8|^3;$$

$$|x+8|^3 < 1;\ |x+8| < 1:\ -1 < x+8 < 1;\ -9 < x < -7.$$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При $x=-9$ получим числовой знакочередующийся ряд с общим членом $a_n = \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x=-7$ получим ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{n^2}$. Исследуя его по интегральному признаку

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} x^{-2}\,dx = \lim \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\beta} = \lim \left(1-\frac{1}{\beta}\right) = 1,$$

выясняем, что он сходится.

Следовательно, интервалом сходимости ряда является отрезок $-9 \leqslant x \leqslant -7$.

4) Для данного ряда $u_n = 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$; $u_{n+1} = 10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 10^2(2x-3)^2.$$

$$10^2(2x-3)^2 < 1;\ |2x-3| < 0{,}1;\ -0{,}1 < 2x-3 < 0{,}1;$$

$$1{,}45 < x < 1{,}55.$$

Границы найденного интервала исследуем особо: подставляя в данный ряд $x=1{,}45$, затем $x=1{,}55$, получим числовые ряды $-10-10-10-\ldots-10-\ldots$ и $10+10+10+\ldots+10+\ldots$, которые расходятся, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Следовательно, интервал сходимости данного ряда есть

$$1{,}45 < x < 1{,}55.$$

**1000.** Определить область сходимости функционального ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n \sqrt[3]{\sin^n x}.$$

Решение: 1) Используем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{n(x+2)^n}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+2)^{n+1}};$$

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|}.$$

$$\frac{1}{|x+2|} < 1; \ |x+2| > 1; \ x+2 < -1, \ x+2 > 1;$$

$$-\infty < x < -3, \quad -1 < x < +\infty.$$

Границы двух найденных интервалов исследуем особо.

При $x = -3$ получим знакочередующийся числовой ряд с общим членом $\frac{1}{n(-1)^n}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x = -1$ получим гармонический расходящийся ряд.

Следовательно, область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, -3]$ и $(-1, +\infty)$.

2) $u_n = n \sqrt[3]{\sin^n x}; \quad u_{n+1} = (n+1) \sqrt[3]{\sin^{n+1} x};$

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \frac{n+1}{n} \left| \sqrt[3]{\sin x} \right| = \left| \sqrt[3]{\sin x} \right|.$$

Этот предел $\rho$ будет меньше единицы, а исследуемый ряд будет сходящимся, согласно признаку Даламбера, для всех значений $x$, кроме $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при которых $\rho = 1$.

При $x = x_k$ и при четном $k$ получим ряд $1+2+3+\ldots+n+ +\ldots$, а при нечетном $k$ — ряд $-1+2-3+\ldots+(-1)^n n+\ldots$, которые оба расходятся вследствие невыполнения необходимого условия сходимости.

Следовательно, область сходимости данного ряда есть вся числовая ось, исключая точки $x_k$.

Определить интервал сходимости степенного ряда:

**1001.** $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ **1002.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^{2n}$.

**1003.** $1 + 2!\,x + 3!\,x^2 + 4!\,x^3 + \ldots$ **1004.** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

**1005.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

**1006.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

Определить область сходимости функционального ряда:

**1007.** $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$

**1008.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lg^n x}{n}$.

**1009.** $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2^2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3^2}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4^2}+\ldots$

**1010*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

## § 4. Ряды Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $a$ называется степенной ряд относительно двучлена $x-a$ вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (T)$$

Этот ряд можно получить из многочлена Тейлора, указанного в гл. III, § 1, при неограниченном увеличении числа его членов. Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки $a$ имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться в породившей его функции $f(x)$ только при тех значениях $x$, при которых остаточный член $R_n$ формулы Тейлора (гл. III, § 1) для этой функции при неограниченном возрастании $n$ стремится к нулю.

При $a=0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной $x$:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (M)$$

который принято называть рядом Маклорена.

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

А) написать ряд Тейлора для данной функции, т. е. вычислить значения этой функции и ее производных при $x=a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (T) для произвольной функции;

Б) исследовать остаточный член $R_n$ формулы Тейлора для данной функции и определить совокупность значений $x$, при которых полученный ряд сходится к данной функции (т. е. при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$).

Для многих функций, употребляемых в практических применениях математического анализа, интервал сходимости ряда Тейлора полностью совпадает с совокупностью тех значений $x$, при которых соответствующий остаточный член $R_n \to 0$, когда $n \to +\infty$, т. е. для многих функций каждая точка $x$ сходимости ряда Тейлора является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Тейлора можно вместо исследования соответствующего остаточного члена $R_n$, что во многих случаях весьма затруднительно, исследовать сходимость самого ряда Тейлора, как обычного степенного ряда.

**1011.** Разложить в ряд Маклорена функции $e^x$, $\sin x$, $\cos x$.

Решение. А) Значения данных функций и их производных любого порядка при $x=0$ были вычислены ранее в решении задачи 297 (гл. III, § 1). Подставляя эти значения в общее выражение ряда Маклорена (М) для произвольной функции, получим ряды Маклорена для данных функций:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Б) Каждый из этих рядов сходится к породившей его функции при всех значениях $x$, поскольку в решении задачи 297 было доказано, что для каждой из данных функций остаточный член $R_n$ формулы Маклорена при неограниченном возрастании $n$ стремится к нулю при любом значении $x$.

**1012.** Разложить в ряд Маклорена функции: 1) $(1+x)^m$, 2) $\ln(1+x)$.

Решение. 1) А. Исходя из решения задачи 298 и согласно определению ряда Маклорена для произвольной функции, получим

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (Б)$$

При целом положительном показателе $m$ этот биномиальный ряд будет содержать конечное число $m+1$ членов, ибо коэффициенты всех последующих членов будут равны нулю. В этом случае он обращается в элементарную формулу бинома Ньютона.

Б. Исследуем сходимость биномиального ряда, когда $m$ не есть целое положительное число, по признаку Даламбера:

$$u_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n;\quad u_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{(m-n)x}{n+1}\right|=|x|\lim\left|\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|;$$

$$\rho<1 \text{ при } -1<x<1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера биномиальный ряд (Б) сходится в интервале $-1<x<1$ и, как доказывается в учебниках, он сходится именно к биному $(1+x)^m$.

2) А. Используя решение задачи 298, получим следующий ряд Маклорена для данной логарифмической функции:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Б. Исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера: $|u_n|=\frac{|x^n|}{n}$; $|u_{n+1}|=\frac{|x^{n+1}|}{n+1}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\frac{n}{n+1}|x|=|x|;$$

$$\rho<1 \quad \text{при} \quad -1<x<1.$$

При $x$, равном левой границе найденного интервала, т. е. при $x=-1$, получается числовой ряд $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$, который расходится, так как все его члены отличаются от соответствующих членов расходящегося гармонического ряда только знаками.

При $x=1$ получается знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{4}+\ldots$, который сходится согласно признаку Лейбница

Следовательно, полученный ряд Маклорена для данной логарифмической функции сходится в полуоткрытом интервале $(-1; 1]$. Можно доказать, что он сходится в этом интервале именно к данной функции $\ln(1+x)$.

**1013.** Разложить в ряд Тейлора функции:

1) $\frac{1}{x}$ при $a=-2$; 2) $\cos x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

Решение. 1) А. Вычисляем значения данной функции и ее производных при $x=a=-2$:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=x^{-1} & f(-2)=-\frac{1}{2} \\
f'(x)=-1\cdot x^{-2} & f'(-2)=-\frac{1!}{2^2} \\
f''(x)=1\cdot 2x^{-3} & f''(-2)=-\frac{2!}{2^3} \\
f'''(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4} & f'''(-2)=-\frac{3!}{2^4} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, x^{-n-1} & f^{(n)}(-2)=-\frac{n!}{2^{n+1}} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора (Т) для произвольной функции, получим

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1!\,(x+2)}{2^2\,1!}-\frac{2!\,(x+2)^2}{2^3\,2!}-\frac{3!\,(x+2)^3}{2^4\,3!}-\ldots-\frac{n!\,(x+2)^n}{2^{n+1}\,n!}-\ldots$$

$$\ldots=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\ldots\right].$$

Б) Исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера: $u_n=\frac{(x+2)^n}{2^n}$; $u_{n+1}=\frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x+2|}{2};$$

$$\rho<1,\text{ если }\frac{|x+2|}{2}<1.$$

Решая это неравенство, находим интервал $-4<x<0$.

Границы этого интервала исследуем особо. Подставляя в ряд $x=-4$, затем $x=0$, получим числовые ряды $1-1+1-1+\ldots$ и $1+1+1+1+\ldots$, которые расходятся, так как у них не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Следовательно, интервал сходимости полученного ряда Тейлора для данной функции есть $(-4;\ 0)$. Исследуя остаточный член $R_n$ формулы Тейлора для данной функции, можно убедиться, что в указанном интервале полученный ряд сходится именно к данной функции.

2) А. $y=\cos x$ $\qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y''=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\qquad y''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'''=\sin x=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)\qquad y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\qquad y^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots\right].$$

Б. Исследуем соответствующий остаточный член $R_n$ формулы Тейлора:

$$R_n=\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+(n+1)\frac{\pi}{2}\right],\quad 0<\theta<1.$$

При любом $x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}=0$, что было доказано в решении задачи 40, а $|\cos\alpha|\leqslant 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=0$ при любом $x$, т. е. полученный ряд Тейлора для $\cos x$ сходится к $\cos x$ при любом $x$.

**1014.** Написать три первых члена ряда Маклорена для функции: 1) $\sec x$; 2) $\ln(e^x+x)$.

**1015.** Написать три первых члена ряда Тейлора для функции:

$$1)\ \frac{1}{1-x} \text{ при } a=2; \quad 2)\ x^3 \ln x \text{ при } a=1.$$

**1016.** Разложить в ряд Маклорена функции: 1) $10^x$; 2) $\ln(1-x)$; 3)* $\cos(x-1)$.

**1017.** Разложить в ряд Тейлора функции:

$$1)\ e^x \text{ при } a=-2; \ 2)\ \sqrt{x} \text{ при } a=4; \ 3)\ \cos\frac{x}{2} \text{ при } a=\frac{\pi}{2}.$$

## § 5. Действия со степенными рядами. Применение рядов к приближенным вычислениям

*Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать* (по правилу умножения многочленов). При этом интервалом сходимости полученного нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда. *

*Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно интегрировать, а внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать.*

Использование этих правил для разложения функций в ряды и применение рядов для вычисления приближенных значений функций и интегралов разъясняется в решении следующих задач.

**1018.** Используя ряды Маклорена для функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ и правила умножения и сложения степенных рядов, найти разложения в ряд по степеням $x$ для следующих функций: 1) $(1+x)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\frac{x-3}{(x+1)^2}$; 4) $e^{-x}\sin x$; 5) $\ln(1+3x+2x^2)$.

Решение. 1) Рассматриваем двучлен $1+x$ как степенной ряд, у которого коэффициенты всех членов, кроме двух первых, равны нулю и который сходится на всей числовой оси. Умножая почленно этот ряд на ряд Маклорена для функции $e^x$, который также сходится на всей числовой оси, получим искомое разложение в ряд данной функции:

$$(1+x)e^x = (1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\ldots+\frac{n+1}{n!}x^n+\ldots,$$

которое справедливо, т. е. сходится к данной функции, при всех значениях $x$.

---

* Иногда в этот интервал включаются и некоторые точки, в которых сходится только один из исходных рядов.

2) Ряд для $\sin^2 x$ можно получить почленным умножением самого на себя известного ряда Маклорена для $\sin x$:

$$\sin^2 x = \sin x \sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех значениях $x$.

Тот же результат можно получить, исходя из формулы $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и пользуясь рядом для $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

который получается из ряда Маклорена для $\cos x$ путем замены $x$ на $2x$.

3) Преобразуем данную функцию в произведение $\frac{x-3}{(x+1)^2} = (x-3)(x+1)^{-2}$; рассматриваем двучлен $x-3$ как степенной ряд, сходящийся при любом значении $x$; пользуясь биномиальным рядом (Б), полагая в нем $m = -2$, разлагаем в ряд бином $(1+x)^{-2}$:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \ldots \qquad (*)$$

Умножая почленно этот ряд на $x-3$, получим искомый ряд для данной функции:

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = -3 + 7x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1} + \ldots,$$

который сходится к данной функции в интервале $(-1; 1)$, поскольку в этом интервале сходится к биному $(1+x)^{-2}$ ряд $(*)$.

4) Ряд для функции $e^{-x}\sin x$ найдем почленным умножением ряда для $e^{-x}$ (получаемого из ряда Маклорена для $e^x$ при замене $x$ на $-x$) на ряд Маклорена для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$
$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots$$

Полученный ряд сходится к данной функции во всем своем интервале сходимости — на всей числовой оси, ибо ряды для $e^{-x}$ и $\sin x$ сходятся к этим функциям на всей числовой оси.

5) Преобразуем данную функцию: $\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln(1+x)(1+2x) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$. Пишем ряды Маклорена

для полученных слагаемых функций:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1;$$

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\quad -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$$

(второй ряд получен из первого путем замены $x$ на $2x$) и складывая их почленно, имеем

$$\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n},\quad -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Все полученные в решении этой задачи ряды для заданных функций являются рядами Маклорена для этих функций, ибо вообще, *если какая-либо функция разлагается в степенной ряд, то он является ее рядом Тейлора.*

**1019.** Пользуясь соответствующими рядами, вычислить с точностью до 0,0001: 1) $\ln 1{,}1$; 2) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью удобно пользоваться рядами в том случае, когда соответствующий ряд является знакочередующимся; для знакочередующегося сходящегося ряда легко оценить погрешность приближенного значения суммы — она меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов (§ 2).

В других случаях приближенные значения функции с заданной точностью вычисляются по формуле Тейлора (Маклорена), как это показано в решении задачи 299 (гл. III, § 1).

1) Возьмем ряд для функции $\ln(1+x)$, полученный в решении задачи 1012:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

который сходится к $\ln(1+x)$ в интервале $(-1;\ 1]$, и, полагая $x=0{,}1$, получим ряд для вычисления $\ln 1{,}1$ с любой точностью:

$$\ln 1{,}1=0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots$$

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому, согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда (§ 2), для вычисления приближенного значения $\ln 1{,}1$ с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1\approx 0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}001}{3}\approx 0{,}0953.$$

2) Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ и применяем биномиальный ряд (Б), полученный в решении задачи 1012, полагая $x=\frac{1}{16}$, $m=\frac{1}{4}$:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-\ldots\right].$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001, вычисляем несколько последовательных первых членов ряда: $a_1=1$; $a_2\approx 0{,}01562$; $a_3\approx -0{,}00037$; $a_4\approx 0{,}00001$.

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда, если ограничиться суммой трех первых членов ряда, то ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше $2a_4\approx\approx 2\cdot 0{,}00001<0{,}0001$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{17}\approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037)\approx 2{,}0305.$$

**1020.** Найти разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$, исходя из выражения ее в виде интеграла: $\operatorname{arctg} x=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}$, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и почленно его интегрируя.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t^2}==(1+t^2)^{-1}$ и разложим ее в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=t^2$, $m=-1$:

$$(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+\ldots$$

Интегрируя в пределах от 0 до $x$, получим искомый ряд

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,$$

который сходится к $\operatorname{arctg} x$ в интервале $(-1;\ 1)$, ибо разложение подынтегральной функции в биномиальный ряд справедливо в этом интервале. Можно доказать, что полученный ряд сходится к $\operatorname{arctg} x$ и на границах этого интервала при $x=\pm 1$.

**1021.** Найти ряд Маклорена для функции $\arcsin x$, исходя из выражения ее в виде интеграла: $\arcsin x=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, разложим ее в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=-t^2$, $m=-\frac{1}{2}$:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{2n}+\ldots$$

и интегрируя в пределах от 0 до $x$, получим искомый ряд

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

который сходится к $\arcsin x$ при $|x|\leqslant 1$.

**1022.** Разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и интегрируя его почленно, найти разложения в ряд следующих интегралов:

1) $\int \sin x^2\,dx$; 2) $\int \sqrt{x}\,e^x\,dx$; 3) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$.

Решение. 1) Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$, заменяя в нем $x$ на $x^2$, имеем

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Почленно интегрируя, получим искомое разложение

$$\int \sin x^2\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{3!\,7}+\frac{x^{11}}{5!\,11}-\frac{x^{15}}{7!\,15}+\ldots+C,$$

которое справедливо при любом значении $x$.

2) Заменяя функцию $e^x$ ее рядом Маклорена, почленно умножая его на $\sqrt{x}$ и интегрируя, получим

$$\int \sqrt{x}\,e^x\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)dx=$$
$$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!}+\ldots+\frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!}+\ldots\right)dx=$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{1!\,5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{2!\,7}x^{\frac{7}{2}}+\ldots+\frac{2}{n!\,(2n+3)}x^{\frac{2n+3}{2}}+\ldots+C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x\geqslant 0$.

3) Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд (Б)

$$\sqrt{1-x^3}=(1-x^3)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{1!\,2}x^3-\frac{1}{2!\,2^2}x^6-\frac{1\cdot 3}{3!\,2^3}x^9-\ldots$$

и интегрируя почленно, получим искомый ряд

$$\int \sqrt{1-x^3}\,dx = x-\frac{x^4}{1!\,2\cdot 4}-\frac{x^7}{2!\,2^2\,7}-\frac{1\cdot 3x^{10}}{3!\,2^3\,10}-\ldots+C,$$

который сходится при $|x|<1$.

**1023.** С помощью рядов вычислить с точностью до 0,0001 приближенные значения следующих интегралов:

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};\quad I_2=\int_0^1\cos\sqrt{x}\,dx;\quad I_3=\int_1^{1,5}\frac{1}{v}\operatorname{arctg}\frac{v}{4}\,dv.$$

Решение. 1) Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=t^4$, $m=-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}=(1+t^4)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}t^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^{12}+\ldots$$

Этот ряд сходится к биному $(1+t^4)^{-\frac{1}{2}}$ при $|t|<1$.

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, найдем

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=t-\frac{1}{2}\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^9}{9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^{13}}{13}+\ldots\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}}+\ldots$$

Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (с одним лишним знаком): $a_1=0{,}50000$; $a_2\approx-0{,}00313$; $a_3\approx 0{,}00008$.

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда (§ 2), для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму двух первых членов ряда $I_1\approx a_1+a_2\approx 0{,}4969$.

Ошибка этого приближенного значения меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда, т. е. меньше $a_3\approx 0{,}00008$.

2) Пользуясь рядом Маклорена для $\cos x$, заменяя в нем $x$ на $\sqrt{x}$, имеем

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\ldots\ (x\geqslant 0).$$

Интегрируя в указанных пределах, получим

$$I_2=\int_0^1\cos\sqrt{x}\,dx=x-\frac{x^2}{2!\,2}+\frac{x^3}{4!\,3}-\frac{x^4}{6!\,4}+\frac{x^5}{8!\,5}-\ldots\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2!\,2}+\frac{1}{4!\,3}-\frac{1}{6!\,4}+\frac{1}{8!\,5}-\ldots$$

Пятый член этого знакочередующегося сходящегося ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму четырех первых членов ряда:

$$I_2 \approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880} \approx 0{,}7635.$$

3) Пользуясь рядом Маклорена для $\operatorname{arctg} x$, при $x=\frac{v}{4}$, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{4}=\frac{v}{4}-\frac{v^3}{4^3\cdot 3}+\frac{v^5}{4^5\cdot 5}-\frac{v^7}{4^7\cdot 7}+\ldots\ (|v|\leqslant 4).$$

Деля обе части равенства на $v$ и интегрируя, найдем

$$I_3=\int\limits_1^{1,5}\frac{1}{v}\operatorname{arctg}\frac{v}{4}\,dv=\frac{v}{4}-\frac{v^3}{4^3\cdot 3^2}+\frac{v^5}{4^5\cdot 5^2}-\frac{v^7}{4^7\cdot 7^2}+\ldots\Big|_1^{1,5}=$$

$$=\frac{1{,}5-1}{4}-\frac{1{,}5^3-1}{4^3\cdot 3^2}+\frac{1{,}5^5-1}{4^5\cdot 5^2}-\frac{1{,}5^7-1}{4^7\cdot 7^2}+\ldots\approx$$

$$\approx 0{,}12500-0{,}00412+0{,}00026-0{,}00002+\ldots$$

Полученный результат представляет знакочередующийся сходящийся ряд. Взяв сумму трех его первых членов, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью: $I_3 \approx 0{,}1211$, ибо абсолютное значение четвертого члена меньше 0,0001.

**1024.** Пользуясь рядами, полученными в решениях задач 1011, 1012, 1020, и правилами сложения и умножения степенных рядов, найти разложения в степенные ряды следующих функций:

1) $x\cos 2x$; 2) $\ln\frac{1+x}{1-x}$; 3) $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

4) $\frac{x}{2-x}$; 5)* $e^x\sin x$; 6)* $(1+e^x)^2$.

**1025.** Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 0{,}3$; 2) $\sin 0{,}4$; 3) $\operatorname{arctg} 0{,}2$; 4) $\sqrt[3]{30}$.

**1026.** Разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и интегрируя его почленно, найти разложения в ряд следующих интегралов:

1) $\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx$; 2) $\int\frac{e^t}{t}\,dt$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

4) $\int\frac{1-\cos x}{x}\,dx$; 5)* $\int\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

**1027.** Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

$$1)\ \int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx;\quad 2)\ \int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx;\quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

$$4)\ \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx;\quad 5)^*\ \int_0^{0,125} \sqrt[3]{x}\cos^2 x\,dx.$$

## § 6. Числовые и степенные ряды с комплексными членами

Числовым рядом с комплексными членами называется ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n,$$

где $c_1=a_1+b_1 i$, $c_2=a_2+b_2 i$, $\ldots$, $c_n=a_n+b_n i$, $\ldots$ — комплексные числа ($i=\sqrt{-1}$; $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $\ldots$, $a_n$, $b_n$, $\ldots$ — действительные числа).

Сходимость и сумма числового ряда с комплексными членами определяются так же, как и для числового ряда с действительными членами (§ 1). Выполнение условия $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=0$ есть необходимый (но недостаточный) признак сходимости, а не выполнение этого условия есть достаточный признак расходимости всякого числового ряда с комплексными членами.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами можно свести к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами:

*Ряд с комплексными членами*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n i) \tag{1}$$

*будет сходящимся, если сходятся два ряда с действительными членами*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \tag{2}$$

При этом, если ряды (2) сходятся соответственно к суммам $A$ и $B$, то ряд (1) сходится к сумме $C=A+Bi$. Если же хотя бы один из двух рядов (2) расходится, то и комплексный ряд (1) также расходится.

Ряд с комплексными членами (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд с действительными положительными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n+b_ni|=\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \tag{3}$$

составленный из модулей его членов. Если же ряд (1) сходится, а ряд (3) расходится, то ряд (1) называется неабсолютно сходящимся.

Абсолютная сходимость ряда есть достаточный (но не необходимый) признак сходимости ряда, т. е. *если ряд сходится абсолютно, то он сходящийся.*

Для исследования сходимости комплексных рядов можно пользоваться признаком Даламбера: *если* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=$ $=\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд сходится* (абсолютно), *а при* $\rho>1$ *расходится.*

Если $z$ есть комплексная переменная, т. е. величина, принимающая различные числовые комплексные значения, $z=x+iy$, где $x$ и $y$ — действительные переменные, то ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n, \tag{4}$$

где $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, ... — комплексные постоянные, называется степенным рядом с комплексными членами.

Если изображать комплексное число $a+bi$ точкой $(a, b)$ плоскости $xOy$, то *область сходимости всякого степенного ряда* (4) *с комплексными членами* (т. е. совокупность точек, в которых ряд сходится) *представляет круг с центром в начале координат*.*

Радиус $R$ круга сходимости комплексного степенного ряда называется радиусом сходимости этого ряда. При $R=0$ ряд сходится только в одной точке $(0, 0)$, т. е. $z=0$, а при $R=+\infty$ — во всех точках комплексной плоскости $xOy$.

Показательная функция $e^z$ комплексного аргумента $z=x+iy$ определяется как сумма степенного ряда

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

которая существует при любом значении $z$ [см. решение задачи 1029 (2)].

Отсюда при $z=iy$ $(x=0)$, затем при $z=-iy$ получаются, соответственно, следующие формулы Эйлера:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y;\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y, \tag{5}$$

* На границе (окружности) круга сходимости комплексного степенного ряда могут быть как точки сходимости этого ряда, так и точки его расходимости.

которые выражают показательные функции через тригонометрические. Путем их сложения и вычитания получаются еще две формулы:

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}, \tag{6}$$

которые выражают тригонометрические функции через показательные. Они также называются формулами Эйлера.

**1028.** Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{i}{2n+1}\right)$.

Решение. 1) Заданный общий член ряда есть комплексное число, действительная часть которого $a_n = \frac{3}{1+\sqrt{n}}$ и мнимая часть $b_n = -\frac{2}{1+\sqrt{n}}$. Здесь числовые ряды с действительными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$ оба расходятся, что следует из сравнения их с гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n}$. Поэтому данный ряд с комплексными членами также расходится.

2) Используем признак Даламбера. По заданному члену ряда $c_n$ найдем следующий за ними член $c_{n+1}$:

$$c_n = \frac{n(3i-1)^n}{5^n}; \quad c_{n+1} = \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$$

и вычислим предел отношения их модулей

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right| =$$

$$= \frac{|3i-1|}{5}\lim\frac{n+1}{n} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{5}\cdot 1 = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера, данный ряд абсолютно сходящийся.

3) Здесь ряды с действительными членами $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ и $b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ знакочередующиеся. Согласно признаку Лейбница оба они сходятся. Поэтому заданный комплексный ряд также сходится.

Ряд, членами которого являются модули членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n+b_n i| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1},$$

расходится (согласно признаку сравнения, ибо

$$\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{\sqrt{8n^2}}{4n^2} = \frac{1}{n\sqrt{2}} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} = +\infty.$$

Это же следует из расходимости рядов $\Sigma|a_n|$ и $\Sigma|b_n|$).

Поэтому данный комплексный ряд сходится как таковой, но не абсолютно.

**1029.** Найти радиус сходимости степенного ряда с комплексными членами:

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2} z^{3n}.$$

Решение. Пользуемся признаком Даламбера,

1) $u_n = 2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n$; $u_{n+1} = 2^{n+1}(\sqrt{n}-i)z^{n+1}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\left|\frac{2(\sqrt{n}-i)}{\sqrt{n-1}-i}z\right| =$$

$$= 2|z|\lim\left|\frac{(\sqrt{n}-i)(\sqrt{n-1}+i)}{(\sqrt{n-1}-i)(\sqrt{n-1}+i)}\right| =$$

$$= 2|z|\lim\frac{|1+\sqrt{n(n-1)}+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\,i|}{n} = 2|z|\lim\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 2|z|.$$

Согласно признаку Даламбера при всех значениях $z=x+iy$, удовлетворяющих неравенству $|z|<\frac{1}{2}$, данный ряд сходится, а при всех $|z|>\frac{1}{2}$ он расходится.

Геометрически данный ряд сходится внутри круга $|z| = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}$ и расходится вне этого круга, т. е. искомый радиус сходимости $R=\frac{1}{2}$.

На границе круга сходимости — на окружности $|z|=\frac{1}{2}$ или $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ данный ряд расходится, ибо во всех точках этой границы общий член ряда $c_n=\sqrt{n-1}-i$ при $n\to+\infty$ не стремится к нулю.

2) $u_n=\frac{z^n}{n!}$; $u_{n+1}=\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Согласно признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом комплексном значении $z$, т. е. его радиус сходимости $R=+\infty$.

3) $u_n=\frac{(3+4i)^n}{n^2}z^{3n}$; $u_{n+1}=\frac{(3+4i)^{n+1}}{(n+1)^2}z^{3n+3}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\left|\frac{n^2(3+4i)}{(n+1)^2}z^3\right|=$$

$$=|z|^3\sqrt{3^2+4^2}\lim\frac{n^2}{(n+1)^2}=5|z|^3.$$

Следовательно, ряд сходится при $5|z|^3<1$, т. е. искомый радиус сходимости ряда $R=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В точках на границе круга сходимости $|z|=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ данный ряд также сходится, так как в этих точках сходится числовой ряд $\sum\frac{1}{n^2}$, составленный из модулей его членов.

Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:

**1030.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{n!}$. **1031.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$.

**1032.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{i}{3n}\right]$. **1033.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3-i)^n}{10^n\,n}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда с комплексными членами:

**1034.** $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^3}$. **1035.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n!-i)z^{2n}$.

**1036.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}}z^n$. **1037.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+i\sqrt{n}}{n}z^n$.

**1038.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,(1+i)}{(2n-1)!}z^{3n}$. **1039.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n ni}{n^2}(-z)^n$.

## § 7. Ряды Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$
$$+\left(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где $l>0$, $a_0$, $a_n$, $b_n$ ($n=1, 2, \ldots$) — постоянные, называется **тригонометрическим рядом**.

Все члены тригонометрического ряда — синусы и косинусы углов, кратных $\frac{\pi x}{l}$, и их сумма $S(x)$, если она существует, являются периодическими функциями от $x$ с периодом $2l$; $S(x)=S(x+2l)$. Поэтому тригонометрические ряды широко применяются для изучения различных периодических процессов в электротехнике, радиотехнике, в теории упругих механических колебаний и во многих других областях естествознания и техники.

Разложение данной функции в тригонометрический ряд называется **гармоническим анализом**, ибо этим достигается разложение какого-либо сложного периодического явления на простые гармонические колебания.

*Рядом Фурье для функции* $f(x)$ *в интервале* $[-l, l]$ *называется тригонометрический ряд вида* (1), *если его коэффициенты* $a_n$ и $b_n$ *вычислены по формулам Фурье:*

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2}$$

Простейшие достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье сформулированы в следующей теореме Дирихле.

*Если в интервале* $[-l, l]$ *функция* $f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва первого рода* (*или непрерывна*) *и конечное число точек экстремума* (*или не имеет их вовсе*), *то ее ряд Фурье сходится*, т. е. имеет сумму $S(x)$, *во всех точках этого интервала*. При этом:

а) *в точках непрерывности функции* $f(x)$ *он сходится к самой функции*, $S(x)=f(x)$;

б) *в каждой точке разрыва* $x_k$ *функции — к полусумме односторонних пределов функции слева и справа*,

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to x_k-0} f(x)+\lim_{x\to x_k+0} f(x)\Big];$$

в) *в обеих граничных точках интервала* $[-l, l]$ — *к полусумме односторонних пределов функции при стремлении* $x$ *к этим точкам изнутри интервала*,

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\Big].$$

**Для четной функции** $f(x)=f(-x)$ все коэффициенты $b_n=0$* и соответствующий **ряд Фурье не содержит**

---

* Согласно решению задачи 592

синусов

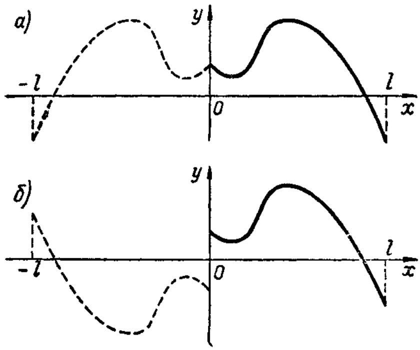
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{3}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Для нечетной функции $f(x)=-f(-x)$ все коэффициенты $a_n=0$ и соответствующий ряд Фурье содержит только синусы

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{4}$$

Если функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является периодической, то на всей числовой оси ее ряд Фурье в точках непрерывности функции сходится к самой функции, а в каждой точке разрыва функции — к полусумме ее односторонних пределов.




Черт. 201

Функцию $f(x)$, заданную в интервале $[0,\ l]$, можно произвольно продолжить в соседний интервал $[-l,\ 0)$ и поэтому ее можно представить различными рядами Фурье. Пользуясь этим, такую функцию обычно представляют неполным рядом Фурье, содержащим только косинусы или только синусы.

Ряд по косинусам получается при четном, а ряд по синусам при нечетном продолжении данной функции на соседний слева интервал $[-l,\ 0)$. В первом случае график данной функции продолжается на интервал $[-l,\ 0)$ симметрично относительно оси ординат, а во втором случае — симметрично относительно начала координат, черт. 201 *а*, *б*.

С помощью формул Эйлера (§ 6) получается удобная во многих случаях **комплексная форма ряда Фурье**:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ где } c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\, dx. \qquad (5)$$

Если функция $f(x)$ задана несколькими различными формулами на разных частях интервала $[-l, l]$, то при разложении ее в ряд Фурье, при вычислении интегралов в формулах (2) или (5) для коэффициентов ряда, следует разбить интервал интегрирования точками, в которых меняется аналитическое выражение функции, на части и затем вычислять указанные интегралы как сумму интегралов по составляющим частям.

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $[0, 2l]$ пределы интегралов в формулах (2) или (5) будут 0 и $2l$, а в случае произвольного интервала $[a, b]$ длины $2l$ эти пределы будут $a$ и $a+2l$.

**1040.** Разложить в ряд Фурье данную функцию в указанном интервале:

1) $\varphi(x)=\frac{x}{2}$; $(0, 2\pi)$;

2) $y=\begin{cases} 6 \text{ при } 0<x<2 \\ 3x \text{ при } 2<x<4; \end{cases}$

3) $\psi(x)=e^{-x}$; $(-\pi, \pi)$;

4) $u=|\sin x|$; $[-\pi, \pi]$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму $S$ ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$

Решение. Вначале проверяем, что данная функция в указанном интервале удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты $a_n$ и $b_n$ (или $c_n$) по формулам Фурье и, подставляя их в ряд (1) [или (5)], получаем искомое разложение данной функции в ряд Фурье; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких значениях $x$ полученный ряд сходится к данной функции.

1) Данная функция не четная и не нечетная, поэтому вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам (2), полагая $l=\pi$ и беря пределами интегралов 0 и $2\pi$, поскольку функция задана в интервале $(0, 2\pi)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n}\int\sin nx\,dx\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=\frac{\cos 2n\pi-1}{2\pi n^2}.$$

(Для вычисления интеграла применена формула интегрирования по частям.)

При $n=1, 2, 3, \ldots$, $n\neq 0$, $a_n=0$; при $n=0$ полученное здесь выражение для $a_n$ не имеет смысла. Поэтому коэффициент $a_0$ вычисляем отдельно по формуле (2), полагая $n=0$ ($\cos nx=1$):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi}=\pi;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}.$$

Подставляя значения коэффициентов $a_n$ и $b_n$ в тригонометрический ряд (1), получим искомое разложение данной функции в ряд Фурье:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$$

Это разложение справедливо, т. е. полученный ряд сходится к данной функции во всех точках ее области определения $0<x<2\pi$. (В граничных точках $x=0$ и $x=2\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$, в этих точках все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль. То же значение имеет сумма ряда в указанных точках и по теореме Дирихле.)

2) Пользуясь формулами (2), полагая $l=2$ и разбивая интервал интегрирования (0; 4) точкой $x=2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 y\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi),\qquad n\neq 0.$$

При $n$ четном $\cos n\pi=1$ и $a_n=0$; при $n$ нечетном $\cos n\pi=-1$ и $a_n=\frac{12}{n^2\pi^2}$.

При $n=0$ по формуле (2) получим:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 y\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 y\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^0+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}[12(1-\cos n\pi)+3(4\cos n\pi-8)]=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$y=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\dots\right)-$$
$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\dots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале (0; 2) сумма ряда $S(x)=6$, а в интервале (2; 4) $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$, где функция не определена,

$$S(2)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 2-0} y+\lim_{x\to 2+0} y\right)=6.$$

3) Здесь удобно использовать комплексную форму ряда Фурье. По формуле (5):

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x}\,dx=\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\Bigg|_{\pi}^{-\pi}=$$
$$=\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}=\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)}.$$

По формулам Эйлера $e^{\pm in\pi}=\cos n\pi\pm i\sin n\pi=(-1)^n$.

Следовательно, $c_n=\dfrac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}$, (а)

$$e^{-x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}.$$

В интервале $(-\pi,\ \pi)$ ряд представляет функцию $e^{-x}$, а в точках $x=\pm\pi$ его сумма равна $\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})$.

Чтобы преобразовать полученный ряд в комплексной форме к обычной тригонометрической форме ряда Фурье (если это нужно), следует объединить слагаемые с индексами $n$ и $-n$ и заменить в результате по формулам Эйлера (§ 6) показательные функции тригонометрическими:

$$u_n+u_{-n}=\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}+\frac{(-1)^{-n}e^{-inx}}{1-in}=(-1)^n\frac{(1-in)e^{inx}+(1+in)e^{-inx}}{1+n^2}=$$
$$=2(-1)^n\frac{\cos nx+n\sin nx}{1+n^2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Из равенства (а), полагая $n=0$, вычисляем $a_0=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$.

Следовательно,

$$e^{-x}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)\right].$$

4) Данная функция четная (черт. 202), вследствие чего все коэффициенты $b_n=0$. В интервале $[0, \pi]$ функция определяется формулой $y=\sin x$. Поэтому по формуле (3) при $l=\pi$ получим:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_\pi^0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right].$$

Если $n$ четное, $n=2k$, то $\cos(1\pm n)\pi=-1$ и $a_n=\frac{4}{\pi(1-4k^2)}$.

Если $n$ нечетное, $n\neq 1$, то $a_n=0$.

При $n=1$ полученное здесь общее выражение для $a_n$ непригодно, вследствие чего коэффициент $a_1$ вычисляем отдельно, полагая $n=1$, в формуле (2)·

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,d\sin x=\frac{\sin^2 x}{\pi}\Bigg|_0^\pi=0.$$

Подставив значения коэффициентов в ряд (1), получим искомое разложение

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right],$$

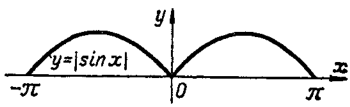
которое справедливо во всей области определения данной функции $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

При $x=0$ полученное разложение преобразуется в равенство

$$0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right],$$

откуда и определяется сумма числового ряда, указанного в условии:

$$S=\frac{1}{2}.$$



Черт. 202

Здесь, как и в решении задач 1040 (1, 2), оказалось, что для данной функции один из коэффициентов ряда нельзя было вычислить по найденному его общему выражению. Поэтому *при разложении данной функции в ряд Фурье, после нахождения общих выражений для коэффициентов* $a_n$ и $b_n$, *следует проверять, будут ли они пригодны при всех* [указанных в формулах (2)] *значениях* $n$. Для тех значений $n$, при которых эти общие выражения теряют смысл, необходимо вычислять соответствующие коэффициенты отдельно, подставляя эти исключительные значения $n$ в общие формулы Фурье.

**1041.** Разложить в ряд Фурье периодические функции:

1) $f(x)=x^2$ при $-\pi\leqslant x<\pi$; $f(x)=f(x+2\pi)$.

Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда:

*а*) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$; *б*) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$

2) $\varphi(x)=x^2$ при $0<x<\pi$; $\varphi(x)=\varphi(x+\pi)$.

3) $u=\cos\frac{x}{2}$ при $0<x\leqslant 2\pi$; $u(x)=u(x+2\pi)$.

Решение. Все заданные функции удовлетворяют условиям теоремы Дирихле, что обеспечивает возможность их разложения в ряд Фурье.

1) Данная функция четная, ее график (черт. 203) симметричен относительно оси $Oy$. Все коэффициенты $b_n=0$, а коэффициенты $a_n$ вычисляются по формулам (3), при $l=\pi$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right]\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n\neq 0.$$

(Здесь дважды применена формула интегрирования по частям.)

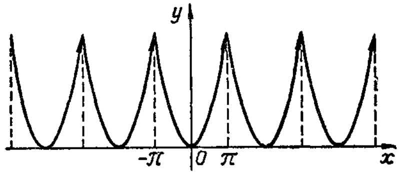
При $n=0$ (и $l=\pi$) по формуле (3) найдем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^\pi=\frac{2\pi^2}{3}.$$

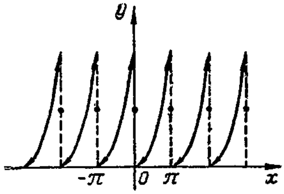
Следовательно,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots\right].$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении $x$, т. е. полученный




Черт. 203




Черт. 204

ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. *Графики данной функции и суммы ее ряда Фурье полностью совпадают.*

Полагая в полученном разложении $x=0$, найдем сумму указанного в условии числового ряда ($a$):

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12},$$

а полагая $x=\pi$, найдем сумму ряда ($б$):

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

2) Вычисляем коэффициенты Фурье данной функции по общим формулам (2), полагая $l=\frac{\pi}{2}$ (период этой функции равен $\pi$, черт. 204):

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\cos 2nx+\left(\frac{x^2}{2n}-\frac{1}{4n^3}\right)\sin 2nx\right]\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\frac{\cos 2n\pi}{n^2}=\frac{1}{n^2},\quad n\neq 0;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^\pi=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\sin 2nx-\left(\frac{x^2}{2n}-\frac{1}{4n^3}\right)\cos 2nx\right]\Bigg|_0^\pi=-\frac{\pi}{n}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (1), получим

$$\varphi(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right).$$

Разложение справедливо во всей области определения данной периодической функции — на всей числовой оси, исключая точки $x_k=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в которых функция разрывна (не определена). В точках разрыва функции полученный ряд также сходится. Согласно теореме Дирихле, в этих точках его сумма равна $\frac{\pi^2}{2}$. У графика данной функции нет точек с абсциссами $x_k$; график суммы ряда отличается от графика данной функции наличием точек $\left(x_k, \frac{\pi^2}{2}\right)$.

3) Функция $u$ нечетная (черт. 205). Поэтому коэффициенты $a_n=0$, а $b_n$ вычисляем по формуле (4):

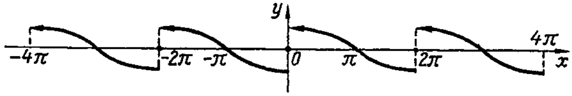
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_\pi^0=\frac{8n}{\pi(2n-1)(2n+1)}.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 2x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 3x}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n\sin nx}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots\right].$$

Полученное разложение данной функции справедливо во всей ее области непрерывности—при всех значениях $x$, кроме




**Черт. 205**

значений $x_k=2\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, которые являются точками разрыва функции. В точках $x_k$ по теореме Дирихле сумма полученного ряда равна нулю. Это же очевидно потому, что в этих точках все члены ряда обращаются в нуль. Графики суммы ряда и данной функции отличаются точками с абсциссами $x_k$. У графика данной функции ординаты этих точек равны $-1$, а у графика суммы ряда они равны 0.

**1042.** Разложить данную функцию в указанном интервале в неполные ряды Фурье, содержащие только косинусы или только синусы:

1) $\varphi(x)=\begin{cases} 0{,}3 & \text{при } 0<x<0{,}5 \\ -0{,}3 & \text{при } 0{,}5<x<1. \end{cases}$

2) $y=x\cos x$ в интервале от 0 до $\pi$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}$.

Решение. 1) а. Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы, продолжаем ее на соседний слева интервал $(-1;\ 0]$ четным образом (черт. 206, *а*).

Тогда $b_n=0$, а по формуле (3), подставляя $l=1$, $\varphi(x)=0{,}3$ в интервале $(0;\ 0{,}5)$ и $\varphi(x)=-0{,}3$ в интервале $(0{,}5;\ 1)$, найдем

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1\varphi(x)\cos n\pi x\,dx=2\left(\int_0^{0,5}0{,}3\cos n\pi x\,dx-\int_{0,5}^1 0{,}3\cos n\pi x\,dx\right)=$$

$$=0{,}6\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{0,5}-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{0,5}^1\right)=\frac{1{,}2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\qquad n\neq 0.$$

Если $n$ четное, то $a_n=0$.

Если $n$ нечетное, $n=2k-1$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то

$$a_n=\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k-1}\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}.$$

При $n=0$ по формуле (3) найдем

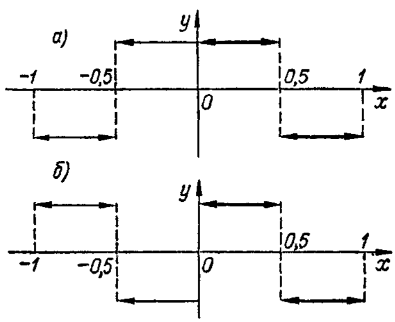
$$a_0=2\left(\int_0^{0,5} 0,3\,dx-\int_{0,5}^{1} 0,3\,dx\right)=0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, таково:

$$\varphi(x)=\frac{1,2}{\pi}\left[\frac{\cos \pi x}{1}-\frac{\cos 3\pi x}{3}+\frac{\cos 5\pi x}{5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}+\ldots\right].$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции. В интервале (0; 1) график суммы полученного ряда отличается от графика данной функции наличием точки (0,5; 0).

б. Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжаем ее на соседний слева интервал (— 1; 0] нечетным образом (черт. 206, *б*).



Черт. 206

Тогда $a_n=0$, а по формуле (4)

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 \varphi(x)\sin n\pi x\,dx=2\left(\int_0^{0,5} 0,3\sin n\pi x\,dx-\int_{0,5}^{1} 0,3\sin n\pi x\,dx\right)=$$

$$=0,6\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_{0,5}^{1}-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^{0,5}\right)=\frac{0,6}{n\pi}\left(\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}+1\right).$$

Если $n$ нечетное, то $b_n=0$.

Если $n$ четное, $n=2k$, то $b_{2k}=\dfrac{0,6(1-\cos k\pi)}{k\pi}$.

При четном $k$ получим $b_n=0$, при нечетном $k=2m-1$ $b_n=\dfrac{1,2}{(2m-1)\pi}$, $n=2k=2(2m-1)$, $m=1, 2, 3, \ldots$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1,2}{\pi}\left[\frac{\sin 2\pi x}{1}+\frac{\sin 6\pi x}{3}+\frac{\sin 10\pi x}{5}+\ldots+\frac{\sin 2(2m-1)\pi x}{2m-1}+\ldots\right].$$

Оно справедливо во всей области определения функции $\varphi(x)$.

2) а. Продолжив данную функцию четным образом (черт. 207,$a$), имеем: $b_n=0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{x\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]dx\right\}=$$

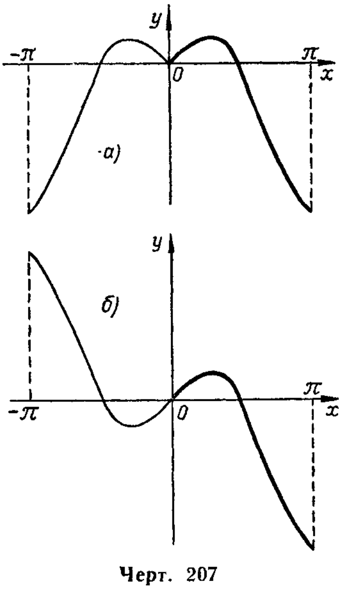
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\cos(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\Bigg|_0^\pi=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi-1}{(n+1)^2}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{(n-1)^2}\right].$$

Если $n$ четное, $n=2k$, то $\cos(n\pm1)\pi=-1$ и

$$a_n=a_{2k}=-\frac{4(4k^2+1)}{\pi(4k^2-1)^2}.$$

Если $n$ нечетное, то $\cos(n\pm1)\pi=1$ и $a_n=0$, $n\neq1$.

Коэффициент $a_1$ вычисляем отдельно, полагая $n=1$ в формуле (3):



Черт. 207

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\,dx+\int_0^\pi x\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем следующее разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы,

$$x\cos x=-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}\cos 2kx;$$

$0\leqslant x\leqslant\pi$.

Подставляя в полученное разложение $x=0$, имеем:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2},\text{ откуда следует }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}.$$

б. Продолжив данную функцию нечетным образом (черт. 207,б), имеем $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ x\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_\pi^0 + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right] dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\pi\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]\right\} = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}, \quad n \neq 1.$$

Коэффициент $b_1$ вычисляем отдельно:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x\cos x = -\frac{\sin x}{2} + 2\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2-1}\sin nx; \quad 0 \leqslant x < \pi.$$

Разложить в ряд Фурье данную функцию в указанном интервале:

**1043.** $f(x) = \pi - x$; $(0, 2\pi)$. **1044.** $\varphi(x) = x\sin x$; $[-\pi, \pi]$.

**1045.** $y = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leqslant 0 \\ x & \text{при } 0 < x < 3; \end{cases}$ пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$

Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции:

**1046.** $f(x) = |x|$ при $-1 < x \leqslant 1$; $f(x) = f(x+2)$,

**1047.** $\varphi(x) = \sin\frac{5}{6}x$ при $-\pi < x < \pi$; $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi)$,

**1048.** $y(x) = e^x$ при $-2 < x < 2$; $y(x) = y(x+4)$,

**1049.** $u = x(\pi - x)$ при $0 \leqslant x < \pi$; $u(x) = u(x+\pi)$

и построить графики каждой данной функции и суммы ее ряда Фурье.

Разложить данную функцию в указанном интервале в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы.

**1050.** $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда

$$-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$$

**1051.** $\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 \text{ при } 1<x\leqslant\pi;\end{cases}$ пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}$.

**1052.** Разложить функцию $y=1$ в интервале $(0, l)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы.

**1053.** Разложить в неполные ряды Фурье: а) по косинусам и б) по синусам функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\leqslant x<1\\ 2-x \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

## § 8. Интеграл Фурье

*Если функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на всей числовой оси*, т. е. если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, *и если она удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале, то ее можно представить интегралом Фурье*:

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}[A\cos\alpha x+B\sin\alpha x]\,d\alpha, \tag{1}$$

$$\text{где } A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Эта интегральная формула Фурье получается из ряда Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l, l)$ при $l\to+\infty$.

Интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции всюду, кроме, быть может, точек разрыва $x_k$, где (как и ряд Фурье) он дает значение, равное

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0}f(x)+\lim_{x\to x_k+0}f(x)\right].$$

В отличие от ряда Фурье, который дает разложение функции на гармонические колебания с дискретно меняющейся частотой $\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, интеграл Фурье дает разложение функции на гармонические колебания с непрерывно меняющейся от 0 до $+\infty$ частотой $\alpha$.

Для четной или нечетной функции интеграл Фурье упрощается: Если $f(-x)=f(x)$, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt. \tag{2}$$

Если $f(-x)=-f(x)$, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{3}$$

Если функция $f(x)$ задана только в интервале $[0, +\infty)$, то, по-разному продолжая ее в соседний слева интервал $(-\infty, 0)$, можно затем представить ее различными интегралами Фурье. Обычно такую функцию представляют интегралом Фурье или по формуле (2) или по формуле (3); по формуле (2) при четном, а по формуле (3) при нечетном продолжении этой функции в интервал $(-\infty, 0)$.

С помощью формул Эйлера (§ 6) из формулы (1) получается комплексная форма интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt. \tag{4}$$

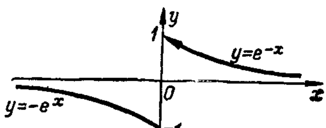
**1054.** Данную функцию представить в виде интеграла Фурье:

1) $\varphi(x)=\begin{cases}-e^{x} & \text{при } x\leqslant 0\\ e^{-x} & \text{при } x>0.\end{cases}$ 2) $p(x)=\begin{cases}2 & \text{при } 0<x<3\\ 1 & \text{при } x=3\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$

3) $q(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ \pi x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$

Решение. 1) Данная функция нечетная (черт. 208). Поэтому согласно формуле (3)

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt.$$




Черт. 208

Внутренний интеграл $I$ вычисляем отдельно по формуле интегрирования по частям (см. задачу 484):

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^{\beta}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\frac{\lim e^{-t}(\sin\alpha t+\alpha\cos\alpha t)}{1+\alpha^2}\Bigg|_{t=\beta}^{t=0}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\,d\alpha}{1+\alpha^2},\quad x\neq 0.$$

Здесь $x\neq 0$, ибо при $x=0$ полученный интеграл Фурье равен не $\varphi(0)=-1$, а нулю — полусумме пределов данной функции при $x\to -0$ и при $x\to +0$.

2) Функция $p(x)$ определена только в интервале $(0, +\infty)$. Поэтому ее можно представить различными интегралами Фурье.

При четном продолжении данной функции в интервал $(-\infty, 0]$ по формуле (2) получим:

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int\limits_{0}^{3}2\cos\alpha t\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\sin 3\alpha\,d\alpha}{\alpha}.$$

При нечетном продолжении данной функции в интервал $(-\infty, 0]$ по формуле (3) получим:

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_{0}^{3}2\sin\alpha t\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(1-\cos 3\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha}{\alpha}.$$

Оба полученных интеграла Фурье представляют данную функцию во всей области ее определения, включая и точку $x=3$, в которой функция разрывна, ибо в этой точке значение каждого из полученных интегралов:

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 3-0}p(x)+\lim_{x\to 3+0}p(x)\right]=\frac{1}{2}(2+0)=1$$

и значение данной функции $p(3)=1$ — одинаковы.

3) Применяем формулу (1), вычисляем коэффициенты $A$ и $B$:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot\cos\alpha t\,dt+\pi\int\limits_{0}^{1}t\cos\alpha t\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{+\infty}0\cdot\cos\alpha t\,dt\right]=\frac{t\sin\alpha t}{\alpha}+\frac{\cos\alpha t}{\alpha^2}\Bigg|_{t=0}^{t=1}=\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2};$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q(t)\sin\alpha t\,dt=\int\limits_{0}^{1}t\sin\alpha t\,dt=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}.$$

Подставляя в формулу (1), получим

$$q(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1)\cos\alpha x+(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\sin\alpha x}{\alpha^2}\,d\alpha.$$

Это равенство справедливо, т. е. полученный интеграл сходится к функции $q(x)$, на всей числовой оси, кроме точки $x=1$, в которой эта функция разрывна. В точке $x=1$ интеграл равен $\frac{\pi}{2}$, тогда как $q(1)=\pi$.

Решение будет короче, если воспользоваться комплексной формой (4) интеграла Фурье:

$$q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\,e^{i\alpha t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int_{0}^{1} te^{i\alpha t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{te^{i\alpha t}}{i\alpha}-\frac{e^{i\alpha t}}{i^2\alpha^2}\right)\Bigg|_0^1 e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha}(1-i\alpha)-1}{\alpha^2}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha.$$

Разумеется, это представление данной функции интегралом Фурье в комплексной форме и полученное выше представление ее интегралом Фурье в обычной форме отличаются только по форме и могут быть преобразованы одно в другое с помощью формул Эйлера.

Построить графики данных функций и представить их интегралами Фурье:

**1055.** $y=\begin{cases}\sin x \text{ при } |x|<\pi\\ 0 \text{ при } |x|\geqslant\pi.\end{cases}$ **1056.** $z=\begin{cases}\cos x \text{ при } 0<x\leqslant\pi\\ 0 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$

**1057.** $u=\begin{cases}1+x \text{ при } -1<x\leqslant 0\\ 1-x \text{ при } 0<x<1\\ 0 \text{ при } |x|\geqslant 1.\end{cases}$ **1058.** $v=\begin{cases}0 \text{ при } x\leqslant 0\\ \sin x \text{ при } 0<x<\pi\\ 0 \text{ при } x\geqslant\pi.\end{cases}$

*ГЛАВА X*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Главная цель инженера-исследователя, изучающего какой-либо физический или технический процесс, заключается в выявлении его закономерности, в получении аналитического выражения функциональной зависимости между переменными параметрами этого процесса.

Большинство таких задач на отыскание связи между переменными сводится к решению уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Огромное значение этих задач как для практики, так и в теории обусловливает особо важное значение этого раздела математического анализа.

## § 1. Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частные интегралы

*Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.*

Если неизвестная функция зависит только от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, а если она зависит от нескольких аргументов и дифференциальное уравнение содержит ее частные производные по этим аргументам, то оно называется уравнением **с частными производными**. Уравнения с частными производными рассматриваются лишь в последнем параграфе этой главы, а все остальное ее содержание посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям.

*Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.*

Так, уравнение $y''+3xy'-x^3y^2=0$ — второго порядка,

$$\frac{d^3s}{dt^3}-ts^2\frac{ds}{dt}=5 \text{ — третьего порядка,}$$

$$y'+ye^x=\operatorname{tg}3x \text{ — первого порядка.}$$

*Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т. е. обращающая его в тождество, называется интегралом (или решением) этого уравнения.*

Например, функция $y=2x$ является интегралом уравнения $x^2y''-2xy'+2y=0$, ибо, найдя производные этой функции $y'=2$, $y''=0$ и подставляя в данное уравнение $y$, $y'$, $y''$, получим тождество: $-4x+4x=0$.

*Интеграл дифференциального уравнения называется общим, если он содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, а функции, получаемые из общего интеграла при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными интегралами этого уравнения.*

Так, функция $y=\frac{C_1}{x}+C_2$, удовлетворяющая уравнению 2-го порядка $xy''+2y'=0$ (в чем можно убедиться путем подстановки) и содержащая две произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, является общим интегралом этого уравнения, а функции $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{3}{x}+5$, $y=-1$ (получающиеся из общего интеграла при различных значениях $C_1$ и $C_2$) являются его частными интегралами.

*Геометрически каждому частному интегралу дифференциального уравнения соответствует плоская линия, его график, которая называется интегральной кривой этого уравнения, а общему интегралу соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.*

Отыскание частного интеграла дифференциального уравнения $n$-го порядка ($n=1, 2, 3, \ldots$), удовлетворяющего $n$ начальным условиям вида

$$y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y_0';\ y''(x_0)=y_0'';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

называется з а д а ч е й К о ш и.

В указанных $n$ начальных условиях Коши задаются значения функции $y$ и ее производных $y'$, $y''$, ..., $y^{n-1}$ при некотором заданном значении аргумента $x=x_0$. По этим $n$ начальным условиям определяются значения всех $n$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, входящих в общий интеграл уравнения $n$-го порядка.

**1059.** Проверить, что данная функция является интегралом (решением) данного дифференциального уравнения:

1) $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$.

2) $\ln x\ln y=c$, $y\ln y\,dx+x\ln x\,dy=0$.

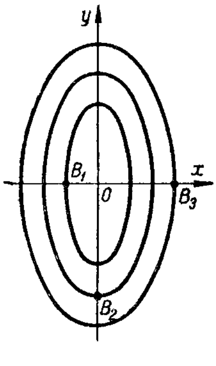
3) $s=-t-\frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{d^2s}{dt^2}+\operatorname{tg}t\,\frac{ds}{dt}=\sin 2t$.

Решение. 1) Найдем производную данной функции $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подставив в данное уравнение $y=\sqrt{x}$ и $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, убедимся, что оно обращается в тождество: $2\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=1;\ 1=1.$

2) Дифференцируем данную неявную функцию: $\ln y\frac{dx}{x}+\ln x\frac{dy}{y}=0$ и находим $dy=-\frac{y\ln y}{x\ln x}dx$. Подставляя это выражение $dy$ в данное уравнение, получим тождество: $y\ln y\,dx+x\ln x\left(-\frac{y\ln y}{x\ln x}dx\right)=0;\ 0=0.$

3) Дважды дифференцируя данную функцию, найдем $\frac{ds}{dt}=-1-\cos 2t$, $\frac{d^2s}{dt^2}=2\sin 2t$. Подставив эти выражения для первой и второй производных в данное уравнение: $2\sin 2t+(-1-\cos 2t)\operatorname{tg} t=\sin 2t$; $\sin 2t-2\cos^2 t\operatorname{tg} t=0$; $\sin 2t-2\cos t\sin t=0$; $0=0$ убеждаемся, что оно удовлетворяется, т. е. обращается в тождество.

**1060.** Зная общий интеграл $4x^2+y^2=C^2$ некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка, найти и построить его интегральные кривые (частные интегралы), проходящие через точки $B_1$ $(-1;\ 0)$, $B_2(0;-3)$ и $B_3(2;\ 0)$.



Черт. 209

Решение. Общий интеграл $F(x, y, C)=0$ уравнения 1-го порядка $f(x,\ y,\ y')=0$ геометрически определяет семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра $C$. Подставляя в общий интеграл координаты какой-либо точки $P$, найдем значение $C$, при котором из общего интеграла получается уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $P$.

Для точки $B_1$: $4=C^2$; $4x^2+y^2=4$.

Для точки $B_2$: $9=C^2$; $4x^2+y^2=9$.

Для точки $B_3$: $16=C^2$; $4x^2+y^2=16$.

По найденным уравнениям интегральных кривых, проходящих через точки $B_1$, $B_2$, $B_3$, строим эти кривые (черт. 209). Они представляют концентрические эллипсы, оси которых расположены на осях координат.

Проверить, что данная функция является интегралом данного уравнения:

**1061.** $y=Ce^{-2x}$; $y'+2y=0$.

**1062.** $y=C_1x+C_2x^2$; $x^2y''-2xy'+2y=0$.

**1063.** $x^2+2xy=C$; $(x+y)\,dx+x\,dy=0$.

**1064.** $s=t^2\ln t+C_1t^2+C_2t+C_3$; $t\frac{d^3s}{dt^3}=2$.

**1065*.** $y-x+C_1\ln y=C_2$; $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

## § 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции $P$ и $Q$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)\,dx+\varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dy=0. \qquad (*)$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=0.$$

После разделения переменных, когда каждый член уравнения будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=C.\ *$$

**1066.** Найти общие интегралы следующих уравнений:

1) $(x+1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0$. 2) $\sec^2 x\sec y\,dx=-\operatorname{ctg} x\sin y\,dy$.

3) $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})\,y'-y=0$. 4) $2^{x+y}+3^{x-2y}\,y'=0$.

Решение. 1) Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3(y-2)^2$:

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0.$$

Почленно интегрируя, получим искомый общий интеграл:

$$\int(y-2)^{-2}\,d(y-2)-\int(x+1)^{-3}\,d(x+1)=C;$$

$$-\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2(x+1)^2}=C.$$

2) Для разделения переменных делим все члены уравнения на $\sec y\operatorname{ctg} x$:

$$\sec^2 x\operatorname{tg} x\,dx+\sin y\cos y\,dy=0.$$

Интегрируя, получим

$$\int\operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x+\int\sin y\,d\sin y=c;\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 y=\frac{1}{2}C;$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 y=C.$$

* Если $\varphi_1(x_1)=0$ (или $f_2(y_1)=0$), то $x=x_1$ $(y=y_1)$ также будет интегралом уравнения (*), который может быть потерян при разделении переменных. В дальнейшем исследование таких интегралов опускается.

3) Выразим производную через дифференциалы переменных: $y'=\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на $dx$ и разложим коэффициент при $dy$ на множители:

$$(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}\quad dy-y\,dx=0.$$

Далее разделяем переменные:

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}\,dy-\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=0$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int\left(y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy-\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=C;\ 2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C.$$

4) Умножим обе части уравнения на $dx$ и разложим коэффициенты при $dx$ и $dy$ на множители:

$$2^x2^y\,dx+3^x3^{-2y}\,dy=0.$$

Разделяем переменные, умножая на $2^{-y}\ 3^{-x}$:

$$2^x3^{-x}\,dx+3^{-2y}\,2^{-y}\,dy=0,$$

и интегрируем:

$$\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+\int 18^{-y}\,dy=C;\qquad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}-\frac{18^{-y}}{\ln 18}=C.$$

**1067.** Найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий указанному начальному условию:

1) $y\,dx+\operatorname{ctg}x\,dy=0;\qquad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1.$

2) $s=s'\cos^2 t\ln s;\ s(\pi)=1.$

Решение. 1) Разделяя переменные и интегрируя, находим сначала общий интеграл данного уравнения:

$$\operatorname{tg}x\,dx+\frac{dy}{y}=0;\quad -\ln|\cos x|+\ln|y|=\ln C;$$

$$|y|=C|\cos x|;\quad y=\pm C\cos x=C_1\cos x.$$

Затем, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных $\left(x=\frac{\pi}{3},\ y=-1\right)$ и определяем соответствующее значение произвольной постоянной: $-1=C_1\cos\frac{\pi}{3}$; $C_1=-2.$

При этом значении $C_1$ из общего интеграла получаем искомый частный интеграл, удовлетворяющий заданному начальному условию, $y=-2\cos x$.

2) Умножая на $\frac{\sec^2 t}{s}dt$, разделяем переменные $\sec^2 t\,dt = \frac{\ln s}{s}ds$ и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int d(\operatorname{tg} t)=\int \ln s\,d\ln s+C;\quad \operatorname{tg} t=\frac{1}{2}\ln^2 s+C.$$

Подставляя начальные значения $t=\pi$, $s=1$, определяем значение $C$:

$$\operatorname{tg}\pi=\frac{1}{2}\ln 1+C;\quad C=0.$$

Следовательно, искомый частный интеграл $\ln^2 s-2\operatorname{tg} t=0$.

Решить следующие дифференциальные уравнения (найти их общие интегралы):

**1068.** $(y+xy)\,dx+(x-xy)\,dy=0$. **1069.** $yy'+x=1$.

**1070.** $\sin\alpha\cos\beta\,d\alpha=\cos\alpha\sin\beta\,d\beta$. **1071.** $1+(1+y')e^y=0$.

**1072.** $3e^x\sin y\,dx=(e^x-1)\sec y\,dy$. **1073*.** $x^2(2yy'-1)=1$.

Найти частные интегралы следующих уравнений при указанных начальных условиях:

**1074.** $y^2+x^2y'=0$; $y(-1)=1$. **1075.** $2(1+e^x)yy'=e^x$; $y(0)=0$. **1076.** $(1+x^2)y^3\,dx-(y^2-1)x^3\,dy=0$; $y(1)=-1$.

## § 3. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $y'=f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, а следовательно, и решается посредством замены функции $y$ (или $x$) новой функцией $u$ по формуле $y=ux$ (или $x=uy$).

**1077.** Проинтегрировать следующие уравнения:

1) $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$; 2) $y-xy'=y\ln\frac{x}{y}$;

3) $x\,dy-y\,dx=y\,dy$ при условии $y(-1)=1$.

Решение. 1) Разрешая данное уравнение относительно производной

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

устанавливаем, что она является функцией только отношения переменных $\frac{y}{x}$, т. е. устанавливаем, что данное уравнение является однородным.

Далее вводим новую функцию $u$, полагая $y=ux$; при этом $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u} \quad \text{или} \quad x\,du=\frac{1-u^2}{2u}\,dx.$$

Разделим переменные: $\frac{2u\,du}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем

$$-\ln|1-u^2|=\ln|x|-\ln C \quad \text{или} \quad x(1-u^2)=\pm C=C_1.$$

Исключая вспомогательную функцию $u$ $\left(u=\frac{y}{x}\right)$, окончательно получим $y^2=x^2-C_1x$.

2) Вначале устанавливаем, что данное уравнение — однородное:

$$y'=\frac{y}{x}\left(1-\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

затем заменяем функцию $y$. Полагая $y=ux$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u+x\frac{du}{dx}=u(1+\ln u) \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=u\ln u.$$

Умножая обе его части на $\frac{dx}{xu\ln u}$, разделим переменные

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\int\frac{d(\ln u)}{\ln u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C; \quad \ln|\ln u|=\ln|x|+\ln C.$$

Потенцируя и исключая вспомогательную переменную $u$, найдем искомый общий интеграл $|\ln u|=C|x|$; $u=e^{c_1x}$; $y=xe^{c_1x}$.

3) Выяснив, что уравнение однородное:

$$y'=\frac{y}{x-y}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

и полагая $y=ux$, получим уравнение

$$u+xu'=\frac{u}{1-u} \text{ или } x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C$$

или

$$\frac{1}{u}+\ln|xu|=C.$$

Возвращаясь к переменной $y$, находим общий интеграл

$$x=y(C-\ln|y|).$$

Подставив заданные значения переменных: $y=1$ при $x=-1$, находим, что $C=-1$.

Следовательно, искомый частный интеграл уравнения будет

$$x=-y(1+\ln|y|).$$

Решить следующие уравнения:

**1078.** $y-xy'=x+yy'$. **1079.** $y\,dy+(x-2y)\,dx=0$.

**1080.** $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$. **1081.** $y=x\,(y'-\sqrt[x]{e^y})$.

**1082.** $(y^2-3x^2)\,dy+2xy\,dx=0$, при условии $y(1)=-2$.

**1083*.** $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$ при условии $y(1)=\pi$.

## § 4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ известные функции от $x$, линейное (первой степени) относительно функции $y$ и ее производной $y'$ называется линейным.

Посредством замены функции $y$ произведением двух вспомогательных функций $y=uv$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение Бернулли $y'+P(x)y=y^nQ(x)$, отличающееся от линейного уравнения тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции $y$, решается так же, как и линейное. Посредством подстановки $y=uv$ оно также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

**1084.** Решить уравнения:

1) $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$; 2) $x^2y^2y'+xy^3=1$;

3) $y\,dx-(3x+1+\ln y)\,dy=0$ при условии $y\left(-\frac{1}{3}\right)=1$.

Решение: 1) Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$u'v+v'u-uv\operatorname{ctg}x=\sin x \text{ или } u'v+u(v'-v\operatorname{ctg}x)=\sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций $u$ или $v$ можно взять произвольно, то выберем в качестве $v$ какой-либо частный интеграл уравнения $v'-v\operatorname{ctg}x=0$.

Тогда для отыскания $u$ получим уравнение $u'v=\sin x$.

Решая первое из этих уравнений, найдем $v$; разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v}=\operatorname{ctg}x\,dx;\ \ln v=\ln\sin x;\ v=\sin x.$$

Подставляя $v$ во второе уравнение и решая его, найдем $u$ как общий интеграл этого уравнения:

$$u'\sin x=\sin x;\ du=dx;\ u=x+C.$$

Зная $u$ и $v$, находим искомую функцию $y$:

$$y=uv=(x+C)\sin x.$$

2) Разделив обе части уравнения на $x^2y^2$:

$$y'+\frac{y}{x}=y^{-2}\cdot\frac{1}{x^2},$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли, где $P=x^{-1}$, $Q=x^{-2}$.

Заменяя функцию $y$ по формуле $y=uv$, имеем $y'=u'v+v'u$,

$$u'v+v'u+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2u^2v^2}$$

или

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Отсюда, как и в решении предыдущей задачи, получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1)\ v'+\frac{v}{x}=0 \text{ и } 2)\ u'v=\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Решая первое уравнение, находим $v$ как простейший частный интеграл этого уравнения:

$$\frac{dv}{v}+\frac{dx}{x}=0;\ \ln v+\ln x=0;\ vx=1;\ v=\frac{1}{x}.$$

Подставляя $v$ во второе уравнение и решая его, находим $u$ как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{u'}{x}=\frac{1}{u^2};\ u^2du=x\,dx;\ \frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{3};\ u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}.$$

Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения

$$y=uv=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}.$$

3) Преобразовав данное уравнение к виду

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3x}{y}=\frac{1+\ln y}{y} \text{ или } \frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y),$$

выясняем, что оно является линейным, если рассматривать $x$ как функцию от $y$.

Далее, заменяя функцию $x$ по формуле $x=uv$, где $u$ и $v$ функции от $y$, имеем $\frac{dx}{dy}=v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}$ и

$$v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}-\frac{3uv}{y}=\frac{1+\ln y}{y}$$

или

$$v\frac{du}{dy}+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{3v}{y}\right)=\frac{1+\ln y}{y}.$$

Отсюда для нахождения $u$ и $v$ имеем два уравнения:

$$1)\ \frac{dv}{dy}-\frac{3v}{y}=0 \text{ и } 2)\ v\frac{du}{dy}=\frac{1+\ln y}{y}.$$

Из первого уравнения находим $v$:

$$\frac{dv}{v}=\frac{3\,dy}{y};\ \ln v=3\ln y;\ v=y^3.$$

Подставляем $v$ во второе уравнение и, решая его, находим $u$:

$$y^3\frac{du}{dy}=\frac{1+\ln y}{y};\quad du=\frac{1+\ln y}{y^4}dy;$$

$$u=\int y^{-4}\,dy+\int y^{-4}\ln y\,dy+C=\frac{y^{-3}}{-3}+I+C.$$

Второй интеграл, обозначенный $I$, находим отдельно по формуле интегрирования по частям. Полагая $u_1=\ln y$, $dv_1=y^{-4}dy$, получим $du_1=\frac{dy}{y}$, $v_1=\frac{y^{-3}}{-3}$ и

$$I=\int u_1\,dv_1=u_1v_1-\int v_1\,du_1=-\frac{\ln y}{3y^3}+\frac{1}{3}\int y^{-4}dy=$$
$$=-\frac{\ln y}{3y^3}-\frac{1}{9y^3}.$$

Следовательно, $u=-\frac{1}{3y^3}-\frac{\ln y}{3y^3}-\frac{1}{9y^3}+C.$

Умножая $u$ на $v$, получим общий интеграл данного уравнения:

$$x=Cy^3-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\ln y.$$

Подставляя сюда заданные значения переменных $x=-\frac{1}{3}$ $y=1$, находим значение произвольной постоянной $C=\frac{1}{9}$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет

$$x=\frac{y^3-4}{9}-\frac{1}{3}\ln y.$$

Решить следующие уравнения:

**1085.** $y'-y=e^x$. **1086.** $(x^2+1)y'+4xy=3$.

**1087.** $\cos y\,dx=(x+2\cos y)\sin y\,dy$. **1088.** $y'+y=x\sqrt{y}$.

**1089.** $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$ при условии $y(2)=0$.

**1090*.** $y\,dx+2x\,dy=2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$ при условии $y(0)=\pi$.

### § 5. Уравнения в полных дифференциалах

Если в уравнении 1-го порядка $P\,dx+Q\,dy=0$ коэффициенты $P$ и $Q$ удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$*. Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Записав такое уравнение в виде $du=0$ и найдя первообразную функцию $u(x, y)$ по правилу, указанному в гл. VII, § 10, получим общий интеграл этого уравнения, полагая $u(x, y)=C$.

**1091.** Решить уравнения:

1) $(2y-3)\,dx+(2x+3y^2)\,dy=0$;

2) $(x+\ln|y|)\,dx+\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$.

Решение. 1) Вначале убеждаемся, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах:

$$P'_y=(2y-3)'_y=2;\quad Q'_x=(2x+3y^2)'_x=2;\quad P'_y=Q'_x.$$

Затем находим неопределенные интегралы:

$\int P\,dx=\int(2y-3)\,dx=2xy-3x+\varphi(y)$, считая $y$ постоянной,

$\int Q\,dy=\int(2x+3y^2)\,dy=2xy+y^3+\psi(x)$, считая $x$ постоянной.

Беря все известные члены из первого результата и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от $y$, из второго результата, получим функцию $u(x, y)=2xy-3x+y^3$, полным дифференциалом которой является левая часть данного дифференциального уравнения, а приравняв ее произвольной постоянной, получим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$2xy-3x+y^3=C.$$

---

* См. гл. VII, § 8.

2) Проверив, что в данном уравнении левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$(x+\ln|y|)'_y = \frac{1}{y} = \left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)'_x,$$

затем находим эту функцию, интегрируя каждый ее частный дифференциал отдельно:

$$u = \int (x+\ln|y|)\,dx = \frac{x^2}{2} + x\ln|y| + \varphi(y);$$

$$u = \int \left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right) dy = y + x\ln|y| - \cos y + \psi(x).$$

Далее составляем окончательное выражение функции $u$ (дописываем к известным членам первого выражения недостающие члены, зависящие только от $y$, из второго выражения) и, приравняв его произвольной постоянной $C$, находим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{x^2}{2} + x\ln|y| + y - \cos y = C.$$

Проверить, что следующие уравнения 1-го порядка суть уравнения в полных дифференциалах и решить их.

**1092.** $(3x^2y^2+7)\,dx + 2x^3y\,dy = 0.$

**1093.** $(e^y + ye^x + 3)\,dx = (2 - xe^y - e^x)\,dy.$

**1094.** $\sin(x+y)\,dx + x\cos(x+y)\,(dx+dy) = 0.$

**1095.** $(2x + ye^{xy})\,dx + (1 + xe^{xy})\,dy = 0$ при условии $y(0)=1.$

**1096*.** $\left(\frac{y^2+\sin 2x}{y}+1\right)dx - \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - x\right)dy = 0.$

## § 6. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1) Уравнение $n$-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием.

Умножая обе его части на $dx$ и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка: $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1$.

Снова умножая обе части на $dx$ и интегрируя, получаем уравнение $(n-2)$-го порядка: $y^{(n-2)} = \int \varphi_1(x)\,dx + \int C_1\,dx + C_2 = \varphi_2(x) + C_1x + C_2$ и т. д.

После $n$-кратного интегрирования получаем общий интеграл $y$ этого уравнения в виде явной функции от $x$ и $n$ произвольных постоянных: $y = \varphi_n(x) + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n$.

2) Уравнения 2-го порядка: А) $f(x, y', y'')=0$ и Б) $F(y, y', y'')=0$, не содержащие явно функции $y$ или аргумента $x$, преобразуются в уравнения 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$ $\left(\text{откуда } y''=\frac{dp}{dx}\text{—для уравнения А или } y''=p\frac{dp}{dy}\text{—для уравнения Б}\right)$.

**1097.** Решить уравнения:

1) $y'''=60x^2$. 2) $(x-3)y''+y'=0$.

3) $yy''-(y')^2=y^3$, если $y(0)=-\frac{1}{2}$, $y'(0)=0$.

Решение. 1) Умножая обе части данного уравнения 3-го порядка на $dx$ и затем интегрируя, получаем уравнение 2-го порядка: $y'''\,dx=60x^2\,dx$; $y''=20x^3+C_1$.

Далее тем же способом получаем уравнение 1-го порядка и затем искомую функцию—общий интеграл данного уравнения:

$$y''\,dx=20x^3\,dx+C_1\,dx; \quad y'=5x^4+C_1x+C_2;$$

$$y'\,dx=(5x^4+C_1x+C_2)\,dx; \quad y=x^5+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2) Данное уравнение 2-го порядка не содержит явно функции $y$. Полагая $y'=p$, получим $y''=\frac{dp}{dx}$ и после подстановки данное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$(x-3)\frac{dp}{dx}+p=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\frac{dp}{p}+\frac{dx}{x-3}=0$; $\ln|p|+\ln|x-3|=\ln C$; $|p(x-3)|=C$; $p(x-3)=\pm C=C_1$.

Заменяя вспомогательную переменную $p$ через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение $(x-3)\frac{dy}{dx}=C_1$, решая которое найдем искомый общий интеграл:

$$dy=\frac{C_1\,dx}{x-3}; \quad y=C_1\ln|x-3|+C_2.$$

3) Это неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно аргумента $x$. Положим $y'=p$; тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$ и данное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка:

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^3 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=\frac{y^2}{p},$$

которое является уравнением Бернулли, если $p$ рассматривать как функцию от $y$.

Заменяя функцию по формуле $p=uv$, имеем

$$u\frac{dv}{dy}+v\frac{du}{dy}-\frac{uv}{y}=\frac{y^2}{uv} \quad \text{или} \quad u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}\right)=\frac{y^2}{uv}.$$

Отсюда для нахождения $u$ и $v$ получим два уравнения:

$$\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=0 \quad \text{и} \quad u\frac{dv}{dy}=\frac{y^2}{uv}.$$

Из первого уравнения находим $u$, как его простейший частный интеграл:

$$\frac{du}{u}-\frac{dy}{y}=0; \quad \ln u=\ln y; \quad u=y.$$

Подставляя $u$ во второе уравнение, находим $v$, как его общий интеграл:

$$y\frac{dv}{dy}=\frac{y^2}{yv}; \quad v\,dv=dy; \quad \frac{v^2}{2}=y+C_1; \quad v=\pm\sqrt{2(y+C_1)}.$$

Зная $u$ и $v$, находим $p=uv=\pm y\sqrt{2(y+C_1)}$.

Заменяя $p$ через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{2(y+C_1)}.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение целесообразно определить значение постоянной $C_1$, используя заданные значения $y=-\frac{1}{2}$, $y'=0$:

$$0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}+C_1\right)}; \quad C_1=\frac{1}{2}.$$

Подставляя значение $C_1$ в последнее уравнение, разделяя в нем переменные и интегрируя, найдем

$$\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=\pm dx; \quad \pm x+C_2=\int\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=I.$$

Для отыскания интеграла $I$ полагаем $\sqrt{2y+1}=z$, тогда $2y+1=z^2$, $dy=z\,dz$,

$$I=2\int\frac{dz}{z^2-1}=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\ln\frac{|\sqrt{2y+1}-1|}{\sqrt{2y+1}+1}.$$

Следовательно,

$$C_2\pm x=\ln\frac{|1-\sqrt{2y+1}|}{1+\sqrt{2y+1}}.$$

Наконец, используя заданные значения $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, определяем значение постоянной $C_2=\ln|-1|=0$ и получаем искомый частный интеграл

$$x = \pm \ln \frac{|1 - \sqrt{2y+1}|}{1 + \sqrt{2y+1}}.$$

Как показано в решении этой задачи, *при отыскании частных интегралов уравнений высших порядков* (указанных типов) *нет необходимости сначала находить общий интеграл, а лишь затем определять значения всех постоянных.* Можно, и лучше, определять значение каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

Решить уравнения:

**1098.** $y''' = e^{2x}$. **1099.** $y'' = x \sin x$.

**1100.** $x(y'' + 1) + y' = 0$. **1101.** $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$.

**1102.** $y'' + ay = b$. **1103*.** $yy'' - (y')^2 = y^4$.

В задачах 1104—1106 найти частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям:

**1104.** $y'' = 3x^2$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

**1105.** $(y''x - y')y' = x^3$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

**1106*.** $2y(y')^3 + y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

## § 7. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением называется уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (1)$$

все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — известные функции от аргумента $x$ или постоянные.

*Общий интеграл линейного однородного уравнения n-го порядка* (1) *имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — *линейно независимые частные интегралы этого уравнения.*

Если все коэффициенты $p_i$ линейного однородного уравнения (1) постоянны, то его общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_{n-1} r + p_n = 0, \qquad (2)$$

которое получается из этого уравнения, если сохраняя в нем все коэффициенты $p_i$, заменить функцию $y$ единицей, а все ее производные соответствующими степенями $r$. При этом:

1) если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения (2) действительны и различны (однократны), то общий

интеграл уравнения (1) выражается формулой

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx}; \tag{3}$$

2) если характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексных сопряженных корней $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то в формуле (3) соответствующая пара членов заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x);$$

3) если действительный корень $r_1$ уравнения (2) имеет кратность $k\,(r_1=r_2=\ldots=r_k)$, то соответствующие $k$ членов в формуле (3) заменяются слагаемым

$$e^{r_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1});$$

4) если пара комплексных сопряженных корней $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ уравнения (2) имеет кратность $k$, то соответствующие $k$ пар членов в формуле (3) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+$$
$$+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x].$$

**1107.** Решить уравнения:

1) $y''-5y'-6y=0$; 2) $y'''-6y''+13y'=0$;

3) $\frac{d^2S}{dt^2}+4\frac{dS}{dt}+4S=0$; 4) $\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$;

5) $y^{(4)}+13y^{(2)}+36y=0$; 6) $y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)}=0$.

Решение. 1) Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию $y$ единицей, а ее производные соответствующими степенями $r$, напишем его характеристическое уравнение: $r^2-5r-6=0$.

Корни этого уравнения $r_1=6$, $r_2=-1$ действительны и различны. Поэтому, согласно правилу 1, искомый общий интеграл данного уравнения будет $y=C_1e^{6x}+C_2e^{-x}$.

2) По указанному правилу составляем характеристическое уравнение: $r^3-6r^2+13r=0$. Оно имеет один действительный однократный корень $r_1=0$ и пару комплексных сопряженных корней $r_{2,3}=3\pm 2i$. Согласно правилам 1 и 2 общий интеграл данного уравнения $y=C_1+e^{3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

3) Написав характеристическое уравнение $r^2+4r+4=0$, находим, что оно имеет равные действительные корни $r_1=r_2=-2$. Согласно правилу 3, общий интеграл данного уравнения $S=e^{-2t}(C_1+C_2t)$.

4) Характеристическое уравнение $r^4-1=0$ данного дифференциального уравнения $y^{(4)}-y=0$ имеет корни $r_1=-1$, $r_2=1$, $r_{3,4}=\pm i$. Поэтому, согласно правилам 1 и 2, искомый общий интеграл $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

5) Дифференциальному уравнению $y^{(4)}+13y^{(2)}+36y=0$ соответствует характеристическое уравнение $r^4+13r^2+36=0$ или

$(r^2+4)(r^2+9)=0$. Оно имеет две пары мнимых сопряженных корней $r_{1,2}=\pm 2i$, $r_{3,4}=\pm 3i$. Согласно правилу 2, общий интеграл данного уравнения $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3\cos 3x+$ $+C_4\sin 3x$.

6) Дифференциальному уравнению $y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)}=0$ соответствует характеристическое уравнение $r^7+2r^5+r^3=0$ или $r^3(r^2+1)^2=0$. Оно имеет трехкратный действительный корень $r=0$ $(r_1=r_2=r_3=0)$ и пару двукратных мнимых сопряженных корней $r=\pm i$ $(r_4=r_5=i, r_6=r_7=-i)$. Согласно правилам 3 и 4, общий интеграл этого уравнения $y=C_1+C_2x+C_3x^2+(C_4+$ $+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x$.

**1108.** Найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий указанным начальным условиям:

1) $y''+4y'+5y=0$; $y(0)=-3$, $y'(0)=0$.

2) $y'''+3y''+3y'+y=0$; $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$.

Решение. 1) Вначале находим общий интеграл данного уравнения. Его характеристическое уравнение $r^2+4r+5=0$ имеет корни $r_{1,2}=-2\pm i$. Поэтому, согласно правилу 2, общий интеграл $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Далее, используя начальные условия, определяем значения постоянных $C_1$ и $C_2$. Подставляя в общий интеграл заданные значения $x=0$, $y=-3$ (первое начальное условие), получим

$$-3=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0) \text{ или } -3=C_1.$$

Дифференцируя общий интеграл (как произведение)

$$y'=e^{-2x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x]$$

и подставляя в результат заданные значения $x=0$, $y'=0$ (второе начальное условие), получим второе уравнение с неизвестными $C_1$ и $C_2$:

$$0=e^0[(C_2-2C_1)\cos 0-(C_1+2C_2)\sin 0] \text{ или } C_2-2C_1=0.$$

Решая полученные уравнения, как систему, найдем, $C_1=-3$, $C_2=-6$.

Подставляя значения $C_1$ и $C_2$ в общий интеграл, получим искомый частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий данным начальным условиям: $y=-3e^{-2x}(\cos x+2\sin x)$.

2) Характеристическое уравнение $r^3+3r^2+3r+1=0$ или $(r+1)^3=0$ данного дифференциального уравнения имеет трехкратный действительный корень $r=-1$ $(r_1=r_2=r_3=-1)$. Согласно правилу 3, общий интеграл есть $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$.

Дважды дифференцируя его

$$y'=e^{-x}[C_2-C_1+(2C_3-C_2)x-C_3x^2];$$

$$y''=e^{-x}[C_1-2C_2+2C_3+(C_2-4C_3)x+C_3x^2]$$

и подставляя в выражения для $y$, $y'$ и $y''$ заданные их значения при $x=0$, получим для определения постоянных $C_1$, $C_2$, $C_3$ систему из трех уравнений: $-1=C_1$; $2=C_2-C_1$; $3=C_1-2C_2+2C_3$, откуда найдем $C_1=-1$; $C_2=1$; $C_3=3$. Следовательно, искомый частный интеграл $y=e^{-x}(3x^2+x-1)$.

Решить уравнения:

**1109.** $y''-5y'+6y=0$.

**1110.** $y'''-4y''+3y'=0$.

**1111.** $\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+25\frac{dy}{dx}=0$.

**1112.** $\frac{d^3S}{dt^3}+5\frac{d^2S}{dt^2}=0$.

**1113.** $y'''-3y''+3y'-y=0$.

**1114.** $y^{(4)}-8y^{(2)}-9y=0$.

**1115.** $\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^2y}{dx^2}+25y=0$.

**1116*.** $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$.

**1117.** $y''-y=0$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

**1118.** $y''+2y'+2y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

**1119*.** $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+2a\frac{d\rho}{d\varphi}+a^2\rho=0$, если $\rho(0)=a$, $\rho'(0)=0$.

## § 8. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно функции и ее производных

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=q(x), \qquad (1)$$

отличающиеся от линейного однородного уравнения наличием в правой части некоторой известной функции $q$ от независимой переменной $x$.

*Общий интеграл* $\boldsymbol{y}$ *линейного неоднородного уравнения равен сумме какого-либо его частного интеграла* $\boldsymbol{y_1}$ *и общего интеграла* $\boldsymbol{u}$ *соответствующего однородного уравнения (получающегося из неоднородного при* $q=0$*).*

Согласно этому свойству, для решения линейного неоднородного уравнения (1) с постоянными коэффициентами $p_i$ вначале находится функция $u$ (по правилам § 7), затем функция $y_1$. Их сумма и дает общий интеграл $y$ неоднородного уравнения: $y=u+y_1$.

Для некоторых специальных видов функции $q(x)$ частный интеграл $y_1$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. По виду правой части $q(x)$ можно заранее указать вид частного интеграла $y_1$, где неизвестны лишь числовые коэффициенты, и затем найти его без всяких квадратур в следующих простейших случаях:

1) $q(x)=e^{mx}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен, *
2) $q(x)=e^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$,
3) $q(x)$ есть сумма указанных функций.

---

* В частности, если $m=0$, то $q(x)$ — многочлен, а если $P(x)$ есть постоянная $c$ (многочлен нулевой степени), то $q(x)$ — показательная функция $ce^{mx}$.

В этих случаях $y_1$ есть функция, подобная $q(x)$, т. е. отличается от $q(x)$ только числовыми коэффициентами.

Но если число $m$ (для случая 1) или числа $a \pm bi$ (для случая 2) являются корнями характеристического уравнения кратности $k$, то $y_1$ отличается от $q(x)$ множителем $x^k$.

Таким образом, для указанных видов правой части $q(x)$, зная заранее вид функции $y_1$ и написав ее выражение с неопределенными буквенными коэффициентами по указанному правилу, затем находим их, подставляя $y_1$ в данное неоднородное уравнение и сравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства.

В общем случае, при любой функции $q(x)$ частный интеграл $y_1$ уравнения (1) можно найти посредством $n$ квадратур (интеграций) по формуле

$$y_1 = e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left\{\int e^{(r_3-r_2)x}\left[\ldots\int e^{(r_n-r_{n-1})x}\left(\int qe^{-r_nx}dx\right)dx\ldots\right]dx\right\}dx, \quad (*)$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — корни характеристического уравнения.*

Из этой общей формулы вытекают и правила нахождения частного интеграла $y_1$ для указанных специальных видов функции $q(x)$.

При $n=2$, т. е. для уравнения второго порядка,

$$y_1 = e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left(\int qe^{-r_2x}dx\right)dx. \quad (2)$$

Для уравнения третьего порядка ($n=3$)

$$y_1 = e^{r_1x}\int e^{(r_2-r_1)x}\left[\int e^{(r_3-r_2)x}\left(\int qe^{-r_3x}dx\right)dx\right]dx. \quad (3)$$

Пользуясь этими формулами, полезно иногда выражать тригонометрические функции через показательные по формулам Эйлера (гл. IX, § 6).

**1120.** Решить уравнения:

1) $y''+6y'+5y=25x^2-2$; 2) $y''-2y'+10y=37\cos 3x$;
3) $y''-6y'+9y=3x-8e^x$; 4) $y'''+4y'=8e^{2x}+5e^x\sin x$.

Решение. 1) Вначале находим общий интеграл $u$ однородного уравнения $y''+6y'+5y=0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $r^2+6r+5=0$ имеет корни $r_1=-5$, $r_2=-1$. Поэтому (согласно правилу 1, § 7) $u=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}$.

Далее находим частный интеграл $y_1$ данного неоднородного уравнения. Для правой части данного уравнения $q(x)=25x^2-2$,

---

* Если в формуле (*) после каждой интеграции прибавлять произвольную постоянную $C_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, то получится не частный интеграл $y_1$, а общий интеграл $y$ уравнения (1).

согласно указанному правилу (случай 1, число $m=0$ и не является корнем характеристического уравнения), $y_1$ есть функция, подобная $q(x)$, т. е. многочлен второй степени: $y_1 = Ax^2+Bx+C$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y_1' = 2Ax+B$, $y_1'' = 2A$ и подставляя $y_1$, $y_1'$, $y_1''$ в данное уравнение, получим равенство

$$2A+6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)=25x^2-2$$

или

$$5Ax^2+(12A+5B)x+(2A+6B+5C)=25x^2-2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ из обеих его частей, ибо только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$5A=25,\quad 12A+5B=0,\quad 2A+6B+5C=-2,$$

из которой находим $A=5$, $B=-12$, $C=12$.

Следовательно, $y_1=5x^2-12x+12$, а искомый общий интеграл данного неоднородного уравнения

$$y=u+y_1=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}+5x^2-12x+12.$$

2) Составляем характеристическое уравнение $r^2-2r+10=0$, определяем его корни $r_{1,2}=1\pm 3i$ и (согласно правилу 2, § 7) находим общий интеграл $u$ однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению

$$u=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Частный интеграл $y_1$ данного неоднородного уравнения, соответственно его правой части $q(x)=37\cos 3x$ (случай 2 при $a=0$, $b=3$, числа $a\pm bi=\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения), будет функция вида

$$y_1=A\cos 3x+B\sin 3x. \, *$$

Подставляя функцию $y_1$ и ее производные

$$y_1'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,$$
$$y_1''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A-6B)\cos 3x+(B+6A)\sin 3x=37\cos 3x,$$

которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных членов (у $\cos 3x$ и у $\sin 3x$) в обеих его частях:

$$A-6B=37;\quad B+6A=0.$$

---

* В данном уравнении $q(x)=37\cos 3x$. Но если бы его правая часть была $A_2\sin 3x$ или $A_1\cos 3x+A_2\sin 3x$, то все равно, согласно правилу, данному для случая 2, частный интеграл уравнения следовало искать в виде функции указанного вида, т. е. $y_1=A\cos 3x+B\sin 3x$.

Решая эту систему, найдем $A=1$; $B=-6$. Следовательно,

$$y_1=\cos 3x-6\sin 3x,$$

$$y=u+y_1=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\cos 3x-6\sin 3x.$$

3) Написав характеристическое уравнение $r^2-6r+9=0$ или $(r-3)^2=0$ и найдя его корни $r_{1,2}=3$, получим (по правилу 3, § 7) общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$u=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

Правая часть данного уравнения есть сумма многочлена первой степени $3x$ и показательной функции $-8e^x$ (случаи 3 и 1). Поэтому частный интеграл этого уравнения $y_1=Ax+B+Ce^x$.

Подставляя $y_1$, $y_1'=A+Ce^x$, $y_1''=Ce^x$ в данное уравнение

$$9Ax+(9B-6A)+4Ce^x=3x-8e^x$$

и приравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства, имеем систему: $9A=3$, $9B-6A=0$, $4C=-8$, из которой находим $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{9}$, $C=-2$.

Следовательно,

$$y_1=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x,$$

$$y=u+y_1=e^{3x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x.$$

4) Характеристическое уравнение $r^3+4r=0$ имеет корни $r_1=0$, $r_{2,3}=\pm 2i$, поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения есть

$$u=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$$

Частный интеграл $y_1$ данного неоднородного уравнения, согласно указанному правилу (случаи 3, 1 и 2), есть функция, подобная правой части;

$$y_1=Ae^{2x}+e^x(B\cos x+C\sin x).$$

Для определения коэффициентов $A$, $B$, $C$ находим производные

$$y_1'=2Ae^{2x}+e^x[(B+C)\cos x+(C-B)\sin x],$$

$$y_1''=4Ae^{2x}+2e^x(C\cos x-B\sin x),$$

$$y_1'''=8Ae^{2x}+2e^x[(C-B)\cos x-(B+C)\sin x],$$

подставляем $y_1'$ и $y_1'''$ в данное уравнение:

$$16Ae^{2x}+2e^x[(B+3C)\cos x+(C-3B)\sin x]=8e^{2x}+5e^x\sin x$$

и, сравнивая коэффициенты у подобных членов, получим систему $16A=8$, $2(B+3C)=0$, $2(C-3B)=5$, из которой находим $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^x (\sin x - 3\cos x),$$

$$y = u + y_1 = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^x (\sin x - 3\cos x).$$

**1121.** Решить уравнения:

1) $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 9x^2$; 2) $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 4e^{2t} - 3e^{3t}$;

3) $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$; 4)* $y''' + y'' = 1 - 6x^2e^{-x}$.

Решение. 1) Написав характеристическое уравнение $r^4 - 3r^2 = 0$, находим его корни $r_{1,2} = 0$, $r_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ и, по правилам § 7, составляем общий интеграл $u$ соответствующего однородного уравнения: $u = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения есть многочлен второй степени, т. е. функция вида $e^{mx}P(x)$ (случай 1), где число $m = 0$ и является двукратным корнем характеристического уравнения. Поэтому, согласно правилу, указанному в начале этого параграфа, частный интеграл $y_1$ данного уравнения отличается от правой части множителем $x^2$, т. е.

$$y_1 = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Чтобы определить значения коэффициентов $A$, $B$, $C$, находим производные

$$y_1' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \quad y_1'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$
$$y_1''' = 24Ax + 6B, \quad y^{(4)} = 24A,$$

подставляем $y''$ и $y^{(4)}$ в данное уравнение

$$24A - 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 9x^2$$

и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему: $-36A = 9$, $-18B = 0$, $24A - 6C = 0$, из которой получим $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = -1$. Следовательно,

$$y_1 = -\frac{x^4}{4} - x^2; \quad y = u + y_1 = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{x^4}{4} - x^2.$$

2) Здесь характеристическое уравнение $r^3 - 3r^2 + 2r = 0$ имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения есть функция $u = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t}$.

Правая часть данного уравнения есть функция вида $e^{m_1t}P_1(t) + e^{m_2t}P_2(t)$ (случаи 3 и 1), где $m_1 = 2$, $P_1(t) = 4$, $m_2 = 3$, $P_2(t) = -3$, причем число $m_1$ является однократным корнем характеристического уравнения. Поэтому частный интеграл $x_1$ данного уравнения есть функция вида

$$x_1 = Ate^{2t} + Be^{3t}.$$

Далее, найдем производные

$$x_1' = Ae^{2t}(1+2t)+3Be^{3t},$$
$$x_1'' = 4Ae^{2t}(1+t)+9Be^{3t},$$
$$x_1''' = 4Ae^{2t}(3+2t)+27Be^{3t},$$

подставим их в данное уравнение $2Ae^{2t}+6Be^{3t}=4e^{2t}-3e^{3t}$ и, сравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства, получим систему $2A=4$, $6B=-3$, из которой найдем $A=2$, $B=-\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$x_1 = 2te^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t},$$
$$x = u+x_1 = C_1+C_2e^t+C_3e^{2t}+2te^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t}.$$

3) Характеристическое уравнение $4r^3+r=0$ имеет корни $r_1=0$, $r_{2,3}=\pm\frac{1}{2}i$, поэтому

$$u = C_1+C_2\cos\frac{x}{2}+C_3\sin\frac{x}{2}.$$

Правая часть данного уравнения есть сумма функций вида $e^{mx}P(x)$ и $e^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$, где $m=1$, $P(x)=3$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $A_1=0$, $A_2=2$. (Случаи 3, 1, 2.) Число $m$ не является корнем характеристического уравнения, а числа $a\pm bi=\pm\frac{1}{2}i$ являются его однократными корнями. Поэтому частный интеграл данного уравнения есть функция вида

$$y_1 = Ae^x+x\left(B\cos\frac{x}{2}+C\sin\frac{x}{2}\right).$$

Для определения коэффициентов $A$, $B$, $C$ трижды дифференцируем функцию $y_1$, подставляем $y_1'$ и $y_1'''$ в данное уравнение

$$5Ae^x-2B\cos\frac{x}{2}-2C\sin\frac{x}{2}=3e^x+2\sin\frac{x}{2}$$

и, сравнивая коэффициенты у подобных членов, получим систему $5A=3$, $-2B=0$, $-2C=2$, откуда имеем $A=\frac{3}{5}$, $B=0$, $C=-1$. Следовательно,

$$y_1=\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2},$$
$$y=u+y_1=C_1+C_2\cos\frac{x}{2}+C_3\sin\frac{x}{2}+\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2}.$$

4) Характеристическое уравнение $r^3+r^2=0$ имеет корни $r_{1,2}=0$, $r_3=-1$; общий интеграл соответствующего однородного

уравнения

$$u = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}.$$

Правая часть данного уравнения есть функция вида $e^{m_1x}P_1(x) + e^{m_2x}P_2(x)$, где $m_1 = 0$, $P_1(x) = 1$, $m_2 = -1$, $P_2(x) = -6x^2$. (Случаи 3 и 1.) При этом число $m_1$ есть двукратный корень, а число $m_2$ есть однократный корень характеристического уравнения. Поэтому частный интеграл данного уравнения

$$y_1 = Ax^2 + x(Bx^2 + Cx + D)e^{-x}.$$

Подставляя эту функцию в данное уравнение, получим равенство

$$2A + [3Bx^2 + (2C - 12B)x + (6B - 4C + D)]e^{-x} = 1 - 6x^2e^{-x},$$

откуда имеем систему

$$2A = 1, \quad 3B = -6, \quad 2C - 12B = 0, \quad 6B - 4C + D = 0,$$

из которой найдем

$$A = \frac{1}{2}, \; B = -2, \; C = -12, \; D = -36.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x(x^2 + 6x + 18)e^{-x},$$

$$y = u + y_1 = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 2x(x^2 + 6x + 18)e^{-x}.$$

**1122.** По общей формуле (*) найти частный интеграл уравнения:

1) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sec^2 x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = (e^{2x} + 1)^{-\frac{3}{2}}$;
3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 5x^3e^x + 3e^{2x}$; 4) $y'' + 4y = \cos^3 x$.

Решение. 1) Сначала составляем характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 4 = 0$ и находим его корни $r_{1,2} = -2$. Затем подставляем эти корни и правую часть $q(x)$ данного уравнения в формулу (2) и, дважды интегрируя, получим искомый частный интеграл:

$$y_1 = e^{-2x}\int\left(\int \sec^2 x\,dx\right)dx = e^{-2x}\int \operatorname{tg} x\,dx = -e^{-2x}\ln|\cos x|.$$

2) Характеристическое уравнение $r^2 + 5r + 6 = 0$ имеет корни $r_1 = -3$, $r_2 = -2$. Подставляя их и правую часть данного уравнения в формулу (2), получим

$$y_1 = e^{-3x}\int e^x\left[\int e^{2x}(e^{2x} + 1)^{-\frac{3}{2}}dx\right]dx.$$

Интегралы находим отдельно:

$$I_1=\int e^{2x}(e^{2x}+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)^{-\frac{3}{2}}d(e^{2x}+1)=-(e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$I_2=\int e^x I_1\,dx=-\int\frac{de^x}{\sqrt{(e^x)^2+1}}=-\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right).$$

Следовательно, искомый частный интеграл данного уравнения

$$y_1=-e^{-3x}\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right).$$

3) Характеристическое уравнение $r^3-3r^2+3r-1=0$ имеет корни $r_1=r_2=r_3=1$. Подставляя эти корни и правую часть данного уравнения в формулу (3) и трижды интегрируя, получим

$$y_1=e^x\int\left\{\int\left[\int(5x^3+3e^x)\,dx\right]dx\right\}dx=$$

$$=e^x\int\left\{\int\left[\frac{5x^4}{4}+3e^x\right]dx\right\}dx=e^x\int\left\{\frac{x^5}{4}+3e^x\right\}dx=e^x\left(\frac{x^6}{24}+3e^x\right).$$

4) Характеристическое уравнение $r^2+4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm 2i$. Пользуясь формулой (2), получим

$$y_1=e^{2ix}\int e^{-4ix}\left(\int e^{2ix}\cos^3 x\,dx\right)dx.$$

Выражая $\cos^3 x$ через показательные функции (по формуле Эйлера, гл. IX, § 6) и интегрируя, найдем

$$I_1=\int e^{2ix}\cos^3 x\,dx=\int e^{2ix}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix})\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{5ix}}{5i}+\frac{e^{3ix}}{i}+\frac{3e^{ix}}{i}-\frac{e^{-ix}}{i}\right);$$

$$I_2=\int e^{-4ix}I_1\,dx=\frac{1}{8i}\int\left(\frac{e^{ix}}{5}+e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8i}\left(\frac{e^{ix}}{5i}-\frac{e^{-ix}}{i}-\frac{e^{-3ix}}{i}+\frac{e^{-5ix}}{5i}\right);$$

$$y_1=e^{2ix}I_2=\frac{1}{8i^2}\left(\frac{e^{3ix}}{5}-e^{ix}-e^{-ix}+\frac{e^{-3ix}}{5}\right).$$

Вторично пользуясь формулами Эйлера, выразим результат через тригонометрические функции

$$y_1=-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{5}\cos 3x-2\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(\cos x-\frac{1}{5}\cos 3x\right).$$

Решить уравнения:

**1123.** $y''+4y=5e^x$. **1124.** $y''+y'-2y=6x^2$.

**1125.** $y''+6y'+9y=10\sin x$. **1126.** $y'''-y''-4y'+4y=x^2+3$.

**1127.** $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=te^{-t}$. **1128.** $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=4(x+1)$.

**1129.** $y''+9y=15\sin 2x$, если $y(0)=-7$, $y'(0)=0$.

**1130.** $y''-3y'=3x+x^2$, если $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{70}{27}$.

1131. $\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}+6t$. 1132. $\frac{d^4s}{dt^4}+4\frac{d^3s}{dt^3}=4\cos 4t$.
1133*. $y''-2y'+y=xe^x$. 1134*. $y''-5y'+6y=6+2e^x+e^{2x}$.
1135*. $y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$. 1136*. $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=8\cos x$.
По общей формуле (*) найти частный интеграл уравнения:
1137. $y''-5y'+6y=e^x(e^x+4)$. 1138. $y''+2y'+y=xe^x\cos x$.
1139. $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cos^3 x$. 1140. $y''+16y=\sin^3 x$.
1141. $y''-3y'+2y=e^{2x}(e^x+1)^{-1}$. 1142. $y'''+4y'=\sin^2 x\cos x$.

## § 9. Смешанные задачи на интегрирование уравнений разных типов

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены наиболее употребительные типы дифференциальных уравнений, приводящихся к квадратурам, и указаны способы их решения. В нижеследующих задачах студент должен самостоятельно определить тип данного дифференциального уравнения и затем решить его соответствующим способом.

1143. $xyy'+x^2-y^2=0$. 1144. $1+(x\cos y-\sin 2y)y'=0$.
1145. $x+yy'+(1+y')xy=0$, если $y(0)=0$.
1146. $\left(y\cos\frac{y}{x}-x\right)dx=x\cos\frac{y}{x}dy$. 1147. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$.
1148. $y''+4=8\cos^2 x$, если $y(0)=y'(0)=0$.
1149. $xy'\cos y+\sin y=0$. 1150. $(1-xy^3)dx=x^2y^2dy$.
1151. $y''\sin x=(1+y')\cos x$, если $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.
1152*. $y^2dx-(2xy-3)dy=0$, если $y(1)=1$.
1153. $(1-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0$. 1154*. $y''-2y'+y=4e^x+e^{-x}\sin x$.
1155. $y''+y'=2x^2e^x$, если $y(0)=5$, $y'(0)=0{,}5$.
1156. $y''\sin y-2(y')^2\cos y=0$, если $y(0)=\frac{\pi}{4}$, $y'(0)=2$.
1157. $y'''\sin^4 x=\sin 2x$. 1158*. $y'''-3y'-2y-\sin x=2\cos x$.
1159. $y'''-y''-y'+y=3x+e^x(24x-4)$.
1160. $y''+y=\sec x$. 1161*. $y''+2ay'+a^2y=\sqrt{x}e^{-ax}$.

## § 10. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задачи, решение которых приводится к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций, весьма разнообразны. В таких задачах ищется функция или зависимость между переменными факторами какого-либо физического, химического или технического процесса, уравнение (форма) линии или поверхности.

При решении этих задач вначале составляется дифференциальное уравнение задачи, которое затем решается тем или иным способом в зависимости от его типа.

Дифференциальное уравнение задачи составляется по ее условию и в зависимости от условия задачи оно получается либо как соотношение между дифференциалами переменных величин, либо как соотношение, содержащее производные неизвестной функции.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между дифференциалами переменных можно делать различные допущения, упрощающие задачу и, вместе с тем, не отражающиеся на результатах. Так, например, подобно тому как и при отыскании дифференциала неизвестной величины (гл. V, § 3), здесь можно небольшой участок кривой считать прямолинейным, небольшой участок поверхности — плоским, в течение малого промежутка времени переменное движение можно рассматривать как равномерное, а всякий физический, химический или технический процесс как протекающий с неизменной скоростью.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между производными используется геометрический, физический или механический смысл производной (гл. II, § 1, 11, 12, 14, 15).

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения задачи, в зависимости от ее условия, используются известные законы физики, химии, механики и других наук и различные математические сведения.

**1162.** У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

Решение. Уравнение касательной в любой точке $(x, y)$ искомой кривой будет $Y-y=y'(X-x)$, где $X$, $Y$ — координаты любой точки на касательной (гл. II, § 11).

Полагая в этом уравнении $Y=0$, найдем абсциссу $X_0$ точки пересечения касательной с осью $Ox$: $X_0=x-\frac{y}{y'}$.

Согласно условию задачи, $X_0+x=0$, т. е. $2x-\frac{y}{y'}=0$.

Решая это дифференциальное уравнение искомой кривой как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x};\quad 2\ln|y|=\ln|x|+\ln C;\quad y^2=Cx.$$

Следовательно, искомая кривая есть парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси $Ox$.

**1163.** Какую форму должна иметь однородная вертикальная колонна с круглым поперечным сечением, чтобы давление удерживаемого ею груза $P$ и ее собственного веса, приходящееся на единицу площади горизонтального сечения, было всюду одинаково? (Колонна равного давления.) Удельный вес материала колонны $\delta$, а радиус ее верхнего основания $r$.

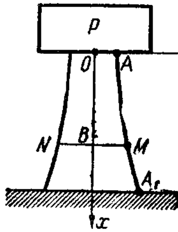
Найти затем радиусы верхнего и нижнего оснований мостового быка, чтобы давление в любом его горизонтальном сечении было 3000 *кГ/дм*², если удельный вес материала быка 2,5, его высота 12 *м*, а удерживаемый им груз 90 000 *кГ*.

Решение. Пусть сечение колонны вертикальной плоскостью, проходящей через ее ось симметрии, имеет вид, изображенный на черт. 210.

Выбрав прямоугольную систему координат $xOy$, пересечем колонну горизонтальной плоскостью, проходящей через произвольную точку $M(x, y)$ искомой кривой $AA_1$ и определим давление груза $P$ и собственного веса верхней отсеченной части колонны на единицу площади полученного горизонтального сечения $MN$.

Объем верхней отсеченной части колонны как объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции $OAMB$, прилежащей к оси $Ox$, вокруг оси $Ox$ (гл. V, § 5),

$$v = \pi \int_0^x y^2\,dx, \text{ а ее вес } Q = \delta v.$$



Черт. 210

Взяв отношение $P+Q$ к площади $S = \pi y^2$ сечения $MN$, получим давление на единицу площади этого сечения, которое по условию задачи должно быть равно давлению на единицу площади любого другого горизонтального сечения.

Давление на единицу площади верхнего основания колонны равно $\frac{P}{\pi r^2}$, $r = OA$, что следует из условия задачи. Поэтому

$$\frac{P+Q}{S} = \frac{P}{\pi r^2} \text{ или } P + Q = \frac{PS}{\pi r^2},$$

$$P + \pi\delta \int_0^x y^2\,dx = \frac{P}{r^2}\,y^2.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим дифференциальное уравнение кривой $AA_1$

$$\pi\delta y^2\,dx = \frac{2P}{r^2}\,y\,dy.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, найдем

$$dx = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\frac{dy}{y}; \qquad x + c = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln y.$$

Из условия $y = r$ при $x = 0$ находим, что постоянная $c = \frac{2P\ln r}{\pi\delta r^2}$.

Следовательно, уравнение кривой $AA_1$ есть

$$x = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{y}{r}, \tag{1}$$

а искомая форма колонны равного давления есть поверхность, образованная вращением этой кривой вокруг оси $Ox$:

$$x=\frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}\,^{*}.$$

При такой форме колонны давление во всех ее точках будет одинаково.

Для указанного в условии мостового быка радиус верхнего основания определяется из равенства

$$\frac{90000}{\pi r^2}=3000;\quad r\approx 3{,}09\ \text{дм},$$

а радиус нижнего основания путем подстановки известных величин в равенство (1)

$$120\approx\frac{2\cdot 90000}{\pi\cdot 2{,}5\cdot 3{,}09^2}\ln\frac{r_1}{3{,}09};\quad r_1\approx 3{,}24\ \text{м}.$$

Аналогично определяется и форма длинных стержней или канатов, которые под действием собственного веса и некоторого груза имеют во всех поперечных сечениях одинаковое натяжение.

**1164.** Найти зависимость скорости падения тела в воздухе от времени, если сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости $v$ и площади $S$ наибольшего сечения тела, перпендикулярного к направлению движения, $F=kSv^2$.

Найти затем: 1) поведение скорости падения тела при возрастании времени и 2) радиус парашюта, чтобы при общем весе парашюта и летчика в 100 *кГ* наибольшая скорость падения не превосходила 5 *м/сек*, полагая $k=0{,}083$.

Решение. Согласно условию задачи и второму закону Ньютона в механике, дифференциальное уравнение движения центра тяжести падающего тела будет

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kSv^2\quad\text{или}\quad\frac{dv}{dt}=g-av^2,\quad a=\frac{kS}{m},$$

где $m$ — масса тела, $v$ — скорость падения тела в момент времени $t$, $g$ — ускорение силы тяжести.

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{g-av^2}=dt;\quad t=\frac{1}{2\sqrt{ag}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}}+c. \qquad (2)$$

Из начального условия $v=0$ при $t=0$ определяем значение постоянной $c=0$, подставляем его в равенство (2) и, разрешая это равенство относительно $v$, найдем искомую зависимость

* Если линия $f(x,\ y)=0$, лежащая в плоскости $xOy$, вращается вокруг оси $Ox$, то уравнение полученной поверхности вращения будет $f(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

скорости падения тела от времени

$$v=\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{e^{2t\sqrt{ag}}-1}{e^{2t\sqrt{ag}}+1}=\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1-\frac{2}{e^{2t\sqrt{ag}}+1}\right). \qquad (3)$$

1) Полученная зависимость обнаруживает интересный и практически важный факт: с увеличением времени скорость падения тела в воздухе имеет предел: $\lim\limits_{t\to+\infty} v=\sqrt{\frac{g}{a}}$.

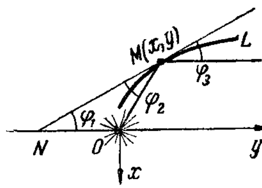
Теоретически такую скорость падающее тело приобретает лишь спустя бесконечно большой промежуток времени, но практически, как это следует из формулы (3), уже спустя несколько секунд после начала падения величина скорости тела будет очень близка к ее предельному значению, т. е. практически можно считать, что через несколько секунд после начала падения тела в воздухе оно становится равномерным.

2) Подставляя заданные значения величин в приближенное равенство $v\approx\sqrt{\frac{g}{a}}=\sqrt{\frac{mg}{kS}}$, найдем радиус парашюта:

$$5\approx\sqrt{\frac{100}{0{,}083\pi r^2}},\quad r\approx\frac{1}{5}\sqrt{\frac{100}{0{,}083\pi}}\approx 3{,}92\ м.$$

**1165.** Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки, параллельно данному направлению.

Решение. Пересечем поверхность зеркала плоскостью, проходящей через данную точку параллельно данному направлению. Выберем данную точку за начало прямоугольной системы координат, расположенной в этой плоскости, направим ось $Oy$ по данному направлению отраженных лучей и найдем уравнение кривой $L$, полученной при пересечении искомой поверхности указанной плоскостью (черт. 211).



Черт. 211

Так как угол падения равен углу отражения, то и $\angle\varphi_3=\angle\varphi_2$. Но $\angle\varphi_3=\angle\varphi_1$, поэтому треугольник $MON$ — равнобедренный и $OM=ON$.

Написав уравнение касательной $MN$

$$Y-y=y'(X-x)$$

и полагая в нем $X=0$, найдем $Y=-ON=y-xy'<0$. Длина отрезка $OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

Приравнивая найденные выражения $ON$ и $OM$, получим дифференциальное уравнение кривой $L$

$$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}\quad\text{или}\quad y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Решая его как однородное уравнение 1-го порядка (§ 3), легко найдем его общий интеграл

$$y=\frac{x^2-c^2}{2c},$$

которому соответствует семейство парабол, симметричных оси $Oy$ с общим фокусом в заданной точке $O$.

Кривая $L$ будет одна из парабол этого семейства, и так как она расположена в произвольной плоскости, проходящей через ось $Oy$, то искомая поверхность зеркала есть параболоид

$$y=\frac{x^2+z^2-c^2}{2c},$$

образованный вращением кривой $L$ вокруг ее оси.

Такие *параболические зеркала, преобразующие расходящийся пучок лучей в параллельный, употребляются для прожекторов.*

**1166.** Сосуд емкостью 100 *л* наполнен рассолом, содержащим 10 *кг* растворенной соли. В одну минуту в него втекает 3 *л* воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается.

В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково?

Решение. Пусть в момент времени $t$ (*мин*) в первом сосуде содержится $x$ (*кг*) соли и пусть в последующий малый промежуток времени $dt$ количество соли в этом сосуде уменьшится на $dx$.

За время $dt$ из сосуда вытечет $3dt$ (*л*) рассола. Концентрация рассола (количество соли в одном литре раствора) в момент $t$ будет $\frac{x}{100}$ (*кг/л*). Если допустить, что в течение малого промежутка времени $dt$ концентрация рассола оставалась неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx=\frac{x}{100}\cdot 3dt$ (так как $dx<0$).

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x}=-\frac{3}{100}dt;\quad \ln x=-0{,}03t+c.$$

Исходя из начального условия $x=10$ при $t=0$, определяем значение постоянной $c=\ln 10$.

Следовательно, зависимость количества соли $x$ в первом сосуде от времени $t$ будет

$$\ln x=-0{,}03t+\ln 10 \quad \text{или} \quad x=10e^{-0{,}03t}. \tag{4}$$

Далее найдем зависимость количества соли $y$ от времени $t$ для второго сосуда.

Во втором сосуде в момент $t$ концентрация рассола будет $\frac{y}{100}$ (*кг/л*). За время $dt$ в него вольется $3dt$ (*л*) рассола, содержащего $\frac{3x}{100}dt$ (*кг*) соли, а выльется $3dt$ (*л*) рассола, содержащего $\frac{3y}{100}dt$ (*кг*) соли, т. е. за время $dt$ количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0{,}03x\,dt - 0{,}03y\,dt, \text{ или } dy = 0{,}03(x-y)\,dt.$$

Заменяя $x$ в этом уравнении по формуле (4), получим линейное уравнение 1-го порядка

$$dy = 0{,}03(10e^{-0{,}03t} - y)\,dt, \quad y' + 0{,}03y = 0{,}3e^{-0{,}03t},$$

общий интеграл которого

$$y = e^{-0{,}03t}(c_1 + 0{,}3t).$$

(Его легко найти способом, указанным в § 4.)

Значение постоянной $c_1 = 0$ определяем из начального условия: $y = 0$ при $t = 0$.

Следовательно, зависимость количества соли $y$ во втором сосуде от времени $t$ будет

$$y = 0{,}3te^{-0{,}03t}.$$

Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах будет одинаково, найдем, полагая $x = y$:

$$10e^{-0{,}03t} = 0{,}3te^{-0{,}03t}; \quad 10 = 0{,}3t; \quad t = 33\frac{1}{3} \text{ сек.}$$

В этот момент в каждом сосуде будет по $\frac{10}{e} \approx 3{,}68$ *кг* соли.

**1167.** Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью 72 *км/час*. Во сколько времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

Решение. Согласно второму закону Ньютона в механике, дифференциальное уравнение движения локомотива будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -0{,}2mg,$$

где $s$ — путь, пройденный за время $t$, $m$ — масса локомотива, $g$ — ускорение силы тяжести.

Умножая обе части этого уравнения на $dt$ и затем интегрируя дважды, получим

$$\frac{ds}{dt} = -0{,}2gt + c_1, \quad s = -0{,}1gt^2 + c_1t + c_2.$$

Значения постоянных $c_1$ и $c_2$ определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 72$ *км/час* $= 20$ *м/сек*.

Из первого условия имеем $c_2 = 0$. Из второго условия следует, что $c_1 = 20$.

Следовательно, уравнения движения локомотива будут:

$$\frac{ds}{dt} = v = 20 - 0{,}2gt \ (м/сек), \tag{5}$$

$$s = 20t - 0{,}1\, gt^2 \ (м). \tag{6}$$

Полагая $v = 0$ в уравнении (5), найдем время торможения, в течение которого локомотив будет остановлен тормозом:

$$t = \frac{20}{0{,}2g} \approx \frac{100}{9{,}8} \approx 10{,}2 \ сек.$$

Полагая $t \approx 10{,}2$ в уравнении (6), найдем тормозной путь:

$$s \approx 20 \cdot 10{,}2 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10{,}2^2 \approx 102 \ м.$$

**1168.** Пуля входит в доску толщиной 10 *см* со скоростью 200 *м/сек*, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью 50 *м/сек*. Найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально квадрату ее скорости.

Решение. Пусть $m$ — масса пули, $s$ — путь, пройденный ею за время $t$, отсчитываемое от момента входа ее в доску. Тогда дифференциальное уравнение движения пули через доску будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \ a = \frac{k}{m}.$$

Полагая в этом уравнении 2-го порядка $\frac{ds}{dt} = v$, получим уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dt} = -av^2, \quad \frac{dv}{v^2} = -a\,dt,$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{1}{v} = at + c_1 \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{at + c_1}.$$

По начальному условию $v = 200$ при $t = 0$, данному в задаче, определим постоянную $c_1$:

$$200 = \frac{1}{c_1}, \quad c_1 = \frac{1}{200}.$$

Следовательно, зависимость скорости движения пули через доску от времени будет

$$v = \frac{200}{1 + 200at}. \tag{7}$$

Полагая в последнем уравнении $v = \frac{ds}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$ds = \frac{200dt}{1 + 200at}, \quad s = \frac{1}{a}\ln(1 + 200at) + c_2.$$

Из условия $s=0$ при $t=0$ следует, что $c_2=0$.

Следовательно, зависимость расстояния, проходимого пулей в доске, от времени будет

$$s=\frac{1}{a}\ln(1+200at). \tag{8}$$

Полагая $v=50$ в равенстве (7) и $s=0{,}1$ (*м*) в равенстве (8), получим систему уравнений с неизвестными $t$ и $a$:

$$50=\frac{200}{1+200at}; \quad 0{,}1=\frac{1}{a}\ln(1+200at).$$

Определив из первого уравнения $1+200at=4$ и подставляя во второе, найдем значение $a$:

$$0{,}1=\frac{1}{a}\ln 4; \quad a=10\ln 4.$$

Наконец, подставляем значение $a$ в первое уравнение решаемой системы и определяем из него искомое время полета пули через доску:

$$50=\frac{200}{1+(200\cdot 10\ln 4)t}; \quad t=\frac{3}{2000\ln 4}\approx 0{,}001 \text{ сек.}$$

**1169.** Цепь, висящая на гладком крюке, соскальзывает вниз. В начале движения по одну сторону крюка свисает 10 *м* цепи, а по другую 8 *м*. Не учитывая сопротивлений, найти: 1) во сколько времени с крюка соскользнет вся цепь и 2) какова будет скорость цепи в начальный момент ее свободного падения.

Решение. Если в момент времени $t$ длина движущейся вниз части цепи равна $s$ (*м*), то в этот момент сила $F$, движущая цепь, равна разности между весами частей цепи, свисающими по разные стороны крюка, $F=\delta gs-\delta g(18-s)=2\delta g(s-9)$, где $\delta$ — масса 1 *м* цепи, $g$ — ускорение силы тяжести.

Согласно второму закону механики, дифференциальное уравнение движения цепи будет

$$18\delta\frac{d^2s}{dt^2}=2\delta g(s-9) \text{ или } 9\frac{d^2s}{dt^2}=g(s-9).$$

Решим его как неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной $t$ (§ 6) *.

Полагая $\frac{ds}{dt}=v$, имеем $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}=v\frac{dv}{ds}$,

$$9v\frac{dv}{ds}=g(s-9); \quad 9v\,dv=g(s-9)\,ds;$$

$$\frac{9}{2}v^2=\frac{g}{2}(s-9)^2+\frac{c_1}{2}; \quad 9v^2=g(s-9)^2+c_1.$$

---

* Иначе его можно решать как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8).

Значение постоянной $c_1$ определяем из начального условия, данного в задаче: при $s=10$, $v=0$:

$$0=g(10-9)^2+c_1;\ c_1=-g;$$
$$9v^2=g(s-9)^2-g. \qquad (9)$$

Заменяя в уравнении (9) $v=\frac{ds}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$9\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g(s-9)^2-g;\quad \frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{3}\sqrt{(s-9)^2-1};$$
$$\frac{d(s-9)}{\sqrt{(s-9)^2-1}}=\frac{\sqrt{g}}{3}dt;\ \ln\left[s-9+\sqrt{(s-9)^2-1}\right]=\frac{\sqrt{g}}{3}t+c_2.$$

Значение постоянной $c_2$ определяем из начального условия: при $t=0$, $s=10$.

$$\ln 1=c_2;\quad c_2=0;$$
$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left[s-9+\sqrt{(s-9)^2-1}\right]. \qquad (10)$$

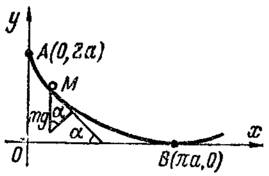
Время, за которое с крюка соскользнет вся цепь, найдем из уравнения (10), полагая в нем $s=18$:

$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})\approx 2{,}9\ \textit{сек.}$$

Скорость цепи в начальный момент ее свободного падения найдем из уравнения (9), полагая в нем $s=18$:

$$v=\frac{\sqrt{80g}}{3}\approx 9{,}3\ \textit{м/сек.}$$

**1170.** Шарик скатывается по гладкому желобу, изогнутому по циклоиде (черт. 212). Не учитывая трения и сопротивления воздуха, найти: 1) зависимость пути, проходимого центром тяжести шарика, от времени; 2) за какое время шарик скатывается от начала желоба до его низшей точки: а) по желобу и б) по прямой линии.



Черт. 212

Решение. Если тело массы $m$ движется как угодно в плоскости или в пространстве, то равнодействующая $\bar{F}$ приложенных к нему сил и ускорение $\bar{w}$ его центра тяжести связаны соотношением $m\bar{w}=\bar{F}$. (Второй закон Ньютона в механике.)

Из этого соотношения между векторами можно получить соотношения, содержащие скалярные величины, проектируя векторы $\bar{F}$ и $\bar{w}$ на какое-либо направление. Так, если проекция

$\bar{w}$ на какую-либо ось есть $w_k$, а проекция $\bar{F}$ на ту же ось есть $F_k$, то $mw_k = F_k$.

Согласно этому закону механики, проектируя ускорение центра тяжести шарика и действующую на него силу на направление касательной к траектории (циклоиде), получим дифференциальное уравнение движения центра тяжести шарика:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\sin\alpha, \tag{11}$$

где $s = \smile{AM}$ — путь, пройденный центром тяжести шарика за время $t$, $m$ — масса шарика, $g$ — ускорение силы тяжести.

1) Чтобы в этом уравнении было только две переменных, выразим $\sin\alpha$ через $s$, исходя из параметрических уравнений циклоиды $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 + \cos\varphi)$ относительно указанной на чертеже прямоугольной системы координат.

Найдем производную

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\varphi\, d\varphi}{a(1-\cos\varphi)\, d\varphi} = -\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

затем дифференциал дуги циклоиды

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}\cdot 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2a\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

и длину ее дуги $AM$

$$s = \int_0^{\varphi} 2a\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\varphi}^{0} = 4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right). \tag{*}$$

Отсюда $\cos\frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{s}{4a}$, а из чертежа $y' = \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \cos\frac{\varphi}{2},$$

т. е. $\sin\alpha = 1 - \frac{s}{4a}$.

Следовательно, уравнение (11) преобразуется к виду

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\left(1-\frac{s}{4a}\right) \quad \text{или} \quad 4a\frac{d^2s}{dt^2} + gs = 4ag. \tag{12}$$

Решаем его как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8)*.

---

* Иначе его можно решать как неполное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной $t$ (§ 6).

Характеристическое уравнение $4ar^2+g=0$ имеет мнимые корни $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{g}{4a}}=\pm ki$. Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения $u=c_1\cos kt+c_2\sin kt$.

Частный интеграл $s_1$ неоднородного уравнения (12) подобен его правой части: $s_1=A$. Подставляя $s_1$ в уравнение (12), получим $gA=4ag$, $A=4a$, т. е. $s_1=4a$.

Общий интеграл уравнения (12) есть

$$s=u+s_1=4a+c_1\cos kt+c_2\sin kt. \tag{13}$$

Значения постоянных $c_1$ и $c_2$ определим из начальных условий при $t=0$, $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$.

Из первого условия имеем: $0=4a+c_1$; $c_1=-4a$.

Найдя $\frac{ds}{dt}=-c_1k\sin kt+c_2k\cos kt$ из равенства (13) и используя второе условие, получим: $0=c_2k$; $c_2=0$.

Следовательно, искомая зависимость пути, проходимого центром тяжести шарика, от времени будет

$$s=4a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right). \tag{14}$$

2) В низшей точке $B$ желоба $\alpha=0$. Поэтому из уравнения (11) следует, что $\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_B=0$, а из уравнения (12) следует, что $\smile{AB}=4a$. (Длину дуги $AB$ циклоиды можно найти и по формуле (*) при $\varphi_B=\pi$.)

Подставляя $s=\smile{AB}=4a$ в уравнение (14), найдем время скатывания шарика от точки $A$ до точки $B$ по циклоидальному желобу:

$$4a=4a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right);\quad \cos t\sqrt{\frac{g}{4a}}=0;$$

$$t\sqrt{\frac{g}{4a}}=\frac{\pi}{2};\quad t_{\smile{AB}}=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

При скатывании шарика по прямой $AB$ дифференциальное уравнение движения его центра тяжести будет

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg\sin\angle ABO \quad\text{или}\quad g\frac{d^2s}{dt^2}=b,$$

где

$$b=g\sin\angle ABO=g\frac{OA}{AB}=\frac{2ag}{\sqrt{OA^2+OB^2}}=\frac{2ag}{\sqrt{4a^2+\pi^2a^2}}=\frac{2g}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$

Решаем это простейшее уравнение 2-го порядка последовательным интегрированием обеих его частей (§ 6):

$$\frac{ds}{dt}=bt+C_1;\quad s=\frac{bt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

При тех же начальных условиях: $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=0$ при $t=0$, найдем $C_1=C_2=0$. Поэтому уравнение движения центра тяжести шарика по прямой $AB$ будет

$$s=\frac{gt^2}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$

Подставляя в это уравнение вместо $s$ длину прямолинейного отрезка $AB=a\sqrt{4+\pi^2}$, найдем время скатывания шарика из точки $A$ в точку $B$ по прямой линии:

$$a\sqrt{4+\pi^2}=\frac{gt^2}{\sqrt{4+\pi^2}}; \quad t_{AB}=\sqrt{\frac{a}{g}(4+\pi^2)}.$$

Простое сравнение полученных результатов обнаруживает замечательный факт: $\smile{AB}>AB$, а $t_{\smile{AB}}<t_{AB}$, т. е. хотя кратчайшее расстояние между двумя точками есть длина соединяющего их прямолинейного отрезка, время скатывания шарика по циклоиде значительно меньше, чем по прямой линии.

Объясняется это тем, что при скатывании шарика по дуге $AB$ циклоиды модуль его скорости возрастает быстрее, чем при скатывании по прямой $AB$, хотя в точке $B$ обе эти скорости по модулю будут одинаковы.

Циклоида обладает еще одним замечательным свойством: время скатывания шарика до низшей точки циклоиды не зависит от его начального положения на циклоиде. Если несколько шариков, положенных в разные точки циклоидального желоба, одновременно начнут скатываться, то все они одновременно достигнут его низшей точки.

В справедливости этого можно убедиться, если для выражения $\sin\alpha$ через $s$ в уравнении (11) вместо точки $A$ за начальную точку движения шарика взять произвольную точку $A_1$ циклоиды ($\varphi=\varphi_1$). Это свойство, также кажущееся парадоксальным, ибо шарик $A$ должен преодолеть тот же путь, что и шарик $M$, и еще путь $AM$, объясняется тем, что первый шарик пройдет путь $MB$ быстрее, чем второй, и это обстоятельство полностью компенсирует излишек пути $AM$ первого шарика.

**1171.** Найти кривую, у которой все нормали проходят через точку (2; —3).

**1172.** Найти кривую, проходящую через точку (3; 4), у которой отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

**1173.** Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества $a$ радия распадается в течение 100 лет.

**1174.** В воде с температурой 20° в течение 10 *мин* тело охлаждается от 100° до 60°. Во сколько времени тело охладится до 30°, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

**1175.** В резервуаре находится 60 *л* рассола, содержащего 5 *кг* растворенной соли. В каждую минуту в него вливается 3 *л* воды и вытекает 2 *л* рассола, причем концентрация соли поддерживается равномерной. Сколько соли останется в резервуаре через 40 *мин*?

**1176*.** Найти форму поверхности, все точки которой одинаково освещены одним источником света. (Освещение пропорционально косинусу угла падения и обратно пропорционально квадрату расстояния. Использовать полярную систему координат и формулу $\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho d\varphi}{d\rho}$, где $\theta$ — угол между полярным радиусом и касательной.)

**1177*.** Найти кривые, у которых касательная и нормаль любой точки равноудалены от начала координат.

**1178.** Моторная лодка движется со скоростью 18 *км/час*. Через 5 *мин* после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 *км/час*. Найти расстояние, пройденное лодкой по инерции за 15 *мин*, если сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

**1179*.** Материальная точка массы $m$ брошена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$. Считая, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения, найти:

1) время $t_1$ подъема точки до наибольшей высоты;
2) наибольшую высоту $h$ подъема точки;
3) скорость $v_2$ точки в момент ее падения на землю;
4) время $t_2$ обратного падения точки до земли.

**1180.** Цепь длиной 6 *м* соскальзывает вниз с гладкой горизонтальной площадки. Не учитывая сопротивлений, найти, во сколько времени соскользнет вся цепь, если в начальный момент свисал 1 *м* цепи.

**1181*.** Решить задачу 1169, учитывая силу трения, равную весу 1 *м* цепи.

**1182.** Аэросани скользят по горизонтальному снежному полю со скоростью $v_0$, преодолевая трение лыж о снег, пропорциональное весу саней, и сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости движения. Найти расстояние, пройденное санями после выключения мотора, по инерции.

**1183*.** Вагон, стоящий на прямолинейном горизонтальном участке пути, приходит в движение вследствие давления ветра, пропорционального квадрату скорости ветра относительно вагона. Найти уравнения движения вагона, считая скорость ветра постоянной и учитывая силу трения, пропорциональную весу вагона.

Каково будет поведение скорости движения вагона с увеличением времени?

**1184.** Маятник, состоящий из небольшого тела массы $m$, привешенного на нити длиной $l$, отклонен от положения равновесия на небольшой угол $\theta_0$. Найти уравнение колебаний маятника и период колебания (не учитывая сопротивлений и полагая $\sin\theta \approx \theta$).

**1185*.** Решить задачу 1184, учитывая сопротивление воздуха, пропорциональное скорости движения.

## § 11. Метод Эйлера приближенного интегрирования уравнений первого порядка

Решение многих дифференциальных уравнений нельзя свести к интегрированию известных функций (к квадратурам). Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы интегрирования уравнений.

Для уравнения 1-го порядка $y'=f(x, y)$ можно составить таблицу приближенных значений частного интеграла, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, или приближенно вычертить интегральную кривую на некотором отрезке $[x_0, x_n]$, пользуясь методом Эйлера.

По методу Эйлера данный отрезок $[x_0, x_n]$ разбивается точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на $n$ частичных отрезков.

На первом частичном отрезке $[x_0, x_1]$ искомая интегральная кривая, проходящая через известную точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется касательной к ней в точке $M_0$:

$$y-y_0=(x-x_0)\,y'(x_0, y_0),$$

откуда при $x=x_1$ получается приближенное значение $y_1$ искомого интеграла уравнения в точке $x_1$:

$$y_1=y_0+(x_1-x_0)\,y'(x_0, y_0)=y_0+h_0y'_0.$$

Далее, тем же способом для отрезка $[x_1, x_2]$ находим приближенное значение $y_2$ искомого интеграла в точке $x_2$:

$$y_2=y_1+(x_2-x_1)\,y'(x_1, y_1)=y_1+h_1y'_1.$$

Продолжая этот процесс, последовательно находим приближенные значения $y_3, y_4, \ldots, y_n$ искомого интеграла в точках $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

С увеличением $n$, при достаточно малой длине частичных отрезков, этим методом можно достигнуть заданной точности решения.

Обычно заданный отрезок $[x_0, x_n]$ делится на частичные отрезки одинаковой длины $h=\frac{x_n-x_0}{n}$ и все последовательные приближенные значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ интеграла уравнения $y'=$ $=f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, вычисляются по рекуррентной формуле

$$y_k = y_{k-1} + hy'_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (*)$$

**1186.** Пользуясь методом Эйлера, составить таблицу приближенных значений частного интеграла уравнения $y' = y^2 - x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 1$, на отрезке [1; 2], разбив его на 10 равных частей.

Решение. Определив длину каждого частичного отрезка (шаг таблицы) $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{2-1}{10} = 0,1$, находим точки $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; ..., разбивающие данный отрезок [1; 2] на 10 равных частей.

Затем по заданным значениям $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ из данного уравнения $y' = y^2 - x^2$ находим $y'_0 = 0$ и по формуле (*) вычисляем $y_1 = y_0 + hy'_0 = 1$.

Зная $x_1$ и $y_1$ из данного уравнения находим $y'_1 = -0,210$ и по формуле (*) вычисляем $y_2 = y_1 + hy'_1 = 0,9790$.

Далее, исходя из значений $x_2$, $y_2$, вычисляем $y_3 = y_2 + hy'_2$, затем, зная $x_3$, $y_3$, вычисляем $y_4 = y_3 + hy'_3$ и т. д.

Результаты вычислений записываем в следующую таблицу:

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $y'_k$ | $hy'_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1,1 | 1 | —0,210 | —0,0210 |
| 2 | 1,2 | 0,9790 | —0,4816 | —0,0482 |
| 3 | 1,3 | 0,9308 | —0,8236 | —0,0824 |
| 4 | 1,4 | 0,8484 | —1,2402 | —0,1240 |
| 5 | 1,5 | 0,7244 | —1,7252 | —0,1725 |
| 6 | 1,6 | 0,5519 | —2,2554 | —0,2255 |
| 7 | 1,7 | 0,3264 | —2,7834 | —0,2783 |
| 8 | 1,8 | 0,0481 | —3,2377 | —0,3238 |
| 9 | 1,9 | —0,2757 | —3,5340 | —0,3534 |
| 10 | 2,0 | —3,8097 | | |

Здесь столбцы $x_k$ и $y_k$ представляют искомую таблицу приближенных значений интеграла данного уравнения; остальные столбцы — вспомогательные.

В задачах 1187 — 1190 по методу Эйлера на указанном отрезке, разделяя его на 10 равных частей, составить таблицу приближенных значений интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию. Все вычисления вести с точностью до 0,001.

**1187.** $y' = x + y$; $y(-1) = 0$; $[-1; 0]$.
**1188.** $y' = 2x - y^2$; $y(0) = 0$; $[0; 1]$.
**1189.** $y' = y^3 - x$; $y(0) = 1$; $[0; 2]$.
**1190*.** $y' - 0,1y^2 = xy$; $y(1) = 0$; $[1; 2]$.

## § 12. Интегрирование уравнений при помощи рядов

Интеграл дифференциального уравнения не всегда можно выразить в элементарных функциях или посредством конечного числа квадратур (интегралов).

В большинстве случаев каждое дифференциальное уравнение определяет собой особую функцию, которую можно, вообще говоря, представить лишь в виде бесконечного функционального ряда.

Интегралы многих дифференциальных уравнений, общие или частные, могут быть представлены в виде степенного ряда, сходящегося в некотором интервале значений независимой переменной.

В таком случае ряд, являющийся интегралом уравнения, можно найти или методом неопределенных коэффициентов или методом, основанным на применении ряда Маклорена (Тейлора).

Эти методы нахождения ряда, являющегося интегралом данного уравнения, разъясняются в решениях следующих задач.

**1191.** Найти общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx}=y^2$ в виде степенного ряда.

Решение. Пусть искомый интеграл есть степенной ряд

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ неизвестные, подлежащие определению постоянные.

Допуская, что такой ряд существует и сходится в некотором интервале значений $x$, найдем ряд для $\frac{dy}{dx}$ его почленным дифференцированием

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

и ряд для $y^2$—почленным умножением ряда (1) самого на себя:

$$y^2=a_0^2+2a_0a_1x+2a_0a_2x^2+2a_0a_3x^3+\ldots+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+\ldots$$

Подставляя эти ряды вместо $\frac{dy}{dx}$ и $y^2$ в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ из обеих его частей, поскольку два ряда будут тождественно равны только при этом условии, получим следующую систему:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1=a_0^2 \\ x^1 & 2a_2=2a_0a_1 \\ x^2 & 3a_3=2a_0a_2+a_1^2 \\ x^3 & 4a_4=2a_0a_3+2a_1a_2 \\ \end{array}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Решая эту систему, найдем: $a_1=a_0^2$; $a_2=a_0^3$; $a_3=a_0^4$; ...; $a_n=a_0^{n+1}$; ...

Следовательно, искомое разложение в степенной ряд общего интеграла данного уравнения есть

$$y = a_0(1 + a_0x + a_0^2x^2 + a_0^3x^3 + \ldots + a_0^nx^n + \ldots),$$

где $a_0$ является произвольной постоянной.

Полученный ряд представляет бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = a_0x$ и при $|q| < 1$ имеет сумму $y = \frac{a_0}{1 - a_0x}$.

Решение этой задачи показывает достоверность метода интегрирования уравнений с помощью рядов, так как непосредственное интегрирование данного уравнения, как уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, дает тот же результат.

**1192.** Найти в виде степенного ряда частный интеграл уравнения $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, удовлетворяющий начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Полагая, что искомый интеграл представляет сходящийся степенной ряд (1), найдем ряды для $y'$ и $y''$ его почленным дифференцированием

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$
$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1$; $y'(0) = a_1 = 0$.

Подставляя ряды для $y$, $y'$ и $y''$ в заданное уравнение и сделав приведение подобных членов, получим

$$(1 + 2^2a_2) + 3^2a_3x + (a_2 + 4^2a_4)x^2 + (a_3 + 5^2a_5)x^3 + \ldots$$
$$\ldots + [a_n + (n+2)^2a_{n+2}]x^n + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты ряда, находящегося в левой части этого равенства, так как только при этом условии ряд будет тождественно равен нулю, получим систему $1 + 2^2a_2 = 0$; $3^2a_3 = 0$; $a_2 + 4^2a_4 = 0$; $a_3 + 5^2a_5 = 0$; $\ldots$; $a_n + (n+2)^2a_{n+2} = 0$; ..., из которой определяются следующие значения всех остальных коэффициентов: $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2m+1} = \ldots = 0$;

$$a_2 = -\frac{1}{2^2}; \quad a_4 = \frac{1}{2^24^2}; \quad a_6 = -\frac{1}{2^24^26^2}; \quad \ldots;$$
$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^24^2\ldots(2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m(m!)^2}; \quad \ldots$$

Таким образом, искомый частный интеграл данного уравнения есть степенной ряд

$$y = 1 - \frac{x^2}{4(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2(2!)^2} - \frac{x^6}{4^3(3!)^2} + \ldots + \frac{(-1)^mx^{2m}}{4^m(m!)^2} + \ldots,$$

который сходится при любом значении $x$ (согласно признаку Даламбера, так как здесь абсолютная величина отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\frac{x^{2m+2}}{4^{m+1}[(m+1)!]^2} : \frac{x^{2m}}{4^m (m!)^2} = \frac{x^2}{4(m+1)^2}$$

при любом $x$ и при неограниченном возрастании $m$ стремится к нулю).

**1193.** Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y' + xy^2 = 2\cos x$, удовлетворяющего начальному условию: $y(0) = 1$.

Решение. Как и в предыдущих задачах, ищем интеграл в виде степенного ряда (1).

Согласно начальному условию $y(0) = a_0 = 1$.

Далее, найдя ряды для $y^2$ и $y'$ и подставляя их и ряд для $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

в заданное уравнение, получим

$$a_1 + (1 + 2a_2)x + (2a_1 + 3a_3)x^2 + \ldots = 2 - x^2 + \ldots$$

Отсюда путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $x$ из обеих частей равенства найдем $a_1 = 2$; $a_2 = -\frac{1}{2}$; $a_3 = -\frac{5}{3}$.

Следовательно, искомый частный интеграл есть

$$y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \ldots$$

**1194.** Найти разложение в степенной ряд частного интеграла уравнения $y'' + xy = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Пусть искомая функции $y(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad (2)$$

где величины $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ... являются значениями функции $y(x)$ и ее производных при $x = 0$.

Два первых коэффициента $y(0)$ и $y'(0)$ даны в условии задачи, третий получим при подстановке известных величин в данное уравнение, $y''(0) = 0$, а следующие коэффициенты найдем путем последовательного дифференцирования данного уравнения: $y''' = -(y + xy')$; $y^{(4)} = -(2y' + xy'')$; $y^{(5)} = -(3y'' + xy''')$; ...; $y^{(n)} = -[(n-2)y^{(n-3)} + xy^{(n-2)}]$; ... Отсюда при $x = 0$ получим: $y'''(0) = -1$; $y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0$; $y^{(6)}(0) = 1 \cdot 4$; $y^{(7)}(0) = y^{(8)}(0) = 0$; $y^{(9)}(0) = -1 \cdot 4 \cdot 7$; ...

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд Маклюрена (2), получим искомый частный интеграл в виде ряда

$$y = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots + (-1)^m \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3m-2)}{(3m)!}x^{3m} + \ldots,$$

который сходится при любом значении $x$.

**1195.** Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y''-ye^x=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Решение. Применяя тот же способ, что и в решении предыдущей задачи, получим:

$$\begin{array}{ll} y''=ye^x, & y''(0)=2, \\ y^{(3)}=(y+y')e^x, & y^{(3)}(0)=3, \\ y^{(4)}=(y+2y'+y'')e^x, & y^{(4)}(0)=6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$$y = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Этот второй способ определения коэффициентов степенного ряда, удовлетворяющего заданному дифференциальному уравнению, который основан на использовании ряда Маклорена*, в некоторых случаях требует меньшей вычислительной работы, чем метод неопределенных коэффициентов. Он применим для отыскания общего или частного интегралов уравнения, если оно разрешимо относительно производной высшего порядка и если путем его последовательного дифференцирования возможно получить производную любого порядка.

Интегрирование уравнений при помощи рядов имеет большое значение, однако следует иметь в виду, что не для всякого уравнения можно получить интеграл в виде пригодного степенного ряда.

Например, уравнение $x^2y'-y(x+1)=-x^2$ (линейное) имеет общий интеграл

$$y = \frac{x}{\sqrt[x]{e}}\left(c - \int \frac{\sqrt[x]{e}}{x}\,dx\right).$$

Однако предполагая, что существует интеграл в виде степенного ряда (1) и определив его коэффициенты, получим ряд

$$y = x^2(1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots),$$

который практически непригоден, так как он расходится при всяком значении $x$, отличном от нуля.

**1196.** Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего ука-

---

* Или ряда Тейлора в более общем случае, когда ищется разложение интеграла по степеням двучлена $x-a$.

занному начальному условию:

1) $y'-y^2=x(x+1)$, $y(0)=1$; 2) $y'+y^2=e^x$, $y(0)=0$.

**1197.** Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-y\cos x=x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;
2) $y''-y'\sin x+y=1$, $y(0)=y'(0)=1$.

**1198.** Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-x^2y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
2) $y''+y\cos x=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

**1199*.** Найти разложение в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям:

1) $y''-xy=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
2) $xy''+2y'+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

## § 13. Системы линейных дифференциальных уравнений

Совокупность $n$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка с $n$ неизвестными функциями $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ от одной независимой переменной $x$:

$$\begin{cases} y_1'+p_{11}y_1+p_{12}y_2+\ldots+p_{1n}y_n=q_1 \\ y_2'+p_{21}y_1+p_{22}y_2+\ldots+p_{2n}y_n=q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'+p_{n1}y_1+p_{n2}y_2+\ldots+p_{nn}y_n=q_n, \end{cases} \qquad (*)$$

где коэффициенты $p_{ik}$ и правые части $q_i$ — данные функции от $x$ или постоянные, называется нормальной системой линейных дифференциальных уравнений.

Общим решением (или интегралом) такой системы называется совокупность $n$ функций от независимой переменной $x$ и $n$ произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$

$$\begin{aligned} y_1&=y_1(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n) \\ y_2&=y_2(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n&=y_n(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n), \end{aligned} \qquad (**)$$

которые удовлетворяют всем уравнениям этой системы.

Интегрирование системы $(*)$, путем исключения $n-1$ неизвестных функций (и их производных), как правило, можно свести к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения $n$-го порядка относительно одной из неизвестных функций $y_k$:

$$y_k^{(n)}+P_1y_k^{(n-1)}+P_2y_k^{(n-2)}+\ldots+P_ny_k=Q.$$

Остальные $n-1$ неизвестные функции выражаются через общий интеграл этого уравнения посредством одних алгебраических действий и дифференцирования *.

Например, чтобы найти общее решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y'+a_1y+b_1z=q_1(x) \\ z'+a_2y+b_2z=q_2(x), \end{cases} \qquad (1)$$

где $y$ и $z$ — искомые функции от независимой переменной $x$; $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ — известные постоянные; $q_1$, $q_2$ — известные функции от $x$, дифференцируем по $x$ первое уравнение

$$y''+a_1y'+b_1z'=q_1' \qquad (2)$$

и, исключая $z$ и $z'$ из трех уравнений (1) и (2), получим одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+ay'+by=q(x),$$
$$a=a_1+b_2,\quad b=a_1b_2-a_2b_1,\quad q=q_1'+b_2q_1-b_1q_2$$

и с одной неизвестной функцией $y$. Интегрируя это уравнение (см. § 8), найдем $y=F_1(x, C_1, C_2)$. Подставив найденное выражение функции $y$ и ее производной $y'$ в первое уравнение системы (1), найдем вторую искомую функцию $z=F_2(x, C_1, C_2)$. Совокупность функций $y$ и $z$ и будет общим решением системы (1).

Чтобы найти частное решение системы (*), удовлетворяющее заданным начальным условиям $y_1(x_0)=(y_1)_0$, $y_2(x_0)=(y_2)_0$, $\ldots$, $y_n(x_0)=(y_n)_0$ (задача Коши), следует из уравнений (**) определить соответствующие этим начальным условиям значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Системы, содержащие уравнения высших порядков, также можно решать путем сведения их к одному уравнению. Существуют и другие способы решения систем.

**1200.** Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y-4z=0 \\ \dfrac{dz}{dx}+y-3z=3x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6u'-u-7v+5w=10e^x \\ 2v'+u+v-w=0 \\ 3w'-u+2v-w=e^x. \end{cases}$

* В исключительных случаях может получиться уравнение более низкого порядка, причем отыскание некоторых из остальных искомых функций требует нескольких дополнительных операций интегрирования.

Решение. 1) Дифференцируем по $x$ первое уравнение:

$$y''+2y'-4z'=0,$$

затем исключаем $z$ и $z'$ из полученного уравнения и двух данных уравнений. В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $y$:

$$y''-y'-2y=12x^2.$$

Решая его как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), найдем

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-6x^2+6x-9.$$

Вторую неизвестную функцию $z$ находим из первого уравнения данной системы, подставляя в него найденное выражение функции $y$ и ее производной $y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}-12x+6$:

$$z=\frac{y'+2y}{4}=\frac{1}{4}C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-3x^2-3.$$

Совокупность двух найденных функций есть искомое общее решение данной системы.

2) Дифференцируем по $x$ первое уравнение:

$$6u''-u'-7v'+5w'=10e^x$$

и заменяем в результате производные $v'$ и $w'$ их выражениями из второго и третьего уравнений:

$$36u''-6u'+31u+v-11w=50e^x. \qquad (\alpha)$$

Полученное уравнение опять дифференцируем по $x$:

$$36u'''-6u''+31u'+v'-11w'=50e^x$$

и опять заменяем в результате производные $v'$ и $w'$ указанными их выражениями:

$$216u'''-36u''+186u'-25u+41v-19w=322e^x. \qquad (\beta)$$

Далее из первого уравнения данной системы и уравнения $(\alpha)$ определяем $v$ и $w$ через $x$, $u$, $u'$, $u''$:

$$v=\frac{5}{2}u''+\frac{1}{2}u'+2u-5e^x, \qquad w=\frac{7}{2}u''-\frac{1}{2}u'+3u-5e^x \qquad (\gamma)$$

и, внося их в уравнение $(\beta)$, получим дифференциальное уравнение третьего порядка с одной неизвестной функцией $u$

$$u'''+u'=2e^x.$$

Интегрируя это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), находим

$$u=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x.$$

Подставляя найденное выражение функции $u$ и ее производных $u'$ и $u''$ в равенства ($\gamma$), находим две другие искомые функции:

$$v = 2C_1 + \frac{1}{2}(C_3 - C_2)\cos x - \frac{1}{2}(C_3 + C_2)\sin x,$$

$$w = 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos x + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\sin x + e^x.$$

В решении последней задачи показан общий способ приведения системы линейных дифференциальных уравнений к одному уравнению. Но во многих случаях это можно сделать проще.

**1201.** Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t; \qquad \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(\pi) = 1$, $y(\pi) = 2$.

Решение. Сначала находим общее решение данной системы. Дифференцируем по $t$ первое уравнение: $x'' + 2x' + y' = \cos t$ и, заменяя в результате производную $y'$ ее выражение через $t$ и $x'$, определяемым из данной системы, получим уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $x$:

$$x'' + 2\sin t = 0.$$

Решая его как простейшее уравнение высшего порядка путем двукратного интегрирования обеих частей (§ 6) или как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (§ 8), найдем

$$x = C_1 t + C_2 + 2\sin t. \qquad (a)$$

Подставляя найденную функцию $x$ и ее производную $x' = C_1 + 2\cos t$ в первое уравнение данной системы, найдем

$$y = -2C_2 - C_1(2t + 1) - 2\cos t - 3\sin t. \qquad (б)$$

Совокупность функций $x$ и $y$ есть общее решение данной системы.

Далее, исходя из заданных начальных условий, определяем значения постоянных $C_1$ и $C_2$. Из первого условия: $x = 1$ при $t = \pi$ и равенства ($a$) имеем уравнение

$$1 = C_1\pi + C_2,$$

а из условия: $y = 2$ при $t = \pi$ и равенства (б) имеем второе уравнение с неизвестными $C_1$ и $C_2$

$$2 = -2C_2 - C_1(1 + 2\pi) + 2.$$

Решая эти уравнения как систему, найдем: $C_1 = -2$, $C_2 = 1 + 2\pi$.

Наконец, подставляя эти значения $C_1$ и $C_2$ в общее решение, получим искомое частное решение данной системы, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$x=1-2(t-\pi)+2\sin t;\quad y=4(t-\pi)-2\cos t-3\sin t.$$

**1202.** Решить систему $y''-z=0;\ z'+8y=0$.

Решение. Дифференцируя первое уравнение, определяем $z'$, и, подставляя ее во второе уравнение, получим $y'''+8y=0$. Отсюда находим (§ 7)

$$y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x).$$

Дважды дифференцируя $y$ и подставляя в первое уравнение, находим

$$z=4C_1e^{-2x}+2e^x\left[(\sqrt{3}\,C_3-C_2)\cos\sqrt{3}\,x-(\sqrt{3}\,C_2+C_3)\sin\sqrt{3}\,x\right].$$

Решить систему уравнений:

**1203.** $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+3z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+y=0.\end{cases}$ **1204.** $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}-2u-4v=\cos t,\\ \dfrac{dv}{dt}+u+2v=\sin t.\end{cases}$

**1205.** $\dfrac{du}{dx}+u-v-w=0;\ \dfrac{dv}{dx}-u+v-w=0;\ \dfrac{dw}{dx}-u-v-w=0.$

Найти частное решение системы уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

**1206.** $\dfrac{dx}{dt}+3x+y=0,\quad \dfrac{dy}{dt}-x+y=0;\quad x(0)=1,\quad y(0)=-1.$

**1207.** $\dfrac{du}{dx}+4v=\cos 2x,\quad \dfrac{dv}{dx}+4u=\sin 2x;\quad u(0)=0,\quad v(0)=0{,}1.$

## § 14. Уравнения математической физики

Многие физические задачи сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые поэтому и называются уравнениями математической физики.

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, являются:

I. Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$,

представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и многие другие задачи о распространении колебаний в однородной среде.

II. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка параболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о распространении тепла в однородной среде, о фильтрации жидкостей или газов и многие другие задачи.

III. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, представляющее простейшее уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о свойствах стационарных электромагнитных полей, о стационарном распределении тепла в однородном теле, о потенциале скорости безвихревого течения жидкости и многие другие задачи о свойствах стационарных (установившихся) процессов.

Задача интегрирования уравнения с частными производными, т. е. задача отыскания функции, удовлетворяющей этому уравнению, имеет бесчисленное множество решений. Например, уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$, откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не зависит от $y$, а является некоторой произвольной (дифференцируемой) функцией только от одной переменной $x$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}=f(x)$. Интегрируя это равенство по $x$, получим $u=F(x)+C$. Постоянная интегрирования $C$ есть постоянная относительно $x$, но она может быть любой (дифференцируемой) функцией от $y$, т. е. $C=\varphi(y)$. Поэтому *общее решение данного уравнения с частными производными второго порядка содержит две произвольные функции*: $u=F(x)+\varphi(y)$. А подставляя вместо произвольных функций $F$ и $\varphi$ различные определенные функции, можно получить из этого общего решения бесчисленное множество различных частных решений данного уравнения:

$$u=x-2y+1; \quad u=x^3+\sin 3y; \quad u=7; \ \ldots$$

*В конкретных задачах*, сводящихся к уравнениям математической физики, *всегда ищется не общее, а частное решение* уравнения, удовлетворяющее некоторым определенным условиям, которые называются краевыми условиями.

Для решения уравнений математической физики обычно применяется метод Фурье:

Вначале ищутся частные решения данного уравнения в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента. Затем, исходя из заданных краевых условий, определяются значения произвольных постоянных, содержащихся в этих частных решениях. В результате искомое решение, удовлетворяющее и данному уравнению и данным краевым условиям, получается или в виде ряда, составленного из найденных частных решений, или в виде несобственного интеграла с бесконечными пределами. Этот метод разъясняется в решении следующих задач.

**1208.** Найти частное решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, удовлетворяющее краевым условиям:

1) $u(0, t) = 0$, 2) $u(l, t) = 0$,

3) $u(x, 0) = \varphi_1(x)$, 4) $u'_t(x, 0) = \varphi_2(x)$.

Решение. По методу Фурье вначале ищем частные решения данного уравнения в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от $x$, а другая только от $t$:

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{1}$$

Найдя производные $u''_{xx} = TX''_{xx}$, $u''_{tt} = XT''_{tt}$ и подставив их в данное уравнение, получим

$$XT'' - a^2TX'' = 0, \quad \text{или} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T}.$$

В последнем равенстве переменные разделены. Левая его часть не зависит от $t$, а правая не зависит от $x$. Это возможно лишь в том случае, когда обе части равенства не зависят ни от $t$, ни от $x$, т. е. представляют одну и ту же постоянную. Обозначив эту постоянную через $-\lambda^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \text{и} \quad \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2, \tag{a}$$

или

$$X'' + \lambda^2X = 0 \quad \text{и} \quad T'' + \lambda^2a^2T = 0.$$

Решая их как линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (§ 7), найдем

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x; \qquad T = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

Подставляя эти выражения для $X$ и $T$ в равенство (1), получим

$$u(x, t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t). \tag{2}$$

Далее, исходя из данных краевых условий, определим значения постоянных. Подставляя в равенство (2) заданные значения $x = 0$, $u = 0$ (первое условие) и $x = l$, $u = 0$ (второе условие) и сократив на множитель $T(t) \neq 0$, получим

$$0 = A\cos 0 + B\sin 0, \quad 0 = A\cos\lambda l + B\sin\lambda l.$$

Из первого уравнения находим $A = 0$, а из второго следует $\sin\lambda l = 0$ (ибо $B \neq 0$ при $A = 0$), откуда определяется параметр

$\lambda=\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, который был также произвольным *.

Каждому значению $\lambda$ (или $n$) соответствует частное решение вида

$$u_n=X_nT_n=\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{l}+\beta_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $\alpha_n=B_nC_n$, $\beta_n=B_nD_n$ — произвольные постоянные.

Вследствие линейности и однородности заданного уравнения сумма его решений также будет его решением. Поэтому и сумма ряда

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{l}+\beta_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

есть решение данного уравнения, удовлетворяющее условиям 1) и 2).

Для определения постоянных $\alpha_n$ и $\beta_n$ используем два последних краевых условия. Подставляя в равенство (3) $t=0$, $u=\varphi_1(x)$ (третье условие), получим

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Дифференцируя по $t$ решение (3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{an\pi}{l}\left(\beta_n\cos\frac{an\pi t}{l}-\alpha_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и подставляя в результат $t=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi_2(x)$ (четвертое условие), получим

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{an\pi}{l}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) представляют разложения заданных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в интервале $(0, l)$ в неполные ряды Фурье, содержащие только синусы. Коэффициенты таких разложений определяются по известной формуле, гл. IX, § 7:

$$\text{Если } f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ то } b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{$*$}$$

---

* Если в равенствах ($a$) вместо $-\lambda^2$ взять $+\lambda^2$, то $X=Ae^{-\lambda x}+Be^{\lambda x}$, а для такого вида функции $X$ выполнение условий 1) и 2) возможно лишь при $X\equiv 0$.

Согласно этой формуле

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad \beta_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6}$$

Следовательно, искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям, есть функция (3), где постоянные $\alpha_n$ и $\beta_n$ определяются формулами (6).

Очевидно, что при различных исходных данных $a$, $l$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ по формулам (6) будут получаться различные значения для $\alpha_n$ и $\beta_n$, а следовательно, и различные ряды (3) для функции $u(x, t)$, удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям.

Решению этой задачи можно дать, например, следующее физическое истолкование. Натянутая струна, закрепленная концами в точках $x=0$ и $x=l$ оси $Ox$, в начальный момент времени $t=0$ имела форму кривой $u=\varphi_1(x)$, а каждая ее точка с абсциссой $x$ имела скорость $u'_t=\varphi_2(x)$; затем эта струна, предоставленная самой себе, колеблется, оставаясь в плоскости $xOu$. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. $\left(\text{Параметр } a^2=\frac{h}{\rho}\right.$, где $h$ — натяжение, $\rho$ — плотность струны.$\Big)$ Найденное его решение $u(x, t)$ определяет форму струны в любой момент времени $t$.

**1209.** Найти решение уравнения с частными производными $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$1)\ u(0, t)=0, \quad 2)\ u(l, t)=0, \quad 3)\ u(x, 0)=\varphi(x).$$

Решение. Пользуясь методом Фурье, полагаем

$$u(x, t)=X(x)\,T(t).$$

Тогда заданное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2$$

и распадается на два уравнения

$$X''+\lambda^2X=0 \quad \text{и} \quad T'+a^2\lambda^2T=0,$$

решая которые, найдем

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x, \quad T=Ce^{-a^2\lambda^2t},$$

$$u(x, t)=e^{-a^2\lambda^2t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x),$$

где $\alpha=AC$ и $\beta=BC$ — произвольные постоянные.

Используя первое условие: $u=0$ при $x=0$ и второе условие: $u=0$ при $x=l$, получим

$$0=\alpha\cos 0+\beta\sin 0, \quad 0=\alpha\cos\lambda l+\beta\sin\lambda l,$$

откуда следует: $\alpha=0$, $\lambda=\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Как и в решении предыдущей задачи, каждому значению $\lambda(n)$ соответствует частное решение

$$u_n=\beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

сумма которых $u(x, t)$ также будет решением данного уравнения

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{7}$$

Используя третье условие: $u=\varphi(x)$ при $t=0$, получим для определения $\beta_n$ равенство

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Это равенство есть разложение в интервале $(0, l)$ данной функции $\varphi(x)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы. Поэтому согласно формуле $(*)$

$$\beta_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{8}$$

Таким образом, сумма ряда (7), коэффициенты которого определяются формулами (8), есть частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данным краевым условиям.

Решенная задача может иметь такой физический смысл.

Однородный стержень длины $l$, имеющий теплонепроницаемую боковую поверхность, расположен между точками $x=0$ и $x=l$ оси $Ox$; на его концах поддерживается постоянная температура $u=0$ и в начальный момент $t=0$ распределение температуры вдоль стержня есть известная функция $u=\varphi(x)$. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение распространения тепла в стержне $\left(\text{параметр } a^2=\frac{k}{c\rho}\right.$, где $k$—коэффициент теплопроводности, $c$—теплоемкость, $\rho$—плотность стержня$\Big)$, а полученное его решение $u(x, t)$ определяет распределение температуры вдоль стержня в любой момент времени $t$.

Распространению тепла в стержне неограниченной длины (бесконечного в обе стороны) соответствует то же дифференциальное уравнение (II) и единственное начальное условие: $u(x, 0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<+\infty$, определяющее распределение температуры $u$ вдоль этого стержня в начальный момент $t=0$.

По методу Фурье, полагая $u=X(x)T(t)$, и в этой задаче получаем частные решения вида

$$u=e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x). \tag{9}$$

Но здесь параметр $\lambda$ является совершенно произвольным, ибо нет никаких оснований (условий) для выбора каких-то определенных его значений. Здесь, в формуле (9), $\lambda$ может иметь любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому здесь решением будет не сумма ряда, составленного из частных решений, как это было в предыдущих задачах, а несобственный интеграл по параметру $\lambda$:

$$u(x, t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)\,d\lambda. \tag{10}$$

Для определения коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ используем заданное условие $u(x, 0)=\varphi(x)$,— подставляем $t=0$, $u=\varphi(x)$ в последнее равенство:

$$\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Сопоставляя полученное равенство с формулой Фурье (гл. IX, § 8) для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\cos\lambda z\,dz\right]\cos\lambda x+\right.$$
$$\left.+\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\sin\lambda z\,dz\right]\sin\lambda x\right\}d\lambda,$$

находим для $\alpha$ и $\beta$ следующие выражения:

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\cos\lambda z\,dz,\qquad \beta(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\sin\lambda z\,dz. \tag{11}$$

Итак, искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, или решение задачи о распространении тепла в бесконечном стержне, получено здесь в виде несобственного интеграла (10), где $\alpha$ и $\beta$ определяются формулами (11).

Найти частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям:

**1210.** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad u(0,\ t) = 0, \quad u'_x(l,\ t) = 0,$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,\ 0) = 0.$$

**1211.** $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ u(0,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = \varphi(x),$

$$0 \leqslant x < +\infty,\ t \geqslant 0.$$

**1212.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u(0,\ y) = 0,\ u(a,\ y) = 0,$

$$u(x,\ 0) = \varphi_1(x), \quad u(x,\ b) = \varphi_2(x).$$

**ОТВЕТЫ**

**6.** $-\infty < y \leqslant -2$, $4 \leqslant y < +\infty$; $-\infty < x < -1$, $1 < x < +\infty$. **7.** $-1$; $9$; $-3$; $a^2+5a+3$; $a^2+3a$; $a^4+3a^2-1$; $a^4+6a^3+7a^2-6a+1$. **8.** $4$; $2$; $\frac{2(3a+8)}{a^2+4}$; $\frac{x(4x+3)}{x^2+1}$; $\frac{x^2+1}{3x+4}$; $\frac{3b+4}{b^2+1}$. **9.** $a+b$, $2a$. **11.** Функции 1) и 6) нечетные; 2) и 4) четные; 3) и 5) не четные и не нечетные. **13.** $1 \leqslant x < 2$, $2 < x < +\infty$; $-1 \leqslant t \leqslant 5$; $-\infty < \alpha < -3$, $3 < \alpha < +\infty$; $2k\pi \leqslant \varphi \leqslant (2k+1)\pi$; $(4k-1)\frac{\pi}{4} < x < (4k+1)\frac{\pi}{4}$, $1 < x \leqslant 2$. **18.** $0 \leqslant x \leqslant 6$; $|x| \leqslant 2\sqrt{2}$; $[-4; -1]$, $[1; 4]$; $[0, +\infty]$. **33.** $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$—бесконечно большие величины: $\alpha_1 \longrightarrow +\infty$, $\alpha_2 \longrightarrow -\infty$, $\alpha_3 \longrightarrow \infty$; $\alpha_4$, $\alpha_5$ и $\alpha_6$—бесконечно малые величины: $\alpha_4 \longrightarrow +0$, $\alpha_5 \longrightarrow -0$, $\alpha_6 \longrightarrow 0$. **34.** $\lim x = 1$; $\lim z = 3$, $\lim v = 0$; $\lim y$ и $\lim u$ не существуют. **36.** 1) $-\infty$; 2) $+\infty$; 3) $\infty$; 4) $0$; 5) $+\infty$; 6) не существует. **37.** $\lim s_n = 0$; $\lim P_n = 3l$. **41.** $0$. **42.** $2$. **43.** $8x$. **44.** Не существует. **45.** $8$; $0$; не существует. **46.** $\lim \alpha_n = \pi$; $\lim h_n = R$—радиусу описанной окружности. **48.** $0$. **49.** $1$. **50.** $1$. **51.** $\frac{1}{2}$. **55.** $3$. **56.** $\frac{2}{3a}$. **57.** $0$. **58.** $\frac{5}{9}$. **59.** $-\frac{3}{2}$. **60** $-\sqrt{2}$. **61.** $-2$. **62.** $-4$. **63.** $4$. **64.** $2$. **65.** $2$. **66.** $2a$. **67.** $\frac{3}{4}$. **68.** $\frac{1}{8}$. **69.** $3$. **70.** $1$. **72.** $2$. **73.** $0$. **74.** $2$. **75.** $-\sqrt{2}$. **76.** $0{,}1$. **77.** $2$. **79.** $0{,}5$. **80.** $2$. **81.** $x$. **82.** $1$. **84.** $+\infty$. **85.** $0{,}5$. **86.** $1$. **87.** $0$ **89.** $e^{kn}$. **90.** $e^{-1}$. **91.** $e^2$. **92.** $e^3$. **93.** $9$. **94.** $\frac{1}{2}$. **95.** $1$. **96.** $\frac{a}{b}$. **97.** $\frac{1}{2}$. **98.** $\frac{1}{2}$. **99.** $0$. **100.** $\frac{\pi}{4}$. **101.** $2\cos x$. **102.** $-\infty$. **103.** $e$ **104.** $0$. **105.** $\frac{17}{7}$. **106.** $\frac{1}{2}$ **107.** $\frac{3}{5}$ **108.** $e^{-3}$. **109.** $-1$. **110.** $e^{-0,5}$. **111.** $x_1 \longrightarrow -\frac{c}{b}$; $x_2 \longrightarrow \infty$. **112.** $\lim S_n = \frac{(a+b)h}{2}$; $\lim P_n = 2(b+h)$. **117.** $5$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}$; $0$; $1$; $-1$. **122.** 1) Функция имеет бесконечные разрывы в точках $x=-1$, $x=0$ и $x=4$; 2) функция разрывна в точке $x=1$, где ее скачок равен $-2$; 3) функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=-\frac{1}{2}$; 4) функция не имеет точек разрыва, она определена и непрерывна в интервалах $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$; 5) функция имеет бесконечные разрывы в точках $x=\pm 1$; 6) функция имеет бесконечные разрывы в точках $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

**123.** 1) Функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$; 2) функция разрывна в точке $x=-2$, где ее скачок равен $2$; 3) функция разрывна в точке $x=0$, где ее скачок бесконечный, и в точке $x=1$, где ее скачок равен $-4$; 4) функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$;

5) функция разрывна в точке $x=-1$, где ее скачок равен $-2$, и в точке $x=1$, где ее скачок бесконечный; 6) функция разрывна в точке $x=2$, где ее скачок равен 1. **125.** $2x+5$; $-\frac{2}{x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; $3\cos 3x$; $2\sec^2 2x$.

**128.** $1+6x-x^2$. **129.** $1-\frac{1}{\sqrt{x}}$. **130.** $1-\sqrt{\frac{a}{x}}$. **131.** $-\frac{t+2}{t^3}$.

**132.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-3\sqrt{x}$. **133.** $\frac{6}{(t+3)^2}$. **134.** $\frac{12x}{(x^2+3)^2}$. **135.** $x(2\sin x+x\cos x)$.

**136.** $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **137.** $3(1+\operatorname{cosec}^2 t)\cos t$. **138.** $\frac{1}{8}$. **139.** 0. **140.** $-\pi$. **141.** 0

**142.** $\frac{5}{x}$. **145.** $15(3x+2)^4$. **146.** $2\cos(2x-1)$. **147.** $-\frac{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

**148.** $\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$. **149.** $a\cos at\cos\frac{t}{a}-\frac{1}{a}\sin at\sin\frac{t}{a}$. **150.** $-\sin\varphi$.

**151.** $-\frac{12\cos 4y}{(1+\sin 4y)^4}$. **152.** $\operatorname{tg}^4 z$. **153.** $\frac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$. **154.** $a(\cos a\varphi+b\sin a\varphi)$.

**155.** 0. **156.** 0 **157.** $-\sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8}}$. **159.** $(2^x+3\cdot 2^{3x})\ln 2$. **160.** $2x(a^{x^2}\ln a+e^{-x^2})$.

**161.** $\frac{3e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$. **162.** $e^{a\varphi}(a\sin b\varphi+b\cos b\varphi)$. **163.** $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$.

**164.** $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$. **165.** $2\operatorname{tg}x\sin^2 x$. **166.** $-\ln x$. **167.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **168.** $\frac{}{1-x^2}$.

**169.** $\frac{1}{2}$. **171.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **172.** $\frac{1}{1+x^2}$. **173.** $\frac{2}{1+x^2}$. **174.** $\frac{2}{\varphi\sqrt{\varphi^4-1}}$.

**175.** $\arccos x$. **176.** $\frac{1}{|x|\sqrt{4x^2-1}}$. **177.** $-\frac{\pi}{4}$. **178.** 2. **179.** 1; $\frac{1}{2}$.

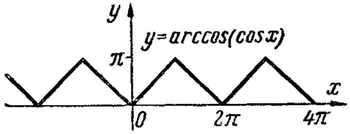
**182.** $\left(1+x^{-\frac{1}{3}}\right)^2$. **183.** $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **184.** $\frac{6x}{(x^2-1)^4}$. **185.** $-\frac{2\sin 4\alpha}{\sqrt{\cos 4\alpha}}$.

**186.** $-\sin 4t$. **187.** $(1+2a\varphi\operatorname{tg}a\varphi)\sec^2 a\varphi$. **188.** $e^t\cos t(3\cos 2t+\sin 2t-1)$.

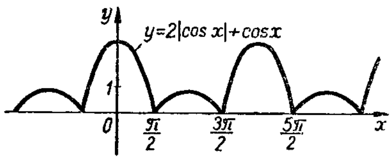
**189.** $32x^3\ln^2 x$. **190.** $e^{2v}\left(\operatorname{cosec}v+2\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)$. **191.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$. **192.** $-\frac{t^4+1}{t(t^4-1)}$.

**193.** $\sec x$. **194.** $-2\sin\ln t$. **195.** $\frac{5^{2x}\ln 5}{\sqrt{4+5^{2x}}}$. **196.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)\sin x}}$.

**197.** $\frac{\sin x}{|\sin x|}$; $y'=1$ в интервалах, где $\sin x>0$; $y'=-1$ в интервалах, где




Черт. 213




Черт. 214

$\sin x<0$; в точках $x=k\pi$, где $\sin x=0$, функция не дифференцируема (черт. 213). **198.** $\frac{x^2}{x^4-1}$; $-\frac{4}{15}$ **199.** $2\sqrt{4-x^2}$; 4. **201.** $-\frac{3}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, черт. 214. **202.** 0; $2e$; $y'_{(-)}(0)=-1$, $y'_{(+)}(0)=1$.

**204.** $ay\left(1+\ln\frac{x}{a}\right)$. **205.** $\frac{y}{x^2}\ln\frac{e}{x}$. **206.** $r(\varphi\operatorname{ctg}\varphi+\ln\sin\varphi)$ **207.** $\frac{1+3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

**208.** $-\frac{(t+1)(5t^2+14t+5)}{(t+2)^4(t+3)^5}$. **209.** $\frac{y(x^3-3x^2-x-1)}{x(x-1)(x^2+1)}$. **210.** $Se^{\varphi}\left(\frac{1}{\varphi}+\ln\varphi\right)$.

**211.** $vx^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. **213.** $-125\cos 5x$. **214.** $a^2(47+60\ln a)$.

**215.** $1920(2p-1)$. **216.** $e^{3x}(9x^2+12x+2)$. **218.** $(2\ln a)^n a^{2x}$. **219.** $m(m-1)(m-2)\ldots$ $\ldots(m-k+1)$. **220.** $10\cos x-x\sin x$. **221.** $(n-1)!$ **223.** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$. **224.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

**225.** $-\frac{e^{-x}\sin y+e^{y}\sin x}{e^{-x}\cos y+e^{y}\cos x}$. **226.** $\frac{y(x+y\ln y)}{x(y+x\ln x)}$. **227.** $\frac{2a^3xy}{(ax+y^2)^3}$. **228.** $-\frac{2(y^2+1)}{y^5}$.

**229.** $\frac{(e^y-e^x)(e^{x+1}-1)}{(e^y+1)^3}$. **230.** $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$ **233.** $\frac{3}{2}t$. **234.** $\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$.

**235.** $-\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^2 t$. **236.** $\frac{\sec^3\alpha}{\alpha}$. **237.** $\frac{1}{2}$. **238.** $\frac{32}{27a}$. **243.** $y-2x=5$; $x+2y=5$.

**244.** $3y-4x=1$, $3x+4y=18$; $4x+3y=-1$; $3x-4y=18$. **245.** $x+y=4$; $x-y=2$. **246.** $\sqrt{2}(x+y)=a$; $y=x$. **247.** $y=\pm(x-\pi)$. **248.** В точке (0; 0): $y=-2x$, $x=2y$; $y=2x$, $x=-2y$. В точке (2; 0): $2x+y=4$, $x-2y=2$; $2x-y=4$, $x+2y=2$. **249.** 45°; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$. **250.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **251.** 90°.

**252.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$. **253.** 90°. **254.** $\operatorname{arc\,tg}3$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. **255.** $(-1, -2)$; $(2, 9)$; $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. **256.** (3; 4); (—3; —4). **257.** (1; 0), (2; 1); таких точек нет; (1, 3); (1, 1); (1; —3). **258.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{4\sqrt{3}}{13}$. **259.** 90°. **260.** $\operatorname{arc\,tg}3$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{19}$.

**261.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{5}$. **266.** $\frac{dQ}{dt}=k(a-Q)$. **267.** $\frac{dy}{dt}=-4a^2t^3$. **268.** $\frac{ds}{dt}=16\pi r\frac{см^2}{сек}$; $\frac{dv}{dt}=8\pi r^2\ см^3/сек$. **269.** $v=(6t-t^2-8)e^{-t}$; $w=(t^2-8t+14)e^{-t}$; $t_1=2$, $t_2=4$.

**270.** $v=-ae^{-at}[\cos(at+b)+\sin(at+b)]$; $F=2ma^2e^{-at}\sin(at+b)$.

**273.** $bm(a+bx)^{m-1}dx$. **274.** $t^2e^{-t}dt$. **275.** $-x^{n-1}\ln x\,dx$. **276.** $\cos\varphi\ln\operatorname{cosec}\varphi\,d\varphi$.

**277.** —29, 90. **278.** 0,87. **279.** —0,31. **280.** —0,39. **281.** 0,0140. **282.** 0,9976.

**283.** 60°3′. **284.** 0,0100. **285.** 1,9875. **288.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$; $2x+y+2z=6$.

**289.** $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$; $y=0$. **290.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$; $x+y=0$. **291.** $\frac{2}{3}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$.

**294.** $\bar{v}=a\cos t\cdot\bar{j}-a\sin t\cdot\bar{i}$; $\bar{w}=-\bar{r}$. **295.** $\bar{v}=3\bar{j}+(4-2t)\bar{k}$; $\bar{w}=-2\bar{k}$.

**300.** $1+\frac{x\ln 3}{1!}+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\ldots+\frac{x^n\ln^n 3}{n!}$; $R_n=\frac{x^{n+1}\ln^{n+1}3}{(n+1)!}3^{\theta x}$, $R_n\to 0$ при любом $x$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\ldots\pm\frac{x^n}{n!}\right)$, $R_n=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\theta x-\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right|$, $R_n\to 0$ при любом $x$; $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n!}$, $R_n\to 0$

при любом $x$. **301.** $x+\frac{x^3}{3}$; $x-\frac{x^3}{2}$; $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}$. **302.** $e\left[1+\frac{x-a}{1!\,a}+\frac{(x-a)^2}{2!\,a^2}+\right.$ $\left.+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!\,a^n}\right]$, $R_n\to 0$ при любом $x$; $\cos a+\frac{x-a}{1!}\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)+$ $+\frac{(x-a)^2}{2!}\cos\left(a+2\frac{\pi}{2}\right)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}\cos\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)$, $R_n\to 0$ при любом $x$. **303.** $-1+\frac{x+1}{3}+\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{5(x+1)^3}{81}+\frac{10(x+1)^4}{243}$; $-1+\frac{9}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^2-$ $-\frac{27}{8}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^4$; $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{10}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$.

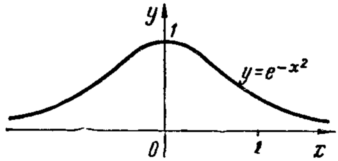
**304.** 0,309; 1,648; 4,121; 3,004. **305.** 0,9848; 1,3955; 2,0022; 0,5878. **307.** $\frac{1}{3}$.

**308.** $-3$. **309.** $+\infty$. **310.** $\frac{1}{2}$. **311.** $\frac{3}{5}$. **312.** $-1$. **313.** 1. **314.** $\frac{2}{5}$. **316.** $-\frac{3}{5}$.

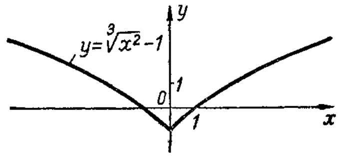
**317.** 0. **318.** $+\infty$. **319.** 2. **320.** 1. **321.** $-\frac{2}{\pi}$. **322.** 0. **323.** $-1$. **325.** $e$. **326.** $e^a$. **327.** 1.

**328.** $e^{-1}$. **329.** $e^{-\frac{k^2}{2}}$. **330.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **333.** 1) Функция возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$; 2) функция возрастает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ и убывает в интервале $(-1; 1)$; 3) при $k>0$ функция монотонно возрастает, а при $k<0$ монотонно убывает на всей числовой оси; 4) функция убывает в интервале $(-\infty, -3]$ и возрастает в интервале $[3, +\infty]$; 5) функция убывает на всей числовой оси, 6) функция возрастает на всей числовой оси. **336.** $y_{\max}=y(0)=0$; $y_{\min}=y(4)=-32$. **337.** $y_{\max}=y(\pm 1)=4$; $y_{\min}=y(0)=3$. **338.** Нет экстремума. **339.** $y_{\min}=y(-2)=-1$, $y_{\max}=y(2)=1$. **340.** $y_{\min}=$ $=y(\pm 2)=4$. **341.** $y_{\max}=y(0)=3$. **342.** $y_{\min}=y(0{,}5)=8$; $y_{\max}=y(1)=10$. **343.** $y_{\max}=y(-3)=3\sqrt[3]{3}$; $y_{\min}=y(2)=-\sqrt[3]{44}$. **344.** $y_{\min}=y\left(-\frac{\ln 2}{3}\right)=$ $=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **345.** Нет экстремума. **346.** $y_{\min}=y(0)=0$; $y_{\max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$.

**347.** $y_{\min}=y(e)=e$. **348.** $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\sqrt{2}$; $y_{\min}=y\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)=$ $=-\sqrt{2}$. **349.** $y_{\min}=y(0)=y(3)=0$. **351.** $y_{нб}=y_{\max}=y(2)=10$; $y_{нм}=$ $=y(0)=-10$. **352.** $u_{нб}=u(1)=1$; $u_{нм}=u_{\min}=u(2)=2(1-\ln 2)$. **353.** $v_{нб}=$ $=v_{\max}=v\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$; $v_{нм}=v(0)=v\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **354.** $y_{нб}=y_{\max}=y(0)=1$;

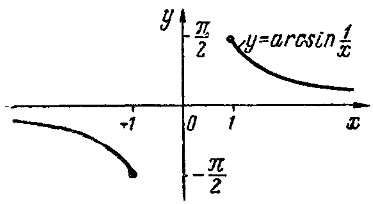



Черт. 215

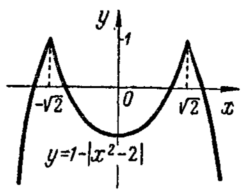



Черт. 216

наименьшего значения функция не имеет (черт. 215). **355.** $y_{нм}=y_{\min}=$ $=y(0)=-1$; наибольшего значения функция не имеет (черт 216). **360.** Прямоугольник должен быть квадратом. **361.** 20 *м* и 40 *м*. **362.** 6 *см*. **363.** 16 *м* от более сильного источника света. **364.** Центральный угол сектора должен быть равен $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ радианов, или около 294°. **365.** $\cos\alpha=\frac{1}{k}$ при условии, если $k\geqslant\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$. **367.** 60°. **368.** $l\approx 8{,}3$ *м* (определяется как минимум функции $l=2\sec\varphi+4\operatorname{cosec}\varphi$, где $\varphi$ — угол между бревном и одной из стенок канала). **369.** $t=\frac{3v_1+5v_2}{v_1^2+v_2^2}$. **370.** $\varphi=45°$. (Использовать зависимость пути от времени при равномерно-ускоренном движении.) **372.** Точка перегиба (1; —2); при $-\infty<x<1$ кривая выпукла вверх, а при $1<x<+\infty$ выпукла вниз. **373.** Точки перегиба (—3; 294) и (2; 114); при $-\infty<x<-3$ и $2<x<+\infty$ кривая выпукла вверх, а при $-3<x<2$ выпукла вниз **374.** Кривая выпукла вниз во всей области своего расположения: $-\infty<x<-2$ и $2<x<+\infty$. **375.** Точка перегиба (0; 2); при $x<0$ кривая

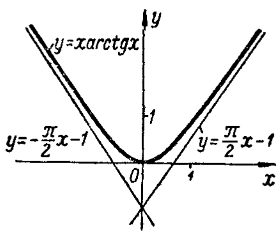



Черт. 217

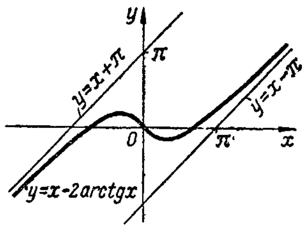



Черт. 218

выпукла вниз, а при $x>0$ выпукла вверх. **376.** Кривая не имеет точек перегиба, но меняет направление выпуклости в точке разрыва $x=0$: слева от нее она выпукла вверх, а справа выпукла вниз (черт. 18). **377.** Точек перегиба кривая не имеет; направление ее выпуклости меняется в точках разрыва $x=\pm 2$; при $-\infty<x<-2$ и $2<x<+\infty$ кривая выпукла вниз, а при $-2<x<2$ она выпукла вверх (черт. 21). **378.** Кривая не имеет точек перегиба; при $-\infty<x<-1$ она выпукла вверх, а при $1<x<+\infty$ выпукла вниз (черт. 217). **379.** Точки перегиба $(-\sqrt{2};\ 1)$ и $(\sqrt{2};\ 1)$ в угловых точках кривой, где $y''$ не существует; при $-\infty<x<-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}<x<+\infty$ кривая выпукла вверх, а при $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ она выпукла




Черт. 219



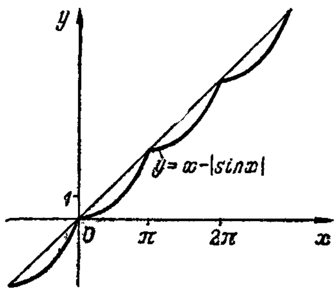

Черт. 220

вниз (черт. 218). **381.** $x=-2$ и $y=2x-4$. **382.** $x=-1$, $x=1$ и $y=x$. **383.** $y=0$ при $x\to+\infty$. **384.** $y=\frac{\pi}{2}x-1$ при $x\to+\infty$; $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ при $x\to-\infty$ (черт. 219). **385.** $x=0$, $y=2x$. Наклонную асимптоту кривая пересекает бесчисленное множество раз в точках $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **386.** $x=0$, $y=x$.

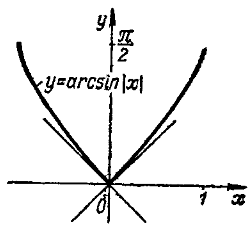
**388.** Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. График пересекает оси координат в точках $(-3;\ 0)$ и $(0;\ 0)$. Асимптот нет. $y_{\max}=y(-2)=4$; $y_{\min}=y(0)=0$. Точка перегиба $(-1;\ 2)$. **389.** Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. График пересекает оси координат в точках $(0;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. Асимптот нет. $y_{\min}=y\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{27}{16}$. Точки перегиба $(1;\ 0)$ и $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$. **390.** Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x=2$, которая является точкой бесконечного разрыва. График пересекает оси координат в точках $(-1;\ 0)$ и $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$. Асимптоты $x=2$ и $y=x+4$; $y_{\max}=y(-1)=0$; $y_{\min}=y(5)=12$. Точек перегиба нет (гипербола). **391.** Функция определена и непрерывна всюду. Нечетная. График пересекается с осями координат только в их начале. Асимптота $y=2x$. Экстремумов нет, функция всюду возрастает. Точки перегиба $\left(-\sqrt{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0;\ 0)$ и $\left(\sqrt{3};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **392.** Функция определена и непрерывна всюду. График пересекает оси координат в точках $(0;\ 1)$ и $(1;\ 0)$. Асимптота $y=-x$ Экстремумов нет, функция всюду убывает. Точки перегиба $(0;\ 1)$ и $(1;\ 0)$. **393.** Область определения и непрерывности $x\geqslant 0$. График пересекает оси координат в точках $(3;\ 0)$ и $(0;\ 0)$ — концевая точка. Асимптот нет. $y_{\min}=y(1)=-2$. Точек перегиба нет. **394.** Функция определена и непрерывна всюду. График пересекается с координатными осями в точках $(-1;\ 0)$, $\left(\frac{19}{8};\ 0\right)$ и $(0;\ -1)$. Асимптот нет. $y_{\max}=y(-1)=0$ (точка возврата); $y_{\min}=y(0)=-1$. Точек перегиба нет. **395.** Функция определена и непрерывна всюду. Нечетная. График пересекает оси координат в их начале. Асимптота $y=0$. $y_{\min}=y(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}\approx-0{,}6$; $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Точки перегиба $\left(-\sqrt{3};\ -\sqrt{\frac{3}{e^3}}\right)$, $(0;\ 0)$ и $\left(\sqrt{3};\ \sqrt{\frac{3}{e^3}}\right)$. **396.** Функция определена и непрерывна всюду; периодична с периодом $2\pi$. Асимптот нет. На отрезке $[0,\ 2\pi]$: график пересекает оси координат в точках $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4};\ 0\right)$ и $(0;\ -1)$; $y_{\max}=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $y_{\min}=y\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; точки перегиба $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{4};\ 0\right)$. **397.** Функция определена и непрерывна всюду, нечетная. Асимптоты $y=x-\pi$ при $x\to+\infty$ и $y=x+\pi$ при $x\to-\infty$; $y_{\max}=y(-1)=\frac{\pi}{2}-1$; $y_{\min}=y(1)=1-\frac{\pi}{2}$. Точка перегиба $(0;\ 0)$ (черт. 220).

**398.** Функция определена и непрерывна всюду, монотонно возрастает. График пересекает оси координат в их начале; асимптот и точек перегиба не имеет. Угловые точки с абсциссами $x=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ расположены на прямой $y=x$, для каждой из этих точек $y'_{(-)}=2$, $y'_{(+)}=0$ (черт. 221). **399.** Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$, четная. График проходит через начало координат. Асимптот нет. $y_{\min}=y(0)=0$ (угловая точка, где $y'_{(-)}=-1$, $y'_{(+)}=1$). Точек перегиба нет. Концевые точки

$\left(-1,\ \frac{2}{\pi}\right)$ и $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ (черт. 222). **403.** 3; 3,25. **404.** 2; 185. **405.** 3; 0,95. **406.** 1; 0,44. **407.** —2,66; 0,52; 2,15. **408.** —3,40; 2,90. **409.** 0,27; 2,25. **410.** 0,21. **417.** $2\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{257^3}}{64}$. **418.** $\frac{1}{2}$. **419.** $4a$. **420.** $1{,}5a\sin 2t$. **421.** $\left(0;\ -\frac{4}{3}\right)$. **422.** $\left(-\frac{11}{2};\ \frac{16}{3}\right)$. **423.** (3; —2). **424.** (—2; 3). **425.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.
**426.** $\left(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4}\right)$. **427.** $8X^3=27Y^2$. **428.** $X^{\frac{2}{3}}-Y^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$. **429.** $X^2+Y^2=a^2$. **433.** $\frac{x^5}{5}$. **434.** $\frac{5}{7}\sqrt[5]{t^7}$. **435.** $-\frac{1}{3y}$. **436.** $\ln|x+3|$. **437.** $\frac{(\alpha-5)^9}{9}$.




Черт. 221




Черт. 222

**438.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. **439.** $\ln(v+\sqrt{v^2+7})$. **440.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|$. **441.** $\arcsin\frac{x}{2}$. **442.** $-3\cos\frac{x}{3}$. **443.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\varphi$. **444.** $\frac{1}{4}e^{4x}$. **445.** $-\frac{3\cdot 5^{-2t}}{2\ln 5}$. **446.** $\frac{\ln|2x+5|}{2}$. **447.** $-\frac{1}{6(3x+2)^2}$. **448.** $\ln|\sin x|$. **450.** $\frac{5}{3}x\sqrt[5]{x}-\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}x\sqrt[3]{x}+5x$. **451.** $\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$. **452.** $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **453.** $2\sqrt{x}(x-1)^2$. **454.** $\frac{x^2}{2}-3\ln(x^2+6)$. **455.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **456.** $\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x$. **457.** $\frac{(x-2)^2}{2}+2\ln|x+2|$. **459.** $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|$. **460.** $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)$. **461.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+\ln|\cos\varphi|$. **462.** $-\frac{3x^2+2a}{15}\sqrt{(a-x^2)^3}$. **463.** $\ln|x-2|-\frac{3x-5}{(x-2)^2}$. **464.** $\frac{2}{15}\times(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x}$. **465.** $\pm\ln\frac{x}{1\pm\sqrt{1+x^2}}$, где «+» соответствует значениям $x>0$, «—» — значениям $x<0$, или короче $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}$.
**466.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|$. **467.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$. **468.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$.

469. $e^x+\ln|e^x-1|$. 470. $\ln|\ln x|$. 471. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sin x+\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}\right)$.
472. $-2\sqrt{2+\cos^2 x}$. 473. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$. 474. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\right.$
$\left.-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right]$. 476. $\sin x-x\cos x$. 477. $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)$. 478. $nx(\ln x-1)$.
479. $-\frac{2x^2+2x+3}{4e^{2x}}$. 480. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$. 481. $\frac{x^2-1}{2}\ln|x-1|-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}$.
482. $t\operatorname{arc\,ctg}t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. 483. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arc\,tg}x$.
484. $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$. 485. $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}\arcsin x$. 486. $\frac{x\ln x}{x+1}-$
$-\ln|x+1|$. 487. $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}$. 491. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$. 491. $\frac{1}{5}\times$
$\times\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{5}$. 493. $\frac{1}{4x-2}$. 494. $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$.
495. $\frac{4}{5}\ln|x|+\frac{11}{5}\ln|x+5|$. 496. $2x+\frac{1}{9}\left(\frac{7}{3x+1}+\ln|3x+1|\right)$. 497. $\frac{1}{2}x^2-$
$-4x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{41}{4}\ln|x+3|$. 498. $\arcsin\frac{2x-1}{3}$. 499. $\ln|x-1+$
$+\sqrt{x^2-2x}|$. 500. $\frac{3}{2}\arcsin 2x-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$. 501. $\sqrt{x^2+6x}-6\ln|x+$
$+3+\sqrt{x^2+6x}|$. 502. $-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}$. 503. $\frac{x+2}{2}\times$
$\times\sqrt{x^2+4x}-2\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|$. 504. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.
507. $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x$. 508. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$. 509. $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x$.
510. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$. 511. $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x$. 512. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+$
$+\frac{1}{32}\sin 4x$. 513. $y+\operatorname{ctg}y-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 y$. 514. $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x+\frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x$. 515. $\frac{1}{2}\sin x-$
$-\frac{1}{22}\sin 11x$. 516. $\frac{\cos(a-b)t}{2(b-a)}-\frac{\cos(a+b)t}{2(a+b)}$. 517. $\frac{\cos 12x}{48}-\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-$
$-\frac{\cos 2x}{8}$. 518. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 z-\operatorname{ctg}^2 z)+2\ln|\operatorname{tg}z|$. 520. $\frac{1}{x}+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$. 521. $\ln\times$
$\times\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$. 522. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 523. $\ln|x-1|-$
$-\frac{2x-1}{(x-1)^2}$. 524. $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$. 525. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-$
$-t^2+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$. 526. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}z$. 527. $\frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.
528. $\frac{x-2}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$ (подынтегральная дробь — элементарная).
529. $-x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ [знаменатель разла-

гается на множители: $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+$ $+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})$. **531.** $6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}$. **532.** $0{,}4(x^2-$ $-x-6)\sqrt{3-x}$. **533.** $-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\ln\left[|x|\left(1-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)^2\right]$. **534.** $\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}$. **535.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. **536.** $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}(x^2-2)\times$ $\times\sqrt{4-x^2}$. **537.** $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x}$; $+$ при $x>0$, $-$ при $x<0$.

**538.** $-\frac{1}{5}x^{-5}(2x^3+1)^{\frac{5}{3}}$. **539.** $\frac{1}{3}\ln\frac{|1-\sqrt{1-x^3}|}{1+\sqrt{1-x^3}}$. **540.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3}$. **541.** $\frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{7}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **542.** $\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}-$ $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}$. **544.** $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. **545.** $\frac{1}{k}\left|\mathrm{tg}\frac{kx}{2}\right|$. **546.** $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\right.$ $\left.-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$. **547.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **548.** $\frac{1}{12}\mathrm{tg}^4 3x-\frac{1}{6}\mathrm{tg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

**549.** $\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)$. **550.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+1)-2\,\mathrm{arctg}\,e^t$. **551.** $2\ln(e^x+1)-x$. **552.** $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x+\ln|\mathrm{tg}\,x|)$. **553.** $\ln(e^x+1)+$ $+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$. **554.** $\frac{2}{3a}\left[\sqrt{(x+a)^3}-\sqrt{x^3}\right]$. **555.** $\frac{x^2}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x\sin 2x}{4}$. **556.** $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}$. **557.** $\frac{1}{3}\ln[(e^x+2)^4|e^x-1|^5]$. **558.** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(3\,\mathrm{tg}\,z)$. **559.** $\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\mathrm{arctg}\,x$. **560.** $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$. **561.** $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\times$ $\times\left(\frac{5x^2-6x+9}{80}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}\right)$. **562.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. **563.** $4\sqrt{1+\sqrt{r}}$. **564.** $\mathrm{cosec}\,t-\frac{1}{3}\mathrm{cosec}^3 t$. **565.** $\frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x$. **566.** $\sqrt{x^2+10x}-$ $-10\ln|x+5+\sqrt{x^2+10x}|$. **567.** $(x^2-x+2)e^x$. **568.** $x(\ln^2 x-4\ln x+5)$. **569.** $2\sec x$. **570.** $\frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{21x^3}$. **571.** $\frac{6x^2+6x+1}{12\sqrt{(4x+1)^3}}$. **572.** $(v+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{v}-$ $-\sqrt{v}$. **573.** $\frac{1-2x}{4(2x+3)^3}$. **574.** $2(x+2)\sqrt{3x^2+3x+4}$. **575.** $\ln\frac{|x|}{x+1}-$ $-\frac{\ln(1+x)}{x}$. **576.** $x^2+\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$. **577.** $\frac{1}{25}(4x+3\ln|4\cos x+3\sin x|)$. **578.** $\frac{x}{2}(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. **579.** $\frac{1}{4}[x\sqrt{1-x^2}+(2x^2-1)\times$ $\times\arcsin x]$. **580.** $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}$. **581.** $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **583.** $\frac{\ln 13}{3}$.

**584.** $\frac{2}{9}$. **585.** $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$. **586.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$. **587.** 0. **588.** 0. **589.** $-\frac{\pi}{2}$. **590.** $2e-1$.

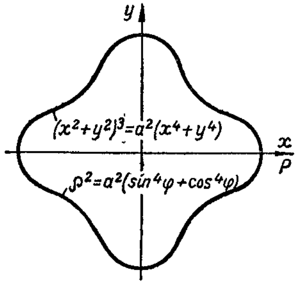
**593.** $\frac{1}{24}$. **594.** $\frac{4-\pi}{2}$. **595.** 3. **596.** $0{,}8\,(2\sqrt[4]{2}-1)$. **597.** $\frac{81\pi}{8}$. **598.** $-\frac{17}{6}$. **599.** $\ln 2$. **600.** $\ln\frac{4}{3}$. **601.** $1{,}5\,(\ln 4-1)$. **602.** $\frac{3(\pi-2)}{2}$ (подстановка $x=6\sin^2 t$). **603.** $\frac{8}{21}$. **605.** 36. **606.** $\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}$. **607.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **608.** $3\pi a^2$. **609.** $\frac{125}{6}$. **610.** $\frac{a^2(e^2-1)}{2e}$. **611.** 6,76. **612.** 1,5. **613.** 0,95. **614.** $a^2$. **615.** $\frac{4}{3}a^2\pi^3$. **616.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **617.** $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$. **618.** $4ab\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$ (перейти к полярным координатам). **622.** $\frac{1}{2}abk^2\pi$. **623.** $\frac{2}{3}ab^2$. **624.** $\frac{16a}{3}$. **626.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **627.** $\pi^2$. **628.** $34\frac{2}{15}\pi$. **629.** $12\pi$. **630.** $\frac{2048\pi}{35}$. **631.** $\frac{128\pi}{3}$. **632.** $\frac{\pi a^3}{15}$. **633.** $2\pi^2a^2b$. **634.** $5a^3\pi^2$. **637.** $\frac{28}{3}$. **638.** $6a$. **639.** $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. **640.** $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **641.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **642.** $8a$. **643.** $\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$. **644.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **645.** $10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$; $p\,[2+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **649.** $\frac{14\pi}{3}$. **650.** $\frac{64}{3}\pi a^2$. **651.** $4\pi\,[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **652.** $29{,}6\pi$. **653.** $2\pi(4+3\ln 3)$. **654.** $4ab\pi^2$. **669.** $256T$; $\frac{256}{3}T$; $170\frac{2}{3}T$. **670.** 244,8 *кГ*. **671.** $4000\pi$ *кГм*. **672.** 1134 *кГм*; 1430 *кГм*; 1661 *кГм*. **673.** 919 *кГм*; 1099 *кГм*; 1226 *кГм*. **674.** $750\pi$ *кГм*. **675.** $\frac{1}{2}\delta^2c^2ab=23{,}01$ *кГм*. **676.** 0,24 *кГм*. **677.** $a\sqrt{R^3}$; $a\sqrt{R^3}\,(2\sqrt{2}-1)$, где $a=\frac{H\sqrt{2}}{0{,}9S\sqrt{g}}$. **678.** $0{,}4ah\sqrt{2gh}$. **679.** $\frac{k\pi H^4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{4}$. **683.** $\left(0,\ -\frac{2a}{\pi}\right)$. **684.** $\left(0,\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. **685.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **686.** (9; 9). **687.** $\left(\frac{2a}{5},\ 0\right)$. **688.** $\left(\frac{5a}{8},\ \frac{15\pi a}{256}\right)$. **691.** $e$. **692.** $\pi$. **693.** $-1$. **694.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **695.** $-1$. **696.** Расходится. **697.** $6\sqrt[3]{2}$. **698.** Расходится. **699.** 3. **700.** $2\pi$. **703.** 1) $\ln 2\approx 0{,}6931$; 0,7188; 0,6688; 0,6938; 0,6932; 2) $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$; 0,8100; 0,7600; 0,7850; 0,7854. **704.** $n_1>100$; $n_2>4$; $n_3>1$. **705.** 1,118; 0,157. **706.** 34,008. **710.** 0; 5; 0; $\frac{5}{4}$. **713.** 1) Вся числовая плоскость; 2) точки, лежащие внутри эллипса $x^2+2y^2=2$ и на этом эллипсе; 3) вся плоскость $xOy$, кроме прямых $y=\pm x$; 4) $x\geqslant 0$, $y>0$ — первый квадрант плоскости $xOy$; 5) $y>x$, $y>0$, $x\neq 0$ — второй квадрант и точки, лежащие выше биссектрисы первого координатного угла плоскости $xOy$; 6) круг $x^2+y^2\leqslant 1$. **716.** $\frac{1}{2a}$; 1; не существует. **717.** Одна точка разрыва (1; $-1$); линия разрыва — прямая $y=2x$, линия разрыва — гипербола $x^2-2y^2=4$. **721.** $z'_x=$

$=45x^2y^2(5x^3y^2+1)^2$; $z'_y=30x^3y(5x^3y^2+1)^2$. 722. $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{ax}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{by}{r}$. 723. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$. 724. $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{|t|}{t\sqrt{t^2-x^2}}$; $\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{x}{|t|\sqrt{t^2-x^2}}$. 725. 12; 0. 726. 0; $2\sin 2\approx 1{,}82$; $-\sin(-1)\approx$ $\approx 0{,}84$. 732. $\frac{y}{x}\,dx+\ln 2x\,dy$. 733. $\sin 2t\cos^2 x\,dt-\sin^2 t\sin 2x\,dx$. 734. $\frac{yz\,dx+xz\,dy-xy\,dz}{z^2}$. 735. $e^{am}\left(a\cos\frac{bn}{p}\,dm-\frac{b}{p}\sin\frac{bn}{p}\,dn+\right.$ $\left.+\frac{bn}{p^2}\sin\frac{bn}{p}\,dp\right)$. 736. $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$. 737. 4,24. 738. $-0{,}05$. 739. 1,05. 741. $e^{z-2y}(\cos x-6x^2)$. 742. $\frac{e^t}{e^x+e^t}$; $\frac{e^t+3t^2e^x}{e^x+e^t}$. 743. $\frac{u}{vy}(3x+2v\ln v)$; $-\frac{2xu}{vy^2}(y+$ $+v\ln v)$. 744. $\frac{1}{x^2+1}$. 747. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 748. $-\frac{v}{u}$. 749. $-9$. 750. $-1$. 751. $-1$; $-\frac{y}{x+z}$. 752. $-\operatorname{tg} v$; $-\operatorname{tg} t$. 757. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{2y-3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4x}{(2y-3)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{8x^2}{(2y-3)^3}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin x}{x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-$ $-\sin y\ln x$. 758. $\frac{2}{(x+y)^3}$. 759. $-2xu-x^2y\cos(xy)$. 760. $(1+x^2y^2z^2\ln^2 2+$ $+3xyz\ln 2)\,2^{xyz}\ln 2$. 768. $x-2y+3z=6$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. 769. $3x-$ $-y-z=4$. 770. $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1$. 771. $12x-3y+2z=\pm 13$. 772. $z=0$; $x+y-z=2$. 775. $z_{\min}=z(1;\ 4)=-21$. 776. $v_{\max}=v(4;\ 4)=15$. 777. Нет экстремума. 778. $z_{\min}=z(\sqrt{3},\ -3)=-6\sqrt{3}$; $z_{\max}=z(-\sqrt{3},\ -3)=$ $=6\sqrt{3}$. 779. $\varphi_{\min}=\varphi(0;\ -2)=-\frac{2}{e}$. 780. $q_{\max}=q(6;\ 4)=5\ln 2$.

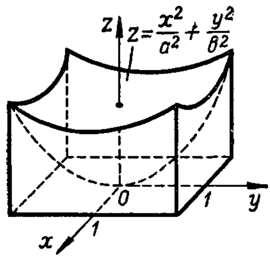
781. В единственной критической точке $M_0$ (1; $-1$) определитель $\Delta=0$. Исследование знака $z(M)-z(M_0)$ показывает, что $M_0$ есть точка минимума, где $z=2$. 782. В единственной критической точке $P_0$ (2; 0) функция не дифференцируема. Исследование знака $u(P)-u(P_0)$ показывает, что $P_0$ есть точка максимума, где $u=1$. 785. $\varphi_{нб}=\varphi(4;\ 0)=\varphi(0;\ 4)=91$; $\varphi_{нм}=$ $=\varphi(3;\ 3)=0$. 786. $r_{нб}=r(1;\ 1)=r(-1;\ -1)=3$; $r_{нм}=r(1;\ -1)=$ $=r(-1;\ 1)=-3$. 787. $v_{нб}=v\left(\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$. 788. $u_{нм}=u\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)=$ $=-3$. 789. Вершины $B$ и $C$. 790. Равносторонний треугольник. 791. $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$. 792. Куб с ребром $\frac{l}{12}$. 793. Искомый ящик имеет квадратное основание и высоту, равную половине ребра основания. 797. 26; $-11{,}2$; $\frac{e-1}{2}$; $\frac{506}{15}$. 798. 9; $\frac{a^3}{2}$. 799. $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$; $\ln 2$. 800. $\frac{4}{5}a^5$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{504}$. 801. 3. 802. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)\,dy$. 803. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} u\,dx$.

**804.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y q\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y}} q\,dx.$ **805.** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^2 z\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^2 z\,dy.$

**806.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{1} dy.$ **807.** $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-\sqrt{1-y^2}} dx+\int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 dx\right)dy+$




Черт. 223

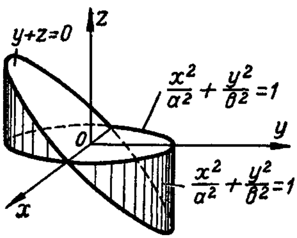



Черт. 224

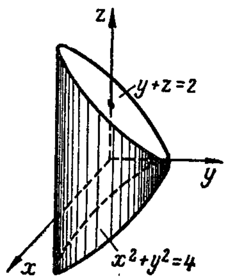
$+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^2 dx.$ **810.** $\frac{14}{3}\pi a^3$; $\frac{4}{3}\pi^4a^3$; 0. **811.** $\frac{4}{3}a^3$; $-\frac{4}{3}a^3$. **812.** 0; $\pi(1-e^{-a^2})$.

**814.** 5. **815.** $\frac{15}{2}-4\ln 4$. **816.** $\frac{(e-1)^2}{2}$. **817.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **818.** $\frac{7}{120}$. **819.** $3\pi$. **820.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

**821.** $\frac{5\pi}{8}$. **822.** $\frac{3}{4}\pi a^2$ (черт. 223). **824.** $2\pi a^3$. **825.** $\frac{4}{9}$. **826.** $\frac{4(a^2+b^2)}{3a^2b^2}$




Черт. 225




Черт. 226

(черт. 224). **827.** $\frac{4}{3}ab^2$ (черт. 225). **828.** $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$. **829.** $16\pi$

(черт. 226). **830.** $\frac{32}{9}$. **837.** $\frac{1}{2}k\pi R^4$. **838.** $\frac{ka^3\sqrt{2}}{3}$. **839.** $kp(4-\pi)$.

**840.** $\frac{k\,ab}{3}(a^2+b^2)$. **841.** $\frac{ab^3}{3}$; $\frac{ab}{3}(a^2+b^2)$; $\frac{ab}{12}(a^2+b^2)$. **842.** $\frac{ab}{12}(a^2+b^2)$;

$\frac{ab^3}{12}$. **843.** $\frac{5}{4}\pi R^4$; $\frac{3}{2}\pi R^4$. **844.** $\frac{a(3a^2+b^2)}{5(a^2+b^2)}$; $\frac{b(a^2+3b^2)}{5(a^2+b^2)}$, если катеты $a$ и $b$ лежат на осях координат $Ox$ и $Oy$. **845.** $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8b}{15}\right)$. **846.** $\left(0;\ 0,\ \frac{3a}{8}\right)$. **847.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$. **848.** $\left(\frac{3(a+b)(2R^2-a^2-b^2)}{4(3R^2-a^2-b^2-ab)};\ 0;\ 0\right)$. **852.** $\frac{abc}{3}\times$ $\times(a^2+b^2+c^2)$; $\frac{a^3h}{6}$; $\frac{1}{12}$; 30. **853.** 11. **854.** $\frac{4\pi}{3}$. **855.** $\frac{4}{9}$. **856.** 3. **861.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$. **862.** 16. **863.** $\frac{32}{3}\pi$($G_{xy}$—круг $x^2+y^2\leqslant 4$). **864.** $\frac{2R^3(3\pi-4)}{9}$ (черт. 195). **865.** $\frac{\pi abc}{24}(5\sqrt{2}-4)$. **866.** $\frac{3}{2}a^4$. **867.** $\frac{k\pi hr^4}{2}$; $\frac{m(r^2+h^2)}{3}$. **868.** $\frac{k\pi R^4}{12}$ ($G_{xy}$—круг $x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2$). **869.** $(0,\ 0,\ c)$; $\left(\frac{3}{8}a,\ \frac{3}{8}b,\ \frac{3}{8}c\right)$; $\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. **870.** $14k$. **871.** $\frac{2(2-\sqrt{2})}{5}\pi\delta R^5$. **876.** $\frac{1}{3}$; $\frac{31}{30}$; $-\frac{8}{15}$. **877.** 2. **878.** $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **879.** 1,5; 1. **880.** 0. **881.** —0,5. **882.** 2. **883.** 0. **890.** $\frac{13}{3}$. **891.** $\frac{1}{2}\ln(e^2+e^{-2})\approx 1{,}01$. **892.** $6\pi$; $\frac{3}{8}\pi a^2$. **893.** $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{15}$. **894.** $\frac{4}{9}k(63-5\sqrt{5})$; $k$. **895.** $(0,\ 0,\ m\pi)$. **896.** $\left(\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256}\right)$. **897.** $\pm 8a^2m$. **898.** $\frac{m}{2}(r_B^2-r_A^2)$. **900.** $x^3y+x-y+C$. **901.** $\sin x\cos y+\cos 2y+C$. **902.** $xy+$ $+\sin(xy)+C$. **903.** $ye^{xy}-3x+C$. **904.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+C$. **905.** $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+$ $+C$. **910.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **911.** 0. **912.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$. **913.** $\frac{29\sqrt{2}}{8}\pi$. **914.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **915.** 0. **916.** —3. **917.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **919.** 3; $\frac{32}{5}$. **924.** $3\pi R^2$. **925.** $4R^2$ (черт. 225). **926.** $8R^2$ (черт. 99). **927.** $42\pi$. **928.** $2\pi a^2(3-\sqrt{3})$. **929.** $2\pi k\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. **930.** $\frac{3}{4}$. **931.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3R}{8}\right)$. **932.** $\left(0,\ 0,\ \frac{2b}{3}\right)$. **938.** $2\bar{i}+2\bar{j}$; $2\bar{j}-4\bar{i}$; $2\bar{j}$; $-\frac{1}{2}\bar{j}$. **939.** $\frac{4x-3y}{5(x^2+y^2)^2}$. **940.** $2(\cos\beta-2\cos\alpha-\cos\gamma)$; $-\frac{4}{3}$. **941.** $\bar{l}\{1;\ 0;\ -1\}$. **942.** $2\sqrt{3}$. **944.** $(0;0)$; $(-1;\ -1)$. **947.** $4\pi R^2H$; $-4\pi$; $24a^3$. **948.** $\frac{3}{16}\pi$; $\frac{9}{10}\pi H^5$. **949.** 29; $2xz(z^2+3y^2)$. **954.** $\pm\frac{\pi a^6}{8}$; 3. **955.** $2(y+z)\bar{i}$; 0. **963.** Да. **964.** Нет. **965.** Да. **966.** Да.

**967.** Сходится. **968.** Расходится. **969.** Сходится. **970.** Сходится. **971.** Сходится. **972.** Расходится. **973.** Сходится. **974.** Сходится. **975.** Расходится. **976.** Сходится. **977.** Сходится. **978.** Расходится. **979.** Сходится. **980.** Расходится. **981.** Расходится. **982.** Сходится. **983.** Расходится. **984.** Сходится. **985.** Сходится. **986.** Сходится. **989.** Сходится абсолютно. **990.** Сходится не абсолютно. **991.** Расходится. **992.** Сходится абсолютно. **993.** Сходится не абсолютно. **994.** Сходится не абсолютно (сравнить с гармоническим рядом). **995.** Сходится абсолютно. **996.** При $|a|>1$ сходится абсолютно; при $|a|=1$ сходится не абсолютно; при $|a|<1$ расходится. **997.** 0,96. **998.** 0,04.

**1001.** $-1 \leqslant x < 1$. **1002.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **1003.** Сходится только при $x=0$. **1004.** $3 \leqslant x \leqslant 5$. **1005.** $-\infty < x < +\infty$. **1006.** $|x| < 4$. **1007.** $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$. **1008.** $[0{,}1,\ 10)$. **1009.** $\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi \leqslant x \leqslant \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **1010.** $-\infty < x < +\infty$ (использовать интегральный признак). **1014.** $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$; $2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{11x^3}{6}+\ldots$ **1015.** $-1+(x-2)-(x-2)^2+ +\ldots$; $x-1+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3+\ldots$ **1016.** $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n \ln^n 10}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$; $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, $-1 \leqslant x < 1$; $\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)\sin 1+ +\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)\cos 1$, $-\infty < x < +\infty$. **1017.** $e^{-2}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$, $-\infty < x < +\infty$; $2\left[1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{n!\,2^{3n}}(x-4)^n\right]$, $0 < x < 8$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1!\,2}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!\,2^2}+\ldots\pm\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!\,2^n}+\ldots\right]$, $-\infty < x < +\infty$.
**1024.** 1) $x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$, $-\infty < x < +\infty$; 2) $2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x| < 1$; 3) $x+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$, $|x| \leqslant 1$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$, $|x| < 2$; 5) $x+x^2+\frac{x^3}{3}- -\frac{x^5}{30}+\ldots+\frac{\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n+\ldots$, $-\infty < x < +\infty$; 6) $4+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2+2^n)\frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$. **1025.** 0,9554; 0,3894; 0,1973; 3,1072
**1026.** 1) $C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+3}}{(2n-1)(2n+3)}$, $|x| \leqslant 1$; 2) $C+\ln|t|+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!\,n}$, $|t| > 0$. 3) $C+x+\frac{x^5}{2\cdot 5}-\frac{3x^9}{8\cdot 9}+\ldots$, $|x| < 1$; 4) $C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!\,2n}$, $-\infty < x < +\infty$; 5) $C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$, $|x| \leqslant 1$. **1027.** 0,500; 0,201; 0,946; 0,072; 0,047. **1030.** Сходится абсолютно. **1031.** Расходится. **1032.** Сходится не абсолютно. **1033.** Сходится абсолютно. **1034.** 1. **1035.** 0. **1036.** 2. **1037.** 1. **1038.** $+\infty$. **1039.** 1. **1043.** $2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

**1044.** $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$. **1045.** $\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\times$ $\times\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$; $\frac{\pi^2}{8}$ (при $x=0$). **1046.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\times$ $\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **1047.** $\frac{36}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{25-36n^2}$. **1048.** $\frac{e^4-1}{2e^2}\left[\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi x}{2}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$. **1049.** $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$.
**1050.** $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$; $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ (при $x=0$). **1051.** $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\right)$; $\frac{\pi-1}{2}$ (при $x=0$); $-\frac{1}{2}$ (при $x=\pi$). **1052.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\times$ $\times\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$. **1053.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$; $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\times$ $\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$. **1055.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\alpha\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}d\alpha$. **1056.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\pi\alpha\cos x\alpha}{1-\alpha^2}d\alpha$; $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha(1+\cos\pi\alpha)\sin x\alpha}{\alpha^2-1}d\alpha,\ x\neq\pi$. **1057.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\alpha)\cos x\alpha}{\alpha^2}d\alpha$. **1058.** $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{i\pi\alpha}+1)\,d\alpha}{(1-\alpha^2)\,e^{ix\alpha}}$. **1068.** $x-y+\ln|xy|=C$. **1069.** $(x-1)^2+y^2=C^2$.
**1070.** $\cos\beta=C\cos\alpha$. **1071.** $(e^y+1)e^x=C$. **1072.** $\operatorname{tg} y=C(e^x-1)^3$. **1073.** $x(y^2+C)=x^2-1$. **1074.** $x+y=0$. **1075.** $2e^{y^2}=e^x+1$. **1076.** $x^{-2}+y^{-2}=$ $=2\left(1+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$. **1078.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln C\sqrt{x^2+y^2}=0$. **1079.** $x=(y-x)\times$ $\times\ln C(y-x)$. **1080.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ \ln Cy=0$. **1081.** $e^{-\frac{y}{x}}+\ln Cx=0$. **1082.** $3y^3=8(x^2-y^2)$. **1083.** $\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=0$. **1085.** $y=(x+C)e^x$. **1086.** $y(x^2+1)^2=$ $=x^3+3x+C$. **1087.** $2x\cos y=C-\cos 2y$. **1088.** $y=\left(x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$.
**1089.** $y=-e^{-x}\ln|1-x|$. **1090.** $xy^2=(\ln|\cos y|+y\operatorname{tg} y)^2$. **1092.** $x^3y^2+7x=C$.
**1093.** $xe^y+ye^x+3x-2y=C$. **1094.** $x\sin(x+y)=C$. **1095.** $x^2+y+e^{xy}=2$.
**1096.** $x(1+y)+\frac{\sin^2 x}{y}=C$. **1098.** $y=\frac{e^{2x}}{8}+C_1x^2+C_2x+C_3$. **1099.** $y=C_1x+$ $+C_2-x\sin x-2\cos x$. **1100.** $y=C_1\ln|x|-\frac{x^2}{4}+C_2$. **1101.** $y=C_2-$

$-\cos(x+C_1)$. **1102.** $ay=b+C_1\sin(x\sqrt{a}+C_2)$. **1103.** $y=C_1\sec C_1(x+C_2)$. **1104.** $4y=x^4+4x+8$. **1105.** $225(y-1)^2=8(x-1)^3(3x+2)^2$. **1106.** $y^3-y=3x$. **1109.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **1110.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{3x}$. **1111.** $y=C_1+$ $+e^{-3x}(C_2\cos 4x+C_3\sin 4x)$. **1112.** $S=C_1+C_2t+C_3e^{-5t}$. **1113.** $y=e^x\times$ $\times(C_1+C_2x+C_3x^2)$. **1114.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **1115.** $y=$ $=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 5x+C_4\sin 5x$. **1116.** $x=C_1e^{-t}+e^{2t}(C_2+C_3t)$. **1117.** $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. **1118.** $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$. **1119.** $\rho=ae^{-a\varphi}(1+a\varphi)$. **1123.** $y=e^x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. **1124.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x-3x^2-3x-4{,}5$. **1125.** $y=e^{-3x}(C_1+C_2x)-0{,}6\cos x+0{,}8\sin x$. **1126.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+$ $+C_3e^{2x}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{11}{8}$. **1127.** $x=C_1e^{-t\sqrt{2}}+C_2e^{t\sqrt{2}}+(2-t)e^{-t}$. **1128.** $y=$ $=C_1+C_2e^{2x}-x^2-3x$. **1129.** $y=3\sin 2x-7\cos 3x-2\sin 3x$. **1130.** $y=e^{3x}-$ $-1-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x$. **1131.** $x=C_1+C_2t+(t+C_3)e^{-t}+t^3-3t^2$. **1132.** $S=C_1+C_2t+C_3t^2+C_4e^{-4t}+\frac{1}{128}(\cos 4x-\sin 4x)$. **1133.** $y=e^x\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)$. **1134.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+1+e^x-xe^{2x}$. **1135.** $y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\right.$ $\left.+\frac{x}{6}\sin 3x\right)$. **1136.** $y=(C_1+C_2x-x^2)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **1137.** $y_1=2e^x-$ $-xe^{2x}$. **1138.** $y_1=e^x(2\sin x-x\cos x)$. **1139.** $y_1=-\frac{\cos x}{3e^{3x}}\left(2+\frac{\cos^2 x}{3}\right)$. **1140.** $y_1=\frac{\sin x}{20}-\frac{\sin 3x}{28}$. **1141.** $y_1=e^x[1+xe^x-(1+e^x)\ln(1+e^x)]$. **1142.** $y_1=$ $=\frac{\sin x}{12}+\frac{\sin 3x}{60}$. **1143.** $y^2+2x^2\ln Cx=0$. **1144.** $x=Ce^{-\sin y}-2(1-\sin y)$. **1145.** $x+y=\ln|(x+1)(y+1)|$. **1146.** $\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=C$. **1147.** $x^3y^2+7x=C$. **1148.** $y=2\sin^2 x$. **1149.** $x\sin y=C$. **1150.** $2x^3y^3=3x^2+C$. **1151.** $2(x+y)=\pi$. **1152.** $xy=1$. **1153.** $x+ye^{-x}=C$. **1154.** $y=e^x(C_1+C_2x+2x^2)+$ $+\frac{e^{-x}}{25}(3\sin x+4\cos x)$. **1155.** $y=1{,}5+e^x(x^2-3x+3{,}5)$. **1156.** $2x+\operatorname{ctg} y=1$. **1157.** $y=C_1x^2+C_2x+C_3+\ln|\sin x|$. **1158.** $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+C_3e^{2x}-0{,}5\sin x$. **1159.** $y=C_1e^{-x}+e^x(2x^3-4x^2+C_2x+C_3)+3(x+1)$. **1160.** $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$. **1161.** $y=e^{-ax}\left(C_1+C_2x+\frac{4}{15}\sqrt{x^5}\right)$. **1171.** $(x-2)^2+(y+3)^2=C$. Дифференциальное уравнение задачи $3+y=$ $=\frac{1}{y'}(2-x)$. **1172.** $xy=12$; $y\,dx+x\,dy=0$. **1173.** $\frac{dx}{dt}=kx$; $x=ce^{kt}$; при $t=0$ $x=a$ и $c=a$; при $t=1600$ $x=\frac{a}{2}$; $k=-\frac{\ln 2}{1600}$; $x=a\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}$; при $t=100$ $\frac{x}{a}=2^{-\frac{1}{16}}\approx 0{,}958$. По истечении 100 лет распадается только 4,2% радия. **1174.** $\frac{dT}{dt}=k(T-20)$; $T=20+ce^{kt}$; при $t=0$ $T=100$; при $t=10$ $T=60$; $T=20+80\cdot 2^{-0{,}1t}$; при $T=30$ $t=30$ (мин.) **1175.** 1,8 кг; $dx=-\frac{2x\,dt}{60+t}$; $x=\frac{18\,000}{(60+t)^2}$. **1176.** Сфера, образованная вращением окружности $\rho=c$ вокруг диаметра, или поверхность, образованная вращением лемнискаты

$\rho^2 = a\sin(2\varphi + c)$ вокруг ее оси, если источник света помещен в полюсе. **1177.** $\ln\sqrt{x^2+y^2} = c \pm \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Расстояние от начала координат до касательной $Y - y = y'(X - x)$ равно $d_1 = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}}$, а до нормали равно $d_2 = \frac{|x+yy'|}{\sqrt{1+(y')^2}}$; $d_1 = d_2$; $x + yy' = \pm(y - xy')$. **1178.** $S \approx 1313$ *м*; $m\frac{dv}{dt} = -kv$; $\ln v = -k_1 t + c_1$; при $t = 0$ $v = 18$ *км/час* $= 300$ *м/мин*; при $t = 5$ $v = 100$; $v = 300\cdot 3^{-\frac{t}{5}}$; $s = -\frac{1500}{\ln 3}\cdot 3^{-\frac{t}{5}} + c_2$; при $t = 0$ $s = 0$, $c_2 = \frac{1500}{\ln 3}$. **1179.** $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$; $t = \frac{1}{\sqrt{ag}}\left(\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{a}{g}} - \operatorname{arctg} v\sqrt{\frac{a}{g}}\right)$, $a = \frac{k}{m}$; при $v = 0$ $t_1 = \frac{1}{\sqrt{ag}}\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{a}{g}}$; $S = \frac{1}{2a}\ln\frac{g+av_0^2}{g+av^2}$; при $v = 0$ $h = \frac{1}{2a}\times \ln\frac{g+av_0^2}{g}$. При падении $\frac{dv}{dt} = g - av^2$, $s = \frac{1}{2a}\ln\frac{g}{g-av^2}$; при $s = h$ $v_2 = v_0\sqrt{\frac{g}{g+av_0^2}}$; $t = \frac{1}{2\sqrt{ag}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}}$; при $v = v_2$ $t_2 = \frac{1}{\sqrt{ag}}\ln\frac{v_0\sqrt{a}+\sqrt{g+av_0^2}}{\sqrt{g}}$; $v_2 < v_0$, $t_2 > t_1$. **1180.** $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{6}s$; при $t = 0$ $v = 0$, $s = 1$, $\ln(s + \sqrt{s^2-1}) = t\sqrt{\frac{g}{6}}$; при $s = 6$ $t \approx 1{,}94$ *сек.* **1181.** $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{18}(2s - 19)$; при $t = 0$ $v = 0$, $s = 10$; $v = \frac{\sqrt{g}}{6}\sqrt{(2s-19)^2-1}$, $t = \frac{3}{\sqrt{g}}\ln[2s - 19 + \sqrt{(2s-19)^2-1}]$; при $s = 18$ $v \approx 8{,}9$ *м/сек*, $t \approx 3{,}4$ *сек.* **1182.** $m\frac{dv}{dt} = -kmg - av^2$; при $v = v_0$ $s = 0$, $s = \frac{m}{2a}\ln\frac{kmg+av_0^2}{kmg+av^2}$; при $v = 0$ $s_1 = \frac{m}{2a}\ln\left(1 + \frac{av_0^2}{kmg}\right)$. **1183.** $m\frac{d^2s}{dt^2} = k^2\left(a - \frac{ds}{dt}\right)^2 - \lambda^2 mg$; $v = a - \frac{B}{k}\times \frac{A-B+(A+B)e^{2Dt}}{B-A+(A+B)e^{2Dt}}$, $S = at - \frac{m}{k^2}\ln\frac{(A+B)e^{Dt}-(A-B)e^{-Dt}}{2B}$, где $A = ak$, $B = \lambda\sqrt{mg}$, $D = k\lambda\sqrt{\frac{g}{m}}$; $\lim\limits_{t\to+\infty} v = a - \frac{B}{k}$. **1184.** $\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\theta$, $s$ — длина дуги, отсчитываемая от положения равновесия, или $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ (для окружности $S = \theta l$); при $t = 0$ $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$; период колебания $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **1185.** $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$; $\theta = \theta_0 e^{-\frac{kt}{2m}}\times (\cos at + b\sin at)$, $a = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}$, $b = \frac{k}{2am}$; $T = \frac{2\pi}{a}$. **1196.** $y = 1 + x +$

$+\frac{3}{2}x^3+\ldots$; $y=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots$ **1197.** $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$; $y=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots$ **1198.** $y=1+x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{672}+\ldots$; $y=3-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{3x^6}{80}+\frac{x^8}{2688}-\ldots$ **1199.** $y=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}$; $-\infty<x<+\infty$;

$y=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$, $-\infty<x<+\infty$. **1203.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$, $z=\frac{1}{3}C_1e^{-3x}-C_2e^x$. **1204.** $u=C_1(1+2t)-2C_2-2\cos t-3\sin t$, $v=C_2-C_1t+2\sin t$. **1205.** $u=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$, $v=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-C_3e^{-2x}$, $w=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}$. **1206.** $x=(C_1+C_2-C_1t)e^{-2t}$, $y=(C_1t-C_2)e^{-2t}$; $x=e^{-2t}$; $y=-e^{-2t}$. **1207.** $u=C_1e^{-4x}+C_2e^{4x}+0{,}3\sin 2x$, $v=C_1e^{-4x}-C_2e^{4x}+0{,}1\cos 2x$; $u=0{,}3\sin 2x$, $v=0{,}1\cos 2x$. **1210.** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$,

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx$. **1211.** $u(x,t)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda x\,d\lambda$, $\alpha(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(z)\sin\lambda z\,dz$. **1212.** $u(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_ne^{\frac{n\pi y}{a}}+\beta_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$;

$\alpha_n=A\left(I_2-I_1e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)$, $\beta_n=A\left(I_1e^{\frac{n\pi b}{a}}-I_2\right)$; $A=\frac{2}{a\left(e^{\frac{n\pi b}{a}}-e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)}$, $I_1=\int_0^a\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$, $I_2=\int_0^a\varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$.

*Григорий Иванович* ЗАПОРОЖЕЦ

# РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание восьмое,
стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 09.07.14.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,36. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru