А.М. Данченко
М.А. Данченко

АЛГОРИТМЫ БИОМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Биологический институт

А.М. Данченко, М.А. Данченко

АЛГОРИТМЫ БИОМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Учебное пособие

Томск
2009

УДК 630
ББК 43.4я2
Д 17

Данченко А.М., Данченко М.А.
Д 17 Алгоритмы биометрических расчетов: Учебное пособие. – Томск. Томский государственный университет, 2009. – 128 с.

Настоящее пособие является существенно переработанным и значительно дополненным переизданием учебного пособия автора «Математические методы в лесоводстве» (Томск, 1996)

В работе излагаются все основные методы современной биометрии Материал иллюстрируется примерами из биологии и смежных дисциплин Особое внимание обращено на подробный разбор техники расчетов Содержит необходимые математико-статистические и другие вспомогательные таблицы

Учебное пособие составлено в соответствии с учебным планом курса «Математические методы в лесном и садово-парковом хозяйстве»

Для студентов специальностей 260400 «Лесное и лесопарковое хозяйство» и 260500 «Садово-парковое и ландшафтное строительство»

УДК 630
ББК 43.4я2

ВВЕДЕНИЕ

В биологической литературе ужс имеются руководства по обработке результатов исследований с применением математики. Они оказывают большую помощь исследователям при обосновании выводов после проведенных экспериментов.

Однако замечено, что иногда биологу бывает трудно выбрать наиболее подходящий для данного опыта метод статистической обработки данных. Экспериментатор часто и до применения математики обнаруживает существенные различия в опыте. Статистическая обработка делается только для обоснования отмеченных отклонений.

С целью облегчения ориентации в разнообразных методах статистической обработки авторами предпринята попытка изложить их в виде алгоритмов. Алгоритмы – это готовые «рецепты» формул и порядка операций. В них не даются объяснения и доказательства, поскольку, как показывает практика, в этом нет необходимости Для экспериментатора важнее метод извлечения информации, а его теоретическая интерпретация – дело математиков В связи с этим объем материала резко уменьшается и становится удобным для быстрого обозрения. Предполагается, что это облегчит усвоение и правильный выбор метода статистической обработки.

Важнейшим моментом получения безошибочных выводов из результатов статистической обработки данных является правильный выбор математической модели. Это особенно подчеркивал Р.А. Фишер.

Биолог, анализирующий результаты опыта, располагает цифры в ряды, колонки, таблицы, строит графики, чтобы нагляднее увидеть закономерности их изменения Перед экспериментатором в таких случаях всегда стоит вопрос· что еще можно извлечь из полученных данных?

Изучение различных способов расположения цифрового материала показало, что в большинстве случаев результаты исследований можно оформить в виде нескольких типовых таблиц, каждая из которых имеет свои особенности. В ней данные взаимосвязаны определенными математическими закономерностями. В связи с этим для каждой таблицы нужно использовать индивидуальный метод математической обработки. Если объединить типовые формы таблиц с соответствующими алгоритмами, то получаются конкретные математические модели обработки результатов исследований.

В данном пособии приведено 6 математических моделей. Для каждой из них показана извлекаемая информация. Экспериментатору становится ясно, какую информацию можно получить из имеющихся у него данных и по какому алгоритму обрабатывать. В связи с тем, что моделей немного, облегчается не только правильный выбор метода, но и верное планирование опыта в соответствии с требованиями как методики, так и способа статистической обработки данных.

В начале алгоритмов даны условия их применения. Зная математические модели и границы применения алгоритмов, можно к одним и тем же данным применять разные алгоритмы для извлечения дополнительной информации. В конце алгоритмов показано, как нужно оформлять результаты статистической обработки и ссылку на метод с целью постепенного перехода к унифицированным ссылкам.

Пособие содержит не все алгоритмы. Специфические методы обработки данных, применяемые для решения отдельных узких вопросов, опущены. Если такая форма изложения получит одобрение, то в дальнейшем число алгоритмов может быть увеличено.

При составлении алгоритмов были использованы труды отечественных и зарубежных ученых: Д.Н. Бейли, Б.А. Доспехова, М.Г. Здорика, Н.Л. Леонтьева, А.К. Митропольского, Н.А. Плохинского, П. Ф. Рокицкого, В.И. Романовского, Н.Н. Свалова, Д.У. Снедекора, В.Ю. Урбаха и др. Особенно помогли при составлении алгоритмов работы Б.А. Доспехова и Н.А. Плохинского, в которых найден ряд готовых разработок.

Правила пользования алгоритмами

1. *Выбор математической модели.* Вначале необходимо изучить особенности типовых таблиц математических моделей и уяснить, какую информацию можно извлечь по каждой модели.

В связи с выбором математической модели нужно хорошо освоить понятие «вариант». Под вариантами опыта подразумеваются разные векторы, дозы, концентрации, способы, годы, сорта, породы, культуры, штаммы, формы, семьи, препараты, типы, виды, а также их различные сочетания.

Для облегчения выбора модели выясняется, имеются или отсутствуют повторения в том понимании, как это описано в моделях. Затем следует выбрать для своих данных такую модель, которая больше всего соответствует методике проведенного опыта. Для извлечения дополнительной информации можно использовать и другие модели, если это возможно по условиям применения соответствующих алгоритмов.

2. *Предварительная обработка данных*

– ввести одинаковые и наиболее удобные единицы измерения для всего цифрового материала. При этом данные могут быть выражены в любых единицах, простых и сложных, а также в процентах, штуках, баллах, рангах (порядковых номерах). Желательно, чтобы числа имели не более 3 знаков (из них лучше 1–2 после запятой). Это удобнее при вычислениях;

– при необходимости можно ввести поправку на величиину данных. Такая необходимость может возникнуть в результате влияния какого-то дополнительного фактора;

– браковать неточности (артефакты) по алгоритму 1, когда отдельные даты кажутся слишком малыми или большими.

3. *Извлечение информации.* После предварительной обработки даиных необходимо изучить алгоритм, указанный в избранной математической модели, а также алгоритмы, на которые будут даны ссылки. Принять решение, какие величины нужно вычислить для получения необходимой информации, и приступить к математической обработке данных. При этом нужно строго соблюдать условия применения алгоритмов.

В конце пособия приведены таблица критериев Стьюдента, Пирсона и Фишера, мантисс десятичных логарифмов Часть специфических таблиц дана прямо в алгоритмах Ими нужно пользоваться при соответствующих ссылках в алгоритмах.

Расшифровка обозначений дана непосредственно после их упоминания.

4. *Пояснение к заданиям.*

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Для того чтобы получить характеристики не отдельных объектов, а всей группы в целом, определяют среднюю величину признака В зависимости от исследуемых объектов и от поставленных целей среднюю величину вычисляют различными способами

Имеется несколько средних величин. средняя арифметическая – М ($\bar{x}$), средняя геометрическая – *G*, средняя квадратическая – *S*, средняя гармоническая – *H*, мода – *Mo*, медиана – *Me* и др.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При изучении какого-либо признака или свойства почти всегда приходится сталкиваться с тем фактом, что величины, получаемые при измерении изучаемого признака, не одинаковы, а изменяются в тех или иных пределах, т.е. они выражаются не одним каким-нибудь числом, а рядом более или менее отличающихся друг от друга чисел.

Различия отдельных числовых значений изучаемого признака могут быть обусловлены, во-первых, ошибками от неточности измерительных приборов или от неправильных методов обмера, во-вторых, ошибками, зависящими от личных качеств наблюдателя, и, в-третьих, теми неизбежными отклонениями, которые обусловлены изменчивостью самого изучаемого признака.

Первые две группы причин, так называемые систематические ошибки, всегда могут быть так или иначе учтены и устранены. Третья же группа причин обусловлена самой природой изучаемого признака, не зависит от экспериментатора и поэтому всегда должна быть принята во внимание

Само явление изменчивости признака или свойства называется *варьированием*, отдельные числовые значения варьирующего признака – *вариантами*, а ряд чисел (вариант), полученный при измерении отдельных значений варьирующего признака, – *вариационным рядом*.

В зависимости от исследований вариационный ряд может состоять из самого различного числа вариант: от нескольких единиц до нескольких сотен или даже тысяч

Составить суждение об изучаемом признаке по целому ряду различных цифр не представляется возможным, и в таких случаях приходится пользоваться *средними величинами*. Поэтому необходимо уметь правильно характеризовать данный вариационный ряд и определять степень надёжности средних и других величин, вычисляемых для его характеристики

Разрешением подобного рода вопросов занимается особая отрасль математики – *математическая, или вариационная, статистика*

Свойства отклонений от средней величины изучаемого признака должны отвечать следующему.

1. Отклонения не могут быть одного знака, т.к. они получаются как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения от среднего значения измеряемой величины

2. Абсолютные величины отклонений в большинстве случаев ограничены некоторыми пределами

3. Чем больше абсолютная величина отклонения, тем реже она встречается

4. Если число наблюдений ограничено, то сумма положительных отклонений приблизительно равна сумме отрицательных отклонений. Если же число наблюдений стремится к бесконечности, то сумма всех отклонений (положительных и отрицательных) стремится к нулю.

Вариационные ряды, отвечающие указанным выше положениям, относятся к так называемым *нормальным вариационным рядам*, подчиняющимся закону нормального распределения.

СРЕДНЯЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА (M, $\bar{x}$)

Самым известным элементом, характеризующим нормальный вариационный ряд, является *среднее арифметическое*

Среднюю арифметическую величину можно вычислять во всех случаях по известной формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum V}{n}, \tag{1}$$

где M ($\bar{x}$) – средняя арифметическая; Σ – символ суммирования; V – дата (результат измерения признака у каждого объекта); n – объем группы, или число особей в группе Средняя для пяти дат (1, 2, 3, 4, 5) равна

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 .$$

СРЕДНИЕ ДЛЯ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ ПРИЗНАКОВ

Средний ранг (непараметрическую среднюю) определяют для тех признаков, для которых еще не найдены способы количественного измерения. По степени проявления признаков особи могут быть ранжированы, т е. расположены в порядке усиления (или ослабления) выраженности признака. Порядковый номер объекта в таком ряду называется его рангом.

Пример 1. На опытном участке испытывали потомство, получено от двух опылителей и одной материнской чернокорой особи берёзы 20 сибсов с различной окраской коры: от почти белого до черного. Требовалось выяснить, какой из опылителей дает в потомстве более темную окраску коры. Затруднением при этом является то обстоятельство, что нет способа измерения интенсивности окраски потомства.

Все потомки оцениваемых опылителей были распределены в ранжированный ряд в порядке усиления тёмного цвета, причем при каждом порядковом номере (ранге) такого ряда был поставлен номер отцовской особи (I, II).

Ранг	№ отца	Ранг	№ отца	Ранг	№ отца	Ранг	№ отца	Ранг	№ отца
1	I	5	I	9	I	13	II	17	I
2	II	6	I	10	I	14	II	18	II
3	I	7	II	11	II	15	II	19	II
4	II	8	I	12	I	16	II	20	II

На основании такого ряда можно рассчитать средние ранги окраски в потомстве каждого опылителя и по этим показателям сравнить их:

$$\bar{x}_1 = \frac{1+3+5+6+8+9+10+12+17}{9} = 7,9;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2+4+7+11+13+14+15+16+18+19+20}{11} = \frac{139}{11} = 12,6.$$

Потомство второго опылителя (отцовского растения) имело в среднем более темиую окраску.

ВЗВЕШЕННАЯ СРЕДНЯЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ

Из всех средних наиболее часто применяется. Обычно чтобы рассчитать среднюю арифметическую, складывают все зиачения признака и полученную сумму делят на число дат. В этом случае каждое зиачение входит в сумму одииаковым образом, увеличивая ее иа полную свою величину. Но не всегда это возможно. Иногдв значеиия признака должны входить в сумму с иеодинаковой поправкой. Эта поправка, выраженная определенным миожителем, называется математическим весом значения.

Средняя, рассчитанная для значений признака с неодинаковыми весами, называется взвешенной средней. Взвешенную среднюю арнфметическую рассчитывают по следующей формуле.

$$\bar{X}_{вз} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}, \qquad (2)$$

где V– значение признака, дата; p – математический вес усредняемого зиачения

Чтобы рассчитать взвешенную средиюю арифметическую, необходимо каждое значение признака помножить на его вес, все эти произведения сложить и полученную сумму разделить на сумму весов.

Пример 2.

Высота ствола 7 8 9 10 11 12 13.

Число деревьев 1 1 2 7 3 3 1 $\Sigma p = 18$.

$$\bar{x} = \frac{7\times1+8\times1+9\times2+10\times7+11\times3+12\times3+13\times1}{18} = 10,28.$$

Общая средняя вычисляется по частным средним:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \ldots + \bar{x}_k n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}. \qquad (3)$$

СРЕДНЯЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ

Чтобы получить среднюю геометрическую для группы с n датами, нужно все даты перемножить и из полученного произведения извлечь корень n-й степени:

$$G = \sqrt[n]{V_1 V_2 V_3 \dots V_n} = \sqrt[n]{\Pi V}\ , \tag{4}$$

где G – средняя геометрическая; n – число дат; Π – знак произведения.

Например, средняя геометрическая из 12 и 3 будет равна $G = \sqrt{12 \times 3} = 6$.

Средняя арифметическая этих чисел $\bar{x} = \dfrac{12+3}{2} = 7{,}5$.

Если число дат больше 3, то извлечение корня n-й степени затруднительно. Поэтому значение средней геометрической находят логарифмированием величин, входящих в основную формулу

$$\lg G = \frac{\sum \lg V}{n} = \frac{\lg V_1 + \lg V_2 + \dots + \lg V_n}{n}. \tag{5}$$

Для пяти дат (1; 4; 5; 5; 5) среднюю геометрическую можно получить следующим образом:

V	1	4	5	5	5	(табл 14П)
$\lg V$	0,000	0,602	0,699	0,699	0,699	

$$\Sigma \lg V = 2{,}699,$$

$$\lg G = \frac{\sum \lg V}{n} = \frac{2{,}699}{5} = 0{,}5398,$$

$$G = 3{,}467 \text{ (табл 15П).}$$

С помощью средней геометрической вычисляют средние приросты за определенный период. При расчетах среднего попериодного прироста возможны два основных способа применения средней геометрической.

Первый способ применяется, когда имеются сведения (в процентах или долях от начала каждого периода) о приростах за каждый период. В таких случаях средний прирост вычисляют по формуле

$$x + 1 = \Pi_{(1+a)} = \sqrt[n]{\Pi(1+a)}, \tag{6}$$

где x – средний прирост (в долях) за ряд периодов равной продолжительности; a – фактический прирост за тот или иной период; n – число периодов; $\Pi(1 + a)$ – произведение величин $(1 + a)$.

Из этой формулы следует, что для нахождения среднего прироста по первому способу нужно долю фактического прироста за каждый период прибавить к единице, полученные величины $(1+a)$ перемножить, из их произведения извлечь корень n-й степени и вычесть единицу.

Если периодов миого ($n > 2$), то операцию извлечения корня иадо проводить логарифмнроваиием:

$$\lg G_{(1+a)} = \frac{\sum \lg(1+a)}{n}. \quad (7)$$

По этой формуле находят логарифм средней геометрической аеличии ($1+a$), затем – саму величину $G(1+a)$ и вычитаиием из нее единицы получают нскомую средиюю долю прироста.

Второй способ расчета средних приростов применяется в тех случаях, когда имеются данные об абсолютных количествах объектов на начало и конец общего большого пернода и требуется рассчнтать среднний прирост за более мелкие перноды.

В таких случаях средний прирост рассчнтывают по формуле

$$x+1 = \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_1}}. \quad (8)$$

При логарифмироаании получаем

$$\lg = (x+1) = \frac{\lg \frac{A_n}{A_1}}{n} = \frac{\lg A_n - \lg A_1}{n}, \quad (9)$$

где x - средний прнрост за более малые периоды (среднегодовой за пятилетку, средиемесячный за год, среднесуточиый за месяц и т.д.); A_n – число особей иа коиец общего периода, нли, что то же самое. на конец последнего n-го малого пернода; A_1 – чнсло объектоа иа начало исследуемого общего периода

Пример 3. На плаитации иа начало пятилеткн высота саженцев была 100 см, а к ее коицу стала 140 см. Определить среднегодовой процеит увеличеиия прнроста за эту пятилетку.

Приченяя указаииую формулу, получим

$$x+1 = \sqrt[5]{\frac{140}{100}} = \sqrt[5]{1,4};$$

$$\lg(x+1) = \frac{\lg 1\ 4}{5} = \frac{0.1461}{5} = 0,029 \text{ (табл.15П; антилогарифмоа)}$$

$$x+1 = 1,069;\ x = 0,069, \text{ или } 6,9\% \text{ в год.}$$

СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ

Среднюю квадратическую вычисляют по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n}}, \qquad (10).$$

т.е она равна корню квадратному из суммы квадратов дат, делениой на их число Так, если имеется пять двт 1; 4; 5; 5; 5, то средняя квадратнческая равна

$$S = \sqrt{\frac{1^2+4^2+5^{2}+5^2+5^2}{5}} = \sqrt{\frac{92}{5}} = \sqrt{18,4} = 4,3.$$

Употребляется средняя квадратическая при расчёте средних площадей, диаметров, радиусов.

СРЕДНЯЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ

Среднюю гармоиическую рассчитывают по формуле

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{V}} = \frac{n}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \ldots + \frac{1}{V_n}} \qquad (11)$$

Для пяти дат (1, 4, 5; 5; 5) средняя гармоиическая равна

$$H = \frac{5}{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{5}{1,85} = 2,70.$$

Применяется средняя гармоническая при усреднении меняющихся скоростей.

Пример 4. Пять рабочих в течение часа собрали следующее количество семяи: 1 – 10, 2 – 20, 3 – 25, 4 – 30, 5 – 20, всего 105 кг за час. Необходимо определить, сколько времени в среднем затрачивает рабочий на сбор 1 кг семяи.

Решение с помощью средней арифметической $\bar{x} = \frac{105}{5} = 21$ кг, откуда

на сбор 1 кг затрачивается 60 : 21 = 2,86 мин. Фактически иа сбор 105 кг семян затрачеио 60/10 + 60/20+60/25 + 60/30 + 60/20 = 16,4 мин. В этом случае на 1 кг семян рабочий затрачивает в среднем 16,4 : 5 = 3,28 мин.

Следовательно, рабочий за 1 час собрал в среднем ие 21 кг, а меньше:

$$H = 5 : \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right) = \frac{5}{0,273} = 18,31 \text{ кг}.$$

Отсюда на сбор 1 кг семян рабочий затрачивает 60/18,31 = 3,28 мин

МАЖОРАНТНОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Описанные средние показатели позволяют по данным выборочного наблюдения судить о параметрах генеральной совокупности, распределяемой по нормальному закону. Так как эти средние получаются из одной и той же общей формулы, между ними существуют определённые отношения, выраженные следующим рядом мажорантности (неравенства).

Пример 5. Вычислить различные типы средних по следующим данным и убедиться в правильности порядка возрастания средних:

V	N	n/V	$\lg V$	$\lg Vn$	Vn	V^2	V^2n
1	2	3	4	5	6	7	8
10	1	0,1000	1,0000	1,0000	10	100	100
14	2	0,1428	1,1461	2,2922	28	196	392
18	2	0,1111	1,2552	2,5105	36	324	648
22	4	0,1818	1,3424	5,3696	88	484	1936
26	1	0,0384	1,4149	1,4149	26	676	676
Итого	10	0,5742	–	12,5874	188	–	3752

Заполняем колонки с 3-й по 8-ю и по соответствующим формулам исчисляем средние взвешенные:

$$H = \frac{\sum n}{\sum \frac{1}{v}} = \frac{10}{0,5742} = 17,41 \text{ – \textit{средняя гармоническая.}}$$

$$\lg G = \frac{\sum (\lg v) n}{\sum v} = \frac{12,5874}{10} = 1,2587 .$$

$G = 18,14$ – *среднее геометрическое.*

$$\bar{x} = \frac{\sum vn}{n} = \frac{188}{10} = 18,8 \text{ – \textit{среднее арифметическое}}$$

$$\lg S = \sqrt{\frac{\sum v^2 n}{\sum n}} = \sqrt{\frac{3752}{10}} = \sqrt{375,2} \ ; \ \lg S = \frac{1}{2} \lg 375,2 = \frac{1}{2} 2,5742 = 1,2871 .$$

$S = 19,37$ – ***средняя квадратическая.***

Порядок средних определился в соответствии с правилом мажорантности

$$H \ G \ \bar{x} \ \ S,$$

$$17,41 < 18,14 < 18,8 < 19,37.$$

Средняя величина характеризует одним общим показателем всю группу в целом и поэтому совершенно не учитывает разнообразия особей по изучаемому признаку.

Всякая группа состоит из неодинаковых *особей*, отличающихся друг от друга по каждому признаку. Различия эти иногда очень велнки, иногда они почти иезаметны; практически невозможно найти даже двух особей абсолютно одинаковых. Поэтому объединение неодинаковых особей – основное групповое свойство, изываемое разиообразием

Степень разнообразия животных далеко не безразлична для зоотехника.

В иачале создания новых пород, породных групп, линий важно знать степень разнообразия исходного материала: чем разнообразнее племенные группы, тем больше имеется возможности для отбора и подбора.

При завершении этих работ нвряду с повышением среднего качества хозяйственно полезных признаков требуется уменьшеиие разнообразия, создание однородных групп по признакам. Поэтому совершенно недостаточио одних средних показателей при изученни групп растений, необходимы еще и показатели разнообразия.

В лесоведении используются три показателя разнообразия· лимиты, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Кроме того, в днсперсионном анализе самостоятельное значение имеют. дисперсия (сумма квадратов центральных отклонеиий) и варианса (средний квадрат).

ЛИМИТЫ (Lim)

Предположим, на двух плантациях имеется по пять растений одного клона тополя, высота которых следующая (м)

1-я плантация: 6,40 6,45 6,50 6,55 6,60 $\bar{x}_1 = 6{,}50$.

2-я плантация. 6,10 6,30 6,50 6,70 6,90 $\bar{x}_2 = 6{,}50$.

Средняя высота на обеих плантациях одинакова: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 6{,}50$ м, но иа первой плантации разнообразие по этому признаку гораздо меньше, чем во втором. Наиболее простым показателем разнообразия являются лимиты, т.е. крайнне варианты – минимальиый и максимальиый. В приведенном примере лимиты таковы:

$$\lim_1 = 6{,}40 - 6{,}60;$$

$$\lim_2 = 6{,}10 - 6{,}90.$$

Лимиты показывают размах значений и тем самым характеризуют разнообразие признака в группе. Они отмечают наивысший показатель производнтельности, имеющийся в исследуемой группе, что представляет значительный интерес при обследовании растеиий с точки зрення хозяйственно полезных признаков: объем ствола, рост по высоте и днаметру, шнрина кроны н т д. В то же время лимиты отмечают и налнчне наименее продуктнвных растенний, нерентабельиых для хозяйства. Поэтому лимиты представляют большой ннтерес даже прн иалнчни других, более точных показателей разиообразия.

СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Предположим, на двух плантациях нмеется по десять растенний, высота которых такова (см):

1-я плантация: 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 $\bar{x}_1 = 145$.

2-я плантация 100 145 145 145 145 145 145 145 145 190 $\bar{x}_2 = 145$.

Средние и лимиты для обеих групп одинаковы, но степень разнообразия этих групп неодинакова. На первой плантацин все растения по высоте различны, а на второй восемь нз десяти растений имеют одинаковую высоту. Разнообразне первой группы несомненно больше, но отметить это с помощью лимитов невозможно. В таком случае необходимо привлечение осиовного показателя разнообразия – среднего квадратического отклонения.

Существует много формул, по которым можно рассчитать среднее квадратнческое отклоненне. Все онн дают практическн одинаковый результат. Прнмененне той илн иной формулы обусловлнвается лишь технческим удобством расчетов.

Все эти формулы нсходят нз одной основной

$$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}\,;\; C=\sum(V-\bar{x})^2 = \sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{n},$$

где: σ – среднее квадратическое отклоненне, илн просто снгма (по названию греческой буквы – снгма малая – символа этого показателя); C – дисперсия, илн сумма квадратов центральных отклоиеиий, т.е. квадратов разностей между каждой датой н средней арнфметической; V – дата, значенне прнзнака у каждой особи в группе; $\bar{x}$ – средняя арифметическая признака для даиной группы, $(n-1)$ – чнсло степеней свободы, равное прн расчете выборочной снгмы числу особей в группе без одного. Для группы особей, нмеющнх велнчнны признака 1; 2; 3; 4; 5, среднее квадратическое отклоненне можно рассчитать следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{\sum V}{n} = \frac{15}{5} = 3.$$

Днсперсню можно получить н более просто по второй формуле:

$$C = \sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{n} = (1+4+9+16+25) - \frac{15^2}{5} = 55 - \frac{225}{5} = 10\,.$$

По приведенным формулам можно рассчитыввть среднее квадратическое отклонение для групп любого объема Для высоты десяти растений на двух плантациях прн равенстве средних $\bar{x}_1 = 145$, $\bar{x}_2 = 145$ н лнмитов $\lim_1 = 100–190$, $\lim_2 = 100–190$ средние квадратические неодинаковы:

$$C_1 = 2(45^2 + 35^2 + 25^2 + 15^2 + 5^2) = 8250;\ \sigma = \sqrt{\frac{8250}{9}} = 30{,}2;$$

$$C_2 = 2 \times 45^2 = 4050;\ \sigma = \sqrt{\frac{4050}{9}} = 21{,}2.$$

Более сложные формулы расчета среднего квадратнческого отклонения следует применять только при отсутствнн достаточной счетной техники, когда простое суммирование дат и их квадратов становится затруднительным.

В таких случаях прибегают к предварительному составлению варнационных рядов и к расчету $\bar{x}$ и σ специальными способамн, разработанными для разных условнй (способ взвешенных дат, способ взвешеиных вариаций, способ произведений, способ сумм).

Техника расчетов среднего квадратического отклонення (вместе с расчетамн средней арифметнческой) показана в пераой части пособия, в алгорнтмах 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 с указаннем условий применения каждого алгоритма.

Среднее квадратическое отклонение служит основным показателем разнообразия значений признака в группе. Используется сигма и как самостоятельный показатель, н как основа для конструнрования многнх другнх показателей бнометрии. коэффициента варнацин, ошнбок репрезентативности, разлнчных показателей распределения, коэффнциентов корреляции и регресснн, элементов днсперсионного анализа, формул регрессии.

Снгма – показатель именованный и выражается в тех же единнцах, что и средняя величина

ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Число степеней свободы равно чнслу элементов свободного разнообразия. Оно равио чнслу всех имеюшихся элементов изучения без чнсла ограничений разнообразия.

Пусть, например, для нсследования требуется взять трн особи с любым развитием изучаемого признака. Прн таком заданнн велнчнна признака ие имеет никаких ограничений, поэтому число степеней свободы равно $\nu = 3 - 0 = 3$.

Если требуется взять три числа с условием, что сумма их должна быть равна определенной величине, например 100, то первое число может быть любой величины: 80, 800 и т д.; второе число также может быть выбрано свободно без всяких ограничений, например 10, 1269 и т.д.; третье же число может иметь только одно значение – такое, чтобы оно вместе с двумя предыдущими составило в сумме 100. Если два первых числа 80 и 10, то третье должно быть 10, если два первых числа 800 и 1269, то третье должно быть 1969, т.е. отрицательным.

В данном случае два числа выбирают свободно, а третье не имеет свободы выбора: для трех чисел имеются две степени свободы:

$$\nu = 3-1 = 2.$$

Для *n* дат при *k* ограничениях имеется *n* – *k* степеней свободы.

При вычислении средней арифметической никаких ограничений величины значений признака не имеется. Поэтому число элементов, образующих среднюю арифметическую, равно числу дат.

При вычислении среднего квадратического отклонения имеется одно ограничение Сигма вычисляется для группы, имеющей определенную среднюю арифметическую Поэтому разнообразие элементов, образующих среднее квадратическое отклонение, ограничено этим одним условием, и в данном случае число степеней свободы равно числу дат без одной: $\nu = n - 1$.

КОЭФФИЦИЕНТ ВАРИАЦИИ (C_ν)

Среднее квадратическое отклонение может непосредственно служить для сравнения разнообразия групп лишь при соблюдении следующих двух условий

1) при сравнении одинаковых признаков;

2) если средние сравниваемых групп не очень разнятся друг от друга.

При отсутствии этих условий сигма не может служить для сравнения разнообразия.

Поэтому для сравнения разнообразия различных признаков применяется особый показатель – коэффициент вариации C_ν, который вычисляют по следующей формуле:

$$C_\nu = \frac{100\sigma}{\bar{x}}.$$

НОРМИРОВАННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Обычно признак у каждой особи выражается именованным числом: 7 кг шишек с дерева, 24 м высота дерева, 30 см длина корневой системы и т.д.

Это основной способ измерения признаков. Но в некоторых случаях такой способ выражения степени развития признака без дополнительных приемов не совсем удобен.

Предположим, сравниваются две плантации по продуктивности шишек. первая за год дала 3500 кг, а вторая – 4580 кг. Можно ли иа основании только этих данных сказать, что у второй продуктивность выше. Нет, нельзя, еще не известен возраст сравниваемых плодоносящих плантаций. При всех прочих равных условиях (оптимальное удобрение, уход и т. д.) деревья различаются по урожайности в связи с возрвстом У первой плантации урожай был 3500 кг в возрасте 30 лет, у второй – 4580 кг, в возрасте 60 лет, т.е. в период полного развития плодоношения деревьев.

Ясно, что простое сравнение урожаев этих плантаций невозможно, необходимо учесть, что эти плантации разных возрастов. Предположим, что средний урожай всех плантаций данного возраста был 2500 кг шишек, а плантаций в аозрасте 60 лет – 3500 кг. Значит, урожай первой плантации больше среднего урожая для всей группы плантаций на 1000 кг (3500–2500), а урожай второй – на 1080 кг выше по своей возрастной группе. Сравнение плантаций по разиости между урожаем и средней для соответствующей группы уже лучше, чем простое сравнение урожаев. Но центральное отклонение ($D = V - \bar{x}$), используемое в данном случае как показатель признака, все еще имеет недостатки. Оно – число именоаанное и иевзвешенное. Те же самые 1000 кг разницы между датой и средней при малом разнообразии группы могут считаться большим отклоненнем, а при большом разнообразии – незначительным. Поэтому чтобы взвесить полученные отклонения и одновременно освободиться от именованиых чисел, оказалось очень удобным выразить центральное отклонение в сигмах и получить так называемое нормированное отклонеиие, обозиаченное буквой x и вычисляемое по следующей формуле:

$$x = \frac{V - \bar{x}}{\sigma}.$$

Для того чтобы урожаи двух плантаций (3500 и 4580 кг) выразить в нормированных отклонениях, необходимо знать сигмы урожаев. Для первой группы σ_1 = 500 кг, а для второй группы σ_2 = 600 кг Таким образом, иормированные отклонения сравниваемых плантаций будут

$$x_1 = \frac{3500 - 2500}{500} = +2,0; \quad x_2 = \frac{4580 - 3500}{600} = +1,8.$$

Оказалось, что вторая плантация хуже по урожайности, несмотря на более высокий урожай и большее центральное отклонение.

РАБОТА 1. СБОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы – сбор экспериментальиого материала для последующей его обработки.

Материал и оборудование:

1 Шишки, листовые пластиики, сеяицы, естественные или искусственные насаждения и др.

2. Письменные прииадлежности

3. Тетрадь.

4. Линейка или штангенциркуль, мерная вилка, высотомер и др.

Пояснение к заданию. Исследуя биологические объекты, иевозможно изучить (обмерить) всех представителей даииого вида, которые проявляют сходство в основиых своих чертах и в то же время отличаются друг от друга по количественным показателям Например, все листовые пластинки тополя определёиного сорта имеют одинаковые сортовые прнзнаки, но могут отличаться друг от друга размерами Для определения их средних размеров невозможно, да и не нужно измерять все листья. Достаточно случайно из разных частей кроны иескольких одновозрастных деревьев одного и того же сорта измерить длину листовой пластинки, записав результаты в журнал иаблюдений, и потом определить статистические показатели, которые будут характеризовать ие только выборочиую совокупность (иапример, 100 листовых пластинок), ио и всю совокупность признака даниого сорта в коикретном районе произрастаиия Можно составить выборку иначе: воспользоваться сиятыми кем-либо (иапример, при сборе урожая шишек кедра, сосиы, ели и т.п.) иесортированными плодами одного вида Для этого нужно из мешков или кучи взять без преднамеренного выбора, случайно, некоторое число шишек, измерить их, записав результаты, а затем произвести расчёты иеобходимых статнстических показателей.

Таким образом, для выполиеиия работы иеобходимо произвести выборку единнц иаблюдения из определённой совокупности, записать результаты измерений парных нли нескольких признаков в журнал наблюдений (табл 1).

Точиость измерения признаков должна быть не ниже указанной в табл. 2

Таблица 1

Журнал регистрации измерении признаков листовой пластинки

№ п/п	Длина черешка листа, *x*	Длина листа, *y*	Шириа листа, *z*	И т д
1	45	64	51	
2	41			
3	40			
4	39			
5	37			
6	36			
7	36			
8	35			
9	34			
10	30			
Итого				

Таблица 2

Точность измерении признаков

№ п/п	Название признака	Точность измерения
1	Длина шишек, листьев	0,1 см
2	Диаметр шишек	1,0 мм
3	Высота сеянцев	0,5 см
4	Диаметр сеянцев у шейки корня	1,0 мм
5	Высота саженцев, достигших 1,0 1,6м	1,0 см
6	Диаметр саженцев у шейки кория	0,5 см
7	Высота деревьев	Определяется точностью высотомера
8	Диаметр деревьев иа высоте 1,3 м	2,0 см
9	Длина годичных побегов	0,5 см
10	Длина прироста прошедшего года у хвойных	0,5 см
11	Диаметр на середине прироста	1,0 мм
12	Высота растений саженцев, достигших 1,8–2,5 м	5,0 см
13	Диаметр шейки корня, достигших высоты 1,8–2,5 м	1,0 см
14	Диаметр кроны кустарников и молодых деревьев в культурах, школах	10 см
15	Диаметр проекции кроны высокорослых деревьев	0,5 м

В начале работы подробно описывается: выбранный объект, характеристика участка, указываются измеряемые признаки и точность их измерения

При составленни выборки иеобходимо руководствоваться следующим правилом: выборка должна быть случайиой и достаточиой по объёму. Способ достижения случайиости может заключаться в составленни выборки «на удачу» (по принципу жребия, вслепую).

Можно при составлении выборки добиваться случайности с помощью таблиц случайных чисел. Для этого массе однородных объектов присваиваются номера, которые выписываются из таблицы случайных чисел, начиная с любого места, подряд, следуя в любом направлении. Выписываются числа – номера однозначные, двузначные и т.д. в зависимости от объёма частной совокупности и необходимого объёма выборочной совокупности Объекты с этими номерами измеряются, результаты измерений записываются в журнал (табл. 3). Например, из частной совокупности объёмом 100 однородных объектов необходимо выбрать случайно 10 вариант. Всем объектам частной совокупности присваивают номера от 1 до 100.

Из таблицы случайных чисел (табл. 1П) выписывают 10 двузначных номеров (первые две цифры или последние две цифры каждого четырёхзначного случайного числа), например, начиная с левого самого верхнего 34 далее вниз по колонке подряд: 28, 47, 06, 15, 82, 13, 10, 74, 02. У объектов, имеющих выписанные номера, измеряются заранее намеченные признаки и записываются рядом с соответствующим случайным числом – номером.

Таблица 3

Журнал регистрации измерений (при использовании таблицы случайных чисел)

№ п/п	Случайное число-номер	Результаты измерения объектов, имеющих порядковый номер, равный случайному числу-номеру			
		Длина черешка, x	Длина листа, y	Ширина листа, z	И т.д
1	34				
2	28				
3	47				
4	06				
5	15				
6	82				
7	13				
8	10				
9	74				
10	02				

РАБОТА 2. АНАЛИЗ МАЛОЧИСЛЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Цель работы – освоить методы составления, обработки и оценки невзвешенного ряда

Материал и оборудование: журнал измерений, письменные принадлежности, калькулятор.

Задание. По данным замеров одного из признаков с помощью таблицы случайных чисел сформировать две малые выборки ($n = 10$) и провести:

1. Оценку сильно отклоняющихся вариантов (алгоритм 1).
2. Восстановить при необходимости выпавшие данные (алгоритм 2).
3. Рассчитать по всем признакам $\bar{x}$ и σ.
4. Для сформированных двух выборок одного из признаков провести расчёты (алгоритм 3):

– средней арифметической ($\bar{x}$);
– дисперсии (суммы квадратов; C);
– среднего квадратического отклонения σ;
– коэффициента вариации (C_v, %),
– ошибки среднего (m);
– точности опыта или относительной ошибки (P, %);
– доверительного интервала средней (I);
– достоверности средней (t)

5. Оценить разность выборочных средних (алгоритм 4):

– первый критерий достоверности разности средних (t_d);
– второй критерий достоверности разности средних (F_d).

6. При отсутствии достоверных различий между выборками провести их объединение и рассчитать обобщённую $\bar{x}$ и σ.

Пояснение к заданию. При выполнении задания следует использовать приведенные ниже алгоритмы.

АЛГОРИТМ 1. БРАКОВКА АРТЕФАКТОВ

Условия применения. Браковка проводится отдельно по каждому варианту опыта. Количество дат варианта – не менее четырех.

1. Вычисление критерия τ.

Для минимальных дат

$$\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1},$$

для максимальных дат

$$\tau_2 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2},$$

где x_1 – наименьшая дата; x_2 – вторая по величине дата после x_1; x_n – наибольшая дата; x_{n-1} – вторая по величине дата после x_n; n – количество дат.

2. Сравнение τ с его теоретическим значением τ_1 и τ_2 сравнивают с теоретическим значением τ (табл. 4) при соответствующем n и необхо-

димом уровне вероятности 95 или 99% (вероятность ошибки соответственио равна 1 : 20 и 1 : 100).

Таблица 4

Стандартное значение критерия τ

№ п/п	Уровень вероятности, %		n	Уровень вероятности, %	
	95	99		95	99
4	0,955	0,991	14	0,395	0,502
5	0,807	0,916	16	0,369	0,472
6	0,689	0,805	18	0,349	0,449
7	0,610	0,740	20	0,334	0,430
8	0,554	0,683	22	0,320	0,413
9	0,512	0,635	24	0,309	0,400
10	0,477	0,597	26	0,299	0,389
11	0,450	0,566	28	0,291	0,378
12	0,428	0,541	30	0,283	0,369

Если τ_1 или τ_2 больше табличиого значения, то дата – артефакт.

Пример 5, 17, 18, 19, 20, 26. Проверить принадлежность 5 и 26 к данному ряду n = 6:

$$\tau_1 = \frac{17-5}{20-5} = 0{,}800\,;\ \tau_{95} = 0{,}689;\ \text{дата 5 – артефакт;}$$

$$\tau_2\,\frac{26-20}{26-17} = 0{,}667\,;\ \tau_{95} = 0{,}689\,;\ \text{дата 26 – не артефакт.}$$

АЛГОРИТМ 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫПАВШИХ ДАТ

Условия применения. Даты должиы быть сопряжены по повторениям. Общее количество выпавших дат ие должно превышать 20%. Количество вариантов с выпавшими датами не более 40%. Количество аывпавших дат у отдельио взятого варианта или повторения не более 40%.

1 Восстаиовление одной-единствеино выпавшей даты (x):

$$x = \frac{\sum B \times l + \sum П \times n - \sum x}{(l-1)(n-1)}.$$

$\sum B$ и $\sum П$ – сумма дат соответственио варианта и повторения с выпавшей датой; l – количество вариантоа, n – количество повтореиий.

2. Восстановление двух и более дат.

В скобках взята восстановленная дата, вычисленная следующим образом

а) средняя цельных вариантов ($А, Г, Д$) без третьего повторения $(\bar{x}_c)$:

$$\bar{x} = \frac{23+27+25+24+32+34+34+34+18+19+18+17}{12} = 25{,}42;$$

б) средняя варианта *Б* $(\bar{x}_Б)$ $\bar{x} = \dfrac{25+24+26+2}{4} = 25{,}00;$

в) отклонение (d) от $\bar{x}_C$, $d = \bar{x}_Б - \bar{x}_C$; $d = 25{,}00 - 25{,}42 = -0{,}42$;

г) средняя 3 повторения $(\bar{x}_3)$ $\bar{x}_3 = \dfrac{23+33+17}{3} = 24{,}33$;

д) величина восстановленной даты $x = \bar{x}_3 + d$; $x = 24{,}33 + (-0{,}42) = 23{,}91$.

Таблица 5

Результаты опытных данных

Вариант	Повторения				
	1	2	3	4	5
А	23	27	23	25	24
Б	25	24	(23,9)	26	25
В	27	26	–	28	-
Г	32	34	33	34	34
Д	18	19	17	18	17

Величину 23,91 записывают в табл 5 и берут в скобки для обозначения, что дата восстановлена. Остальные выпавшие даты восстанавливают аналогично. При этом восстановленные даты не учитываются

АЛГОРИТМ 3. АНАЛИЗ МАЛОЧИСЛЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Условия применения Количество дат 2–30 Более 30 – большая выборка (см. алгоритмы 4, 6).

Даты малозначные·

1. Каждую дату возводят в квадрат
2. Даты и их квадраты суммируют.

На основе полученных сумм $\sum V$ и $\sum V^2$ рассчитывают:

– среднюю арифметическую $\bar{x} = \dfrac{\sum V}{n}$;

– дисперсию (сумму квадратов) $C = \sum V^2 - \dfrac{(\sum V)^2}{n}$;

– сигму $\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$;

– коэффициент вариации $C_v = \frac{100\sigma}{\bar{x}}$;

– ошибку среднего $m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

– точиость опыта (отиосительиая ошибка) $P = \frac{m}{\bar{x}}$ %;

– достовериость средней (критерий Стьюдента) $t = \frac{\bar{x}}{m}$.

Таблица 6

Результаты исследоваиий

№ п/п	V	V^2
1	12	144
2	9	81
3	10	100
4	13	169
5	15	225
6	14	196
7	8	64
8	12	144
$n=8$	$\sum V = 93$	$\sum V^2 = 1123$

$\bar{x} = \frac{\sum V}{n}$; $\bar{x} = \frac{93}{8} = 11{,}6$, $C = 1123 - \frac{93^2}{8} = 41{,}88$, $\sigma = \sqrt{\frac{41{,}88}{7}} = 2{,}44$.

$C_v = \frac{2{,}44}{11{,}6} 100 = 21\%$; $m = \frac{2{,}44}{2{,}83} = 0{,}86$; $P = \frac{0{,}86}{11{,}6} = 7{,}4\%$;

$t = \frac{11{,}6}{0{,}86} = 13{,}49$, $t > t_{95} = 2{,}36$ (табл. 2П).

Уровеиь измеичивости C_v (по: Мамаев, 1972):
- до 7% – очеиь низкий;
- 8–12 – иизкий;
- 13–20 – средний;
- 21–30 – повышенный;
- 31–40 – высокий;
- более 40 – очеиь высокий.

Коэффициент выравненности (B): $B = 100–V$; $B = 100–21 = 79\%$ При B более 90% – большая, 80–90% – средняя, менее 80% – малая выравненность величин дат.

Доверительный интервал средней (I):

$$I = t \times m, \ t \text{ – критерий Стьюдента.}$$

Его находят по табл. 2П при числе степеней свободы $\nu = n - 1$ и при иеобходимом уровне вероятностн 95, 99, или 99,9% (вероятность ошибки соответственно равна 1 : 20, 1 · 100 и 1 : 1000).

$\nu = 8 - 1 = 7$; t_{95}=2,36; I_{95}=2,36×0,86=2,03. $\bar{x} \pm I_{95} = 11,6 \pm 2,03$, или истинная $\bar{x}$ с вероятностью 95% находится в пределах 9,57–13,63.

Запись результатов математической обработки

$$\bar{x} \pm I_{95} = 11,6 \pm 2,03.$$

Даты многозначные

По каждой дате получают условное отклонение $\Delta = V - A$, где A – любое удобиое число.

Каждое отклонение возводят в квадрат.

На основе двух сумм $\sum\Delta, \sum\Delta^2$ рассчитывают.

– среднюю арнфметическую $\bar{x} = A + \dfrac{\sum\Delta}{n}$;

– дисперсню (сумму квадратов) $C = \sum\Delta^2 - \dfrac{\left(\sum\Delta\right)^2}{n}$,

– сигму $\sigma = \sqrt{\dfrac{C}{n-1}}$.

Таблица 7

Результаты исследований

№ п/п	V	Δ (V 2400)	Δ^2
1	2 536	136	18 496
2	2 703	303	91 809
3	2 815	415	172 225
4	2 487	87	7 569
5	2 644	244	59 536
6	2 521	121	14 641
7	2 452	52	2 704
8	2 463	63	3 969
	–	$\sum\Delta = 1421$	$\sum\Delta^2 = 370949$

$$\bar{x} = 2400 + \frac{1421}{8} = 2577{,}6\ ;\ C = 370\,949 - \frac{(1421)^2}{8} = 118544;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{118544}{7}} = 130{,}13;\ C_v = \frac{130{,}13}{2577{,}6} \times 100 = 5{,}05\%\ ;$$

$$m = \frac{130{,}1}{2{,}83} = 45{,}97;\ P = \frac{45{,}97}{2577{,}6} = 1{,}78\%.$$

АЛГОРИТМ 4. ОЦЕНКА РАЗНОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ СРЕДНИХ

1. Первый критерий достоверности разности средних

$$t_d = \frac{d}{m_d} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \geq t_{st}\{\nu = n_1 + n_2 - 2\};$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – сравниваемые выборочные средние, m_1^2, m_2^2 – квадраты ошибок средних.

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ m^2 = \frac{\sigma}{n} = \frac{C}{n(n-1)};$$

t_{st} – стандартные значения первого критерия находят по таблицам Стьюдента (табл. 2П) по числу степеней свободы ($\nu = n_1 + n_2 - 2$) для одного из трёх порогов вероятности ($B_1 = 0{,}95$; $B_2 = 0{,}99$; $B_3 = 0{,}999$); n_1, n_2 – объём выборок.

2. Второй критерий достоверности разности средних

$$F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \times \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \geq F_{st}\left\{\frac{\nu_1 = 1}{\nu_2 = n_1 + n_2 - 2}\right\},$$

где d^2 – квадрат разности средних $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$; $\sigma_z^2 = \dfrac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \dfrac{C_1 + C_2}{n_1 + n_2 - 2}$ – варианса случайного разнообразия; F_{st} – стандартные значения второго критерия находят по таблицам преобразованного фишеровского критерия (табл. 11–13П).

При $t_d \geq t_st$ или при $F_d \geq F_st$ разность достоверна; подчеркивают одной, двумя или тремя чертами, если достигнут первый, второй или третий порог вероятности безошибочных прогнозов. При $t_d < t_st$ или $F_d < F_st$ разность недостоверна; подчеркивают волнистой чертой.

Пример. Исходные данные: $n_1 = 25$; $n_2 = 36$; $\bar{x}_1 = 230$; $\bar{x}_2 = 210$; $\sigma_1 = 23$; $\sigma_2 = 21$.

Вычисление первого критерия достоверности разности средних.

$$- m_1^2 = \frac{23^2}{25} = 21,16;$$

$$- m_2^2 = \frac{21^2}{36} = 12,25;$$

$$- m_d = \sqrt{21,16 + 12,25} = 5,78;$$

$$- d = 230 - 210 = 20;$$

$$- t_d = \frac{20}{5,78} = \underline{\underline{3,46}},\ \nu = 25+36-2 = 59;\ t_{st} = \{2,0 - 2,7 - 3,5\}$$ (табл. 11–13П).

Вычисление второго критерия достижения разности средних.

$$- \sigma_z^2 = \frac{24 \times 23^2 + 35 \times 21^2}{25 + 36 - 2} = 476,8;$$

$$- F_d = \frac{20^2}{476,8} \times \frac{25 \times 36}{25 + 36} = \underline{\underline{12,4}};\quad \nu_1 = 1;\quad \nu_2 = 25 + 36 - 2 = 59;$$

$F_{st} = \{4,0 - 7,1 - 12,0\}$ (табл. 11П–13П)

РАБОТА 3. АНАЛИЗ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА БОЛЬШОЙ ЧИСЛЕННОСТИ

АЛГОРИТМ 5. АНАЛИЗ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА БОЛЬШОЙ ЧИСЛЕННОСТИ

Цель работы – группировка и обработка данных при количественной изменчивости по трем признакам.

Задание. По данным обмера признаков ($n = 100$) провести следующие расчёты.

1. Группировка вариационного ряда:

– определить величину интервала (I);

– определить число классов (k);
– составить таблицу разноскн дат.
2 Вычислить основные параметры вариациоиного ряда:
– без составлеиия вариационного ряда;
– по способу взвешенных вариаций;
– по способу произведений;
– по способу сумм.
3. Выпишите данные $\bar{x}$, m, n для других деревьев этого вида и оцените разность выборочных средних:
– первый критерий достовериости разиости средних (t_d);
– второй критерий достовериости разиости средних (F_d).
4. Определить непараметрические средние – медиану и моду.
5. Для одного из вариационных рядов вычислите условные и центральные моменты. Рассчитайте асимметрию и эксцесс.
6. Постройте гистограмму и полигон частот.

Вычислеиие $\bar{x}$ и σ без составлеиия вариациоиного ряда

Условия применения. Количество дат – не менее 30. Если меньше, то см алгоритм 3

Пример. Произведены измерения высоты 100 саженцев тополя и получены следующне результаты (табл. 8).

Таблица 8

Результаты опытных данных*

Суммы вариантов	413	450			427					399
	414	386			397					417
	432	420			427					420
	401	424			380					406
	414	410			430					423
	425	391			418					417
	423	434			410					405
	412	413			411					422
	433	395			439					416
	424	434			407					409
$\sum V$	4191	4157			4146					4134
$\sum V^2$	1 757349	1 731959			1721682				..	1709590

* См табл. 9

Все даты последовательно возводят в квадрат без снятия получающихся чисел Каждое последующее возведение в квадрат накладывается на все предыдущие. После возведения в квадрат последней даты получаются две основные суммы $\sum V$ и $\sum V^2$. При большом числе дат их разбивают на десятки (пятёрки), получаются частные суммы ($\sum V$) и ($\sum V^2$). Затем частные суммы складывают. На основе двух общих сумм $\sum V$ и $\sum V^2$ рассчитывают $\bar{x}$ и σ. Число наблюдеиий 100.

$$\sum V = 41\,674; \; \sum V^2 = 17\,385\,884.$$

Средняя арифметическая $\bar{x} = \dfrac{\sum V}{n} = \dfrac{41674}{100} = 416,7$

Дисперсия (сумма квадратов)

$$C = \sum V^2 - \frac{\left(\sum V\right)^2}{n} = 17385884 - \frac{41674^2}{100} = 18661;$$

Сигма $\sigma = \sqrt{\dfrac{18661}{99}} = 13,73.$

АЛГОРИТМ 6. СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Таблица 9

Первичные данные (даты)

413	450	419	412	427	435	404	430	421	399
414	386	428	441	397	417	418	414	429	417
432	420	416	407	427	428	417	398	424	420
401	424	411	426	380	419	406	419	429	406
414	410	409	416	430	403	426	407	400	423
425	391	432	409	418	418	388	421	415	417
423	434	402	431	410	405	436	405	424	405
412	413	444	392	411	428	394	431	411	422
433	395	433	420	439	398	437	422	394	416
424	434	408	443	407	421	422	410	423	409

Число классов $r = 1 + 3,3 \lg n$; $n = 100$; $r = 1 + 3,3 \times 2 = 7,6$.
Размах $\rho = max - min = 450 - 380 = 70$.

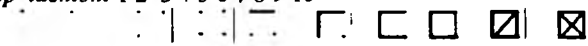
Величини классов $k = \dfrac{\rho}{r} = \dfrac{70}{7,6} = 9,2 \approx 10$

Середина классов (W) – полусумма начала данного класса и начала следующего большего класса. Для призиаков, выражеииых только целыми числами (число жилок листа, число соцветий, плодов и т.д), а также при разноске дат, предварительно округленных (3,67 = 3,7; 5,41 = 5,4 и т.д.), средина классов равна полусумме его начала и конца. Желательно, чтобы середины классов были кратны величине классов и чтобы середины минимального и максимального классов были близки к фактическим минимуму и максимуму.

Начало классов – $W_a = W - \frac{1}{2}k$ Например: $W_a = 380 - \frac{1}{2}\times 10 = 375$.

Конец классов – $W_\omega = W + \frac{1}{2}k - \delta$, где δ – принятая точность. Например: $W_\omega = 380 + \frac{1}{2}\times 10 - 1 = 384$

Шифр частот 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Вариационный ряд

Классы		Разноска дат	Частоты f
$W_\alpha \div W_\omega$	Средины W		
445 ÷ 454	450		1
435 – 444	440		7
425 – 434	430	⊠⊠	20
415 – 424	420	⊠⊠⊠	30
405 – 414	410	⊠⊠	25
395 – 404	400	⊠	10
385 – 394	390		6
375 – 384	380		1
–	–		$\sum n = 100$

АЛГОРИТМ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\bar{x}$ И σ ПО СПОСОБУ ВЗВЕШЕННЫХ ВАРИАЦИЙ

Данный алгоритм применяют для больших групп при невозможности простого суммирования дат и их квадратов и при необходимости исследовать распределение признака, на основе вариационного ряда при наличии калькулятора.

$$\bar{x} = \frac{\sum fW}{n} = \frac{41700}{100} = 417,0;$$

$$C = \sum fW^2 - \frac{\left(\sum fW\right)^2}{n} = 17407200 - \frac{41700^2}{100} = 18300;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}} = \sqrt{\frac{18300}{99}} = 13{,}60.$$

Вариации W	Частоты f	fW	fW^2
450	1	450	202 500
440	7	3 080	193 600
430	20	8 600	184 900
420	30	12 600	176 400
410	25	10 250	168 100
400	10	4 000	160 000
390	6	2 340	152 100
380	1	380	144 400
$i = 10$	$N = 100$	$\sum fW = 41\ 700$	$\sum fW^2 = 17407200$

АЛГОРИТМ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\bar{x}$ И σ ПО СПОСОБУ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Алгоритм применяют для больших групп при невозможности простого суммирования дат и их квадратов, при необходимости исследовать распределение признака; на основе вариационного ряда; при наличии калькулятора.

$$\bar{x} = A + k\frac{S_1}{n};\ c = S_2 - \frac{S^2_1}{n};\ \sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}};\ S_1 = \sum f\alpha,\ S_2 = \sum f\alpha^2$$

W	f	α	$f\alpha$	$f\alpha^2$	Расчет основных показателей
450	1	+3	+3	9	$n = 100,\ A = 420,\ k = 10,$
440	7	+2	+14	28	$S_1 = \sum f\alpha = -30$
430	20	+1	+20	20	$S_2 = \sum f\alpha^2 = 192$
$420 = A$	30	0	0	0	$\bar{x} = 420 + 10\frac{-30}{100} = 417{,}0$
410	25	–1	–25	25	$c = 192 - \frac{30^2}{100} = 183$
400	10	–2	–20	40	$C = 10^2 \times 183 = 18\ 300$
390	6	–3	–18	54	$\sigma = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13{,}60$
380	1	–4	–4	16	
	$n = 100$	–	$S_1 = \sum f\alpha = +37 - 67 = -30$	$S_2 = \sum f\alpha^2 = 192$	

A – условная средняя: середина модального или близкого к нему класса (A = 420), k – величина классового промежутка (k = 10).

$\alpha = \frac{W_i - A}{k}$ – условные отклонения середин классов (вариаций), выраженные в классовых промежутках. Для $W = A$, $\alpha = 0$, для остальных варнаций $\alpha = +1, +2; +3$ и т.д. или $\alpha = -1; -2; -3$ и т.д.

S_1, S_2 – первая и вторая суммы, равные $\sum f\alpha$ и $\sum f\alpha^2$ (–30, 192).

$c = \frac{C}{k^2} = \frac{1}{k^2}\sum f(W_i - \bar{x})^2 = S_2 - \frac{S^2_1}{n}$ – сумма взвешенных квадратов центральных отклонений середин классов от средней ряда, выраженных в квадратах классового промежутка. Дисперсия $C = k^2c$.

Погрешности при расчёте показателей на основе вариационного ряда для данного примера равны

$$\Delta_{\bar{x}} = 417{,}0 – 416{,}7 - +03;\ \Delta_\sigma = 13{,}60 – 13{,}73 = –0{,}13.$$

АЛГОРИТМ 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\bar{x}$ И σ ПО СПОСОБУ СУММ

Даный алгоритм примеияют для больших групп при невозможности простого суммирования дат и их квадратов, при необходнмости исследовать распределение признака, на основе вариационного ряда; при любой счётной техиике.

$$\bar{x} = A + k\frac{S_1}{n};\ c = S_2 - \frac{S^2_1}{n};\ \sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}};\ S_1 = p_1 - q_1 = \left[\sum f\alpha\right];$$

$$S_2 = p_1 + q_1 + 2\,(p_2 + q_2) = \left[\sum f\alpha^2\right]$$

W	F	$p_1 = 37$	$P_2 = 10$	Проверка.
450	1	1	1	28 + 30 +42 = 100
440	7	8	9	28 +9 = 37; 42 +25 = 67
430	20	28	–	n = 100; A = 420; k = 10
420 = A	30			$S_1 = 37 - 67 = -30$
410	25	42	–	$S_2 = 37 + 67 + 2(10 + 34) = 192$
400	10	17	25	$\bar{x} = 420 + 10\frac{-30}{100} = 417{,}0$
390	6	7	8	$c = 192 - \frac{30^2}{100} = 183$
380	1	1	1	$C = 100 \times 183 = 18\,300$
	n =100	$q_1 = 67$	$Q_2 = 34$	$\sigma = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13{,}60$

p_1 – сумма накоплениых частот положительиой части первого ряда суммирования (37); q_1 – суммв накоплениых частот отрицательиой части первого ряда суммирования (67); p_1, q_2 – то же для второго ряда суммирования (10 и 34)

Центральные черточки (в первом ряду одна, во втором три) устанавливают точно против условиой средней (A); накопление частот ведется от краев к центру до встречи с центральиыми черточками.

Числа первого ряда – для положительиой части· 1; 1 + 7 = 8; 8 + 20 = = 28; p_1 = 1 + 8 + 28 = 37; для отрицательиой части: 1; 1 + 6 = 7; 7 + 10 = = 17, 17 + 25 = 42; q_1 = 1 + 7 + 17 +42 = 67.

Числа второго ряда – для положительиой части: 1; 1 + 8 = 9; p_2 = =1 + 9 = 10; для отрицательной части: 1; 1 + 7 = 8; 8 + 17 = 25.

q_2 = 1 + 8 + 25 = 34. По полученным p_1q_1, p_2q_2 вычисляют две суммы S_1 и S_2

Содержание н изиачение остальных величин: n, A, k, S_1, S_2, c – такие же, как и для способа произведеиий. Различие способов – только в вычислеиии двух основных сумм S_1 и S_2, которые по своей величиние равиы $\sum f\alpha$ и $\sum f\alpha^2$.

АЛГОРИТМ 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЗВЕШЕННОГО РЯДА ПО СПОСОБУ МОМЕНТОВ

Приведенную здесь схему расчета следует применять, когда иеобходим сравиительио полиый анализ изучаемой совокупности. При разработке алгоритма ставили целью свести к минимуму вычислительную работу и вместе с тем обеспечить требуемую точиость и правильиость расчетов путем введеиия проверочных операций.

Моментами распределения в биометрии называют средние степени отклонений вариаит от средней арифметической или от произвольиого, близкого к ией числа, или от нуля. В первом случае моменты называются центральными, во втором – условиыми, в третьем – начальными. Порядок момента равеи степени, в которую возводятся отклоиеиия. Основиым моментом называется частное от делеиия центральиого момента соответствующего порядка иа сигму, возведенную в степень, равную тому же порядку момента. Моменты, особенно центральные, играют большую роль при вычислеиии различных показателей вариациониого ряда. Средняя арифметическая – это начальиый момент первого порядка, а среднее квадратическое отклонение – квадратный корень из центрального момента второго порядка. Условные моменты вычисляют в качестве вспомогательиых для получения центральных моментов. Приведеиные ниже вычислеиия моментов имеют целью иллюстрировать само понятие моментов. В практических расчетах рекомендуется для вычислеиия момеитов применять способ кодированных вариант (см. дальше).

В таблице приведеиа сводка таких формул вычисления моментов, которые соответствуют вышеприведениым определениям последних.

Обозиачеиия моментов первых четырех порядков в таблице следующие:

- μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – центральиые;
- m_1, m_2, m_3, m_4 – условные;
- b_1, b_2, b_3, b_4 – иачальиые;
- r_1, r_2, r_3, r_4 – осиовные.

Остальные обозначения: Σ – зиак суммирования; x – варианты; f – частоты вариант, n – объем выборки; $\bar{x}$ – средняя арифметическая; A – начальиая точка отсчета, или условная средняя; σ – среднее квадратическое отклоиение (сигма); As – показатель асимметрии (см. дальше).

В следующем разделе через r будет обозначеи также коэффициент корреляции. Если r означает момеиты, то при ием стоит подстрочный индекс а виде цифры 3 или 4, а при r, озиачающем коэффициент корреляции, подстрочиого индекса ие бывает (или ои иной).

Центральиые моменты можио вычислить прямым способом, по формулам, указанным в таблице, т.е. через отклоиения вариант от средней арнфметической, ио их предпочитают получать через условные моменты, для чего рекомендуются следующие формулы:

– $\mu_2 = m_2 - m_1^2$,

– $\mu_3 = m_3 + m_1(2m_1^2 - 3m_2)$,

– $\mu_4 = m_4 + m_1\,[3m_1(2m_2 - m_1^2) - 4m_3]$, где обозначения те же, что и в таблице. Проверка вычислеиий центральных моментов производится по формулам

– $\mu_3 = m_3 - m_1(3\mu_2 + m_1^2)$;

– $\mu_4 = m_4 - m_1[4\mu_3 + m_1(6\mu_2 + m_1^2)]$.

Вычислим параметры ряда распределения саженцев берёзы по диаметру:

Границы класса	Середина класса, x	Частота, f	a	fa	fa^2	fa^3	fa^4	$a+1$	$(a+1)^4$	$f(a+1)^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
30–43	37	2	– 3	– 6	18	–54	162	–2	16	32
44–57	51	29	– 2	– 58	116	–232	464	–1	1	29
58 71	65	119	–1	–119	119	119	119	0	0	0
72 85	79	171	0	0	0	0	0	1	1	171
86–99	93	121	1	121	121	121	121	2	16	1936
100–113	107	42	2	84	168	336	672	3	81	3402
114–128	121	16	3	48	144	432	1296	4	256	4096
c = 14	A = 79	500	-	70	686	484	2834			9666

Формулы для вычисления моментов распределения

Порядок моментов распределения	Центральные моменты	Условные	Начальные	Основные
Первый	$\mu - \frac{\sum (x-\bar{x})f}{N} = 0$	$m_1 = \frac{\sum (x-A)f}{N}$	$b_1 = \frac{\sum (x-0)f}{N} = \bar{x}$	$r_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = 0$
Второй	$\mu_2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{N} = \sigma^2$	$m_2 = \frac{\sum (x-A)^2 f}{N}$	$b_2 = \frac{\sum (x-0)^2 f}{N}$	$r_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = 1$
Третий	$\mu_3 = \frac{\sum (x-\bar{x})^3 f}{N}$	$m_3 = \frac{\sum (x-A)^3 f}{N}$	$b_3 = \frac{\sum (x-0)^3 f}{N}$	$r_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = A_s$
Четвёртый	$\mu_4 = \frac{\sum (x-\bar{x})^4 f}{N}$	$m_4 = \frac{\sum (x-A)^4 f}{N}$	$b_4 = \frac{\sum (x-0)^4 f}{N}$	$r_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

1. В столбце 2 выбираем варианту, имеющую наибольшую частоту, такой здесь оказалась центральная варианта 79 с частотой 171. Следовательно, начало отсчета – А = 79, а классовый интервал с = 14.

2. По формуле $a = \dfrac{x - A}{c} = \dfrac{x - 79}{14}$ кодируем варианты (столбец 4).

3. Частоты f перемножаем с 1–4 степенями условных отклонений a (столбцы 5–8).

4. Суммируем числа в столбцах 3, 5–8.

5. Прежде чем переходить к вычислению условных моментов, проверяем сделанные вычисления. Для этого переносим на один класс вверх начало отсчета условных отклонений, т.е. кодируем ряд x по формуле $1 + a = (x - 65) : 14$ и записываем новые отклонения в столбце 9, затем их возводим в четвертую степень (столбец 10) и перемножаем на частоты. Сумма чисел столбца 11 должна быть равна следующему выражению:

$$\sum f(a + 1)^4 = \sum fa^4 + 4\sum fa^3 + 6\sum fa^2 + 4\sum fa + n;$$

$$9666 = 2834 + 4 \times 484 + 6 \times 686 + 4 \times 70 + 500 = 9666.$$

Вычисления сумм сделаны верно.

6. Находим условные моменты:

$$m_1 = \frac{\sum fa}{n} = \frac{70}{500} = 0{,}1400, \quad m_2 = \frac{\sum fa^2}{n} = \frac{686}{500} = 1{,}3720,$$

$$m_3 = \frac{\sum fa^3}{n} = \frac{484}{500} = 0{,}9680, \quad m_4 = \frac{\sum fa^4}{n} = \frac{2834}{500} = 5{,}6680.$$

Моменты рекомендуется вычислять с тремя – четырьмя знаками после запятой.

7. Вычислим правую часть следующих уравнений:

$$\frac{\mu_2}{c^2} = m_2 + m_1^2 = 1{,}3720 - 0{,}1400^2 = 1{,}3524.$$

$$\frac{\mu_3}{c^3} = m_3 + m_1(2m_1^2 - 3m_2) = 0{,}9680 + 0{,}1400(2 \times 0{,}1400^2 - 3 \times 1{,}3720) = 0{,}3973.$$

$$\frac{\mu_4}{c^4} = m_4 + m_1[3m_1(2m_2 - m_1^2) - 4m_3] = 5{,}6680 + 0{,}1400 \times$$
$$\times [3 \times 0{,}1400 (2 \times 1{,}3720 - 0{,}1400^2) - 4 \times 0{,}9680] = 5{,}2861.$$

8. Проверяем вычисление центральных моментов (деленных на степени классового интервала):

$$\mu_3/c^3 = m_3 - m_1(3 \times \mu_2/c^2 + m_1^2) = 0{,}9680 - 0{,}1400(3 \times 1{,}3524 + 0{,}1400^2) =$$
$$= 0{,}3973;$$

$$\mu_4/c^4 = m_4 - m_1[4 \times \mu_3/c^3 + m_1(6 \times \mu_2/c^2 + m_1^2)] = 5{,}6680 - 0{,}1400 \times$$

$\times$ [4 $\times$ 0,3973 + 0,1400(6 $\times$ 1,3524 + 0,1400^2)] =5,2861.

Значения μ_3/c^3 и μ_4/c^4 практически совпадают с вычисленными выше, следовательно, расчеты произведены верно.

9. Находим центральные моменты из уравнеиий

$$\mu_2/c^2 = 1{,}3524;\ \mu_3/c^3 = 0{,}3973,\ \mu_4/c^4 = 5{,}2861,$$

где $c^2 = 14^2 = 196$; $c^3 = 14^3 = 2744$; $c^4 = 14^4 = 38416$ (c – классовый интервал).

$$\mu_2 = 196 \times 1{,}3524 = 265{,}0704;\ \mu_3 = 0{,}3973 \times 2744 = 1090{,}1912;$$

$$\mu_4 = 38416 \times 5{,}2861 = 203070{,}8176.$$

10. Средняя арифметическая находится по формуле

$$\bar{x} = A + m_1 c = 79 + 0{,}1400 \times 14 = 81{,}0.$$

11. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{265{,}0704} = 16{,}28.$$

12. Коэффициент асимметрии

$$A_s = \frac{\mu_3/c^3}{\mu_2/c^2\sqrt{\mu_2/c^2}} = \frac{0{,}3973}{1{,}3524\sqrt{1{,}3524}} = 0{,}253.$$

13. Эксцесс $E = \dfrac{\mu_4/c^4}{\left(\mu_2/c^2\right)^2} - 3 = \dfrac{5{,}2861}{1{,}3524} = -0{,}11.$

14. Коэффициент вариации $C_v = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \dfrac{16{,}28}{80{,}96} = 20{,}1\%.$

Пользуясь полученными здесь данными, можно вычислить также другие параметры и кривые распределения взвешеиного ряда в зависимости от цели обработки.

РАБОТА 4. ВЫРАВНИВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ КРИВЫХ ПО НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

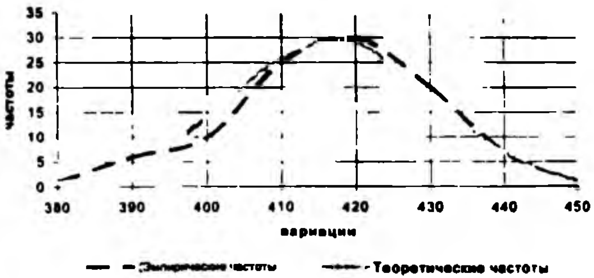
АЛГОРИТМ 11. ВЫРАВНИВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ КРИВЫХ ПО НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

$$p' = \frac{nk}{\sigma} f(x),$$

где p' – теоретическая частота; n – объём ряда; k – классовый промежуток; σ – сигма; $f(x)$ – первая фуикция нормированного отклоиения, которую иаходят по таблицам ординат иормальиой кривой (табл. 10П); $x = \dfrac{W - \bar{x}}{\sigma}$ – нормированиое отклоиение средин классов.

Вариации и W	Эмпирические частоты p	$W - \bar{x}$	$x = \dfrac{W - \bar{x}}{\sigma}$	$f(x)$ табл. 10 П	Теоретические частоты	
					$\dfrac{nk}{\sigma} f(x)$	p'
450	1	+ 33	2,43	0,021	1,5	1
440	7	+ 23	1,69	0,096	7,1	7
430	20	+ 13	0,96	0,252	18,5	18
420	30	+ 3	0,22	0,389	28,6	29
410	25	– 7	0,51	0,350	25,7	26
400	10	– 17	1,25	0,183	13,5	14
390	6	– 27	1,99	0,055	4,0	4
380	1	– 37	2,72	0,010	0,7	1
	100	–	–	–	99,6	100

Пример: $n = 100$; $k = 10$; $\bar{x} = 417{,}0$; $\sigma = 13{,}6$; $\dfrac{nk}{\sigma} = \dfrac{100 \times 10}{13.6} = 73{,}53$.



АЛГОРИТМ 12. ОЦЕНКА РАЗЛИЧИЙ МЕЖДУ ЭМПИРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕИИЕМ И ТЕОРЕТИЧЕСКИМ: КРИТЕРИЙ χ^2 (ХИ–КВАДРАТ)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f')^2}{f'} \geq \chi^2_{st}$$

$B_3 \geq$ 0.999 при малой (!) ответствеиности результатов исследований

$B_2 \geq$ 0,99 при обычной ответственности результатов исследований.

$B_1 \geq$ 0,95 при большой (!) ответственности результатов исследований

$\nu_2 = r_2 - 3$ (число степеней свободы).

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности

f, f' – эмпирические и теоретические частоты классов;

χ^2_{st} – стандартные значения критерия (табл. 4П) $\begin{Bmatrix} \nu_1 = r_1 - 3 \\ \nu_2 = r_2 - 3 \end{Bmatrix}$;

ν_1, ν_2 – первичное и вторичное число степеней свободы,

r_1, r_2 – число классов в распределении до и после редукции классов с малыми теоретическими частотами;

f_{min} – минимально допустимая теоретическая частота крайних классов в зависимости от начального числа степеней свободы

Y_1	1	2	3–6	> 6	Крайние классы с теоретической частотой $f < f_{min}$ объединяют с соседними классами	
f_{min}	4	2	1	0,5		
V	F	f алгоритм 10	$F-f$	$(F-f)^2$	$\frac{(F-f)^2}{f}$	$R_1 = 8$; $\upsilon_1 = 8-3 = 5$ $f_{min} = 1$
450	1	1, 5	0,5	0,25	0,167	$r_2 = 7$, $\upsilon_2 = 7-3 = 4$
440	7	7,1	0,1	0,01	0,001	$\chi^2 = \{9{,}5 - 13{,}3 - 18{,}5\}$
430	20	18,5	1,5	2,25	0,122	$\chi^2 = 2{,}41 < 9{,}5$
420	30	28,6	1,4	1,96	0,069	
410	25	25,7	0,7	0,49	0,19	Различия недостоверны
400	10	13,5	3,5	12,25	0,907	Эмпирическое распределение можно считать нормальным, точнее – случайной формой проявления закономерностей нормального распределения (если теоретическое распределение строилось по нормальному закону)
390 380	6 } 7 1	4,0 } 4,7 0,7	2,3	5,29	1,126	
Σ	100	99,6	–	–	2,411	

АЛГОРИТМ 13. ОЦЕНКА РАСХОЖДЕНИЯ ЛЮБЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ: КРИТЕРИЙ ЛЯМБДА (λ) по А.Н. Колмогорову и Н.А. Смирнову

1. Оценка различий между теоретическими и эмпирическими распределениями

$$\lambda = \frac{|d|}{n} = \frac{\left|\sum f_i - \sum f_i'\right| \max}{\sqrt{n}} \geq \begin{cases} 1{,}95 = 0{,}999; \\ 1{,}63 = 0{,}99 \\ 1{,}36 = 0{,}95. \end{cases}$$ то же, что и в алгоритме 11;

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности.

2. Оценка различий между двумя любыми распределениями

$$\lambda = \left[\frac{\sum f_1}{n_1} - \frac{\sum f_2}{n_2}\right]_{max} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \geq$$

$$\geq 1{,}95\ B_3{=}0{,}999;\ 1{,}63 B_2{=}0{,}99;\ 1{,}36\ B_1{=}0{,}95.$$

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятиости

V	f_1	f_2	Σf_1	Σf_2	$\frac{\Sigma f_1}{N_1}$	$\frac{\Sigma f_2}{n_2}$	$\mid d \mid$	
450	1	2	100	200	1,00	1,00	0	$\lambda = \sqrt{\frac{100 \times 200}{100 + 200}} =$
440	7	4	99	198	0,99	0,99	0,00	$= 2{,}45 > 1{,}95.$
430	20	8	92	194	0,92	0,97	0,05	Различия не могут считаться случайными, они в высшей степени достоверны Выборки взяты из генеральных совокупностей, явно различающихся по своим распределениям
420	30	42	72	186	0,72	0,93	0,21	
410	26	83	42	144	0,42	0,72	0,30	
400	10	37	17	61	0,17	0,31	0,14	
390	6	20	7	24	0,07	0,12	0,05	
380	1	4	1	4	0,01	0,04	0,03	
N	100	200	–	–	–	–	–	

РАБОТА 5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель работы – определить характер и измерить тесиоту связи между прнзнаками.

Материал и оборудование – журнал замероа, калькулятор, учебное пособие.

Задание

По даниым замеров листовой пластинки – длииа (x), ширина (y) и длиа черешка листа (z):

1. Построить графики зависимости сочетания перемеиных xy, xz, yz.

2 Провести расчет коэффициеита корреляции для малочисленных групп (n = 10).

3 Вычислить ранговый коэффициент (Спирмена).

Составить корреляционную решетку для последующего вычисления корреляционных связей:

– по способу сумм;

– по способу произведений.

4. Провести полный корреляционный анализ.

5. Оценить достоверность коэффициентов корреляции.

6. Рассчитать множественный и частные коэффициенты корреляции для трех переменных.

7. Провести сравнение одноименных коэффициентов корреляции для других деревьев этого же вида.

АЛГОРИТМ 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ МАЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУПП

Первый способ	Второй способ
$r=\dfrac{\sum V_1V_2-\dfrac{\sum V_1\sum V_2}{n}}{\sqrt{C_1C_2}},\ (n\geq n_u)$	$r\dfrac{C_1+C_2-C_d}{2\sqrt{C_1C_2}}\quad n\geq n_н$
V_1, V_2 – даты признаков	C_1, C_2, C_d – дисперсии по первому и второму признакам и по ряду разностей $d=V_1-V_2$
C_1 C_2 –дисперсии признаков	$C=\sum V^2-\dfrac{(\sum V)^2}{n}$ и $C_d=\sum d^2-\dfrac{(\sum d)^2}{n}$
$C=\sum V^2-\dfrac{(\sum V)^2}{n}$	
n – число сравниваемых пар	n – число сравниваемых пар

Вариант 1					Вариант 2					
V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	V_1V_2	V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	$d=V_1-V_2$	d^2
3	11	9	121	33	31	27	961	729	+4	16
7	10	49	100	70	22	24	484	576	–2	4
1	7	1	49	7	27	32	728	1024	–5	25
11	4	121	16	44	29	29	941	841	0	0
9	3	81	9	27	21	24	441	576	–3	9
5	9	25	81	45	30	27	900	729	+3	9
2	7	4	49	14	23	23	529	529	0	0
10	4	100	16	40	28	31	784	961	–3	9
4	12	16	144	48	25	30	625	900	–5	25
8	3	64	9	24	24	23	576	529	+1	1
Σ=60	70	470	594	352	260	270	6870	7394	–10	98
$C_1=470-\dfrac{60^2}{10}=110$					$C_1=6870-\dfrac{260^2}{10}=110$					

$$C_2 = 594 - \frac{70^2}{10} = 104$$

$$r = \frac{352 - \dfrac{60 \times 70}{10}}{\sqrt{110 \times 104}} = \frac{-68}{107} = -0,64$$

$n = 10$, $n_н = \{10 - 15 - 23\}$ (табл. 5П)

Вывод: отрицательная корреляция в генеральной совокупности достоверна с вероятностью первого порога $B > 0,95$

$$C_2 = 7394 - \frac{270^2}{10} = 104$$

$$C_d = 98 - \frac{10^2}{10} = 88$$

$$r = \frac{110 + 104 - 88}{2\sqrt{110 \times 104}} = \frac{+126}{214} = +0,59$$

$n = 10$, $n_н = \{11 - 18 - 27\}$ (табл. 5П)

Вывод: положительная корреляция в генеральной совокупности на грани достоверности первого порога. В исследованиях пониженной ответственности такую корреляцию можно считать достоверной. В ответственных работах следует повторить оценку корреляции на новом, более обширном материале

АЛГОРИТМ 15. СОСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕШЕТКИ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО ИЗМЕРЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ ПЕРВОГО ПРИЗНАКА СО ВТОРЫМ

Первичные измерения

V_1	107	169	121	168	167	124	138	145	130	98
V_2	60	93	54	90	86	57	64	71	47	43
V_1	133	50	163	87	135	111	188	72	140	132
V_2	57	37	81	50	61	37	101	44	67	55
V_1	117	165	147	153	149	179	172	142	151	113
V_2	50	84	73	70	74	104	87	69	65	42
V_1	134	155	93	161	159	80	139	173	137	177
V_2	59	73	37	80	77	35	66	90	65	95
V_1	102	136	157	185	127	131	152	115	175	104
V_2	48	62	75	97	63	53	67	48	93	53

Показатели двух вариационных рядов

$n_1 = 50$, q = число классов $= 1 + 3{,}3\lg 50 = 7$; $k_1 = \dfrac{138}{7} = 20$;

$\lim_1 = 50 \div 188(138)$; $n_2 = 50$, $\lim_2 = 35 - 104$ (69), $k_2 = \dfrac{69}{7} = 10$.

Рвзноска корреляционной решетки (достаточно обозначить только начало классов)

2 \ 1	W							
	50 – (60)	70– (80)	90– (100)	110– (120)	130– (140)	150– (160)	170– (180)	n_2
W 95–(100)							4	4
85–(90)						3	3	6

75–(80)						5		5
65–(70)					6	4		10
55–(60)			1	2	7			10
45–(50)		1	2	3	2			8
35–(40)	1	2	2	2				7
n_1	1	3	5	7	15	12	7	$N = 50$

АЛГОРИТМ 16. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ПО СПОСОБУ СУММ ДЛЯ БОЛЬШИХ ГРУПП ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ

$$r = \frac{C'_1 + C'_2 - C'_d}{2\sqrt{C'_1 \times C'_2}}; \ [N \geq N_{st}];$$

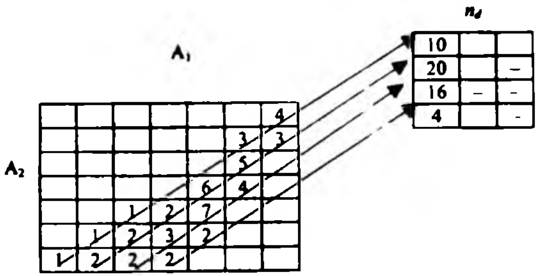
$$S_1 = p_1 - q_1 = [\textstyle\sum fa]; \ S_2 = p_1 + q_1 + 2(p_2 + q_2) = [\textstyle\sum fa^2];$$

$$C'_1 = \left(S_2 - \frac{S_1^2}{n}\right)_1; \ C'_2 = \left(S_2 - \frac{S_1^2}{n}\right)_2; \ C'_d = \left(S_2 - \frac{S_1^2}{n}\right)_d,$$

где C'_1, C'_2 – дисперсии, выраженные в квадратах классового промежутка ($C' = \frac{C}{k^2}$).

Рассчитывают по указанным рабочим формулам для нижнего и правого суммариых вариационных рядов решетки

C'_d – дисперсия по ряду разностей между центральными отклонениями средин классов, выраженных в классовых промежутках Рассчитывают по указанным рабочим формулам для ряда разиостей, составленного суммированием частот по диагоналям решетки.



Условные средние (A_1, A_2) устанавливают как средины классов, соответствующих центральиой ячейки, которая предварительно очерчивается в месте наибольшего скопления частот (можно в любой клетке решётки).

2 \ 1	60	80	100	120	$A_1 = 140$	160	180	n_2	$P_1 = 54$	$p_2 = 47$	n_d	$p_1 = 40$	$p_2 = 10$
100							4	4	4	4	10	10	10
90						3	3	6	10	14	20	30	–
80						5		5	15	29	16	–	–
70					6	4		10	25	–	4	4	–
$A_1 = 60$			1	2	7			10	–	–	50	$q_1 = 4$	$q_2 = 0$
50		1	2	3	2			8	15	–	$n = 50$		
40	1	2	2	2				7	7	7			
N_1	1	3	5	7	15	12	7	50	$Q_1 = 22$	$q_2 = 7$	$N_s = (5-7-9)$		
$q_1 = 30$	1	4	9	16	–	19	7	$p_1 = 26$					
$q_2 = 20$	1	5	14	–	–	–	7	$p_2 = 7$					

	S_1	S_2	$\frac{S_1^2}{N}$	C'	$\bar{x} = A + k\frac{S_1}{N}$	$\sigma = k\sqrt{\frac{C'}{N-1}}$
1	$26-30=-4$	$26+30+2(7+20)=110$	0.3	$110-0,3=109,7$	$140+20\frac{-4}{50}=138,4$	$20\sqrt{\frac{109,7}{49}}=29,9$
2	$54-22=+32$	$54+22+2(47+7)=184$	20 5	$184-20,5=163,5$	$60+10\frac{+32}{50}=66,4$	$10\sqrt{\frac{163,5}{49}}=18,3$
d	$40-4=+36$	$40+4+2(10+0)=64$	25 9	$64-25,9=38,1$	–	–

$$r = \frac{109,7+163,5-38,1}{2\sqrt{109,7\times163,5}} = +\underline{\underline{0,88}}.$$

АЛГОРИТМ 17. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ПО СПОСОБУ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ ГРУПП ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕШЁТКЕ

$$C'_{1,2} = \sum(a_1\sum fa_2) - \frac{(\sum na_1)\times(\sum na_2)}{N},$$

$$r = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{C'_1C'_2}}\ ;\ [N \geq N_{st}],\ C'_1 = \sum na_1^2 - L,\ L = \frac{(\sum na_1)^2}{N},$$

$$C'_2 = \sum na_2^2 - H,\quad H = \frac{(\sum na_2)^2}{N}.$$

$C'_{1,2}$ – дисперсия произведений центральных отклонений вариаций (средин классов) по обоим признакам, причём эти отклонения выражены в классовых промежутках. Рассчитывают на основе произведений условных отклонений (α) по приведённой формуле.

C'_1, C'_2 – дисперсии первого и второго признаков, выраженные в квадратах классового промежутка. Рассчитывают по указанным формулам для нижнего (1) и правого (2) суммарных вариационных рядов; $\sum na_1, \sum na_1^2, \sum na_2, \sum na_2^2, \sum(a_1\sum fa_2)$ рассчитывают путём накапливания элементарных произведений без записи и снятия промежуточных результатов.

2\1	60	80	100	120	140	160	180	n_2	a_2
100							4	4	6
90						3	3	6	5
80						5		5	4
70					6	4		10	3
60			1	2	7			10	2
50		1	2	3	2			8	1
40	1	2	2	2				7	0
n_1	1	3	5	7	15	12	7	50	
a_1	0	1	2	3	4	5	6	$\sum n_1a_1 = 196$ $\sum n_1a_1^2 = 878$	
$\sum fa_2$	0	1	4	7	34	47	39 = 132	$\sum n_2a_2 = 132$ $\sum n_2a_2^2 = 512$	

$$C'_1 = 878 - 768,3 = 109,7;$$

$$C'_2 = 512 - 348,5 = 163,5;$$

$$\sum\left(a_1\sum fa_2\right)=635;$$

$$C'_{1,2}=635-\frac{196\times132}{50}=+117,6;$$

$$L=\frac{196^2}{50}=768,3;$$

$$H=\frac{132^2}{50}=348,5;$$

$$\sum n_1a_1=196\ ;\ (3\times1)+(5\times2)+(7\times3)+(15\times4)+(7\times6)=196;$$

$$\sum\left(a_1\sum fa_2\right)=635\ ;\ (1\times1)+(2\times4)+(3\times7)+(4\times34)+(5\times47)+(6\times39)=635;$$

$$\sum n_1a_1=878\ ;\ (3\times1)+(5\times4)+(7\times9)+(15\times16)+(12\times25)+(7\times36)=878;$$

$$\sum n_2a_2=512\ ;\ (8\times1)+(10\times4)+(10\times9)+(5\times16)+(6\times25)+(4\times63)=512,$$

$$r=\frac{+117,6}{\sqrt{109,7\times163,5}}=\underline{\underline{+0,88}};\ ;\ N_n=\{5-7-9\}\ (\text{табл. 5П}).$$

АЛГОРИТМ 18. ПОЛНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

$N=50$ объём решетки,

$g=7$ число классов первого признакв

$$C'_1=\Sigma n_1a_1^2-L=878-768,3=109,7;$$

$$C'_2=\Sigma n_2a_2^2-H_\Sigma=512-348,5=163,5;$$

$$C'_H=\Sigma H_t-H_\Sigma=489,0-348,5=140,5,$$

$$C'_{1,2}=\sum\left(a_1\sum fa_2\right)-\frac{\left(\sum n_1a_1\right)\left(\sum n_2a_2\right)}{N}=635-\frac{196\times132}{50}=117,6;$$

$$\left(C'_{1,2}\right)^2=13829,8;$$

$$L=\frac{196^2}{50}=768,3;$$

$$\Sigma n_1a_1=196\ =(3\times1)+(5\times2)+(7\times3)+(15\times4)+(12\times5)+(7\times6)=196;$$

$$\Sigma n_1a_1^2=878\ =(3\times1)+(5\times4)+(7\times9)+(15\times16)+(12\times25)+(7\times36)=878;$$

$$\Sigma n_2a_2=132\ =(8\times1)+(10\times2)+(10\times3)+(5\times4)+(6\times5)+(4\times6)=132;$$

$$\Sigma n_2a_2^2=512\ =(8\times1)+(10\times4)+(10\times9)+(5\times16)+(6\times25)+(4\times36)=512.$$

АЛГОРИТМ 18. Полный корреляционный анализ

2 \ 1	60	80	100	120	140	160	180	n_2	A_2
100							4	4	6
90						3	3	6	5
80						5		5	4
70					6	4		10	3
60			1	2	7			10	2
50		1	2	3	2			8	1
40	1	2	2	2				7	
N_1	1	3	5	7	15	12	7	50	$\Sigma n_1 a_1 = 196$
a_1	0	1	2	3	4	5	6	–	$\Sigma n_1 a_1^2 = 878$
$\Sigma f a_2$	0	1	4	7	34	47	39	132	$\Sigma n_2 a_2 = 132$ $\Sigma n_2 a_2^2 = 512$
$H_i = \frac{(\Sigma f a_2)}{n_1}$	0	0,3	3,2	7,0	77,1	184,1	217,3	$\Sigma H_i = 489,0$	
$\overline{a}_2 = \frac{\Sigma f a_2}{n_1}$	0,0	0,3	0,8	1,0	2,3	3,9	5,6	$\Sigma(a_1 \Sigma f a_2) = 636$	
$\overline{x}_2 = A + k_2 \overline{a}_2$	40,0	43,0	48,0	50,0	63,0	79,0	96,0		

Показатель прямолинейной связи (квадрат коэффициента корреляции)

$$r^2 = \frac{(C'_{12})^2}{C'_1 C'_2} = \frac{13829{,}8}{109{,}7 \times 163{,}5} = \underline{\underline{0{,}77}};$$

$$F_r = \frac{r^2(N-2)}{1-r^2} = \frac{0{,}77 \times 48}{0{,}23} = \underline{\underline{160{,}7}},$$

$$\nu = 1; \nu_2 = N - 2 = 48, \quad F_{st} = \{4{,}0 - 7{,}2 - 12{,}3\} \text{ (табл. 11П–13П).}$$

Показатель криволинейной (квадрат корреляционного отношения)

$$\eta^2 = \frac{C'_{H_1}}{C'_2} = \frac{140{,}5}{163{,}5} = \underline{\underline{0{,}86}},$$

$$\nu_1 = q - 1 = 6; \; \nu_2 = N - q = 43, \; F_{st} = \{2{,}3 - 3{,}3 - 4{,}8\}.$$

Критерий криволииейности

$$F_t = \frac{(\eta^2 - r^2)(N-q)}{(1-\eta^2)(q-2)} = \frac{(0{,}86 - 0{,}77)(43)}{(0{,}14)(5)} = \underline{\underline{5{,}5}},$$

$$\nu_1 = q - 2 = 5, \; \nu_2 = N - q = 43, \; F_{st} = \{2{,}4 - 3{,}5 - 5{,}2\} \text{ (табл. 11П–13П).}$$

АЛГОРИТМ 19. МНОЖЕСТВЕННЫЙ И ЧАСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ ТРЁХ РЯДОВ

Множественный и частные коэффициенты корреляции вычисляют тогда, когда число коррелирующих признаков больше двух. Силу совокупности взаимосвязи трёх призиаков одновременно можно измерить при помощи множественного коэффициента корреляции по формулам

$$R_{y.xz} = \sqrt{\frac{r_{yx}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{yx}r_{yz}r_{xz}}{1 - r_{xz}^2}}, \text{ или}$$

$$R_{y.xz} = \sqrt{1 - (1 - r_{yx}^2)(1 - {}_x r_{yz}^2)}, \text{ или}$$

$$R_{y.xz} = \sqrt{1 - (1 - r_{yz}^2)(1 - {}_z r_{yx}^2)},$$

где $R_{y.xz}$ – множественный коэффициент корреляции, точка после y означает, что изучается совместное влияние аргументов x и z на функцию y; r_{yx}, r_{yz}, r_{xz} – полные (обычные) коэффициенты корреляции попарио между прнзнаками x, y, z; ${}_z r_{yx}$, ${}_x r_{yz}$, ${}_y r_{xz}$ – ***частные коэффициенты*** корреляции попарно при исключении влияния третьего признака, индекс которого ставится слева от буквы r

Частные коэффициенты корреляции вычисляются по формулам

$$ {}_z r_{yx} = \frac{r_{yx} - r_{yz} r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r_{yz}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}}, $$

$$ {}_x r_{yz} = \frac{r_{yz} - r_{yx} r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}}, $$

$$ {}_y r_{xz} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{zy}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{zy}^2\right)}} $$

(обозначения те же, что и к формулам, приведённым выше).

Вычисление множественного и частных коэффициентов корреляции производится в следующем порядке:

1. Вычисляем полные коэффициенты корреляции между признаками, для чего произведём действия, указанные в табл. 10.

Таблица 10

Вычисление полных (обычных) коэффициентов корреляции между тремя признаками

Длина черешка, мм x	Длина листа, мм Y	Ширина листа, мм Z	x^2	y^2	Z^2	xy	xz	yz
62	217	19	3844	47089	361	4123	1178	13454
63	212	20	3969	44944	400	4240	1260	13356
73	218	12	5329	47524	144	2616	876	15914
82	242	17	6724	58564	289	4114	1394	19844
66	199	16	4356	39601	256	3184	1056	13134
44	200	17	1936	40000	289	3400	748	8800
43	235	25	1849	55225	625	5875	1075	10105
54	235	25	2916	55225	625	5875	1350	12690
63	225	19	3969	50625	361	4275	1197	14175
74	234	25	5476	54756	625	5850	1850	17316
74	223	27	5476	49729	729	6021	1998	16502
64	218	23	4096	47524	529	5014	1472	13952
77	210	15	5929	44100	225	3150	1155	16170
839	2868	260	55869	634906	5458	57737	16609	185412

Подставляя суммы столбцов этой таблицы в формулу получим

$$r_{yx}=\frac{\sum yx-\frac{\sum y\sum x}{N}}{\sqrt{\left[\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{N}\right]\left[\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{N}\right]}}=$$

$$=\frac{185412-\frac{2868\times 839}{13}}{\sqrt{\left(55869-\frac{839^2}{13}\right)\left(634906-\frac{2868^2}{13}\right)}}=0{,}163,$$

$$r_{xz}=\frac{\sum xz-\frac{\sum x\sum z}{N}}{\sqrt{\left[\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{N}\right]\left[\sum z^2-\frac{(\sum z)^2}{N}\right]}}=$$

$$=\frac{16609-\frac{839\times 260}{13}}{\sqrt{\left(55869-\frac{839^2}{13}\right)\left(5458-\frac{260^2}{13}\right)}}=-0{,}257,$$

$$r_{yz}=\frac{\sum yz-\frac{\sum y\sum z}{N}}{\sqrt{\left[\sum z^2-\frac{(\sum z)^2}{N}\right]\left[\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{N}\right]}}=$$

$$=\frac{57737-\frac{2868\times 260}{13}}{\sqrt{\left(5458-\frac{260^2}{13}\right)\left(634906-\frac{2868^2}{13}\right)}}=0{,}502.$$

2. Все три полных коэффициента корреляции оказались недостоверными, однако это не означает, что связь между рассматриваемыми признаками отсутствует Например, связь между y и z, т.е. между длиной листа и его шириной, хотя и недостоверна, но сильнее, чем прочие связи. Может возникнуть вопрос, не мешает ли полнее выявить связь между y и z влияние x, то есть длина черешка. Чтобы проверить эту гипотезу, необходимо исклю-

чить частные коэффициенты корреляции, исключая поочередно влияние каждого фактора из трёх по формулам, приведениым выше

$$ {}_z r_{yx} = \frac{0,163 - 0,502 \times (-0,257)}{\sqrt{(1-0,502^2)\left[1-(-257^2)\right]}} = 0,350, $$

$$ {}_x r_{yz} = \frac{0,502 - 0,163 \times (-0,257)}{\sqrt{(1-0,163^2)\left[1-(-0,257)^2\right]}} = 0,571, $$

$$ {}_y r_{xz} = \frac{-0,257 - 0,163 \times 0,502}{\sqrt{(1-0,163^2)(1-0,502^2)}} = -0,404. $$

Таким образом, поочередное исключение влияния отдельных факторов повышает силу связи между двумя остальными, хотя эта связь и осталась недоказуемой (по-видимому, из-за недостаточного объёма выборки), кроме связи между y и z, которая стала близка к достоверной, когда мы устранили влияние x.

3. Множественный коэффициент корреляции, отражающий силу взаимосвязи трёх факторов совокупно, определим по формуле

$$ R_{y.xz} = \sqrt{\frac{0,163^2 + 0,502^2 - 2 \times 0,163 \times 0,502 \times (-0,257)}{1-(-0,257)^2}} = 0,585. $$

Для проверки вычислений определим его также через частные коэффициенты корреляции:

$$ R_{y.xz} = \sqrt{1-(1-0,163^2)(1-0,571^2)} = 0,586 $$

и по формуле

$$ R_{y.xz} = \sqrt{1-(1-0,502^2)(1-0,350^2)} = 0,586. $$

Без применения таблиц достоверность коэффициента множественной корреляции оценивается по критерию Романовского:

$$ \frac{\dfrac{(N-5)R^2}{2(1-R^2)} - 1}{\sqrt{\dfrac{N-3}{N-7}}} \geq 3 $$

где N – объём выборки; R – коэффициент множественной корреляции.

Если левая часть формулы будет больше или равна трём, то коэффициент считается значимым. Для нашего примера

$$\frac{\dfrac{(13-5)0,586^2}{2\left(1-0,586^2\right)}-1}{\sqrt{\dfrac{13-3}{13-7}}}=0,84$$

Следовательио, подтверждается вывод о иедостовериости коэффициента.

АЛГОРИТМ 20. КОРРЕЛЯЦИЯ РАНГОВ (НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ)

Данный алгоритм примеияется для признаков, которые иельзя или не требуется измерить, ио по которым особи могут быть расположены по возрастающей или убывающей степеии выражеииости призиака.

Ряд объектов, расположеииых по степеии выраженности порядкового призиака, изывается ранжированием, порядковый иомер особи в ранжированном ряду изывается раигом этой особи.

Если в группе имеются особи, иеразличимые между собой по изучаемому порядковому призиаку, то каждой паре или тройке и т.д. таких призиаков присуждается средний ранг, равный средней арифметической из тех рангов, какие имели бы особи, если бы были различимы.

Корреляция двух порядковых призиаков есть корреляция их парных рангов

В тех случаях, когда в раижироваииых рядах иет иеразличимых особей, расчёт порядкового коэффициента корреляции можио рассчитать по формуле Спирмеиа

$$r_s = 1-\frac{6\sum d^2}{(n-1)n(n+1)}, \qquad (1)$$

где d – разиость рангов двух призиаков в каждой паре их; n – число пар рангов, или число объектов, из которых у каждого имеются 2 ранга по двум призиакам

Достаточиую точность обеспечивает формула

$$r_s = 1-\frac{6\left(\sum d^2+B_x+B_y\right)}{n\left(n^2-1\right)}. \qquad (2)$$

Пример 1.

Таблица 11

Расчёт порядкового коэффициента корреляции при отсутствии усреднённых рангов

Ранги		d	Вычисление коэффициента
V_1	V_2		
1	3	-2	$n = 8$
2	1	+1	$r_s = 1 - \frac{6 \times 14}{7 \times 8 \times 9} =$
3	2	+1	$= 1 - \frac{14}{84} = +0{,}83$
4	5	-1	
5	4	+1	
6	8	2	
7	6	+1	
8	7	+1	
		$\Sigma d^2 = 14$	

Если не требуется большая точность и можно ограничиться вторым десятичным знаком (до одной сотой), то коэффициент корреляции Спирмена может применяться и при наличии усреднённых рангов или в одном, или в обоих ранжированных рядах.

Достоверность порядкового коэффициента корреляции определяется по правилу, показанному ниже:

P	$n < 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n > 9$
0,95	–	1,0	0,89	0,75	0,71	$m_{rs} = \frac{1 - r_s^2}{n-2}$,
0,99	–	–	1,0	0,89	0,86	$t_{rs} = r_s = \frac{n-2}{1 - r_s^2}$,
0,999	–	–	–	–	–	$\nu = n - 2$

Пример 2.

Таблица 12

Вычисление показателя корреляции рангов между оценками двух признаков

X	$У$	Ранг, x	Ранг, y	Разность рангов, d	d^2
1	2	3	4	5	6
52	64	10	8	2	4
53	66	8,5	6	2,5	6,25
63	57	5	13	8	64
72	62	1	10	9	81
56	61	6	11	5	25
34	63	12	9	3	9
33	71	13	2	11	121

44	70	11	3,5	7,5	56,25
53	65	8,5	7	1,5	2,25
64	70	3,5	3,5	0	0
64	72	3,5	1	2,5	6 25
54	68	7	5	2	4,0
67	60	2	12	10	100
–	–	–	–	–	479,00

1 Ранжируем данные рядов x и y от большего к меиьшему, присваивая вариантам порядковые номера. Вариаита 72 ряда x получит ранг 1, вариаита 67 – ранг 2, вариаиты 64 и 64 должны были бы получить ранги 3 и 4, ио так как они имеют равиое зиачение, то берется средний ранг для обоих вариант: $\frac{3+4}{2}=3,5$.

Остальиые ранги рядов x и y приведены в столбцах 3, 4 табя. 12.

2. Получаем разности рангов без учета их зиаков (стоябец 5).

3. Возводим разности в квадрат и суммируем, получаем $\sum d^2 = 479$ (табл. 12, столбец 6).

4. Вычисляем поправки по формуле

$$B_x(B_y)=\sum\frac{n^3-n}{n-1}, \qquad (3)$$

где B_x или B_y – поправки иа объедиииеиие рангов в ряду x или y, n – число рангов в каждой группе объедииённых рангов; Σ – знак суммирования всех значений $\frac{n^3-n}{12}$, вычисленных для отдельиых групп. Число групп объединёниых раигов в ряду x – 2 группы. В каждой из групп по два ранга· 8,5 и 8,5; 3,5 и 3,5, отсюда по формуле (3) $B_x=\frac{(2^3-2)+(2^3-2)}{12}=1$

В ряду y одна группа объедииенных рангов с двумя рангами в ией. 3,5 и 3,5, отсюда по формуле (3)

$$B_y=\frac{2^3-2}{12}=0,5.$$

5. Подставляем полученные значения в формулу (2):

$$r_s=1-\frac{6(479+1+0,5)}{13(13^3-1)}=-0,32.$$

Вычисляя по тем же данным, ио без поправок иа объединенные ранги по формуле (1), получим

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 479}{13(13^2 - 1)} = -0,32.$$

Таким образом, для оценки силы связи в даниом случае можно пользоваться и формулой (1).

6. Оценка достоверности показателя корреляции раигов производится по формуле $t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s}}$, где t – критерий достовериости Стьюдента.

В нашем случае $t = 0,32\sqrt{\frac{13-2}{1-0,32}} = 1,12$ $\nu = 13–2=11$, по таблицам Стьюдента $t_{05} = 1,796$; следовательно, полученный коэффициент корреляции рангов иедостовереи.

АЛГОРИТМ 21. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Построение предварительиого графика зависимости переменных.

По данным, предназначенным для математической обработки, строят график. На горизонтальной оси (абсцисс) откладывают значения одной переменной (варианта фактора, признака) X, а на вертикальной оси (ординат) – значения другой переменной $У$. По виду получаемой линии решают, что вычислить: коэффициент корреляции или корреляционное отиошение. При прямолинейной зависимости вычисляют коэффициент корреляции, при криволинейиой зависимости – корреляционное отношенне.

Коэффициент корреляции·

Условия применения Количество пар 3–30, если их больше, см. алгоритмы 16, 17. Даты могут быть выражены в любых единицах. Если они даны в рангах или баллах, то аычисления проводятся по алгоритму 20 Пример для вычисленнй приведен в табл. 13.

Для облегчения вычислений исходные многозначные цифры можно преобразовать путам деления или умножения их иа любое число.

Таблица 13

Исходные данные

Номер пары	Вариант (фактор, признак)	
	x	*y*
1	14,3	7,5
2	21,5	3,7

[illegible]	26,2	1,8
1	18,5	6,6
8	18,2	0,0
6	22,6	4,0
7	20,7	6,0
8	16,3	7,0
9	24,0	3,3

Таблица 14

Вычисление квадратов, сумм и средних

Номер пары	Вариант		x^2	y^2	xy
	x	y			
1	11,2	7,5	201,64	56,25	106,50
2	4,6	5,7	462,25	13,25	79,55
3	35,2	1,8	635,04	3,24	45,36
4	18,5	5,6	342 25	31,36	103,60
5	28,2	0,0	755,24	0,00	0,00
6	22,5	4,0	506 25	16,00	90,00
7	20,7	5,0	428,49	25,00	103,50
8	16,3	7,0	265,69	49,00	114,10
9	24,0	3,2	576,00	10,24	76,80
$\sum$	191,1	37,8	4212,85	204,78	719,41
$\bar{x}$	21,23	4,20	–	–	-

Если цифры преобразованы путем умножения на A, то $\bar{x}$ делят на A; если путем деления на A, то $\bar{x}$ умножают на A.

2. Вычисление дисперсии (C):

$$C_x = \sum x^2-(\sum x)^2 : n= 4212,85–191,1^2 :9 = 155,2;$$

$$C_y = \sum y^2-(\sum y)^2 : n= 204, - 37,8^2 : 9 = 46,0;$$

$$C_{xy} =\sum xy - (\sum x \times \sum y) : n = 719,41 - (191,1 \times 37,8) : 9 = - 83,2.$$

Если цифры преобразованы путем умиожения на A, то C делит на A^2, если путем деления на A – то C умиожают на A^2.

3. Вычисление коэффициентов и уравнения регрессии

Коэффициенты корреляции При r менее 0,5 корреляция слабая, 0,5–0,7 – средняя и более 0,7 – сильная; r находится в пределах 0–1 с плюсом или минусом. При плюс r связь положительна, т.е. с увеличением x увеличивается и y. При минус r связь отрицательна, т.е. с увеличением x умеиьшается y (или наоборот).

Коэффициент детерминации:

$$d= r^2.$$

d = –0,985^2 =0,970, или 97% изменений y обусловлено изменениями x.

Коэффициенты регрессин:

$$b_{yx} = \frac{C_{xy}}{C_x}, \quad b_{xy} = \frac{C_{xy}}{Cy};$$

$$b_{yx} = \frac{-83,2}{155,2} = -0,536$$ (при увеличении x на 1 y уменьшается на 0,536);

$$b_{xy} = \frac{-83,2}{46,0} = -1,809$$ (при увеличении y на 1 x уменьшается на 1,809).

Проверка: $b_{yx} \times b_{xy} = r^2 - 0,536 \times (-1,809) = 0,970.$

Уравнение регрессии

$$y = \bar{x}_y + b_{yx}(x - \bar{x}_x),$$

$y = 4,2+(-0,536) \times (x-21,23) = -0,536x+(-0,536) \times 21,23+4,2 = 0,536x+15,5.$

4. Ошибка коэффициентов и уравиеиия (m).

Корреляцин

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,985^2}{9-2}} = 0,065.$$

Регрессии

$$m_{byx} = m_r\sqrt{\frac{C_y}{C_x}} = 0,065\sqrt{\frac{46,0}{155,2}} = 0,035;$$

$$m_{bxy} = m_r\sqrt{\frac{C_x}{C_y}} = 0,065\sqrt{\frac{155,2}{46,0}} = 0,119.$$

Уравнения

$$m_{yx} = m_r\sqrt{C_y} = 0,065\sqrt{46,0} = 0,441$$

5. Достоверность коэффициентов r н b

Вычнсленный коэффицент r сравнивают с его таблнчным значением (табл. 8П) прн числе степеней свободы $\nu = n-2$ и необходимом уровне вероятности 95 или 99% (вероятность ошибки соответственно равна 1:20 или 1:100). Если r равен или больше табличного значения, то варианты достоверио коррелируют: $\nu = 9-2 = 7$, $r_{95} = 0,666$, $r_{99} = 0,798$, $r = -0,965$, т.е варианты x и y достоверно коррелируют при высоком уровне вероятности. Достоверность коэффициентов такая же, как и для r.

По данным табл. 5П можно также определить, сколько нужно пар, чтобы коэффициент корреляции стал достоверным при данном уровне. Например, $r = 0,7$, уровень вероятности 95% На этом уровне при $r = 0,7$ нужно иметь $\nu = 7$ или не менее 7+2 = 9 пар.

6. Доверительный интервал коэффициентов (I):

$$I = t \times m_r;$$

t-критерий Стьюдента находят по табл. 2П.

При числе степеней свободы $\nu = n - 2$ и необходимом уровне вероятности $\nu = 9 - 2 = 7$; t = 2,37. Для r: I_{95} = $2{,}37 \times 0{,}065$ =0,154, $r \pm I_{95} = -0{,}985 \pm 0{,}154$ (истинный r с вероятностью 95% находится в пределах от – 0,831 до – 1,0). Для b_{yx}: $I_{95} = 2{,}37 \times 0{,}035 = 0{,}083$, $b_{yx} \pm I_{95} =$ $= -0{,}536 \pm 0{,}282$.

7. Достоверность различий коэффициентов корреляций определяют по критерию t (Стьюдента)

$$t = \frac{d}{m_d}, \quad d = r_1 - r_2, \quad m_d = \sqrt{m_{r_1}^2 + m_{r_2}^2},$$

d – разность; m_d – ошибка d, n_1, n_2 – количество пар для r_1 и r_2.

Вычисленный критерий t сравнивают с его табличным значением (табл. 2П) при числе степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 4$ и необходимым уровнем вероятности 95; 99; 99,9%. Если t равен или больше табличного значения, то коэффициенты корреляции достоверно различаются.

8. Теоретическая линия регрессии

Вычисляют y для наименьшего и наибольшего значения x по уравнению регрессии:

$$y = -0{,}54x + 15{,}6;$$
$$y_1 = -0{,}54 \times 14{,}2 + 15{,}6 = 7{,}9;$$
$$y_5 = -0{,}54 \times 28{,}2 + 15{,}6 = 0{,}4.$$

Значения y_1 и y_5 переносят на график и соединяют линией Получается теоретическая линия регрессии y по x (рис. 1). Экстраполировать ее за пределы данных таблицы нельзя. Пунктирными линиями на рис. 1 обозначена доверительная зона линий регрессии на уровне вероятности 95%. Это означает, что только 5% точек исходных данных могут быть вне этой зоны.

Крайние точки зоны вычисляют по формуле $y \pm 2m_{yx}$; $y_1 + 2m_{yx} = 7{,}9 +$ $+ 2 \times 0{,}441 = 8{,}8$; $y_1 - 2m_{yx} = 7{,}9 - 2 \times 0{,}441 = 7{,}0$; $y_2 = 0{,}4 + 2 \times 0{,}441 = 1{,}3$; $y_2 = 0{,}4 - 2 \times 0{,}441 = -0{,}5$.

Найденные значения переносят на график и соединяют пунктирными линиями.

9. Запись результатов математической обработки и ссылка.

Коэффициент корреляции $r \pm I_{95} = -0{,}98 \pm 0{,}15$.

Коэффициент регрессии $b_{yx} \pm I_{95} = -0{,}54 \pm 0{,}08$.

Коэффициент детерминации $d = 0{,}97$.

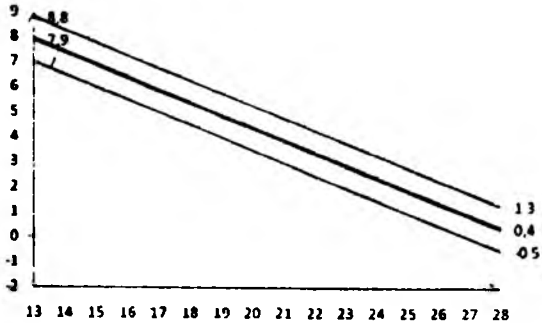


Рис. 1. Теоретическая линия регрессии и ее доверительная зона

Обработка данных проведена путем вычисления коэффициентов корреляции, детерминации и регрессии и оценки их достоверности по критерию *t* (Стьюдента).

АЛГОРИТМ 22. КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ

Условия применения Даты могут быть выражены в любых единицах Если они даны в рангах или баллах, то вычисления проводятся по алгоритму 20. Пример для вычислений дан в табл. 15

Таблица 15

Результаты наблюдений

Номер пары	Вариант (фактор, признак)	
	X	*y*
1	17,1	4,1
2	16,3	3,8
3	18,6	5,6
4	15,5	2,7
5	23,5	6,5
6	14,7	2,0
7	19,8	6,0
8	21,6	6,3
9	18,0	4,7

1. Группировка дат, вычисление квадратов и средних Располагают пары в возрастающем порядке по *x*. Затем разделяют их на четыре – семь

групп так, чтобы в каждой было не менее двух пар. Вычисляют средние групповые (x_r и y_r), квадраты и суммы (табл. 16).

Таблица 16

№ п/п	x	y	x_r	y_r	$y-y_r$	$(y-y_r)^2$	$y-x_y$	$(y-x_y)^2$
1 2	14,7 15,5	2,0 2,7	15,10	2,35	– 0,35 0,35	$-0{,}35^2$ $0{,}35^2$	–2,63 –1,93	$-2{,}63^2$ $-1{,}93^2$
3 4	16,3 17,1	3,8 4,1	16,70	3,95	–0,15 0,15	$-0{,}15^2$ $0{,}35^2$	–0,83 –0,53	$-0{,}83^2$ $-0{,}53^2$
5 6	18,0 18,6	4,7 5,6	18,30	5,15	–0,45 0 45	$-0{,}45^2$ $0{,}45^2$	0,07 0,97	$0{,}07^2$ $0{,}97^2$
7 8 9	19,8 21,6 23,5	6,0 6,3 6,5	21,63	6,27	–0 27 0,03 0,23	$-0{,}27^2$ $0{,}03^2$ $0{,}23^2$	1,37 1,67 1,87	$1{,}37^2$ $1{,}67^2$ 1,72
$\sum$ $\bar{x}$	165,1 18,34	41,7 4,63	– –	– –	– –	0,8217	– –	20,72

Если цифры преобразованы путем умножения их иа A, то $\bar{x}$ делят на A, а $\sum(y-y_r)^2$ и $\sum(y-\bar{x}_y)^2$ – на A^2.

2 Корреляциоииое отношеиие η (оио всегда положительное и не более 1)·

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{x}_y)^2-\sum(y-y_r)^2}{\sum(y-\bar{x}_v)^2}} = \sqrt{\frac{20,72-0,8217}{20,72}} = 0,98.$$

При η меиее 0,5 связь слабая, 0,5 – 0,7 – средняя и более 0,7 – сильная. $\eta^2 = 0{,}98^2 = 0{,}96$, т.е. 96% изменеиий y обусловлеиы измеиениями x.

3. Ошибка η (m_η)

$$m_\eta = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,98^2}{9-2}} = 0,076.$$

4. Достовериость η определяют по критерию t (Стьюдента)

$$t = \frac{\eta}{m_\eta} = \frac{0,98}{0,076} = 12,89.$$

Вычисленный критерий t сравнивают с его табличным значением (табл. 2П) при числе степеней свободы $\nu = n-2$ и необходимом уровне вероятности 95; 99; 99,9%. Если t равеи или больше табличного значения, то варианты достоверио коррелируют.

$\nu = 9-2 = 7$; $t_{95} = 2,37$; $t_{99} = 3,50$; $t_{99,9} = 12,89$, т е. варианты x и y достоверно коррелируют при высоком уровне вероятности.

5. Доверительный интервал (I)

$$I = t \times m_r,$$

t находят по табл. 16 при $\nu = n - 2 = 9 - 2 = 7$; $t_{95} = 2,37$

$I_{95} = 2,37 \times 0,076 = 0,18$; $\eta \pm I_{95} = 0,98 \pm 0,18$, или истинная η с вероятностью 95% находится в пределах 0,80 – 1,00.

6. Теоретическая кривая регрессии. Значения x_r и y_r переносят на график и соединяют плавной линией. Получается теоретическая кривая регрессии y по x (рис. 2). Экстраполировать её за пределы данных табл. 16 нельзя.

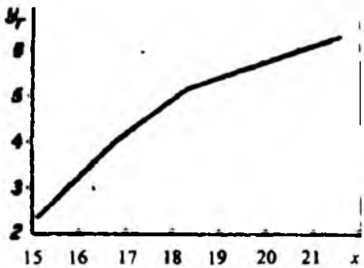


Рис 2. Теоретическая кривая регрессии

7. Запись результатов математической обработки. Корреляционное отношение $\eta \pm I_{95} = 0,98 \pm 0,18$. Обработка данных проведена путем вычисления корреляционного отношения и оценки его достоверности по критерию t (Стьюдента).

АЛГОРИТМ 23. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Условия применения. Даты могут быть выражены в любых единицах, в том числе одна из трех переменных может быть дана в баллах или рангах. Количество троек – не менее четырех.

Желательно через y обозначать главный вариант, у которого необходимо узнать изменчивость под влиянием x и z. Для облегчения вычислений исходные многозначные цифры можно преобразовать путем деления или умножения их на любое число A.

При изучении трех признаков получены следующие результаты·

X	11,4	13,7	14,4	10,3	13,2	12,8	10,7	11,4	15,3
Y	2,5	1,8	2,3	4,3	3,5	3,0	2,0	3,1	3,0
Z	0,37	0,23	0,45	0,94	0,84	0,58	0,23	0,62	0,75

1. Вычисление квадратов, сумм и средних·

№ п/п	Фактор			x^2	y^2	z^2	xy	xz	Yz
	x	Y	z						
1	11,4	2,6	0,37	130,0	6,26	0,137	28,5	4,22	0,93
2	13,7	1,8	0,23	187,7	3,24	0,053	24,7	3,16	0,41
3	14,4	2,3	0,45	207,4	5,29	0,203	33,1	6,48	1,04
4	10,3	4,3	0,94	106,1	18,49	0,884	44,3	9,68	4,04
5	13,2	3,6	0,84	174,2	12,25	0,706	46,2	11 09	2,94
6	12,8	3,0	0,58	163,8	9,00	0,336	38,4	7 42	1,74
7	10,7	2,0	0,23	114,5	4,00	0,053	21,4	2,46	0,46
8	11,4	3,1	0,62	130,0	9,61	0,384	35,3	7,07	1,92
9	16,3	3,0	0,75	234,1	9,00	0,563	45,9	11 48	2,25
$\sum$	113,2	25,5	5,01	1447,8	77,13	3,319	317,8	63,05	15,73
$\bar{x}$	12,58	2,83	0,56	-		–	–	–	-

Если цифры преобразованы путем умножения их на A, то $\bar{x}$ делят на А; если путем деления на A, то $\bar{x}$ умножают на A.

2 Дисперсии (C):

$$C_x = \sum x^2 - (\sum x)^2 \div n = 1447,8 - 113,2^2 \div 9 = 24,0;$$

$$C_x - \sum y^2 - (\sum y)^2 \div n = 77,13 - 25,5^2 \div 9 = 4,88;$$

$$C_z = \sum z^2 - (\sum z)^2 \div n = 3,319 - 5,01^2 \div 9 = 0,53,$$

$$C_{xy} = \sum xy - (\sum x \times \sum y) + n = 317,8 - (113,2 \times 25,5) \div 9 = -2,93;$$

$$C_{xz} = \sum xz - (\sum x \times \sum z) \div n = 63,06 - (113,2 \times 5,01) \div 9 = 0,04;$$

$$C_{yz} = \sum yz - (\sum y \times \sum z) \div n = 15673 - (2565 \times 5,01) \div 9 = 1,54.$$

Если цифры преобразованы путем умножения их на A, то C делят на A^2; если путем деления на A, то C умножают на A^2.

3 Коэффициент корреляции Имеют значения в пределах от +1 до – 1. Положительный коэффициент указывает на положительную связь, т.е. с увеличением первого фактора увеличивается и второй. Отрицательный коэффициент указыввет на то, что при увеличении первого фактора второй уменьшается (и наоборот). При величине коэффициентов менее 0,5 корреляция слабая, 0,5–0,7 – средняя н более 0,7 – сильная.

Парные (показывают величину связи между двумя факторами).

Между x и y

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_x C_y}} = \frac{-2,93}{\sqrt{24,0 \times 4,88}} = -0,271.$$

Между x и z

$$r_{xz} = \frac{C_{xz}}{\sqrt{C_x C_z}} = \frac{0,04}{\sqrt{24,0 \times 0,53}} = 0,011.$$

Между y и z

$$r_{yz} = \frac{C_{yz}}{\sqrt{C_y C_z}} = \frac{1,54}{\sqrt{4,88 \times 0,53}} = 0,958$$

Частные (показывают величину связи между двумя факторами при постоянстве третьего).

Между x и y

$$r_{xy\,z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \times r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}.$$

Между x и z

$$r_{xz\,y} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \times r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

Между y и z

$$r_{yz\,x} = \frac{r_{yz} - r_{xy} \times r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}.$$

$$r_{xy\,z} = \frac{-0,271 - 0,011 \times 0,958}{\sqrt{\left[1 - (-0,271)^2\right] \times \left(1 - 0,958^2\right)}} = -1,000;$$

$$r_{xz\,y} = \frac{0,011 - (-0,271) \times 0,958}{\left[1 - (-0,271)^2\right] \times \left(1 - 0,958^2\right)} = 0,980;$$

$$r_{yz\,x} = \frac{0,958 - (-0,271) \times 0,011}{\sqrt{\left[1 - (-0,271)^2\right] \times \left(1 - 0,011^2\right)}} = 0,998.$$

Чем больше различие между парными и частиыми r, тем больше влияние третьего фактора на взаимосвязь остальиых двух. Так, в данном случае фактор y сильио влияет на корреляцию xz (0,980–0,011 = 0,969), а фактор x слабо влияет иа взаимосвязь yz (0,998–0,958 = 0,040).

Множественные (показывают величину связи одного фактора с сочетанием остальных двух. Они всегда положительны).

Между x и yz

$$R_{x.yz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy} \times r_{xz} \times r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}}.$$

Между y и xz

$$R_{y.xz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy} \times r_{xz} \times r_{yz}}{1 - r_{xz}^2}}.$$

Между z и xy

$$R_{z.xy} = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy} \times r_{xz} \times r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}}.$$

$$R_{x.yz} = \sqrt{\frac{-0,271^2 + 0,011^2 - 2 \times (-0,271) \times 0,011 \times 0,958}{1 - 0,958^2}} = 0,982$$

$$R_{y.xz} = \sqrt{\frac{-0,271^2 + 0,958^2 - 2 \times (-0,271) \times 0,011 \times 0,958}{1 - 0,011}} = 0,999.$$

$$R_{z.xy} = \sqrt{\frac{0,011^2 + 0,958^2 - 2 \times (-0,271) \times 0,011 \times 0,958}{1 - (-0,271)^2}} = 0,998.$$

4. Коэффициент детерминации (d)

$$d = r^2 \text{ или } d = R^2.$$

Частные:

$$d_{r_{xy.z}} = -1,000^2 = 1,000$$

(или 100% измеичивости x зависит от y);

$$d_{r_{yz.x}} = 0,998^2 = 0,996.$$

Множественные:

$$d_{R_{x.yz}} = 0,982^2 = 0,964$$

(или 96,4% измеичивости x зависит от сочетания yz);

$$d_{R_{y.xz}} = 0,999^2 = 0,998;$$

$$d_{R_{z.xy}} = 0,998^2 = 0,996.$$

5. Коэффициенты регрессии (b) и уравнение регрессии

$$b_1(b_{yx.z}) = \frac{C_z \times C_{xy} - C_{xz} \times C_{yz}}{C_x \times C_z - C_{xz}^2};$$

$$b_2(b_{yz\cdot x}) = \frac{C_x \times C_{yz} - C_{xz} \times C_{xy}}{C_x \times C_z - C_{xz}^2},$$

$$b_1 = \frac{0,53 \times (-2,93) - 0,04 \times 1,54}{24,0 \times 0,53 - 0,04^2} = -0,13$$

(при постояином z с увеличением x на 1 увеличивается y на 0,13);

$$b_2 = \frac{24,0 \times 1,54 - 0,04 \times (-2,93)}{24,0 \times 0,53 - 0,04^2} = 2,92$$

(при постояииом x с уаеличением z на 1 увеличивается y иа 2,92).

Уравиение регрессии

$$y = a + b_1 x + b_2 z;$$

$$a = \bar{x}_y - b_1 \bar{x}_x - b_2 \bar{x}_z;$$

a =2,83 –(–0,13) × 12,58 – 2,92 × 0,56 = 2,83; y = 2,83 +(–0,13)x +2,92z.

6. **Проверка наличия миожествеиной корреляции по критерию Фишера (F):**

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\left(\frac{n-3}{2}\right),$$

$$F(R_{x\,yz}) = \frac{0,982^2}{1-0,982^2} \times \frac{9-3}{2} = 81,1.$$

$$F(R_{y\,xz}) = \frac{0,999^2}{1-0,999^2} \times \frac{9-3}{2} = 1497,8;$$

$$F(R_{z\,xy}) = \frac{0,998^2}{1-0,998^2} \times \frac{9-3}{2} = 747,8.$$

Вычислеиный критерий F сравнивают с его табличным значеиием (табл. 11–13П) при числе степеней свободы ν_1 = 2 и $\nu_2 = n - 3$ и необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9% (вероятиость ошибки соответствеиио равиа 1:20; 1:100 или 1·1000). Если F рааен или больше табличного значения, то корреляция между факторами имеет место.

7. Ошибка частных $r(m_r)$

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}.$$

Наприхмер, для $r_{xz\,y}$: $m_r = \sqrt{\frac{1-0,98^2}{9-2}} = 0,075.$

8. Достоверность частных r

$$t = \frac{r}{m_r}.$$

Например, для $r_{xz\cdot y}$: $t = \dfrac{0,98}{0,075} = 13,1$ (t – критерий Стьюдента). Сравнивают с его табличным значением (табл. 2П) при числе степеней свободы $\nu = n - 3$ и необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9%. Если t равен или больше табличного значения, то факторы достоверно коррелируют Для $r_{xz\cdot y}$: $\nu = 9 - 3 = 6$; $t_{95} = 2,45$; $t_{99} = 3,71$; $t_{99,9} = 5,96$; $t = 13,1$, т е факторы x и z при постоянстве y достоверно коррелируют при высоком уровне вероятности.

9. Доверительный интервал частных r (I)

$$I = t \times m_r.$$

t находят по табл. 2П при числе степеней свободы $\nu = n-3$ и необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9%; $\nu = 9 - 3 = 6$; $t_{95} = 2,45$. Для $r_{xz\cdot y}$: $I_{95} = 2,45 \times 0,075 = 0,18$; $r_{xz\cdot y} \pm I_{95} = 0,98 \pm 0,18$, или истинный $r_{xz\cdot y}$ с вероятностью 95% находится в пределах 0,8 –1,0.

10 Итоговая таблица:

x	z				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
11	1,96	2,57	3,16	3,74	4,32
12	1,85	2,44	3,02	3,61	4,19
13	1,72	2,31	2,89	3,48	4,06
14	1,69	2,16	2,76	3,35	3,93
15	1,46	2,06	2,63	3,22	3,80

Составляется по уравнению регрессии для определениях значений x и z. Например, для $x = 11$ и $z = 0,2$: $y = 2,83+(-0,13)x+2,92z = 2,83+ +(-0,13) \times 11 +2,92 \times 0,2= 1,98$

11. Линии и поверхность регрессии Линии регрессии (рис. 3) строят при определенных значениях x по даным итоговой таблицы. Экстраполировать их за пределы фактических данных нельзя. Поверхность прямолинейной регрессии (рис. 4) составляют по данным итоговой таблицы. Она наглядно показывает взаимосвязь xy и z.

12. Запись результатов математической обработки и ссылка. Приводят необходимые коэффициенты с указанием их значимости или доверительного интервала Например, коэффициент корреляции x с z при постоянном y: $r_{xz\cdot y} = 0,98 \pm 0,18$ (см. п 9); величина x на 96,4% зависит от сочетания yz (см п. 4), взаимосвязь y с z слабо зависит от x (см. п. 3).

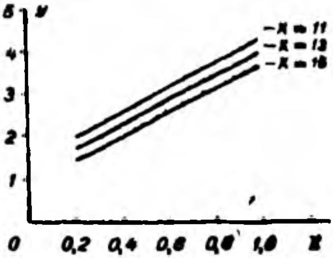


Рис 3 Линии регрессии

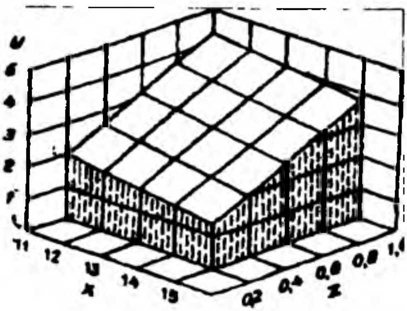


Рис 4 Поверхность прямолинейной регрессии

Обработка данных проведена путем вычисления парных, частных и множественных коэффициентов корреляции с оценкой их значимости по критерию F (Фишера) и t (Стьюдента)

РАБОТА 6. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель работы – изучить влияние факторов на результативный признак.

Материал и оборудование. Задание преподавателя, учебное пособие, курс лекций, калькулятор.

Задание. По данным полученного задания провести расчеты по варианту 1 и варианту 2:

1. Дисперсионный анализ однофакторного опыта.

– определить наличие существенных различий между вариантами по критерию Фишера (F);

- определить долю влияния отдельных факторов;
- определнть ошибки разности между варивнтами (m_d);
- оценить разлнчие между вариантамн по довернтельному интервалу,
- оценить различия между вариантами по наименьшей существенной разности (НСР),
- оценнть различия между вариантами по коэффнциенту превышения существенной разностн;
- составить нтоговую таблицу результатов обработки.

2. Дисперснонный анализ двухфакторного опыта:
- вычнслить суммы, среднне и квадраты;
- определить корректирующий фактор,
- определить дисперсию и степени свободы;
- разложить дисперснн варнантов;
- рассчитать средние квадраты;
- провернть наличие влияния факторов по критерию Фишера,
- определить доли влняний отдельных факторов,
- оценить разлнчия между среднимн градаций факторов,
- построить график взаимодействия факторов;
- составить нтоговую таблицу результатов обработки.

Дисперснонный анализ разработан и введен в практику биологических исследований английскнм ученым Р.А Фишером, который разрешил ряд проблем, относящихся к распределениям Предложенный им способ привел к чрезвычайному развитию теорни планирования опыта и соответствуюшей системе статистнческого аналнза

В настояшее время дисперсноиный анализ широко используется в различных экспернментальных работах лабораторного н промышленного характера, при планированни сложных комплексных опытов в области биологии н лесного хозяйства Дисперсионный аналнз больше других методов подходит для условнй полевых исследований. Современный эксперимент нельзя правильно спланировать, не зная основ дисперсионного анализа.

Задачей дисперсноиного аналнза является изучение влияния одного или нескольких факториальных признаков на результативный прнзнак При этом нмеется в виду, что каждый признак измерен статнстически и варьнрует в совокупности еднниц

При дисперсионном анализе одновременно обрабатывают данные нескольких выборок (варнантов), составляющих еднный статнстический комплекс, оформленный в виде специальной рабочей таблицы. Структура статнстического комплекса н его последующий анализ определяются схемой и методикой экспернмеитв

Сущность дисперсионного анализа – расчленение общей суммы квадратов отклонений и общего числа степеней свободы на части – компоненты, соответствующие структуре эксперимента, и оценка значимости действия и взаимодействия изучаемых факторов по F-критерию

Дисперсионный анализ в его современном развитии позволяет решать ответственные задачи, возникающие при изученни статистических алияний в лесоводстве.

1) измерение силы влияний;

2) определение достоверности влияиий;

3) оценку генеральных параметров влияния в форме доверительных границ;

4) оценку разиости чвстных средних;

5) функциоиальный (регресснонный) анализ ряда чвстных средннх,

6) разработку прогнозов возможного развития признаков при заданном комплексе условий;

7) разработку влгоритмов работы машин по установлению диагнозов и прогнозов при имеющемся или задаином комплексе симптомов.

В облвсти генетикн и селекции дисперсионный анализ позволяет производить измерение степени наследуемости признаков при передаче генетической информации из поколения в поколенне.

Некоторые из этих форм эксперимента и его аиализа будут предметом обсуждения в настоящем пособии.

АЛГОРИТМ 1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Условия применения. Количество дат – не менее двух по каждому варианту. Количество вариантов не менее двух (желательно и не более 15).

Когдв даты в пределах каждой повторности сопряжены в результате неодииакового действия по повторениям неучтенных факторов (например, каждое повторенне было ив отдельиом участке почвы, который может отличаться по плодородию от остальных; или ив величину дат первого повторения какие-то неучтенные факторы могли оказать больще влияния, чем на даты второго), вычисления дисперсий проводят по алгоритму 2. Это приводит к уменьшению ошибки средней

Вариант 1

1. Вычисление сумм, средних и квадратов:

а) если цифры выражаются в процеитах и имеются крайние значения (0–15 и 85–100%), то для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 3;

б) при наличии дат, равных нулю, или дат, выражающих численность, скорость, баллы и т.п., различающиеся между собой в три и более раза, для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 4;

в) при большом количестве дат у вариантов дисперсии вычисляют по алгоритму 5.

Таблица 17

Однофакторный дисперсионный комплекс

Вариант	Повторения					ΣV	$\bar{x} = \frac{\sum v}{n}$	$(\Sigma V)^2$	$\frac{(\sum V)^2}{n}$
	1	2	3	4	5				
А	23	27	23	25	24	122	24,4	122^2	2976,8
Б	25	24	26	25	–	100	25,0	100^2	2500,0
В	27	26	28	–	–	81	27,0	81^2	2187,0
Г	32	34	33	34	34	167	33,4	167^2	5577,8
Д	18	19	17	18	–	72	18 0	72^2	1296,0
$\Sigma П$	125	130	127	102	58	542	–	–	14537,6

Проверка: $\Sigma (\Sigma П) = \Sigma (\Sigma V) = 542$

Этот комплекс имеет следующую структуру: объем комплекса $N = 21$, число градаций $r = 5$, повторность по градациям 5, 5, 5, 4, 2.

Это комплекс однофакторный, неравномерный. В равномерных комплексах повторности по градациям равны $n_1 = n_2 = \dots n_r$, поэтому $N = rn$.

Решение комплекса начинается с рассмотрения ряда частных средних.

В комплексе (табл 17) ряд частных средних 24,4–25,0– 27,0–33,4–18,0 указывает на заметное влияние изучаемого средства. Средний прирост увеличивается в достаточном соответствии с усилением фактора: при слабых дозах (1,2) и сильных (5) прирост меньше.

Ряд частных средних, нанесенных на график, дает наглядное представление о всех деталях действия фактора.

Все расчеты по однофакторным дисперсионным комплексам для количественных признаков показаны в алгоритмах 1. 2, 3, 4, 5.

Приводимое ниже описание техники решения однофакторных комплексов построено на примере алгоритма 1.

После рассмотрения ряда частных рассчитывают показатели дисперсионного анализа

2. Корректирующий фактор (H_Σ). Вначале рассчитывают следующие вспомогательные величины:

$$H_\Sigma = (\Sigma V)^2 : n,\ H_\Sigma = 542^2 : 21 = 13\,988{,}8.$$

3. Дисперсия (*C*) *и степень свободы* (ν). В однофакторном дисперсионном комплексе рассчитыаают три дисперсии (суммы квадратов): общую (C_Y), факториальную (C_x) и случайную (C_Z).

C_y – общая дисперсия, сумма квадратов центральиых отклоиений дат от общей средней по асему комплексу.

C_x – факториальная (межгрупповая) дисперсия, сумма азвешенных квадратоа центральных отклоиеиий частных средних по градациям (или по группам) от общей средией по всему комплексу.

C_z – случайиая (внутригрупповая) дисперсия, сумма квадратоа центральных отклонений каждой даты от своей частной средней

Рассчнтывают по рабочим формулам

Общая (*y*) $C_y = \Sigma v^2 - H_\Sigma$, $\nu_Y = n - 1$.

Вариантоа (факториальиая – *x*) $C_x = \sum \frac{(\sum v)^2}{n} - H_\Sigma$

$\nu_x = r - 1$

Случайиая (*z*) $C_z = C_y - C_x$, $\nu_z = \nu_y - \nu_x$

Общая дисперсия

$C_y = 23^2 + 27^2 + ... + 18^2 - 13\,988{,}8 = 569{,}2$; $\nu_y = 21 - 1 = 20$.

Межгрупповая (*факториальная*)

$C_x = 14\,537{,}6 - 13\,988{,}8 = 548{,}8$; $\nu_x = 5 - 1 = 4$.

Внутригрупповая (*случайная*)

$C_z = 569{,}2 - 548{,}8 = 20{,}4$; $\nu_z = 20 - 4 = 16$.

4. Средние квадраты (*вариансы*). В однофакторном дисперсионном комплексе рассчитывают две вариаисы (средиие квадраты). факториальную (межгрупповую) и случайную (внутригрупповую). Каждая варианса равиа дисперсии, делениой иа число степеией свободы:

– *факториальная варианса* рааиа факториальиой дисперсии, делеииой на число степеией свободы – число классоа без одного:

$$\sigma^2_x = \frac{C_x}{\nu_x},\quad \sigma^2_x = \frac{548{,}2}{4} = 137{,}2,$$

– *случайная варианса* рааиа случайиой дисперсии, делеииой иа число степеией саободы – объем комплекса без числа градаций:

$$\sigma^2_z = \frac{C_z}{\nu_z} = \frac{20{,}4}{16} = 1{,}28.$$

Общая $\sigma^2_y = \dfrac{C_y}{\nu_y} = \dfrac{569{,}2}{20} = 28{,}48.$

5. Проверка наличия существенных различий между вариантами по критерию Фишера (F). На осноае дисперсий однофакториого комплекса можно рассчитать оба заключительиых показателя дисперсионного анализа:

$$F = \frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_z} = \frac{137,2}{1,28} = 107,2.$$

Вычисленный критерий F сраинаают с его табличным значеиием (приложеиие) при $\nu_1 = \nu_x$ и $\nu_2 = \nu_z$ и необходимом уроане вероятности. 95, 99, или 99,9% (аероятность ошибки соответствеино равна 1 : 20, 1 : 100 и 1 · 1 000). *Если F равен или больше табличного значения, то между вариантами имеются существенные различия*

$$\nu_1 = 4, \nu_2 = 16, F_{95} = 3{,}01, F_{99} = 4{,}8, F_{99,9} = 7{,}9, F_{\text{факт}} = \underline{\underline{107{,}2}},$$

т.е. между вариантами имеются существеиные различия при высоком уровне вероятиости.

Сопоставление эмпирического критерия с его стандартными значениями может дать два принципиальио различных результата.

Влияние недостоверно. эмпирический критерий не достигает своего стандартного (табличного) значения, взятого в соответствии с установленным порогом вероятности безошибочных прогнозов.

В таких случаях при требуемой вероятности невозможно сделать заключение как о равеистве, так и о различии соответствуюших частных геиеральиых средних, так как малое разнообразие выборочных средних может получиться при любом (большом, малом или нулевом) разиообразии геиеральных средних по градациям комплекса А это значит, что а таких случаях нельзя дать определеиного прогноза о геиеральном влиянии фактора: остается иеаыясиенным, можно или нельзя ожидать с установленной вероятностью, что при массовом примеиении фактора получаются результаты, сходные с теми, которые получены а выборочном комплексе, конечно, при изучеиных градациях фактора и при данных условиях.

Следует остерегаться двух ошибочных мнеиий о недостоаерном показателе силы влияиия. Нельзя считать, что получение иедостовериого показателя силы алияния указыаает на то, что «влияиие вообще нет» или влияние отсутстает в генеральных совокупиостях.

Это ие доказывает получение недостоверного показателя силы влияния Такой показатель ни подтверждает, ни отрицает геиеральное влияние.

При получении иедостовериого показателя силы влияиия иельзя также считать, что а проведением исследоаании аообще иичего ие получено и оио проведеио без всякой пользы. Это большая ошибка.

В некоторых случаях изучение силы алияния проаодится только для определенной, ограниченной группы особей, из которых и состааляется дисперсионный комплекс. В таких случаях не ставят задачу определить силу генерального влияния и эмпирический показатель силы алияиия приобретвет полное значеиие без определения его достовериости.

В иекоторых исследоаааниях имеиio иедостоаериость показателя силы влияния, определенная по прямому отношению аарианс, дает определенный отает на осноаной аопрос этого исследоаання

Так бывает а тех случаях, когда недостоверность по прямому отношению варианс не опроаергает сходстаа исследуемых особей по их наследстаенным качестаам.

Влияние достоверно эмпирический критерий равен или превышает свое стандартное значение с требуемой вероятностью.

В таких случаях аозможен определенный прогиоз: геиеральные средние по градациям комплекса иеодинакоаы, и их разиообразие подобио тому, которое иаблюдалось а аыборочиом комплексе. Разиообразие частных средних а выборочном комплексе теперь уже ие может быть объяснено только случайностями аыборочного исследования.

Достоаерное влияние озиачает, что изучениый фактор при его массовом применении а определенных градациях н а данных услоаиях будет оказывать влияние на результативный признак с вероятностью, найденной при оценке достоаерности его силы влияния.

6. Доля или сила влияния отдельных факторов (η^2_x). Показатель силы влияння определяет ту долю общей дисперсии, которая приходится на факториальную дисперсию, или долю влияния изучаемого фактора а общей сумме алияния всех факторов, определяющих аеличину результатиаиого призиака.

$$\eta^2_x = \frac{\left(\sigma^2_x - \sigma^2_z\right):\left(N:r\right)}{\left(\sigma^2_x - \sigma^2_z\right):\left(N\cdot r\right)+\sigma^2_z}$$

случайных фактороа

$$\eta^2_z = 1 - \eta^2_x;$$

$$\eta^2_x = \frac{(137{,}2-1{,}28):(21:5)}{(137{,}2-1{,}28):(21:5)+1{,}28} = 0{,}962\,,$$

или 96,2%; $\eta^2_z = 1 - 0,962 = 0{,}038$, или 3,8% измеичивости под влиянием случайных фактороа.

7. Ошибка средней (*m*)

$$m = \sqrt{\frac{\sigma^2_z}{n}}\,.$$

Например, для А и Г $m = \sqrt{\frac{1,28}{5}} = 0{,}506$, для В $m = \sqrt{\frac{1,28}{3}} = 0{,}653$.

8. Ошибка разности между вариантами **(m_d)**

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad \text{при } n_1 = n_2,\ m_d = 1{,}414\, m.$$

Например, для разности между *А* и *В*

$$m_d = \sqrt{0{,}506^2 + 0{,}653^2} = 0{,}826;$$

для разности А и Г $m_d = 1{,}414 \times 0{,}506 = 0{,}715$.

Для А и Д $m_d = \sqrt{0{,}506^2 + 0{,}500^2} = 0{,}869$.

9. Оценка различий между вариантами по доверительному интервалу (при ν менее 10 оценка неэффективна):

$$И = t\, m,$$

t – критерий Стьюдента. Находят по приложению (табл. 2П) при $\nu = \nu_z$ и необходимом уровне вероятности 95; 99; 99,9%

$$\nu_z = 16,\ t_{95} = 2{,}12.$$

Например, для А $И_{95} = 2{,}12 \times 0{,}506 = 1{,}07$;

для *В* $И_{95} = 2{,}12 \times 0{,}653 = 1{,}38$,

$\bar{x}_A \pm И_{95} = 24{,}4 \pm 1{,}07$, или $23{,}33 - 25{,}47$;

$\bar{x}_B \pm И_{95} = 27{,}0 \pm 1{,}38$, или $25{,}62 - 28{,}38$.

Если интервалы значений $\bar{x}$ не перекрываются, то между вариантами различия существенны на данном уровне вероятности.

10. Оценка различий между вариантами по наименьшей существенной разности (НСР) (при r более 2 она дает увеличенное количество существенных различий):

$$НСР = t\, m_d.$$

t находят по табл 2П при $\nu = \nu_z$ и необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9%.

$\nu_z = 16$; $t_{95} = 2{,}12$. Например, для разности А и В $P_{95} = 2{,}12 \times 0{,}826 = 1{,}75$.

Чтобы узнать НСР между аариантами, например Б и Г, аычисляют для них отдельно m_d и НСР (табл. 18).

Таблица 18

Средние значения и *$НСР_{95}$* по вариантам

Вариант	$\bar{x}$	± от А	$НСР_{95}$
А	24,4	–	–
Б	25,0	0,6	1,6
В	27,0	2,6	1,7
Г	33,4	9,0	1,5
Д	18,0	–6,4	1,6

Если отклонение (разность) превосходит или равно НСР, то различия между сравниваемыми вариантами существенны на данном уровне вероятности.

11. Оценка различий между вариантами по коэффициенту превышения существенной разности (П)

$$П = \frac{d}{Q \times m},$$

d – разность между вариантами; Q – коэффициент Тьюки (его находят по табл. 9П, при $\nu = \nu_z$); m – ошибка средней, она берется для варианта, а не контроля (стандарта). Например, для разности между А и В

$$П = \frac{27{,}0 - 24{,}4}{4{,}3 \times 0{,}653} = 0{,}9 \text{ (табл 19).}$$

Таблица 19

Оценка различий между вариантами

Вариант	$\bar{x}$	$П_А$
А	24,4	–
Б	25,0	0,2
В	27,0	0,9
Г	33,4	4,1
Д	18,0	2,6

$П_А$ – коэффициент превышения разности между данным вариантом и А

Если коэффициент П больше или равен 1, то различия между сравниваемыми вариантами существенны на уровне вероятности 95%

Оценка по коэффициенту П дает более правильные результаты, так как учитывает количество вариантов. Она более наглядна. Величина П указывает на значительность отклонения от уровня существенных различий и дает возможность выделить особо ценные варианты.

12. Запись результатов математической обработки. Приводят одну из итоговых таблиц (табл. 20).

Таблица 20

Форма итоговой таблицы дисперсионного анализа однофакторных комплексов для количественных признаков для малых групп

Разнообразие	Дисперсия (сумма квадратов)	Числа степеней свободы	Вариансы (средние квадраты)	Критерий Фишера эмпирический	Критерий Фишера табличный
Факториальное (межгрупповое)	548,8	4	137,2	107,2	$F_{95} = 3{,}01$ $F_{99} = 4{,}8$
Случайное (внутригрупповое)	20,4	16	1,28		$F_{99,9} = 7{,}9$
Общее	569,2	20	28,46		

Вариант 2

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов для количественных признакоа для малых групп (табл. 21).

Таблица 21

Обработка результатов исследований

<table>
<tr><th rowspan="2">Показатели</th><th colspan="5">Градации</th><th rowspan="2">Числа градаций $r=5$</th><th rowspan="2">Дисперсии. факториальная $C_x=\sum H_r - H_\Sigma=552-500=52$</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Даты V</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td><td>3</td><td rowspan="5">$H_\Sigma=(\sum V)^2 : n=100^2 : 20=500$</td><td rowspan="5">Случайная $C_z=\sum V^2 - H_\Sigma=586-552=34$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>9</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>N</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>$N=\sum n=20$</td><td rowspan="2">Общая $C_y=\sum V^2 - H_\Sigma=586-500=86$</td></tr>
<tr><td>$\sum V$</td><td>6</td><td>16</td><td>30</td><td>28</td><td>20</td><td>$\sum\sum V=100$</td></tr>
<tr><td>$H_r=\frac{(\sum V)^2}{n}$</td><td>12</td><td>64</td><td>180</td><td>196</td><td>100</td><td>$\sum H_r=552$</td><td>Варианс факториальная $\sigma^2_x=\frac{C_x}{r-1}=\frac{52}{4}=13,0$</td></tr>
<tr><td>$\sum V^2$</td><td>14</td><td>70</td><td>194</td><td>202</td><td>106</td><td>$\sum V^2=586$</td><td rowspan="2">случайная $\sigma^2_z=\frac{C_z}{N-r}=\frac{34}{15}=2,27$</td></tr>
<tr><td>Частные средние $\bar{x}_i$</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>Общая средняя $\bar{x}_\Sigma=5$</td></tr>
</table>

Показатель силы влияния $\eta^2_x=\frac{C_x}{C_y}=\frac{52}{86}=\underline{\underline{0,605}}$.

Критерий достоверности $F=\frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_z}=\frac{13,0}{2,27}=\underline{5,7}$.

$\nu_1=r-1=4$; $\nu_2=N-r=15$; $F_{st}=\{3,1-4,9-8,3\}$ по таблице стандартных критериев Фишера (табл. 11П, 12П).

Общий вывод: влияние фактора достоверно с вероятностью $B \succ 0{,}99$. Форму итоговой записи см. в п. 12 алгоритма 1.

АЛГОРИТМ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРЯЖЕННЫХ ДАТ

Таблица 22

Результаты испытаний

Варианты	Повторения				
	1	2	3	4	5
А	23	27	23	25	24
Б	25	24		26	25
В	27	26	–	28	
Г	32	34	33	34	34
Д	18	19	17	18	17

Если имеется только два варианта, то проще вести вычисления по пункту 5 данного алгоритма.

1. Восстановление отсутствующих дат.

Таблица 23

Расчет вспомогательных величин дисперсионного комплекса

Вари-ант	Повторения					ΣV	$\bar{X} = \frac{\sum V}{n}$	$(\Sigma V)^2$
	1	2	3	4	5			
А	23	27	23	25	24	122,0	24,4	14884
Б	25	24	(23,9)	26	25	123,9	25,78	15351
В	27	26	(25,9)	28	(26,8)	133,7	26,74	17876
Г	32	34	33	34	34	167,0	33,40	27889
Д	18	19	17	18	17	89,0	17,80	7921
	125	130	122,8	131	126,8	635,6		83921
$(\Sigma П)^2$	15625	16900	15080	17161	16078	–		–

2. Вычисление сумм, средних и квадратов:

а) если цифры выражаются в процентах и имеются крайние значения (0 – 15 и 85 – 100%), то для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 3;

б) при наличии дат, равных нулю, или дат, выражающих численность, баллы и т.п., различающихся между собой в три и более раз, для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 4;

в) при большом количестве дат у вариантов дисперсии вычисляют по алгоритму 5.

$$\Sigma(\Sigma V)^2 = 83\,921 \text{ (табл. 23)}, \ \Sigma(\Sigma П)^2 = 15\,625 + 16\,900 + 15\,080 + 17 + 161 + 16\,078 = 80\,844.$$

3 Корректирующий фактор (H_Σ):

$$H_\Sigma = (\Sigma V)^2 : n, \ H_\Sigma = 635{,}6^2 : 25 = 16\,159{,}5.$$

4. Дисперсия (C) и степени свободы (ν).

Общая $C_Y = \Sigma V^2 - H_\Sigma$, $\nu_Y = n - 1$.

Вариантов (факторивльная) $C_x = \Sigma(\Sigma V)^2 : n - H_\Sigma$, $\nu_x = r - 1$.

Повторений $C_n = \Sigma(\Sigma П)^2 : r - H_\Sigma$, $\nu_n = n - 1$

Случайная: $C_z = C_Y - C_x - Cn$, $\nu_z = \nu_y - \nu_z - \nu n$.

$C_y = 23^2 + 27^2 + 23^2 + \ldots + 17^2 - 16\,159{,}5 = 647{,}8$, $\nu = 25 - 1 = 24$;

$C_x = 83\,921 : 5 - 16\,159{,}5 = 624{,}7$, $\nu_x = 5 - 1 = 4$;

$C_n = 80\,844 : 5 - 16\,159{,}5 = 9{,}3$, $\nu_n = 5 - 1 = 4$;

$C_z = 647{,}8 - 624{,}7 - 9{,}3 = 13{,}8$, $\nu_z = 24 - 4 - 4 = 16$.

Если имеются восстановленные данные, то величину ν_z уменьшают на их количество. В даном случае $\nu_z = 16 - 3 = 13$.

Далее вычисления продолжают по алгоритму 1. При вычислении m и m_d в расчет берут n, равное количеству дат без восстановленных

5. Вычисление дисперсий у двух вариантов (табл. 24).

Таблица 24

Расчет дисперсий по двум вариантам

Номер пары	Вариант		D	D²
	А	Б		
1	23	25	−2	4
2	27	24	3	9
3	23	24	−1	1
4	25	26	−1	1
5	24	25	−1	1
Σ	122	124	−2	16
$\bar{x}$	24,4	24,8		

d – разность (А – В);

$$C_в = \frac{\left(\sum d\right)^2}{2n}, \ \nu_в = 1 \text{ (всегда)}, \ C_в = \frac{(-2)^2}{2 \times 5} = 0{,}4, \ \nu_в = 1;$$

$$C_z = \frac{\sum d^2}{2} - C_в, \ \nu_z = n - 1, \ C_z = \frac{16}{2} - 0{,}4 = 7{,}6, \ \nu_z = 5 - 1 = 4.$$

Далее вычисление необходимых величин продолжают по алгоритму 1.

АЛГОРИТМ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЦЕНТОВ

Применяется с целью сглаживания резких различий, необходимого для правильного применения дисперсионного анализа.

Преобразование проводят по табл. 17П.

Таблица 25

Расчет вспомогательных величин дисперсионного комплекса

Вариант	Повторение				Преобразованная дата				ΣV	$x_n = \frac{\sum V}{n}$	$\bar{x}$
	1	2	3	4	1	2	3	4			
А	26	42	35	15	30,7	40,4	36,3	22,8	130,2	32,6	29,0
Б	7	12	9	8	15,3	20,3	17,5	16,4	69,5	17,4	8,9
В	36	43	40	29	36,3	41,0	39,2	32,6	149,1	37,3	36,7
ΣП	–	–	–	–		101,7	93,0	71,8	348,8		–

x_n – средняя арифметическая из преобразованных дат; $\bar{x}$ – истинная средняя арифметическая, полученная путем обратного преобразования x_n по табл. 17П.

Далее вычисления продолжают по алгоритму 2. При этом оценка по критериям *F*, *t*, И, НСР ведется по преобразованным датам. Достоверные различия отмечаются, например, звездочкой. Величина коэффициента *П* не зависит от обратного преобразования дат, и его можно привести в итоговой таблице.

АЛГОРИТМ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИЛЬНО ВАРЬИРУЮЩИХ ДАТ

Применяется с целью сглаживания резких различий, необходимого для правильного применения дисперсионного анализа.

А. Преобразование путем извлечения квадратного корня (при наличии дат, равных нулю, смотри ниже пункт Б).

Пример. Исходные даты: 24; 125; 76; 95.

Преобразованные даты: 4,9; 11,2; 8,7; 9,7.

Средняя арифметическая из преобразованных дат

$$\bar{x}_n = \frac{4,9 + 11,2 + 8,7 + 9,7}{4} = 8,63.$$

Истинная средняя арифметическая (обратное преобразование) $\bar{x} = 8,63^2 = 74,5$. Значение 74,5 заносят в итоговую таблицу.

С преобразоаанными датами проводят аычнсления по алгоритму 2, где на него нмеется ссылка. Оценка по критериям *F*, *t*, *И*, НСР ведется по преобразованным датам. Так как аеличины критернеа соразмерны этим датам, то в итоговой таблице достоверные различия отмечаются, например, звездочкой или подчеркиваются одиой, двумя или тремя черточками Велнчина коэффициента П не заaисит от обратного преобразования дат и его можно приаести а итоговой таблице.

Б Преобразование путем $\sqrt{x+1}$.

Пример Исходные даты: 2; 0; 3; 5.

Преобразованные даты: 1,73; 1,00; 2,00; 2,45.

Средняя арифметическая из преобразоаанных дат

$$x_{п} = \frac{1,73+1,00+2,00+2,45}{4} = 1,80.$$

Истинная средняя арифметическая (обратное преобразование) $\bar{x} = 1,80^2 - 1 = 2,24$. Значение 2,24 заносят в итоговую таблицу.

АЛГОРИТМ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ ПРИ БОЛЬШОМ КОЛИЧЕСТВЕ ДАТ

1. Группироака дат (см.: Математические методы а лесоводстве. Томск, 1996. Ч. 1. С. 17–25).
2. Вычисление сумм, средних и квадратов (табл 26).

Таблица 26

Расчет вспомогательных данных дисперсионного комплекса

Вариант	Значение середии групп (классов) (x)						n	ΣV	$\bar{x} = \frac{\Sigma V}{n}$	$(\Sigma V)^2$	$\frac{(\Sigma V)^2}{N}$	Σfx^2
	3	4	5	6	7	8						
А	4	3	4	7	8	10	36	222	6,17	22^2	1369,0	1468
Б	12	7	6	3	2	2	32	142	4,44	42^2	630,1	704
В	6	7	6	6	5	5	35	187	5,34	87^2	999,1	1097
Σ		–		-	–	–	103	551	–	–	2998,2	3269

f-частоты

Для А. $\Sigma V = \Sigma fX = 4\times3 + 3\times4 + 4\times5 + 7\times6 + 8\times7 + 10\times8 = 222$;

$\Sigma fx^2 = 4\times3^2 + 3\times4^2 + 4\times5^2 + 7\times6^2 + 8\times7^2 + 10\times8^2 = 1468$.

3. Корректирующий фактор

$$H_{\Sigma} = (\Sigma V)^2 : N,\ H_{\Sigma} = 551^2 : 103 = 2947,6.$$

4. Дисперсия (сумма квадратоа) и степень свободы.

Общая $C_y = \Sigma(\Sigma f x^2) - H_\Sigma . \nu_y = N - 1$

Вариантов (факториальная) $C_x = \sum \frac{\left(\sum V\right)^2}{n} - H_\Sigma$, $\nu_x = r - 1$.

Случайная $C_z = C_y - C_x$, $\nu_z = \nu_y - \nu_x$.

C_y = 3269–29447,6=321,4. ν_y =103–1= 102; C_x = 2998,2 – 2947,6 – 50,6,

ν_x = 3-2=2; C_z = 321,4–50,6 = 270,8, ν_z =102–2 = 100.

Далее вычисления продолжаются по алгоритму 1.

АЛГОРИТМ 6. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОФАКТОРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ БОЛЬШИХ ГРУПП

A – фактор.

A_1, A_2, A_3 и т.д. – градации.

V – результативный признак.

Таблица 27

Однофакторный комплекс для больших групп

V	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	n	$r = 5$
6	1		3			4	$H_\Sigma = (\sum nV)^2$ n = =127² 30=537,6
5	3	2	3	2		10	
4	2	2		2	2	8	
3		1		1	3	5	
2				1	2	3	
n_A	6	5	6	6	7	$N = \sum n = 30$	
$\sum fV$	29	21	33	23	21	$\sum fV = 127$	
$H_i = (\sum fV)^2 \cdot n_A$	140,2	88,2	181,5	88,2	63,0	$\sum H_i$ =561,1	

$S_1 = \sum nV = +127$, $S_2 = \sum nV^2 = 579$.

Факториальная дисперсия $C_x = \sum H_i - H_\Sigma$ = 561,1–537,6 = 23,5.

Случайная дисперсия $C_z = S_2 - H_i$ = 579–561,1 = 17,9

Общая дисперсия $C_y = S_2 - H_\Sigma$ = 579–537,6 = 41,4.

Факториальная варианса $\sigma^2_x = \frac{C_x}{r-1} = \frac{23,5}{4} = 5,875$.

Случайная варианса $\sigma^2_z = \frac{C_z}{N-r} = \frac{17,9}{25} = 0,716$.

Показатель силы влияния $\eta^2_x = \frac{C_x}{C_y} = \frac{23,5}{41,4} = \underline{\underline{0,568}}$.

Критерий достоверности $F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{5,875}{0,716} = \underline{\underline{8,2}}$.

$\nu_1 = r - 1 = 4$; $\nu_2 = N - r = 25$; $F_{st} = \{2,8 - 4,2 - 6,5\}$ (табл. 11П–13П).

Общий вывод: влияние фактора достоверно в высшей степени с вероятностью $B = 0,999$.

Таблица 28

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсия (сумма квадратов) C	Число степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2	
Факториальное (межгрупповое)	23,5	4	5,875	$\eta_x^2 = \underline{\underline{0,568}}$
Случайное (внутригрупповое)	17,9	25	0,716	
Общее	41,4	29	1,428	

АЛГОРИТМ 7. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХФАКТОРНЫХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ МАЛОЙ ВЫБОРКИ

Условия применения. Количество дат – не менее двух по каждому варианту. Количество вариантов – не менее двух градаций на фактор. Факторы должны быть независимыми, не коррелировать друг с другом.

Когда даты в пределах каждого повторения сопряжены в результате неодинакового действия по повторениям неучтенных факторов (например, каждое повторение было на отдельном участке почвы, который может отличаться по плодородию от остальных, или на величину дат первого повторения какие-то неучтенные факторы могли оказать больше влияния, чем на даты второго), вычисление дисперсий проводят по алгоритму 2. Это уменьшает ошибку средней.

1 Вычисление сумм, средних и квадратов:

а) если цифры выражаются в процентах и имеются крайние значения (0 – 15 и 85 - 100%), то для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 3.

б) при наличии дат, равных нулю, или дат, выражающих численность, скорость, баллы и т.п., различающихся между собой в три и более раз, для выравнивания дисперсий их преобразуют по алгоритму 4;

в) при большом количестве дат у вариантов вычисление дисперсий делают по алгоритму 5.

A – первый фактор, A_1, A_2 – градации.

B – второй фактор, B_1, B_2, B_3 – градации.

V – результативный призиак

Таблица 29

Расчет вспомогательных величин дисперсионного комплекса

Градации факторов		Повторение				ΣV	$\bar{x} = \frac{\sum V}{n}$	$\frac{\left(\sum V\right)^2}{n}$
I	II	1	2	3	4			
A_1	B_1	25	27	28	26	106	26,50	2809
	B_2	29	32	34	28	123	30,75	3782
	B_3	20	23	24	22	89	22.25	1980
A_2	B_1	29	32	32	30	123	30 75	3782
	B_2	34	37	38	33	142	35,50	5041
	B_3	23	27	27	25	102	25,50	2601
	ΣП	160	178	183	164	685		19995

Проверка. Σ (ΣП) = Σ (ΣV) = Σ x = 685.

2. Корректирующий фактор

$$H_\Sigma = \frac{\left(\sum V\right)^2}{n}, H_\Sigma = \frac{685^2}{24} = 19\,551.$$

3. Дисперсия (сумма квадратов) и степень свободы.

Общая $C_y = \sum x^2 - H_\Sigma$, $\nu_y = n - 1$.

Вариантов $C_x = \sum \frac{\left(\sum V\right)^2}{n} - H_\Sigma$, $\nu_x = r - 1$.

Случайная $C_z = C_y - C_x$, $\nu_z = \nu_y - \nu_x$

$C_y = (25^2 + 27^2 + ... + 25^2) - 19\,551 = 516$, $\nu_y = 24 - 1 = 23$;

$C_x = 19\,995 - 19\,551 = 444$, $\nu_x = 6 - 1 = 5$,

$C_z = 516 - 444 = 72$, $\nu_z = 23 - 5 = 18$.

4. Разложение дисперсии вариантов. При разном n у вариантов и различном количестве градаций у факторов разложение дисперсии проводят по алгоритму 8.

Таблица 30

Суммы по вариантам

I фактор	II фактор			ΣI	$\bar{x}_1$
	B_1	B_2	B_3		
A_1	106	123	89	318	26,50
A_2	123	142	102	367	30,58
ΣII	229	265	191	–	–
$\bar{x}_2$	28,63	33,13	23,88	–	–

ΣI и ΣII – сумма дат по градациям I и II факторов; r_1 и r_2 – количество градаций I и II факторов ($r_1 = 2$, $r_2 = 3$); n – количество повторений.

Средняя градации I фактора $\bar{x}_1 = \dfrac{\sum I}{r_2 \times n}$, для A_1: $\bar{x} = \dfrac{318}{3 \times 4} = 26,50.$

Средняя градация II фактора $\bar{x}_2 = \dfrac{\sum II}{r_1 \times n}$, для B_1: $\bar{x} = \dfrac{229}{2 \times 4} = 28,63.$

Дисперсия и степень свободы:

I фактора $C_1 = \dfrac{\sum(\sum I)^2}{r_2 \times n} - H_\Sigma$, $\nu_1 = r_1 - 1.$

II фактора $C_2 = \dfrac{\sum(\sum II)^2}{r_1 \times n} - H_\Sigma$, $\nu_2 - r_2 - 1$.

Взаимодействия факторов $C_{1,2} = C_x - C_1 - C_2$, $\nu_{1,2} = \nu_1 \times \nu_2$

$$C_1 = \frac{318^2 + 367^2}{3 \times 4} - 19551 = 100,1, \quad \nu_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$C_2 = \frac{229^2 + 265^2 + 191^2}{2 \times 4} - 19551 = 342,4, \quad \nu_2 = 3 - 1 = 2;$$

$$C_{1,2} = 444 - 100,1 - 342,4 = 1,5, \quad \nu_{1,2} = 1 \times 2 = 2.$$

5. Средние квадраты (вариансы):

Вариантов $\sigma_y^2 = \dfrac{C_x}{\nu_x} = \dfrac{444}{5} = 88,8.$

Случайной дисперсии $\sigma_z^2 = \dfrac{C_z}{\nu_z} = \dfrac{72}{18} = 4,0.$

I фактора $\sigma_1^2 = \dfrac{C_1}{\nu_1} = \dfrac{100,1}{1} = 100,1.$

II фактора $\sigma_2^2 = \frac{C_2}{\nu_2} = \frac{342,4}{2} = 171,2.$

Взаимодействия факторов $\sigma_{1\,2}^2 = \frac{C_{1\,2}}{\nu_{1\,2}} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$

6. Проверка наличия влияния факторов по критерию Фишера (F):

I фактора $F_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_z^2} = \frac{100,1}{4,0} = 25,0, \quad \nu_1 = \nu_1, \quad \nu_2 = \nu_z, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 18,$ $F_{95} = 4,41;$

II фактор $F_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_z^2} = \frac{171,2}{4,0} = 42,8, \quad \nu_1 = \nu_2, \quad \nu_2 = \nu_z, \quad \nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 18,$ $F_{95} = 3,55.$

Взаимодействия факторов $F_{1\,2} = \frac{\sigma_{1\,2}^2}{\sigma_z^2} = \frac{0,75}{4,0} = 0,2; \quad \nu_1 = \nu_{1\,2}, \ \nu_2 = \nu_z.$

Вычисленный критерий Фишера F сравнивают с его табличным значением (табл. 11П–13П). При необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9% (вероятность ошибки соответственно равна 1:20; 1:100; 1:1 000). Если вычисленный F равен или больше табличного значения, то влияние факторов существенно.

7. Доля или сила влияния отдельных факторов (η^2) (вычисление для факторов с F больше $F_{табл}$):

$$\sum \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_z^2}{r_2 \times n} + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_z^2}{r_1 \times n} + \frac{\sigma_{1\,2}^2 - \sigma_z^2}{n} + \sigma_z^2$$

(при вычислении $\Sigma\,\sigma^2$ из расчета исключаются σ^2 факторов с F меньше $F_{табл}$);

$$\eta_1^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_z^2}{r_2 \times n} \sum \sigma^2, \quad \eta_z = 1 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3;$$

$$\eta_2^2 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_z^2}{r_1 \times n} : \sum \sigma^2, \quad \eta_{1\,2} = \frac{\sigma_{1\,2}^2 - \sigma_z^2}{n} \cdot \sum \sigma^2,$$

$$\sum \sigma^2 = \frac{100,1 - 4,0}{3 \times 4} + \frac{171,2 - 4,0}{2 \times 4} + 4,0 = 8,0 + 20,94,0 = 32,9;$$

$$\eta_1^2 = \frac{100,1 - 4,0}{3 \times 4} : 32,9 = 0,243, \text{ или } 24,3\%;$$

$$\eta_2^2 = \frac{171,2 - 4,0}{2 \times 4} : 32,0 = 0,635, \text{ или } 63,5\%,$$

η^2_{12} не вычисляют, так как $F<F_{табл}$; $\eta^2_z = 1 - 0{,}243 - 0{,}635 = 0{,}122$, или 12,2%.

8. Оценка различий между средними градаций факторов:

а) ошибка средней для градации фактора $m = \sqrt{\frac{\sigma^2_z}{n}}$, n – количество дат для данной градации.

Пример. Для A_1: $n = 12\ (4 + 4 + 4)$, $m = \sqrt{\frac{4{,}0}{12}} = 0{,}58$;

для B_1: $n = 8\ (4 + 4)$, $n = 8(4+4)$, $m = \sqrt{\frac{4{,}0}{8}} = 0{,}71$;

б) ошибка разности между средними градаций $m = m^2_1 + m^2_2$, при $n_1 = n_2$, $m_d = 1{,}414\ m$.

Пример. Для градации *I* фактора $m_d = 1{,}414 \times 0{,}58 = 0{,}82$; для градаций II фактора и взаимодействия факторов $m_d = 1{,}414 \times 0{,}71 = 1{,}00$; для сравнения градаций первого фактора с градациями второго $m_d = \sqrt{0{,}58^2 + 0{,}71^2} = 0{,}92$;

в) оценку различий проводят по одному из критериев (алгоритм 1, п. 9–11).

Пример. Оценка различий между средними A_1 и B_1 по НСР·

$$НСР = t \times m_d,$$

t находят приложению при $\nu = \nu_z$ и необходимом уровне вероятности 95; 99 или 99,9%. $\nu_z = 18$, $t_{95} = 2{,}10$,

$$НСР_{95} = 2{,}10 \times 0{,}92 = 1{,}93.$$

Разница между средними B_1 и A_1 равна 28,63–26,50 = 2,13. Она существенна, поскольку больше $НСР_{95}$.

9. Запись результатов математической обработки и ссылка.

Приводят одну из итоговых таблиц (см алгоритм 1).

Таблица 31

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов для количественных признаков для малой выборки

A – первый фактор, A_1, A_2 – градации
B – второй фактор, B_1, B_2 – градации
V – результативный признак

Показатели	A_1		A_2		$r_A=2$, $r_B=2$	Факторы	n	$\sum V$	$\sum H_i$	$\bar{x}_i$
	B_1	B_2	B_1	B_2						
V	8,12	3,4,5	1,3	6,8,10	$H_\Sigma = \frac{(\sum V)^2}{N} = 360$	A_1	5	32	204,8	6,4
N	2	3	2	3	$N=10$	A_2	5	28	156,8	5,6
$\sum V$	20	12	4	24	$\sum V = 60$	$H_A=361,6$				
$\sum V^2$	208	50	10	200	$\sum V^2 = 468$	B_1	4	24	144,0	6,0
$H_i = \frac{(\sum V)^2}{n}$	200	48	8	192	$\sum H_i = 448$	B_2	6	36	216,0	6,0
$\bar{x} = \frac{\sum V}{n}$	10	4	2	8	$\bar{x} = 6$	$H_B = 360$ $\bar{x}_\Sigma = 6$				

	A	B	AB	x	Z	Y
C	$H_A - H_\Sigma$ 1,6	$H_B - H_\Sigma$ 0,0	$C_x - C_A - C_B$ 86,4	$\Sigma H_i - H_\Sigma$ 88,0	$\Sigma V^2 - \Sigma H_i$ 20,0	$\Sigma V^2 - H\Sigma$ 108,0
$\eta^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,015	0,000	0,800	0,815	0,185	1,000
v	$r_A - 1$ 1	$r_B - 1$ 1	$(r_A-1) \times (r_B-1)$ 1	$r_A r_B - 1$ 3	$N - r_A r_B$ 6	$N - 1$ 9

$\sigma^2_i = \frac{C_i}{\nu_i}$	1,6	0,0	86,4	29,33	3,33	$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	3
$F_i = \frac{\sigma^2_i}{\sigma^2_z}$	0,5 –	0,0 –	25,9 =	8,9 -		6 (табл 11П, 12П)	13,4 6,0	9,8 4,8

Выводы:

– в выборочном комплексе оказалось достоверным только взаимодействие градаций ($\dot{\eta}^2_{AB} = 0,800$) и суммарное действие факторов ($\dot{\eta}^2_x = 0,815$),

– это означает, что сила каждого фактора в значительной степени определяется градацией другого фактора. При A_1 второй фактор ($B_1 \rightarrow B_2$) понижает результативный признак в среднем с 10 до 4; при A_2 второй фактор ($B_1 \rightarrow B_2$), наоборот, повышает результативный признак в среднем с 2 до 8;

– анализ действия каждого такого фактора в отдельности, без совместного анализа действия обоих факторов, даёт ложное заключение о слабом, недостоверном влиянии или о полном отсутствии влияния ($\dot{\eta}^2_B = 0$) каждого из таких факторов в отдельности, хотя эти факторы могут иметь большую силу действия не только при определенной градации другого фактора;

– в высшей степени достоверным оказалось влияние каждого фактора в отдельности и их суммарного взаимодействия;

– влияние взаимодействия градаций оказалось очень малым и совершенно недостоверным;

– это значит, в исследовании не обнаружено зависимости влияния каждого фактора от того, при какой градации другого фактора он действовал.

АЛГОРИТМ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ВАРИАНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНОМ КОЛИЧЕСТВЕ ДАТ И ГРАДАЦИЙ (КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПРИЗНАКИ)

Количество дат по градациям II фактора пропорционально (см. п. 1).

Количество дат по вариантам равиое (см. п. 2).

Количество градаций по факторам разиое (см. п 3).

1. Пропорциональный комплекс (градации II фактора пропорционально равны по количеству дат).

Пример даи в табл. 32.

Таблица 32

Результаты испытаний

Варианты	Градации факторов		Повторение			$\sum V$	n
	I	II	1	2	3		
	A_1	B_1	25	27	-	52	2
		B_2	29	32	34	95	3
	A_2	B_1	29	32	–	61	2
		B_2	34	37	38	109	3

Таблица 33

Расчет сумм вариантов

I фактор	II фактор		ΣI	n_1	$\bar{X} = \Sigma I \ \ n_1$
	B_1	B_2			
4	52	95	147	5	29,4
A_2	61	109	170	5	34,0
ΣII	113	204	–	–	
n_2	4	6	–	10	–
$\bar{X} = \Sigma V \ \ n_2$	28,25	34,0	-	-	-

Дисперсии и степени свободы

$$C_1 = \sum \frac{\left(\sum I\right)^2}{n_1} - H_{\Sigma}, \quad C_1 = \frac{147^2}{5} + \frac{170^2}{5} - 1188, \quad H_{\Sigma} = \frac{\left(\sum V\right)^2}{N},$$

$$\nu_1 = r - 1, \quad \nu_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$C_2 = \sum \frac{\left(\sum II\right)^2}{n_2} - H_{\Sigma}, \quad C_2 = \frac{113^2}{4} + \frac{204^2}{6} - 1188,$$

$$\nu_2 = r_2 - 1, \qquad \nu_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$C_{1\,2} = C_x - C_1 - C_2, \nu_{1\,2} = \nu_1 \times \nu_2, \nu_{1\,2} = 1 \times 1 = 1.$$

Далее вычисления продолжают по алгоритму 7.

2. Количество дат по вариантам разное (табл. 34).

Таблица 34

Расчет вспомогательных величин

Варианты	Градации факторов		Повторение				$\sum V$	n	$\bar{x} = \frac{\sum V}{n}$	$\bar{x}^2$
	I	II	1	2	3	4				
	A_1	B_1	25	27	–	–	52	2	26,0	676
		B_2	29	32	34		95	3	31,7	1005
	A_2	B_1	29	32	32		93	3	31,0	961
		B_2	34	37	38	33	142	4	35,5	1260
		Σ	–			–	–	12	124,2	3902

$$\bar{x}_c = \frac{\sum \bar{x}}{r} = \frac{124,2}{4} = 31,05, \quad \bar{x}_c^2 = 31,05^2 = 964,1.$$

Среднее вариантов ($\bar{x}$) записывают в табл. 35.

Таблица 35

Расчет средних по вариантам

I фактор	II фактор		Σ I	n_1	$\bar{x}_1 = \frac{\sum \text{I}}{n_1}$
	B_1	B_2			
A_1	26,0	31,7	57,7	2	28,9
A_2	31,0	35,5	66,5	2	33,3
Σ II	57,0	67,2	–	–	–
n_2	2	2	–	–	–
$\bar{x}_2 = \frac{\sum \text{II}}{n_2}$	28,5	33,6	–	–	–

Примечание n_1 и n_2 количество средних.

Дисперсии и степени свободы

$$C_1 = N\left(\frac{\sum \bar{x}_1^2}{r_1} - \bar{x}_c^2\right) \times \delta, \quad \nu_1 = r_1 - 1; \quad C_2 = N\left(\frac{\sum \bar{x}_2^2}{r_2} - \bar{x}_c^2\right) \times \delta, \quad \nu_2 = r_2 - 1;$$

$$C_x' = N\left(\frac{\sum \bar{x}^2}{r} - \bar{x}_c^2\right);$$

$$C_{12} = C_x - C_1 - C_2, \quad \nu_{12} = \nu_1 \times \nu_2,$$

δ – коэффициент пропорциональности, равный $\frac{C_x}{C'_x}$.

$$C_1 = 12\left(\frac{28{,}9^2 + 33{,}3^2}{2} - 964{,}1\right) \times \delta, \quad \nu_1 = 2 - 1 = 1,$$

$$C_2 = 12\left(\frac{28{,}5^2 + 33{,}6}{2} - 964{,}1\right) \times \delta, \quad \nu_2 = 2 - 1 = 1;$$

$$C'_x = 12\left(\frac{3902}{4} - 964{,}1\right) = 136{,}8.$$

Далее вычисления продолжают по алгоритму 6.

3. Количество по факторам разное.

Непропорциональными (неравномерными) комплексами называются дисперсионные комплексы, в которых не соблюдается пропорциональность численностей вариантов. В непропорциональных комплексах дисперсия суммарного действия факторов не равна сумме дисперсий по факторам и дисперсии сочетания факторов. Между этими дисперсиями существует связь, зависящая от степени статистических связей, возникающих в непропорциональных комплексах между отдельными факторами вследствие нарушения пропорциональности Однако в непропорциональных комплексах не нарушается равенство $C_y = C_x + C_z$, так как расчет дисперсий в этом случае происходит по принципам однофакторного комплекса, а однофакторные комплексы всегда пропорциональны

При решении непропорциональных комплексов создаются затруднения не только при отыскании дисперсий, но также при определении степени влияния каждого фактора, так как сумма частных влияний не равна суммарному влиянию. Влияние каждого фактора определяется при помощи соответствующего корреляционного отношения.

В непропорциональных комплексах общее корреляционное отношение не состоит из сумм частных корреляционных отношений, так как имеется ещё слагаемое, которое не имеет реального смысла и носит условный характер.

Чтобы определить, как влияет каждый из факторов в непропорциональном комплексе, необходимо иметь единую структуру комплекса.

Одним из способов приведения непропорционального комплекса к единой структуре является способ его замены пропорциональным комплексом, в котором частоты осреднены по группам Когда такая замена произведена, комплекс решается по принципам пропорциональных комплексов в отношении C_y, C_x, C_z, но расчет $C_{1\,2}$ (C_{AB}), т е дисперсии сочетаний действия факторов, идет по другому. Пример приведен в табл. 36.

Таблица 36

Результаты испытаний

Варианты	Градации факторов		Повторение				$\sum V$	n
	I	II	1	2	3	4		
	A_1	B_1	25	27	–	–	52	2
		B_2	29	32	34	28	123	4
	A_2	B_1	29	32	32	–	93	3
		B_2	34	37	–	–	71	2
		B_3	23	27	27	25	102	4

В табл. 34 записывают суммы дат по градациям I фактора. Для A Σ I = 52 + 123 = 175, n = 2 + 4 = 6.

Таблица 37

Расчет средних по первому фактору

I фактор	Σ I	N	$\bar{x} = \frac{\sum \mathrm{I}}{n}$
A_1	175	6	29,2
A_2	266	9	29,6

Дисперсии и степень свободы

$$C_1 = \sum \frac{\left(\sum I\right)^2}{n_1} - H_\Sigma\,,\ \nu_1 = r_1 - 1,\ C_1 = \frac{175^2}{6} + \frac{266^2}{9} - H_\Sigma,\ \nu_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$C_2 + C_{12} = C_x - C_1,\ \nu = r - r_1;\ \nu = 5 - 2 = 3.$$

Далее вычисления необходимых величин продолжают по алгоритму 6.

РАБОТА 7. ПРОСТЕЙШИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ВЫБОРА УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ

Во многих случаях выбор уравнения регрессии производят на основе профессиональных знаний. Допустим, что изучают рост мужчин в зависимости от возраста. На основе знаний биологических законов роста можно сказать, что рост происходит приблизительно в течение двух десятилетий. Причем годовые приращения высоты до этого момента можно усреднить, получив, таким образом, линейную регрессию высоты на возраст. Однако за пределами указанного примерного возрастного порога прирост в высоту прекращается. Линия, характеризующая рост, принимает направление, параллельное оси абсцисс. Таким образом, если исследователю требуется найти регрессию роста на возраст за всю жизнь челоаека, очевидно, что для этого нужно выбрать не линейную регрессию.

Можно утверждать также на основе биологических знаний, что рост в высоту регрессирует с возрастом и у дереаьев. Здесь тоже имеется биологический определенный предел высоты, которого деревья достигают в некотором возрасте, после чего они либо совсем не прирастают, либо этот прирост существенно замедляется Следовательно, развитне высот деревьеа (как и древостоев) с их возрастом (при значительном диапазоне последнего) онисывается уравненнем иелинейного порядка.

Такая же, в общем, тенденция иаблюдается а регрессии высоты деревьев на диаметр. Объясняется это тем, что в толщину деревья растут до момента их отмирания. Здесь также независимый признак – днаметр, как и возраст, имеет положительное приращение а течеиие всей жизии, тогда как рост в высоту является иным.

Можно предсказать также на основе знаний биологни, что кривые, отражающне рост в высоту а саязи с возрастом н днаметром, будут отличаться друг от друга. Это обусловлено тем, что при одинаковом измеиенни высоты изменение возраста характеризуется равнымн приращениями в течение всей жизни. Приращение же диаметра неодинаково. В первые годы жизнн оно иебольшое, затем достигает максимума в молодые годы, после чего прогрессивно убывает до периода отмирания дерева. Здесь мы, характеризуем средиее поведеине роста, ие обращая внимания иа годовые или кратко периодные колебания прироста высоты или диаметра, которые возможны в связи с влияннем различиых факторов среды (но не биологических закоиов).

К настоящему времени накоплены знания о конкретных уравнениях регрессин для описания важнейших биологнческих явлеиий, подобных рассмотреным. Однако следует заметить, что при изучеиии многих явлений возиикают большие затрудиеиия в выборе подходящего уравиеиня регрессии. Даже установленне общей ее формы (прямолинейиа она или криволинейна) иа основе профессиоиальных знаний часто не может быть сделано. Статистические методы в таких случаях дают следующие основы для принятия решений о форме регрессин и выборе уравиеиия.

Размещеине точек на графике часто указывает на форму кривой. Теоретический анализ существа явления не дает аргументации, противоречащей этому выводу.

Действительно, для всходов сосны нет ограннчнвающих факторов к развитию обоих изучаемых признаков – длины стволиков и длины корней. В отношеиии регрессии длины стволиков и кориeй всходоа нли молодых растений можно сказать, что она линейна. Если точки на графике расположились так, что указывают на изгиб обобщающей их кривой, есть основания проверить гипотезу о линейности регрессии, т. е. рассчитать и оценить достоверность меры криволинейности, или решить этот вопрос на основе дисперсионного анализа.

Часто при исследованиях связи между признаками (как в данном пособии) регрессионный анализ следует за корреляционным или осуществляется вместе с ним, тогда определенные статистические заключения о линейности регрессии на основе t, но лучше на основе F, уже имеются.

Отметим однако, что сами по себе критерии не дают исчерпывающего ответа о выборе уравнения, а лишь о форме регрессии: прямолинейна она или криволинейна. Если получено указание, что связь прямолинейна, этого достаточно, чтобы перейти к следующему шагу регрессионного анализа. Указание на криволинейный характер регрессии обязывает вести дальнейший поиск функции среди многих функций этого вида. В таком случае следует испытать наиболее простые и доступные исследователю функции. Останавливают выбор на функции, дающей лучшее приближение к опытным данным, или наименьшее среднее квадратическое отклонение вычисленных данных.

Во многих приложениях удовлетворительную аппроксимацию опытных данных получают на основе парабол 2-й, 3-й и более высоких степеней, оценивая точность каждой из регрессий. При малом числе групп (классов) зависимой переменной y можно получить параболу с числом коэффициентов, равным числу групп, и проходящую через все точки, характеризующие групповые средние. Однако ценность регрессии в этом случае снижается. Кривая не выражает в таком случае закономерности связи, а отражает случайности выборочных наблюдений.

Криволинейный характер зависимости между переменными иногда удается заменить на прямолинейный путем преобразования x или y. Логарифмирование часто дает существенное уточнение выражения связи.

Логарифмические параболы вследствие растянутости осей вообще более гибки.

Наиболее эффективным методом проверки рациональных гипотез относительно выбора уравнений является дисперсионный анализ. Квалифицированный исследователь применит этот метод не только, когда имеет слабое представление о форме связи или совсем не имеет его, но и когда выбор базируется на хорошей профессиональной основе. Применяя метод в таком случае, он найдет количественную меру своей гипотезы или предположения. Следует отметить в связи с этим, что вариационный анализ – специальный, ничем не заменимый «инструмент» для проверки рациональных гипотез и нередко – для раскрытия таких свойств исследуемого объекта, о которых не имелось никаких определенных представлений

АЛГОРИТМ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ $\bar{y} = a + bx$

Корреляционная линейная зависимость между двумя величинами широко встречается в различного рода исследованиях. Так, например, в теории лесной таксации существует целый ряд такого рода зависимостей: 1) зависимость между объёмом бревна и квадратом диаметра в верхнем отрубе; 2) зависимость между объёмом ствола и квадратом диаметра на высоте груди – 1,3 м; 3) зависимость между диаметром ствола на высоте груди и диаметрами на относительных высотах по ступеням толщины; 4) связь между видовой высотой (*fH*) и высотой насаждения (*H*), 5) зависимость между толщиной коры на относительных высотах и диаметрами на высоте груди и целый ряд других примеров.

Для нахождения параметров корреляционного уравнения прямой рассмотрим зависимость между диаметрами на высоте груди (1,3 м) и диаметрами на половине высоты ствола сосны, взятых по ступеням толщины

Схема вычислений приведена в табл. 38.

Параметры уравнения находим по формулам

$$a = + \Sigma y \times T_1 - \Sigma x y \times T_2, \quad (1)$$

$$b = -\Sigma y \times T_2 + \Sigma x y \times T_3. \quad (2)$$

Таблица 38

Выравнивание эмпирического ряда высот сосны по уравнению прямой

Ступень толщины, см	№ п/п x	Диаметр на 0,5 *H*, эмпирические y	Произведения xy	Диаметр на 0,5 *H* выровненный $\bar{y}$
16	1	11,2	11,2	11,16
20	2	13,7	27,4	13,73
24	3	16,3	48,9	16,30
28	4	18,9	75,6	18,87
32	5	21,4	107,0	21,44
36	6	24,1	144,6	24,01
40	7	26,6	186,2	26,58
44	8	29,2	233,6	29,15
48	9	31,7	285,3	31,72
$N = 9$		$\Sigma = 193,1$	$\Sigma = 1119,8$	

Таблица 39

Значения коэффициентов Tn для вычисления уравнения прямой $\bar{y} = a + bx$

Число наблюдений	T_1	T_2	T_3
5	1, 1000000	0, 3000000	0, 10000000
6	0, 8666666	0, 2000000	0, 05714285
7	0, 7142857	0, 1428571	0, 03571428
8	0, 6071428	0, 1071429	0, 02380952
9	0, 5277777	0, 0833333	0, 01666666
10	0, 4666666	0, 0666667	0, 01212122
11	0, 4181818	0, 0545454	0, 00909090
12	0, 3787879	0, 0454545	0, 00699301
13	0, 3461538	0, 0384615	0, 00699301
14	0, 3186813	0, 0329670	0, 00549451
15	0, 2952361	0, 0285714	0, 00357143
16	0, 2750000	0, 0250000	0, 00294118

Подставляя значения Σy, Σxy в формулы (1, 2), а также значения коэффициентов Tn, которые берем из табл. 39, получим

$$a = +193{,}1 \times 0{,}52777 - 1119{,}8 \times 0{,}083333 = 8{,}59;$$

$$b = -193{,}1 \times 0{,}08333 + 1119{,}8 \times 0{,}016666 = 2{,}572$$

и уравнение будет

$$\bar{y} = 8{,}59 + 2{,}572 \times x;$$

$$D_{1/2} = 8{,}59 + 2{,}572 \times x,$$

где x – порядковый номер, начиная с принятой ступени толщины.

$D_{1/2} = 8{,}59 + 2{,}572 \times 5 = 21{,}44$ см у ступени толщины 32.

АЛГОРИТМ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА $\bar{y} = a + bx + cx^2$

Уравнение параболы второго порядка хорошо отражает связь между суммой площадей сечений насаждения (на высоте 1,3 м) и его средней высотой начиная с 20-летнего возраста, между средней высотой насаждения и его возрастом, а также между целым рядом других таксационных показателей.

Ход роста березы по высоте может быть выражен уравнением параболы второго порядка.

В табл. 40 приводим схему вычисления.

Параметры уравнения параболы находим по формулам

$$a = +\Sigma y \times T_1 - \Sigma xy \times T_2 + \Sigma x^2 y \times T_3; \quad (3)$$

$$b = -\Sigma y \times T_2 + \Sigma xy \times T_4 - \Sigma x^2 y \times T_5; \quad (4)$$

$$c = +\Sigma y \times T_3 - \Sigma xy \times T_5 + \Sigma x^2 y \times T_6. \quad (5)$$

Таблица 40

Выравнивание эмпирических рядов высоты березы

Возраст, A	№ п/п x	Средняя высота y	Произведение, xy	Произведение x^2y	Средняя высота по уравнению $\bar{y} = H$
20	1	10, 2	10,2	10,2	10,3
30	2	14, 0	28,0	56,0	13,9
40	3	17, 1	51,3	153,9	17,0
50	4	19,6	78,4	313,6	19,7
60	5	22, 1	110,5	552,5	22,0
70	6	23, 9	143,4	860,4	23,9
80	7	25, 3	177,1	1239,7	25,4
90	8	26, 3	210,4	1683,2	26,4
100	9	27, 2	244,8	2203,2	27,1
$N = 9$		$\Sigma_y = 185,7$	$\Sigma xy = 1054,1$	$\Sigma x^2y = 7072,7$	–

Подставляя значения Σy, Σxy, Σx^2y в формулы (3, 4, 5), а также значения коэффициентов Tn, которые берем из табл. 41, получаем параметры уравнения

$$a = +\,185{,}7 \times 1{,}6190476 - 1054{,}1 \times 0{,}6785711 + 7072{,}7 \times 0{,}0595238;$$
$$b = -\,185{,}7 \times 0{,}6785711 + 1054{,}1 \times 0{,}3413420 - 7072{,}7 \times 0{,}0324675;$$
$$c = +\,185{,}7 \times 0{,}0595238 - 1054{,}1 \times 0{,}0324675 + 7072{,}7 \times 0{,}0032476;$$
$$a = 6{,}37;\ b = +\,4{,}165;\ c = -\,0{,}2075.$$

Таблица 41

Значение коэффициентов Tn для вычисления уравнения параболы второго порядка $\bar{y} = a + bx + cx^2$

N	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
5	4,600000	3,3000000	0,500000	2,671428	0,4285711	0,0714280
6	3,465193	1,9528061	0,250000	1,369643	0,1875000	0,0267857
7	2,429162	1,2857142	0,142357	0,797619	0 0952381	0,0119114
8	1,946428	0,9107141	0,089285	0,505952	0 0535710	0,0059520
9	1,619048	0,6785711	0,059524	0,341342	0 0324675	0,0032426
10	1,383333	0,5250000	0,04167	0,241292	0 0208331	0,0018931
11	1,206062	0,4181618	0,03030	0,176923	0,0139860	0,0011655
12	1,068162	0,3409091	0,02273	0,133616	0,0097403	0,0007492
13	0,958042	0,2832168	0,01748	0,103397	0,0069930	0,0004995
14	0,868132	0,2390109	0,01374	0,075624	0,0051511	0,0003434
15	0,79341	0,20440	0,00899	0,065627	0,0038765	0,0002424
16	0,60059	0,14537	0,00734	0,044025	0,0024399	0,0001439

Зависимость между высотой и возрастом в исследуемых насаждениях может быть выражеиа уравнением пврвболы

$$\overline{H} = 6{,}37 + 4{,}165x - 0{,}2075x^2,$$

где x - порядковый иомер возрастиого периода.

Подставляя последовательно значения x, равные 1, 2, 3 и т.д., получим вероятные значения высот в 20-, 30-, 100-летнем возрасте березового древостоя.

АЛГОРИТМ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ КРИВОЙ $\overline{y} = a + b \log x$

Уравнеиие логарифмической кривой даниого типа часто применяется при исследовании соотношений диаметров и высот в иасаждении, при установлении средней высоты насаждения в зависимости от возраста, а также при установлении связи между другими таксационными элементами.

Определим корреляционное уравиение логарифмических парабол, отображающее зависимость между средней высотой березовых насаждений и их возрастом (табл. 42).

Параметры уравнения находим по формулам

$$a = + \Sigma y \times T_1 - \Sigma y \log x \times T_2; \quad (6)$$

$$b = - \Sigma y \times T_2 + \Sigma y \log x \times T_3. \quad (7)$$

Таблица 42

Исходные даяные и результаты выравниваяия высот древостоев в зависимости от возраста

Возраст, лет	Средняя высота y	№ п/п x	$\log x$	$y\log x$	Средняя H по уравнению $\overline{y} = H$
10	6,3	1	0,0000	0	5,5
20	12,6	2	0,3010	3,7926	13,5
30	17,5	3	0, 4771	8,3493	18,2
40	21,3	4	0,6020	12, 8247	21,5
50	24,3	5	0,6990	16,9857	24,1
60	26,6	6	0,7782	20,7001	26,2
70	28,4	7	0,8451	24,0008	28,0
80	29,8	8	0,9031	26,9124	29,6
90	31,0	9	0,9542	29,5802	30,9
100	31,8	10	1,0000	31,8000	32,1
Число наблюдений $n = 10$	$\Sigma y = 229{,}6$	–	Табл 44	$\Sigma y \log x =$ $= 174{,}9458$	–

Подставляя в формулы значения Σy, $\Sigma y \log x$, а также коэффициенты *Tn*, которые выписываются из табл. 43, получим

$$a = +229{,}6 \times 0{,}571768 - 174{,}9458 \times 0{,}719185 = 5{,}46;$$

$$b = -229{,}6 \times 0{,}719185 + 174{,}9458 \times 1{,}096358 = 26{,}678.$$

Уравнение зависимости между средней высотой березоаых древостоеа и возрастом будет

$$\bar{y} = 5{,}46 + 26{,}678 \log x,$$

где x – порядковый номер возрастного периода, или аозраст, выражеииый в десятках.

Таблица 43

Значение коэффициентов *Tn* для вычисления уравнения логарифмической кривой $\bar{y} = a + b \log x$

Число наблюдений	T_1	T_2	T_3
5	0,767507	1,364737	3,281912
6	0,714339	1,150036	2,414916
7	0,669976	0,996598	1,884218
8	0,632356	0,881300	1,530659
9	0,599982	0,791372	1,281053
10	0,571768	0,719185	1,096358
11	0,546911	0,659902	0,954977
12	0,524797	0,610295	0,844395
13	0,504955	0,568131	0,754084
14	0,487053	0,531857	0,680596
15	0,470769	0,500272	0,619327
16	0,455886	0,472515	0,567559

Таблица 44

Обыкновенные логарифмы чисел (1–40)

N	log*n*	*N*	log*n*	*N*	log*n*	*n*	log*n*
1	0,00000	11	0,04139	21	1,32222	31	1,49136
2	0,30103	12	1,07918	22	1,34242	32	1,50515
3	0,47712	13	1,11394	23	1,36173	33	1,51851
4	0,60206	14	1,14613	24	1,38021	34	1,53148
5	0,69897	15	1,17609	25	1,39794	35	1,54407
6	0,77815	16	1,20412	26	1,41497	36	1,55630
7	0,84510	17	1,23045	27	1,43136	37	1,56820
8	0,90309	18	1,25527	28	1,44716	38	1,57978
9	0,95424	19	1,27875	29	1,46240	39	1,59106
10	1,00000	20	1,30103	30	1,47712	40	1,60206

АЛГОРИТМ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ КРИВОЙ $\bar{y} = a + bx + c \log x$

Корреляционные уравнения этого типв примеияются при различного рода нсследованиях, когда при увеличении аргумента наблюдается замедляющееся увеличение функции, а также в случаях, когда необходимо удлинить логарифмическую кривую в горизонтальном направлении.

Связь между высотами и диаметрами по ступеням толщины в еловых насаждениях может быть выражена уравненнем логарифмической кривой указанного типа.

В табл. 45 приводим схему вычислений

Таблица 45

Исходные данные и результаты выравнивания высоты по ступеням толщины

Ступени толщины	Средняя высота, y	№ п/п x	Xy	$\log x$	$y \log x$	Средняя высота по уравнению
8	9	1	9	0	0	8,3
12	14	2	28	0,3010	4,2140	14,7
16	18	3	54	0,4771	8,5878	18,5
20	21	4	84	0,6021	12,6441	21,2
24	23	5	115	0 6990	16,0770	23,3
28	25	6	150	0,7782	19,4550	25,0
32	27	7	189	0,8451	22,8177	26,4
36	28	8	224	0,9031	25,2868	27,7
40	29	9	261	0,9542	27,6717	28,8
44	30	10	300	1,0000	30,0000	29,8
48	31	11	341	1 0414	32,2834	30,7
52	32	12	384	1,0792	34,5344	31,5
56	32	13	416	1,1139	35,6448	32,2
60	32	14	448	1,1461	36,6752	32,8
Число наблюдений $N = 14$	$\Sigma y = 351$		$\Sigma xy = 3003$	Табл 44	$\Sigma = \log x = 305,8919$	

Параметры уравнения находятся по формулам

$$a = \Sigma y \times T_1 + \Sigma xy \times T_2 + \Sigma y \log x \times T_3; \quad (8)$$

$$b = \Sigma y \times T_2 + \Sigma xy \times T_4 + \Sigma y \log x \times T_5; \quad (9)$$

$$c = \Sigma y \times T_3 + \Sigma xy \times T_5 + \Sigma y \log x \times T_6. \quad (10)$$

Подставим в формулы значения Σy, Σxy, $\Sigma y \log x$, а также значения числовых коэффициентов Tn, которые берутся из табл. 46.

Таблица 46

Значения коэффициентов Tn для вычисления уравнения логарифмической кривой
$\bar{y} = a + bx + c \log x$

N	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
5	1,592681	−1,249449	+5,648445	1,833772	−10,2244	60,18281
6	0,948530	−0,455206	+1,705638	0,902673	−5,57575	38,13241
7	0,714335	−0,147233	+0,032986	0,488744	3,41781	25,78522
8	0,708909	−0,024620	−0,808747	0,328225	2,52288	21,10363
9	0,603706	+0,032362	−1,060049	0,188534	1,57840	14,49139
10	0,593133	+0,055860	−1,220919	0,127800	1,15669	11,55947
11	0,592636	+0,065321	−1,315271	0,090802	0,88296	9,538609
12	0,593875	+0,067829	−1,303985	0,066683	0,69298	8,045282
13	0,592764	+0,066648	−1,282841	0,050138	0,55426	6,880639
14	0,593306	+0,064085	−1,250651	0,038719	−0,45361	5,995153
15	0,591671	+0,060653	−1,250651	0,030427	−0,37643	5,276434
16	0,589508	+0,057017	−1,216142	0,024329	−0,31688	4,694854

Получим

$$a = +351 \times 0{,}593306 + 3003 \times 0{,}064085 - 305{,}8919 \times 1{,}282841;$$
$$b = +351 \times 0{,}064085 + 3003 \times 0{,}038719 - 305{,}8919 \times 0{,}453616;$$
$$c = -351 \times 1{,}282841 - 3003 \times 0{,}453616 + 305{,}8919 \times 5{,}995153.$$
$$a = +8{,}29;\ b = +0{,}010;\ c = +21{,}3827.$$

Исходя из параметров a, b, c, формула будет иметь вид

$$y = 8{,}29 + 0{,}010\,x + 21{,}3827 \log x,$$

где x – порядковый номер ступени толщины.

АЛГОРИТМ 5. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ПРИВОДИМЫЕ К УРАВНЕНИЯМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПАРАБОЛ

Зависимости между признаками x и y, степенных функций вида $y' = a_0 x\beta$, где y' – функция или зависимая переменная, a_0, β – параметры уравнения, x – аргумент или независимая переменная, могут быть приведены к уравнению логарифмических парабол.

Рассмотрим процесс вычисления уравнения степенной функции на примере интерполяции зависимости площади листа и его длины (табл. 47).

Для нахождения параметров уравнения решаем систему двух уравнений

$$N \lg a_0 + \beta \Sigma \lg x = \Sigma \lg y, \qquad (11)$$

$$\lg a_0 \Sigma \lg x + \beta \Sigma (\lg x)^2 = \Sigma (\lg x \lg y), \qquad (12)$$

где N – число точек интерполируемого эмпирического ряда; a, β – искомые параметры уравнения. Подставляя в нормальное уравнение полученные суммы, получим

$$8 \lg a_0 + 9{,}2312\,\beta = 18{,}7756,$$

$$9{,}2312 \lg a_0 + 10{,}9140\,\beta = 21{,}9899,$$

откуда: $\beta = 2{,}0031$; $a_0 = 1{,}0854$; $\lg a_0 = 0{,}0356$ и $y^1 = 1{,}0854\,x^{2{,}0031}$, или в логарифмической форме: $\lg y^1 = 0{,}0356 + 2{,}0031 \lg x$.

Таблица 47

Вычисление параметров уравнения степенной функции

Длина листа, x	Площадь листа, см^2, y	$\lg x$	$\lg y$	$(\lg x)^2$	$\lg x \lg y$	y^1	$y-y^1 = \delta$	δ^2
8	67,6	0,903	1,830	0,8156	1,652	69,92	2,27	5,152
10	110,6	1,000	2,043	1,0000	2,043	109,32	1,28	1,638
12	153,4	1,079	2,185	1,1647	2,358	157,51	4,11	16,892
14	224,1	1,146	2,350	1,3135	2,693	214,49	9,61	92,352
16	297,5	1,204	2,473	1,4498	2,978	280,22	17,28	298,598
18	369,1	1,255	2,567	1,5758	2,222	354,89	14,26	203,347
20	460,4	1,301	2,613	1,6926	2,399	438,13	27,73	768,952
22	514,5	1,342	2,711	1,8020	2,639	530,40	15,90	252,810
Σ	2147,3	9,231	18,775	10,814	21,989	-	$\Sigma\,\delta^2 = 1639{,}7444$	

Ошибка между эмпирическими и выровненными данными

$$m_{yx} = \sqrt{\frac{1639{,}7444}{8-2}} = 16{,}53 \text{ см}^2,$$

говорит о том, что фактические данные совпадают с теоретической линией регрессии.

ЛИТЕРАТУРА

Данченко А.М Математические методы в лесоводстве· Учеб. пособие. Томск: ТГУ, 1996. 98 с.

Митропольский А К Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.

Плохинский Н.А. Биометрия. Новосибирск, 1961. 364 с.

Плохинский Н.А Алгоритмы биометрии. М.: МГУ, 1980. 150 с.

Снедекор Дж.У. Статистическкне методы в приложении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. М., 1961. 503 с.

Фишер Р.А. Статистические методы для исследователей. М.: Госстатидат, 1958. 268 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1П

Фрагмент таблицы случайных чисел

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1534	7106	2836	7873	5574	7545	7590	5574	1202	7712
6128	8993	4102	2551	0330	2358	6427	7067	9325	2454
6047	8566	8644	9343	9297	6751	3500	8754	2913	1258
0806	5201	5705	7355	1448	9562	7514	9205	0402	2427
9915	8274	4525	5695	5752	9630	7172	6988	0227	4264
2882	7158	4341	3463	1178	5786	1173	0670	0820	5067
9213	1223	4388	9760	6691	6861	8214	8813	0611	3131
8410	9836	3899	3683	1253	1683	6988	9978	8026	6751
9974	2362	2103	4326	3825	9079	6187	2721	1489	4216
3402	8162	8226	0782	3364	7871	4500	5598	9421	3816
8188	6596	1492	2139	8823	6878	0613	7161	0241	3834
3825	7020	1124	7483	9155	4919	3209	5959	2364	2555
9801	8788	6338	5899	3309	0807	0968	0539	4205	8257
5603	1251	6352	6467	0231	3556	2569	9446	4174	9219
0714	3757	0378	8266	8864	1374	6687	1221	0678	3714
4617	5652	7627	0372	8151	3668	1994	4402	2124	0016
6789	6279	7306	1856	7028	9043	7161	7526	6913	6396
6705	4978	8621	1790	4433	6298	0854	9127	3445	1111
3840	1086	0774	9241	9297	4239	1739	7734	0119	2436
7662	3939	2965	3273	0551	1645	8477	1877	5327	8629
7639	2868	4391	2950	7122	7325	9727	0080	7464	7947
3237	7203	4246	7329	7936	0065	4146	0866	4916	8648
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
5489	5583	3156	0835	1988	3912	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9255	7379	7124	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	1012	8250	2633
5759	3554	5080	9074	7001	6249	3224	6368	9102	2672
6303	6895	3371	3196	7231	2918	7380	0438	7547	2644
7351	5634	5323	2623	7803	8374	2191	0464	0696	9529
7068	7803	8832	5119	6350	0120	5026	3684	5657	0304
3613	1428	1796	8447	0503	5654	3254	7336	9536	1944
5143	4534	2105	0368	7890	2473	4240	8652	9435	1422
9815	5141	7649	8638	6137	8070	5345	4865	2456	5708
5780	1277	6316	1013	2867	9938	3930	3203	5696	1769
1187	0951	5991	5245	5700	5564	7352	0891	6249	6568
4184	2179	4554	9083	2254	2435	2965	5154	1209	7069
2916	2972	9885	0275	0144	8034	8122	3213	7666	0230
5524	1341	9860	6565	6981	9842	0171	2284	2707	3008
0146	5291	2354	5694	0377	5336	6460	9585	3415	2358
4920	2826	5238	5402	7937	1993	4332	2327	6875	5230
7978	1947	6380	3425	7267	7285	1130	7722	0164	8573
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4191	2976	0361	9334
1473	6938	4899	5348	1641	3652	0852	5296	4538	4456

Таблица 2П

Критические значения t (критерий Стьюдента)

Число степеней свободы v	Доверительные уровни, %			Число степеней свободы v	Доверительные уровни, %		
	95	99	99,9		95	99	99,9
1	12,700	63,657	–	22	2,074	2,812	3,792
2	4,303	9,925	31,598	23	2,069	2,807	3,767
3	3,182	5,841	12,41	24	2,064	2,797	3,745
4	2,776	4,604	8,610	25	2,060	2,787	3,725
5	2,571	4,032	6,859	26	2,056	2,779	3,707
6	2,447	3,707	5,959	27	2,052	2,771	3,690
7	2,365	3,499	5,405	28	2,048	2 763	3,674
8	2,306	3,355	5,041	29	2,045	2,756	3,659
9	2,262	3,250	4,781	30	2,042	2,750	3,646
10	2,228	3,169	4,587	35	2,030	2,724	3,591
11	2,201	3,106	4,437	40	2,021	2,704	3,551
12	2,179	3,055	4,318	45	2,014	2,690	3,520
13	2,160	3,012	4,221	50	2,008	2,678	3,496
14	2,145	2,977	4,140	55	2,004	2,669	3,476
15	2,131	2,947	4,073	60	2,000	2,660	3,460
16	2,120	2,921	4,015	70	1,994	2,648	3,435
17	2,110	2,898	3,965	80	1,989	2,638	3,416
18	2,101	2,878	3,922	90	1,986	2,631	3,402
19	2,093	2,861	3,883	100	1,982	2,625	3,390
20	2,086	2 845	3,850	120	1,980	2,614	3,373
21	2,080	2,831	3,815	∞	1,960	2,617	3,290
Число степеней свободы v	5%	1%	0,1%	Число степеней свободы v	5%	1%	0,1%
	Уровни значимости				Уровни значимости		

Таблица 3П

Минимальное число наблюдений в зависимости от варьирования данных при доверительном уровне $P_1 = 95\%$ и показателе точности 5%

Коэффициент вариации Cv, %	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5	5	5	5	5	5	6	8	10	12
10	15	19	22	26	30	35	39	44	50	55
20	61	68	74	81	89	96	104	112	121	129
30	138	148	157	167	178	188	199	210	222	234
40	246	258	271	284	298	311	325	340	354	369
50	384	400	416	432	448	465	482	499	517	535
60	553	572	591	610	630	649	670	690	711	732

Т а б л и ц а 4П

Стандартные значения критерия χ^2 (хи-квадрат)

Число степеней свободы v	Уровни значимости			Число степеней свободы v	Уровни значимости		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	3,841	6,635	10,827	21	32,671	38,932	46,797
2	5,991	9,210	13,815	22	33,924	40,289	48,268
3	7,815	11,345	16,268	23	35,172	41,638	49,728
4	9,488	13,277	18,465	24	36,415	42,980	51,179
5	11,070	15,086	20,517	25	37,652	44,314	52,620
6	12,592	16,812	22,457	26	38,885	45,642	54,052
7	14,067	18,475	24,322	27	40,113	46,963	55,476
8	15,507	20,090	26,125	28	41,337	48,278	56,893
9	16,919	21,666	27,877	29	42,557	49,588	58,302
10	18,307	23,209	29,588	30	43,773	50,892	59,703
11	19,675	24,725	31,264	32	46,2	53,5	62,4
12	21,026	26,217	32,909	34	48,6	56,0	65,2
13	22,362	27,688	34,528	36	51,0	58,6	67,9
14	23,685	29,141	36,123	40	55,8	63,7	73,4
15	24,996	30,578	37,697	50	67,5	76,2	86,7
16	26,296	32,000	39,252	60	79,1	88,4	99,6
17	27,587	33,409	40,790	70	90,5	100,4	112,3
18	28,869	34,805	42,312	80	101,9	112,3	124,8
19	30,144	36,191	43,820	90	113,1	124,1	137,1
20	31,410	37,566	45,315	100	124/3	135,8	149,4

Т а б л и ц а 5П

Количество пар значений, достаточное для достоверности выборочного коэффициента корреляции (N) $N = \frac{t^2}{z^2} + 3$

r	N			r	N		
	$B_1=0,95$	$B_2=0,99$	$B_3=0,999$		$B_1=0,95$	$B_2=0,99$	$B_3=0,999$
	$t_1=1,99$	$t_2=2,58$	$t_3=3,30$		$t_1=1,99$	$t_2=2,58$	$t_3=3,30$
1	2	3	4	5	6	7	8
01	38407	66503	108903	46	19	30	47
02	9603	16628	27228	47	18	29	45
03	4289	7392	12103	48	17	27	43
04	2403	4159	6809	49	16	26	41
05	1539	2263	4359	50	16	25	39
06	1069	1850	3028	51	15	24	37
07	787	1360	2225	52	15	23	36
08	604	1042	1704	53	14	22	34
09	477	824	1347	54	14	21	33
10	383	661	1081	55	13	20	32
11	317	548	896	56	13	20	30

Окончание табл. 5П

1	2	3	4	5	6	7	8
12	267	462	754	57	12	19	29
13	228	392	640	58	12	18	28
14	196	337	550	59	11	18	27
15	171	295	481	60	11	17	26
16	151	259	422	61	11	16	25
17	133	228	373	62	10	16	24
18	119	204	332	63	10	15	23
19	107	183	297	64	10	15	22
20	97	165	270	65	9	14	21
21	87	149	242	66	9	14	20
22	80	136	211	67	9	13	20
23	73	124	202	68	9	13	19
24	68	114	185	69	8	12	18
25	62	105	170	70	8	12	18
26	57	97	157	71	8	11	17
27	53	90	145	72	8	11	16
28	49	83	135	73	7	11	16
29	49	78	125	74	7	10	15
30	43	73	117	75	7	10	15
31	40	68	109	76	7	10	14
32	38	63	102	77	7	9	14
33	36	60	96	78	7	9	13
34	34	56	90	79	6	9	13
35	32	53	85	80	6	9	12
36	30	50	80	81	6	8	12
37	28	47	75	82	6	8	11
38	27	44	71	83	6	8	11
39	26	42	67	84	6	7	10
40	24	40	64	85	5	7	10
41	23	38	60	86	5	7	10
42	22	36	57	87	5	7	9
43	21	34	55	88	5	7	9
44	20	33	52	89	5	6	8
45	19	31	49	90	5	6	8

Таблица 6П

Функция $z = \ln \frac{1+r}{1-r}$

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
1	0,1003	0,1105	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2989
3	0,3095	0,3206	0,3317	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6467

Таблица 7П

Критическая значения выборочного показателя корреляции рангов r_s

Объём выборки N	Уровень значимости P		Объём выборки N	Уровень значимости P	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94		23	0,42	0,53
6	0,85		24	0,41	0,52
7	0,78	0,94	25	0,40	0,51
8	0,72	0,88	26	0,39	0,50
9	0,68	0,83	27	0,38	0,49
10	0,62	0,79	28	0,38	0,48
11	0,61	0,76	29	0,37	0,48
12	0,58	0,73	30	0,36	0,47
13	0,56	0,70	31	0,36	0,46
14	0,54	0,68	32	0,36	0,45
15	0,52	0,66	33	0,34	0,45
16	0,50	0 64	34	0,34	0,44
17	0,48	0,62	35	0,33	0,43
18	0,47	0,60	36	0,33	0,43
19	0,46	0,58	37	0,33	0,42
20	0,45	0,57	38	0,32	0,41
21	0,44	0,56	39	0,32	0,41
22	0,43	0,54	40	0,31	0,40

Таблица 8П

Коэффициенты корреляции на 5%-ном и 1%-ном уровне существенности

Число степ. свободы $\upsilon = n-2$	5%	1%	Число степ. свободы $\upsilon = n-2$	5%	1%	Число степ. свобод $\upsilon = n-2$	5%	1%
1	0,997	1,000	16	0,468	0,590	35	0,325	0,418
2	0,950	0,990	17	0,456	0,575	40	0,304	0,393
3	0,878	0,959	18	0,444	0,561	45	0,288	0,372
4	0,811	0,917	19	0,433	0,549	50	0,273	0,354
5	0,754	0,874	20	0,423	0,537	60	0,250	0,325
6	0,707	0,834	21	0,413	0,526	70	0,232	0,302
7	0,666	0,798	22	0,404	0,515	80	0,217	0,283
8	0,632	0,765	23	0,396	0,505	90	0,205	0,267
9	0,602	0,735	24	0,388	0,496	100	0,195	0,254
10	0,576	0,708	25	0,381	0,487	150	0,159	0,208
11	0,553	0,684	26	0,374	0,478	200	0,138	0,181
12	0,532	0,661	27	0,367	0,470	300	0,113	0,148
13	0,514	0,641	28	0,361	0,463	400	0,098	0,125
14	0,497	0,623	29	0,355	0,456	500	0,088	0,115
15	0,482	0,606	30	0,349	0,449	1000	0,062	0,081

Таблица 9П

Коэффициенты Q для получения достоверных 5%-ных разниц между группами при дисперсионном анализе

Число степеней свободы υ	Число вариантов								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18,0	26,7	32,8	37,2	40,5	43,1	45,1	47,3	49,1
2	6,09	8,28	9,80	10,9	11,7	12,4	13,0	13,5	14,0
3	4,50	5,88	6,83	7,51	8,04	8,47	8,85	9,18	9,46
4	3,93	5,00	5,76	6,31	6,73	7,06	7,35	7,60	7,83
5	3,61	4,54	5,18	5.64	5,99	6,28	6,52	6,74	6,93
6	3,46	4,34	4,90	5,31	5,63	5,89	6,12	6,32	6,49
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,35	5,59	5,80	5,99	6,15
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92
9	3,20	3,95	4,42	4,76	5,02	5,24	5,43	5,60	5,74
10	3,15	3,88	4,33	4,66	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60
11	3,11	3,82	4,26	4,58	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,40
13	3,06	3,73	4,15	4,46	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20
16	3,00	3,65	4,05	4,34	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15
17	2,98	3,62	4,02	4,31	4,52	4,70	4,86	4,99	5,11
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,83	4,96	5,07
19	2,96	3,59	3,98	4,26	4,47	4,64	4,79	4,92	5,04
20	2,95	3,58	3,96	4,24	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92
30	28,9	34,8	3,84	4,11	4,30	4,46	4,60	4,72	4,83
40	28,3	34,4	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,74
60	28,3	34,0	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65
120	28,0	33,6	3,69	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56
∞	277	33,2	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47

Таблица 10П

Первая функция нормированного отклонения $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38662	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443

Окончание табл. 10П

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08938	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

Таблица 11П

Значения критерия F при – P_1 = 95%

ν_2 меньшей	ν_1 – число степеней свободы большей дисперсии											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**12**	**16**	**24**	**50**	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,3	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Таблица 12П

Значения критерия F при $P_2 = 99\%$

ν_2 меньшей	ν_1 – число степеней свободы большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6234	6302	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,81	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84		2,47	2,24	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
180	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	2,13	1,92	1,66	1,33

Окончание табл. 12П

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	2,09	1,88	1,62	100
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	2,06	1,85	1,59	1,22
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	2,04	1,84	1,57	1,19
500	6РГ	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	2,03	1,83	1,56	1,16
1000	6,66	4,63	3,80	3,24	3,04	2,82	2,53	2,20	2,01	1,81	1,54	1,11
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

Таблица 13П

Значения критерия F при – P_3 = 99,9%

ν_2 меньшей дисперсии	ν_1 – число степеней свободы большей дисперсии									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	598144	610667	623497	636619
2	998 5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,5	999,5
3	167 5	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	130,6	128,3	125,9	123,5
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,00	47,41	45,77	44,05
5	47,04	36,61	33,20	31,09	29,75	28,84	27,64	26,42	25,14	23,78
6	35,51	27,00	23,70	21,90	20,81	20,03	19,03	17,99	16,89	15,75
7	29 22	21 69	18,77	17,19	16,21	15,52	14,63	13,71	12,73	11,69
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,04	11,19	10,30	9,34
9	22,86	16 39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,37	9,57	8,72	7,81
10	21,04	14 91	12 55	11,28	10,48	9,92	9,20	8,45	7,64	6,76
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,35	7,63	6,85	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	7,71	7,00	6,25	5,42
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,21	6,52	5,78	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	6,80	6,13	5,41	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,47	5,81	5,10	4,31
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,19	5,55	4,85	4,06
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	5,96	5,32	4,63	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	5,76	5,13	4,45	3,67
19	15 08	10,16	8,28	7,26	6,61	6,18	5,59	4,97	4,29	3,52
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,44	4,82	4,15	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,31	4,70	4,03	3,26
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,19	4,58	3,92	3,15
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,09	4,48	3,82	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	4,99	4,39	3,74	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	4,91	4,31	3,66	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	4,83	4,24	3,59	2,82
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	4,76	4,17	3,52	2,75
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,69	4,11	3,46	2,70
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,64	4,05	3,41	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,58	4,00	3,36	2,59
40	12,61	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,21	3,64	3,01	2,23
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	3,87	3,31	2,69	1,90
120	11,38	7,31	5,79	4,95	4,42	4,04	3,55	3,02	2,40	1,56
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,27	2,74	2,13	1,00

Таблица 14П

Логарифмы чисел (мантиссы)

Lg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0775
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	4304
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

П	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7581	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	6267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9413	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9528	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9774
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9443	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Таблица 15П

Антилогарифмы

Lg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1269	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442

Продолжение табл 15П

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2338	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	3793	2799	2805	2815
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3655	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064

Окончание табл. 15П

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	7887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6485	6501	6515	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7123	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977
Lg	0	L	2	3	4	5	6	7	8	9

Мантисы десятичных логарифмов

1. Нахождение логарифма числа:

– Находят характеристику, рааную количеству цифр перед запятой за минусом одной. Так, для цифры 6 характеристика равна 0; для 101 – 2. Если число меньше нуля, то характеристика равна количеству нулей перед первой значащей цифрой, включая и иуль перед запятой. Например, для числа 0,4 она равна 1; для 0,04 – 2; для 0,0005 – 4. Характеристика чисел меиьше нуля отрицательна.

– Находят мантису по значащим цифрам, не принимая во виимание запятую (и нули после запятой для чисел меньше нуля). Например, для числа 731; 7,31 и 0,00731 мантиса одна и та же и составляет 8639 (см. табл. 15П)

– К найденой мантисе добавляют апереди характеристику и получают логарифм числа. Например, lg 731 = 2, 8639; lg 7,31 =0,8639; lg 0,00731 = = – 3,8639.

2. Нахождение числа по логарифму:

– По мантисе логарифма находят значащие цифры. Так, для мантисы 6580 зиачащими являются цифры 455.

– Определяют место запятой по характеристике. Например, для логарифма 3,6580 число равио 4550; для 1,6580 – 45,5; для 3,6580 – 0,00455.

Таблица 16П

Перевод календарных дат в непрерывный ряд

Месяц											
III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	32	62	93	123	154	185	215	246	276	307	338
2	33	63	94	124	155	186	216	247	277	308	339
3	34	64	95	125	156	187	217	248	278	309	340
4	35	65	96	126	157	188	218	249	279	310	341
5	36	66	97	127	158	189	219	250	280	311	342
6	37	67	98	128	159	190	220	251	281	312	343
7	38	68	99	129	160	191	221	252	282	313	344
8	39	69	100	130	161	192	222	253	283	314	345
9	40	70	101	131	162	193	223	254	284	315	346
10	41	71	102	132	163	194	224	255	285	316	347
11	42	72	103	133	164	195	225	256	286	317	348
12	43	73	104	134	165	196	226	257	287	318	349
13	44	74	105	135	166	197	227	258	288	319	350
14	45	75	106	136	167	198	228	259	289	320	351
15	46	76	107	137	168	199	229	260	290	321	352
16	47	77	108	138	169	200	230	261	291	322	353
17	48	78	109	139	170	201	231	262	292	323	354

Окончание табл. 16П

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	49	79	110	140	171	202	232	263	293	324	355
19	50	80	111	141	172	203	233	264	294	325	356
20	51	81	112	142	173	204	234	265	295	326	357
21	52	82	113	143	174	205	235	266	296	327	358
22	53	83	114	144	175	206	236	267	297	328	359
23	54	84	115	145	176	207	237	268	298	329	360
24	55	85	116	146	177	208	238	269	299	330	361
25	56	86	117	147	178	209	239	270	300	331	362
26	57	87	118	148	179	210	240	271	301	332	363
27	58	88	119	149	180	211	241	272	302	333	364
28	59	89	120	150	181	212	242	273	303	334	365
29	60	90	121	151	182	213	243	274	304	335	(366)
30	61	91	122	152	183	214	244	275	305	336	–
31	-	92	–	153	184	–	245	–	306	337	–

Таблица 17П

Преобразование процентов в углы (arcsin $\sqrt{\%:100}$)

%	Десятые доли, %									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,0	1,8	2,6	3,1	3,6	4,0	4,4	4,8	5,1	5,4
1	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8	7,0	7,3	7,5	7,7	7,9
2	8,1	8,3	8,5	8,7	8,9	9,1	9,3	9,5	9,6	9,8
3	10,0	10,1	10,3	10,5	10,6	10,8	10,9	11,1	11,2	11,4
4	11,5	11,7	11,8	12,0	12,1	12,2	12,4	12,5	12,7	12,8
5	12,9	13,0	13,2	13,3	13,4	13,6	13,7	13,8	13,9	14,1
6	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,8	14,9	15,0	15,1	15,2
7	15,3	15,4	15,6	15,7	15,8	15,9	16,0	16,1	16,2	16,3
8	16,4	16,6	16,6	16,7	16,8	17,0	17,1	17,2	17,3	17,4
9	17,5	17,6	17,7	17,8	17,8	18,0	18,0	18,2	18,2	18,3
10	18,4	18,5	18,6	18,7	18,8	18,9	19,0	19,1	19,2	19,3
11	19,4	19,5	19,6	19,6	19,7	19,8	19,9	20,0	20,1	20,2
12	20,3	20,4	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8	20,9	21,0	21,0
13	21,1	21,2	21,3	21,4	21,5	21,6	21,6	21,7	21,8	22,0
14	22,1	22,1	22,1	22,2	22,3	22,4	22,5	22,6	22,6	22,7
15	22,8	22,9	23,0	23,0	23,1	23,2	23,3	23,3	23,4	23,6
16	23,6	23,7	23,7	23,8	23,9	24,0	24,0	24,1	24,2	24,3
17	24,4	24,4	24,5	24,6	24,6	24,7	24,8	24,9	25,0	25,0
18	25,1	25,2	25,2	25,3	25,4	25,5	25,6	25,6	25,7	25,8
19	25,8	25,9	26,0	26,1	26,1	26,2	26,3	26,4	26,4	26,5
20	26,6	26,6	26,7	26,8	26,9	26,9	27,0	27,1	27,1	27,2
21	27,3	27,4	27,4	27,5	27,6	27,6	27,7	27,8	27,8	27,9
22	28,0	28,0	28,1	28,2	28,2	28,3	28,4	28,4	28,5	28,6
23	28,7	28,7	28,8	28,9	28,9	29,0	29,1	29,1	29,2	29,3
24	29,3	29,4	29,5	29,5	29,6	29,7	29,7	29,8	29,9	29,9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
25	30,0	30,1	30,1	30,2	30,3	30,3	30,4	30,5	30,5	30,6
26	30,7	30,7	30,8	30,9	30,9	31,0	31,0	31,0	31,2	31,2
27	31,2	31,3	31,4	31,5	31,6	31,6	31,7	31,8	31,8	31,9
28	32,0	32,0	32,1	32,1	32,2	32,3	32,3	32,4	32,5	32,5
29	32,6	32,6	32,7	32,8	32,8	32,9	33,0	33,0	33,1	33,2
30	33,2	33,3	33,3	33,4	33,5	33,5	33,6	33,6	33,7	33,8
31	33,8	33,9	34,0	34,0	34,1	34,1	34,2	34,3	34,3	34,4
32	34,4	34,5	34,6	34,6	34,7	34,8	34,8	34,9	35,0	35,0
33	35,1	35,1	35,2	35,2	35,3	35,4	35,4	35,5	35,6	35,6
34	35,7	35,7	35,8	35,9	35,9	36,0	36,0	36,1	36,2	36,2
35	36,3	36,3	36,4	36,5	36,5	36,6	36,6	36,7	36,8	36,8
36	36,9	36,9	37,0	37,0	37,1	37,2	37,2	37,3	37,4	37,4
37	37,5	37,5	37,6	37,6	37,7	37,8	37,8	37,9	37,9	38,0
38	38,1	38,1	38,2	38,2	38,3	38,4	38,4	38,6	38,5	38,6
39	38,6	38,7	38,8	38,8	38,9	38,9	39,0	39,1	39,1	39,2
40	39,2	39,3	39,4	39,4	39,5	39,5	39,6	39,6	39,7	39,8
41	39,8	39,9	39,9	40,0	40,0	40,1	40,2	40,2	40,3	40,3
42	40,4	40,5	40,5	40,6	40,6	40,7	40,7	40,8	40,9	40,9
43	41,0	41,0	41,1	41,2	41,2	41,3	41,3	41,4	41,4	41,5
44	41,6	41,6	41,7	41,7	41,8	41,8	41,9	42,0	42,0	42,1
45	42,1	42,2	42,2	42,3	42,4	42,4	42,5	42,5	42,6	42,6
46	42,7	42,8	42,8	42,9	42,9	43,0	43,1	43,1	43,2	43,2
47	43,3	43,3	43,4	43,4	43,5	43,6	43,6	43,7	43,7	43,8
48	43,8	43,9	44,0	44,0	44,1	44,1	44,2	44,3	44,3	44,4
49	44,4	44,5	44,5	44,6	44,7	44,7	44,8	44,8	44,9	44,9
50	45,0	45,0	45,1	45,2	45,2	45,3	45,3	45,4	45,5	45,6
51	45,6	45,6	45,7	45,8	45,8	45,9	45,9	46,0	46,0	46,1
52	46,2	46,2	46,3	46,3	46,4	46,4	46,5	46,6	45,6	46,7
53	46,7	46,8	46,8	46,9	47,0	47,0	47,1	47,1	47,2	47,2
54	47,3	47,4	47,4	47,5	47,5	47,6	47,6	47,7	47,8	47,8
55	47,9	47,9	48,0	48,0	48,1	48,2	48,2	48,3	48,3	48,4
56	48,4	48,5	48,6	48,7	48,7	48,7	48,8	48,8	48,9	49,0
57	49,0	49,1	49,1	49,2	49,3	49,3	49,4	42,4	49,5	49,6
58	49,6	49,7	49,7	49,8	49,8	49,9	49,9	50,0	50,1	50,1
59	50,2	50,2	50,3	50,4	50,4	50,5	50,5	50,6	50,6	50,7
60	50,8	50,8	50,9	50,9	51,0	51,1	51,1	51,2	51,2	51,3
61	51,4	51,4	51,5	51,5	51,6	51,6	51,7	51,8	51,8	51,9
62	51,9	52,0	52,1	52,1	52,2	52,2	52,3	52,3	52,4	52,5
63	52,5	52,6	52,6	52,7	52,8	52,8	52,9	53,0	53,0	53,1
64	53,1	53,2	53,3	53,3	53,4	53,4	53,5	53,6	53,6	53,7
65	53,7	53,8	53,8	53,9	54,0	54,0	54,1	54,2	54,2	54,3
66	54,3	54,4	54,4	54,5	54,6	54,6	54,7	54,8	54,8	54,9
67	54,9	55,0	55,1	55,1	55,2	55,2	55,3	55,4	55,4	55,5
68	55,6	55,6	55,7	55,7	55,8	55,9	55,9	56,0	56,0	56,1
69	56,2	56,2	56,3	56,4	56,4	56,5	56,5	56,6	56,7	56,7
70	56,8	56,8	56,9	57,0	57,0	57,1	57,2	57,2	57,3	57,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
71	57,4	57,5	57,5	67,6	57,7	57,7	57,8	57,9	57,9	58,0
72	58,0	56,1	58,2	58,2	58,3	58,4	56,4	58,5	58,6	58,6
73	58,7	58,8	58,8	58,9	59,0	59,0	59,1	59,2	59,2	59,3
74	59,3	59,4	59,5	59,5	59,6	59,7	59,7	59,8	59,9	59,9
75	60,0	60,1	60,1	60,2	60,3	60,3	60,4	60,5	60,5	60,6
76	60,7	60,7	60,8	60,9	60,9	61,0	61,1	61,1	61,2	61,3
77	61,3	61,4	61,5	61,6	61,6	61,7	61,8	61,8	61,9	62,0
78	62,0	62,1	62,2	62,2	62,3	62,4	62,4	62,5	62,6	62,6
79	62,7	62,6	62,9	62,9	63,0	63,1	63,1	63,2	63,3	63,4
80	63,4	63,5	63,6	63,6	63,7	63,8	63,9	63,9	64,0	64,1
81	64,2	64,2	64,3	64,4	64,4	64,5	64,6	64,7	64,8	64,8
88	64,9	65,0	65,0	65,1	66,2	65,3	65,4	65,4	66,5	66,6
83	66,6	65,7	65,8	65,9	66,0	66,0	66,1	66,2	66,3	66,3
84	66,4	66,5	66,6	66,7	66,7	66,8	66,9	67,0	67,0	67,1
85	67,2	67,3	67,4	67,4	67,5	67,6	67,7	67,8	67,9	67,9
86	68,0	68,1	68,2	68,3	68,4	68,4	68,5	68,6	68,7	68,8
87	68,9	69,0	69,0	69,1	69,2	69,3	69,4	69,5	69,6	69,6
88	69,7	69,8	69,9	70,0	70,1	70,2	70,3	70,4	70,4	70,5
89	70,6	70,7	70,8	70,9	71,0	71,1	71,2	71,3	71,4	71,5
90	71,6	71,7	71,8	71,8	72,0	72,0	72,2	72,2	72,3	72,4
91	72,5	72,6	72 7	72,8	73,0	73,0	73,2	73,3	73,4	73,5
92	73,6	73,7	73,8	73,9	74,0	74,1	74,2	74,3	74,4	74,6
93	74,7	74,8	74,9	75,0	75,1	75,2	75,4	75,5	75,6	75,7
94	75,8	75,9	76,1	76,2	76,3	76,4	76,6	76,7	76,8	77,0
95	77,1	77,2	77,3	77,5	77,6	77,8	77,9	78,0	79,2	78,3
96	78,5	78,6	78,8	78,9	79,1	79,2	79,4	79,5	79,7	79,9
97	80,0	80,2	80,4	80,5	80,7	80,9	81,1	81,3	81,5	81,7
98	81,9	82,1	82,3	82,5	82,7	83,0	83,2	83,4	83,7	84,0
99	84,3	84,6	89,4	85,2	85,6	86,0	86,9	88,2	87,4	88,2
100	90,0	–	–	–	–	–	–	–	–	–

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Анатолий Матвеевич Данченко,
Матвей Анатольевич Данченко

АЛГОРИТМЫ БИОМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Учебное пособие

Редактор – Н А Афанасьева
Оригинал-макет – А И Лелоюр
Дизайн обложки – А В Бабенко

Подписано к печати 16 04 2009 г Формат 60 × 84/16
Бумага офсетная Гарнитура Times
Усл печ. л 7,44 Тираж 65 экз Заказ № 80

Отпечатано на оборудовании
редакционно-издательского отдела
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр Ленина, 36. Корп 4 Оф. 011
Тел. 8+(382-2)–52-98-49