МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата по направлениям
подготовки 010200 «Математика и компьютерные науки»,
010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 230700 «Прикладная информатика»,
222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,
011200 «Физика», 011800 «Радиофизика»,
221700 «Стандартизация и метрология»,
230400 «Информационные системы и технологии»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517 (075.8)
Г 959

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики и физики
Уральского технического института связи и информатики
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических
наук Н. И. Ильиных);
А. Г. Б а б е н к о, доктор физико-математических наук
(Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
УрО РАН)

Гурьянова, К.Н.

Г 959 Математический анализ : [учеб. пособие] / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 330 с.

ISBN 978-5-7996-1340-2

В пособии рассматриваются основные разделы теории пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных и их применение. Содержится большое число иллюстративных упражнений и задач, а также решенных задач – эталонов для самостоятельной работы студентов.

Для студентов и преподавателей физических и математических специальностей.

УДК 517 (075.8)

ISBN 978-5-7996-1340-2

Оглавление

Предисловие

Пособие предназначено студентам первого и второго курсов Института естественных наук (ИЕН) и Института математики и компьютерных наук (ИМКН) всех форм обучения и ориентировано прежде всего на рабочие планы и программы инженерного потока ИЕН и направления «Прикладная информатика» ИМКН. Оно также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, изучающих высшую математику и математический анализ.

Пособие содержит 25 разделов, охватывающих фундаментальные темы математического анализа: определение множества вещественных чисел, предел числовой последовательности, функции одной и нескольких переменных, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интеграл Римана, ряды, кратные и криволинейные интегралы, теория поля, ряды Фурье.

Материал оформлен и распределен таким образом, что читатель, будь то преподаватель или студент, легко сможет подготовить конспект для самостоятельной работы. Традиционный дедуктивный (с доказательствами) стиль изложения фундаментальных теоретических разделов направлен на создание добротной логической базы и необходимых знаний и навыков. Особенностью данного пособия является несколько неполный набор доказательств приводимых здесь теорем и утверждений, что позволяет отчасти облегчить первое знакомство с курсом математического анализа и создает удобный рабочий конспект. Разделы «Ряды», «Кратные и криволинейные интегралы», «Теория поля», на которые отводится мало аудиторных часов, содержат решения большого ряда примеров.

Выражаем благодарность А. Н. Борбунову, старшему преподавателю кафедры математического анализа и теории функций, за помощь в оформлении рукописи.

Надеемся, что предлагаемое пособие станет подспорьем в изучении трудного базового курса и поможет сформировать необходимые навыки самостоятельной работы.

Авторы

1. Элементы математической логики

Язык, на котором говорит математика, точен. Как любой язык, он содержит свои единицы. Такими единицами служат высказывания или утверждения. В русском языке высказыванию соответствует повествовательное предложение. Каждое утверждение в математике рассматривается с точки зрения его истинности или ложности. Например, предложение «*Земля вращается вокруг Солнца*» есть истинное высказывание, а предложение «*Число 6 делится на 4*» является ложным высказыванием. Предложение же «*Который час?*» вообще не является высказыванием.

Высказывания (утверждения) будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots$ Если высказывание A является истинным, то говорят, что оно принимает значение «*и*» – истина, и записывают: $A = и$. Если высказывание B является ложным, пишут: $B = л$.

Из высказываний можно получать новые высказывания с помощью следующих операций «и», «или», «не», называемых *булевыми*[1].

Определение 1.1. *Отрицанием* высказывания A называется такое высказывание, обозначаемое $\neg A$ (читается: «не A»), которое является истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно. Эту ситуацию можно изобразить с помощью *таблицы истинности*

A	$\neg A$
и	*л*
л	*и*

[1] В честь английского математика *Джорджа Буля* (1815–1864), считающегося отцом математической логики. Созданный им математический аппарат в соединении с двоичной системой счисления привел к созданию цифрового электронного компьютера.

Определение 1.2. *Конъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (читается: «и A, и B»), которое истинно, если истинны оба высказывания A и B, и ложно, если хотя бы одно из высказываний ложно, т. е. в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Определение 1.3. *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читается: «или A, или B»), которое ложно, если ложны оба высказывания A и B, и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Кроме того, для составления высказываний используется следующая операция.

Определение 1.4. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ (читается: «из A следует B» или «если A, то B»), которое ложно, если A истинно, а B ложно, и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \Rightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Другими словами, в математике из истинного утверждения можно получить только истинное, а из ложного может следовать как истинное, так и ложное высказывание.

Всем теоремам T в математике, как высказываниям, можно придать вид импликации двух утверждений:

$$T = (A \Rightarrow B).$$

Высказывание A называют *условием* теоремы T или тем, что дано в теореме, а высказывание B – *заключением* теоремы T или тем, что требуется доказать. При этом высказывание B называют *необходимым условием* для высказывания A, а высказывание A называют *достаточным условием* для высказывания B.

Пример 1.1. T = «все натуральные числа, делящиеся на 4, делятся на 2» или иначе: T = «если число x делится на 4, то число x делится на 2».

Здесь приведена импликация, которая истинна, и высказывание B = «число x делится на 2» есть необходимое условие для высказывания A = «число x делится на 4», а высказывание A является достаточным условием для высказывания B в этой теореме T.

Определение 1.5. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ (читается: «A эквивалентно B», или «A тогда и только тогда, когда B», или «A равносильно B», или «для A необходимо и достаточно B»), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно.

Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний.*

Основные формулы алгебры высказываний следующие:

1) $\neg(\neg A) = A$;
2) законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
3) законы де Моргана[2]:
   $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
   $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
4) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;
5) $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1.2. Докажем формулу 5). Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

[2] *Огастес де Морган* (1806–1871) – шотландский математик, логик, основоположник логической теории отношений.

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности докажите формулы 1)–4).

Следующие импликации носят названия:

$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*,
$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей.*

Справедлива формула:

$$\bigl(A \Rightarrow B\bigr) = \bigl((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\bigr),$$

которая служит основой для распространенного в математике доказательства методом «от противного». Действительно, левая часть формулы ложна тогда и только тогда, когда $A = и$, а $B = л$. Но и правая часть ложна тоже только в этом случае.

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 1.1: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A, потому что, как известно, существуют четные числа, не кратные четырем (например, 2).

Предикаты и кванторы

Определение 1.6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстановке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом.*

Пример 1.3. $A(x)$ = «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x. Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов.* Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*:

$\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»),

$\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 1.7. $\forall x : A(x)$ (читается: «*для всех x* $A(x)$») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определения, и ложно – в противном случае.

Пример 1.4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете (ФФ)», которое формально можно записать в виде:

$$\forall x \in \text{УрФУ} : \{\text{студент } x \text{ учится на ФФ}\},$$

есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записываемое в виде:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geqslant 0,$$

есть истинное высказывание.

Определение 1.8. $\exists\, x\ :\ A(x)$ (читается: «*существует* x, $A(x)$») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 1.5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде

$$\exists\, x :\ \{\text{девушка } x \text{ учится на физическом факультете}\}$$

есть истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 1 \leqslant 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall\, x\ :\ A(x)$. Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x, т. е. существует элемент x, для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg\big(\forall\, x :\ A(x)\big) = \big(\exists\, x : \neg A(x)\big).$$

Пример 1.6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg\big(\exists\, x :\ A(x)\big) = \big(\forall\, x :\ \neg A(x)\big).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

П р и м е р 1.7.

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall\, x:\ \{\exists\, y:\ [\forall\, z:\ A(x,y,z)]\}) = \\
&\qquad = \exists\, x:\ \neg\{\exists\, y:\ [\forall\, z:\ A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad = \exists\, x:\ \{\forall\, y:\ \neg[\forall\, z:\ A(x,y,z)]\} = \\
&\qquad\qquad = \exists\, x:\ \{\forall\, y:\ [\exists\, z:\ \neg A(x,y,z)]\}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что скобки и двоеточия можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.

2. Элементы теории множеств

2.1. Понятие множества

Понятие множества в математике рассматривается как первичное, неопределяемое понятие.

Под *множеством* будем понимать совокупность (или семейство, или собрание, или класс) объектов, обладающих определенным признаком. Например, множество деревьев в парке, множество звезд на небе, множество студентов в аудитории, множество натуральных чисел, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, множество треугольников на плоскости и т.д.

Объекты, обладающие этим признаком, называются *элементами множества*. Множества будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots$, а элементы этих множеств – строчными буквами $a, b, c, \ldots$. Множество *содержит* элементы, а элементы *принадлежат* множеству. Для обозначения принадлежности используется знак $\in$. Если a есть элемент множества A, то этот факт записывается так: $a \in A$. Запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A. Так, имеем $3 \in \mathbb{Z}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Например, множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ бесконечны, а множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ конечно. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\emptyset$. Запись

$$C = \{x \in B \mid P(x)\}$$

обозначает множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества B, которые обладают свойством $P(x)$.

Например, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ – множество тех действительных чисел, которые обладают свойством быть не меньше нуля и не больше единицы.

Определение 2.1. Множество Y называется *подмножеством* множества X, если любой элемент множества Y является элементом множества X. Это обозначается записью $Y \subseteq X$.

В кванторах это определение можно записать следующим образом:

$$\forall y \in Y : y \in X.$$

Например, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $Q \subseteq \mathbb{R}$.

Из определения подмножества следует, что всякое множество является подмножеством самого себя, а пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 2.1. Решим следующую простую задачу: найти все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, что это множество имеет восемь подмножеств: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$.

Определение 2.2. Множество X *равно* множеству Y, если любой элемент множества X является элементом множества Y и любой элемент множества Y является элементом множества X. Другими словами, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. На письме это обозначается обычным образом: $X = Y$.

Из определений следует, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пример 2.2. Множество корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

равно множеству $\{1, 2, 3\}$, а множество $\{51, 2, 3\}$ равно множеству $\{3, 2, 51, 2\}$.

Заметим, что, перечисляя элементы множества, принято записывать каждый из них только один раз. Подчеркнем, что по определению равенства неважно, в каком порядке перечисляются элементы.

2.2. Операции над множествами

Рассмотрим следующие операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение и разность. Эти операции называются *булевыми*. Установим основные свойства булевых операций.

Определение 2.3. Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда *пересечением* множеств X и Y называется множество

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\},$$

объединением множеств X и Y называется множество

$$X \bigcup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, если $X = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $Y = \{1, 3, 6, 9\}$, то $X \bigcap Y = \{6, 9\}$, а $X \bigcup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$.

Отметим основные свойства введенных операций:

1) $X \bigcap X = X$ – *идемпотентность пересечения*;

2) $X \bigcup X = X$ – *идемпотентность объединения*;

3) $X \bigcap Y = Y \bigcap X$ – *коммутативность пересечения*;

4) $X \bigcup Y = Y \bigcup X$ – *коммутативность объединения*;

5) $(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z)$ – *ассоциативность пересечения*;

6) $(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z)$ – *ассоциативность объединения*;

7) $X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z)$ – *дистрибутивность пересечения относительно объединения*;

8) $X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$ – *дистрибутивность объединения относительно пересечения*;

9) $X \bigcap \emptyset = \emptyset$;

10) $X \bigcup \emptyset = X$.

Доказательство отмеченных свойств продемонстрируем на примере тождества 8). Надо доказать, что любой элемент множества $X \bigcup (Y \bigcap Z)$ принадлежит множеству $(X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$, и обратно.

Пусть $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \bigcap Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, и поэтому a принадлежит их пересечению, т. е. правой части. Если же $a \in Y \bigcap Z$, то $a \in Y$ и $a \in Z$. Отсюда следует, что $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, т. е. a принадлежит и их пересечению.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $a \in (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$. Тогда $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Если же $a \notin X$, то из условий $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$ следует, что $a \in Y$ и $a \in Z$, а значит, $a \in Y \bigcap Z$, следовательно, $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. $\square$

Определение 2.4. Множество $\mathcal{E}$ называется *универсальным* для системы множеств $A, B, C, \ldots$, если каждое из множеств $A, B, C, \ldots$ является подмножеством множества $\mathcal{E}$.

Как видно из определения, универсальность множества является относительным понятием: для одной системы множеств данное множество будет универсальным, для другой – нет. Если рассматриваются числовые множества, то в качестве универсального нередко берут множество всех действительных чисел, если рассматриваются геометрические фигуры планиметрии, то в качестве универсального можно взять множество всех точек плоскости.

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{E}$ – универсальное множество для данной системы множеств, X – некоторое множество этой системы. *Дополнением* множества X называется множество $C_{\mathcal{E}}X$ (или просто CX) тех элементов универсального множества, которые не принадлежат X.

Например, если $X = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$, а универсальное множество – множество всех десятичных цифр, то $CX = \{0, 3, 5, 9\}$.

Справедливы равенства:

1) $X \bigcap \mathcal{E} = X$;
2) $X \bigcup \mathcal{E} = \mathcal{E}$;
3) $C\mathcal{E} = \emptyset$;
4) $C\emptyset = \mathcal{E}$.

Законы двойственности:

5) $C\big(X \bigcap Y\big) = CX \bigcup CY$;
6) $C\big(X \bigcup Y\big) = CX \bigcap CY$.

Домашнее задание. Доказать тождества 5) и 6).

Определение 2.6. Пусть X и Y – некоторые множества. *Разностью* множеств X и Y называется множество $X\backslash Y = \{x \,|\, x \in X \text{ и } x \notin Y\}$.

Например, если $X = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, а $Y = \{5, 6, 7, 8\}$, то $X\backslash Y = \{1, 3, 9\}$.

Разность легко выражается через введенные ранее операции. Действительно, нетрудно показать, что

$$X\backslash Y = X \bigcap CY.$$

Булевы операции полезно иллюстрировать рисунками, которые часто называются *диаграммами Эйлера–Венна*[3]. На этих диаграммах множество изображается в виде множества точек плоскости, ограниченного некоторой линией.

Например, на диаграммах рис. 2.1 и рис. 2.2 множества A и B представлены в виде двух овалов, универсальное множество – в виде прямоугольника, и изображены соответственно множества $A \bigcup B$ и $A \bigcap B$ (не заштрихованные) и их дополнения (заштрихованные).

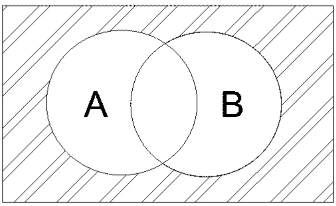


Рис. 2.1

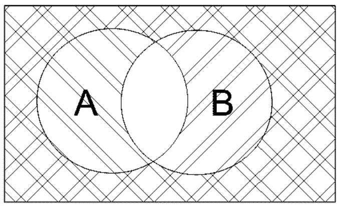


Рис. 2.2

[3] *Леонард Эйлер* (1707–1783) – выдающийся швейцарский и русский математик и механик. Его труды стали фундаментальными в таких областях, как математический анализ, дифференциальная геометрия, теория чисел, небесная механика, математическая физика, оптика, баллистика, кораблестроение, теория музыки и др. *Джон Венн* (1834–1923) – английский математик, логик, философ.

На диаграмме рис. 2.2 множества CA и CB заштрихованы разнонаправленными наклонными линиями, а их пересечение представлено в виде части прямоугольника, заштрихованной и теми, и другими линиями. Сравнение этих диаграмм иллюстрирует один из законов двойственности (*к какому?*).

2.3. Прямое (декартово) произведение

Определение 2.7. Пусть X и Y – некоторые множества. *Прямым (декартовым*[4]*) произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), первая компонента которых принадлежит X, а вторая принадлежит Y.

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X$ обозначают X^2.

Пример 2.3. Если $X = \{1, 2, 3\}$, а $Y = \{5, 7\}$, то

$$X \times Y = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}.$$

После введения системы координат на плоскости каждой точке соответствует упорядоченная пара действительных чисел (координаты этой точки), и каждая упорядоченная пара чисел однозначно определяет точку плоскости. Это показывает, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Операция прямого произведения двух множеств некоммутативна. Действительно, если X и Y – множества из примера 2.3, то $X \times Y$ не равно $Y \times X$.

[4] В честь *Рене́ Декарта* (1596–1650), французского математика, механика, философа, естествоиспытателя. Считается создателем аналитической геометрии. Дал понятие переменной величины и функции, ввел многие современные алгебраические обозначения.

Определение 2.8. Пусть X, Y, Z – некоторые множества. *Прямым (декартовым) произведением* $X \times Y \times Z$ называется множество всевозможных упорядоченных троек, первая компонента которых принадлежит X, вторая – Y, третья – Z, т. е.

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) | \, x \in X, \; y \in Y, \; z \in Z\}.$$

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X \times X$ обозначают X^3.

Например, если $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{4\}$, то

$$X \times Y \times Z = \{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4)\}.$$

Мы отмечали выше, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Трехмерное пространство можно отождествить с множеством $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогично можно ввести прямое произведение четырех, пяти и любого конечного числа множеств.

3. Метод математической индукции

Метод математической индукции – это удобный и эффективный инструмент в случае, когда необходимо доказать утверждения T_n, зависящие от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Состоит он в следующем.

Обозначим A множество всех натуральных чисел, при которых утверждения T_n истинны.

На первом шаге, называемом *база индукции* (Б. И.), показывают, что множество A не пусто, т. е. что хотя бы при каком-то n_0 утверждение T_{n_0} истинно.

На втором шаге (его называют *шаг индукции*, Ш. И.) из того, что утверждение T_n верно при $n = k$, доказывают, что оно верно при $n = k + 1$, т. е. показывают, что

$$k \in A \;\Rightarrow\; k + 1 \in A.$$

На последнем шаге, называемом *заключение индукции* (З. И.), делают вывод, что серия утверждений T_n верна при всех $n \geqslant n_0$.

Действительно, если утверждение T_{n_0} верно, то, по доказанному на шаге индукции, следует, что утверждение T_{n_0+1} тоже верно. Поскольку T_{n_0+1} верно, то верно и T_{n_0+2}, и т. д.

Пример 3.1. Докажем неравенство Бернулли[5]. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа одного знака и все больше -1. Тогда для любого натурального n

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \quad (3.1)$$

[5] Названо в честь *Иоанна Бернулли* (1667–1748), швейцарского математика и механика, одного из первых разработчиков математического анализа.

1. Б. И. Возьмем $n = 1$. Тогда в левой части получится один множитель – $1+x_1$, а в правой – два слагаемых: $1+x_1$. То есть имеет место равенство

$$1 + x_1 = 1 + x_1.$$

2. Ш. И. Пусть верно неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k. \quad (3.2)$$

Покажем, что тогда неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1} \quad (3.3)$$

также верно.

Умножим обе части неравенства (3.2) на $(1+x_{k+1}) > 0$:

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geqslant \\ \geqslant (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ = 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\ldots+x_kx_{k+1}.\end{aligned}$$

Последние k слагаемых справа неотрицательны, поскольку все числа x_i одного знака. Отбрасывая их, получим неравенство (3.3).

3. З. И. Неравенство (3.1) верно при любом $n \in \mathbb{N}$.

4. Действительные (вещественные) числа

4.1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей

Любое вещественное число a представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где из двух знаков $\pm$ берется какой-то один: плюс – для положительных чисел, минус – для отрицательных чисел (знак плюс обычно не пишется).

Рациональные числа представимы в виде периодических, а иррациональные числа – в виде непериодических бесконечных десятичных дробей. Некоторые рациональные числа представимы в виде конечной дроби или, что то же самое, в виде бесконечной дроби с нулем в периоде. Такие числа допускают второе представление – в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например:

$$1/2 = 0,500\dots0\dots = 0,5(0), \quad 1/2 = 0,49999\dots = 0,4(9).$$

При сравнении вещественных чисел будем пользоваться для таких рациональных чисел лишь первой формой записи (с нулем в периоде).

Правило сравнения вещественных чисел

Пусть $a = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, $b = b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ – произвольные вещественные числа, представленные в виде бесконечных десятичных дробей. Числа а и b называются *равными* $(a = b)$, если они имеют одинаковые знаки и справедливы равенства: $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В противном случае считается, что $a \neq b$.

При сравнении неравных чисел a и b рассмотрим три случая:

1) a и b – неотрицательные числа. Так как $a \neq b$, то существует натуральное n или $n = 0$ такое,что $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $a_n \neq b_n$. Будем считать, что $a > b$, если $a_n > b_n$, и что $a < b$, если $a_n < b_n$;

2) a – неотрицательное, b – отрицательное число. Будем считать, что $a > b$;

3) a и b – отрицательные числа. Будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$.

По определению $|a| = a$, если a – неотрицательное число, и равен $-a$, если a – отрицательное число.

4.2. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел

Пусть на непустом множестве X определены операции сложения (обозначается символом $+$), умножения (обозначается символом $\cdot$) и сравнения (обозначается символом $\leqslant$):

$$X, \ +, \ \cdot, \ \leqslant$$

Это значит, что для любых двух элементов $x, y \in X$ их сумма $x + y$ и произведение $x \cdot y$ снова являются элементами множества X, а также известно, каким отношением они связаны: $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Относительно введенных операций мы будем предполагать выполнение следующих аксиом.

I. Аксиомы сложения

1. *Существование нейтрального элемента*:

   $\exists\, 0 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x + 0 = x.$

2. *Существование обратного элемента*:

   $\forall\, x \in X \quad \exists\, x' \in X \quad x + x' = 0.$

3. *Ассоциативность сложения*:

   $\forall\, x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z).$

4. *Коммутативность сложения*:

   $\forall\, x, y \in X \quad x + y = y + x.$

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_3$, называется *группой* относительно операции сложения (*аддитивной группой*).

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_4$, называется *коммутативной (абелевой)* группой относительно операции сложения.

II. Аксиомы умножения

1. *Существование нейтрального элемента*:

$\exists\, 1 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x \cdot 1 = x.$

2. *Существование обратного элемента*:

$\forall\, x \in X \setminus \{0\} \quad \exists\, x' \in X \quad x \cdot x' = 1.$

3. *Ассоциативность умножения*:

$\forall\, x, y, z \in X \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

4. *Коммутативность умножения*:

$\forall\, x, y \in X \quad x \cdot y = y \cdot x.$

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{II}_1$–$\mathbf{II}_3$, называется *группой* относительно операции умножения (*мультипликативной группой*).

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{II}_1$–$\mathbf{II}_4$, называется *коммутативной (абелевой)* группой относительно операции умножения.

III. Связь между сложением и умножением

$\forall\, x, y, z \in X \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

Аксиома **III** носит название *дистрибутивность* или *распределительный закон*.

Множество X, удовлетворяющее аксиомам **I–III**, называется *полем*.

IV. Аксиомы порядка

1. $\forall\, x, y \in X \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$ или $y \leqslant x.$

2. *Рефлексивность*:

$\forall\, x \in X \quad x \leqslant x.$

3. *Антисимметрия*:

$$x \leqslant y \ \text{ и } \ y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

4. *Транзитивность*:

$$x \leqslant y \ \text{ и } \ y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z.$$

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{IV}_2$–$\mathbf{IV}_4$, называется *частично упорядоченным множеством.*

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{IV}_1$–$\mathbf{IV}_4$, называется *вполне упорядоченным множеством.*

V. Связь между сложением и отношением порядка

$$\text{Если } x \leqslant y, \text{ то } \forall\, z \in X \quad \Rightarrow \quad x + z \leqslant y + z.$$

VI. Связь между умножением и отношением порядка

$$\text{Если } x \leqslant y, \text{ то } \forall\, z \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leqslant y \cdot z.$$

VII. Аксиома непрерывности

Пусть $A \subset X$, $B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ и для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется $a \leqslant b$. Тогда найдется такой элемент $c \in X$, что $a \leqslant c \leqslant b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$.

Множество X, удовлетворяющее аксиомам **I**–**VII** и содержащее более одного элемента, называется *множеством действительных (вещественных) чисел*. Его принято обозначать $\mathbb{R}$.

Описанное выше множество десятичных дробей и операций с ними является одной из возможных моделей множества действительных чисел. Другим примером модели действительных чисел является числовая прямая.

4.3. Следствия из аксиом действительных чисел

Читателю полезно будет самостоятельно доказать некоторые, часто встречающиеся следствия из приведенной выше аксиоматики.

1. *Единственность нуля.*

2. *Единственность элемента, обратного относительно операции сложения.*

3. *Уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b - a$.*

4. *Единственность единицы.*

5. (Единственность элемента, обратного относительно операции умножения.) *Для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, существует только один элемент, обратный относительно операции умножения.*

Элемент, обратный x относительно умножения, будем обозначать $\frac{1}{x}$. Запись $\frac{y}{x}$ обозначает умножение y на элемент, обратный к x, т. е. $y \cdot \frac{1}{x}$.

6. *Для любого $a \neq 0$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.*

7. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $0 \cdot x = 0$.*

8. *Для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$-x = (-1) \cdot x,$$

где $(-x)$ – обратный к x, а (-1) – обратный к 1.

9. (Свойство плотности множества вещественных чисел.) *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ (для определенности $x \leqslant y$) найдется такой элемент $z \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant z \leqslant y$.*

10. *Неравенства* $x \leqslant y$, $x - y \leqslant 0$, $-y \leqslant x$, $0 \leqslant y - x$ *равносильны.*

Некоторые числовые множества

Вещественные числа можно изображать точками на координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*, а сами числа – *точками*, и при рассмотрении числовых множеств часто пользуются их геометрической интерпретацией. Напомним, что *координатной прямой* называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

$\mathbb{N}$ – *множество всех натуральных чисел*;

$\mathbb{Z}$ – *множество всех целых чисел*;

$\mathbb{Q}$ – *множество всех рациональных чисел*;

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множество всех вещественных чисел (числовая прямая);

$[a, b]$ – *сегмент* (*отрезок*), т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$a \leqslant x \leqslant b;$$

(a, b) – *интервал*, т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$;

$[a, b)$, $(a, b]$ – *полуинтервал* (*полусегмент*), т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$;

$(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ – *бесконечные интервалы*;

$(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ – *лучи.*

Сегмент, интервал, полуинтервал, луч, полупрямую и числовую прямую будем называть также *промежутком.*

ε-окрестностью точки x, где $\varepsilon > 0$, называется интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Обозначается $O_\varepsilon(x)$.

Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется *открытым*, если любая точка этого множества входит в него вместе с некоторой своей ε-окрестностью:

$$\forall\, x \in X\ \exists\, \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(x) \subseteq X.$$

Окрестностью точки x называется любое открытое множество, содержащее точку x. Обозначается $O(x)$.

Проколотой окрестностью (ε-окрестностью) точки x называется множество окрестность (ε-окрестность) с удаленной из нее точкой x:

$$\check{O}(x) = O(x) \setminus \{x\} \quad (\check{O}_\varepsilon(x) = O_\varepsilon(x) \setminus \{x\}).$$

Упражнение 1. Доказать, что интервал – открытое множество.

Точка x называется *внутренней точкой множества* X, если она входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью:

$$\exists\, O(x) \subseteq X.$$

Тогда открытое множество можно определить как множество, все точки которого – внутренние.

Точка x называется *внешней точкой множества* X, если найдется окрестность точки x, не пересекающаяся с множеством X:

$$\exists\, O(x) \;\; O(x) \cap X = \emptyset.$$

Точка x называется *граничной точкой множества* X, если в любой окрестности точки x найдутся точки, принадлежащие X, и точки, не принадлежащие X:

$$\forall\, O(x) \quad O(x) \cap X \neq \emptyset \;\text{ и }\; O(x) \cap CX \neq \emptyset.$$

Точка x называется *изолированной точкой множества* X, если найдется окрестность точки x, в которой нет других точек множества X, кроме точки x.

Точка x называется *предельной точкой множества* X, если в любой окрестности точки x найдется бесконечно много точек множества X. Множество всех предельных точек множества X обозначается X'.

Другое определение: точка x называется *предельной точкой множества* X, если в любой проколотой окрестности точки x найдется хотя бы одна точка множества X:

$$\forall\, O(x) \quad \check{O}(x) \cap X \neq \emptyset.$$

Упражнение 2. Доказать, что эти определения предельной точки равносильны.

Точка x называется *точкой прикосновения множества* X, если в любой окрестности точки x найдется хотя бы одна точка множества X:

$$\forall\, O(x) \quad O(x) \cap X \neq \emptyset.$$

Совокупность всех конечных точек прикосновения множества X называется *замыканием множества* X. Обозначается $\overline{X}$.

Очевидно, что $X \subseteq \overline{X}$ и $X' \subseteq \overline{X}$.

Множество X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои конечные предельные точки, т. е. $X' \subseteq X$.

Другое определение замкнутого множества: множество X называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. $X = \overline{X}$.

Упражнение 3. Доказать, что эти определения замкнутого множества равносильны.

Упражнение 4. Доказать, что дополнение открытого множества есть множество замкнутое и дополнение замкнутого множества есть множество открытое.

5. Полнота числовой прямой

5.1. Ограниченные множества действительных чисел

Определение 5.1. Непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если найдется такое действительное число, что все элементы множества X больше или равны этому числу, т. е.

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \geqslant a.$$

При этом число a, ограничивающее множество X снизу, называется *нижней границей множества* X.

Непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если найдется такое действительное число, что все элементы множества X не превосходят этого числа, т. е.

$$\exists\, b \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \leqslant b.$$

При этом число b, ограничивающее множество X сверху, называется *верхней границей множества* X.

Понятно, что если a – нижняя граница множества X, то число $a-1$ также будет нижней границей X, равно как и $a-2$ и любое число, меньшее a. То есть если множество ограничено снизу, то оно имеет бесконечно много нижних границ. Аналогично, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних границ.

Определение 5.2. Наибольшая из всех нижних граней множества X называется *точной нижней гранью множества* X и обозначается $\inf X$ (читается: *инфимум* X).

Если ввести множество

$$Y = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ – нижняя граница множества } X\},$$

то определение точной нижней грани может быть сформулировано следующим образом: $m = \inf X$, если

1) $m \in Y$;
2) $\forall\, a \in Y \quad a \leqslant m$.

Аналогичным образом определяется точная верхняя грань множества.

Определение 5.3. Наименьшая из всех верхних граней множества X называется *точной верхней гранью множества* X и обозначается $\sup X$ (читается: *супремум* X).

Если ввести множество

$$Z = \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ – верхняя граница множества } X\},$$

то определение точной верхней грани может быть сформулировано следующим образом: $M = \sup X$, если

1) $M \in Z$;
2) $\forall\, b \in Z \quad b \geqslant M$.

Определения инфимума и супремума множества X могут быть даны и в терминах элементов самого множества X, без привлечения дополнительных множеств Y и Z.

Определение 5.2′. $m = \inf X$, если

1) $\forall\, x \in X \quad m \leqslant x$;
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X \quad x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Первое условие этого определения говорит о том, что m является нижней границей множества X, а второе – что эта граница наибольшая, поскольку попытка увеличить число m приводит к тому, что это увеличенное число уже не ограничивает все элементы множества X снизу.

Аналогично – для супремума.

Определение 5.3$'$. $M = \sup X$, если

1) $\forall\, x \in X \;\; x \leqslant M$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x_\varepsilon \in X \;\; x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Определение 5.4. Множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу, т. е.

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in X \;\Rightarrow\; a \leqslant x \leqslant b.$$

Множество называется *неограниченным*, если оно неограничено хотя бы с одной стороны (сверху или снизу).

Теорема 5.1. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань, причем только одну.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, т. е. найдется такое число $b \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant b$ для любого $x \in X$. Рассмотрим множество

$$Z = \{b \in \mathbb{R} : \; b \text{ – верхняя граница множества } X\}.$$

Тогда

$$\forall\, x \in X \;\; \forall\, b \in Z \;\Rightarrow\; x \leqslant b.$$

Отсюда, по аксиоме непрерывности **VII**, найдется такое число $M \in \mathbb{R}$, что

$$x \leqslant M \leqslant b, \quad x \in X, \; b \in Z.$$

Это найденное число и будет супремумом множества X. Действительно, из левой части этого неравенства следует, что любой элемент множества X не превосходит числа M, что является определением верхней грани. Поскольку правая часть этого неравенства справедлива для любого $b \in Z$, это означает, что M не превосходит любой верхней грани, т. е. является наименьшей из всех верхних граней. По определению это означает, что $M = \sup X$.

Докажем единственность. От противного: предположим, что $M_1 = \sup X$ и $M_2 = \sup X$. Поскольку M_1 — точная верхняя грань, а M_2 — верхняя грань множества X (по определению точная верхняя грань сама является верхней гранью), мы получаем неравенство

$$M_1 \leqslant M_2.$$

Теперь, наоборот, посмотрим на M_1 как на одну из верхних граней, а на M_2 — как на наименьшую из всех верхних граней и получим

$$M_2 \leqslant M_1.$$

Их этих двух неравенств, по аксиоме антисимметрии $\mathbf{IV}_3$, следует, что $M_1 = M_2$, т. е. точная нижняя грань только одна.

Доказательство существования и единственности точной нижней грани предлагается провести самостоятельно по аналогии в качестве упражнения. $\square$

Заметим, что точные грани могут как принадлежать множеству, так и не принадлежать ему. Например, если $X = [0, 1)$, то $\inf X = 0$ и принадлежит X, а $\sup X = 1$ и не принадлежит X.

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то пишут

$$\sup X = +\infty \quad (\inf X = -\infty).$$

5.2. Принцип Архимеда и его следствия

Лемма 5.1. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество множества целых чисел имеет максимальный (минимальный) элемент.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset \mathbb{Z}$ ограничено снизу. Тогда по теореме о существовании точной нижней грани (теорема 5.1) оно имеет инфимум, обозначим его m. По определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент x_ε множества X такой, что $x_\varepsilon < m + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $x_1 \in X$, удовлетворяющий неравенству

$$x_1 < m + 1. \tag{5.1}$$

Указанный элемент и есть минимальный в множестве X. Действительно, если предположить, что в X найдется элемент, меньший, чем x_1, то число $x_1 - 1$ будет принадлежать X. Но поскольку m ограничивает снизу все множество X, для числа $x_1 - 1$ также выполняется неравенство

$$x_1 - 1 \geqslant m \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \geqslant m + 1.$$

Последнее неравенство противоречит условию (5.1). Следовательно, наше предположение неверно и x_1 – минимальный элемент в множестве X. $\square$

Теорема 5.2 (принцип Архимеда[6]). *Пусть $h > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что*

$$(k-1)h \leqslant x < kh.$$

[6] *Архимед* (ок. 287–212 до н.э.) – величайший древнегреческий математик и механик, уроженец г. Сиракузы на о. Сицилия.

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим $\frac{x}{h} \in \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение множество

$$Y = \left\{ p \in \mathbb{Z} \,|\, p > \frac{x}{h} \right\}.$$

Введенное множество ограничено снизу и является подмножеством $\mathbb{Z}$. Тогда, в силу леммы, оно имеет минимальный элемент:

$$\exists\, k = \min Y.$$

Тогда, поскольку k – элемент Y,

$$k > \frac{x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x < kh.$$

Покажем, что $x \geqslant (k-1)h$. От противного: пусть

$$x < (k-1)h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{h} < k-1,$$

где $k - 1 \in \mathbb{Z}$. Тогда мы получаем, что число $k-1$ также принадлежит множеству Y, но это означает, что k – не минимальный элемент. Получили противоречие. □

Следствие 5.1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Доказательство. В формулировке принципа Архимеда положим $x = 1$ и $h = \varepsilon$. Тогда, согласно принципу Архимеда, найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $1 < n\varepsilon$. Отсюда следует, что n – положительное, а значит, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, получили, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Следствие 5.2. *Пусть $x \geqslant 0$. Если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $x < \varepsilon$, то $x = 0$.*

Доказательство. От противного: пусть $x > 0$. Тогда по следствию 5.1 найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < \frac{1}{n} < x.$$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Тогда для него имеем $x > \varepsilon$, что противоречит условию. $\square$

Следствие 5.3.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a < b) \quad \exists\, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad a < \frac{m}{n} < b.$$

Доказательство. Для числа $b - a > 0$, по следствию 5.1 найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < \frac{1}{n} < b - a. \tag{5.2}$$

В формулировке принципа Архимеда положим $x = a$ и $h = \frac{1}{n}$. Тогда найдется $m \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}.$$

Покажем, что $\frac{m}{n} < b$. От противного: пусть $\frac{m}{n} \geqslant b$, тогда

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$b - a \leqslant \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n},$$

что противоречит условию (5.2). $\square$

Следствие 5.4.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad k \leqslant x < k+1.$$

Доказательство. Достаточно в формулировке принципа Архимеда взять $h = 1$. $\square$

Определение 5.5. Число $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию

$$k \leqslant x < k+1,$$

называется *целой частью числа x.*

Принцип Кантора[7]

Определение 5.6. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $x_n \in \mathbb{R}$, то совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, а число x_n называется *n-м элементом* последовательности.

Определение 5.7. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *вложенной*, если

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

[7] *Георг Кантор* (1845–1918) – немецкий математик и мыслитель, создатель теории множеств.

Определение 5.8. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; b_n - a_n < \varepsilon.$$

(В этом случае говорят, что длины отрезков стремятся к нулю.)

Лемма 5.2 (о вложенных стягивающихся отрезках). *Любая последовательность вложенных стягивающихся отрезков имеет общую точку, и притом только одну.*

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n < b_n$, так как левый конец отрезка меньше правого. Покажем, что

$$a_n < b_m, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

От противного: предположим, найдутся такие $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant b_m$. Тогда для отрезков с этими номерами получим

$$a_m < b_m \leqslant a_n < b_n.$$

То есть ни один из отрезков $[a_n, b_n]$ и $[a_m, b_m]$ не вложен в другой. Это противоречит условию вложенности отрезков (для вложенной последовательности отрезок с б*о*льшим номером лежит в отрезке с меньшим номером).

Итак, условие (5.3) выполнено. Тогда по аксиоме непрерывности действительных чисел (аксиома **VII**) найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $n = m$ имеем

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что точка c принадлежит каждому из отрезков $[a_n, b_n]$, следовательно, принадлежит их пересечению:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Покажем, что общая точка – одна. От противного: пусть

$$c_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \qquad c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Рассмотрим $|c_1 - c_2| \geqslant 0$. Поскольку точки c_1, c_2 лежат в каждом отрезке $[a_n, b_n]$, расстояние между ними не превосходит длины отрезка:

$$0 \leqslant |c_1 - c_2| \leqslant b_n - a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По условию последовательность отрезков стягивающаяся, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; b_n - a_n < \varepsilon.$$

Если выбрать $n > N(\varepsilon)$, то получим

$$0 \leqslant |c_1 - c_2| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon.$$

Согласно следствию 5.2 из принципа Архимеда, это означает, что $|c_1 - c_2| = 0$, т. е. $c_1 = c_2$. $\square$

Принцип предельной точки

Теорема 5.3 (теорема Больцано[8]–Вейерштрасса[9] для множеств)**.** *Любое ограниченное бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. X – ограничено, т. е. найдутся два числа a и b такие, что

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad x \in X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq [a, b].$$

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и рассмотрим две его половинки: $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Множество X – бесконечное, поэтому возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае выберем, для определенности, левый отрезок и обозначим его $[a_1, b_1]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и его обозначим $[a_1, b_1]$.

Таким образом, мы получили

$$[a_1, b_1] \subset [a, b], \quad d_1 = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

[8] *Бернард Больцано* (1781–1842) – чешский математик, философ, теолог. Автор первой строгой теории вещественных чисел, один из основоположников теории множеств.

[9] *Карл Вейерштрасс* (1816–1897) – знаменитый немецкий математик. Разработал систему обоснования математического анализа на основе построенной им теории вещественных чисел. Основные исследования посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре.

и $[a_1, b_1]$ содержит бесконечное число элементов множества X. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и рассмотрим две его половинки: $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Множество X – бесконечное, поэтому снова возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае снова выберем левый отрезок и обозначим его $[a_2, b_2]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и его обозначим $[a_2, b_2]$.

Таким образом, мы получили

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b], \quad d_2 = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

и $[a_2, b_2]$ содержит бесконечное число элементов множества X. И так далее.

На n-м шаге разделим отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ пополам и рассмотрим две его половинки. Снова, в силу бесконечности множества X, возможны два случая:

1) в каждом из отрезков $[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]$, $[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]$ лежит бесконечное число элементов множества X;

2) в одном из отрезков $[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]$, $[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]$ лежит бесконечное число элементов множества X.

В первом случае снова выберем левый отрезок и обозначим его $[a_n, b_n]$. Во втором случае выберем тот отрезок, который содержит бесконечное число элементов множества X, и его обозначим $[a_n, b_n]$.

Таким образом, мы получим

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b],$$

$$d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

и $[a_n, b_n]$ содержит бесконечное число элементов множества X.

Этот процесс не прервется, поскольку множество X содержит бесконечное число элементов. Тогда мы получим последовательность вложенных отрезков. Докажем, что она стягивающаяся. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Положим $N = \max\{[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}] + 1, 1\}$. Такой выбор гарантирует нам, что $N \in \mathbb{N}$ и

$$\forall\, n > N \quad \Rightarrow \quad n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

По лемме о вложенных стягивающихся отрезках

$$\exists\, c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Покажем, что построенная точка c – предельная точка множества X. Возьмем произвольную окрестность точки c, $O(c)$, и впишем в нее симметричную ε-окрестность:

$$O_\varepsilon(c) \subseteq O(c).$$

Для этого ε, в силу того, что последовательность отрезков – стягивающаяся,

$$\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; b_n - a_n < \varepsilon.$$

Зафиксируем $n_0 > N(\varepsilon)$, тогда

$$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset O_\varepsilon(c).$$

По построению отрезок $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ содержит бесконечное число элементов множества X. Таким образом, получили, что в любой окрестности точки c лежит бесконечное число элементов множества X, что, по определению, означает, что точка c – предельная точка множества X. $\square$

6. Предел числовой последовательности

Если каждому натуральному n поставлено в соответствие число $x_n \in \mathbb{R}$, то совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, а число x_n называется *n-м элементом* последовательности.

6.1. Понятие предела последовательности

Определение 6.1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ *при* $n \to \infty$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что a – предел последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, обозначается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Определение также может быть сформулировано на языке окрестностей:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; x_n \in O_\varepsilon(a).$$

Это условие означает, что в любой окрестности числа a находятся все элементы последовательности, кроме, может быть, конечного числа. Можно сказать так: за пределами ε-окрестности числа a могут находиться только элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}$.

П р и м е р 6.1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. По определению предела последовательности надо по любому числу $\varepsilon > 0$ найти такое число N, чтобы для любых $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем его левую часть:

$$\left|\frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^3+14n+6-2n^3-5n-4}{4n^3+10n+8}\right| = \frac{9n+2}{4n^3+10n+8}.$$

Заметим, что

$$\frac{9n+2}{4n^3+10n+8} \leqslant \frac{11n}{4n^3} = \frac{11}{4n^2}.$$

Если число N выбрать так, чтобы для $n > N$ выполнялось неравенство $\frac{11}{4n^2} < \varepsilon$, то тем более для этих n будет выполняться неравенство $\frac{9n+2}{4n^3+10n+8} < \varepsilon$.

Неравенство $\frac{11}{4n^2} < \varepsilon$ справедливо, начиная с $n > \sqrt{\frac{11}{4\varepsilon}}$. Таким образом, в качестве N можно взять целую часть числа $\sqrt{\frac{11}{4\varepsilon}}$.

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует число a такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т. е.

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

6.2. Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится, то ее предел единственный.*

Доказательство проведем от противного. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a < b = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, тогда $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$ в силу выбора ε. По определению сходимости, для выбранного ε

$$\exists\, N_1 : \quad \forall\, n > N_1 \quad x_n \in O_\varepsilon(a),$$

$$\exists\, N_2 : \quad \forall\, n > N_2 \quad x_n \in O_\varepsilon(b).$$

Следовательно, для $n > N_1 + N_2 \quad x_n \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b)$, что означает непустоту этого пересечения. Получено противоречие. $\square$

Определение 6.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует номер N такой, что при всех $n > N$

$$|x_n - a| < 1.$$

Так как
$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|,$$
то $|x_n| < 1 + |a|$, если $n > N$. Положим
$$M = |x_1| + \ldots + |x_N| + 1 + |a|.$$
Тогда
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M,$$
что означает ограниченность $\{x_n\}$. □

Свойство 3. *Если* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *для всех* n *и*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \text{\textit{то}} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что
$$\exists\, N_1 \;\; \forall\, n > N_1 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$
а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ следует, что
$$\exists\, N_2 \;\; \forall\, n > N_2 \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$
Следовательно, при всех $n > N_1 + N_2$
$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$
т. е.
$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$$
а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Свойство 4. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то сходится последовательность* $\{x_n + y_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из первого условия следует, что

$$\exists\, N_1 \;\; \forall\, n > N_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а из второго:

$$\exists\, N_2 \;\; \forall\, n > N_2 \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что при всех n

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|,$$

при $n > N_1 + N_2$ получим

$$|x_n + y_n - (a + b)| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad \square$$

Свойство 5. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то сходится последовательность* $\{x_n y_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Произведем оценку модуля разности $x_n y_n$ и ab:

$$|x_n y_n - ab\,| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab\,| =$$

$$= |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b\,| \leqslant |x_n|\,|y_n - b\,| + |x_n - a|\,|b\,|.$$

Из сходимости $\{x_n\}$ следует ее ограниченность, т. е.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Таким образом,

$$|x_n y_n - ab\,| \leqslant M|y_n - b\,| + |x_n - a|\,|b|.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b\,| + 1)},$$

а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что

$$\exists\, N_2 \quad \forall\, n > N_2 \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда для $n > N_1 + N_2$

$$|x_n y_n - ab\,| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad \square$$

Свойство 6. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$$

то сходится последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем оценку модуля:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \left|\frac{x_n b - ab + ab - y_n a}{y_n b}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x_n - a)b + a(b - y_n)}{y_n b}\right| \leqslant \frac{|x_n - a|\,|b\,| + |a|\,|y_n - b\,|}{|y_n|\,|b\,|}.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что

$$\exists\, N_0 \quad \forall\, n > N_0 \quad \big|\,|y_n| - |b\,|\,\big| \leqslant |y_n - b| < \frac{|b\,|}{2},$$

т. е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. Следовательно, при $n > N_0$

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Из этого же условия следует, что

$$\exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_1 \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(|a| + 1)}.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_2 \quad \forall\, n > N_2 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b\,|}{4}.$$

Тогда при $n > N_0 + N_1 + N_2$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \qquad \square$$

6.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 6.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Развернутое определение:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n| < \varepsilon.$$

Свойство 1. *Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него

$$\exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists\, N_2 \quad \forall\, n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n > N_1 + N_2$

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon. \qquad \square$$

Свойство 2. *Произведение $\{x_n y_n\}$ бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ на ограниченную последовательность $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Из ограниченности $\{y_n\}$ следует, что

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant M.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда

$$\forall\, n > N \quad |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

т. е. $\{x_n y_n\}$ – бесконечно малая последовательность. $\square$

Определение 6.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N(E) \ \Rightarrow \ |x_n| > E.$$

Этот факт записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Свойство 3. *Последовательность* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, *обратная к бесконечно большой последовательности* $\{x_n\}$, *есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, все ее элементы, начиная с некоторого номера n_0, не равны нулю. Для $n > n_0$ рассмотрим последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Для него по определению бесконечно большой последовательности найдется номер $N(E)$ такой, что

$$|x_n| > E, \quad \text{при} \ \ n > N(E).$$

Возьмем теперь $n > \max\{n_0, N(E)\}$ и рассмотрим

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon,$$

т. е. по определению последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно малая. $\square$

Свойство 4. *Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность и такая, что $x_n \neq 0$ при $n > n_0$. Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, обратная к $\{x_n\}$, есть бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Положим $y_n = \frac{1}{x_n}$ при $n > n_0$. Возьмем $E > 0$ и рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{E} > 0$. Для него по определению бесконечно малой последовательности найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|x_n| < \varepsilon, \quad \text{при} \;\; n > N(\varepsilon).$$

Возьмем теперь $n > \max\{n_0, N(\varepsilon)\}$ и рассмотрим

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E,$$

т. е. по определению последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно большая. □

6.4. Монотонные последовательности

Определение 6.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными*.

Справедливы следующие утверждения о пределе монотонной последовательности.

Теорема 6.1. *Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то она сходится. Если последовательность убывает и ограничена снизу, то она сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Тогда, по теореме о существовании точных граней, она обладает супремумом: $\exists \sup\{x_n\} = M$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. Из монотонности $\{x_n\}$ и определения супремума следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \quad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

$$M - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant M < M + \varepsilon,$$

откуда получаем определение предела:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \quad \forall\, n > N(\varepsilon) \quad |x_n - M| < \varepsilon,$$

Вторая часть утверждения: если $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m = \inf\{x_n\},$$

доказывается аналогично. □

Теорема 6.2. *Если последовательность монотонна и неограничена, то она является бесконечно большой. Причем если она неограничена сверху, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *а если она неограничена снизу, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

З а м е ч а н и е. Утверждения теорем 6.1 и 6.2 можно сформулировать следующим образом: возрастающая последовательность сходится к своему супремуму (конечному или бесконечному), а убывающая последовательность сходится к своему инфимуму (конечному или бесконечному).

Определение числа e

Рассмотрим последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Докажем, что она убывает. Для этого используем соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

где все величины $a_1, \ldots, a_n$ положительны, а знак равенства будет при условии $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Рассмотрим величину

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

и окончательно

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

т. е. $y_n < y_{n-1}$ — последовательность убывает.

Она, очевидно, ограничена снизу: $y_n > 1$ при всех натуральных n. Следовательно, у этой последовательности существует предел. Этот предел обозначают e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e = 2,718281828459045\ldots$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}.$$

Из свойств предела следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Этим соотношением и определяется число e.

Теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей

Теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей, с одной стороны, является частным случаем теоремы Больцано–Вейерштрасса для множеств. Но, с другой стороны, является важным результатом, который в силу своей значимости имеет смысл формулировать самостоятельно и который может быть доказан независимо через поведение монотонных последовательностей.

Определение 6.7. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Последовательность $\{y_k\}$:

$$y_k = x_{n_k}, \quad \text{где} \;\; n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$$

называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Теорема 6.3 (теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей)**.** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Из ограниченности $\{x_n\}$ следует, что

$$\exists\, M > 0 \quad \{x_n\} \subset [-M, M] = \Delta_0.$$

Разделим отрезок Δ_0 пополам и обозначим через Δ_1 любую половину, содержащую бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$; возьмем $x_{n_1} \in \Delta_1$. Разделим отрезок Δ_1 пополам и обозначим через Δ_2 любую половину, содержащую бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Тогда найдется элемент $x_{n_2} \in \Delta_2$ и $n_2 > n_1$. Процесс деления отрезка пополам, выбора одной из половин отрезка и элементов в ней продолжим по индукции. Получим систему вложенных стягивающихся отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ и последовательность x_{n_k} такую, что

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad n_{k+1} > n_k, \quad x_{n_k} \in \Delta_k = [a_k, b_k].$$

Тогда по теореме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам и $a_k \to c$, $b_k \to c$. Переходя к пределу по $k \to \infty$ в неравенствах $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, получим $x_{n_k} \to c$. $\square$

7. Предел функции

7.1. Понятие функции

Определение 7.1. Соответствие f между элементами множеств X и Y называется *функцией*, если любому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Это обозначается следующим образом:

$$f : X \to Y \qquad \text{или} \qquad y = f(x),\ x \in X.$$

Приняты следующие определения и обозначения:

$X = \mathcal{D}(f)$ – *область определения* функции f;

Y – *область значений*;

$f(X) = E(f)$ – *полный образ множества* X при отображении f;

x – *прообраз элемента* y при данном соответствии $y = f(x)$;

y – *образ элемента* x;

$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ – *полный прообраз элемента* y.

Соответствия, задаваемые функцией, удобно изображать в виде графика

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}.$$

В курсе математического анализа в основном рассматриваются числовые функции, т. е. такие, что $X, Y \subset \mathbb{R}$.

Определение 7.2. Пусть даны две функции:

$$f : X \to Y \quad \text{и} \quad g : Y \to Z.$$

Функция $h : X \to Z$, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией от* f *и* g (или *суперпозицией функций* f *и* g).

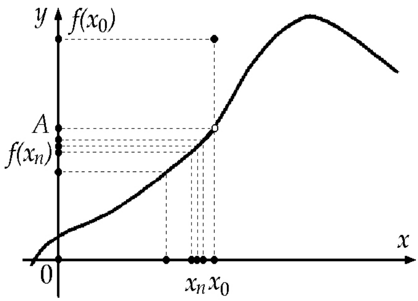
Определение 7.3. Если для любого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента, то соответствие $y \mapsto f^{-1}(y)$, определенное на Y, будет функцией, которая называется *обратной к функции* f и обозначается

$$f^{-1} : Y \to X \quad \text{или} \quad x = f^{-1}(y).$$

7.2. Определение предела функции в точке

Пусть функция f определена в каждой точке интервала (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Определение 7.4 (определение предела по Гейне[10]). Число A называется *пределом функции* f *при стремлении* x *к* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\{x_n\} \subset (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, последовательность $f(x_n)$ значений функции f сходится к A при $n \to \infty$:



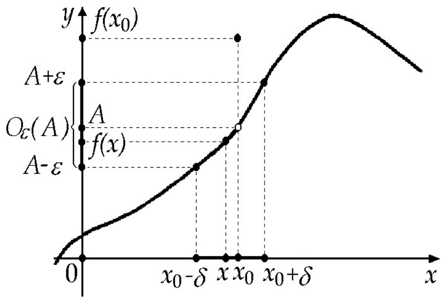
В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

[10] *Генрих Эдуард Гейне* (1821–1881) – немецкий математик. Основные труды относятся к теории множеств, математической физике, теории функций и дифференциальных уравнений.

Определение 7.5 (определение предела по Коши[11]). Число A называется *пределом функции f при $x \to x_0$*, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\,x \in (a, b)$$
$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$



Теорема 7.1. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из определения по Гейне следует определение по Коши. Проведем доказательство методом от противного.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ по Гейне, но не по Коши, т. е.

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta(\varepsilon) > 0 \quad \exists\,x_\delta \in (a, b)$$
$$(0 < |x_\delta - x_0| < \delta \,\wedge\, |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon).$$

[11] *Огюстен Луи Коши* (1789–1857) – великий французский математик и механик. Один из основоположников теории аналитических функций и создателей математического анализа. Основные труды по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии. Автор классических курсов математического анализа.

Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда найдутся $x_n \in (a, b)$ такие, что

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Отсюда $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, но $f(x_n) \nrightarrow A$, что противоречит тому, что $f(x_n) \to A$ по Гейне.

Теперь докажем, что из определения предела по Коши следует определение предела по Гейне.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ по Коши. Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset (a, b)$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из определения предела по Коши найдется $\delta > 0$, для которого, в силу сходимости $x_n \to x_0$, найдется номер N такой, что $|x_n - x_0| < \delta$ при $n > N$. Тогда из определения предела по Коши следует, что $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, что означает, что $f(x_n) \to A$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ в смысле определения Гейне. $\square$

Односторонние пределы

Определение 7.6. Пусть функция f определена на интервале (a, x_0). Число A называется *предeлом функции f слева в точке x_0*,

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0)$$
$$(x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Предел функции f справа определяется аналогично.

Ясно, что функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке для функции f существуют пределы слева и справа и они равны.

Если $x_0 = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ определяется следующим образом:
по Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\,x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon;$$

по Гейне:

$$\forall\,x_n \to +\infty \Rightarrow \quad f(x_n) \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

7.3. Свойства предела функции

Арифметические свойства предела функции

Пусть функции f и g определены на интервале (a, b), кроме, быть может, точки x_0. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существуют пределы суммы, произведения и отношения этих функций и имеют место равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim\limits_{x\to x_0} g(x));$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, при условии $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне.

Ограниченность функции

Определение 7.7. Функция f называется *ограниченной на множестве* X, если множество ее значений $Y = \{f(x) |\ x \in X\}$ ограничено, т. е.

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \ \ \forall\, x \in X \ \ m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *то существует проколотая окрестность точки* x_0*:*

$$\check{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

в которой функция f *ограничена.*

Действительно, из существования предела следует, что для $\varepsilon = 1$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < 1$ при всех $x \in \check{O}_\delta(x_0)$. Отсюда

$$\exists\, M = 1 + |A| > 0 \quad \exists\, \check{O}_\delta(x_0) \quad \forall\, x \in \check{O}_\delta(x_0) \quad |f(x)| \leqslant M.$$

□

Отделимость от нуля

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$, *то найдется такая окрестность* $\check{O}(x_0)$, *что* $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ *при всех* $x \in \check{O}(x_0)$.

Действительно, возьмем $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, тогда из существования конечного предела следует, что существует $\check{O}(x_0)$ такая, что при всех $x \in \check{O}(x_0)$

$$A - \frac{A}{2} < f(x) < A + \frac{A}{2}, \quad \text{т. е.} \quad f(x) > \frac{A}{2} > 0. \qquad \square$$

Свойства, связанные с неравенствами

1. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *и* $\forall\, x \in \check{O}(x_0)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то* $A \leqslant B$.

2. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ *и* $\forall\, x \in \check{O}(x_0)$ *выполняются неравенства* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказательство этих свойств следует из соответствующих свойств для сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне.

7.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 7.8. Функция α называется *бесконечно малой функцией при* $x \to x_0$, если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Определение 7.9. Функция γ называется *бесконечно большой функцией при* $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \gamma(x) = \infty$$

или, в развернутой форме,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in \check{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; |\gamma(x)| > \varepsilon.$$

Теорема 7.2.

1. *Если* α *и* β *– бесконечно малые функции при* $x \to x_0$, *то* $\alpha + \beta$ *– также бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.

2. *Если* α *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$, *а функция* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *то* αf *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.

3. $(f(x) \to A$ *при* $x \to x_0) \Leftrightarrow (f(x) = A + \alpha(x)$, *где* α *– некоторая бесконечно малая функция при* $x \to x_0)$.

4. *Если* α *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ *и* $\alpha(x) \neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *то* $\frac{1}{\alpha}$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$.

5. *Если* γ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$, *то* $\frac{1}{\gamma}$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.

Доказательство следует из определения Гейне предела функции и соответствующих свойств бесконечно малых последовательностей.

8. Непрерывность функции

8.1. Точки непрерывности и разрыва функции

Определение 8.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Используя определение предела функции по Коши и Гейне, получим следующие развернутые определения непрерывности функции в точке.

Определение 8.2. Функция f называется *непрерывной в точке x_0 по Коши,* если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in O_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 8.3. Функция f называется *непрерывной в точке x_0 по Гейне,* если $\forall\,\{x_n\} \subset O(x_0)$ такой, что $x_n \to x_0$, выполняется $f(x_n) \to f(x_0)$.

Определение 8.4. Точку x_0 будем называть *точкой разрыва функции* f, если функция не определена в этой точке или определена, но не является непрерывной в ней.

Определение 8.5. Пусть x_0 – точка разрыва функции f. Точка x_0 называется *точкой разрыва нулевого рода (точкой устранимого разрыва)*, если у функции f существует предел в этой точке, не равный значению функции в этой точке.

Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода,* если у функции f существуют в этой точке конечные односторонние пределы, не равные между собой.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода функции* f.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.1. *Если функции* f *и* g *непрерывны в точке* x_0, *то непрерывны в точке* x_0 *и функции* $f \pm g$, $f \cdot g$. *Если* $g(x_0) \neq 0$, *то* $\frac{f}{g}$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство следует из свойств предела. □

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и переводит эту окрестность в некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, а функция $g(y)$ определена в этой окрестности точки y_0. Тогда для сложной функции $F(x) = g(f(x))$, определенной в окрестности точки x_0, справедлива

Теорема 8.2. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то сложная функция* $F(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$. В силу непрерывности в точке x_0 функции f последовательность $y_n = f(x_n)$ сходится к $y_0 = f(x_0)$. Тогда в силу непрерывности функции g в точке y_0 последовательность $g(y_n) = g(f(x_n)) = F(x_n)$ сходится к $g(y_0) = g(f(x_0)) = F(x_0)$. Из определения Гейне следует, что функция $F(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. □

8.2. Функции, непрерывные на отрезке

Определение 8.6. Говорят, что функция f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a, b), непрерывна справа в точке a, т. е.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a),$$

и непрерывна слева в точке b, т. е.

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Теорема 8.3 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Необходимо доказать, что

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Доказательство проведем методом от противного. Пусть для каждого $M > 0$ найдется точка $x_M \in [a, b]$ такая, что $|f(x_M)| > M$. Тогда для любого натурального n найдется $x_n \in [a, b]$ такая, что $|f(x_n)| > n$. Мы получим последовательность точек $\{x_n\} \subset [a, b]$, причем последовательность значений функции $f(x_n) \to \infty$. Из ограниченности $\{x_n\}$ следует существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ такой, что $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. Тогда из непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ и, в частности, в точке c следует, что $f(x_{n_k}) \to f(c)$, в то время как по построению $f(x_{n_k}) \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 8.4 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем свои точные верхнюю и нижнюю грани, т. е. найдутся точки* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *такие, что*

$$f(c_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(c_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Докажем существование точки c_2. Пусть

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad \text{т. е.}$$

1) $\forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant M,$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in [a,b] \quad f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon.$

Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b] \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

Таким образом, построена ограниченная последовательность $\{x_n\}$, из которой можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \to c_2 \in [a,b]$. Функция f непрерывна в точке $x = c_2$, следовательно, $f(x_{n_k}) \to f(c_2)$. С другой стороны, при всех k

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M.$$

Из свойств предела следует, что $f(x_{n_k}) \to M$. Следовательно,

$$f(c_2) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x). \qquad \square$$

Теорема 8.5. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, ее значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a,b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим отрезок $[a,b]=\Delta_0$. Разделим его пополам. Если в середине отрезка Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана. Если нет, то обозначим за $\Delta_1=[a_1,b_1]$ ту из половин отрезка $[a,b]$, на концах которой функция f имеет разные знаки: $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Разделим отрезок Δ_1 пополам. Если в середине отрезка Δ_1 функция равна нулю, то теорема доказана. Если нет, то обозначим за $\Delta_2=[a_2,b_2]$ ту из половин отрезка $[a_1,b_1]$, на концах которой функция f имеет разные знаки: $f(a_2) < 0 < f(b_2)$. Рассуждая таким образом, мы либо на каком-то шаге получим точку, в которой функция обращается в ноль, и теорема доказана, либо построим систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и для всех n выполняются неравенства $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Во втором случае по теореме Кантора существует точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Поэтому $c \in \Delta_0 = [a,b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции f в точке c,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Следовательно, $f(c)=0$. $\square$

Как следствие, получаем следующую теорему.

Теорема 8.6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<B$ и C – произвольное число такое, что $A<C<B$, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка $x_0\in(a,b)$, в которой $f(x_0)=C$, т. е. непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)-C,$$

где $A<C<B$. Функция F непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$F(a)=f(a)-C=A-C<0,$$
$$F(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Тогда, согласно предыдущей теореме, существует точка $x_0\in(a,b)$ такая, что $F(x_0)=0$, т. е. $f(x_0)=C$. $\square$

8.3. Равномерная непрерывность функций

Определение 8.7. Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве X*, если выполняется следующее условие:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta(\varepsilon)>0\quad\forall\,x_1\in X\quad\forall\,x_2\in X$$
$$(|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon).$$

Очевидно, что равномерно непрерывная на множестве X функция непрерывна в каждой точке $x\in X$. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 8.7 (теорема Кантора). *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство проведем методом от противного. Предположим,что f не является равномерно непрерывной на $[a,b]$, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x'_\delta, x''_\delta \in [a,b]$ такие, что $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ и $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$.

Возьмем $\delta = \delta_n \to 0$. Тогда найдутся две последовательности x'_n, x''_n, разность между которыми стремится к нулю, а разность между последовательностями значений функций не стремится к нулю. Если из последовательности x'_n выделить сходящуюся подпоследовательность и взять соответствующую ей подпоследовательность x''_n, то их разность будет стремиться к нулю. Тогда разность между значениями функции на этих подпоследовательностях в силу непрерывности функции должна стремиться к нулю, а в силу предположения она не стремится к нулю, что доказывает неправомерность предположения. $\square$

8.4. Существование обратных функций

Пусть дана функция f, отображающая множество X на множество Y:

$$f : X \xrightarrow{\text{на}} Y.$$

Это означает, что для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Таким образом, на любом элементе $y \in Y$ определено обратное соответствие $f^{-1} : Y \to X$. Но обратное соответствие может не быть функцией, т. е. однозначным соответствием. Выясним достаточные условия существования обратной функции.

Определение 8.8. Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей на множестве* X, если для всех $x_1, x_2 \in X$ из того, что $x_1 < x_2$, следует: $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично определяется *строго убывающая функция.* Строго убывающие и строго возрастающие функции называются *строго монотонными.*

Теорема 8.8. *Если функция $f : X \xrightarrow{на} Y$ и строго монотонная на множестве X, то обратное соответствие $f^{-1} : Y \to X$ однозначное, т. е. будет обратной функцией и тоже строго монотонной.*

Теорема 8.9. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго возрастает на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда $f([a, b]) = [A, B]$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена, непрерывна и строго возрастает на отрезке $[A, B]$.*

8.5. Элементарные функции

1. Функция a^x, $a > 0$, определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, возрастает, если $a > 1$, убывает, если $0 < a < 1$.

2. Функция $\log_a x$, $a > 0$, определена и непрерывна на $(0, +\infty)$, возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$. Если $a = e$, то логарифм по основанию e называется *натуральным* и обозначается $\ln x$.

3. Функция x^a определена и непрерывна на $(0, +\infty)$, возрастает, если $a > 0$, и убывает, если $a < 0$.

4. Функция $(u(x))^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, называется *степенно-показательной* и определяется равенством

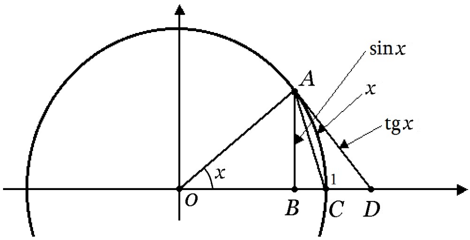
$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}, \quad u(x) > 0.$$

8.6. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Докажем, что имеет место равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Исходя из геометрических рассмотрений (см. рисунок), имеем следующие неравенства для величин площадей:

$$S_{\triangle OAC}<S_{\smile OAC}<S_{\triangle OAD}.$$

Считая, что $0<x<\frac{\pi}{2}$, получим

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,$$
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Эти неравенства выполняются и для $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. Из последнего неравенства следует, что

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2},\quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}.$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \square$$

Таблица замечательных пределов

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a;$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) > 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ – конечный, то с учетом равенства

$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$$

из непрерывности функций e^x и $\ln x$ следует, что

$$\lim_{x\to x_0} (u(x))^{v(x)} = (\lim_{x\to x_0} u(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

Последнее равенство имеет место и для $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = +\infty(-\infty)$ при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = A > 0,\ A \neq 1.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, то справедливо:

$$\lim_{x\to x_0} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)},$$

если существует $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)$, конечный или бесконечный.

Пример 8.1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Пример 8.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Используем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 8.3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}-e^{x^2+x}}{\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}-e^{x^2+x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+x}(e^x-1)}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x^2+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

Пример 8.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\sin^2 x(\cos x+1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)} = -\frac{1}{2}.$$

П р и м е р 8.5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x).$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{(\sqrt{x^2+8x}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x(\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1}=4.$$

9. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Важной характеристикой движения материальной точки является ее мгновенная скорость. Допустим, материальная точка движется по закону $S(t)$. Фиксируя произвольный момент времени t и его *приращение* $\Delta t > 0$, получим *среднюю скорость* на отрезке времени $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Пусть, например, материальная точка движется по закону $S(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$ по прямой, т. е. находится в свободном падении под действием постоянной силы тяжести. Тогда *средняя скорость*

$$v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{g \cdot (t + \Delta t)^2 - gt^2}{2\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Мгновенной скоростью (или просто *скоростью*) движущейся точки называется предел, к которому стремится средняя скорость $v_{\text{ср}}(t, \Delta t)$ при стремлении к нулю приращения времени, т. е.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Итак, при нахождении скорости изменения какой-то переменной величины $y = f(x)$ в точке x нам нужно совершить предельный переход

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

9.1. Определение и геометрический смысл производной функции в точке

Определение 9.1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x называется число

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если такой предел существует.

Задача о проведении касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x тоже приводит к необходимости совершить подобного рода предельный переход.

Рассмотрим, например, функцию $y = ax^2$ и ее график (рис. 9.1). Проведем касательную к этой кривой в точке $M(x, ax^2)$. *Касательной* к кривой в точке M называется предельное положение секущей MM_1 (если оно существует) при стремлении точки M_1 вдоль кривой к точке M:

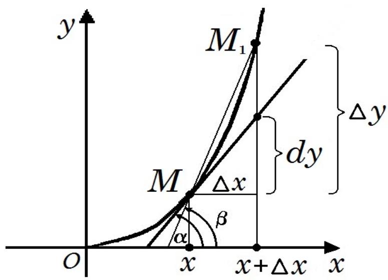


Рис. 9.1

Придадим абсциссе x приращение Δx, получим соответствующее приращение функции Δy и тангенс угла наклона секущей MM_1:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

В нашем случае $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$. Предельное положение секущей существует при $\Delta x \to 0$, и тангенс угла наклона ее есть

$$\operatorname{tg}\alpha = y^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = 2ax.$$

В общем случае, если у функции f существует конечная производная в точке x_0, то существует и касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, и производная равна тангенсу угла α наклона касательной. Уравнение касательной записывается в виде

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Элементарные свойства производной

В этом разделе будем считать, как правило, что функции определены в окрестности рассматриваемой точки.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования $f^{'}(x)$ следует, что разность

$$\frac{\Delta f(\Delta x)}{\Delta x} - f^{'}(x) = \varepsilon(\Delta x)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Отсюда приращение функции

$$\Delta f(\Delta x) = f^{'}(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \qquad (9.1)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, что означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x. □

Обратное неверно. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 9.1. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная в точке $x = 0$ не существует, так как не существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Производная и арифметические операции связаны следующими правилами.

Теорема 9.2. *Пусть функции f и g имеют производные в точке x. Тогда имеют место соотношения:*

1. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$.
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$, *если* $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Докажем, например, свойство 4. Рассмотрим разностное отношение:

$$\frac{\Delta\,[f(x)/g(x)]}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)} =$$

прибавим и отнимем в числителе $f(x)g(x)$, затем разобьем выражение на две дроби:

$$= \left[\frac{\pm f(x)g(x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} \qquad \right] =$$
$$= \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x) - \right.$$
$$\left. - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \right)$$

и перейдем в пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\longrightarrow_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}. \qquad \square$$

Производные элементарных функций

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(e^x)' = e^x, \ (a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
8. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

9.2. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Определение 9.2. Пусть функции φ и ψ — бесконечно малые в точке x_0, причем $\psi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

то говорят, что функция φ *есть бесконечно малая более высокого порядка, чем* ψ, *в точке* x_0, и обозначают

$$\varphi(x) = o(\psi(x)).$$

Определение 9.3. Рассмотрим приращение функции f в точке x:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если это приращение может быть записано в виде

$$\Delta f(x) = A\,\Delta x + o(\Delta x), \tag{9.2}$$

где A — некоторая константа, а $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$, то функция f называется *дифференцируемой в точке* x.

Теорема 9.3. *Функция f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.*

Доказательство. Необходимость. Из определения дифференцируемости f следует, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

По определению $o(\Delta x)$ имеем $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A = f^{'}(x).$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из существования $f^{'}(x)$ следует, что разность

$$\frac{\Delta f(\Delta x)}{\Delta x} - f^{'}(x) = \varepsilon(\Delta x)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Отсюда приращение функции имеет вид:

$$\Delta f(x) = f^{'}(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \qquad \square$$

Определение 9.4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то линейная часть $A\,\Delta x = f^{'}(x)\Delta x$ приращения $\Delta f(x)$ называется *дифференциалом функции* f *в точке* x и обозначается

$$df(x) = f^{'}(x)dx. \tag{9.3}$$

Здесь $\Delta x = dx$.

На рис. 9.1 показан дифференциал и видно его геометрическое отличие от приращения функции.

П р и м е р 9.2.

$$d(\operatorname{tg} x) = (\operatorname{tg} x)^{'} dx = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d(a^x) = (a^x)^{'} dx = a^x \ln a\, dx.$$

Элементарные свойства дифференциала

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, тогда имеют место равенства

1. $d\,[\alpha u(x)] = \alpha\, du(x)$.

2. $d\,[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x)$.

3. $d\,[u(x)v(x)] = u(x)\, dv(x) + v(x)\, du(x)$.

4. $d\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)\, du(x) - u(x)\, dv(x)}{v^2(x)}$, если $v(x) \neq 0$.

Доказательства этих свойств легко следуют из определения дифференциала и соответствующих свойств производной.

Пример 9.3.

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tg} x) &= d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d\cos x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}, \\ d(e^x \sin x) &= e^x \sin x\, dx + e^x \cos x\, dx = e^x(\cos x + \sin x)\, dx. \end{aligned}$$

9.3. Производная сложной функции

Теорема 9.4. *Пусть задана сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$. Пусть функция φ имеет производную в точке x_0, а функция f имеет производную в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда функция F имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $f(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$\Delta f(y_0) = f^{'}(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\Delta F(x_0) = \Delta f(y_0) = f^{'}(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Разделив на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (9.4)$$

Поскольку существует $\varphi'(x_0)$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 (теорема 9.1), следовательно, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Переходя к пределу в (9.4) при $\Delta x \to 0$, получим

$$F^{'}(x_0) = f^{'}(y_0)\varphi^{'}(x_0). \qquad \square$$

П р и м е р 9.4. Найдем производную сложной функции $F(x) = e^{\sin x}$.

Р е ш е н и е. Данная функция есть суперпозиция двух функций — экспоненты и синуса:

$$F(x) = f(\varphi(x)), \quad \text{где} \;\; f(y) = e^y, \; y = \varphi(x) = \sin x.$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$F^{'}(x) = e^y(\sin x)^{'} = e^{\sin x}\cos x.$$

9.4. Производная обратной функции

Теорема 9.5. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме об обратной функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и строго монотонная (например, строго возрастающая) на $[A, B] = [f(a), f(b)]$. Поскольку функции $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ непрерывны в точках x_0 и y_0, $\Delta y = \Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$; и $\Delta x = \Delta f^{-1}(y_0) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Из строгой монотонности следует, что $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)}.$$

Итак, поскольку $\Delta y \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$, имеем

$$\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

Пример 9.5. Пользуясь доказанной теоремой, найдем производные некоторых обратных функций.

1. $y = a^x$, $x = \log_a y$, $y > 0$.

$$\begin{aligned} (\log_a y)' &= \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{(a^x)\ln a} = \frac{1}{y \ln a}; \\ (\ln y)' &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

2. $y = \sin x$, $x = \arcsin y$, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} \cos x \geqslant 0 \\ \text{на } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right] = \\ &= \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

3. $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

9.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 9.5. Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Производная функции f' в точке x_0 (если она существует) называется *второй производной* функции f и обозначается $f''(x_0)$.

Аналогично определяется *производная n-го порядка* через производную $(n-1)$-го порядка.

П р и м е р 9.6.

1. $f(x) = x^2$,
   $f^{'}(x) = 2x,\ f^{''}(x) = 2,\ f^{'''}(x) = 0,\ \ldots$

2. $f(x) = a^x$,
   $f^{'}(x) = a^x \ln a,\ f^{''}(x) = a^x \ln^2 a,\ \ldots$

3. $f(x) = e^x \sin x$,
   $f^{'}(x) = e^x \sin x + e^x \cos x,\ f^{''}(x) = 2e^x \cos x.$

Определение 9.6. Функция f называется n раз *непрерывно дифференцируемой* на некотором промежутке, если на этом промежутке она имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно.

Определение 9.7. Пусть производная $f^{'}(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy, если рассматривать его как функцию только от переменной x при фиксированной второй переменной dx, имеет вид (обозначим его δ, в отличие от d для первого дифференциала):

$$\delta(dy) = \delta\left[f^{'}(x)dx\right]\Big|_{x=x_0} = \left[f^{'}(x)dx\right]^{'}_{x=x_0} \delta x = f^{''}(x_0)dx\delta x.$$

Вторым дифференциалом d^2y функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется дифференциал от dy (т. е. дифференциал от первого дифференциала $dy = df(x, dx)$ как функции от переменной x при фиксированной переменной dx):

$$d^2y = d^2f(x, dx) = \delta(dy)\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ \delta x = dx}} = f^{''}(x_0)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков:

$$d^n y = \delta\left(d^{(n-1)}y\right)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ \delta x = dx}}.$$

9.6. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \tag{9.5}$$

определены, непрерывны на некотором промежутке (α, β), а функция $x(t)$ строго монотонна на нем. Тогда для функции $x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$, определенная на некотором промежутке (a, b) и, следовательно, имеет смысл сложная функция $f(x) = y(t(x))$. Эта функция $y = f(x)$ называется функцией, *параметрически* заданной системой (9.5).

Теорема 9.6. *Пусть системой функций* (9.5) *параметрически задана функция $y = f(x)$. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и $x'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 = x(t_0)$ производную, и она вычисляется по формуле*

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \quad t_0 = t(x_0).$$

Доказательство. Обратная функция $t = t(x)$ имеет в точке x_0 производную по теореме о производной обратной функции (теорема 9.5):

$$t'(x_0) = \frac{1}{x'(t_0)}.$$

По теореме о производной сложной функции (теорема 9.4) для функции $f(x) = y(t(x))$ получаем:

$$f'(x_0) = y'(t(x_0))t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}. \qquad \square$$

П р и м е р 9.7. Производная функции, заданной параметрически системой

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

теперь уже может быть вычислена по предыдущей теореме:

$$f'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x}{\sin \arccos x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 9.7 (теорема Ферма[12])**.** *Если функция f определена на интервале (a, b), в точке $\xi \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение и имеет в этой точке производную $f'(\xi)$, то $f'(\xi) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай наибольшего значения. По условию теоремы для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(\xi)$ (рис. 9.2). Тогда

$$\text{если} \quad x < \xi, \quad \text{то} \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0, \tag{9.6}$$

[12] *Пьер Ферма́* (1601–1665) – французский математик, по профессии юрист. Один из создателей теории чисел и аналитической геометрии. Автор трудов по теории вероятностей, исчислению бесконечно малых, оптике.

$$\text{если} \quad x > \xi, \quad \text{то} \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0. \qquad (9.7)$$

Так как существует производная

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

то существуют и односторонние производные, и они равны производной $f'(\xi)$. Поэтому из неравенства (9.6) следует $f'_-(\xi) = f'(\xi) \geqslant 0$, а из (9.7) следует $f'_+(\xi) = f'(\xi) \leqslant 0$. Отсюда имеем $f'(\xi) = 0$. □

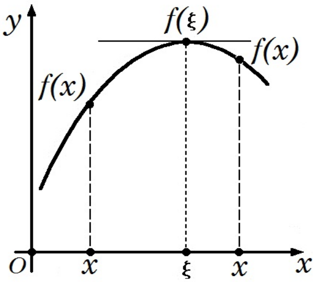


Рис. 9.2

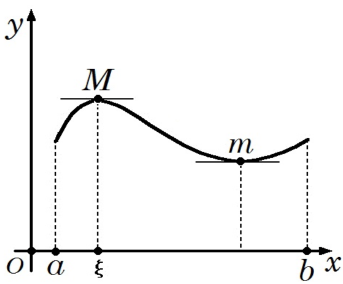


Рис. 9.3

Теорема 9.8 (теорема Ролля[13]). *Пусть функция* f*:*

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) имеет в каждой точке интервала (a, b) *производную;*

3) имеет на концах отрезка равные значения:

$$f(a) = f(b).$$

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

[13] *Мишель Ролль* (1652–1719) – французский математик.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй теореме Вейерштрасса непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках отрезка $[a, b]$ (рис. 9.3). Пусть

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Если $m = M$, то $f(x) \equiv \text{const}$, поэтому $f^{'}(x) \equiv 0$ на (a, b).

Если $m \neq M$, т. е. $m < M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что одно из значений, m или M, функцией $f(x)$ не принимается на концах отрезка $[a, b]$, а принимается внутри интервала (a, b). Пусть, для определенности, значение M принимается внутри интервала (a, b), т. е. существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(\xi) = M \geqslant f(x) \quad \text{для всех } x \in (a, b).$$

Так как производная функции $f(x)$ существует в точке ξ, то по теореме Ферма $f^{'}(\xi) = 0$. □

Теорема 9.9 (теорема Лагранжа[14])**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a, b). Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f^{'}(\xi)(b - a)$$

(рис. 9.4).

---

[14] *Жозеф Луи Лагранж* (1736–1813) – выдающийся французский математик, механик, астроном. Наиболее важные труды относятся к вариационному исчислению, к аналитической и теоретической механике. Ему принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, математической картографии и пр.

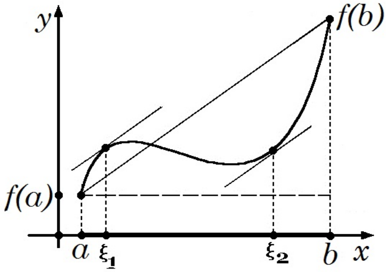


Рис. 9.4

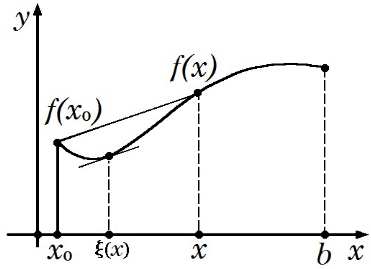


Рис. 9.5

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, где параметр λ выберем так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Для функции F выполнены все условия теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
2) существует $F'(x) = f'(x) - \lambda$ в (a, b);
3) $F(b) = F(a)$.

Тогда по теореме Ролля существует $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = \lambda$. Следовательно,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Замечание. При $a = x_0$, $b = x$, $b - a = \Delta x$ (т. е. при $b = a + \Delta x$) получаем *формулу конечных приращений Лагранжа*:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi = x + \theta \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

или

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

(рис. 9.5).

Приведем три теоремы, которые являются следствиями из теоремы Лагранжа.

Теорема 9.10 (о пределе производной). *Пусть функция f:*

1) непрерывна на $[x_0, b)$;

2) дифференцируема на (x_0, b);

3) существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, конечный или нет.

Тогда существует правая производная $f'_+(x_0)$, конечная или нет, и

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x).$$

Напомним, что $f'_+(x_0) = +\infty$, если функция f непрерывна в точке x_0 справа и существует

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty.$$

Пример 9.8. Для функции $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ вычислим $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(\sqrt{\pi})$:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} f'(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x}{|x|} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} f'(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{|x|} = 1,$$

$$f'_-(\sqrt{\pi}) = \lim_{x\to\sqrt{\pi}-0} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = -\infty.$$

Теорема 9.11 (о постоянстве функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и существует f' хотя бы на (a, b), равная на нем нулю. Тогда $f(x) = const$.*

Доказательство. Возьмем $x_1, x_2 \subseteq [a, b]$. По теореме Лагранжа $f(x_1) - f(x_2) = f^{'}(c)(x_1 - x_2)$, где c – точка между x_1 и x_2. Но в интервале (a, b) производная равна нулю, следовательно, $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

Теорема 9.12 (о монотонности функции)**.** *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Функция f монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. Если $f'(x) > 0$ (< 0), то f строго возрастает (убывает) на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть функция f возрастает на $[a, b]$, ее приращение в любой точке $x_0 \subseteq (a, b)$ того же знака, что и приращение аргумента, тогда $f'(x_0) \geqslant 0$.

Пусть $f'(x) \geqslant 0$. Пусть $x_1 \subseteq [a, b]$, $x_2 \subseteq [a, b]$ и $x_2 > x_1$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(c)(x_2 - x_1),$$

где c между x_1 и x_2, тогда $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. $\square$

Обобщением теоремы Лагранжа служит

Теорема 9.13 (теорема Коши)**.** *Пусть функции f и g:*

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируемы на интервале (a, b);

3) производная $g^{'} \neq 0$ во всех точках интервала (a, b).

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что имеет место

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}.$$

Доказательство. Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе, согласно теореме Ролля, для функции $g(x)$ нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$, в которой $g^{'}(\xi) = 0$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Параметр λ подберем так, чтобы $F(a) = F(b)$:

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

следовательно,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad \text{так как} \quad g(b) - g(a) \neq 0.$$

Итак, функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F^{'}(\xi) = 0$. Отсюда $f^{'}(\xi) - \lambda g^{'}(\xi) = 0$ и

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}. \qquad \square$$

9.8. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Здесь приведены две теоремы о правилах Лопиталя[15].

Теорема 9.14 (первое правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g:*

1) *дифференцируемы в выколотой окрестности $\check{O}(x_0)$ точки x_0;*

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

3) $g^{'}(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \check{O}(x_0)$;

[15] *Гийом Франсуа Лопитáль* (1661–1704) – французский математик, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696).

4) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *конечный или бесконечный.*

Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство проведем для случая, когда $x \to x_0 + 0$. Функции f и g непрерывны на некотором интервале (x_0, b) как дифференцируемые на нем функции. Доопределим функции f и g в точке x_0: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Таким образом, они становятся непрерывными на отрезке $[x_0, b]$. Возьмем любое $x \in (x_0, b)$, тогда на отрезке $[x_0, x]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (теорема 9.13) о среднем значении, поэтому существует точка $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Заметим, что $g(x) \neq 0$, иначе по теореме Ролля $g'(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in (x_0, b)$. Ясно, что $\xi(x) \to x_0$ при $x \to x_0 + 0$. Поэтому

$$\lim_{\xi \to x_0 + 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$\square$

Пример 9.9.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a}{1}=\ln a.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

Теорема 9.15 (второе правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g:*

1) дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$;

3) $g^{'}(x)\neq 0$ на $(a,+\infty)$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$, конечный или бесконечный.

Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}.$$

Пример 9.10. Пусть $\alpha>0$, $a>0$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{a^x\ln^n a}=0.$

9.9. Формула Тейлора

Пусть у функции f в точке x_0 существует производная $(n-1)$-го порядка. Тогда для нее можно записать многочлен

$$T_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1},$$

называемый многочленом Тейлора[16]. Равенство

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x), \quad x \in O(x_0),$$

справедливое в некоторой окрестности точки x_0, называется *формулой Тейлора функции f в окрестности точки x_0; $T_{n-1}(x)$ — многочлен Тейлора* степени $n-1$ функции f, $R_n(x)$ — *остаточный член* формулы Тейлора n-го порядка.

Теорема 9.16. *Пусть функция f имеет n-ю производную в окрестности точки x_0. Тогда справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x), \quad x \in \check{O}(x_0), \tag{9.8}$$

где ее остаточный член n-го порядка $R_n(x)$ может быть записан в форме Лагранжа:

$$R_n^L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \xi \in (x, x_0). \tag{9.9}$$

[16] *Брук Тейлор* (1685–1731) – английский математик.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для $x > x_0$. Зафиксируем $x \in (x_0, b]$. Представим остаточный член в виде

$$R_n(x) = (x - x_0)^n H,$$

где H зависит от x_0, x и n.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(u) = f(u) + \frac{f'(u)}{1!}(x-u) + \frac{f''(u)}{2!}(x-u)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{(n-1)} + (x-u)^n H.$$

Функция $\Phi(u)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(u)$ определена и непрерывна на отрезке $[x_0, x]$, поскольку таковы функции $f(u), f'(u), \ldots, f^{(n-1)}(u)$ на отрезке $[x_0, x]$;

2) $\Phi(u)$ имеет производную на интервале (x, x_0), так как на нем имеет производную n-го порядка функция f;

3) $$\Phi(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + (x-x_0)^n H = f(x).$$

Кроме того, $\Phi(x) = f(x)$.

Следовательно, функция $\Phi(u)$ удовлетворяет на отрезке $[x_0, x]$ условиям теоремы Ролля. Поэтому существует такая промежуточная точка $\xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$, между точками x_0 и x, что в ней $\Phi'(\xi) = 0$.

Выпишем производную

$$\Phi'(u) = \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) - n(x-u)^{n-1} H.$$

Так как $\Phi'(\xi) = 0$, то получим уравнение

$$\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) - n(x-\xi)^{n-1} H = 0.$$

Отсюда найдем

$$H = \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \frac{1}{n(x-\xi)^{n-1}}.$$

Следовательно, остаточный член запишется в виде

$$R_n(x) = (x-x_0)^n H = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)^n. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы 9.16 справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n^C(x),$$

где

$$R_n^C(x) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n, \quad \theta \in (0,1),$$

есть остаточный член в форме Коши.

Теорема 9.17. *Пусть функция f имеет в точке x_0 производную $(n-1)$-го порядка. Тогда справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n^P(x),$$

где $R_n^P(x) = o((x-x_0)^{n-1})$ *— остаточный член в форме Пеано*[17].

Доказательство. Введем функцию

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \\ - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

и покажем, что $g(x) = o((x-x_0)^{n-1})$.

Действительно, применив $n-2$ раза правило Лопиталя, а на последнем шаге определение $f^{(n-1)}(x_0)$, получим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0. \qquad \square$$

Замечание 1. Формулу Тейлора функции f в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + R_n^L(x),$$

иногда называют *формулой Тейлора–Маклорена*[18] *функции* f *с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$R_n^L(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

[17] *Джузеппе Пеано* (1858–1932) – итальянский математик и логик. Известен важными результатами в математическом анализе, теории дифференциальных уравнений, геометрии, разработкой международного языка на основе латыни (Latino sine flexione), а также работами в области логических оснований математики.

[18] *Колин Маклорен* (1698–1746) – английский математик. Математические исследования относятся к анализу и теории плоских кривых высших порядков, ряд исследований посвящен механике.

З а м е ч а н и е 2. Формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

называется *формулой Тейлора–Маклорена функции f с остаточным членом в форме Пеано.*

Формула Тейлора для основных элементарных функций

1. Функция $f(x) = e^x$.

Вычислим производные: $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $f^n(\theta x) = e^{\theta x}$. Получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x},$$

и в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

П р и м е р 9.11. Вычислим число e и оценим погрешность вычисления:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n(1),$$

$$|R_n(1)| = \frac{1}{n!}e^{\theta} \leqslant \frac{e}{n!} \leqslant \frac{3}{n!}.$$

З а м е ч а н и е. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно вычислить приближенно значения функций и оценить величину ошибки.

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать как асимптотическую, например, при вычислении пределов, в теории рядов и несобственных интегралов.

2. Функция $f(x) = \sin x$.

Вычислим производные: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и т. д. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. Следовательно,

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x),$$

где

$$\left|R^L_{2n+1}(x)\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0$$

при $x \to 0$, и

$$R^P_{2n+1}(x) = o(x^{2n}).$$

3. $f(x) = \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots +$

$$+(-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + R_{2n}(x).$$

4. $f(x) = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots +$

$$+(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

5. $f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 +$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x).$$

В частном случае

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n),\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n).\end{aligned}$$

Пример 9.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\ln(1+x)-\sin x)}{\operatorname{arctg} x-x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Здесь понадобятся формулы Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Подставив их в выражение под знаком предела, получим

$$\frac{x(\ln(1+x)-\sin x)}{\operatorname{arctg} x-x}=\frac{x(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-x(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\ln(1+x)-\sin x)}{\operatorname{arctg} x-x}=\frac{3}{2}.$$

9.10. Исследование поведения функции при помощи производных

Определение и необходимые условия экстремума функции одного переменного

Определение 9.8. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в этой точке *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

тогда точка x_0 называется *точкой строгого максимума (минимума)* функции.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремумами функции*.

Теорема 9.18 (необходимое условие точки экстремума). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка минимума. Тогда

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0$$

в некоторой окрестности этой точки. Если существует производная в точке x_0, то существуют правая и левая производные и они равны. Поскольку $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, то $f'_-(x_0) \leqslant 0$, а $f'_+(x_0) \geqslant 0$, т. е. $f'(x_0) = 0$. $\square$

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называют *точками, подозрительными на экстремум* (или *точками возможного экстремума*). Точки экстремума функции следует искать только среди точек, подозрительных на экстремум.

Теорема 9.19 (достаточное условие точки экстремума через первую производную)**.** *Если существует производная в окрестности точки* x_0 *и при переходе через эту точку она меняет знак, то точка* x_0 *является точкой экстремума функции* $f(x)$*, причем если*

$$f^{'}(x) \leqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f^{'}(x) \geqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 *– точка минимума, а если*

$$f^{'}(x) \geqslant 0 \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f^{'}(x) \leqslant 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 *– точка максимума.*

Доказательство. Пусть $x < x_0$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f^{'}(c)(x - x_0),$$

где $c \in [x, x_0]$. Если $f^{'}(c) \leqslant 0$, то в силу того, что $x - x_0 < 0$, получим $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Аналогично для всех x справа от точки x_0 получаем $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, т. е. x_0 – точка минимума. □

Выпуклость функции на промежутке. Точки перегиба. Асимптоты

Определение 9.9. Функция f называется *выпуклой вниз (вверх) на* (a, b), если на любом $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ график функции лежит не выше (не ниже) хорды, соединяющей концы этого графика.

Определение 9.10. Точка на графике функции называется точкой перегиба, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости.

Теорема 9.20 (необходимое условие точки перегиба)**.** *Пусть точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, тогда если в этой точке есть вторая производная, то она равна нулю.*

Теорема 9.21 (критерий выпуклости через вторую производную)**.** *Пусть функция $f(x)$ имеет на (a, b) производную второго порядка. Для того чтобы $f(x)$ была выпуклой вниз (вверх) на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$.*

Определение 9.11. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $f(x)$. Аналогично при $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$. Если

$$\lim_{x\to x_0-0(+0)} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой.*

Прямая $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+(-)\infty} [f(x) - kx],$$

называется *наклонной асимптотой* при $x \to +(-)\infty$.

10. Первообразная, неопределенный интеграл и их свойства

Определение 10.1. Функция $F(x)$, определенная на промежутке $X \subset \mathbb{R}$, называется *первообразной функцией*, или *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке X, если она дифференцируема на нем и имеет место равенство $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in X$.

Теорема 10.1. *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, то всякая функция вида*

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

также является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X и всякая первообразная функции $f(x)$ представляется в таком виде.

Доказательство. Пусть Φ и F – две первообразные для f на промежутке X, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Рассмотрим функцию $g(x) = \Phi(x) - F(x)$. Эта функция имеет производную, равную нулю, всюду на промежутке X.

Возьмем любые точки $x_1, x_2 \in X$. Функция $g(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_1, x_2]$ теореме Лагранжа. Следовательно,

$$\exists\, c \in (x_1, x_2): \quad g(x_1) - g(x_2) = g'(c)(x_1 - x_2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $g(x) \equiv \text{const}$ на X, а значит, $\Phi(x) = F(x) + C$. $\square$

Определение 10.2. Пусть $f(x)$ имеет первообразную на некотором промежутке X. *Неопределенным интегралом* от функции f на промежутке X называется совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ на X.

Неопределенный интеграл обозначается $\displaystyle\int f(x)dx$. Поэтому

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для f на X.

Свойства неопределенного интеграла

1. Если F дифференцируема на X, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

2. Если функция f имеет первообразную, то

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Если f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке X, то функция $af_1 + bf_2$ также имеет первообразную и справедливо равенство

$$\int \big(af_1(x) + bf_2(x)\big)dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx.$$

Это равенство нужно понимать как совпадение двух семейств функций.

Доказательства этих свойств следуют из определений производной и неопределенного интеграла.

Таблица неопределенных интегралов

Исходя из определения неопределенного интеграла, таблицы производных и правил дифференцирования, можно записать следующие равенства, верные на соответствующих промежутках:

1) $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

3) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

4) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

5) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

6) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

8) $$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

9) $$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$10)\quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$11)\quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$12)\quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$13)\quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C;$$

$$14)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$15)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

10.1. Некоторые методы вычисления неопределенного интеграла

Интегрирование заменой переменной

Теорема 10.2. *Пусть функции $f(u)$ и $u = g(x)$ определены на некоторых промежутках так, что определена сложная функция $f[g(x)]$. Пусть функция f имеет первообразную F, а функция g дифференцируема, тогда функция $f[g(x)] \cdot g'(x)$ имеет первообразную $\Phi(x) = F[g(x)]$.*

Доказательство. Функции F и f определены на одном промежутке, следовательно, имеет смысл сложная функция $F[g(x)]$. Согласно правилу вычисления производной сложной функции имеем

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = \frac{dF[u]}{du}\Big|_{u=g(x)}\frac{dg(x)}{dx} = \\ = f(u)\Big|_{u=g(x)}g'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Таким образом, функция $f[g(x)] \cdot g'(x)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[g(x)]$. $\square$

Из теоремы следует, что для вычисления интеграла $\int f[g(x)]g'(x)dx$ сначала вычисляют $\int f(u)du = F(u)+C$, а затем подставляют вместо переменной u функцию $u = g(x)$.

Пример 10.1.

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \Big[u = x^2+a^2;\ du = 2x\,dx\Big] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}\Big|_{u=x^2+a^2} = \\ = \frac{1}{2}\ln|u| + C\Big|_{u=x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема 10.3. *Если функции u, v дифференцируемы на промежутке X и существует первообразная для $u'v$ на X, то существует первообразная для uv' на X и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)dx = uv - \int u'(x)v(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x),$$

то

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Первообразная правой части этого равенства существует, следовательно, существует первообразная для левой части $u(x)v'(x)$.

Формула интегрирования по частям следует из равенства

$$\int u(x)v'(x)dx = \int [(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)]dx =$$
$$= \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx =$$
$$= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \quad \square$$

Учитывая равенства $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

П р и м е р 10.2.

$$\int x \sin x dx = \Big[u = x;\ dv = \sin x\, dx;\ v = -\cos x\Big] =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Интегралы от рациональных функций

Если рациональная дробь с действительными коэффициентами

$$\frac{P_n(x)}{Q_{k+2m}(x)}, \quad Q_{k+2m}(x) = (x-a)^k (x^2+2px+q)^m,$$

правильная, т. е. $n < k+2m$, то ее можно единственным образом представить в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_{k+2m}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ + \frac{b_1x+c_1}{x^2+2px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+2px+q)^2} + \cdots + \\ + \frac{b_mx+c_m}{(x^2+2px+q)^m}.$$

Интегралы от простых дробей имеют вид:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, \quad k \neq 1.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

3. $$\int \frac{dx}{x^2+2px+q} = \left[\begin{array}{c} u = x+p; \\ x^2+2px+q = u^2+q-p^2 \end{array} \right] = \\ = \int \frac{du}{u^2+q-p^2}\bigg|_{u=x+p} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C, & q > p^2; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{p^2-q}} \ln \left| \dfrac{x+p-\sqrt{p^2-q}}{x+p+\sqrt{p^2-q}} \right|, & p^2 > q. \end{cases}$$

4. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+2px+q} = \int \frac{(u-p)du}{u^2+q-p^2}\Big|_{u=x+p}$,
что далее сводится к табличному интегралу и интегралу типа 3.

5. $$\int \frac{dx}{(x^2+2px+q)^m} = \Big[u = x+p\Big] =$$

$$= \int \frac{du}{(u^2+q-p^2)^m}\Big|_{u=x+p} = \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^m}.$$

Обозначим $I_m = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m}$ и выведем рекуррентную формулу для его вычисления:

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{du}{(u^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^m}dx = \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{xd(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^m} = \\ &= \frac{1}{a^2}I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\int xd\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{a^2}I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2(m-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} = \\ &= \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}I_{m-1} + \frac{x}{2(m-1)a^2(x^2+a^2)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Такой метод спуска можно провести с любого натурального $m \geqslant 2$, пошагово понижая степень в знаменателе. Для $m = 2$ получим:

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} =$$
$$= \frac{1}{2a^2} \int \frac{du}{u^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} =$$
$$= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}.$$

В качестве упражнения предлагаем читателю вывести соответствующую рекуррентную формулу для

$$J_m = \int \frac{du}{(u^2-a^2)^m}$$

самостоятельно.

Последний тип интегралов:

6. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+2px+q)^m} = \Big[u = x+p\Big] =$

$$= \int \frac{(u-p)\,du}{(u^2+q-p^2)^m}\Big|_{u=x+p} = \int \frac{(u-p)\,du}{(u^2 \pm a^2)^m},$$

далее сводится к табличному интегралу и интегралу типа 5.

Таким образом, интеграл от рациональной функции всегда «берется» в элементарных функциях — конечным числом операций он приводится к вычислению табличных интегралов.

11. Определенный интеграл

Определение 11.1. Введем в рассмотрение следующие понятия:

разбиение отрезка $[a, b]$ – это конечное, упорядоченное по возрастанию множество точек

$$T = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\};$$

мелкость разбиения T:

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \triangle x_k = \max(x_k - x_{k-1});$$

интегральная сумма функции f, отвечающая разбиению T и выбору точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, есть следующая сумма:

$$\sigma(f, T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k.$$

Функция f называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует число $I \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\lambda < \delta(\varepsilon)$ и для любого выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, выполняется

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Число I называется *определенным интегралом*, или *интегралом Римана*[19], функции f на отрезке $[a, b]$, и интеграл обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

---

[19] *Бернхард Риман* (1826–1866) – выдающийся немецкий математик, механик. Его работы оказали сильное влияние на развитие ма-

Постоянная функция $f(x) \equiv c$ интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, так как для любого разбиения T

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k = c\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k = c(b-a) = \int_a^b c\,dx = I.$$

Теорема 11.1 (необходимое условие интегрируемости). *Если f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$, но интегрируема на нем. Тогда

$$I-\varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k < I+\varepsilon$$

для какого-то разбиения T при заданном $\varepsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$. С другой стороны, найдется отрезок разбиения $[x_{k-1},x_k]$, на котором f не ограничена, и, следовательно, слагаемое $f(\xi_k)\triangle x_k$, а потому и вся сумма $\sum f(\xi_k)\triangle x_k$ выбором точки ξ_k могут быть сделаны сколь угодно большими (по абсолютной величине), и, значит, сумма выйдет за указанные границы. $\square$

тематики во 2-й половине XIX в. и в XX в. Он положил начало и преобразовал несколько областей математики: теорию аналитических функций, теорию конформных отображений, аналитическую теорию дифференциальных уравнений, топологию, аналитическую теорию чисел и др.; дал общую идею математического пространства. С его именем связаны такие понятия, как гипотеза Римана, дзета-функция Римана, интеграл Римана, риманова геометрия, риманова поверхность, сфера Римана, тензор кривизны Римана и др.

11.1. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости

Полезным для дальнейшего является понятие *колебания* функции f на отрезке $[a,b]$:

$$\omega(f,[a,b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

В частном случае для краткости будем обозначать $\omega(f,[x_{k-1},x_k]) = \omega_k(f)$.

Пусть $M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Суммы

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k, \qquad s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу*[20], соответствующими разбиению T.

Свойство 1. При фиксированном разбиении T суммы Дарбу являются точными границами множества интегральных сумм.

Свойство 2. При добавлении точек деления нижняя сумма Дарбу разве лишь увеличивается, а верхняя разве лишь уменьшается.

Свойство 3. Пусть разбиение T' получено из разбиения T добавлением p точек деления и λ_T — мелкость разбиения T. Пусть M – верхняя граница функции f на $[a,b]$, m – ее нижняя граница. Тогда

$$S(T) - S(T') \leqslant (M-m)p\lambda_T.$$

[20] Жан Гастон Дарбу́ (1842–1917) – французский математик. Основные труды посвящены дифференциальной геометрии, теории интегрирования, аналитическим функциям, алгебре, механике и математической физике.

Свойство 4. Путь $I^* = \inf\limits_T \{S(T)\}$, а $I_* = \sup\limits_T \{s(T)\}$. Тогда

$$I^* = \lim_{\lambda \to 0} S(T), \qquad I_* = \lim_{\lambda \to 0} s(T).$$

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim\limits_{\lambda \to 0} S(T)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall T \quad (\lambda < \delta \ \Rightarrow S(T) - I^* < \varepsilon)\,.$$

Заметим, что это утверждение очевидно для $f(x) \equiv C$ (подумайте, почему), и проведем доказательство для $f(x)$, отличной от константы.

Из определения I^* имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists T^\varepsilon : \ S(T^\varepsilon) < I^* + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3(M-m)p}$, где p – число точек деления T^ε, M, m – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$. Возьмем произвольное разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta$. Пусть T' содержит все точки разбиений T и T^ε. Рассмотрим

$$0 \leqslant S(T) - I^* = S(T) - S(T') + S(T') - S(T^\varepsilon) + S(T^\varepsilon) - I^*.$$

Тогда $S(T^\varepsilon) - I^* < \frac{\varepsilon}{3}$ по выбору T^ε, $S(T') - S(T^\varepsilon) \leqslant 0$, так как T' получено из T^ε добавлением точек разбиения (свойство 2), а по свойству 3

$$S(T) - S(T') \leqslant (M-m)p\delta \leqslant (M-m)p\frac{\varepsilon}{3(M-m)p} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда

$$0 \leqslant S(T) - I^* \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 11.2 (критерий Римана)**.** *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a,b]$, при котором*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция интегрируема, найдется I такое, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall T,\ \forall\, \{\xi_k\}$$
$$\lambda < \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Берем любое разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку нижняя и верхняя суммы Дарбу являются, при выбранном T, точной нижней и верхней границей множества интегральных сумм, то

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k \leqslant S(T) \leqslant I + \varepsilon,$$

т. е.

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\triangle x_k \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Достаточность. Для начала заметим, что $I^* = I_*$. Действительно, поскольку

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(T) - s(T),$$

для любого T, а по условию для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon,$$

т. е. $I^* - I_* = 0$ или $I^* = I_* = I$.

Далее, для любого разбиения T

$$s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k \leqslant S(T),$$

а при $\lambda \to 0$ по свойству 4 сумм Дарбу $s(T) \to I_* = I$ и $S(T) \to I^* = I$. Следовательно, по правилу «двух милиционеров», интегральная сумма тоже стремится к I. $\square$

11.2. Классы интегрируемых функций

Теорема 11.3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Согласно теореме Кантора, функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, в силу равномерной непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Если взять разбиение отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\lambda < \delta$, то из условия $\omega_k(f) < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию интегрируемости, функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. $\square$

Теорема 11.4. *Если функция монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция возрастает на $[a,b]$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и разбиение T отрезка $[a,b]$ такое, что

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Из монотонности f следует, что

$$\omega_k(f) = f(x_k) - f(x_{k-1}) > 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) = \lambda(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Отсюда, по критерию интегрируемости, функция f интегрируема на $[a,b]$. $\square$

Теорема 11.5. *Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция f, имеющая на $[a,b]$ конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a,b]$.*

11.3. Простейшие свойства интеграла

Свойство 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset [a,b]$.

Свойство 2. Пусть $a < c < b$. Если f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке

$[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда их сумма $f + g$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 4. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и C – константа. Тогда функция Cf интегрируема на $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 5. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их произведение fg тоже интегрируемо на отрезке $[a, b]$.

Свойство 6. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Тогда при $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Свойство 7. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Пусть существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$. Тогда при $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Свойство 8. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $|f|$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и при $a<b$ имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

11.4. Теоремы о среднем значении

Теорема 11.6. *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a,b]$, $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда, при $a<b$,*

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. По свойству 5 интеграла функция fg интегрируема на отрезке $[a,b]$. Умножая неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $g(x) \geqslant 0$, получим

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Интегрируя его по отрезку $[a,b]$, используя свойства интеграла, получим требуемое неравенство. $\square$

Теорема 11.7. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция g интегрируема и $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда существует $\xi \in [a,b]$ такое, что выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a,b]$, то существуют

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

В силу предыдущей теоремы имеют место неравенства

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то в качестве ξ можно взять любую точку из отрезка $[a, b]$. Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Таким образом,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = C \in [m, M].$$

В силу теоремы о промежуточном значении существует $\xi \in [a, b]$ такое, что $f(\xi) = C$. Отсюда получаем требуемое равенство. $\square$

11.5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.*

Теорема 11.8. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом интегрирования непрерывен на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Из интегрируемости функции f следует ее ограниченность, т. е. существует $M > 0$ такое, что $|f(t)| \leqslant M$ при всех $t \in [a, b]$. Пусть x_0 – любая точка из $[a, b]$, $\varepsilon > 0$. Используя свойства интеграла, получим

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Следовательно,

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right| \leqslant M|x - x_0|.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ таково, что для всех x со свойством $|x - x_0| < \delta$

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M|x - x_0| < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

т. е. функция F непрерывна в точке x_0. □

Теорема 11.9. *Если f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Ввиду непрерывности функции f в точке x_0, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in [a,b]$ с условием $|t - x_0| < \delta$ выполняется $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда для любого x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x - x_0} - f(x_0) =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]dt}{x - x_0}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt\right|}{|x - x_0|} <$$

$$< \frac{\varepsilon\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} dt\right|}{|x - x_0|} = \frac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon,$$

что по определению означает дифференцируемость функции $F(x)$ в точке $x_0 \in [a,b]$. □

Теорема 11.10 (о существовании первообразной). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

является первообразной для функции f на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)' = f(x),$$

а это по определению означает, что $F(x)$ является первообразной функцией для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 11.11 (формула Ньютона[21]–Лейбница[22])**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ есть ее первообразная на этом отрезке, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что функция $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ есть первообразная для функции f на отрезке $[a, b]$. Следовательно, любая другая ее первообразная Φ имеет вид

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C,$$

[21] *Исаак Ньютон* (1642–1727) – великий английский математик, механик, астроном, физик, теолог. Основатель классической физики. Создал теоретические основы механики и астрономии, открыл закон всемирного тяготения, разработал начала дифференциального и интегрального исчислений, установил фундаментальные положения физической оптики. Изобретатель зеркального телескопа.

[22] *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (1646—1716) – немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. Один из создателей дифференциального и интегрального исчислений, создатель комбинаторики. Заложил основы математической логики, сформулировал закон сохранения энергии в механике.

поэтому

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C,$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C.$$

Следовательно,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt. \qquad \square$$

Полученная формула называется *основной формулой интегрального исчисления*. Ее часто записывают в виде

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b,$$

где введено обозначение

$$F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

11.6. Методы вычисления определенного интеграла

Метод интегрирования по частям

Теорема 11.12. *Для непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций u, v имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Учитывая, что

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

получаем

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Отсюда следует требуемое равенство. □

Последнюю формулу удобно записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

П р и м е р 11.1. Вычислим интеграл

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = \int_0^\pi x\,d\sin x = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx =$$
$$= -\int_0^\pi \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2.$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Теорема 11.13. *Пусть функция $x = g(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[m, M]$ и*

$$\min_{t\in[m,M]} g(t) = a, \quad \max_{t\in[m,M]} g(t) = b,$$

причем $g(m) = a$, $g(M) = b$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_m^M f[g(t)]g'(t)dt$$

при условии, что функция f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Функции $\Phi(x)$ и $x = g(t)$ дифференцируемы на отрезках $[a, b]$ и $[m, M]$ соответственно. Согласно правилу вычисления производной сложной функции,

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))g'(t).$$

Учитывая, что $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$ при $x = g(t)$ и что $\Phi'(x) = f(x)$, получим

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = f(g(t))g'(t)dt.$$

Таким образом, функция $\Phi(g(t))$ является на отрезке $[m, M]$ первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$ и, следовательно,

$$\int_m^M f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(M)) - \Phi(g(m)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

В итоге, с одной стороны,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

а, с другой стороны,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_m^M f(g(t))g'(t)dt,$$

что и требовалось. $\square$

11.7. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, называется *криволинейной трапецией* (рис. 11.1).

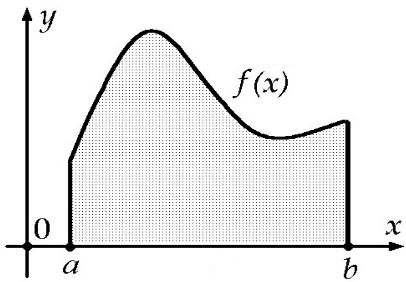


Рис. 11.1

Площадь криволинейной трапеции определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными на отрезке $[a, b]$ кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, при условии, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ на $[a, b]$ (рис. 11.2), определяется по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx.$$

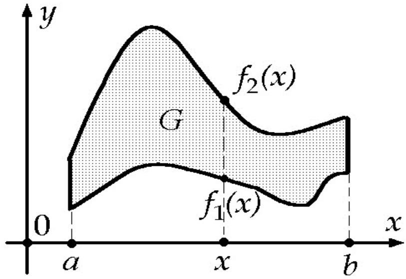


Рис. 11.2

Пусть $r = r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$) – уравнение непрерывной кривой, заданной в полярных координатах. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется *криволинейным сектором* (рис. 11.3).

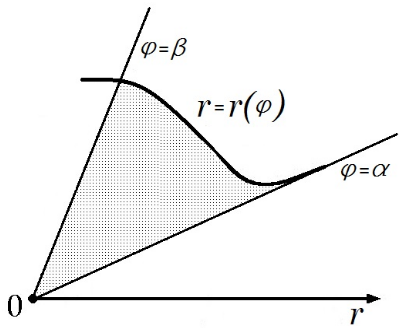


Рис. 11.3

Площадь криволинейного сектора определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Вычисление длин дуг

Пусть кусочно-гладкая кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

Тогда длина ее дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то длина дуги соответствующей кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

12. Метрические пространства. Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$

12.1. Расстояние. Сходимость в метрическом пространстве

Определение 12.1. Пусть X — произвольное непустое множество, а x, y, z, … — его элементы. Это множество называется *метрическим пространством*, если указано правило, по которому каждой паре элементов x, y ставится в соответствие единственное неотрицательное число $\rho(x,y)$, причем

1) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Это правило называется *функцией расстояния* или *метрикой* в X, а $\rho(x,y)$ называется *расстоянием между x и y*.

Метрическое пространство будем обозначать (X,ρ) или просто X.

П р и м е р 12.1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел образует метрическое пространство, если ввести метрику $\rho(x,y) = |x-y|$.

Определение 12.2. Пусть на множестве X заданы две метрики — ρ_1 и ρ_2. Метрики ρ_1 и ρ_2 называются *эквивалентными*, если найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y) \leqslant \beta\rho_1(x,y)$$

при всех $x, y \in X$.

Определение 12.3. Пусть $r > 0$. *Окрестностью радиуса r* (*r-окрестностью*) точки $a \in (X, \rho)$ называется множество $O_r(a) = \{x \in X : \ \rho(x, a) < r\}$.

П р и м е р 12.2. В пространстве $\mathbb{R}$ (см. пример 12.1)

$$O_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Определение 12.4. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $A \subseteq X$.

Точка a называется *внутренней точкой множества* A, если $\exists\, \varepsilon > 0 : \ O_\varepsilon(a) \subseteq A$.

Множество A называется *открытым* в (X, ρ), если каждая его точка внутренняя.

Под *окрестностью точки a* понимают любое открытое множество, содержащее точку a. Обозначают $O(a)$.

Точка a называется *внешней точкой множества* A, если $\exists\, O(a) : \ O(a) \subseteq X \setminus A$.

Точка a называется *граничной точкой множества* A, если

$$\forall\, O(a) \ \ \exists\, x \in A \cap O(a) \ \text{ и } \ \exists\, y \in (X \setminus A) \cap O(a).$$

Точка a называется *предельной точкой множества* A, если

$$\forall\ O(a) \ \ A \cap \check{O}(a) \neq \emptyset.$$

Или (эквивалентное определение) точка a называется *предельной точкой множества* A, если в любой ее окрестности найдется бесконечно много точек множества A.

Множество всех предельных точек множества A обозначают A'.

Множество A называется *замкнутым* в (X, ρ), если $A' \subseteq A$.

Точка a называется *точкой прикосновения множества* A, если

$$\forall\ O(a) \quad A \cap O(a) \neq \emptyset.$$

Множество всех точек прикосновения множества A обозначают $\overline{A}$ и называют *замыканием* A.

Упражнение. Покажите, что:

1) A замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием;

2) A замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Определение 12.5. Множество $A \subset (X, \rho)$ называется *ограниченным*, если найдутся $a \in X$ и $O(a)$ такие, что $A \subseteq O(a)$.

Определение 12.6. Совокупность открытых множеств $\{G_\alpha\}$ называется *открытым покрытием множества* A, если A принадлежит объединению G_α.

Определение 12.7. Множество A называется *компактным* (*компактом*) в (X, ρ), если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить его конечное подпокрытие.

Компактное множество является ограниченным и замкнутым в произвольном метрическом пространстве. Если X – конечномерное пространство, то в нем любое ограниченное замкнутое множество является компактом.

Определение 12.8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность точек (элементов) метрического пространства (X, ρ). Эта последовательность называется *сходящейся в* (X, ρ), если существует такой элемент $a \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$.

То есть сходимость последовательности элементов метрического пространства означает, что расстояние от этих элементов до предельной точки стремится к нулю.

Далее будут рассматриваться конкретные метрические пространства, для определения которых напомним одно из понятий теории множеств.

Определение 12.9. Пусть A и B – произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств A и B (обозначают $A \times B$) называется множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, причем $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$.

Декартово произведение $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$ обозначается $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbb{R}^n$ — множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждый набор будем называть *точкой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ или *n-мерным вектором* и обозначать одной буквой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. При этом число x_i называют i-й координатой вектора (точки) $x \in \mathbb{R}^n$.

Операции сложения элементов и умножения на скаляр в $\mathbb{R}^n$ вводятся покоординатно: для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

С таким образом введенными операциями пространство $\mathbb{R}^n$ является линейным (векторным) пространством.

Наиболее известными примерами пространства $\mathbb{R}^n$ являются:

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел,

$\mathbb{R}^2$ — числовая плоскость, в которой задана система координат,

и $\mathbb{R}^3$ — числовое трехмерное пространство.

12.2. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – точки пространства $\mathbb{R}^n$. Определим расстояние между ними тремя разными способами:

1) $\rho_0(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$;

2) $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

3) $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (евклидова метрика).

Функции $\rho_0(x, y)$, $\rho_1(x, y)$, $\rho_2(x, y)$ являются метриками. Доказательство этого не представляет особых трудностей и предлагается читателю, за исключением неравенства треугольника для метрики $\rho_2(x, y)$, которое мы сейчас проведем.

Вначале докажем неравенство Коши–Буняковского[23]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}.$$

Для заданных $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ введем функцию $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Представим ее в виде

$$\varphi(t) = t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

[23] *Виктор Яковлевич Буняковский* (1804–1889) – русский математик, автор работ по теории чисел и теории вероятностей.

Поскольку $\varphi(t) \geqslant 0$ при всех t, дискриминант этого квадратного трехчлена

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0,$$

откуда получаем нужно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad \square$$

Из этого неравенства следует неравенство Минковского[24]:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{12.1}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 = \\
&\qquad = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2. \ \square
\end{aligned}$$

[24] *Герман Минковский* (1864–1909) – немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырехмерную модель теории относительности.

Теперь легко доказать неравенство треугольника для метрики ρ_2:

$$\rho_2(x, y) \leqslant \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y)$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}.$$

Оно получается из неравенства Минковского (12.1), если взять $a_i = x_i - z_i$ и $b_i = z_i - y_i$.

П р и м е р 12.3. Изобразить $O_r(a)$ в $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ и $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

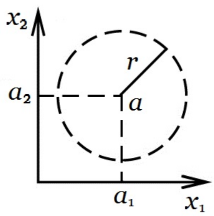


Рис. 12.1

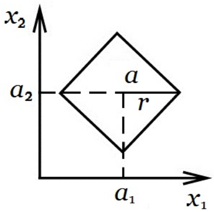


Рис. 12.2

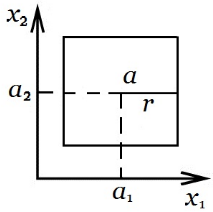


Рис. 12.3

О т в е т:

В $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$, т. е. открытый круг с центром в точке a радиуса r (рис. 12.1).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$: $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$ — квадрат с центром в точке a, диагонали которого параллельны координатным осям OX_1 и OX_2 и равны $2r$ (без границы) (рис. 12.2).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$: $\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$ — квадрат с центром в точке a, стороны которого параллельны координатным осям и равны $2r$ (без границы) (рис. 12.3).

Из рис. 12.1–12.3 видно, что в окрестность одного типа можно вписать окрестность другого типа (того же или меньшего радиуса), и наоборот, каждая окрестность содержится в окрестности другого типа (того же или большего радиуса). Например, если обозначить $O_{r,i}(a)$ окрестность точки a радиуса r в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho_i)$, то

$$O_{r,1}(a) \subseteq O_{r,2}(a) \subseteq O_{r,0}(a)$$

и

$$O_{r,0}(a) \subseteq O_{r\sqrt{2},2}(a) \subseteq O_{2r,1}(a).$$

Эти включения служат геометрической идеей доказательства эквивалентности метрик, которая (на языке сходимости) заключается в том, что сходимость последовательности к точке a в одном пространстве равносильна сходимости этой последовательности к точке a в любом другом метрическом пространстве. А именно имеет место

Лемма 12.1. *Пусть $\{x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)\}$ – последовательность в $\mathbb{R}^n$ и $a \in \mathbb{R}^n, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда если $a = \lim\limits_{p\to\infty} x^p$ в $\mathbb{R}^n$ с одним из расстояний ρ_0, ρ_1 или ρ_2, то $a = \lim\limits_{p\to\infty} x^p$ и в $\mathbb{R}^n$ с любым другим из расстояний ρ_0, ρ_1, ρ_2.*

Дальше под $\mathbb{R}^n$ мы будем понимать метрическое пространство с какой-нибудь из указанных метрик.

Теорема 12.1. *Для того чтобы последовательность $\{x^p\}$ сходилась в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы сходились $\{x_i^p\}$ — последовательности одноименных координат для любого i. Причем*

$$a = \lim_{p\to\infty} x^p \quad \Leftrightarrow \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $a_i = \lim\limits_{p\to\infty} x_i^p$.

Доказательство проведем в метрике ρ_0.

Необходимость. Пусть последовательность $\{x^p\}$ сходится в $(\mathbb{R}^n, \rho_0)$, т. е.

$$\exists\, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p \in \mathbb{N} \\ (p > N \;\Rightarrow\; \rho_0(a, x^p) < \varepsilon).$$

Поскольку

$$\rho_0(a, x^p) = \max_i |x_i^p - a_i|,$$

получаем

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow\; |x_i^p - a_i| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $i = 1, \ldots, n$ выполнено условие

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p \in \mathbb{N} \quad (p > N \;\Rightarrow\; |x_i^p - a_i| < \varepsilon),$$

т. е. $\lim\limits_{p\to\infty} x_i^p = a_i$.

Достаточность. Пусть сходится каждая последовательность координат $\{x_i^p\}$, т. е.

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad \exists\, a_i \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_i \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p \in \mathbb{N} \\ (p > N_i \;\Rightarrow\; |x_i^p - a_i| < \varepsilon)\,.$$

Положим $N = \max\limits_i \{N_i\}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ и для всех $p > N$ одновременно выполняется

$$|x_i^p - a_i| < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\max_i |x_i^p - a_i| < \varepsilon,$$

т. е. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall\, p \in \mathbb{N} \quad (p > N \;\Rightarrow\; \rho_0(a, x^p) < \varepsilon)$. $\square$

Свойства сходящихся последовательностей

К элементарным свойствам сходящихся последовательностей можно отнести следующие:

1. Единственность предела.

2. Если последовательность сходится к точке a, то любая ее подпоследовательность также сходится к a.

3. Операция предельного перехода линейна, т. е. если $x^p \to a$ и $y^p \to b$, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\lambda x^p + \mu y^p \to \lambda a + \mu b.$$

Обсудим связь ограниченности и сходимости.

Определение 12.10. Последовательность $\{x^p\}$ называется *ограниченной* в $\mathbb{R}^n$, если найдется такая окрестность $O_r(a)$, что $\{x^p\} \subset O_r(a)$. (Ср. с определением 12.5.)

Легко проверить, что любая сходящаяся последовательность ограничена. Известно, что обратное утверждение не имеет место в $\mathbb{R}^1$. Для числовых последовательностей была доказана лемма Больцано–Вейерштрасса, устанавливающая некоторый ослабленный аналог обратного утверждения. Тот же факт имеет место и в произвольном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 12.2. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *из любой ограниченной последовательности* $\{x^p\}$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность* $\{x^{p_k}\}$.

Доказательство проведем для $\mathbb{R}^3$.

Последовательность $\{x^p\}$ ограничена, т. е. существуют такие $b \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$, что $\{x^p\} \subset O_r(b)$. Это означает, что
$$\max\{|x_1^p - b_1|, |x_2^p - b_2|, |x_3^p - b_3|\} < r, \quad p \in \mathbb{N},$$

т. е. последовательности $\{x_1^p\}$, $\{x_2^p\}$ и $\{x_3^p\}$ ограничены.

Из ограниченной числовой последовательности $\{x_1^p\}$ выделим подпоследовательность $\{x_1^{p_k}\}$, которая сходится к некоторому числу, обозначим его a_1. Из последовательности векторов $\{x^p\}$ тоже выделим подпоследовательность с этими же номерами $\{x^{p_k}\}$. Переобозначим $\{x^{p_k}\}$ как $\{x^k\}$. Из последовательности вторых координат $\{x_2^k\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{k_l}\}$, обозначим ее предел a_2. Из последовательности векторов $\{x^k\}$ выделим соответствующую подпоследовательность $\{x^{k_l}\}$ и переобозначим ее как $\{x^l\}$. Из последовательности третьих координат $\{x_3^l\}$ выделим подпоследовательность $\{x_3^{l_q}\}$, сходящуюся к некоторому числу a_3. Подпоследовательность $\{x^{l_q}\}$ сходится к $a = (a_1, a_2, a_3)$, так как

$$\lim_{l_q \to \infty} x_1^{l_q} = a_1, \quad \lim_{l_q \to \infty} x_2^{l_q} = a_2, \quad \lim_{l_q \to \infty} x_3^{l_q} = a_3. \qquad \square$$

Определение 12.11. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Заметим, что *в любом метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.* Действительно, если последовательность $\{x^p\}$ сходится, то существует такой элемент $a \in X$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(p > N \Rightarrow \rho(x^p, a) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда для любых $p, q > N$

$$\rho(x^p, x^q) \leqslant \rho(x^p, a) + \rho(x^q, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема 12.3. *Метрическое пространство* $\mathbb{R}^n$ *– полное.*

Доказательство. Пусть $\{x^p\}$ – фундаментальная последовательность в $(\mathbb{R}^n, \rho_0)$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\varepsilon) \;\; \forall\, p, q \in \mathbb{N}$$
$$(p > N,\; q > N \Rightarrow \rho_0(x^p, x^q) = \max_i \{|x_i^p - x_i^q|\} < \varepsilon).$$

Тогда условие

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\varepsilon) \;\; \forall\, p, q \in \mathbb{N}$$
$$(p > N,\; q > N \Rightarrow |x_i^p - x_i^q| < \varepsilon),$$

выполнено для каждого $i = 1, \ldots, n$, т. е. каждая последовательность $\{x_i^p\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши для числовой последовательности из фундаментальности следует сходимость, т. е. существуют такие $a_i \in \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_i^p = a_i$. Отсюда по теореме 12.1 о покоординатной сходимости следует, что последовательность $\{x^p\}$ сходится. $\square$

Пример 12.4. Пусть $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\rho = |x - y|$. Пространство (X, ρ) не полное.

В самом деле, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ фундаментальна в этой метрике (легко проверить), но не сходится в этом пространстве, так как не существует такого $a \in X$, чтобы $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

13. Предел функции многих переменных

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу поставлено в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция многих переменных.* Если это правило обозначить f, то X называют областью определения, а Y — областью значений функции f. Обозначения:

$$y = f(x), \qquad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,$$

т. е. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, или

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

При исследовании функции одной переменной часто используют ее график, который можно всегда изобразить на плоскости. График функции двух переменных изображают в трехмерном пространстве. Удобно в случае $n = 2$ независимые переменные обозначать x, y, а функцию — $z = f(x, y)$; в случае $n = 3$ независимые переменные обычно обозначают x, y, z, а функцию — $u = f(x, y, z)$.

Определение 13.1 (определение предела по Коши)**.** Пусть a — предельная точка множества X ($a \in X'$). Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\, O(A) \;\; \exists\, O(a) \;\; \forall\, x \in X \cap \check{O}(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in O(A).$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Напомним, что $\check{O}(a) = O(a) \backslash \{a\}$ есть *проколотая окрестность точки a.*

Если указаны радиусы окрестностей, то это определение запишется в виде

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\,x \in X \cap \check{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

или

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\,x \in X$$
$$(0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

или $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\,x \in X$

$$\left(\begin{array}{c} 0 < |x_1 - a_1| < \delta, \\ 0 < |x_2 - a_2| < \delta, \\ \vdots \\ 0 < |x_n - a_n| < \delta \end{array} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right).$$

Определение 13.2 (определение предела по Гейне)**.** Пусть $a \in X'$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке a, если

$$\forall\,\{x^p\} \subseteq X,\; x^p \neq a,\; x^p \to a \;\Rightarrow\; f(x^p) \to A.$$

Теорема 13.1 (об эквивалентности определений предела)**.** *Пусть $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X'$ и $A \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \text{ (по Гейне)} \;\Leftrightarrow\; A = \lim_{x \to a} f(x) \text{ (по Коши).}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко проводится по той же схеме, что и доказательство этой теоремы для случая функции одной переменной.

Определение 13.3. Пусть $a \in X'$. Говорят, что функция f *бесконечно большая в точке* a или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall\, E > 0 \ \ \exists\, \delta = \delta(E) > 0 \ \ \forall\, x \in X \quad (0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x)| > E).$$

Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ не ограничено, то в нем существует такая последовательность $\{x^p\}$, что $\lim\limits_{p \to \infty} x^p = \infty$, или, если принять обозначение $x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, то найдется такое $i = \overline{1, n}$, что $\lim\limits_{p \to \infty} x_i^p = \infty$.

Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, если

$$\text{(по Коши)} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \Delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, x \in X \quad (x \in O_\Delta(\infty) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

или

$$\text{(по Гейне)} \quad \forall\, \{x^p\} \subset X \ \ \left(\lim_{p \to \infty} x^p = \infty \Rightarrow \lim_{p \to \infty} f(x^p) = A \right).$$

Пример 13.1. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Здесь

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\};$$

точка $(0, 0)$ — предельная точка области определения функции f.

Во многих задачах полезно пользоваться неравенством

$$|ab| \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

которое почти очевидно:

$$0 \leqslant (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \iff 2|ab| \leqslant a^2 + b^2.$$

Применим его к функции f:

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} = |x| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leqslant |x| \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{|x|}{2},$$

а $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{2} = 0$.

П р и м е р 13.2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ не существует, если

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Возьмем последовательность точек $\left\{M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$, она стремится к точке $(0,0)$, но $M_n \neq (0,0)$.

$$f(M_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем другую последовательность $\left\{M'_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$, она также сходится к $(0,0)$, и $M'_n \neq (0,0)$.

$$f(M'_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, $f(M_n)$ и $f(M'_n)$ стремятся к разным пределам, значит, $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$ (согласно определению по Гейне).

Наряду с уже введенным понятием предела (для $n = 2$ он называется *двойным*, а для $n = 3$ — *тройным*) для функций многих переменных определяются повторные пределы. Мы рассмотрим случай $n = 2$.

Определение 13.4. Пусть функция $f(x, y)$ определена на декартовом произведении множеств X и Y : $X \times Y$ ($X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$). Пусть $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$. Пусть при каждом $x \in X$, $x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Если существует

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

то этот предел называется *повторным пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0).

Аналогично определяется второй повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

Заметим, что повторные пределы функции $f(x, y)$, взятые в разных порядках, в общем случае не равны.

Пример 13.3. Найдем повторные пределы функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0,$$

в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Заметим также, что из существования и равенства повторных пределов в общем случае не следует существование двойного.

П р и м е р 13.4. Для функции

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

повторные пределы равны:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

а двойного предела не существует (см. пример 13.2).

Тем не менее существует определенная связь между двойным и повторными пределами, которая выражается следующей теоремой.

Теорема 13.2. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $X \times Y$ и $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ и для любого $x \in X$, $x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, и он равен A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению двойного предела

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, (x,y) \in X \times Y$$
$$\left(\begin{matrix} 0 < |x-x_0| < \delta \\ 0 < |y-y_0| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

По определению однократного предела для любого $x \in X$, $x \neq x_0$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, y \in Y \\ \left(0 < |y - y_0| < \widetilde{\delta} \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Возьмем $x \in X$ из проколотой δ-окрестности точки x_0 и рассмотрим разность $\varphi(x) - A$. Прибавим и отнимем в этом выражении $f(x, y)$ с $y \in Y$, $0 < |y - y_0| < \min\{\delta, \widetilde{\delta}\}$, и получим оценку

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) \pm f(x, y) - A| \leqslant \\ \leqslant |\varphi(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = A$. $\square$

14. Непрерывность функции многих переменных

14.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$.

Определение 14.1. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall\, O(f(x_0)) \;\; \exists\, O(x_0) \;\; \forall\, x \in X \cap O(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in O(f(x_0)),$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X \quad (\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

или $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X$

$$\left(\begin{array}{lcc} |x_1 - x_1^0| < \delta, & & \\ |x_2 - x_2^0| < \delta, & & \\ \quad\vdots & \Rightarrow & |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |x_n - x_n^0| < \delta & & \end{array} \right),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 14.2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall \{x^p\} \subset X \quad \left(\lim_{p\to\infty} x^p = x_0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(x^p) = f(x_0)\right).$$

Приведенные определения равносильны, что следует из эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 14.1. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то найдутся такие $O(x_0)$ и $r > 0$, что*

$$f(x) \geqslant r > 0 \quad (f(x) \leqslant -r < 0) \ \text{ при } \ x \in O(x_0) \cap X.$$

Доказательство. Если $x_0 \in X'$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap X \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, по нему найдем $\delta(\varepsilon)$ и для любого $x \in O_\delta(x_0) \cap X$ получим

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

т. е.

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0),$$

откуда

$$f(x) > r = \frac{f(x_0)}{2} > 0. \qquad \square$$

Как и для функции одной переменной, имеют место теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих теорем те же, что и для функции одной переменной.

Теорема 14.2 (непрерывность сложной функции). *Пусть отображение $x = \varphi(t)$ определено в некоторой окрестности точки $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и непрерывным образом отображает ее в точку $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Заметим, что для отображения

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

непрерывность в точке t_0 означает непрерывность каждой из функций $\varphi_i(t)$ в точке t_0 как функции m переменных, т. е. если $\{t^p\} \subset \mathbb{R}^m$ и $t^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} t_0$, то

$$\varphi(t^p) = (\varphi_1(t^p), \varphi_2(t^p), \dots, \varphi_n(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = x_0.$$

Положим $x^p = \varphi(t^p)$, тогда $x^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. В силу непрерывности функции f, $f(x^p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, т. е.

$$F(t^p) = f(\varphi(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0). \qquad \Box$$

14.2. Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 14.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Определение 14.4. Множество M из $\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Напомним, что *непрерывной кривой* называется непрерывный образ отрезка

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 14.3. *Пусть G — связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция f непрерывна на G и существуют $a \in G$ и $b \in G$ такие, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Так как G — связное множество, существует непрерывная кривая

$$L\ :\ \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

соединяющая точки a и b и лежащая в G, т. е.
$a = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$, $b = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$ и $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in G$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. По теореме о непрерывности сложной функции функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(a)$, $F(\beta) = f(b)$, т. е. $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и

C между $F(\alpha)$ и $F(\beta)$. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции одного переменного найдется такая точка $\gamma \in (\alpha, \beta)$, что $F(\gamma) = C$, а тогда $c = (\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \ldots, \varphi_n(\gamma)) \in G$ — искомая точка.$\square$

Теорема 14.4 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Любая непрерывная на компакте функция ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на компакте F. Предположим, что она не ограничена на F, т. е.

$$\forall\, E > 0 \;\; \exists\, x^E \in F \;\; |f(x^E)| > E.$$

Тогда, полагая E натуральными, получим

$$\begin{gathered} E = 1 \;\; \exists\, x^1 \in F \;\; |f(x^1)| > 1, \\ E = 2 \;\; \exists\, x^2 \in F \;\; |f(x^2)| > 2, \\ \ldots \\ E = p \;\; \exists\, x^p \in F \;\; |f(x^p)| > p, \\ \ldots \end{gathered}$$

Последовательность $\{x^p\}$ ограничена (что следует из ограниченности F), выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x^{p_k}\}$, и пусть a – ее предел. Поскольку F замкнуто, $a \in F$. Из непрерывности функции f следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{p_k}) = f(a)$, а из построения $\{x^p\}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x^{p_k})| = +\infty$. Полученное противоречие доказывает ограниченность функции f на компакте F. $\square$

Теорема 14.5 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Непрерывная на компакте функция достигает своих точных граней.*

Доказательство полностью совпадает с доказательством этой теоремы для функции одной переменной.

Определение 14.5. Пусть функция f определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. f называется *равномерно непрерывной на* X, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\,x', x'' \in X \\ (\rho(x', x'') < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

или (если $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, а $x'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$)

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\,x', x'' \in X$$

$$\left(\begin{array}{c} |x_1' - x_1''| < \delta, \\ |x_2' - x_2''| < \delta, \\ \vdots \\ |x_n' - x_n''|, < \delta \end{array} \;\Rightarrow\; |f(x_1', \dots, x_n') - f(x_1'', \dots, x_n'')| < \varepsilon \right).$$

Заметим, что из равномерной непрерывности на множестве X следует непрерывность на X. Но не всякая непрерывная на X функция является равномерно непрерывной на X.

Теорема 14.6 (теорема Кантора)**.** *Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство полностью совпадает с доказательством этой теоремы для функции одной переменной.

15. Дифференцируемость функции многих переменных

15.1. Частные производные

Определение 15.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

то их называют *частными производными* функции f в точке (x_0,y_0) по переменным x и y соответственно и обозначают

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ или } f'_x(x_0,y_0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ или } f'_y(x_0,y_0).$$

Если частные производные существуют в каждой точке некоторого множества, то говорят, что *функция имеет частные производные на этом множестве.*

Аналогично определяют и обозначают частные производные функции трех и более переменных. Например, если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)}{\Delta x_k}- \\ -\frac{f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k},$$

то его называют *частной производной* функции f в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменой x_k и обозначают

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n).$$

Для вычисления частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ обычно пользуются формулами и правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все переменные, кроме x_k, постоянными.

15.2. Определение дифференцируемости и дифференциала функции

Рассмотрим полное приращение функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 15.2. Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), если существуют числа A и B такие, что ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{15.1}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Теорема 15.1. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет в этой точке частные производные по каждому аргументу x, y. При этом $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$, где A и B – числа из равенства* (15.1).

Доказательство. В определении дифференцируемости положим $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$ и получим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Поделим на Δx и посчитаем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

т. е. существует $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и она равна A. $\square$

Учитывая доказанное свойство, условие дифференцируемости функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Часто бывает удобна следующая (эквивалентная) форма определения дифференцируемости.

Определение 15.3. Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где функции $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Определение 15.4. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), т. е. ее полное приращение в этой точке удовлетворяет равенству (15.1). *Полным дифференциалом* функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется линейная относительно приращений Δx, Δy часть приращения функции f; обозначается $df(x_0, y_0)$:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Дифференциалом независимой переменной x или y называют приращение этой переменной, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда дифференциал функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) можно записать в виде

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Эта формула обобщается на случай дифференцируемой функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Здесь производные взяты в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Если функция f дифференцируема на множестве X, то и ее полный дифференциал определен в каждой точке множества X. В этом случае df есть функция $2n$ переменных:

$$df = df(x_1, \ldots, x_n, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n).$$

Однако в ряде случаев переменные $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ фиксируют и рассматривают df как функцию точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Например, так поступают при определении второго и высших дифференциалов функции f.

15.3. Дифференцирование сложной функции

Теорема 15.2. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), а функция $f(u, v)$ определена в некоторой окрестности точки*

$(u_0, v_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Если функция $f(u, v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0) и если в точке (x_0, y_0) существуют производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные сложной функции $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, причем

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \tag{15.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{15.3}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = f(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - \\ - f(u(x_0, y_0), v(x_, y_0)) =\end{aligned}$$

в силу дифференцируемости функции f получим

$$\begin{aligned}= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \\ + \alpha(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \beta(\Delta u, \Delta v)\Delta v,\end{aligned} \tag{15.4}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta u(x_0, y_0) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0), \\ \Delta v = \Delta v(x_0, y_0) = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0),\end{aligned}$$

и $\alpha(\Delta u, \Delta v)$ и $\beta(\Delta u, \Delta v) \to 0$ при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$.

Докажем формулу (15.2). Для этого в равенстве (15.4) положим $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, разделим обе части на Δx:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \\ + \alpha(\Delta u, \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta(\Delta u, \Delta v)\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

и устремим Δx к нулю. Тогда, в силу непрерывности функций u и v, $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$, следовательно, α и β также стремятся к нулю и в пределе получается равенство (15.2).

Формула (15.3) доказывается аналогично. □

Аналогичные формулы при соответствующих условиях справедливы для частных производных $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ сложной функции $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где u_k – функции переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Незначительное усиление условий предыдущей теоремы приводит к дифференцируемости сложной функции.

Теорема 15.3. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), а функция $f(u, v)$ определена в некоторой окрестности точки $(u_0, v_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Если функция $f(u, v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0), а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0), то сложная функция $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ является дифференцируемой в точке (x_0, y_0), причем ее частные производные определяются формулами (15.2), (15.3).*

Аналогичный результат справедлив в случае большего числа переменных.

15.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (она называется частной производной первого порядка) в некоторой окрестности некоторой точки M. Если функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ имеет в точке M частную производную по аргументу x_k, то такая производная называется *частной производной второго порядка* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по аргументам x_i, x_k в точке М и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(M), \quad f_{x_i x_k}(M).$$

Если $k \neq i$, то частная производная второго порядка называется *смешанной*. Если $k = i$, то частная производная второго порядка обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ или } f_{x_i^2}.$$

Пусть функция $f(x, y)$ независимых переменных x и y дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда первый дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

является функцией четырех переменных: x, y, dx, dy, а производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ – дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) функциями.

Дифференциал второго порядка функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется как дифференциал в этой точке от первого дифференциала df при следующих условиях:

1) df рассматривается как функция двух независимых переменных — x и y;

2) при вычислении дифференциалов от функций $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ приращения независимых переменных x и y берутся равными dx и dy.

На основании этого определения получается формула

$$d^2f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2.$$

Если переменные x и y не независимые, а являются, в свою очередь, функциями, например, двух переменных: $x = x(t_1, \ldots, t_m)$ и $y = y(t_1, \ldots, t_m)$, которые имеют дифференциалы второго порядка в точке $(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, и $x_0 = x(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, $y_0 = y(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, $M_0(x_0, y_0)$, то

$$d^2f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)d^2y.$$

Заметим, что в общем случае смешанные производные одного порядка по одним и тем же переменным, но взятые в различных порядках, не совпадают. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 15.4. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в $O((x_0, y_0))$ и в этой окрестности существуют $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$, которые непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) = \psi(y);$$
$$\Delta_y f = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = \varphi(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_y(\Delta_x f) &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - \\ &\qquad -f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y f) &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - \\ &\qquad -f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_y(\Delta_x f) = \Delta_x(\Delta_y f)$. Используя формулу Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}&\Delta_y(\Delta_x f) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'_y(y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y = \\ &\quad = [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y)]\Delta y = \\ &\qquad\qquad = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y \Delta x,\end{aligned}$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$\begin{aligned}&\Delta_x(\Delta_y f) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x) = \\ &\quad = [f'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0)]\Delta x = \\ &\qquad\qquad = [f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)]\Delta x \Delta y,\end{aligned}$$

где $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$, т. е.

$$f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y).$$

В силу того, что $0 < \theta_i < 1$, а f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0), при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ получаем

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0). \qquad \square$$

Теорема 15.5 (формула Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x^0)$, где $O(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, и имеет в этой окрестности дифференциалы до $(k+1)$-го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:*

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(x_0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(x^0) + \\ & + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f(x^0 + \theta(x - x^0)), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O(x^0)$, $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(x^0 + t(x - x^0)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in O(x^0).$$

Функция $\varphi(t)$ дифференцируема на $[0,1]$ до $(k+1)$-го порядка включительно, причем $\varphi^{(p)}(t) = d^p f(x^0 + t(x - x^0))$, где $\Delta x_i = dx_i$. Для функции $\varphi(t)$ можно записать формулу Тейлора по степеням t с остатком в форме Лагранжа при $t = 1$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\theta),$$

где $0 < \theta < 1$, а тогда (учитывая вид $\varphi^{(p)}(t)$ при $t = 0$)

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \ldots + \frac{d^k f(x^0)}{k!} + \frac{d^{k+1} f(x^0 + \theta(x - x^0))}{(k+1)!},$$

причем во всех дифференциалах dx_i берутся равными $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. $\square$

16. Неявные функции

Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{16.1}$$

Если для каждого x из некоторого множества X существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (16.1), то это означает, что на множестве X определена (однозначная или многозначная) функция $y = f(x)$, для которой на множестве X имеет место тождественное равенство

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

При этом правило f, ставящее в соответствие каждому x некоторое число, не указано явно, а задано с помощью уравнения (16.1). Такой способ задания функции $y = f(x)$ называется *неявным*, а сама функция $y = f(x)$ – *неявной функцией*.

Аналогично уравнению (16.1) можно рассмотреть уравнения с большим числом переменных:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{16.2}$$

и ввести понятие неявной функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемой уравнением (16.2).

Рассмотрим для примера уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{16.3}$$

Если положить $X = (-1, 1)$, $Y = \mathbb{R}$, то точкам x будут соответствовать два разных значения y, удовлетворяющих совместно с x уравнению (16.3): $y' = \sqrt{1 - x^2}$

и $y'' = -\sqrt{1-x^2}$ (рис. 16.1). А в случае $X \subseteq (-1,1)$, $Y \subseteq (0,+\infty)$ уравнение (16.3) определяет однозначную функцию $y = \sqrt{1-x^2}$.

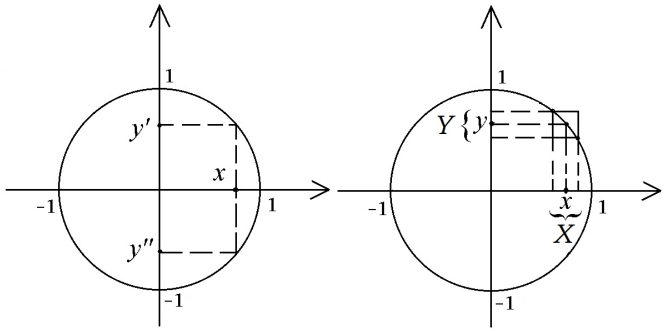


Рис. 16.1

На практике не всегда удается разрешить уравнение относительно одной из переменных и получить тем самым явное выражение для функции, разрешающей уравнение (16.1). Однако для исследования свойств неявных функций совсем не обязательно находить явную зависимость переменных. Часто удается получить достаточно полную информацию о поведении неявной функции по уравнению, которым она определяется.

Теорема 16.1. *Пусть функция $F(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной по y в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем*

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,y_0) \neq 0.$$

Тогда для некоторой окрестности точки x_0 (как области определения функции) и некоторой окрестности точки y_0 (как множества значений) существует единственная *однозначная функция* $y = f(x)$, *непрерывная на всей своей области определения, обращающая уравнение* (16.1) *в верное равенство, и такая, что* $y_0 = f(x_0)$. *Если, кроме того, у функции* $F(x, y)$ *существует конечная частная производная по* x, *то функция* $f(x)$ *дифференцируема.*

Доказательство. Положим для определенности, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Так как по условию эта частная производная непрерывна, она принимает только положительные значения в целой окрестности точки (x_0, y_0), т. е. существует такое $l > 0$, что для всех x и y таких, что $|x - x_0| \leqslant l$ и $|y - y_0| \leqslant l$, выполняется $F'_y(x, y) > 0$. Из этого следует, что функция $F(x, y)$ как функция одной переменной y при каждом фиксированном значении $x \in [x_0 - l, x_0 + l]$ является строго возрастающей на отрезке $[y_0 - l, y_0 + l]$; в частности это верно при $x = x_0$. А поскольку по условию $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - l) < 0$, $F(x_0, y_0 + l) > 0$. Ввиду непрерывности функции $F(x, y)$ эти неравенства сохранятся и для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, т. е. существует такое $\sigma > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \sigma$, выполняется $F(x, y_0 - l) < 0$ и $F(x, y_0 + l) > 0$. Обозначим через m наименьшее из чисел l и σ. Тогда для каждого фиксированного $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ непрерывная функция $F(x, y)$, как функция одной переменной y, принимает на отрезке $[y_0 - l, y_0 + l]$ промежуточное значение, равное нулю. В силу строгого возрастания этой функции такое значение y единственно, т. е. для каждого значения $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ существует единственное значение $y \in (y_0 - l, y_0 + l)$ такое, что $F(x, y) = 0$. Тем самым доказано существование на окрестности $(x_0 - m, x_0 + m)$ единственной однозначной функции $y = f(x)$, удовлетворяющей уравнению (16.1) и принимающей значения из окрестности $(y_0 - l, y_0 + l)$.

Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то в силу однозначности функция $f(x)$ принимает в точке x_0 значение y_0, т. е. $y_0 = f(x_0)$ (рис. 16.2).

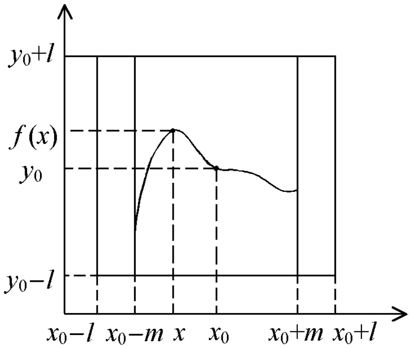


Рис. 16.2

Докажем теперь непрерывность функции $f(x)$. Рассмотрим сначала точку x_0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $\varepsilon \leqslant l$. Тогда, согласно предыдущей части доказательства, $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ и $F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$. Из этого следует, что существует $\delta > 0$ (оно ищется так же, как искалось m в предыдущей части доказательства) такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняются неравенства $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Следовательно, отвечающее точке x значение $y = f(x)$ лежит между $y_0 - \varepsilon$ и $y_0 + \varepsilon$, т. е. $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Для доказательства непрерывности функции $f(x)$ в любой другой точке $x_1 \in (x_0 - m, x_0 + m)$ отметим, что пара $(x_1, f(x_1))$ является решением уравнения (16.1) и для нее выполнены все остальные условия теоремы. Следовательно, в силу доказанного, $f(x)$ непрерывна в точке x_1.

Докажем дифференцируемость функции $f(x)$ при условии существования $F'_x(x,y)$. Рассмотрим точку x_0. По условию $F(x_0,y_0)=0$. Для достаточно малых приращений Δx в точке $x_0+\Delta x$ определена функция $f(x)$. Поэтому пара $(x_0{+}\Delta x, f(x_0{+}\Delta x))$ тоже удовлетворяет уравнению (16.1). Следовательно,

$$F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - F(x_0, f(x_0)) = 0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$\begin{gathered} F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - F(x_0+\Delta x, f(x_0)) + \\ + F(x_0+\Delta x, f(x_0)) - F(x_0, f(x_0)) = 0. \end{gathered} \tag{16.4}$$

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$\begin{gathered} F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) - F(x_0+\Delta x, f(x_0)) = \\ = F'_y(x_0+\Delta x, y_1)(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)), \end{gathered}$$

где y_1 – промежуточное значение между $f(x_0)$ и $f(x_0{+}\Delta x)$. Применим эту формулу в (16.4), поделим обе части получившегося равенства на Δx и выразим разностное отношения для функции f:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F(x_0+\Delta x, f(x_0)) - F(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0+\Delta x, y_1)\Delta x}. \tag{16.5}$$

Из непрерывности $f(x)$ получаем, что $y_1 \to y_0 = f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Функция $F'_y(x,y)$ также непрерывна, поэтому $F'_y(x_0+\Delta x, y_1) \to F'_y(x_0,y_0)$ при $\Delta x \to 0$. Кроме того,

$$\frac{F(x_0+\Delta x, f(x_0)) - F(x_0, f(x_0))}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} F'_x(x_0, f(x_0)) = \\ = F'_x(x_0,y_0).$$

Итак, предел правой части равенства (16.5) при $\Delta x \to 0$ существует, значит, существует и предел левой части, т. е. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}. \tag{16.6}$$

Для доказательства дифференцируемости в произвольной точке $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$ можно воспользоваться тем же приемом, что и при доказательстве непрерывности. Теорема полностью доказана. $\square$

Производные высших порядков неявно заданной функции находятся последовательным дифференцированием равенства (16.6).

Рассмотрим случай трех переменных. Если у функции $F(x, y, z)$ существуют все частные производные F'_x, F'_y, F'_z и при этом $F'_z(x, y, z) \neq 0$ и непрерывна, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как функцию двух независимых переменных x и y, при этом частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Заметим, что частные производные функции z являются решениями линейной системы уравнений, получающейся дифференцированием тождества $F(x, y, z(x, y)) = 0$ по переменным x или y:

$$F'_x(x, y, z(x, y)) + F'_z(x, y, z(x, y))z'_x(x, y) = 0;$$

$$F'_y(x, y, z(x, y)) + F'_z(x, y, z(x, y))z'_y(x, y) = 0.$$

В еще более общем случае $n+m$ переменных рассмотрим систему m уравнений

$$\begin{array}{rcl} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0 \\ \ldots & & \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) & = & 0. \end{array} \qquad (16.7)$$

Если в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ все F_i имеют непрерывные частные производные и якобиан[25] системы (16.7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

где $a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k}$, отличен от нуля, то система (16.7) определяет y_i как неявные непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Частные производные этих функций являются решениями линейной системы уравнений, получающейся дифференцированием системы (16.7) с учетом того, что входящие в нее y_i зависят от x_k. Аналогично находятся дифференциалы.

[25] В честь *Карла Густава Якóби* (1804–1851) – немецкого математика и механика, внесшего огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики.

17. Замена переменных в дифференциальных выражениях

Методы дифференцирования функций, заданных параметрически, сложных функций и неявно заданных функций могут использоваться для замены переменных в дифференциальных выражениях – одного из основных способов решения дифференциальных уравнений. В этом пункте мы рассмотрим лишь вычислительный аспект замены переменных, не затрагивая проблемы теоретического обоснования проводимых операций.

17.1. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные

Пусть дано дифференциальное выражение

$$\Phi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$$

и в нем требуется перейти к новой переменной t и новой функции $u(t)$ по формулам

$$\begin{cases} x = f(t, u), \\ y = g(t, u). \end{cases} \tag{17.1}$$

Так как u является функцией от t, то система (17.1) при некоторых условиях определяет параметрически функцию $y(x)$. Поэтому производную $y'(x)$ можно выразить следующим образом:

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{g'_t + g'_u u'}{f'_t + f'_u u'}. \tag{17.2}$$

Обозначим $z = y'(x)$. Формула (17.2) показывает зависимость z от t и u, т. е. $z = h(t, u)$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = f(t, u), \\ z = h(t, u). \end{cases}$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, найдем z'_x, т. е. y''_{x^2}. Эта производная окажется выраженной через t, u, u', u''. Таким образом можно найти производную функции $y(x)$ любого порядка. Подставив найденные значения в Φ, получим новое дифференциальное выражение

$$\Psi(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}).$$

В частном случае, когда меняется только независимая переменная x на переменную t, т. е.

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y(x) = u(t), \end{cases}$$

формулы оказываются более простыми. А именно, дифференцируя верное равенство $y(f(t)) = u(t)$, получим

$$y'_x f'_t = u'_t; \quad y''_{x^2}(f'_t)^2 + y'_x f''_{t^2} = u''_{t^2},$$

откуда

$$y''_{x^2} = \frac{u''_{t^2} - y'_x f''_{t^2}}{(f'_t)^2} = \frac{u''_{t^2} f'_t - u'_t f''_{t^2}}{(f'_t)^3}$$

и т. д.

Пример 17.1. В дифференциальне выражение

$$\Phi(x, y, y', y'') = y'' + (x + y)(1 + y')^3$$

требуется сделать замену $x = u + t$, $y = u - t$, где $u = u(t)$.

Составляем систему

$$\begin{cases} x = u(t) + t, \\ y = u(t) - t, \end{cases}$$

находим производные первого и второго порядка функции $y(x)$, задаваемой этой системой параметрически:

$$y'_x = \frac{u'_t - 1}{u'_t + 1},$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{u''_{t^2}(u'_t + 1) - (u'_t - 1)u''_{t^2}}{(u'_t + 1)^3} = 2\frac{u''_{t^2}}{(u'_t + 1)^3}.$$

Подставим значения x, y, y', y'' в Φ:

$$2\frac{u''}{(u' + 1)^3} + 2u\left(1 + \frac{u' - 1}{u' + 1}\right)^3,$$

в итоге получили дифференциальное выражение

$$\Psi(u, u', u'') = \frac{2}{(u' + 1)^3}(u'' + 8u(u')^3),$$

которое, в отличие от исходного, уже не содержит независимую переменную.

17.2. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные

Пусть дано дифференциальное выражение

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) \qquad (17.3)$$

и в нем требуется перейти к новым независимым переменным u, v и новой функции $w = w(u, v)$ по формулам

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

Подставляя в последнюю формулу значения

$$z = z(x, y), \quad x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad w = w(u, v),$$

получим верное равенство

$$z(f(u, v, w(u, v)), g(u, v, w(u, v))) = h(u, v, w(u, v)).$$

Найдем частные производные по u, v от обеих частей этого равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_x(f'_u + f'_w w'_u) + z'_y(g'_u + g'_w w'_u) = h'_u + h'_w w'_u \\ z'_x(f'_v + f'_w w'_v) + z'_y(g'_v + g'_w w'_v) = h'_v + h'_w w'_v. \end{array} \right. \tag{17.4}$$

Решая эту систему относительно z'_x, z'_y, найдем их выражения через частные производные функций f, g, h и частные производные новой функции w.

Вычисляя затем частные производные по u, v в уравнениях системы (17.4), получим новую систему из четырех уравнений для определения четырех частных производных второго порядка функции $z(x, y)$ и т. д.

В частном случае, когда меняются только независимые переменные, а значения функции $z = z(x, y)$ остаются прежними, т. е. $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z(x, y) = w(u, v)$, формулы оказываются более простыми:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_x f'_u + z'_y g'_u = w'_u \\ z'_x f'_v + z'_y g'_v = w'_v. \end{array} \right.$$

Наконец, если формулы замены выражают не старые переменные через новые, а наоборот, то в формулах (17.2) и (17.4) просто меняются ролями производные старой и новой функций.

Пример 17.2. В дифференциальное выражение

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

требуется ввести новые переменные $u = x + y$, $v = x - y$ и новую функцию $w = xy - z$.

Подставим в последнее уравнение значения входящих в него функций от x, y :

$$w(x + y, x - y) = xy - z(x, y).$$

Найдем частные производные по x и y от обеих частей этого верного равенства:

$$\begin{cases} w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot 1 = y - z'_x \\ w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot (-1) = x - z'_y. \end{cases}$$

Найдем частные производные по x и y от уравнений этой системы:

$$\begin{cases} w''_{u^2} + w''_{uv} + w''_{vu} + w''_{v^2} = -z''_{x^2} \\ w''_{u^2} - w''_{uv} + w''_{vu} - w''_{v^2} = 1 - z''_{xy} \\ w''_{u^2} + w''_{uv} - w''_{vu} - w''_{v^2} = 1 - z''_{yx} \\ w''_{u^2} - w''_{uv} - w''_{vu} + w''_{v^2} = -z''_{y^2}. \end{cases} \tag{17.5}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= -w''_{u^2} - w''_{uv} - w''_{vu} - w''_{v^2}, \\ z''_{xy} &= 1 - w''_{u^2} + w''_{uv} - w''_{vu} + w''_{v^2}, \\ z''_{y^2} &= -w''_{u^2} + w''_{uv} + w''_{vu} - w''_{v^2}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные значения в Φ:

$$2 - 4w''_{u^2} + 2w''_{uv} - 2w''_{vu} = \Psi(w''_{u^2}, w''_{uv}, w''_{vu}).$$

Если у функции $z(x,y)$ смешанные производные совпадали: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то, как следует из системы (17.5), у функции $w(u,v)$ они тоже совпадут. Тогда выражение Ψ примет совсем простой вид:

$$\Psi = \Psi(w''_{u^2}) = 2 - 4w''_{u^2}.$$

Пример 17.3. В дифференциальное выражение

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

требуется ввести новые переменные $x = u$, $y = uv$, а значения функции z остаются прежними, т. е. $z(x,y) = w(u,v)$.

Составляем верное равенство $z(u,uv) = w(u,v)$ и дифференцируем его по переменным u и v:

$$\begin{cases} z'_x \cdot 1 + z'_y \cdot v = w'_u \\ z'_x \cdot 0 + z'_y \cdot u = w'_v. \end{cases}$$

Отсюда

$$z'_y = \frac{w'_v}{u}, \qquad z'_x = w'_u - vz'_y = w'_u - \frac{v}{u}w'_v.$$

Подставляем найденные выражения для z'_x, z'_y, а также $x = u,\ y = uv,\ z(x,y) = w(u,v)$ в Φ и получаем:

$$u\left(w'_u - \frac{v}{u}w'_v\right) + uv\frac{w'_v}{u} - w = uw'_u - w = \Psi(u, w, w'_u).$$

Это выражение проще, чем Φ, поскольку содержит меньше переменных и производных.

18. Экстремум функции многих переменных

18.1. Определение и необходимые условия экстремума функции нескольких переменных

Определение 18.1. Пусть функция

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

определена в некоторой окрестности точки

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{18.1}$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

то x_0 называются *точкой строгого максимума (минимума)* функции.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называется *экстремумами функции*.

Теорема 18.1 (необходимое условие экстремума). *Если точка* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *является точкой экстремума функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и в этой точке существует частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$*, то она равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию одной переменной x_i:

$$g(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Существование конечной частной производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i в точке x_0 эквивалентно дифференцируемости функции $g(x_i)$ в точке x_i^0. Очевидно, что функция $g(x_i)$ имеет в точке x_i^0 локальный экстремум. А тогда $g'(x_i^0) = 0$. Это означает, что $f'_{x_i}(x_0) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то частные производные по всем переменным в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad (18.2)$$

а следовательно,

$$df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (18.2), называют *точками, подозрительными на экстремум* (или *стационарными точками*). Точки экстремума функции следует искать только среди точек, подозрительных на экстремум.

Оказывается, не любая стационарная точка является точкой локального экстремума дифференцируемой функции. Например, для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ (рис. 18.1) точка $(0; 0)$ является и стационарной:

$$df(0, 0) = 2x\,dx + 2y\,dy|_{(0,0)} = 0,$$

и точкой локального минимума:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0, 0),$$

а для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ (рис. 18.2) точка $(0; 0)$ является стационарной:

$$df(0, 0) = 2x\,dx - 2y\,dy|_{(0,0)} = 0,$$

но не является точкой локального экстремума, так как в любой окрестности точки $(0; 0)$ функция принимает и положительные и отрицательные значения:

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2, \quad f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2.$$

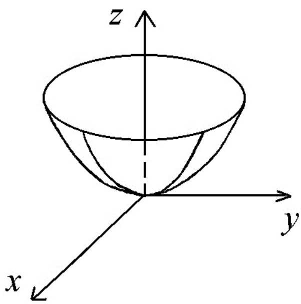


Рис. 18.1

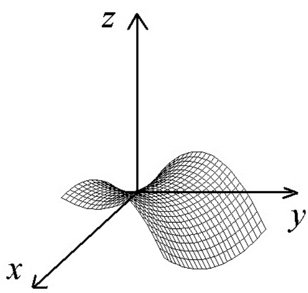


Рис. 18.2

Следовательно, для исследования локального экстремума нужны некоторые достаточные условия.

Предварительно вспомним алгебраические понятия.

18.2. Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где a_{ij} – вещественные числа, называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа a_{ij} называются *коэффициентами квадратичной формы*, а составленная из этих коэффициентов матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы.*

Если $a_{ij} = a_{ji}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то матрица A называется *симметричной.*

Определители

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы A.

Квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

В курсе алгебры доказывается

Критерий Сильвестра[26]

1. *Для того чтобы квадратичная форма* $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *с симметричной матрицей была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительны:*

$$A_1 > 0, \ldots, A_n > 0.$$

2. *Для того чтобы квадратичная форма* $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *с симметричной матрицей была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки её главных миноров чередовались следующим образом:*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \ldots$$

18.3. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных

Рассмотрим второй дифференциал функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) dx_i dx_j.$$

[26] *Джеймс Сильвестр* (1814–1897) – известный английский математик. Основные работы посвящены алгебре, теории чисел, теории вероятностей, механике и математической физике; наиболее важными являются исследования по теории инвариантов и ее геометрические приложения.

Это выражение является квадратичной формой относительно дифференциалов независимых переменных dx_i. Матрица, составленная из коэффициентов этой квадратичной формы, будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 18.2. *Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем в самой точке M_0 все частные производные второго порядка непрерывны. Пусть, кроме того, M_0 – стационарная точка. Тогда точка M_0:*

1) является точкой минимума функции, если второй дифференциал – положительно определенная квадратичная форма, т. е. в этой точке все главные миноры матрицы A положительны;

2) является точкой максимума, если второй дифференциал – отрицательно определенная квадратичная форма, т. е. в матрице A все главные миноры четного порядка положительны, а все главные миноры нечетного порядка отрицательны;

3) не является точкой экстремума, если второй дифференциал – неопределенная квадратичная форма, т. е. хотя бы один из определителей четного порядка меньше нуля.

Доказательство. Запишем приращение функции f в точке M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(M_1)-f(M_0)=df(M_0)+\frac{1}{2}d^2f(M_0+\theta(M_1-M_0)),$$

где $M_1=(x_1^1,\dots,x_n^1)$, $dx_i=\Delta x_i=x_i^1-x_i^0$ $(i=1,\dots,n)$. По условию $df(M)=0$, значит, формулу можно переписать следующим образом:

$$f(M_1)-f(M)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(M+\theta(M_1-M))\Delta x_i\Delta x_j.$$

Из непрерывности частных производных $f''_{x_ix_j}$ в точке M следует, что

$$f''_{x_ix_j}(M+\theta(M_1-M))\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}f''_{x_ix_j}(M),\qquad i,j=1,\dots,n,$$

где $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^1-x_i^0)^2}$ – расстояние между точками M и M_1. Поэтому их можно представить в виде

$$f''_{x_ix_j}(M+\theta(M_1-M))=f''_{x_ix_j}(M)+\alpha_{ij}(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n),$$

где $\alpha_{ij}\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$. Таким образом,

$$f(M_1)-f(M)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(M)\Delta x_i\Delta x_j+\alpha(\rho)\rho^2,$$

где

$$\alpha(\rho)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho}\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Обозначим $h_i=\dfrac{\Delta x_i}{\rho}$. Тогда для $M_1\neq M$

$$\begin{aligned} f(M_1)-f(M) &= \frac{1}{2}\rho^2\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(M)h_ih_j+\alpha(\rho)\rho^2 = \\ &= \rho^2(\Phi(h_1,\ldots,h_n)+\alpha(\rho)), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(h_1,\ldots,h_n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j, \quad a_{ij}=f''_{x_ix_j}(M).$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2=1$, т. е. функция $\Phi(h_1,\ldots,h_n)$ определена в точках n-мерной сферы единичного радиуса.

I. Рассмотрим сначала случай положительно определенной квадратичной формы $d^2f(M)$. В этом случае функция $\Phi(h_1,\ldots,h_n)$, определенная на единичной сфере, принимает только положительные значения. Кроме того, очевидно, что $\Phi(h_1,\ldots,h_n)$ непрерывна, а область ее определения – ограниченное замкнутое множество. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, $\Phi(h_1,\ldots,h_n)$ достигает своего инфимума, т. е.

$$\inf\Phi(h_1,\ldots,h_n)=\Phi(h_1^0,\ldots,h_n^0)=\mu>0.$$

Так как функция $\alpha(\rho)$ является бесконечно малой, то для достаточно малых ρ выполняется $|\alpha(\rho)|<\mu$. Поэтому для таких ρ

$$f(M_1)-f(M)=\rho^2(\Phi(h_1,\ldots,h_n)+\alpha(\rho))\geqslant\rho^2(\mu+\alpha(\rho))>0,$$

т. е. точка M является точкой локального минимума.

II. В случае отрицательно определенной квадратичной формы $d^2f(M)$ аналогично доказывается, что точка M – точка локального максимума.

III. Пусть $d^2 f(M)$ – знакопеременная квадратичная форма, т. е. существуют два набора $(t'_1, \dots, t'_n)$ и $(t''_1, \dots, t''_n)$ значений для $dx_1, \dots, dx_n$ таких, что в точках первого набора $d^2 f(M)$ принимает положительное значение, а в точках второго набора – отрицательное значение. Это эквивалентно тому, что $\Phi(h'_1, \dots, h'_n) > 0$ и $\Phi(h''_1, \dots, h''_n) < 0$, где

$$h'_i = \frac{t'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t'_i)^2}}, \qquad h''_i = \frac{t''_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t''_i)^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем точки M' и M'' с координатами $x'_i = x_i^0 + \rho h'_i$ и $x''_i = x_i^0 + \rho h''_i$ соответственно, где $\rho > 0$ – переменная величина. Легко посчитать, что $\rho(M', M) = \rho(M'', M) = \rho$. Для приращения функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке M справедливы формулы

$$f(M') - f(M) = \rho^2 (\Phi(h'_1, \dots, h'_n) + \alpha'(\rho)),$$
$$f(M'') - f(M) = \rho^2 (\Phi(h''_1, \dots, h''_n) + \alpha''(\rho)),$$

где $\alpha'(\rho)$ и $\alpha''(\rho)$ – бесконечно малые при $\rho \to 0$. Поэтому для достаточно маленьких ρ выполняется

$$|\alpha'(\rho)| < \Phi(h'_1, \dots, h'_n), \quad |\alpha''(\rho)| < \Phi(h''_1, \dots, h''_n).$$

Итак, для сколь угодно малого ρ найдутся точки M' и M'', находящиеся на расстоянии ρ от точки M, в которых выполняется

$$f(M') > f(M), \quad f(M'') < f(M),$$

т. е. точка M не является точкой локального экстремума. Теорема доказана. $\square$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ достаточные условия экстремума могут быть сформулированы в более удобной для проверки форме.

Теорема 18.3. *Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки M и дважды непрерывно дифференцируема в самой точке M, которая является стационарной. Обозначим $A = f''_{x^2}(M)$, $B = f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$, $C = f''_{y^2}(M)$. Тогда если*

$$AC - B^2 > 0,$$

то M является точкой локального экстремума (локального максимума при $A < 0$ и локального минимума при $A > 0$), а если

$$AC - B^2 < 0,$$

то M не является точкой локального экстремума.

Замечание. В случае $AC - B^2 = 0$ для исследования на экстремум нужно привлекать дифференциалы более высокого порядка.

Пример 18.1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Единственная точка возможного экстремума – стационарная точка $(0, 0)$. В ней $A = 2 > 0$, $AC - B^2 = 4 > 0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ – точка локального минимума.

Пример 18.2. $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Точка $(0, 0)$ тоже является единственной точкой возможного экстремума. Но в ней $AC - B^2 = -4 < 0$, поэтому у функции нет локальных экстремумов.

П р и м е р 18.3. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$. Находим частные производные первого порядка:

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad f'_y = 6xy - 36.$$

Составляем систему уравнений для нахождения стационарных точек:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, получаем биквадратное уравнение

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0.$$

Таким образом, стационарными являются четыре точки: $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$. Вычисляем частные производные второго порядка:

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6y, \quad f''_{y^2} = 6x.$$

В точке $(3,2)$: $A = 18 > 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум $f(3,2) = -100$.

В точке $(-3,-2)$: $A = -18 < 0, AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум $f(-3,-2) = 152$.

В точках $(2,3)$ и $(-2,-3)$ $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, следовательно, в этих точках локального экстремума нет.

18.4. Условный экстремум

На практике часто приходится искать экстремумы функции нескольких переменных при условии, что переменные некоторым образом связаны между собой.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на открытом множестве D. Пусть на этом множестве заданы еще несколько функций

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ F_m(x_1, \ldots, x_n), \quad m < n.$$

Будем предполагать, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ подчинены *уравнениям связи*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{18.3}$$

Будем говорить, что функция f имеет *условный экстремум* (*условный максимум* или *условный минимум*) в точке $M_0 \in D$ относительно уравнений связи (18.3), если значение $f(M_0)$ является экстремальным (наибольшим или наименьшим) среди всех значений, принимаемых функцией f в некоторой окрестности точки M_0, точки которой удовлетворяют уравнениям связи.

Метод исключения нахождения точек условного экстремума

Для нахождения точек условного экстремума иногда возможен следующий достаточно простой способ: решаем систему (18.3) относительно $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ x_m &= g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

затем подставляем найденные значения в функцию f и исследуем полученную функцию $n - m$ переменных:

$$f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n),$$

на обычный локальный экстремум.

Если точка $(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ является точкой локального экстремума такой сложной функции, то точка $(x^0_1, \dots, x^0_n)$, где

$$x^0_1 = g_1(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n), \ \dots, \ x^0_m = g_m(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n),$$

является точкой условного экстремума функции f относительно уравнений связи (18.3).

Пример 18.4. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, если $F(x, y) = x + y - 1$, т. е. если уравнение связи имеет вид: $x + y - 1 = 0$.

Выражаем из уравнения связи y через x и подставляем в функцию f:

$$y(x) = 1 - x, \qquad f(x, y(x)) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Для этой функции точка $x_0 = \frac{1}{2}$ является точкой локального минимума. Следовательно, точка $(x_0, y(x_0)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ является точкой условного минимума функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ относительно уравнения связи $x + y = 1$.

Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума

Способ, описанный выше, не всегда возможен, поскольку систему (18.3) не всегда удается разрешить. В этом случае можно воспользоваться *методом неопределенных множителей* (*методом Лагранжа*), который применяется для дважды дифференцируемых функций $f, F_1, \ldots, F_m$ и состоит в следующем (теоретическое обоснование метода из-за сложности опустим).

Рассмотрим новую функцию $n + m$ переменных:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_1 F_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m F_m(x_1, \ldots, x_n),$$

которую называют *функцией Лагранжа.*

I. На первом этапе находим точки возможного условного экстремума. Для этого нужно найти стационарные точки функции L, т. е. решить систему

$$\left\{\begin{array}{l} L'_{x_1} = 0 \\ \ldots \\ L'_{x_n} = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ \ldots \\ L'_{\lambda_m} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'_{x_1} + \lambda_1 (F_1)'_{x_1} + \ldots + \lambda_m (F_m)'_{x_1} = 0 \\ \quad \ldots \\ f'_{x_n} + \lambda_1 (F_1)'_{x_n} + \ldots + \lambda_m (F_m)'_{x_n} = 0 \\ F_1 = 0 \\ \quad \ldots \\ F_m = 0. \end{array}\right.$$

Если $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ – стационарная точка функции L, то точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – точка возможного условного экстремума функции f.

II. На втором этапе для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, найденной на первом этапе, рассматриваем свою функцию:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0),$$

и находим $d^2 g(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Далее, дифференцируя уравнения связи в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получаем систему верных равенств

$$\begin{cases} (F_1)'_{x_1} dx_1 + \ldots + (F_1)'_{x_n} dx_n = 0, \\ \quad \ldots \\ (F_m)'_{x_1} dx_1 + \ldots + (F_m)'_{x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

Это линейная однородная система относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$. Если ранг матрицы Якоби для функций $F_1, \ldots, F_m$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равен m, то из этой системы можно выразить некоторые m дифференциалов переменных $x_1, \ldots, x_n$ через остальные дифференциалы.

Последний шаг: подставляем найденные дифференциалы в $d^2 g(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Получается некоторая квадратичная форма относительно $(n - m)$ переменных. Если эта квадратичная форма положительно определенная, то в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – условный минимум, если отрицательно определенная – условный максимум, а если знакопеременная – условного экстремума нет.

Пример 18.5. Найти экстремум функции $f(x, y) = x^2 - y^2$, если $F(x, y) = x + y - 1$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Система для нахождения точек возможного условного экстремума

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x+y=0$, что противоречит третьему уравнению. Следовательно, система несовместна, и функция не имеет условных экстремумов.

Пример 18.6. Найти экстремум функции $f(x,y) = xy$, если $F(x,y) = x + y - 1$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1).$$

Система для нахождения точек возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является набор $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$. Рассматриваем функцию

$$g(x,y) = L(x,y,\lambda_0) = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1).$$

Для нее $g''_{x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = g''_{y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$, $g''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = g''_{yx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1$. Следовательно,

$$d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2dxdy.$$

Из уравнения связи находим зависимость между дифференциалами dx и dy: $dx + dy = 0$. Подставляем значение $dy = -dx$ в $d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и получаем отрицательно определенную квадратичную форму:

$$d^2 g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -2(dx)^2.$$

Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – это точка условного максимума функции $f(x, y) = xy$ относительно уравнения связи $x + y = 1$.

П р и м е р 18.7. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 180 экземпляров некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x изделий на первом предприятии, равны $4x + x^2$ тыс. руб., а затраты, обусловленные изготовлением y изделий на втором предприятии, составляют $8y + y^2$ тыс. руб. Требуется определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты были минимальными.

Р е ш е н и е. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f(x, y) = 4x + x^2 + 8y + y^2$$

при условии $x + y = 180$ (и, конечно, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$). Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 4x + x^2 + 8y + y^2 + \lambda(x + y - 180).$$

Приравняем нулю частные производные функции L:

$$\begin{cases} 4 + 2x + \lambda = 0 \\ 8 + 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 180. \end{cases}$$

Решением этой системы является набор $x_0 = 91$, $y_0 = 89$, $\lambda_0 = -186$. Этот набор удовлетворяет условию $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$. Для функции

$$g(x, y) = 4x + x^2 + 8y + y^2 - 186(x + y - 180)$$

дифференциал второго порядка в точке (x_0, y_0) равен

$$d^2g(x_0, y_0) = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Эта квадратичная форма положительно определенная, поэтому нет необходимости находить зависимость между dx и dy из уравнения связи. Итак, точка $(91, 89)$ – точка условного минимума.

Ответ. Оптимальный способ размещения заказа: 91 изделие на первом предприятии и 89 – на втором. При этом затраты будут минимальными и составят 17 278 тыс. руб.

18.5. Наибольшие и наименьшие значения функции

До сих пор мы предполагали, что область определения рассматриваемой функции является открытым множеством. Для случая замкнутого ограниченного множества D и непрерывной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ благодаря теореме Вейерштрасса можно поставить вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции.

Если точка, в которой принимается одно из этих значений, является внутренней, то, очевидно, в этой точке функция имеет локальный экстремум. Но своего наибольшего (наименьшего) значения функция может достигать и на границе множества D.

Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на замкнутом множестве D, следует найти все внутренние стационарные точки, точки недифференцируемости функции f, вычислить в них значения функции и сравнить их между собой и со значениями функции f в граничных точках множества D:

наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции f на всем множестве D.

Пример 18.8. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2y$ на множестве точек (x,y), удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Найдем сначала стационарные точки в открытом круге $x^2+y^2<1$:

$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 \\ f'_y = x^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются все точки открытого круга, у которых $x=0$. Значения функции в этих точках равны 0.

Для нахождения экстремальных точек на границе круга исследуем функцию f на условный экстремум относительно уравнения связи $x^2+y^2=1$. Выразим из этого уравнения $x^2 = 1-y^2$ и подставим в $f(x,y)$, получим функцию $f(x(y),y) = y - y^3$. Эта функция имеет две экстремальные точки: $y_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $y_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Из уравнения $x^2 = 1-y^2$ найдем соответствующие значения x и получим четыре точки: $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$. Вычислим значения функции $f(x,y)$ в полученных точках и сравним их со значениями функции f в точках ее возможного экстремума внутри круга $x^2+y^2=1$. В нашем примере наибольшее значение функции $f(x,y)$ на указанном множестве есть $f_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а наименьшее – $f_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

19. Геометрические приложения функций многих переменных

Определение 19.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D и Σ – поверхность, явно заданная функцией $f(x, y)$:

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D\}.$$

Пусть $M_0 \in \Sigma$, т. е. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. *Касательной плоскостью к поверхности* Σ *в точке* M_0 называется такая плоскость

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

что разность между ее аппликатой z в точке (x, y) и значением функции f в этой точке является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ при $\rho \to 0$, т. е. $z - f(x, y) = o(\rho)$.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то плоскость

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad (19.1)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, является касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), поскольку из определения дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) получаем, что

$$f(x, y) - z = f(x, y) - z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \\ - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = o(\rho).$$

Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала dz функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, когда приращение функции равно

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

(рис. 19.1).

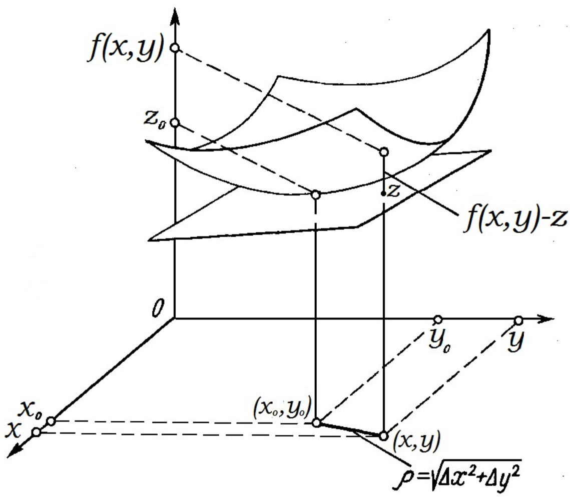


Рис. 19.1

Из геометрии известно, что вектор

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

ортогонален плоскости (19.1). Тогда *уравнение нормали к графику* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0), т. е. прямой, перпендикулярной касательной плоскости в точке (x_0, y_0), будет

$$
\begin{cases}
x = x_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\
y = y_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad t \in \mathbb{R}. \\
z = z_0 - t,
\end{cases}
$$

Определение 19.2. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Пусть задано направление $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы вектора $\boldsymbol{l}$ с осями координат OX, OY, OZ. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Введем отрезок прямой

$$
\begin{cases}
x = x_0 + t\cos\alpha, \\
y = y_0 + t\cos\beta, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\
z = z_0 + t\cos\gamma,
\end{cases}
$$

лежащий в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), соединяющий точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$ и параллельный вектору $\boldsymbol{l}$. Если существует предел

$$
\lim_{\rho(M, M_0) \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)} =
$$

$$
= \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},
$$

то этот предел обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0)$ и называется *производной по направлению вектора* $\boldsymbol{l}$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) (рис. 19.2).

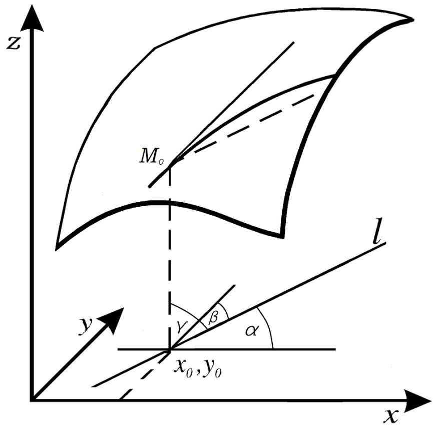


Рис. 19.2

Заметим, что частные производные являются производными по положительным направлениям осей координат.

Теорема 19.1. *Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0), то в этой точке существует производная по любому направлению $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и она вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0) \quad &= \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \\ &+ \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Доказательство. Введем функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Она имеет производную в точке $t_0 = 0$ (по теореме о дифференцируемости сложной функции), которая, с одной стороны, равна

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

а с другой – определяется пределом

$$F'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Поскольку последний предел есть, по определению, производная по направлению $\boldsymbol{l}$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0) = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma. \quad \square$$

Определение 19.3. Вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

называется *градиентом функции* $f(x, y, z)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) и обозначается $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$.

На производную по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ можно смотреть как на скалярное произведение вектора $\boldsymbol{l}$ и вектора $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$. Тогда если

$$\boldsymbol{l} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|},$$

то в этом направлении производная функции $f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) будет наибольшей.

20. Вектор-функции

Определение 20.1. Отображение, действующее из некоторого множества числовой прямой в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, называется *вектор-функцией*, т. е. это отображение, которое каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ (как правило, T – промежуток) ставит в соответствие единственную точку $M(t) \in \mathbb{R}^n$. Это можно записать, например, следующим образом:

$$M(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

или $\boldsymbol{r}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t \in [\alpha, \beta]$.

В случае, когда начало каждого из векторов $\boldsymbol{r}(t)$ совпадает с началом координат, эти векторы называют *радиус-векторами точки* $M(t)$, а множество их концов – *годографом вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t),\ t \in T$, который можно рассматривать как траекторию точки $M(t)$ – конца вектора $\boldsymbol{r}(t)$, если считать, что t – время.

Определение 20.2. Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 (обозначение $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$), если

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0,$$

где $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|$ – длина вектора $(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a})$.

Теорема 20.1. *Если* $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *и* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, *то* $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3.$$

Доказательство. Действительно,

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}.$$

Отсюда следует, что $|x(t) - a_1| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|$, а значит,

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0 \;\Rightarrow\; |x(t) - a_1| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0.$$

Аналогично для $y(t)$ и $z(t)$.

Обратно, если $x(t) \to a_1$, $y(t) \to a_2$ и $z(t) \to a_3$, то $\sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \to 0$. □

Отметим несколько свойств вектор-функций, связанных с пределом.

Теорема 20.2.

1. *Если при* $t \to t_0$ $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$, *то* $|\boldsymbol{r}(t)| \to |\boldsymbol{a}|$.

2. *Если при* $t \to t_0$ *вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$ *и скалярная функция* $f(t) \to A$, *то* $f(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) \to A\boldsymbol{a}$.

Доказательство.

1. Результат сразу следует из неравенства:

$$\Big| |\boldsymbol{r}(t)| - |\boldsymbol{a}| \Big| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|.$$

2. Действительно, $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}(t)$, где $\boldsymbol{a}(t) \to 0$, и $f(t) = A + \varphi(t)$, где $\varphi(t) \to 0$. Тогда

$$f(t)\boldsymbol{r}(t) = A\boldsymbol{a} + \varphi(t)\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{a}(t) + \varphi(t)\boldsymbol{a}(t)$$

и

$$
\begin{aligned}
\varphi(t)\boldsymbol{a} \to 0 \qquad & (|\varphi(t)\boldsymbol{a}| \leqslant |\varphi(t)||\boldsymbol{a}|),\\
A\boldsymbol{a}(t) \to 0 \qquad & (|A\boldsymbol{a}(t)| \leqslant |A||\boldsymbol{a}(t)|)\,,\\
\varphi(t)\boldsymbol{a}(t) \to 0 \qquad & (|\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)| \leqslant |\varphi(t)||\boldsymbol{a}(t)|)\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Напомним, что *скалярным произведением* двух векторов называется скалярная функция со свойствами:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqslant 0$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$;

2) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;

3) $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$.

Если $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Теорема 20.3. *Если $\boldsymbol{r}_1(t) \to \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}_2(t) \to \boldsymbol{b}$ при $t \to t_0$, то*

$$
\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \qquad \lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).
$$

Последнее свойство можно сформулировать так: *предел скалярного произведения равен скалярному произведению пределов.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}(t)$, где $\boldsymbol{a}(t) \to 0$, и $\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}(t)$, где $\boldsymbol{b}(t) \to 0$. Тогда

$$
\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t)),
$$

где $\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t) \to 0$ (в силу оценки $|\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t)| \leqslant |\boldsymbol{a}(t)| + |\boldsymbol{b}(t)|$). Таким образом, $\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Докажем второе утверждение:

$$(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}(t)) = \\ = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}(t)) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}(t)) + (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)),$$

но из неравенства Коши–Буняковского следует

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}(t))| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}(t)|, \quad |(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}(t))| \leqslant |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}(t)|,$$

$$|(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t))| \leqslant |\boldsymbol{a}(t)| \cdot |\boldsymbol{b}(t)|,$$

откуда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}(t)) \to 0$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}(t)) \to 0$ и $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)) \to 0$ при $t \to t_0$. $\square$

Определение 20.3. Функция $\boldsymbol{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$.

Из теоремы 20.1 следует, что непрерывность вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 равносильна непрерывности координатных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точке t_0.

Если $\Delta \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$, т. е. $\Delta \boldsymbol{r}(t_0)$ – приращение $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0, то непрерывность $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 эквивалентна тому, что $\Delta \boldsymbol{r}(t_0) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Определение 20.4. Если существует $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 и обозначается $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

Утверждение. *Если* $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *то*

$$\boldsymbol{r}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \boldsymbol{i} + \right.$$
$$\left. + \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \boldsymbol{j} + \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \boldsymbol{k} \right] =$$
$$= x'(t_0)\boldsymbol{i} + y'(t_0)\boldsymbol{j} + z'(t_0)\boldsymbol{k}. \quad \square$$

Замечание. Если $\boldsymbol{r}(t)$ определяет некоторую кривую, то $\boldsymbol{r}'(t_0)$ – это вектор, который направлен по касательной к этой кривой в точке $\boldsymbol{r}(t_0)$.

Теорема 20.4. *Пусть существуют производные функции $f(t)$ и вектор-функций $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$. Справедливы следующие правила дифференцирования вектор-функций:*

1) $(\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t))' = \boldsymbol{r}_1'(t) + \boldsymbol{r}_2'(t);$

2) *если $f(t)$ – скалярная функция, то*
$(f(t) \cdot \boldsymbol{r}(t))' = f'(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) + f(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t);$

3) $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)' = (\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2) + (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2').$

Доказательство. Докажем утверждение 3).

$$(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t))'_{t=t_0} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\boldsymbol{r}_1(t_0 + \Delta t), \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\boldsymbol{r}_1(t_0), \boldsymbol{r}_2(t_0))}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(\boldsymbol{r}_1(t_0 + \Delta t), \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\boldsymbol{r}_1(t_0), \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t))}{\Delta t} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\boldsymbol{r}_1(t_0), \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\boldsymbol{r}_1(t_0), \boldsymbol{r}_2(t_0))}{\Delta t} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}_1(t_0)}{\Delta t}, \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\boldsymbol{r}_1(t_0), \frac{\boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t} \right) \right] =$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_1(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}_1(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t) \right) +$$

$$+ \left(\boldsymbol{r}_1(t_0), \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_2(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t} \right) =$$

$$= (\boldsymbol{r}_1'(t_0), \boldsymbol{r}_2(t_0)) + (\boldsymbol{r}_1(t_0), \mathbf{r_2'}(t_0)).$$

Здесь мы воспользовались правилом перехода к пределу в скалярном произведении. □

З а м е ч а н и е 1. Вдумчивому читателю рекомендуется доказать утверждения 1) и 2) самостоятельно.

З а м е ч а н и е 2. Для вектор-функции имеет место следующее утверждение (формула Лагранжа): *если* $\boldsymbol{r}(t)$ *непрерывна на* $[\alpha, \beta]$ *и имеет* $\boldsymbol{r}'(t)$ *на* (α, β), *то*

$$\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) : \ |\boldsymbol{r}(\beta) - \boldsymbol{r}(\alpha)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(\beta - \alpha).$$

З а м е ч а н и е 3. Для вектор-функции, имеющей производные до k-го порядка в точке t_0, имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \boldsymbol{o}((t - t_0)^n),$$

где $\boldsymbol{o}((t - t_0)^n)$ – вектор-функция, которая может быть записана в следующем виде:

$$\boldsymbol{o}((t - t_0)^n) = (t - t_0)^n \cdot \boldsymbol{e}(t),$$

где вектор-функция $\boldsymbol{e}(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

21. Ряды

21.1. Основные определения

Определение 21.1. Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$. Выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, называется *числовым рядом*, а числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ называются *членами ряда.*

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется *частичной суммой ряда.* Если существует (конечный) предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда.* Если не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Пример 21.1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| \neq 1$. Тогда

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \to \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

То есть ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$.

Упражнение. Проверить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится при $q = \pm 1$.

Ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ отбрасыванием первых его n членов, называют *n-м остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Определенный смысл остаток ряда имеет только для сходящихся рядов, поскольку в этом случае

$$r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = S - S_n.$$

Для расходящегося ряда остаток есть формально записанная сумма, которой не присвоено никакого значения.

Необходимые условия сходимости ряда

Теорема 21.1. *Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.*

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$ □

Теорема 21.2. *Если ряд сходится, то остаток ряда стремится к нулю.*

Доказательство. $r_n = S - S_n \to S - S = 0.$ □

Необходимые и достаточные условия сходимости ряда

Теорема 21.3 (критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad \left(n > N_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство следует из определения сходимости ряда и критерия Коши, примененного к последовательности частичных сумм ряда.

Замечание 1. Если отбросить некоторое число слагаемых ряда или добавить к ряду несколько слагаемых, то это не повлияет на сходимость (расходимость) ряда.

Замечание 2. Если все элементы ряда умножить на ненулевую константу, то это не повлияет на сходимость (расходимость) ряда.

21.2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Будем рассматривать ряды с общими членами $a_n \geqslant 0$.

Частичные суммы такого ряда представяют собой неубывающую последовательность:

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0,$$

следовательно, ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Теорема 21.4 (первый признак сравнения)**.** *Пусть даны ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *и пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *при* $n > n_0$.

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $S_n(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ и $S_n(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. Тогда

$$S_n(a) \leqslant S_n(b),$$

и эти последовательности не убывают. По теореме о пределе монотонных последовательностей получаем результат. $\square$

Теорема 21.5 (второй признак сравнения)**.** *Пусть даны ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, причем* $a_n \geqslant 0$*,* $b_n > 0$*. Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$*,* $0 \leqslant k \leqslant +\infty$*.*

1. *Если* $k \in [0, +\infty)$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если* $k \in (0, +\infty]$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $k \neq +\infty$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left(n > N_\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon\right)$$

или

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon, \qquad n > N_\varepsilon,$$

откуда

$$a_n < (k + \varepsilon) b_n \quad \text{при} \quad n > N_\varepsilon,$$

и по первому признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $k \in (0, +\infty)$, то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $k - \varepsilon_0 > 0$. Тогда

$$a_n > (k - \varepsilon_0) b_n \quad \text{при} \quad n > N_{\varepsilon_0},$$

и по первому признаку сравнения из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь $k = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Докажем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Предположим обратное: пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В рассматриваемом случае

$$k = +\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Тогда по первой части данной теоремы сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, что противоречит условию. $\square$

Теорема 21.6 (третий признак сравнения)**.** *Пусть даны ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *и пусть* $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n > n_0$.

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем полагать, что неравенство $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$. Перемножая первые n неравенств, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первый признак сравнения завершает доказательство данного утверждения. $\square$

Теорема 21.7 (признак Коши)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n \geqslant 0$.

1. *Если*
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
при некотором q, *то ряд сходится.*

2. *Если*
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
то ряд расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ следует, что $a_n \leqslant q^n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то $a_n \geqslant 1$ и $a_n \not\to 0$, т. е. ряд расходится. $\square$

Теорема 21.8 (признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n \geqslant 0$, *и пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. *Если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

3. *Если* $q = 1$, *то ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon)\,.$$

Если $0 \leqslant q < 1$, то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $q + \varepsilon_0 < 1$, и мы получаем

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon_0 < 1, \quad n > N_{\varepsilon_0},$$

следовательно, по признаку Коши в непредельной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $q > 1$, то начиная с некоторого номера

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

и по непредельному признаку ряд расходится. $\square$

Теорема 21.9 (признак Даламбера[27]). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n > 0$.

1. *Если*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
при некотором $d > 0$, *то ряд сходится.*

---

[27] *Жан Лерон д'Аламбер* (1717–1783) – французский философ-просветитель и математик. Основные математические исследования относятся к теории дифференциальных уравнений.

2. *Если*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
то ряд расходится.

Доказательство. Запишем данное неравенство в виде
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d = \frac{d^{n+1}}{d^n}, \qquad 0 < d < 1, \ n \geqslant n_0,$$
и введем $b_n = d^n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и по третьему признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Пусть теперь $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, $n \geqslant n_0$. Тогда
$$a_{n+1} \geqslant a_n, \qquad n \geqslant n_0,$$
следовательно $a_n \not\to 0$, т. е. ряд расходится. $\square$

Теорема 21.10 (признак Даламбера в предельной форме)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, где* $a_n > 0$*, и пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$*.*

1. *Если* $d < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Если* $d > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*
3. *Если* $d = 1$*, то ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство провести самостоятельно (см. доказательство предельного признака Коши). $\square$

Теорема 21.11 (признак Раабе[28]). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n > 0$.

1. *Если*
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
при некотором r, *то ряд сходится.*

2. *Если*
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1, \qquad n \geqslant n_0,$$
то ряд расходится.

Доказательство. Запишем данное неравенство в виде
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}, \qquad r > 1, \quad n \geqslant n_0. \tag{21.1}$$
Возьмем произвольное $s \in (1, r)$ и рассмотрим
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s.$$
По формуле Тейлора
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Поскольку остаточный член $o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ быстрее $\frac{1}{n}$, найдется n_1 такое, что
$$\left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{r-s}{n}, \qquad n > n_1.$$

[28] Йозеф Людвиг Раабе (1801–1859) – швейцарский математик, автор трудов по анализу бесконечно малых величин, теории функций, теории рядов, алгебре и геометрии.

Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s = 1+\frac{s}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 1+\frac{s}{n}+\frac{r-s}{n} = 1+\frac{r}{n}.$$

Соединяя эту оценку с неравенством (21.1), получаем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1+\frac{r}{n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s, \quad n > \max\{n_0, n_1\},$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Отсюда, вводя $b_n = \dfrac{1}{n^s}$, по третьему признаку сравнения получаем сходимость ряда.

Пусть теперь

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leqslant 1, \qquad n \geqslant n_0.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Вводя $b_n = \dfrac{1}{n}$, по третьему признаку сравнения получаем расходимость ряда. $\square$

Теорема 21.12 (признак Раабе в предельной форме)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, где* $a_n > 0$*, и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = r.$$

1. *Если $r > 1$, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если $r < 1$, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

3. *Если $r = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство провести самостоятельно (см. доказательство предельного признака Коши). $\square$

Теорема 21.13 (интегральный признак, или признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n \geqslant 0$. *Пусть на* $[1, +\infty)$ *определена неотрицательная и невозрастающая функция* $f(x)$ *и пусть* $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел*

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)\, dx.$$

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ в силу монотонности функции f

$$a_n = f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n+1) = a_{n+1}, \quad x \in [n, n+1].$$

Проинтегрируем это неравенство по x от n до $n+1$:

$$a_n \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leqslant a_{n+1},$$

и просуммируем по n от 1 до N:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant \int_1^{N+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{n=2}^{N+1} a_n = S_{N+1} - a_1.$$

Заметим, что в силу неотрицательности функции f интеграл $\int_1^A f(x)\,dx$ как функция переменного A является неубывающей функцией на $[1,+\infty)$. Следовательно, существование конечного предела

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,dx$$

равносильно ограниченности этих интегралов, а отсутствие конечного предела — неограниченности интегралов и тому, что

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,dx=\infty.$$

С учетом этого замечания первый признак сравнения завершает доказательство теоремы. $\square$

Пример 21.2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Возьмем $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $x>1$.

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{t\ln t}=\ln|\ln x|-\ln|\ln 2|\to\infty \quad \text{при } x\to\infty,$$

следовательно, данный ряд расходится.

21.3. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Будем рассматривать ряды, содержащие бесконечное число положительных элементов и бесконечное число отрицательных элементов.

Определение 21.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, где $a_n > 0$ или $a_n < 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, называется *знакочередующимся.*

Теорема 21.14 (признак Лейбница)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$*,* $a_n > 0$*. Если* $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю, то ряд сходится. При этом для остатка ряда справедлива оценка*

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| \leqslant a_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Группируя элементы

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

заметим, что все слагаемые неотрицательны, следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}$ – неубывающая. Перегруппируем элементы и получим оценку

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1.$$

Тогда, по теореме о монотонной ограниченной последовательности, последовательность $\{S_{2n}\}$ имеет конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Для частичных сумм нечетного порядка

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S,$$

следовательно, ряд сходится.

Отметим, что в силу характера монотонности $\{S_{2n}\}$, $S - S_{2n} \geqslant 0$. Для последовательности $\{S_{2n+1}\}$ имеем

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что эта последовательность — невозрастающая, а значит, $S - S_{2n+1} \leqslant 0$.

Перейдем к оценке остаточного члена ряда. Его можно представить в двух видах:

$$r_n = S - S_n = S - S_{n+1} + (-1)^n a_{n+1}.$$

Если $n = 2k$, то, с одной стороны, $r_{2k} = S - S_{2k} \geqslant 0$, а с другой –

$$r_{2k} = S - S_{2k+1} + a_{2k+1} \leqslant a_{2k+1},$$

следовательно,

$$0 \leqslant r_{2k} = S - S_{2k+1} + a_{2k+1} \leqslant a_{2k+1}.$$

Если $n = 2k + 1$, то аналогично: с одной стороны, $S - S_{2k+1} \leqslant 0$, а с другой —

$$r_{2k+1} = S - S_{2k} - a_{2k+1} \geqslant -a_{2k+1},$$

откуда

$$-a_{2k+1} \leqslant r_{2k+1} = S - S_{2k} - a_{2k+1} \leqslant 0.$$

Таким образом,

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е. Остаток ряда Лейбница имеет знак первого элемента, входящего в его сумму.

Для доказательства двух следующих признаков нам понадобится следующее преобразование.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=k}^{m} a_i b_i$. Введем обозначения:

$$A_k = a_k, \quad A_{k+1} = a_k + a_{k+1}, \quad \ldots, \quad A_n = \sum_{i=k}^{n} a_i, \quad \ldots \tag{21.2}$$

Тогда

$$a_k = A_k, \quad a_{k+1} = A_{k+1} - A_k, \quad \ldots, \quad a_n = A_n - A_{n-1}, \quad \ldots$$

Перепишем сумму:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{m} a_i b_i &= a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \ldots + a_{m-1} b_{m-1} + a_m b_m = \\
&= A_k b_k + (A_{k+1} - A_k) b_{k+1} + \ldots + \\
&\qquad + (A_{m-1} - A_{m-2}) b_{m-1} + (A_m - A_{m-1}) b_m = \\
&= A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{k+1}(b_{k+1} - b_{k+2}) + \ldots + \\
&\qquad + A_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + A_m b_m = \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=k}^{m-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_m b_m.
\end{aligned}$$

Такое преобразование называют *преобразованием Абеля*[29].

[29] *Нильс Абель* (1802–1829) – норвежский математик, один из крупнейших математиков XIX в. Автор исследований по алгебре,

Лемма 21.1. *Если суммы $\{A_n\}_{n=k}^m$ ограничены (т. е. существует такое $C > 0$, что $|A_n| \leqslant C$ при $k \leqslant n \leqslant m$), а последовательность $\{b_n\}$ монотонна, то*

$$\left|\sum_{i=k}^{m} a_i b_i\right| \leqslant C(|b_k - b_m| + |b_m|).$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, запишем

$$\sum_{i=k}^{m} a_i b_i = \sum_{i=k}^{m-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_m b_m,$$

где A_i определены равенствами (21.2). Тогда

$$\left|\sum_{i=k}^{m} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=k}^{m-1} |A_i| \cdot |b_i - b_{i+1}| + |A_m b_m| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \sum_{i=k}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| + C \cdot |b_m|.$$

Рассмотрим случай, когда $\{b_n\}$ неубывающая. Тогда $b_i - b_{i+1} \leqslant 0$ и, снимая модули, получим

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=k}^{m} a_i b_i\right| &\leqslant C \cdot \sum_{i=k}^{m-1}(b_{i+1} - b_i) + C \cdot |b_m| = \\ &= C \cdot (b_{k+1} - b_k + b_{k+2} - b_{k+1} + \ldots + \\ &\qquad +b_{m-1} - b_{m-2} + b_m - b_{m-1}) + C \cdot |b_m| =\end{aligned}$$

теории рядов, один из создателей теории эллиптических функций. Работы Абеля оказали большое влияние на развитие всей математики. Они привели к появлению ряда новых математических дисциплин и содействовали всеобщему признанию теории функций комплексного переменного.

$$= \quad C(b_m - b_k) + C|b_m| = C|b_m - b_k| + C|b_m| = \\ = C(|b_k - b_m) + |b_m|).$$

Случай, когда $\{b_n\}$ не возрастает, рассмотрите самостоятельно. $\square$

Теорема 21.15 (признак Абеля). *Пусть*

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

2) последовательность $\{b_n\}$ *— монотонная и ограниченная.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Последовательность $\{b_n\}$ ограничена, т. е.

$$\exists\, M > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leqslant M.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, следовательно, по критерию Коши

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad \left(n > N_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon \right).$$

В силу монотонности $\{b_n\}$ мы вправе применить лемму Абеля. Тогда для произвольного $p \in \mathbb{N}$ и для $n > N_\varepsilon$ получим

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leqslant \varepsilon(|b_{n+1} - b_{n+p}| + |b_{n+p}|) \leqslant 3M\varepsilon,$$

что, в силу критерия Коши, примененного для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, и произвольности ε, доказывает теорему. $\square$

Теорема 21.16 (признак Дирихле[30]). *Пусть*

1) частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничены, т. е.*

$$\exists\, M > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |S_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant M;$$

2) последовательность $\{b_n\}$ *монотонно стремится к нулю.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Последовательность $\{b_n\}$ сходится к нулю, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n| < \varepsilon)\,.$$

Из условия ограниченности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ получаем

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| = |S_{n+p} - S_n| \leqslant |S_{n+p}| + |S_n| \leqslant 2M.$$

В силу монотонности $\{b_n\}$ мы вправе применить лемму Абеля. Тогда для произвольного $p \in \mathbb{N}$ и для $n > N_\varepsilon$ получим:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|b_{n+1} - b_{n+p}| + |b_{n+p}|) \leqslant 2M \cdot 3\varepsilon = 6M\varepsilon,$$

[30] *Лежен Дирихле́* (1805–1859) – немецкий математик. Основные труды относятся к аналитической теории чисел, теории функций, математической физике.

что, в силу критерия Коши, примененного для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, и произвольности ε, доказывает теорему. $\square$

Определение 21.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема 21.17. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Справедливо

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i|.$$

Тогда, поскольку для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ имеет место условие критерия Коши, оно выполнено и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Замечание. Обратное неверно. (Приведите примеры.)

21.4. Теоремы о группировке и перестановке рядов

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Возьмем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и рассмотрим группы элементов исходного ряда, не меняя их положения в исходном ряде:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}, \qquad a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}, \qquad \ldots$$

Рассмотрим новый ряд, элементами которого будут полученные суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a}_k, \quad \text{где} \quad \widetilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}. \tag{21.3}$$

Такой ряд называют *группировкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 21.18. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд (21.3), полученный произвольной группировкой его членов, также сходится, причем к той же сумме.*

Доказательство. По условию последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет конечный предел:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \;\to\; S.$$

Тогда последовательность частичных сумм ряда (21.3)

$$\widetilde{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{a}_i = \sum_{i=1}^{n_k} a_i = S_{n_k},$$

будучи подпоследовательностью последовательности $\{S_n\}$, сходится к тому же пределу S. $\square$

Замечание 1. Тем самым мы показали, что для сходящихся рядов сочетательный закон остается в силе.

Замечание 2. Обратное неверно.
Действительно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ряд, полученный группировкой

$$-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots=-1,$$

сходится и имеет сумму, равную -1, тогда как, если убрать скобки, исходный ряд расходится. Так же ряд, полученный группировкой

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots=0,$$

сходится и имеет сумму, равную 0.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Зададимся вопросом: остается ли верным переместительный закон в бесконечных суммах?

Переставим элементы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ произвольным образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*, \tag{21.4}$$

где a_k^* есть некоторый элемент исходного ряда с номером n_k: $a_k^*=a_{n_k}$. Здесь последовательность n_k принимает все натуральные значения, причем каждое только один раз. Полученный таким образом ряд (21.4) содержит все элементы исходного ряда и только их.

Теорема 21.19. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то ряд (21.4), полученный произвольной перестановкой* *его членов, также сходится абсолютно, причем к той же сумме.*

Доказательство. По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, т. е. по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(n > N_1(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \left| \sum_{i=1}^{n} a_i - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (21.5)$$

В силу абсолютной сходимости по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \qquad \left(n > N_2(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (21.6)$$

Положим $N_\varepsilon = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ и возьмем произвольное $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > N_\varepsilon$. Найдется такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что сумма $S_{k_0}^* = \sum\limits_{j=1}^{k_0} a_j^*$ содержит в себе все элементы исходного ряда с номерами $1, 2, \ldots, n_0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, сумма $S_k^* = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j^*$ также содержит в себе все первые n_0 элементов исходного ряда. Рассмотрим

$$|S_k^* - S| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{k} a_j^* - \sum_{i=1}^{n_0} a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0} a_i - S \right|.$$

Второй модуль меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу условия (21.5) и выбора n_0. Поскольку сумма $\sum\limits_{j=1}^{k} a_j^*$ содержит в себе все элементы исходного ряда с номерами $1, 2, \ldots, n_0$ и еще $k - n_0$ элементов, номера которых больше n_0, под знаком первого модуля останутся только эти $k - n_0$ элементов исходного ряда:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^* - \sum_{i=1}^{n_0} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k-n_0}},$$

причем их номера $i_1, i_2, \ldots, i_{k-n_0}$ не обязательно составляют множество последовательных натуральных чисел. Выберем наибольший из номеров этих элементов:

$$m = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-n_0}\},$$

и заметим, что наименьший из этих номеров больше или равен $n_0 + 1$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j^* - \sum_{i=1}^{n_0} a_i\right| \leqslant |a_{i_1}| + |a_{i_2}| + \ldots + |a_{i_{k-n_0}}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots + |a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу условия (21.6). Тем самым мы доказали, что ряд (21.4) сходится к той же сумме, что и исходный ряд.

Докажем, что он сходится абсолютно. По доказанному, если исходный ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится, причем к той же сумме. Следовательно, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится (абсолютно), то любая его перестановка $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$ также сходится, что доказывает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$. $\square$

Итак, для абсолютно сходящегося ряда переместительный закон сохраняет свою силу. Однако для условно сходящегося ряда это неверно.

Теорема 21.20 (Римана)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого* $L \in \mathbb{R}$ *или* $L = \pm\infty$ *найдется такая перестановка ряда, что ее сумма равна выбранной величине* L*.*

Доказательство (см., например: *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., 1985. Ч. 2, гл. 1, § 3, п. 3).

21.5. Область сходимости функционального ряда. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда

Пусть функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на множестве X. Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *функциональным рядом.*

Пусть $x_0 \in X$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в точке x_0, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, и называется *абсолютно сходящимся* в точке x_0, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$. Множества всех значений x, при которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$, называются соответственно *областью сходимости* и *областью абсолютной сходимости* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Функция $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ называется *частичной суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Функция $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, определенная на области сходимости ряда, называется *суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. На области сходимости ряда определена также функция $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, называемая *остатком ряда*.

Если для элементов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнено условие $|u_n(x)| \leqslant a_n$, $x \in X$ (где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся числовой ряд), то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на X.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где a_n и x_0 – действительные числа, называется *степенным рядом*. Числа a_n, $n \in \mathbb{N}$, называются *коэффициентами степенного ряда*.

Для любого степенного ряда существует $R \geqslant 0$ – число или бесконечность – такое, что при $R \neq 0$, $R \neq +\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ абсолютно сходится, если $|x-x_0| < R$, и расходится, если $|x - x_0| > R$. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. В случае $R = 0$ область сходимости ряда состоит из одной точки x_0; при $x = x_0$ ряд сходится абсолютно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0$. В случае $R = \infty$ ряд сходится абсолютно на всем множестве $\mathbb{R}$.

Радиус сходимости степенного ряда может быть вычислен по *формуле Коши–Адамара*[31]

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

В частных случаях радиус может быть найден по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

если такие пределы существуют.

Доказательство этих формул в случае, когда существует верхний предел: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, следует из предельных признаков Коши и Даламбера.

21.6. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда

Определение 21.4. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in X$, называется *равномерно сходящейся на множестве* X, если существует такая функция $f(x)$, что числовая последовательность

$$r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$$

---

[31] *Жак Адамар* (1865–1963) – французский математик, механик. Автор множества фундаментальных работ по алгебре, геометрии, функциональному анализу, дифференциальной геометрии, математической физике, топологии, теории вероятностей, механике, гидродинамике и др.

стремится к нулю при $n \to 0$. Функциональный ряд, последовательность частичных сумм которого равномерно сходится на множестве X, называется *равномерно сходящимся на X*.

Теорема 21.21 (критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in X \quad \Big(n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow$$

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon\Big),$$

где $S_n(x)$ – последовательность частичных сумм ряда.

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно на множестве X сходится к своей сумме $S(x)$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in X$$
$$\left(n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда для любых $n > N(\varepsilon)$, $p \in \mathbb{N}$ и $x \in X$

$$|S_n(x) - S_{n+p}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Для любой точки $x_0 \in X$ выполняется условие Коши сходимости ряда. Тогда числовая последовательность $S_n(x_0)$ имеет конечный предел, обозначим его $S(x_0)$. Переходя к пределу в неравенстве

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $p \to \infty$, получим

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X$$
$$\left(n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right). \quad \square$$

Теорема 21.22 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *выполнены условия:*

1) $\exists\, N_0\ \ \forall\, n > N_0\ \ \forall\, x \in X\ \Rightarrow\ |u_n(x)| \leqslant a_n$*;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *– сходится.*

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* X*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ по условию Коши имеем:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n, p \in \mathbb{N}$$
$$(n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon).$$

Тогда для любых $n > \max\{N_0, N(\varepsilon)\}$, $p \in \mathbb{N}$ и $x \in X$

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие Коши равномерной сходимости функционального ряда. $\square$

Теорема 21.23 (о равномерной сходимости степенного ряда)**.** *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *имеет радиус сходимости* $R > 0$*. Тогда он равномерно сходится на любом отрезке* $|x - x_0| \leqslant r < R$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению радиуса сходимости степенного ряда для любого $r < R$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ на отрезке $|x - x_0| \leqslant r$ сходится равномерно. $\square$

Теорема 21.24. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *имеет радиус сходимости* $R > 0$.

1. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$, *то исходный ряд сходится равномерно на отрезке* $[x_0, x_0 + R]$.
2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ *расходится, то исходный ряд сходится неравномерно на полуинтервале* $[x_0, x_0 + R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вторую часть теоремы. Если предположить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0, x_0 + R)$, то по условию Коши равномерной сходимости

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in [x_0, x_0 + R)$$

$$\big(n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \ldots + a_{n+p}(x - x_0)^{n+p}| < \varepsilon\big).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0 + R - 0$, получим

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N}$$

$$(n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |a_{n+1}R^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2} + \ldots + a_{n+p}R^{n+p}| < \varepsilon),$$

что противоречит расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$. $\square$

21.7. Примеры решения задач

П р и м е р 21.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3(2+\cos \pi n)}.$$

Используем первый признак сравнения. Заметим, что

$$\frac{n^2+2}{n^3} > \frac{1}{n}, \qquad \cos \pi n = (-1)^n,$$

следовательно, можно записать оценку:

$$\frac{n^2+2}{n^3(2+\cos \pi n)} > \frac{1}{3n} > 0. \tag{21.7}$$

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ тоже расходится, поэтому, в силу оценки (21.7) и первого признака сравнения, исходный ряд расходится.

П р и м е р 21.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Из замечательного предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ получаем, что $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, следовательно, $\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Если ввести $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, то по второму признаку сравнения из соотношения $a_n \sim b_n$ и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ получаем сходимость исходного ряда.

П р и м е р 21.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (n+1)! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 3^{n+1} (n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1,$$

следовательно, данный ряд сходится.

П р и м е р 21.6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^{3n}.$$

Применим признак Коши в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^{3}.$$

Воспользуемся пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 - 1/n} \right)^3 = \frac{1}{8} < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится.

П р и м е р 21.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+1)\ln^2 n}.$$

Заметим, что

$$\frac{n+1}{(n^2+1)\ln^2 n} \sim \frac{1}{n\ln^2 n}.$$

Применим интегральный признак Коши. Введем функцию $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$. При $x \geqslant 2$ эта функция определена, положительна и убывает. Рассмотрим

$$\int\limits_2^x f(t)\,dt = \int\limits_2^x \frac{dt}{t\ln^2 t} = \int\limits_2^x \frac{d\ln t}{\ln^2 t} = -\frac{1}{\ln t}\Big|_2^x = -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Поскольку существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_2^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 2},$$

данный ряд сходится.

Пример 21.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(3n+1)}{(3n)!n!}$. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0.0001$.

Запишем сумму ряда в виде $S = S_n + R_n$, где S_n — частичная сумма ряда, R_n — остаток ряда. Найдем, при каком минимальном n $|R_n| < \alpha$.

Поскольку данный ряд – ряд Лейбница, для его остатка выполнено неравенство $|R_n| < |a_{n+1}|$. Тогда

$$|R_n| < |a_{n+1}| = \frac{3n+4}{(3n+3)!(n+1)!} < 0.0001.$$

Решая это неравенство, находим, что оно выполняется уже при $n = 2$. Тогда, оставляя в сумме первые два члена ряда, находим ее приближенное значение:

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n(3n+1)}{(3n)!n!} = \frac{-1\cdot 4}{3!} + \frac{7}{6!\cdot 2!} \approx -0.6618.$$

П р и м е р 21.9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}.$$

Этот ряд – знакопеременный, поэтому используем признак Дирихле. Положим $a_n = \cos n$, $b_n = \frac{1}{n!}$.

Последовательность $\{b_n\}$ монотонна:

$$\frac{1}{(n+1)!} = b_{n+1} < b_n = \frac{1}{n!},$$

и стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

Покажем, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены. Для этого оценим суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx$ при $x \neq 2\pi k$:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{(\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos Nx) \cdot 2\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos x + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos Nx}{2\sin\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(\dfrac{x}{2} + x) - \sin(x - \dfrac{x}{2}) + \sin(\dfrac{x}{2} + 2x) - \sin(2x - \dfrac{x}{2}) +}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\frac{+ \ldots + \sin(N + \dfrac{1}{2})x - \sin(N - \dfrac{1}{2})x}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{-\sin\dfrac{x}{2} + \sin(N + \dfrac{1}{2})}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Применяя эту формулу для нашего случая $x = 1$, получим равномерную оценку всех частичных сумм:

$$|\sum_{n=1}^{N} \cos n| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|}.$$

Таким образом, все условия признака Дирихле выполнены, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$ сходится.

Выясним характер сходимости этого ряда: абсолютная или условная. Рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n!}.$$

Для общего члена этого ряда справедлива оценка

$$\frac{|\cos n|}{n!} \leqslant \frac{1}{n!} = \alpha_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n!}$ сходится по первому признаку сравнения, а значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$ сходится абсолютно.

П р и м е р 21.10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{n!} = 0$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4}{n!}$. Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ сходится, а значит, общий член ряда необходимо стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n!}=0$.

П р и м е р 21.11. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^n n^2}.$$

Сделаем замену переменной: $\ln x = y$. Получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2^n n^2}$. Его радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=2,$$

т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2^n n^2}$ сходится при $y\in(-2;2)$.

Исследуем его сходимость на концах интервала. При $y=-2$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно. При $y=2$: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Итак, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n n^2}$ есть отрезок $[-2, 2]$. Обратной заменой $x = e^y$ получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{2^n n^2}$ сходится на отрезке $[e^{-2}; e^2]$.

П р и м е р 21.12. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$$

Сделаем замену переменной: $\sin^3 x = y$, получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 y^n$; найдем его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n n^2}{8^{n+1}(n+1)^2} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 y^n$ сходится при $y \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

Исследуем его сходимость на концах интервала. При $y = -\frac{1}{8}$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n n^2}{(-8)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2,$$

который расходится, поскольку общий член ряда не стремится к нулю. При $y = \frac{1}{8}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n n^2}{8^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ также расходится.

Итак, ряд сходится при $y \in \left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$, но $y = \sin^3 x$, откуда

$$-\frac{1}{8} < \sin^3 x < \frac{1}{8},$$

$$2\pi k + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < x < \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x$ сходится для всех x из интервалов $\left(2\pi k - \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \frac{\pi}{6}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 21.13. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n}.$$

Заменой $x+4 = y$ получаем степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$. Для него

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2^n} = 2,$$

т. е. интервал сходимости ряда $(-2; 2)$.

Исследуем сходимость в граничных точках интервала. При $y = -2$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

расходится. При $y = 2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ также расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$ сходится при $y \in (-2, 2)$; так как $x = y - 4$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n}$ сходится при $x \in (-6, -2)$.

Пример 21.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}}$. Построить мажорирующий ряд к данному на отрезке $[-6, -4]$ и доказать равномерную сходимость на отрезке.

Для того чтобы построить мажорирующий ряд, заметим, что на отрезке $[-6, -4]$ выполнено $|(x+5)^n| \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{|(x+5)^n|}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}},$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}}$ — мажорирующий ряд для данного на отрезке $[-6, -4]$.

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}}$ на сходимость по второму признаку сравнения:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}} \sim \frac{1}{n^{1/5} \cdot n} = \frac{1}{n^{6/5}},$$

Поскольку $\frac{6}{5} > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}}$ сходится по второму признаку сравнения и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[5]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+2}}$ сходится равномерно на отрезке $[-6, -4]$ по признаку Вейерштрасса.

Пример 21.15. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость, т. е. рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(1+x)}}$. Он сходится, если $\ln(1+x) > 1$.

$$\ln(1+x) > 1 \;\Leftrightarrow\; x > e - 1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно на интервале $(e-1;+\infty)$.

Теперь исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$ на условную сходимость. Применим признак Лейбница:

$$a_n=\frac{1}{n^{\ln(1+x)}}>\frac{1}{(n+1)^{\ln(1+x)}}=a_{n+1}\qquad \text{при } \ln(1+x)>0,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\ln(1+x)}}=0$ при $\ln(1+x)>0$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$ сходится, когда $\ln(1+x)>0$, т. е. при $x>0$. Итак, исходный ряд условно сходится, если x принадлежит промежутку $(0;e-1]$.

При $x\in(-1,0]$ общий член ряда $\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$ не стремится к нулю, следовательно, ряд расходится.

При $x\leqslant -1$ ряд не определен.

22. Кратные интегралы

22.1. Двойные интегралы

Определение двойного интеграла по стандартному прямоугольнику

Пусть функция $f(x; y)$ определена на прямоугольнике

$$P = \{(x; y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Разобьем прямоугольник P на n частей $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ сеткой прямых, параллельных координатным осям. Площадь каждой части P_i обозначим ΔP_i. В каждой из частей P_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, вычислим значение функции в этой точке – $f(\xi_i; \eta_i)$, и составим сумму:

$$I(P_i; M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i) \Delta P_i, \tag{22.1}$$

которую будем называть *интегральной суммой* для функции $f(x; y)$, соответствующей разбиению области P на части P_i и выбору точек M_i. Обозначим через d наибольшую из диагоналей частей P_i области P.

Определение 22.1. Если существует конечный предел I интегральных сумм $I(P_i; M_i)$ при $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения прямоугольника P и выбора точек M_i, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x; y)$ по прямоугольнику P и обозначается

$$\iint\limits_{P} f(x; y) dx\, dy, \tag{22.2}$$

а функция $f(x; y)$ называется *интегрируемой* на прямоугольнике P.

Определение двойного интеграла по квадрируемой области

Определение 22.2. *Многоугольником* называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной. Фигура, составленная из конечного числа многоугольников, называется *многоугольным множеством.* Площадь многоугольного множества равна сумме площадей всех многоугольников, из которых состоит многоугольное множество. Множество A на плоскости называется *квадрируемым (имеющим площадь)*, если для любого положительного числа найдется многоугольное множество, площадь которого меньше этого числа и которое содержит границу множества A.

Определение 22.3. Пусть функция $f(x;y)$ определена на квадрируемой, а значит, ограниченной области G. Рассмотрим прямоугольник

$$P = \{(x;y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

которому принадлежит область G. Пусть функция $F(x;y)$ является продолжением функции $f(x;y)$ на P и вне G равна нулю. Если существует двойной интеграл

$$\iint\limits_P F(x;y)\,dx\,dy;$$

то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области G и обозначается

$$\iint\limits_G f(x;y)dx\,dy, \tag{22.3}$$

а функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* по области G.

Вычисление двойных интегралов

Пусть функция $f(x;y)$ определена в области

$$G = \{(x;y) : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

где $y_1(x),\ y_2(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a;b]$.

Теорема 22.1. *Пусть существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy;$$

пусть для любого $x \in [a;b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy. \qquad (22.4)$$

Аналогично, если функция $f(x;y)$ определена в области

$$G = \{(x;y) : c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\},$$

где $x_1(y),\ x_2(y)$ – непрерывные функции на отрезке $[c;d]$, и если для любого $y \in [c;d]$ существует определенный интеграл

$$I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx,$$

то существует определенный интеграл

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx$$

и справедливо равенство:

$$\iint\limits_G f(x;y)dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx. \qquad (22.5)$$

Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным

$$x = \varphi(u;v),\ \ y = \psi(u;v), \quad \text{где} \ \ (u;v) \in D. \qquad (22.6)$$

При этом каждая точка $(x;y)$ замкнутой квадрируемой области G соответствует некоторой точке $(u;v)$ замкнутой квадрируемой области D и каждая точка $(u;v)$ области D переходит в некоторую точку $(x;y)$ области G.

Функции (22.6) называются *отображением* области D на область G. Область G называется *образом* области D, а область D – *прообразом* области G.

Пусть отображение (22.6) удовлетворяет следующим условиям:

1) отображение (22.6) взаимно однозначно, т. е. разные точки области D переходят в разные точки области G;

2) функции $\varphi(u;v)$ и $\psi(u;v)$ имеют в области D непрерывные частные производные первого порядка;

3) якобиан отображения

$$\frac{D(x;y)}{D(u;v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в области G.

Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dx\,dy = \iint\limits_D f\Big(\varphi(u;v);\psi(u;v)\Big)\left|\frac{D(x;y)}{D(u;v)}\right| du\,dv, \tag{22.7}$$

называемое *формулой замены переменных в двойном интеграле.*

Двойной интеграл в полярных координатах

Перейдем в интеграле $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ к полярным координатам φ, r. Они связаны с декартовыми координатами следующим соотношениями:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{matrix} \qquad r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

С учетом того, что модуль якобиана перехода к полярной системе координат равен r, получаем формулу замены декартовых координат на полярные в двойном интеграле:

$$\iint\limits_G f(x;y)dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{22.8}$$

22.2. Приложения двойных интегралов

Площадь квадрируемой области

Площадь S квадрируемой области G на плоскости XOY определим как величину двойного интеграла по этой области, т. е. формулой

$$S = \iint\limits_G dx\,dy. \tag{22.9}$$

Если $G = \{(x;y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ – криволинейная трапеция, то сводя двойной интеграл (22.9) к повторному, придем к выражению площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)dx.$$

Объем тела

Объемом V тела

$$T = \{(x;y;z) : (x;y) \in G,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x;y)\},$$

где G – квадрируемая замкнутая область, а $f(x;y)$ – непрерывная неотрицательная в области G функция, назовем величину, определяемую формулой

$$V = \iint\limits_G f(x;y)dx\,dy.$$

Физические приложения двойных интегралов

Пусть G – пластинка, лежащая в плоскости XOY, и $\mu(x;y)$ – плотность пластинки в точке $(x;y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

• *масса* пластинки G:

$$M = \iint\limits_G \mu(x;y)dx\,dy;$$

• *статические моменты* пластинки относительно осей координат:

$$M_x = \iint\limits_G y\mu(x;y)dx\,dy, \quad M_y = \iint\limits_G x\mu(x;y)dx\,dy;$$

• *координаты центра тяжести* пластинки:

$$x_0 = \frac{M_y}{M}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M},$$

где M – масса пластинки, M_x, M_y – ее статические моменты относительно осей координат;

• *моменты инерции* пластинки относительно осей координат:

$$I_x = \iint\limits_G y^2\mu(x;y)dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_G x^2\mu(x;y)dx\,dy;$$

• *момент инерции* пластинки относительно начала координат:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\mu(x;y)dx\,dy.$$

22.3. Примеры решения задач на двойные интегралы

Пример 22.1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f dy + \int_{2}^{e} dx \int_{0}^{\ln(x-1)} f dy.$$

Решение (см. рис. 22.1):

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f dy + \int_{2}^{e} dx \int_{0}^{\ln(x-1)} f dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}} f dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-\sqrt{4y+4}}^{2-x} f dx +$$

$$+ \int_{0}^{\ln(e-1)} dy \int_{e^y+1}^{e} f dx.$$

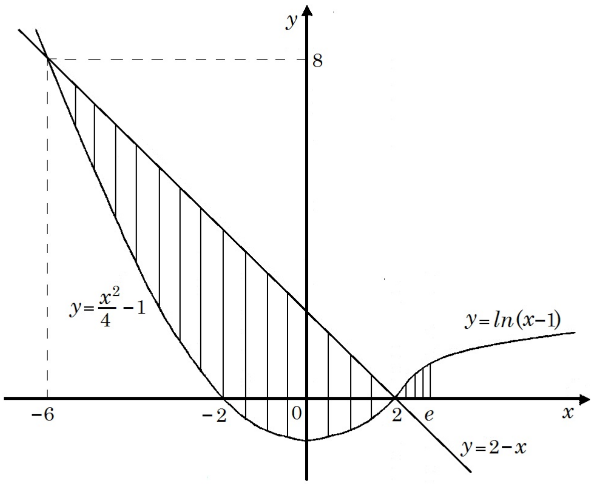


Рис. 22.1

П р и м е р 22.2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dx\,dy,$$

где $D = \{x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt{x}\}$ (рис. 22.2).

Р е ш е н и е.

$$\iint_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(18x^2\frac{y^3}{3} + 32x^3\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2x^9 + 6x^2x^{\frac{3}{2}} + 8x^3x^{12} - 8x^3x^2\right) dx =$$

$$= 6\frac{x^{12}}{12}\Big|_0^1 + 6\frac{x^{4,5}}{4,5}\Big|_0^1 + 8\frac{x^{16}}{16}\Big|_0^1 - 8\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = 1.$$

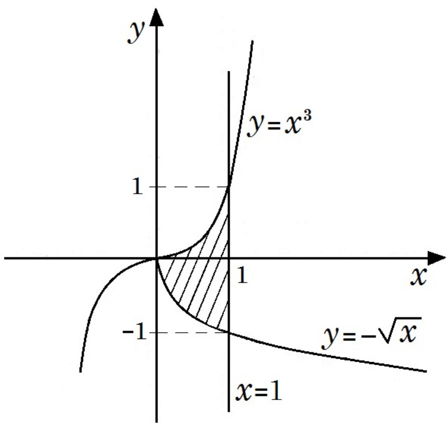


Рис. 22.2

П р и м е р 22.3. Найти массу и координаты центра тяжести пластинки

$$D = \{x = 1; y = 0; y^2 = x, (y \geqslant 0)\},$$

если ее масса распределена с плотностью $\mu = 3x + 6y^2$ (рис. 22.3).

Р е ш е н и е.

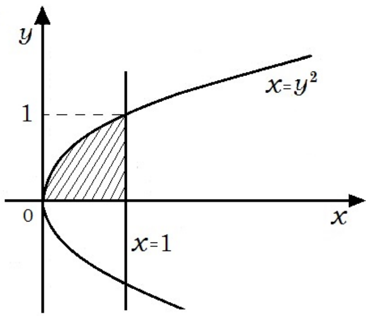


Рис. 22.3

$$1. \quad M = \iint_D \mu(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \left(3x + 6y^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{3}{2} x^2 \Big|_{y^2}^1 + 6y^2 x \Big|_{y^2}^1 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left(1 - y^4\right) dy + 6 \int_0^1 \left(y^2 - y^4\right) dy =$$

$$= \frac{3}{2} y \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 + 6 \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 - 6 \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{10} + 2 - \frac{6}{5} = 2.$$

2. $$M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D x\left(3x+6y^2\right)dx\,dy =$$
$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \left(3x^2+6xy^2\right)dx =$$
$$= \int_0^1 dy \left(3\frac{x^3}{3}+6y^2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{y^2}^1 =$$
$$= \int_0^1 \left(1-y^6+3y^2-3y^6\right)dy =$$
$$= y\Big|_0^1 + y^3\Big|_0^1 - 4\frac{y^7}{7}\Big|_0^1 = 1+1-\frac{4}{7} = \frac{10}{7},$$
тогда
$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{10/7}{2} = \frac{5}{7}.$$
Аналогично
$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D y\left(3x+6y^2\right)dx\,dy =$$
$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \left(3xy+6y^3\right)dx =$$
$$= \int_0^1 dy \left(3y\frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^1 + 6y^3x\Big|_{y^2}^1\right) =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^5+6y^3-6y^5\right)dy =$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^6}{6}\right)+6\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^1 = 1,$$
тогда
$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 22.4. Найти массу и координаты центра тяжести пластинки

$$D = \{x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1\},$$

если ее масса распределена с плотностью $\mu = y^2$ (рис. 22.4).

Р е ш е н и е.

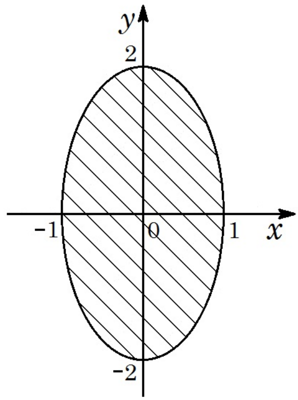


Рис. 22.4

1. Масса вычисляется по формуле $M = \iint_D \mu(x, y)dx\,dy$. Сделаем эллиптическую замену переменных:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi, \end{cases}$$

модуль якобиана которой $|I| = |ab|r$.

В нашем случае $x = r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$, $|I| = 2r$. Тогда

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r\cdot 4r^2\sin^2\varphi dr = 8\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\sin^2\varphi\,dr =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = 2\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

2. Найдем координаты центра тяжести: $x_0 = \frac{M_y}{M}$, $y_0 = \frac{M_x}{M}$.

$$M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D xy^2 dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dy \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} xy^2 dx = \int_{-2}^{2} dy \left(\frac{x^2}{2}y^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} =$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2 dy \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\right)^2}{2}\right) = 0,$$

следовательно,

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{2\pi} = 0.$$

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D y^3 dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} y^3 dy = \int_{-2}^{2} dx \frac{y^4}{4}\Big|_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} = 0,$$

следовательно,

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{0}{2\pi} = 0.$$

22.4. Тройные интегралы

Определение тройного интеграла

Известно, что *многогранник* – это ограниченная часть трехмерного пространства, граница которой состоит из конечного числа плоских кусков. Определение объема многогранника считаем известным.

Многогранным множеством будем называть фигуру, составленную из конечного числа многогранников. *Объем* его определим как сумму объемов всех многогранников, из которых составлено многогранное множество. Множество T в пространстве называется *кубируемым (имеющим объем)*, если для любого положительного числа найдется многогранное множество, объем которого меньше этого числа и которое содержит границу T.

Пусть в кубируемой области T пространства $\mathbb{R}^3$ определена ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем область T на n кубируемых частей T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек. Объем каждой части T_i обозначим соответственно ΔV_i. В каждой части T_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ и составим сумму:

$$I(T_i; M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i, \tag{22.10}$$

которую будем называть *интегральной суммой* для функции $f(x;y;z)$, соответствующей данному разбиению области T на части T_i. Пусть d_i – диаметр части T_i, т. е. наибольшее расстояние между точками, входящими в T_i, а $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i$ – наибольший из диаметров.

Определение 22.4. Если интегральная сумма $I(T_i;M_i)$ при $d \to 0$ имеет конечный предел $\lim\limits_{d\to 0} I(T_i; M_i) = I$, не зависящий от способа разбиения области T на части T_i и выбора точек M_i, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x; y; z)$ по области T и обозначается

$$\iiint\limits_T f(x; y; z)dx\,dy\,dz, \tag{22.11}$$

а функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой* в области T.

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как однократные и двойные интегралы.

Вычисление тройных интегралов

Пусть функция $f(x; y; z)$ определена в области

$$T = \{(x; y; z) :\ (x; y) \in G,\ z_1(x; y) \leqslant z \leqslant z_2(x; y)\},$$

где $z_1(x; y)$, $z_2(x; y)$ – непрерывные функции в квадрируемой области G.

Теорема 22.2. *Пусть существует тройной интеграл* (22.11) *и пусть для каждого* $(x; y) \in G$ *существует определенный интеграл*

$$I(x; y) = \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)\,dz.$$

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x; y)\,dx\,dy = \iint\limits_G dx\,dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)\,dz$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iiint\limits_T f(x;y;z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_G dx\,dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz,$$

т. е. тройной интеграл равен повторному.

З а м е ч а н и е. В свою очередь, двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x;y)\,dx\,dy$$

можно свести к повторному:

$$\iint\limits_G I(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x;y)\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов:

$$\iiint\limits_T f(x;y;z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Замена переменных в тройном интеграле

Аналогично случаю двойного интеграла, замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x;y;z)dx\,dy\,dz$ заключается в переходе от переменных x, y, z к переменным

u, v, w, которые связаны с x, y, z некоторыми соотношениями

$$x = \varphi(u, v, w),\ y = \psi(u, v, w),\ z = \chi(u, v, w), \qquad (22.12)$$

где $(u, v, w) \in \tau$.

Пусть функции φ, ψ, χ таковы, что:

1) отображение (22.12) взаимно однозначно;

2) функции φ, ψ, χ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка;

3) якобиан этих функций $I = \dfrac{D(x; y; z)}{D(u; v; w)}$ сохраняет в области τ постоянный знак.

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_T f(x; y; z) dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint\limits_\tau f\Big(\varphi(u, v, w); \psi(u, v, w); \chi(u, v, w)\Big)\, |I|\, du\, dv\, dw. \qquad (22.13)$$

В частности, для цилиндрических координат r, φ, h:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h,$$

якобиан $I = r$. Для сферических координат r, φ, ψ:

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

якобиан $I = r^2\cos\psi$.

22.5. Приложения тройных интегралов

Вычисление объемов тел с помощью тройных интегралов

Объем V *кубируемой области* T в трехмерном пространстве $OXYZ$ выражается формулой

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Если $T = \{(x;y;z) : (x;y) \in G,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x;y)\}$, где G – квадрируемая область на плоскости XOY, а $f(x;y)$ – непрерывная в области G функция, то сводя тройной интеграл к повторному, придем к формуле, выражающей объем тела T через двойной интеграл:

$$V = \iint\limits_G dx\,dy \int_0^{f(x;y)} dz = \iint\limits_G \left[z\Big|_0^{f(x;y)} \right] dx\,dy = \\ = \iint\limits_G f(x;y)dx\,dy.$$

Физические приложения тройных интегралов

Пусть T – кубируемая область пространства $OXYZ$, $\rho(x;y;z)$ – плотность тела, занимающего область T, в точке $(x;y;z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

• *масса* тела:

$$M = \iiint\limits_T \rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

• *статические моменты* тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_T y\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

• *координаты центра тяжести* тела:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{M},\ z_0 = \frac{M_{xy}}{M};$$

• *моменты инерции* тела относительно координатных плоскостей:

$$I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_T y^2\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\rho(x;y;z)dx\,dy\,dz;$$

• *моменты инерции* тела относительно осей координат:

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} = \iiint\limits_T \left(y^2 + z^2\right) \rho(x; y; z) dx\, dy\, dz;$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \iiint\limits_T \left(x^2 + z^2\right) \rho(x; y; z) dx\, dy\, dz;$$

$$I_z = I_{yz} + I_{xz} = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) \rho(x; y; z) dx\, dy\, dz;$$

• *момент инерции* тела относительно начала координат:

$$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho(x; y; z) dx\, dy\, dz.$$

Примеры решения задач на тройные интегралы

Пример 22.5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} xy\right) dx\, dy\, dz,$$

где область интегрирования V ограничена линиями

$$x = 0; \quad y = -1; \quad y = \frac{x}{2}; \quad z = 0; \quad z = -\pi^2.$$

Решение. Проекция фигуры, ограниченной заданными поверхностями, на плоскость XOY изображена на рис. 22.5.

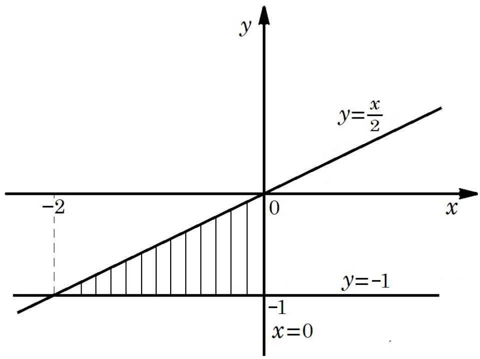


Рис. 22.5

$$\iiint\limits_V y^2\cos(\frac{\pi}{4}xy)dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{2y}^{0} dx \int_{-\pi^2}^{0} \left(y^2\cos(\frac{\pi}{4}xy)\right)\, dz =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{2y}^{0} dx \left(zy^2\cos(\frac{\pi}{4}xy)\right)\Big|_{-\pi^2}^{0} =$$

$$= \pi^2 \int_{-1}^{0} dy \int_{2y}^{0} \left(y^2\cos(\frac{\pi}{4}xy)\right) dx =$$

$$= \pi^2 \int_{-1}^{0} dy \left(y^2 \frac{\sin(\frac{\pi}{4}xy)}{\frac{\pi}{4}y}\right)\Big|_{2y}^{0}$$

$$= -2\pi \int_{-1}^{0} \sin(\frac{\pi}{2}y^2)dy^2 = 4\cos(\frac{\pi}{2}y^2)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= 4\left(1-\cos(\frac{\pi}{2})\right) = 4.$$

Пример 22.6. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right) dx\,dy\,dz,$$

где область интегрирования V ограничена линиями

$$y=9x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$$

Решение. Проекция фигуры, ограниченной заданными поверхностями, на плоскость XOY изображена на рис. 22.6.

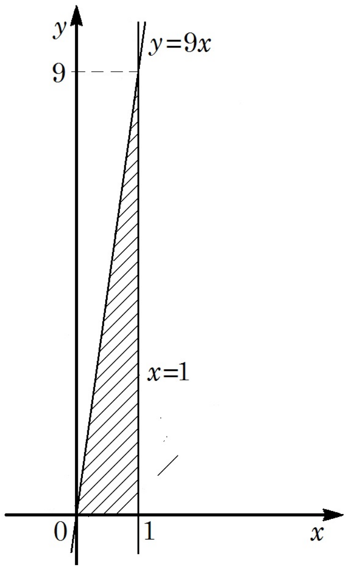


Рис. 22.6

$$\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right) dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{9x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} \left(1+2x^3\right)\, dz =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{9x} \left(1+2x^3\right)\sqrt{xy}\,dy = \\
&= \int_0^1 dx \Big(\left(1+2x^3\right)\sqrt{x}\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big)\Big|_0^{9x} = \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 dx\left(1+2x^3\right)\sqrt{x}\,(9x)^{3/2} = \\
&= 18\int_0^1 \left(1+2x^3\right)x^2 dx = \\
&= 18\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 36\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = 6+6=12.
\end{aligned}
$$

Пример 22.7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=5\sqrt{x};\ y=\frac{5}{3}x;\ z=0;\ z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3}.$$

Решение. Проекция тела на плоскость OXY имеет вид (рис. 22.7):

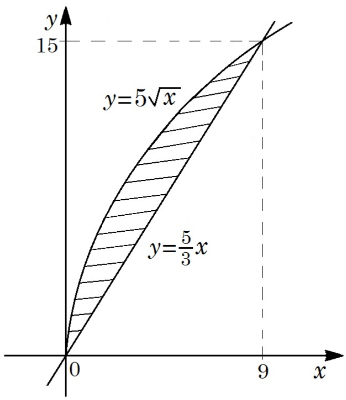


Рис. 22.7

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_0^9 dx \int_{\frac{5}{3}x}^{5\sqrt{x}} dy \int_0^{5+\frac{5}{3}\sqrt{x}} dz =$$

$$= \int_0^9 dx \int_{\frac{5}{3}x}^{5\sqrt{x}} \left(5 + \frac{5}{3}\sqrt{x}\right) dy =$$

$$= \int_0^9 dx \left(5y + \frac{5}{3}\sqrt{x}y\right)\Big|_{\frac{5}{3}x}^{5\sqrt{x}} =$$

$$= 25 \int_0^9 dx \left(\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^{3/2}}{9}\right) =$$

$$= 25 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^9 - \frac{25}{9} \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^9 =$$

$$= \frac{50}{3} \cdot 27 - \frac{10}{9} \cdot 81 \cdot 3 = 450 - 270 = 180.$$

П р и м е р 22.8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2-\sqrt{x^2+6y^2}$, $z = -1-\sqrt{x^2+6y^2}$, $x = 5y^2-1$, $x = -3y^2+1$.

Р е ш е н и е. Проекция на плоскость OXY (рис. 22.8):

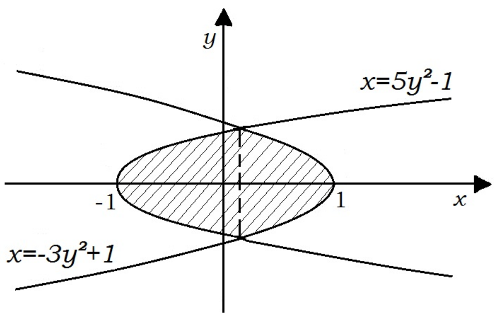


Рис. 22.8

Найдем точки пересечения парабол $x = 5y^2 - 1$ и $x = -3y^2 + 1$:

$$5y^2 - 1 = -3y^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Тогда мы можем расставить пределы интегрирования в повторном интеграле:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{5y^2-1}^{-3y^2+1} dx \int_{-1-\sqrt{x^2+6y^2}}^{2-\sqrt{x^2+6y^2}} dz =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{5y^2-1}^{-3y^2+1} dx\, z\Big|_{-1-\sqrt{x^2+6y^2}}^{2-\sqrt{x^2+6y^2}} =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{5y^2-1}^{-3y^2+1} \left(2 - \sqrt{x^2+6y^2} + 1 + \sqrt{x^2+6y^2}\right) dx =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{5y^2-1}^{-3y^2+1} 3\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \cdot 3\left(-3y^2 + 1 - 5y^2 + 1\right) =$$
$$= -24\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2 dy + 6\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy = -24\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 6y\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= -8\cdot\frac{1}{8} - (-8)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + 3 + 3 = -2 + 6 = 4.$$

П р и м е р 22.9. Вычислить массу и координаты центра тяжести тела D, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$, если масса распределена с плотностью $\mu = \frac{5}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Р е ш е н и е. Из условий $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$ и $z \geqslant 0$ получаем:

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Проекция тела на область OXY (рис. 22.9):

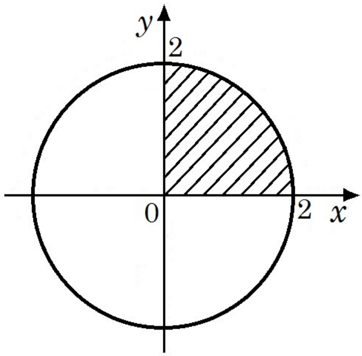


Рис. 22.9

1. Масса:

$$M = \iiint\limits_V \mu(x, y, z) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{5}{2} \left(x^2 + y^2\right) dz =$$

$$= \frac{5}{2} \iint \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}\, dx\, dy =$$

перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$= \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}\, dr =$$

$$= \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^4\, dr = \frac{5}{2}\, \varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = 8\pi.$$

2. Координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{M}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{M}.$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\mu\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x\frac{5}{2}\left(x^2+y^2\right)\, dz =$$

$$= \frac{5}{2}\iint x\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\, dx\, dy =$$

перейдем к полярным координатам:

$$= \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r\cdot r\cos\varphi\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}\, dr =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^2 r^5\, dr = \frac{5}{2}\cdot \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{80}{3},$$

следовательно,

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{80}{3}\cdot\frac{1}{8\pi} = \frac{10}{3\pi}.$$

Аналогично

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\mu\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} y\frac{5}{2}\left(x^2+y^2\right)\, dz =$$

$$= \frac{5}{2}\iint y\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\, dx\, dy = \frac{80}{3}$$

и

$$y_0 = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{80}{3}\cdot\frac{1}{8\pi} = \frac{10}{3\pi}.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\mu\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\frac{5}{2}\left(x^2+y^2\right)\, dz =$$

$$= \frac{5}{2}\iint \left(x^2+y^2\right)\cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{5}{4}\iint \left(x^2+y^2\right)^2\, dx\, dy =$$

перейдем к полярным координатам:

$$= \frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2\, dr =$$

$$= \frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^5\, dr = \frac{5}{4}\cdot \varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{20}{3}\pi,$$

откуда

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{20\pi}{3}\cdot\frac{1}{8\pi} = \frac{5}{6}.$$

23. Криволинейный интеграл

Определение 23.1. *Векторным полем* называется область пространства или плоскости, каждой точке M которой поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{\Phi}$.

Проекции P, Q и R вектора $\boldsymbol{\Phi}$ на координатные оси являются функциями координат точки M:

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(M) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

В частности, если поле задано на плоскости, то

$$\boldsymbol{\Phi} = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}.$$

Поле силы тяжести

В качестве примера векторного поля рассмотрим поле сил тяготения. Если в начале координат помещена масса m, то эта масса создает поле сил тяготения, так как в каждой точке M пространства на помещенную в ней единичную массу действует сила, равная по величине, согласно закону Ньютона, $\dfrac{\kappa}{|\boldsymbol{r}|^2}$ и направленная к началу координат. Здесь $r = O\overline{M}$, а κ — постоянная тяготения.

Следовательно,

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\kappa m}{|\boldsymbol{r}|^2}\boldsymbol{r}_0,$$

где $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ — единичный вектор.

Пусть x, y, z — координаты точки M. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad |\overline{OM}| = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{F} = \frac{-\kappa m(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Здесь

$$P = -\frac{\kappa m x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad Q = -\frac{\kappa m y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},$$

$$R = -\frac{\kappa m z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Задача о работе

Многие задачи физики приводят к очень важному обобщению понятия определенного интеграла — к криволинейному интегралу.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Вдоль некоторой кривой L, находящейся в поле сил $\boldsymbol{F} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$, движется некоторая масса (материальная точка). Требуется определить работу сил поля при перемещении этой массы из точки A в точку B.

Из физики известно, что если материальная точка под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$ совершила прямолинейное перемещение, выражаемое вектором $\boldsymbol{l}$, то работа E силы $\boldsymbol{F}$ равна скалярному произведению силы $\boldsymbol{F}$ на $\boldsymbol{l}$:

$$E = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l}. \tag{23.1}$$

Так как в общем случае сила $\boldsymbol{F}$ меняется как по величине, так и по направлению, и так как перемещение по кривой L не является прямолинейным, то непосредственно применять формулу (23.1) нельзя. Поэтому мы поступим следующим образом. Разобьем кривую L в направлении от точки A к точке B – на n «малых» дуг точками деления $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Начальную точку A кривой L обозначим через A_0, конечную точку B – через A_n. Пусть x_i, y_i, z_i — координаты точки A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Впишем в кривую L ломаную, соединив соседние точки деления прямолинейными отрезками. На каждой дуге $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i.

Заменим кривую L ломаной $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, а силу $\boldsymbol{F}$, которая, вообще говоря, меняется и по величине и по направлению от точки к точке, будем считать постоянной каждого звена $A_{i-1}A_i$ ломаной и равной заданной силе в точке M_i дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$:

$$\boldsymbol{F}(M_i) = P(M_i)\boldsymbol{i} + Q(M_i)\boldsymbol{j} + R(M_i)\boldsymbol{k},$$

или подробнее:

$$\boldsymbol{F}(M_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{k}.$$

Тогда работа силы вдоль дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ будет приближенно равна работе силы $\boldsymbol{F}(M_i)$ вдоль звена $A_{i-1}A_i$, которая, согласно формуле (23.1), равна скалярному произведению силы $\boldsymbol{F}(M_i)$ на вектор перемещения $\overline{A_{i-1}A_i}$: $\boldsymbol{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i}$.

Проекции вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на оси координат равны соответственно

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

Выражая скалярное произведение $\boldsymbol{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i}$ в координатной форме, получим

$$\boldsymbol{F}(M_i)\overline{A_{i-1}A_i} = \\ = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

Суммируя эти выражения по всем звеньям ломаной, найдем приближенное значение работы E вдоль кривой L:

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \big(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i\big).$$

За точное значение работы E примем предел полученной суммы, устремляя длины дуг $\smile{A_{i-1}A_i}$ к нулю:

$$E = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + \\ + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i\big).$$

Таким образом, вычисление работы привело нас к нахождению предела суммы определенного вида. Нахождение пределов сумм рассмотренного вида встречается и в других вопросах, не связанных с вычислением работы. Изучим свойства пределов таких сумм в общем виде, независимо от той или иной физической задачи.

23.1. Определение криволинейного интеграла от вектор-функции

Пусть в некоторой области трехмерного пространства заданы непрерывная кривая L (дуга $\smile{AB}$) и вектор-функция

$$\boldsymbol{\Phi} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

определенная в каждой точке кривой L.

Проделаем следующие действия:

1. Разобьем дугу $\smile{AB}$ точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ в направлении от точки A к точке B на n дуг: $\smile{A_0A_1}$, $\smile{A_1A_2}$, $\ldots$, $\smile{A_{n-1}A_n}$. Начало дуги A мы обозначили через A_0, а конец B — через A_n. Пусть x_i, y_i, z_i — координаты точки A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

2. На каждой дуге $\smile{A_{i-1}A_i}$ выбираем произвольную точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i. Составим скалярное произведение вектора

$$\boldsymbol{\Phi} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

вычисленного в точке M_i, на вектор

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j} + \Delta z_i \boldsymbol{k}.$$

Получим

$$\boldsymbol{\Phi}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \\ = P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

3. Составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i\big).$$

Эта сумма называется *интегральной суммой.*

4. Если существует предел интегральной суммы при условии, что длины всех дуг $\smile{A_{i-1}A_i}$ стремятся к нулю, не зависящий ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ на дуги $\smile{A_{i-1}A_i}$, ни от выбора на каждой из них точки M_i, то этот предел называют *криволинейным интегралом* от вектор-функции $\boldsymbol{\Phi} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ вдоль кривой L (или вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$) в направлении от A к B и обозначают

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

или

$$\int\limits_{L} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Так как подынтегральное выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ есть скалярное произведение вектора $\boldsymbol{\Phi} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ и дифференциала $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ переменной точки кривой L, то криволинейный интеграл от вектор-функции $\boldsymbol{\Phi} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ можно записать в следующей векторной форме: $\int_L \boldsymbol{\Phi} \cdot d\boldsymbol{r}$. Криволинейный интеграл от вектор-функции часто называют криволинейным интегралом по координатам, или криволинейным интегралом второго рода.

Определение криволинейного интеграла показывает, что работа силы $\boldsymbol{F}$ вдоль дуги L есть криволинейный интеграл от силы $\boldsymbol{F}$ вдоль этой дуги, т. е.

$$E = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где P, Q и R — проекции силы на координатные оси.

Так же, как и в случае определенного интеграла, имеет место теорема существования криволинейного интеграла, которую мы принимаем без доказательства.

Теорема 23.1 (существование криволинейного интеграла)**.** *Пусть кривая L задана в параметрическом виде уравнениями*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – функции, имеющие непрерывные производные первого порядка на $[\alpha, \beta]$. Тогда для всякой вектор-функции $\boldsymbol{\Phi} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$, непрерывной вдоль этой кривой, существует криволинейный интеграл по кривой L.

Вычисление криволинейного интеграла от вектор-функции

Покажем, что вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть дуга $L = \overset{\smile}{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$

причем функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка. Предположим, что начальной точке A дуги $\overset{\smile}{AB}$ соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B — значение $t = \beta$ и при изменении парамера t от α до β переменная точка $M(x; y; z)$ описывает дугу в направлении от A к B. Пусть далее $P(x, y, z)$ — непрерывная функция, заданная вдоль кривой L. Так как $P(x, y, z)$ — непрерывная функция переменных x, y, z, а x, y, z — непрерывные функции от t, то сложная функция $P\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ является непрерывной функцией от t на сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Так как кривая L и функция $P(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы существования криволинейного интеграла, то существует криволинейный интеграл $\displaystyle\int_L P(x, y, z)\,dx$ и, следовательно, существует предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i,$$

который не зависит ни от способа разбиения дуги L на части, ни от выбора промежуточных точек $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$.

Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$; кроме того, обозначим $t_0 = \alpha,\ t_n = \beta$. Этим значениям параметра t соответствуют точки дуги L:

$$A = A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_{n-1},\ A_n = B,$$

имеющие следующие координаты:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0),\\
&x_1 = x(t_1),\ y_1 = y(t_1),\ z_1 = z(t_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-1} = x(t_{n-1}),\ y_{n-1} = y(t_{n-1}),\ z_{n-1} = z(t_{n-1}),\\
&x_n = x(t_n),\ y_n = y(t_n),\ z_n = z(t_n).
\end{aligned}$$

При этом точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, делящие дугу, расположены на ней последовательно в направлении от точки A к точке B.

При переходе из точки A_{i-1} к точке A_i абсцисса x получает приращение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$. Применим к разности $x(t_i) - x(t_{i-1})$ теорему Лагранжа о конечном приращении:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $t_{i-1} < \tau_i < t_i$. Значению параметра $t = \tau_i$ соответствует на кривой точка M_i с координатами $\xi_i = x(\tau_i),\ \eta_i = y(\tau_i),\ \zeta_i = z(\tau_i)$, лежащая на дуге $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$. Составим для выбранного разбиения дуги L на части и для выбранных выше точек M_i интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)x'(\tau_i)\Delta t_i,$$

и перейдем к пределу при условии, что диаметр разбиения λ сегмента $[\alpha, \beta]$ стремится к нулю. При этом длины дуг

$\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ стремятся к нулю, и мы имеем, согласно определению криволинейного интеграла,

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P\left(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)\right)x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, является интегральной суммой для непрерывной функции одной переменной t:

$$P[x(t),y(t),z(t)]x'(t),$$

заданной на сегменте $[\alpha,\beta]$. Ее предел равен определенному интегралу:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P\left(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)\right)x'(\tau_i)\Delta t_i =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\,dt. \qquad (23.2)$$

Это и есть искомая формула, позволяющая свести вычисление криволинейного интеграла к вычислению определенного интеграла. Мы предполагали, что заданному направлению на кривой L соответствует изменение параметра t от α до β (где $\alpha < \beta$). Формула (23.2) остается справедливой и в случае $\alpha > \beta$.

Таким образом,

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\,dt. \quad (23.3)$$

Пусть при перемещении точки по кривой L из точки A в точку B x меняется от a до b. Принимая в этом случае x за параметр, получим следующие параметрические уравнения кривой L: $x = x$, $y = \varphi(x)$, причем x меняется от a до b. Замечая, что $x' = \frac{dx}{dx} = 1$, получим

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx. \quad (23.4)$$

В заключение приведем следующие два почти очевидных свойства криволинейного интеграла.

Свойство 1. Значение криволинейного интеграла зависит от направления движения по кривой L. Если по той же кривой двигаться не от точки A к точке B, а в обратном направлении, от B к A, то значение интеграла изменит знак на противоположный.

С в о й с т в о 2 (свойство аддитивности). Если кривая L состоит из нескольких кривых $L_1, L_2, \ldots, L_s$ и на каждой их этих кривых криволинейные интегралы существуют, то существует интеграл вдоль всей кривой L и он равен сумме интегралов вдоль каждой из ее частей, т. е.

$$\int\limits_L = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} + \cdots + \int\limits_{L_s}.$$

При этом предполагается, что все кривые проходятся в одном направлении.

Рассмотрим теперь примеры на вычисление криволинейных интегралов.

П р и м е р 23.1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} 2xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz,$$

где AB — один виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ от точки $A(1; 0; 0)$ до точки $B(1; 0; 4\pi)$.

Р е ш е н и е. Вдоль дуги AB параметр t меняется от 0 до 2π. Применяя формулу (23.3) и замечая, что $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = 2$, получим

$$\int\limits_{AB} 2xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \big(2\cos t \sin t(-\sin t) + \sin^2 t \cos t + 4t^2 \cdot 2\big)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + 8t^2)\,dt = -\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{8t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi^3.$$

П р и м е р 23.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

вдоль дуги кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу (23.4), получим

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\left(x^2 + (x^3)^2\right) + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^2 + 7x^6)\,dx = 129\frac{1}{3}.$$

Определение 23.2. Если криволинейный интеграл $\int \boldsymbol{\Phi}\,d\boldsymbol{r}$ от вектор-функции

$$\boldsymbol{\Phi} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

берется по замкнутому контуру L, то он называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{\Phi}$ по замкнутому контуру L и обозначается

$$\oint\limits_L \boldsymbol{\Phi}\,dr \quad \text{или} \quad \oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

П р и м е р 23.3. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\boldsymbol{\Phi} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

вдоль окружности L, образованной пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $z = 1$.

Р е ш е н и е. Запишем параметрическое уравнение окружности L:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Так как $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$ и $z' = 0$, то по формуле (23.3) получим

$$\oint\limits_L (x\,dx + 2y\,dy + z\,dz) = \int\limits_0^{2\pi} \big(\cos t(-\sin t) + 2\sin t\cos t\big)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin t\cos t\,dt = \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Итак, циркуляция вектора $\boldsymbol{\Phi} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ вдоль окружности L равна нулю.

Формула Остроградского–Грина

Рассмотрим на плоскости Oxy область σ, ограниченную кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям, не более чем в двух точках (см. рис. 23.1). Пусть далее $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области σ. Тогда имеет место следующая формула, называемая *формулой Остроградского–Грина*[32]:

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где двойной интеграл берется по области σ, а криволинейный интеграл — вдоль замкнутого контура L, ограничивающего область σ. При этом контур L проходится в положительном направлении, т. е. при движении вдоль него область σ остается слева (рис. 23.1).

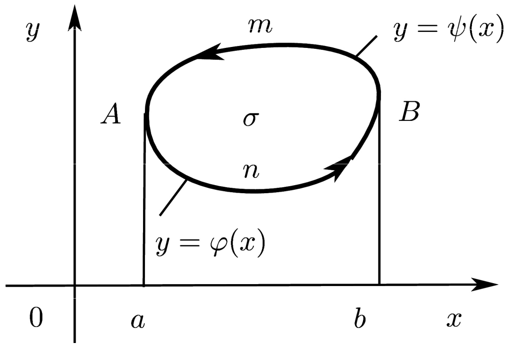


Рис. 23.1

Применим формулу Остроградского–Грина к вычислению площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Рассмотрим функции $P(x,y) \equiv 0$ и $Q(x,y) \equiv x$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, а $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, то, применяя формулу Остроградского–Грина, получим

$$\iint\limits_{\sigma} (1-0)\,d\sigma = \oint 0\,dx + x\,dy,$$

---

[32] *Михаил Васильевич Остроградский* (1801–1861) — выдающийся русский математик и механик. *Джордж Грин* (1793–1841) — английский математик и физик.

или

$$\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \oint x\,dy.$$

Но интеграл $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ численно равен площади области σ. Поэтому окончательно имеем

$$S(\sigma) = \oint\limits_{L} x\,dy. \tag{23.5}$$

Аналогично, полагая $P \equiv -y$, а $Q \equiv 0$, можно получить еще одну формулу для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла:

$$S(\sigma) = -\oint\limits_{L} y\,dx. \tag{23.6}$$

Эти формулы дают возможность с помощью криволинейного интеграла подсчитать площадь плоской области σ.

Пример 23.4. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, заданным параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Решение. Если обходить эллипс в положительном направлении, то параметр t изменяется от 0 до 2π. Применяя формулу (23.5) и правила вычисления криволинейного интеграла, получим

$$S(\sigma) = \oint x\,dy = \int\limits_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = ab\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi ab.$$

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть дано плоское векторное поле $\boldsymbol{\Phi} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что функции P и Q непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G плоскости XOY.

Рассмотрим в области G две произвольные точки A и B. Эти точки можно соединить различными линиями, лежащими в области G, вдоль которых значения криволинейного интеграла $\displaystyle\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$, вообще говоря, различны. Так, например, рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L} (x+y)\,dx + 2xy\,dy$$

и две точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$. Вычислим этот интеграл, во-первых, вдоль отрезка l_1 прямой $y = 3x - 2$, соединяющей точки A и B, и, во-вторых, вдоль дуги l_2 параболы $y = x^2$, соединяющей эти же точки. Применяя правила вычисления криволинейного интеграла, найдем

а) вдоль отрезка l_1:

$$\int\limits_{l_1} (x+y)\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} [x+(3x-2)+2x(3x-2)\cdot 3]\,dx = \int\limits_{1}^{2} (18x^2-8x-2)\,dx = 28;$$

б) вдоль дуги l_2 параболы:

$$\int\limits_{l_2} (x+y)\,dx + 2xy\,dy =$$

$$= \int\limits_1^2 [x + x^2 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x]\,dx = \int\limits_1^2 (4x^4 + x^2 + x)\,dx = 28\frac{19}{30}.$$

Таким образом, мы видим, что значения криволинейного интеграла $\int\limits_L (x+y)\,dx + 2xy\,dy$ зависят от пути интегрирования, т. е. зависят от вида линии, соединяющей точки A и B. Наоборот, как нетрудно проверить, криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$ вдоль тех же линий l_1 и l_2, соединяющих точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$, дает одно и то же значение, равное $33\frac{1}{3}$.

Разобранные примеры показывают, что криволинейные интегралы, вычисленные по различным путям, соединяющим две данные точки, в одних случаях различны между собой, а в других случаях принимают одно и то же значение.

Определение 23.3. Пусть A и B — две произвольные точки области G. Рассмотрим различные кривые, лежащие в области G и соединяющие точки A и B. Если криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по любому из этих путей принимает одно и то же значение, то говорят, что он *не зависит от пути интегрирования.*

В следующих двух теоремах приводятся условия, при которых криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования.

Теорема 23.2. *Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$$

в некоторой области G не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, был равен нулю.

Теорема 23.3. *Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$$

не зависел от пути интегрирования в односвязной [33] области G, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{23.7}$$

Пример 23.5. Криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

не зависит от пути интегрирования, так как для него выполняются условия теоремы 23.3.

Действительно, здесь $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ и, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

[33] Область G называется *односвязной*, если для любой замкнутой кривой, лежащей в G, ограниченная ею конечная часть плоскости принадлежит G.

П р и м е р 23.6. Криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x+y)\,dx + 2xy\,dy,$$

как мы уже видели выше, зависит от пути интегрирования. Это подтверждается и сформулированной теоремой. Здесь

$$P = x+y, \quad Q = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \ \text{ и } \ \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим силовое поле $\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$, заданное в некоторой области G плоскости XOY.

Определение 23.4. Силовое поле называется *потенциальным*, если существует такая функция $U(x,y)$, градиент которой равен $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U \quad \text{или} \quad P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}. \tag{23.8}$$

Функция $U(x,y)$ называется *потенциальной функцией*, или *потенциалом.*

Из равенства (23.8) следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, т. е. потенциал $U(x,y)$ есть первообразная от дифференциального выражения $P\,dx + Q\,dy$ и, следовательно,

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

На основании изложенного выше можно сказать, что силовое поле $\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ потенциально в некоторой односвязной области G тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Как мы знаем, работа E силы $\boldsymbol{F}$ вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$ выражается через криволинейный интеграл: $E = \int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$. В потенциальном поле работа, очевидно, не зависит от пути, соединяющего точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Применяя аналог формулы Ньютона–Лейбница, получим

$$E = \int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P\,dx+Q\,dy = U(x_2;y_2)-U(x_1;y_1). \tag{23.9}$$

Таким образом, *в потенциальном поле работа равна разности потенциалов.*

23.2. Криволинейный интеграл по длине дуги

В предыдущих пунктах мы рассматривали криволинейный интеграл от вектор-функции. Однако некоторые задачи приводят к криволинейному интегралу другого рода.

Рассмотрим в плоскости OXY кривую $\overset{\smile}{AB}$ длины l. Пусть вдоль этой кривой распределена масса с линейной плотностью $\gamma = f(M) = f(x;y)$. Определим массу m этой кривой. Для этого разобъем кривую $\overset{\smile}{AB}$ точками деления $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ на n частей, обозначая для единообразия точки A и B соответственно через A_0 и A_n. Обозначим Δm_i массу дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ длины Δl_i. Ясно, что $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Подсчитаем приближенно массу дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$. Пусть $M_i(x_i, y_i)$ – произвольная точка дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$. Считая, что плотность в каждой точке дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ такая же, как в точке M_i, получим приближенное значение массы дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$:

$$\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta l_i = f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Суммируя, найдем приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \tag{23.10}$$

За точное значение массы кривой $\overset{\smile}{AB}$ примем предел суммы (23.10) при условии, что все $\Delta l_i \to 0$. Итак,

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

К подобного рода суммам и их пределам приводят и другие задачи. Отвлекаясь от конкретного физического содержания, рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$, определенную в точках дуги $\overset{\smile}{AB}$. Составленная для нее сумма вида (23.10) называется *интегральной суммой*. Предел интегральной суммы (23.10) при условии, что все длины дуг $\Delta l_i \to 0$, называется *криволинейным интегралом* от функции $f(x, y)$ *по длине дуги* $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается символом $\int\limits_{AB} f(M)\, dl$ или $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl$.

Итак,

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Таким образом, масса дуги равна криволинейному интегралу от плотности по длине этой дуги:

$$m = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl. \tag{23.11}$$

Следует обратить внимание на то, что, в отличие от криволинейного интеграла по координатам, криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от выбора направления на кривой.

Можно показать, что вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если дуга $\breve{AB}$ задана уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \tag{23.12}$$

Подынтегральное выражение в правой части этого равенства получается из подынтегрального выражения в левой части заменой y на $y(x)$ и дифференциала дуги dl на его выражение в декартовых координатах $\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$.

Если же дуга $\breve{AB}$ задана параметрически:

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha; \beta],$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

П р и м е р 23.7. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$, если плотность $\gamma = x^2$.

Р е ш е н и е. Применяя формулы (23.11) и (23.12), получим

$$m = \int\limits_{AB} x^2\, dl = \int\limits_1^2 x^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int\limits_1^2 x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx =$$

$$= \int\limits_1^2 x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + x^2) = \frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \quad \text{ед. массы.}$$

З а м е ч а н и е.Часто криволинейный интеграл по длине дуги называют *криволинейным интегралом первого рода*, а криволинейный интеграл от вектор-функции — *криволинейным интегралом второго рода.*

24. Элементы теории поля

Скалярное и векторное поля

Скалярное поле определяется скалярной функцией точки:

$$f(P) = f(x; y; z),$$

где $P(x; y; z)$ – точка пространства.

Векторное поле определяется векторной функцией точки:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}),$$

где $M(x; y; z)$ – точка пространства, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ – радиус-вектор точки M.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $OXYZ$, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ описывается вектор-функцией трех переменных $\boldsymbol{a}(x; y; z)$ или тремя скалярными функциями – ее координатами:

$$\boldsymbol{a}(x; y; z) = \{P(x; y; z), Q(x; y; z), R(x; y; z)\}.$$

Производная по направлению

Скалярное и векторное поля

$$f(P) = f(x; y; z), \quad \boldsymbol{a}(M) = \{P(x; y; z), Q(x; y; z), R(x; y; z)\}$$

называются *дифференцируемыми n раз*, если функции $f(x; y; z)$, $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ являются n раз дифференцируемыми.

Пусть $f(P)$ – скалярное поле, заданное в области G; $\boldsymbol{l}$ – единичный фиксированный вектор; P – фиксированная точка; P' – любая точка из G, отличная от P и такая, что вектор $\overrightarrow{PP'}$ коллинеарен $\boldsymbol{l}$.

Определение 24.1. Число

$$\lim_{P' \to P} \frac{f(P') - f(P)}{PP'}$$

называется *производной скалярного поля* $f(P)$ в точке P *по направлению* $\boldsymbol{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(P)$.

Если в прямоугольной системе координат $OXYZ$ вектор $\boldsymbol{l}$ имеет координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (24.1)$$

Определение 24.2. Вектор

$$\lim_{M' \to M} \frac{\boldsymbol{a}(M') - \boldsymbol{a}(M)}{MM'}$$

называется *производной векторного поля* $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M *по направлению* $\boldsymbol{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial a}{\partial \boldsymbol{l}}(P)$.

Если в прямоугольной системе координат $OXYZ$ векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ имеет координаты $\{P, Q, R\}$, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{l}} = \left\{\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{l}}, \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{l}}, \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{l}}\right\}. \qquad (24.2)$$

Градиент скалярного поля

Определение 24.3. *Градиентом* скалярного поля $f(x; y; z)$ называется вектор-функция

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}. \qquad (24.3)$$

Из равенства (24.1) следует, что,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = (\mathrm{grad}\ f, \boldsymbol{l})\,, \tag{24.4}$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(M) = |\mathrm{grad}\ f| \cdot |\boldsymbol{l}| \cdot \cos\varphi = |\mathrm{grad}\ f| \cdot \cos\varphi,$$

так как $|\boldsymbol{l}| = 1$; здесь φ – угол между векторами $\boldsymbol{l}$ и grad f в точке M.

Отсюда следует замечательное свойство вектора градиента: *направление вектора градиента совпадает с направлением наибольшего изменения скалярного поля в данной точке*, т. е. с направлением наибольшего роста или наибольшего уменьшения скалярного поля.

Кроме того, если рассмотреть множество точек, в которых скалярное поле постоянно:

$$\{(x, y, z):\ f(x, y, z) = const\}$$

(такое множество называется *поверхностью уровня* скалярного поля), то оказывается, что градиент в данной точке пространства ортогонален касательной плоскости, проведенной к поверхности уровня в этой точке, т. е. *ортогонален поверхности уровня.*

Примеры решения задач

Пример 24.1. Вычислить $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$ в точке $M(2, 1, 1)$, если

$$u = x^2 - \mathrm{arctg}(y + z), \quad \boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= 2x\cos\alpha - \frac{1}{1+(y+z)^2}\cos\beta - \frac{1}{1+(y+z)^2}\cos\gamma =$$

$$= 4\cos\alpha - \frac{1}{5}\cos\beta - \frac{1}{5}\cos\gamma.$$

Пронормируем вектор $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \frac{0\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}}{\sqrt{0+9+16}} = 0\boldsymbol{i} + \frac{3}{5}\boldsymbol{j} - \frac{4}{5}\boldsymbol{k},$$

получим:

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{5}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = 4\cos\alpha - \frac{1}{5}\cos\beta - \frac{1}{5}\cos\gamma = 4\cdot 0 - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{25}.$$

П р и м е р 24.2. Вычислить угол между градиентами скалярных полей u и v, где

$$u = \frac{xz^2}{y}, \qquad v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3,$$

в точке $M(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 1)$.

Р е ш е н и е.

$$\operatorname{grad} u(x;y;z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{z^2}{y}; -\frac{xz^2}{y^2}; \frac{2xz}{y}\right),$$

$$\operatorname{grad} v(x;y;z) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(18\sqrt{6}x^2; -18\sqrt{6}y^2; 6z^2\right).$$

В точке $M(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 1)$:

$$\text{grad } u = \left(\sqrt{6}; -\sqrt{6}; 2\right), \quad \text{grad } v = \left(3\sqrt{6}; -3\sqrt{6}; 6\right).$$

Далее, с одной стороны,

$$(\text{grad } v; \text{grad } u) = |\text{grad } v| \cdot |\text{grad } u| \cdot \cos\varphi, \tag{24.5}$$

с другой стороны,

$$(\text{grad } u; \text{grad } v) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{24.6}$$

Из равенства (24.6) получаем:

$$(\text{grad } u; \text{grad } v) = 18 + 18 + 12 = 48.$$

Найдем длины векторов:

$$|\text{grad } u| = \sqrt{6+6+4} = 4, \quad |\text{grad } v| = \sqrt{54+54+36} = 12.$$

Из равенства (24.5) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{(\text{grad } u; \text{grad } v)}{|\text{grad } u| \cdot |\text{grad } v|} = \frac{48}{4 \cdot 12} = 1,$$

т. е. угол между градиентами u и v в точке M равен нулю.

Пример 24.3. Определить поток вектора $\boldsymbol{a}$ через полную поверхность (во внешнюю от поверхности сторону), если

$$\boldsymbol{a} = (y, -x, 1); \quad S : x^2 + y^2 = z^2 \ (z \geqslant 0), \quad z = 4,$$

(рис. 24.1).

Р е ш е н и е.

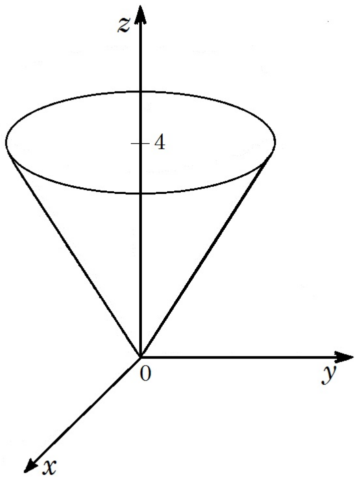


Рис. 24.1

$$\iint\limits_S a_n\,dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_V (0+0+0)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

П р и м е р 24.4. Определить поток вектора $\boldsymbol{a}$ через полную поверхность (во внешнюю от поверхности сторону), если $\boldsymbol{a} = (y+2z, -y, 3x)$,

$$S\;:\;3z = 27 - 2\left(x^2+y^2\right); \quad z^2 = x^2+y^2\,(z \geqslant 0),$$

(рис. 24.2).

Р е ш е н и е. Найдем плоскость, по которой пересекаются данные поверхности:

$$3z = 27 - 2\left(x^2+y^2\right), \qquad z^2 = x^2+y^2.$$

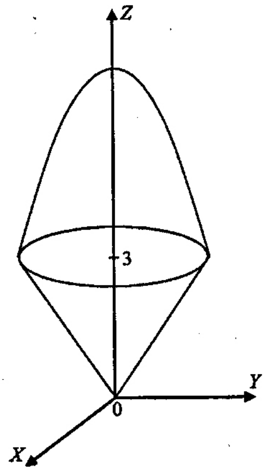


Рис. 24.2

Получаем: $3z = 27 - 2z^2 \ \Leftrightarrow\ 2z^2 + 3z - 27 = 0;$

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8 \cdot 27}}{4} = \frac{-3 + 15}{4} = 3,$$

$$z_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 8 \cdot 27}}{4} = \frac{-3 - 15}{4} = -\frac{18}{4}.$$

$z_2 = -\frac{18}{4} < 0$ – не удовлетворяет условию $z \geqslant 0$, следовательно, $z_1 = 3$ – плоскость пересечения поверхностей.

$$\iint\limits_S a_n\, dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_V (0 - 1 + 0)\ dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_V dx\, dy\, dz =$$

$$= -\iint dx\, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9-\frac{2}{3}\left(x^2+y^2\right)} dz =$$

$$= -\iint \left(9 - \frac{2}{3}\left(x^2 + y^2\right) - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим:

$$\iint\limits_S a_n\, dS = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r\left(9 - \frac{2}{3}r^2 - r\right)\, dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \left(9\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 18\, d\varphi = -18\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = -36\,\pi.$$

25. Ряды Фурье

Определение 25.1. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые на отрезке $[a, b]$, называются *ортогональными* на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Определение 25.2. Последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$$

интегрируемых на отрезке $[a, b]$, называется *ортогональной системой функций* на этом отрезке, если все функции этой системы попарно ортогональны.

Определение 25.3. Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ называется *ортонормированной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Определение 25.4. *Рядом Фурье*[34] интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ по ортонормированной системе функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

[34] *Жан Батист Фурье* (1768–1830) – французский математик, физик. Автор трудов по алгебре, дифференциальным уравнениям и математической физике. Его работы легли в основу создания теории тригонометрических рядов (рядов Фурье).

коэффициенты которого определяются по формуле

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Пусть отрезок $[a, b]$ имеет длину $2l$. Для определенности пусть это отрезок $[-l, l]$. Рассмотрим следующую систему функций:

$$\left\{\frac{1}{2l},\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эта система функций является ортонормированной на любом отрезке длины $2l$, так как, например,

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi m x}{l}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{\pi(n+m)x}{l} + \cos\frac{\pi(n-m)x}{l}\right)dx =$$
$$= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $b-a = 2l$. Коэффициенты Фурье для этой функции по выписанной выше ортогональной системе определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Тогда рассматриваемой функции соответствует ряд Фурье:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Определение 25.5. Функция f называется *кусочно-гладкой на* $[a, b]$, если она и ее производная имеют на $[a, b]$ не более чем конечное число точек разрыва первого рода.

Теорема 25.1. *Ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, сходится при всех значения x, причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва она равна*

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Теорема 25.2. *Ряд Фурье кусочно-гладкой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ с равными значениями на концах: $f(a) = f(b)$, сходится равномерно на всей числовой прямой к периодическому продолжению этой функции.*

Задача 25.1.

а) Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ в ряд Фурье в интервале $(2; 6)$, построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда, исследовать его на равномерную сходимость в его области сходимости.

б) Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$.

Решение.

а) Данная функция является кусочно-гладкой и непрерывной в заданном интервале (рис. 25.1). Продолжим ее

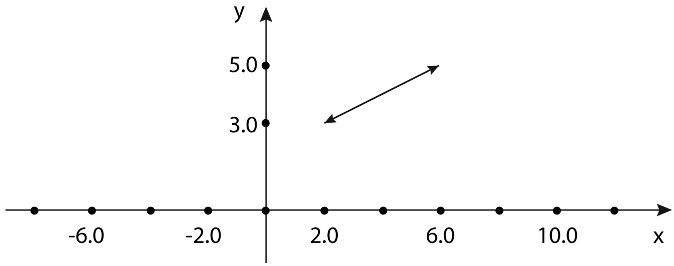


Рис. 25.1

периодически, с периодом $T = 2l = 4$, на всю числовую ось. Полученная функция будет удовлетворять условиям теоремы сходимости ряда Фурье.

Найдя коэффициенты по формулам коэффициентов ряда Фурье, получим искомый ряд Фурье:

$$f(x) \sim 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси к периодическому продолжению функции в точках непрерывности продолженной функции, а в точках разрыва ($x_0 = 2 + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$) – к полусумме правого и левого пределов продолжения в этих точках (рис. 25.2).

Этот ряд сходится *неравномерно*, так как, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, если ряд сходится равномерно, то его сумма должна быть непрерывной функцией.

б) Заметим, что $5 \in (2; 6)$ и поэтому ряд в этой точке сходится к $f(5)$:

$$f(5) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{5\pi n}{2}.$$

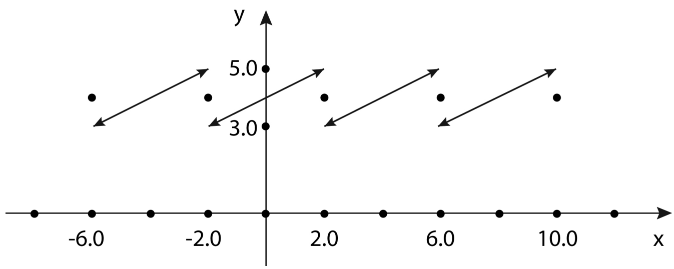


Рис. 25.2

$$\sin\frac{5\pi n}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)n = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k-1 \end{cases},$$

т. е.

$$f(5) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n}\sin\frac{5\pi n}{2} =$$

$$= 4 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1},$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 25.2.

Известно, что рядом Фурье функции $f(x) = x^2$ на $[-\pi, \pi]$ является ряд

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Требуется:

а) построить график суммы этого ряда на его области сходимости;

б) найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Р е ш е н и е.

а) Функция $f(x) = x^2$ на $[-\pi, \pi]$ является непрерывной и ее производная $f'(x) = 2x$ тоже непрерывна на $[-\pi, \pi]$, т. е. $f(x)$ – кусочно-гладкая. Следовательно, ряд Фурье этой функции по теореме о равномерной сходимости ряда Фурье сходится равномерно к периодическому продолжению функции $f(x) = x^2$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось и графиком суммы является функция, изображенная на рис. 25.3.

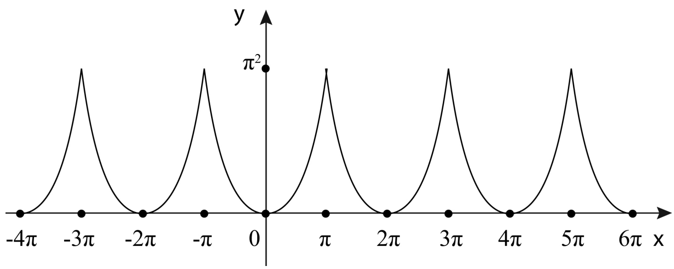


Рис. 25.3

б) Учитывая, что $f(-\pi) = f(\pi)$, получаем, что $f(x)$ равна сумме ряда Фурье при $x \in [-\pi, \pi]$, т. е.

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^2},$$

а так как $\cos n\pi = (-1)^n$, то

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Список рекомендуемой литературы

ОСНОВНАЯ

Бояршинов В. В. Математическмй анализ. Функции одной переменной / В. В. Бояршинов, А. В. Макаров. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2006. 160 с.

Бояршинов В. В. Математический анализ. Ч. 1 : Числа, пределы / В. В. Бояршинов, А. В. Макаров [Электронный ресурс]. URL: http://detc.usu.ru/assets/amath0041/ma. html

Виноградова И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях / И. А. Виноградова. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 352 с.

Гурьянова К. Н. Математический анализ : учеб. курс / К. Н. Гурьянова, Н. Е. Лозовная, А. В. Двуреченская [Электронный ресурс]. URL: http://detc.usu.ru/resources/cmanh.html. Курсы. Математика.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. М. : АСТ: Астрель, 2002–2008. 558 с.

Зорич В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. М. : МЦНМО, 2008.

Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Ильин В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. М. : Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2004–2006.

Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002–2003.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. М. : Высш. школа, 1981.

Никольский С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000–2001. 592 с.

Никольский С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. М. : Наука, 1990–1991.

Учебно-методический план. 1-й курс. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2001. 58 с.

Учебно-методический план. 2-й курс. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2001. 44 с.

Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. СПб. и др. : Лань, 2008.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. М. : ФИЗМАТЛИТ : Лаборатория Знаний, 2003.

Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. М. : Высшая школа, 2005. 479 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

Ануфриева У. А. Математический анализ : контрольные работы и метод. указания для студентов 1-го курса физ. фак. / У. А. Ануфриева, Ю. Д. Козлов. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2006.

Будак Б. М. Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак. М. : Наука, 1967. 607 с.

Бутузов В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев. М. : Физматлит, 2001. 480 с.

Замятин А. П. Математическая логика: учебное пособие / А. П. Замятин. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2004. 140 с.

Иванов О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей / О. А. Иванов. М. : МНЦМО, 2009. 384 с.

Тер-Крикоров А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. М. : Наука, 1988. 815 с.

Учебное издание

Гурьянова Карманола Николаевна
Алексеева Ульяна Алексеевна
Бояршинов Владимир Валерианович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Заведующий редакцией	М. А. Овечкина
Редактор	Н. В. Чапаева
Корректор	Н. В. Чапаева
Оригинал-макет	У. А. Алексеевой

План выпуска 2014 г. Подписано в печать 28.11.2014.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 13,5. Усл. печ. л. 19,3. Тираж 230 экз. Заказ 1043.
Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru