РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА

М. В. Губко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

ББК 22.18
УДК 519

Губко Михаил Владимирович

Математические модели оптимизации иерархических структур. — М.: ЛЕНАНД, 2006. — 264 с.

Книга посвящена развитию одного из актуальных направлений теории управления организационными системами — математическим моделям формирования иерархических организационных структур. Приводится обзор современного состояния теории, предлагаются и исследуются модели построения оптимальных иерархий, обобщающие подходы ряда российских и зарубежных ученых, приводятся примеры решения некоторых прикладных задач.

Предложенная общая модель оптимизации иерархических структур может использоваться для решения широкого класса задач — от формирования организационной структуры до проектирования сборочного производства.

Книга предназначена для специалистов по теории организационного управления, исследованию операций, институциональной и микроэкономике, преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор *Д. А. Новиков*,

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник *С. П. Мишин*

Оригинал-макет предоставлен автором,
текст опубликован в авторской редакции.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 16. Зак. № .

10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
ISBN 5–9710–0113–2
Соотв. 13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
ISBN 978–5–9710–0113–3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена одному из важных аспектов внутрифирменного управления – формированию организационной структуры. В настоящее время считается общепризнанным, что вид организационной структуры оказывает огромное влияние на эффективность функционирования фирмы в целом. В реальных организациях возможности эксперимента со структурой управления очень ограничены, поэтому важное значение приобретают теоретические модели, которые позволяют выбрать эффективную организационную иерархию, а также обосновать необходимость и направление ее реформирования при изменении условий функционирования фирмы.

Исследованию формальных моделей формирования организационных иерархий посвящено большое количество работ как российских, так и зарубежных ученых. Однако рассматриваемая проблема является настолько сложной и многогранной, что говорить о разработке прикладных методов формирования организационных структур пока, вероятно, рано.

В основу принятого в настоящей книге подхода положено разделение задачи организационного дизайна на три этапа: разработка технологии функционирования организации, выбор организационной структуры и построение механизмов управления. Такое разделение позволяет сконцентрировать внимание на втором этапе и сформулировать задачу формирования организационной структуры как задачу дискретной оптимизации – выбора из множества допустимых иерархий управления наилучшей.

Исследуемая формальная модель имеет множество содержательных интерпретаций, что позволяет использовать ее для решения широкого класса задач – от формирования организационной структуры до проектирования сборочного производства.

В роли критерия, минимизируемого выбором иерархии, выступают затраты, складывающиеся из затрат составляющих ее менеджеров. Основной объект исследования – это так называемые «однородные» функции затрат менеджера. Они характеризуются постоянной эластичностью на масштаб и хорошо согласуются с результатами имеющихся экспериментальных исследований зависимости вознаграждения менеджеров крупных организаций от размера управляемых ими подразделений.

Доказывается, что при однородных функциях затрат в оптимальных иерархиях все менеджеры имеют примерно одинаковую норму управляемости (количество непосредственных подчиненных). Основным теоретическим результатом является нижняя оценка затрат оптимальной иерархии и конструктивные доказательства ее хорошего «качества», позволяющие во многих важных с практической точки зрения случаях эффективно строить субоптимальные иерархии.

Аналитическое выражение для затрат оптимальной иерархии имеет большое значение для микроэкономического анализа. Оно дает ответ на вопрос о том, как условия функционирования организации сказываются на виде и затратах организационной структуры, а также как она должна изменяться с изменением этих условий. Полученные результаты иллюстрируются на примере нескольких содержательных моделей формирования иерархий, рассматриваются некоторые возможные обобщения модели.

Книга имеет следующую структуру.

Во **введении** раскрывается роль и место задач формирования организационной структуры в общем комплексе задач организационного управления и обосновываются предпосылки принятого подхода к их исследованию.

В первой главе даются определения таких понятий, как исполнители, менеджеры, иерархия; формулируется задача поиска оптимальной иерархии. Вводится понятие секционных функций затрат иерархии и исследуются их свойства. Также определяются однородные функции затрат, исследование которых составляет основную тему настоящей книги. Изложение в первой главе, в основном, следует работам А.А. Воронина и С.П. Мишина [82-85, 115-118], которые впервые сформулировали задачу поиска оптимальной иерархии именно в таком виде и исследовали ее.

Во второй главе приводится обзор известных подходов к постановке и решению задач построения оптимальных иерархических структур. Проводится их сравнение с подходом, принятым в настоящей книге. Цель главы – дать читателю представление о текущем состоянии исследований задач поиска оптимальных иерархий. В то же время, она слабо связана с остальным материалом книги, поэтому при первом чтении ее можно опустить.

Третья и четвертая главы посвящены задаче поиска оптимального дерева для однородной функции затрат. **В третьей главе** дается определение однородного дерева, на его основе строится нижняя оценка затрат оптимальной древовидной иерархии, анализируются различные случаи ее вычисления, приводятся примеры. Также исследуется качество этой нижней оценки, раскрывается связь между однородными деревьями и оптимальными иерархиями. Для большинства интересных с содержательной точки зрения случаев строятся субоптимальные деревья и основанные на них верхние оценки затрат оптимальной иерархии.

В четвертой главе полученные в главе 3 теоретические результаты иллюстрируются примерами решения задач поиска оптимальных иерархий. Также рассматривается ряд содержательных моделей управления структурой организационных систем.

Пятая глава посвящена возможным обобщениям рассмотренной модели, в частности, рассмотрению неоднородных функций затрат. Кратко затрагиваются некоторые задачи стимулирования в иерархических структурах, относящиеся к третьему этапу организационного дизайна. **Заключение** подводит итоги и намечает перспективы дальнейших исследований. **Приложение** содержит доказательства формальных результатов.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф-м.н., проф. А.А. Воронину и к.ф-м.н. С.П. Мишину за разработанную ими формальную модель поиска оптимальной иерархии, легшую в основу принятого в книге подхода, а также за предложения и рекомендации по содержанию книги. Отдельно хотелось бы поблагодарить д.т.н. проф. Д.А. Новикова за его интерес к данной работе, постоянную помощь, поддержку и замечания, а также участников семинара ИПУ РАН по управлению организационными системами за многократное плодотворное обсуждение описанных в книге результатов. Все недостатки работы автор относит исключительно на свой счет и с признательностью встретит все замечания и предложения заинтересованных читателей.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях науки и практики возникают задачи поиска оптимальных *иерархических структур*[1] – систем, элементы которых связаны отношением *старшинства* или *подчиненности*.[2]

Например, в задаче построения *организационной структуры* – штатного расписания организации, необходимо при заданной *технологии* функционирования организации [135], определяющей множество рядовых сотрудников, наилучшим образом надстроить над этим множеством иерархию менеджеров – *иерархию управления*.

При проектировании сборочного производства необходимо по заданному множеству деталей и компонент сложного устройства определить порядок их сборки, соединения друг с другом, минимизирующий трудозатраты или максимально удешевляющий производство. Такая же задача возникает при создании системы контроля качества, когда необходимо определить, на каких этапах производства должен проводиться контроль качества сборки, и какие именно узлы и агрегаты подлежат проверке.

В процессе разработки структуры *системы сбора информации*, например, результатов общегосударственных выборов, задано множество источников информации – избирательных участков – и необходимо определить, каким образом данные с этих участков будут собираться и консолидироваться в едином центре (центральной избирательной комиссии). Определяются промежуточные узлы сбора и обработки информации и связи между ними.

Также оказывается, что многие модели дискретной оптимизации сводятся к задачам поиска оптимальных иерархий. Например, задачу оптимального кодирования информации [29] можно

---

[1] Иерархия (от греч. «священная власть») – «принцип структурной организации сложных многоуровневых систем, состоящий в упорядочении взаимодействия между уровнями в порядке от высшего к нижнему» [134, С. 201].

[2] В общем случае иерархия относительно однородных объектов любой природы естественным образом порождается отношением принадлежности (вложенности) – например, любое множество объектов может рассматриваться как совокупность своих подмножеств и т.д.

сформулировать как задачу надстройки двоичного дерева (а дерево является частным случаем иерархической структуры) над заданным множеством символов входного алфавита.

Список областей, в которых возникают задачи построения оптимальных иерархий, легко продолжить и далее. Большинство этих задач имеют немало общего. Во-первых, задается некоторое множество элементов нижнего уровня, над которыми необходимо надстроить иерархию. Во-вторых, задается *множество допустимых иерархий*, из которых необходимо выбрать одну. Это множество может ограничивать выбор только древовидными иерархиями или только двоичными деревьями, или каким-либо другим образом. В-третьих, задается *критерий эффективности*, позволяющий сравнивать различные иерархии – тот критерий, который максимизируется или минимизируется выбором иерархической структуры.

Настоящая книга в основном посвящена решению задач построения оптимальной структуры организационной системы – системы управления организацией. Тем не менее используемая формальная модель слабо зависит от содержательной интерпретации, и, учитывая перечисленные выше общие черты задач поиска оптимальных иерархий, описываемые результаты могут использоваться и в других предметных областях.

Чтобы определить, откуда в задаче построения организационной структуры берутся ее начальные данные – множество элементов нижнего уровня, множество допустимых иерархий и критерий эффективности, необходимо определить место этой задачи во всем комплексе задач организационного управления.

Задачи управления организацией весьма многообразны, и классифицировать их можно по разным основаниям. Для наших целей целесообразно разделить задачи организационного управления на *задачи управления функционированием* или *оперативного управления*, и *задачи управления изменениями*.

Задачи первого типа касаются ежедневного, ежемесячного управления организацией – заводом, коммерческой фирмой или учреждением – в относительно стабильных условиях. К ним относятся задачи планирования, распределения ресурсов, стимулирования сотрудников и многие другие [7, 40, 76, 93, 96, 125].

Задачи второго типа имеют дело с коренной перестройкой организации, принципиальными изменениями в ней. Необходимость решения таких задач возникает как при создании новой организации (*организационный дизайн*), так и в процессе функционирования уже существующей (*реинжиниринг*) [108, 133], например, в связи с существенным изменением внешних условий.

Рассматриваемые в настоящей книге задачи можно отнести к задачам организационного дизайна, поскольку рассматривается построение структуры организации «с нуля», без учета уже существующей структуры. Однако они могут быть полезны и при реинжиниринге, хотя бы для оценки качества существующей организационной структуры по сравнению с оптимальной.

Многие исследователи (например, [112]) делят процесс организационного дизайна на следующие три этапа.

1. Определение технологии.

На первом этапе определяются цели организации, строятся технологические процессы, позволяющие достичь этих целей, определяется количество и состав рядовых сотрудников (*исполнителей*), которые необходимы для реализации технологических процессов.

2. Построение структуры управления.

На втором этапе находится количество менеджеров, которые необходимы для управления исполнителями, и определяется взаимная подчиненность менеджеров. Именно этот этап является предметом исследования настоящей книги.

3. Разработка механизмов управления.

На последнем этапе определяются полномочия менеджеров, допустимые способы их воздействия на своих подчиненных и т.п., то есть строятся *механизмы управления*.[1]

Как отмечено в [127], первый этап организационного дизайна существенно зависит от конкретной области функционирования

---

[1] Строго говоря, сведение решения задачи организационного дизайна к последовательному решению этих подзадач не вполне оправдано из-за их тесной взаимосвязи. Тем не менее, на это приходится идти, так как даже по отдельности задача любого из трех этапов остается весьма сложной.

организации – невозможно говорить о построении технологических процессов «вообще», можно говорить лишь о технологии сталелитейного производства, технологии функционирования коммерческой фирмы, госучреждения и т.д. Дизайн технологии не рассматривается в настоящей книге и, скорее всего, вообще не может быть предметом общесистемного исследования.

Однако выбор определенной технологии функционирования организации дает часть исходных данных для задачи построения организационной структуры. Именно, он определяет множество исполнителей, которые при построении иерархии будут элементами нижнего уровня. Также технология может ограничивать множество допустимых иерархий. Скажем, если некоторые исполнители выполняют существенно различные по своей природе виды работ, может быть невозможным непосредственное их подчинение одному начальнику. Кроме того, на этапе построения технологии определяются цели организации, которые также могут накладывать определенные ограничения как на множество допустимых иерархий, так и на вид критерия эффективности.

В то время как задача выбора технологии существенно зависит от сформулированных целей организации и текущего состояния науки и технического прогресса, задачи двух последних этапов оперируют больше чисто организационными терминами. Предметом рассмотрения в них является взаимодействие людей – сотрудников организации – поэтому эти задачи допускают более общее рассмотрение, мало зависящее от конкретной сферы деятельности организации[1].

Третий этап – разработка механизмов управления – является, пожалуй, наиболее хорошо исследованной областью организационного дизайна. Многочисленные публикации российских и зарубежных авторов, развиваемые в рамках таких научных направлений как теория активных систем [76], теория контрактов [7, 96] и mechanism design [31], посвящены вопросам создания рациональных механизмов организационного управления.

---

[1] В литературе по менеджменту [112] отмечается сходство принципов построения организационных структур и механизмов управления в различных областях промышленности и государственного управления.

В подавляющем большинстве случаев рассматриваемые модели предполагают некоторую заданную, фиксированную структуру системы. Так, например, в простейшей теоретико-игровой модели *организационной системы* [125] предполагается, что система состоит из *центра* (в роли которого выступает владелец фирмы или менеджер) и фиксированного числа *агентов* – сотрудников. Модель позволяет прогнозировать поведение агентов при том или ином управлении со стороны центра, искать наилучшее в некотором смысле воздействие – *оптимальный механизм управления*. Однако за рамками рассмотрения остаются чрезвычайно важные вопросы о целесообразности именно такого числа агентов, о допустимости различных способов их взаимного подчинения и т.п. Эти вопросы и должны решаться на втором этапе организационного дизайна – в процессе построения структуры организации.

Как уже отмечалось, для решения задачи поиска оптимальной организационной структуры необходимо определить критерий эффективности, который позволял бы сравнивать между собой различные структуры. Обычно в роли такого критерия выступает стоимость компании или ее прибыль (которые необходимо максимизировать) или, как предполагается в настоящей книге, управленческие издержки – затраты на содержание системы управления (которые необходимо минимизировать).

Однако теория организационного управления говорит о том, что затраты компании, а, значит, и ее прибыль, будут существенно зависеть от используемых механизмов управления. В то же время, структура организации сама по себе определяет только взаимную подчиненность менеджеров, но почти не ограничивает менеджеров в способах воздействия на своих подчиненных.

Следовательно, чтобы определить затраты той или иной организационной структуры, необходимо для этой фиксированной структуры найти оптимальные механизмы управления. Поэтому, строго говоря, чтобы формулировать и решать задачи построения организационной структуры, необходимо уметь решать и задачу выбора технологии, и задачу поиска оптимальных механизмов управления для каждой конкретной структуры организации.

В то же время, теоретико-игровые модели, используемые на третьем этапе организационного дизайна, в общем случае весьма громоздки и их исследование довольно трудоемко. Решение может не выражаться аналитически, что делает невозможным и аналитическое выражение затрат организационной структуры для использования их на втором этапе организационного дизайна[1].

Целью настоящей книги является исследование второго этапа организационного дизайна – поиска оптимальной структуры, поэтому мы заинтересованы в максимальной изоляции постановки задачи от специфики первого и третьего этапов. Оказывается, что, даже не зная этой специфики, но вводя некоторые содержательно обоснованные предположения относительно вида критерия эффективности организационной структуры, можно немало сказать о том, как должна выглядеть оптимальная иерархия.

Для этого на протяжении книги считается, что критерий эффективности организационной структуры – *функция затрат иерархии* – имеет определенный вид (см. определения ниже в главе 1). Для обоснованности этих предположений необходимо, чтобы существовали механизмы управления, которые приводят именно к таким функциям затрат. Однако мы не будем проводить проверку существования таких механизмов, стараясь вместо этого формулировать результаты относительно вида оптимальных иерархий в максимально общем виде, чтобы они были применимы для как можно более широкого класса функций затрат. Кроме того, оказывается, что в ряде случае задача построения механизмов управления решается довольно просто, и при решении задачи организационного дизайна на первый план выходит именно задача поиска оптимальной иерархии.

Перейдем к описанию формальной постановки этой задачи.

---

[1] Стоит также отметить, что в уже сложившихся организациях зачастую гораздо проще изменить структуру, чем принятые в этих организациях механизмы управления. Тогда на третьем этапе организационного дизайна используются фиксированные механизмы управления и задача их оптимизации не рассматривается.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ

Первая глава посвящена постановке задачи поиска оптимальной иерархии. В ней даются определения иерархии, исполнителей, функции затрат иерархии и т.д. Эти понятия используются далее на протяжении всей книги. Также в первой главе вводятся основные свойства функций затрат и приводятся примеры задач поиска оптимальной иерархии. Материал главы базируется в основном на подходе и терминологии, предложенных А.А. Ворониным и С.П. Мишиным [82-85, 115-118]. Результаты, полученные в настоящей книге, можно считать дальнейшим развитием и продолжением этого подхода.

1.1. Исполнители, менеджеры и иерархии

Наиболее естественным средством моделирования организационных иерархий являются *ориентированные графы* [77].

Граф (точнее, ориентированный граф) $H = <V, E>$ задается множеством *вершин* V и множеством *дуг* $E \subseteq V \times V$. Множество дуг представляет собой некоторое множество упорядоченных пар вершин. Если пара вершин (v_1, v_2) принадлежит множеству дуг E, то говорят, что *имеется дуга* от вершины v_1 к вершине v_2.

Иерархические структуры описываются *ациклическими* ориентированными графами. Граф $H = <V, E>$ называется *ациклическим*, если нельзя составить такую последовательность его вершин $v_1, \ldots, v_k$, чтобы $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$ и $(v_k, v_1) \in E$. То есть, в ациклическом графе нельзя, идя по дугам графа, вернуться в исходную вершину.

Целью организационной иерархии является координация действий некоторого фиксированного множества *исполнителей* (например, рабочих или служащих). Это множество определяется технологией функционирования организации, и именно над множеством исполнителей надстраивается иерархия управляющих ими сотрудников – *менеджеров*[1].

[1] На протяжении книги в зависимости от содержательной интерпретации задачи в роли менеджеров могут, в принципе, выступать различные объекты. Если речь идет о построении организационных струк-

Следуя принятой в [115] терминологии, обозначим $N = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – конечное *множество исполнителей*, $n > 1$, M – конечное *множество менеджеров*, которые управляют этими исполнителями.

Тогда организационная иерархия будет описываться ориентированным ациклическим графом $<V, E>$ с множеством вершин $V = N \bigcup M$ и множеством дуг $E \subseteq V \times M$. Элементы множества V (состоящего из исполнителей и менеджеров) будем называть *сотрудниками* организации, а само множество V – *множеством сотрудников*. Дуги графа организационной структуры соответствуют подчиненности – если в графе присутствует дуга от сотрудника v_1 к сотруднику v_2, то сотрудник v_1 является *непосредственным подчиненным* сотрудника v_2 в иерархии $<V, E>$, а сотрудник v_2 является *непосредственным начальником* сотрудника v_1. Также будем говорить, что сотрудник v_2 *непосредственно управляет* сотрудником v_1. Считаем, что дуги в графе направлены от подчиненного к его непосредственному начальнику.

Если в графе есть цепочка сотрудников $v_1, \ldots, v_k$ таких, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, \ldots, k - 1$, то сотрудник v_1 является *подчиненным* сотрудника v_k. Это значит, что в графе можно построить цепочку сотрудников от v_1 к v_k так, чтобы каждый следующий сотрудник непосредственно управлял предыдущим. Также будем говорить, что сотрудник v_k *управляет* сотрудником v_1.

Понятно, что у самих исполнителей не может быть подчиненных, поэтому дуги графа организационной структуры могут идти только от исполнителя к менеджеру или от одного менеджера к другому. Далее, поскольку задачей менеджеров в иерархии является координация деятельности исполнителей, бессмысленно иметь менеджеров без подчиненных. Поэтому у каждого менеджера будет как минимум один подчиненный сотрудник – менеджер или исполнитель. Поскольку все исполнители принадлежат одной организации, необходимо обеспечить координацию действий между всеми исполнителями. Это эквивалентно наличию в иерархии менеджера (называемого *топ-менеджером*), который

тур, то под менеджером понимаются руководитель подразделения организации, включая, возможно, его аппарат (секретарей, помощников).

непосредственно или через цепочку других менеджеров управляет каждым исполнителем.

Подытожим все сказанное в следующем определении.

Определение 1 [85]. Ориентированный ациклический граф $H = < N \bigcup M, E >$ с множеством дуг подчиненности $E \subseteq (N \bigcup M) \times M$ назовем иерархией, управляющей множеством исполнителей *N*, если любой менеджер из множества *M* имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через $\Omega(N)$ обозначим множество всех иерархий, управляющих множеством исполнителей *N*.

Множество $\Omega(N)$ определяется только множеством исполнителей *N*. В него входят иерархии с произвольными конечными множествами менеджеров, лишь бы иерархия удовлетворяла условиям определения 1.

Рис. 1 иллюстрирует введенное определение. Исполнители на нем изображены темными кружками и пронумерованы арабскими цифрами, а менеджеры изображены светлыми кружками и пронумерованы латинскими цифрами. Графы 1а-1в являются иерархиями, управляющими множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, 4\}$. Определенные таким образом иерархии позволяют описывать часто встречающиеся в практике управления эффекты, например, межуровневое взаимодействие, когда менеджер непосредственно управляет и другими менеджерами, и исполнителями (менеджер II иерархии 1б), а также множественное подчинение, когда сотрудник имеет более одного непосредственного начальника (менеджер I в иерархии 1б, исполнитель 3 в иерархии 1в). Определение иерархии допускает наличие в ней нескольких менеджеров, не имеющих начальников (менеджеры II и III иерархии 1б), а также менеджеров, имеющих единственного непосредственного подчиненного (менеджер III иерархии 1б).

В то же время, графы 1г-1е иерархиями не являются. В графе 1г исполнитель с номером 3 имеет подчиненных, в графе 1д нет топ-менеджера, который управлял бы всеми исполнителями, в графе 1е менеджер II не имеет подчиненных, кроме того, этот граф содержит цикл 1→I→III→1.

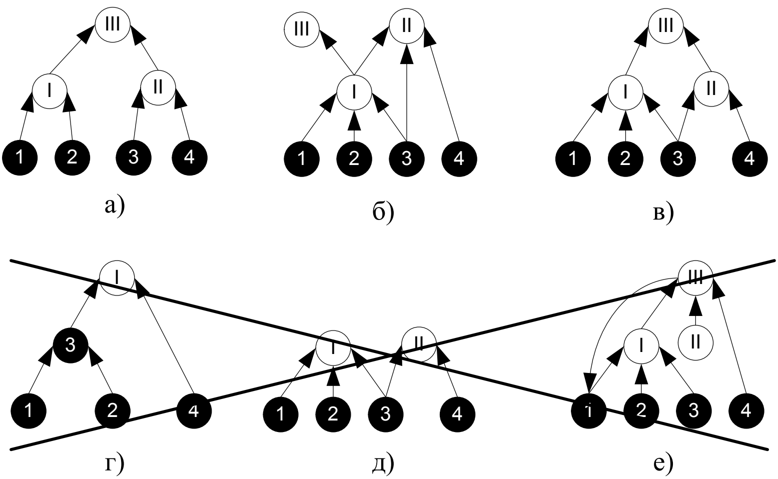


Рисунок 1. К определению иерархии

Введем определения некоторых «типовых» иерархий.

Определение 2 [85]. Иерархию *H* назовем *деревом*, если в ней единственный менеджер не имеет начальников, а остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника.

Менеджер, не имеющий начальников, называется топ-менеджером и находится в *корне* дерева.

Определение 3 [85]. Пусть задано целое число *r* > 1. Иерархия *H* называется *r-иерархией,* если каждый ее менеджер имеет не более *r* непосредственных подчиненных. Если дерево является *r*-иерархией, будем называть его *r*-деревом. Число *r* иногда называют *нормой управляемости* иерархии.

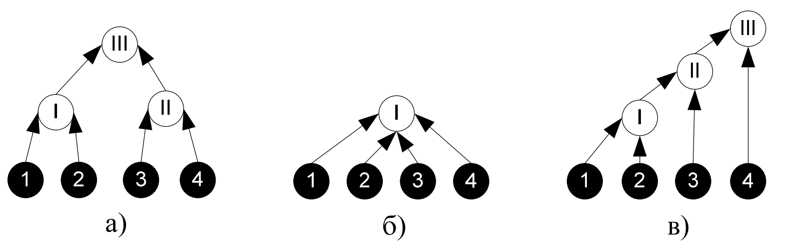


Рисунок 2. Типовые иерархии

Примеры 2-деревьев приведены на рис. 2 – это иерархии а) и в). Иерархия б) на рис. 2 является 4-деревом.

Определение 4 [85]. *Веерной иерархией* называется иерархия с единственным менеджером, который непосредственно управляет всеми исполнителями.

Например, иерархия б) на рис. 2 – это веерная иерархия.

Определение 5 [85]. *Последовательной иерархией* называется 2-иерархия, в которой каждый менеджер непосредственно управляет как минимум одним исполнителем.

Пример последовательной иерархии изображен на рис. 2в.

В самом общем виде *задачу поиска оптимальной иерархии* можно сформулировать следующим образом.

Пусть задано конечное множество исполнителей N, множество допустимых иерархий $\Omega \subseteq \Omega(N)$ и *функция затрат* $C : \Omega \to [0,+\infty)$, которая каждой допустимой иерархии ставит в соответствие неотрицательное число. Необходимо найти допустимую иерархию с минимальными затратами, то есть найти

$$H^* \in Arg \min_{H \in \Omega} C(H) .$$

Множество допустимых иерархий Ω может как совпадать с множеством $\Omega(N)$ всех иерархий, управляющих набором исполнителей N, так и быть его строгим подмножеством. В частности, в зависимости от содержательной постановки задачи, может искаться оптимальное дерево или оптимальная r-иерархия.

Когда количество исполнителей мало, эта задача может решаться полным перебором всех возможных иерархий (понятно, что в общем случае это единственный способ решения). Однако обычно допустимых иерархий настолько много, что задать функцию затрат перечислением ее значений для всех иерархий из множества Ω невозможно. Тогда функция затрат определяется аналитическим выражением или алгоритмом, которые зависят от структурных параметров иерархии – количества менеджеров, числа их подчиненных, выполняемых менеджерами задач и т.п.

Для разработки эффективных методов поиска оптимальных иерархий необходимо делать предположения о виде функции затрат – ограничивать рассмотрение некоторым их классом. Эти предположения могут основываться на эмпирических исследованиях вида функций затрат реальных организационных иерархий или вводиться из соображений математического удобства. В связи с явно недостаточным количеством имеющихся в настоящее время эмпирических исследований приходится в большей степени основываться на втором пути – вводить ограничения на функции затрат иерархии из общих соображений, не упуская, однако, из виду необходимости описания с помощью таких функций реальных задач.

Ниже формулируется понятие секционных функций затрат, которые позволяют моделировать и решать широкий класс задач поиска оптимальных иерархий.

1.2. Группы исполнителей и секционные функции затрат

Первое упрощение, которое делается относительно функции затрат иерархии – это предположение об *анонимности* менеджеров. Именно, будем считать, что затраты иерархии не изменяются при замене одного менеджера иерархии другим, то есть персональные качества конкретного менеджера никаким образом не сказываются на функции затрат иерархии.

На первый взгляд это предположение является довольно сильным, ведь известно, что разные люди выполняют свою работу с разной эффективностью. Однако анонимность функции затрат можно обосновать, как минимум, несколькими способами.

Во-первых, выбор той или иной организационной структуры обычно производится еще до набора сотрудников, так что на этапе построения структуры еще не известно, какие люди будут занимать те или иные штатные позиции, предписываемые выбранной структурой, поэтому в функцию затрат иерархии с необходимостью входят лишь некоторые обобщенные характеристики менеджеров. При этом считается, что при наборе персонала всегда можно будет найти людей с необходимыми для данных должностных позиций навыками, и затраты получившейся иерархии будут не сильно отличаться от «нормативных».

Во-вторых, анонимности функции затрат можно добиться, разбив задачу поиска оптимальной структуры на две подзадачи. Первая – это задача выбора штатного расписания (определения набора позиций менеджеров и их взаимной подчиненности), а вторая – это задача назначения менеджеров на выбранные позиции из некоторого множества имеющихся менеджеров. Тогда функцию затрат иерархии можно определить как минимальные затраты при всевозможных назначениях менеджеров на штатные позиции этой иерархии. При этом чисто формально функция затрат иерархии будет зависеть лишь от множества имеющихся менеджеров, а конкретные менеджеры, занимающие штатные позиции, однозначно определяются решением задачи назначения.

Заметим, что анонимность функции затрат относится к менеджерам, но не к исполнителям. То есть, при замене одного исполнителя другим затраты иерархии в общем случае изменятся. Это вполне логично, ведь именно спецификой конкретных исполнителей определяется технология функционирования организации, которая позволяет отличить одну организацию от другой.

Еще одно упрощение – это предположение об *аддитивности* функции затрат иерархии. Предполагается, что затраты $C(H)$ любой иерархии H можно представить в виде суммы затрат менеджеров этой иерархии, то есть записать в виде

$$C(H) = \sum_{m \in M} c(m, H),$$

где M – это множество менеджеров, входящих в иерархию H, а неотрицательная функция $c(m, H)$, называемая *функцией затрат менеджера*, ставит в соответствие каждому менеджеру m из множества M его затраты в иерархии H. Изложение будет вестись, в основном, в терминах функций затрат менеджеров, а не в терминах функций затрат иерархии в целом. Иногда будем говорить о *затратах менеджера*, имея в виду значение его функции затрат.

Само по себе предположение аддитивности не является ограничивающим до тех пор, пока допускаются произвольные функции затрат менеджера[1]. Однако уже следующее допущение, которое мы примем – *локальность*, будет существенно сужать класс рассматриваемых функций затрат. Локальность функции затрат

---

[1] Чтобы обойтись без этого предположения, достаточно формального допущения о том, что все затраты на содержание иерархии сконцентрированы в затратах ее топ-менеджера (то есть $c(m, H) = C(H)$) а затраты остальных менеджеров равны нулю.

предполагает, что затраты менеджера зависят от того, каким образом устроена иерархия «в непосредственной близости» от данного менеджера, а именно, какие у него подчиненные и какая работа им поручена – но не зависят от того, как организованы другие части иерархии.

Довольно логично предположить, что затраты менеджера не зависят от того, как организована работа менеджеров, не являющихся его подчиненными или начальниками. Вдобавок к этому будем считать, что затраты менеджера не зависят от его начальников – от того, на каком уровне он расположен относительно топ-менеджера и т.п.

Если *секцией* менеджера m в иерархии H назвать подграф иерархии H, включающий самого менеджера m, его непосредственных подчиненных, а также связи между ними и менеджером m, то локальность функции затрат предполагает, что затраты менеджера m определяются исключительно его секцией. Будем также говорить, что менеджер *m управляет* своей секцией.

Чтобы формализовать локальность функции затрат, требуется более четко определить, что понимается под понятиями «работа, порученная менеджеру» или «роль» менеджера в иерархии. Ниже считается, что роль менеджера определяется теми исполнителями, которыми он (непосредственно или опосредованно) управляет.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей N. Для любого менеджера $m \in M$ из иерархии H можно определить *подчиненную группу исполнителей* $s_H(m) \subseteq N$ – группу исполнителей, для которых менеджер m является начальником в иерархии H. Будем также говорить, что менеджер *m управляет* группой исполнителей[1] $s_H(m)$.

Так, например, на рис. 3 менеджер m_1 управляет группой исполнителей $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, менеджер m_2 – группой $\{w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$, а менеджер m – группой N, состоящей из всех исполнителей. На рисунке части иерархии, подчиненные менед-

[1] Ниже удобным будет считать, что каждый исполнитель $w \in N$ управляет группой $\{w\}$, состоящей из него самого.

жерам m_1 и m_2, для наглядности обведены соответственно штрихованной и штрихпунктирной линиями.

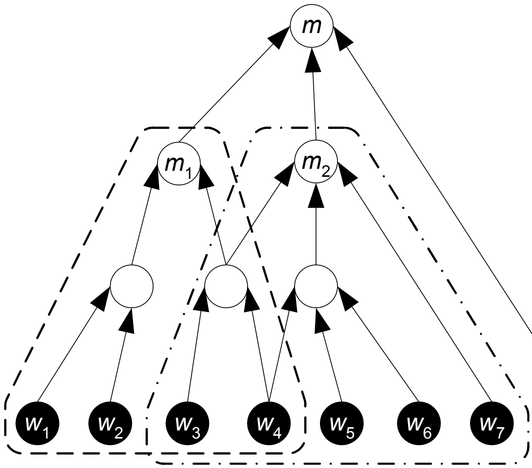


Рисунок 3. Подчиненные группы исполнителей

Заметим, что по определению иерархии каждый менеджер управляет непустой группой, и в каждой иерархии присутствует топ-менеджер, который управляет группой N, состоящей из всех восьми исполнителей[1].

Объединение описанных выше предположений приводит к понятию секционной функции затрат[2].

Определение 6 [115]. Пусть задано множество исполнителей N. Функция затрат менеджера называется *секционной*, если она зависит только от групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные.

---

[1] В [115] доказывается полезная лемма о том, что если только один менеджер не имеет начальников, то иерархия будет деревом тогда и только тогда, когда непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей, то есть не дублируют работу друг друга.

[2] В [85] приводится аксиоматическая характеризация секционной функции затрат через свойства анонимности и локальности.

Таким образом, если менеджер m в иерархии H имеет r непосредственных подчиненных $v_1, v_2, \ldots, v_r$, то его затраты можно записать в виде

$$c(m, H) = c(s_H(v_1), \ldots, s_H(v_r)).$$

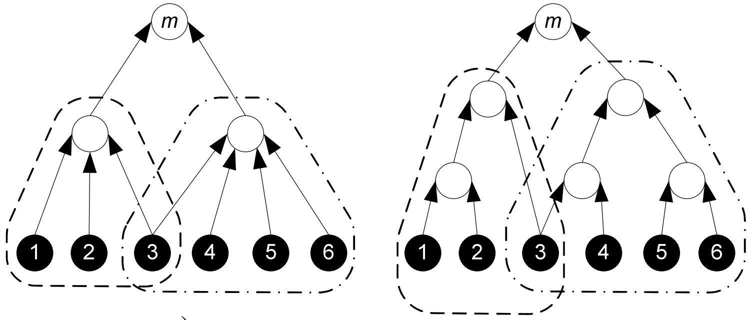
Затраты менеджера зависят еще и от управляемой им группы исполнителей. Однако легко проверить, что подчиненная группа менеджера равна объединению групп, которыми управляют его непосредственные подчиненные, и, значит, она однозначно определяется этими группами. Поэтому можно считать, что затраты менеджера зависят только от групп, управляемых его непосредственными подчиненными. Подчиненные менеджера в общем случае могут управлять пересекающимися группами. Скажем, менеджер m на рис. 3 имеет троих непосредственных подчиненных: менеджера m_1, менеджера m_2 и исполнителя w_8. Значит, затраты менеджера m можно записать следующим образом:

$$c(\{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \{w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}, \{w_8\}),$$

причем исполнители w_3, w_4 входят в подчиненные группы как менеджера m_1, так и менеджера m_2.

Число аргументов секционной функции затрат равно количеству непосредственных подчиненных менеджера и функция определяется для любого их количества. Значение секционной функции затрат не зависит от порядка следования ее аргументов (групп) и не изменяется при их перестановке. Таким образом, секционная функция затрат ставит в соответствие произвольному непустому множеству групп исполнителей число – затраты менеджера, непосредственные подчиненные которого управляют этими группами исполнителей.

При секционной функции затраты менеджера не зависят от того, как «внутри» организована работа его непосредственных подчиненных, а зависят только от групп исполнителей, которыми те управляют. Так, затраты менеджера m в иерархиях на рис. 4а) и 4б) одинаковы, поскольку в обеих иерархиях менеджер m имеет двух непосредственных подчиненных, управляющих группами исполнителей $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4, 5, 6\}$. При этом, понятно, что совокупные затраты этих иерархий могут отличаться.



а) б)

Рисунок 4. К определению секционной функции затрат

На практике ситуация, когда непосредственные подчиненные некоторого менеджера управляют частично перекрывающимися группами, может быть целесообразной. Однако имеет смысл устранить ситуации полного дублирования одним подчиненным работы другого.

Определение 7. Для секционной функции затрат *невыгодно дублирование*, если выполнено следующее условие. Если среди непосредственных подчиненных менеджера m есть два, управляющие такими группами s_1 и s_2, что $s_1 \subseteq s_2$, то затраты менеджера m не увеличиваются при удалении первого из них. Иначе говоря, для любого числа непосредственных подчиненных $r \geq 2$ и любого набора групп $s_1, s_2, \dots, s_r$, из того, что $s_1 \subseteq s_2$ следует, что $c(s_1, s_2, \dots, s_r) \geq c(s_2, \dots, s_r)$.

Как показано в [115], если дублирование невыгодно, существует оптимальная на множестве $\Omega(N)$ иерархия, обладающая следующими свойствами:

1. *Уникальность групп*: все менеджеры управляют разными группами исполнителей.
2. *Единственность топ-менеджера*: есть только один топ-менеджер – остальные сотрудники имеют начальника и прямо или опосредовано подчинены топ-менеджеру.
3. *Распределенность полномочий*: среди сотрудников, непосредственно подчиненных любому менеджеру, ни один не управляет другим.

В любой другой иерархии «лишних менеджеров» (при нарушении свойств 1 или 2) или «лишние связи» (при нарушении свойства 3) можно удалить без увеличения затрат иерархии.

Например, иерархия б) на рис. 1 нарушает свойство уникальности групп – менеджеры I и III управляют одной и той же группой исполнителей $\{1, 2, 3\}$. Эта же иерархия нарушает свойство единственности топ-менеджера, так как в ней два менеджера, II и III, не имеют начальников. И, наконец, эта иерархия нарушает свойство распределенности полномочий, так как менеджер II непосредственно управляет сотрудником 3, который уже управляется менеджером I, также непосредственно подчиненным менеджеру II.

Ниже исследуются только функции затрат, для которых невыгодно дублирование. Кроме того, считается, что удаление таких «лишних» менеджеров и связей всегда оставляет иерархию допустимой (оставляет ее во множестве Ω допустимых иерархий). Например, если иерархия б) на рис. 1 является допустимой (принадлежит множеству Ω), то удалив из нее «лишнего» менеджера III и все его связи, мы должны получить другую допустимую иерархию из множества Ω.

Свойства 1-3 существенно облегчают поиск оптимальной иерархии: в числе прочего, из них следует, что можно рассматривать только конечные множества допустимых иерархий и каждый менеджер будет иметь как минимум двух непосредственных подчиненных.

В рамках парадигмы секционных функций затрат удается довольно далеко продвинуться в решении задачи поиска оптимальной иерархии. В то же время, как показывает приведенный во второй главе обзор литературы, многие известные модели формирования организационных иерархий могут быть сведены к поиску оптимальной иерархии при секционной функции затрат.

1.3. Функции затрат, зависящие от мер

В общем виде секционная функция затрат менеджера $c(s_1, \ldots, s_r)$ представляет собой функцию множеств и потому является довольно сложным объектом. Задание такой функции затрат в общем случае сводится к прямому перечислению ее значений для всех возможных наборов групп, что обычно невозможно из-за огромного количества таких наборов.

Несмотря на то, что ниже в разделе 1.4 будет приведен ряд результатов, касающихся секционных функций общего вида, чтобы иметь возможность представить секционную функцию затрат менеджера в компактной форме, необходимо каждой группе или набору групп поставить в соответствие одну или несколько числовых характеристик и считать функцию затрат менеджера зависящей уже от этих характеристик.

Проще всего это сделать, введя меру на множестве исполнителей. Каждому исполнителю $w \in N$ ставится в соответствие положительное число $\mu(w)$ – его *мера*. *Мерой* $\mu(s)$ группы исполнителей $s \subseteq N$ называется суммарная мера исполнителей, входящих в группу, то есть $\mu(s) := \sum_{w \in s} \mu(w)$. Тогда считаем, что функцию затрат менеджера можно записать в виде функции $r + 1$ переменных: $c(s_1, \ldots, s_r) = c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – это меры групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера, а μ – мера группы, которой управляет он сам. Такую функцию затрат будем называть *зависящей от мер*[1]. Содержательно мера исполнителя может соответствовать, например, сложности выполняемой им работы. Мера группы тогда соответствует суммарной сложности работ, выполняемых группой, и именно от этой сложности зависят затраты по управлению группой.

Пример 1. Пусть все исполнители считаются одинаковыми и каждый из них имеет меру, равную единице. Тогда мера группы равна количеству входящих в нее исполнителей, а функция затрат менеджера зависит от количества подчиненных ему исполнителей и от количества исполнителей, которыми управляют непосредственно подчиненные ему сотрудники. Ряд описываемых ниже результатов получен именно для таких функций затрат. •[2)]

Задание меры исполнителей, конечно, является далеко не единственным, хотя и самым простым способом введения число-

[1] Напомним, что функция затрат менеджера задается для любого количества его непосредственных подчиненных r и симметрична по перестановке аргументов $\mu_1, \ldots, \mu_r$ (но не последнего аргумента μ).

[2] Символом «•» обозначается конец примера или доказательства.

вых характеристик групп. В частности, в разделе 5.3 будут рассматриваться «потоковые» функции затрат менеджера, зависящие от материальных, финансовых и информационных потоков между подчиненными группами исполнителей. Однако бо́льшая часть книги посвящена функциям затрат, зависящим от мер.

Приведем несколько примеров подобных функций затрат.

Пример 2. В простейшем случае затраты менеджера равны некоторой положительной константе, что соответствует постоянной и одинаковой зарплате всех менеджеров иерархии. Тогда затраты иерархии будут пропорциональны количеству входящих в нее менеджеров. Например, в [34] (см. обзор в разделе 2.3) для такой функции решалась задача поиска оптимальной иерархии, обеспечивающей заданное «время реакции». •

Пример 3. Пусть затраты менеджера пропорциональны мере управляемой им группы, то есть $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu) = \mu$. В этом случае среди всех возможных иерархий оптимальна веерная иерархия, поскольку любая иерархия по определению включает менеджера, управляющего группой N из всех исполнителей, и только в веерной иерархии этот менеджер будет единственным. Однако оптимальные иерархии будут уже не столь тривиальными, если ограничиться поиском только среди r-иерархий, где $r > 1$ – некоторое заданное число.

Для $r = 2$ задачу можно свести к известной задаче об оптимальном двоичном кодировании. Исполнители соответствуют символам исходного алфавита, а их меры – частоте появления этих символов в кодируемом тексте. Можно показать, что оптимальным 2-деревом является так называемое *дерево Хаффмана* [29]. Ниже в разделе 5.2 показывается, что некоторые обобщения этого дерева оптимальны и для более широкого класса функций затрат. •

Пример 4. Пусть функция затрат не зависит от мер групп, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера, а зависит только от их количества r и меры μ группы, которой управляет сам менеджер. В частности, ниже будет рассматриваться *аддитивная* функция затрат вида $c(r, \mu) = \varphi(r) + \chi(\mu)$ и *мультипликативная* функция затрат вида $c(r, \mu) = \varphi(r)\chi(\mu)$, где

$\varphi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ – некоторые неотрицательные монотонно возрастающие функции.

Аддитивная функция затрат имеет следующую содержательную интерпретацию. Предположим, что все исполнители имеют единичную меру и должностные обязанности менеджера состоят, во-первых, в том, чтобы работать со своими непосредственными подчиненными (например, проводить совещания), а во-вторых – обеспечивать работу подчиненных ему исполнителей (скажем, непосредственно инспектировать их деятельность или просто периодически подписывать заявления на отпуск или увольнение). Тогда затраты менеджера будут складываться из затрат $\varphi(r)$ на работу с непосредственными подчиненными (зависящими от их количества r), и затрат $\chi(\mu)$ на работу с подчиненными ему исполнителями (зависящими от их количества μ).

В мультипликативной функции затраты по работе с непосредственными подчиненными $\varphi(r)$ умножаются на «коэффициент ответственности» $\chi(\mu)$, зависящий от меры управляемой менеджером группы. В [50] рассматривалась функция затрат, которая, хоть формально и не является секционной, но может быть сведена в рамках других вводимых там ограничений к мультипликативной (и, одновременно, аддитивной) функции вида $c(r, \mu) = r^2$. •

Пример 5. В [85, 115] были введены и исследованы несколько более сложных функций затрат менеджера:

(I) $c(\mu_1,..., \mu_r, \mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha, \ldots, \mu_r^\alpha)]^\beta$,

(II) $c(\mu_1,..., \mu_r, \mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha]^\beta$,

(III) $c(\mu_1,..., \mu_r, \mu) = [\mu^\alpha / \max(\mu_1^\alpha,..., \mu_r^\alpha) - 1]^\beta$,

(IV) $c(\mu_1,..., \mu_r, \mu) = [\sum_{i=1}^r (\mu^\alpha - \mu_i^\alpha)]^\beta$,

(V) $c(\mu_1,..., \mu_r, \mu) = \mu^\alpha / \min(\mu_1^\beta,..., \mu_r^\beta)$.

Здесь α и β – некоторые неотрицательные параметры, позволяющие «подстроить» эти функции затрат к конкретным условиям. Напомним также, что μ_1, …, μ_r – это меры групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера, а μ – мера группы, которой управляет он сам. Ниже мы будем ссылаться на эти функции затрат по их номеру, то есть говорить о функции затрат (I), (II) и т.д.

А.А. Воронин и С.П. Мишин в [82, 85] предлагают следующие содержательные интерпретации функций затрат (I)-(V) в терминах психологических типов взаимодействия в коллективе.

В функции (I) затраты менеджера определяются мерами групп, которые управляются всеми непосредственными подчиненными, кроме «*полулидера*». Под полулидером подразумевается подчиненный, который управляет группой максимальной меры, то есть выполняет наибольший объем работы. Считается, что он обладает достаточной квалификацией для того, чтобы самостоятельно решать проблемы, связанные с управлением своими подчиненными, не беспокоя при этом своего начальника. Тогда функция затрат (II) соответствует управлению секцией без полулидера – в ней суммируются меры групп всех непосредственных подчиненных.

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера имеется «*лидер*», который помогает менеджеру решать проблемы взаимодействия других непосредственных подчиненных, за счет чего снижаются затраты менеджера. Этому случаю соответствует функция затрат (III), в которой затраты определяются мерой всей управляемой менеджером группы и мерой группы, управляемой лидером.

Функция (IV) описывает затраты менеджера в процессе *индивидуальной работы с непосредственными подчиненными*, когда менеджер передает каждому своему непосредственному подчиненному $i = 1, \ldots, r$ информацию о той части своей группы, которой этот подчиненный не управляет. Объем информации определяется разностью мер групп μ и μ_i, возведенных в степень α. Сумма объемов информации по всем непосредственным подчиненным и определяет затраты менеджера.

Функция (V) описывает *отрицательное влияние низкой квалификации*. Считается, что подчиненный, управляющий маленькой группой, может требовать от своего начальника слишком много времени на управление собой, отвлекая его от более важной работы (как если бы генеральному директору фирмы дали в непосредственное подчинение уборщицу). Поэтому в формуле

(V) мера группы, управляемой менеджером, делится на минимальную из мер групп, управляемых его непосредственными подчиненными. •

1.4. Некоторые свойства секционных функций затрат

Поставленная выше задача поиска оптимальной иерархии остается весьма сложной, даже если ограничивать рассмотрение только секционными функциями затрат менеджера. Тем не менее, в последние годы был опубликован ряд работ [83-85, 90, 92, 115], в которых исследуются как численные алгоритмы, так и некоторые аналитические методы решения этой задачи. В настоящем разделе описывается лишь небольшая часть результатов – те, которые используются в дальнейшем изложении.

Ниже описываются базовые свойства секционных функций затрат, при выполнении которых на множестве $\Omega(N)$ всех иерархий оптимальной будет одна из введенных в разделе 1.1 «типовых» иерархий – дерево, 2-иерархия, веерная или последовательная иерархия. Эти результаты позволяют во многих случаях если не решить задачу, то существенно упростить применение численных алгоритмов поиска оптимальной иерархии. Начнем с условий, при которых оптимальной иерархией будет дерево.

Определение 8 [85]. Секционная функция затрат менеджера называется *монотонной по группам*, если затраты любого менеджера не убывают как при расширении групп, управляемых непосредственными подчиненными, так и при добавлении новых непосредственных подчиненных, то есть для любого набора групп $s_1, \ldots, s_r$ выполнены неравенства:

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s, s_2, \ldots, s_r)$, где группа s содержит s_1 ($s_1 \subset s$);

$c(s_1, s_2, \ldots, s_r) \le c(s_1, s_2, \ldots, s_r, s)$, где s – произвольная группа.

Свойство монотонности по группам иллюстрируется рис. 5, на котором изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m, имеющему непосредственных подчиненных m_1 и m_2.

Стрелками показаны возможные способы расширения групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера m (иерархии 5а и 5б) и добавления новой подчиненной группы (иерархия 5в). Иерархия 5а получена из исходной путем расширения группы, подчиненной менеджеру m_2, за счет подчиненных менеджера m_1. В иерархии 5б подчиненная менеджеру m_2 группа расширяется за счет добавления новых исполнителей. Наконец, в иерархии 5в менеджеру m добавляется новый непосредственный подчиненный – менеджер m_3. Добавляемые части иерархии для наглядности обведены штрихованной линией. Функция затрат менеджера будет монотонной по группам, если при любых подобных преобразованиях затраты менеджера m (выделенного на рисунке жирной линией) не уменьшаются.

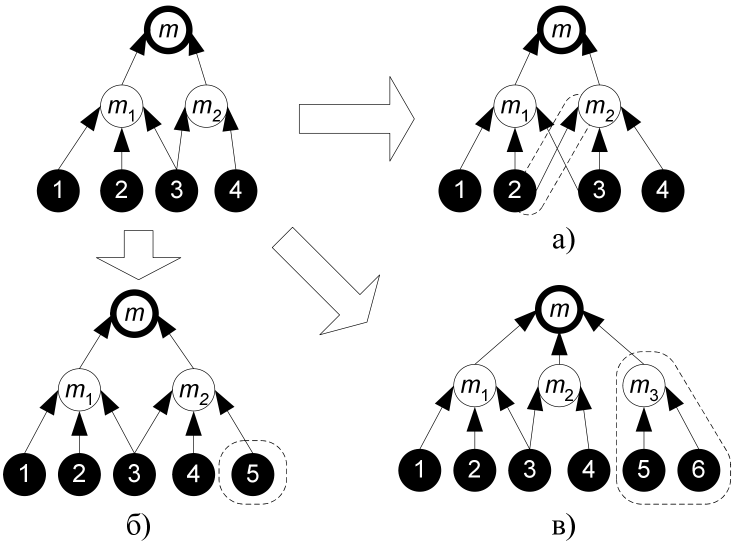


Рисунок 5. К определению монотонности по группам

Чтобы сформулировать достаточное условие монотонности по группам функции затрат менеджера, зависящей от мер, необходимо ввести следующее определение.

Определение 9. Зависящая от мер функция затрат менеджера вида $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$ называется *нормальной*, если для любого целого $r \geq 2$ выполняется $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu) \leq c(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \mu)$. Если, вдобавок, выполняется неравенство $c(0, \mu, \mu) > 0$, то функция затрат называется *строго нормальной*.

Иначе говоря, при нормальной функции затрат добавление непосредственного подчиненного, управляющего «группой» исполнителей нулевой меры, не уменьшает затрат менеджера. Это вполне логично с содержательной точки зрения, так как такой подчиненный не выполняет никакой полезной работы (если считать, что объем работы менеджера связан с мерой подчиненной ему группы исполнителей) и может только увеличить затраты своего непосредственного начальника.

Для того, чтобы нормальная функция затрат $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$ была монотонной по группам достаточно, чтобы она как функция $r + 1$ действительных переменных не убывала по каждой из них.

Пример 6. Легко видеть, что функция затрат менеджера вида $c(r, \mu)$ будет монотонной по группам, если она не убывает по каждому из двух своих аргументов. Также в [85] показано, что функции затрат (I), (II) монотонны по группам, а функции (III), (IV), (V) – немонотонны по группам. •

Утверждение 1 [85]. Если функция затрат монотонна по группам, то для заданного множества исполнителей N на множестве $\Omega(N)$ всех иерархий существует оптимальное дерево.

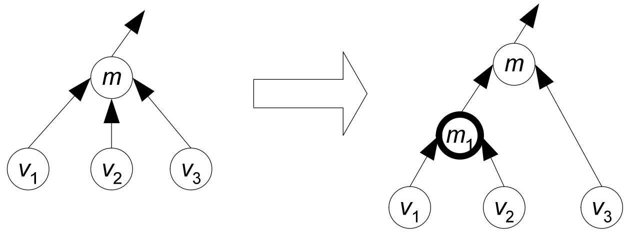
Таким образом, если функция затрат менеджера монотонна по группам и на множестве всех иерархий необходимо найти оптимальную, то можно искать ее только среди деревьев[1]. С одной стороны, это позволяет использовать разработанные в [83, 85] численные алгоритмы, а с другой – применять описываемые ниже в настоящей книге результаты, в основном посвященные поиску оптимальных деревьев.

По сути, монотонность по группам говорит о неоптимальности так называемого *множественного подчинения* сотрудников – если функция затрат монотонна по группам, то каждый сотрудник, за исключением топ-менеджера, должен иметь единственного непосредственного начальника.

Далее рассматриваются условия, при которых оптимальными будут иерархии с минимальной и максимальной возможными нормами управляемости.

---

[1] То же можно сказать и о поиске оптимальной иерархии на любом другом допустимом множестве Ω, включающем все деревья.



а) б)

Рисунок 6. К определению сужающих и расширяющих функций затрат

Определение 10. Секционная функция затрат называется *сужающей*, если для любого менеджера m с непосредственными подчиненными $v_1, \ldots, v_r$ при $r \geq 3$ можно без увеличения затрат иерархии переподчинить нескольких сотрудников из $v_1, \ldots, v_r$ новому менеджеру m_1 и непосредственно подчинить менеджера m_1 менеджеру m. Секционная функция затрат называется *расширяющей*, если при любых подобных переподчинениях затраты иерархии не уменьшаются.

Рис. 6 иллюстрирует это определение. На нем слева (иерархия 6а) изображена секция менеджера m, состоящая из него самого и его непосредственных подчиненных v_1, v_2, v_3, которые могут быть как менеджерами, так и исполнителями. Справа на рисунке (иерархия 6б) изображена та же часть иерархии после переподчинения части непосредственных подчиненных менеджера m (например, сотрудников v_1 и v_2) новому менеджеру m_1 (обведенному на рисунке жирной линией). Если для любого менеджера всегда найдется подобное перестроение, не увеличивающее затраты иерархии, то функция затрат является сужающей. Если же любое такое перестроение не приводит к уменьшению затрат иерархии, то функция затрат является расширяющей.

Подчеркнем, что определение требует невозрастания или неубывания затрат всей иерархии. При этом изменение затрат иерархии складывается из затрат добавляемого менеджера m_1 и изменения затрат менеджера m (у него уменьшается количество непосредственных подчиненных). Поэтому для того, чтобы функция затрат была сужающей, как минимум необходимо, чтобы затраты менеджера m не увеличивались при замене нескольких его непосредственных подчиненных менеджером m_1.

Содержательно определение сужающей функции затрат означает, что при наличии в иерархии менеджера с более чем двумя непосредственными подчиненными всегда выгодно нанять ему «помощника», сняв с менеджера часть его нагрузки. При расширяющей функции затрат, наоборот, всегда выгодно увольнять промежуточных менеджеров. Эти соображения позволяют доказать следующие результаты.

Утверждение 2 [85]. При сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная 2-иерархия. При расширяющей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная веерная иерархия.

Таким образом, если функция затрат сужающая, то на множестве $\Omega(N)$ (или на произвольном множестве Ω, включающем все 2-иерархии) оптимальную иерархию можно искать только среди 2-иерархий. Если функция затрат расширяющая и веерная иерархия допустима, то эта иерархия и будет оптимальной.

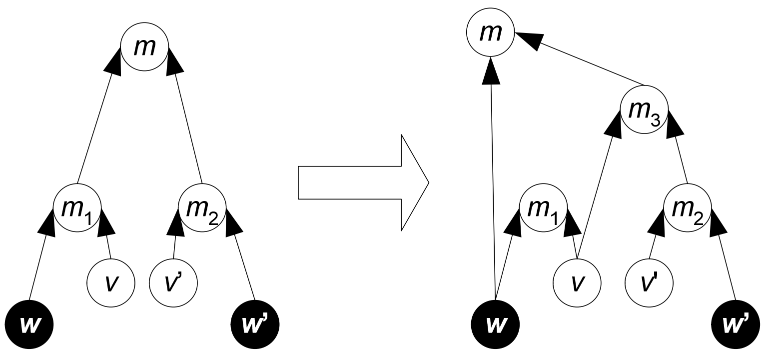
На первый взгляд может показаться, что утверждение 2 напрямую следует из содержательной интерпретации определений сужающей и расширяющей функций затрат, но на самом деле его доказательство, особенно для немонотонных по группам функций, довольно громоздко. Это утверждение имеет большое значение, поскольку позволяет из достаточно простой проверки свойств сужения и расширения функции затрат сделать содержательные выводы о виде оптимальной иерархии.

Пример 7. Функция затрат менеджера $c(\mu)$, зависящая только от меры управляемой менеджером группы исполнителей, является расширяющей, поскольку при добавлении помощника затраты иерархии возрастают на сумму его затрат.

В [85] показано, что функции затрат (I) и (II) при $\beta \leq 1$ являются расширяющими, функции (I), (III) и (IV) при $\beta \geq 1$ – сужающие. Таким образом, функция затрат может быть одновременно и сужающей, и расширяющей, например, функция затрат (I) при $\beta = 1$. В то же время, функция затрат может быть ни сужающей, ни расширяющей, как, например, функция затрат (II) в области параметров $\beta > 1$, $\alpha < 1$ (более подробно см. [85, 115]). •

Если функция затрат одновременно и монотонная по группам, и сужающая, то из утверждений 1 и 2 следует, что оптимальная иерархия будет 2-деревом. Более того, для монотонной по группам функции затрат определение 10 можно ослабить, требуя его выполнения только в случае, когда все сотрудники $v_1, \ldots, v_r$ управляют непересекающимися группами исполнителей. При выполнении такого ослабленного условия функция затрат называется *сужающей на непересекающихся группах* [115].

Результат утверждения 2 использует невозрастание (или неубывание) затрат иерархии при последовательных операциях переподчинения – для сужающей функции каждое переподчинение не увеличивает затрат иерархии, а для расширяющей – не уменьшает их. При этом оптимальными оказываются иерархии, которые не могут быть преобразованы никаким переподчинением. Таким же образом можно вводить и другие преобразования иерархии и пользоваться неубыванием или невозрастанием затрат иерархии относительно них.



а) б)

Рисунок 7. К определению сильно сужающей функции затрат

Пусть, например, на множестве допустимых иерархий $\Omega(N)$ ищется оптимальная иерархия при сужающей функции затрат. Согласно утверждению 2 оптимальную иерархию можно искать среди 2-иерархий. Допустим, в некоторой 2-иерархии H менеджер m имеет непосредственно подчиненных ему менеджеров m_1 и m_2, причем первый из них управляет некоторым сотрудником v и исполнителем w, а второй – некоторым сотрудником v' и исполнителем w' (см. рис. 7, иерархия а). У всех этих сотрудников могут быть и другие начальники, не изображенные на рисунке. Обозначим через s_1 и s_2 группы, управляемые соответственно менеджерами m_1 и m_2.

Преобразуем изображенную на рисунке часть иерархии: удалим связи от менеджеров m_1 и m_2 к m, добавим нового менеджера m_3, которого подчиним менеджеру m и назначим менеджеру m_3 в непосредственные подчиненные сотрудника v и менеджера m_2. Кроме того, непосредственно подчиним исполнителя w менеджеру m (см. рис. 7б). Легко проверить, что при таком преобразовании затраты менеджеров иерархии, не изображенных на рисунке, не меняются, и затраты иерархии изменятся на величину

$$c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\}) - c(s_1, s_2).$$

Точно такую же операцию можно проделать и с менеджером m_2.

Определение 11 [115]. Сужающая функция затрат называется *сильно сужающей*, если для любых групп s_1 и s_2 из двух или более исполнителей выполнено по крайней мере одно из двух условий:

а) для любого $w \in s_1$ $c(s_1, s_2) \geq c(s_1 \setminus \{w\}, s_2) + c((s_1 \setminus \{w\}) \cup s_2, \{w\})$,

б) для любого $w \in s_2$ $c(s_1, s_2) \geq c(s_1, s_2 \setminus \{w\}) + c(s_1 \cup (s_2 \setminus \{w\}), \{w\})$.

Таким образом, для сильно сужающей функции затрат всегда можно, не увеличив затрат иерархии, проделать описанное выше преобразование. Это преобразование не может быть проделано только в том случае, если иерархия является последовательной иерархией, что приводит к следующему утверждению.

Утверждение 3 [115]. Для сильно сужающей функции затрат на множестве $\Omega(N)$ существует оптимальная последовательная иерархия.

Следовательно, при сильно сужающей функции затрат оптимальную иерархию на множестве всех иерархий можно искать только среди последовательных иерархий, для чего в [85] разработаны как аналитические методы, так и численные алгоритмы.

Пример 8. В [85] показано, что функция затрат (I) сильно сужающая при $\beta \geq 1$ и $\alpha\beta \geq 1$, а функция затрат (III) сильно сужающая при $\beta \geq 1$. Ниже в разделе 4.1 приведены некоторые содержательные интерпретации последовательных иерархий. •

Разумеется, можно вводить и другие преобразования иерархий, подобные рассмотренным выше и, доказывая невозрастание или неубывание функции затрат относительно этих преобразований, ограничивать область потенциально оптимальных иерархий «терминальными» иерархиями, для которых преобразование провести нельзя. Ценность таких результатов будет определяться удобством проверки невозрастания (неубывания) функций затрат относительно преобразования и легкостью содержательной интерпретации множества «терминальных» иерархий.

1.5. Однородные функции затрат

Введем понятие однородных функций затрат, исследованию которых посвящены главы 3 и 4 настоящей книги.

Определение 12 [85]. Функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, зависящая от мер, называется *однородной*, если существует такое неотрицательное число γ, что для любого положительного числа A и любого набора мер $\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu$ выполняется тождество $c(A\mu_1,\ldots,A\mu_r,A\mu) = A^\gamma c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu)$. Число γ называется *степенью однородности* функции затрат[1].

Таким образом, при однородной функции затрат пропорциональное увеличение мер групп всех исполнителей в A раз приводит к росту затрат менеджера в A^γ раз. Говоря экономическим языком, однородная функция затрат менеджера обладает постоянной *эластичностью* [40, 129] по размеру управляемой группы.

Пример 9. Функция затрат менеджера вида $c(r, \mu)$ будет однородной тогда и только тогда, когда она мультипликативная и при этом $c(\mu, r) = \mu^\gamma \varphi(r)$. Функция, при которой затраты любого менеджера зависят только от количества его непосредственных подчиненных, будет однородной степени 0. Функции затрат (I),

---

[1] Легко показать [73], что если выполняется тождество $c(A\mu_1,\ldots,A\mu_r,A\mu) = \rho(A)c(\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu)$, где $\rho(A)$ – непрерывная неотрицательная функция, то найдется такая степень γ, что $\rho(A) = A^\gamma$.

(II) и (IV) – однородные степени $\alpha\beta$, функция (III) – однородная степени 0, а функция (V) имеет степень однородности $\alpha - \beta$. •

Широко используемое ниже предположение об однородности функции затрат менеджера является, несомненно, некоторым допущением, и их применение поэтому можно сравнить с использованием функций затрат Кобба-Дугласа [129] в экономике (также имеющих постоянную эластичность).

Однако в применении описываемых ниже методов к задачам формирования организационных иерархий в экономической литературе имеются определенные эмпирические предпосылки к описанию затрат менеджера именно однородными функциями. Начиная со статьи [56], и заканчивая последними работами [71], большое количество публикаций [3, 11, 36] экспериментально исследуют зависимость вознаграждения топ-менеджеров[1] от размера организации и обосновывают ее степенной вид. Поразительным является тот факт, что зависимость вида $c = s^{\gamma}$ между суммой вознаграждения топ-менеджера c и размером управляемой им компании s (в различных работах в качестве оценки размера компании рассматривалась сумма продаж, стоимость активов и др.) проявляет удивительную стабильность во времени[2] и пространстве, слабо завися от сферы деятельности компании и страны ее размещения. Параметр степени однородности функции затрат γ также довольно постоянен во времени. Если в 40-х годах XX века этот коэффициент составлял примерно 0.3-0.4 [56, 63], то последние исследования [71] говорят о диапазоне от 0.2 до 0.3, что может быть обусловлено изменениями в технологии управления за последние полвека.

Базируясь на данных [14, 56], нобелевский лауреат Г. Саймон [63] предложил теоретическую модель, обосновывающую формулу $c = s^{\gamma}$. Модель Саймона основана на четырех основных предположениях, которые он называет «социальными нормами».

[1] В силу большого размера вознаграждений, получаемых менеджерами высоких уровней в крупных организациях, эти вознаграждения составляют бóльшую часть затрат на содержание менеджера.

[2] Экспериментальные данные, подтверждающие эту зависимость, охватывают временной диапазон практически в 80 лет.

Первое предположение говорит о том, что норма управляемости постоянна в рамках одной организации, то есть каждый ее менеджер имеет примерно одинаковое количество подчиненных. Согласно второму предположению, отношение вознаграждения любого менеджера к вознаграждению любого его непосредственного подчиненного является константой. Третья предпосылка – это предположение о симметричности организации или одинаковой длине цепочки подчинения между топ-менеджером и любым конечным исполнителем. Четвертое предположение состоит в том, что вознаграждение всех конечных исполнителей одинаково.

Саймон показывает, что этих допущений достаточно для обоснования степенной зависимости вознаграждения топ-менеджеров от размера компании. Однако согласно современным взглядам считать вознаграждение менеджера зависящим от «социальных норм» не совсем правильно. Результаты теории управления организационными системами [76, 126] и теории контрактов [7, 96] показывают, что вознаграждение сотрудников организации определяется структурой используемых механизмов управления, сложным образом учитывающих усилия сотрудников, их вклад в результат работы организации в целом, возможности мониторинга их работы, а также частную информацию, которую они имеют. При этом можно говорить, что как раз норма управляемости и другие параметры организационной иерархии определяются выявленной функцией вознаграждения менеджеров, по сути, функцией затрат на их содержание.

Забегая несколько вперед, отметим, что, пожалуй, главный полученный в настоящей книге теоретический результат как раз и состоит в том, что из эмпирически наблюдаемой однородности функции затрат менеджера[1] следуют те социальные нормы, о ко-

---

[1] Строго говоря, большинство экспериментальных работ исследуют только зависимость вознаграждения топ-менеджера от размеров компании в целом, и не рассматривают вознаграждения других менеджеров иерархии. Исключением является работа [14] в которой анализируются данные о вознаграждениях всех менеджеров компании General Motors за определенный промежуток времени. Саймон [63] отмечает, что в рамках его предположений приведенная там статистика также

торых говорит Саймон: постоянство нормы управляемости, постоянство отношения вознаграждения менеджера и его непосредственного подчиненного, а также, в большинстве случаев, и симметричность оптимальной иерархии[1].

Однако, пожалуй, даже более важной является полученная аналитическая формула затрат оптимальной иерархии, позволяющая исследовать зависимость как затрат иерархии, так и, скажем, оптимальной нормы управляемости ее менеджеров, от параметров модели, описывающих отраслевую, технологическую и иную специфику исследуемой организации. Применение полученных результатов на практике поможет обосновать как вид оптимальной иерархии для конкретной организации, так и прогнозировать необходимые изменения организационной структуры с изменением условий функционирования.

В то же время, доказываемые в третьей главе настоящей книги теоремы говорят о том, что для нахождения оптимальной иерархии необходимо знать существенно больше, чем просто зависимость затрат на содержание менеджера от размера управляемой группы. В контексте рассматриваемых в настоящей книге секционных функций затрат необходимо, в частности, знать, как затраты на содержание менеджера зависят от количества его непосредственных подчиненных[2].

Статистических и теоретических исследований на эту тему пока крайне мало[3], и несмотря на то, что в четвертой главе книги рассматривается ряд модельных примеров подобных зависимостей, для обоснованной разработки практических рекомендаций

подтверждает постоянство эластичности вознаграждения менеджера по размеру управляемой им группы исполнителей.

[1] В [110] также доказывается оптимальность равномерного распределения работы между конечными исполнителями, приводящего к одинаковости их вознаграждений (четвертое допущение Саймона).

[2] Описываемые в главе 3 результаты применимы для практически любых однородных секционных функций затрат менеджера.

[3] Исключением являются, возможно, лишь методические рекомендации по нормам управляемости в различных отраслях промышленности, действовавшие в СССР во второй половине XX века.

для реальных организаций еще требуется провести огромный объем экспериментальной работы.

Говоря о недостатках однородных функций затрат, стоит отметить, что значение функции затрат с ненулевой степенью однородности стремится к нулю при уменьшении меры управляемых групп. Таким образом, затраты менеджера, управляющего группами малой меры, близки к нулю. Поэтому такие функции не позволяют описывать, так называемые, «начальные» затраты, связанные с содержанием менеджера и не зависящие от объема выполняемой им работы. На практике эти затраты могут быть обусловлены издержками на организацию рабочего места менеджера, законодательным ограничением на минимальный уровень заработной платы и т.д. Начальные затраты могут оказывать существенное влияние на вид нижних уровней оптимальной иерархии, состоящих из менеджеров, управляющих небольшими группами исполнителей[1].

Начальные затраты поддаются описанию с помощью однородных (нулевой степени) функций затрат, таких как функция (III) или функции вида $c(\cdot) = \varphi(r)$, но такие функции имеют другой недостаток – затраты менеджера не изменяются при пропорциональном росте мер управляемых групп. Ниже в главе 5 настоящей книги кратко исследуются, так называемые, *кусочно-однородные* функции затрат менеджера, которые позволяют описать и начальные затраты менеджера, и рост затрат с ростом мер управляемых групп исполнителей.

1.6. Завершающие ремарки

Итак, в первой главе были определены основные понятия, используемые в дальнейшем изложении: иерархии, менеджеры, исполнители. Сформулирована задача поиска оптимальной иерархии, а также введено важное понятие секционных функций затрат, кратко описаны их основные свойства и приведен ряд примеров. В последнем разделе дано определение однородных

---

[1] В частности, в [55] отмечается существенное отличие нормы управляемости менеджеров нижнего звена от нормы управляемости на более высоких уровнях иерархии.

функций затрат, изучению которых посвящены главы 3 и 4, и обоснована их применимость для решения задач формирования организационных иерархий.

Рис. 8 иллюстрирует место решаемых задач в общем комплексе проблем формирования организационных иерархий. Из рисунка видно, что задача поиска оптимальной иерархии при однородной функции затрат менеджера является частным случаем гораздо более общих задач. Она относится к большому классу проблем формирования организационных иерархий. Для исследования этих проблем могут использоваться различные методы, и математическое моделирование является лишь одним из них (например, в рамках такой науки, как менеджмент, эти проблемы рассматриваются на чисто эмпирическом уровне).

Математические модели, в свою очередь, могут ставить перед собой различные цели (синтез структуры или анализ закономерностей их формирования) и использовать для их достижения различный математический аппарат (теорию игр, теорию оптимизации, теорию массового обслуживания и т.д.). Подавляющее большинство моделей, описываемых в настоящей книге, рассматривают задачу формирования организационной иерархии как задачу оптимизации – поиска иерархии, максимизирующей или минимизирующей некоторый функционал.

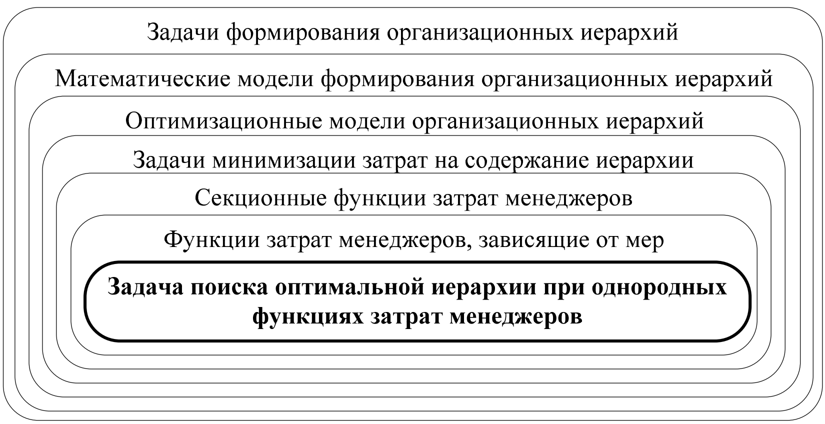


Рисунок 8. Вложенность задач формирования организационных иерархий

Как показывается ниже в главе 2, существенную долю этих моделей составляют задачи минимизации затрат на содержание иерархии. Вводя описанные в разделе 1.2 предположения относительно функции затрат иерархии, мы приходим к рассмотрению секционных функций затрат менеджера, при которых затраты менеджера зависят только от групп исполнителей, управляемых его непосредственными подчиненными. Подкласс секционных функций затрат составляют функции затрат, зависящие не от самих групп исполнителей, а от их числовых характеристик, которые выше были названы *мерами*. Рассмотрение только зависящих от мер функций затрат позволяет записать функцию затрат иерархии в компактной форме и гораздо дальше продвинуться в исследовании задачи поиска оптимальной иерархии.

Наконец, последние предположения, введенные в разделе 1.5, ограничивают модель лишь однородными функциями затрат. Основанием такого сужения служат описанные в том же разделе наблюдения, которые заставляют думать, что в реальности затраты на содержание менеджеров действительно можно описать однородными функциями.

При разработке математических моделей всегда приходится искать компромисс между общностью модели и глубиной ее проработки – силой получаемых из нее выводов. Хочется надеяться, что задача поиска оптимальной иерархии при однородной функции затрат менеджера является примером удачного компромисса. С одной стороны, эта модель позволяет описать достаточно широкий класс прикладных задач (см. примеры в главе 4). С другой стороны, для рассматриваемого класса однородных функций затрат менеджеров задача поиска оптимальной иерархии была решена практически полностью, и в результате получены аналитические выражения для затрат оптимальной иерархии и ее основных характеристик, удобные для практического применения.

Прежде чем перейти к описанию решения, проведем обзор литературы, посвященной математическим моделям формирования организационных иерархий, с целью сравнения существующих подходов с подходом, принятым в данной книге.

ГЛАВА 2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

2.1. Историческая ретроспектива

Литература, посвященная формированию организационных иерархий, весьма обширна и многообразна. С далекой древности, когда появились первые человеческие коллективы, возник вопрос о рациональной организации[1] взаимодействия людей, вовлеченных в процесс достижения общей цели.

Скажем, вопросам рационального государственного устройства (а государство можно считать разновидностью организации) посвящен широко известный диалог Платона «Государство». В этом произведении большое внимание уделяется организационной структуре, причем уже здесь структура государства имеет вид иерархии, возглавляемой мудрецами-правителями[2].

На протяжении последующих веков огромное количество авторов неоднократно возвращалось к этой теме, и накопленный ими эмпирический опыт с трудом можно описать в каком бы то ни было ограниченном объеме. Предметом настоящего обзора являются лишь работы, в которых описываются формальные математические модели, позволяющие исследовать процессы формирования организационных иерархий.

Однако, даже с учетом этого сужения тематики, количество имеющихся на сегодняшний день исследований велико. Фор-

---

[1] В [134] дается следующее определение организации: «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил».

[2] Интересно, что уже в этой работе появляются попытки количественного описания параметров оптимальной организации. Так, Платон говорит о том, что идеальное государство должно состоять из 5040 семей, поскольку это число делится нацело на все числа от двух до двенадцати (кроме одиннадцати), что позволяет удобным образом распределять поровну обязанности между подгруппами граждан.

мальные модели организационных иерархий начали активно разрабатываться с середины XX века, подстегнутые, с одной стороны, практической потребностью управления все усложняющимися экономическими, социальными и военными организациями, а с другой стороны, развитием адекватного математического аппарата – математического программирования [100] и исследования операций [86]. Исторически все эти исследования можно разделить на «экономические» и «инженерные».

В течение первой половины XX века происходил непрерывный процесс формализации экономической науки, который в результате привел к формированию развернутой математической теории экономического равновесия [129]. Однако довольно скоро стало ясно, что эта теория, во-первых, не может объяснить многих наблюдаемых на реальных рынках эффектов, а во-вторых, почти не рассматривает закономерности внутренней организации экономических субъектов – фирм [130]. Последовательное совершенствование экономической теории во второй половине XX века привело к осознанию важности информационных аспектов функционирования экономических систем, таких, например, как асимметричная информированность агентов [23] и ограниченные их возможности по обработке информации и принятию решений [64]. В числе прочего неоклассическая экономическая теория позволила пролить свет на роль и место иерархических организаций в процессах производства и распределения благ.

Параллельно с развитием математической экономики первая половина XX века была отмечена бурным прогрессом теории управления техническими системами. Развитие авиации и ракетной техники, связанное с созданием и эксплуатацией сложнейших технических систем, породило насущную необходимость в формальных моделях организации их разработки и функционирования. Моделирование сложной технической системы невозможно без ее декомпозиции на более простые подсистемы, позволяющей сначала исследовать поведение изолированных подсистем, а затем описать их взаимосвязи [127, 135]. Многоуровневая декомпозиция позволяет представить сложный объект в виде иерархии вложенных друг в друга более простых частей, задающих его *структуру*, и от того, насколько удачно выбрана структура проектируемой системы, во многом зависят и ее эксплуатационные характеристики [131]. Поэтому количество публикаций, посвященных методам оптимизации структуры технических систем, непрерывно росло. Успешное применение результатов этих работ в практике проектирования и управления техническими системами породило стремление расширить область их применения на организационные и биологические системы, что, в числе прочего, и было реализовано в ходе развития новых научных направлений – кибернетики [79, 137] и теории систем [78, 110].

В настоящее время наблюдается сближение позиций экономического и инженерного направлений в моделировании организационных структур. Не последнюю роль в этом сыграло развитие информационных технологий и вычислительной техники. Оказалось, что связанная с обработкой информации работа распределенных вычислительных систем во многом напоминает работу менеджеров в организациях, и в настоящее время многие экономисты [52, 66] используют при моделировании организационных иерархий терминологию и результаты, пришедшие из инженерных наук, в частности, информатики. Таким образом, можно говорить о появлении синтетических теорий, объединяющих достоинства инженерного и экономического подходов.

Примером такой синтетической теории может служить зародившаяся в СССР в начале 70-х годов XX века *теория активных систем* [76], объединяющая общесистемные представления о методологии исследования сложных систем и управления ими с теоретико-игровыми моделями[1] принятия решений [46, 91, 119, 121], характерными и для современной экономической науки.

Бóльшая часть описываемых ниже моделей формирования организационных иерархий принадлежит зарубежным авторам и

[1] Важным отличием организационных систем от технических является наличие у составляющих их людей и коллективов собственных интересов, отличающихся от интересов организации в целом. Теория активных систем учитывает целенаправленность поведения участников системы, используя для моделирования их поведения результаты теории игр [46, 91] – раздела прикладной математики, занимающегося исследованием моделей принятия решений в условиях конфликтных ситуаций.

относится к «экономическому» и «синтетическому» направлениям. Это обусловлено тем, что в обзор включены только относительно новые публикации, начиная примерно с 1980-го года. С более ранними моделями отечественных и зарубежных исследователей читатель может ознакомиться в монографиях [97, 127, 135]. Основной целью обзора, помимо ознакомления с современными подходами к решению задач формирования организационных иерархий, является установление связи между этими подходами и описанной в предыдущей главе моделью, которая легла в основу подхода, принятого в настоящей монографии.

2.2. Классификация моделей

Несмотря на отмеченное выше сближение различных подходов к моделированию организационных иерархий, они продолжают оставаться весьма многообразными. Не в последнюю очередь это связано со сложностью и многообразием описываемого объекта. Так, многие авторы [112, 127] отмечают, что говоря о структуре организации, имеет смысл говорить сразу о нескольких различных структурах, например, об иерархии формального подчинения (*органиграмме*), иерархии принятия решений, структуре информационных потоков и т.д. Важность совместного и согласованного формирования различных структур организации несомненна, однако б*о*льшая часть имеющихся в настоящее время формальных моделей относится к формированию лишь одной из этих структур (обычно в качестве такой ключевой структуры выбирается иерархия формального подчинения), и задача все равно остается весьма сложной, а подходы различных исследователей к ее решению – очень разными.

Разобраться в многообразии моделей формирования организационных структур помогает их классификация. В литературе встречаются несколько принципов систематизации моделей формирования организационных структур. Так, ряд систем классификации основывается на формальных характеристиках моделей, таких как используемый математический аппарат, типы рассматриваемых структур (двухуровневые, многоуровневые и т.п.).

Например, в [127] выделяются четыре основных подхода к построению моделей формирования структур. Первый подход основан на построении графа декомпозиции целей и задач системы (организации). В общей теории систем считается, что структура организации во многом обусловлена структурой этого графа. Задача формирования организационной структуры при этом сводится к решению задачи назначения – распределения целей по подразделениям и сотрудникам организации.

Во втором подходе считается, что задача организации состоит в максимизации некоторого критерия эффективности – ее целевой функции. Поскольку эта функция очень сложная и зависит от большого количества переменных, задачу ее максимизации приходится *декомпозировать* на несколько более простых задач максимизации частных критериев. Решение этих задач поручается отдельным подразделениям организации, и задача формирования организационной структуры сводится к поиску декомпозиции, при которой частные задачи имеют заданную сложность, а потери от декомпозиции[1] минимальны [127]. Применение этого подхода ограничивается тем, что общие алгоритмы подобной декомпозиции имеются только для линейных целевых функций.

В третьем подходе строится функция, напрямую определяющая зависимость эффективности функционирования организации (или эффективности ее системы управления) от структурных характеристик организационной иерархии (а иногда и непосредственно от самой иерархии), и ищется иерархия, максимизирующая/минимизирующая) эту функцию. Постановка задачи, описанная в первой главе, относится именно к этому подходу – для выбора рациональной иерархии решается задача минимизации функции затрат, заданной на множестве допустимых иерархий.

Четвертый описанный в [127] подход связан с количественной оценкой взаимосвязей между отдельными элементами системы и иерархическим разбиением множества элементов на подмножества, формирующие организационную иерархию. Основу этого подхода составляет предположение об эффективности концентрации управления наиболее сильно связанными элементами системы в одном подразделении.

Еще одна система классификации моделей формирования организационных структур, основанная на формальных характере-

---

[1] Например, разница между глобальным максимумом целевой функции и ее значением, получающимся при решении частных задач.

ристиках моделей, рассмотрена в [94]. Вводятся следующие основания классификации:

1. Цель исследования (анализ или синтез).
2. Природа элементов системы (активные, то есть обладающие собственными интересами, или пассивные).
3. Природа системы в целом (целенаправленная, такая как большинство организаций, или нецеленаправленная, как, например, система дружеских связей в группе людей).
4. Количество элементов системы (конечное или бесконечное). Обычно системы состоят из конечного числа элементов, но иногда удобно считать запас элементов неограниченным, что позволяет упростить задачу (см., например, [90]).
5. Однородность элементов структуры (элементы структуры могут быть идентичными или обладать различными персональными характеристиками).
6. Наличие в модели динамики (рассматривается ли изменение структуры во времени).
7. Наличие неопределенности (детерминированная модель или модель с неопределенностью).
8. Тип организационных структур (иерархические структуры или неиерархические – сетевые).
9. Тип связей (направленные или ненаправленные).
10. Наличие исходной структуры (формирование структуры «с нуля» или реорганизация некоторой исходной структуры).
11. Количество уровней организационной структуры (в ряде моделей количество уровней жестко фиксируется).
12. Распределение ролей (фиксировано или не фиксировано). В некоторых моделях фиксируется априорное разделение элементов на «начальников» и «подчиненных», тогда как в других моделях такое разделение отсутствует.
13. Направление формирования структуры (снизу вверх, последовательно объединяя элементы низших уровней, или сверху вниз, декомпозируя элементы более высоких уровней).

Эта довольно подробная система классификации позволяет разбить все множество моделей на большое количество классов и анализировать, например, степень похожести моделей по количеству совпадающих признаков. В [94] приведена классификация по этой системе примерно сотни работ различных авторов.

Другие известные системы классификации базируются не на формальных, а на содержательных характеристиках моделей, на тех основных предположениях о роли иерархии в управлении организацией, которые подчеркивают их авторы[1]. Наиболее типичным признаком классификации являются задачи, выполняемые *менеджерами* – элементами иерархии управления. Среди этих задач Р. Раднер в [53], например, выделяет следующие:

1. наблюдение за внешней средой и результатами предыдущих действий,
2. обработка и передача информации,
3. принятие решений,
4. контроль за действиями других сотрудников,
5. принятие на работу и увольнение сотрудников,
6. обучение и разъяснение,
7. планирование,
8. решение проблем,
9. убеждение, принуждение и целеполагание[2].

Задачи, решаемые менеджерами, могут быть положены в основу классификации моделей формирования иерархий потому, что в рамках одной модели обычно рассматривается только один из видов управленческой работы – тот, который авторы модели считают наиболее важным.

Похожее разделение литературы приводят и авторы статьи [18], однако их классификация более широкая. Они выделяют две основных группы подходов: подходы, в которых считается, что менеджеры в иерархической системе управления выполняют работу, принципиально отличающуюся от работы рядовых сотрудников (task-related theories), и «контрактные» подходы, в которых менеджеры отличаются от рядовых сотрудников своей позицией

---

[1] Стоит отметить, что классификация по содержательным признакам во многом совпадает и с классификацией по используемому математическому аппарату, так как почти в каждом подходе присутствует «пионерская» работа, закладывающая как основные особенности модели, так и применяемые методы анализа. Эти особенности и методы часто наследуются последующими работами, развивающими этот подход.

[2] Далее Раднер указывает, что в рамках экономической традиции обычно исследуются задачи менеджеров с первой по четвертую.

при заключении соглашений (трудового контракта). Первая группа далее делится на подходы по роли, играемой менеджерами иерархии: контроль, координация, управление (принятие решений), сбор и обработка информации (knowledge utilization).

Настоящая работа посвящена развитию формальных методов поиска оптимальных иерархий, во многом не привязанных к конкретной содержательной интерпретации задачи, поэтому более логичным было бы классифицировать известные модели по их формальным характеристикам. Несмотря на это, более удобным представляется разделение их на, так называемые, «линии исследований» (lines of research) – группы взаимосвязанных публикаций, авторы которых либо развивают общую модель, либо, наоборот, дискутируют друг с другом[1]. Преимущество такого разбиения состоит в его большей историчности – оно позволяет проследить развитие во времени подходов к исследованию задач формирования организационных иерархий (недостатком же является некоторая его эклектичность). Имеющиеся модели могут быть разбиты на следующие линии исследований:

1. многоуровневые симметричные иерархии,
2. иерархии знаний,
3. многоуровневые иерархии обработки информации,
4. иерархии и теория команд (teams theory),
5. иерархии принятия решений,
6. иерархии и теория контрактов.

Более подробно специфика моделей каждой из этих групп описывается ниже.

2.3. Многоуровневые симметричные иерархии

Данный раздел обзора является наиболее объемным и охватывает, пожалуй, самые известные публикации зарубежных авторов, посвященные формальным моделям формирования организационных иерархий. В основу рассматриваемой здесь линии исследований легла модель организационной структуры как последовательности иерархически упорядоченных *уровней* управления.

[1] При этом в одну группу могут попасть работы, существенно отличающиеся по формальному аппарату и содержательным предпосылкам.

На самом нижнем уровне иерархии находятся конечные исполнители, на верхнем уровне – топ-менеджер или владелец компании, остальные уровни состоят менеджеров среднего звена, причем считается, что непосредственный начальник каждого сотрудника находится на предыдущем уровне иерархии. Особенностью модели является то, что длина «цепочки подчинения» между любым исполнителем и топ-менеджером одинакова и равна количеству уровней иерархии, что позволяет называть такие иерархии *«симметричными»*, что и отражено в названии раздела.

Одной из первых работ, в которых возникает подобная модель иерархии, является описанная в разделе 1.5 статья Г. Саймона [63], однако она посвящена не собственно поиску наилучшей иерархии, а лишь объяснению экспериментальной зависимости вознаграждения топ-менеджеров от размера организации.

Проблемы, рассматриваемые в описываемых ниже работах, родились из дискуссии, имевшей место в экономической литературе в 30-е годы XX века [12, 32, 35, 48, 49, 57, 59], и посвященной факторам, ограничивающим рост фирмы. Ее результатом стало представление о том, что основным подобным фактором является ограниченность индивидуальных возможностей владельца фирмы по координации и контролю деятельности исполнителей и связанная с этим необходимость делегирования соответствующих полномочий менеджерам среднего звена. Именно потери, связанные с функционированием иерархии менеджеров (не только чисто финансовые расходы на их содержание, но и снижение производительности из-за, так называемой, *потери контроля*), и являются тем фактором, который в результате может перевесить выгоды большого размера фирмы – концентрацию технологий и капитала, нивелирование рисков и т.д.

Однако будут ли эти потери достаточно существенными, чтобы привести к невыгодности неограниченного роста фирмы? Ответ на этот вопрос потребовал разработки формальных моделей организационных иерархий.

Так, в модели М. Бекманна [4] структура управления организацией моделируется последовательностью иерархических уровней, пронумерованных сверху вниз начиная с нулевого[1].

На i-м уровне находится L_i менеджеров, и каждый из них получает вознаграждение за свою работу в размере w_i. Отношение L_{i+1}/L_i числа менеджеров на двух соседних уровнях определяет *норму управляемости*, по сути, среднее количество непосредственных подчиненных у каждого менеджера уровня i.

Бекманн делает три важных предположения. По первому из них норма управляемости на любом уровне иерархии не может быть меньше фиксированной константы a, строго большей единицы. Согласно второму, вознаграждение менеджера не может превышать вознаграждения его непосредственного подчиненного более чем в b раз, где b – некоторая константа, причем $a > b$ (утверждается, что в большинстве реальных организаций это соотношение выполняется). Третье предположение касается динамики иерархии и состоит в том, что если организация расширяется за счет добавления новых исполнителей на самый нижний уровень иерархии, то иерархия управления может измениться (вырасти как общее количество менеджеров, так и число иерархических уровней), но с выполнением условия $\Delta L_i \geq a\Delta L_{i+1}$. Иначе говоря, добавление менеджера на уровень $i + 1$ сопровождается добавлением не менее a менеджеров на предыдущий уровень.

Эти предположения позволяют показать, что добавочные затраты на содержание иерархии при введении в организацию нового исполнителя ограничены сверху величиной $w/(1 - b/a)$, где w – вознаграждение рядового исполнителя, то есть с ростом организации затраты иерархии растут не более чем линейно и не могут быть фактором, ограничивающим рост[2].

---

[1] В оригинале нумерация уровней противоположная, однако для удобства сравнения различных источников ряд обозначений изменен.

[2] В разделе 4.5 показано, что при однородных функциях затрат менеджера, имеющих степень однородности меньше единицы, оптимальные иерархии удовлетворяют описанным предположениям. Таким образом, рассматриваемая в данной книге модель иерархии позволяет, в числе прочего, получить и результаты Бекманна.

Однако не уменьшается ли с ростом иерархии эффективность управления? Бекманн предлагает измерять эффективность средним временем, за которое иерархия принимает решение (меньшему времени соответствует б*о*льшая эффективность). Он показывает, что если каждый менеджер иерархии в процессе своей работы принимает одинаковое количество решений, а задержка t_i принятия решения пропорциональна удаленности менеджера от самого нижнего уровня иерархии, то среднее время принятия решения почти не зависит от размера организации и ограничено сверху константой $2t_0/(a-1)$, где t_0 – время принятия менеджером одного решения. Заметим, что это рассуждение не учитывает различий в важности принимаемых решений. Обычно решения, принимаемые на верхних уровнях иерархии, оказывают большее влияние на функционирование организации, и потому задержка в выработке этих решений может быть более критичной.

Итак, согласно Бекманну, затраты иерархии управления не мешают неограниченному росту организации. Важным допущением, на котором основан этот вывод, является то, что эффективность управления не уменьшается с ростом размера фирмы.

В отличие от него, О. Вильямсон в своей известной статье [69] отстаивает противоположную точку зрения. Ссылаясь на работы [12, 35, 57], а также на экспериментальные исследования о том, как искажается смысл сообщений при передаче их по длинной цепочке людей, он делает вывод о том, что уменьшение эффективности управления с ростом организации неизбежно. Ведь при расширении организации топ-менеджер вынужден получать меньше информации о «старой» ее части, чтобы иметь время ознакомиться с данными о «новой» части, и его приказы становятся все менее детальными[1].

Модель Вильямсона похожа на модель Саймона [63] (см. раздел 1.5), и основывается на следующих предположениях:

1. исполнители выполняют производственные функции, менеджеры же занимаются исключительно управлением;

---

[1] Ниже в разделе 4.3 рассматривается похожая модель, в которой детальность приказов уменьшается «вверх по иерархии».

2. объем производства фирмы пропорционален количеству исполнителей с коэффициентом θ, цена π на продукцию постоянна, а затраты, не связанные с оплатой труда сотрудников, пропорциональны объему производства с коэффициентом r;
3. зарплаты всех исполнителей равны константе w_0, зарплата начальника в β раз больше, чем у его подчиненного;
4. норма управляемости у всех менеджеров одинакова и равна константе s.
5. лишь пропорция $\alpha < 1$ замыслов (приказов) руководства успешно воплощается непосредственными подчиненными, и нет возможности помешать этой потере контроля.

Последнее предположение и описывает уменьшение эффективности управления с ростом иерархии. Если иерархия состоит из l уровней, то объем производства организации $Q = \theta(\alpha{\cdot}s)^{l-1}$. Решая задачу максимизации прибыли – разницы выручки и затрат (складывающихся из расходов на оплату труда сотрудников[1] и прочих затрат), Вильямсон получает приближенную формулу для оптимального количества уровней иерархии:

$l^* = 1 + [\ln\{w_0/(\pi - r)\} + \ln\{s/(s - \beta)\} + \ln\{\ln(s)/\ln(\alpha s)\}]/\ln(\alpha)$,

а, значит, и оптимальный размер организации, превышение которого невыгодно. Приведенная аппроксимация верна при $s > \beta$ (Бекманн в [4] делает аналогичное предположение).

Далее легко показать, что оптимальный размер организации монотонно неограниченно возрастает при $\alpha \to 1$. Этот размер уменьшается с ростом коэффициента $w_0/(\pi - r)$, то есть в отраслях с высоким уровнем оплаты труда исполнителей фирмы должны иметь меньший размер. Неожиданным является то, что оптимальный размер растет с ростом нормы управляемости s. Наконец, Вильямсон показывает, что некоторые обобщения модели (неэластичность спроса, нелинейная функция полезности, эконо-

[1] Отметим, что получаемые в модели Вильямсона затраты на содержание иерархии менеджеров являются частным случаем доказываемой в разделе 3.3 формулы (5) затрат однородного дерева при степени однородности функции затрат менеджера, равной $\ln(\beta)/\ln(s)$.

мия на масштаб, отличная норма управляемости на нижнем уровне иерархии) принципиально не меняют выводов.

Ключевым предположением, приводящим к ограниченности размера фирмы в модели Вильямсона, является вогнутость выручки по количеству исполнителей (производственных рабочих). Действительно, в разделе 4.5 показывается, что при условии $s > \beta$ затраты иерархии Вильямсона с увеличением размера организации растут линейно. Поэтому прибыль организации имеет максимум по ее размеру, только если функция выручки вогнута. Однако даже имевшиеся на то время статистические данные (см., например, [42]) показывают, что выручка производственных фирм примерно линейно зависит от их размера, так что это предположение следует признать довольно спорным. Также в [44] и [8] отмечалось, что пропорция исполняемых приказов α должна быть внутренним параметром модели, зависящим от используемой в организации технологии управления.

Г. Кальво и С. Веллиц в [9, 10] предложили обобщение модели Вильямсона, в котором эта мысль развивается. Они считают, что основной функцией менеджеров иерархии является мониторинг интенсивности работы своих непосредственных подчиненных, и потеря контроля, приводящая к ограниченности размера фирмы, может иметь или не иметь место в зависимости от специфики используемой процедуры мониторинга[1].

По-прежнему иерархия представляет собой последовательность уровней от нулевого, где находятся владельцы фирмы, до l-го, где размещаются производственные рабочие (исполнители).

Предполагается, что каждый сотрудник на уровне иерархии $i \in \{1, \dots, l\}$ максимизирует математическое ожидание своей функции полезности $u(W_i) - v(a_i)$, где W_i – сумма вознаграждения, $a_i \in [0, 1]$ – прикладываемое сотрудником усилие (которое можно интерпретировать, например, как долю рабочего времени, которую сотрудник тратит непосредственно на работу), $v(\cdot)$ – функция затрат, а $u(\cdot)$ – функция полезности денег.

[1] Важно также то, что в этой статье впервые исследуется влияние используемых механизмов управления (механизмов мониторинга сотрудников и их мотивации) на вид организационной иерархии.

Начальник наблюдает уровень усилий сотрудника, с вероятностью P_i проводя мониторинг его работы, и в этом случае сотрудник получает вознаграждение $W_i = w_i a_i$, где w_i – базовая ставка для сотрудников i-го уровня. Если мониторинг не проводится, то сотрудник получает базовую ставку w_i.

Уровень усилий a_i производственного рабочего определяет его объем выпуска θa_i , где θ – производительность при максимальном уровне усилий. Уровень усилий менеджеров и норма управляемости L_{i+1}/L_i определяют интенсивность мониторинга P_{i+1} ими своих непосредственных подчиненных, а именно, считается, что P_{i+1} монотонно возрастает по $a_i L_i/L_{i+1}$.

Показывается, что при заданной ставке w_i и норме управляемости L_i/L_{i-1} уровень усилий сотрудников i-го уровня $a_i = f(a_{i-1}L_{i-1}/L_i, w_i)$ возрастает по интенсивности мониторинга $a_{i-1}L_{i-1}/L_i$ и является вогнутой однопиковой функцией w_i. Тогда ожидаемая прибыль организации – разница совокупного объема выпуска и ожидаемых затрат на оплату труда сотрудников – равна $\theta L_l a_l - \sum_{i=1}^{l} L_i w_i (1 - P_i(1 - a_i))$.

Чтобы упростить задачу, авторы делают весьма сильное предположение, что штрафы при мониторинге не идут «в плюс» организации. Тогда ее прибыль будет $\theta L_l a_l - \sum_{i=1}^{l} L_i w_i$, и для нахождения оптимальной иерархии из $l + 1$ уровня необходимо найти максимум этого выражения по количеству L_i сотрудников на каждом уровне и их вознаграждениям w_i при условиях $a_i = f(a_{i-1}L_{i-1}/L_i, w_i)$, $i = 1, \ldots, l$, и граничных условиях $L_0 = 1$, $a_0 = 1$, (то есть топ-менеджер только один, и он всегда прилагает максимальное усилие)[1]. Если g_l – это прибыль оптимальной иерархии из $l + 1$ уровня, то для поиска оптимального количества уровней достаточно найти максимум g_l по всем натуральным l.

[1] Стоит отметить, что статья Кальво и Веллица – это первая работа, в которой собственно ставится задача поиска оптимальной иерархии. Скажем, у Вильямсона [69] вид иерархии целиком определяется размером организации, так как норма управляемости была фиксирована.

В явном виде эту задачу авторы не решают, однако им удается показать, что если выгодно иметь хотя бы одного сотрудника, то прибыль g_l монотонно возрастает с ростом количества уровней l (и, соответственно, с ростом самой организации), то есть пределов роста организации нет даже несмотря на необходимость мониторинга работы сотрудников.

Ситуация в корне меняется, если сотрудники организации знают, что часть времени начальник их не контролирует. Так, если a_i – это доля времени, которую сотрудник i-го уровня проводит на своем рабочем месте, то его непосредственные подчиненные могут часть времени $1 - a_i$ выбирать уровень усилий, равный нулю, получая при этом прежнее вознаграждение.

В этой ситуации прибыль организации описывается выражением $\theta L_l a_1 \ldots a_l - \sum_{i=1}^{l} L_i w_i$. Показывается, что если при полном контроле и произвольно высоком вознаграждении w нельзя заставить сотрудника выбирать максимальный уровень усилий (т.е. $f(1, w) < 1$), то существует предел роста организации.

Сделанный вывод об ограниченности размера организации существенно основывается на предположении, что когда менеджер, скажем, первого уровня отлучается с рабочего места, то все его подчиненные вплоть до рядовых исполнителей моментально перестают работать до момента его возвращения.

В модели Г. Кальво и С. Веллица роль менеджеров ограничивалась мониторингом работы своих непосредственных подчиненных. В то же время классическая теория фирмы [12, 70] доказывает, что основные задачи менеджеров – это планирование деятельности подчиненных подразделений и принятие управленческих решений. При этом важную роль играет время принятия решения – решения должны быть своевременными.

В статье М. Керена и Д. Левхари [34] рассматривается модель иерархической фирмы, в которой время планирования (и, соответственно, принятия решений) определяется суммарным временем принятия решений уровнями иерархии и напрямую влияет на объем производства. При довольно реалистичных предположениях о параметрах модели показывается, что средние затраты на единицу продукции возрастают с ростом размера организации. В своей статье Керен и Левхари для поиска оптимальной иерархии впервые использовали аппарат теории оптимального управления. Его применение удобнее проиллюстрировать на примере более поздней работы Ч. Киана [50].

Модель Киана объединяет в себе отдельные черты всех рассмотренных выше работ. Иерархия управления моделируется последовательностью уровней, пронумерованных сверху вниз от нуля до T. Через x_t обозначается количество менеджеров на уровне $t = 0, \ldots, T$, через s_t – количество менеджеров уровня t, имеющих общего начальника (по сути, s_t – это норма управляемости уровня $t - 1$). Легко видеть, что $x_t = s_t x_{t-1} = s_1 \cdot \ldots s_t$.

Как и у Кальво и Веллица, сотрудники, находящиеся на уровне t, максимизируют целевую функцию $W_t - v(a_t)$, где W_t – вознаграждение, а $a_t \in [0, 1]$ – уровень усилий сотрудников.

Система мониторинга работы подчиненных является упрощенной версией мониторинга Кальво и Веллица. Считается, что вероятность мониторинга сотрудника уровня t равна $1/s_t$ (то есть постоянно его начальник может наблюдать только за одним подчиненным, если же подчиненных больше, начальнику приходится делить свое рабочее время между ними). Тогда можно показать, что если вознаграждение сотрудников не может быть отрицательным, то для обеспечения выбора сотрудниками уровня усилий a_t необходимо установить им ставку оплаты $w_t = v(a_t)s_t$.

Помимо мониторинга работы непосредственных подчиненных в задачи менеджеров входит также принятие управленческих решений. Считается, что менеджеры на уровне $t = 0, \ldots, T - 1$ производят некоторый промежуточный продукт y_t – «управление». Менеджер преобразует управление y_{t-1} своего начальника в управление $y_t = F_t(y_{t-1}, a_t)$ и этот продукт используется далее в качестве входа его непосредственными подчиненными. Для простоты считается, что $F_t(y_{t-1}, a_t) = y_{t-1}a_t$, и, соответственно, $y_t = F_t(y_{t-1}, a_t) = a_0 \cdot \ldots \cdot a_t$. Исполнители на самом нижнем уровне аналогичным образом преобразуют управление y_{T-1} в объем производства y_T. При цене единицы продукции θ и фиксированном количестве исполнителей n совокупный доход фирмы равен $\theta \cdot n \cdot y_T = \theta \cdot n \cdot a_0 \cdot \ldots \cdot a_T$.

Фирма максимизирует разницу дохода и затрат на оплату сотрудников. Тогда задача поиска оптимальной иерархии состоит в выборе количества уровней иерархии T, норм управляемости s_t и необходимых уровней усилий a_t (на каждом уровне $t = 1, \ldots, T$ иерархии) максимизирующих прибыль

$$\theta n y_T - \sum_{t=1}^{T} v(a_t) s_t x_t$$

при дополнительных ограничениях $x_t = s_t x_{t-1}$, $y_t = a_t y_{t-1}$, $t = 1, \ldots, T$, $x_0 = 1$, $x_T = n$, $y_0 = 1$ (аналогично Кальво и Веллицу считается, что топ-менеджер – владелец фирмы – только один, и он всегда прикладывает максимальное усилие $a_0 = 1$).

Вообще говоря, поставленная задача является довольно сложной задачей дискретной оптимизации. Чтобы упростить решение, Киан преобразует дискретную задачу к непрерывной, используя подход, развитый в работах Керена и Левхари [33, 34]. Для этого считается, что норма управляемости s_t и число менеджеров x_t на каждом уровне могут принимать нецелые значения. Кроме того, считается, что сам номер уровня t может изменяться непрерывно, так что вектора $(s_t)_{t=1}^{T}$, $(a_t)_{t=1}^{T}$, $(x_t)_{t=1}^{T}$ и $(y_t)_{t=1}^{T}$ превращаются в функции действительной переменной t, определенные на отрезке $[0, T]$.[1] Это позволяет свести задачу к известной динамической задаче оптимального управления [109, 128], где номер уровня t как раз и выполняет роль времени.

Прологарифмировав левую и правую части выражения $x_t = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$, получаем уравнение $\ln x_t = \sum_{u=1}^{t} \ln s_u$, которое имеет непрерывный аналог $\ln x_t = \int_{u=0}^{T} \ln s_u du$, или, в виде дифференциального уравнения, $\dot{x}_t = x_t \ln s_t$ (точкой обозначена производная по t). Это уравнение будет одним из уравнений движения системы в задаче оптимального управления. Точно так же находится и второе уравнение движения: $\dot{y}_t = y_t \ln a_t$.

Аналогичным образом переходя к непрерывной аппроксимации в функции прибыли, получаем следующий вид задачи поиска оптимальной иерархии:

---

[1] Корректность такого перехода обсуждается в конце раздела.

$$\theta n y_T - \int_{t=0}^{T} v(a_t) s_t x_t dt \to \max_{s_t, e_t, T}$$

при ограничениях $\dot{x}_t = x_t \ln s_t$, $\dot{y}_t = y_t \ln a_t$ и граничных условиях $x_0 = 1$, $x_T = n$, $y_0 = 1$.

Это известная задача оптимального управления с открытым временем и фиксированной конечной точкой [109], где (x_t, y_t) – состояние системы, а (s_t, a_t) – управление. Для ее решения используется принцип максимума Понтрягина.

В частном случае, когда уровень усилий a сотрудников может принимать только два значения – ноль (отсутствие усилий) и единица (максимальное усилие), задача упрощается, поскольку ясно, что оптимальная иерархия предполагает максимальный уровень усилий всех сотрудников. Тогда задача сводится к минимизации затрат $v(1)\int_{t=0}^{T} s_t x_t dt \to \min_{s_t, T}$ при условиях $\dot{x}_t = x_t \ln s_t$, $x_0 = 1$, $x_T = n$. Для этой задачи Киан находит аналитическое решение[1], показывая, что в оптимальной иерархии норма управляемости s_t одинакова на всех уровнях и равна e (основанию натурального логарифма), вознаграждение также одинаково ($w_t = v(1)e$), количество уровней T равно логарифму количества исполнителей ($T = \ln n$), а затраты организации линейны по ее размеру, определяемому количеством исполнителей n.[2)]

Возвращаясь к общему случаю, когда уровень усилий сотрудников принимает значения из отрезка [0, 1], Киан показывает, что в оптимальной иерархии ставка оплаты сотрудников и уровень их усилий уменьшаются вниз по иерархии, а норма управляемости всегда превышает e. Также доказывается, что прибыль фирмы вогнуто возрастает по размеру организации n.

---

[1] Ниже в примере 10 рассматривается аналитическое решение несколько более общего случая этой задачи.

[2] Попутно Киан находит и аналитическое решение задачи, сформулированной в статье Кальво и Веллица [9]. Он показывает, что в их модели оптимальная норма управляемости $s_t = e(\beta(v(1)e)^{-1})^{e^{(T-t)}}$ убывает вниз по иерархии, как и оптимальная ставка оплаты труда.

Таким образом, Киан, как и Бекманн [4], приходит к выводу, что потенциальная потеря контроля в иерархии управления не приводит к ограниченности рационального размера фирмы.

Удобство непрерывной аппроксимации позволяет подробно исследовать зависимость характеристик оптимальной иерархии от параметров модели. Например, показывается, что производительность y_T труда конечных исполнителей уменьшается с ростом организации и с уменьшением цены продукции β.

В то же время, математическая корректность сведения дискретной задачи поиска оптимальной иерархии к непрерывной постановке довольно сомнительна. Например, Т. Ван Зандт [67] отмечает, что если допущение нецелой нормы управляемости еще позволяет получать достаточно точные оценки характеристик иерархии, то снятие ограничения дискретности уровней иерархии может привести к отличию на порядки рассчитанного количества менеджеров оптимальной иерархии от правильного значения, полученного из анализа исходной дискретной модели!

Пример 10. В предыдущей главе было введено понятие секционных функций затрат, при которых затраты менеджера зависят от количества его непосредственных подчиненных и от групп исполнителей, которыми эти подчиненные управляют.

В частном случае рассмотренной выше модели Киана, когда усилие принимает только значения ноль и единица, затраты w_t на содержание одного сотрудника уровня t пропорциональны s_t – норме управляемости предыдущего уровня иерархии. На первый взгляд такая функция затрат не является секционной. К примеру, в модели Киана расходы на содержание конечных исполнителей зависят от вида надстроенной над ними иерархии, а затраты на содержание топ-менеджера равны нулю.

Однако эта задача поиска оптимальной иерархии может несложным приемом быть сведена к задаче с секционной (и даже однородной) функцией затрат менеджера. Для этого будем считать, что затраты s_t несет не сам сотрудник уровня t, а его непосредственный начальник. Поскольку этот начальник имеет s_t непосредственных подчиненных, его затраты будут равны s_t^2. Эта функция является частным случаем введенной в примере 4 мультипликативной функции затрат. Кроме того, это однородная степени ноль функция затрат (см. определение 12).

Используя обратный переход, поиск оптимальной древовидной иерархии для мультипликативной функции затрат вида $c(\mu, r) = \mu^{1-\alpha} r^{\alpha+\beta}$, где μ – мера управляемой менеджером группы исполнителей, а r – количество его непосредственных подчиненных, можно свести к решению задачи минимизации функционала $\int_0^T {x_t}^{\alpha} {s_t}^{\beta} dt$ при условиях $\dot{x}_t = x_t \ln s_t$, $x_0 = 1$, $x_T = n$.

Лемма 1. Решением этой задачи является норма управляемости $s_t = \exp(1/\beta)$, одинаковая для всех уровней иерархии.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Ниже в разделе 4.3 находится более точная оценка нормы управляемости оптимальной иерархии, которая в обозначениях данной главы выглядит так: $s_t' = (\alpha + \beta)^{1/\alpha} \beta^{-1/\alpha}$. Сравнивая ее с формулой $s_t = \exp(1/\beta)$ при $\alpha = \beta = 1$, находим, что в непрерывной модели $s_t = e \approx 2.72$, что существенно отличается от более точного значения $s_t' = 2$.[1)] •

Несколько особняком в череде публикаций, посвященных моделям симметричных многоуровневых иерархий, стоит статья Розена [58], в которой изучается не отдельная организация, а целый рынок, включающий и организации, и менеджеров. Целью работы является описание равновесного распределения организаций по размеру, а также рыночных процессов формирования вознаграждения менеджеров в зависимости от их способностей.

Основу модели составляет предположение о том, что каждый иерархический уровень преобразует результаты работы более низкого уровня в новый продукт, который может быть как реализован на внешнем рынке, так и использован в качестве входа следующим уровнем иерархии.

В модели Розена каждый потенциальный работник с номером i обладает уникальным набором $(q_0^i, q_1^i, q_2^i, \ldots)$ навыков для работы в качестве исполнителя (q_0^i), менеджера первого (нижне-

---

[1] Киан [50] также решает дискретную задачу при $\alpha = \beta = 1$ и получает ту же норму управляемости, равную двум.

го) уровня (q_1^i), менеджера второго уровня (q_2^i) и так далее. Если навык q_0^i непосредственно определяет объем производства $x_i = q_0^i$ исполнителя, то на более высоком уровне l иерархии объем производства x_i i-го менеджера определяется рекуррентной формулой $x_i = \sum_j g_l(q_l^i) f_l(q_l^i t_{ij}, x_j)$, где суммирование проводится по непосредственным подчиненным менеджера, а t_{ij} – это время, которое менеджер тратит не контроль работы j-го непосредственного подчиненного ($\sum_j t_{ij} = T$).

Множитель $g_l(\cdot)$ описывает качество управленческих решений, а множитель $f_l(\cdot)$ – влияние интенсивности контроля на качество работы предыдущего уровня. При фиксированной структуре организации и фиксированных навыках сотрудников ее задача состоит в максимизации объема производства путем распределения рабочего времени T каждого менеджера между его непосредственными подчиненными.

Подробно анализируя случай двухуровневых фирм в условиях технологии с постоянной отдачей на масштаб, Розен рассматривает рынок производственных и управленческих навыков. Он находит равновесные рыночные цены, определяющие вознаграждение исполнителей и менеджеров зависимости от их навыков. Показывается, что более «талантливые» менеджеры в равновесии управляют более крупными фирмами, что позволяет получить распределение фирм по размеру в зависимости от распределения управленческих навыков потенциальных работников. Кроме того, находится зависимость вознаграждения менеджера от размера управляемой им организации, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными (см. обзор в разделе 1.5). В заключение статьи кратко рассматривается случай многоуровневых фирм и намечаются перспективы исследований.

Среди российских ученых, в настоящее время развивающих модели симметричных многоуровневых иерархий, отметим А.П. Михайлова [113, 114], однако предметом его работ является не поиск оптимальных иерархий, а закономерности динамических процессов перераспределения власти между уровнями фиксированной административной (властной) иерархии.

2.4. Иерархии знаний

В рамках данного подхода считается, что основной задачей менеджеров является решение проблем, возникающих в процессе функционирования организации. Решать проблемы менеджерам помогают их знания и опыт. Общеизвестна эффективность специализации, концентрации отдельного индивидуума на решении лишь определенного класса проблем [26]. В то же время, специализация порождает проблемы координации, поиска специалиста, который может решить конкретную проблему организации. Как оказывается, одним из эффективных механизмов такой координации является иерархия, основанная на знаниях. Главной проблемой при построении такой иерархии является поиск компромисса между эффективностью использования знаний и затратами на координацию.

В модели, предложенной Л. Гарикано [17], для успешной реализации технологического процесса помимо привычных факторов производства (таких, как материалы, оборудование, капитал) требуются еще и знания сотрудников, проявляющиеся в их умении решать проблемы. Множество всех проблем, связанных с функционированием организации, моделируется точками отрезка $[0, Z]$ действительной оси, причем считается, что плотность вероятности $f(z)$ появления проблемы $z \in [0, Z]$ убывает с ростом z (проблемы упорядочены по убыванию частоты их появления)[1]. Через $F(z) = \int_0^z f(x)dx$ обозначается функция распределения, соответствующая плотности вероятности $f(z)$.

Если $A \subseteq [0, Z]$ – это подмножество всех проблем, которые умеет решать сотрудник организации, а t^p – время, которое он тратит на производственную деятельность, то средний объем выпускаемой им продукции равен $t^p \int_A f(x)dx$ (по сути, считается, что на протяжении рабочего времени t^p сотрудник сталкивается со случайным потоком проблем, и объем выпуска определяется долей проблем, которые он успешно решает).

[1] Также рассматривается альтернативная интерпретация, в которой число $z \in \Omega$ описывает сложность проблемы – большим числам соответствуют более сложные проблемы.

Затраты в единицу времени на обучение решению подмножества проблем $A \subseteq [0, Z]$ пропорциональны мере Лебега $\mu(A)$ этого подмножества с коэффициентом c.[1)] В этих условиях выгодно уметь решать наиболее часто встречающиеся проблемы, и задача максимизации прибыли одного сотрудника сводится к максимизации функции $F(z) - c \cdot z$ (разницы выпуска и затрат на обучение) выбором «верхней границы компетенции» $z \in [0, Z]$.

Однако в большой организации может оказаться выгодным наличие сотрудников, умеющих решать только редкие проблемы, Тогда остальные сотрудники смогут обращаться к ним за помощью в исключительных случаях вместо того, чтобы учиться самим решать эти (относительно редкие) проблемы.

Организационная структура, по Гарикано, описывается разбиением всего множества сотрудников организации на L классов. Доля сотрудников, попавших в класс $i = 1, \ldots, L$, равна β_i. Класс i характеризуется множеством компетенции A_i (возможно, пересекающимся с множествами компетенции других классов), списком l_i классов, у которых сотрудники i-го класса могут просить помощи (каждый список начинается с самого класса i), а также распределением времени сотрудников i-го класса между производственной деятельностью (t_i^p) и помощью другим классам (t_i^h).

Общее время $\beta_i t_i^h$, которое i-й класс тратит на помощь другим сотрудникам организации, сложным образом определяется множествами компетенции классов, которые предшествуют i-му в списках l_j тех, кто обращается к i-му классу за помощью, а также тем, сколько времени обращающиеся за помощью сотрудники тратят на производственную деятельность[2]:

$$\beta_i t_i^h = h \sum_{j : i \in l_k} \beta_j t_j^p [1 - F(\bigcup_{k \prec_j i} A_k)] .$$

---

[1] Отметим, что эти затраты можно рассматривать и просто как вознаграждение сотрудника, имеющего заданную «квалификацию» A.

[2] Считается, что временные затраты несут сотрудники, оказывающие помощь, но не те, кто за помощью обращается. Выражение $k \prec_j i$ означает, что класс k предшествует классу i в списке l_j, а коэффициент h описывает трудоемкость оказания помощи.

Прибыль, приносимая организации сотрудником i-го класса, равна произведению его рабочего времени t_i^p на вероятность $F(\bigcup_{k\in l_i} A_k)$ решения организацией его проблем, за минусом затрат $c\cdot\mu(A_i)$ на обучение сотрудника.

Задача построения оптимальной организации сводится к нахождению количества классов L, распределения β_i сотрудников организации по классам, областей компетенции A_i, списков l_i и распределения времени (t_i^p, t_i^h) каждого класса, максимизирующих совокупную прибыль организации

$$\sum_{i=1}^{L} \beta_i [t_i^p F(\bigcup_{k\in l_i} A_k) - c\mu(A_i)]$$

при условиях $\beta_1 + \ldots + \beta_L = 1$, $t_i^p + t_i^h \le 1$.

Произвольная организация может не иметь ничего общего с иерархией, поскольку в ней, вообще говоря, отсутствуют понятия подчинения и разделения труда на производство и управление.

Однако Гарикано показывает, что в оптимальной организации сотрудники специализируются либо на производственной деятельности, либо на решении проблем. Только один класс выполняет производственные задачи (сотрудников этого класса логично называть исполнителями, а остальных – менеджерами).

Кроме того, области компетенции различных классов не перекрываются. Компетенция исполнителей покрывает наиболее часто встречающиеся проблемы, в то время как менеджеры компетентны в обработке исключений: чем дальше в списке l_j находится класс, тем более редкие проблемы решают его сотрудники.

Эти свойства позволяют рассматривать оптимальную организацию как иерархию, в которой вверх движется информация о проблемах, а вниз – информация об их решениях[1]. Оптимальная организация является иерархией также и потому, что, как показывает Гарикано, количество сотрудников в классе убывает с ростом уровня компетенции.

В частном случае, когда частота проблем описывается экспоненциальным распределением с параметром λ, этот параметр

[1] Ниже в разделе 4.2 рассматривается похожая модель иерархии, в которой менеджеры решают возникающие у исполнителей проблемы.

можно интерпретировать как степень предсказуемости проблем (с ростом λ все бóльшая часть проблем локализуются в левой части отрезка $[0, Z]$). В этом случае характеристики оптимальной иерархии можно найти аналитически[1].

В статье исследуется зависимость этих характеристик от параметров модели: затрат на обучение c, затрат на оказание помощи h и предсказуемости проблем λ. Показывается, что уменьшение затрат h приводит к уменьшению уровня компетенции исполнителей, к увеличению компетенции менеджеров и росту нормы управляемости. Уменьшение затрат на обучение c приводит к увеличению уровня компетенции всех сотрудников и росту нормы управляемости. Уменьшение предсказуемости (рост λ) приводит к увеличению доли проблем, которые приходится решать менеджерам, а также к уменьшению нормы управляемости.

В рассмотренной модели менеджеры верхних уровней могут концентрироваться на решении только редких проблем – область их компетенции не обязана начинаться «с нуля». Это, однако, не совсем логично, если считать, что более редкие проблемы имеют бóльшую сложность. Умение решать сложные проблемы в большинстве случаев предполагает умение решать и более простые.

Гарикано рассматривает и этот случай, показывая, что качественные свойства оптимальных иерархий при этом остаются неизменными.

В работе [18] Л. Гарикано и Т.Н. Хаббард используют иерархии, основанные на знаниях, для описания внутренней структуры юридических фирм. Новым по сравнению с вышеописанной моделью являются два момента. Во-первых, авторы рассматривают не отдельную фирму, а целый рынок юридических услуг. Рассматривается равновесное распределение сотрудников (юристов) по иерархическим уровням конкурирующих фирм, позволяющее фирмам решать бóльшую часть задач на нижнем уровне, оставляя верхнему уровню лишь самые сложные задачи.

Во-вторых, к эффекту специализации на решении проблем определенной сложности они добавляют эффект специализации

---

[1] Интересно, что в этом случае норма управляемости (отношение β_i/β_{i+1} количества сотрудников на двух соседних уровнях) одинакова на всех уровнях оптимальной иерархии.

сотрудника на узкой предметной области. Показывается, что в равновесии узкие специалисты и юристы-универсалы сосуществуют. Роль последних заключается в том, чтобы нивелировать колебания спроса на решение проблем из разных областей.

Полученные теоретические результаты проверяются на соответствие статистике, описывающей внутреннюю структуру юридических фирм США по состоянию на 1992 год.

Похожие иерархии менеджеров, решающих проблемы, рассматривались А. Беггсом в [5]. В его модели также менеджеры, решающие сложные проблемы, должны уметь решать и более простые. Вознаграждение менеджеров растет с ростом их квалификации. Отличие от Гарикано состоит в том, что Беггс большее внимание уделяет моделированию процесса передачи проблем вверх по иерархии, используя для этого аппарат теории массового облуживания [101]. Поток проблем рассматривается как поток заданий, а иерархия менеджеров – как обрабатывающая задания многоуровневая сеть, в которой каждый следующий уровень умеет решать более сложные проблемы, чем предыдущий.

В статье выводится формула среднего времени решения проблемы в зависимости от количества менеджеров на каждом уровне и их квалификации. Затраты иерархии складываются из затрат на содержание менеджеров и потерь от задержки в решении проблем. Ставится задача минимизации затрат и рассматривается ее решение в ряде частных случаев. В числе прочего, показывается, что норма управляемости менеджеров (отношение количества менеджеров на соседних уровнях) растет вверх по иерархии.

2.5. Многоуровневые иерархии обработки информации

Существенным ограничением рассмотренных выше моделей является представление об иерархии как о последовательности взаимоподчиненных уровней. Еще в [63] отмечается, что в реальных организациях зачастую нелегко выделить уровни иерархии, поскольку организационная структура крупных компаний обычно существенно асимметрична.

В настоящем разделе рассматривается подход к моделированию организационных иерархий, лишенный этого недостатка. Он развивается в работах Р. Раднера, Т. Ван Зандта и других ученых и основан на аналогии между работой организационных иерархий и вычислительных сетей. В рамках этого подхода предполагается, что основной функцией менеджеров в организациях является обработка информации. Моделью этого процесса является распределенное вычисление некоторой ассоциативной функции принятия решения[1], аргументами которой являются наблюдаемые параметры внешней среды (ниже процесс вычисления этой функции называется суммированием). В роли процессоров выступают менеджеры, а организационная иерархия выполняет роль распределенной вычислительной сети, задающей порядок и правила взаимодействия процессоров[2].

В [53, 55] считается, что основные аспекты обработки информации, приводящие к затратам, а потому нуждающиеся в экономии – это общее время вычисления функции и количество процессоров. Задача состоит в том, чтобы при заданном количестве суммируемых элементов n и количестве процессоров P построить *эффективную* вычислительную сеть (организационную иерархию), то есть сеть, минимизирующую время суммирования.

При этом предполагаются следующие правила работы вычислительной сети. Процессор состоит из регистра и входного буфера. За один такт времени процессор забирает один суммируемый параметр или результат промежуточного вычисления из входного буфера и прибавляет его к содержимому регистра. В запрограммированные моменты времени процессор посылает содержимое своего регистра во входные буферы других процессоров сети, с которыми он соединен, обнуляя при этом свой регистр (считается, что эта операция не занимает времени). Определенный процессор в заданное время посылает содержимое своего регистра (общую сумму) «наружу».

Для поиска эффективной вычислительной сети используется аппарат дискретной оптимизации. В результате находится алгоритм построения эффективной сети, схожей с последовательной

[1] Примерами подобных функций являются линейные правила принятия решений и задачи распознавания ситуаций (sampling) [53].

[2] В [39] рассматривается вопрос, о том, когда «вычислительная сеть» менеджеров действительно имеет иерархический вид, то есть когда в ней отсутствуют петли.

иерархией (см. определение 5). Менеджеры этой иерархии выстроены в линию: получив промежуточный результат от предыдущего сотрудника, менеджер прибавляет к нему несколько параметров внешней среды и передает следующему сотруднику.

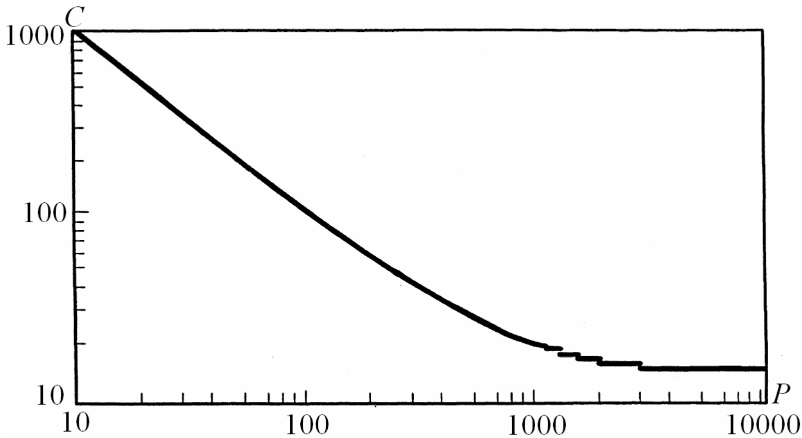


Рисунок 9. Зависимость времени вычисления от количества процессоров при n = 10000 (логарифмическая шкала)

Для фиксированного количества суммируемых параметров n и количества менеджеров P оценка C минимального времени вычисления задается формулой $C = \lfloor n / P \rfloor + \lceil \log_2 (P + n \bmod P) \rceil$, где $\lfloor\ \rfloor$ и $\lceil\ \rceil$ – операции округления к ближайшим снизу и сверху целым числам. На рис. 9 изображен пример графика зависимости времени вычисления C от количества процессоров P.

Однако обычно в организациях данные необходимо обрабатывать в, так называемом, *систолическом режиме*, когда отдельные *когорты* (cohorts) данных прибывают периодически. Т. Ван Зандт в [66] показал, что в этом случае эффективная иерархия состоит из набора оптимальных деревьев для обработки одной когорты и механизма, передающего очередные когорты данных на обработку этим деревьям по мере их освобождения. Он также нашел приближенные формулы для эффективных пар P и C:

$$C = n/Q + \log_2 Q,\ P = (n + Q - 1)/T,$$

где каждая когорта данных прибывает каждые T тактов и в среднем обрабатывается Q процессорами. Изменяя Q от 1 до n, по этим формулам можно вычислить все эффективные комбинации количества процессоров P и задержки C.

Из формул следует, что необходимое число процессоров растет как минимум пропорционально количеству n суммируемых объектов. Также с ростом n растет и время вычисления (даже при неограниченном количестве процессоров). В то же время, в [52, 54] показывается, что при этом не обязательно доходность организации убывает с ростом ее размера.[1]

Статья П. Болтона и М. Деватрипонта [6] является дальнейшим развитием подхода Р. Раднера и Т. Ван Зандта. Количество элементов данных в одной когорте по-прежнему фиксировано и равно n. Организация функционирует в непрерывном времени, новая когорта данных доступна в любой момент, и задача состоит лишь в том, чтобы обработать все элементы данных, собрав их «в руках» одного из менеджеров (топ-менеджера). Для этого формируется вычислительная сеть из менеджеров. Доказывается, что она имеет вид направленного дерева, в самом низу которого находятся элементы данных, а вверху – топ-менеджер.

Авторы используют более сложную технологию обработки информации по сравнению с [53]. Они считают, что трудозатраты менеджера-процессора с номером $i \in M$ определяются выражением $c_i = \tau \cdot (y_i + \lambda r_i + a\mu_i)$, где y_i – количество элементов данных, непосредственно обрабатываемых менеджером, r_i – количество непосредственно подчиненных ему менеджеров, μ_i – объем присылаемого ими отчета (количество элементов данных, непосредственно или опосредовано контролируемых подчиненными менеджерами). λ и a – это коэффициенты, описывающие сравнительную трудоемкость работ по обработке элементов данных, установлению связи с непосредственным подчиненным, приему от него отчета об одном элементе данных.

Необходимость создания сложных сетей менеджеров обусловлена положительным эффектом от специализации, а именно,

---

[1] В обзоре [68] описываются большое количество других результатов, полученных в рамках рассматриваемой линии исследований.

коэффициент τ считается выпуклой убывающей функцией $\tau(x)$, где x – частота, с которой сеть обрабатывает когорты данных (для нахождения этой частоты необходимо найти минимальный корень уравнения $x = 1/\max_{i \in M}[c_i(x)]$).

Целью организации считается непосредственно обработка информации. Ее средний доход равен $R \cdot x$, где R – стоимость одной когорты. Задача поиска оптимальной иерархии разбивается на два этапа. Сначала ищется иерархия, минимизирующая $\sum_{i \in M} c_i(x)$ (суммарные трудозатраты менеджеров[1]) при условии обеспечения фиксированной частоты обработки x. Затем ищется частота, максимизирующая среднюю прибыль – разницу дохода $R \cdot x$ и затрат самой дешевой (при заданной частоте) иерархии.

Авторы доказывают, что решением задачи первого этапа является древовидная иерархия, в которой трудозатраты всех менеджеров стараются выровняться (насколько позволяет дискретность задачи). Кроме того, оптимальная иерархия стремится быть симметричной – межуровневое взаимодействие в ней минимально (опять же, насколько позволяет дискретность задачи).

В частном случае Болтон и Деватрипонт показывают, что оптимальна либо *регулярная иерархия*[2], либо последовательная иерархия (все менеджеры обрабатывают один элемент данных, и на каждом уровне иерархии находится ровно один менеджер). Также находятся условия, при которых одна из этих организационных форм выгоднее другой.

Заметим, что если каждый элемент данных обрабатывается специализированным менеджером нижнего уровня (как это имеем место в регулярной иерархии), то при фиксированной частоте сети x трудозатраты любого менеджера верхних уровней описываются секционной функцией (см. определение 6). Менеджер $i \in M$ имеет r_i непосредственных подчиненных, управляет груп-

---

[1] Предполагается, ставка оплаты труда всех менеджеров одинакова и оплачивается только фактически отработанное ими время.

[2] В ней каждый менеджер нижнего уровня иерархии обрабатывает один элемент данных. Остальные же менеджеры только принимают отчеты с предыдущего уровня и передают их «наверх», причем все менеджеры одного уровня имеют одинаковую норму управляемости.

пой исполнителей (элементов данных) меры μ_i и несет затраты $c_i = \tau(x)\cdot(\lambda r_i + a\mu_i)$. Ограничение $c_i \le 1/x$ на затраты менеджера, связанное с необходимостью обеспечения заданной частоты x работы сети, легко учесть, считая, что при его нарушении затраты менеджера равны бесконечности.

Тогда задачу, решаемую в модели Болтона и Деватрипонта на первом этапе, можно сформулировать как задачу поиска оптимальной иерархии с секционной функцией затрат. Для ее численного решения хорошо подходят вычислительные алгоритмы, разработанные в [83, 85].

2.6. Иерархии и теория команд

Выше много говорилось о важности координации отдельных подразделений, как о главной цели организационных иерархий. Однако ни в одной из описанных выше работ процесс координации как таковой не моделировался в явном виде. В то же время, довольно давно существует специальное научное направление *теория команд* (teams theory) [37] – основным предметом исследований которого являются задачи координации действий групп индивидуумов, преследующих общие цели.

Базовая модель теории команд представляет собой нечто среднее между классической задачей оптимизации и задачами, рассматриваемыми в рамках теории игр [46, 91]. Имеется команда из n агентов, каждый из которых выбором своего действия $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, стремится максимизировать общий критерий эффективности $K(\cdot)$. Проблема заключается в том, что значение критерия, помимо действий агентов, зависит от состояния природы θ, то есть $K(\cdot) = K(x_1, \dots, x_n, \theta)$, причем у каждого агента имеется свое представление об этом состоянии природы. Задача состоит в том чтобы скоординировать решения, принимаемые агентами, то есть предложить рациональные правила выбора действий с учетом представлений агентов (их частной информации).

Одна из первых попыток применения результатов этой теории к задаче поиска оптимальной иерархии была предпринята Ж. Кремером в [13]. Он рассматривает фирму, состоящую из n производственных единиц (заводов), производящих k видов продукции (товаров). Продукция одних заводов может использоваться другими заводами в качестве исходного сырья, то есть реализация технологического процесса фирмы предполагает трансферты товаров между заводами.

Обозначим через $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik})$ вектор объемов производства каждого товара i-м заводом с учетом трансфертов между ним и другими заводами, а $x_i^d = (x_{i1}^d, \ldots, x_{ik}^d)$ – случайный вектор спроса на продукцию i-го завода. Производственные затраты завода определяются функцией $C_i(x_i)$, которая, помимо объема производства x_i, зависит и от случайных природных факторов.

В простейшем случае, когда спрос и функции затрат известны точно, задача координации состоит в определении объемов производства $x_1, \ldots, x_n$, минимизирующих суммарные затраты $C_1(x_1) + \ldots + C_n(x_n)$ при условии удовлетворения совокупного спроса $(x_1 + \ldots + x_n = x_1^d + \ldots + x_n^d)$.[1)] Поскольку природные факторы случайны, найденные оптимальные объемы производства $x_1^{\overline{n}}, \ldots, x_n^{\overline{n}}$ также будут случайными. Кремер рассматривает относительно простые квадратичные функции затрат, имеющие вид

$$C_i(x_i) = A_i - \Gamma_i^T B_i(x_i - \bar{x}_i) + 1/2(x_i - \bar{x}_i)^T B_i(x_i - \bar{x}_i),$$

где A_i – константа, B_i – известная положительно определенная $k \times k$ матрица, Γ_i – случайный k-мерный вектор природных факторов, а $\bar{x}_i$ – математическое ожидание $x_i^{\overline{n}}$, $i = 1, \ldots, n$. При такой функции оптимальные трансферты между i-м заводом и остальной фирмой описывается случайной величиной $t_i := x_i^{\overline{n}} - x_i^d$.

Проблема состоит в том, что в реальности точная подстройка трансфертов под конкретную реализацию случайных факторов может быть невозможной в масштабе всей фирмы. Тогда приходится разбивать фирму на более мелкие *объединения*, состоящие из одного или нескольких заводов. При фиксированном разбиении $\theta = \{J_1, \ldots, J_r\}$ множества заводов $N = \{1, \ldots, n\}$ на объединения $J_1, \ldots, J_r \subseteq N$ задача координации оперативно решается в рамках каждого объединения $J \in \theta$ после того, как реализуются значения природных факторов и становится известным спрос на

---

[1] Предполагается, что осуществление трансфертов между заводами не приводит к дополнительным транзакционным издержкам.

продукцию объединения. Объемы же трансфертов между объединениями должны быть зафиксированы заранее, до момента реализации случайных факторов.

Задача поиска оптимальной организации, таким образом, сводится к выбору наилучшего *допустимого*[1] разбиения заводов на объединения.

Основная идея статьи состоит в том, что в первую очередь между собой должны объединяться технологически наиболее сильно связанные заводы, трансферты между которыми подвержены наиболее сильным колебаниям при изменении случайных факторов. Этой идее дается строгая математическая формулировка. Обозначим через $t_J := \sum_{i \in J} t_i$ оптимальный объем трансфертов между объединением J и остальной фирмой, а через $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания. Кремер показывает, что оптимальная организация должна минимизировать выражение

$$\sum_{J \in \theta} E[(t_J - E[t_J])^T B_J E[(t_J - E[t_J])], \text{ где } B_J := (\sum_{i \in J} B_i^{-1})^{-1}.$$

Эта формула описывает суммарную меру взаимосвязи между объединениями фирмы. Она легко вычисляется, если известны распределения случайных величин: спроса и затрат заводов.

Недостатком описанной модели является то, что она рассматривает лишь организации с единственным промежуточным уровнем управления – уровнем объединений. Введение новых промежуточных уровней в модели Кремера бессмысленно.

В этом смысле интересно сравнить ее с более ранним подходом, разработанным Б.Л. Овсиевичем и его сотрудниками [127]. Они рассматривали систему из n элементов, каждый из которых характеризуется конечным числом возможных состояний. Состояние s системы в целом определяется вектором состояний ее элементов. Функционирование системы задается вероятностной мерой $\mu(s)$ на множестве ее состояний. Основной числовой характеристикой системы является ее информационная энтропия $\Sigma_s \mu(s) \ln \mu(s)$. Элементы системы взаимосвязаны, поэтому разница суммарной энтропии отдельных элементов системы и энтропии

[1] Допустимые разбиения могут, например, ограничивать сверху количество заводов, входящих в одно объединение.

системы в целом больше нуля. Считается, что эта разница как раз и определяет объем работы по координации элементов системы, которую должна осуществить система управления. Объем работы, которую может осуществлять один управляющий элемент (менеджер), ограничен сверху. В связи с этим ставится задача разбиения множества элементов системы на подсистемы, каждая из которых управляется отдельным менеджером. Это разбиение должно минимизировать разницу между суммарной энтропией подсистем и системы в целом при выполнении ограничения на объем работы по координации каждой подсистемы.

Полученное разбиение определяет нижний уровень иерархии управления. Теперь можно строить следующий уровень иерархии, решая аналогичную задачу разбиения подсистем на группы, управляемые менеджерами второго уровня, и так далее, пока на самом верху иерархии не останется единственный менеджер.

М. Аоки [2] предлагает интересное развитие модели Кремера. Цель его исследования – сравнение эффективности механизмов вертикальной и горизонтальной координации. Вертикальная координация была описана в статье Кремера и, по мнению Аоки, больше характерна для американских фирм. Горизонтальная координация описывает японский способ организации производства и состоит в налаживании попарных связей между заводами, когда трансферты между двумя заводами оперативно подстраиваются под изменение обстановки. Оба механизма координации имеют свои плюсы и минусы, и в работе М. Аоки находятся условия, при которых предпочтителен тот или иной механизм.

Помимо ограниченности количества уровней иерархии модель Кремера обладает еще одним существенным недостатком. Из нее следует, что чем больше заводов входит в объединение, тем выше эффективность организационной структуры. При этом упускаются из виду временные и финансовые затраты, связанные с получением достоверной информации о параметрах заводов в большом объединении.

В подходе, предложенном Геанакоплосом и Милгромом [20], эти затраты фигурируют в явном виде, что позволяет сделать норму управляемости внутренним параметром модели.

Как и Кремер, они рассматривают задачу планирования производства фирмы, состоящей из n заводов. Затраты i-го завода в зависимости от k-мерного вектора объемов выпуска x_i также моделируются квадратичной формой, однако их вид несколько отличается от рассмотренного выше:

$$C_i(x_i, \gamma_i) = ½[(x_i - \gamma_i)^T B_i(x_i - \gamma_i) - \gamma_i^T B_i \gamma_i],\ i \in N = \{1, \dots, n\},$$

где γ_i – вектор случайных факторов, а B_i – известная матрица.

Древовидная иерархия менеджеров надстраивается над множеством заводов N. Для каждого менеджера m иерархии можно определить множество его непосредственных подчиненных $S(m)$ (заводов или других менеджеров), а также *подчиненную группу* заводов $s(m)$, которой он управляет непосредственно или через подчиненных ему менеджеров. Менеджер получает от своего непосредственного начальника совокупный план производства для подчиненной ему группы заводов и распределяет этот план между своими непосредственными подчиненными. Общий план производства всей фирмы, x_N, считается заданным.

Чтобы эффективно планировать производство, менеджеру необходимо знать значения случайных факторов γ_i подчиненных ему заводов. Однако он может наблюдать только зашумленные сигналы вида $I_i = \gamma_i + \varepsilon_i / \sqrt{\alpha_{mi}\tau_{mi}}$, где ε_i – вектор нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией D_i, τ_{mi} – время, которое менеджер m тратит на наблюдение за i-м заводом, а α_{mi} – число, описывающее априорные способности m-го менеджера в наблюдении за i-м заводом.

Менеджер m, управляющий группой заводов s, должен, во-первых, распределить имеющееся у него фиксированное время τ между подчиненными заводами и получить вектор сигналов $I_s = (I_i)_{i \in s}$ о случайных факторах, влияющих на их затраты. Во-вторых, на основе полученной информации он должен разбить полученный от своего начальника план производства x_m на подпланы $x_{m'}$ для своих непосредственных подчиненных $m' \in S(m)$ с тем, чтобы минимизировать математическое ожидание затрат $C_s(\cdot) := \sum_{i \in s} C_i(\cdot)$ подчиненных заводов.

Введем ряд обозначений. Пусть $B_s := (\sum_{i\in s} B_i^{-1})^{-1}$ – агрегированная матрица затрат группы заводов $s \subseteq N$, $\gamma_s := \sum_{i\in s}\gamma_i$ – суммарный вектор факторов, влияющих на затраты группы заводов s, $\gamma_s(I_s) := E[\gamma_s \mid I_s]$ – математическое ожидание вектора факторов γ_s при условии наблюдения вектора сигналов I_s, $\bar{\gamma}_s := E[\gamma_s]$ – априорное математическое ожидание вектора γ_s в условиях отсутствия информации, а $\mathrm{Var}[\gamma_s \mid I_s]$ – вектор дисперсий компонент случайного вектора γ_s при векторе сигналов I_s.

Пусть менеджер m управляет группой заводов s, а r его непосредственных подчиненных управляют группами заводов $s_1, \ldots, s_r$. Авторы показывают, что при фиксированном распределении времени менеджера и оптимальном выборе им детализированных планов средние затраты $C_s(x_m, I_s)$ подчиненной группы заводов s определяются выражением

(1) $$(x_m - \gamma_s(I_s))^T B_s (x_m - \gamma_s(I_s)) - \sum_{j=1}^{r} \gamma_{s_j}(I_s))^T B_{s_j} \gamma_{s_j}(I_s)) .$$

Чем дольше менеджер наблюдает за деятельностью заводов, тем меньшими будут эти средние затраты. При полном отсутствии наблюдения за заводами средние затраты равнялись бы

(2) $$(x_m - \bar{\gamma}_s)^T B_s (x_m - \bar{\gamma}_s) - \sum_{j=1}^{r} \bar{\gamma}_{s_j}{}^T B_{s_j} \bar{\gamma}_{s_j} .$$

Разница выражений (2) и (1) определяет выигрыш, который менеджер m приносит организации. Далее Геанакоплос и Милгром показывают, что этот выигрыш описывается формулой

$$-\operatorname{tr}(B_s \mathrm{Var}[\gamma_s \mid I_s]) + \sum_{j=1}^{r} \operatorname{tr}(B_{s_j} \mathrm{Var}[\gamma_{s_j} \mid I_s]),$$

а совокупные затраты $C(H)$ организации H можно представить в виде разницы ее затрат при полном отсутствии информации и суммы выигрышей, приносимых каждым менеджером[1]:

[1] В оригинале в эту формулу, по-видимому, вкралась опечатка, так что она была восстановлена по ее описанию в тексте (см. формулировку утверждения 5 в [20] на странице 217). Используемые здесь обозначения несколько отличаются от оригинала. Суммирование во второй строке проводится по всем менеджерам m иерархии, s означает группу заводов, управляемых менеджером m, а через $s_1, \ldots, s_r$ обозначены группы заводов, управляемые его непосредственными подчиненными.

$$C(H) = (x_N - \bar{\gamma}_N)^T B_N (x_N - \bar{\gamma}_N) - \sum_{i \in N} \bar{\gamma}_i^{\,T} B_i \bar{\gamma}_i -$$
$$- \sum_m \{-\mathrm{tr}(B_s \mathrm{Var}[\gamma_s \mid I_s]) + \sum_{j=1}^{r} \mathrm{tr}(B_{s_j} \mathrm{Var}[\gamma_{s_j} \mid I_s])\}.$$

Замечательным свойством принятого вида функций затрат заводов является то, что выигрыш, приносимый организации каждым менеджером, зависит только от полученной им информации, но не от информации, полученной другими менеджерами. Это позволяет искать оптимальное распределение времени каждого менеджера по отдельности, независимо[1].

После нахождения оптимального распределения времени выигрыш, приносимый менеджером m, будет зависеть лишь от управляемой им группы заводов s и от групп заводов $s_1, \ldots, s_r$, управляемых его непосредственными подчиненными. То есть выигрыш описывается секционной функцией (см. определение 6), и для анализа рассматриваемой модели потенциально применимы методы, развиваемые в [85, 115] и в настоящей книге.

Остаток статьи посвящен анализу оптимальной нормы управляемости «двухуровневой» иерархии, в которой менеджеры непосредственно управляют заводами, а координация между ними производится на основе априорной информации.

В заключение раздела отметим интересную работу А. Готье и Д. Паолини [19], которые также исследуют децентрализацию решений в условиях асимметричной информации. Они рассматривают организацию, состоящую из двух агентов и управляющего ими центра. Организация функционирует на протяжении двух периодов и в каждом периоде принимается два решения (первое решение касается первого агента, второе – второго). Решения может принимать центр (его цель заключается в максимизации суммарного выигрыша агентов), но их эффективность ограничена его неполной информированностью о параметрах функций выигрыша агентов. Центр может делегировать агентам право принятия всех или части решений, но при этом возникает проблема координации. Дело в том, что решения, принимаемые одним агентом, влияют на выигрыш другого (имеют место, так называемые,

[1] Авторы находят аналитическое решение этой задачи в частном однофакторном случае (когда $k = 1$).

экстерналии). Нескоординированные решения агентов приводят к уменьшению их суммарного выигрыша, которое может перевесить выгоды делегирования принятия решений более информированным агентам.

Исследуя всевозможные схемы делегирования, авторы приходят к выводу, что в зависимости от значений параметров модели оптимальна либо полная централизация принятия решений, либо частичное их делегирование – центр отдает право принятия решения одному или обоим агентам, но только в первом периоде. При этом он использует решения, принимаемые агентами в первом периоде, для выявления их частной информации, и, будучи уже полностью информированным, во втором периоде самостоятельно принимает эффективные решения. Существенным ограничением модели Готье-Паолини является то, что она рассматривает лишь организации, состоящие из двух агентов.

2.7. Иерархии принятия решений

Управление организацией – это, прежде всего, принятие разнообразных решений, и именно принятие решений по мнению многих авторов является основной задачей менеджеров в организациях. Качество принимаемых менеджерами решений в конечном счете определяет эффективность функционирования организации вообще и организационной структуры в частности. В то же время, модели организационных иерархий, описанные в предыдущих разделах, не акцентируют внимание на этом аспекте деятельности менеджеров и не описывают в явном виде процессы принятия управленческих решений.

Ниже описывается другой подход, развитый в ряде работ Р.К. Саха и нобелевского лауреата Дж. Стиглица [60, 61]. Его основу составляет детальное описание механизмов принятия решений менеджерами. «Отдельному человеку свойственно ошибаться» – этим авторы обосновывают целесообразность построения сложных структур коллективного принятия решений, таких, как организационные иерархии.

В модели Саха и Стиглица организация занимается анализом потока проектов. С вероятностью α каждый проект может быть «хорошим» и приносить прибыль z_G, а с вероятностью $1-\alpha$ –

«плохим» и приносить убыток z_B. Задача организации состоит в отборе хороших проектов для их дальнейшей реализации.

Оценку проектов осуществляют менеджеры. Отдельный менеджер может допускать ошибки, рекомендуя к реализации плохие проекты (это ошибки первого рода), или отклоняя хорошие (ошибки второго рода). Для повышения эффективности отбора предлагается принимать решение о реализации проекта на основе коллективного мнения менеджеров. Для организации процесса принятия решения может быть сформирована одна из трех организационных структур: комитет, иерархия или полиархия.

В *комитете* проект отдается на ознакомление одновременно n менеджерам. По результатам ознакомления проводится голосование и проект принимается, если за него проголосовало более k менеджеров. Комитет полностью описывается своим размером n и уровнем консенсуса k. Обозначим вероятность принятия менеджером хорошего проекта через p_G, а плохого – через p_B (считается, что $p_B < p_G < 1$). Тогда, как показывают авторы, вероятности h_G и h_B принятия комитетом хорошего и плохого проекта соответственно определяются выражениями:

$$h_G = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p_G^j (1-p_G)^{n-j}\ ,\ h_B = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p_B^j (1-p_B)^{n-j}\ .$$

В этих формулах суммируется вероятность того, что не менее k из n менеджеров, входящих в комитет, проголосуют за реализацию проекта.

Работа менеджеров комитета должна оплачиваться. Пусть w – это вознаграждение, полагающееся менеджеру за экспертизу одного проекта. Поскольку все менеджеры комитета тратят свое время на ознакомление с проектом, затраты E_C на содержание комитета равны $w \cdot n$. Вычисление оптимального размера комитета n и уровня консенсуса k сводится к максимизации ожидаемой прибыли организации $\alpha h_G z_G - (1-\alpha) h_G z_B - E_C$, представляющей собой разницу ожидаемого дохода $\alpha h_G z_G - (1-\alpha) h_G z_B$ от реализованных проектов и затрат E_C на содержание комитета.

В *иерархии* n менеджеров выстроены в цепочку и знакомятся с проектом последовательно. Проект окончательно отклоняется, если его отклоняет хотя бы один менеджер, и направляется на рассмотрение следующему менеджеру цепочки в случае его утверждения предыдущим.

Поскольку проект принимается только если его утвердили все n менеджеров, вероятности приема проектов иерархией будут такими же, как для комитета с уровнем консенсуса n. Однако затраты на содержание иерархии будут меньше затрат комитета того же размера. Действительно, проект может быть отклонен уже первым менеджером цепочки, и остальным не придется тратить на него время. Авторы показывают, что средние затраты иерархии равны $E_H = w[\alpha(1-p_G^n)(1-p_G)+(1-\alpha)(1-p_B^n)(1-p_B)]$.

В *полиархии* проект изначально направляется одному из n менеджеров с равной вероятностью. Проект принимается окончательно, если менеджер его принимает. Если же менеджер отклоняет проект, то он направляется на рассмотрение одному из оставшихся менеджеров. Для принятия проекта полиархией достаточно, чтобы он был принят хотя бы одним менеджером. Поэтому вероятности принятия проекта полиархией соответствуют тем же вероятностям для комитета с уровнем консенсуса 1.

Затраты на содержание полиархии также будут меньше затрат комитета того же размера, ведь если проект принимается некоторым менеджером, то остальным менеджерам нет необходимости его рассматривать. Можно показать, что затраты полиархии $E_P = w\{\alpha[1-(1-p_G)^n]/p_G + (1-\alpha)[1-(1-p_B)^n]/p_B\}$.

Зная вероятности и затраты, легко вычислить оптимальный размер комитета, иерархии и полиархии, и затем исследовать сравнительную выгодность использования этих организационных структур в зависимости от значений параметров модели. В частности, показывается, что полиархия принимает больше проектов (как хороших, так и плохих), поэтому она эффективна при хорошем среднем качестве проектов; затраты на содержание комитета максимальны, поэтому с ростом вознаграждения менеджеров сравнительная эффективность комитета падает. В [62] с использованием описанной выше модели исследуется влияние организационной структуры на качество составляющих ее менеджеров.

Три рассмотренные организационные формы можно комбинировать, строя из них более сложную организационную структуру: рассматривать, например, иерархии, каждый элемент которой представляет собой комитет; исследовать иерархии полиархий или полиархии иерархий. Подобные организационные структуры рассматриваются Я. Иоаннидесом в [30]. Он модифицирует модель, считая, что вознаграждение w менеджеров влияет на качество отбора проектов $p_g(w)$ и $p_B(w)$. В результате появляется возможность анализировать различия в вознаграждении менеджеров в зависимости от вида организационной структуры.

Совершенно другую модель иерархии, принимающей решения, предлагают О. Харт и Дж. Мур в [24, 25]. В их модели иерархия, состоящая из m идентичных менеджеров[1], надстраивается над фиксированным множеством *активов* $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Активом считается объект, использование которого по отдельности или в комбинации с другими активами может приносить прибыль. Таким образом, любой набор активов представляет собой потенциальный проект, который организация может реализовать.

Каждому менеджеру i из множества $M = \{1, \ldots, m\}$ дается в управление непустое подмножество активов $A_i \subseteq N$. С вероятностью $p(A_i)$ менеджер может иметь идею по поводу использования этого подмножества активов. В случае ее реализации идея приносит прибыль $v(A_i) > 0$.[2] Роль иерархии состоит в том, что в первую очередь реализуются идеи менеджеров верхнего уровня. Если у них нет идеи, решения принимают их непосредственные подчиненные. Если и те не имеют идей, право принятия решения переходит к их подчиненным, и так далее.

Интересен предлагаемый авторами способ описания иерархии – иерархия моделируется набором последовательностей $H = \{L_1, \ldots, L_n\}$. Для каждого актива $k \in N$ последовательность L_k перечисляет (без повторов) менеджеров, управляющих данным активом, в порядке убывания их приоритета в принятии решения по поводу этого актива. Некоторые последовательности могут быть пустыми. Понятно, что если A – это множество последова-

---

[1] Обозначения оригинала для удобства несколько изменены.

[2] В общем случае функция v может не быть *супераддитивной* (см. определение в [120]), и даже убывать при расширении множества A.

тельностей, в которых фигурирует некоторый менеджер, то этот менеджер управляет набором активов A.

Иерархия выбирается с целью максимизации ожидаемой прибыли, и основная проблема состоит в том, что иерархия должна быть построена ex-ante, до момента, когда у менеджеров начинают появляться идеи.

Для каждого менеджера $i \in M$ определим множество S_i его начальников – менеджеров, фигурирующих раньше i в последовательности S_k хотя бы по одному активу из A_i. Менеджер $i \in M$ получает выигрыш $v(A_i)$ тогда и только тогда, когда у него есть идея по поводу набора активов A_i и никто из его начальников не имеет идей по поводу хотя бы одного актива из A_i. Считается, что появление идей у различных менеджеров – это независимые случайные события. Тогда ожидаемая прибыль фиксированной иерархии H описывается формулой

(3) $$V(H) = \sum_{i \in M} p(A_i) \prod_{j \in S_i} (1 - p(A_j)) v(A_i).$$

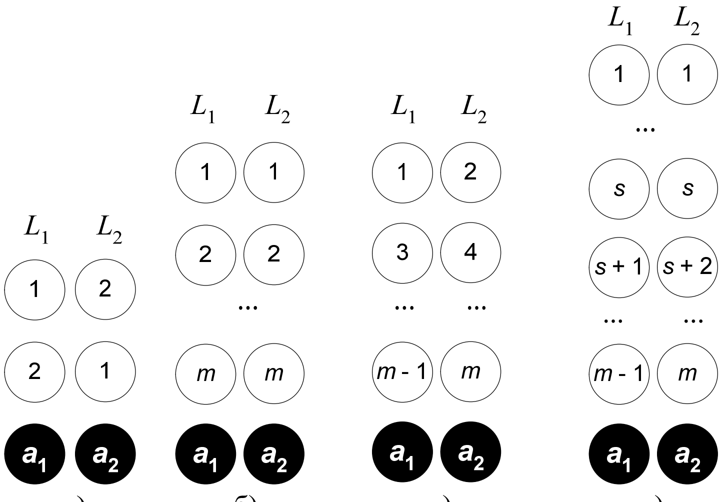


Рисунок 10. Примеры иерархий Харта-Мура: взаимоподчинение (а), полная централизация (б), полная децентрализация (в), частичная централизация (г)

Приведенное определение иерархии допускает довольно странные организационные формы. Так, на рис. 10а изображена «иерархия» двух менеджеров, надстроенная над множеством из двух активов. В этой иерархии присутствует *взаимоподчинение*, то есть менеджер 1 имеет приоритет перед менеджером 2 при принятии решений по поводу первого актива, а менеджер 2 – по поводу второго актива. Расчет ожидаемой прибыли по формуле (3) показывает, что в такой иерархии идея по поводу множества активов $N = \{a_1, a_2\}$ реализуется, только если идею имеет ровно один менеджер, и не реализуется, если идею имеют оба менеджера. Один из результатов, доказанных авторами, говорит о том, что в оптимальной иерархии взаимоподчинение невозможно, то есть для любых менеджеров $i, j \in M$ если $i \in S_j$, то $j \notin S_i$.

Основная теорема работы Харта и Мура позволяет существенно сузить множество иерархий, «подозрительных на оптимальность». Она гласит, что если в оптимальной иерархии вероятность $p(A_i)$ появления идеи у менеджера i строго больше вероятности $p(A_j)$ менеджера j, то менеджер j будет фигурировать раньше i в последовательности L_k любого актива k, управляемого обоими менеджерами. Иначе говоря, чем выше уровень менеджера в оптимальной иерархии, тем меньше должна быть вероятность появления идеи у этого менеджера.

Вводя дополнительное условие монотонности[1], согласно которому при расширении множества активов A вероятность $p(A)$ появления идеи строго убывает (это довольно логичное допущение с содержательной точки зрения), можно усилить этот результат, показав, что если в оптимальной иерархии A_i является строгим подмножеством A_j, то менеджер j должен быть начальником менеджера i для всех активов из множества A_i.

Последнее, самое сильное предположение – *распределенность прибыли* (nestednedness) – состоит в том, что если для пары наборов активов A и B $v(A) > 0$ и $v(B) > 0$, то либо $A \subseteq B$, либо $A \subseteq B$, либо $A \cap B = \varnothing$. Если в условиях распределенности и мо-

[1] Это условие не следует путать с введенным в разделе 1.4 свойством монотонности по группам (см. определение 8).

нотонности j является начальником над i по одному из активов, то он будет его начальником и по другим активам из A_i.

Авторы подробно исследуют частный случай двух идентичных активов при произвольном количестве менеджеров. Они показывают, что оптимальной при этом может быть одна из трех организационных форм: полностью централизованная фирма (цепочка менеджеров, каждый из которых управляет обоими активами); две независимые фирмы (одинаковые цепочки менеджеров, надстроенные над каждым из двух активов); частично децентрализованная фирма, представляющая собой централизованную фирму, надстроенную над двумя «специализированными» цепочками (см. рис. 10, иерархии б-г). Также находятся простые условия, при которых оптимальна каждая из этих трех форм.

Заметим, что при выполнении условий монотонности и распределенности все потенциально оптимальные иерархии Харта-Мура можно интерпретировать в терминах модели, описанной в главе 1. Если считать активы исполнителями, то множество A_i будет группой исполнителей, подчиненной менеджеру $i \in M$. Согласно формуле (3) прибыль $v(H)$ иерархии H складывается из прибылей $v_i(H) = v_i(A_i, S_i)$ всех менеджеров $i \in M$. Прибыль менеджера зависит от управляемой им группы исполнителей A_i и от множества его начальников S_i (а точнее, от того, какими группами исполнителей эти начальники управляют). Подобные функции прибыли менеджера не являются секционными (см. определение 6) и не рассматриваются в данной книге, однако исследование общих методов поиска оптимальных иерархий при таких функциях прибыли/затрат представляется весьма перспективным. В то же время, более подробное сравнение модели Харта-Мура с моделью главы 1 выходит за рамки настоящего обзора.

2.8. Иерархии и теория контрактов

Теория контрактов – это раздел математической экономики, изучающий задачи мотивации, стимулирования экономических агентов в условиях неопределенности [7, 96]. В отечественной традиции эти задачи также изучаются в рамках теории активных систем [76, 88, 126] и теории иерархических игр [87, 103, 104].

Уже базовая модель теории контрактов включает в себя центр, выполняющий управленческие функции, и подчиненного ему агента. То есть модель теории контрактов по определению включает в себя организационную иерархию. В то же время, подавляющее большинство работ по теории контрактов исследует стимулирование сотрудников в рамках фиксированных состава и структуры организационной системы.

Более того, бо́льшая часть моделей теории контрактов касается только веерной, двухуровневой организационной структуры, в которой отсутствуют менеджеры промежуточного звена и центр (топ-менеджер) непосредственно управляет подчиненными ему агентами-исполнителями (среди исключений стоит отметить [89, 99, 122, 123]). Это в первую очередь связано с тем, что модели теории контрактов математически довольно сложны, и подробное исследование иерархий общего вида весьма трудоемко.

Согласно описанной во введении классификации задач организационного дизайна, задачи мотивации и стимулирования сотрудников в рамках фиксированной организационной структуры относятся к третьему этапу – разработке механизмов управления, а не ко второму – дизайну собственно структуры организации. Поэтому для данного обзора были отобраны лишь те относящиеся к теории контрактов работы, в которых так или иначе упоминается возможность перестроения структуры организационной системы, сравниваются различные структуры и т.д.

Данный раздел далеко не претендует на полноту и ставит целью лишь проиллюстрировать как особенности подхода, так и трудности, связанные тем подробным описанием механизмов управления сложными иерархиями, которое предполагает теория контрактов. С основами теории контрактов и ее базовыми моделями читатель может ознакомиться в [96, 132, 138].

В [43] на основе классической модели *неблагоприятного отбора* (adverse selection) [7] исследуется влияние децентрализации контрактов на эффективность функционирования организации. Рассматривается система, состоящая из двух агентов, выбирающих действия a_i, $i = 1, 2$, и центра, получающего доход $B(a_1, a_2)$ от выбранных ими действий. Выбор i-м агентом действия a_i требует от него затрат $c_i(a_i, \theta_i)$, где θ_i – тип агента, являющийся его частной информацией (остальные сотрудники знают лишь вероятностное распределение $F_i(\theta_i)$). За свою работу *i-й* агент получает вознаграждение $x_i(a_i, s_i)$, зависящее от выбранного им действия a_i и от сообщенного им центру значения s_i своего типа (в общем случае, отличного от истинного значения типа θ_i).

В классической модели центр непосредственно взаимодействует с обоими агентами. Его задача состоит в том, чтобы предложить агентам *оптимальные* функции стимулирования $x_i(a_i, s_i)$, $i = 1, 2$, то есть функции, максимизирующие его прибыль $B(a_1, a_2) - x_1(a_1, s_1) - x_2(a_2, s_2)$ при условии, что агенты выбирают действия a_i и сообщения s_i, максимизируя каждый свою целевую функцию $x_i(a_i, s_i) - c_i(a_i, \theta_i)$, $i = 1, 2$. Решение этой задачи хорошо известно [7], как и формула для матожидания прибыли, получаемой центром при оптимальных функциях стимулирования.

Такая схема взаимодействия центра с агентами соответствует веерной иерархии. Авторы предлагают сравнить ее эффективность с эффективностью децентрализованной схемы, в которой центр заключает контракт с только первым агентом и делегирует ему право заключать субконтракт со вторым агентом. Выигрыш, получаемый центром от децентрализации, не рассматривается в явном виде, и цель статьи состоит в нахождении условий, при которых децентрализация не приводит к уменьшению эффективности механизмов стимулирования (можно показать, что децентрализация не увеличивает эффективности, а может ее только уменьшить [46]).

Рассматриваются несколько сценариев взаимодействия сотрудников организации в рамках децентрализованной схемы. В первом сценарии центр может непосредственно наблюдать действия обоих агентов и назначать первому агенту стимулирование, зависящее от пары действий. Предполагается следующая последовательность ходов. Центр предлагает первому агенту контракт $x_1(a_1, a_2, s_1)$. Агент в ответ сообщает ему оценку s_1 своего типа. Первый агент предлагает второму контракт $x_2(a_2, s_2)$. Второй агент сообщает первому оценку s_2 своего типа. Затем второй агент выбирает действие a_2, и первый агент, зная a_2, выбирает свое действие a_1. В конце концов центр получает доход $B(a_1, a_2)$ и выплачивает первому агенту вознаграждение $x_1(a_1, a_2, s_1)$, а первый агент выплачивает второму вознаграждение $x_2(a_2, s_2)$. Авторы показывают, что при таком сценарии центру можно предложить механизм стимулирования $x_1(a_1, a_2, s_1)$, приводящий к тому же значению его прибыли и к тем же действиям агентов, что и в централизованной схеме.

Дела обстоят хуже в сценарии, где центр наблюдает лишь значение дохода B и не может выделить индивидуальные вклады агентов в этот результат. В этом случае он вынужден заключать с первым агентом контракт в форме $x_1(B, s_1)$ и у этого агента появляется возможность перераспределять действие второго агента «в свою пользу». Доказывается, что это приводит к строгому уменьшению эффективности функционирования организации.

Третий сценарий отличается от первого тем, что первый агент сообщает центру значение своего типа уже после того, как заключает контракт со вторым агентом. При достаточно слабых предположениях относительно функции дохода $B(\cdot)$ эффективность функционирования здесь также хуже, чем в условиях полной централизации. Причина состоит в том, что первый агент в этом сценарии имеет возможность, узнав тип второго агента, отклонить предлагаемый центром контракт, выбрав нулевое действие и получив нулевое вознаграждение.

Таким образом, авторы приходят к выводу, что децентрализованные контракты могут приводить к той же эффективности, что и централизованные, но только в том случае, если центр контролирует индивидуальные вклады агентов и заключает контракт с «промежуточным» агентом раньше, чем тот заключает контракт со своим подчиненным.

По классификации теории контрактов рассмотренная модель является *задачей с асимметричной информированностью* [7], поскольку агенты обладают частной информацией, недоступной центру. Однако в описанной статье типы агентов считаются независимо распределенными случайными величинами, так что каждый агент имеет ровно ту же информацию о типе другого агента, что и центр. При делегировании агенту права заключения субконтракта тот не может выполнять эту работу лучше центра, поэтому децентрализация и не повышает эффективности функционирования организации. Вопрос же о выгодах децентрализации в том случае, когда агенты лучше центра осведомлены о типах друг друга, остается открытым. Попытка решения этого вопроса с использованием концепции *информационного равновесия* [124] была предпринята в [98], но исследуемая там модель рассматривает *интервальную* [126], а не вероятностную неопределенность относительно типов агентов.

Похожий подход к анализу децентрализованных контрактов предлагается в [37]. Здесь авторы основываются на другой классической модели теории контрактов – задаче *морального риска* (*moral hazard*) [7]. В отличие от модели неблагоприятного отбора агенты в ней не имеют частной информации, но результат действий агентов помимо их усилий зависит от случайных факторов.

Как и в [43], рассматривается организация, состоящая из центра и двух агентов. Агенты выбирают ненаблюдаемые центром действия $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. Наблюдаемый центром результат деятельности агентов x является случайной величиной, зависящей от действий агентов. Для простоты считается, что x может принимать конечное число значений $(x_1, \ldots, x_T)$. Вводится функция $P_k(a_1, a_2)$ вероятности реализации результата x_k, $k = 1, \ldots, T$, при условии выбора агентами действий a_1 и a_2.

В централизованной структуре центр предлагает агентам функции стимулирования $t_1(x)$ и $t_2(x)$, зависящие от наблюдаемого им результата x. Целевая функция агента $U_i(t_i, e_i)$ возрастает по сумме вознаграждения t_i и убывает по его действию e_i (простейшим вариантом такой функции является разница вознаграждения t_i и затрат $c_i(a_i)$). Прибыль центра $V(x_k, t_1, t_2)$ убывает по суммам вознаграждений t_1 и t_2. Задача центра состоит в том, чтобы предложить агентам функции стимулирования t_1, t_2, максимизирующие его ожидаемую прибыль

$$\sum_{k=1}^{T} P_k(a_1, a_2) V(x_k, t_1(x_k), t_2(x_k))$$

при условии, что каждый агент выбирает действие, максимизируя матожидание своей целевой функции. В действительности, при фиксированных функциях стимулирования агенты разыгрывают некооперативную игру и выбирают равновесные по Нэшу [47, 91] действия. Кроме того, требуется, чтобы в равновесии ожидаемое значение целевой функции агентов было не меньше заданного уровня $\underline{U}_i$. Как и в предыдущей статье, решение этой задачи хорошо известно из литературы.

Эффективность централизованной структуры сравнивается с эффективностью децентрализованной, в которой центр заключает контракт с одним из агентов, делегируя ему право заключать контракт с другим агентом и выплачивать ему вознаграждение.

Показывается, что такая структура эквивалентна централизованной структуре, в которой агенты могут образовывать коалицию и обмениваться денежными трансфертами. Из литературы [27] известно, что возможность коалиции между агентами не увеличивает эффективности функционирования организации, то есть децентрализованная схема приносит центру не больший ожидаемый выигрыш, чем централизованная структура без возможности образования коалиций между агентами. Одинаковую эффективность можно гарантировать лишь тогда, когда агенты *безразличны к риску* [7] или когда они идентичны. Интересно, что центру безразлично, кому из агентов делегировать право заключения контракта с другим агентом – эффективность в обоих случаях одинакова.

В следующей работе на относительно простой модели рассматриваются сравнительные преимущества двух наиболее широко распространенных организационных структур: функциональной, или унитарной (U-организации) и мультидивизиональной (M-организации). В функциональной структуре подразделения сводятся в более крупные объединения на основе сходства выполняемых ими функций (производство одного продукта с производством другого, продажи – с маркетингом, закупки сырья – с прочими закупками и т.д.). В дивизиональной структуре подразделения объединяются по географическому признаку, формируя относительно самодостаточные дивизионы, или по продуктовому признаку, формируя независимые «продуктовые линии».

Предлагаемая в [41] модель описывает экономику, состоящую из двух отраслей (1 и 2) и двух регионов (A и B). Всего имеется четыре производственных подразделения (завода) – по одному на каждую комбинацию региона и отрасли. На объем производства каждого завода влияют случайные факторы трех типов:

общеэкономические факторы η, специфичные для i-й отрасли θ_i, $i = 1, 2$, и факторы δ_r, специфичные для региона $r = A, B$.

Над множеством заводов надстраивается иерархия менеджеров, задача которых состоит в борьбе с отрицательным эффектом случайных факторов, назначенных им в управление. Для этого каждый менеджер прикладывает усилие, повышающее объемы производства контролируемых этим менеджером заводов. Так, например, случайный фактор θ_i вкупе с усилием e_i менеджера, которому поручено управление этим фактором, дает вклад $\theta_i + e_i$ в объем производства каждого завода i-й отрасли.

Рассматриваются две возможных организационных иерархии – U- и M-типа. Обе иерархии состоят из семи менеджеров. В U-организации топ-менеджер занимается общеэкономическими факторами. Ему подчинены два менеджера, отвечающих за отдельную отрасль и за борьбу с влияющими на нее случайными факторами. Каждому из этих менеджеров подчинены два директора заводов, относящихся к этой отрасли. Усилия директоров направлены на борьбу с региональными факторами, влияющими на подчиненные им заводы. В M-организации менеджеры среднего звена отвечают не за отрасль, а за отдельный регион, и, соответственно, директора заводов борются уже не с региональными, а с отраслевыми факторами.

Усилие e требует от менеджера затрат, описываемых выпуклой возрастающей функцией $c(e)$. За свою работу менеджер получает вознаграждение $t(\cdot)$. Поскольку наблюдаемы объемы выпусков заводов, но не усилия менеджеров, вознаграждение каждого менеджера зависит от вектора $x = (x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}, x_{2B})$ объемов выпусков всех заводов. Менеджер выбирает уровень усилий, максимизирующий математическое ожидание его целевой функции $U(t(x)) - c(e)$, где $U(\cdot)$ – фон-неймановская функция полезности денег [40]. Задача организационного дизайна состоит в том, чтобы выбрать из этих двух организационных форм ту, которая максимизирует разницу суммарного объема производства всех заводов и суммарного вознаграждения всех менеджеров.

Авторы показывают, что если суммарные объемы выпуска по регионам взаимосвязаны сильнее, чем суммарные выпуски по отраслям, то менеджерам M-организации можно предложить более эффективные вознаграждения, и М-организация будет выгоднее U-организации. Формальный вид неравенств, выполнение которых необходимо для оптимальности М-организации, приведен в [41], наряду со статистическим обоснованием их справедливости для современной экономики Китая.

Рассмотренные в настоящем разделе модели сравнивают между собой очень небольшое число довольно простых иерархий[1]. Это связано с громоздкостью и трудоемкостью теоретико-игрового анализа задач мотивации и стимулирования в условиях неопределенности. Ниже описывается предложенная Д.А. Новиковым в [123] модель формирования иерархии, позволяющая исследовать организации, состоящие из произвольного количества сотрудников и изучать сложные организационные иерархии. Платой за возможность такого обобщения является отказ от рассмотрения вероятностной неопределенности – эта модель оперирует в условиях *полной информированности*[2] и основана на использовании концепции иерархических игр Ю.Б. Гермейера [87], а также результатов теории активных систем [122, 125, 126].

Рассматривается организация, состоящая из n сотрудников (агентов). Каждый агент $i \in N := \{1, \ldots, n\}$ имеет возможность выбирать действие x_i из некоторого множества допустимых действий X_i. Выбором действия агент стремится максимизировать свою целевую функцию $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, зависящую как от его действия, так и от действий других агентов. Считается, что агенты точно знают целевые функции и допустимые множества, как свои, так и других агентов[3].

---

[1] В [51] и [115] исследуются модели, позволяющие сравнивать эффективность функциональных и дивизиональных организационных структур в организациях произвольного размера, однако эти модели являются чисто оптимизационными и не рассматривают теоретико-игровых аспектов функционирования организации. Также в [22] предлагается модель, схожая с рассмотренной в [51]. Там сравниваются между собой эффективности пяти организационных структур, надстраиваемых над множеством из четырех исполнителей.

[2] В том смысле, который вкладывает в это понятие теория игр [91].

[3] Модель не накладывает ограничений на вид целевых функций и потому позволяет описывать широкий класс прикладных задач.

Если предположить, что агенты выбирают свои действия одновременно и независимо, то предсказание их рациональных выборов сводится к анализу классической *игры в нормальной форме* [91]. Самой распространенной концепцией решения подобных игр в настоящее время является *равновесие Нэша* [46, 91]. Оно постулирует рациональность только тех игровых ситуаций[1], в которых любой агент, в одиночку изменяя свое действие, может лишь уменьшить значение своей целевой функции. Таким образом, предположив, что агенты ведут себя рационально, можно вычислить множество возможных исходов их игры – множество E_0 равновесных по Нэшу игровых ситуаций.

Помимо управляемых субъектов – агентов – в организации присутствует управляющий субъект – центр. Он также имеет некоторую целевую функцию $f_0(x)$, зависящую от сложившейся игровой ситуации – от вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ действий всех n агентов. Зная множество равновесий Нэша E_0, можно вычислить гарантированный выигрыш центра при рациональном поведении агентов: $K_0 = \min_{x \in E_0} f_0(x)$.

Если центр по какой-то причине не устраивает значение его гарантированного выигрыша, он может попытаться воздействовать на поведение агентов (т.е. на выбираемые ими действия) с тем, чтобы новая игровая ситуация x' приводила к большему значению его целевой функции $f_0(x')$. Такое воздействие называется *управлением*. Из всех возможных типов управления, рассматриваемых в теории активных систем (мотивационного, институционального, информационного и др., см. [126]) нас будет интересовать *управление структурой* организации. А именно, предположим, что центр имеет возможность задавать порядок, в котором агенты выбирают свои действия.

Пусть все множество агентов N разбито на группы $S_1, \ldots, S_m$ так, что сначала одновременно и независимо свое действие выбирают агенты множества S_1, затем – агенты множества S_2 и т.д. Тогда агенты множества S_k, $k = 2, \ldots, m$, при выборе своего действия уже будут знать, какие действия выбрали агенты из множеств $S_1, \ldots, S_{k-1}$, и эта информация будет существенно влиять на их

[1] *Ситуацией* называется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ действий агентов.

рациональные действия. Такая модель описывается *иерархической игрой* Γ_1, для которой в [87] предлагается концепция решения, основанная на понятии *максимального гарантированного результата* (в качестве альтернативной концепции решения можно предложить *совершенное равновесие по подыграм* [46]).

Обозначим через $E_1(S_1, \ldots, S_m)$ множество рациональных исходов этой игры. Более сложное поведение агентов в рамках того же порядка принятия решений описывается игрой Γ_2 [87], в которой агенты, принимающие решение раньше, могут фиксировать свое действие, как функцию от действий агентов, делающих свой ход после них. Обозначим через $E_2(S_1, \ldots, S_m)$ – множество рациональных исходов игры Γ_2.

Автор предлагает еще один способ взаимодействия агентов в рамках фиксированной структуры $S_1, \ldots, S_m$. В нем агенты выбирают действия как в игре Γ_1, но могут назначать из своего выигрыша побочные платежи агентам, делающим ход после них. Как в игре Γ_2, эти побочные платежи являются функциями действий тех агентов, которым эти платежи предназначены. Множество рациональных исходов этой игры обозначим через $E_{1\text{-}2}(S_1, \ldots, S_m)$.

Место агента в разбиении S можно интерпретировать как его иерархический уровень в организационной структуре. Множество S_1 соответствует топ-менеджерам, S_2 – их непосредственным подчиненным, а множество S_m – конечным исполнителям.

Таким образом, с точки зрения центра задача управления структурой состоит в том, чтобы выбрать количество иерархических уровней m, разбиение агентов $S = (S_1, \ldots, S_m)$ и способ их взаимодействия (Γ_1, Γ_2, $\Gamma_{1\text{-}2}$), максимизирующие его гарантированный выигрыш ($K_1 = \min_{x \in E_1(S)} f_0(x)$, $K_2 = \min_{x \in E_2} f_0(x)$ или $K_{1-2} = \min_{x \in E_{1-2}} f_0(x)$ в зависимости от выбранного способа взаимодействия агентов).

Управление структурой дает центру мощный способ воздействия на поведение агентов. Показывается, что даже если в одноуровневой структуре у каждого агента имеется *доминантная стратегия* [91], то, усложняя структуру, центр может изменить исход игры. В [123] подробно исследуется синтез оптимальных двухуровневых организационных структур, находятся методы вычисления исходов игры для различных способов взаимодействия агентов. В частности, доказывается, что, если целевые функции всех агентов одинаковы, то существует оптимальная веерная структура с единственным начальником. Исследуется влияние ограниченной рациональности агентов на решение задачи структурного синтеза. Рассматривается ряд содержательных задач, включающих механизмы внутренних цен и задачи управления проектами.

В заключение главы кратко подведем ее итоги. Проведенный обзор литературы показал, что на текущий момент отсутствует единая математическая модель формирования организационных иерархий, и имеющиеся подходы существенно отличаются друг от друга определениями самого понятия иерархии, обоснованием ее роли в функционировании организации, а также используемым математическим аппаратом. Существенно различаются и выводы относительно вида рациональных организационных структур и закономерностей их формирования.

В этом смысле интересно сравнить описанные в обзоре модели с подходом, принятым в данной работе. Основные отличительные черты этого подхода:

1. Отделение задачи формирования организационной иерархии от задач выбора рациональной технологии функционирования организации и поиска оптимальных механизмов управления.
2. Моделирование сложных организационных иерархий направленными ациклическими графами, надстроенными над фиксированным множеством исполнителей.
3. Сведение задачи формирования организационной структуры к задаче минимизации суммарных затрат на содержание менеджеров. При этом затраты менеджера описываются секционной функцией (см. определение 6).

Первая особенность позволяет абстрагироваться от специфики частных задачи и сконцентрироваться на собственно поиске оптимальных иерархий. Это расширяет область применения подхода. На протяжении книги показывается, что в рамках принятой модели можно описывать очень разные задачи, включающие, например, планирование сборочного производства, построение оптимальных двоичных кодов и т.п. В той или иной мере подобное разделение задач характерно для всех рассмотренных выше работ, так как в большинстве из них технология функционирования считается заданной и фиксирует множество элементов нижнего уровня (исполнителей). В ряде публикаций, описанных в последнем разделе главы, ставится задача совместного синтеза организационной структуры и оптимальных механизмов управления. Однако модель при этом настолько усложняется, что в рамках таких подходов возможен анализ лишь очень простых организационных иерархий.

Используемое в принятом подходе определение иерархии является достаточно широким и обобщает подавляющее большинство известных из литературы определений[1]. Некоторые сомнения может вызвать лишь четкое разделение производственной и управленческой деятельности между исполнителями и менеджерами[2], однако на самом деле это ограничение не является столь сильным. Понятие «исполнителя» достаточно абстрактно, и если необходимо, исполнителя можно трактовать как элементарную работу, выполняемую в рамках технологического процесса организации. Тогда менеджер, непосредственно управляющий таким «исполнителем» – это просто сотрудник, которому поручено выполнение данной работы (ниже в разделе 5.3 описывается модель, именно так и интерпретирующая исполнителей).

К самым сильным ограничениям приводит последнее, третье положение используемого подхода. В ряде работ вместо минимизации затрат ставится задача максимизации прибыли организации, причем зачастую вклады отдельных менеджеров входят в формулу прибыли неаддитивно (см., например, [50, 69]). В тех

---

[1] Исключением является лишь общее определение Харта и Мура [24, 25], допускающее взаимоподчинение менеджеров. Однако далее в своей работе они доказывают неоптимальность взаимоподчинения.

[2] Скажем, в модели Л. Гарикано [17] все сотрудники потенциально могут быть вовлечены в производственную деятельность, хотя там же показывается, что оптимальной является специализация либо на управлении, либо на производстве.

моделях, где минимизируется время принятия решений[1], вклады отдельных менеджеров в затраты иерархии также существенно неаддитивны. В то же время, большое количество известных постановок задач формирования иерархий сводятся именно к минимизации суммы затрат на содержание менеджеров, причем затраты отдельного менеджера удается описать секционной функцией[2].

Более того, в некоторых моделях функция затрат менеджеров однородна (см. определение 12), что еще больше сближает их с предметом настоящей работы, посвященной, в основном, поиску оптимальных иерархий при однородных функциях затрат менеджеров[3]. В следующей главе последовательно излагаются основные формальные результаты этой теории.

---

[1] Это, например, описанные в разделе 2.5 модели Раднера и Ван-Зандта, а также упомянутая в разделе 2.3 модель Керена и Левхари [34].

[2] Примеры таких моделей – [4, 6, 9, 20, 50, 63, 80], а также ряд моделей, описанных в [127].

[3] Это, разумеется, не отменяет необходимости дальнейшего совершенствования и обобщения подхода, основанного на концепции секционных функций затрат менеджера. Наиболее перспективными направлениями развития при этом представляются исследование зависимости дохода компаний от структурных характеристик их организационных иерархий, а также рассмотрение затрат менеджера, зависящих от всей цепочки подчинения (т.н. *chain of command*), в которую он вовлечен. Такое обобщение позволит, в числе прочего, включить как частный случай функции затрат, введенные Хартом и Муром в [25].

<u>ГЛАВА 3</u>. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДЕРЕВЬЯ ПРИ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИИ ЗАТРАТ

Настоящая глава посвящена решению задачи поиска оптимальной древовидной иерархии при однородной функции затрат. В первом ее разделе приводится постановка задачи в терминах определений, введенных выше в главе 1.

3.1. Описание модели

Задано множество исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ и на нем определена мера, то есть каждому исполнителю w из множества N поставлено в соответствие положительное число $\mu(w)$. Множество деревьев (древовидных иерархий) над множеством исполнителей N определяется как множество ориентированных деревьев [74], дуги в которых направлены к корню дерева и *листьями* которых являются все исполнители из множества N и только они.

Вершины этого дерева, отличные от листьев, называются менеджерами. Каждому менеджеру m дерева H ставятся в соответствие его затраты $c(m, H)$, которые описываются секционной функцией затрат, зависящей от мер (см. главу 1). Таким образом, функция затрат менеджера имеет вид $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$, где μ – это мера группы исполнителей, управляемой менеджером m, а $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – меры групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные. Поскольку, как отмечено в главе 1, в дереве все непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами, мера μ управляемой менеджером группы всегда равна сумме $\mu_1 + \ldots + \mu_r$ мер групп, управляемых его непосредственными подчиненными. Поэтому ниже в записи функции затрат мера μ иногда опускается (в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям), и считается, что затраты менеджера зависят только от мер групп, управляемых его непосредственными подчиненными. Тогда затраты записываются как $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$.

Функция затрат считается однородной степени $\gamma \geq 0$, то есть ее можно представить в виде $c(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \mu^\gamma c(x_1, \ldots, x_r)$, где $x_1, \ldots, x_r$ ($x_i := \mu_i / \mu$, $i = 1, \ldots, r$) – это пропорция, в которой мера μ

делится между мерами групп, управляемых непосредственными подчиненными менеджера. Дадим определение.

Определение 13. *r-мерным симплексом D_r* называется такое множество r-мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_r)$ с неотрицательными компонентами, что $x_1 + \ldots + x_r = 1$. Элементы такого симплекса будем называть *r-пропорциями* или просто *пропорциями*.

Легко видеть, что если менеджер имеет r непосредственных подчиненных, то вектор $x := (\mu_1/\mu, \ldots, \mu_r/\mu)$ действительно является r-пропорцией. Будем в этом случае говорить, что менеджер *делит подчиненную ему группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными в пропорции x*.

Заметим, что при фиксированном количестве r непосредственных подчиненных однородная функция затрат менеджера полностью задается своей степенью однородности γ и поведением функции затрат $c(x_1,...,x_r)$ на симплексе D_r.

Затраты $C(H)$ иерархии H равны сумме затрат входящих в нее менеджеров. Задача, которую мы будем исследовать, состоит в том, чтобы найти древовидную иерархию с минимальными затратами. Также будет решаться задача поиска оптимального r-дерева, то есть дерева, в котором каждый менеджер имеет не более r непосредственных подчиненных (понятно, что множество r-деревьев является подмножеством множества всех деревьев).

Необходимо сказать несколько слов об основных ограничениях такой постановки задачи: предположении однородности функции затрат и рассмотрении только древовидных иерархий.

Как уже отмечалось в разделе 1.5, предположение об однородности функции затрат менеджера является чрезвычайно важным допущением, которое и позволяет получить бóльшую часть описываемых ниже аналитических результатов. Особый же интерес, который представляет задача поиска оптимального дерева, основывается на следующих предпосылках.

Во-первых, моделирование организационных структур с помощью древовидных иерархий имеет долгую традицию. Если организационная иерархия не является деревом, значит в ней присутствует множественное подчинение – ряд сотрудников может иметь нескольких начальников. Хотя такая ситуация иногда встречается на практике (например, в матричных структурах управления [1, 89]), древовидные организационные структуры все же распространены существенно шире. В большинстве известных работ [34, 50, 69 и т.д.] древовидность иерархии постулируется – организационная иерархия является деревом по определению. Поэтому поиск оптимального дерева представляется важным хотя бы для сравнения получаемых в настоящей книге результатов с выводами других исследований.

Во-вторых, древовидные иерархии обладают рядом важных свойств, существенно облегающих поиск оптимальной иерархии. Поэтому исследование задачи целесообразно начинать именно с рассмотрения этого случая.

В-третьих, из содержательной постановки многих задач с очевидностью следует, что искомая иерархия должна быть деревом, как, скажем, в задаче оптимального кодирования (пример 3) или в рассматриваемом ниже примере 11. В подобных задачах речь в принципе не может идти о недревовидных иерархиях, и потому рассматривается задача поиска оптимального дерева.

В-четвертых, из утверждения 1 следует, что при монотонной по группам функции затрат менеджера (см. определение 8) оптимальной иерархией будет дерево. Таким образом, описываемые ниже результаты имеют самое непосредственное отношение к задаче поиска оптимальной иерархии при монотонной по группам функции затрат. Условия определения 8 довольно легко проверяются: в частности, если нормальная (см. определение 9) функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$ не убывает по всем своим аргументам, то она монотонна по группам.

Ниже в настоящей главе, если не оговорено особо, не предполагается монотонности по группам функции затрат менеджера, однако считается, что функция затрат нормальна.

Следующий пример задачи поиска оптимального дерева относится к области технического дизайна, хотя и близок к описанным в разделе 2.5 моделям, основанным на представлении об организационной иерархии как о вычислительной сети.

Пример 11. Пусть необходимо найти произведение n чисел, имеющих $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ двоичных разрядов, комбинируя между собой входы и выходы умножителей, которые могут за один такт работы перемножать несколько чисел. Стоимость умножителя в зависимости от количества его входов r и числа разрядов каждого входа μ_i $(i = 1, \ldots, r)$ в некотором приближении описывается однородной функцией $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. Предполагается, что новые исходные числа «прибывают» на вход системы с каждым тактом, поэтому организовать схему с обратной связью[1] невозможно, и искомую схему соединения умножителей можно представить в виде дерева, листья которого соответствуют исходным числам, а остальные вершины – умножителям.

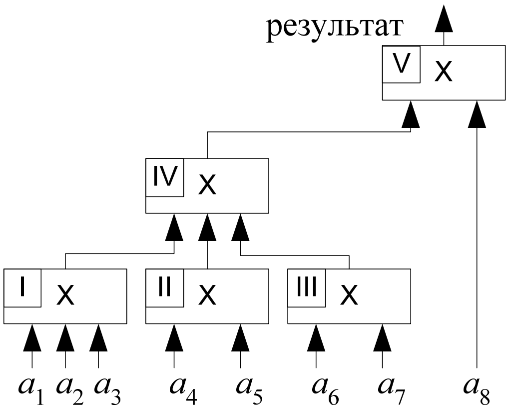


Рисунок 11. Пример схемы умножителей

В этом дереве дуга от умножителя m к умножителю m' проводится в том случае, если на вход умножителя m' подается выход умножителя m. Результирующее же произведение снимается с выхода умножителя, находящегося в корне дерева (см. рис. 11). Как известно, число двоичных разрядов произведения в общем случае не превышает суммарного числа двоичных разрядов сомножителей. Поэтому, если в терминах введенных выше определений считать входные числа исполнителями, умножители – менеджерами, а число разрядов входного числа – его мерой, то затраты каждого менеджера (стоимость умножителя) определяется

[1] В схеме с обратной связью выход умножителя подается с отставанием в такт на один из его входов. Эта схема позволяет уменьшить количество используемых умножителей, но ее можно использовать только если исходные числа поступают не чаще, чем раз в два такта.

мерами групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные (суммарным числом разрядов исходных чисел, которые непосредственно или опосредовано попадают на входы умножителя). Так, например, затраты менеджера IV на рис. 11 равны

$$c(\mu(1) + \mu(2) + \mu(3), \mu(4) + \mu(5), \mu(6) + \mu(7)) .$$

Если необходимо найти оптимальную (самую дешевую) схему соединения умножителей, то, понятно, что эта задача является частным случаем рассматриваемой задачи поиска оптимальной древовидной иерархии. •

3.2. Численный алгоритм поиска оптимального дерева

Если меры всех исполнителей равны между собой, то все исполнители становятся неразличимыми, поскольку в рамках рассматриваемой модели мера исполнителя является его единственной характеристикой. При этом можно без ограничения общности считать все меры равными единице, и мера группы исполнителей равна просто числу входящих в нее исполнителей.

В этом случае можно предложить эффективный численный алгоритм [85] поиска оптимального r-дерева, то есть дерева, в котором каждый менеджер имеет не более r непосредственных подчиненных. Поскольку идея этого алгоритма часто используется ниже в доказательствах, опишем его подробно.

Зафиксируем верхнее ограничение r на количество непосредственных подчиненных каждого менеджера дерева. Поскольку все исполнители одинаковы, затраты оптимального r-дерева будут зависеть только от их количества n. Обозначим эти затраты через $C_M(n)$. Алгоритм состоит в последовательном вычислении затрат оптимального дерева для количества исполнителей от 1 до n, причем при расчете каждого следующего значения используются ранее вычисленные. Для одного исполнителя затраты дерева равны нулю, так как единственное возможное «дерево» состоит только из этого исполнителя.

Следовательно, $C_M(1) = 0$.

Пусть теперь на некотором шаге работы алгоритма вычислены затраты $C_M(\cdot)$ всех оптимальных r-деревьев для числа исполнителей от 1 до $n' - 1$. Вычислим затраты $C_M(n')$ оптимального r-дерева для количества исполнителей n' следующим образом.

Затраты этого дерева складываются из затрат топ-менеджера, находящегося в корне дерева, и затрат поддеревьев, в корнях которых находятся непосредственные подчиненные топ-менеджера. Понятно, что все поддеревья оптимального r-дерева также являются оптимальными r-деревьями для меньшего числа исполнителей, поэтому, если топ-менеджер в оптимальном r-дереве H имеет k непосредственных подчиненных, которые управляют группами исполнителей мер $n_1, \ldots, n_k$, то затраты дерева H будут определяться следующим выражением:

(4) $$C(H) = c(n_1,...,n_k) + \sum_{i=1}^{k} C_M(n_i) .$$

Поскольку для всех $i = 1, \ldots, k$ $n_i < n'$, затраты всех возможных поддеревьев уже вычислены. Поэтому, чтобы найти затраты оптимального r-дерева для n' исполнителей, необходимо для каждого количества k непосредственных подчиненных топ-менеджера от 2 до r и всех возможных способов распределения n' исполнителей между непосредственными подчиненными вычислить по формуле (4) затраты соответствующих деревьев, и выбрать из них дерево с минимальными затратами. С учетом неразличимости исполнителей для этого необходимо порядка $(n')^{r-1}$ раз выполнить вычисление формулы (4). Поскольку для вычисления $C_M(n)$ необходимо n шагов работы алгоритма, общее количество вычислений не будет превышать n^r, то есть алгоритм имеет полиномиальную по количеству исполнителей n сложность.

Пример 12. Приведем результаты работы описанного выше алгоритма на примере мультипликативной функции затрат $c(r, \mu) = r^{1/3}\mu^2$, где r – количество непосредственных подчиненных менеджера, μ – мера управляемой им группы исполнителей (в данном случае она равна количеству исполнителей в группе). На рис. 12 изображены рассчитанные затраты оптимального r-дерева ($r \le 10$) для количества исполнителей от 1 до 50. По оси абсцисс отложен размер множества исполнителей n.

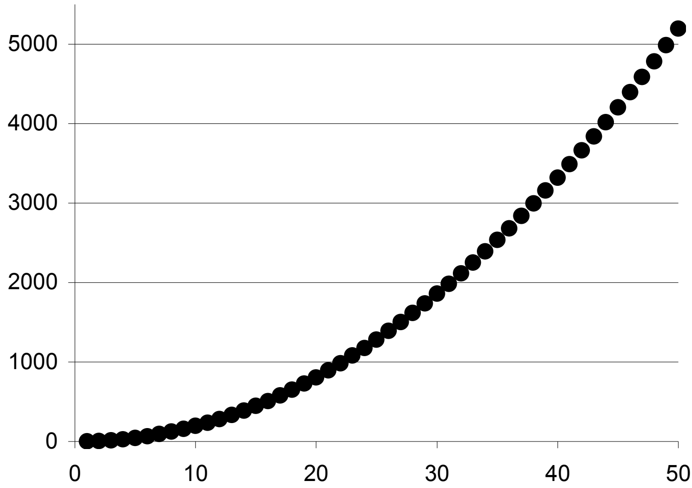


Рисунок 12. Численный расчет затрат оптимального r-дерева в зависимости от количества исполнителей ($r \leq 10$)

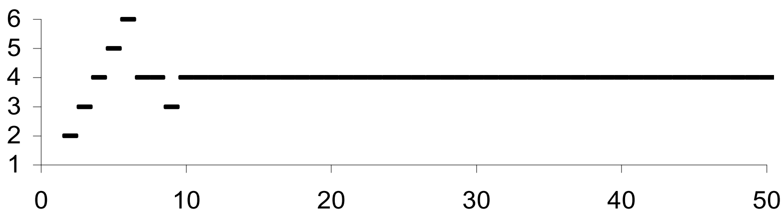


Рисунок 13. Оптимальное количество непосредственных подчиненных топ-менеджера в зависимости от количества исполнителей

На рис. 13 изображена зависимость количества непосредственных подчиненных топ-менеджера в оптимальном дереве от общего числа исполнителей. Как видно из рисунка, для количества исполнителей от двух до шести оптимальна веерная иерархия, а в достаточно больших деревьях топ-менеджер всегда имеет одинаковое количество непосредственных подчиненных – четыре. Из результатов работы алгоритма также следует, что в больших деревьях топ-менеджер делит группу между своими подчиненными на части как можно более близкого размера, например, при $n = 50$ топ-менеджер делит множество исполнителей между своими непосредственными подчиненными на четыре группы размера $n_1 = n_2 = 12$, $n_3 = n_4 = 13$.

Из рис. 13 видно, что каждый из этих менеджеров также будет иметь четырех непосредственных подчиненных. Первые два менеджера делят доставшуюся им группу из двенадцати исполнителей между своими подчиненными на равные части по три исполнителя в каждой, а третий и четвертый делят подчиненную группу на четыре части размеров 3, 3, 3 и 4. В результате получается оптимальное дерево, изображенное на рис. 14. •

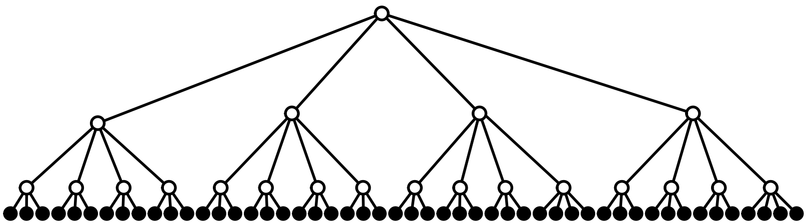


Рисунок 14. Пример оптимального дерева для 50 исполнителей

3.3. Однородные деревья и их затраты

Описанный в предыдущем разделе алгоритм поиска оптимального дерева имеет ряд недостатков. Во-первых, он работает только в случае, когда все исполнители имеют одинаковые меры. Во-вторых, алгоритм позволяет искать только оптимальные r-деревья, и при этом нельзя гарантировать, что оптимальным на множестве всех деревьев не окажется дерево с большей нормой управляемости (существуют и алгоритмы, лишенные этих недостатков, но они имеют существенно бóльшую вычислительную сложность [85]). И, наконец, как и любой численный алгоритм, он позволяет получать только частные результаты для конкретных функций и не позволяет обосновывать общие свойства оптимальных деревьев при однородной функции затрат.

В то же время, исследование результатов работы алгоритма при различных однородных функциях затрат позволяет выделить ряд общих свойств, которыми обладают оптимальные деревья. Во-первых, в оптимальных деревьях каждый менеджер имеет примерно одинаковое количество непосредственных подчиненных. Во-вторых, при фиксированной функции затрат менеджеры во всех оптимальных деревьях делят подчиненные группы исполнителей между своими непосредственными подчиненными приблизительно в одинаковой пропорции. Для некоторых функций затрат эта пропорция предполагает деление группы на примерно равные части, как в примере 12, для других же функций затрат могут быть оптимальны другие пропорции. Это позволяет предположить, что пропорция определяется в основном функцией затрат менеджера, а не размером иерархии (количеством исполнителей).

Чтобы формализовать эти наблюдения и определить условия, при выполнении которых описанные свойства оптимальных деревьев имеют место, необходимо ввести ряд определений.

Определение 14. Дерево называется (r, x)-*однородным*, если каждый его менеджер имеет ровно r непосредственных подчиненных и делит между ними подчиненную ему группу исполнителей в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Число r называется *нормой управляемости* однородного дерева.

Пример 13. На рис. 15 изображены три однородных дерева. Для каждого сотрудника на рисунке изображена мера управляемой им группы. Иерархия 15а) – это 3-дерево с пропорцией $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Дерево имеет симметричный вид (однородные деревья всегда симметричны, если исполнители имеют одинаковые меры). Иерархия 15б) – это 2-дерево с пропорцией (1/2, 1/2), а иерархия 15в) – 2-дерево с пропорцией (1/3, 2/3). •

В однородных деревьях наиболее полно реализуются эмпирически отмеченные выше свойства оптимальных древовидных иерархий. Однако, понятно, что для заданного множества исполнителей может не существовать ни одного однородного дерева, кроме веерной иерархии (любая веерная иерархия, как легко видеть, является однородным деревом). Так, если все n исполнителей имеют одинаковые меры, то однородное дерево с нормой управляемости r и пропорцией $(1/r, \ldots, 1/r)$ существует только в том случае, если n является целой степенью r, как, например, в иерархии на рис. 15а).

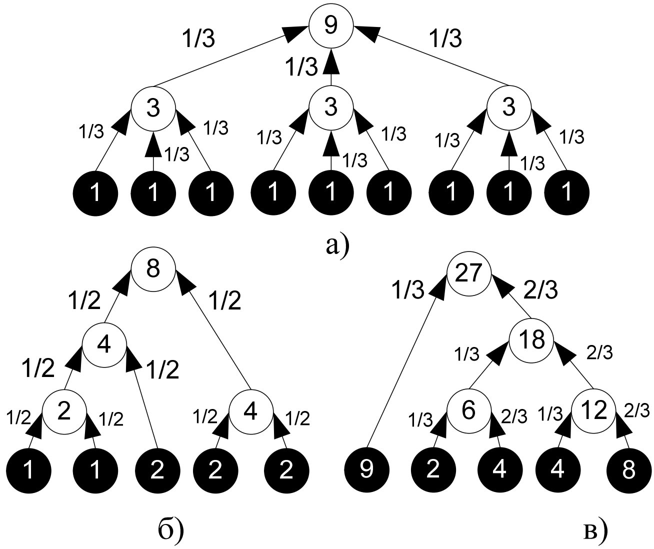


Рисунок 15. Примеры однородных деревьев

В общем случае справедлив следующий результат.

Лемма 2. Пусть заданы норма управляемости r и пропорция $x \in D_r$, причем все компоненты пропорции строго положительны. Пусть также задано натуральное число q. Если количество исполнителей n равно $1 + q(r - 1)$, то можно назначить меры исполнителей так, чтобы на этом множестве исполнителей существовало (r, x)-однородное дерево с q менеджерами. Если же ни для какого натурального числа q равенство $n = 1 + q(r - 1)$ не выполняется, для n исполнителей построить однородное дерево с нормой управляемости r невозможно.

Доказательство леммы 2 приведено в приложении.

Следствие 1. Количество менеджеров в однородном дереве с нормой управляемости r на множестве из n исполнителей равно $(n - 1)/(r - 1)$. •

Хотя число существенно различных способов, которыми можно назначить меры исполнителям для выполнения условий леммы 2, быстро растет[1] с ростом количества исполнителей, для произвольно заданных множества исполнителей нормы управляемости и пропорции однородное дерево существует чрезвычайно редко. В то же время, если однородное дерево существует, его затраты легко вычисляются.

Утверждение 4. Пусть заданы множество исполнителей $N = \{1, \dots, n\}$ с мерами $\mu(1), \dots, \mu(n)$ и однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\mu_1, \dots, \mu_r)$. Если существует однородное дерево H с нормой управляемости r и пропорцией $x = (x_1, \dots, x_r)$, то его затраты определяются выражением

$$(5)\qquad C(H) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu := \mu(N) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ – суммарная мера всех исполнителей. •

Доказательство утверждения приведено в приложении.

В приводимых доказательствах часто используются следующие неравенства, являющиеся частным случаем неравенства Минковского [21]: для любых неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_k$ и любого числа γ

$$(6)\qquad (x_1 + ... + x_k)^\gamma \geq x_1^\gamma + ... + x_k^\gamma \text{ если } \gamma \geq 1,$$

$$(7)\qquad (x_1 + ... + x_k)^\gamma \leq x_1^\gamma + ... + x_k^\gamma \text{ если } \gamma \leq 1.$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что при любой степени однородности γ выражения $\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma$ и $1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma$ всегда имеют одинаковый знак, так что, в принципе, модули в формуле (5) необязательны. Они внесены в формулу для того, чтобы разделить ее на два положительных сомножителя. Первый множитель, $|\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma|$ (или $\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)$ для $\gamma = 1$), концентрирует в себе всю информацию о множестве исполнителей –

[1] Множества исполнителей называются *существенно различными*, если их нельзя преобразовать друг в друга переименованием исполнителей и умножением мер всех исполнителей на константу.

их количестве и мерах, но не зависит от параметров однородного дерева – нормы управляемости r и пропорции x. Второй же множитель, $\dfrac{c(x_1,...,x_r)}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}$ (или $\dfrac{c(x_1,...,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}$ для $\gamma = 1$) не зависит от специфики множества исполнителей, но содержит в себе информацию о функции затрат менеджера и параметрах однородного дерева. Единственной общей переменной в этих множителях является степень однородности функции затрат γ.

Затраты однородного дерева записываются по-разному при степени однородности $\gamma \neq 1$ и при $\gamma = 1$. Дело в том, что при $\gamma = 1$ в верхнем выражении формулы (5) имеется неопределенность типа 0/0. Однако если взять предел верхнего выражения при $\gamma \to 1$, получим как раз нижнее выражение формулы (5), так что затраты (r, x)-однородного дерева непрерывны по γ.

Если меры всех n исполнителей равны единице, формула затрат однородного дерева упрощается и принимает вид

$$(8)\qquad C(H) = \begin{cases} |n^{\gamma} - n| \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ n \ln n \dfrac{c(x_1,...,x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Таким образом, при большом количестве исполнителей n, если степень однородности $\gamma < 1$, то затраты однородного дерева растут пропорционально n; если $\gamma = 1$, то пропорционально $n \ln n$; если $\gamma > 1$, то пропорционально n^{γ}.

Пример 14. Пусть все исполнители имеют меру 1, а функция затрат менеджера $c(\cdot) = \mu$. Найдем затраты однородного 2-дерева с пропорцией $x = (1/2, 1/2)$. В данном случае степень однородности $\gamma = 1$, поэтому, по формуле (8), $C(H) = n \cdot \ln n / \ln 2 = n \cdot \log_2 n$.

Как уже отмечалось, если меры всех исполнителей одинаковы, то однородное 2-дерево существует при количестве исполнителей n, равном целой степени двойки. То есть $(2, x)$-однородное дерево с затратами $n \cdot \log_2 n$ существует, если $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ •

Более подробный анализ выражений (5) и (8) будет проведен ниже в разделе 3.5, после того, как будет пояснена их связь с затратами оптимального дерева.

3.4. Нижняя оценка затрат оптимального дерева

Как уже отмечалось, для заданной нормы управляемости r и пропорции x однородное дерево существует редко. Однако выражение (5) можно вычислить независимо от факта существования (r, x)-однородного дерева, и для любой нормы управляемости r и пропорции $x \in D_r$ можно говорить о том, какие затраты имело бы (r, x)-однородное дерево, **если бы оно существовало**.

Имея аналитическое выражение для затрат однородного дерева, точно так же можно ставить вопрос о том, какое из всего множества однородных деревьев **было бы оптимальным, если бы оно существовало**. Для того, чтобы найти такое наилучшее однородное дерево, необходимо минимизировать выражение (5) по всем возможным нормам управляемости r и пропорциям x. Соответственно, пара (r, x), на которой достигается этот минимум, даст параметры наилучшего однородного дерева, а подставив их в формулу (5), получим его затраты.

Понятно, что при фиксированном множестве исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ топ-менеджер любого дерева будет иметь не более n непосредственных подчиненных, поэтому при поиске наилучшего однородного дерева минимизировать достаточно по всем r от 2 до n.

Кроме того, каждый непосредственный подчиненный топ-менеджера будет управлять по меньшей мере одним исполнителем, и, значит, мера управляемой им группы будет не меньше минимальной из мер исполнителей. Следовательно, каждая из компонент x_i, $i = 1, \ldots, r$ пропорции любого однородного дерева будет не меньше чем $\varepsilon := \min_{i \in N} \mu(i) / \sum_{i \in N} \mu(i)$.

Для произвольного неотрицательного числа ε обозначим через $D_r(\varepsilon)$ ту часть симплекса D_r, на которой каждая компонента вектора больше или равна ε.

Тогда при фиксированной функции затрат минимальные затраты однородного дерева определяются количеством n и мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ исполнителей и задаются следующим выражением:

(9) $C_L(N) =$

$$= \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu = \sum_{i \in N} \mu(i)$, $\varepsilon = \min_{i \in N} \mu(i) / \mu$.

Поскольку $D_r(\varepsilon)$ – компактное множество, минимумы в формуле (9) достигаются при достаточно слабых условиях на функцию затрат (достаточно потребовать ее полунепрерывности снизу [102] на симплексе), и ниже считается, что они достигаются.

При заданной функции затрат параметры однородного дерева, доставляющие минимум выражению (9), зависят от количества исполнителей n и числа ε – отношения минимальной из мер исполнителей к их суммарной мере. Обозначим $r(n, \varepsilon)$ – оптимальное количество непосредственных подчиненных, $x(n, \varepsilon) = (x_1(n, \varepsilon), \ldots, x_{r(n, \varepsilon)}(n, \varepsilon))$ – оптимальную пропорцию. Нахождение этих параметров сводится к решению n классических задач минимизации функции на компактном множестве. Для удобства введем обозначение

$$(10) \qquad F(n,\varepsilon) := \begin{cases} \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

тогда

$$(11) \quad C_L(N) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| F(n,\varepsilon), \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) F(n,\varepsilon), \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Если меры всех исполнителей равны единице, параметр ε в формуле (9) равен $1/n$ (где n – количество исполнителей). При этом затраты наилучшего однородного дерева принимают вид:

$$(12) \qquad C_L(N) = \begin{cases} |n^\gamma - n| F(n, 1/n), & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (n \ln n) F(n, 1/n), & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Итак, при заданной функции затрат и множестве исполнителей параметры наилучшего однородного дерева можно вычислить по формуле (9). Как отмечалось выше, эмпирически установлено, что оптимальная (на множестве всех деревьев) древовидная иерархия «стремится» быть однородным деревом. В связи с этим возникает предположение о том, что, если для заданного множества исполнителей существует наилучшее однородное дерево (с нормой управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорцией $x(n, \varepsilon)$), то оно и будет оптимальным на множестве всех деревьев. На самом деле оказывается, что справедлив даже более сильный результат.

Утверждение 5. Пусть заданы множество исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ и однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\cdot)$. Тогда затраты оптимального дерева будут не меньше, чем $C_L(N)$. Иначе говоря, функция $C_L(N)$ является *нижней оценкой* затрат оптимального дерева.

Доказательство этого утверждения (лежащего в основе большинства излагаемых ниже результатов) приведено в приложении.

Кроме того, если ставится задача поиска оптимального r-дерева, то есть дерева, каждый из менеджеров которого имеет не более r подчиненных, то нижняя оценка его затрат будет определяться затратами *наилучшего однородного* r-дерева, то есть однородного дерева с нормой управляемости не более чем r.

Легко видеть, что затраты наилучшего однородного r-дерева задаются формулой

$$(13)\ C_L^{\,r}(N) = \begin{cases} |\,\mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma}\,|\, F(\min[n, r], \varepsilon), \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) F(\min[n, r], \varepsilon), \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 6. В условиях утверждения 5 затраты оптимального r-дерева будут не менее $C_L^{\,r}(N)$.

Доказательство утверждения 6 повторяет доказательство утверждения 5 с учетом замены слова «дерево» на «r-дерево» и суммирования по норме управляемости от 2 до n на суммирование от 2 до $\min[n, r]$.

Следствие 2. Если наилучшее однородное дерево (r-дерево) существует, то оно является оптимальным на множестве всех деревьев (r-деревьев).

Доказательство. Действительно, из утверждения 5 следует, что затраты любого дерева (соответственно, r-дерева) не меньше, чем $C_L(N)$ (соответственно, $C_L^r(N)$). Но если наилучшее однородное дерево (r-дерево) с нормой управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорцией $x(n, \varepsilon)$ существует, то его затраты в точности равны $C_L(N)$ (соответственно, $C_L^r(N)$), и, значит, оно оптимально. •

Пример 15. В [50] рассматривалась задача поиска оптимального дерева для однородной степени ноль функции затрат $c(\cdot) = r^2$ в случае, когда все исполнители имеют меру 1. При этом автор рассматривал только *симметричные* деревья, в которых управляемая группа исполнителей поровну делится между непосредственными подчиненными каждого менеджера. Определим параметры наилучшего однородного дерева для такой функции затрат и найдем нижнюю оценку затрат оптимального дерева.

Параметры однородного дерева ищутся по формуле (10): необходимо найти точку, в которой достигается

$$\min_{k=2\ldots n}[k^2 \min_{y\in D_k(1/n)} \frac{1}{|1-\sum_{i=1}^{k}(y_i)^0|}] = \min_{k=2\ldots n}[k^2 \min_{y\in D_k(1/n)} \frac{1}{k-1}].$$

Легко видеть, что минимизируемая функция не зависит от пропорции y, то есть оптимальной будет любая пропорция. В частности, ничто не мешает выбрать ее равной $(1/k, \ldots, 1/k)$, как и предполагалось в [50]. Определим оптимальную норму управляемости k, то есть найдем точку минимума функции $k^2/(k-1)$. Ее производная равна $k(k-2)/(k-1)^2$. Она обращается в ноль при $k = 2$ и можно проверить, что эта точка будет точкой минимума. Таким образом, оптимальным будет однородное 2-дерево с пропорцией, например, (1/2, 1/2). По формуле (8), его затраты равны $4(n-1)$, то есть затраты иерархии линейны по количеству исполнителей. Это же выражение задает нижнюю оценку затрат оптимального дерева – они равны как минимум $4(n-1)$, причем дерево точно с такими затратами существует, если количество исполнителей равно целой степени двойки. •

Полученная нижняя оценка затрат оптимального дерева имеет широкий спектр применения. Например, ниже в настоящей главе доказывается, что при большом количестве исполнителей она в большинстве случаев достаточно точно аппроксимирует затраты оптимального дерева. Также эта нижняя оценка используется при построении субоптимальных деревьев. Кроме того, нижние оценки являются составной частью алгоритмов численного решения задачи методом ветвей и границ [81], а качество работы таких алгоритмов зависит от качества используемой в них нижней оценки. В связи с этим разработка эффективных методов поиска параметров наилучшего однородного дерева представляет большой интерес.

3.5. Поиск наилучших однородных деревьев

В настоящем разделе исследуются свойства задачи поиска параметров (нормы управляемости и пропорции) наилучшего однородного дерева, предлагается классификация решений этой задачи и приводится их содержательная интерпретация.

Как показано в предыдущем разделе, для определения параметров наилучшего однородного дерева при заданном количестве исполнителей n с мерами $\mu(1)$, …, $\mu(n)$ необходимо найти точку, в которой достигаются минимумы в выражении

$$(14)\qquad F(n,\varepsilon)=\begin{cases}\min\limits_{k=2\ldots n}\min\limits_{y\in D_k(\varepsilon)}\dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|}, \text{если } \gamma\neq 1,\\ \min\limits_{k=2\ldots n}\min\limits_{y\in D_k(\varepsilon)}\dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k}y_i\ln y_i}, \text{если } \gamma=1,\end{cases}$$

где $\varepsilon=\min_{i\in N}\mu(i)/\sum_{i\in N}\mu(i)$.

Вообще говоря, для каждого n и ε необходимо решать свою задачу, поскольку с ростом n (и с уменьшением ε) расширяется множество, по которому проводится минимизация. Тем не менее, при достаточно большом количестве исполнителей n во многих практически важных случаях можно ограничиться решением единственной вводимой ниже задачи минимизации.

Рассмотрим величину

$$(15)\qquad F_{\infty}:=\begin{cases}\inf\limits_{k=2,3\ldots\infty}\inf\limits_{y\in D_k}\dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|}, \text{если } \gamma\neq 1,\\ \inf\limits_{k=2,3\ldots\infty}\inf\limits_{y\in D_k}\dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k}y_i\ln y_i}, \text{если } \gamma=1,\end{cases}$$

представляющую собой предел функции $F(n, \varepsilon)$ при $n \to +\infty$.[1]

Возможны два случая: в первом из них нижняя грань в выражении (15) достигается, во втором – не достигается.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда нижняя грань достигается. Тогда существует решение задачи минимизации (15) – норма управляемости r^* и пропорция x^*, доставляющие минимум выражению (15). Будем говорить, что решение *внутреннее*, если все компоненты пропорции x^* строго положительны. В противном случае будем говорить о *граничном решении*.

Граничное решение трудно интерпретировать с содержательной точки зрения, поскольку оно предполагает, что некоторым менеджерам иерархии достается в подчинение группа исполнителей нулевой меры (а меры исполнителей по определению положительны, и, значит, менеджер не должен управлять ни одним исполнителем, что противоречит определению иерархии). Однако, если норма управляемости $r^* > 2$, в силу нормальности функции затрат менеджера $c(x_1^*, ..., x_{r^*-1}^*, 0) \geq c(x_1^*, ..., x_{r^*-1}^*)$. Тогда легко проверить, что минимум в формуле (15) также достигается и при норме управляемости $r^* - 1$ и пропорции[2] $(x_1^*, ..., x_{r^*-1}^*)$. Продолжая подобным образом удалять равные нулю компоненты пропорции, приходим либо к внутреннему решению, либо к граничному решению с нормой управляемости, равной двум.

Так как рассматриваются только нормальные функции затрат, то можно сделать следующий вывод: если решение задачи (15) существует, то либо это решение внутреннее, либо это граничное решение для нормы управляемости 2.

Сначала рассмотрим случай, когда существует внутреннее решение. Это значит, что для достаточно большого[3] количества

---

[1] Если мера каждого исполнителя ограничена сверху и снизу наперед заданной константой, то ε стремится к нулю при стремлении n к $+\infty$.

[2] Без ограничения общности считаем, что нулю равна последняя компонента пропорции.

[3] Т.е. для множества исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$ с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$, для которого верны неравенства $n \geq r^*$ и $\min_{i \in N} \mu(i) / \sum_{i \in N} \mu(i) \leq \min_{i=1 \ldots r^*} x_i^*$.

исполнителей n оптимальная точка r^*, x^* будет попадать в область минимизации в формуле (14). Очевидно, в этом случае минимум в выражении (14) будет достигаться при норме управляемости r^* и пропорции x^*, и будет выполняться равенство $F(n, \varepsilon) = F_\infty$.

Как будет показано ниже на многочисленных примерах, случай наличия внутреннего решения более типичен, поэтому при поиске параметров наилучшего однородного дерева целесообразно сначала искать внутренние решения задачи минимизации (15). Если нижняя грань в формуле (15) достигается, то для любого достаточно большого количества исполнителей точка минимума r^*, x^* дает параметры наилучшего однородного дерева – норму управляемости и пропорцию соответственно. Затраты (r^*, x^*)-однородного дерева являются нижней оценкой затрат оптимального дерева, кроме того, если (r^*, x^*)-однородное дерево существует для заданного множества исполнителей, то оно оптимально на множестве всех деревьев.

Исследуем свойства внутренних решений. Решение назовем *симметричным*, если оптимальна пропорция $x^* = (1/r^*, \ldots, 1/r^*)$, то есть в наилучшем однородном дереве менеджер делит подчиненную ему группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части одинаковой меры. В противном случае решение будем называть *асимметричным*.

Пример 16. Найдем параметры наилучшего однородного дерева для введенной в примере 5 функции затрат (V), определяемой выражением $c(\mu_1,\ldots,\mu_r) = (\mu_1 + \ldots + \mu_r)^\alpha / \min(\mu_1^\beta,\ldots,\mu_r^\beta)$.

Для простоты будем считать, что степень однородности γ, равная $\alpha - \beta$, отлична от единицы, и $\alpha > \beta$.

Проверим, достигается ли нижняя грань в выражении

$$\inf_{k=2,3\ldots\infty} \inf_{y\in D_k} \frac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^k y_i^\gamma|} = \inf_{k=2,3\ldots\infty} \inf_{y\in D_k} \frac{1}{|1-\sum_{i=1}^k y_i^{\alpha-\beta}| \min(y_1^\beta,\ldots,y_k^\beta)}.$$

Легко видеть, что максимум знаменателя достигается при $y_1 = \ldots = y_k = 1/k$. Следовательно, для любой нормы управляемости k при такой пропорции достигается минимум по y всего выражения. Подставим оптимальную пропорцию в минимизируемое выражение. Для определения оптимальной нормы управляемости необходимо найти $\min\limits_{k=2,3...\infty} \dfrac{1}{|1-k^{1+\beta-\alpha}\ |k^{-\beta}}$ или, что то же самое, максимум по всем целым $k \geq 2$ функции $\varphi(k) := |k^{1-\alpha} - k^{-\beta}\ |$. Легко видеть, что, поскольку параметры α и β неотрицательны, при $\alpha \leq 1$ максимум не достигается, так как функция неограниченно возрастает с ростом k.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда $\varphi(1) = 0$, и функция $\varphi(\cdot)$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, она достигает максимума на интервале $[0, +\infty)$. В точке максимума производная функции равна нулю, то есть $(1-\alpha)k^{-\alpha} + \beta k^{-\beta-1} = 0$. Решая это уравнение, находим точку максимума: $k^* = [(\alpha-1)/\beta]^{1/(\alpha-\beta-1)}$. Функция монотонно растет слева от точки максимума и монотонно убывает справа от нее. Поскольку мы ищем максимум только по целым k, оптимальная норма управляемости r^* будет одним из ближайших целых (слева или справа) к величине k^*. Теперь найти оптимальную норму управляемости легко, непосредственно сравнив затраты двух соответствующих однородных деревьев. •

В этом примере решение симметрично, однако ниже в разделе 4.2 приводится и пример асимметричного внутреннего решения. Следующая лемма дает достаточное условие симметричности наилучшего однородного дерева.

Лемма 3. Если при любой норме управляемости затраты менеджера минимальны при делении управляемой им группы исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части одинаковой меры, то в наилучшем однородном дереве каждый менеджер также делит подчиненную ему группу исполнителей на части одинаковой меры.

Доказательство. Для любой нормы управляемости k знаменатель минимизируемой функции в формуле (14) достигает своего максимума в центре симплекса, в точке $y = (1/k, \ldots, 1/k)$, где все компоненты пропорции одинаковы. Поэтому, если в той же точке достигается минимум числителя $c(y_1, \ldots, y_k)$, то такая симметричная пропорция доставляет минимум и всему выражению. •

В частности, лемма верна, если при любой норме управляемости k функция затрат менеджера выпукла на симплексе D_k.

Пример 17. Рассмотрим мультипликативную однородную функцию затрат менеджера $c(r, \mu) = \mu^\gamma \varphi(r)$, где μ – мера управляемой менеджером группы исполнителей, r – количество его непосредственных подчиненных, $\varphi(r)$ – некоторая гладкая неубывающая функция, γ – степень однородности функции затрат. Легко видеть, что для любой пропорции y из симплекса D_k $c(y_1, \ldots, y_k) = \varphi(k)$, то есть при фиксированной норме управляемости k функция затрат менеджера равна константе на симплексе. Следовательно, она выпукла на симплексе, и при поиске параметров наилучшего однородного дерева для однородной мультипликативной функции затрат достаточно ограничиться рассмотрением симметричных решений. •

Теперь рассмотрим случай, когда задача (15) имеет граничное решение (с нормой управляемости 2). Строго говоря, если степень однородности γ функции затрат не равна нулю, то о существовании решения говорить нельзя, поскольку при оптимальной в этом случае пропорции (1, 0) знаменатель минимизируемого выражения в формуле (15) обращается в ноль, и само выражение не определено. Однако можно взять предел, и считать, что F_∞ тогда определяется формулой

$$(16) \qquad F_\infty = \begin{cases} \lim\limits_{y \to +0} \dfrac{c(y, 1-y)}{|1 - y^\gamma - (1-y)^\gamma|}, \text{если } \gamma \neq 1, \\ \lim\limits_{y \to +0} \dfrac{-c(y, 1-y)}{y \ln y + (1-y)\ln(1-y)}, \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Ценность вычисления значения F_∞ в этом случае существенно снижается из-за того, что теперь (в отличие ситуации, когда существовало внутреннее решение), ни при каком количестве исполнителей n не будет выполняться равенства $F(n, \varepsilon) = F_\infty$. Поэтому для нахождения нижней оценки затрат оптимального дерева необходимо пользоваться более сложной формулой (14).

Содержательная интерпретация этого граничного решения также сопряжена с трудностями, поскольку оно предписывает каждому менеджеру отдавать всю подчиненную ему группу исполнителей (по сути, всю свою работу) в управление одному из двух своих непосредственных подчиненных, а второму не давать исполнителей вовсе, что противоречит определению иерархии.

Однако если степень однородности функции затрат $\gamma \neq 0$, то граничное решение возможно только если $c(0, 1) = 0$.[1)] При этом затраты менеджера равны нулю, если он перекладывает всю свою работу на подчиненного. С практической точки зрения это довольно нелогично, ведь содержание менеджера ст*о*ит для организации как минимум той бумаги, на которой написано, что такой менеджер в компании есть. В то же время, такие функции затрат не являются строго нормальными (см. определение 9), и приведенные рассуждения могут служить оправданием для рассмотрения на практике только строго нормальных функций затрат.

Пример 18. Легко проверить, что, нормальная функция (II) вида $c(\mu_1,...,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha]^\beta$ строго нормальна, поскольку $c(0, \mu, \mu) = \mu^{\alpha\beta} > 0$ при $\mu > 0$. В то же время, функция затрат (I) вида $c(\mu_1,...,\mu_r,\mu) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha,\ldots,\mu_r^\alpha)]^\beta$, не является строго нормальной, так как $c(0, \mu, \mu) = 0$. •

Если нормальная однородная функция затрат менеджера не является строго нормальной, ее можно модифицировать (с сохранением однородности), добавив к затратам менеджера слагаемое вида $\delta\mu^\gamma$, где μ – мера управляемой менеджером группы, γ – степень однородности функции затрат, δ – некоторый положительный коэффициент. С содержательной точки зрения это слагаемое соответствует затратам менеджера, не зависящим от способа распределения подчиненной ему группы исполнителей между непосредственными подчиненными. Модифицированная таким образом функция затрат будет уже строго нормальной.

Итак, для строго нормальных функций затрат при отличной от нуля степени однородности граничное решение для нормы управляемости 2 невозможно. Поэтому при поиске оптимальной пропорции можно рассматривать только пропорции со строго положительными компонентами. В общем же случае граничное решение для нормы управляемости 2 может иметь место. Тогда

---

[1] Если $\gamma \neq 0$ и $c(0, 1) > 0$, то в (16) при стремлении y к нулю знаменатель стремится к нулю, а числитель – к положительному числу, поэтому выражение неограниченно возрастает. Если $\gamma = 0$, то знаменатель в (16) равен $k - 1$ и граничное решение возможно даже при $c(0, 1) > 0$.

для расчета параметров наилучшего однородного дерева необходимо пользоваться формулой (14).[1]

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда нижняя грань в формуле (15) не достигается. Это значит, что не существует оптимальной нормы управляемости – для любой нормы управляемости найдется другая (бóльшая), при которой достигается меньшее значение минимизируемого выражения в формуле (15),

По сути, это означает, что наилучшее однородное дерево предполагает бесконечно большую норму управляемости. Здесь также формула (15) малополезна, и для определения параметров наилучшего однородного дерева необходимо пользоваться формулой (14). В ней минимумы достигаются всегда, но оптимальная норма управляемости $r(n, \varepsilon)$ будет существенно зависеть от количества исполнителей n. В большинстве рассматриваемых ниже примеров оказывается, что в этом случае $r(n, \varepsilon) = n$, то есть минимум затрат однородного дерева всегда достигается при максимальной возможной норме управляемости, равной количеству исполнителей.

Если при этом меры всех исполнителей одинаковы (например, равны единице), то легко видеть, что $\varepsilon = 1/n$ и поэтому множество $D_n(\varepsilon)$ состоит из единственной пропорции $(1/n, \ldots, 1/n)$. Понятно, что она и будет оптимальной. Тогда по формуле (8) стоимость наилучшего однородного дерева равна $c(1, \ldots, 1)$. Следовательно, наилучшее однородное дерево является веерной иерархией, в которой имеется единственный менеджер, непосредственно управляющий всеми n исполнителями. Более того, поскольку веерная иерархия существует всегда, она будет оптимальной на множестве всех деревьев и тогда задачу поиска оптимальной древовидной иерархии можно считать решенной.

Подытоживая результаты настоящего раздела, можно предложить следующий порядок поиска параметров наилучшего однородного дерева (и, следовательно, нижней оценки стоимости оптимального дерева):

---

[1] При этом, как показывает рассматриваемый ниже пример 20, минимум в формуле (14) может достигаться и при норме управляемости, строго большей двух.

1. Для каждой нормы управляемости k найти оптимальную при этой норме управляемости пропорцию $x(k)$. Достаточно ограничить поиск внутренними точками симплекса D_k.
2. Если функция затрат не является строго нормальной или если степень однородности функции затрат равна нулю, найти предел в выражении (16), определив тем самым затраты однородной иерархии при граничном решении с нормой управляемости, равной двум.
3. Подставив оптимальные пропорции в минимизируемое выражение формулы (15), найти норму управляемости, при которой достигается нижняя грань в формуле (15).
4. Если найдено внутреннее решение (норма управляемости r^* и пропорция x^*), и, кроме того, для заданного множества исполнителей их количество n не меньше нормы управляемости r^*, а также $\min_{i \in N} \mu(i) / \mu \le \min_{i=1 \ldots r^*} x_i^*$, то найденное решение дает параметры наилучшего однородного дерева для этого множества исполнителей.
5. В остальных случаях[1] для нахождения параметров наилучшего однородного дерева необходимо пользоваться формулой (14).

3.6. Верхние оценки затрат оптимального дерева и субоптимальные деревья

Итак, в предыдущих разделах настоящей главы была предложена формула (9), оценивающая снизу затраты оптимальной древовидной иерархии для однородных функций затрат менеджеров и были исследованы способы вычисления этой нижней оценки. Однако возникает вопрос о том, насколько точно формула (9) описывает затраты собственно оптимального дерева, то есть, каково *качество* введенной нижней оценки.

Поиск оптимальной древовидной иерархии – это задача дискретной оптимизации, поиск в конечном множестве (всевозмож-

[1] То есть, если нижняя грань по норме управляемости k в формуле (15) не достигается, или если нижняя грань по k достигается на граничном решении (для нормы управляемости, равной двум), или если для заданного множества исполнителей не выполняются условия пункта 4.

ных иерархий) наилучшего элемента (оптимальной иерархии). Дискретность задачи является следствием того, что иерархия надстраивается над конечным множеством исполнителей с заданными мерами, и именно эта дискретность чрезвычайно усложняет поиск оптимальной иерархии.

Нижняя оценка (9) основана на частичном отказе от дискретности. Она дает, по сути, затраты оптимального дерева в предположении, что при фиксированном количестве исполнителей и заданной их суммарной мере меры отдельных исполнителей могут быть подобраны наиболее «удобным» образом, так что любую группу исполнителей можно разделить на части в нужной пропорции. В реальности это, конечно, не так, однако, по идее, чем больше в группе исполнителей, тем точнее можно из них «набрать» подгруппы нужной меры. Поэтому можно предположить, что с ростом количества исполнителей n дискретность задачи будет играть все меньшую роль, и при большом количестве исполнителей нижняя оценка (9) будет близка к затратам оптимального дерева. Именно при большом количестве исполнителей (в крупных организациях), рассмотрение нижних оценок представляет основной интерес, так как для небольших n оптимальное дерево можно найти перебором.

Далее считается, что нижняя оценка $C_L(N)$ *имеет хорошее качество*, если предел отношения затрат $C(N)$ оптимального дерева к нижней оценке $C_L(N)$ стремится к единице при стремлении количества исполнителей во множестве N к бесконечности[1].

Оказывается, что качество нижней оценки затрат оптимального дерева существенно зависит от того, является ли решение задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева граничным или внутренним, симметричным или асимметричным.

Ниже доказывается, что, если степень однородности функции затрат менеджера не меньше единицы и задача поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет внутреннее решение, то нижняя оценка имеет хорошее качество.

Аналогичные результаты доказываются также для случая, когда степень однородности функции затрат меньше единицы,

[1] Формально говоря, необходимо оговорить также некоторые ограничения на меры исполнителей. Это будет сделано ниже.

меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное дерево симметрично.

Итак, пусть степень однородности функции затрат больше или равна единицы, и наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости r и пропорцию $x = (x_1, \ldots, x_r)$, причем все компоненты пропорции положительны (решение внутреннее).

Рассмотрим следующий алгоритм построения «почти (r, x)-однородного» дерева для заданного множества исполнителей N. Идея алгоритма состоит в том, чтобы делить группу, управляемую каждым менеджером, между его непосредственными подчиненными в пропорции, как можно более близкой к «нормативной» пропорции x, насколько позволяет дискретность задачи. Шаги алгоритма будем иллюстрировать графически.

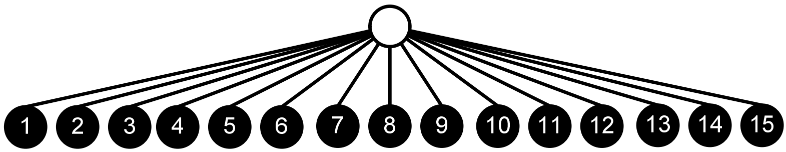


Рисунок 16. Пример веерной иерархии
для множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$

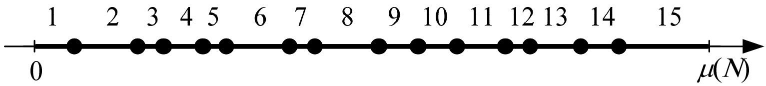


Рисунок 17. Пример графического представления
множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$

1. В качестве исходной иерархии возьмем веерную иерархию с единственным менеджером (см. рис. 16).
2. Отложим меры всех исполнителей множества N (в произвольном порядке) последовательно на прямой в виде отрезков соответствующей длины (см. рис. 17). Получим отрезок $[0, \mu(N)]$, где $\mu(N)$ – мера всего множества исполнителей. На рисунке снизу от прямой изображены координаты, а сверху – номер исполнителя, к которому относится тот или иной отрезок. Далее будем отождествлять исполнителя и соответствующий ему отрезок. Присвоим единственному ме-

неджеру иерархии метку – отрезок $[0, \mu(N)]$, который назовем «нормативным» отрезком.

3. Выберем в иерархии одного из менеджеров «нижнего звена»[1] m. Пусть менеджеру m соответствует нормативный отрезок $[a, b]$ (на первой итерации $a = 0$, $b = \mu(N)$) Разделим этот отрезок на r частей в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$. В результате получим некоторые «нормативные» отрезки $[y_0, y_1], \ldots, [y_{r-1}, y_r]$, где $y_0 = a$, $y_r = b$ (на рис. 18 границы отрезков изображены вертикальными пунктирными линиями).

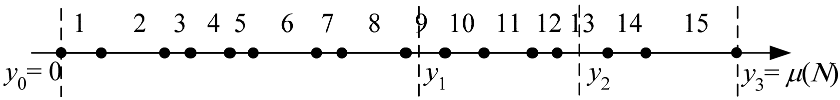


Рисунок 18. Пример нормативных отрезков для первой итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

В наилучшем однородном дереве непосредственные подчиненные менеджера m должны были бы управлять группами мер $y_1 - y_0, \ldots, y_r - y_{r-1}$.

Однако меры исполнителей могут не позволить разбить всех исполнителей на группы с такими мерами. Поэтому сдвинем все концы нормативных отрезков к ближайшей к данному концу границе между исполнителями (см. рис. 19).

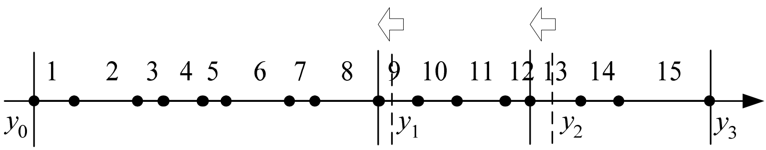


Рисунок 19. Пример фактических отрезков для первой итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

Получим отрезки $[y_0', y_1'], \ldots, [y_{r-1}', y_r']$, которые будем называть «фактическими». На рисунке границы фактических отрезков изображены вертикальными сплошными линиями, а

[1] *Менеджер нижнего звена* – это менеджер, у которого в подчинении нет других менеджеров (на 1-й итерации им будет топ-менеджер).

стрелки показывают направление сдвига границ нормативных отрезков.

Поскольку концы фактических отрезков совпадают с границами между исполнителями, каждому такому отрезку соответствует множество исполнителей s_i, $i = 1, \ldots, r$. Легко проверить, что объединение этих множеств совпадает с группой, которой управляет менеджер m. Некоторые (но не все) фактические отрезки могут иметь нулевую длину, и им соответствует пустое множество исполнителей. Некоторые фактические отрезки состоят из единственного исполнителя.

4. Если ненулевую длину имеет более одного фактического отрезка и r' отрезков состоят более чем из одного исполнителя, то добавим в иерархию r' менеджеров, подчиним им непосредственно соответствующие группы исполнителей s_i, а самих менеджеров подчиним непосредственно менеджеру m (см. рис. 20). Каждому добавленному менеджеру поставим в соответствие метку – его **нормативный** отрезок $[y_{i-1}, y_i]$. Если только одному фактическому отрезку соответствует непустое множество исполнителей или если все отрезки состоят не более чем из одного исполнителя, то добавление менеджеров не производится, а менеджеру m присваивается дополнительная метка «стоп».

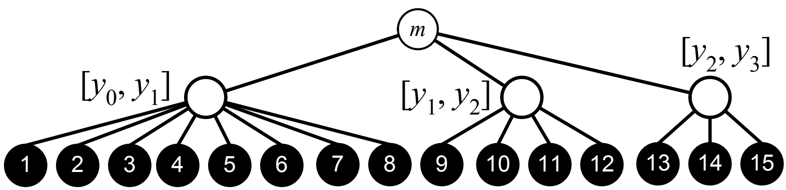


Рисунок 20. Пример добавления новых менеджеров на первой итерации алгоритма

5. Если в иерархии имеются менеджеры нижнего звена без метки «стоп», то перейдем на шаг 3. В противном случае алгоритм завершается.

Проиллюстрируем работу алгоритма, проведя еще несколько его итераций.

Рассмотрим менеджера нижнего звена, управляющего группой исполнителей {13, 14, 15} (см. рис. 20). Ему соответствует нормативный отрезок $[y_2, y_3]$. Разделим его в пропорции x и сдвинем границы новых нормативных отрезков (см. рис. 21). Заметим, что сдвигаются не только внутренние концы отрезков – точка y_2 также сдвигается влево на границу между исполнителями 12 и 13. Получили три фактических отрезка, первый из которых состоит из исполнителей 13 и 14, второй – из исполнителя 15, третий же фактический отрезок пустой. Тогда в иерархию добавляется один новый менеджер m', ему подчиняется группа {13, 14} (при попытке далее разделить группу менеджера m' получим две группы из одного исполнителя, а третью – пустую, поэтому менеджеру m' можно сразу присвоить метку «стоп»).

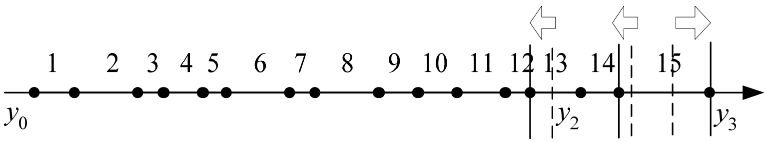


Рисунок 21. Пример фактических отрезков для второй итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

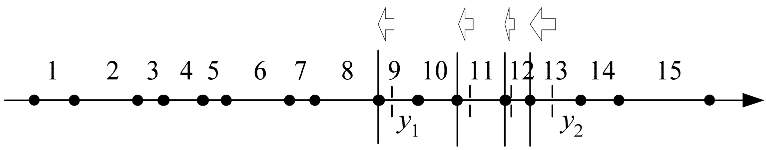


Рисунок 22. Пример фактических отрезков для третьей итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

Перейдем к следующей итерации. Возьмем менеджера с меткой $[y_1, y_2]$ (см. рис. 20). Границы нормативных отрезков, полученных в результате разбиения отрезка $[y_1, y_2]$, изображены на рис. 22 пунктирными линиями. На том же рисунке сплошными линиями изображены границы фактических отрезков, соответствующих группам исполнителей {9, 10}, {11} и {12}. Следовательно, в иерархию добавляется один новый менеджер, которому непосредственно подчиняется группа исполнителей {9, 10}.

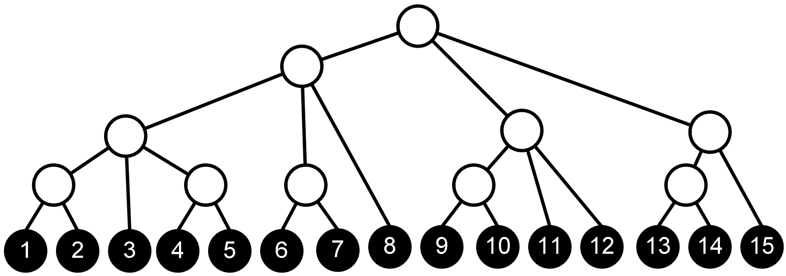


Рисунок 23. Пример TD-дерева

В процессе работы алгоритма иерархия строится «сверху вниз» – от верхних уровней к нижним. Будем называть результирующую иерархию *TD-деревом* (от английского top-down) и обозначать ее затраты через $C_{TD}^{r,x}(N)$ (где r, x – параметры исходного однородного дерева, а N – множество исполнителей).

Продолжая итерации алгоритма для рассматриваемого примера, где множество N состоит из 15-ти исполнителей, получим результирующее TD-дерево, изображенное на рис. 23.

Для доказательства следующего утверждения необходимо ввести дополнительное ограничение технического характера на функцию затрат менеджера.

Определение 15. Пусть наилучшее однородное дерево имеет внутреннюю пропорцию $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Однородная функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ называется *степенно-ограниченной на симплексе D_r*, если найдутся такие числа A и λ, что для любой точки $y = (y_1, \ldots, y_r) \in D_r$ выполняется неравенство

$$c(y_1,...,y_r) \le c(x_1,...,x_r) + A(\sum_{i=1}^{r} | y_i - x_i |)^{\lambda} .$$

Степенно-ограниченность функции затрат означает, что функция не слишком быстро возрастает[1] при движении по симплексу D_r в любом направлении от точки x.

[1] Условие степенной ограниченности является обобщением известного условия непрерывности по Липшицу. В частности, определенная на симплексе D_r гладкая функция степенно-ограничена, если она ограничена на этом симплексе. Можно показать, что функции (I)-(IV) из примера 5 степенно-ограничены на любом симплексе, а функция (V) –

Утверждение 7. Пусть степень однородности функции затрат менеджера больше или равна единице, меры всех исполнителей лежат в некотором диапазоне от $\underline{\mu}$ до $\overline{\mu}$, а наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости r и внутреннюю пропорцию x. Если функция затрат степенно-ограничена на симплексе D_r, то отношение $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ стремится к единице при стремлении количества исполнителей во множестве $N = \{1, \ldots, n\}$ к бесконечности. Иначе говоря, TD-дерево *субоптимально* при больших n.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Следствие 3. В условиях утверждения 7 отношение затрат оптимального дерева к их нижней оценке (11) стремится к единице при стремлении количества исполнителей к бесконечности.

Доказательство следует из того, что затраты оптимального дерева лежат между их нижней оценкой и $C_{TD}^{r,x}(N)$.

Утверждение 7 и следствие 3 говорят о том, что если при степени однородности функции затрат $\gamma \geq 1$ имеется внутреннее решение задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева, то нижняя оценка $C_L(N)$ хорошо описывает затраты оптимального дерева в больших организациях (при большом количестве исполнителей). Более того, можно построить субоптимальное дерево, затраты которого будут лишь не намного превышать нижнюю оценку. Таким образом, с практической точки зрения в этом случае задачу поиска оптимального дерева можно считать решенной.

Пусть теперь степень однородности функции затрат строго меньше единицы и все исполнители имеют одинаковую меру. Без ограничения общности считаем, что меры всех исполнителей равны единице. Зафиксируем некоторую норму управляемости r

---

нет, так как она неограниченно возрастает при приближении к границам симплекса. Тем не менее, в следующей главе показывается, что и ее можно привести к ограниченной функции с сохранением содержательной интерпретации.

и рассмотрим следующий алгоритм построения дерева над множеством из n исполнителей.

1. Запишем число n в r-ичной системе исчисления, то есть представим его в виде $n = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \ldots + a_k \cdot r^k$, где k – ближайшее снизу целое к числу $\log_r n$.
2. Построим a_k симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^k исполнителей, затем a_{k-1} симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^{k-1} исполнителей, …, a_2 симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^2 исполнителей, a_1 веерных r-иерархий и a_0 «деревьев», состоящих из единственного исполнителя (см. рис. 24). Если $n = r^k$, то мы получили искомую иерархию и алгоритм завершен. В противном случае получили граф, состоящий из $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ несвязанных между собой иерархий.

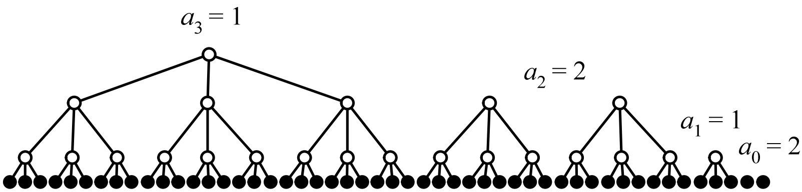


Рисунок 24. Пример построения дерева для 50 исполнителей и нормы управляемости $r = 3$

3. Из множества сотрудников графа, не имеющих начальников, выберем r сотрудников, управляющих группами исполнителей наименьшей меры (если менее r сотрудников не имеют начальников, выберем их всех). Добавим в граф нового менеджера и дадим ему этих сотрудников в непосредственное подчинение.
4. Будем повторять шаг 3 до тех пор, пока не останется только один сотрудник, не имеющий начальника, а граф, соответственно, не станет иерархией над множеством из n исполнителей (см. рис. 25).

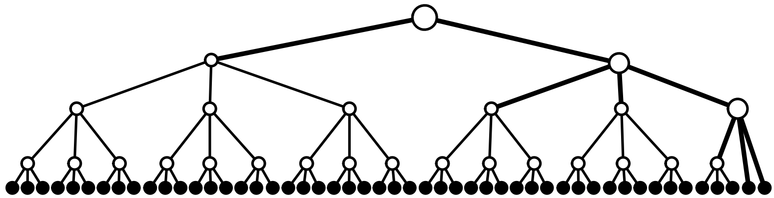


Рисунок 25. Пример дерева для 50 исполнителей и $r = 3$ (добавляемые на шаге 3 менеджеры и связи отмечены более жирно)

В процессе работы алгоритма иерархия строится «снизу-вверх» – от нижних уровней к верхним. Будем называть результирующую иерархию *BU-деревом* (от английского bottom-up) и обозначать ее затраты через $C_{BU}^{r}(n)$ (где индекс r соответствует максимальной норме управляемости дерева, а n – количество исполнителей).

Утверждение 8. Пусть степень однородности функции затрат менеджера меньше единицы, меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное дерево симметрично и имеет норму управляемости r. Если при этом для всех $r' \leq r$ функция затрат менеджера ограничена на симплексе $D_{r'}$, то отношение $C_{BU}^{r}(n)/C_L(n)$ стремится к единице при $n \to \infty$, то есть BU-дерево *субоптимально* при больших n.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Аналогичный результат справедлив и для случая, когда ищется оптимальное R-дерево, $R \geq 2$.

Следствие 4. Пусть степень однородности функции затрат менеджера меньше единицы, меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное R-дерево симметрично и имеет норму управляемости r. Если при этом для всех $r' \leq r$ функция затрат менеджера ограничена на симплексе $D_{r'}$, то отношение $C_{BU}^{r}(n)/C_{L}^{R}(n)$ стремится к единице при $n \to \infty$, то есть BU-дерево с нормой управляемости, не большей r, *субоптимально* при больших n на классе всех R-деревьев.

Доказательство этого следствия практически дословно повторяет доказательство утверждения 8.

Следствие 5. В условиях утверждения 8 (следствия 4) отношение затрат оптимального дерева (соответственно, *R*-дерева) к их нижней оценке (12) (соответственно, (13)) стремится к единице при стремлении количества исполнителей к бесконечности.

Доказательство следует из того, что затраты оптимального дерева (*R*-дерева) лежат между их нижней оценкой и $C^r_{BU}(n)$.

Таким образом, если меры исполнителей одинаковы и наилучшее однородное дерево (*r*-дерево) симметрично, то нижняя оценка $C_L(n)$ хорошо описывает затраты оптимального дерева (*r*-дерева) в больших организациях (при больших *n*), и, кроме того, можно построить субоптимальное дерево (*r*-дерево), затраты $C^r_{BU}(n)$ которого будут не сильно отличаться от затрат оптимального дерева (*r*-дерева).

Условие одинаковости мер исполнителей можно несколько ослабить – до требования того, чтобы меры всех исполнителей были целыми неотрицательными степенями нормы управляемости *r* наилучшего однородного дерева.

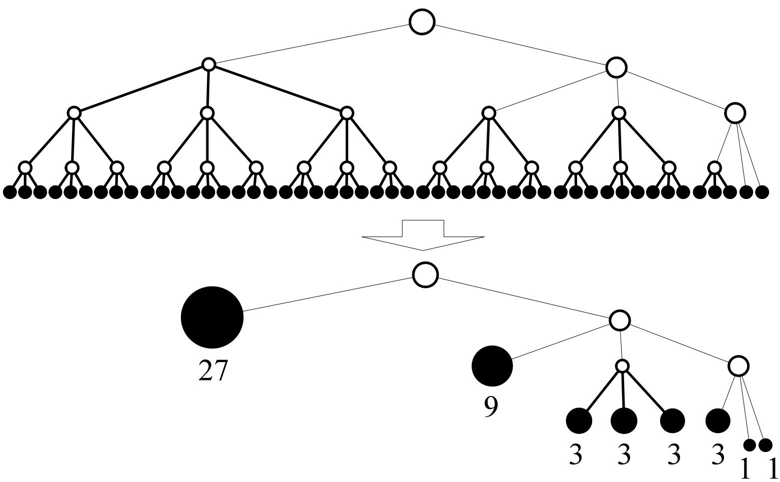


Рисунок 26. Пример построения BU-дерева для множества исполнителей, имеющих различные меры

В этом случае суммарная мера μ исполнителей является целым числом, и можно построить BU-дерево для μ исполнителей, а затем заменить некоторые поддеревья на нижних уровнях исполнителями соответствующей меры. На рис. 26 приведено построение такого модифицированного BU-дерева для 8 исполнителей с мерами 1, 1, 3, 3, 3, 3, 9, 27 и нормой управляемости $r = 3$. Сначала строится BU-дерево для $\mu = 50$ исполнителей, а затем некоторые поддеревья заменяются исполнителями мер 3, 9 и 27.

Если исполнители имеют меры $\mu(1), \ldots, \mu(n)$, то затраты BU-дерева равны

$$C_{BU}^{r}(\mu) - \sum_{i=1}^{n}(\mu(i) - \mu(i)^{\gamma})c(1/r,...,1/r)/(r^{1-\gamma} - 1),$$

в то время как нижнюю оценку затрат оптимального дерева для такого множества исполнителей можно записать в виде

$$C_{L}(\mu) - \sum_{i=1}^{n}(\mu(i) - \mu(i)^{\gamma})c(1/r,...,1/r)/(r^{1-\gamma} - 1).$$

В обоих этих выражениях вычитается одинаковая сумма, и, поскольку $C_{BU}^{r}(\mu)/C_L(\mu)$ стремится к единице при $\mu \to \infty$, можно считать, что и в этом случае нижняя оценка имеет хорошее качество, а BU-дерево субоптимально.

Если же при степени однородности функции затрат $\gamma < 1$ наилучшим является асимметричное однородное дерево, то качество нижней оценки $C_L(n)$ может быть хуже. Однако даже в этом случае она дает верный порядок роста затрат оптимального дерева с ростом количества исполнителей n. Действительно, пусть наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости r и асимметричную (но внутреннюю!) пропорцию x. Тогда при больших n нижняя оценка определяется выражением

$$C_{L}(n) = (n - n^{\gamma})\frac{c(x_1,...,x_r)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma} - 1}.$$

Из доказательства утверждения 8 следует, что отношение затрат $C_{BU}^{r}(n)$ BU-дерева с максимальной нормой управляемости r к затратам симметричного однородного r-дерева стремится к единице. В соответствии с формулой (8) затраты симметричного однородного r-дерева равны

$$(n-n^{\gamma})\frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma}-1}.$$

Следовательно, существует конечный предел отношения затрат BU-дерева к нижней оценке $C_L(n)$. Значение этого предела определяется выражением

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{BU}^{r}(n)}{C_L(n)}=\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i^{\gamma}-1}{r^{1-\gamma}-1}\frac{c(1/r,...,1/r)}{c(x_1,...,x_r)}, \tag{17}$$

и если пропорция x не сильно отличается от симметричной, а функция затрат менеджера ведет себя достаточно хорошо на симплексе D_r, то значение предела не намного больше единицы.

Поскольку затраты BU-дерева являются верхней оценкой затрат оптимального дерева, для заданного количества исполнителей n можно гарантировать, что затраты оптимального дерева лежат в диапазоне от $C_L(n)$ до $C_{BU}^{r}(n)$. То есть, при больших n затраты оптимального дерева превышают нижнюю оценку не более чем на процент, задаваемый значением предела (17).

3.7. Последовательные иерархии и граничные решения

В предыдущем разделе показано, что если существует внутреннее решение задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева, то во многих случаях нижняя оценка (9) хорошо описывает затраты оптимальной иерархии, можно построить субоптимальные деревья и т.д. Это имеет место в большинстве рассматриваемых в следующей главе примеров и прикладных задач. Однако для некоторых функций затрат при поиске параметров наилучшего однородного дерева реализуется именно граничное решение. Тогда, как показано в разделе 3.5, нахождение нижней оценки существенно усложняется, притом качество найденной нижней оценки может быть ниже, чем при наличии внутреннего решения. Приведем пример оптимальности граничного решения.

Пример 19. Рассмотрим введенную в примере 5 функцию затрат менеджера (I), имеющую вид

$$c(\mu_1,...,\mu_r)=[\mu_1^{\alpha}+\ldots+\mu_r^{\alpha}-\max(\mu_1^{\alpha},\ldots,\mu_r^{\alpha})]^{\beta}.$$

Эта функция затрат подробно исследовалась в [85, 115]. Было доказано, что она монотонна по группам, следовательно, оптимальную иерархию достаточно искать среди деревьев. Кроме того, известно, что при $\beta \le 1$ эта функция расширяющая, то есть оптимальна веерная иерархия с единственным менеджером, непосредственно управляющим всеми исполнителями. При $\beta \ge 1$ функция сужающая, то есть оптимально некоторое 2-дерево. Таким образом, интерес представляет, по сути, лишь поиск параметров оптимального 2-дерева при $\beta \ge 1$. Поиск параметров наилучшего однородного 2-дерева, в соответствии с формулой (14), сводится к нахождению пропорции $(x, 1-x)$, минимизирующей выражение

$$\frac{(x^{\alpha} + (1-x)^{\alpha} - \max[x^{\alpha}, (1-x)^{\alpha}])^{\beta}}{|1 - x^{\alpha\beta} - (1-x)^{\alpha\beta}|} \tag{18}$$

при условии, что $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon = \min_{i \in N} \mu(i) / \sum_{i \in N} \mu(i)$.

Без ограничения общности считаем, что x – первая компонента пропорции меньше второй компоненты, $1-x$. Тогда выражение (18) преобразуется к виду

$$\frac{x^{\alpha\beta}}{|1 - x^{\alpha\beta} - (1-x)^{\alpha\beta}|} \tag{19}$$

и необходимо найти его минимум при $x \in [\varepsilon, 0.5]$. Можно показать, что функция (24) монотонно возрастает по x, то есть всегда оптимально граничное решение – пропорция $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$.

Если рассмотреть случай равенства единице мер всех исполнителей, то $\varepsilon = 1/n$ и, по формуле (12) можно вычислить нижнюю оценку затрат 2-дерева:

$$C_L(n) = \left| \frac{n^{\alpha\beta} - n}{n^{\alpha\beta} - 1 - (n-1)^{\alpha\beta}} \right|. \tag{20}$$

Известно [85], что если $\beta \ge 1$ и $\alpha\beta \ge 1$, то функция затрат является сильно сужающей, и оптимальна последовательная иерархия. Легко проверить, что если все n исполнителей имеют меру 1, то затраты каждого менеджера последовательной иерархии равны 1. Количество менеджеров любого 2-дерева равно $n-1$, значит, затраты всей иерархии равны $n-1$.

Нижняя же оценка (20) при больших n и $\alpha\beta \geq 1$ примерно равна $n/(\alpha\beta)$, то есть может сильно занижать затраты оптимальной иерархии, если $\alpha\beta$ существенно больше единицы. •

В последовательной иерархии при делении каждым менеджером подчиненной ему группы между двумя своими непосредственными подчиненными максимально возможная часть группы отдается одному из них (например, второму), в то время как первая группа состоит из единственного исполнителя. Можно сказать, что группа всегда делится между подчиненными так, чтобы отношение мер управляемых ими групп было минимально.

Но ведь то же самое предполагает и наилучшее однородное 2-дерево в случае граничного решения, пропорции (ε, $1 - \varepsilon$)! Поэтому вполне возможной представляется связь между граничным решением задачи о параметрах наилучшего однородного дерева (при норме управляемости, равной двум) и оптимальностью последовательной иерархии. В предыдущем примере, например, в области параметров $\beta \geq 1$ и $\alpha\beta \geq 1$ оптимальна последовательная иерархия и задача поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет граничное решение. Приведем еще один пример, иллюстрирующий предполагаемую связь[1].

Пример 20. Рассмотрим функцию затрат (III), имеющую вид

$$c(\mu_1, ..., \mu_r, \mu) = [\mu^\alpha / \max(\mu_1^\alpha, ..., \mu_r^\alpha) - 1]^\beta .$$

Степень однородности этой функции равна нулю, поэтому в соответствии с формулой (14) для поиска параметров наилучшего однородного дерева необходимо минимизировать по норме управляемости k и пропорции y функцию

$$[1/\max(y_1^\alpha, \ldots, y_k^\alpha) - 1]^\beta/(k - 1).$$

Из вида этого выражения можно заметить, что при фиксированной норме управляемости k минимум затрат достигается, когда все компоненты пропорции, кроме одной, минимальны. Следовательно, в данном случае внутренних решений задачи (15) нет, и для нахождения нижней оценки затрат оптимального дерева необходимо пользоваться формулой (14).

[1] Этот пример также показывает один из случаев, когда возможно граничное решение для нормы управляемости строго большей двух.

Из формулы (14) следует, что оптимальная при заданной норме управляемости k пропорция равна $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, 1-(k-1)\varepsilon)$. Значит, для определения оптимальной нормы управляемости необходимо выбором k минимизировать выражение

$$[1/(1-(k-1)\varepsilon)^{\alpha}-1]^{\beta}/(k-1).$$

Разделим это выражение на константу ε и сделаем замену переменной $z := (k-1)\varepsilon$. Тогда минимизируемое выражение приобретает вид $\varphi(z) := [1/(1-z)^{\alpha}-1]^{\beta}/z$. Если все исполнители имеют одинаковые меры, то $\varepsilon = 1/n$ и переменная z, которая в этом случае равна $(k-1)/n$, имеет простую содержательную интерпретацию – это доля всех исполнителей, которыми топ-менеджер наилучшего однородного дерева управляет непосредственно. Управление же остальными исполнителями он поручает своему заместителю.

Для того чтобы для заданных параметров α и β определить оптимальное значение z, будем считать, что z может принимать любые значения из отрезка [0, 1], и вычислим нули производной функции $\varphi(z)$, которые находятся из решения уравнения

$$\alpha\beta \cdot z = (1-z)(1-(1-z)^{\alpha}). \tag{21}$$

Поскольку $\alpha \geq 0$, это уравнение всегда имеет корень $z = 0$. Кроме того, поскольку в левой части уравнения стоит линейная функция, а в правой – вогнутая, этот корень будет единственным, если в точке $z = 0$ производная правой части, $(1+\alpha)(1-z)^{\alpha}-1$, не превышает производной левой части, $\alpha\beta$.

Это значит, что при $\beta \geq 1$ функция $\varphi(z)$ монотонна на отрезке [0, 1]. Легко проверить, что она возрастает на этом отрезке. Следовательно, оптимальной является минимальная возможная норма управляемости однородного дерева $k = 2$, и в наилучшем однородном дереве топ-менеджер непосредственно управляет одним исполнителем, отдавая остальных в подчинение своему заместителю. Поскольку в [85] было доказано, что для функции затрат (III) при $\beta \geq 1$ оптимальна последовательна иерархия, такой вид наилучшей однородной иерархии вполне соответствует предположению о связи граничного решения при норме управляемости 2 с оптимальностью последовательной иерархии.

Если же $\beta < 1$, то уравнение (21) имеет единственный положительный корень на интервале (0, 1). Этот корень z^* и будет соответствовать минимуму функции $\varphi(z)$, и, следовательно, минимуму затрат однородного дерева. При этом норма управляемости наилучшего однородного дерева, вычисляемая по формуле $r := z^*/\varepsilon + 1$, может уже быть строго больше двух.

К сожалению, в общем виде невозможно получить аналитическое выражение для корня уравнения (21). Однако можно на качественном уровне проследить зависимость оптимальной доли z (и, следовательно, нормы управляемости однородного дерева) от параметров α и β. Так, легко заметить, что с уменьшением β от единицы к нулю оптимальная доля z монотонно увеличивается от нуля к единице.

Поскольку для рассматриваемой функции затрат отсутствуют внутренние решения задачи (15), нижняя оценка затрат, получаемая на основе найденных параметров однородного дерева, будет существенно занижать затраты оптимального дерева. •

Несмотря на то, что рассмотренные примеры показывают наличие некоторой связи между граничностью решения задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева и оптимальностью последовательной иерархии, формально эту связь обосновать пока не удается. Поэтому если в результате решения задачи (15) оказывается, что норма управляемости наилучшего однородного дерева равна двум и имеет место граничное решение, то этого недостаточно для утверждения того, что последовательная иерархия является оптимальным деревом – оптимальность последовательной иерархии требуется доказывать отдельно.

Для этого можно, например, доказать, что функция затрат является сильно сужающей (см. раздел 1.4). Тогда оптимальность последовательной иерархии будет следовать из утверждения 3. С помощью этого подхода в [85] была доказана оптимальность последовательной иерархии для функции затрат (I) при $\beta \geq 1$ и $\alpha\beta \geq 1$, а также функции затрат (III) при $\beta \geq 1$.

Доказать, что функция затрат менеджера сильно сужающая, удается не всегда. Несколько проще показать, что функция затрат просто сужающая (см. раздел 1.4). В этом случае, по утверждению 2, оптимальной является 2-иерархия. Затем можно воспользоваться

зоваться одним из двух приводимых ниже достаточных условий оптимальности последовательной иерархии. До конца раздела будем предполагать, что функция затрат $c(\cdot)$ менеджера зависит от мер, и меры всех исполнителей равны единице[1].

Утверждение 9. Если для любых натуральных чисел a и $a' \le a$ выполняется неравенство $c(a+1-a', a') \ge c(1, a)$ и функция $c(1, a)$ не возрастает по a, то оптимальным 2-деревом является последовательная иерархия.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Иными словами, если затраты менеджера, управляющего группой заданной меры a, минимальны при возложении максимального объема работы на одного из двух его заместителей, и с ростом a эти минимальные затраты не возрастают, то оптимальным 2-деревом является последовательная иерархия.

Заметим, что для монотонной по группам функции затрат функция $c(1, a)$ не убывает по a, следовательно, для того, чтобы монотонная по группам функция затрат удовлетворяла условиям утверждения 9, функция $c(1, a)$ должна быть константой.

Утверждение 10. Если для любых натуральных чисел $n_1, n_2 \ge 2$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$c(n_1, n_2) - c(n_1 + n_2 - 1, 1) \ge c(n_1 - 1, n_2) - c(n_1 - 1, 1),$$

$$c(n_1, n_2) - c(n_1 + n_2 - 1, 1) \ge c(n_1, n_2 - 1) - c(n_2 - 1, 1),$$

то последовательная иерархия является оптимальным 2-деревом.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Следствие 6. Если функция затрат $c(\cdot)$ монотонна по группам и $c(1, a) = \text{const}$ для любого натурального числа a, то последовательная иерархия является оптимальным 2-деревом.

Доказательство. Запишем первое неравенство из условия утверждения 10 в виде

$$c(n_1, n_2) - c(n_1 - 1, n_2) \ge c(n_1 + n_2 - 1, 1) - c(n_1 - 1, 1).$$

Левая часть неравенства не меньше нуля в силу монотонности по группам функции затрат. Правая часть равна нулю, так

---

[1] Отметим, что эти утверждения не требуют однородности функции затрат и применимы к любым функциям затрат, зависящим от мер.

как, по условию, $c(1, a) = \mathrm{const}$, то есть неравенство всегда верно, и выполняются условия утверждения 10. •

Напомним, что утверждения 9 и 10, как и следствие 6, справедливы только тогда, когда меры всех исполнителей равны единице. Рассмотрим пример использования утверждений 9 и 10.

Пример 21. Для функции затрат (I) $c(1, a) = 1$ для любого натурального числа a. Поскольку, как показано в [85], функция (I) монотонная по группам, из следствия 6 получаем, что последовательная иерархия является оптимальным 2-деревом. В [85] доказано, что для функции (I) 2-дерево оптимально при $\beta \geq 1$. Следовательно, для функции затрат (I) при $\beta \geq 1$ последовательная иерархия является оптимальной на классе всех иерархий.

Рассмотрим функцию затрат (III). Для нее при произвольных натуральных числах a и $a' \leq a$ верно неравенство

$$c(a+1-a', a') = \min\left[\left(\frac{(a+1)^{\alpha}}{(a')^{\alpha}} - 1\right)^{\beta}, \left(\frac{(a+1)^{\alpha}}{(a+1-a')^{\alpha}} - 1\right)^{\beta}\right] \geq$$

$$\geq [(a+1)^{\alpha} / a^{\alpha} - 1]^{\beta} = c(1, a).$$

Кроме того, функция $c(1, a) = ((1 + 1/a)^{\alpha} - 1)^{\beta}$ не возрастает по a. Поэтому по утверждению 9 последовательная иерархия является оптимальным 2-деревом. В [115] показано, что функция затрат (III) сужающая при $\beta \geq 1$. Следовательно, для функции затрат (III) при $\beta \geq 1$ последовательная иерархия является оптимальной на классе всех деревьев[1] (но нельзя гарантировать отсутствия недревовидной иерархии с меньшими затратами, так как функция затрат (III) не является монотонной по группам). •

[1] Обосновать оптимальность последовательной иерархии для функции (III) при $\beta \geq 1$ можно и доказав, как это было сделано в [115], что эта функция затрат сильно сужающая (см. определение 11).

ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Итак, в предыдущей главе были описаны методы решения задачи поиска оптимальной древовидной иерархии в случае, когда функция затрат менеджера является однородной.

Было показано, что оптимальное дерево стремится по возможности быть однородным деревом, то есть иерархией, в которой все менеджеры имеют одинаковую норму управляемости r и делят подчиненную группу исполнителей между своими заместителями в одинаковой пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$.

Была найдена аналитическая формула (9) для нижней оценки затрат оптимального дерева, определяемая выражением

$$C_L(N) = \begin{cases} \left| \mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma \right| \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^\gamma\right|}, \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min\limits_{k=2\ldots n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\ldots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \gamma = 1, \end{cases}$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – это множество исполнителей с мерами $\mu(1), \ldots, \mu(n)$, μ – суммарная мера исполнителей, ε – отношение меры самого «мелкого» исполнителя к их суммарной мере μ, $D_k(\varepsilon)$ – часть k-мерного симплекса, на которой каждая компонента пропорции y больше или равна ε, а γ – степень однородности функции затрат менеджера.

Также были предложены методы нахождения этой нижней оценки и был рассмотрен ряд иллюстративных примеров.

Было доказано, что в большинстве важных с практической точки зрения случаев нижняя оценка хорошо описывает затраты оптимального дерева при большом количестве исполнителей, и используя ее можно построить субоптимальные деревья, затраты которых будут лишь немного превышать затраты оптимального дерева.

Эти результаты позволяют при решении прикладных задач использовать нижнюю оценку затрат оптимального дерева вместо их точного значения. Для случаев, когда качество нижней оценки недостаточно, необходимо разрабатывать специальные методы, например, в разделе 3.7 были предложены иные, не основанные на этой оценке методы поиска оптимальных деревьев.

В настоящей главе рассматривается ряд простых содержательных моделей, которые, с одной стороны, позволяют проиллюстрировать технику решения задач поиска оптимальных иерархий (расчет параметров наилучших однородных деревьев и нахождение нижних оценок), а с другой стороны, показывают, каким образом полученные в предыдущей главе теоретические результаты интерпретируются в разных предметных областях.

В большинстве рассматриваемых задач функция затрат менеджера сводится к одной из функций, введенных в разделе 1.3.

4.1. Организация сборочного производства

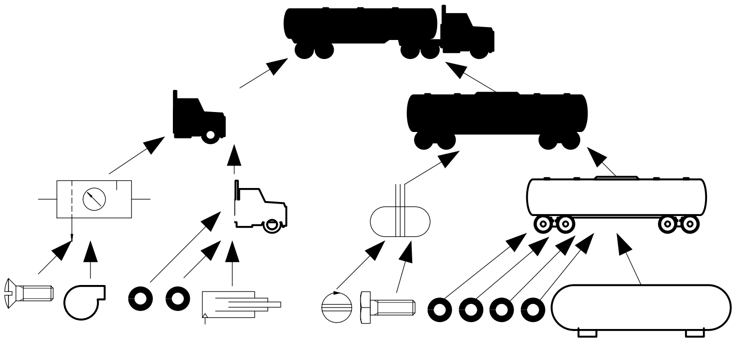


Рисунок 27. Пример схемы сборочного производства

Рассмотрим следующую задачу организации сборочного производства. Пусть собираемое устройство состоит из n исходных деталей. В процессе сборки устройства детали соединяются между собой, образуя отдельные его блоки или агрегаты. Процесс производства делится на ряд этапов, единичных операций сборки, каждая из которых состоит в том, что несколько блоков и/или отдельных деталей соединяются, образуя более сложный блок до тех пор, пока не будет собрано все устройство.

Процесс сборки можно изобразить в виде ориентированного дерева, листья которого соответствуют исходным деталям, корневой вершине соответствует собранное устройство, остальным вершинам – промежуточные блоки, а дуги дерева показывают порядок сборки (см. рис. 27). Каждой секции такого дерева соответствует отдельный этап сборки. Легко видеть, что если считать детали исполнителями, а блоки – менеджерами, то любая схема сборки является древовидной иерархией над множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$.

Не все последовательности соединения деталей могут быть допустимы с технологической точки зрения, поэтому в общем случае множество Ω допустимых схем сборки может быть подмножеством множества всех древовидных иерархий.

В процессе выбора рациональной схемы сборки возникают различные оптимизационные задачи. Например, можно ставить задачу максимизации пропускной способности производства, которая в условиях поточной сборки сводится к задаче минимизации времени выполнения самой продолжительной операции. Можно при заданной пропускной способности производства ставить задачу поиска допустимой схемы сборки (иерархии), минимизирующий затраты, стоимость производства.

Затраты сборочного производства (затраты иерархии) складываются из затрат на проведение каждого этапа сборки (затрат менеджеров иерархии, в терминах определений главы 1). Затраты этапа сборки (менеджера) зависят от того, какие блоки соединяются на данном этапе. В свою очередь, любой блок (менеджер) однозначно описывается набором деталей (группой исполнителей), из которых он состоит.

Следовательно, затраты $c(m, H)$ этапа m в схеме сборки H зависят от наборов деталей, составляющих собираемые на данном этапе блоки, то есть описываются секционной функцией затрат вида $c(m, H) = c(s_1, \ldots, s_r)$, где $s_1, \ldots, s_r$ – соответствующие сбираемым блокам наборы деталей (группы исполнителей).

Таким образом, задача организации сборочного производства сводится к сформулированной в главе 1 задаче поиска оптимальной древовидной иерархии для секционной функции затрат.

В общем случае для поиска оптимальной схемы сборки можно использовать разработанные в [85] численные алгоритмы поиска оптимального дерева. Здесь же на примере простой модели проиллюстрируем возможные способы аналитического решения задачи.

Во-первых, будем предполагать, что технологические ограничения отсутствуют, и допустимы все схемы сборки (все древовидные иерархии).

Введем понятие сложности работы по присоединению детали (исполнителя, в терминах главы 1) к некоторому блоку. Будем считать, что сложность детали $w \in N$ определяется некоторым положительным числом $\mu(w)$ (мерой этого исполнителя[1]), и не зависит от того, к какому блоку эта деталь присоединяется. Сложность присоединения блока $s \subseteq N$ (к другому блоку) равна суммарной сложности деталей, из которых он состоит (мере группы исполнителей s).

Будем считать, что трудоемкость присоединения блока определяется его сложностью, возведенной в неотрицательную степень α. Если на некотором этапе сборки соединяются r блоков и/или деталей со сложностями $\mu_1, \ldots, \mu_r$, то на этом этапе необходимо выполнить $r-1$ соединений блоков. Понятно, что выгоднее всего присоединять менее сложные блоки/детали к самому сложному блоку, поэтому общая трудоемкость этапа сборки равна

$$\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha, \ldots, \mu_r^\alpha).$$

Если вдобавок предположить, что затраты этапа равны его трудоемкости, возведенной в некоторую неотрицательную степень β, то получим, что затраты этапа сборки определяются введенной в примере 5 функцией (I). Она задается формулой[2]

$$c(\mu_1, \ldots, \mu_r) = [\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_r^\alpha - \max(\mu_1^\alpha, \ldots, \mu_r^\alpha)]^\beta.$$

Логично полагать, что маржинальные затраты не убывают с ростом трудоемкости, то есть $\beta \geq 1$.

В [115] показано, что при $\beta \geq 1$ функция затрат (I) сужающая, то есть оптимальным является 2-дерево. Следовательно, невыгодно на одном этапе соединять более двух блоков, и при выборе схемы сборки достаточно рассматривать только такие схемы, в которых на каждом этапе соединяются ровно два блока. Заметим,

---

[1] В самой простой интерпретации сложность присоединения детали (мера исполнителя) может быть пропорциональной ее массе.

[2] В работе [6], описанной в разделе 2.5, также исследуются иерархии, моделирующие схемы сборки, однако там рассматриваются другая функция затрат этапа сборки.

что в этом случае формула затрат этапа упрощается: затраты равны наименьшей из сложностей блоков, возведенной в неотрицательную степень $\alpha\beta$: $c(\mu_1, \mu_2) = \min[\mu_1, \mu_2]^{\alpha\beta}$.

Если интерпретировать соединение более двух блоков на одном этапе сборки как введение некоторого параллелизма в выполнении этапа[1], то полученный результат показывает невыгодность такого распараллеливания.

Далее, в [115] доказано, что если произведение $\alpha\beta \geq 1$, то функция затрат является сильно сужающей, и оптимальна последовательная иерархия (см. рис. 2 в главе 1), в которой на каждом этапе сборки некоторый блок объединяется с одной из исходных деталей. То есть в последовательной иерархии отсутствуют этапы, на которых между собой соединяются два сложных блока.

С содержательной точки зрения последовательная иерархия соответствует использованию линейного сборочного конвейера, в котором на каждом его участке к частично собранному устройству добавляется новая мельчайшая деталь.

Как показано в примере 21 главы 3, последовательная иерархия также оптимальна и при $\alpha\beta < 1$, если сложности всех деталей (меры всех исполнителей, в терминах главы 1) одинаковы. То есть и в этом случае оптимален линейный конвейер[2].

Таким образом, рассмотренная модель позволяет обосновать экономическую целесообразность конвейерного производства.

Продолжим аналогию с конвейером. Функция затрат (I) учитывает затраты на сам процесс присоединения деталей к блоку, но не учитывает затрат на перемещение блока к следующему сборочному участку. Если считать, что эти затраты зависят только от

---

[1] Постановка задачи предполагает, что каждый этап выполняет один сборщик. В этом случае распараллеливание представить довольно сложно. Однако оно вполне возможно в условиях роботизированного производства, когда один робот-сборщик может одновременно выполнять несколько операций.

[2] Если иерархии с нормой управляемости больше двух считать заведомо неоптимальными, то, используя следствие 6, можно доказать, что последовательная иерархия оптимальна и для неоднородной функции затрат более общего вида: $c(\mu_1, \mu_2) = \varphi(\min[\mu_1, \mu_2])$, где φ – некоторая возрастающая функция.

сложности μ перемещаемого блока, то их учет добавляет к затратам этапа сборки слагаемое вида $\varphi(\mu)$, где $\varphi(\cdot)$ – некоторая неотрицательная возрастающая функция.

Функция затрат (I) является однородной со степенью однородности $\alpha\beta$. Чтобы иметь возможность использовать полученные в главе 3 результаты для исследования модифицированной функции затрат, учитывающей затраты на перемещение блока, предположим, что затраты на перемещение равны $A\mu^{\alpha\beta}$, где A – положительный коэффициент, описывающий существенность этих затрат по сравнению с затратами на, собственно, соединение деталей. Тогда модифицированная функция затрат

$$c(\mu_1,...,\mu_r) = (\sum_{i=1}^{r} \mu_i^{\alpha} - \max(\mu_1^{\alpha},\ldots,\mu_r^{\alpha}))^{\beta} + A(\sum_{i=1}^{r} \mu_i)^{\alpha\beta} .$$

также будет однородной степени $\alpha\beta$.

Чтобы для такой функции затрат найти оптимальную (или хотя бы субоптимальную) схему сборки, в соответствии с развиваемым в главе 3 подходом необходимо решить задачу (15) поиска параметров наилучшего однородного дерева.

Ограничимся поиском наилучшего однородного 2-дерева в предположении, что распараллеливание заведомо невыгодно. Тогда, в соответствии с формулой (15), для поиска параметров наилучшего однородного дерева достаточно найти пропорцию $(x,1-x)$ (где $x \in (0,1/2]$), минимизирующую функцию[1]

$$\frac{x^{\alpha\beta} + A}{|1 - x^{\alpha\beta} - (1-x)^{\alpha\beta}|} . \tag{22}$$

При стремлении x (первой компоненты пропорции) к нулю числитель функции (22) стремится к A, а знаменатель – к нулю, то есть вся функция стремится к бесконечности. Следовательно, минимум этой функции достигается некоторой внутренней точке $x^* > 0$. Этот минимум легко находится численно.

Оптимальная пропорция $(x^*, 1 - x^*)$ показывает соотношение, в котором при оптимальной схеме сборки должны находиться сложности соединяемых на каждом этапе блоков. Так, если $x^* = 0.1$, то сложности соединяемых блоков должны соотноситься как один к девяти.

[1] Для простоты считаем, что $\alpha\beta \neq 1$.

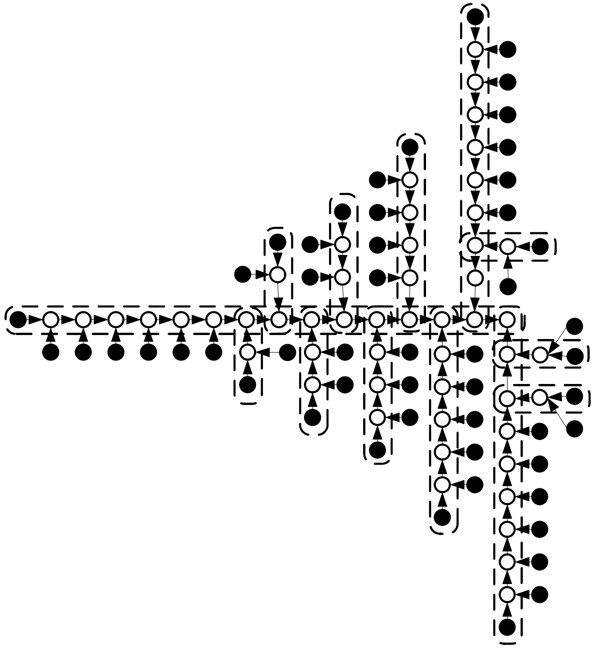


Рисунок 28. Пример сложного конвейера

Поскольку оптимальная пропорция внутренняя, из утверждения 7 следует, что при степени однородности $\alpha\beta \geq 1$ легко строится субоптимальная схема сборки (описанное в разделе 3.6 TD-дерево) с затратами, ненамного превышающими затраты оптимальной схемы. На рис. 28 приведен пример такой схемы для 50-ти исполнителей одинаковой меры и пропорции (0.2, 0.8). Схема сборки состоит из основной конвейерной линии и нескольких соединяющихся с ней вспомогательных линий (конвейерные линии обведены на рисунке пунктиром).

Поскольку обычно оптимальная пропорция существенно асимметрична (x^* близко к нулю), построить субоптимальное дерево при $\alpha\beta < 1$ в общем случае нельзя. Однако при удачном соотношении сложностей исходных деталей удается построить даже оптимальную схему сборки. Для этого сложности деталей должны быть таковы, чтобы на их основе можно было построить однородное дерево с нужной пропорцией (см. раздел 3.3).

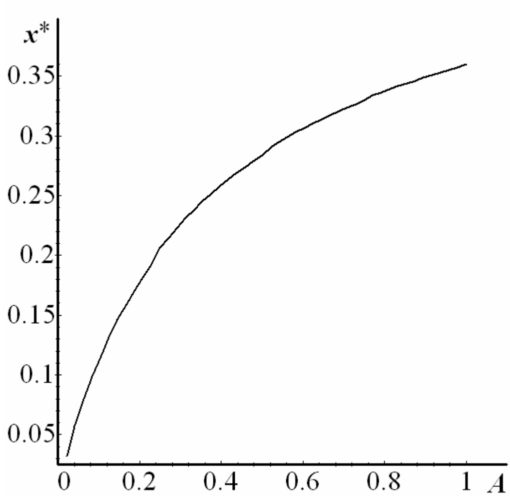


Рисунок 29. График оптимальной пропорции при $\alpha\beta = 0.5$

Численный анализ функции (22) показывает, что значение x^* оптимальной пропорции с ростом коэффициента A (то есть, с ростом затрат на перемещение) возрастает от близких к нулю величин при малых A до величин порядка 0.3 … 0.5 при $A = 1$. Пример графика зависимости оптимальной пропорции x^* от A приведен на рис. 29. Также x^* возрастает с ростом степени однородности функции затрат.

Итак, в настоящем разделе задача построения оптимальной схемы организации сборочного производства сведена к задаче поиска оптимальной иерархии с секционной функцией затрат. Рассмотрены примеры однородных функций затрат, описывающих производственные издержки сборочного производства. Показано, что в отсутствие затрат на перемещение оптимальна линейная конвейерная сборка, исследовано влияние затрат на перемещение на вид оптимальной схемы сборки.

4.2. Модель организационной иерархии

Несмотря на то, что выше рассматривались примеры задач поиска оптимальной иерархии из различных предметных областей, все же основное приложение разработанные в главе 3 методы находят при решении задач организационного дизайна – задач формирования структуры организационных систем.

В настоящем разделе рассматривается пример решения задачи поиска оптимальной организационной структуры. В его основу легла простая модель принятия решения менеджерами на основе отчетов от своих непосредственных подчиненных.

Рассмотрим организацию, основной задачей которой является реализация некоторого технологического процесса (например, процесса производства продукта или коммерческой деятельности). В этот процесс вовлечено n сотрудников – конечных исполнителей, каждый из которых выполняет некоторые фиксированные задачи, реализует некоторый этап процесса.

В процессе работы у исполнителей могут возникать проблемы, решение которых необходимо для успешной реализации порученных им задач. Эти проблемы могут быть обусловлены необходимостью координации работы исполнителей, отсутствием нужной информации, отработкой нештатных ситуаций (например, брака производства) и многими другими причинами.

Исполнители не могут самостоятельно решать данные проблемы в силу своей узкой специализации, ограниченности квалификации и отсутствия времени. Поэтому возникает потребность делегирования решения проблем специально обученным сотрудникам – менеджерам. Менеджеры формируют систему управления, которая берет на себя обеспечение бесперебойного выполнения технологического процесса, а значит, и успешное решение задач организации.

Из-за большого количества проблем, возникающих в процессе работы исполнителей, один менеджер может не справляться с их решением, и эту задачу необходимо разбивать на подзадачи, поручая отдельным менеджерам управление отдельными участками технологического процесса – различными группами исполнителей. Однако если ответственность менеджера ограничена решением проблем лишь одной группы исполнителей, он не может решать проблемы, в которые помимо исполнителей его группы вовлечены и другие сотрудники.

В связи с этим возникает необходимость координации работы менеджеров, для чего формируется новый, более высокий уровень системы управления, состоящий из менеджеров, управляющих менеджерами. Эти менеджеры, в свою очередь, нуждаются в следующем уровне управления, координирующего их работу, и так далее до тех пор, пока на последнем уровне не останется лишь один менеджер (называемый топ-менеджером), которому непосредственно или опосредовано будут подчинены все менеджеры и исполнители организации, и который поэтому сможет решать любую возникающую проблему. Таким образом, система управления представляет собой иерархию (см. определение 1) над множеством исполнителей $N = \{1, \ldots, n\}$.

Содержание каждого менеджера требует затрат (зарплата, организация рабочего места и т.п.), в общем случае зависящих от объема выполняемой менеджером работы. Объем работы, в свою очередь, определяется количеством принимаемых менеджером решений, направленных на решение стоящих перед ним проблем.

Предположим, что если менеджеру в единицу времени приходится принимать P решений, то затраты на его содержание равны P^β, где β – константа, описывающая скорость роста затрат. Логично считать, что маржинальные затраты [129] не убывают с ростом объема работы, то есть $\beta \geq 1$. Параметр β описывает эффективность работы менеджеров – более квалифицированные менеджеры при одинаковом числе проблем несут меньшие затраты, а при одинаковых затратах решают большее число проблем.

Пусть каждый исполнитель $w \in N$ характеризуется своей мерой $\mu(w)$, соответствующей количеству проблем, возникающих на его участке в единицу времени. Тогда число проблем, которые в единицу времени возникают у группы исполнителей, равно сумме мер входящих в нее исполнителей, то есть мере группы.

Менеджер принимает решения на основе отчетов, предоставляемых его непосредственными подчиненными. Будем считать, что объем отчета, который готовит подчиненный для своего начальника, равен μ^α, где μ – мера управляемой этим подчиненным группы исполнителей. Кроме того, предположим, что количество принимаемых начальником решений пропорционально суммарному объему получаемых им отчетов.

Параметр α, принимающий значения на отрезке [0, 1], интерпретируется как коэффициент сжатия информации о проблемах в отчете. Этот коэффициент определяется типичностью проблем, возникающих у исполнителей – если у многих исполнителей возникает одинаковые проблемы, то объем отчета об этих проблемах слабо зависит от количества исполнителей[1], и значение α существенно меньше единицы. Иначе говоря, параметр α описывает степень единообразия технологического процесса. С другой стороны, этот параметр может описывать «проблемность» технологического процесса – если $\alpha = 0$, то объем отчета о работе группы исполнителей минимален и не зависит от размера группы, что соответствует отчету «Все в порядке».

Итак, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами мер $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то суммарный объем подготовленного ими отчета равен $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha}$, и затраты менеджера с точностью до константы равны

$$c(\mu_1, \ldots, \mu_k) = (\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_k^{\alpha})^{\beta}. \tag{23}$$

Тогда построение оптимальной организационной структуры сводится к поиску иерархии с минимальными суммарными затратами менеджеров. Помимо собственно получения оптимальной иерархии интерес представляет и анализ зависимости ее основных характеристик – нормы управляемости менеджеров и затрат иерархии – от параметров модели (степени единообразия технологического процесса α и квалификации менеджеров β).

Результаты этого анализа позволяют выбирать наиболее эффективные организационные мероприятия по снижению управленческих расходов и предусматривать меры по адаптации организационной структуры к изменению внешних условий.

В рассматриваемом примере выражение (23) затрат менеджера совпадает с формулой функции затрат (II), введенной в разделе 1.3 (пример 5). Как показано в [85], эта функция затрат монотонна по группам, следовательно, оптимальная иерархия имеет вид дерева. Там же показано, что при $\alpha \geq 1$ или $\beta \leq 1$ оптимальна веерная иерархия. Поэтому интерес представляет поиск оптимального дерева в области параметров $\alpha < 1$, $\beta > 1$.

---

[1] Сравним, например объемы отчетов «Рабочему X необходимо приобрести рабочие рукавицы» и «Для работников слесарного цеха необходимо приобрести 200 пар рабочих рукавиц».

В соответствии с подходом, разработанным в главе 3, для решения поставленной задачи найдем параметры наилучшего однородного дерева – норму управляемости и пропорцию.

Пусть степень однородности функции затрат $\alpha\beta \neq 1$. По формуле (15), чтобы для фиксированной нормы управляемости k найти наилучшую пропорцию, необходимо найти пропорцию $(y_1, \ldots, y_k)$, минимизирующую выражение

$$(y_1^{\alpha} + \ldots + y_k^{\alpha})^{\beta} / |1 - \textstyle\sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}|. \tag{24}$$

Как показано в разделе 3.5, достаточно ограничиться поиском внутренних решений (в силу нормальности функции затрат и неограниченного роста выражения (24) при $k = 2$ и стремлении y_1 к нулю). Если $\alpha = 0$, то выражение (24) не зависит от пропорции, поэтому рассмотрим случай $\alpha > 0$.

Лемма 4. Если при $\alpha > 0$ минимум выражения (24) достигается во внутренней точке $(x_1, \ldots, x_k)$, то найдутся такие числа a и b, что $x_i \in \{a, b\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство леммы 4 приведено в приложении.

Иначе говоря, компоненты наилучшей пропорции могут принимать не более двух различных значений. В силу симметрии минимизируемой функции можно считать, что первые m компонент пропорции равны a, а последние $k - m$ компонент равны b. Тогда, поскольку сумма компонент пропорции всегда равна единице, $b = (1 - ma)/(k - m)$, и выражение (24) принимает вид

$$\frac{(ma^{\alpha} + (k-m)[(1-ma)/(k-m)]^{\alpha})^{\beta}}{|1 - ma^{\alpha\beta} - (k-m)[(1-ma)/(k-m)]^{\alpha\beta}|}. \tag{25}$$

Кроме того, поскольку компоненты пропорции положительны, $0 < a < 1/m$, и поиск наилучшей пропорции для заданной нормы управляемости k сводится к задаче минимизации выражения (25) по всем целым m от 1 до k и по всем $a \in (0, 1/m)$.

Этих упрощений достаточно, чтобы для любой максимальной нормы управляемости r предложить эффективный численный алгоритм [95] поиска параметров наилучшего однородного r-дерева. Алгоритм сводится к тому, чтобы для каждой нормы управляемости k от 2 до r и для всех m от 1 до k минимизировать на интервале $(0, 1/m)$ гладкую нелинейную функцию (25) и затем выбрать оптимальную комбинацию k, m и a. Численную минимизацию можно проводить, комбинируя метод сетки [105] и метод Ньютона [105] (на интервале минимизации выбирается заданное количество точек с фиксированным шагом и в качестве начальной точки для метода Ньютона выбирается точка, в которой достигается минимум функции).

Результаты численного расчета наилучшей нормы управляемости однородного дерева приведены на рис. 30. Видно, что для больших значений параметра β оптимальны 2-деревья (область их оптимальности отмечена на рисунке числом «2»). С уменьшением β, а также со стремлением α к единице, последовательно становятся оптимальными 3-деревья, 4-деревья и т.д. (эти области подписаны на рисунке числами «3», «4», …).

Также видно, что при относительно малых β оптимальны симметричные 2-деревья с пропорцией $x^* = (0.5, 0.5)$. Для $\beta > 6.7$ имеется область, где оптимальны асимметричные 2-деревья (область их оптимальности выделена на рис. 30 пунктиром), в которых соотношение компонент пропорции варьируется в широких пределах.

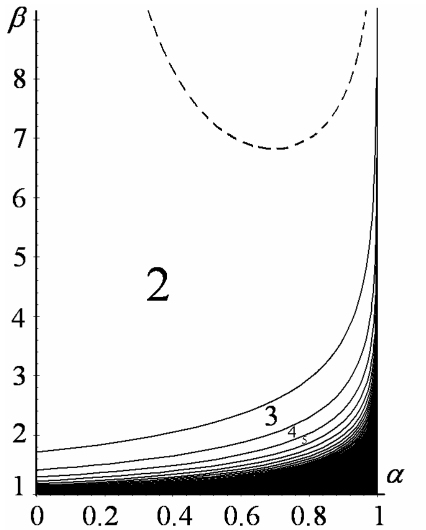


Рисунок 30. Нормы управляемости наилучшего однородного дерева для функции затрат (II)

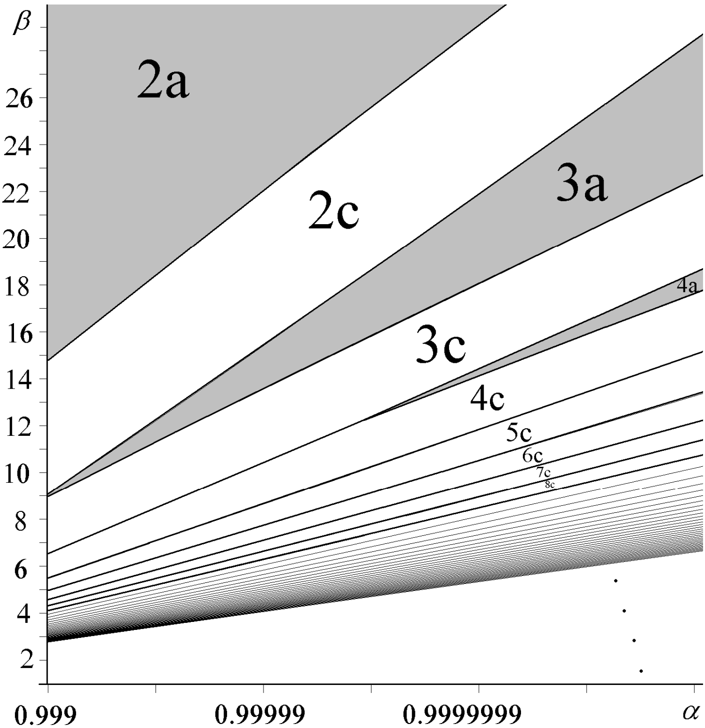


Рисунок 31. Численное моделирование для функции затрат (II) (нелинейная ось абсцисс)

Более подробные вычисления [95] показывают, что в исследуемой области параметров α и β имеются и области оптимальности асимметричных 3-деревьев, 4-деревьев и так далее. Все эти области локализованы в правой части рисунка, где α близко к единице. На рис. 31 приведен численный расчет параметров наилучшего однородного дерева в области $\alpha \in [0.999, 1)$, $\beta \in [1, 30]$ с нелинейным шагом по α. Области оптимальности асимметричных деревьев выделены серым фоном и обозначены «2a», «3a» и т.д. Области оптимальности симметричных деревьев обозначены «2c», «3c» и т.д.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что, по крайней мере, в наиболее важной с практической точки зрения области параметров ($\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [1, 6]$) наилучшие однородные деревья симметричны. Найдем аналитическое выражение для границ областей оптимальности различных норм управляемости.

Для нормы управляемости k и симметричной пропорции выражение (24) приобретает вид $k^{\beta(1-\alpha)} / |1 - k^{1-\alpha\beta}|$. Следовательно, на границе между областями оптимальности k-деревьев и $(k + 1)$-деревьев выполняется равенство

$$k^{\beta(1-\alpha)} / |1 - k^{1-\alpha\beta}| = (k + 1)^{\beta(1-\alpha)} / |1 - (k + 1)^{1-\alpha\beta}|.$$

Вводя новую переменную $t = \alpha\beta$, и разрешая получившуюся систему уравнений относительно α и β, получаем в плоскости $\alpha \times \beta$ семейство параметрических кривых

$$\left(\beta(t) = \ln\left(\frac{|(k+1)^{-t} - k - 1|}{|k^{-t} - k|}\right) / \ln\left(\frac{k+1}{k}\right), \alpha(t) = t / \beta(t)\right),\ k = 2, 3, \ldots$$

Подставляя в эти выражения $k = 2$, получаем уравнение границы областей оптимальности 2-деревьев и 3-деревьев, подставляя $k = 3$ – 3-деревьев и 4-деревьев, и так далее. Полученные кривые изображены сплошными линиями на рис. 30.

Итак, показано, что при $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [1, 6]$ наилучшее однородное дерево симметрично, то есть каждый менеджер делит подчиненную ему группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части равной меры. Норму управляемости $r(\alpha, \beta)$ наилучшего однородного дерева для любых значений параметров α, β можно определить[1] из рис. 30.

Если обозначить через μ суммарную меру всех исполнителей множества N, то, по формуле (9), затраты этого однородного дерева определяются выражением

$$(26)\ C_L(N) = \begin{cases} |\mu^{\alpha\beta} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\alpha\beta}| \dfrac{r(\alpha,\beta)^{\beta(1-\alpha)}}{|1 - r(\alpha,\beta)^{1-\alpha\beta}|}, \text{если } \alpha\beta \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{r(\alpha,\beta)^{\beta-1}}{\ln r(\alpha,\beta)}, \text{если } \alpha\beta = 1. \end{cases}$$

По утверждению 5 это же выражение задает и нижнюю оценку затрат оптимального дерева. В виду симметричности решения, при $\alpha\beta \geq 1$ эта оценка хорошо описывает затраты опти-

[1] Дополнительного рассмотрения требует случай $\alpha\beta = 1$, но он не меняет рисунка в силу непрерывной зависимости затрат от параметров.

мального дерева, и, кроме того, легко построить субоптимальное дерево (TD-дерево, описанное в разделе 3.6) с затратами, близкими к нижней оценке. Если $\alpha\beta < 1$, то субоптимальное дерево (BU-дерево из раздела 3.6) можно построить в том случае, когда меры всех исполнителей одинаковы или являются целыми степенями наилучшей нормы управляемости $r(\alpha, \beta)$.

Проанализируем зависимость нормы управляемости оптимального дерева и его затрат от параметров модели – квалификации менеджеров β и степени единообразия технологии α.

Из рис. 30 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением параметра β) оптимальная норма управляемости растет, то есть более квалифицированным менеджерам назначается большее количество непосредственных подчиненных. Это вполне объяснимо и с содержательной точки зрения – более квалифицированные менеджеры выполняют больший объем работы.

Более неожиданным является то, что оптимальная норма управляемости увеличивается с ростом степени атипичности проблем (параметра α). Действительно, если считать, что меры всех исполнителей больше единицы, то легко проверить, что с ростом α объем работы менеджера, определяемый выражением $\mu^{\alpha} r^{1-\alpha}$, увеличивается, а, следовательно, возрастают его затраты. Увеличение нормы управляемости r еще сильнее увеличивает объем выполняемой менеджером работы.

Однако, как показано в главе 3, общее количество менеджеров в иерархии равно $(n-1)/(r-1)$, то есть с ростом нормы управляемости количество менеджеров убывает. Оказывается, что уменьшение числа менеджеров – это самый «дешевый» способ противодействия росту степени атипичности проблем, поскольку при усложнении иерархии в решении большого количества проблем участвуют все больше и больше менеджеров, что увеличивает суммарные затраты.

Для оценки влияния параметров α и β на затраты оптимальной иерархии найдем приближенное аналитическое выражение для оптимальной нормы управляемости $r(\alpha, \beta)$. Известно, что при оптимальной норме управляемости выражение $k^{\beta(1-\alpha)} / |1 - k^{1-\alpha\beta}|$ достигает минимума по всем целым $k > 1$. Для упрощения задачи снимем ограничение целочисленности k и найдем оптимальную норму управляемости из условий первого порядка. Эта (нецелочисленная) норма управляемости определяется выражением

$$r(\alpha,\beta)=[\beta(1-\alpha)/(\beta-1)]^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}.$$

Подставляя ее в формулу (26), получаем примерную зависимость затрат оптимальной иерархии от параметров модели.

Кроме того, вычислим затраты топ-менеджера иерархии, определяемые формулой

$$\mu(N)^{\alpha\beta}c(1/r(\alpha,\beta),...,1/r(\alpha,\beta))=\mu(N)^{\alpha\beta}r(\alpha,\beta)^{\beta(1-\alpha)}.$$

Теперь легко проверить, что, с ростом α (степени атипичности проблем) как затраты оптимальной иерархии, так и затраты топ-менеджера возрастают. Это вполне ожидаемо из содержательной интерпретации задачи. Также вполне логично, что затраты оптимальной иерархии монотонно убывают с ростом уровня квалификации менеджеров (с уменьшением параметра β).

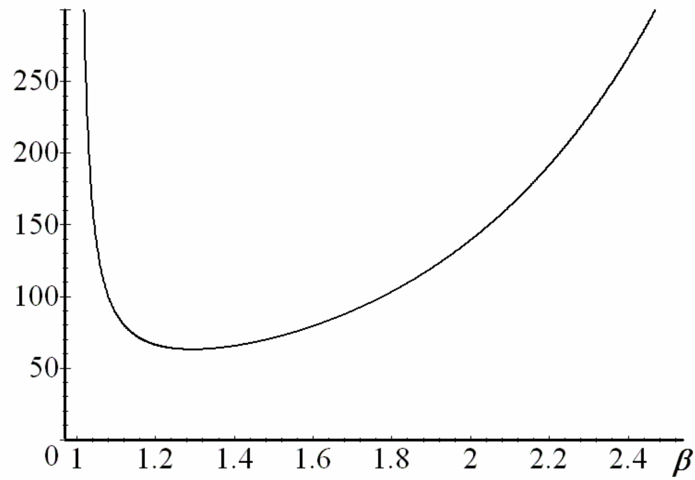


Рисунок 32. Пример зависимости затрат топ-менеджера от параметра β при $\alpha = 0.2$

Однако зависимость затрат топ-менеджера от параметра β уже не столь очевидна. Из рис. 32 видно, что с ростом квалификации (с уменьшением β) затраты топ-менеджера сначала уменьшаются (ведь его квалификация также растет), а затем начинают возрастать. Дело в том, что, как было отмечено выше, с ростом квалификации менеджеров растет и оптимальная норма управляемости, уменьшается количество менеджеров в иерархии, и, следовательно, растут затраты отдельного менеджера.

Следовательно, если высшее руководство организации вкладывает средства в повышение квалификации менеджеров иерархии, например в их обучение, то эти действия приводят к уменьшению управленческих расходов иерархии, однако затраты самого высшего руководства при этом могут и возрасти, если, конечно, иерархия параллельно изменяется с тем, чтобы наилучшим образом использовать новые условия.

Таким образом выглядят результаты исследования задачи поиска оптимальной иерархии для простой модели, сформулированной в начале настоящего раздела. Теперь эту модель можно постепенно усложнять, включая в нее новые факторы, влияющие на затраты менеджера.

Во-первых, заметим, что работа менеджера состоит не только в принятии решений, но и в составлении отчетов для своего непосредственного начальника (даже топ-менеджер, у которого нет руководителя, должен отчитываться о работе организации, например, перед акционерами). Если менеджер управляет группой меры μ, то он готовит своему руководителю отчет объема μ^{α}. Введем новый параметр A, описывающий трудоемкость составления отчетов по сравнению с процессом решения проблем. Тогда к объему выполняемой менеджером работы необходимо добавить слагаемое $A\mu^{\alpha}$.

Далее, среди допущений, легших в основу модели работы менеджера, одним из наиболее сильных является предположение о линейной зависимости между количеством принимаемых менеджером решений и суммарным объемом отчетов $\mu_1^{\alpha}+\ldots+\mu_r^{\alpha}$, предоставляемых его непосредственными подчиненными.

Действительно, более логично считать, что менеджер в первую очередь включает в отчет для своего руководителя информацию о проблемах, которые сам менеджер решить не в состоянии. Соответственно, разница между суммарным объемом отчетов

$\mu_1{}^{\alpha} + \ldots + \mu_k{}^{\alpha}$ и объемом $(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$ отчета, отправляемого начальнику, является более адекватной характеристикой количества решенных менеджером проблем, чем суммарный объем получаемых отчетов. Тогда формулу объема работы следует скорректировать, вычтя слагаемое $(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$.

В то же время, принятие решения о том, что ту или иную проблему сам менеджер решить не в состоянии, и должен передать ее своему руководству, тоже требует трудозатрат. Если обозначить через B сравнительную трудоемкость принятия такого решения по сравнению с самостоятельным решением проблемы, то учет этих трудозатрат сводится к добавлению слагаемого $B(\mu_1 + \ldots + \mu_k)^{\alpha}$ к формуле объема работы менеджера.

Подытоживая все сказанное, приходим к выводу, что скорректированный объем работы менеджера должен определяться формулой[1] $\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_r^{\alpha} + (A + B - 1)(\mu_1 + \ldots + \mu_r)^{\alpha}$, а его затраты

(27) $\quad c(\mu_1, \ldots, \mu_r) = [\mu_1^{\alpha} + \ldots + \mu_r^{\alpha} + (A + B - 1)(\mu_1 + \ldots + \mu_r)^{\alpha}]^{\beta}$.

Поиск оптимальных деревьев для этой функции затрат проводится по той же схеме, что и для функции (II). Для функции (30) можно доказать аналог леммы 4, который позволяет использовать для решения задачи описанный выше алгоритм. Результаты его работы показывают, что области оптимальности различных норм управляемости качественно соответствуют рис. 30 – просто если коэффициент $A + B - 1$ больше нуля, то границы всех областей сдвигаются на рисунке вверх, в сторону б*о*льших значений параметра β (включая и обозначенную пунктиром границу области оптимальности асимметричных иерархий). Если же $A + B - 1 < 0$, то границы всех областей сдвигаются вниз.

Таким образом, если при фиксированных параметрах α и β коэффициент $A + B$ растет (то есть растут трудозатраты менеджера по общению со своим руководителем), то оптимальная норма управляемости возрастает, если же $A + B$ убывает, то и оптимальная норма управляемости убывает.

---

[1] Заметим, что из формулы (7) следует, что объем работы менеджера всегда неотрицателен.

Качественный вид зависимости оптимальной нормы управляемости, затрат оптимальной иерархии и затрат топ-менеджера от параметров α и β будет таким же, как и для функции (II).

4.3. Исполнение приказов и детализация планов

Рассмотренная в предыдущем разделе модель базировалась на предположении, что затраты менеджера зависят от количества проблем, которые решает этот менеджер. При этом источником проблем были конечные исполнители, а одной из задач менеджеров иерархии было информирование руководства о возникающих проблемах, то есть обеспечение движения информации снизу вверх, от нижних уровней иерархии к топ-менеджеру.

Однако в организации присутствуют и информационные потоки, направленные сверху вниз, от топ-менеджера к его подчиненным и далее до конечных исполнителей. Например, подобные информационные потоки возникают в процессе планирования функционирования организации.

Сначала высшее руководство (например, собрание акционеров) определяет стратегический план функционирования и развития организации. План, оформленный соответствующими документами, доводится до топ-менеджера организации, чья задача состоит в том, чтобы дополнить этот план, обычно довольно общий и схематичный, конкретными деталями, действиями и мероприятиями, необходимыми для успешной его реализации.

Выполнение запланированных действий относится к сфере ответственности различных непосредственных подчиненных топ-менеджера, поэтому он должен, помимо всего прочего, подготовить более детальный план работы для каждого из подразделений, управляемых его непосредственными подчиненными.

Эти более детальные планы передаются непосредственным подчиненным топ-менеджера, и теперь уже они должны проделать такую же работу по детализации планов и по разбиению их на «подпланы» для своих непосредственных подчиненных. Процесс уточнения и детализации продолжается до тех пор, пока каждый исполнитель на самом нижнем уровне иерархии не получит свой максимально детализированный план работы.

Такие же нисходящие информационные потоки характерны и для процесса разработки и исполнения приказов. Менеджеры анализируют полученные от своих начальников указания для того чтобы определить, какие из подчиненных им подразделений будут участвовать в выполнении приказа, формируют для руководителей этих подразделений более подробные инструкции, в частности, по организации взаимодействия между ними, и передают эти инструкции вниз по иерархии.

В данном разделе рассматриваются одна из возможных формализаций процесса планирования и исполнения приказов, и решается задача поиска оптимальной иерархической структуры системы управления организацией, в которой основной задачей менеджеров является именно детализация планов и выполнение приказов руководства. Формулировка модели приводится в терминах исполнения приказов – процессы планирования описываются аналогично.

Пусть в технологический процесс организации вовлечено n исполнителей. Работы, порученные исполнителям, могут требовать различных усилий по управлению ими, поэтому для каждого исполнителя $w \in N = \{1, \ldots, n\}$ определим число $\mu(w)$ (меру) описывающее сложность управления этим исполнителем. На протяжении данного раздела будем считать, что меры всех исполнителей одинаковы и равны единице (это предположение существенно упрощает содержательную интерпретацию модели). Тогда объем максимально детализированной инструкции, подробно регламентирующей работу некоторой группы исполнителей $s \subseteq N$ (измеряемый, например, количеством знаков в соответствующем документе), будет пропорционален суммарной мере $\mu(s)$ исполнителей группы, то есть количеству входящих в нее исполнителей.

Однако на практике создание такой подробной инструкции действий для сколько-нибудь большой группы сотрудников невозможно – руководители верхних уровней иерархии зачастую просто не обладают настолько подробной информацией о работе подчиненных им исполнителей.

Поэтому реальный объем приказа, который получает от своего начальства менеджер крупного подразделения, будет существенно меньше, и информации, содержащейся в нем, будет недостаточно для полного описания того, что должны делать подчиненные этого менеджера. Ниже будем считать, что объем приказа, получаемый менеджером, управляющим группой меры μ, равен μ^α, где $\alpha \in [0, 1]$ – коэффициент, определяющий то самое неизбежное сжатие информации.

Задача менеджера состоит в том, чтобы проанализировать каждое положение приказа с целью определения того, какие из k непосредственно подчиненных ему подразделений будут вовлечены в процесс исполнения данного приказа, то есть, по сути, решить задачу классификации.

Если приказ касается просто организации работы подразделений, то объем работы менеджера по анализу каждого положения приказа будет пропорционален количеству k его непосредственных подчиненных. Однако если реализация приказа, помимо индивидуальной работы подразделений, требует их согласованного взаимодействия, менеджер уже вынужден думать о том, требуется ли организовать совместную работу каждой пары непосредственных подчиненных, и объем работы над каждым положением приказа будет пропорционален k^2. В общем случае объем работы задается некоторой функцией $\rho(k)$, а совокупный объем работы менеджера пропорционален $\mu^\alpha\rho(k)$.[1]

Затраты менеджера могут нелинейно зависеть от объема P выполняемой им работы. Будем считать, что эта зависимость описывается степенной функцией вида P^β. Тогда если анализ положений приказа является единственной работой менеджера, то его затраты задаются выражением $\mu^{\alpha\beta}\rho(k)^\beta$, то есть описываются введенной в разделе 1.3 мультипликативной функцией затрат.

---

[1] Такая зависимость объема работы менеджера от меры управляемой группы μ и нормы управляемости k может возникать не только при решении задачи классификации. Например, работа менеджера может состоять в ознакомлении непосредственных подчиненных с положениями полученного им приказа. Если менеджер собирает для этого своих подчиненных вместе, то объем его работы пропорционален объему приказа μ^α, если он знакомит с приказом каждого из k своих починенных по отдельности, то объем работы пропорционален $k\mu^\alpha$.

Однако в рамках рассматриваемой модели менеджер должен еще дополнить и детализировать полученный приказ, превратив его в k приказов для своих непосредственных подчиненных. Будем считать, что объем связанной с этим работы пропорционален разнице $\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_k^\alpha - \mu^\alpha$ между суммарным объемом детализированных приказов и объемом полученного приказа.

Следовательно, если k непосредственных подчиненных менеджера управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_k$, а сам он управляет группой меры $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_k$, то его затраты определяются выражением

(28) $$(A\mu^\alpha \rho(k) + \mu_1^\alpha + \ldots + \mu_k^\alpha - \mu^\alpha)^\beta,$$

где A – коэффициент, описывающий трудоемкость анализа одного положения приказа по сравнению с трудоемкостью его детализации для подчиненных.

Ниже, как и в предыдущем примере, решается задача поиска иерархии с наименьшими затратами на содержание менеджеров. Основной интерес представляет зависимость нормы управляемости оптимальной иерархии и ее затрат от параметров модели.

При этом уменьшение параметра β соответствует росту общей квалификации менеджеров, как управленцев, повышению их способности к переработке информации. Увеличение же параметра α можно интерпретировать как рост уровня специализации менеджеров, их информированности о технологических особенностях функционирования данной организации, что позволяет им готовить более детальные приказы для своих подчиненных.

Рассмотрим произвольного менеджера, управляющего группой исполнителей меры μ, r непосредственных которого управляют группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Легко проверить, что объем $\mu_1^\alpha + \ldots + \mu_k^\alpha - \mu^\alpha$ работы этого менеджера по детализации получаемых приказов немонотонно зависит от показателя степени α, возрастая до некоторого значения α, а затем убывая до нуля при α, стремящемся к единице[1].

[1] Степень однородности рассматриваемой функции затрат равна $\alpha\beta$. Согласно описываемым в разделе 1.5 статистическим данным, в коммерческих фирмах степень однородности функции затрат менеджера не превышает 0.4. Поскольку параметр β обычно близок к 1, то мож-

Эта немонотонность является результатом двух тенденций – стремления суммарного объема работы всех менеджеров иерархии к уменьшению с ростом уровня специализации α этих менеджеров (более специализированные менеджеры легче и быстрее принимают правильные решения), и стремления объема работы по детализации приказов к увеличению (более специализированные менеджеры сильнее детализируют приказы).

На практике при подборе персонала редко удается найти достаточное количество сотрудников, которые были бы одновременно и специалистами в технологии, и опытными управленцами, и приходится искать некоторый компромисс в обладании этими навыками. Исследование влияния параметров α и β на затраты оптимальной иерархии позволяет в процессе формирования команды менеджеров сделать выбор между специалистами и профессиональными управленцами.

Можно проверить, что функция затрат (28) монотонна по группам (см. определение в главе 1), и, следовательно, оптимальную иерархию достаточно искать на классе деревьев.

Рассматриваемая функция затрат представляет собой «гибрид» мультипликативной функции и функции затрат (27), введенной в конце предыдущего раздела. Поэтому сначала рассмотрим решение задачи поиска оптимальной иерархии для мультипликативной функции затрат вида $(\mu^{\alpha}\rho(k))^{\beta}$.

Степень ее однородности равна $\alpha\beta$. Для поиска оптимальной древовидной иерархии в соответствии с подходом главы 3 найдем параметры наилучшего однородного дерева. В примере 17 показано, что для этой функции затрат достаточно рассматривать только симметричные пропорции вида $(1/k, \ldots, 1/k)$.

Пусть степень однородности $\alpha\beta \neq 1$. Подставим оптимальную пропорцию $(1/k, \ldots, 1/k)$ в минимизируемое выражение формулы (15). Получим функцию $\rho(k)^{\beta} / |1 - k^{1-\alpha\beta}|$. Чтобы найти оптимальную норму управляемости, необходимо найти ее минимум по всем целым k, большим единицы.

но сделать вывод о том, что значений α, превышающих, скажем, 0.5, на практике не наблюдалось.

Например, рассмотрим случай, когда объем работы менеджера линеен по количеству его непосредственных подчиненных, то есть $\rho(k) = k$. Тогда минимизируем функцию $k^{\beta} / |1 - k^{1-\alpha\beta}|$.

Легко проверить, что при $\beta + \alpha\beta < 1$ эта функция монотонно стремится к нулю при $k \to +\infty$. Следовательно, нижняя грань в формуле (15) не достигается по норме управляемости. Подставляя симметричную пропорцию в формулу (14) находим, что для произвольного множества из n исполнителей оптимальная норма управляемости равна n. Если при этом меры всех исполнителей равны между собой, то оптимальна веерная иерархия.

Если $\beta + \alpha\beta \geq 1$, то из условия первого порядка (равенства нулю производной) имеем следующее уравнение относительно k: $\beta\,(1 - k^{1-\alpha\beta}) = (\alpha\beta - 1)k^{1-\alpha\beta}$, из которого находим

$$k^* = \left(\frac{\beta + \alpha\beta - 1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta - 1}}.$$

Аналогично примеру 16 показывается, что для заданных параметров α и β функции затрат оптимальная норма управляемости r^* будет одним из ближайших целых к величине k^*.

Чтобы изобразить в плоскости параметров $\alpha \times \beta$ области, в которых оптимальной будет та или иная норма управляемости, заметим, что на границе областей, в которых оптимальны k-деревья и $(k + 1)$-деревья, затраты k-деревьев и $(k + 1)$-деревьев одинаковы, то есть выполняется равенство

$$k^{\beta} / |1 - k^{1-\alpha\beta}| = (k+1)^{\beta} / |1 - (k+1)^{1-\alpha\beta}|. \tag{29}$$

Вводя новую переменную $t = \alpha\beta$, и разрешая получившуюся систему уравнений относительно α и β, получаем в плоскости $\alpha \times \beta$ семейство параметрических кривых

$$\left(\beta(t) = \ln\left(\frac{|1 - (k+1)^{1-t}|}{|1 - k^{1-t}|}\right) / \ln\left(\frac{k+1}{k}\right), \alpha(t) = t / \beta(t)\right), \ k = 2, 3, \ldots$$

Так, положив, к примеру, в этой формуле $k = 2$, получим в плоскости параметров $\alpha \times \beta$ уравнение границы областей, в которых оптимальны 2-деревья и 3-деревья.

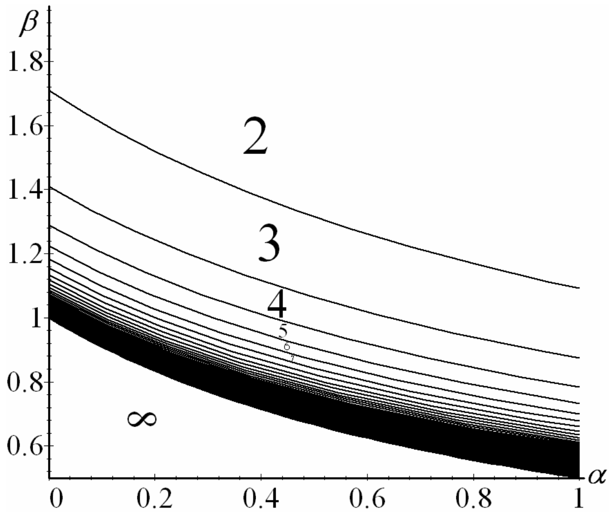


Рисунок 33. Оптимальные нормы управляемости для мультипликативной функции затрат $c(r, \mu) = \mu^{\alpha\beta}r^{\beta}$

На рис. 33 изображены области оптимальности различных значений нормы управляемости. При достаточно больш*и*х α и β оптимальны 2-деревья, при уменьшении этих параметров становятся оптимальными 3-деревья, далее – 4-деревья, и т.д.

Чем ближе параметры функции затрат α и β к кривой $\beta + \alpha\beta = 1$, тем б*о*льшие значения принимает оптимальная норма управляемости. Ниже этой кривой оптимальны веерные иерархии (на рисунке эта область отмечена символом «∞»). В силу непрерывности функции затрат по степени однородности $\alpha\beta$ рис. 33 остается верным и для $\alpha\beta = 1$, поэтому в проведении отдельного расчета для этого случая нет необходимости.

Вернемся к рассмотрению «гибридной» функции (28). При интересных с содержательной точки зрения сочетаниях параметров для составляющих этой функции затрат (мультипликативной функции и функции (II)) наилучшие однородные деревья были симметричны. Поэтому при поиске оптимальной иерархии ограничимся поиском наилучших симметричных деревьев.

Тогда в соответствии с формулой (15), чтобы при фиксированных параметрах α, β и A найти норму управляемости наилучшего однородного дерева, необходимо найти целое число k, большее единицы, при котором достигается минимум функции

$$(A\rho(k)+k^{1-\alpha}-1)^{\beta} / |1-k^{1-\alpha\beta}|.$$

Эта задачу легко решить численно.

Чтобы проанализировать зависимость оптимальной нормы управляемости от параметров, изобразим границы областей оптимальности различных норм управляемости на плоскости параметров $\alpha \times \beta$ (при фиксированном A). Для этого выпишем условие равенства затрат симметричных деревьев с нормой управляемости k и $k + 1$, аналогичное уравнению (29):

$$\frac{(A\rho(k)+k^{1-\alpha}-1)^{\beta}}{|1-k^{1-\alpha\beta}|}=\frac{(A\rho(k+1)+(k+1)^{1-\alpha}-1)^{\beta}}{|1-(k+1)^{1-\alpha\beta}|},\ k=2,3,\ \ldots$$

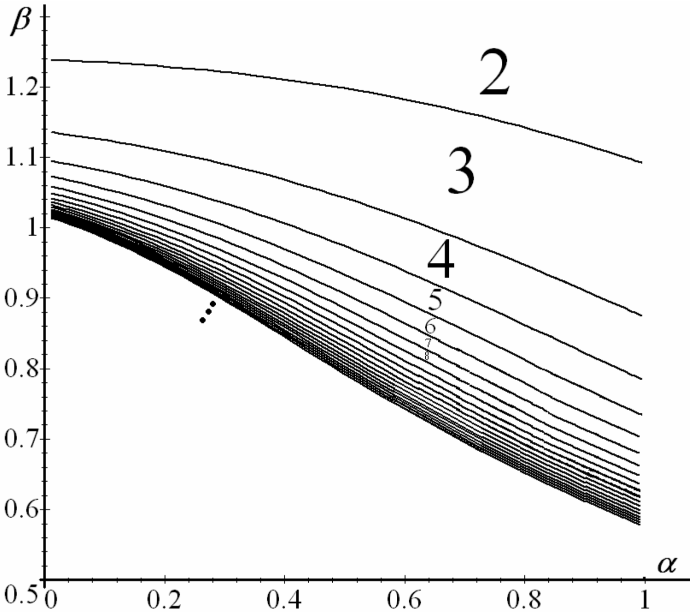


Рисунок 34. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (28) при $A = 0.5$

Если, как и выше, принять $\rho(k)$ равным k и зафиксировать параметр A, то решая (численно, поскольку аналитическое решение получить в общем случае невозможно) эти уравнения, получаем семейство кривых в плоскости $\alpha \times \beta$, описывающих границы областей оптимальности различных норм управляемости.

Скажем, на рис. 34 оптимальные нормы управляемости изображены для значения параметра A (описывающего трудоемкость анализа приказа по сравнению с его детализацией) равного 0.5. Из рисунка видно, что и с уменьшением уровня специализации менеджеров (уменьшением α), и с ростом их квалификации (уменьшением β), оптимальная норма управляемости растет.

Таким образом, иерархии, составленные из «чистых» управленцев (для них значение α относительно мало), должны быть более «плоскими», то есть включать меньшее количество менеджеров, имеющих большее количество непосредственных подчиненных. Использование же в роли менеджеров специалистов в технологии (с бо́льшим значением α) предполагает более «высокие» иерархии с меньшей нормой управляемости.

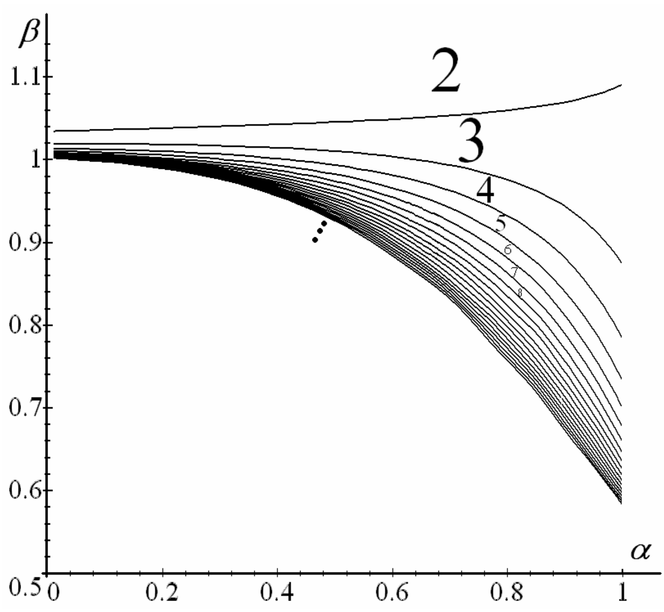


Рисунок 35. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (28) при A = 0.05

В то же время, если детализация плана становится более трудоемкой по сравнению с его анализом (то есть если значение параметра A уменьшается), это правило может и нарушаться.

Так, например, на рис. 35 изображены оптимальные нормы управляемости для $A = 0.05$. Легко видеть, что при небольших значениях β (более квалифицированных менеджерах) сохраняется прежняя зависимость нормы управляемости от уровня специализации α, в то время как при $\beta > 1.03$ оптимальная норма управляемости с ростом α уже не убывает, а растет.

Чтобы ответить на вопрос о том, кто для организации более выгоден – специалисты в технологии или «универсальные» управленцы, исследуем зависимость затрат оптимальной иерархии от уровня специализации менеджеров (параметра α).

Для простоты положим значение параметра β (уровня квалификации менеджеров) равным единице и, аналогично тому, как это делалось в разделе 4.2, найдем приближенное аналитическое выражение для оптимальной нормы управляемости.

При $\beta = 1$ для ее нахождения необходимо найти целочисленную норму управляемости k, минимизирующую выражение $(Ak + k^{1-\alpha} - 1) / |1 - k^{1-\alpha}|$. Ослабив ограничение целочисленности, из условий первого порядка без труда находим, что оптимальная норма управляемости (нецелочисленная), задается выражением $k^* = \sqrt[\alpha-1]{\alpha}$. Заметим, что она не зависит от значения параметра A (трудоемкости анализа приказа по сравнению с трудоемкостью его детализации).

Подставив найденную оптимальную норму управляемости в формулу (12), получим приближенное выражение для затрат оптимальной иерархии, зависящее от количества исполнителей n, а также от параметров α и A.

Приведем пример зависимости затрат оптимальной иерархии (точнее, их приближенного значения) от параметра α для количества исполнителей $n = 1000$.

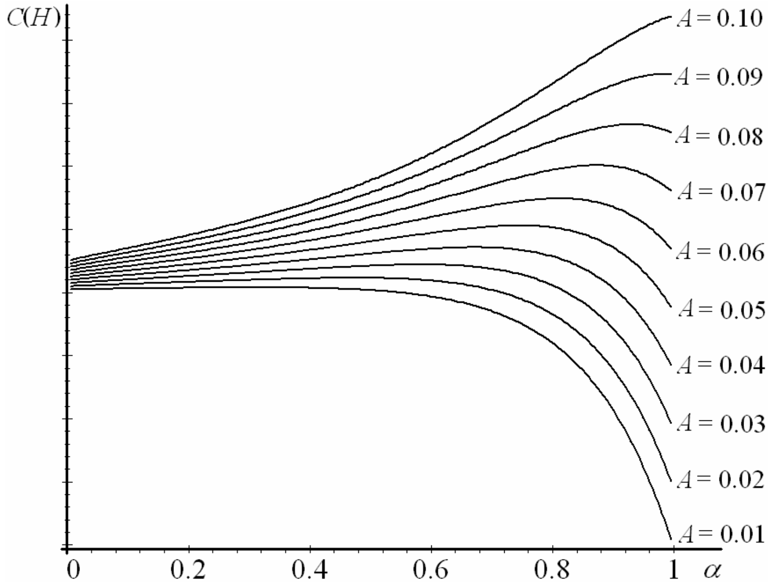


Рисунок 36. Пример зависимости затрат оптимальной иерархии от уровня специализации менеджеров (параметра α) при $n = 1000$

Семейство кривых на рис. 36 описывает зависимости затрат иерархии от α при различных значениях параметра A. Из рисунка видно, что если детализация приказов играет бо́льшую роль в работе менеджеров (то есть значение параметра A мало), то затраты иерархии минимальны при большом уровне специализации менеджеров (максимальном значении α). Значит, в этом случае организации более выгодно иметь менеджеров – специалистов в технологии. Однако с увеличением роли работы по классификации положений приказа (с ростом параметра A) затраты «узких специалистов» возрастают, и при A, больших 0.05, затраты иерархии минимальны уже при минимальном α, то есть становится выгодным формировать организационную иерархию из «универсальных» управленцев.

Рис. 34-36 показывают, что характеристики оптимальной иерархии сложным образом зависят от параметров функции затрат менеджеров. Поэтому обоснованные выводы о выгодности тех или иных управленческих действий по изменению организационной структуры можно делать лишь после подробного анализа конкретной ситуации, в которой находится организация.

4.4. Два примера поиска оптимальных деревьев

В примере 5 главы 1 были рассмотрены несколько классов однородных функций затрат менеджеров и приведена их содержательная интерпретация в терминах информационных взаимодействий в коллективе. Для краткости эти классы были пронумерованы латинскими цифрами от (I) до (V).

На протяжении всей книги функции (I)-(V) использовались как для иллюстрации изложения, так и в качестве основы в содержательных моделях поиска оптимальных иерархий. Так, например, в разделе 4.1 задача организации сборочного производства была сведена к задаче поиска оптимальной иерархии для функции затрат менеджера (I). В разделе 4.2 решалась задача поиска оптимальной организационной иерархии для функции затрат (II). В примерах 19 и 20 предыдущей главы функции затрат (I) и (III) иллюстрировали процедуру поиска наилучших однородных деревьев для случая граничных решений.

Чтобы завершить исследование функций затрат (I)-(V), в данном разделе рассматриваются задачи поиска оптимальных древовидных иерархий для двух последних функций, (IV) и (V).

Пример 22. Рассмотрим функцию затрат (IV), определяемую выражением $c(\mu_1,...,\mu_r,\mu)=[\sum_{i=1}^{r}(\mu^{\alpha}-\mu_i^{\alpha})]^{\beta}$. Ее содержательная интерпретация была приведена в примере 5.

Найдем оптимальную древовидную иерархию для такой функции затрат менеджера[1], определив, в соответствии с результатами раздела 3.5, параметры наилучшего однородного дерева.

Пусть степень однородности функции затрат $\alpha\beta\neq 1$. Тогда по формуле (15), чтобы для фиксированной нормы управляемости k найти оптимальную пропорцию, необходимо выбором пропорции (y_1, …, y_k) минимизировать выражение

[1] Заметим, что функция затрат (IV) немонотонна по группам и, значит, оптимальное дерево может не быть оптимальным на множестве всех иерархий. Поэтому результаты настоящего раздела применимы для постановок задач, которые априорно исключают недревовидность.

(30) $$(k - y_1^{\alpha} - \ldots - y_k^{\alpha})^{\beta} \,/\, |1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}\,|.$$

Поскольку функция затрат является строго нормальной, достаточно ограничиться поиском внутренних решений.

В [115] показано, что функция затрат (IV) является сужающей (см. определение в разделе 1.4) при $\beta \geq 1$, поэтому при $\beta \geq 1$ оптимальны 2-деревья и в формуле (30) достаточно рассматривать случай $k = 2$. Тогда выражение (30) принимает вид

$$\frac{(2 - y^{\alpha} - (1 - y)^{\alpha})^{\beta}}{|1 - y^{\alpha\beta} - (1 - y)^{\alpha\beta}\,|},$$

и для поиска оптимальной пропорции $(y, 1 - y)$ достаточно минимизировать его по $y \in (0, 1)$. Это можно сделать численно для любых α, β. Результаты расчета приведены на рис. 37. Имеется область, в которой оптимальны асимметричные 2-деревья (область «2a»), причем с ростом как α, так и β асимметричность оптимальной пропорции растет (значение y уменьшается).

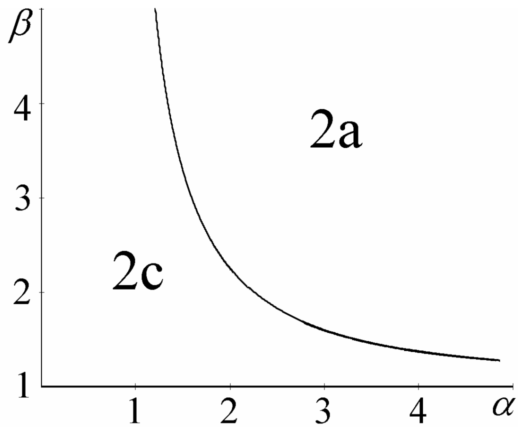


Рисунок 37. Результаты численного моделирования для функции затрат (IV), $\beta \geq 1$

Теперь рассмотрим область $\beta < 1$.

Лемма 5. Если $\beta < 1$, то симметричная пропорция доставляет минимум выражению (30).

Доказательство леммы 5 приведено в приложении.

Для симметричной пропорции функция (30) принимает вид:

$$\frac{(k - k^{1-\alpha})^{\beta}}{|1 - k^{1-\alpha\beta}|}, \tag{31}$$

и для нахождения оптимальной нормы управляемости необходимо минимизировать ее по всем целым k от 2 до n (напомним, что n – количество исполнителей).

Легко заметить, что если $\beta < 1/(1 + \alpha)$, то предел функции (31) при $k \to +\infty$ равен нулю, и, следовательно, при достаточно большом количестве исполнителей n оптимальная норма управляемости равна n (и если при этом меры всех исполнителей одинаковы, то оптимальна веерная организация).

Однако функция (31) немонотонна, например, для $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.8$ она изображена на рис. 38. Из рисунка видно, что если количество исполнителей меньше примерно 10000, оптимальна норма управляемости 3, а при n больше 10000 оптимальна максимальная возможная норма управляемости n.

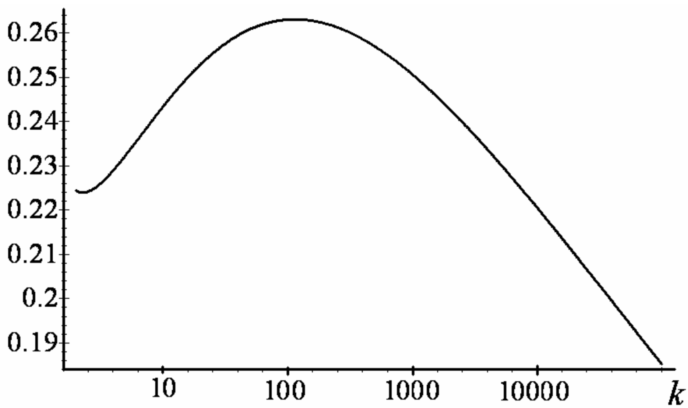


Рисунок 38. Сравнение затрат для различных норм управляемости при $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.8$ (нелинейная шкала абсцисс)

Исследуем зависимость оптимальной нормы управляемости от параметров α и β функции затрат в предположении, что количество исполнителей очень велико, то есть изобразим на плоскости $\alpha \times \beta$ зависимость

$$(32) \qquad r^*(\alpha,\beta) = \arg\min_{k=2,\dots,+\infty} \frac{(k - k^{1-\alpha})^{\beta}}{|1 - k^{1-\alpha\beta}|}.$$

К сожалению, аналитического выражения для оптимальной нормы управляемости найти не удается. На рис. 39 представлены результаты численного решения задачи (32).

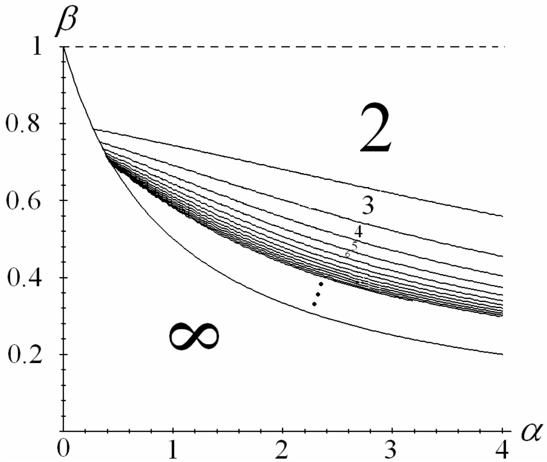


Рисунок 39. Оптимальные нормы управляемости для функции затрат (IV)

Из рисунка видно, что оптимальная норма управляемости уменьшается с ростом параметров α и β функции затрат, кроме того, при уменьшении как α, так и β наблюдается скачкообразный переход от конечной к бесконечной норме управляемости.

На основе полученных значений нормы управляемости наилучшего однородного дерева можно по формуле (9) вычислить нижнюю оценку затрат оптимальной древовидной иерархии для функции затрат (IV). По утверждению 7, в области параметров, где степень однородности $\alpha\beta$ функции затрат не меньше единицы, эта оценка имеет хорошую точность. Кроме того, зная наилучшую норму управляемости и пропорцию, можно построить субоптимальное дерево (TD-дерево, описанное в разделе 3.6) с затратами, ненамного превышающими нижнюю оценку.

Из леммы 5, а также рис. 37 и 39 видно, что в области параметров, где степень однородности $\alpha\beta$ меньше единицы, наилучшее однородное дерево симметрично. Поэтому, по утверждению 8, если меры всех исполнителей одинаковы, то нижняя оценка (9) имеет хорошую точность и можно построить субоптимальное дерево (BU-дерево, описанное в разделе 3.6). •

Пример 23. Решим задачу поиска оптимальной древовидной иерархии для функции затрат (V), которая определяется выражением $c(\mu_1,...,\mu_r,\mu)=\mu^{\alpha}/\min(\mu_1^{\beta},...,\mu_r^{\beta})$. Для этого найдем сначала параметры наилучшего однородного дерева.

Легко видеть, что при любой норме управляемости k затраты менеджера минимальны, если он делит управляемую им группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части равной меры. Следовательно, по лемме 3, при поиске параметров наилучшего однородного дерева достаточно рассматривать симметричные пропорции. Степень однородности функции затрат менеджера равна $\alpha-\beta$. Пусть $\alpha-\beta\neq 1$. Тогда по формуле (15), оптимальная норма управляемости будет доставлять минимум выражению $k^{\beta}/|1-k^{1-\alpha+\beta}|$ по всем целым $k>1$. Вычислив производную этого выражения по k, и приравняв ее к нулю, находим точку минимума, $k^*=[\beta/(\alpha-1)]^{1/(1-\alpha+\beta)}$. Поскольку минимизируемая функция монотонно убывает слева от точки k^*, и монотонно возрастает справа от нее, оптимальная норма управляемости равна либо ближайшему слева к k^* целому числу, либо ближайшему справа. Кроме того, если $\alpha\leq 1$, то минимизируемая функция монотонно убывает, и оптимальной нормы управляемости не существует (если при этом меры всех исполнителей одинаковы, то, как показано в разделе 3.5, оптимальна веерная иерархия).

Найдем в плоскости $\alpha\times\beta$ границы областей оптимальности различных норм управляемости. Аналогично примеру из раздела 4.2 заметим, что на границе областей оптимальности норм управляемости k и $k+1$ выполняется равенство

$$(k+1)^{\beta}/|1-(k+1)^{1-\alpha+\beta}|=k^{\beta}/|1-k^{1-\alpha+\beta}|.$$

Выразив из этого уравнения β, получим

$$\beta=\ln\left(\frac{|1-(k+1)^{1-\alpha+\beta}|}{|1-k^{1-\alpha+\beta}|}\right)/\ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

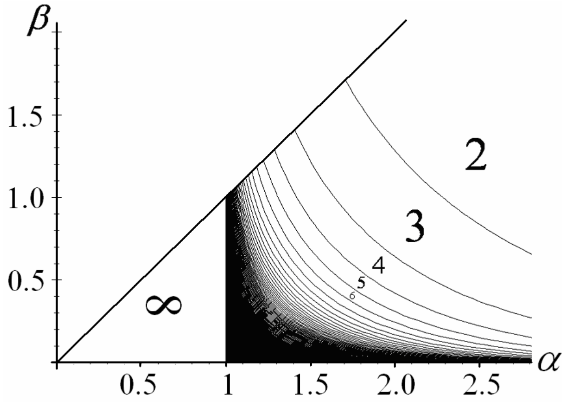


Рисунок 40. Оптимальные нормы управляемости
для функции затрат (V)

Если ввести переменную $t := 1 - \alpha + \beta$, то границы между областями оптимальности норм управляемости k и $k + 1$ будут определяться параметрической кривой

$$\beta(t) = \ln\left(\frac{|1-(k+1)^t|}{|1-k^t|}\right) / \ln\left(\frac{k+1}{k}\right), \alpha(t) = 1 + \beta(t) - t\,.$$

Области оптимальности различных норм управляемости изображены на рис. 40 (напомним, что, по определению функции затрат (V), $\alpha \geq \beta$). Из рисунка видно, что оптимальная норма управляемости уменьшается с ростом как α так и β.

Теперь, зная оптимальную норму управляемости, легко аналогично рассмотренным выше примерам построить нижние оценки затрат оптимальной иерархии и найти субоптимальные деревья. •

4.5. Затраты на управление и размер организации

С точки зрения математической экономики весьма важно знать, как затраты иерархической системы управления организацией зависят от размера этой организации. Понимание этой зависимости позволяет дать ответ на принципиальный вопрос – может ли иерархически управляемая организация расти неограниченно, или существует некоторый критический размер, превышение которого для организации невыгодно, и дальнейший рост может осуществляться только посредством взаимодействия равноправных экономических субъектов – в рамках рыночных отношений [12, 32, 57].

Рассматриваемую проблему можно проиллюстрировать следующей простейшей моделью. Пусть доход организации в зависимости от количества n рабочих, непосредственно вовлеченных в процесс производства, описывается функцией $V(n)$. Логично предположить, что эта функция не убывает по n. Для простоты будем считать, что функция $V(n)$ имеет вид $p \cdot n$ (линейный доход на масштаб [40]), где p – размерный коэффициент.

Пусть расходы организации состоят только из заработной платы ее сотрудников. Если все рабочие имеют одинаковую зарплату σ, то общий фонд их заработной платы равен $\sigma \cdot n$.

Однако, как показывает практика, для нормального функционирования организации одних производственных рабочих мало, необходима система управления – иерархия менеджеров, содержание которых также требует расходов. Для заданного количества рабочих n существует оптимальная иерархия менеджеров – иерархия с минимальными возможными затратами $C(n)$.

Тогда прибыль организации (доход минус затраты) определяется выражением $(p - \sigma) \cdot n - C(n)$. Из этого выражения видно, что если затраты иерархии $C(n)$ при больших n растут линейно (причем со скоростью меньше $p - \sigma$), то прибыль возрастает по n, то есть неограниченный рост организации приносит выгоду. Если же затраты иерархии при больших n растут сверхлинейно, то существует оптимальное количество рабочих n^* (для выпуклой функции $C(n)$ оно определяется условием $C'(n^*) = p - \sigma$), при превышении которого прибыль организации уменьшается, то есть дальнейший рост организации становится невыгодным.

Именно линейность зависимости затрат иерархии от размера организации стала предметом продолжительной дискуссии в экономической литературе. Например, в [4, 50] рассматривается ряд моделей, из которых следует линейная зависимость затрат иерархии от размера организации. В то же время в [20, 33, 69] показывается, что затраты иерархии с ростом организации растут сверхлинейно. В [55] рассматриваются модели «вычислительных иерархий» как с линейными, так и со сверхлинейными затратами.

Покажем, что с помощью рассматриваемых в данной книге однородных функций затрат также можно (в зависимости от параметров модели) описывать оба варианта зависимости затрат оптимальной иерархии от размера организации.

Итак, пусть задана однородная степени γ функция затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ и известно, что для нее задача (15) поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет внутреннее решение – некоторую норму управляемости r^* и пропорцию x^*.

Будем считать, что организация включает в себя n исполнителей меры 1. Тогда, как показано в разделе 3.5, для достаточно больших n нижняя оценка $C_L(n)$ затрат оптимальной иерархии определяется выражением

$$(33) \qquad C_L(n) = \begin{cases} |n^\gamma - n| F_\infty, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (n \ln n) F_\infty, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

В нем положительная константа F_∞, вычисляемая по формуле (15), не зависит от количества исполнителей n.

В разделе 3.6 показано, что при введенных предположениях эта оценка хорошо описывает затраты оптимальной иерархии, и ею можно пользоваться вместо точного значения затрат.

Исследуем зависимость затрат оптимальной иерархии от размера организации (количества исполнителей n).

Из выражения (33) легко видеть, что для любой степени однородности γ затраты оптимальной иерархии выпукло возрастают по n. Действительно, при $\gamma < 1$ множитель $|n^\gamma - n|$ равен разнице линейной функции n и вогнутой функции n^γ, при $\gamma > 1$ этот множитель равен разнице выпуклой функции n^γ и линейной функции n, при $\gamma = 1$ зависимость затрат от n также определяется выпуклой возрастающей функцией $n \cdot \ln n$.

Далее, заметим, что если $\gamma < 1$, то при больших n затраты оптимальной иерархии растут линейно с увеличением n, поскольку в этом случае отношение $C_L(n)/n = (1 - n^{1-\gamma})F_\infty$ стремится к константе F_∞ при стремлении n к бесконечности.

Если $\gamma = 1$, то затраты иерархии растут пропорционально $n \cdot \ln n$, то есть сверхлинейно. Также сверхлинейный рост затрат наблюдается и при $\gamma > 1$ – при этом затраты растут пропорционально n^γ (см. рис. 41).

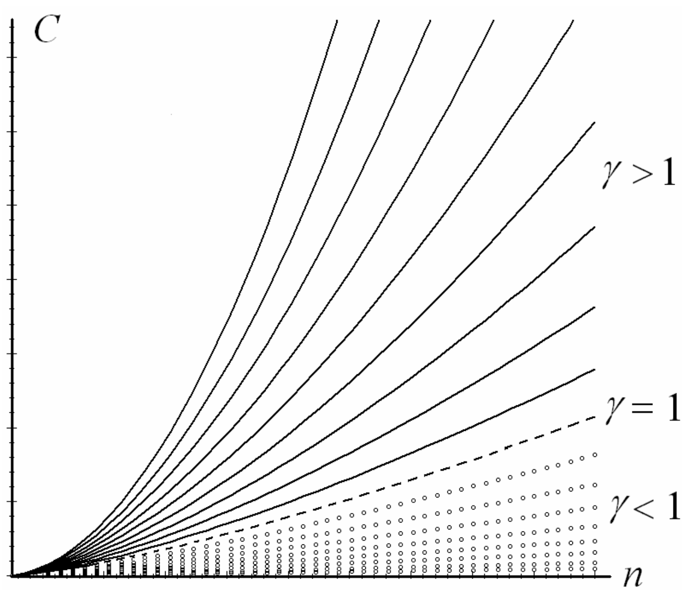


Рисунок 41. Пример зависимости затрат C оптимальной иерархии от размера организации n

Таким образом, если в рамках введенных предположений степень однородности γ функции затрат менеджера организационной иерархии меньше единицы, то такая организация может расти неограниченно. Если же степень однородности больше или равна единице, то затраты организационной иерархии растут сверхлинейно и существует предел роста организации, превышать который для организации невыгодно.

Заметим, кстати, что затраты на содержание отдельного менеджера оптимальной иерархии с ростом размера $|s|$ управляемой им группы исполнителей s растут как $|s|^\gamma$. Они вогнуты при степени однородности $\gamma < 1$, линейны при $\gamma = 1$ и выпуклы при $\gamma > 1$.

Таким образом, для решения вопроса о возможности неограниченного роста организации необходимо знать, превышает ли степень однородности функции затрат менеджера[1] единицу.

Для конкретной организации степень однородности функции затрат можно грубо оценить с помощью следующей процедуры анализа затрат на содержание ее менеджеров.

Предположим, что функция затрат менеджеров организации однородная и существующую в настоящий момент организационную структуру можно считать оптимальной. Тогда если затраты на содержание менеджера иерархии больше суммарных затрат на содержание всех непосредственно подчиненных ему менеджеров, то степень однородности функции затрат больше единицы. Если его затраты меньше, то степень однородности меньше единицы, если равны – то степень однородности равна единице.

Действительно, в предположении однородности функции затрат оптимальная древовидная иерархия является однородным деревом (или является близкой к нему). Если менеджер этой иерархии управляет группой исполнителей меры μ и делит эту группу между r своими непосредственными подчиненными в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$, то его затраты равны $\mu^\gamma c(x)$, а затраты непосредственных подчиненных – $\mu^\gamma x_1^\gamma c(x)$, …, $\mu^\gamma x_r^\gamma c(x)$. Тогда разница между затратами менеджера и суммарными затратами его непосредственных подчиненных определяется выражением

$$\mu^\gamma c(x)(1 - x_1^\gamma - \ldots - x_r^\gamma). \quad (34)$$

Так как сумма компонент пропорции всегда равна единице, из неравенств (6) и (7) следует, что выражение (34) положительно при $\gamma > 1$, отрицательно при $\gamma < 1$ и равно нулю при $\gamma = 1$.

Итак, грубо говоря, если в организации содержание начальника стоит меньше, чем содержание всех его непосредственных подчиненных вместе взятых, то такая организация может расти неограниченно, если больше – то организация имеет верхний предел размера, превышение которого невыгодно.

---

[1] В принципе, под затратами менеджера в данном случае может пониматься не только зарплата руководителя, но и затраты на организацию его работы (аренда помещений, стоимость оргтехники), включающие, возможно, и содержание его аппарата (секретарей, помощников).

Подведем итоги четвертой главы. В ней были рассмотрены несколько содержательных задач построения оптимальных древовидных иерархий. Эти задачи решались с использованием описанных в главе 3 результатов, относящихся к поиску оптимальных деревьев при однородных функциях затрат менеджера.

В результате решения задач для каждой из моделей были вычислены параметры оптимальных древовидных иерархий. В частности, были найдены зависимости нормы управляемости оптимальной иерархии от параметров модели. Кроме того, были получены аналитические выражения, приближенно описывающие затраты оптимальной иерархии и проанализирована их зависимость от параметров.

Полученные результаты могут быть использованы при выборе и обосновании организационных мероприятий, направленных на совершенствование структуры систем управления организационными и техническими системами.

ГЛАВА 5. ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ИЕРАРХИЙ

Главная тема настоящей книги – исследование задачи поиска оптимальной древовидной иерархии при однородных функциях затрат, и основные результаты, изложенные в третьей главе (нижние и верхние оценки затрат оптимального дерева, алгоритмы построения субоптимальных деревьев), в существенной степени исчерпывают эту тему.

Однако очевидно, что задачи поиска оптимальных иерархий не ограничиваются рассмотрением древовидных иерархий или однородных функций затрат – сформулированная в первой главе общая постановка задачи существенно шире.

Как видно из приведенного в главе 2 обзора, во многих возникающих на практике задачах построения оптимальных иерархий функции затрат не только не однородные, но иногда не сводятся даже к секционным функциям. В то же время, большинство описанных в обзоре результатов получено для очень частных и специфичных моделей. Поэтому изучение более общих моделей поиска оптимальных иерархий весьма перспективно и открывает практически неограниченное поле для исследования.

В пятой, последней, главе книги рассматриваются несколько обобщений однородных функций затрат и описываются некоторые перспективные модели поиска оптимальных иерархий.

5.1. Кусочно-однородные функции затрат

Наиболее простым обобщением рассматриваемых в предыдущих главах книги однородных функций затрат являются функции затрат, сводящиеся к комбинации однородных функций.

В данном разделе на неформальном уровне рассматриваются «кусочно-однородные» функции затрат менеджера, степень однородности которых скачкообразно изменяется в зависимости от меры управляемой менеджером группы исполнителей.

Зависящую от мер функцию затрат менеджера $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$ будем называть *кусочно-однородной*, если она имеет вид

$$(35)\qquad c(\mu_1,...,\mu_r,\mu)=\begin{cases}\mu^{\gamma_1}c_1(x_1,...,x_r,1), & \text{при } \mu<\mu_0,\\ \mu^{\gamma_2}c_2(x_1,...,x_r,1), & \text{при } \mu\ge\mu_0,\end{cases}$$

где $x_i=\mu_i/\mu$, $i=1,...,r$, а μ_0 – некоторое положительное число.

При такой функции затрат затраты менеджера, управляющего небольшой группой (с мерой меньшей, чем μ_0), описываются однородной степени γ_1 функцией затрат $\mu^{\gamma_1}c_1(x_1,...,x_r,1)$, а затраты менеджера, управляющего группой большой меры (больше μ_0) описываются однородной степени γ_2 функцией затрат $\mu^{\gamma_2}c_2(x_1,...,x_r,1)$.

Кусочно-однородные функции затрат дают больше возможностей для описания зависимости затрат менеджера от размера управляемой им группы, чем однородные функции. В частности, кусочно-однородной функцией можно аппроксимировать классическую функцию затрат производственного подразделения [129], обычно описываемую полиномом третьей степени.

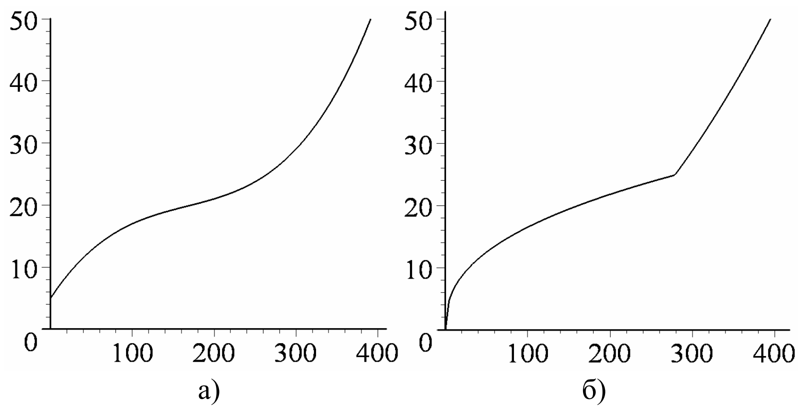


Рисунок 42. Аппроксимация функции затрат менеджера кусочно-однородной функцией

Пример 24. Типичный вид зависимости затрат $c(z)$ производственного подразделения от объема производства z изображен на рис. 42а) (в данном примере затраты описываются выражением $c(z)=5+20z-10z^2+2z^3$). Имеются постоянные затраты в размере пяти единиц, не зависящие от объема производства. С ростом объема производства затраты возрастают. При этом удельные затраты – затраты на производство единицы продукции – с ростом объема производства сначала убывают (что объясняется эффектом обучения при выходе на «проектные» объемы производства), соответственно, затраты $c(z)$ вогнуты при малых объемах производства (на рисунке – при $z < 200$). При бо́льших объемах удельные затраты начинают возрастать, так как производство перегружено, и функция затрат $c(z)$ уже выпукла.

Пусть менеджеры, составляющие иерархию управления некоторой организации, имеют зависящую от мер функцию затрат $c(\mu_1, \ldots, \mu_r, \mu)$. Тогда затраты любого менеджера зависят от меры управляемой им группы исполнителей μ и от пропорции $(\mu_1/\mu, \ldots, \mu_r/\mu)$, в которой эта группа делится между него непосредственными подчиненными. Если эту пропорцию зафиксировать, то затраты менеджера будут зависеть только от меры управляемой группы. Если рассматривать менеджера как производственное подразделение, объем производства z которого зависит от меры управляемой группы исполнителей, то зависимость его затрат от этой меры можно описать функцией типа $c(z)$.

Функция $c(z)$, в свою очередь, довольно точно аппроксимируется кусочно-однородной функцией затрат (35) со степенями однородности $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$. На рис. 42б) изображен пример аппроксимации функции $c(z) = 5 + 20z - 10z^2 + 2z^3$ кусочно-однородной функцией

$$\tilde{c}(z) = \begin{cases} 2.62z^{0.4}, & \text{при } z < 280, \\ 0.00032\text{z}^2, & \text{при } z \geq 280. \end{cases}$$

В этом примере считаем, что «объем производства» z менеджера совпадает с мерой μ управляемой им группы исполнителей. •

Итак, пусть задана кусочно-однородная функция затрат менеджера (35) и множество исполнителей N, причем мера каждого исполнителя существенно (скажем, в десятки раз) меньше μ_0, а суммарная их мера в те же десятки раз больше, чем μ_0.[1]

[1] Это предположение необходимо для того, чтобы в оптимальной иерархии над этим множеством исполнителей полностью «проявились»

Рассмотрим задачу поиска оптимальной древовидной иерархии над множеством исполнителей N с такой функцией затрат.

Пусть H – искомое оптимальное дерево. Множество M всех входящих в него менеджеров можно разбить на три части: M_1, M_2 и M_3. Подмножество M_1 состоит из менеджеров, управляющих группой исполнителей меры не более μ_0. Подмножество M_2 состоит из менеджеров, которые сами управляют группой исполнителей меры больше μ_0, но среди непосредственных подчиненных которых есть сотрудники, управляющие группой меры не более μ_0. Подмножество же M_3 состоит из менеджеров, все непосредственные подчиненные которых (а, следовательно, и сами эти менеджеры) управляют группами исполнителей с мерой больше μ_0.

Легко видеть, что все менеджеры, подчиненные некоторому менеджеру из подмножества M_1, также принадлежат этому подмножеству. Также все начальники менеджера из подмножества M_3 тоже принадлежат подмножеству M_3. Подчиненные менеджера из подмножества M_2 могут быть менеджерами как из подмножества M_2, так и из подмножества M_1. Аналогично, начальники менеджера из M_2 могут быть из подмножества M_2 или M_3.

Из этого следует, что менеджеры из M_1 формируют нижнюю часть оптимального дерева H, менеджеры из M_3 формируют его верхнюю часть, а менеджеры из M_2 составляют «прослойку» между менеджерами множеств M_1 и M_3.

Среди менеджеров множества M_1 есть «верхние» менеджеры, начальники которых уже не принадлежат множеству M_1. Рассмотрим любого такого «верхнего» менеджера $m \in M_1$. Он управляет группой исполнителей $s_H(m)$ и является топ-менеджером некоторого поддерева H_m оптимального дерева H. Так как дерево H оптимально, поддерево H_m также является оптимальным деревом, но для более узкого множества исполнителей $s_H(m) \subseteq N$. Поскольку по определению множества M_1 мера группы $s_H(m)$ не превышает μ_0, любой менеджер любого дерева, которое можно построить над множеством исполнителей $s_H(m)$, также управляет группой меры не более μ_0. Поэтому при поиске оптимального дерева над множеством $s_H(m)$ можно просто забыть про вторую

оба «режима» кусочно-однородной функции затрат менеджера.

компоненту функции затрат $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ и считать, что функция затрат равна $\mu^{\gamma_1} c_1(x_1,...,x_r)$.

Эта функция однородна степени γ_1, и для поиска оптимального дерева над множеством исполнителей $s_H(m)$ можно использовать подход, предложенный в главе 3. Если наилучшее однородное дерево для функции затрат $\mu^{\gamma_1} c_1(x_1,...,x_r)$ имеет норму управляемости r' и пропорцию x', то оптимальное дерево для множества исполнителей $s_H(m)$ будет стремиться быть именно таким однородным деревом, и лишь дискретность множества $s_H(m)$ может помешать этому стремлению реализоваться полностью.

Таким образом, нижнюю часть оптимального дерева H составляют «приблизительно однородные поддеревья» с нормой управляемости r' и пропорцией x'.

Рассмотрим теперь менеджеров из множества M_3, составляющих верхнюю часть оптимального дерева H. Некоторые непосредственные подчиненные этих менеджеров сами не принадлежат множеству M_3. Введем в рассмотрение новое множество «исполнителей» N_3, в которое включим всех этих непосредственных подчиненных. Мерой «исполнителя» v из множества N_3 будем считать меру группы, которой менеджер v управляет в оптимальном дереве H.

Легко показать, что верхняя часть оптимального дерева H, состоящая из менеджеров множества M_3, является оптимальным деревом над множеством исполнителей N_3 для функции затрат $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$.[1]

По определению множества M_3 мера любого исполнителя из N_3 больше, чем μ_0 (из этого, в частности, следует, что во множество N_3 входят только менеджеры, но не исполнители исходного дерева H). Поэтому при поиске оптимального дерева над множе-

[1] Действительно, в противном случае над множеством исполнителей N_3 можно построить дерево H_3 с затратами, меньшими, чем суммарные затраты менеджеров множества M_3 в дереве H. Тогда, заменив в дереве H_3 каждого исполнителя $v \in M_3$ на поддерево, которым этот «исполнитель» управлял в дереве H, получим дерево над множеством исполнителей N с затратами, меньшими чем у дерева H, а это невозможно, так как дерево H по определению оптимально.

ством исполнителей N_3 можно забыть про первую компоненту функции затрат $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$, и считать, что функция затрат менеджера равна $\mu^{\gamma_2} c_2(x_1,...,x_r)$.

Функция $\mu^{\gamma_2} c_2(x_1,...,x_r)$ однородна степени γ_2, поэтому если наилучшее однородное дерево для этой функции затрат имеет норму управляемости r'' и пропорцию x'', то оптимальное дерево будет стремиться быть именно таким однородным деревом (и лишь дискретность множества исполнителей N_3 мешает этому стремлению реализоваться полностью).

Следовательно, приходим к выводу, что верхняя часть оптимального дерева H, состоящая из менеджеров множества M_3, будет «приблизительно однородным» деревом с нормой управляемости r'' и пропорцией x'', в то время, как его нижняя часть состоит из нескольких «приблизительно однородных» деревьев с нормой управляемости r' и пропорцией x'.

Заметим, что в общем случае множества M_1 и M_2 всегда не пусты, в а вот множество M_3 может не содержать ни одного менеджера. Это имеет место в случае, когда оптимальная иерархия H существенно асимметрична (например, если H – последовательная иерархия, то у любого менеджера есть непосредственный подчиненный с мерой, меньше чем μ_0, и этот менеджер не может принадлежать множеству M_3).

Однако если оптимальное дерево H «приблизительно симметрично», то есть если его менеджеры делят подчиненные им группы исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части примерно равной меры, то при достаточно большом количестве исполнителей N множество M_3 не пусто (многочисленные примеры, рассмотренные на протяжении книги, показывают, что на практике оптимальные деревья очень часто оказываются симметричными).

В «приблизительно симметричном» дереве «прослойка», состоящая из менеджеров множества M_2, довольно тонкая. Так, легко проверить, что если оптимальное дерево совершенно симметрично, то любой менеджер из M_2 управляет менеджерами из множества M_1, а его непосредственный начальник принадлежит множеству M_3.

Хотя разработанные в главе 3 методы не позволяют найти общее выражение для нормы управляемости менеджеров из M_2, для каждой конкретной функции затрат и множества исполнителей эта задача вполне решаема. Проиллюстрируем на примере построение приближенно оптимальной древовидной иерархии для кусочно-однородной функции затрат.

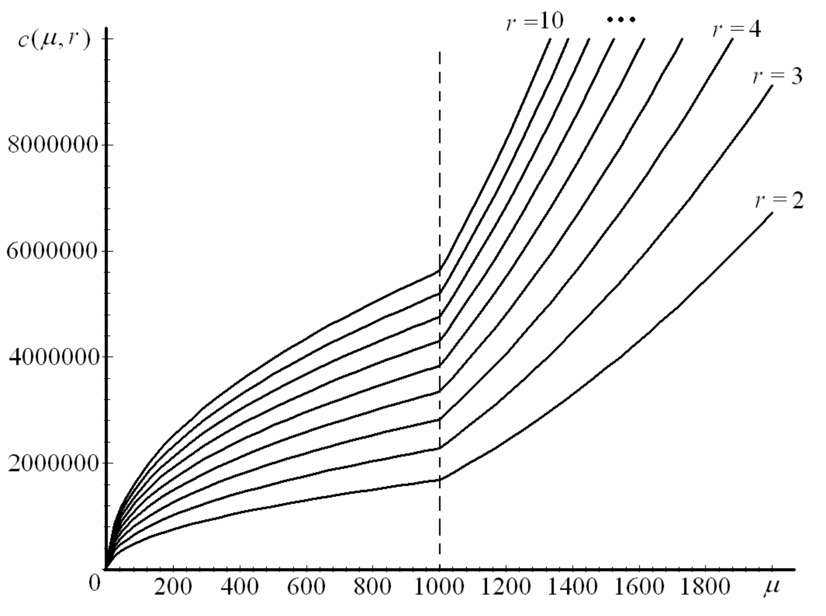


Рисунок 43. Пример кусочно-однородной функции затрат

Пример 25. Рассмотрим кусочно-однородную мультипликативную функцию затрат вида

$$(36)\ c(\mu,r)=\begin{cases} c_1(\mu,r) & \text{при } \mu<\mu_0, \\ c_2(\mu,r) & \text{при } \mu\geq\mu_0. \end{cases}=\begin{cases} \mu_0^{3/2}\mu^{1/2}r^{3/4} & \text{при } \mu<\mu_0, \\ \mu^2 r^{3/4} & \text{при } \mu\geq\mu_0. \end{cases}$$

При такой функции затраты менеджера, управляющего группой исполнителей меры μ, ведут себя по-разному в зависимости от того, больше эта мера некоторого критического значения μ_0 или меньше. Положим $\mu_0 = 1000$. На рис. 43 изображены зависимости затрат менеджера от μ при различных количествах непосредственных подчиненных r. Содержательные интерпретации подобных функций затрат обсуждались выше.

Пусть в организацию входят $n = 9000$ исполнителей меры 1 и над ними необходимо надстроить оптимальную древовидную иерархию менеджеров с функцией затрат (36).

Для этого рассмотрим сначала задачу построения иерархии для n' исполнителей, где $n' < 1000$. Понятно, что все менеджеры такой иерархии будут управлять группами меры меньше[1] 1000, поэтому можно считать, что их затраты описываются однородной функцией $c(\mu, r) = c_1(\mu, r) = \mu_0^{3/2}\mu^{1/2}r^{3/4}$. В примере 17 показано, что для этой функции затрат наилучшее однородное дерево симметрично, а его норма управляемости доставляет минимум функции $r^{3/4}/(r^{0.5}-1)$ по всем целым r, большим единицы. Отсюда легко находится оптимальная норма управляемости $r_1 = 9$.

Таким образом, оптимальное дерево для $n' < 1000$ исполнителей стремится быть симметричным однородным 9-деревом. Выше доказано, что в этом случае нижняя оценка (12) хорошо описывает затраты $C(n')$ оптимального дерева. Подставляя в (12) найденную оптимальную норму управляемости, получаем приближенную формулу расчета затрат оптимального дерева для $n' < 1000$ исполнителей:

$$C(n') \approx C_1(n') = \mu_0^{3/2}(n'-n'^{1/2})3^{3/2}/2\,. \tag{37}$$

Возьмем теперь n'' исполнителей, где n'' равно 1000 или чуть больше. Теперь топ-менеджер иерархии будет управлять группой исполнителей меры больше 1000, и его затраты определяются функцией $c_2(\mu, r) = n''^2 \cdot r^{3/4}$, где r – количество его непосредственных подчиненных. Затраты $C(n'')$ оптимального дерева для n'' исполнителей можно представить в виде суммы затрат $n''^2 \cdot r^{3/4}$ топ-менеджера и затрат оптимальных поддеревьев, которыми управляют r его непосредственных подчиненных:

$$C(n'') = n''^2 \cdot r^{3/4} + C(n_1) + \ldots + C(n_r),$$

где $n_1, \ldots, n_r$ – меры групп исполнителей, управляемых непосредственными подчиненными топ-менеджера.

---

[1] Поскольку мера каждого исполнителя равна 1, мера группы исполнителей совпадает с количеством входящих в нее исполнителей.

Поскольку всегда $c(\mu, r) \geq c_1(\mu, r)$, затраты любого из деревьев $C(n_i)$ не меньше затрат $C_1(n_i)$ наилучшего однородного дерева для n_i исполнителей (см. формулу (37)), поэтому

$$C(n'') \geq n''^2 \cdot r^{3/4} + C_1(n_1) + \ldots + C_1(n_r).$$

Поскольку функция $C_1(\cdot)$ выпуклая, минимум правой части неравенства достигается при $n_i = n''/r$, $i = 1, \ldots, r$. Поэтому

$$C(n'') \geq n''^2 \cdot r^{3/4} + r((n''/r) - (n''/r)^{1/2})\mu_0^{3/2} 3^{3/2}/2. \quad (38)$$

Еще уменьшим правую часть, взяв минимум по всем целым r, большим единицы. Обозначим точку минимума через $r_2(n'')$. Таким образом, получили следующую нижнюю оценку затрат оптимального дерева:

$$C(n'') \geq n''^2 \cdot r_2(n'')^{3/4} + (n'' - (n'' \cdot r_2(n''))^{1/2})\mu_0^{3/2} 3^{3/2}/2. \quad (39)$$

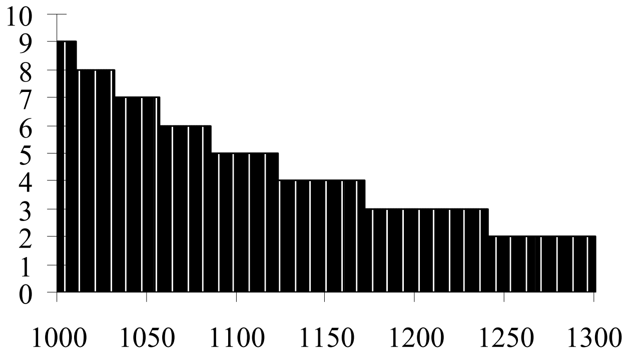


Рисунок 44. Зависимость $r_2(n'')$

Если количество исполнителей n'' не очень велико, так что $\lceil n''/r_2(n'') \rceil < \mu_0 = 1000$,[1] то эта нижняя оценка имеет хорошее качество, поскольку существует дерево, в котором топ-менеджер имеет $r_2(n'')$ непосредственных подчиненных, каждый из которых управляет группой меры примерно $n''/r_2(n'')$. Эта мера меньше 1000, поэтому каждый непосредственный подчиненный топ-менеджера стоит во главе оптимального поддерева, затраты которого хорошо описываются функцией (37).

---

[1] $\lceil \ \rceil$ обозначает округление до ближайшего сверху целого.

График зависимости $r_2(n'')$ изображен на рис. 44. Из рисунка видно, что с ростом количества исполнителей n'' оптимальная норма управляемости топ-менеджера постепенно уменьшается с девяти до двух. Таким образом, формула (39) хорошо описывает затраты оптимального дерева при количестве исполнителей n'' меньше $2\mu_0 = 2000$.

Если же количество исполнителей больше 2000, то в оптимальном дереве будет более одного менеджера, управляющего группой более чем из 1000 исполнителей, то есть появятся менеджеры из множества M_3. Как показано выше в данном разделе, норма управляемости таких менеджеров – это оптимальная норма управляемости дерева для функции затрат $c_2(\mu, r)$. Поскольку функция затрат $c_2(\mu, r)$ мультипликативная, для нее оптимально симметричное дерево, и поэтому оптимальная норма управляемости доставляет минимум функции $r^{3/4}/(1 - 1/r)$. Легко вычислить, что она равна двум.

Следовательно, верхнюю часть оптимальной иерархии над множеством более чем из 2000 исполнителей (в том числе и для интересующего нас множества из 9000 исполнителей) составляют менеджеры, имеющие по два непосредственных подчиненных, и делящие подчиненную группу между ними по возможности поровну.

На верхнем уровне находится топ-менеджер, управляющий группой меры 9000. На следующем уровне – два менеджера, управляющие группами по 4500 исполнителей. На третьем уровне – 4 менеджера с группами по 2250 исполнителей. На четвертом – 8 менеджеров с группами по 1125 исполнителей. Эти группы уже имеют меру меньше 2000, поэтому каждый из этих менеджеров имеет $r_2(1125) = 4$ непосредственных подчиненных. В свою очередь каждый из этих непосредственных подчиненных стоит во главе приблизительно однородного 9-дерева.

Так выглядит приблизительно оптимальная иерархия для множества из 9000 исполнителей и функции затрат (36). •

5.2. Аддитивные функции затрат

В предыдущем разделе была исследована кусочно-однородная функция затрат. Ее степень однородности изменяется скачкообразно когда мера управляемой менеджером группы исполнителей превышает некоторое «критическое» значение. Было показано, что для такой функции затрат норма управляемости оптимальной древовидной иерархии также скачкообразно изменяется при движении «снизу вверх» по иерархии.

Если степень однородности функции затрат менеджера изменяется плавно с ростом меры управляемой им группы исполнителей, логично ожидать, что так же плавно будет изменяться и норма управляемости менеджеров оптимального дерева при движении от его нижних уровней к верхним. Для такой функции задача поиска оптимального дерева будет сложнее, чем для однородной функции затрат, когда все менеджеры оптимального дерева имели, по сути, одинаковую норму управляемости.

Приведем некоторые результаты исследования задачи поиска оптимальной иерархии для аддитивной функции затрат (см. пример 4) вида $c(r, \mu) = \varphi(r) + \chi(\mu)$, где μ – мера управляемой менеджером группы исполнителей, r – количество его непосредственных подчиненных, а $\varphi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ – некоторые неотрицательные неубывающие функции.

При аддитивной функции затраты менеджера складываются из затрат $\varphi(r)$ по работе с непосредственными подчиненными и затрат $\chi(\mu)$ по работе с подчиненными исполнителями.

Пример 26. Пусть политика стимулирования некоторой фирмы предполагает, что зарплата менеджера этой фирмы равна некоторому фиксированному проценту A от суммарной зарплаты управляемых им исполнителей, плюс надбавка $\varphi(r)$, зависящая от количества r непосредственных подчиненных этого менеджера. Сумма надбавки определяется рынком – за слишком маленькие деньги никто не будет выполнять слишком большой объем работы. Логично считать, что сумма надбавки растет с увеличением количества непосредственных подчиненных (и, соответственно, с увеличением затрат менеджера на их координацию). Тогда можно поставить вопрос о том, какая иерархия при подобной политике стимулирования имеет минимальные затраты на содержание менеджеров. Если считать зарплаты исполнителей их мерами, то решение этого вопроса сводится к поиску оптимальной иерархии при аддитивной функции затрат вида $\varphi(r) + A \cdot \mu$. •

Понятно, что аддитивная функция затрат не является однородной. В то же время, легко проверить, что аддитивная функция затрат монотонна по группам, и, следовательно, по утверждению 1 для нее существует оптимальное дерево.

Приведем достаточное условие оптимальности веерной иерархии (см. определение 5) для аддитивной функции затрат.

Лемма 6. Если для любых строго больших единицы целых чисел r' и r'' выполняется неравенство $\varphi(r') + \varphi(r'') \geq \varphi(r'+r''-1)$, то аддитивная функция затрат является расширяющей, и оптимальна веерная иерархия.

Доказательство леммы приведено в приложении.

В частности, условия леммы выполнены, если функция $\varphi(r)$ вогнутая. Значит, сложные иерархии при аддитивной функции затрат могут возникать лишь если функция $\varphi(r)$ не вогнута.

Следующий результат описывает соотношение норм управляемости менеджера и его начальника в оптимальном дереве.

Лемма 7. При аддитивной функции затрат в оптимальном дереве любой менеджер имеет не больше непосредственных подчиненных, чем его начальник.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Из леммы 7 следует, что количество непосредственных подчиненных менеджера не убывает «вверх» по иерархии.

К сожалению, для аддитивных функций затрат к настоящему времени не получено аналитических оценок затрат оптимальной иерархии, подобных оценкам, описанным в главе 3. Также не до конца ясно, сколько менеджеров должно быть в оптимальном дереве, и какие именно нормы управляемости они должны иметь. Однако если количество менеджеров и их нормы управляемости произвольным образом зафиксированы, то можно кое-что сказать о виде оптимального дерева с такими менеджерами.

Ниже показывается, что оптимальное дерево обладает свойством *сбалансированности*, то есть каждый менеджер стремится разделить управляемых им исполнителей между своими непосредственными подчиненными на группы примерно одинаковой меры. В то же время, в зависимости от того, выпукла функция $\chi(\mu)$ или вогнута, это стремление проявляется по-разному, в результате чего при выпуклой и вогнутой функции $\chi(\mu)$ оптимальными оказываются разные деревья.

Зафиксируем количество менеджеров q и количество подчиненных $r(m_i)$ у каждого менеджера m_i, $i = 1, \ldots, q$. В любом дереве величины $r(m_i)$ связаны соотношением $\sum_{i=1}^{q} r(m_i) = n + q - 1$ (этот результат является простым обобщением леммы 2), и для любого набора положительных чисел $r(m_i)$, $i = 1, \ldots, q$, больших единицы и удовлетворяющих этому равенству, можно построить дерево.

Вопрос состоит в том, как подчинять таких менеджеров друг другу, чтобы получить дерево с минимальными затратами. Без ограничения общности считаем, что менеджеры упорядочены по возрастанию количества их непосредственных подчиненных, то есть $i > j \Rightarrow r(m_i) \geq r(m_j)$. Это, в частности, означает, что $r(m_1) = \min_{i=1 \ldots q} r(m_i)$, $r(m_q) = \max_{i=1 \ldots q} r(m_i)$.

Рассмотрим следующий алгоритм построения дерева, являющийся обобщением алгоритма Хаффмана [29] построения оптимального 2-дерева бинарного кодирования.

Шаг 0. Определим множество мер исполнителей $\mathrm{M} := \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Возьмем менеджера с номером $j = 1$.

Шаг 1. Назначим j-му менеджеру в подчинение множество $g_j \subseteq \mathrm{M}$ из $r(m_j)$ сотрудников с минимальными мерами. Удалим этих исполнителей из множества М и добавим туда менеджера j с мерой $\mu(m_j) = \sum_{i \in g_j} \mu_i$.

Шаг j от 2 до q. Повторим для j-го менеджера шаг 1.

В результате получим дерево, которое будем называть *деревом Хаффмана*. Дерево Хаффмана минимизирует *лексикографически* [120] вектор $(\mu(m_1), \ldots, \mu(m_q))$ мер групп исполнителей, управляемых менеджерами $m_1, \ldots, m_q$. Это означает, что если в любом другом дереве, состоящем из q менеджеров с нормами управляемости $r(m_i)$, $i = 1, \ldots, q$, менеджеры управляют группами исполнителей мер $(\mu'(m_1), \ldots, \mu'(m_q))$, то первая ненулевая компонента вектора $(\mu'(m_1) - \mu(m_1), \ldots, \mu'(m_q) - \mu(m_q))$ положительна.

Пример 27. Проиллюстрируем работу описанного выше алгоритма. Пусть задано множество из десяти исполнителей с мерами $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = 2$, $\mu(3) = 2$, $\mu(4) = 3$, $\mu(5) = 3$, $\mu(6) = 3$, $\mu(7) = 4$, $\mu(8) = 5$, $\mu(9) = 7$, $\mu(10) = 8$ (см. рис. 45). Построим дерево Хаффмана для четырех менеджеров I, II, III и IV с нормами управляемости соответственно 2, 3, 4 и 4.

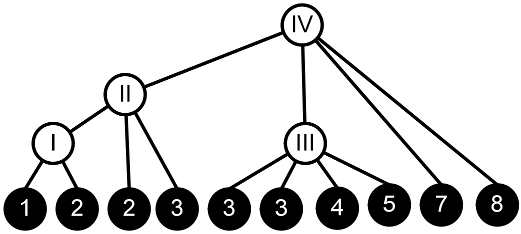


Рисунок 45. Пример дерева Хаффмана

На первом шаге алгоритма множество M совпадает с множеством мер всех исполнителей. Поэтому на этом шаге менеджеру I в непосредственное подчинение назначаем исполнителей 1 и 2, имеющих минимальные меры. Удалим меры этих исполнителей из множества M и добавим в него менеджера с мерой 3, равной суммарной мере управляемых им исполнителей. На втором шаге менеджеру II даются в подчинение исполнители 3 и 4, а также менеджер I, поскольку меры этих сотрудников – это три минимальные меры из множества M. Удаляем их меры из множества M и заменяем их мерой 8, которую имеет группа, управляемая менеджером II. Теперь множество M содержит меры {8, 3, 3, 4, 5, 7, 8}, поэтому менеджеру III в подчинение назначаются исполнители 5, 6, 7 и 8, меры 3, 3, 4 и 5 которых – это минимальные из мер множества M. На последнем шаге менеджеру IV даем в подчинение оставшихся без начальника сотрудников. Полученное дерево Хаффмана изображено на рис. 45 (метки исполнителей соответствуют их мерам). ●

Пусть функция $\chi(\mu)$ вогнута. Оказывается, что в этом случае дерево Хаффмана оптимально при фиксированных q, $r(m_i)$, $i = 1, \ldots, q$.

Докажем сначала вспомогательный результат.

Определение 16. *Цепочкой менеджеров* называется последовательность $m_1, \ldots, m_l$ менеджеров, в которой каждый последующий менеджер является непосредственным начальником предыдущего.

Лемма 8. Если функция $\chi(\mu)$ линейна, то любое оптимальное (при фиксированных q, $r(m_i)$, $i = 1, \ldots, q$) дерево можно перестроить так, что в начале самой длинной в этом дереве цепочки менеджеров будет находиться менеджер, непосредственно управляющий $r(m_1)$ исполнителями с минимальными мерами.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Утверждение 11. Пусть функция $\chi(\mu)$ линейна. Тогда для фиксированных q, $r(m_i)$, $i = 1,...,q$, дерево Хаффмана имеет минимальные затраты.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Этот результат остается верным и для произвольной вогнутой функции $\chi(\mu)$.

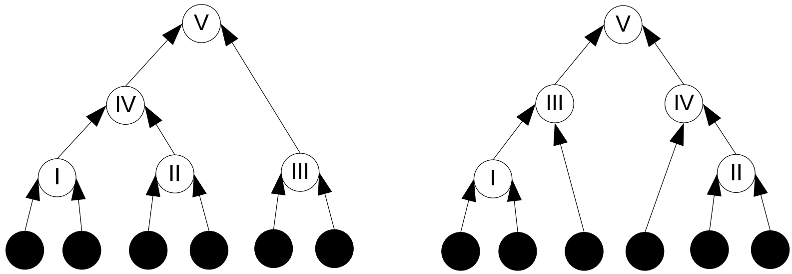
Утверждение 12. Пусть функция $\chi(\mu)$ вогнута. Тогда для фиксированных q, $r(m_i)$, $i = 1,...,q$, дерево Хаффмана имеет минимальные затраты.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Из теории оптимального кодирования [29] известно, что в дереве Хаффмана непосредственные подчиненные любого менеджера управляют группами примерно равной меры, то есть менеджер делит управляемую им группу примерно поровну между своими подчиненными, так что дерево Хаффмана можно назвать сбалансированным.

Для вычисления дерева Хаффмана имеются эффективные алгоритмы сложности порядка $n \ln n$. Тогда для фиксированного количества менеджеров q задача поиска оптимального количества непосредственных подчиненных каждого менеджера сводится к задаче дискретной оптимизации функции $c(r_1, \ldots, r_q)$ (вычислимой в среднем за $n \ln n$ операций) при условиях $\sum_{i=1}^{q} r_i = n + q - 1$, $r_1 \geq 2$, $r_{i+1} \geq r_i$ для всех $i = 1 ... q-1$.

Пусть теперь функция $\chi(\mu)$ не вогнута, а, например, выпукла. Тогда легко подобрать пример, в котором дерево Хаффмана уже не будет оптимальным.



а)   б)

Рисунок 46. Иерархии над множеством из шести исполнителей

Пример 28. Пусть имеется $n = 6$ исполнителей единичной меры и $q = 5$ менеджеров, каждых из которых имеет двух непосредственных подчиненных. Дерево Хаффмана для этого примера имеет вид, представленный на рис. 46а). Менеджеры I, II, …, V управляют группами исполнителей мер 2, 2, 2, 4, 6 соответственно. Легко проверить, что в дереве изображенном на рис. 46б), менеджеры управляют группами размеров 2, 2, 3, 3, 6. Для строго выпуклой функции $\chi(\mu)$ верно неравенство $\chi(2) + \chi(4) > \chi(3) + \chi(3)$, и, значит, дерево рис. 46б) имеет меньшие затраты, чем дерево Хаффмана. •

Для выпуклой функции $\chi(\mu)$ пока не удалось построить эффективного алгоритма построения оптимального дерева даже для фиксированного количества менеджеров с фиксированными нормами управляемости. Тем не менее, оптимальное дерево также должно быть сбалансированным в том смысле, что каждый менеджер делит управляемую им группу «примерно поровну», насколько это возможно. Опишем этот результат более формально.

Лемма 9. Пусть функция $\chi(\mu)$ строго выпукла, и у некоторого менеджера оптимального дерева есть два менеджера-заместителя m и m', управляющие группами мер μ и μ' соответственно. Пусть $\mu < \mu'$, тогда $\mu'' \geq \mu' - \mu$, где μ'' – разница между мерой любого из непосредственных подчиненных менеджера m' и мерой любого меньшего непосредственного подчиненного менеджера m.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Таким образом, меры групп, управляемых заместителями одного менеджера, в оптимальном дереве стремятся выровняться.

Лемму 9 можно обобщить на случай, когда менеджеры m и m' не имеют общего непосредственного начальника. Дадим некоторые определения.

Определение 17. Пусть в дереве выбраны две цепочки менеджеров: $S = (m_1,...,m_l)$ и $S' = (m_1',...,m_{l'}')$, управляющие группами мер $\mu_1,...,\mu_l$ и $\mu_1',...,\mu_{l'}'$, причем менеджеры m_l и $m_{l'}'$ имеют общего непосредственного начальника и длина l первой цепочки не превышает длины l' второй цепочки. *Степень разбалансированности* $\Delta(S,S')$ этих цепочек определим как максимальную меру, которую можно добавить к каждому члену последовательности $\mu_1,...,\mu_l$ так, чтобы для всех $i = 1...l$ выполнялись неравенства $\mu_i + \Delta(S,S') \le \mu_i'$, то есть $\Delta(S,S') = \min\limits_{i=1...l}[\mu_i' - \mu_i]$.

Для остальных пар цепочек менеджеров степень разбалансированности не определена.

Определение 18. Пусть непосредственные подчиненные менеджеров m и m' управляют группами мер $\mu_1,...,\mu_r$ и $\mu_1',...,\mu_{r'}'$ соответственно. *Минимальным скачком* $\delta(m, m')$ называется минимальная положительная разница между суммой элементов произвольного подмножества $\{\mu_1',...,\mu_{r'}'\}$ и суммы элементов подмножества $\{\mu_1,...,\mu_r\}$ такого же размера.

Пример 29. Возьмем некоторых менеджеров m и m', непосредственные подчиненные которых управляют группами мер $\{11, 7, 4\}$ и $\{1, 1, 18\}$ соответственно. Для них минимальный скачок $\delta(m, m')$ равен 1, так как 1 + 18 – (11 + 7) = 1, а остальные разницы больше. •

Утверждение 13. Пусть функция $\chi(\mu)$ строго выпукла и в оптимальном дереве степень разбалансированности $\Delta(S,S')$ цепочек $S = (m_1,...,m_l)$ и $S' = (m_1',...,m_{l'}')$ больше нуля. Тогда минимальный скачок $\delta(m_1, m_1')$ не меньше степени разбалансированности $\Delta(S,S')$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Из утверждения 13 видно, что задача построения оптимального дерева в условиях выпуклой функции $\chi(\mu)$ является усложненной модификацией известной «задачи о камнях» [75] (в общем случае *NP*-трудной), что делает проблематичным поиск эффективных алгоритмов решения задачи об оптимальном дереве при выпуклой функции $\chi(\mu)$.

Итак, выше рассмотрена задача построения оптимальной иерархии для аддитивной функции затрат менеджера. Найдены случаи, когда оптимальной является веерная иерархия. Показано, что в оптимальной иерархии количество непосредственных подчиненных менеджеров не убывает «вверх» по иерархии.

Также показано, что оптимальная иерархия представляет собой сбалансированное дерево одного из двух типов. Для вогнутой функции $\chi(\mu)$ построен эффективный алгоритм построения оптимальной иерархии с заданным количеством менеджеров и заданным количеством непосредственных подчиненных у каждого менеджера.

5.3. Структура системы управления технологическими связями

Во введении говорилось о трех этапах процесса организационного дизайна – дизайне технологии, дизайне структуры управления и синтезе механизмов управления.

На первом этапе определяется состав исполнителей, вовлеченных в технологический процесс организации. Определенное на этом этапе множество исполнителей дает начальные данные для второго этапа – надстройки над ним структуры управления, иерархии менеджеров. Задача менеджеров состоит в обеспечении успешной реализации исполнителями технологического процесса организации, поскольку практика показывает, что без системы управления организация функционировать не может. В то же время, содержание системы управления сопряжено с определенными затратами, и, несомненно, затраты на содержание менеджеров зависят от того технологического процесса, которым они в конечном счете управляют.

Выше на протяжении почти всей книги подробно исследовалась задача поиска оптимальной иерархии для зависящих от мер функций затрат менеджера (см. определение в разделе 1.3). То есть по результатам дизайна технологии каждому исполнителю ставилось в соответствие положительное число, его мера, и предполагалось, что затраты менеджеров зависят от мер исполнителей, которыми он непосредственно или опосредовано управляет.

Однако, понятно, что в общем случае определение технологического процесса организации далеко не сводится к перечислению мер исполнителей. Задачи, реализуемые каждым исполнителем в рамках технологии функционирования организации, могут требовать существенно более сложного описания, чем одно единственное число. Кроме того, исполнители организации вовлечены в единый технологический процесс, и для его адекватного описания важно учитывать и взаимодействия между исполнителями, связывающие их материальные, финансовые и информационные потоки.

В различных работах [127, 135] отмечается, что структура производственных потоков в наибольшей степени определяет структуру системы управления организацией, поэтому для построения формальных моделей организационных иерархий требуется разработать формальную модель производственных потоков.

Для этих целей в настоящее время существуют промышленные стандарты и широко используемые технологии (методология функционального моделирования IDEF, форматы ARIS, Oracle Business Models и другие) [15, 27, 136]. Большинство из них позволяет моделировать технологические процессы (бизнес-процессы) организации в форме так называемых, технологических сетей – графов, вершины которых описывают *элементарные работы*, а дуги – связывающие эти работы материальные, финансовые и информационные *потоки*. При этом вершинам и дугам технологической сети присваиваются метки, в которых хранятся количественные параметры элементарных работ и связывающих их потоков. Введем соответствующие определения.

Технологической сетью [92] над конечным множеством элементарных работ N назовем ориентированный граф $T = \langle N, E_T \rangle$ с множеством вершин N и множеством дуг E_T, ребрам $(u, w) \in E_T$ которого поставлены в соответствие k-мерные вектора $l_T(u, w)$ с неотрицательными компонентами. Вершины данного графа – это элементарные работы, операции технологического процесса организации. Связь $(u, w) \in E_T$ технологической сети означает, что от элементарной работы u к работе w идет k-компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т.п. Интенсивность каждой компоненты потока и определяется компонентами вектора $l_T(u, w)$. В технологической сети допускаются петли, дуги вида (w, w), $w \in N$. Компоненты соответствующего вектора $l_T(w, w)$ описывают количественные характеристики элементарной работы w – трудозатраты, ресурсоемкость и другие показатели.

Иногда при реализации технологических процессов ограничиваются тем, что назначают ответственных за выполнение той или иной работы. Однако для нормального функционирования организации этого недостаточно, так как технологические связи между работами не контролируются. Для успешной реализации технологического процесса необходима система управления технологическими связями, которая контролировала бы потоки между отдельными элементами технологической сети.

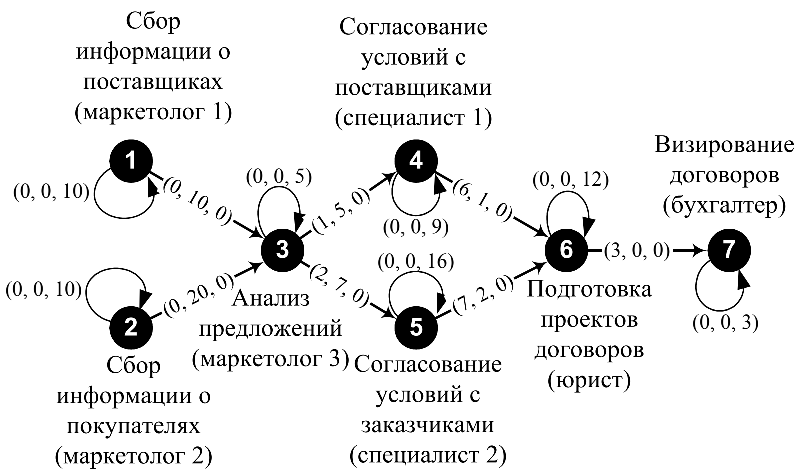


Рисунок 47. Пример технологической сети процесса подписания договоров

Простой пример технологической сети с трехкомпонентными потоками приведен на рис. 47. Первая компонента – это документы, вторая – «устная информация». Эти компоненты описывают потоки между работами. Третья компонента, трудозатраты, является характеристикой самих элементарных работ.

Если «расположить» технологическую сеть организации в горизонтальной плоскости (см. рис. 48), то задачу построения системы управления организацией можно сформулировать как задачу надстройки над технологической сетью древовидной иерархии менеджеров-контролеров.

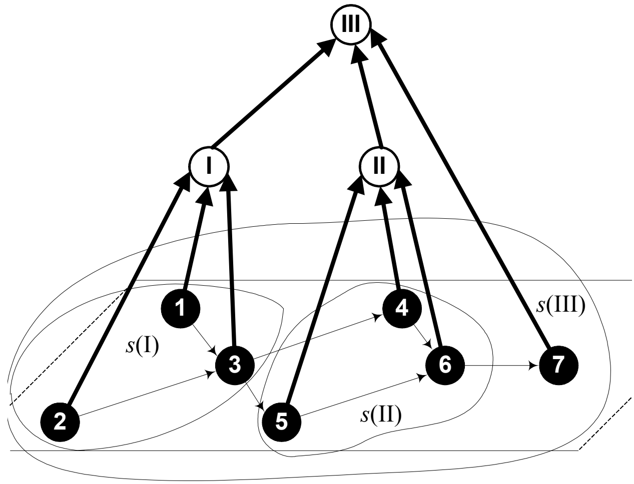


Рисунок 48. Пример структуры системы управления технологической сетью

При этом вершины технологической сети можно рассматривать и как рабочие места (отдельных исполнителей организации), и как элементарные операции.

В первом случае считаем, что уже определено распределение работ по исполнителям и требуется только координировать и контролировать их работу. Тогда все вершины иерархии управления будут менеджерами, управляющими другими менеджерами или конечными исполнителями. В этой модели один сотрудник организации не может совмещать производственную деятельность и управление, то есть является либо «чистым исполнителем», либо «чистым менеджером».

На рис. 48 приведен пример системы управления технологической сетью рис. 47. Система управления состоит из исполнителей 1-7 и менеджеров I, II и III. Подчиненными менеджера I являются все маркетологи (вершины 1–3 технологической сети), подчиненными менеджера II – специалисты 1, 2 и юрист – вершины 4–6), в подчинении менеджера III – менеджеры I и II, а также бухгалтер (вершина 7 технологической сети).

Во втором случае в задачу построения структуры системы управления включается и распределение элементарных работ по выполняющим их сотрудникам. Сотрудник организации может и выполнять работы технологического процесса (если ему непосредственно подчинена вершина технологической сети), и руководить другими сотрудниками (если ему непосредственно подчинен другой сотрудник).

В рамках этой модели рис. 48 можно интерпретировать как организацию, состоящую из трех сотрудников – I, II и III. При этом сотруднику I поручены работы по сбору и анализу информации о поставщиках и покупателях, сотруднику II – работы по согласованию условий и подготовке проектов договоров, а сотруднику III поручена координация работы первых двух сотрудников и, кроме того, работа по визированию договоров.

Тем не менее, в целях согласования терминологии данного раздела с терминологией остальной книги, далее будем независимо от интерпретации называть вершины технологической сети исполнителями, а узлы иерархии управления – менеджерами.

В этих обозначениях построение системы управления сводится к построению древовидной иерархии (см. определение 2) менеджеров над множеством исполнителей N, определяемым технологической сетью $T = \langle N, E_T \rangle$.

Как неоднократно отмечалось выше, содержание каждого менеджера иерархии управления требует от организации определенных затрат, и эти затраты зависят от той работы, которую менеджер выполняет. Основной задачей менеджеров является выполнение элементарных работ и координация потоков между элементарными работами. В рамках рассматриваемой модели эти работы и потоки описываются векторами l_T . Поэтому будем считать, что затраты менеджеров определяются технологическими потоками l_T между исполнителями (вершинами технологической сети) которыми этот менеджер непосредственно или опосредованно (через других менеджеров) управляет в рамках иерархии.

Определим затраты менеджера более формально.

Для этого напомним, что *подчиненная группа исполнителей* $s_H(m) \subseteq N$ менеджера m из иерархии H – это группа исполнителей, для которых менеджер m является начальником в иерархии H. Например, на рис. 48 овалами обведены группы исполнителей s(I), s(II) и s(III), которыми управляют менеджеры I, II и III соответственно. Однако в отличие от определения, приведенного в разделе 1.2, в рассматриваемой модели удобнее считать, что конечный исполнитель управляет пустой группой.

Определим вектор *суммарного потока* $l_T(s)$ между элементами произвольной группы исполнителей $s \subseteq N$.

Он задается формулой $l_T(s) = \sum_{u,w\in s} l_T(u,w)$ и включает в себя, в том числе, и «петлевые» потоки, описывающие элементарные операции технологической сети. Будем считать, что менеджер должен контролировать те технологические потоки между элементами подчиненной ему группы исполнителей, которые еще не контролируются его непосредственными подчиненными.

Тогда легко проверить, что если менеджер m имеет в иерархии H r непосредственно подчиненных ему менеджеров $m_1, \ldots, m_r$, то этот менеджер должен контролировать технологический поток $L_H(m) = l_T(s_H(m)) - l_T(s_H(m_1)) - \ldots - l_T(s_H(m_r)))$, где $s_H(m)$ – группа исполнителей, управляемая менеджером m, а $s_H(m_1), \ldots, s_H(m_r)$ – группы исполнителей, управляемые непосредственно подчиненными ему менеджерами.

Действительно, суммарный поток внутри группы $s_H(m)$ равен $l_T(s_H(m))$, а потоки $l_T(s_H(m_1)), \ldots, l_T(s_H(m_r))$ уже контролируются подчиненными менеджера m, так что ему самому нет необходимости контролировать их.

Например, менеджер III в иерархии, изображенной на рис. 48, контролирует суммарный поток $L(\text{III}) = (6, 12, 3)$, поскольку он управляет группой из всех семи исполнителей с суммарным потоком (49, 15, 65), но два непосредственно подчиненных ему менеджера I и II уже контролируют суммарные потоки размеров $L(\mathrm{I}) = (30, 0, 25)$ и $L(\mathrm{II}) = (13, 3, 37)$. Легко видеть, что контролируемый менеджером III поток складывается из потока 3-4 между исполнителями 3 и 4, потока 3-5, потока 6-7 и «петлевого» потока элементарной работы 7.

Для успешной реализации технологического процесса организации в иерархии менеджеров для каждой связи технологической сети должен быть назначен ответственный менеджер. Если технологическая сеть T связная, то для того, чтобы каждая ее связь кем-то контролировалась, необходимо наличие в иерархии менеджера (топ-менеджера) управляющего всем множеством исполнителей N. Если считать, что затраты $c(m, H)$ на содержание менеджера m в иерархии H зависят только от контролируемого им от потока $L_H(m)$, то их можно записать в виде $c(m, H) = K(L_H(m))$, где $K(\cdot)$ – некоторая функция k переменных – компонент вектора потока.

Затраты иерархии H равны сумме затрат входящих в нее менеджеров: $C(H) = \sum_{m \in M} K(L_H(m))$, где M – множество менеджеров иерархии. Разумеется, организация заинтересована в построении системы управления, имеющей минимальные возможные затраты.

Описанная выше функция затрат менеджера является секционной (см. определение 6), поскольку она зависит только от суммарного технологического потока группы исполнителей, которой управляет менеджер, и от технологических потоков групп, которыми управляют его непосредственные подчиненные[1].

Однако поскольку определение группы исполнителей в рассматриваемой модели несколько отличается (исполнитель управляет пустой группой), в оптимальных иерархиях могут встречаться менеджеры, непосредственно управляющие единственным исполнителем. Такой менеджер интерпретируется как сотрудник,

[1] Одна из первых моделей надстройки иерархии управления над технологической сетью была рассмотрена в [80], однако там предлагалась другая (но также секционная!) функция затрат менеджера.

которому поручено выполнение единственной операции. В то же время, легко проверить, что в оптимальном дереве каждый менеджер управляет уникальной группой исполнителей – в противном случае «лишних» менеджеров можно удалить без увеличения затрат иерархии.

Итак, формулируем задачу формирования структуры оптимальной системы управления технологическими связями как задачу поиска оптимальной древовидной иерархии на множестве исполнителей N с секционной функцией затрат менеджера, определяемой формулой $c(m, H) = K(L_H(m))$.

Определение 19 [102]. Функция $K(\cdot)$, заданная на множестве k-мерных векторов с неотрицательными компонентами, называется *супераддитивной*, если для любых таких векторов l и l' выполняется неравенство $K(l + l') \geq K(l) + K(l')$. Если же всегда выполняется обратное неравенство, функция $K(\cdot)$ называется *субаддитивной*.

Утверждение 14. При субаддитивной функции затрат менеджера $K(\cdot)$ оптимальна веерная иерархия. При супераддитивной функции затрат оптимальна иерархия, в которой каждая элементарная операция выполняется отдельным менеджером, не имеющим других непосредственных подчиненных, а остальные менеджеры имеют по два непосредственных подчиненных.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Пример 30. Пусть функция $K(L)$ зависит только от линейной комбинации компонент вектора $L = (L^1, \ldots, L^k)$, и ее можно представить в виде $K(L) = K_0(\alpha_1 \cdot L^1 + \ldots + \alpha_k \cdot L^k)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \cdot$ – неотрицательные коэффициенты, а $K_0(\cdot)$ – неубывающая функция, определенная на множестве всех неотрицательных чисел. Для супераддитивности этой функции затрат достаточно выпуклости функции $K_0(\cdot)$ в сочетании с условием нулевых постоянных затрат, $K_0(0) = 0$. Для субаддитивности же достаточно вогнутости функции $K_0(\cdot)$. •

Итого, поскольку веерная иерархия единственна, то при субаддитивной функции затрат задача поиска оптимальной иерархии полностью решена. Для супераддитивной функции оптимальную иерархию достаточно искать среди 2-деревьев. Алгоритмы поиска оптимальных 2-деревьев описаны в [83, 85], там же приведены точные и эвристические алгоритмы поиска оптимальных деревьев, которые позволяют численно решать задачу поиска оптимальной иерархии для произвольной секционной функции затрат.

Остаток данного раздела посвящен рассмотрению важного с практической точки зрения случая, когда, как в примере 30, функция затрат менеджера зависит от линейной комбинации компонент вектора потока, выпукла, и имеются ненулевые начальные затраты, то есть $K_0(0) > 0$. Такая функция уже не будет супераддитивной, поэтому нельзя воспользоваться утверждением 14.

Если функция затрат имеет вид $K(L) = K_0(\alpha_1 \cdot L^1 + \ldots + \alpha_k \cdot L^k)$, то вместо многокомпонентных потоков технологической сети можно рассматривать «эффективные» однокомпонентные потоки, сводя произвольный вектор потока $L = (L^1, \ldots, L^k)$ к одному числу $\alpha_1 \cdot L^1 + \ldots + \alpha_k \cdot L^k$. Ниже считаем, что потоки технологической сети однокомпонентные.

Пусть в оптимальной иерархии H менеджеры $m_1, \ldots, m_q$ контролируют потоки $L_1, \ldots, L_q$. Затраты этой иерархии

$$C(H) = \sum_{i=1}^{q} K(L_i) .$$

Поскольку в любой иерархии управления каждый поток контролируется одним и только одним менеджером, сумма потоков $L_1 + \ldots + L_q$ равна суммарному потоку $l_T(N)$ между всеми работами технологической сети. Так как функция $K(\cdot)$ выпуклая, минимум выражения $\sum_{i=1}^{q} K(L_i)$ по всем $L_1, \ldots, L_q$, сумма которых равна $l_T(N)$, достигается при $L_1 = \ldots = L_q = l_T(N)/q$, то есть при распределении суммарного потока $l_T(N)$ поровну между всеми менеджерами иерархии.

Следовательно, выражение $q \cdot K(l_T(N)/q)$ задает нижнюю оценку затрат оптимальной иерархии, состоящей из q менеджеров. В оптимальной иерархии не может быть более $2 \cdot n - 1$ менеджеров (этот случай реализуется, если каждая операция выполняется отдельным менеджером, а у остальных менеджеров по два непосредственных подчиненных). Поэтому следующая формула задает нижнюю оценку затрат оптимального дерева:

(40) $$C_L(T) = \min_{q=1 \ldots 2n-1} qK(l_T(N)/q) .$$

Обозначим q^* – количество менеджеров, при котором достигается минимум в формуле (40). Если над технологической сетью можно надстроить дерево из q^* менеджеров, управляющих одинаковыми технологическими потоками, то затраты этой иерархии будут совпадать с нижней оценкой (40) и, следовательно, эта иерархия будет оптимальной.

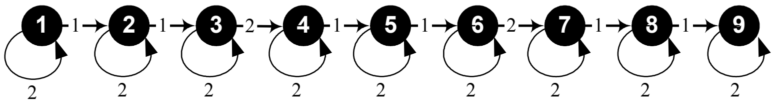


Рисунок 49. Пример технологической цепи

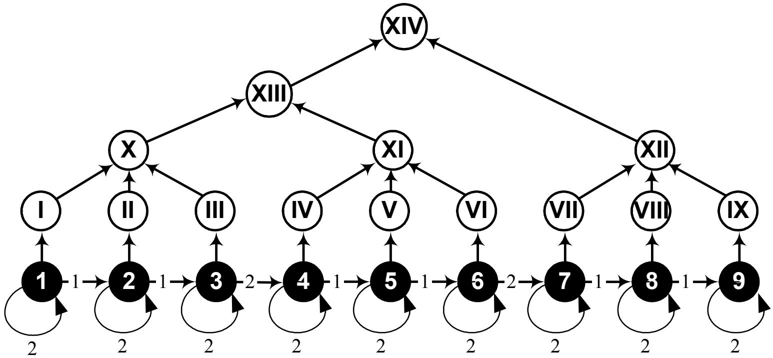


Рисунок 50. Пример оптимальной иерархии

Пример 31. Рассмотрим пример использования нижней оценки (40) для построения оптимальной иерархии. Пусть задана технологическая сеть с однокомпонентными потоками, изображенная на рис. 49. Подобные технологические сети, в которых операции связаны последовательно, называются *технологическими цепями* [115]. Все девять элементарных работ цепи имеют одинаковую трудоемкость 2, в то время как часть потоков между работами имеет величину 1, а часть – 2.

Пусть функция затрат менеджера в зависимости от величины L контролируемого им потока определяется выражением $C(L) = 3 + L^2$. Найдем оптимальную древовидную иерархию управления этой технологической сетью.

Величина суммарного потока сети равна 28. Для поиска оптимального количества менеджеров q^* найдем точку минимума выражения $q \cdot (3 + (28/q)^2)$ по всем целым q от 1 до $2n - 1 = 17$. Легко проверить, что этот минимум достигается при 14 менеджерах. Следовательно, дерево с 14 менеджерами, в котором каждый менеджер контролирует одинаковый поток величины 2, оптимально. Такое дерево существует и приведено на рис. 50.

В этой иерархии менеджерам I-IX поручено выполнение элементарных работ. У менеджеров I-IX отсутствуют подчиненные сотрудники. Менеджеры X-XII управляют каждый тремя менеджерами более низкого уровня. Например, менеджер X управляет менеджерами I-III и контролирует потоки 1-2 и 1-3 между этими менеджерами. Суммарная величина контролируемого потока равна двум. Менеджеры XIII и XIV составляют верхние уровни иерархии управления. Каждый из них управляет одним единственным потоком, также имеющим величину 2. •

К сожалению, для большинства технологических сетей дерева, в котором все менеджеры управляют строго одинаковыми потоками, не существует. Однако на основе нижней оценки (40) можно предложить следующий эвристический алгоритм построения дерева, в котором менеджеры управляют примерно одинаковыми потоками.

Шаг 1. Находим оптимальное количество менеджеров

(41) $$q^* = \arg\min_{q=1\ldots2n-1} qK(l_T(N)/q).$$

Шаг 2. Определяем «эталонный» поток $l_T(N)/q$.

Шаг 3. Последовательно добавляем в иерархию менеджеров таким образом, чтобы контролируемый ими поток был как можно ближе к эталонному потоку до тех пор, пора есть связи технологической сети, не контролируемые ни одним из менеджеров.

Пример 32. Пусть для технологической сети, приведенной на рис. 47, задана функция затрат $K(L) = 300 + L^2$, где L – «эффективный» однокомпонентный поток, вычисляемый просто как сумма компонент трехкомпонентных потоков.

Суммарный поток сети равен 129. Тогда по формуле (41) легко вычисляется оптимальное количество менеджеров $q^* = 7$. Соответственно, «эталонный» поток равен 129/7, то есть примерно 18.43. Добавим в иерархию менеджера, которому поручим выполнять элементарные работы 6 и 7, и, соответственно, контролировать связь между ними. Суммарный поток, контролируемый этим менеджером, равен 18, что весьма близко к «эталонному» потоку 18.43. Добавим менеджера, который будет выполнять элементарные работы 1 и 2, то есть контролировать суммарный потока величины 20, что также недалеко от эталонного. Еще один менеджер, с номером III, будет выполнять элементарную работу 5. Его поток равен 16. Менеджер IV будет управлять менеджером I и выполнять работу 4, также контролируя суммарный поток размера 16. Менеджер V будет управлять менеджером III, а также выполнять элементарную работу номер 3. Его поток равен 14, что довольно далеко от эталонного, но другие варианты назначения ему подчиненных дают еще большее отклонение от эталонного потока. Менеджер VI будет управлять менеджерами IV и V, контролируя поток величины 15. И, наконец, менеджеру VII, который будет управлять менеджерами II и IV, придется контролировать поток величины 30. Величина этого потока также довольно далека от «эталонной», но другого выбора нет. В результате получили иерархию, изображенную на рис. 51. •

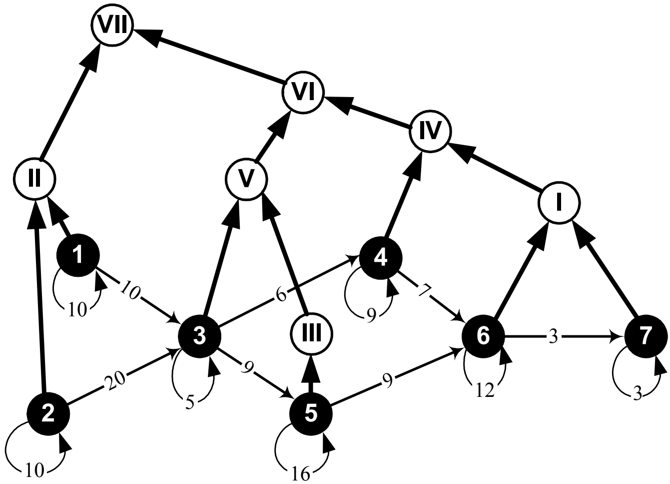


Рисунок 51. Пример построения иерархии
с помощью эвристического алгоритма

Итак, выше была рассмотрена задача построения оптимальной структуры системы управления технологическими связями организации. Задача была сведена к задаче построения оптимальной древовидной иерархии для секционной функции затрат. Были найдены условия оптимальности веерной иерархии и 2-дерева. Для выпуклых функций затрат менеджера, зависящих от линейной комбинации компонент вектора контролируемого технологического потока, получена нижняя оценка затрат оптимальной иерархии и показано, что в оптимальной иерархии затраты всех менеджеров стремятся выровняться. Предложен эвристический алгоритм построения «приближенно оптимального» дерева.

Описанная выше модель надстройки иерархии управления над технологической сетью была расширена и развита в [115]. В этой работе предполагалась, что затраты менеджера зависят не только от технологического потока внутри управляемой менеджером группы исполнителей, но и от входящих в группу и исходящих из нее потоков. В [117, 118] для этой модификации модели была решена задача надстройки оптимальной иерархии над так называемой однородной технологической цепью. Там же на основе этой модели были получены условия оптимальности функциональной, дивизиональной и матричной структур управления.

5.4. Оптимальные иерархии и мотивация менеджеров

Как уже отмечалось, общая задача организационного дизайна обычно разбивается на три этапа: определение технологии функционирования, построение организационной структуры и назначение механизмов управления.

Большая часть рассматриваемых выше задач относилась ко второму этапу – построению организационной структуры при фиксированных технологии и механизмах управления[1]. Формулируя задачу поиска оптимальной иерархии, мы старались мак-

[1] Отметим, что рассмотренная в разделе 4.1 задача организации сборочного производства может рассматриваться как задача первого этапа. Построенная при ее решении схема сборочного производства может рассматриваться как технологическая сеть и выступать в роли начальных данных при построении системы управления технологическими связями (см. раздел 5.3).

симально изолировать ее от задач первого и третьего этапов организационного дизайна. В результате задача приобрела несколько абстрактный вид, так как вся информация, позволяющая сравнивать между собой различные организационные структуры (иерархии), была сконцентрирована «внутри» так называемой функции затрат иерархии. Функция затрат играла роль некоторого универсального критерия эффективности иерархии, что позволило свести рассматриваемую задачу к поиску допустимой иерархии, минимизирующей эту функцию.

В привязке к общей задаче организационного дизайна функция затрат иерархии описывает сумму финансовых расходов, требуемых от лица, формирующего организационную структуру (назовем его *организатором иерархии*) для обеспечения работы созданной иерархической системы управления организацией. Предполагается, что эти затраты складываются из затрат на обеспечение работы отдельных менеджеров иерархии – их заработную плату, премиальные, расходы по поддержанию рабочего места, средств связи и т.д.

На протяжении данного раздела будем для простоты считать, что затраты менеджера задаются секционной функцией и целиком состоят из заработной платы этого менеджера. Тогда легко понять, что выше при решении задачи поиска оптимальной иерархии неявно предполагалось, что если организатор иерархии нашел оптимальную иерархию, то для того, чтобы эта иерархия «заработала», ему достаточно нанять нужное количество менеджеров, определенным образом задать взаимное подчинение сотрудников и выплатить каждому менеджеру заработную плату, компенсирующую его затраты в этой иерархии[1].

Вопросы разработки механизмов управления, которые мотивировали бы качественное выполнение менеджерами своих функций в рамках фиксированной организационной структуры, целенаправленно исключались из рассмотрения, как относящиеся к другому этапу дизайна организации.

---

[1] Требование компенсации затрат менеджеров – это хорошо известное условие *индивидуальной рациональности* [126], которое гарантирует согласие менеджеров работать в организации.

Такое разделение задач организационного дизайна возможно, если в процессе формирования организации менеджеры не могут сами воздействовать на организационную структуру, и она полностью находится во власти организатора иерархии.

Однако на практике формирование организационной иерархии весьма трудоемко и включает в себя большое количество «черной» работы, вроде разработки положений, должностных инструкций, подбора и инструктажа персонала и пр. В этих условиях организатор иерархии обычно вынужден делегировать часть полномочий по формированию иерархии ее менеджерам.

Например, типична ситуация, когда менеджер иерархии не может изменить область своей ответственности (то есть, не может изменить управляемую им группу исполнителей), но свободен в выборе количества своих непосредственных подчиненных и в назначении их областей ответственности (определении для них подчиненных групп исполнителей).

Наделив менеджеров такими возможностями, организатор иерархии уже не может полностью игнорировать их интересы – иначе разрабатываемая им иерархия будет *неустойчивой*. Чтобы формализовать понятие устойчивости, рассмотрим произвольного менеджера m, которому в некоторой иерархии H поручено управлять группой исполнителей s.

Действие менеджера m – это выбор количества своих непосредственных подчиненных r и выбор способа разделения группы исполнителей s между этими подчиненными, то есть выбор *покрытия* [107] $s_1, \ldots, s_r$ множества s.

Интересы менеджера m описываются его *целевой функцией* f_m, которая представляет собой разницу между получаемым от организатора иерархии *стимулированием*[1] $\sigma_m(s_1, \ldots, s_r)$ (заработной платой менеджера) и затратами менеджера, задаваемыми секционной функцией $c(s_1, \ldots, s_r)$, то есть

[1] В общем случае функция стимулирования σ_m менеджера m может зависеть от его действия, от действий других менеджеров иерархии, от того, какая иерархия будет сформирована в результате их действий, и т.д., однако мы ограничимся рассмотрением *секционных функций стимулирования* вида $\sigma_m = \sigma_m(s_1, \ldots, s_r)$.

$$f_m = \sigma_m(s_1, \ldots, s_r) - c(s_1, \ldots, s_r).$$

Менеджер стремится выбором своего действия максимизировать свою целевую функцию, то есть выбирает действие

(42) $$(s_1^*, \ldots s_{r^*}^*) \in Arg \max_{\substack{r, s_1, \ldots, s_r: \\ s_1 \cup \ldots \cup s_r = s}} \left[\sigma(s_1, \ldots, s_r) - c(s_1, \ldots, s_r)\right].$$

Тогда, понятно, что устойчивыми будут лишь иерархии, которые предполагают именно такое, и никакое иное, количество непосредственных подчиненных менеджера m и именно такое распределение подчиненных исполнителей между этими непосредственными подчиненными. Кроме того, условие индивидуальной рациональности требует неотрицательности целевой функции каждого менеджера:

(43) $$\sigma(s_1^*, \ldots s_{r^*}^*) - c(s_1^*, \ldots s_{r^*}^*) \geq 0.$$

На основании вышесказанного дадим определение.

Определение 20. Иерархия H с множеством менеджеров M называется *устойчивой* при функциях стимулирования $\sigma_m(s_1, \ldots, s_r)$, $m \in M$, если для любого менеджера m этой иерархии группы исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные, удовлетворяют условию (42) и, кроме того, выполняется условие (49).

Если иерархия H устойчива и в ней некоторый менеджер m имеет r непосредственных подчиненных, управляющих группами исполнителей $s_1, \ldots, s_r$, то организатор иерархии выплачивает этому менеджеру стимулирование в размере $\sigma_m(s_1, \ldots, s_r)$. Теперь легко определить суммарные расходы организатора иерархии на стимулирование всех ее менеджеров и сформулировать *задачу поиска наилучшей устойчивой иерархии*: необходимо для заданного множества исполнителей N и заданной секционной функции затрат менеджера $c(s_1, \ldots, s_r)$ найти иерархию и назначить ее менеджерам стимулирование так, чтобы при этом стимулировании иерархия была устойчива, а расходы организатора иерархии на стимулирование были минимальны.

Дадим еще одно определение.

Определение 21. Пусть в некоторой иерархии H менеджер m имеет r непосредственных подчиненных, которые управляют группами исполнителей $s_1, \ldots, s_r$. *Квазикомпенсаторной* [126] называется функция стимулирования, которая предполагает компенсацию затрат менеджера $c(s_1, \ldots, s_r)$ в случае, если он выбирает себе r непосредственных подчиненных и назначает им в управление группы исполнителей $s_1, \ldots, s_r$, и нулевое стимулирование в противном случае.

В [116] было показано, что с помощью квазикомпенсаторного стимулирования организатор иерархии может сделать устойчивой любую иерархию H. Действительно, если затраты менеджера всегда положительны, то при таком стимулировании целевая функция менеджера неотрицательна только в одном случае – если он распределит подчиненную группу исполнителей между непосредственными подчиненными так, как предполагает иерархия H – поэтому менеджер именно так и поступает.

При квазикомпенсаторном стимулировании расходы на стимулирование менеджера равны затратам этого менеджера, а общие расходы организатора иерархии равны затратам иерархии. При этом из условий индивидуальной рациональности менеджеров следует, что меньшей суммой стимулирования обеспечить устойчивость иерархии нельзя. Отсюда следует, что для решения задачи поиска наилучшей устойчивой иерархии достаточно найти оптимальную иерархию H^* для функции затрат $c(s_1, \ldots, s_r)$, а затем обеспечить ее устойчивость с помощью квазикомпенсаторных функций стимулирования.

Более того, в [116] показано, что организатор иерархии может, на самом деле, обойтись одной функцией стимулирования, общей для всех менеджеров. Она имеет вид:

$$(44)\quad \sigma(s_1,\ldots,s_r) = \begin{cases} c(s_1,\ldots,s_r), & \text{если в иерархии } H^* \text{ есть менеджер с } r \text{ непосредствен-} \\ & \text{ными подчиненными, которые управляют группами } s_1,\ldots,s_r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оказывается, что, задав такую функцию стимулирования (по сути, задав политику стимулирования менеджеров организации), организатор иерархии может практически устраниться от участия в дальнейшем процессе построения иерархии. Он нанимает топ-менеджера и поручает тому формирование иерархии. Топ-менеджер выбирает себе непосредственных подчиненных, распределяет между ними исполнителей, и, в свою очередь, поручает им формирование подчиненных им частей иерархии. Они также выбирают себе непосредственных подчиненных и делегируют им право строить иерархию и так далее, пока вся иерархия не будет сформирована. После этого организатор иерархии выплачивает всем менеджерам стимулирование в соответствии с политикой стимулирования (44).

При этом организатор иерархии может быть уверен в том, что построена будет именно оптимальная иерархия[1] H^*, и его расходы на стимулирование менеджеров будут равны затратам этой оптимальной иерархии. Таким образом, при использовании политики стимулирования (44) не происходит потери эффективности (увеличения расходов организатора иерархии) в результате децентрализации полномочий по формированию иерархии.

Чтобы достичь этого результата, организатор иерархии должен назначать менеджерам стимулирование (44), имеющее вид довольно сложной секционной функции. Однако на практике использование подобных систем стимулирования может быть невозможным. Так, часто стимулирование менеджера (его зарплата), может зависеть лишь от того, какой группой исполнителей он управляет и, например, от количества его непосредственных подчиненных, но не от того, какие группы исполнителей назначены им в управление[2]. В [116] показано, что с помощью таких функций стимулирования в общем случае невозможно обеспечить устойчивость оптимальной иерархии.

Ниже предлагается иная схема взаимодействия организатора иерархии с менеджерами, позволяющая за счет отказа от индивидуального стимулирования сделать устойчивой оптимальную иерархию в случае, когда она имеет вид дерева. При этом формально стимулирование менеджера зависит только от того, какой

---

[1] Если иерархия H^* недревовидная, то необходимо еще оговорить правило, по которому менеджеры, управляющие одинаковыми группами исполнителей, «сливаются» в одного.

[2] Это случай так называемых *неполных контрактов* [7].

группой исполнителей он управляет, но не от количества непосредственных подчиненных или других параметров.

Идея этой схемы заключается в том, что организатор иерархии делегирует менеджерам право не только определять количество и задачи своих непосредственных подчиненных, но и назначать и выплачивать им стимулирование.

Пусть организатор иерархии вычислил оптимальную[1] иерархию H^* для множества исполнителей N при секционной функции затрат менеджеров, нашел ее затраты $C(H^*)$ и эта иерархия имеет вид дерева. Для простоты будем считать, что оптимальная иерархия единственна.

Организатор иерархии нанимает топ-менеджера и поручает ему формирование иерархии «на его вкус». Он выплачивает топ-менеджеру в виде стимулирования $\sigma(N)$ всю сумму $C(H^*)$ затрат оптимальной иерархии, но при этом обязует топ-менеджера выплатить из этой суммы заработную плату всем менеджерам иерархии, которых тот сочтет нужным нанять.

Топ-менеджер должен выбрать количество своих непосредственных подчиненных r и распределить подчиненную ему группу исполнителей N между ними (то есть выбрать покрытие $s_1, \ldots, s_r$ множества N). Кроме того, он должен определить суммы стимулирования $\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_r)$, необходимые для формирования порученных непосредственным подчиненным частей иерархии и выплатить им эти суммы.

Целевая функция f топ-менеджера при такой схеме взаимодействия с организатором иерархии равна полученному от организатора иерархии стимулированию за минусом затрат $c(s_1, \ldots, s_r)$, зависящих от того, каким образом топ-менеджер распределит порученную ему группу исполнителей между r своими непосредственными подчиненными, и расходов $\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_r)$ на стимулирование этих непосредственных подчиненных. Таким образом, $f = \sigma(N) - c(s_1, \ldots, s_r) - \sigma(s_1) - \ldots - \sigma(s_r)$.

---

[1] То есть иерархию, минимизирующую сумму затрат входящих в нее менеджеров без учета ее устойчивости или других факторов.

Обозначим через $C(s)$ затраты оптимального дерева[1] для множества исполнителей $s \subseteq N$. Если некоторому менеджеру поручено сформировать иерархию для группы исполнителей s, то независимо от того, какая иерархия будет сформирована и какие механизмы будут им использоваться, из условия индивидуальной рациональности менеджеров следует, что расходы на стимулирование менеджеров этой иерархии будут не меньше чем $C(s)$.

Следовательно, значение целевой функции топ-менеджера не может быть больше, чем $\sigma(N) - c(s_1, \ldots, s_r) - C(s_1) - \ldots - C(s_r)$. В свою очередь, сумма $c(s_1, \ldots, s_r) + C(s_1) + \ldots + C(s_r)$ представляет собой затраты некоторой иерархии над множеством исполнителей N, поэтому она не может быть меньше, чем $C(N)$. Поскольку $\sigma(N) = C(N)$, из этого следует, что целевая функция топ-менеджера не превышает нуля, причем она равна нулю только в случае, если он выберет себе ровно столько непосредственных подчиненных и распределит между ними исполнителей именно так, как предполагает оптимальное дерево H^* (только в этом случае полученное им стимулирование компенсирует его затраты и расходы на стимулирование). Это действие является единственным индивидуально рациональным действием топ-менеджера, поэтому тот выберет именно его.

Аналогично и для любого менеджера, непосредственного подчиненного топ-менеджеру, единственным индивидуально рациональным действием является назначение своих непосредственных подчиненных и распределение между ними своей группы исполнителей так, как предполагает оптимальное дерево H^*.

Назначение менеджеров происходит «сверху вниз» до тех пор, пока не будет построена вся иерархия H^*. При этом каждый менеджер получит выигрыш, равный нулю, а организатор иерархии понесет расходы на стимулирование ее менеджеров, в точности равные затратам этой иерархии.

Для функционирования такой схемы формирования иерархии необходимо, чтобы все менеджеры знали функцию затрат $c(\cdot)$

---

[1] Поскольку оптимальная иерархия для всего множества исполнителей N имеет вид дерева, оптимальная иерархия для любой группы исполнителей $s \subseteq N$ также будет древовидной.

и могли вычислить оптимальную иерархию для порученной им группы исполнителей. Если эта информация имеется только у организатора иерархии, то, очевидно, он заинтересован в том, чтобы достоверно сообщить ее менеджерам иерархии. Действительно, занижение сообщаемых менеджерам затрат иерархии приведет к тому, что некоторые менеджеры получат стимулирование, недостаточное для построения порученных им частей иерархии, и в результате иерархия не будет построена.

При этом само сообщение может быть достаточно компактным – организатору иерархии достаточно сообщить менеджерам, какой вид имеет оптимальная иерархия H^* и какие затраты несет каждый из ее менеджеров. Понимая, что сообщение достоверной информации выгодно организатору иерархии, менеджеры могут смело использовать это сообщение при выборе своих действий.

Итак, если организатор иерархии точно знает функцию затрат менеджеров, можно предложить сразу несколько эффективных механизмов построения устойчивой оптимальной иерархии.

Однако на практике информированность организатора иерархии никогда не бывает полной. В общем случае затраты менеджера могут зависеть как от его персональных характеристик, известных только этому менеджеру, так и от внешних параметров, о которых как менеджер, так и организатор иерархии имеют неполную информацию.

Построением механизмов стимулирования в условиях неполной информированности занимается специальный раздел микроэкономики – теория контрактов [7, 96, 138], однако в настоящее время она не дает исчерпывающего ответа на вопрос о том, как должны выглядеть оптимальные механизмы стимулирования менеджеров в сложных многоуровневых иерархиях. В имеющихся работах ([43, 51, 123]) находятся оптимальные механизмы стимулирования лишь для простых иерархий, состоящих из очень ограниченного числа менеджеров. При этом даже в этих «простых» случаях оптимальные механизмы имеют довольно сложный вид[1].

Общий результат теории контрактов состоит в том, что в условиях, когда менеджеры иерархии имеют больше информации (о существенных параметрах функции затрат), чем организатор иерархии, его расходы на стимулирование менеджеров иерархии будут превышать суммарные затраты менеджеров этой иерархии. При этом разница между расходами на стимулирование и затратами менеджеров (называемая *информационной рентой* [7]) некоторым образом распределяется между менеджерами в зависимости от их информированности. Кроме того, в условиях асимметричной информированности организатору иерархии может стать более выгодным формирование иерархии, отличающейся от оптимальной[2].

Более точно сказать, как именно информированность организатора иерархии сказывается на виде формируемой им организационной структуры, пока не представляется возможным.

Итак, систематическое исследование механизмов мотивации менеджеров многоуровневых иерархий в условиях асимметричной информированности является сложной, но весьма перспективной задачей. Стоит надеяться, что в будущем развитие теории управления организационными системами и микроэкономики позволит дать ответ и на эти вопросы.

---

[1] Кроме того, в [116] развивается подход к формированию сложных организационных структур в условиях неполной информированности, основанный на использовании организатором иерархии принципа *максимального гарантированного результата* (см. определение в [87]).

[2] Напомним, что оптимальная иерархия минимизирует сумму затрат входящих в нее менеджеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В заключение кратко остановимся на ключевых моментах содержания книги. Настоящая работа посвящена математическим моделям и методам решения задач поиска оптимальных иерархических структур. В качестве основной области применения рассматриваемых в книге подходов выступают задачи формирования организационной структуры – иерархической структуры системы управления организацией.

В основу принятого подхода положено разделение задачи организационного дизайна на три этапа: разработку технологии функционирования организации (по сути, определение состава исполнителей, выполняющих технологические операции нижнего уровня), выбор организационной структуры (определение состава и взаимной подчиненности менеджеров, управляющих исполнителями) и, наконец, построение механизмов управления (обеспечивающих качественное и надежное управление организацией в рамках выбранной структуры).

Такое разделение задач позволяет сконцентрировать внимание на втором этапе организационного дизайна и сформулировать задачу формирования организационной структуры как задачу дискретной оптимизации – выбора из множества допустимых иерархий наилучшей.

В роли критерия, минимизируемого выбором иерархической структуры, могут выступать затраты иерархии, складывающиеся из затрат составляющих ее менеджеров. Считается, что функция затрат менеджера является секционной [85], то есть затраты менеджера зависят от того, какими группами исполнителей управляют его непосредственные подчиненные.

Во второй главе кратко рассматриваются другие современные модели формирования организационных структур. Их сравнение с принятым в настоящей книге подходом позволяет сделать вывод, что концепция секционных функций затрат обобщает многие описанные в литературе модели и позволяет описывать широкий класс прикладных задач поиска оптимальных иерархий.

Описание постановки задачи завершается введением важных подклассов секционных функций затрат – функций затрат, зависящих от мер, а также однородных функций затрат, исследованию которых в данной работе уделяется основное внимание.

В третьей главе решается задача поиска оптимальной древовидной иерархии в случае, когда функции затрат менеджеров являются однородными. Показывается, что в этом случае все менеджеры оптимальных деревьев имеют примерно одинаковую норму управляемости (количество непосредственных подчиненных) и делят подчиненную им группу исполнителей между своими непосредственными подчиненными на части в примерно одинаковой пропорции.

Основным теоретическим результатом является вывод аналитического выражения для нижней оценки затрат оптимальной иерархии и конструктивные доказательства хорошего качества этой оценки, позволяющие в большинстве важных с практической точки зрения случаев эффективно строить субоптимальные древовидные иерархии.

Аналитическое выражение затрат оптимальной иерархии имеет большое значение для микроэкономического анализа, позволяя дать ответ на вопрос о том, как значения параметров модели сказываются на виде и затратах оптимальной иерархии, и в четвертой главе рассматривается применение разработанной оценки на примере нескольких содержательных моделей построения оптимальных иерархий. В числе прочего рассматривается задача организации сборочного производства и две модели построения иерархий управления организацией. В первой из них основная задача менеджеров состоит в том, чтобы решать проблемы, возникающие у исполнителей в процессе реализации технологического процесса организации, тогда как во второй – в планировании функционирования организации и выполнении приказов руководства.

Полученные результаты позволяют говорить о задаче поиска оптимальной древовидной иерархии при однородных функциях затрат менеджеров как о практически решенной. В то же время, понятно, что однородные функции затрат позволяют описывать далеко не все возникающие на практике задачи, и, даже оставаясь в рамках парадигмы секционных функций затрат менеджера, можно рассматривать и другие модели оптимальных иерархий.

В пятой главе кратко рассмотрено несколько возможных обобщений рассматриваемой задачи, таких, например, как модель надстройки иерархии управления над графом технологических взаимодействий исполнителей. Учитывая, что многие авторы ключевым фактором, влияющим на вид организационной структуры, называют особенности технологии функционирования организации, дальнейшее развитие этой модели хотелось бы отметить в числе наиболее перспективных задач.

Граф взаимодействий исполнителей позволяет детально описать все технологические процессы организации, и, поскольку функция затрат менеджера считается зависящей от технологических потоков, рассматриваемая модель дает почти неограниченные возможности для описания влияния специфики технологии функционирования на затраты (а, следовательно, и на вид) структуры системы организационного управления. Стоит также отметить, что наличие широко распространенных промышленных стандартов описания технологических процессов организаций в терминах графов взаимодействия элементарных работ делают модель надстройки иерархии над графом технологических взаимодействий наиболее привлекательной и с точки зрения ее прикладного применения в практике организационного дизайна.

Приведенный во второй главе обзор существующих моделей формирования организационных иерархий показывает, что далеко не все из них удается свести к задаче поиска оптимальной иерархии при секционной функции затрат менеджеров. В то же время, в большинстве описанных в литературе подходов используются критерии оптимальности иерархии, имеющие очень частный вид. Поэтому актуальной остается разработка общих формальных методов описания и оптимизации иерархических структур. В идеале эти методы должны дать теоретическую основу для решения задач поиска оптимальных иерархий с произвольным критерием эффективности.

Последний раздел пятой главы стоит несколько особняком, поскольку его тематика выходит за рамки чисто оптимизационных задач, решаемых в предыдущих разделах. Этот раздел уже затрагивает вопросы третьего этапа организационного дизайна – вопросы построения эффективных механизмов управления организацией. Оставляя в стороне огромное количество других механизмов организационного управления, здесь рассматриваются способы организации процесса формирования организационной структуры, основанные на децентрализации, в той или иной мере, прав принятия решений о виде структуры системы управления. Показывается, что если организатор иерархии имеет полную информацию о функциях затрат менеджеров, то можно предложить сразу несколько эффективных механизмов формирования организационной иерархии.

Тем не менее, известно, что на практике случай полной информированности организатора иерархии почти никогда не реализуется, ведь одной из основных причин создания сложных иерархических систем управления как раз и является потребность в децентрализации процессов обработки и хранения огромных объемов информации, возникающих при управлении современными организациями. При этом в руках менеджеров иерархии оказывается более полная и достоверная информация о значимых параметрах функционирования организации, чем у организатора иерархии – имеет место их асимметричная информированность.

Асимметричность в информированности чрезвычайно усложняет задачу построения эффективных механизмов формирования организационной иерархии. Имеющихся в настоящее время теоретических результатов недостаточно для полного решения этой задачи. Поэтому в качестве еще одного перспективного направления развития стоит назвать дальнейшее изучение механизмов управления формированием сложных организационных иерархий в условиях асимметричной информированности.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство леммы 1.

Решение проводится с использованием принципа максимума Понтрягина [109]. Для рассматриваемой задачи с открытым концом гамильтониан имеет вид $H = -x_t{}^{\alpha} s_t{}^{\beta} + p_t x_t \ln s_t$, где p_t – множитель Лагранжа для уравнения движения. Из принципа максимаума получаем условия экстремума:

(45) $$\dot{p}_t = -\partial H / \partial x = \alpha x_t{}^{\alpha-1} s_t{}^{\beta} - p_t \ln s_t,$$

(46) $$\partial H / \partial s = 0, \text{ то есть } \beta \cdot x_t{}^{\alpha} s_t{}^{\beta-1} = p_t x_t / s_t.$$

Подставляя (46) в (45), получаем, что

(47) $$\dot{p}_t / p_t = \alpha / \beta - \ln s_t.$$

С другой стороны, дифференцируя (46) по времени, имеем $\dot{p}_t = \beta(\alpha - 1) \cdot x_t{}^{\alpha-2} s_t{}^{\beta} \dot{x}_t + \beta^2 \cdot x_t{}^{\alpha-1} s_t{}^{\beta-1} \dot{s}_t$ или, с учетом (46):

(48) $$\dot{p}_t / p_t = (\alpha - 1) \cdot \dot{x}_t / x_t + \beta \cdot \dot{s}_t / s_t.$$

Объединяя (47) и (48), получаем новое уравнение:

$$(\alpha - 1) \cdot \dot{x}_t / x_t + \beta \cdot \dot{s}_t / s_t = \alpha / \beta - \ln s_t.$$

Подставляя в него уравнение движения $\dot{x}_t = x_t \ln s_t$ и упрощая, имеем $\alpha \cdot \ln s_t + \beta \cdot \dot{s}_t / s_t = \alpha / \beta$. Сделаем замену $\varphi_t = \ln s_t$, и тогда, поскольку $\dot{\varphi}_t = \dot{s}_t / s_t$, получаем линейное дифференциальное уравнение $\alpha \cdot \varphi_t + \beta \cdot \dot{\varphi}_t = \alpha / \beta$.

Ищем его решение в форме $\varphi_t = Ce^{\lambda t} + D$. Подставляя эту форму в уравнение, получаем

$$\alpha \cdot Ce^{\lambda t} + \alpha \cdot D + \beta \cdot \lambda Ce^{\lambda t} = \alpha / \beta \text{ для всех } t.$$

Значит, $D = 1/\beta$ и $\alpha + \beta \cdot \lambda = 0$, то есть $\lambda = -\alpha / \beta$.

Константу C находим из условия трансверсальности, которое для задачи с открытым концом имеет вид $H(t) = 0$ для всех t. То есть, подставляя в гамильтониан выражения $p_t = \beta \cdot x_t{}^{\alpha-1} s_t{}^{\beta}$ и $\varphi_t = \ln s_t$, получаем $-x_t{}^{\alpha} s_t{}^{\beta} + \beta \cdot x_t{}^{\alpha-1} x_t s_t{}^{\beta} \varphi_t = 0$, или $\beta \varphi_t = 1$. Это означает, что $Ce^{\lambda t} + 1/\beta = 1/\beta$, то есть $C = 0$.

Таким образом, $\ln s_t = 1/\beta$, что и требовалось доказать. •

Доказательство леммы 2.

Доказательство существования (r, x)-однородного дерева проводится по индукции. Пусть $q = 1$ (и, следовательно, $n = r$). Поскольку все компоненты пропорции x положительны, можно положить $\mu_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ и построить над этим множеством веерную иерархию. Легко видеть, что эта иерархия является (r, x)-однородным деревом.

Пусть теперь существование (r, x)-однородного дерева доказано для любого числа менеджеров, меньшего q. Покажем, что (r, x)-однородное дерево существует и для q менеджеров. По индукционному предположению, для $q – 1$ менеджера найдется такое множество из $n = (q – 1)(r – 1) + 1$ исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_n$, что на нем можно построить (r, x)-однородное дерево. В этом дереве заменим исполнителя с мерой μ_n на дополнительного менеджера, и подчиним этому менеджеру r исполнителей с мерами $\mu_n x_1, \mu_n x_2, \ldots, \mu_n x_r$. Получили (r, x)-однородное дерево с q менеджерами над множеством из $q(r – 1) + 1$ исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n x_1, \mu_n x_2, \ldots, \mu_n x_r$, что и требовалось.

Пусть теперь для любого натурального числа q $n \neq q(r - 1) + 1$. Докажем, что в этом случае не существует однородного дерева с нормой управляемости r. Предположим, что такое дерево существует и содержит q' менеджеров. Каждый менеджер имеет r непосредственных подчиненных, следовательно, общее количество подчиненных кому-либо сотрудников равно $q'r$. С другой стороны, начальника имеют все исполнители и все менеджеры, кроме топ-менеджера. Значит, $q'r = n + q' - 1$, или, иначе, $n = q'(r - 1) + 1$. Получили противоречие. •

Доказательство утверждения 4.

Доказательство проводится индукцией по числу исполнителей n. Для единственного исполнителя (то есть при $n = 1$) существует лишь дерево, в котором вовсе нет менеджеров. Будем считать его однородным. Затраты этого дерева равны нулю, то есть совпадают со значением формулы (5). Предположим, что для любого числа исполнителей, меньшего n, утверждение доказано. Докажем, что оно верно и для n исполнителей.

В (r, x)-однородном дереве H непосредственные подчиненные топ-менеджера управляют группами исполнителей $s_1, \ldots, s_r$, имеющими меры $\mu_k = x_k\mu$, $k = 1, \ldots, r$. Затраты дерева $C(H)$ складываются из затрат топ-менеджера и затрат поддеревьев $H_1, \ldots, H_r$, которыми управляют его непосредственные подчиненные. Поскольку каждое поддерево H_k также является однородным деревом для множества исполнителей s_k, $k = 1, \ldots, r$ и все группы s_k состоят менее чем из n исполнителей, по индуктивному предположению затраты однородного дерева равны

$$C(H) = c(\mu_1,\ldots,\mu_r) + C(H_1) + \ldots + C(H_r),$$

где затраты $C(H_k)$, $k = 1, \ldots, r$, определяются формулой (5).

Для краткости введем обозначение $C := c(x_1,\ldots,x_r)$. Из однородности функции затрат следует, что

$$c(\mu_1,\ldots,\mu_r) = \mu^\gamma c(x_1,\ldots,x_r) = \mu^\gamma C.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\gamma \neq 1$. Тогда

$$C(H) = \mu^\gamma C + \sum_{k=1}^{r} \left| \mu_k{}^\gamma - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^\gamma \right| \frac{C}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right|} =$$

$$= C \frac{\mu^\gamma \left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right| + \sum_{k=1}^{r} \left| \mu_k{}^\gamma - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^\gamma \right|}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right|} =$$

$$= C \frac{\left|\mu^\gamma - \sum_{i=1}^{r} \mu^\gamma x_i^\gamma\right| + \sum_{k=1}^{r} \left| \mu_k{}^\gamma - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^\gamma \right|}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right|} =$$

$$= C \frac{\left|\mu^\gamma - \sum_{i=1}^{r} \mu_i{}^\gamma\right| + \sum_{k=1}^{r} \left| \mu_k{}^\gamma - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^\gamma \right|}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right|}.$$

В силу (6) и (7) выражения $\mu^\gamma - \sum_{i=1}^{r} \mu_i{}^\gamma$ и $\mu_k{}^\gamma - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^\gamma$ при любом γ имеют одинаковый знак, и, значит,

$$| \mu^{\gamma} - \sum_{i=1}^{r} \mu_i{}^{\gamma} | + \sum_{k=1}^{r} | \mu_k{}^{\gamma} - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^{\gamma} | =$$

$$= | \mu^{\gamma} - \sum_{i=1}^{r} \mu_i{}^{\gamma} + \sum_{k=1}^{r} (\mu_k{}^{\gamma} - \sum_{j \in s_k} \mu(j)^{\gamma}) | = | \mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma} | .$$

Следовательно,

$$C(H) = C \frac{| \mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma} |}{| 1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma} |} = | \mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma} | \frac{c(x_1, ..., x_r)}{| 1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma} |},$$

и формула (5) верна при $\gamma \neq 1$.

Пусть теперь $\gamma = 1$. Тогда, аналогично,

$$C(H) = \mu C + \sum_{k=1}^{r} (\mu_k \ln \mu_k - \sum_{j \in s_k} \mu(j) \ln \mu(j)) \frac{C}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} =$$

$$= C \frac{- \mu \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i + \sum_{k=1}^{r} (\mu_k \ln \mu_k - \sum_{j \in s_k} \mu(j) \ln \mu(j))}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} =$$

$$= C \frac{\sum_{i=1}^{r} [\mu_i \ln \mu_i - \mu_i \ln x_i - \sum_{j \in s_i} \mu(j) \ln \mu(j)]}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} =$$

$$= C \frac{\sum_{i=1}^{r} [\mu_i \ln(\mu_i / x_i) - \sum_{j \in s_i} \mu(j) \ln \mu(j)]}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} = C \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu_i \ln(\mu) - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} =$$

$$= C \frac{\ln(\mu) \sum_{i=1}^{r} \mu_i - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i} = (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \frac{c(x_1, ..., x_r)}{- \sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}.$$

Таким образом, утверждение 4 доказано. •

Доказательство утверждения 5.

Схема доказательства аналогична доказательству утверждения 4. Воспользуемся индукцией по числу исполнителей *n*. Понятно, что для единственного исполнителя с мерой μ_1 $C_L(\mu_1) = 0$, что совпадает с затратами единственного возможного в этой ситуации «дерева». Предположим, что для любого числа исполнителей, меньшего n, утверждение доказано. Покажем, что оно верно и для n исполнителей.

Пусть в некотором дереве H k непосредственных подчиненных топ-менеджера управляют группами исполнителей $s_1, \ldots, s_k$. Затраты дерева складываются из затрат топ-менеджера и затрат поддеревьев $H_1, \ldots, H_k$, которыми управляют его непосредственные подчиненные (поддерево может состоять из единственного исполнителя, тогда его затраты равны нулю):

$$C(H) = c(\mu_1, ..., \mu_k) + C(H_1) + ... + C(H_k)\,.$$

Так как группы $s_1, \ldots, s_k$ содержат менее n исполнителей, по индуктивному предположению затраты соответствующих поддеревьев не меньше, чем $C_L(s_i)$. Следовательно,

$$C(H) \geq c(\mu_1, ..., \mu_k) + C_L(s_1) + ... + C_L(s_k)\,.$$

В правой части неравенства присутствует фиксированное количество непосредственных подчиненных k и фиксированное распределение $s_1, \ldots, s_k$ исполнителей из множества N в подчинение этим сотрудникам. Следовательно, правая часть не увеличится, если в ней взять минимум по всем k от 2 до n и всевозможным распределениям $s_1, \ldots, s_k$ исполнителей между непосредственными подчиненными топ-менеджера. Поэтому

$$C(H) \geq \min_{k=2...n} \min_{\substack{s_1,...,s_k: \\ \bigcup_{i=1}^{k} s_i = N}} \{c(s_1, ..., s_k) + \sum_{i=1}^{k} C_L(s_i)\}\,.$$

Пусть степень однородности $\gamma \neq 1$. Тогда, по формуле (11),

$$(49)\quad C(H) \geq \min_{k=2...n} \min_{\substack{s_1,...,s_k: \\ \bigcup_{i=1}^{k} s_i = N}} \{c(\mu_1, ..., \mu_k) + \sum_{i=1}^{k} |\, \mu_i^{\gamma} - \sum\nolimits_{j \in s_i} \mu(j)^{\gamma} \,|\, F(n_i, \varepsilon_i)\}\,,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k$ – меры групп $s_1, \ldots, s_k$, $n_1, \ldots, n_k$ – количество исполнителей в этих группах, а $\varepsilon_i = \min_{j \in s_i} \mu(j) / \mu_i$.

Легко видеть, что функция $F(n, \varepsilon)$ не возрастает по количеству исполнителей n, так как увеличение n расширяет множество, по которому берется минимум в формуле (10). По той же причине функция $F(n, \varepsilon)$ не убывает по ε.

Поскольку $n_i < n$, а $\varepsilon_i \geq \varepsilon = \min_{j\in N} \mu(j) / \sum_{j\in N} \mu(j)$, правая часть неравенства (49) не увеличится, если в ней заменить n_i на n, а ε_i – на ε, то есть

$$(50)\quad C(H) \geq \min_{k=2\ldots n} \min_{\substack{s_1,\ldots,s_k:\\ \bigcup_{i=1}^k s_i = N}} \{c(\mu_1,\ldots,\mu_k) + F(n,\varepsilon)\sum_{i=1}^k |\, \mu_i^\gamma - \sum_{j\in s_i} \mu(j)^\gamma \,|\} =$$

$$= \min_{k=2\ldots n} \min_{\substack{s_1,\ldots,s_k:\\ \bigcup_{i=1}^k s_i = N}} \{c(\mu_1,\ldots,\mu_k) + F(n,\varepsilon)\,|\sum_{i=1}^k \mu_i^\gamma - \sum_{j\in N} \mu(j)^\gamma \,|\}.$$

Теперь правая часть неравенства зависит не напрямую от разбиения множества исполнителей N на группы $s_1, \ldots, s_k$, а лишь от мер этих групп $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Тогда заменим минимум по всем разбиениям на группы минимумом по всем мерам $\mu_1, \ldots, \mu_k$, большим, чем $\mu\varepsilon$, и дающим в сумме $\mu := \mu(N)$. При этом правая часть неравенства не увеличится. Таким образом,

$$C(H) \geq \min_{k=2\ldots n} \min_{\substack{\mu_i \geq \mu\varepsilon:\\ \sum_{i=1}^k \mu_i = \mu}} \{c(\mu_1,\ldots,\mu_k) + F(n,\varepsilon)\,|\sum_{i=1}^k \mu_i^\gamma - \sum_{j\in N} \mu(j)^\gamma \,|\} =$$

$$= \mu^\gamma \min_{k=2\ldots n} \min_{y\in D_k(\varepsilon)} \{c(y_1,\ldots,y_k) + F(n,\varepsilon)\,|\sum_{i=1}^k y_i^\gamma - \sum_{j\in N} (\mu(j)/\mu)^\gamma \,|\}.$$

В правой части добавим и отнимем $C_L(N)$. Тогда неравенство принимает вид:

$$C(H) \geq C_L(N) + \min_{k=2\ldots n} \min_{y\in D_k(\varepsilon)} \{\mu^\gamma c(y_1,\ldots,y_k) +$$

$$+ F(n,\varepsilon)[|\sum_{i=1}^k \mu^\gamma y_i^\gamma - \sum_{j\in N} \mu(j)^\gamma \,| - |\, \mu^\gamma - \sum_{j\in N} \mu(j)^\gamma \,|]\}.$$

Заметим, что в силу неравенств (6) и (7) выражения $\sum_{i=1}^k \mu^\gamma y_i^\gamma - \sum_{j\in N} \mu(j)^\gamma$ и $\mu^\gamma - \sum_{j=1}^n \mu(j)^\gamma$ имеют одинаковый знак.

Кроме того, при $\gamma > 1$ $\sum_{i=1}^k \mu^\gamma y_i^\gamma \leq \mu^\gamma$, при $\gamma < 1$ $\sum_{i=1}^k \mu^\gamma y_i^\gamma \geq \mu^\gamma$.

Следовательно, независимо от значения γ справедливо тождество

$$|\sum_{i=1}^{k}\mu^{\gamma}y_i^{\gamma}-\sum\nolimits_{j\in N}\mu(j)^{\gamma}|-|\mu^{\gamma}-\sum\nolimits_{j\in N}\mu(j)^{\gamma}|\equiv$$

$$\equiv -|\mu^{\gamma}-\sum_{i=1}^{k}\mu^{\gamma}y_i^{\gamma}|\equiv -\mu^{\gamma}\,|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|.$$

Поэтому неравенство можно преобразовать к виду:

$$C(H)\geq C_L(N)+\min_{k=2\ldots n}\min_{y\in D_k(\varepsilon)}\{\mu^{\gamma}c(y_1,\ldots,y_k)-F(n,\varepsilon)\mu^{\gamma}\,|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|\},$$

или, что эквивалентно,

$$C(H)\geq C_L(N)+\mu^{\gamma}\min_{k=2\ldots n}\min_{y\in D_k(\varepsilon)}|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|\{\frac{c(y_1,\ldots,y_k)}{|1-\sum_{i=1}^{k}y_i^{\gamma}|}-F(n,\varepsilon)\}.$$

Первый сомножитель минимизируемого выражения, очевидно, неотрицателен. Также неотрицателен и второй сомножитель, так как, по формуле (10), он достигает минимума, равного нулю, при $k = r(n, \varepsilon)$, $y = x(n, \varepsilon)$. Следовательно, минимум в правой части неравенства равен нулю, то есть $C(H) \geq C_L(N)$, и утверждение верно при $\gamma \neq 1$.

Рассмотрим теперь случай $\gamma = 1$. Формула (49) принимает вид

$$C(H)\geq \min_{k=2\ldots n}\min_{\substack{s_1,\ldots,s_k:\\ \bigcup_{i=1}^{k}s_i=N}}\{c(\mu_1,\ldots,\mu_k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}[\mu_i\ln\mu_i-\sum_{j\in s_i}\mu(j)\ln\mu(j)]F(n_i,\varepsilon_i)\}.$$

Аналогично вышеописанному огрубляем неравенство, заменяя n_i на n, а ε_i – на ε, и расширяем область, по которой берется минимум:

$$C(H)\geq \min_{k=2\ldots n}\min_{y\in D_k(\varepsilon)}\{\mu c(y_1,\ldots,y_k)+$$

$$+F(n,\varepsilon)(\sum_{i=1}^{k}\mu y_i\ln\mu y_i-\sum_{j\in N}\mu(j)\ln\mu(j))\}.$$

Добавим и отнимем $C_L(N)$ в правой части неравенства:

$$C(H) \geq C_L(N) + \min_{k=2...n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \{\mu c(y_1,...,y_k) + F(n,\varepsilon)(\sum_{i=1}^{k} \mu y_i \ln \mu y_i$$

$$- \sum_{j \in N} \mu(j) \ln \mu(j) - \mu \ln \mu + \sum_{j \in N} \mu(j) \ln \mu(j))\} = C_L(N) +$$

$$\min_{k=2...n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \{\mu c(y_1,...,y_k) + F(n,\varepsilon)(\sum_{i=1}^{k} \mu y_i \ln \mu y_i - \mu \ln \mu)\} =$$

$$= C_L(N) + \mu \min_{k=2...n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} \{c(y_1,...,y_k) + F(n,\varepsilon) \sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i\}.$$

Вынесем положительный множитель $-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i$ за скобку:

$$C(H) \geq C_L(N) + \mu \min_{k=2...n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} (-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i)\{\frac{c(y_1,...,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i} - F(n,\varepsilon)\}.$$

Первый множитель минимизируемого выражения неотрицателен. Также неотрицателен и второй сомножитель, так как он достигает минимума, равного нулю, при $k = r(n, \varepsilon)$, $y = x(n, \varepsilon)$. Следовательно, минимум в правой части равен нулю и $C(H) \geq C_L(N)$ при $\gamma = 1$. Утверждение 5 доказано. •

Доказательство утверждения 7.

Без ограничения общности считаем, что меры исполнителей меньше или равны единицы (то есть $\overline{\mu} = 1$) и что компоненты оптимальной пропорции x упорядочены по возрастанию.

Важным свойством TD-дерева является то, что в нем по построению мера группы, управляемой любым менеджером, отличается от длины его нормативного отрезка не более чем на $\overline{\mu}$ (то есть, на единицу), поскольку при построении фактического отрезка каждый конец нормативного отрезка сдвигается к ближайшей границе между исполнителями, то есть не более чем на $\overline{\mu}/2$.

Затраты TD-дерева складываются из затрат C_B *менеджеров нижнего звена* (то есть менеджеров, у которых в подчинении нет других менеджеров) и затрат C_T остальных менеджеров, которых будем называть *менеджерами верхних уровней*.

Оценим сверху затраты C_B. Некоторый менеджер в TD-дереве является менеджером нижнего звена, если при попытке разделить подчиненный ему нормативный отрезок длины y в пропорции x получается лишь один фактический отрезок ненулевой длины, либо если все фактические отрезки состоят не более чем из одного исполнителя.

В первом случае $y \cdot x_1 \le \overline{\mu}$, так как иначе при делении нормативного отрезка y уже наименьшая компонента пропорции даст непустой фактический отрезок. Во втором случае $y \cdot x_r \le 2\overline{\mu}$, так как иначе фактический отрезок для последней компоненты пропорции не может состоять из одного исполнителя. Следовательно, длина нормативного отрезка менеджера нижнего звена не превышает $y_B := \max[2\overline{\mu}/x_r, \overline{\mu}/x_1]$, а, значит, любой менеджер нижнего звена управляет группой меры не более чем $y_B + \overline{\mu}$.

Поскольку меры исполнителей больше или равны $\underline{\mu}$, менеджер нижнего звена управляет группой не более чем из $n_B := (y_B + \overline{\mu})/\underline{\mu}$ исполнителей, причем n_B не зависит от общего количества исполнителей n. Если обозначить через B затраты самой «дорогой» веерной иерархии не более чем n_B исполнителей с мерами из диапазона $[\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, то затраты любого менеджера нижнего звена не превышают B. Количество менеджеров нижнего звена не превышает количества исполнителей n, следовательно их суммарные затраты $C_B \le B \cdot n$.

Теперь оценим сверху затраты C_T менеджеров верхних уровней. Пусть некоторый менеджер верхних уровней m управляет группой меры μ, а его непосредственные подчиненные управляют группами мер $\mu_1, ..., \mu_{r'}$.

По построению в TD-дереве любой менеджер верхних уровней имеет не более r непосредственных подчиненных, поэтому[1] $r' \le r$. Затраты менеджера m равны $c(\mu_1, ..., \mu_{r'})$ и, в силу нормальности функции затрат, от добавления $r - r'$ нулевых компонент его затраты не уменьшатся: $c(\mu_1, ..., \mu_{r'}) \le c(\mu_1, ..., \mu_{r'}, 0, ..., 0)$.

[1] Количество непосредственных подчиненных может быть строго меньше r, если некоторые фактические отрезки, получающиеся при делении нормативного отрезка менеджера m, имеют нулевую длину.

Поэтому для простоты будем считать, что любой менеджер верхних уровней имеет ровно r непосредственных подчиненных с мерами $\mu_1,...,\mu_r$, где некоторые меры могут равняться нулю.

Если нормативный отрезок менеджера m имеет длину y, то длины нормативных отрезков его непосредственных подчиненных равны x_1y, …, x_ry. Как уже отмечалось, длины нормативных отрезков отличаются от длин фактических отрезков не более чем на единицу. Если ввести обозначения $\delta := \mu - y$, $\delta_i := \mu_i - x_i y$, $i = 1,...,r$, то верны неравенства $|\delta| \le 1$, $|\delta_i| \le 1$, $i = 1,...,r$.

В силу однородности функции затрат

$$c(\mu_1,...,\mu_r) = \mu^\gamma c\left(\frac{\mu_1}{\mu},...,\frac{\mu_r}{\mu}\right) = \mu^\gamma c\left(\frac{x_1 y + \delta_1}{y+\delta},...,\frac{x_r y + \delta_r}{y+\delta}\right) =$$

$$= \mu^\gamma c\left(\frac{x_1(y+\delta)+(\delta_1 - x_1\delta)}{y+\delta},...,\frac{x_r(y+\delta)+(\delta_r - x_r\delta)}{y+\delta}\right) =$$

$$= \mu^\gamma c\left(x_1 + \frac{\delta_1 - x_1\delta}{\mu},...,x_r + \frac{\delta_r - x_r\delta}{\mu}\right).$$

Поскольку функция затрат степенно-ограничена, найдутся такие числа A и $\lambda > 0$, что

$$\mu^\gamma c\left(x_1 + \frac{\delta_1 - x_1\delta}{\mu},...,x_r + \frac{\delta_r - x_r\delta}{\mu}\right) \le$$

$$\le \mu^\gamma \left[c(x_1,...,x_r) + A\left(\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\delta_i - x_i\delta}{\mu}\right|\right)^\lambda\right].$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda + 1 \le \gamma$, поскольку при уменьшении степени λ условие степенной ограниченности становится более слабым.

Воспользовавшись тем, что $|\delta_i - x_i\delta| \le 1 + x_i$, $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$, и огрубив далее неравенство, получаем, что

$$c(\mu_1,...,\mu_r) \le \mu^\gamma (c(x_1,...,x_r) + A(r+1)^\lambda \mu^{-\lambda}).$$

Обозначая $E := A(r + 1)^\lambda$, $C := c(x_1,...,x_r)$, имеем, что затраты любого менеджера верхних уровней не превышают величины

$C\mu^{\gamma} + E\mu^{\gamma-\lambda}$. Вспомним, что $\mu := y + \delta$, и еще огрубим верхнюю оценку затрат менеджера:

$$Cy^{\gamma}\left(1+\frac{\delta}{y}\right)^{\gamma} + Ey^{\gamma-\lambda}\left(1+\frac{\delta}{y}\right)^{\gamma-\lambda} \le Cy^{\gamma}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\gamma} + Ey^{\gamma-\lambda}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\lambda}.$$

Длина y нормативного отрезка менеджера верхних уровней ограничена снизу величиной $y_T := \min_{i=1,..,r} \underline{\mu} / x_i = \underline{\mu} / x_r$, поскольку как минимум один его непосредственный подчиненный управляет группой из двух и более исполнителей, а, значит, его нормативный отрезок имеет длину не меньше чем $\underline{\mu}$.

Следовательно, обратная к y величина $1/y$ ограничена сверху константой $1/y_T$, и функции $(1+1/y)^{\gamma}, (1+1/y)^{\gamma-\lambda}$ при $1/y \in [0, 1/y_T]$ можно мажорировать функциями вида $1 + D_1/y$, $1 + D_2/y$, где D_1, D_2 – некоторые положительные коэффициенты.

Следовательно, затраты любого менеджера верхних уровней m не превышают величины

$$C \cdot y(m)^{\gamma} + C \cdot D_1 \cdot y(m)^{\gamma-1} + E \cdot y(m)^{\gamma-\lambda} + E \cdot D_2 \cdot y(m)^{\gamma-\lambda-1},$$

где $y(m)$ – длина нормативного отрезка менеджера m.

Обозначая через M_T множество менеджеров верхних уровней, имеем, что их суммарные затраты C_T не превышают

$$C \sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma} + CD_1 \sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-1} + E \sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-\lambda} + ED_2 \sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-\lambda-1}.$$

Рассмотрим множество таких сотрудников иерархии, которые являются непосредственными подчиненными менеджеров верхних уровней, но сами не являются менеджерами верхних уровней. Легко видеть, что если количество таких сотрудников k, и они имеют нормативные отрезки с длинами $Y_1, \ldots, Y_k$, то сумма длин этих нормативных отрезков равна суммарной мере исполнителей $\mu(N)$, Y_i ($i = 1,...,k$) не превышает y_B, и для любого числа η сумма вида $\sum_{m\in M_T} y(m)^{\eta}$ совпадает с затратами однородного r-дерева с пропорцией x для функции затрат менеджера вида $(\mu_1 + ... + \mu_r)^{\eta}$ и «множества исполнителей» с мерами $Y_1, \ldots, Y_k$.

Для упрощения выкладок предположим, что числа γ, $\gamma - 1$, $\gamma - \lambda$, $\gamma - \lambda - 1$ отличны от единицы (случай равенства единице рассматривается аналогично). Тогда, заменяя по формуле (5) суммы в этом выражении затратами соответствующих однородных деревьев, получаем, что

$$C_T \le \frac{|\mu(N)^\gamma - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma}|C}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^\gamma|} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-1}|CD_1}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}|} +$$

(51)

$$+\frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-\lambda}|E}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-\lambda}|} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-\lambda-1}|ED_2}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-\lambda-1}|}.$$

Вспомним, что затраты TD-дерева $C_{TD}^{r,x}(N)$ равны $C_B + C_T$. Нашей целью является показать, что отношение $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ стремится к единице с ростом количества исполнителей n, то есть, что к единице стремится отношение $(C_B + C_T)/C_L(N)$, где

$$C_L(N) = (\mu(N)^\gamma - \sum_{j=1}^n \mu(j)^\gamma)\frac{C}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^\gamma|}.$$

Поскольку по утверждению 5 $C_L(N)$ – это нижняя оценка затрат древовидной иерархии для множества исполнителей N, очевидно, что $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N) \ge 1$, и, значит, если предел существует, то он не меньше единицы. Докажем, что предел также и не превышает единицу (это и будет означать, что он равен единице).

Так как мера любого исполнителя не превышает $\overline{\mu}$, а количество исполнителей n не превышает $\mu(N)/\underline{\mu}$, верно неравенство

$$C_L(N) \ge C_L' := (\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma/\underline{\mu})\frac{C}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^\gamma|},$$

и, значит, $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N) = (C_B + C_T)/C_L(N) \le (C_B + C_T)/C_L'$.

Как показано выше, $C_B \le B \cdot n$. С учетом того, что $n \le \mu(N)/\underline{\mu}$, $C_B \le \mu(N)B/\underline{\mu}$. Следовательно, так как $\gamma > 1$, C_B/C_L' стремится к нулю с ростом $\mu(N)$, а, следовательно, и с ростом n. Поэтому искомый предел $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ не превышает предела отношения C_T/C_L'. Воспользовавшись неравенством (51), получаем, что

$$C_T/C_L' \le \frac{\mu(N)^\gamma - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma}}{\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma/\underline{\mu}} + \frac{|\,\mu(N)^{\gamma-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-1}\,|\,CD_1}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}\,|\,C_L'} + \tag{52}$$

$$+ \frac{|\,\mu(N)^{\gamma-\lambda} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-\lambda}\,|\,E}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-\lambda}\,|\,C_L'} + \frac{|\,\mu(N)^{\gamma-\lambda-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-\lambda-1}\,|\,ED_2}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-\lambda-1}\,|\,C_L'}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части неравенства (52). Это слагаемое меньше или равно, чем

$$\frac{\mu(N)^\gamma}{\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma/\underline{\mu}},$$

а это выражение стремится к 1 с ростом n (а, значит, и $\mu(N)$).

Покажем, что остальные три слагаемых в правой части неравенства (52) стремятся к нулю с ростом n.

Рассмотрим второе слагаемое

$$\frac{|\,\mu(N)^{\gamma-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-1}\,|\,CD_1}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}\,|\,C_L'} = \frac{|\,\mu(N)^{\gamma-1} - \sum_{j=1}^k Y_j^{\ \gamma-1}\,|}{(\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma/\underline{\mu})}\frac{D_1\,|1-\sum_{i=1}^r x_i^\gamma\,|}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}\,|}.$$

Если $\gamma - 1 > 1$, то это выражение не превышает

$$\frac{\mu(N)^{\gamma-1}}{(\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma/\underline{\mu})}\frac{D_1\,|1-\sum_{i=1}^r x_i^\gamma\,|}{|1-\sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}\,|},$$

и с ростом $\mu(N)$ ведет себя как $\mu(N)^{-1}$, то есть стремится к нулю.

Если же $\gamma - 1 < 1$, то, в силу того, что Y_i ($i = 1,\dots,k$) не превышает y_B, а $k \le n \le \mu(N)/\underline{\mu}$, второе слагаемое не превышает

$$\frac{\mu(N) y_B^{\gamma-1} / \underline{\mu}}{(\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu})} \frac{D_1 \,|1 - \sum_{i=1}^r x_i^\gamma\,|}{|1 - \sum_{i=1}^r x_i^{\gamma-1}\,|},$$

и с ростом $\mu(N)$ ведет себя как $\mu(N)^{1-\gamma}$, то есть также стремится к нулю. Третье и четвертое слагаемое в правой части неравенства (52) рассматриваются аналогично.

Таким образом, показано, что предел C_T / C_L' при $n \to \infty$ не превышает единицы. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} C_{TD}^{r,x}(N) / C_L(N) = 1$.

Утверждение 7 доказано. •

Доказательство утверждения 8.

Оценим сверху затраты BU-дерева. Его затраты складываются из затрат $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ однородных деревьев и суммарных затрат C_T объединяющих эти деревья менеджеров. По утверждению 4, затраты однородного дерева определяются формулой (12), поэтому

$$C_{BU}^r(n) = \sum_{i=0}^k a_i (r^i - (r^i)^\gamma) C_0 + C_T \text{, где } C_0 := \frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma} - 1}.$$

Поскольку $n = \sum_{i=0}^k a_i r^i$, получаем, что

$$C_{BU}^r(n) \le nC_0 + C_T.$$

Оценим сверху затраты C_T. Они складываются из затрат не более чем $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ менеджеров. Поскольку $a_i < r$, $i = 1, \ldots, k$, а $k \le \log_r n$, верно неравенство

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_k \le r \cdot k \le r \cdot \log_r n.$$

Каждый менеджер BU-дерева имеет не более r непосредственных подчиненных и управляет группой меры не более n. Пусть (по условию утверждения) для всех $r' \le r$ функция затрат менеджера на симплексе $D_{r'}$ ограничена константой C, тогда затраты любого менеджера не превышают величины $n^\gamma \cdot C$. Следовательно, $C_T \le n^\gamma \cdot C \cdot r \cdot \log_r n$ и $C_{BU}^r(n) \le nC_0 + n^\gamma Cr \log_r n$.

Нижняя оценка затрат оптимального дерева определяется формулой

$$C_L(n) = (n - n^\gamma) \frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma} - 1} = (n - n^\gamma) C_0,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \le \lim_{n\to\infty}\frac{nC_0 + n^\gamma Cr\log_r n}{(n-n^\gamma)C_0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-n^{\gamma-1}} + \frac{Cr}{C_0}\lim_{n\to\infty}\frac{\log_r n}{n^{1-\gamma}-1}$$

.

Поскольку степень однородности функции затрат γ по условию строго меньше единицы, а $\log_r n$ растет медленнее, чем $n^{1-\gamma}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \le 1 .$$

В то же время, поскольку $C_L(n)$ – нижняя оценка затрат дерева, $C^r_{BU}(n) \ge C_L(n)$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \ge 1$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}\frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} = 1$.

Утверждение 8 доказано. •

Доказательство утверждения 9.

Доказательство проводим индукцией по количеству исполнителей n. Очевидно, что для $n = 1, 2$ утверждение верно. Предположим, что последовательная иерархия оптимальна для любого количества исполнителей, меньшего n, и покажем, что она оптимальна и для множества из n исполнителей.

Затраты $C_S(n)$ последовательной иерархии для n исполнителей меры 1 задаются формулой $C_S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} c(1,i)$.

Затраты $C(n)$ оптимального 2-дерева для n исполнителей складываются из затрат топ-менеджера и затрат двух поддеревьев, управляемых его непосредственными подчиненными. Поскольку все поддеревья оптимального дерева также являются оптимальными деревьями (для меньшего количества исполнителей), то по индуктивному предположению оба этих поддерева – последовательные иерархии. Если первый непосредственный подчиненный управляет группой из $n' \ge 1$ исполнителей, то

$$C(n) = c(n', n-n') + C_S(n') + C_S(n-n') .$$

По условиям утверждения $c(n', n-n') \ge c(1, n-1)$, следовательно, $C(n) \ge c(1, n-1) + C_S(n') + C_S(n-n')$.

Поскольку, по условиям утверждения, $c(a, 1)$ не возрастает по a, затраты $C_S(n')$ последовательной иерархии вогнуты по n' (строго говоря, функция $C_S(n')$ задана на множестве только натуральных чисел, но она легко доопределяется до вогнутой функции, заданной на всей оси неотрицательных чисел). Тогда функция $C_S(n') + C_S(n - n')$ – также вогнутая функция, заданная на отрезке $n' \in [1, n-1]$. Вогнутая функция всегда достигает своего минимума на границе отрезка, следовательно,

$$C_S(n') + C_S(n - n') \geq C_S(n-1) + C_S(1).$$

Таким образом, $C(n) \geq c(1, n-1) + C_S(n-1) + C_S(1)$. Поскольку $C_S(1) = 0$, и, кроме того, $C_S(n) = c(1, n-1) + C_S(n-1)$, верно неравенство $C(n) \geq C_S(n)$. Это значит, что затраты оптимального 2-дерева для n исполнителей не меньше затрат последовательной иерархии. Следовательно, последовательная иерархия является оптимальным 2-деревом для n исполнителей.

Утверждение 9 доказано. •

Доказательство утверждения 10.

Пусть оптимальное 2-дерево не является последовательной иерархией, то есть в нем есть некоторое количество q менеджеров, не управляющих непосредственно ни одним исполнителем. Тогда среди них найдется менеджер m, оба непосредственных подчиненных которого, менеджеры m_1 и m_2, управляют группами соответственно из n_1 и n_2 исполнителей и являются топ-менеджерами двух последовательных поддеревьев.

Менеджер m_1 управляет как минимум одним непосредственным исполнителем w_3 и некоторым сотрудником m_4 (менеджером или исполнителем). Добавим в дерево нового менеджера m', подчинив его непосредственному начальнику менеджера m (если тот имеет начальника) и подчинив ему менеджера m и исполнителя w_3. Удалим менеджера m_1, переподчинив управляемого им сотрудника m_4 напрямую менеджеру m. Это преобразование иерархии изображено на рис. 52. При этом затраты иерархии изменяются на величину

$$c(n_1 - 1, n_2) + c(n_1 + n_2 - 1, 1) - c(n_1 - 1, 1) - c(n_1, n_2).$$

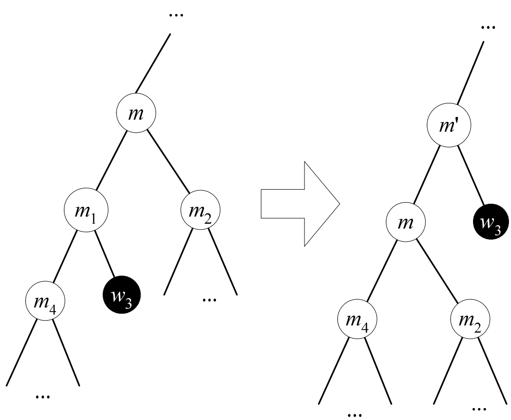


Рисунок 52. Перестроение 2-дерева

Ту же процедуру можно проделать и удаляя менеджера m_2, затраты иерархии при этом изменяются на величину

$$c(n_1, n_2 - 1) + c(n_1 + n_2 - 1, 1) - c(n_2 - 1, 1) - c(n_1, n_2)\ .$$

По условию утверждения, одно из этих выражений не превышает нуля, то есть затраты нового дерева хотя бы при одном из этих преобразований не превышают затрат исходного дерева. Тогда сделаем именно это преобразование. В новом дереве мера группы, управляемой менеджером m, уменьшилась на единицу.

Если оба непосредственных подчиненных менеджера m в новом дереве сами являются менеджерами, то будем повторять описанную выше трансформацию дерева для менеджера m до тех пор, пока он не будет управлять непосредственно хотя бы одним исполнителем. Это случится после конечного числа трансформаций, поскольку каждая трансформация уменьшает меру управляемой менеджером m группы исполнителей на единицу.

В результате, в полученном дереве будет уже $q - 1$ менеджеров, не управляющих непосредственно ни одним исполнителем. Среди них, в свою очередь, найдется менеджер, оба непосредственных подчиненных которого являются топ-менеджерами двух последовательных поддеревьев. Делая для него преобразования дерева, аналогичные описанным выше, приходим к дереву с $q - 2$ менеджерами, не управляющими непосредственно ни одним исполнителем. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока результирующее дерево не будет последовательной иерархией, в которой каждый менеджер уже будет непосредственно управлять хотя бы одним исполнителем. Поскольку каждое преобразование дерева не увеличивало его затраты, затраты полученной последовательной иерархии не превышают затрат исходного оптимального 2-дерева. Следовательно, на классе 2-деревьев существует оптимальная последовательная иерархия.

Утверждение 10 доказано. •

Доказательство леммы 4.

Поскольку достаточно рассматривать только внутренние решения, для фиксированной нормы управляемости k поиск оптимальной пропорции сводится к минимизации нелинейной функции

$$F_k(y) := \frac{(y_1^{\alpha} + \ldots + y_k^{\alpha})^{\beta}}{|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}|}$$

при линейном ограничении $y_1 + \ldots + y_k = 1$. Поскольку минимизируемая функция гладкая, точка ее минимума является особой точкой Лагранжиана

(53) $$L_k(y) := \frac{(y_1^{\alpha} + \ldots + y_k^{\alpha})^{\beta}}{|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}|} + \lambda(1 - y_1 - \ldots - y_k),$$

то есть в этой точке производная Лагранжиана по каждой компоненте пропорции равна нулю.

Докажем, что если в особой точке все компоненты пропорции строго положительны, то они принимают не более двух различных значений. Поскольку выражение $1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}$ при фиксированных α и β знакопостоянно, при поиске особых точек Лагранжиана модуль в формуле (53) можно опустить. Дифференцируя Лагранжиан по $y_1, \ldots, y_k$, получаем систему уравнений

(54) $$\alpha\beta F_k(y)\frac{y_i^{\alpha-1}}{\sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} + \alpha\beta F_k(y)\frac{y_i^{\alpha\beta-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} = \lambda, \; i = 1, \ldots, k.$$

Умножим каждое уравнение на y_i, просуммируем их и, воспользовавшись тем, что $y_1 + \ldots + y_k = 1$, выразим

$$\lambda = \alpha\beta F_k(y) / (1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}).$$

Подставив полученное выражение для множителя Лагранжа в систему уравнений (54), и разделив обе части каждого уравнения на $\alpha\beta F_k(y)$, получим уравнения

$$\frac{y_i^{\alpha-1}}{\sum_{j=1}^k y_j^{\alpha}}+\frac{y_i^{\alpha\beta-1}}{1-\sum_{j=1}^k y_j^{\alpha\beta}}=\frac{1}{1-\sum_{j=1}^k y_j^{\alpha\beta}},\ i=1,\ \ldots,\ k.$$

или, что то же самое,

$$\frac{y_i^{\alpha-1}}{1-y_i^{\alpha\beta-1}}=\frac{\sum_{j=1}^k y_j^{\alpha}}{1-\sum_{j=1}^k y_j^{\alpha\beta}},\ i=1,\ \ldots,\ k.$$

Заметим, что правые части всех уравнений равны между собой. Следовательно, равны между собой и левые части уравнений. Поэтому систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{y_i^{\alpha-1}}{1-y_i^{\alpha\beta-1}}=\frac{y_j^{\alpha-1}}{1-y_j^{\alpha\beta-1}},\ i,j=1,\ \ldots,\ k,$$

или, с учетом того, что все компоненты пропорции y строго положительны,

$$y_i^{1-\alpha}-y_i^{\alpha(\beta-1)}=y_j^{1-\alpha}-y_j^{\alpha(\beta-1)},\ i,j=1,\ \ldots,\ k.$$

Введем в рассмотрение функцию $f(x)=x^{1-\alpha}-x^{\alpha(\beta-1)}$, определенную на отрезке [0, 1]. Легко проверить, что на всей области определения функция $f(\cdot)$ имеет не более одного промежутка возрастания и не более одного промежутка убывания, следовательно, каждое значение этой функции достигается не более чем при двух различных значениях ее аргумента.

В особой точке Лагранжиана для всех $i, j = 1, \ldots, k$ $f(y_i) = f(y_j)$, следовательно, в этой точке компоненты пропорции могут принимать не более двух различных значений. Лемма 4 доказана. •

Доказательство леммы 5.

Если $\alpha \le 1$, то выражение $y_1^{\alpha}+\ldots+y_k^{\alpha}$ достигает на симплексе D_k своего максимума в симметричной точке. Поскольку $\beta \ge 0$, числитель выражения (30) достигает в этой точке своего минимума. Следовательно, по лемме 3, и все выражение (30) достигает в той же точке своего минимума. Значит, при $\alpha \le 1$ для рассматриваемой функции затрат симметричная пропорция будет оптимальной и лемма доказана для $\alpha \le 1$.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Функция (IV) строго нормальная, поэтому граничные решения отсутствуют. Следовательно, аналогично доказательству леммы 4, можно записать Лагранжиан

$$L_k(y) := \frac{(k - y_1^{\alpha} - \ldots - y_k^{\alpha})^{\beta}}{1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}} + \lambda(1 - y_1 - \ldots - y_k)$$

и найти его особые точки. Из условий первого порядка имеем

$$\alpha\beta F_k(y) \frac{y_i^{\alpha\beta-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} - \alpha\beta F_k(y) \frac{y_i^{\alpha-1}}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} = \lambda \text{, } i = 1, \ldots, k..$$

Умножив каждое уравнение на y_i и просуммировав их, получим:

$$\lambda = \alpha\beta F_k(y) \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} - \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} \right).$$

Упростим правую часть этого уравнения:

$$\lambda = \alpha\beta F_k(y) \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} + \frac{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha} - k}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} \right) = \alpha\beta F_k(y) \times$$

$$\times \left[\frac{\sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} + 1 - \frac{k}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} \right] = \alpha\beta F_k(y) \left[\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} - \frac{k}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} \right].$$

Подставим выражение для λ в условия первого порядка и разделим обе части каждого уравнения на $\alpha\beta F_k(y)$:

$$\frac{y_i^{\alpha\beta-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} - \frac{y_i^{\alpha-1}}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} - \frac{k}{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}} \text{, } i = 1, \ldots, k.$$

Тождественными преобразованиями приведем систему уравнений к виду

$$\frac{k - y_i^{\alpha-1}}{1 - y_i^{\alpha\beta-1}} = \frac{k - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha}}{1 - \sum_{j=1}^{k} y_j^{\alpha\beta}} \text{, } i = 1, \ldots, k.$$

Правые части всех уравнений одинаковы, следовательно, для любой пары компонент y_i и y_j выполняется равенство

$$\frac{k - y_i^{\alpha-1}}{1 - y_i^{\alpha\beta-1}} = \frac{k - y_j^{\alpha-1}}{1 - y_j^{\alpha\beta-1}}. \tag{55}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{k - x^{\alpha-1}}{1 - x^{\alpha\beta-1}}$, определенную на отрезке [0, 1] и докажем, что она монотонна на этом отрезке. Из этого будет следовать утверждение леммы, поскольку тогда каждое значение функции достигается при единственном значении аргумента, что, в соответствии с (55), приводит к равенству между собой компонент пропорции.

Так как функция $f(x)$ гладкая, она монотонна, если ее производная не имеет нулей на интервале (0, 1), то есть если уравнение

$$(\alpha-1)x^{\alpha(1-\beta)} = k(\alpha\beta-1) + \alpha(1-\beta)x^{\alpha-1}.$$

не имеет корней на интервале (0, 1). Сделаем замену переменных $a = \alpha - 1$, $b = \alpha(1 - \beta)$, $c = k(\alpha\beta - 1)$. Тогда необходимо показать, что $ax^b - bx^a - c \neq 0$ на интервале (0, 1). Легко проверить, что функция $\varphi(x) := ax^b - bx^a - c$ гладкая и монотонная на отрезке [0, 1]. Поэтому $\varphi(x) \neq 0$ на отрезке [0, 1] тогда и только тогда, когда на границах отрезка ее значения имеют одинаковый знак:

$$\varphi(0) = -c = k(1 - \alpha\beta),\ \varphi(1) = a - b - c = (k - 1)(1 - \alpha\beta).$$

Поскольку $k > 1$, $\mathrm{sign}\varphi(0) = \mathrm{sign}\varphi(1)$ и лемма 5 доказана. •

Доказательство леммы 6.

Пусть оптимальное дерево не является веерной иерархией. Тогда в нем найдется некоторый менеджер m_i, непосредственно подчиненный некоторому менеджеру m_j. Пусть менеджер m_i управляет группой исполнителей μ_i и имеет r_i непосредственных подчиненных, в то время как менеджер m_j имеет r_j непосредственных подчиненных. Удалим менеджера m_i и переподчиним его подчиненных менеджеру m_j. Затраты дерева уменьшатся на $\chi(\mu_i) + \varphi(r_i) + \varphi(r_j)$ и увеличится на $\varphi(r_j + r_i - 1)$. Поскольку функция $\chi(\cdot)$ неотрицательная, затраты дерева уменьшатся, если $\varphi(r_i) + \varphi(r_j) \geq \varphi(r_i + r_j - 1)$, что предполагается условием леммы.

Следовательно, исходное дерево не оптимально. Получили противоречие. •

Доказательство леммы 7.

Пусть лемма неверна, и в оптимальном дереве найдется такой менеджер m_i, подчиненный менеджеру m_j, что количество его непосредственных подчиненных r_i строго больше, чем r_j – количество непосредственных подчиненных его начальника m_j. Обозначим через μ_i меру группы исполнителей, которой управляет менеджер m_i. Возьмем любых $\Delta := r_i - r_j \geq 1$ подчиненных i-го менеджера (обозначим через μ их суммарную меру) и переподчиним их j-му менеджеру. Затраты дерева изменятся на

$$[\chi(\mu_i - \mu) + \varphi(r_i - \Delta) + \varphi(r_j + \Delta)] - [\chi(\mu_i) + \varphi(r_i) + \varphi(r_j)].$$

Но, понятно, что $r_i - \Delta = r_j$, $r_i = r_j + \Delta$, то есть затраты дерева изменятся на $\chi(\mu_i - \mu) - \chi(\mu_i)$, и, в силу неубывания функции $\chi(\cdot)$, уменьшатся, что противоречит тому, что исходное дерево оптимально. •

Доказательство леммы 8.

Пусть в некотором оптимальном дереве первым (самым нижним) менеджером в самой длинной цепочке менеджеров стоит менеджер m, управляющий группой s из r подчиненных.

Пусть найдутся такие исполнители $i \in s$ и $j \notin s$, что $\mu(i) > \mu(j)$. У i-го исполнителя есть l_i начальников, отличных от начальников j-го исполнителя. Аналогично, у j-го исполнителя есть l_j начальников, отличных от начальников i-го исполнителя. Так как исполнитель i находится в начале самой длинной цепочки, понятно, что $l_i \geq l_j$.

Поменяем этих исполнителей местами. Тогда у l_i начальников i-го исполнителя меры управляемых ими групп уменьшатся на $\Delta := \mu(i) - \mu(j) > 0$, а у l_j начальников j-го исполнителя увеличатся на Δ. Так как $l_i \geq l_j$, сумма мер групп, управляемых всеми менеджерами иерархии, от такой перестановки не увеличится, а, следовательно, в силу линейной зависимости затрат дерева от этой суммы мер, не возрастут и затраты дерева. Значит, можно считать, что в оптимальном дереве в начале самой длинной цепочки стоит менеджер, управляющий группой из исполнителей с минимальными мерами.

Докажем, что все менеджеры иерархии имеют не менее r непосредственных подчиненных. Пусть это не так. Тогда по лемме 7 найдется менеджер m', непосредственно управляющий некоторой группой s', состоящей из $r' < r$ исполнителей. Пусть у менеджера m есть l начальников, отличных от начальников менеджера m', а у менеджера m' есть l' начальников, отличных от начальников менеджера m (понятно, что $l \geq l'$, так как менеджер m находится в начале самой длинной цепочки менеджеров). Возьмем из группы s $r - r'$ исполнителей, имеющих максимальные меры, и передадим их в подчинение менеджеру m'.

Тогда у l начальников менеджера m меры управляемых ими групп уменьшатся на величину, равную суммарной мере передаваемых исполнителей, а у l' начальников менеджера m' они увеличатся на ту же величину. Так как $l \geq l'$, сумма мер групп, управляемых всеми менеджерами иерархии, не увеличится, а, следовательно, в силу линейной зависимости затрат дерева от этой суммы мер, не возрастут и затраты дерева.

Следовательно, в полученном дереве в начале самой длинной цепочки стоит группа из минимально возможного количества исполнителей $r(m_1)$ с минимальными возможными мерами, и затраты этого дерева не превышают затрат оптимального дерева. •

Доказательство утверждения 11.

Рассмотрим дерево Хаффмана H. Пусть имеется дерево H' со строго меньшими затратами. По лемме 8, в этом дереве, как и в дереве Хаффмана, имеется менеджер m, непосредственно управляющий $r(m_1)$ исполнителями с минимальными мерами. Затраты этого менеджера одинаковы в обоих деревьях. Тогда заменим в обоих деревьях этого менеджера и его подчиненных одним исполнителем с мерой $\mu(m)$. При этом затраты обоих деревьев уменьшатся на затраты этого менеджера, то есть, на одинаковую величину. В получившихся деревьях, аналогично, найдется пара идентичных (с точностью до перенумерования) менеджеров, которых также удалим. Повторяем эти шаги, пока в деревьях не останется один, самый верхний менеджер. По лемме 7, в корне оптимального дерева находится менеджер с максимальным количеством подчиненных $r(m_q)$. Он же стоит и в корне дерева Хаффмана, то есть затраты получившихся «свернутых» деревьев одинаковы. Значит, одинаковы и затраты исходных деревьев. •

Доказательство утверждения 12.

Рассмотрим некоторое оптимальное (при фиксированном количестве менеджеров и их нормах управляемости) дерево H. Пронумеруем менеджеров этого дерева так, чтобы меры управляемых ими групп шли по возрастанию. Получили неубывающую последовательность мер $\mu_1, \ldots, \mu_q$. Рассмотрим теперь дерево Хаффмана H'. Пронумеровав его менеджеров по возрастанию мер управляемых ими групп, получим неубывающую последовательность мер $\mu_1', \ldots, \mu_q'$. Предположим, что дерево Хаффмана не оптимально, а значит, последовательности $\mu_1, \ldots, \mu_q$ и $\mu_1', \ldots, \mu_q'$ различаются.

Рассмотрим разность затрат деревьев H и H':

$$\Delta C := \sum_{i=1}^{q} \chi(\mu_i) - \sum_{i=1}^{q} \chi(\mu_i') .$$

Обозначим α_i – наклон некоторой касательной к функции $\chi(\mu)$ в точке μ_i, $i = 1...q$. Так как функция $\chi(\mu)$ монотонная и вогнутая, последовательность α_i, $i = 1...q$ неотрицательная и не возрастает. Кроме того, в силу вогнутости $\chi(\mu)$ верно неравенство $\chi(\mu_i') \le \chi(\mu_i) + \alpha_i(\mu_i' - \mu_i)$ и, значит, $\Delta C \ge \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(\mu_i - \mu_i')$.

Было отмечено, что дерево Хаффмана минимизирует лексикографически вектор мер групп, то есть если j – минимальный номер менеджера, для которого $\mu_j \ne \mu_j'$, то $\mu_j > \mu_j'$. Отметим, что $j < q$, так как для любой пары деревьев $\mu_q = \mu_q' = \mu(N)$. Таким образом, имеем следующую оценку разницы затрат деревьев H и H': $\Delta C \ge \sum_{i=j}^{q-1} \alpha_i(\mu_i - \mu_i')$.

По утверждению 11 дерево Хаффмана минимизирует сумму мер групп, то есть $\sum_{i=1}^{q} \mu_i \ge \sum_{i=1}^{q} \mu_i'$, и, значит, $\sum_{i=j}^{q-1} \mu_i \ge \sum_{i=j}^{q-1} \mu_i'$.

Если $j = q-1$, то, очевидно, $\Delta C > 0$. Пусть теперь $j < q-1$. Зафиксируем μ_j и найдем минимум нижней оценки

$\sum_{i=j}^{q-1}\alpha_i(\mu_i-\mu_i')$ по всем μ_i, $i=j+1,...,q-1$ при условиях, что $\sum_{i=j}^{q-1}\mu_i \geq \sum_{i=j}^{q-1}\mu_i'$, $\mu_j > \mu_j'$ и $\mu_i \geq \mu_{i-1}$ при всех $i=j+1,...,q-1$.

Так как α_i не возрастает с ростом i, минимум достигается при $\mu_i=\mu_j$ для всех $i=j+1,...,q-2$, $\mu_{q-1}=\mu_{q-1}'+\sum_{i=j}^{q-2}(\mu_i'-\mu_j)$, и равен $\sum_{i=j}^{q-2}\alpha_i(\mu_j-\mu_i')+\alpha_{q-1}\sum_{i=j}^{q-2}(\mu_i'-\mu_j)$.

Поскольку $\mu_j > \mu_j'$ и α_i не возрастает с ростом индекса i, этот минимум не меньше, чем $\alpha_{q-1}(\sum_{i=j}^{q-2}(\mu_j-\mu_i'+\mu_i'-\mu_j)\equiv 0$.

Следовательно, $\Delta C \geq 0$, и затраты оптимального дерева H не меньше затрат дерева Хаффмана H', то есть дерево Хаффмана оптимально. •

Доказательство леммы 9.

Пусть лемма неверна и найдется такой непосредственный подчиненный (заместитель) менеджера m и такой заместитель менеджера m', управляющие группами исполнителей с мерами μ_1 и μ_2 соответственно, что $\mu_1 < \mu_2$ и $\mu+\mu_2-\mu_1<\mu'$. Тогда поменяем этих заместителей местами (вместе с управляемыми ими поддеревьями). Суммарные затраты менеджеров m и m' изменились на величину

$$\chi(\mu+(\mu_2-\mu_1))+\chi(\mu'-(\mu_2-\mu_1))-\chi(\mu)-\chi(\mu'),$$

затраты остальных менеджеров остались прежними.

Если $\mu+\mu_2-\mu_1<\mu'$, то $\mu<\mu'-(\mu_2-\mu_1)$, то есть меры групп, которыми теперь управляют менеджеры m и m', принадлежат отрезку $[\mu, \mu']$. Кроме того, сумма этих мер не изменилась. Тогда, в силу строгой выпуклости функции $\chi(\cdot)$, выполнено неравенство

$$\chi(\mu+(\mu_2-\mu_1))+\chi(\mu'-(\mu_2-\mu_1))<\chi(\mu)+\chi(\mu'),$$

то есть затраты дерева строго уменьшились, что невозможно по предположению об оптимальности исходного дерева. •

Доказательство утверждения 14.

Пусть функция затрат субаддитивна и оптимальное дерево отличается от веерной иерархии. Тогда найдется менеджер m, управляющий менеджером m', имеющим в своем подчинении только исполнителей, но не других менеджеров. Пусть менеджер m контролирует суммарный технологический поток L, а менеджер m' – поток L'. Удалим менеджера m' из иерархии и переподчиним его подчиненных менеджеру m. При этом к менеджеру m переходит контроль над потоком L', и затраты иерархии изменятся на величину $K(L + L') - K(L) - K(L')$.

В силу субаддитивности функции $K(\cdot)$ затраты иерархии не увеличились, а количество менеджеров в иерархии уменьшилось на единицу. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока в дереве не останется единственный менеджер непосредственно контролирующий всех исполнителей, то есть пока оно не преобразуется к веерной иерархии. Затраты этой веерной иерархии не превышают затрат оптимального дерева, следовательно, веерная иерархия оптимальна.

Пусть теперь функция затрат супераддитивна. Докажем, что существует оптимальное дерево, в котором каждая элементарная работа выполняется отдельным менеджером, не имеющим других подчиненных (то есть непосредственный начальник каждого исполнителя $w \in N$ управляет группой $\{w\}$). Пусть в оптимальном дереве H непосредственный начальник m некоторого исполнителя $w \in N$ имеет кроме него других подчиненных и контролирует поток величины L. Добавим в дерево дополнительного менеджера m', подчиним его непосредственно менеджеру m и переподчиним исполнителя w от менеджера m менеджеру m'.

Теперь менеджер m' контролирует «петлевой» поток $l_T(w, w)$ исполнителя w, а поток, контролируемый менеджером m, уменьшился ровно на величину этого «петлевого» потока. Таким образом, в результате добавления менеджера m' затраты иерархии изменились на $K(L - l_T(w, w)) + K(l_T(w, w)) - K(L)$. В силу супераддитивности функции $K(\cdot)$, затраты дерева не увеличились. Будем добавлять новых менеджеров до тех пор, пока непосредственный начальник каждого исполнителя не будет управлять группой, состоящей из одного этого исполнителя. Затраты получившегося дерева не превышают затрат оптимального дерева, значит, это дерево также оптимально.

Таким образом, можно считать, что в оптимальном дереве либо менеджер имеет единственного подчиненного-исполнителя (менеджер «первого типа»), либо все непосредственные подчиненные менеджера также являются менеджерами (менеджер «второго типа»). Докажем, что существует оптимальное дерево, в котором у менеджеров «второго типа» будет ровно по два непосредственных подчиненных.

Пусть в некотором оптимальном дереве H менеджер m управляет группой исполнителей s и имеет r непосредственно подчиненных ему менеджеров $m_1, \ldots, m_r$, $r > 2$, управляющих группами исполнителей $s_1, \ldots, s_r$. Это менеджер «второго типа», поэтому $s = s_1 \cup \ldots \cup s_r$. Менеджер m в дереве H контролирует технологический поток

$$L_H(m) = l_T(s) - l_T(s_1) - \ldots - l_T(s_r).$$

Добавим в дерево H менеджера m', подчиним его менеджеру m и передадим менеджеру m' в непосредственное подчинение менеджеров $m_2, \ldots, m_r$. В этом модифицированном дереве H' менеджер m' управляет группой $s_2 \cup \ldots \cup s_r$ и контролирует поток

$$L_{H'}(m') = l_T(s_2 \cup \ldots \cup s_r) - l_T(s_2) - \ldots - l_T(s_r),$$

а менеджер m по-прежнему управляет группой s, но контролирует технологический поток

$$L_{H'}(m) = l_T(s) - l_T(s_2 \cup \ldots \cup s_r) - l_T(s_1).$$

При этом затраты дерева изменились на величину

$$K(L_{H'}(m)) + K(L_{H'}(m')) - K(L_H(m)).$$

Легко проверить, что $L_{H'}(m) + L_{H'}(m') = L_H(m)$. Поэтому, в силу супераддитивности функции $K(\cdot)$, затраты дерева не увеличились.

Ту же операцию проделаем с получившимся деревом H' и так далее до тех пор, пока в получившемся дереве все менеджеры «второго типа» не будут иметь ровно двух непосредственных подчиненных. Поскольку при каждом преобразовании дерева его затраты не возрастают, полученное дерево оптимально. •

ЛИТЕРАТУРА[1]

1. Aghion Ph., Tirole J. Formal and Real Authority in Organizations // *The Journal of Political Economy*. – 1997. – Vol. 105. No. 1. – P. 1-29.
2. Aoki M. Horizontal vs. Vertical Information Structure of the Firm // *The American Economic Review*. – 1986. – Vol. 76. No. 5. – P. 971-983.
3. Baker J.P., Jansen M.C., Murphy K.J. Compensation and Incentives: Practice and Theory // *The Journal of Finance*. – 1988. – Vol. 43. – P. 593-616.
4. Beckmann M.J. Some Aspects of Returns to Scale in Business Administration // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1960. – Vol. 74. No. 3. – P. 464-471.
5. Beggs A.W. Queues and Hierarchies // *The Review of Economic Studies*. – 2001. – Vol. 68. No. 2. – P. 297-322.
6. Bolton P., Dewatripont M. The Firm as a Communication Network // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1994. – Vol. 109. No. 4. – P. 809–839.
7. Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. – Cambridge and London: MIT Press, 2005.
8. Calvo G.A. Supervision, and Utility and Wage Differentials across Firms // Discussion Paper № 76-7711. Columbia Univ. Econ. Workshop, April 1977.
9. Calvo G.A., Wellisz S. Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm // *The Journal of Political Economy*. – 1978. – Vol. 86. No. 5. – P. 943–952.
10. Calvo G.A., Wellisz S. Hierarchy, Ability and Income Distribution // *The Journal of Political Economy*. – 1979. – Vol. 87. No. 5. – P. 991–1010.

---

[1] Большая часть перечисленных в списке литературы публикаций зарубежных авторов доступна в электронной библиотеке www.jstor.org (российские ученые могут получить доступ к ней, зарегистрировавшись на сайте www.eerc.ru).

Публикации, отмеченные значком «*», имеются в свободном доступе в электронной библиотеке сайта www.mtas.ru.

11. Ciscel D.H., Carroll D.M. The Determinants of Executive Salaries: an Econometric Survey // *The Review of Economic and Statistics*. – 1980. – Vol. 62. – P. 7-13.
12. Coase R.H. The Nature of the Firm // *Economica, New Series*. – 1937. – Vol. 4. No. 16. – P. 386-405.
13. Cremer J. A Partial Theory of the Optimal Organization of a Bureaucracy // *The Bell Journal of Economics*. – 1980. – Vol. 11. No. 2. – P. 683-693.
14. Davis H.T. The Theory of Econometrics. – Bloomington, Ind.: The Principia Press, 1941.
15. Davis R. Business Process Modelling With Aris: A Practical Guide. – Springer-Verlag London Ltd, 2001.
16. Friebel G., Guriev S. Earnings Manipulation and Incentives in Firms. – Mimeo. 2005.
17. Garicano L.. Hierarchies and Organization of Knowledge in Production // *The Journal of Political Economy*. – 2000. – Vol. 108. No. 5. – P. 874-904.
18. Garicano L., Hubbard T.N. Hierarchies, Specialization, and the Utilization of Knowledge: Theory and Evidence from the Legal Services Industry. – NBER Working Paper 10432, 2004.
19. Gautier A., Paolini D. Delegation and Organizational Design. – Mimeo. IRES and UCL, Department of Economics, 2001.
20. Geanakoplos J., Milgrom P. A Theory of Hierarchies Based on Limited Managerial Attention // *The Journal of Japanese and International Economies*. – 1991. – Vol. 5(3). – P. 205-225.
21. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. Inequalities. – London: Cambridge University Press, 1934.
22. Harris M., Raviv A. Organization Design. – Mimeo. 2000.
23. Hart O.D. Optimal labor contracts under asymmetric information: an introduction // *The Review of Economic Studies*. – 1983. – Vol. 50. No. 1. – P. 3-35.
24. Hart O. Moore J. On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization. – NBER Working Paper 7388, 1999.
25. Hart O. Moore J. On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization // *The Journal of Political Economy*, – 2005. – Vol. 113. – P. 675-702.
26. Hayek F.A. von. The Use of Knowledge in Society // *The American Economic Review.* – 1945. – Vol. 35. – P. 519-530.

27. Holmstrom B., Milgrom P. Multitask Principal-Agent Analyses: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design // *The Journal of Law, Economics, and Organization*. – 1991. – No. 7 (special issue). – P. 24-52.
28. http://www.oracle.com/global/ru/applications/Technolg_Aspect/TAsp_Compnts.html
29. Huffman D.A. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes // *Proc. IRE*. – 1952. – No.9. – P.1098–1101.
30. Ioannides Y. Compexity and Organizational Architecture. – Working Paper, Dep. of Economics. Taft Univ., 2003.
31. Jackson M. Mechanism theory. – *California Institute of Technology Working Paper*, 2003.
32. Kaldor N. The equilibrium of the Firm // *The Economic Journal*. – 1934. – Vol. 44. No. 173. – P. 60-76.
33. Keren M., Levhari D. The Optimal Span of Control in a Pure Hierarchy // *Management Science*. – 1979. – Vol. 25. – P. 1162-1172.
34. Keren M., Levhari D. The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // *The Bell Journal of Economics*. – 1983. – Vol. 14. No. 2. – P. 474-486.
35. Knight F.H. Risk, Uncertainty and Profit. – Boston: Houghton Mifflin, 1921.
36. Kostiuk P.F. Firm Size and Executive Compensation // *The Journal of Human Resources*. – 1989. – Vol. 25. – P. 91-105.
37. Macho-Stadler I., Perez-Castrillo J.D. Centralized and Decentralized Contracts in a Moral Hazard Environment // *The Journal of Industrial Economics*. – 1998. – Vol. 46. No. 4. – P. 489-510.
38. Marschak T.A., Radner R. Economic Theory of Teams. – New Haven, CT: Yale U. Press, 1972.
39. Marschak T.A., Reichelstein S. Network Mechanisms, Information Efficiencies and the Role Of Hierarchies. – Unpub. Ms. Graduate School of Business Administration. Stanford U., 1987.
40. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
41. Maskin E., Qian Y., Xu C. Incentives, Information and Organizational Form // *The Review of Economic Studies*. – 2000. – No. 67(2). – P. 359–378.

42. Melman S. Production and Administration Cost in Relation to Size of Firm // *Applied Statistics*. – 1954. – Vol. 3. No. 1. – P. 1-11.
43. Melumad D. N., Mookherjee D., Reichelstein S. Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // *The RAND Journal of Economics*. – 1995. – Vol. 26. No. 4. – P. 654-672.
44. Mirrlees J.A. The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization // *The Bell Journal of Economics*. – 1976. – Vol. 7. No. 1. – P. 105-131.
45. Mishin S. Optimal Organizational Hierarchies in Firms. – Moscow: Institute of Control Sciences, 2005.
46. Myerson R.B. Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problem // *The Journal of Mathematical Economics*. – 1982. – No. 10. – P. 67-81.
47. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991.
48. Penrose E. Limits to the Growth and Size of Firms // *The American Economic Review*. – 1955. – Vol. 45. No. 2. – P. 531-543.
49. Penrose E. The Theory of the Growth of the Firm. – N.Y.: John Wiley & Sons, Inc, 1959.
50. Qian Y. Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy // *The Review of Economic Studies*. – 1994. – Vol. 61. No. 3. – P. 527–544.
51. Qian Y., Roland G., Xu C. Coordinating Changes in M-form and U-form Organizations. – Mimeo, Stanford University, ECARE and LSE, 1997.
52. Radner R. The Organization of Decentralized Information Processing // *Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories*. Murray Hill, NJ, 1989.
53. Radner R. Hierarchy: The Economics of Managing // *The Journal of Economic Literature*. – 1992. – Vol. 30. No. 3 – P. 1382–1415.
54. Radner R., Van Zandt T. Information Processing in Firms and Returns to Scale // *Annales d'Economie at de Statistique*. – 1992. – Vol. 25/26. – P. 265-268.
55. Radner R. The Organization of Decentralized Information Processing // *Econometrica*. – 1993. – Vol. 61. No. 5. – P.1109–1146.

56. Roberts D.R. A General Theory of Executives Compensation Based on Statistically Tested Propositions // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1956. – Vol. 70. No. 2 – P. 270-294.
57. Robinson A. The Problem of Management and the Size of Firms // *The Economic Journal*. – 1934. – Vol.44. No.174. – P.242-257.
58. Rosen S. Authority, Control, and the Distribution of Earnings // *The Bell Journal of Economics*. – 1982. – Vol. 13. No. 2. – P. 311-323.
59. Ross N.S. Management and the Size of the Firm // *The Review of Economic Studies*. – 1952. – Vol. 19. No. 3. – P. 148-154.
60. Sah R.K., Stiglitz J.E. The Architecture of Economic Systems: Hierarchies and Polyarchies // *The American Economic Review*. – 1986. – Vol. 76. No. 4. – P. 716-727.
61. Sah R.K., Stiglitz J.E. Committees, Hierarchies and Polyarchies // *The Economic Journal*. – 1988. – Vol. 98. No. 391. – P. 451-470.
62. Sah R. K., Stiglitz J.E. The Quality of Managers in Centralized Versus Decentralized Organizations // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1991. – Vol. 106. No. 1. – P. 289-295.
63. Simon H.A. The Compensation of Executives // *Sociometry*. – 1957. – Vol. 20. No. 1. – P. 32-35.
64. Simon H. Administrative behavior. 3-rd edition. – N.Y.: Free Press, 1976.
65. Singh N. Monitoring and Hierarchies: The Marginal Value of Information in a Principal-Agent Model // *The Journal of Political Economy*. – 1985. – Vol. 93. No. 3. – P. 599-609.
66. Van Zandt T. Efficient Parallel Addition // *Unpub. ms. AT&T Bell Laboratories*, Murray Hill, NJ, 1990.
67. Van Zandt T. Continuous Approximation in the Study of Hierarchies // *RAND Journal of Economics*. – 1995. – Vol. 26. No. 4. – P. 575–590.
68. Van Zandt T. Hierarchical Computation of the Resource Allocation Problem. mimeo, 1994.
69. Williamson O. Hierarchical Control and Optimal Firm Size // *The Journal of Political Economy*. – 1967. – Vol. 75. No. 2. – P. 123-138.
70. Williamson O. Markets and Hierarchies. – New York: Free Press, 1975.

71. Zhou X. CEO Pay, Firm Size, and Corporate Performance: Evidence from Canada // *The Canadian Journal of Economics*.– 2000. – Vol. 33. No. 1. – P. 213-251.
72. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971.
73. Андреев А. А., Кузьмин Ю. Н., Савин А. Н. Функциональные уравнения. – Самара: Пифагор, 1997.
74. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Иностранная литература, 1962.
75. Бурков В.Н., Дзюбко С.И., Ягупов А.А. Эффективный алгоритм решения одного частного случая обобщения задачи о камнях // *Автоматика и Телемеханика*. – 1995. №6. – С. 124-130.
76. * Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999.
77. * Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.
78. Ван Г.Д. Общая прикладная теория систем. – М.: Мир, 1981.
79. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1983.
80. Власюк Б.А., Моросанов И.С. Синтез иерархической структуры управления в больших системах // *Автоматика и Телемеханика*. – 1973. №3. – С.110-120.
81. Волкович В.Л., Михалевич В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982.
82. * Воронин А.А., Мишин С.П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // *Вестн. Волг. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика*. – 2001. – С.78-98.
83. * Воронин А.А., Мишин С.П. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // *Автоматика и телемеханика.* – 2002. № 5. – С.120-132.
84. * Воронин А.А., Мишин С.П. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // *Автоматика и телемеханика.* – 2002. №8. – С.136-150.

85. * Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003.
86. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971.
87. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
88. * Губко М.В. Задача теории контрактов для модели «простого» агента // *Управление большими системами*. – 2000. – Вып. 2. – С. 22-27.
89. * Губко М.В., Караваев А.П. Согласование интересов в матричных структурах управления // *Автоматика и телемеханика.* – 2001. №10. – С. 132-146.
90. *Губко М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей // *Автоматика и телемеханика.* – 2002. №12. – С. 116-130.
91. * Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.
92. * Губко М. В., Мишин С. П. Оптимальная структура системы управления технологическими связями // *Материалы международной конференции «Современные сложные системы управления»*. – 2002. – Старый Оскол: СТИ. – С. 50-54.
93. *Губко М.В. Управление организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003.
94. * Губко М.В., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Классификация моделей анализа и синтеза организационных структур // *Управление большими системами.* – 2004. – Вып. 6. – С.5-21.
95. * Губко М.В., Даниленко А.И. Алгоритм поиска оптимальной древовидной иерархии // *Сборник трудов XLVIII научной конференции МФТИ*. – 2005. – М.: МФТИ.
96. Гуриев С.М. Конспекты лекций по теории контрактов. – М.: РЭШ, 2002. (предварительная версия)
97. Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др. Задачи оптимизации иерархических структур. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.

98. * Залесов А.И. Влияние взаимной информированности агентов на оптимальную структуру организации (базовая модель) // *Управление большими системами.* – 2005. – Вып. 10. – С.55-66.
99. * Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003.
100. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
101. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.
102. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. – М:. Физматлит, 2004.
103. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991.
104. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д. Общее решение задачи центр-агент с несимметричной информацией в условиях неопределенности и риска // *ЖВМ и МФ*. – 2000. Т.40. №4. – С. 532-545.
105. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс): Учеб. пособие для вузов. Изд. 20е, испр. и доп. – М.: МФТИ, 2000
106. Крутов Б.П., Новикова Н.М. Теоретико-игровой анализ многоуровневых динамических ИСУ. – М.: ВЦ АН СССР, 1989.
107. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980.
108. Леонтьев С.В. Технология инновационного развития организационной структуры предприятия. – М.: МФТИ, 2000.
109. Оптимальные системы автоматического управления. / Ред. А.М. Лётов. – М.: Наука, 1967.
110. Лучник А.Е., Мишин С.П. Оптимальная многоуровневая организация для частного случая функции затрат. – *Неопубликовано*. 2006.
111. Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978.
112. Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. – М.: Питер, 2001.

113. Михайлов А.П. Модель коррумпированных властных иерархий // *Математическое моделирование*. – 1999. Т.11. №1. – С. 3-17.
114. Михайлов А.П., Савельев А.В. Обоснование макромоделей властных иерархий через их микроописание // *Математическое моделирование*. – 2001. Т.13. №4. – С. 19-34.
115. * Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004.
116. * Мишин С.П. Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // *Автоматика и телемеханика*. – 2004. №5. – С. 96-119.
117. Мишин С.П. Оптимальная норма управляемости для степенной функции затрат // *Автоматика и телемеханика*. – 2006. № 8. – С. 154-168.
118. Мишин С.П. Оптимальность древовидной иерархии управления симметричной производственной линией // *Проблемы управления*. – 2006. №6. – в печати
119. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.
120. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
121. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
122. * Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
123. * Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.
124. * Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003.
125. * Новиков Д.А. Теория управления организационными системами: вводный курс. – М.: ИПУ РАН, 2004.
126. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005.
127. Овсиевич Б.И. Модели формирования организационных структур. – Л.: Наука, 1979.
128. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986.

129. Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: Дело, 2001.
130. Полтерович В.М. Кризис экономической теории // *Доклад на научном семинаре Отделения экономики и ЦЭМИ РАН “Неизвестная экономика”*. – 1997.
131. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.
132. Тамбовцев В.Л. Введение в экономическую теорию контрактов. – М.: ИНФРА-М, 2004.
133. Фатхутдинов Р.А. Инновационный менеджмент. – СПб.: Питер, 2004.
134. Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
135. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. – М.: Наука, 1982.
136. Черемных С.В., Семенов И.О., Ручкин В.С. Моделирование и анализ систем. IDEF-технологии: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2002.
137. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
138. Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. – М.: ГУ ВШЭ, 2002.